



Tesis de Doctorado en Física

Colapso gravitacional de un campo escalar polimerizado

M.Sc. Florencia Benítez Martínez

Orientador: Dr. Rodolfo Gambini

Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Título de la tesis:

Colapso gravitacional de un campo escalar polimerizado

Estudiante:

M.Sc. Florencia Benítez Martínez, IFFI, UdelaR.

Orientador:

Dr. Rodolfo Gambini, IFFC, UdelaR.

Tribunal:

Dr. Jorge Pullin, LSU.

Dra. Lucía Duarte, IFFC.

Dr. Miguel Paternain, CMAT.

Dr. Miguel Campiglia, IFFC.

Suplente:

Dra. Marcela Peláez, IFFI.

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Septiembre 2021

IFFI: Inst. de Física Fac. Ingeniería, UdelaR. / IFFC: Inst. de Física Fac. Ciencias, UdelaR.

LSU: Louisiana State University. / CMAT: Centro de Matemática Fac. Ciencias, UdelaR.

A mi madre y a mi abuela, Delia.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi madre por el apoyo constante e incondicional. A mi familia, amigas y amigos por acompañarme durante este largo camino.

A Rodolfo por orientarme durante todos estos años y, junto a Jorge, les agradezco por el apoyo continuo y los trabajos compartidos.

A mis compañeras y compañeros del Instituto de Física de la Facultad de Ingeniería por permitirme integrar un ambiente de trabajo grato. A Lucía Duarte, por las charlas y los consejos sobre la vida académica. A Nicolás Wschebor por su paciencia en los cursos de Teoría de Campos y por su dedicación para hacer del espacio de trabajo un lugar mejor.

La parte computacional de este trabajo fue posible gracias a la ayuda y dedicación de Steve Liebling, y gracias a la colaboración de Luis Lehner, a quien también agradezco por haberme recibido en el Perimeter Institute for Theoretical Physics (Canadá) en dos oportunidades.

Va mi agradecimiento a la Comisión Académica de Posgrado por la financiación de mi proyecto de posgrado y, finalmente, a los miembros del tribunal por tomarse el tiempo de leer mi trabajo, y por las correcciones y sugerencias.

Resumen

En esta tesis presentaré los resultados de la investigación realizada en el marco de mi doctorado en física del PEDECIBA.

Matthew Choptuik fue el primer científico en obtener importantes y sorprendentes resultados sobre el umbral para la formación de un agujero negro a partir de un conjunto de datos iniciales para Relatividad General. Bajo el término de "fenómenos críticos" para el colapso, Choptuik encontró una ley de potencias para la masa del agujero negro, demostró su universalidad y comprobó la existencia de 'ecos de escala'. Estos fenómenos son explicados a partir de la existencia de soluciones exactas, que son típicamente autosimilares. Los fenómenos críticos brindan una ruta que parte de datos iniciales suaves y nos lleva hasta curvaturas arbitrariamente grandes, que son visibles desde el infinito y, por esto, probablemente sean relevantes para la Gravedad Cuántica, la astrofísica y la comprensión general de la dinámica de la Relatividad General.

En este trabajo realizamos un estudio detallado del colapso de un campo escalar sin masa con simetría esférica, mínimamente acoplado a la gravedad, utilizando las ecuaciones semiclásicas de la Gravedad Cuántica de Lazos. Encontramos un comportamiento crítico de la masa en función de los parámetros iniciales, similar al encontrado por Choptuik en la Relatividad General clásica, para un gran conjunto de datos iniciales y distintos valores del parámetro de polimerización. Contrariamente a las amplias expectativas de la Gravedad Cuántica, nuestras ecuaciones de campo semiclásicas tienen una invariancia de escala exacta, al igual que las ecuaciones de campo clásicas. Como era de esperar, comprobamos numéricamente que la transición de fase es de segundo orden, nuevamente como en el caso clásico.

El hecho que no exista una brecha en la escala de masa indica la posibilidad

de la existencia de una solución crítica autosimilar como en Relatividad General. Aquí proporcionamos evidencia de su existencia en la teoría semiclásica. Utilizando un código con refinamiento de malla adaptativa (AMR, por sus siglas en inglés), demostramos que los "ecos" (repeticiones en los campos) surgen como resultado de la autosimilitud discreta del espaciotiempo. También mostramos la existencia de "wiggles" (oscilaciones) en la relación de escala de masa, tal como en la teoría clásica. Los resultados de la teoría semiclásica concuerdan con los de la Relatividad General clásica a menos que se tomen valores irrealmente grandes para el parámetro de polimerización (que es del orden de la longitud de Planck).

Por último, proponemos un nuevo esquema de polimerización para campos escalares acoplados a la gravedad que tiene la ventaja de ser una transformación canónica no biyectiva de los campos ψ , por tanto, asegura la covarianza de la teoría. Realizamos un estudio detallado en situaciones con simetría esférica y comparamos con otros enfoques, verificando que los análisis realizados en la tesis con la forma de polimerización canónica difieren muy poco de los covariantes.

Los artículos publicados en base a este trabajo corresponden a las referencias [1, 2].

Abstract

In 1993 Matthew Choptuik studied numerically the collapse of a massless scalar field in spherically symmetric general relativity. Such a system has two possible final states: either the field disperses to infinity or forms a black hole. He concentrated on one-parameter families of initial data. Starting from values of the parameter for which no black hole forms, if one varies the parameter one eventually passes a "critical value" for which it does. Three novel observations were made. On the one hand, no minimal black hole mass appears to exist. In other words, one can create black holes as small as desired by fine tuning the initial parameter. Although this was somewhat expected since the problem does not have any characteristic mass scale, there was some debate about the existence of a gap before Choptuik's results. The second observation is that the mass of the resulting black hole depends on the distance in parameter-space from the critical value as a power law. The exponent of the power law is universal: it takes the same value for all families of initial data. In addition, Choptuik used sophisticated adaptive mesh refinement (AMR) techniques to study the features of the solutions for values of the parameter very close to criticality. This study led to the third surprising behavior: as one approaches criticality the solution exhibited a discrete self-similarity in space-time.

In this thesis, we study the collapse in spherical symmetry of a massless scalar field minimally coupled to gravity using the semiclassical equations that are expected from loop quantum gravity. We find critical behavior of the mass as a function of the parameters of the initial data similar to that found by Choptuik in classical general relativity for a large set of initial data and values of the polymerization parameter. Contrary to wide expectations for quantum gravity, our semiclassical field equations have an exact scale invariance, as do the classical field equations. As one would then

expect, we numerically find that the phase transition is second order, again as in the classical case.

The lack of a mass gap indicated the possible existence of a self-similar critical solution as in general relativity. Here we provide further evidence for its existence. Using an adaptive mesh refinement code, we show that "echoes" arise as a result of the discrete self-similarity in space-time. We also show the existence of "wiggles" in the mass scaling relation, as in the classical theory. The results from the semi-classical theory agree well with those of classical general relativity unless one takes unrealistically large values for the polymerization parameter.

Finally, we propose a new polymerization scheme for scalar fields coupled to gravity. It has the advantage of being a (non-bijective) canonical transformation of the fields and therefore ensures the covariance of the theory. We study it in detail in spherically symmetric situations and compare to other approaches.

Índice general

I	Marco teórico	19
1.	Teoría clásica de campos y sistemas vinculados	23
1.1.	Vínculos primarios	24
1.1.1.	Teoremas importantes	25
1.2.	Vínculos secundarios	26
2.	Relatividad General	29
2.1.	Gravedad y geometría diferencial	30
2.1.1.	Variedades	33
2.1.2.	Métrica	34
2.1.3.	Tensores	36
2.1.4.	Densidades tensoriales	37
2.1.5.	Curvatura	39
2.1.5.1.	Derivadas covariantes	41
2.1.5.2.	Transporte paralelo y geodésicas	45
2.1.5.3.	Tensor de Riemann	49
2.1.5.4.	Simetrías y vectores de Killing	55
2.2.	Formulación Lagrangiana y ecuaciones de Einstein	60
2.3.	Formulación hamiltoniana	63
2.3.1.	Descomposición $3 + 1$	63
2.3.2.	Formalismo ADM	68
2.4.	Solución de Schwarzschild	72
2.4.1.	Métrica de Schwarzschild	72
2.4.2.	Singularidades	77

2.4.3.	Agujeros negros de Schwarzschild	78
2.5.	Formalismo de Ashtekar-Barbero	84
2.5.1.	Tétradas	84
2.5.2.	Tríadas densitizadas y vínculo rotacional	87
2.5.3.	Variables de Ashtekar	90
3.	Gravedad cuántica de Lazos	95
3.1.	Cuantización canónica	98
3.1.1.	Ecuación de Wheeler-DeWitt	99
3.2.	Espacio de estados cinemático \mathcal{K}	100
3.2.1.	Estructuras en el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{K}	102
3.2.2.	Invariancia del producto escalar	102
3.2.3.	Estados invariantes de gauge e invariantes bajo difeomorfismos	103
3.3.	El espacio \mathcal{K}_0 (invariancia de gauge)	105
3.3.1.	Red de espín	105
3.4.	El espacio \mathcal{K}_{dif} (invariancia bajo difeomorfismos)	107
3.5.	Operadores	109
3.6.	Operadores en \mathcal{K}_0	113
3.6.1.	Operador $\mathbf{A}(\mathcal{S})$: El cuanto de área	114
3.6.2.	Operador volumen $\mathbf{V}_{\mathcal{R}}$	118
3.7.	Geometría cuántica	120
3.8.	El operador hamiltoniano	122
3.9.	Inclusión de materia	127

II Relatividad numérica y colapso gravitacional de un campo escalar (caso clásico) 131

4.	Descripción del modelo	135
4.1.	Ecuaciones en el formalismo 3+1	135
4.2.	Ecuaciones de movimiento	139
4.3.	Análisis característico del campo escalar	147
4.4.	Condiciones de borde en el origen ($r = 0$)	148
4.5.	Horizontes aparentes y formación de agujeros negros	150

5. Algoritmo AMR	153
5.1. Descripción del algoritmo numérico	153
5.2. Condiciones sobre las coordenadas	158
III Nuestro trabajo: Colapso gravitacional de un campo escalar polimerizado	165
6. Colapso gravitacional del campo escalar polimerizado	167
6.1. Motivación	167
6.2. Ecuaciones clásicas en el sistema Polar-Radial	169
6.3. Polimerización	173
6.4. Ecuaciones semiclásicas	175
6.5. Simulaciones numéricas con código AMR	178
6.5.1. Escala de masa	181
6.5.2. Autosimilitud discreta y "wiggles"	182
7. Polimerización covariante	187
7.1. Relatividad General con simetría esférica	188
7.2. Nueva polimerización covariante	189
7.3. Relación con otros enfoques de polimerización	190
8. Discusión y Conclusiones	195
A. Teoría de grupos	197
A.1. Definición y clases de grupos	197
A.2. Grupos de Lie	199
A.3. Representaciones	200
A.4. Álgebra de Lie	202
B. Fibrados y conexiones	205
B.1. Fibrados	205
B.2. Transformaciones gauge	208
B.3. Conexiones	209

