

CRECIMIENTO ECONÓMICO, TURISMO Y SOSTENIBILIDAD AMBIENTAL: UN ANÁLISIS DINÁMICO

Martín Alejandro Olivera Berthier

Programa de Maestría en Economía de la Facultad de Ciencias
Económicas, Universidad de la República.

Montevideo - Uruguay

Septiembre de 2021



FACULTAD DE
CIENCIAS ECONÓMICAS
Y DE ADMINISTRACIÓN

DEPARTAMENTO DE
ECONOMÍA



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

CRECIMIENTO ECONÓMICO, TURISMO Y SOSTENIBILIDAD AMBIENTAL: UN ANÁLISIS DINÁMICO

Martín Alejandro Olivera Berthier

Tesis de Maestría presentada al Programa de Maestría en Economía de la Facultad de Ciencias Económicas, Universidad de la República, como parte de los requisitos para la obtención del título de Magíster en Economía.

Director de tesis:

Profesor Titular Dr. Juan Gabriel Brida

Codirector de tesis:

Profesora Asistente Mag. Verónica Segarra

Director académico:

Profesor Titular Dr. Juan Gabriel Brida

Montevideo - Uruguay

Septiembre de 2021

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Profesor/a Dr.

Profesor/a Dr.

Profesor/a Dr.

Montevideo - Uruguay

Septiembre de 2021

Agradecimientos

Se agradece a todos aquellos que formaron parte directa o indirectamente del proceso de desarrollo de este documento. A todo el equipo que formó parte de la Maestría en Economía (FCEA – Udelar), y en particular a quienes dirigieron esta tesis, el Prof. Gabriel Brida y la Profa. Verónica Segarra, así como a aquellos que colaboraron con aportes y distinciones a lo largo del trabajo. En particular quisiera agradecer a los profesores: Gastón Cayssials, Pilar Lorenzo y Emiliano Álvarez. Los errores que aún persistan en este trabajo son de mi entera responsabilidad.

Resumen

En el último período, ha sido creciente el estudio del sector turístico visto desde la óptica de la economía aplicada. Más recientemente, se ha observado la necesidad de internalizar factores medioambientales en el análisis a fin de discernir sobre la verdadera relación entre el turismo y el crecimiento económico. Debido a que la mayoría de los estudios son de carácter empírico siendo escasos los que utilizan modelos teóricos de crecimiento económico, este trabajo propone contribuir en esa línea formulando un modelo dinámico de crecimiento guiado por el turismo cuando se incorpora la dimensión ambiental en la toma de decisiones de los agentes. Metodológicamente, resulta conveniente discutir sobre la naturaleza de la variable tiempo en estudios económicos y se resuelve considerar dicha variable como una variable discreta. Por ello se utilizan técnicas de programación dinámica para la resolución de la propuesta. En líneas generales se observa: que existe cierta configuración donde el capital físico y natural generan valor agregado a la economía; y que existe un único equilibrio de estado estacionario, con carácter de punto silla con una variedad estable de dimensión 3 y una variedad inestable de dimensión 2.

Palabras clave: Turismo; Sostenibilidad Ambiental; Crecimiento Económico; Programación

Dinámica

Clasificación JEL: C61, C62, L83, O41, Q51

Abstract

In recent years, the study of the tourism sector seen from the perspective of applied economics has been growing. More recently, the need to internalize environmental facts in the analysis in order to discern the true relationship between tourism and economic growth has been observed. Due to the fact that most of studies are naturally empirical and, there are few ones that use theoretical models of economic growth, this work seeks to contribute in this way by formulating a dynamic growth model guided by tourism when the environmental dimension is incorporated in the decision-making process. agent decisions. Methodologically, it is convenient to discuss the nature of the time variable in economic studies and it is resolved considering this variable as a discrete one. For this reason, dynamic programming techniques are used to solve the proposal. Some general outlines are observed: there is a certain configuration where physical and natural capital generate added value to the economy; and there is a single steady state equilibrium, with a saddle point character with a stable manifold of dimension 3 and an unstable manifold of dimension 2.

Keywords: Tourism, environmental sustainability; economic growth; dynamic programming

JEL Codes: C61, C62, L83, O41, Q51

Tabla de Contenido

| | | |
|------|--|----|
| 1. | <i>Introducción</i> | 1 |
| 2. | <i>Revisión de Antecedentes</i> | 4 |
| 2.1. | <i>Antecedentes Empíricos</i> | 4 |
| 2.2. | <i>Antecedentes Teóricos</i> | 5 |
| 2.3. | <i>Contribución a la literatura</i> | 7 |
| 3. | <i>Pregunta de Investigación e hipótesis</i> | 9 |
| 4. | <i>Marco conceptual</i> | 10 |
| 5. | <i>El Modelo</i> | 14 |
| 5.1. | <i>Set-up de las firmas</i> | 14 |
| 5.2. | <i>Equilibrio competitivo del mercado turístico</i> | 16 |
| 5.3. | <i>Set-up de los consumidores</i> | 19 |
| 5.4. | <i>Optimización de los consumidores: programación dinámica y ecuación de Bellman</i> | 21 |
| 5.5. | <i>Dinámica del sistema de optimización de los consumidores</i> | 24 |
| 5.6. | <i>Equilibrios de estado estacionario</i> | 24 |
| 5.7. | <i>Representación canónica del sistema dinámico</i> | 26 |
| 5.8. | <i>Estabilidad en torno al estado estacionario</i> | 28 |
| 6. | <i>Comentarios finales</i> | 32 |
| 7. | <i>Limitaciones y extensiones del trabajo</i> | 36 |
| | <i>Referencias</i> | 38 |
| | <i>Anexo</i> | 45 |
| | <i>Derivadas parciales de las funciones implícitas</i> | 45 |
| | <i>Raíces del polinomio característico</i> | 46 |

1. Introducción

Desde ya hace algunos años, el estudio del sector turístico ha tomado creciente importancia en el ámbito de las ciencias económicas desde diferentes ópticas. Sin embargo, estas mantienen y deben mantener cierta interconexión para que el estudio del sector turístico aporte información. Desde la estadística, es notorio el esfuerzo de los países por mantener de la mejor forma posible la contabilidad en términos de cantidad de arribos, gastos o inversiones de origen foráneo. Desde el año 1995 distintos organismos han dedicado esfuerzos a elaborar fuentes de información que recoja datos de arribos, especialización turística, gasto, etc., para una gran cantidad de países del mundo. La economía recoge esta información y aporta brindando un análisis riguroso de la coyuntura del sector y los distintos impactos que puede tener en diversas variables macroeconómicas de las naciones y cómo generar políticas públicas en pro de potenciar la actividad nacional o regional. Esto no sería del todo factible si no se integran estas ideas con una buena gestión y administración de las organizaciones que se encargan de producir bienes y sobre todo, servicios turísticos.

Existen diversos estudios empíricos que han realizado esfuerzos por encontrar la existencia de cierto impacto que la actividad turística puede tener, por ejemplo, en el crecimiento económico de los países. Balaguer y Cantavella (2002) son pioneros en formalizar los esbozos anteriores por encontrar ciertas correlaciones y/o causalidades existentes entre el nivel de actividad de las economías y el desarrollo del sector turístico. Los autores desarrollaron lo que actualmente es conocida como la hipótesis del turismo como potenciador del crecimiento (TLGH, por sus siglas en inglés, Tourism-Led Growth Hypothesis). Esta teoría plantea no solo una relación entre el turismo y el crecimiento económico sino también la existencia de un vínculo causal, el cual se da en un sentido desde el turismo hacia el crecimiento económico.

Desde la TLHG se han desarrollados diversos trabajos de índole empírico para el contraste de la teoría en el marco de distintos países o regiones, a partir del uso de distintas metodologías y fuentes de datos (Castro-Nuño et al., 2013; Jiménez García, et al., 2015; Brida, et al., 2016; Brida, et al, 2017; Seetanah et al., 2017; Chingarande y Saayman, 2018;

Li et al., 2018; Comerio y Strozzi, 2019; Fonseca y Sánchez-Rivero, 2020).

En particular, los estudios que vinculan el turismo junto con cuestiones ambientales se basan en contrastaciones empíricas, pero ninguna desarrolla una teoría de fondo que muestre el sistema dinámico conformado por estas variables y como este puede o no, generar condiciones de equilibrio de largo plazo.

En relación a la calidad ambiental existen estudios que muestran la relación existente entre esta y el crecimiento económico. En particular, la conocida hipótesis de la curva ambiental de Kuznets propone una relación de U-invertida entre el ingreso de los países y su degradación ambiental. Sin embargo, Angulo (2010) muestra que la mayor parte de la población mundial se encuentra aún en el tramo creciente de la CKA. Sunkel y Gligo (1980) y Gligo (1993) plantean evidencia para América Latina de una gran degradación ambiental desde 1940 a esta parte, conjuntamente con un período de expansión global de la región, lo que daría algún primer indicio de la relación (al menos de asociación) entre estas variables.

Cuando se consideran los tres indicadores de forma conjunta, existe un consenso del vínculo de asociación que el turismo, el crecimiento y el medio ambiente mantienen, y sobre todo de cómo la incorporación de la dimensión ambiental interviene en el análisis de la TLGH. En la siguiente sección se detallan los resultados encontrados desde esta perspectiva.

En suma, a partir de las observaciones tanto teóricas como empíricas, el objetivo general de este trabajo es a partir de un modelo dinámico de crecimiento económico, generalizar de forma teórica la relación existente entre el turismo y el crecimiento económico incorporando la noción de sostenibilidad ambiental, para el caso de economías especializadas en el sector turístico.

En lo que resta del trabajo, en la sección 2 se exhibe una revisión exhaustiva de la literatura existente en términos de crecimiento-turismo-medio ambiente, donde se distinguen aquellos estudios empíricos de los teóricos, finalizando con la contribución a la literatura de este trabajo. En la sección 3 se formula la pregunta de investigación y la hipótesis que orientan esta investigación. La cuarta sección expone algunos lineamientos conceptuales necesarios para enmarcar este estudio. En la sección 5 se desarrolla metodológicamente la propuesta realizada a partir de métodos dinámicos y modelos de

crecimiento. La sección 6 desarrolla algunos comentarios finales y conclusiones; mientras que la sección 7 discute sobre algunas posibles extensiones y limitaciones del trabajo.

2. Revisión de Antecedentes

Existen diversos trabajos que se han encargado de estudiar al sector turístico y su impacto en el crecimiento económico, así como también el rol que juega la polución en estos. Sin embargo, la mayoría de los trabajos son de orden empírico aplicados estudios de casos o regiones. Son escasos aquellos que estudian de forma teórica, como pretende este trabajo, la relación entre el turismo y el crecimiento económico, y aún son más escasos los que incorporan cuestiones ambientales. Debido a esto se presenta una revisión discriminando según estas categorías a fin de observar los distintos objetivos, metodología y resultados, y como interactúa la literatura a fin de desprender un problema de investigación a estudiar.

2.1. Antecedentes Empíricos

Durante el último tiempo, muchos esfuerzos se han realizado a fin de contrastar la TLHG de forma empírica. En particular, jerarquizando la literatura y tomando el caso de América Latina y el Caribe hay autores que encuentran que la TLGH se verifica, es decir, que el turismo genera impactos positivos en términos de crecimiento económico (Gardella y Aguayo, 2002; Brida, et al, 2015; Muslija, et al., 2017; Chiu y Yeh, 2017; Mitra, 2019; Eyuboglu y Eyuboglu, 2019; Ramirez, 2006; Brida, et al., 2008; Brida, et al., 2008; Croes y Vanegas, 2008; Brida y Risso, 2009; Brida, et al., 2009; Brida y Monterubbiansi, 2010; Brida, et al., 2010; Brida, et al., 2011; Rosero-Barzola y Zuñiga-Contreras, 2014). En contrapartida, otros avanzan aún más y encuentran que el sentido de la relación entre estos indicadores se da en ambos sentidos, es decir, además de la TLHG verifican que el crecimiento económico potencia al sector turístico (Eugenio-Martín y Martín-Morales, 2004, Lee y Chang, 2008; Apergis y Payne, 2012; Risso, 2018; Cruz-Chavez, et al., 2016; Gharthey, 2013; Ridderstaat, et al., 2013; Amaghionyeodiwe, 2012; Jackman, 2012; Lorde, et al., 2011). A partir de estas referencias se puede destacar la importancia en el rol del turismo como agente dinamizador de la actividad económica y más aún en aquellas economías cuya actividad principal se basa en el sector turístico o que su rendimiento turístico es alto en términos de los distintos indicadores de turismo, como los arribos o el gasto, como el caso de los países del caribe (Brida et al., 2021).