C. Teorías de Yang-Mills	211
D. Relatividad General acoplada a la materia	213

Notación y terminología

Símbolo	Descripción	Sección
A	Operador área de Gravedad Cuántica de Lazos	3.6
A, A_a^i	Conexión de Ashtekar-Barbero	2.5
D_μ	Derivada covariante	2.1.5
$Diff^*$	Grupo de difeomorfismos	3.2.3
e_α^i	Tétrada	2.5.1
e	Determinante de la tétrada	2.5.1
E_i^a	Tríada	2.5.2
E^x/E^φ	Componentes esféricas radial/tangencial de la tríada	6
G	Constante de Newton	2.1
\mathcal{G}	Espacio de las conexiones A	3.2
$g_{\mu\nu}$	Métrica espaciotemporal	2.1
$h_\zeta, U(A, \zeta)$	Holonomía de la conexión	3.2
i_n	Intertwiner en el nodo n de una red de espín	3.3
j	Representación irreducible $SU(2)$ (espín)	3.3
j_l	Espín asociado a la arista l de una red de espín	3.3
K_a^i	Curvatura extrínseca	2.5.2
K_x/K_φ	Componentes esféricas radial/tangencial de la curvatura extrínseca	6
\mathcal{K}	Espacio cinemático de estados cuánticos	3.2
\mathcal{K}_0	Espacio de estados cuánticos invariantes $SU(2)$	3.3
\mathcal{K}_{Diff}	Espacio de estados cuánticos invariantes bajo $Diff^*$	3.2
l	Arista de una red de espín	3.3
l_P	Longitud de Planck	3.6
\mathcal{M}	Variedad espaciotemporal	2.1
m_{BM}	Masa final del agujero negro	6 y 7
N	Función Lapso	2.3
N^a	Vector Shift	2.3
n	Nodo de una red de espín	3.3

Símbolo	Descripción	Sección
n^a	Vector normal a las hipersuperficies Σ_t	2.3
\mathcal{P}	Producto ordenado en el camino	3.2
p	Parámetro de datos iniciales	6 y 7
p^*	Parámetro crítico de datos iniciales	6 y 7
q_{ab}	Métrica inducida en Σ	2.3
R	Escalar de curvatura	2.1.5
$R^{(j)\alpha}_{\beta}(g)$	Matriz del elemento del grupo g en la representación j	3.2.2
\mathcal{R}	Región 3-dim	3.6
\mathbb{S}	Hipersuperficie espacial	2.3.1
s	Espín nudo o s-nudo	3.4
$ s\rangle$	Estado de s-nudo	3.4
S	Red de espín	3.3
$ S\rangle$	Estado de la red de espín	3.3
\mathcal{S}	Espacio de las funcionales de la conexión en \mathcal{G}	3.2
\mathcal{S}_0	Subespacio invariante gauge de \mathcal{S}	3.3
\mathcal{S}'_0	Espacio dual de \mathcal{S}_0	3.3
T	Espacio tangente de teoría de campos	2.1
U o g	Elemento de grupo	3.2
\mathbf{V}	Operador volumen	3.6
α	Lazo, camino cerrado	3.8
ζ	Camino	3.2
Γ	Grafo	3.2
ϑ	Difeomorfismo	2.3
ϕ	Campo escalar acoplado a la gravedad	6 y 7
φ	Campo escalar polimerizadoacoplado a la gravedad	6 y 7
γ_I	Parámetro de Immirzi	2.5
Σ_t, Σ	Hipersuperficie espacial de tiempo constante	2.3

Parte I

Marco teórico

En esta primera parte introduciremos los conceptos básicos de la Teoría de Campos Clásica y los Sistemas vinculados. Además, estudiaremos la Teoría de la Relatividad General y la desarrollaremos en términos de las variables de Ashtekar.

Finalmente, combinaremos los conocimientos adquiridos sobre Relatividad General con los de Mecánica Cuántica, dos teorías aparentemente incompatibles, para dar lugar a la Gravedad Cuántica de Lazos, un marco imprescindible para motivar y entender el trabajo realizado en esta tesis.

Capítulo 1

Teoría clásica de campos y sistemas vinculados

Una *teoría gauge* es aquella en que las variables dinámicas son especificadas con respecto a un marco referencial cuya elección es arbitraria en cada instante de tiempo. Las variables físicas son aquellas independientes del marco de referencia local. Una transformación de las variables inducida por un cambio en el marco referencial es denominada transformación gauge. Las variables físicas u observables son invariantes bajo transformaciones gauge.

En este tipo de teorías, dadas las condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento no determinan las variables dinámicas para todo tiempo, ya que el referencial puede cambiar en cualquier momento. Por esto, la solución general de las ecuaciones de movimiento contienen funciones del tiempo arbitrarias. Un tratamiento adecuado de sistemas gauge es la formulación hamiltoniana, que desarrollaremos en detalle más adelante.

La presencia de funciones del tiempo arbitrarias en la solución general de las ecuaciones de movimiento implica que las variables canónicas no son todas independientes. Las relaciones entre ellas son llamadas *vínculos*. Un sistema gauge siempre es un sistema hamiltoniano vinculado, no siendo así a la inversa, ya que no todos los vínculos de un sistema hamiltoniano surgen de la invariancia gauge.

A continuación, describiremos los distintos tipos de vínculos que podemos encontrar en este tipo de sistemas. La información presente en este capítulo puede

encontrarse y ampliarse en el libro "Quantization of Gauge Systems" de Henneaux y Teitelboim [45].

1.1. Vínculos primarios

El punto de partida para discutir los sistemas vinculados es el principio de mínima acción en la formulación lagrangiana.

Las trayectorias clásicas de un sistema son aquellas que dejan la acción

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt, \quad (1.1.1)$$

estacionaria bajo variaciones $\delta q^n(t)$ de las variables lagrangianas q^n ($n = 1, \dots, N$), y hacen que se anule en los extremos t_1, t_2 . La condición anterior está dada por las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0, \quad (1.1.2)$$

en más detalle

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial q^{n'} \partial \dot{q}^n}, \quad (1.1.3)$$

donde el punto sobre las variables denota su derivada respecto al tiempo.

Las aceleraciones \ddot{q}^n en un tiempo dado están determinadas únicamente por las posiciones y velocidades en ese instante si, y sólo si, la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ es invertible; es decir, si el determinante $\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \right)$ es distinto de cero. Si el mismo es cero, las aceleraciones no estarán determinadas únicamente por las posiciones y velocidades, entonces las soluciones de las ecuaciones de movimiento podrán contener funciones del tiempo arbitrarias. Por lo tanto, nos interesa el caso que en el cual $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ no es invertible.

Para pasar al formalismo hamiltoniano debemos definir los *momentos canónicos* de las variables:

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}. \quad (1.1.4)$$

Aquí vemos que la condición para que se anule el determinante anterior es justamente la no invertibilidad de las velocidades como funciones de las coordenadas y los momentos. Es decir, los momentos (1.1.4) no son todos independientes en ese caso, sino que hay ciertas relaciones que surgen de su definición. A estas las denotamos

$$\phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, \dots, M. \quad (1.1.5)$$

Cuando los momentos p en (1.1.5) son reemplazados por su definición (1.1.4) en términos de q y \dot{q} , la ecuación (1.1.5) se reduce a la identidad. Las condiciones (1.1.5) se denominan *vínculos primarios*, haciendo énfasis en que las ecuaciones de movimiento no son necesarias para obtener estas relaciones (ya que no implican ninguna restricción en las coordenadas y las velocidades).

Asumiremos que el rango de la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ es una constante a lo largo del espacio formado por (q, \dot{q}) y que los vínculos primarios definen una subvariedad suave embebida en el espacio de fases. Esta subvariedad se denomina superficie de vínculos primarios.

Obsérvese que, si el rango de $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^{n'} \partial \dot{q}^n}$ es $N - M'$, existen M' ecuaciones independientes dadas por (1.1.5) y la superficie de vínculos primarios es una subvariedad del espacio de fases con dimensión $2N - M'$.

1.1.1. Teoremas importantes

Veamos dos teoremas importantes sobre los sistemas vinculados:

1. Si una función suave, G , del espacio de fases, se anula sobre la superficie de vínculos $\phi_m = 0$, entonces $G = g^m \phi_m$ para algunas funciones g^m .
2. Si $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$ para variaciones arbitrarias $\delta q^n, \delta p_n$ tangentes a la superficie de vínculos, entonces

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \quad (1.1.6)$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (1.1.7)$$

para algunos u^m . Estas igualdades se cumplen sobre la superficie de vínculos.

1.2. Vínculos secundarios

Introduzcamos, ahora, el hamiltoniano canónico, definido por

$$H = \dot{q}^n p_n - L. \quad (1.2.1)$$

Evaluando el cambio δH inducido por variaciones arbitrarias independientes de las posiciones y las velocidades, tal que,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \delta q^n + \left(\frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n \right) \delta p_n = 0, \quad (1.2.2)$$

podemos concluir que el hamiltoniano canónico está bien definido únicamente en la subvariedad de vínculos primarios y puede ser extendido arbitrariamente fuera de la misma. El formalismo debe permanecer invariante bajo el cambio

$$H \rightarrow H + c^m(q, p) \phi_m. \quad (1.2.3)$$

De la ecuación (1.2.2), y usando el teorema (2), tenemos

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (1.2.4)$$

$$- \frac{\partial L}{\partial q^n} \Big|_{\dot{q}} = \frac{\partial H}{\partial q^n} \Big|_p + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}. \quad (1.2.5)$$

Estas expresiones nos permiten reescribir las ecuaciones del sistema en la forma hamiltoniana equivalente,

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}, \quad (1.2.6)$$

$$\dot{p}_n = - \frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n}, \quad (1.2.7)$$

$$\phi_m(q, p) = 0. \quad (1.2.8)$$

Las mismas pueden ser derivadas del principio variacional,

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^m \phi_m) = 0, \quad (1.2.9)$$

para variaciones arbitrarias $\delta q^n, \delta p_n, \delta u_m$, con la restricción $\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0$. Las nuevas variables, u^m , introducidas para hacer la transformada de Legendre invertible, aparecen ahora como multiplicadores de Lagrange, reforzando los vínculos primarios.

Las ecuaciones de movimiento que derivan de (1.2.9) se escriben:

$$\dot{F} = [F, H] + u^m [F, \phi_m], \quad (1.2.10)$$

donde $F(q, p)$ es una función arbitraria de las variables canónicas, y los corchetes de Poisson $[,]$ se definen de la manera usual:

$$[F, G] = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}. \quad (1.2.11)$$

Examinemos las consecuencias de las ecuaciones de movimiento. Es un requerimiento que los vínculos primarios se preserven en el tiempo, esto es, $\dot{\phi}_m = 0$. Entonces, si tomamos ϕ_m cumpliendo el rol de F en la ecuación (1.2.10), da lugar a la condición:

$$[\phi_m, H] + u^{m'} [\phi_m, \phi_{m'}] = 0. \quad (1.2.12)$$

Si la relación entre los p y los q es independiente de los vínculos primarios, entonces es llamada *vínculo secundario*. Los vínculos secundarios se diferencian de los primarios en que estos últimos son mera consecuencia de la ecuación (1.1.4) que define las variables momentos, mientras que para los secundarios hay que hacer uso de las ecuaciones de movimiento.