Debido a la importancia de los factores ambientales como determinantes del crecimiento económico, muchos estudios también han realizado estos esfuerzos contrastando la relación entre éste y algún indicador ambiental. Hay autores que encuentran a partir de un análisis de series temporal o de datos panel que el crecimiento económico fomenta la degradación ambiental (Azam, 2016; Antonakakis et al, 2017; Wawrzyniak y Doryn, 2020; Al Mulali, 2014; Gomez y Rodriguez, 2016; Dutta y Das, 2016; Ozturk, 2017; Dang, et al., 2018; Ben Jelbi, et al., 2019; Zafar, et al., 2019; Patiño, et al., 2019) o viceversa, que los niveles de polución causan en cierta medida fluctuaciones en el crecimiento económico (Salazar-Nuñez, et al., 2020; Balado-Naves, et al., 2018; Apergis y Payne, 2015; Al Mulali, et al., 2015; Apergis y Payne, 2014; Pao y Tsai, 2011; Apergis y Payne, 2009). Sin embargo, algunos van más allá y testean la forma de la relación causal hipotetizando sobre el cumplimiento de la CKA (Galeotti et al., 2009; Saboori et al, 2012; Shahbaz et al, 2013; He et al, 2017; Acheampong , 2018; Munir et al, 2020; Al Mamun, 2014).

En esta línea Akbar, I., et al (2019) y Usma, O., et al (2019) argumentan la importancia del rol de las instituciones y la formulación de políticas públicas en el sentido de potenciar el turismo sin generar desutilidades en los consumidores residentes. En línea a intentar incorporar la sostenibilidad ambiental en el desarrollo de la actividad turística, Balsalobre-Lorente, D., et al. (2020), Balsalobre-Lorente, D y Leitao, N. (2020) y Khalid, M., et al. (2020) encuentran que existe una relación de U-invertida entre el nivel de turismo y la degradación ambiental y que cuando esta última se incorpora en el análisis, se sigue verificando la TLHG. Sin embargo, la globalización parece no contribuir con esta política de turismo sostenible ya que siguiendo a Sharif, A. et al (2020, I y II) encuentran que, aunque la forma de U-invertida se observa entre el turismo y la degradación ambiental, el proceso de globalización conllevaría a que la relación se torne positiva. Por tanto, podría ser relevante estudiar si estos resultados se atribuyen únicamente a casos particulares o pueden ser generalizables considerando un sector turístico cualquiera controlado por la degradación ambiental, y como este interactúa en el crecimiento económico.

2.2. Antecedentes Teóricos

Por otro lado, complementario a los antecedentes mencionados previamente se encuentran aquellos autores que dedican sus esfuerzos a un desarrollo teórico del estudio de

la dinámica del turismo y sus impactos en el crecimiento económico y sus consecuencias en otros sectores (ej, consecuencias ambientales, efectos en el mercado de trabajo, etc.). Esta literatura teórica no se encuentra muy desarrollada en el ámbito académico y la literatura existente se centra en algunos pocos autores. Sin embargo, sus aportes parecen ser contundentes, con gran validación empírica y un desarrollo metodológico muy riguroso para el estudio dinámico del turismo. En esta subsección se propone repasar más a fondo estos estudios, las estrategias teóricas y metodológicas adoptadas y los principales resultados obtenidos.

En el año Schubert y Brida (2009a, 2009b). desarrollan un modelo teórico dinámico donde se modeliza la oferta y la demanda de servicios turísticos para economías pequeñas con consumidores y empresas. Un claro ejemplo de este tipo de economías especializadas en turismo y pequeñas pueden ser las islas del caribe o países como Uruguay (que reciben casi un turista por habitante). El principal resultado de este trabajo plasma que el crecimiento de largo plazo de las economías está ligada al crecimiento de la demanda de servicios turísticos. Por otro lado, una mejora en términos de crecimiento de la demanda de servicios turísticos permite mejorar los términos de intercambio, y que mejoras en el ingreso del resto del mundo permite mejorar el bienestar de la economía. En esta línea, estos trabajos contribuyen a una primera aproximación de los determinantes del crecimiento guiado por el turismo donde el ingreso extranjero y el nivel de precios parecen relevantes. Además, en esta línea de los determinantes del crecimiento a partir del turismo, Albaladejo, I. et al (2013, 2014, 2015) contribuyen observando que el sector turístico muestra tasas de crecimiento iguales a la evolución de la tecnología (sector I+D) y que este explica al crecimiento económico no directamente sino a través de canales como el tipo de cambio real (factor relevante en la dinámica turística). Además, otro estudio de las mismas autoras encuentra que el turismo potencia el crecimiento a través del consumo debido a que la tasa de crecimiento del consumo se incrementa a mayor producción turística y menores precios internos.

Sin embargo, los trabajos anteriores no incorporan en demasía dimensiones de índole ambiental en su marco analítico. En esta línea Rigalli-Torrent (2008) sí las incorporan a partir de la generación de externalidades ambientales negativas del sector turístico vista como la provisión de un bien público, concluyendo que cuando se incorpora un correcto suministro del bien público generado del desarrollo de la actividad turística y sus impactos

ambientales contribuyen a un turismo más sustentable.

Cerina (2007) también trabaja con el turismo y la sostenibilidad ambiental pero visto desde una perspectiva de demanda, haciendo especial foco en la utilidad de los consumidores (turistas). La contribución de Cerina a este trabajo se basa en una nueva propuesta de nueva función de utilidad de los consumidores donde se considera el consumo y la calidad ambiental. Una de las conclusiones propuestas por el autor es que al definir las condiciones en las que el desarrollo turístico, las mejoras en la calidad ambiental y el crecimiento económico pueden ocurrir simultáneamente, el modelo proporciona micro fundamentos teóricos para el turismo. Visto la relevancia de la incorporación ambiental en la modelización del crecimiento guiado por el turismo, Giannoni (2008) incorpora desde el lado de la demanda los efectos de la polución ambiental que genera la producción de bienes y servicios turísticos. Y los resultados que encuentra son innovadores en el sentido que en lugar de encontrar relaciones de equilibrio encuentra que: (i) debe existir un mínimo de polución para que se lleve a cabo la actividad turística y (ii) para que exista un crecimiento positivo se debe incorporar un umbral en los niveles de polución, donde fuera de el mismo la economía no crecerá.

A lo largo de los antecedentes mencionados anteriormente, parecen existir elementos suficientes para creer que el turismo impacta el crecimiento económico y que la sostenibilidad ambiental es un factor determinante de estas dinámicas. Sin embargo, aunque estos modelos son de índole teórico, todos especifican algún tipo de funciones de producción, utilidad, consumo, etc. Sin embargo, podría ser de utilidad incorporar un análisis más general a fin de dar cierto grado de robustez a los resultados encontrados. Recientemente, en esta línea, Schubert y Schamen (2020) utilizan funciones genéricas de producción y encuentran que la producción se ve afectada positiva pero decrecientemente por el turismo, la calidad de las firmas y la calidad promedio de la economía. Sin embargo, no logran concluir acerca de la relación entre la calidad y nivel de turismo, ni entre la calidad y el consumo.

2.3. Contribución a la literatura

En base a lo anterior, aunque parece escasa la literatura existente en materia de turismo y crecimiento económico (con la incorporación de la sostenibilidad ambiental) visto

desde una perspectiva teórica y dinámica, parece existir cierto consenso en la importancia que implican los vínculos entre estas variables y cuáles son los principales determinantes del crecimiento. En particular, cómo la incorporación ambiental puede modificar resultados que a priori, parecerían intuitivos. Es así que, este trabajo pretende contribuir en esta línea especificando un modelo teórico general que incorpore estas dimensiones y logre verificar la existencia de relaciones y equilibrios dinámicos de largo plazo entre estas variables a fin de dar robustez a los resultados encontrados para ejemplos particulares y funciones de producción y utilidad previamente definidas, ampliándolo a un caso más general.

Otra de las contribuciones a la literatura de este estudio se basa en apartarse de la literatura antes revisada y considerar una discusión sobre el rol del tiempo en la modelización económica. En particular, contribuir incorporando la noción del tiempo como una variable discreta en la modelización económica argumentada por las propias características de la medición de datos vinculados al turismo Brida et al. (2014) y Cayssials (2019). Este aspecto se desarrollará con mayor detalle en la sección 4 y será transversal al desarrollo metodológico del trabajo.

3. Pregunta de Investigación e hipótesis

Considerando la relevancia en el estudio del sector turístico desde un enfoque macroeconómico y sus implicancias en el turismo, considerando además las dinámicas ambientales, se desprende la necesidad de investigar a modo general - apartándose de aplicaciones concretas - la influencia de la dinámica del turismo en el crecimiento económico de los países considerando no solo el rendimiento del sector sino también los efectos que este puede absorber debido a las condiciones ambientales de las naciones. Es así que se puede desprender la siguiente pregunta guía de la investigación:

[*Pregunta i*] ¿De qué forma interviene la incorporación de la polución ambiental en la dinámica de una economía liderada por el sector turístico?

Tomando como referencia la pregunta anterior, se puede esgrimir una hipótesis preliminar en función de los resultados que se podrían observar a través del análisis. De esta forma se puede formular la siguiente hipótesis:

[*Hipótesis i*] La incorporación de la polución interviene en la dinámica del crecimiento económico a través del sector turístico de los países, generando perjuicios en el sector turístico y así en la riqueza de los países.

4. Marco conceptual

En esta sección se desarrollan algunos conceptos claves que hacen al entendimiento del problema de investigación a analizar. En primer lugar, se comenta acerca de la *Tourism Led-Growth Hypothesis*, su origen e implicancias en las economías. En segundo lugar, un marco metodológico acerca de la incorporación de la concepción del tiempo como variable discreta propuesta por Brida et al. (2014) y Cayssials (2019).

Si se considera el turismo desde una perspectiva económica o de contabilidad nacional, este se puede interpretar como un flujo de bienes y servicios entre el país de origen y el resto del mundo. Esto implica en términos de la registración de balanza de pagos, flujos de créditos y débitos asociados al rubro viajes de la cuenta corriente de la balanza de pagos.

La globalización, los acuerdos internacionales y la apertura de los mercados permiten poner en marcha este tipo de transacciones. Sin embargo, la apertura comercial con el resto del mundo se intensificó luego de la posguerra donde los países europeos comenzaban a reestructurarse económica y socialmente y a su vez, los países latinoamericanos buscaban alternativas a la salida de un sistema comercial basado en el estatismo y la sustitución de exportaciones que parecía haber llegado a su fin luego de algunos años de bonanza. Más aún, en los últimos cuarenta años, la política económica ha apelado a las exportaciones y a la apertura comercial como fuente de crecimiento económico. Esta alternativa es la que se conoce como *Export-Led Growth Hypothesis*, es decir un crecimiento dirigido a partir de las exportaciones (Palley, 2012).

La globalización y algunos aprendizajes históricos en la última mitad del siglo veinte, dan cuenta de la importancia de la apertura comercial, la difusión tecnológica y los acuerdos internacionales no solo en el crecimiento económico sino también en la economía de forma conjunta. El sector turístico cuenta como un servicio, el cual tiene un gran componente de transacciones entre servidores nacionales y consumidores extranjeros, esto implica una exportación de bienes o servicios o un crédito en la registración contable de la Balanza de Pagos. El desarrollo del sector turístico permite un mayor flujo de exportaciones no solo de bienes y servicios sino también permite la difusión a partir del aprendizaje,

fomentando la inversión, el empleo y así el crecimiento económico. Por tanto, en este contexto surge lo que Balaguer y Cantavella (2002) denominaron *Tourism-Led Growth Hypothesis*, verificando para el caso español relaciones causales donde el turismo internacional potencia el crecimiento económico a partir de los canales antes mencionados y de otros canales propios del desarrollo de una actividad en gran parte exportadora.

La TLGH mantiene sustento teórico desde la perspectiva económica a partir de distintos canales. La actividad turística es generadora de divisas, estimula las inversiones y otros sectores ya sea directa o indirectamente y además contribuye a la generación de empleo. Desde el crecimiento económico hacia el turismo, también puede haber un impacto positivo, debido a que el crecimiento en el producto podría llevar al incremento en el ingreso de las personas, disponiendo de mayores recursos para la actividad turística, al aumento en el tiempo de ocio, al aumento en el turismo de negocios y a una mejora en las oportunidades de transporte y comunicación (Brida, et al., 2008). Por otro lado, destacan la existencia de tres fuentes de contribución del turismo al crecimiento económico. Por un lado, aquellos efectos directos generados por los flujos de bienes y servicios en el mercado turístico final. Estos bienes transados son previamente obtenidos por proveedores y por tanto la fuente generación de valor a partir de la obtención de materias primas que luego se transforma en un bien turístico transable, forma parte de los efectos indirectos. Por último, lo que llaman efectos inducidos que son los relacionados con el gasto realizado por los propietarios y empleados de las empresas (Brida, et al., 2021).

Como se ha desarrollado en la literatura, tanto teórica como empírica, el turismo mantiene fuertes vínculos con el medio ambiente. Esto se debe a que la actividad se desarrolla en ecosistemas que se caracterizan a partir de factores ambientales. A partir de estas observaciones se desarrolla la concepción de *turismo sostenible*. Según la Organización Mundial de Turismo, el turismo sostenible se define como “*el turismo que tiene plenamente en cuenta las repercusiones actuales y futuras, económicas, sociales y medioambientales para satisfacer las necesidades de los visitantes, de la industria, del entorno y de las comunidades anfitrionas*” (OMT, 2005 en London, et al, 2021); aunque desde 1972 en la Conferencia de Estocolmo de las Naciones Unidas se plasma el reconocimiento de la necesidad de aunar los tópicos de desarrollo social, cultural, económico y medioambiental (London, et al, 2021). En este caso de estudio particular, se considera un tipo de turismo caracterizado por actividades de aventura, sol y playa, lo cual

hace que la importancia de los recursos naturales y su sostenibilidad tomen un rol protagónico. De aquí surge el interés de estudiar como los agentes macroeconómicos internalizan estos efectos y reformulan sus esquemas de optimización que derivan en el desarrollo (*crecimiento + sostenibilidad ambiental + calidad de vida*) de la economía.

En particular, el protagonismo del estudio de la sostenibilidad hace más de dos décadas que está de auge a partir de distintos esquemas que se han formulado a nivel internacional en forma de tratados o cumbres internacionales. Incorporar estas nociones en el crecimiento mundial parece relevantes, y así, incorporarlo dentro de los sectores que generan crecimiento (como el turismo) parece una estrategia plausible. Guaita Martínez et al. (2020) postulan que, frente a un indiscutido efecto negativo del turismo sobre el medio ambiente, sobre todo de los países en desarrollo, se han desarrollado una serie de políticas que regulen la actividad turística en pro a mejoras ambientales. London, et al. (2021) reconocen estos efectos nocivos del turismo sobre el medio ambiente desde un mayor consumo del suelo, agua y energía, una mayor generación de residuo, entre otros.

Un último aspecto clave, que contribuye al entendimiento del análisis es el uso de un modelo de crecimiento endógeno con la innovación (en aplicaciones vinculadas al turismo) de discretizar la variable tiempo y considerar un crecimiento decreciente de la población.

En el marco de los modelos de crecimiento se encuentra la concepción de un sistema dinámico en el cual las variables relevantes del problema forman parte; en este caso se trata de focalizar el estudio en el turismo, el medio ambiente y el crecimiento económico. Al tratarse de un sistema dinámico, el tiempo juega un rol central en el análisis. Sin embargo, a esta variable se la puede considerar como continua o como discreta (en la semirrecta positiva) generando así discrepancias en los resultados encontrados según la decisión metodológica escogida en este marco (Cayssials, G., 2019)¹.

¹ En particular, en el marco de los sistemas dinámicas, el mismo estudio encuentra que, un mismo sistema que considerando al tiempo como una variable continua encuentra la convergencia a un equilibrio de forma monótona, mientras que, si esta variable se discretiza, hay posibilidad de generar un sistema caótico no convergente. Por mayor detalle metodológico a este respecto, ver Lomeli y Rumbos (2003).

Además, desde un punto de vista de las ciencias económicas, la contabilidad del turismo a nivel macroeconómico de los países suele medirse con frecuencia anual generando así intervalos discretos en los números naturales. Debido a este punto y a la falta de consenso acerca de la medición del tiempo y las consecuencias en términos de política económica que estas discrepancias podrían causar, este trabajo propone contribuir a la literatura aportando una visión del turismo y el crecimiento económico considerando al tiempo como una variable discreta.

5. El Modelo

5.1. Set-up de las firmas

Así como el concepto de turismo ha evolucionado durante el tiempo, abarcando áreas como el ocio, los negocios e incluso el turismo médico, también el rol del medio ambiente y los recursos naturales han tomado un rol central, conceptualizando la noción de *turismo sostenible*. (London, et al., 2021)

Según la Organización Mundial de Turismo (2005) concibe al turismo sostenible como un turismo que “tiene plenamente en cuenta las repercusiones actuales y futuras, económicas, sociales y medioambientales para satisfacer las necesidades de los visitantes, de la industria, del entorno y de las comunidades anfitrionas.” En economía, la noción del turismo sostenible ha sido tratada desde un enfoque de externalidades y bienes públicos formulando políticas públicas que fomenten la internalización de los efectos medioambientales por parte de los agentes que participen en la economía.

El siguiente modelo de crecimiento guiado por el turismo² a desarrollar se sustenta en el supuesto central de caracterizar a economías pequeñas y dependientes del resto del mundo. En el mercado internacional toman indicadores como la tasa de interés como dado por los niveles internacionales. Se supone adicionalmente que existen consumidores homogéneos e idénticos entre sí y empresas que comparten las mismas características. La economía descrita, al ser pequeña, se supone que se especializa únicamente en el sector turístico y basada en los recursos naturales, y, por tanto, el consumo y la inversión son de origen foráneo. Los recursos naturales antes descritos se caracterizan por ser recursos rivales y no excluibles. A partir de considerar el conjunto homogéneo e idéntico de empresas la ecuación (1) formula la tecnología con la cual se ofrecen bienes y servicios turísticos.

$$Ts_t = Ts(A, E_t, K_t, N_t) = AE_t^\omega K_t^\eta N^{1-\eta}; \omega > 0; 0 < \eta < 1 \quad (1)$$

² En primera instancia se refiere a un turismo del tipo “sol y playa” o turismo de aventura que utiliza intensamente recursos naturales.

Por simplicidad, se supone que el nivel tecnológico A y el nivel de población N es exógeno e invariante en el tiempo. Se tiene un stock de capital físico K y capital natural E .

Sin pérdida de generalidad, se asumirá que la función de oferta de bienes y servicios turísticos es homogénea de grado 1; también, tanto el trabajo como el capital afectan de forma positiva a la oferta turística, con rendimientos crecientes y rendimientos marginales decrecientes, que además cumplen las condiciones de Inada.

$$Ts(A, E, \lambda k \lambda N) = \lambda Ts(A, E, K, N) \quad (2)$$

$$\frac{\partial Ts(A, K, N)}{\partial K} > 0 \quad ; \quad \frac{\partial Ts(A, K, N)}{\partial N} > 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 Ts(A, K, N)}{\partial K^2} < 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 Ts(A, K, N)}{\partial N^2} < 0 \quad (4)$$

$$\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial Ts(A, K, N)}{\partial K} = \lim_{N \rightarrow 0} \frac{\partial Ts(A, K, N)}{\partial N} = +\infty \quad (5)$$

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\partial Ts(A, K, N)}{\partial K} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\partial Ts(A, K, N)}{\partial N} = 0 \quad (\text{Condiciones de Inada}) \quad (6)$$

En contrapartida a la oferta turística, existe una demanda de estos bienes y servicios turísticos ofrecidos en la economía. De forma general, en base a la literatura revisada y en particular a Brida, et al. (2011) y Giannoni, (2008), se puede formular la siguiente función de demanda turística.

$$Td_t = Td(Yf_t, K_t, N_t, P_t, q_t) = E_t^\alpha N_t^\psi P_t^{-\phi} q_t^{-\varepsilon} Yf_t^\gamma; \quad \alpha, \psi, \phi, \varepsilon, \gamma > 0 \quad (7)$$

La ecuación (7) muestra la demanda de bienes y servicios turísticos. Esta función, al tratarse de una modelización del sector turístico del tipo “sol y playa” incorpora positivamente la valoración del capital natural en la demanda de bienes y servicios turísticos. Por otro lado, la cantidad y calidad de servicios ofrecidos se puede recoger a partir de la cantidad de trabajadores en el sector (que coincide con el nivel poblacional). Sin embargo, se incorporan otros determinantes de demanda como lo son el ingreso del resto del mundo, Yf , el cual en primera instancia, por simplicidad, se supondrá constante en el tiempo y exógeno; el nivel de polución ambiental P (debido a que los consumidores valoran negativamente la polución) y el nivel general de precios internos q , ambos afectando de

forma negativa los niveles de demanda (en el caso de la polución debido a potenciales deterioros en la calidad de los bienes y servicios que impliquen una sustitución por parte de los turistas respecto a otro destino y que por lo tanto la demanda de turismo en esta economía se perjudique).

Considerando los insumos anteriores y bajo una estructura de mercado perfectamente competitivo, el nivel general de precios internos de la economía se desprende de la condición de equilibrio de mercado:

$$Ts_t = Td_t \quad \Rightarrow \quad q_t = q(A, E_t, K_t, N, P_t, Yf) \quad (8)$$

Debido a que la economía se especializa en la comercialización de bienes y servicios turísticos, la producción agregada de la economía surge del nivel de precios interno y del volumen ofrecido por el sector turístico:

$$Ts_t q_t = Y_t = Y(A, E_t, K_t, N, P_t, Yf) \quad (9)$$

5.2. Equilibrio competitivo del mercado turístico

Como se mencionó anteriormente, bajo un esquema perfectamente competitivo, se cumple la condición de equilibrio del mercado donde toda la oferta turística es cubierta por una demanda.

$$\begin{aligned} Ts_t &= Td_t \\ AE_t^\omega K_t^\eta N^{1-\eta} &= E_t^\alpha N^\psi P_t^{-\phi} q_t^{-\varepsilon} Yf^\gamma \\ q_t &= A^{\frac{-1}{\varepsilon}} K_t^{\frac{-\eta}{\varepsilon}} E_t^{\frac{\alpha-\omega}{\varepsilon}} N^{\frac{\psi+\eta-1}{\varepsilon}} P_t^{\frac{-\phi}{\varepsilon}} Yf^{\frac{\gamma}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$Y_t = Ts_t * q_t = AE_t^\omega K_t^\eta N^{1-\eta} A^{\frac{-1}{\varepsilon}} K_t^{\frac{-\eta}{\varepsilon}} E_t^{\frac{\alpha-\omega}{\varepsilon}} N^{\frac{\psi+(1-\eta)(\varepsilon-1)}{\varepsilon}} P_t^{\frac{-\phi}{\varepsilon}} Yf^{\frac{\gamma}{\varepsilon}}$$

$$Y_t = A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Yf^\sigma \quad (11)$$

$$\Delta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}; \Sigma = \frac{\alpha - \omega + \varepsilon\omega}{\varepsilon}; \Omega = \frac{\varepsilon\eta - \eta}{\varepsilon}; \Phi = \frac{\psi + (1 - \eta)(\varepsilon - 1)}{\varepsilon}; \varphi = \frac{-\phi}{\varepsilon}; \sigma = \frac{\gamma}{\varepsilon}$$

A partir de la función de producción agregada derivada en la expresión (11) se pueden realizar algunos comentarios preliminares vinculados a los determinantes del crecimiento económico y sus consecuencias:

- La teoría neoclásica del crecimiento de Solow-Swan concluye que el crecimiento no se da de forma endógena, sino que surge de la acumulación de capital físico. Esto es resultado fruto de una función de producción guiada por capital físico y trabajo, con tecnología exógena. En esta línea, bajo este contexto, existe un crecimiento económico guiado por la acumulación de capital físico en la expresión (11) si el parámetro asociado al capital físico, Ω , es estrictamente positivo. En esta línea:
 - $\Omega > 0 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon\eta - \eta}{\varepsilon} > 0 \Leftrightarrow \varepsilon > 1$. Lo anterior implica que bajo un contexto de crecimiento económico guiado por la acumulación de capital físico, se tiene que los bienes y servicios turísticos comercializados en la economía son bienes elásticos.
 - En caso contrario, si no hay crecimiento derivado de la acumulación de capital físico, se tiene que $0 < \varepsilon < 1$. Lo que se deduce que los bienes y servicios turísticos son bienes inelásticos.

De lo anterior, se pueden desprender algunos resultados adicionales.

- En esta propuesta se tiene que debido a las condiciones propias de la economía descrita donde se desarrollan actividades turísticas, especialmente del tipo turismo de relajación, o de sol y playa o aventura, se puede vislumbrar la importancia de incorporar no solo el capital físico para el proceso productivo, sino también la disponibilidad de capital natural que fomente y genere una oferta adicional guiada por este tipo de capital que implique una mayor demanda que genere crecimiento económico a partir del desarrollo de la actividad turística. En esta línea y realizando un razonamiento análogo al ítem anterior, existe un crecimiento económico guiado de la acumulación del capital natural, si su parámetro asociado en la expresión (11) es estrictamente positivo:

$$\Sigma > 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha - \omega + \varepsilon\omega}{\varepsilon} > 0. \text{ De aquí, un par de comentarios:}$$

- Si existe adicionalmente, crecimiento guiado de la acumulación de capital físico, se tiene que los bienes y servicios turísticos son bienes de lujo y por lo tanto, se tiene que también existe un crecimiento guiado de la acumulación de capital natural.