Si existe un vínculo secundario, $X(q, p) = 0$, debemos imponer la siguiente condición para su conservación,

$$[X, H] + u^m [X, \phi_m] = 0. \quad (1.2.13)$$

Luego, se debe verificar si la expresión (1.2.13) implica nuevos vínculos secundarios o sólo restringe las u , y así sucesivamente. Terminado el proceso, tendremos un número k de vínculos secundarios,

$$\phi_k = 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K. \quad (1.2.14)$$

Esta notación nos permite escribir todos los vínculos, primarios y secundarios, como

$$\phi_j = 0, \quad j = 1, \dots, M + K = J. \quad (1.2.15)$$

Es útil introducir la definición de *igualdad débil*, con el símbolo \approx , para las ecuaciones de los vínculos. Por tanto, la ecuación (1.2.15) puede escribirse como:

$$\phi_j \approx 0, \quad (1.2.16)$$

haciendo énfasis en que dicha cantidad está restringida a ser cero, pero no es idénticamente nula en todo el espacio de fases. Esto significa que sus corchetes de Poisson con las variables canónicas son distintos de cero.

En general, dos funciones, F, G , que coinciden en la subvariedad definida por los vínculos, $\phi_j \approx 0$, son *débilmente iguales*, y se escriben $F \approx G$. De hecho, una ecuación que se sostiene en todo el espacio de fases y no sólo en la subvariedad $\phi_j \approx 0$, se denomina *igualdad fuerte*.

Capítulo 2

Relatividad General

La Relatividad General es una de las teorías físicas más bellas. Describe la gravitación en términos de una elegante estructura matemática, la geometría diferencial del espaciotiempo curvo, que conduce a predicciones inequívocas que han recibido una espectacular confirmación experimental.

En las últimas décadas, la Relatividad General se ha convertido en una parte integral e indispensable de la física moderna. Además de ser un área de investigación activa por derecho propio, la Relatividad General es una parte importante de los estudios en astrofísica, cosmología, teoría de cuerdas e incluso física de partículas. Esto no menosprecia los usos más pragmáticos de la Relatividad General, incluido el funcionamiento de la red satelital del Sistema de Posicionamiento Global (GPS).

La Ley de la Gravitación Universal de Newton fue aceptada como la descripción correcta de la fuerza gravitatoria hasta 1905, año en que surgió la Relatividad Especial. La acción instantánea a distancia entre dos masas descrita por la gravitación newtoniana era incompatible con los principios relativistas en los que la velocidad de la luz es la máxima velocidad a la que puede transmitirse información.

En 1915, Albert Einstein publicó la Teoría de la Relatividad General, una nueva descripción del campo gravitatorio en la que la gravedad se manifiesta como la curvatura del espaciotiempo. La teoría de la Relatividad General se basa en dos principios fundamentales: en primer lugar, el principio de equivalencia, que estipula que todas las masas experimentan la misma aceleración bajo la atracción gravitatoria, por lo cual, localmente, es indistinguible un sistema de referencia acelerado de uno

en reposo bajo la acción de un campo gravitatorio; en segundo lugar, el principio de covarianza general, que establece que las leyes de la física deben tomar la misma forma en todos los sistemas de referencia.

En años posteriores a su publicación, se pudieron confirmar experimentalmente ciertas predicciones de la Relatividad General, convirtiéndola en la mejor alternativa para describir la interacción gravitatoria. Una de las primeras pruebas experimentales que sirvió de respaldo a la teoría fue la correcta descripción de la precesión del perihelio de Mercurio, un fenómeno que la Mecánica Newtoniana no lograba explicar. Además, la predicción de que la luz no sigue una trayectoria recta sino que recorre curvas geodésicas del espacio curvo, fue confirmado en primera instancia por Eddington durante un eclipse en 1919.

Una llamativa reciente verificación de la teoría se produjo en el año 2016, cuando el Observatorio LIGO (The Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory), confirmó la primera detección directa de ondas gravitacionales, perturbaciones del espaciotiempo producidas por masas aceleradas que también predice la Relatividad General.

2.1. Gravedad y geometría diferencial

En el contexto de la Relatividad General, la gravedad es particular debido a que el campo dinámico que da lugar a la gravitación es el tensor métrico, que describe la curvatura del espaciotiempo mismo, en lugar de un campo adicional que se propaga a través del espaciotiempo de fondo. El principio físico que llevó a Einstein a esta idea fue la universalidad de la interacción gravitacional, tal como lo formaliza el Principio de Equivalencia. Este principio físico lleva a la estrategia matemática de describir la gravedad como la geometría de una variedad curva.

El Principio de Equivalencia se presenta en varias formas, la primera de las cuales es el Principio de Equivalencia Débil, o WEP por sus siglas en inglés. El WEP establece que la masa inercial y la masa gravitacional de cualquier objeto son iguales. Una consecuencia inmediata de esto es que el comportamiento de una partícula que cae libremente es universal, independiente de su masa o de cualquier otra característica que pueda tener.

Experimentalmente, la independencia de la aceleración debida a la gravedad respecto de la composición del objeto que cae ha sido verificada con una precisión extremadamente alta (experimento de Eötvös y sus sucesores modernos). Esto sugiere una formulación equivalente del WEP: existe una clase de trayectorias preferenciales a través del espaciotiempo, conocidas como trayectorias inerciales o "caída libre", en las que las partículas viajan no aceleradamente, donde "no acelerada" significa "sujeta solamente a la gravedad". Claramente, esto no es cierto para otras teorías, como el electromagnetismo. En presencia de un campo eléctrico, las partículas con cargas opuestas se moverán en trayectorias bastante diferentes.

La universalidad de la gravitación, puede expresarse de una manera más intuitiva. Consideremos a una persona en una caja herméticamente cerrada, incapaz de observar el mundo exterior, que está haciendo experimentos que involucran el movimiento de partículas de prueba, por ejemplo, para medir el campo gravitacional local [33]. Por supuesto, la persona obtendría respuestas diferentes si la caja estuviese posicionada en la luna, en Júpiter o en la Tierra. Pero las respuestas también serían diferentes si la caja estuviera acelerando a una tasa constante. Esto cambiaría la aceleración de las partículas que caen libremente con respecto a la caja. El WEP implica que no hay forma de separar los efectos de un campo gravitacional de los de estar en un marco de aceleración uniforme, simplemente observando el comportamiento de las partículas que caen libremente. Esto se desprende de la universalidad de la gravitación; en electrodinámica, en contraste, sería posible distinguir entre la aceleración uniforme y un campo electromagnético, observando el comportamiento de partículas con diferentes cargas.

Debemos limitar nuestras afirmaciones sobre la imposibilidad de distinguir la gravedad de la aceleración uniforme al restringir nuestra atención a "regiones suficientemente pequeñas del espaciotiempo". Si la caja sellada fuera lo suficientemente grande, el campo gravitacional cambiaría de un lugar a otro de manera observable, mientras que el efecto de la aceleración siempre estaría en la misma dirección. Por lo tanto, el WEP puede expresarse de la siguiente manera: "el movimiento de las partículas que caen libremente es el mismo en un campo gravitacional y un marco acelerado uniformemente, en regiones suficientemente pequeñas del espaciotiempo. En regiones más grandes del espaciotiempo habrá inhomogeneidades en el campo

gravitacional, lo que conducirá a las fuerzas de marea, que pueden detectarse".

Pero para Einstein, no debería haber ninguna forma para que la persona en la caja distinga entre aceleración uniforme y un campo gravitacional externo, sin importar los experimentos que realice. Esta extrapolación razonable se convirtió en lo que ahora se conoce como el Principio de Equivalencia de Einstein, o EEP (por sus siglas en inglés): "en regiones suficientemente pequeñas del espaciotiempo, las leyes de la física se reducen a las de la relatividad especial. Es imposible detectar la existencia de un campo gravitacional mediante experimentos locales."

El EEP implica que la gravedad es inevitable, es decir no existe un "objeto gravitacionalmente neutro" con respecto al cual podamos medir la aceleración debida a la gravedad. Se deduce que la misma no es algo que pueda definirse de manera confiable y, por lo tanto, es de poca utilidad. En cambio, tiene más sentido definir el concepto de "no acelerado" como el "caer libremente". A partir de esta idea es que consideramos que la gravedad no es una "fuerza". Una fuerza es algo que conduce a la aceleración, y nuestra definición de aceleración cero es "moverse libremente en presencia de cualquier campo gravitacional que esté alrededor". Este paso aparentemente inocuo tiene profundas implicaciones para la naturaleza del espaciotiempo.

Seguir las implicaciones de la universalidad de la gravitación nos ha llevado a renunciar a la idea de expresar la gravedad como una fuerza que se propaga a través del espaciotiempo y, de hecho, a renunciar a la idea de marcos de referencia globales que se extienden a lo largo del mismo. Por lo tanto, necesitamos invocar un marco matemático en el que las teorías físicas puedan ser consistentes con estas conclusiones. La solución sería imaginar que el espaciotiempo tiene una geometría curva, y que la gravitación es una manifestación de esta curvatura. La estructura matemática apropiada utilizada para describir la curvatura es la de una variedad diferenciable, esencialmente, un conjunto que se ve localmente como un espacio plano, pero que puede tener una geometría global muy diferente. No podemos demostrar que la gravedad deba considerarse como la curvatura del espaciotiempo, pero sí podemos proponer la idea, derivar sus consecuencias y ver si el resultado se ajusta razonablemente a nuestra experiencia del mundo.

2.1.1. Variedades

Una variedad, o *variedad diferenciable*, es uno de los conceptos fundamentales de la física y la matemática. Corresponde a un espacio posiblemente curvo y con una topología complicada, el cual 'coincide' localmente con \mathbb{R}^n , es decir, su métrica no es la misma, pero funciones y coordenadas funcionan de manera muy similar. La variedad completa se construye uniendo 'parches' de dichas regiones locales. La dimensión de estos espacios euclídeos utilizados debe ser la misma en cada región de la variedad, por tanto, tenemos una variedad de dimensión n .

Veamos los ejemplos más comunes de variedades:

- \mathbb{R}^n por sí misma, incluyendo la recta (\mathbb{R}), el plano (\mathbb{R}^2), etc.
- La n -esfera, S^n , lugar geométrico de todos los puntos a una distancia fija del origen en \mathbb{R}^{n+1} . El círculo S^1 y la 2-esfera S^2 , son los ejemplos más útiles.
- El n -toro, T^n , resulta de tomar un cubo n -dimensional e identificar los lados opuestos (ver figura (2.1.1)).
- Una superficie Riemanniana de género g es esencialmente un 2-toro con g hoyos en lugar de uno (figura (2.1.2)).
- En un aspecto más abstracto, un conjunto de transformaciones en \mathbb{R}^n forma una variedad. Los grupos de Lie son variedades que también tienen estructura de grupo. Por ejemplo, $SO(2)$, el conjunto de rotaciones en dos dimensiones, es la misma variedad que S^1 .
- El producto de dos variedades es una variedad. Dadas dos variedades \mathcal{M} y \mathcal{M}' , de dimensiones n y n' respectivamente, podemos construir una variedad $\mathcal{M} \times \mathcal{M}'$, de dimensión $n + n'$, que consiste en pares ordenados (p, p') con $p \in \mathcal{M}$ y $p' \in \mathcal{M}'$.

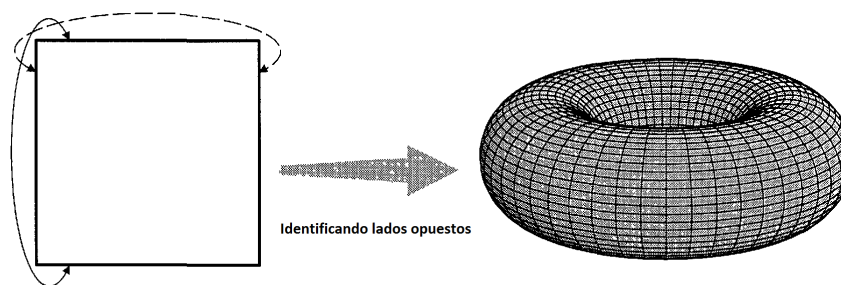


Figura 2.1.1: El 2-toro.

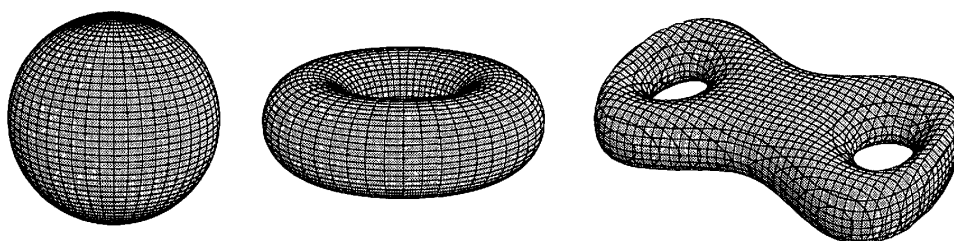


Figura 2.1.2: Superficies Riemannianas de género 0, 1 y 2.

2.1.2. Métrica

La *métrica* del espacio curvo, $g_{\mu\nu}$, es un tensor simétrico $(0, 2)$. Por su importancia, lo diferenciamos de $\eta_{\mu\nu}$, que refiere específicamente a la métrica de Minkowski. Por lo general, se considera no degenerado, lo que significa que su determinante $g = |g_{\mu\nu}|$ no se anula. Esto permite definir la métrica inversa $g^{\mu\nu}$, tal que,

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma} = g_{\lambda\sigma} g^{\lambda\mu} = \delta_{\sigma}^{\mu}. \quad (2.1.1)$$

La simetría del tensor $g_{\mu\nu}$ implica que $g^{\mu\nu}$ también es simétrico. Al igual que en la Relatividad Especial, la métrica y su inversa pueden utilizarse para subir y bajar índices en otros tensores. La métrica que usamos en la Relatividad General no se puede utilizar para definir una topología, pero tiene diversos usos:

- proporciona una noción de "pasado" y "futuro";
- permite el cálculo de la longitud de una trayectoria y el tiempo propio;

- determina la "distancia más corta" entre dos puntos y, por lo tanto, el movimiento de las partículas de prueba;
- reemplaza al campo gravitacional newtoniano;
- proporciona una noción de marcos localmente inerciales y, por lo tanto, un sentido de "no rotación";
- determina la causalidad, definiendo la velocidad de la luz como más rápida de lo que ninguna señal puede viajar;
- reemplaza el producto escalar tridimensional de la Mecánica Newtoniana.

El tensor métrico $g_{\mu\nu}$ contiene toda la información necesaria para describir la curvatura de la variedad. A su vez, define la distancia infinitesimal entre dos puntos del espaciotiempo de la siguiente manera:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1.2)$$

Escribiendo $g_{\mu\nu}$ en su forma canónica, se obtiene una caracterización útil de la métrica. De esta forma, los componentes métricos son:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, \dots, -1, +1, +1, \dots, +1, 0, 0, \dots, 0), \quad (2.1.3)$$

donde "diag" significa una matriz diagonal con los elementos dados. La signatura de la métrica es el número de valores propios positivos y negativos; por ejemplo, para el espacio Minkowski, hablamos de una métrica con signatura "menos-más-más-más". Si alguno de los valores propios es cero, la métrica es degenerada y su inversa no existirá. Si la métrica es continua y no degenerada, su signatura será la misma en todos los puntos.

Siempre trataremos con métricas continuas y no degeneradas. Si todos los signos son positivos, la métrica se llama *Euclidiana* o *Riemanniana*, mientras que si hay un sólo signo de menos la métrica se llama *Lorentziana* o *Pseudo-Riemanniana*. Vale aclarar que la palabra 'euclidiana' a veces significa que el espacio es plano, y a veces no, pero siempre significa que la forma canónica es estrictamente positiva. Los espaciotiempos de interés en Relatividad General tienen métricas Lorentzianas.

2.1.3. Tensores

Un tensor T de rango (k, l) es un mapa multilinear de una colección de vectores y vectores duales en \mathbb{R} ,

$$T : T_p^* \times \dots \times T_p^* \times T_p \times \dots \times T_p \rightarrow \mathbb{R}, \quad (2.1.4)$$

con T_p , el espacio tangente en un punto p , multiplicado k veces (bajo producto cartesiano), y T_p^* , el espacio dual, multiplicado l veces.

El espacio de todos los tensores de rango (k, l) forma un espacio vectorial. Para construir una base de este espacio necesitamos definir la operación 'producto tensorial', representada por el símbolo ' \otimes '. Si T es un tensor de rango (k, l) y S uno de rango (m, n) , definimos el tensor $T \otimes S$ de rango $(k + m, l + n)$ como

$$T \otimes S (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}, \dots, V^{(l+n)}) = \\ T (\omega^{(1)}, \dots, \omega^{(k)}, V^{(1)}, \dots, V^{(l)}) \times S (\omega^{(k+1)}, \dots, \omega^{(k+m)}, V^{(l+1)}, \dots, V^{(l+n)}), \quad (2.1.5)$$

donde $\omega^{(i)}$ y $V^{(i)}$ son vectores y vectores duales distintos. Nótese que, en general, el producto tensorial no es conmutativo. Un tensor de rango (k, l) tiene k índices superiores y l inferiores, donde el orden es un factor importante.

Los tensores pueden ser representados en términos de sus componentes, esto resulta de gran utilidad a la hora de realizar operaciones. Las componentes de un tensor quedan definidas con respecto a una base dada, que no es otra cosa que un conjunto de tensores de referencia que son linealmente independientes. Esto es equivalente a elegir un conjunto de vectores $\omega_a^{(i)}$ y los duales $V_b^{(i)}$, todos ellos linealmente independientes, con a y b tomando valores desde 1 hasta la dimensión del espacio tangente T_p^i , o del dual $T_p^{(i)*}$, que corresponda. Por ejemplo, definimos las componentes de un tensor T arbitrario como

$$T_a^c \dots_b^d = T \left(\omega_a^{(1)}, \dots, \omega_b^{(i)}, V_c^{(1)}, \dots, V_d^{(l)} \right). \quad (2.1.6)$$

De ahora en adelante nos referiremos a cualquier tensor en términos de sus com-

ponentes. Un ejemplo que nos resulta familiar es el tensor métrico, g_{ab} , de rango $(0, 2)$. Se trata de un tensor simétrico que no tiene que ser necesariamente definido positivo. Este permite definir un producto interno a través de su acción sobre dos vectores, de la siguiente manera:

$$g(V, W) = g_{ab}V^aW^b = V \cdot W. \quad (2.1.7)$$

En esta expresión usamos el convenio de suma de Einstein, que indica que cuando dos índices aparecen repetidos, debemos sumarlos en su rango de definición. El término métrica se debe a que este tipo de tensores permiten definir distancias entre elementos del espacio tangente donde están definidos. La métrica también se usa para relacionar elementos de T_p y del dual T_p^* , por ejemplo,

$$V_a = g_{ab}V^b. \quad (2.1.8)$$

2.1.4. Densidades tensoriales

Además de los tensores, es útil definir ciertos objetos no tensoriales. En cualquier sistema de coordenadas, definimos el *símbolo de Levi-Civita* como

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} = \begin{cases} +1, & \text{si } \mu_1 \mu_2 \dots \text{ es una permutación par de } 012 \dots (n-1) \\ -1, & \text{si } \mu_1 \mu_2 \dots \text{ es una permutación impar de } 012 \dots (n-1) \\ 0, & \text{de otra forma.} \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Lo llamamos "símbolo" porque no es un tensor, está definido para ser invariante bajo cambios de coordenadas. Sólo podemos tratarlo como un tensor en coordenadas inerciales en el espaciotiempo plano, ya que las transformaciones de Lorentz dejarían las componentes invariantes de todos modos. Su comportamiento puede relacionarse con el de un tensor ordinario notando primero que, dada cualquier matriz $n \times n$, $M^\mu_{\mu'}$, su determinante, $|M|$, obedece

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} |M| = \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} \dots M^{\mu_n}_{\mu'_n} \quad (2.1.10)$$

Esta es sólo una expresión simplificada para el determinante de cualquier matriz, completamente equivalente a la fórmula habitual en términos de matrices de cofactores. Estableciendo $M^{\mu}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$, tenemos

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1 \dots \mu'_n} = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}}, \quad (2.1.11)$$

donde hemos utilizado que $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}$ es el inverso de $\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$, y que el determinante del inverso de una matriz es el inverso del determinante. Los objetos que transforman de esta manera se conocen como *densidades tensoriales*. Otro ejemplo está dado por el determinante de la métrica, $g = |g_{\mu\nu}|$. Es fácil verificar que bajo una transformación de coordenadas se obtiene:

$$g(x^{\mu'}) = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|^{-2} g(x^{\mu}). \quad (2.1.12)$$

Por lo tanto, g tampoco es un tensor. Transforma de manera similar al símbolo de Levi-Civita, excepto que el Jacobiano se eleva a la potencia -2 . La potencia a la cual se eleva el Jacobiano se conoce como el *peso de la densidad*. El símbolo Levi-Civita es una densidad de peso 1, mientras que g es una densidad (escalar) de peso -2 .

Sin embargo, por su simplicidad preferimos los tensores a las densidades tensoriales. Una forma sencilla de convertir una densidad en un tensor es multiplicar por $|g|^{w/2}$, donde w es el peso de la densidad (el valor absoluto aparece porque $g < 0$ para métricas de Lorentz). El resultado se transformará según la ley de transformación de tensores. Por ejemplo, podemos definir el tensor Levi-Civita como

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (2.1.13)$$

Como este es un tensor real, podemos subir índices, y obtener la relación

$$\epsilon^{\mu_1 \dots \mu_n} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\epsilon}^{\mu_1 \dots \mu_n}. \quad (2.1.14)$$

2.1.5. Curvatura

La *curvatura* depende de alguna manera de la métrica que define la geometría de la variedad, pero no está del todo claro cómo atribuir curvatura a una métrica determinada. Es necesario formalizar este concepto a través de una estructura matemática útil. Un elemento necesario para construir la curvatura requiere definiciones precisas sobre cómo se puede derivar un tensor.

La *derivada de Lie* es una derivación en el álgebra de funciones diferenciables sobre una variedad diferenciable \mathcal{M} , cuya definición puede extenderse al álgebra tensorial de la variedad. Obtenemos entonces lo que en topología diferencial se denomina *derivación tensorial*: una aplicación \mathbb{R} -lineal sobre el conjunto de tensores de tipo (k, l) , que preserve el tipo tensorial, satisface la regla del producto de Leibniz y que conmuta con las contracciones. Alcanza con definir explícitamente su acción sobre funciones y campos vectoriales. Si X es un campo vectorial diferenciable, la derivada de Lie de una función diferenciable, f , es

$$\mathcal{L}_X f = X(f). \quad (2.1.15)$$

Por otro lado, la derivada de Lie de un campo vectorial diferenciable, Y , es

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]. \quad (2.1.16)$$

Aquí, $[,]$ es el *Corchete de Lie*, definido por: $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.