- De no existir crecimiento guiado de la acumulación de capital físico, se tiene que el bien inelástico y se encuentra comprendido en el rango: $0 < \varepsilon < 1 - \frac{\alpha}{\omega}$. Adicionalmente, se tiene que la importancia relativa del capital natural es mayor desde el lado de la producción que desde la demanda de bienes y servicios turísticos: $\omega > \alpha$.
- Conclusiones análogas pueden ser extraídas al analizar la existencia de efectos de escala, donde existan impactos positivos de la cantidad de trabajadores (equivalente al nivel poblacional) en la producción agregada de la economía. De existir crecimiento guiado por la acumulación de capital físico o natural, se verifican dicha premisa, mientras que de no verificarse se obtiene un rango igual al ítem anterior para la elasticidad ingresos y se verifica la relación $\omega > \alpha$.

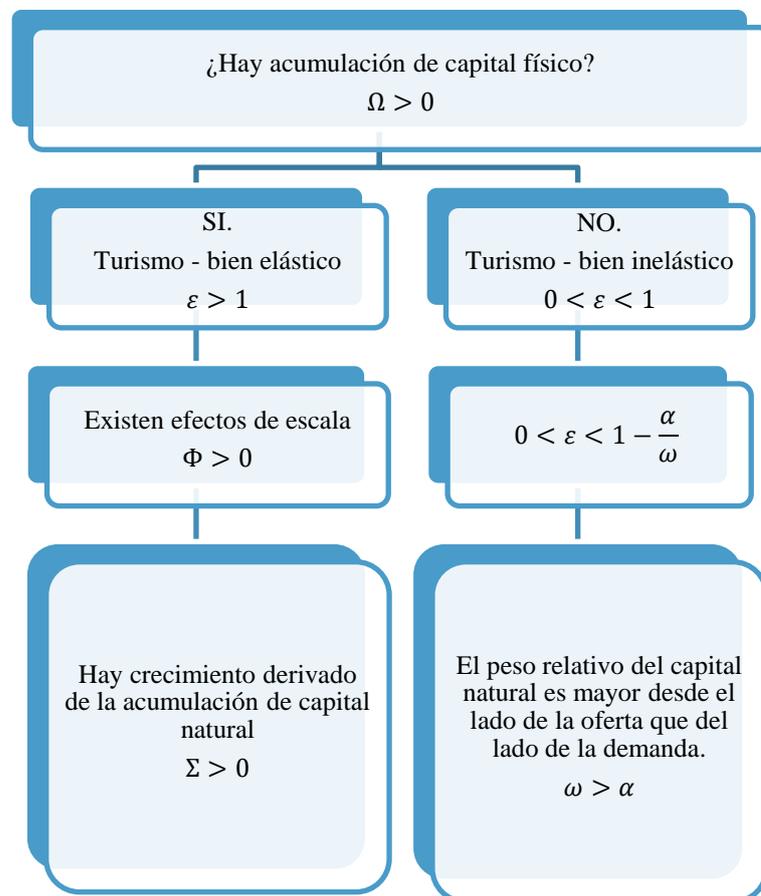


Figura 1: Síntesis de la función de producción agregada.

Fuente: Elaboración propia

5.3. Set-up de los consumidores

Apartándose de la óptica de las empresas que comercializan bienes y servicios turísticos, existen consumidores, que son idénticos entre sí y con comportamiento homogéneo. Estos consumidores, consumen bienes y servicios turísticos de la oferta interna y otro tipo de bienes de origen importado. Gozan de cierta utilidad derivada del consumo, pero esta también se ve alterada debido a factores ambientales que sean contraproducentes en su bienestar – siguiendo a Akbar, I., et al (2019). Los consumidores maximizan intertemporalmente su utilidad a lo largo del tiempo alterado por un factor de descuento intertemporal subjetivo de los consumidores. Como se mencionó anteriormente, en este trabajo se considera el tiempo como una variable discreta que toma valores dentro de los números enteros no negativos. Denotando W al bienestar de los consumidores, se puede representar lo anterior de la siguiente manera:

$$W \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, P_t); \quad 0 < \beta < 1 \quad (12)$$

De la ecuación (6) se tiene que β es el factor de descuento intertemporal de los consumidores³ y C_t, P_t son el consumo y la polución a nivel agregada en cada período de tiempo. Además, se considera que el consumo tiene un efecto positivo, en el nivel de utilidad, pero con utilidad marginal de orden decreciente. No así con el caso de la polución que afecta a los niveles de utilidad de forma negativa.

$$\frac{\partial u(C, P)}{\partial C} > 0; \quad \frac{\partial^2 u(C, P)}{\partial C^2} < 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial u(C, P)}{\partial P} < 0; \quad \frac{\partial^2 u(C, P)}{\partial C^2} < 0 \quad (14)$$

En línea con el análisis de los consumidores (hogares) se tiene que son cada uno propietario de una firma y que, por lo tanto, reciben beneficios derivados de la actividad. El capital disponible en un período determinado está condicionado al nivel de ingresos del período anterior deducidos del nivel de consumo. Además, cuentan con el capital no depreciado del período anterior, donde δ es la tasa de depreciación del capital. Por simplicidad, de aquí en más consideraremos que el nivel de población y el ingreso del resto

³ Se define $\beta = \frac{1}{1+\rho}$, donde ρ refiere a la tasa de descuento intertemporal, con $0 < \rho < 1$.

del mundo son variables exógenas e invariantes en el tiempo ($N_t = N$; $Yf_t = Yf$). Por tanto, la ecuación (15) representa el flujo de recursos de los hogares:

$$K_{t+1} = A^A E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Yf^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t ; 0 < \delta < 1 \quad (15)$$

Adicionalmente, siguiendo a Brida, London, Rojas (2014), se puede considerar una restricción asociada a la disponibilidad, uso y renovación del capital natural, tal como se especifica en la ecuación (16).

$$E_{t+1} = E_t + \zeta E_t (\bar{E} - P_t) ; \zeta > 0 \quad (16)$$

Esta relación se aproxima a partir de la relación de Conrad & Clark (1987) que propone que los recursos naturales se renuevan siempre y cuando los niveles de polución no superen un umbral dado de disponibilidad de recursos \bar{E} . Si se iguala la polución a dicho umbral, el capital natural permanecerá incambiado período a período, de ser menor el nivel de polución, el capital natural se regenerará conforme al capital natural anterior y al ajuste ζ . En caso contrario, el capital natural se reduce en el siguiente período.

En base a lo anterior, el problema del consumidor se puede representar a partir del sistema (17).

$$\max_{C_t, P_t} W \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, P_t); 0 < \beta < 1$$

sujeto a:

$$K_{t+1} = A^A E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Yf^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t; 0 < \delta < 1 \quad (17)$$

$$E_{t+1} = E_t + \zeta E_t (\bar{E} - P_t)$$

$$K(0) > 0 ; E(0) > 0$$

La literatura tradicional en el ámbito de los modelos de crecimiento discute en términos de la especificación de la función de utilidad a considerar. En particular London, et al. (2021) sugieren una especificación logarítmica de la función de utilidad compatibilizando niveles de consumo presente con consumo futuro. Otros autores buscan

incorporar la polución ambiental en la utilidad de los consumidores. Al tratarse de un turismo de aventura y de relajación (“sol y playa”) es plausible pensar en que los consumidores encuentran utilidad derivada de una buena calidad ambiental que permita una mayor y mejor explotación del destino turístico. En línea con esto, Cerina (2007) incorpora esta noción modelando a la utilidad de los consumidores conforme a la expresión (18).

$$u(C_t, P_t) = \ln(C_t) - \theta \ln(P_t) \quad (18)$$

En esta expresión se tiene que la utilidad de los consumidores crece conforme crece el consumo (bajo su transformación logarítmica), sin embargo, encuentran cierto grado de desutilidad derivada de la polución ambiental, siendo θ el grado de desutilidad de los consumidores ante la polución.

5.4. Optimización de los consumidores: programación dinámica y ecuación de Bellman

El problema de maximización anterior puede resolverse utilizando herramientas de programación dinámica. En particular a partir del principio de optimalidad de Bellman reformulando el problema anterior en el siguiente esquema a maximizar:

$$V(K_t, E_t) = \max_{C_t, P_t} \{[\ln(C_t) - \theta \ln(P_t)] + \beta V(K_{t+1}, E_{t+1})\}$$

sujeto a:

$$K_{t+1} = A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t \quad (19)$$

$$E_{t+1} = E_t + \zeta E_t (\bar{E} - P_t)$$

$$K(0) > 0 ; E(0) > 0$$

Soluciones interiores del consumo, la polución, el capital físico turístico y el capital natural pueden derivarse a partir de las condiciones de primer orden del problema anterior:

$$\frac{\partial V(K_t, E_t)}{\partial C_t} = \frac{\partial u(C_t, P_t)}{\partial C_t} + \beta dV(K_{t+1}, E_{t+1}) = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial V(K_t, E_t)}{\partial P_t} = \frac{\partial u(C_t, P_t)}{\partial P_t} + \beta dV(K_{t+1}, E_{t+1}) = 0 \quad (21)$$

$$\frac{dV(K_t, E_t)}{dK_t} = \frac{\partial u(C_t, P_t)}{\partial K_t} + \beta \frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dK_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial K_t} \quad (22)$$

$$\frac{dV(K_t, E_t)}{dE_t} = \frac{\partial u(C_t, P_t)}{\partial E_t} + \beta \frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dE_{t+1}} \frac{\partial E_{t+1}}{\partial E_t} \quad (23)$$

De la expresión (20) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{C_t} + \beta \left[\frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dK_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial C_t} + \frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dE_{t+1}} \frac{\partial E_{t+1}}{\partial C_t} \right] = \\ & = \frac{1}{C_t} - \beta \frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dK_{t+1}} = 0 \Leftrightarrow \frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dK_{t+1}} = \frac{1}{\beta C_t} \end{aligned} \quad (24)$$

De la expresión (21) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{-\theta}{P_t} + \beta \left[\frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dK_{t+1}} PMgP_t + \frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dE_{t+1}} (-\zeta E_t) \right] = 0 \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \frac{1}{\beta \zeta E_t} \left[\frac{PMgP_t}{C_t} - \frac{\theta}{P_t} \right] = \frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dE_{t+1}} \end{aligned} \quad (25)^4$$

A partir de la expresión (22):

$$\frac{dV(K_t, E_t)}{dK_t} = \frac{\beta(PMgK_t + 1 - \delta)}{\beta C_t} \quad (26)$$

Donde $PMgK$ refiere a la productividad marginal del capital físico, es decir a cuanto se incrementa el valor bruto de producción ante incrementos marginales en los niveles de stock de capital físico. En particular: $PMgK_t = \Omega A^\Delta E_t^\Sigma K_t^{\Omega-1} N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma$

Iterando un período hacia adelante:

⁴ $PMgP_t$ refiere a los incrementos en la función de producción ante incrementos marginales de los niveles de polución. $PMgP_t = \varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^{\varphi-1} Y f^\sigma$

$$\frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dK_{t+1}} = \frac{(PMgK_{t+1} + 1 - \delta)}{C_{t+1}} \quad (27)$$

Sustituyendo en lo que se deriva de (24):

$$\frac{C_{t+1}}{(PMgK_{t+1} + 1 - \delta)} = \beta C_t \quad (28)$$

De (28) se deduce que la dinámica del consumo agregado de los consumidores se explica como: en la dinámica óptima, la relación entre la utilidad marginal del consumo entre un determinado período y el siguiente debe ser igual a la tasa a la cual la economía es capaz de transformar dichos bienes y servicios turísticos de un período a otro.

A partir de la expresión (23):

$$\frac{dV(K_t, E_t)}{dE_t} = \beta(1 + \zeta(\bar{E} - P_t)) \frac{1}{\beta\zeta E_t} \left[\frac{PMgP_t}{C_t} - \frac{\theta}{P_t} \right] \quad (29)$$

Iterando un período hacia adelante:

$$\frac{dV(K_{t+1}, E_{t+1})}{dE_{t+1}} = \beta(1 + \zeta(\bar{E} - P_{t+1})) \frac{1}{\beta\zeta E_{t+1}} \left[\frac{PMgP_{t+1}}{C_{t+1}} - \frac{\theta}{P_{t+1}} \right] \quad (30)$$

Sustituyendo en lo que se deriva de (21):

$$\frac{1}{\beta E_t} \left[\frac{PMgP_t}{C_t} - \frac{\theta}{P_t} \right] = \left[\frac{(1 + \zeta(\bar{E} - P_{t+1}))}{E_{t+1}} \right] \left[\frac{PMgP_{t+1}}{C_{t+1}} - \frac{\theta}{P_{t+1}} \right] \quad (31)$$

En esta línea se puede observar a partir de (31) que la dinámica de la polución viene determinada por todas las variables incluidas en el sistema: por el consumo (debido a que se incluye la dinámica de este que a su vez incluye sus valores rezagados, además se encuentra incluido en la productividad marginal de la polución futura la cual depende del capital del período t+1 el cual viene representado por el consumo contemporáneo); por el capital físico natural a partir de la productividad marginal de la polución y de la ecuación de movimiento del capital natural de Conrad y Clark (1987); y por los propios valores rezagados de la polución ambiental.