La curvatura se manifiesta a través de la llamada *conexión*. Existe una única conexión simétrica que podemos construir a partir de la condición $\nabla_\mu g_{\nu\rho} = 0$, y que está encapsulada en los objetos llamados *símbolos de Christoffel*, dados por

$$\Gamma_{\nu\rho}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} (\partial_\nu g_{\rho\sigma} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}). \quad (2.1.17)$$

No deben identificarse estos objetos con tensores, por eso les llamamos “símbolos”. Por conveniencia, de ahora en adelante asumiremos que la métrica $g_{\mu\nu}$ es Lorentziana, concretamente con signatura $-+++$, sobre una variedad de dimensión cuatro. Por lo tanto, los índices μ, ν , etc. van desde 0 hasta 3. La notación ∂_μ significa *derivada*

parcial respecto a la coordenada x^μ .

La *derivada covariante* ∇_μ es una generalización de la derivada parcial que tiene en cuenta la curvatura. La derivada covariante de un campo vectorial V^ν está dada por

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu V^\rho. \quad (2.1.18)$$

La conexión también aparece en la definición de geodésica (generalización del concepto de línea recta). Una curva parametrizada $x^\mu(\lambda)$ es una *geodésica* si obedece

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\rho}{d\lambda} = 0. \quad (2.1.19)$$

Toda la información acerca de la curvatura de una variedad está contenida en un tensor de rango (1, 3), conocido como *tensor de Riemann*,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (2.1.20)$$

Este tiene todas sus componentes nulas si y sólo si la métrica es perfectamente plana. Es un tensor antisimétrico en los dos últimos índices y, además, satisface las identidades de Bianchi:

$$\nabla_{[\lambda} R^\mu_{\rho\sigma]\nu} = 0, \quad (2.1.21)$$

donde los corchetes en los índices indican su antisimetrización. El tensor de Riemann puede contraerse en forma del *tensor de Ricci*,

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.1.22)$$

que es un tensor simétrico. Si tomamos su traza,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.1.23)$$

obtenemos el llamado *escalar de Ricci* o *curvatura escalar*.

El tensor de Riemann aporta todo lo que necesitamos saber sobre la curvatura de una variedad. La ecuación de Einstein de la Relatividad General relaciona ciertas componentes del tensor de Riemann con las del tensor de energía-momento.

A continuación, veremos en detalle las propiedades mencionadas, asociadas a la curvatura.

2.1.5.1. Derivadas covariantes

La curvatura depende de una conexión, y las conexiones pueden o no depender de la métrica. No obstante, demostraremos cómo la existencia de una métrica implica una determinada conexión única, y cuya curvatura puede pensarse como la de la métrica misma. Esta es la conexión utilizada en Relatividad General, por lo que es legítimo pensar en la curvatura como una característica de la métrica, sin introducir estructuras adicionales.

La conexión se vuelve necesaria cuando intentamos abordar el problema de que la derivada parcial no es un buen operador tensorial. Es necesario un operador que se reduzca a la derivada parcial en el espacio plano con coordenadas inerciales, pero que transforme como un tensor en una variedad arbitraria. Este es la *derivada covariante*.

En el espacio plano en coordenadas inerciales, el operador de derivada parcial, ∂_μ , es un mapa de los campos tensoriales (k, l) en los campos tensoriales $(k, l + 1)$, que actúa linealmente sobre sus argumentos y obedece la regla de Leibniz sobre los productos tensoriales. El mapa proporcionado por la derivada parcial depende del sistema de coordenadas utilizado, por lo tanto, debemos definir un operador *derivada covariante*, ∇ , para ejecutar funciones de la derivada parcial pero de una manera independiente de las coordenadas.

Requerimos que ∇ sea un mapa de los campos tensoriales (k, l) en los campos tensoriales $(k, l + 1)$ y cumpla las siguientes propiedades:

1. Linealidad: $\nabla(T + S) = \nabla T + \nabla S$,
2. Regla de Leibniz del producto: $\nabla(T \otimes S) = (\nabla T) \otimes S + T \otimes (\nabla S)$.

Para cada dirección μ , la derivada ∇_μ estará dada por la derivada parcial ∂_μ más una corrección especificada por un conjunto de n matrices, $(\Gamma_\mu)^\rho_\sigma$ (una matriz $n \times n$, donde n es la dimensionalidad de la variedad, para cada μ), llamadas *coeficientes de conexión*. Podemos deshacernos de los paréntesis y simplemente denotar $(\Gamma_\mu)^\rho_\sigma \equiv \Gamma_{\mu\sigma}^\rho$; entonces tenemos que la derivada covariante de un vector V^ν es

$$\nabla_{\mu} V^{\nu} = \partial_{\mu} V^{\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} V^{\lambda}. \quad (2.1.24)$$

La ley de transformación de esta expresión debe ser

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \nabla_{\mu} V^{\nu}. \quad (2.1.25)$$

de manera que el lado izquierdo transforme como un tensor (1, 1). Como consecuencia

$$\Gamma_{\mu'\lambda'}^{\nu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}} \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}}. \quad (2.1.26)$$

Nótese que los coeficientes de conexión se construyen de manera que (2.1.24) transforme como un tensor, pero estos no son realmente las componentes de un tensor, por eso no debemos preocuparnos demasiado acerca de la posición de los índices.

Con un razonamiento similar al utilizado para vectores, la derivada covariante de una 1-forma también se puede expresar como una derivada parcial más una transformación lineal; pero aún no hay ninguna razón para que las matrices que representan dicha transformación deban estar relacionadas con los coeficientes $\Gamma_{\mu\lambda}^{\nu}$. En general, podríamos escribir algo como

$$\nabla_{\mu} \omega_{\nu} = \partial_{\mu} \omega_{\nu} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda} \omega_{\lambda}, \quad (2.1.27)$$

donde $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\lambda}$ es un nuevo conjunto de matrices para cada μ . Las propiedades de transformación de $\tilde{\Gamma}$ deben ser las mismas que para Γ , de modo que $\nabla_{\mu} \omega_{\nu}$ transforme como un tensor. Para ello, es necesario introducir dos propiedades adicionales a nuestra definición de derivada covariante:

3. Conmuta con las contracciones: $\nabla_{\mu} (T^{\lambda}{}_{\lambda\rho}) = (\nabla T)_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\lambda\rho}$,

4. En escalares, se reduce a la derivada parcial: $\nabla_{\mu} \phi = \partial_{\mu} \phi$.

La propiedad (3) equivale a decir que la delta de Kronecker (el mapa identidad) es covariantemente constante, es decir, $\nabla_{\mu} \delta_{\sigma}^{\lambda} = 0$.

Aplicando la derivada covariante al escalar definido por $\omega_{\nu} V^{\nu}$, se deduce que

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\lambda}^{\sigma} = -\Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}. \quad (2.1.28)$$

Las dos condiciones extra impuestas nos permiten expresar la derivada covariante de una 1-forma utilizando los mismos coeficientes de conexión que para el caso de un vector, esto es,

$$\nabla_{\mu}\omega_{\nu} = \partial_{\mu}\omega_{\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}\omega_{\lambda}. \quad (2.1.29)$$

Los coeficientes de conexión codifican toda la información necesaria para tomar la derivada covariante de un tensor de rango arbitrario. La expresión general de la derivada covariante es la siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla_{\sigma}T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} = & \partial_{\sigma}T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_1}T^{\lambda\mu_2\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} + \Gamma_{\sigma\lambda}^{\mu_2}T^{\mu_1\lambda\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} + \dots \\ & - \Gamma_{\sigma\nu_1}^{\lambda}T^{\mu_2\dots\mu_k}_{\lambda\nu_2\dots\nu_l} - \Gamma_{\sigma\nu_2}^{\lambda}T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\lambda\dots\nu_l} - \dots \end{aligned} \quad (2.1.30)$$

Evidentemente, podríamos definir un gran número de conexiones en cualquier variedad, y cada una de ellas implica una noción distinta de diferenciación covariante. En la Relatividad General, esta libertad no es una gran preocupación, porque resulta que cada métrica define una conexión única, que es la que se utiliza en la teoría.

Dada una conexión con coeficientes $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ podemos formar otra conexión, simplemente permutando los índices inferiores. Es decir, el conjunto de coeficientes $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$ también transformará según (2.1.26), por lo que determinan una conexión distinta. Por lo tanto, existe un tensor que podemos asociar con cualquier conexión dada, llamado *tensor de torsión*, y definido por

$$T^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = 2\Gamma_{[\mu\nu]}^{\lambda}. \quad (2.1.31)$$

El tensor de torsión es antisimétrico en sus índices inferiores, y si una conexión es simétrica en dichos índices es denominada '*conexión libre de torsión*'.

Ahora podemos definir una conexión única para una variedad con una métrica $g_{\mu\nu}$, introduciendo dos propiedades adicionales:

5. Coeficientes libres de torsión: $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \Gamma_{(\mu\nu)}^{\lambda}$,
6. Compatibilidad con la métrica: $\nabla_{\rho}g_{\mu\nu} = 0$.

Una conexión es compatible con la métrica si la derivada covariante de la métrica

con respecto a esa conexión es cero en todas partes. Esto implica dos cosas. Primero, que tanto el tensor Levi-Civita como la métrica inversa también tienen derivada covariante cero,

$$\nabla_{\lambda}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 0, \quad (2.1.32)$$

$$\nabla_{\rho}g^{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.33)$$

Segundo, una derivada covariante compatible con la métrica conmuta con subir y bajar índices, esto es,

$$g_{\mu\lambda}\nabla_{\rho}V^{\lambda} = \nabla_{\rho}(g_{\mu\lambda}V^{\lambda}) = \nabla_{\rho}V_{\mu}. \quad (2.1.34)$$

Hay exactamente una conexión libre de torsión para cierta variedad que es compatible con alguna métrica dada en esa variedad. No queremos que estos dos requisitos formen parte de la definición de derivada covariante, simplemente destacan una de las tantas posibilidades. Es posible demostrar tanto la existencia como la unicidad de la conexión, compatible con la métrica y libre de torsión, derivando una expresión única para los coeficientes de conexión en términos de la métrica:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\sigma} = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_{\mu}g_{\nu\rho} + \partial_{\nu}g_{\rho\mu} - \partial_{\rho}g_{\mu\nu}). \quad (2.1.35)$$

Esta conexión es en la que se basa la Relatividad General. Se le conoce por diferentes nombres: *conexión de Christoffel*, *conexión de Levi-Civita* o *conexión Riemanniana*. Los coeficientes de conexión asociados a la misma se denominan *símbolos de Christoffel*.

El estudio de las variedades con métricas y sus conexiones asociadas se llama *Geometría Riemanniana*, o a veces *pseudo-Riemanniana* cuando la métrica tiene signatura de Lorentz.

Nótese que en el espacio plano hay una conexión implícita que usamos todo el tiempo: la conexión de Christoffel construida a partir de la métrica plana. Los coeficientes de la conexión de Christoffel en el espacio plano se anulan en coordenadas cartesianas, pero no en sistemas de coordenadas curvilíneas.