5.5. Dinámica del sistema de optimización de los consumidores

Así, el sistema que sigue combina las ecuaciones de movimiento de los niveles de consumo, polución (variables de control), capital natural y físico (variable de estado) a partir de un vínculo de valores presente t contra valores futuros $t + 1$:

$$\begin{aligned} \frac{C_{t+1}}{(PMgK_{t+1} + 1 - \delta)} &= \beta C_t \\ \frac{1}{\beta E_t} \left[\frac{PMgP_t}{C_t} - \frac{\theta}{P_t} \right] &= \left[\frac{(1 + \zeta(\bar{E} - P_{t+1}))}{E_{t+1}} \right] \left[\frac{PMgP_{t+1}}{C_{t+1}} - \frac{\theta}{P_{t+1}} \right] \quad (32)^5 \\ K_{t+1} &= A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t \\ E_{t+1} &= E_t + \zeta E_t (\bar{E} - P_t) \end{aligned}$$

Obtenido el sistema dinámico anterior, una primera observación posible refiere al estudio de la existencia de equilibrios de estado estacionario; esto refiere a aquellos valores que resultan de que las variables se mantengan incambiadas período tras período.

5.6. Equilibrios de estado estacionario

Una primera extensión del sistema (32) puede ser el estudio de la existencia de puntos de equilibrio en términos de las dos variables de control y las dos variables de política. Se entiende un punto de equilibrio cuando la variable permanece invariante a lo largo de los períodos. De esta forma:

$$C_{t+1} = C_t = C; P_{t+1} = P_t = P; K_{t+1} = K_t = K; E_{t+1} = E_t = E;$$

Formulando el sistema (32) en términos del estado estacionario, se puede obtener el siguiente el sistema, el cual está compuesto por 4 ecuaciones y cuatro variables (C, P,

⁵ El sistema dinámico conformado cuenta con cuatro ecuaciones de movimiento y cuatro variables endógenas (C, P, K, E). Las restantes variables incluidas en el sistema se consideran exógenas (el ingreso del extranjero, el nivel poblacional y la disponibilidad de tecnología).

K, E). Soluciones de dicho sistema implican los equilibrios de estado estacionarios, los cuales posteriormente serán estudiados a partir de sus características de estabilidad.

$$\frac{C}{(\Omega A^{\Delta} E^{\Sigma} K^{\Omega-1} N^{\Phi} P^{\varphi} Y f^{\sigma} + 1 - \delta)} = \beta C$$

$$\frac{1}{\beta} = [(1 + \zeta(\bar{E} - P))] \quad (33)$$

$$K = A^{\Delta} E^{\Sigma} K^{\Omega} N^{\Phi} P^{\varphi} Y f^{\sigma} - C + (1 - \delta)K$$

$$E = E + \zeta E(\bar{E} - P)$$

A partir de (33) considerando la segunda ecuación del sistema se obtiene una única solución constante para la polución ambiental de la economía.

$$\frac{1}{\beta} = [(1 + \zeta(\bar{E} - P))] \Leftrightarrow P^* = \frac{\beta - 1 + \beta \bar{E} \zeta}{\beta \zeta}$$

La solución estacionaria de los niveles de polución queda determinada, como es intuitivo desde la especificación por el factor de descuento intertemporal, debido a que la polución es un determinante de la utilidad de los consumidores, así como de los parámetros que determinan la dinámica del capital natural derivadas de la restricción de Conrad y Clark (1987).

Considerando la solución anterior, sustituyendo en la última expresión del sistema (33), se tiene que la educación de capital natural en el estado estacionario es:

$$0 = E \left(\frac{1 - \beta}{\beta} \right)$$

A partir de lo anterior, considerando la expresión (17) donde se asume que β pertenece al intervalo cerrado (0, 1), el término entre paréntesis es estrictamente positivo y menor que la unidad. Por tanto, para que se verifique la igualdad anterior, necesariamente debe verificarse que $E^* = 0$.

Es decir que, en equilibrio, la economía agota sus recursos naturales utilizándolos en el proceso productivo y generando condiciones de polución ambiental que destruyan recursos naturales. Esto podría verse explicado por el proceso de globalización que enfrentan los destinos turísticos, donde los recursos naturales característicos de un turismo de sol y playa, no es suficientes, sino que los turistas pueden demandar mayor cantidad de amenidades y servicios, lo cual implique mayores niveles de polución que contrarreste los objetivos iniciales del destino turístico, los recursos naturales.

Ahora, con este resultado obtenido, la primera ecuación de (33) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$C = \beta(1 - \delta)C \Leftrightarrow C^* = 0$$

Nuevamente, de manera análoga a lo anterior, dado que tanto el factor de descuento intertemporal de los consumidores, como la tasa de depreciación del capital físico, son parámetros definidos positivos, la solución trivial es la única que verifica la condición anterior. Esto representa un equilibrio donde el consumo se agota en el equilibrio y se torna nulo. Sería conveniente entonces, estudiar la estabilidad de este equilibrio.

Por último y considerando los equilibrios derivados anteriormente, la tercera ecuación que muestra la dinámica del capital físico en el estado estacionario queda representada como:

$$K = (1 - \delta)K \Leftrightarrow K^* = 0$$

Por tanto, $(C, P, K, E) = \left(0, \frac{\beta^{-1} + \beta \bar{E} \zeta}{\beta \zeta}, 0, 0\right)$ es la única solución determinada del sistema (33) conformando así un punto fijo o equilibrio de estado estacionario en la dinámica de una economía guiada por el turismo y los recursos naturales.

5.7. Representación canónica del sistema dinámico

Retomando el problema (32) que describe las dinámicas de las cuatro variables endógenas del sistema, se puede observar que dichas expresiones no se encuentran expresadas en términos de las variables rezagadas a su período anterior. Es decir, el sistema no se encuentra expresado en forma canónica, donde las variables del sistema estén descriptas como una función de las variables rezagadas. A partir de esto se puede reformular el sistema (32) como:

$$(34)$$

$$\begin{aligned} C_{t+1} &= \beta\{\Omega A^\Delta [E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^\Omega N^\Phi P_{t+1}^\varphi Y f^\sigma + 1 - \delta\} C_t \\ 0 &= [E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)] P_{t+1} [\beta\{\Omega A^\Delta [E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^\Omega N^\Phi P_{t+1}^\varphi Y f^\sigma + 1 - \delta\} C_t] \\ &\quad - [\varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - \theta C_t] - (\beta E_t C_t P_t) [1 + \zeta(\bar{E} - P_t)] \\ &\quad [A^\Delta [E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^\Omega N^\Phi P_{t+1}^\varphi Y f^\sigma - \\ &\quad \theta [\beta\{\Omega A^\Delta [E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^\Omega N^\Phi P_{t+1}^\varphi Y f^\sigma + 1 - \delta\} C_t] \\ K_{t+1} &= A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t \\ E_{t+1} &= E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t) \end{aligned}$$

La segunda expresión del sistema anterior no se encuentra representado a través de su forma canónica expresando la polución en términos de variables pasadas. Para ello se puede utilizar el siguiente lema:

Lema 5.1. En un entorno del punto de equilibrio $X^* = [C^*, P^*, K^*, E^*]$ donde el sistema (33) puede ser representado por su forma canónica, de la forma:

$$X_{t+1} = f(X_t), \text{ donde } X_t = [C_t, P_t, K_t, E_t]$$

Demostración:

Consideremos una función $G: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}_+^4$, dada por:

$$G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \\ G_4 \end{pmatrix} \quad (35)$$

$$G_1 = C_{t+1} - \beta\{\Omega A^\Delta[E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]\}^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\Phi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^{\Omega-1} N^\Phi P_{t+1}^\Phi Y f^\sigma + 1 - \delta\} C_t$$

$$\begin{aligned} G_2 = [E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)] P_{t+1} & [\beta\{\Omega A^\Delta[E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]\}^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\Phi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^{\Omega-1} N^\Phi P_{t+1}^\Phi Y f^\sigma + 1 \\ & - \delta\} C_t] [\varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\Phi Y f^\sigma - \theta\} C_t] - (\beta E_t C_t P_t) [1 \\ & + \zeta(\bar{E} - P_t)] [A^\Delta[E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]\}^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\Phi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^{\Omega-1} N^\Phi P_{t+1}^\Phi Y f^\sigma \\ & - \theta[\beta\{\Omega A^\Delta[E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)]\}^\Sigma [A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\Phi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t]^{\Omega-1} N^\Phi P_{t+1}^\Phi Y f^\sigma + 1 - \delta\} C_t] \end{aligned}$$

$$G_3 = K_{t+1} - A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\Phi Y f^\sigma - C_t + (1 - \delta)K_t$$

$$G_4 = E_{t+1} - E_t + \zeta E_t(\bar{E} - P_t)$$

Se tiene que G es una función diferenciable y $G(X^*, X^*) = (0, 0, 0, 0)$ con determinante no nulo. Entonces bajo este esquema, el Teorema de la Función Implícita es aplicable a fin de obtener una expresión canónica del sistema dinámico. En particular, bajo este marco, se puede reformular el sistema (33) de tal forma que, considerando $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$:

$$\begin{cases} f_1(C_t, P_t, K_t, E_t) = C_{t+1} \\ f_2(C_t, P_t, K_t, E_t) = P_{t+1} \\ f_3(C_t, P_t, K_t, E_t) = K_{t+1} \\ f_4(C_t, P_t, K_t, E_t) = E_{t+1} \end{cases} \quad (36)$$

Así, a partir de lo anterior se logra expresar el sistema dinámico en forma canónica de modo tal que se pueda estudiar la estabilidad de los equilibrios utilizando las derivadas parciales de f_{ij} para cada una de las $i = 1, 2, 3, 4$ funciones y para cada una de las cuatro variables $j = C^*, P^*, K^*, E^*$ entorno a su estado estacionario. Si se considera el sistema dinámico conformado en (34) utilizando (35) y (36) se puede reformular de la siguiente alternativa:

$$\begin{aligned} & (37) \\ & (f_1) - \beta\{\Omega A^\Delta (f_4)^\Sigma (f_3)^{\Omega-1} N^\Phi (f_2)^\varphi Y f^\sigma + 1 - \delta\} C_t = 0 \\ & (f_4)(f_2)(f_1)[\varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - \theta C_t] - (\beta E_t C_t P_t)[1 + \zeta(\bar{E} - \\ & P_t)][A^\Delta (f_4)^\Sigma (f_3)^\Omega N^\Phi (f_2)^\varphi Y f^\sigma - \theta(f_1)] = 0 \\ & (f_3) = 0 \\ & (f_4) = 0 \end{aligned}$$

5.8. Estabilidad en torno al estado estacionario

En lo que sigue, a partir de los equilibrios hallados de estado estacionario (o puntos de equilibrio) parece sensato estudiar qué tan estables son estos equilibrios ante desfases en la dinámica. En particular, permitir algún esbozo de clasificación de los mismos según sean *puntos atractores, repulsores o puntos de ensilladura*.

Para esto es necesario realizar un estudio de los autovalores asociados al sistema dinámico en torno al estado estacionario. Para esto se desarrollará un estudio del determinante de la matriz de derivadas primeras (o matriz jacobiana) asociada al sistema (32) entorno al estado estacionario, a fin de poder dilucidar sus autovalores (o valores propios) y aproximarse al estudio de estabilidad del sistema.

Así, la matriz jacobiana asociada e las dinámicas del sistema entorno al estado estacionario queda de la siguiente forma:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} C_c & C_P & C_K & C_E \\ P_c & P_P & P_K & P_E \\ K_c & K_P & K_K & K_E \\ E_c & E_P & E_K & E_E \end{bmatrix} \quad (38)$$

Donde dentro de la matriz se incluyen las derivadas parciales primeras de cada función del sistema dinámico respecto a cada una de las variables (ej. C_c refiere a la derivada primera del consumo entorno al estado estacionario, respecto del consumo.).