Por otro lado, la expresión para la divergencia de un vector (con respecto a la conexión de Christoffel) se simplifica. La divergencia covariante de un vector V^{μ} está

dada por

$$\nabla_{\mu} V^{\mu} = \partial_{\mu} V^{\mu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} V^{\lambda}. \quad (2.1.36)$$

Es fácil ver que la conexión de Christoffel satisface

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{\mu} \left(\sqrt{|g|} \right). \quad (2.1.37)$$

Si V^{μ} es un campo vectorial sobre una región Σ con borde $\partial\Sigma$, el teorema de Stokes es

$$\int_{\Sigma} \nabla_{\mu} V^{\mu} \sqrt{|g|} d^n x = \int_{\partial\Sigma} n_{\mu} V^{\mu} \sqrt{|h|} d^{n-1} x, \quad (2.1.38)$$

donde n_{μ} es la normal respecto a $\partial\Sigma$ y h_{ij} es la métrica inducida en $\partial\Sigma$. Si la conexión no fuese compatible con la métrica y libre de torsión, la ecuación tendría términos adicionales.

2.1.5.2. Transporte paralelo y geodésicas

Una función define un número en cada punto del espaciotiempo, y es sencillo comparar dos números diferentes, por lo cual es de esperar que la derivada parcial de funciones siga siendo válida en variedades arbitrarias. Pero un tensor es un mapa de vectores, y vectores duales, en números reales, y no está claro cómo comparar dichos mapas en diferentes puntos del espaciotiempo. Cabe preguntarse, entonces, ¿podemos pensar la derivada covariante como una medida de la tasa de cambio de los tensores? Sí, la derivada covariante cuantifica la tasa instantánea de cambio de un campo tensorial en comparación con lo que sería el tensor si fuera 'transportado paralelamente'. En otras palabras, una conexión define una forma específica de mantener constante un tensor a lo largo de algún camino.

El concepto de mover un vector a lo largo de una trayectoria, manteniéndolo constante todo el tiempo, se conoce como *transporte paralelo*. El transporte paralelo requiere una conexión para estar bien definido. La diferencia crucial entre espacios planos y curvos es que, en un espacio curvo, el resultado del transporte paralelo de un vector dependerá de la trayectoria que se tome entre los puntos inicial y final. Veamos

un ejemplo de transporte paralelo sobre la 2-esfera. Comenzamos con un vector en el ecuador, apuntando a lo largo de una línea de longitud constante. Paralelamente, lo transportamos hasta el polo norte a lo largo de una línea de longitud de la manera obvia. Luego tomamos el vector original, transportamos en paralelo a lo largo del ecuador en un ángulo θ y luego lo movemos hacia el polo norte como antes. Como se muestra en la figura (2.1.3), el vector, transportado en paralelo a lo largo de dos caminos, llega al mismo destino con dos valores diferentes (rotados por un ángulo θ).

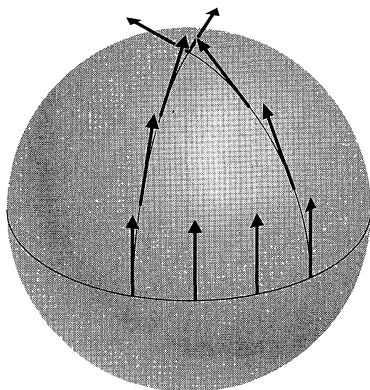


Figura 2.1.3: Transporte paralelo en la 2-esfera.

No existe una forma única de mover un vector de un espacio tangente a otro; siempre podemos transportarlo en paralelo, pero el resultado depende del camino. Dos vectores solo pueden compararse de forma natural si son elementos del mismo espacio tangente.

El transporte paralelo es la generalización al espacio curvo del concepto de "mantener un vector constante" a medida que lo movemos a lo largo de una trayectoria; la idea es similar para un tensor de rango arbitrario. Dada una curva $x^\mu(\lambda)$, el requerimiento de que un tensor $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}$ sea constante a lo largo de la misma en el espacio plano es, simplemente, que sus componentes sean constantes:

$$\frac{d}{d\lambda} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d}{dx^\mu} T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0. \quad (2.1.39)$$

Para hacer esta expresión propiamente tensorial reemplacemos la derivada parcial por una covariante. Definamos la *derivada direccional covariante* como:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu. \quad (2.1.40)$$

Este es un mapa (definido sólo a lo largo de la trayectoria) de tensores (k, l) a tensores (k, l) . Definimos el *transporte paralelo* del tensor T a lo largo de la trayectoria $x^\mu(\lambda)$, como el requerimiento de que la derivada covariante de T a lo largo de la curva se anule:

$$\left(\frac{D}{d\lambda} T \right)^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} \equiv \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l} = 0. \quad (2.1.41)$$

Esta es una ecuación tensorial bien definida, conocida como *ecuación de transporte paralelo*. Para un vector toma la forma

$$\frac{d}{d\lambda} V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda} V^\rho = 0. \quad (2.1.42)$$

Podemos considerar la ecuación de transporte paralelo como una ecuación diferencial de primer orden que define un problema de condiciones iniciales: dado un tensor en un punto a lo largo de una trayectoria, habrá una continuación única del tensor a otros puntos a lo largo de la trayectoria de manera que la misma resuelve (2.1.41). Decimos que tal tensor se transporta paralelamente. El concepto de transporte paralelo obviamente depende de la conexión, por tanto, diferentes conexiones conducen a diferentes respuestas. Si la conexión es compatible con la métrica, la misma siempre se transporta paralelamente con respecto a ella, es decir,

$$\frac{D}{d\lambda} g_{\mu\nu} = \frac{dx^\sigma}{d\lambda} \nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.43)$$

El producto interno de dos vectores transportados paralelamente se preserva. Esto significa que el transporte paralelo con respecto a una conexión compatible con la métrica preserva la norma de los vectores, la ortogonalidad, etc.

El siguiente concepto a discutir es el de geodésica. La *geodésica* es la generalización al espacio curvo del concepto de línea recta en el espacio euclídeo, esto es, la trayectoria de menor distancia entre dos puntos. De igual forma: una línea recta es una trayectoria que transporta en paralelo su propio vector tangente. Estos dos conceptos coinciden si, y sólo si, la conexión es la conexión de Christoffel. El vector tangente a una trayectoria $x^\mu(\lambda)$ es $dx^\mu/d\lambda$. La condición de que sea transportado

paralelamente es, por lo tanto,

$$\frac{D}{d\lambda} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = 0, \quad (2.1.44)$$

o, alternativamente, la llamada *ecuación geodésica*.

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.1.45)$$

Obsérvese que reproduce el concepto conocido de línea recta si los coeficientes de conexión son los símbolos de Christoffel en el espacio euclídeo ($d^2 x^\mu/d\lambda^2$). Varias sutilezas están involucradas en la definición de distancia en un espaciotiempo lorentziano; para trayectos nulos, la distancia es cero, para trayectorias de tipo tiempo es más conveniente utilizar el tiempo propio. Entonces, encontremos la ecuación resultante para una trayectoria de tipo tiempo, que resultará ser válida para cualquier camino, por lo que no estamos perdiendo generalidad. Por lo tanto, consideremos el tiempo propio funcional,

$$\tau = \int \left(-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda, \quad (2.1.46)$$

donde la integral es sobre la trayectoria. Luego de algunos cálculos, se tiene que la ecuación geodésica para una trayectoria de tipo tiempo en términos del tiempo propio τ es:

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (2.1.47)$$

Esta es precisamente la ecuación (2.1.42) pero con la elección específica de la conexión de Christoffel.

La principal utilidad de las geodésicas en Relatividad General es que son las trayectorias seguidas por partículas de prueba 'no aceleradas'. Una *partícula de prueba* es un cuerpo que no influye por sí mismo en la geometría a través de la cual se transporta (esto no es exacto, pero es una excelente aproximación). Este concepto permite explorar, por ejemplo, las propiedades del campo gravitacional alrededor del Sol, sin preocuparse por el campo gravitatorio del planeta cuyo movimiento estamos

considerando. La ecuación geodésica se puede pensar como la generalización de la ley de Newton $f = ma$, para el caso $f = 0$ en el espaciotiempo curvo. También es posible introducir fuerzas agregando términos del lado derecho de (2.1.45), por ejemplo,

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = \frac{q}{m} F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.1.48)$$

2.1.5.3. Tensor de Riemann

Una vez claros los conceptos de derivada covariante y transporte paralelo, lo que sigue es comenzar a discutir el concepto de curvatura. La curvatura se cuantifica mediante el tensor de Riemann, que deriva de la conexión. La idea detrás de medir la curvatura es que sabemos qué significa "planitud" de una conexión. Por ejemplo, la conexión de Christoffel, asociada con la métrica Euclidiana o Minkowskiana, tiene una serie de propiedades que pueden considerarse como manifestaciones de planitud. Estas incluyen el hecho de que el transporte paralelo alrededor de un bucle cerrado deja un vector invariante, que las derivadas covariantes de los tensores conmutan y que las geodésicas inicialmente paralelas permanecen paralelas. El tensor de Riemann surge cuando estudiamos cómo se altera cualquiera de estas propiedades en contextos más generales.

Una forma convencional de introducir el tensor de Riemann, es considerar el transporte paralelo alrededor de un bucle infinitesimal. Dado que el espaciotiempo parece plano en regiones suficientemente pequeñas, dicho bucle estará especificado por dos vectores infinitesimales A^μ y B^ν . Imaginemos el transporte paralelo de un vector V^μ moviéndolo primero en la dirección de A^μ , luego a lo largo de B^ν , luego hacia atrás a lo largo de A^μ y B^ν para regresar al punto de partida, como se muestra en la figura (2.1.4). La acción del transporte paralelo es independiente de las coordenadas, por lo que debería haber algún tensor que nos diga cómo cambia el vector cuando vuelve a su punto de partida; dicho tensor será una transformación lineal sobre un vector y, por lo tanto, involucrará un índice superior y uno inferior. También dependerá de los vectores que definen el bucle, por lo tanto, debería haber dos índices inferiores adicionales para contraer con A^μ y B^ν . Otra característica del tensor es que debe ser antisimétrico en estos dos índices, ya que intercambiar los vectores corresponde a recorrer el bucle en la dirección opuesta. Esto es consistente con

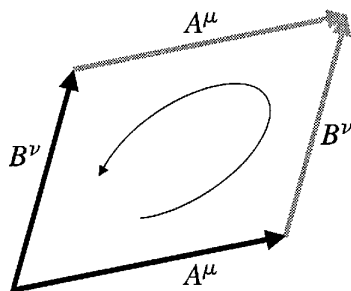


Figura 2.1.4: Bucle infinitesimal definido por dos vectores A^μ y B^ν .

el hecho de que la transformación debería anularse si A y B son el mismo vector. Por todo lo anterior, esperamos que la expresión para la variación, δV^ρ , experimentada por este vector cuando se transporta en paralelo alrededor del bucle sea de la forma

$$\delta V^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} V^\sigma A^\mu B^\nu \quad (2.1.49)$$

donde $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ es un tensor (1,3) conocido como *tensor de Riemann* (o *tensor de curvatura*). Como ya mencionamos, este tensor es antisimétrico en los últimos dos índices, esto es,

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = -R^\rho_{\sigma\nu\mu}. \quad (2.1.50)$$

La relación entre el conmutador de derivadas covariantes y el transporte paralelo alrededor de un bucle es evidente; la derivada covariante de un tensor en una cierta dirección mide cuánto cambia el tensor en relación a lo que habría sido si se hubiese transportado paralelamente, ya que la derivada covariante de un tensor en cierta dirección a lo largo de la cual se transporta paralelamente es cero. El conmutador de dos derivadas covariantes, entonces, mide la diferencia entre el transporte paralelo del tensor primero en una dirección y luego en la otra, versus el orden opuesto. Considerando esta propiedad de la derivada covariante, se obtiene la expresión de la curvatura en función de los coeficientes de conexión:

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}. \quad (2.1.51)$$

Nótese que el tensor de Riemann está constituido en términos de la conexión, sin hacer mención a la métrica, esto significa que la expresión anterior vale para cualquier conexión, sin importar si es compatible con la métrica o libre de torsión.

Tanto el tensor de torsión como el tensor de Riemann, pensados como mapas multilineales, tienen expresiones elegantes en términos del conmutador de campo vectorial.

Pensando en la torsión como un mapa de dos campos vectoriales a un tercer campo vectorial, tenemos

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y], \quad (2.1.52)$$

y pensando en el tensor de Riemann como un mapa de tres campos vectoriales a un cuarto campo vectorial, tenemos

$$R(X, Y) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z. \quad (2.1.53)$$

La notación ∇_X refiere a la derivada covariante a lo largo del campo vectorial X ($\nabla_X = X^\mu \nabla_\mu$). Por ejemplo, (2.1.53) es equivalente a

$$\begin{aligned} R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} X^\mu Y^\nu Z^\sigma &= X^\lambda \nabla_\lambda (Y^\eta \nabla_\eta Z^\rho) - Y^\lambda \nabla_\lambda (X^\eta \nabla_\eta Z^\rho) \\ &\quad - (X^\lambda \partial_\lambda Y^\eta - Y^\lambda \partial_\lambda X^\eta) \nabla_\eta Z^\rho. \end{aligned} \quad (2.1.54)$$

Habiendo definido el tensor de curvatura como un objeto que caracteriza la conexión, consideremos ahora la conexión de Christoffel, que es la que más nos interesa en Relatividad General. En este caso, la conexión se deriva de la métrica y la curvatura asociada puede considerarse como la curvatura de la métrica misma. Esta identificación nos permite finalmente dar sentido a nuestra idea informal de que los espacios para los que la métrica parece Euclidiana o Minkowskiana son planos. De hecho, funciona en ambos sentidos: si existe un sistema de coordenadas en el que las componentes de la métrica son constantes, entonces el tensor de Riemann se anulará. Por otro lado, si el tensor de Riemann es nulo, siempre podemos construir un sistema de coordenadas en el que las componentes de la métrica sean constantes.

El tensor de Riemann, con cuatro índices, tiene n^4 componentes independientes en un espacio n -dimensional. De hecho, la propiedad de antisimetría significa que sólo

hay $n(n-1)/2$ valores independientes que estos dos últimos índices pueden asumir, dejándonos $n^3(n-1)/2$ componentes independientes.

Cuando consideramos la conexión de Christoffel, una serie de simetrías reducen aún más las componentes independientes. La forma más sencilla de derivar estas simetrías adicionales es examinar el tensor de Riemann con todos los índices inferiores:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\lambda} R^{\lambda}{}_{\sigma\mu\nu}. \quad (2.1.55)$$

Observemos que $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ tiene las siguientes propiedades:

1. es antisimétrico en los dos primeros índices: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}$,
2. es antisimétrico en los dos últimos índices: $R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\rho\sigma\nu\mu}$,
3. es invariante bajo el intercambio del primer par de índices con el segundo:
 $R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\mu\nu\rho\sigma}$,
4. la suma de las permutaciones cíclicas de los últimos tres índices se anula:
 $R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0$ (equivalentemente, $R_{\rho[\sigma\mu\nu]} = 0$).

No todas estas propiedades son independientes. Debemos preguntarnos entonces, dadas estas relaciones entre las diferentes componentes del tensor de Riemann, ¿cuántas cantidades independientes quedan?. Comencemos con el hecho de que $R_{\rho\sigma\mu\nu}$ es antisimétrico en los dos primeros índices, antisimétrico en los dos últimos índices y simétrico en el intercambio de estos dos pares. Esto significa que podemos pensarlo como una matriz simétrica $R_{[\rho\sigma][\mu\nu]}$ donde los pares $\rho\sigma$ y $\mu\nu$ se consideran índices individuales. Una matriz simétrica $m \times m$ tiene $m(m+1)/2$ componentes independientes, mientras que una matriz antisimétrica $n \times n$ tiene $n(n-1)/2$ componentes independientes. Por lo tanto tenemos

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}n(n-1) \right] \left[\frac{1}{2}n(n-1) + 1 \right] = \frac{1}{8} (n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) \quad (2.1.56)$$

componentes independientes. Todavía tenemos que lidiar con la simetría adicional (4), cuya consecuencia inmediata es que la parte totalmente antisimétrica del tensor de Riemann se anula,

$$R_{[\rho\sigma\mu\nu]} = 0. \quad (2.1.57)$$

Imponer (2.1.57), es equivalente a imponer (4).

Una vez que se han tenido en cuenta las demás simetrías, ¿Cuántas restricciones independientes sobreviven? Para determinarlo, descompongamos el tensor de la siguiente manera:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = X_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{[\rho\sigma\mu\nu]}. \quad (2.1.58)$$

Es fácil ver que cualquier tensor de cuatro índices totalmente antisimétrico es automáticamente antisimétrico en su primer y último índice, y simétrico en el intercambio de los dos pares. Por lo tanto, estas propiedades son restricciones independientes de $X_{\rho\sigma\mu\nu}$, no relacionadas con la restricción (2.1.57). Además, un tensor de cuatro índices totalmente antisimétrico tiene $n(n-1)(n-2)(n-3)/4!$ términos y, por lo tanto, (2.1.57) reduce el número de componentes independientes en esta cantidad. Vemos que sobreviven, entonces,

$$\frac{1}{8}(n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n) - \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3) = \frac{1}{12}n^2(n^2 - 1) \quad (2.1.59)$$

componentes independientes del tensor de Riemann. En cuatro dimensiones el tensor tiene 20 componentes independientes; en una dimensión, no tiene ninguna.

La antisimetría en los dos primeros índices nos permite escribir la expresión

$$\nabla_{[\lambda} R_{\rho\sigma]\mu\nu} = 0, \quad (2.1.60)$$

conocida como *identidad de Bianchi*.

Es útil considerar una contracción del tensor de Riemann que da lugar al *tensor de Ricci*:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \quad (2.1.61)$$

Como consecuencia de las simetrías del tensor de Riemann, el tensor de Ricci asociado

con la conexión de Christoffel es simétrico:

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.1.62)$$

Además, la traza del tensor de Ricci es el *escalar de Ricci* (o *curvatura escalar*)

$$R = R^\mu{}_\mu = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.1.63)$$

Por último, definimos el *tensor de Einstein*, dado por:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (2.1.64)$$

Se puede ver que la identidad de Bianchi doblemente contraída es equivalente a:

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.1.65)$$

El tensor de Einstein, que es simétrico a causa de la simetría del tensor de Ricci, será de gran importancia en Relatividad General.

Debemos contrastar el formalismo que hemos desarrollado con nuestra idea intuitiva de curvatura. Lamentablemente, nuestra intuición está contaminada por el hecho de que estamos acostumbrados a pensar en espacios unidimensionales y bidimensionales embebidos en el espacio (casi) Euclidiano en el que vivimos. Pensamos, por ejemplo, que una línea recta no tiene curvatura, mientras que un círculo (S^1) es curvo. Sin embargo, según (2.1.59), en una, dos, tres y cuatro dimensiones hay 0, 1, 6 y 20 componentes independientes del tensor de Riemann, respectivamente. Por lo tanto, es imposible que un espacio unidimensional como el círculo tenga cualquier curvatura tal como la hemos definido. La aparente contradicción surge del hecho de que nuestra idea intuitiva de curvatura depende de la geometría extrínseca de la variedad, propiedad que caracteriza la forma en que un espacio está embebido en un

espacio mayor, mientras que la curvatura de Riemann es una propiedad de la geometría intrínseca de un espacio, que podría ser medida por observadores confinados en la variedad. Observadores confinados en un círculo no tienen acceso al espacio mayor en el que el mismo está embebido, por lo que pensarían que viven en una geometría plana.

Podemos ilustrar la diferencia entre curvatura intrínseca y curvatura extrínseca con un ejemplo en dos dimensiones, donde la curvatura tiene una componente independiente. De hecho, toda la información sobre la curvatura está contenida en la única componente del escalar de Ricci. Consideremos, por ejemplo un toroide, representado en la figura (2.1.5), que se puede considerar como una región cuadrada del plano con lados opuestos identificados (topológicamente, $S^1 \times S^1$). Aunque un toro incrustado en tres dimensiones parece curvo desde nuestro punto de vista, debería quedar claro que podemos poner una métrica en el toro cuyas componentes son constantes en un sistema de coordenadas apropiado; simplemente hay que 'desenrollarlo' y usar la métrica del plano, $ds^2 = dx^2 + dy^2$. En esta métrica, el toro es plano.

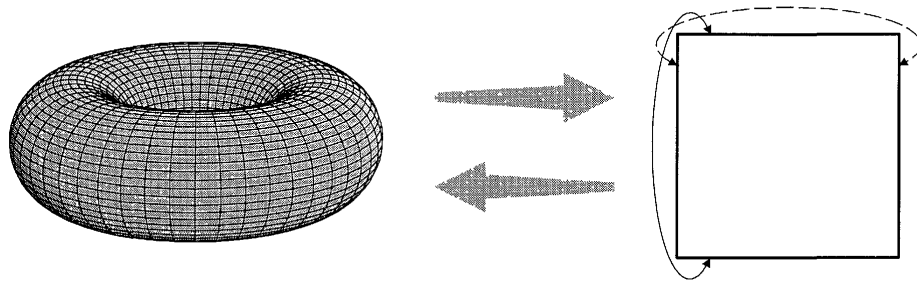


Figura 2.1.5: Toroide pensado como un cuadrado en el espacio plano con lados opuestos identificados.

2.1.5.4. Simetrías y vectores de Killing

Es prácticamente imposible encontrar una métrica que describa con precisión nuestro Universo hoy en día, sin embargo, podemos modelar el espaciotiempo considerando ciertas aproximaciones. Por ejemplo, podemos considerar la geometría alrededor de una estrella como esféricamente simétrica (a cierto orden de precisión) y

luego, de ser necesario, adicionar perturbaciones que representen pequeñas desviaciones de la simetría. Dada la naturaleza no lineal de la Relatividad General, tenemos un interés especial en soluciones con cierta simetría.