Considerando los equilibrios hallados en la sección anterior $(C, P, K, E) = \left(0, \frac{\beta-1+\beta\bar{E}\zeta}{\beta\zeta}, 0, 0\right)$ se puede considerar la matriz de derivadas parciales valuadas en el estado estacionario. En principio, utilizando las últimas dos expresiones de (34) se puede simplificar la matriz (38) como:

$$\mathbb{J} = \begin{bmatrix} C_c & C_P & C_K & C_E \\ P_c & P_P & P_K & P_E \\ -1 & 0 & 1 - \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} \end{bmatrix} \quad (39)$$

Como se mencionó anteriormente, para el estudio de estabilidad de los equilibrios de estado estacionario es necesario es estudio de los autovalores asociados al sistema dinámico (32) en torno al estado estacionario. Para esto se calcula las raíces del polinomio característico $p(\lambda)$ asociado al determinante:

$$\det(\mathbb{J} - \mathbb{I}\lambda) = \begin{vmatrix} C_c - \lambda & C_P & C_K & C_E \\ P_c & P_P - \lambda & P_K & P_E \\ -1 & 0 & (1 - \delta) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\beta} - \lambda \end{vmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{p}(\lambda) = \left(\frac{1}{\beta} - \lambda\right) [(C_c - \lambda)(P_P - \lambda)((1 - \delta) - \lambda) - C_P P_K + C_K (P_P - \lambda) - ((1 - \delta) - \lambda) C_P P_c] \quad (41)$$

A partir del polinomio característico anterior, se pueden obtener sus raíces λ , las cuales dan cuenta de la caracterización del equilibrio hallado en términos de su estabilidad. Se tiene un equilibrio estable si las cuatro raíces de $\mathbf{p}(\lambda)$ tienen un valor absoluto menor a

1. En este caso, desvíos respecto del equilibrio activan una dinámica en el sistema que lleva a las variables consideradas a converger nuevamente al equilibrio. De forma opuesta, si todas las raíces son mayores a la unidad, se tiene un equilibrio inestable o repulsor, el cual implica una dinámica de divergencia ante desvíos respecto del equilibrio de estado estacionario. Si las raíces de $\mathbf{p}(\lambda)$ alternan en términos de la unidad, se trata de un equilibrio de punto silla. Esto refiere a un punto que cumple la condición de máximo y mínimo a la vez, donde dependiendo de las condiciones iniciales, se puede converger o divergir del equilibrio de estado estacionario.

A partir del polinomio característico (41) se puede demostrar (*ver Anexo*) a partir del cálculo de las derivadas parciales que deviene de la aplicación del Teorema de la Función Implícita entorno al equilibrio de estado estacionario que, $C_P = C_K = 0$. Esto conlleva a reformular (41) como:

$$\mathbf{p}(\lambda) = \left(\frac{1}{\beta} - \lambda\right)(C_c - \lambda)(P_p - \lambda)((1 - \delta) - \lambda) \quad (42)$$

Considerando (42) fácilmente se deduce que las raíces del polinomio característico vienen dadas por: $\frac{1}{\beta} = \lambda$; $C_c = \lambda$; $P_p = \lambda$; $(1 - \delta) = \lambda$. Dado que $0 < \beta < 1$ y $0 < \delta < 1$, se tiene que el equilibrio de estado estacionario es un equilibrio de punto silla; esto es, el sistema dinámico converge al mismo o diverge de él, dependiendo de las condiciones iniciales del sistema.

Adicionalmente, al contar con tres valores propios inferiores a la unidad y un único valor propio mayor que uno, se tiene que la variedad estable del sistema tiene dimensión 3, mientras que la variedad inestable tiene dimensión 1. Cuando se refiere a la variedad estable del sistema dinámico se refiere a cuál es a dimensión del conjunto de puntos alrededor del equilibrio para los cuales el sistema dinámico, dadas las condiciones iniciales, llevan al equilibrio. En este caso, se trata de un subespacio vectorial formado por los vectores propios asociados a los valores propios con módulo menor que uno. Mientras que, la variedad inestable refiere al conjunto de puntos, tal que, partiendo de un punto de dicho conjunto, la dinámica implica alejarse del equilibrio de estado estacionario. Se trata del subespacio vectorial formado por los vectores propios asociados a los valores propios con módulo mayor que uno. En base a lo anterior, se deduce que la variedad estable tiene dimensión 3

debido a que tres valores propios son menores que uno y eso se asocia a un subespacio vectorial de dimensión 3 con los tres vectores propios asociados. En contraposición, un único valor propio es superior a la unidad y por lo tanto, existe un único vector propio asociado que conforma un subespacio vectorial de dimensión 1, y este refiere a la variedad inestable.

Estos resultados se pueden alinear con los encontrados en el equilibrio de los modelos neoclásicos de crecimiento, como el Modelo de Ramsey, Cass y Koopmans, y en particular, vinculados a modelos de crecimiento guiados por el turismo, a los resultados encontrados por Giannoni (2008). Sin embargo, una particularidad respecto a los resultados del Modelo de Ramsey refiere al hecho de que la variedad estable, es decir el conjunto de puntos donde la dinámica que parte de dichos puntos converge al equilibrio es de dimensión superior a la variedad inestable, que es de dimensión 1 e implica alejamientos del equilibrio partiendo de dicho conjunto de puntos. El Modelo de Ramsey concluye sobre la existencia de un punto silla, pero con una variedad estable e inestable de igual dimensión (uno).

6. Comentarios finales

Este trabajo parte de la concepción de que se ha observado a través de la literatura y los datos, la creciente importancia del turismo como fuente de crecimiento económico. La literatura acuerda en el hecho de que existen distintos canales donde el turismo genera crecimiento económico, así como en algunos otros casos, el crecimiento económico potencia rendimientos del sector turístico.

Posteriormente, se ha observado la importancia de los efectos medioambientales no solo sobre el crecimiento económico (EKC) como sobre el turismo. La degradación ambiental atenta contra los recursos naturales y sobre el bienestar de los turistas. En economías donde impera un tipo de turismo de sol y playa, los recursos naturales (playas, áreas verdes, zonas nevadas, etc.) son un atractivo clave para generar ingresos por turismo. Estos ingresos por turismo contribuyen a la generación de valor agregado en todas las economías, pero, en particular, existen economías donde este valor agregado equivale al total del valor bruto de producción. Es decir, el crecimiento está guiado por el valor generado por el turismo.

En este estudio, se plantea el caso de una economía guiada por la actividad turística donde se busca estudiar la existencia de equilibrios macroeconómicos cuando se incorpora la dimensión medioambiental en términos de polución ambiental. De aquí es plausible poder discernir, cuando se endogeniza la polución ambiental, como poder fomentar un crecimiento económico guiado por el turismo a partir de políticas que controlen la asignación de recursos en la economía.

En términos generales cuando se estudia el turismo, se puede enmarcar esta actividad dentro de las exportaciones de un país, así podría entenderse dentro de la teoría de crecimiento liderado por las exportaciones. Sin embargo, ciertos aspectos claves, como la incorporación del stock de recursos naturales como determinante de oferta y demanda de bienes y servicios turísticos hacen que se genere un canal a partir de cual se permite distinguir un modelo de crecimiento guiado por el turismo, en relación a uno guiado por las exportaciones. Otro factor clave, está desde la perspectiva de los demandantes de turismo, los consumidores, donde los niveles de polución ambiental generan desutilidades en ellos.

Considerando una estructura de mercados perfectamente competitivos, se considera que los niveles de producción agregada de una economía guiada por el sector turístico (que surge de la intersección entre los niveles de oferta y demanda turística) queda determinado por el nivel de stock de capital físico y natural imperante en la economía, así como de los niveles de polución ambiental vigentes. Adicionalmente, el nivel poblacional, el ingreso extranjero, y la disponibilidad tecnológica, son factores exógenos e invariantes en el tiempo, pero que también determinan el crecimiento económico.

Un resultado preliminar surge de considerar cómo cambia la producción agregada de la economía ante incrementos en los niveles de capital físico, tal como lo sugieren los modelos neoclásicos de crecimiento, como el Modelo de Solow-Swan. En esta línea, si existe crecimiento económico fruto de la acumulación de capital físico, se puede considerar que el turismo es un bien elástico, donde la elasticidad ingreso supera la unidad. Esto implica que se trata de un producto para el cual la producción se reduce más que proporcionalmente cuando se incrementa el nivel general de precios. Además, si el peso relativo o el ponderador del parámetro poblacional es estrictamente positivo, se tiene también que el crecimiento económico se encuentra ligado por la acumulación del stock de capital natural.

En oposición, cuando no se da crecimiento por la acumulación de capital natural, el turismo se puede clasificar como un bien inelástico en tanto ante incrementos en los niveles de precios, la producción agregada cae, pero menos que proporcionalmente. Adicionalmente, la magnitud de esta elasticidad se encuentra acotada superiormente por el factor $0 < \varepsilon < 1 - \frac{\alpha}{\omega}$, donde $\frac{\alpha}{\omega}$ refiere a la relación que existe entre el peso que representa el stock de capital natural en la oferta y en la demanda del sector turístico. Además, considerando que la elasticidad precios ε es estrictamente positiva, se tiene también que el peso relativo del capital natural desde una perspectiva de oferta turística supera al peso relativo desde la demanda.

Cuando se estudia desde una perspectiva de los consumidores la maximización sus niveles de bienestar, se considera que éste viene determinado por niveles de utilidad en función de los niveles de consumo y de polución (variables de control). Además, enfrentan dos restricciones a la hora de maximizar su bienestar que vienen dados por la dinámica del capital físico y el capital natural (variables de política). Metodológicamente, el sector

turístico visto desde una perspectiva de su contabilidad, se tiene que la frecuencia de medición usualmente es anual, y en caso intra-nacionales, puede desagregarse en frecuencia trimestral o mensual. Pero en todos los casos, la medición se comporta como una variable discreta donde se registra un dato en cada período de tiempo y no en un continuo. Por tanto, con esta salvedad se modeliza al turismo considerando al tiempo como una variable discreta.

Aplicando herramientas de programación dinámica se encuentra que la dinámica del consumo viene explicada por las cuatro variables insertas en el sistema en términos de sus productividades marginales futuras, así como del factor al cual los consumidores descuentan intertemporalmente su utilidad y de la tasa de depreciación del capital físico. En la dinámica óptima, la relación entre la utilidad marginal del consumo entre un determinado período y el siguiente debe ser igual a la tasa a la cual la economía es capaz de transformar dichos bienes y servicios turísticos de un período a otro. La dinámica temporal de la polución también se ve afectada por las cuatro variables del sistema, en particular por el efecto marginal de una unidad más de polución en los niveles agregados de producción.

A partir del estudio de la existencia de equilibrios de estado estacionario, se encuentra un único equilibrio que no es el equilibrio trivial. En este equilibrio, la economía agota sus niveles de consumo, capital físico y natural. Sin embargo, mantiene niveles no nulos de polución. Esto implica que los niveles de polución agotan los niveles de capital natural, esto genera que la economía no genere valor y por tanto agote los niveles de consumo, así como de capital natural.

A partir del uso del Teorema de la función implícita es posible discernir acerca de la estabilidad de este equilibrio a partir de un estudio cualitativo basado en los autovalores asociados al sistema de derivadas parciales primeras asociado. Al tratarse de un equilibrio “no deseable” ya que se trata de un equilibrio donde la economía tiene polución ambiental, pero no genera valor y por tanto no desarrolla un sector turístico a causa de la contaminación, valdría la pena estudiar la estabilidad de este equilibrio, buscando que este equilibrio no sea un estable, es decir, que las dinámicas fuera del equilibrio, no converjan a este.

Se concluye a partir de lo anterior que el equilibrio no es estable; se trata de un punto silla, donde desfasajes respecto de este equilibrio, la convergencia o divergencia de este,

depende de las condiciones del sistema. Esto da lugar a que los gobiernos nacionales o subnacionales fomenten y apliquen políticas públicas que mitiguen la existencia de dinámicas que converjan a este equilibrio a partir de incentivos que impliquen condiciones iniciales que pongan en marcha una dinámica que fomente crecimiento derivado del desarrollo de la actividad turística.

Los resultados encontrados dan indicios de que el crecimiento guiado por el desarrollo de la actividad turística no siempre se verifica. Es decir, solo a través de trayectorias que no converjan al equilibrio de estado estacionario, fomentadas a partir de políticas públicas implicarían que se verifique la hipótesis de turismo como potenciador de crecimiento económico. En esta línea, la incorporación de la polución es quién juega un rol clave en estas conclusiones debido a que destruye el capital natural, un factor relevante en economías turísticas de sol y playa. Por otro lado, puede que estos resultados se alejen de la óptica de la literatura tradicional revisada, pero dan cuenta de un hecho que contribuye a la literatura de forma interesante al lograr especificar una modelización que en el marco de la economía del turismo parece apropiada, como la consideración discreta de la variable tiempo, así como también abren camino a futuros estudios que incentiven a ser más cautelosos a la hora de considerar al turismo como potenciador de crecimiento en contexto de plena globalización y degradación ambiental.

7. Limitaciones y extensiones del trabajo

Como se mencionó anteriormente este trabajo propone una contribución desde una perspectiva de la teoría económica. Esto implica enfrentarse a dificultades metodológicas que acompañado a la escasa literatura existente en este marco hace que los puntos de partida impliquen supuestos que en algunos casos no parezcan del todo razonables.

En primer lugar, la modelización asume mercados perfectamente competitivos. Esto simplifica el razonamiento y genera un marco de entendimiento didáctico que pueda contribuir como punto de partida para futuras extensiones del trabajo.

En segundo lugar, considerar una economía donde todo su valor bruto de producción surge del desarrollo de la actividad turística, aunque en algunas economías esto suele suceder, se limita el grado de aplicabilidad de este trabajo, el cual no pretende distinguir economías particulares que se asocien a este esquema. Sin embargo, esta propuesta surge nuevamente en el marco de iniciar un desarrollo teórico comportamental de la economía y sigue lo propuesto por Giannoni (2008).

Por último, las variables en este estudio son consideradas en términos agregados y por tanto liberan aspectos poblacionales que pueden interferir, sobre todo en un modelo de crecimiento guiado por el turismo (ver Brida, et al., 2021, donde se discute acerca del indicador a considerar en el marco de la economía del turismo). Considerarlas en términos per cápita puede ser una alternativa clave, sin embargo, hay literatura existente en el marco de métodos dinámicos que discuten, en la coyuntura actual, cuál podría ser la ley de crecimiento poblacional más adecuado.

A partir de lo anterior surgen algunas posibles extensiones del trabajo: en primer lugar considerar las variables en términos per cápita apartándose de la óptica tradicional de crecimiento exponencial de la población y considerando, por ejemplo, leyes logísticas, donde la población no cambie en el tiempo o tenga tasa de crecimiento decreciente (algo que parece más plausible en la actualidad de los países); en segundo lugar considerar la existencia de dinámicas que impliquen mejoras schumpeterianas, lo cual en el contexto del sector turístico y en una actualidad de plena globalización puede implicar resultados

deseables para los agentes turísticos; en tercer lugar se podría extender considerando dos aspectos que parecen restrictivos a priori: que la economía no solo genere sus ingresos del sector turístico sino considerar otros mercados que interactúen con este, y que la estructura de mercado se aparte de un sistema competitivo, lo cual no parece lo más intuitivo en lo empírico.

Por último y en línea a lo anterior, dar evidencia empírica a esta propuesta puede ser una buena alternativa a fin de verificar si los lineamientos básicos propuestos por la teoría económica se ven reflejados en la práctica.

Referencias

1. Acheampong, A. O. (2018). Economic growth, CO2 emissions and energy consumption: What causes what and where? *Energy Economics*, 74, 677-692.
2. Akbar, I., Yang, Z., Hang, F. y Kanat, G. (2019). The influence of negative political environment on sustainable tourism: a study of Aksu-Jabagly World Heritage site, Kazakhstan. *Sustainability*. 12(143).
3. Al Mamun, Md., Sohag, K., Hannan Mia, Md.A., Ozturk, I. (2014). Regional differences in the dynamic linkage between CO2 emissions, sectoral output and economic growth. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 38, 1-11.
4. Al Mulali, U. (2014). Investigating the impact of nuclear energy consumption on GDP growth and CO2 emission: A panel data analysis. *Progress in Nuclear Energy*, 73, 172-178.
5. Albaladejo, I. y Martinez-García, MP. (2013). An endogenous growth model of international tourism. *Tourism Economics*. 19(3). 509-529.
6. Albaladejo, I., Gonzalez- Martinez, MI. y Martinez-García, MP. (2014). Quality and endogenous tourism: an empirical approach. *Tourism Management*. 41. 141-147.
7. Albaladejo, I. y Martinez-García, MP. (2015). An R&D based endogenous growth model of international tourism. *Tourism Economics*. 21(4). 701-719.
8. Amaghionyeodiwe, L.A. (2012). "A causality analysis of tourism as a long-run economic growth factor in Jamaica". *Tourism Economics*, 18(5), pp.1125-1133.
9. Antonakakis, N., Chatziantoniou, I. y Filis, G. (2017). Energy consumption, CO2 emissions, and economic growth: An ethical dilemma. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 68, 808-824.
10. Al Mulali, U., Tang, CF., y Ozturk, I. (2015). Estimating the Environmental Kuznets Curve hypothesis: evidence from Latin America and the Caribbean countries. *Renewable and sustainable energy review*. 50. 918-925.
11. Alvarez, E., Brida, JG., Cayssials, G., Lorenzo, P., Yapor, M. (2021). Economic growth and population dynamic: a discrete time analysis. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series B: Applications & Algorithms*. 28. 41-60.
12. Apergis, N. y Payne, J.E. (2012). "Tourism and growth in the Caribbean evidence from a panel error correction model". *Tourism Economics*, 18(2), pp.449-456.

13. Apergis, N., Payne, J.E. (2009). CO2 emissions, energy usage, and output in Central America. *Energy Policy*, 37, 3282–3286.
14. Apergis, N., Payne, JE. (2014). Renewable energy, output, CO2 emissions, and fossil fuel prices in Central America: Evidence from a nonlinear panel smooth transition vector error correction model. *Energy Economics*, 42, 226-252.
15. Apergis, N., Payne, JE. (2015). Renewable Energy, Output, Carbon Dioxide Emissions, and Oil Prices: Evidence from South America. *Economics, planning and policy*. 10(3), 281-287.
16. Azam, M. (2016). Does environmental degradation shackle economic growth? A panel data investigation on 11 Asian countries. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 65, 175-182.
17. Balado-Naves, R., Baños-Pino, JF., Mayor, M. (2018). Do countries influence neighbouring pollution? A special analysis of the EKC for CO2 emissions. *Energy Policy* (123). Pp 266-279.
18. Balaguer, J. Y Cantavella-Jordá, M. (2002). “Tourism as a long-run economic growth factor: the Spanish case”. *Applied Economics*, 34, pp.877-884.
19. Balsalobre-Lorente, D., Driha, O., Shahbaz, M. y Sinha, A. (2020). The effects of tourism and globalization over environmental degradation in developed countries. *Environmental Science and Pollution Research*. 27. 7130-7144.
20. Balsalobre-Lorente, D. y Leitaó, N. (2020). The role of tourism, trade, renewable energy use and carbon dioxide emissions on economic growth: evidence of tourism-led-growth hypothesis in EU-28. *Environmental Science and Pollution Research*. DOI. <https://doi.org/10.1007/s11356-020-10375-1>.
21. Ben Jebli, M., Ben Youssef, S., Apergis, N. (2019). The dynamic linkage between renewable energy, tourism, CO2 emissions, economic growth, foreign direct investment, and trade. *Latin American Economic Review*. 28(2).
22. Brida, J.G. Y Monterubbianesi, D.P. (2010). “Causality between economic growth and tourism expansion: Empirical evidence form some Colombian regions”. *Journal of Tourism Challenges and Trends*, III(1), pp.153-164.
23. Brida, J.G. Y Risso, W.A. (2009). “Tourism as a factor of long-run economic growth: An empirical análisis for Chile”. *European Journal of Tourism Research*, 2(2), pp.178 -185.
24. Brida, J.G., Brindis, M., Mejía, M.L. Y Zapata Aguirre, S. (2017). “La contribución del Turismo al crecimiento económico de Colombia: análisis por ramas

- características del sector utilizando CST”. *Revista de Estudios Regionales*. 109, pp. 121-138.
25. Brida, J.G., Cortes-Jimenez, I. Y Pulina, M. (2016). “Has the tourism-led growth hypothesis been validated? A literature review”. *Current Issues in Tourism*, 19(5), pp.394-430.
 26. Brida, J.G., London, S. Y Risso, W.A. (2010). “Economic Performance clubs in the Americas: 1955-2003”. *CEPAL Review*, 101, pp.39-57.
 27. Brida, J.G., Cayssials, G. y Pereyra, J.S. (2014). The Ramsey model in discrete time and decreasing population growth rate. *Int. J. Dynamical Systems and Differential Equations* Vol. 6, No. 3, pp.219–233. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2417005>
 28. Brida, J. G., Cayssials, G., Rodríguez, O. C., & Anyul, M. P. (2020). A dynamic extension of the classical model of production prices determination. *Journal of Dynamics & Games*, 7(3), 185.
 29. Brida, J.G., Punzo, L.F. Y Risso, W.A. (2011). “Tourism as a factor of growth: The case of Brazil”. *Tourism Economics*, 17(6), pp.1375-1386.
 30. Brida, J.G., Cortes-Gimenez, I., Pulina, M. (2016). Has the tourism-led growth hypothesis been validated? A literature review. *Current issues in tourism*. 19(5). 394-430.
 31. Brida, J.G., London, S., Rojas, M. (2014). “El turismo como fuente de crecimiento económico: impacto de las preferencias intertemporales de los agentes”. *Investigaciones económicas*. 73(289).
 32. Brida, J. G., London, S., & Rojas, M. (2014). El turismo como fuente de crecimiento económico: impacto de las preferencias intertemporales de los agentes. *Investigación económica*, 73(289), 59-77.
 33. Brida, J.G., Olivera, M., Segarra, V. (2021). Economic growth and tourism performance in Latin America and the Caribbean: a comparative analysis by clustering techniques and causality tests. *Brazilian Journal of Tourism Research*. 15(1).
 34. Castro-Nuño, M., Molina-Toucedo, J.A. Y Pablo-Romero, M.P. (2013). “Tourism and GDP: A meta-analysis of panel data studies”. *Journal of Travel Research*, 52(6), pp.745-758.
 35. Cayssials, G. (2019). Tiempo, población y modelos de crecimiento. *Revista de métodos cuantitativos para la economía y la empresa*. 28. 278-300

36. Cerina, F. (2007). Tourism specialization and environmental sustainability in a dynamic economy. *Tourism Economics*. 13(4). 553-582.
37. Chingarande, A. Y Saayman, A. (2018). "Critical success factors for tourism led growth". *International Journal of Tourism Research*, 20(6), pp.800-818.
38. Comerio, N. Y Strozzi, F. (2019). "Tourism and its economic impact: A literature review using bibliometric tools". *Tourism Economics*, 25(1), pp.109-131.
39. Cruz-Chávez, G. (2016). "Turismo Extranjero y crecimiento económico en México. Evidencia empírica para Los Cabos". *Economía, Sociedad y Territorio*, XVI(50), pp.1-38.
40. Dutta, C., Das, D. (2016). Does disaggregated CO2 emission matter for growth? Evidence from thirty countries. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 66, 825-833.
41. Eugenio-Martín, JI. Y Martín-Morales, N. (2004). "Tourism and economic growth in Latin America countries: a panel data approach". FEEM Working Paper No. 26/2004.
42. Fonseca, N. Y Sánchez-Rivero, M. (2020). "Significance bias in the tourism-led growth literature. *Tourism Economics*, 26(1).
43. Galeotti, M., Manera, M. y Lanza, A. (2009). On the robustness of robustness checks of the environmental Kuznets curve hypothesis. *Environmental and Resource Economics*, 42(4), 551.
44. Gardella, R. Y Aguayo, E. (2002). "Impacto económico del turismo en el Mercosur y Chile (1990-2000)". *Estudios Económicos de Desarrollo internacional*, 2(1), pp.27-49.
45. Ghartey, E.E. (2013). "Effects of tourism, economic growth, real exchange rate, structural changes and hurricanes in Jamaica". *Tourism Economics*. Advance online publication. doi:10.5367/te.2013. 0228.
46. Giannoni, S. (2008). Tourism, growth and residents' welfare with pollution. *Tourism and hospitality research*. 9(1). 50-60.
47. Gligo, N. (1993). Environment and natural resources in Latin American development. *Development from Within. Toward a Neostructuralist Approach for Latin A*
48. O. Sunkel (ed.), Boulder, Colorado, Lynne Rienner Publishers.
49. Gomez, M., Rodríguez, JC. (2016). Analysis of causality between economic growth and carbon emissions: the case of Mexico 1971-2011. *World Academy of Science*,

Engineering and Technology International Journal of Energy and Environmental Engineering 10(12).

50. Khalid Anser, M., Yousaf, Z., Nassani, A., Qazi Abro, MM. y Zaman, K. (2020). International tourism, social distribution, and environmental Kuznets curve: evidence from a panel of G/ countries. *Environmental Science and Pollution Research*. DOI. <https://doi.org/10.1007/s11356-019-07196-2>
51. Jackman, M. (2012). "Revisiting the tourism-led growth hypothesis for Barbados: A disaggregated market approach". *Regional and Sectoral Economic Studies*, 12(2), pp.15-26.
52. Jiménez García, M., Peña Sánchez, A.R., Ruiz Chico, J. (2015). "Factores incidentes en la recuperación turística en la actual crisis en las diferentes regiones europeas, un análisis estático". *Revista de estudios regionales*, 104, pp. 33-57
53. Lee, Cc Y Chang, Co. (2008). "Tourism development and economic growth: a closer look at panels". *Tourism Management*, 29, pp.180-192.
54. Li, K.X., Jin, M. Y Shi, W. (2018). "Tourism as an important impetus to promoting economic growth: A critical review". *Tourism Management Perspectives*, 26, pp.135-142.
55. London, S., Rojas, M. & Candias, N. (2021). "Turismo sostenible: un modelo de crecimiento con recursos naturales". *Ensayos de Economía*, 31(58), 158-177. <https://doi.org/10.15446/ede.v31n58.88712>
56. Lorde, T., Francis, B. Y Drakes, L. (2011). "Tourism services exports and economic growth in Barbados". *The International Trade Journal*, 25(2), pp.205-232.
57. Munir, Q., Lean, H. H. y Smyth, R. (2020). CO2 emissions, energy consumption and economic growth in the ASEAN-5 countries: a crosssectional dependence approach. *Energy Economics*, 85, 104571.
58. Organización Mundial del Turismo (OMT). (2005). *Making Tourism More Sustainable. A Guide for Policy Makers*. OMT.
59. Ozturk, I. (2017). Measuring the impact of alternative and nuclear energy consumption, carbon dioxide emissions and oil rents on specific growth factors in the panel of Latin American countries. *Progress in nuclear energy*, 100, 71-81.
60. Palley, T. (2012). The rise and fall of export led growth hypothesis. *Investigación económica*. 71(280).
61. Pao, HT., Tsai, CM. (2015). Modelling and forecasting the CO2 emissions, energy consumption, and economic growth in Brazil. *Energy*, 36(5), 2450-2458.

62. Patiño, L., Padilla, E., Alcantara, V., Raymond, J.L. (2019). The relation of GDP per capita with energy and CO2 emissions in Colombia. Departmen d'Economia Aplicada. Facultar d'Economia i Empresa. Universitat Autònoma de Barcelona.
63. Ramirez, J. (2006). "Actividad económica del sector turístico mexicano: situación actual, tendencias y cointegración". Aportes, Revista de la Facultad de Economía, BUAP No. 31-32, Enero - Abril y Mayo - Agosto de 2006.
64. Ridderstaat, J., Croes, R. Y Nijkamp, P. (2013). "Tourism and long-run economic growth in Aruba". International Journal of Tourism Research. 16(5), pp.472-487
65. Rigall i Torrent, R. (2008), 'Sustainable development in tourism municipalities: the role of public goods', Tourism Management, Vol 29, pp 883–897.
66. Risso, W.A. (2018). "Tourism and Economic Growth: A Worldwide Study". Tourism Analysis, 23(1), pp.123-135.
67. Rosero-Barzola, C Y Zúñiga-Contreras, I. (2014). Análisis del Tourism Led Growth Hypothesis: caso Ecuador (Trabajo de titulación). Facultad de Economía y Ciencias Empresariales, Universidad de Especialidades Espíritu Santo, Ecuador.
68. Saboori, B., Sulaiman, J. y Mohd, S. (2012). Economic growth and CO2 emissions in Malaysia: a cointegration analysis of the environmental Kuznets curve. Energy policy, 51, 184-191.
69. Salazar-Nuñez H., Vanegas-Martinez F., Tinoco-Zermeño M. (2020). Impact of energy consumption and carbon dioxide emissions on economic growth: Cointegrated panel data in 79 countries grouped by income level. International Journal of Energy Economics and Policy. 10(2), 218-226.
70. Seetanah, B., Nunkoo, R., Sannasee, R.V., Georges, P. Y Jaffur, W. (2017). "A meta-analysis of the tourism and economic growth Nexus". BEST EN Think Tank XVII: Innovation and Progress in Sustainable Tourism, pp.180-206.
71. Shahbaz, M., Ozturk, I., Afza, T. y Ali, A. (2013). Revisiting the environmental Kuznets curve in a global economy. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 25, 494-502.
72. Sharif, A., Godil, D., Xu, B., Sinha, A., Rehman Khan, SA., Jermisittiparsert, K. (2020). Revisiting the role of tourism and globalization in environmental degradation in China: fresh insights from the quantile ARDL approach. Journal of cleaner production. 272(1).
73. Schubert, S. y Schamel, G. (2020). Sustainable tourism development: a dynamic model incorporating resident spillovers. Tourism Economics. 1-27.

74. Schubert, S., Brida, J.G., y Risso, W. (2011). The impacts of international tourism demand on economic growth of small economies dependent on tourism. *Tourism management*. 31. 377-385.
75. Schubert, S.F., and Brida, J.G. (2011), 'The impacts of international tourism demand on economic growth of small economies dependent on tourism', *Tourism Management*, Vol 32, pp 377–385.
76. Sunkel, O. y N. Gligo (1980). *Estilos de desarrollo y medio ambiente en América Latina*, vol. 1, México, D.F., Fondo de Cultura Económica
77. Usman, O., Elsalih, O. y Koshadh, O. (2019). Environmental performance and tourism development in EU-25 countries: the role of institutional quality. *Current issues in tourism*. DOI: 10.1080/13683500.2019.1635092
78. Wawrzyniak, D. y Doryń, W. (2020) Does the quality of institutions modify the economic growth-carbon dioxide emissions nexus? Evidence from a group of emerging and developing countries, *Economic Research-Ekonomska Istraživanja*, 33(1), 124-144
79. Zafar, M., Mirza, F., Haider Zaidi, S., Hou, F. (2019) The nexus of renewable and nonrenewable energy consumption, trade openness, and CO2 emissions in the framework of EKC: evidence from emerging economies. *Environmental science and pollution research*. 26, 15162-15173.

Anexo

Derivadas parciales de las funciones implícitas

A partir del Lema 5.1. presentado anteriormente se pueden obtener las derivadas parciales de $X_{t+1} = f(X_t)$, donde $X_t = [C_t, P_t, K_t, E_t]$, respecto a cada una de las cuatro variables consideradas. Esto generará 16 derivadas parciales las cuales conforman una matriz de 4×4 llamada matriz *jacobiana* o de *derivadas parciales primeras*, de la cual se estudia cualitativamente al equilibrio de estado estacionario en términos de su estabilidad. Comenzando por las últimas dos expresiones del sistema (33), al ya estar expresadas en su forma canónica, se pueden obtener de forma directa sus derivadas parciales respecto de cada componente de X_t .

$$\begin{aligned} K_C = f_{3C} &= -1; K_P = f_{3P} = \varphi A^{\Delta} E_t^{\Sigma} K_t^{\Omega} N^{\Phi} P_t^{\varphi-1} Y f^{\sigma}; \\ K_K = f_{3K} &= \Omega A^{\Delta} E_t^{\Sigma} K_t^{\Omega-1} N^{\Phi} P_t^{\varphi} Y f^{\sigma} + (1 - \delta); K_E = f_{3E} = \Sigma A^{\Delta} E_t^{\Sigma-1} K_t^{\Omega} N^{\Phi} P_t^{\varphi} Y f^{\sigma} \\ E_C = f_{4C} &= 0; E_P = f_{4P} = -\zeta E_t; \\ E_K = f_{4K} &= 0; E_E = f_{4E} = 1 + \zeta(\bar{E} - P_t) \end{aligned}$$

A su vez, cuando se evalúan las variables consideradas entorno a sus valores de estado estacionario $X = (C, P, K, E) = \left(0, \frac{\beta-1+\beta\bar{E}\zeta}{\beta\zeta}, 0, 0\right)$, lo planteado anteriormente puede simplificarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} K_C = f_{3C} &= -1; K_P = f_{3P} = 0; \\ K_K = f_{3K} &= (1 - \delta); K_E = f_{3E} = 0 \\ E_C = f_{4C} &= 0; E_P = f_{4P} = 0; \\ E_K = f_{4K} &= 0; E_E = f_{4E} = \frac{1}{\beta} \end{aligned}$$

Con esta simplificación, se puede calcular el polinomio característico asociado a la matriz jacobiana (29), el cual se explicita en (41).

Bajo el mismo razonamiento antes realizado, pero utilizando las funciones de derivadas parciales de las funciones implícitas, es sencillo demostrar que $C_P = f_{1P} = f_{1K} = C_K = 0$. Partiendo de diferenciar cada una de las expresiones que pertenecen al vector de funciones G , se obtienen las siguientes expresiones:

$$C_P = f_{1P} = \frac{\partial f_1}{\partial P} - \beta C[\Omega A^A N^\Phi Y f^\sigma ((\Omega - 1)(f_3)^{\Omega-2} \frac{\partial f_3}{\partial P} (f_4)^\Sigma + \Sigma (f_4)^{\Sigma-1} \frac{\partial f_4}{\partial P} (f_3)^{\Omega-1} (f_2)^\varphi + \varphi (f_2)^{\varphi-1} \frac{\partial f_2}{\partial P} (f_3)^{\Omega-1} (f_4)^\Sigma] = 0$$

$$C_K = f_{1K} = \frac{\partial f_1}{\partial K} - \beta C[\Omega A^A N^\Phi Y f^\sigma (f_4)^\Sigma ((\Omega - 1)(f_3)^{\Omega-2} \frac{\partial f_3}{\partial K} (f_2)^\varphi + \varphi (f_2)^{\varphi-1} \frac{\partial f_2}{\partial K} (f_3)^{\Omega-1}] = 0$$

Al evaluarlas en los puntos de equilibrio de estado estacionario, se verifica que $C_P = f_{1P} = f_{1K} = C_K = 0$.

Raíces del polinomio característico

A partir del polinomio característico hallado en (42) es trivial notar la existencia de cuatro raíces: $\frac{1}{\beta} = \lambda$; $C_c = \lambda$; $P_P = \lambda$; $(1 - \delta) = \lambda$.

Como se comentó anteriormente se puede deducir que se trata de un equilibrio de punto silla al notar que existen raíces menores a la unidad y mayores a la unidad, generando que el equilibrio genere trayectorias convergentes o divergentes dependiendo de las condiciones iniciales del sistema dinámico. $\frac{1}{\beta} = \lambda > 1$; $(1 - \delta) = \lambda < 1$.

Adicionalmente, el objetivo de este apartado es deducir si las restantes raíces λ son menores o mayores a la unidad. Para ello se deben considerar las expresiones $C_c = f_{1C}$ y $P_P = f_{2P}$. Nuevamente utilizando las funciones que conforman el vector G , se puede obtener:

$$\begin{aligned}
C_c = f_{1c} &= \frac{\partial f_1}{\partial C} \\
&- \beta \left[C \left(\Omega A^\Delta N^\Phi Y f^\sigma (f_4)^\Sigma ((\Omega - 1)(f_3)^{\Omega-2} \frac{\partial f_3}{\partial C} (f_2)^\varphi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \varphi (f_2)^{\varphi-1} \frac{\partial f_2}{\partial C} (f_3)^{\Omega-1} \right) + (\Omega A^\Delta (f_4)^\Sigma (f_3)^{\Omega-1} N^\Phi (f_2)^\varphi Y f^\sigma + 1 - \delta) \right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

La expresión anterior valuada en el equilibrio de estado estacionario devuelve: $C_c = f_{1c} = \frac{\partial f_1}{\partial C} = \beta(1 - \delta) < 1$.

Por otro lado, se considera la función de derivada parcial implícita de la polución con respecto a sí misma de la siguiente forma:

Partiendo de la función a derivar:

$$\begin{aligned}
&(f_4)(f_2)(f_1)[\varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma - \theta C_t] - (\beta E_t C_t P_t)[1 \\
&\quad + \zeta(\bar{E} - P_t)][A^\Delta (f_4)^\Sigma (f_3)^\Omega N^\Phi (f_2)^\varphi Y f^\sigma - \theta(f_1)] = 0 \\
&(f_4)(f_2)(f_1)[\varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi P_t^\varphi Y f^\sigma] - (f_4)(f_2)(f_1) \theta C_t - \beta E_t C_t P_t [1 + \zeta(\bar{E} - \\
&\quad P_t)][A^\Delta (f_4)^\Sigma (f_3)^\Omega N^\Phi (f_2)^\varphi Y f^\sigma - \theta(f_1)] = 0
\end{aligned}$$

Y renombrando algunos términos para simplificar:

$$\varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi Y f^\sigma \Gamma_1(C_t, P_t, K_t, E_t) - \theta C_t \Gamma_2(C_t, P_t, K_t, E_t) - \beta E_t C_t \Gamma_3(C_t, P_t, K_t, E_t) = 0$$

Se puede obtener la derivada parcial respecto de la polución como:

$$\begin{aligned}
P_p = f_{2p} &= \varphi A^\Delta E_t^\Sigma K_t^\Omega N^\Phi Y f^\sigma \frac{d\Gamma_1(C_t, P_t, K_t, E_t)}{dP} - \theta C_t \frac{d\Gamma_2(C_t, P_t, K_t, E_t)}{dP} \\
&- \beta E_t C_t \frac{d\Gamma_3(C_t, P_t, K_t, E_t)}{dP} = 0
\end{aligned}$$

Nuevamente, al evaluar lo anterior entorno al estado estacionario, sin necesidad de desarrollar los términos diferenciales, es notorio que $P_p = f_{2p} = 0 < 1$

De esta forma se complementa la conclusión hallada sobre la caracterización del equilibrio, donde no solo se trata de un equilibrio de punto silla, sino también que se encuentra que tres de los valores propios asociados al sistema dinámica linealizado entorno al estado estacionario son inferiores a la unidad, mientras que el restante es mayor a la unidad.

$$\lambda_1 > 1$$

$$\lambda_2 < 1$$

$$\lambda_3 < 1$$

$$\lambda_4 < 1$$