Decimos que una variedad \mathcal{M} posee una simetría si la geometría es invariante bajo cierta transformación que mapea \mathcal{M} en sí misma; es decir, si la métrica es la misma, en algún sentido, de un punto a otro. De hecho, diferentes campos tensoriales pueden poseer diferentes simetrías; las simetrías de la métrica se denominan *isometrías*. A veces, la existencia de isometrías es obvia. Consideremos, por ejemplo, el espacio de Minkowski en cuatro dimensiones, donde un elemento de línea está dado por:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2.1.66)$$

Conocemos varias isometrías de este espacio; las traslaciones, $x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu$, con a^μ fijo; y las transformaciones de Lorentz, $x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$, con $\Lambda^\mu{}_\nu$ una matriz de transformación de Lorentz. El hecho de que la métrica sea invariante bajo traslaciones se hace evidente de inmediato por el simple hecho de que los coeficientes, $\eta_{\mu\nu}$, son independientes de las funciones de coordenadas individuales, x^μ . De hecho, siempre que $\partial_{\sigma_*} g_{\mu\nu} = 0$, para algún σ_* fijo (pero para todo μ y ν), habrá una simetría bajo traslaciones a lo largo de x^{σ_*} , es decir,

$$\partial_{\sigma_*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow x^{\sigma_*} \rightarrow x^{\sigma_*} + a^{\sigma_*} \text{ es una simetría.} \quad (2.1.67)$$

Las isometrías de la forma (2.1.67) tienen consecuencias inmediatas en el movimiento de las partículas de prueba, como se describe en la ecuación geodésica. La ecuación geodésica se puede escribir en términos del cuádrimomento $p^\mu = mU^\mu$ como:

$$p^\lambda \nabla_\lambda p^\mu = 0. \quad (2.1.68)$$

Escribiendo ∇_λ en función de la métrica (a partir de los coeficientes de conexión), tenemos que la ecuación geodésica tiene la forma:

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\lambda p^\mu. \quad (2.1.69)$$

Por lo tanto, si todos los coeficientes de la métrica son independientes de la coorde-

nada x^{σ^*} , tenemos que esta isometría implica que la componente del momento p_{σ^*} es una cantidad conservada del movimiento, esto es:

$$\partial_{\sigma^*} g_{\mu\nu} = 0 \Rightarrow \frac{dp_{\sigma^*}}{d\tau} = 0. \quad (2.1.70)$$

Aunque la independencia de las componentes de la métrica en una o más coordenadas implica la existencia de isometrías, lo contrario no es necesariamente válido. La simetría bajo las transformaciones de Lorentz, por ejemplo, no se manifiesta como una independencia de $\eta_{\mu\nu}$ respecto a las coordenadas; de hecho, en cuatro dimensiones, hay cuatro tipos de traslaciones y seis tipos de transformaciones de Lorentz, para un total de diez, que es mayor que el número de dimensiones del que la métrica podría ser independiente. Es más, sería bastante sencillo transformarlo en un complicado sistema de coordenadas en el que ni siquiera las simetrías de traslación fueran obvias. Tal transformación de coordenadas cambiaría los componentes métricos, pero no la geometría subyacente, que es lo que realmente caracteriza la simetría. Es evidente que se requiere un procedimiento más sistemático. Podemos desarrollar un procedimiento de este tipo reformulando la ecuación de la derecha de (2.1.70), que expresa que una de los componentes del momento es constante, en una expresión más manifiestamente covariante. Si x^{σ^*} es la coordenada de la cual $g_{\mu\nu}$ es independiente, vamos considerar el vector ∂_{σ^*} , que etiquetamos como K :

$$K^\mu = (\partial_{\sigma^*})^\mu = \delta_{\sigma^*}^\mu. \quad (2.1.71)$$

Decimos que el vector K^μ genera la isometría; esto significa que la transformación bajo la cual la geometría es invariante se expresa infinitesimalmente como un movimiento en la dirección K^μ . En términos de este vector, la cantidad aparentemente no covariante, p_{σ^*} , es simplemente,

$$p_{\sigma^*} = K^\nu p_\nu = K_\nu p^\nu. \quad (2.1.72)$$

El hecho de que esta cantidad (escalar) sea constante a lo largo del camino es equivalente a la afirmación de que su derivada direccional a lo largo de la geodésica sea nula:

$$\frac{dp_{\sigma^*}}{d\tau} = 0 \Leftrightarrow p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0. \quad (2.1.73)$$

Expandiendo la expresión de la derecha, utilizando la ecuación geodésica ($p^\mu \nabla_\mu p^\nu = 0$) y el hecho de que $p^\mu p^\nu$ es simétrico, obtenemos

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = p^\mu p^\nu \nabla_{(\mu} K_{\nu)}. \quad (2.1.74)$$

Por lo tanto, concluimos que, cualquier vector K_μ que satisfaga

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0, \quad (2.1.75)$$

implica que $K_\nu p^\nu$ se conserva a lo largo de una trayectoria geodésica:

$$p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0. \quad (2.1.76)$$

La ecuación (2.1.75) se conoce como *ecuación de Killing*, y los campos vectoriales que la satisfacen se conocen como *campos vectoriales de Killing* o, simplemente, *vectores de Killing*. Si la métrica es independiente de alguna coordenada, $x^{\sigma*}$, entonces el vector $\partial_{\sigma*}$ satisface (2.1.75). De hecho, si un vector K_μ satisface la ecuación de Killing, siempre será posible encontrar un sistema de coordenadas en el que $K_\mu = \partial_{\sigma*}$; pero en general no podemos encontrar coordenadas en las que todos los vectores de Killing sean simultáneamente de esta forma, ni esta forma es necesaria para que el vector satisfaga la ecuación de Killing.

Los vectores de Killing en una variedad están en correspondencia uno a uno con simetrías continuas de la métrica. Cada vector de Killing implica la existencia de cantidades conservadas asociadas con el movimiento geodésico. Por definición, la métrica no cambia a lo largo de la dirección del vector Killing, por lo tanto, en términos generales, una partícula libre no sentirá ninguna fuerza en esta dirección y, en consecuencia, se conservará la componente de su momento en la misma.

Usando la misma lógica con la que mostramos que $K_\nu p^\nu$ se conserva a lo largo de una geodésica si $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$, un *tensor de Killing*, $K_{\nu_1 \dots \nu_l}$, es un tensor simétrico de l índices que satisface la generalización obvia de la ecuación de Killing y, en consecuencia, conduce a cantidades conservadas al contraerse con l copias del momento:

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu_1 \dots \nu_l)} = 0 \Rightarrow p^\mu \nabla_\mu (K_{\nu_1 \dots \nu_l} p^{\nu_1} p^{\nu_l}) = 0. \quad (2.1.77)$$

Ejemplos simples de tensores Killing son la métrica en sí misma y el producto tensorial simétrico de vectores Killing. Los tensores de Killing no están relacionados de manera sencilla con las simetrías del espaciotiempo, pero simplifican el análisis, por ejemplo, de agujeros negros en rotación y universos en expansión.

Las derivadas de los vectores de Killing se pueden relacionar con el tensor de Riemann mediante:

$$\nabla_\mu \nabla_\sigma K^\rho = R^\rho_{\sigma\mu\nu} K^\nu. \quad (2.1.78)$$

Contrayendo esta expresión, tenemos

$$\nabla_\mu \nabla_\sigma K^\mu = R_{\sigma\nu} K^\nu. \quad (2.1.79)$$

Estas relaciones, junto con la identidad de Bianchi y la ecuación de Killing, son suficientes para demostrar que la derivada direccional del escalar de Ricci a lo largo de un campo vectorial de Killing es nula:

$$K^\lambda \nabla_\lambda R = 0. \quad (2.1.80)$$

Esta es otra muestra de que la geometría no cambia a lo largo de un vector de Killing.

Además de conducir a cantidades conservadas, la existencia de un vector Killing de tipo tiempo nos permite definir una energía conservada para todo el espaciotiempo. Dado un vector de Killing, K_ν , y un tensor energía-momento conservado, $T_{\mu\nu}$, podemos construir una corriente

$$J_T^\mu = K_\nu T^{\mu\nu}, \quad (2.1.81)$$

que es automáticamente conservada, ya que,

$$\nabla_\mu J_T^\mu = (\nabla_\mu K_\nu) T^{\mu\nu} + K_\nu (\nabla_\mu T^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.1.82)$$

El primer término se anula por la ecuación de Killing, y el segundo por conservación

de $T_{\mu\nu}$. Si K_ν es de tipo tiempo, podemos integrar sobre una hipersuperficie espacial Σ para definir la energía total,

$$E_T = \int_{\Sigma} J_T^\mu n_\mu \sqrt{q} d^3x, \quad (2.1.83)$$

donde q es el determinante de la métrica inducida en Σ y n_μ es el vector normal a Σ . La energía, E_T , es la misma cuando se integra sobre cualquier hipersuperficie de tipo espacio, por lo tanto, es conservada.

Cuando hay un vector de Killing de tipo tiempo, podemos escribir la métrica de forma que sea independiente de la coordenada temporal, entonces, el teorema de Noether implica una energía conservada. De manera similar, los vectores Killing de tipo espacio pueden ser usados para construir impulsos conservados o momentos angulares.

2.2. Formulación Lagrangiana y ecuaciones de Einstein

La gravedad es muy particular entre las interacciones fundamentales, ya que surge como consecuencia de la curvatura del propio espaciotiempo. La Relatividad General describe el espaciotiempo como una variedad lorentziana de cuatro dimensiones en la que los cuerpos se mueven siguiendo curvas geodésicas.

Una camino para derivar las ecuaciones de campo de la Relatividad General es a través del principio de mínima acción. Nuestra variable dinámica es la métrica, $g_{\mu\nu}$, entonces debemos encontrar escalares obtenidos a partir de la misma para construir el lagrangiano. Sabemos que la métrica se puede llevar a su forma canónica y que sus derivadas primeras se hacen cero en cualquier punto, entonces cualquier escalar no trivial debe involucrar al menos una derivada segunda de la métrica.

El tensor de Riemann está compuesto por derivadas segundas de la métrica, y el único escalar independiente que podemos construir a partir de dicho tensor es el escalar de Ricci, R . Además, cualquier tensor no trivial construido por productos de la métrica y sus derivadas (primeras y segundas), se puede expresar en términos de la métrica y del tensor de Riemann. Por lo tanto, el único escalar independiente

construido a partir de la métrica, que no es de orden superior a dos en sus derivadas, es el escalar Ricci. Por las razones anteriores, Hilbert propuso la opción más simple posible para un lagrangiano, y definió la *acción de Hilbert-Einstein* como

$$S_{HE}(g) = \int \sqrt{-g} R d^n x. \quad (2.2.1)$$

Considerando el comportamiento de (2.2.1) bajo pequeñas variaciones de la métrica (más precisamente, de la inversa de la métrica) tenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{HE}}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2.2)$$

De esta manera se obtienen las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.2.3)$$

Esta ecuación refiere al caso vacío porque sólo utilizamos el lagrangiano gravitacional en la acción, sin incluir términos adicionales para campos de materia. En caso de existir contenido material, debemos considerar una acción de la forma¹

$$S = \frac{1}{16\pi G} S_{HE} + S_m, \quad (2.2.4)$$

donde S_m es la acción para el contenido material. Bajo el mismo procedimiento, planteamos

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{16\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad (2.2.5)$$

y definimos un tensor (0, 2), simétrico, llamado Tensor de Energía-Momento como

$$T_{\mu\nu} = -2 \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.2.6)$$

obteniendo así la ecuación de Einstein completa:

¹Más detalles en apéndice (D).

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.2.7)$$

De ahora en más, utilizaremos unidades en las que $G = c = 1$. El conjunto de ecuaciones (2.2.7) determinan qué geometrías pueden ocurrir en la naturaleza. Cualitativamente, puede interpretarse que la materia le indica al espacio cómo curvarse y esa curvatura le indica a la materia cómo moverse. El lado izquierdo de la expresión (2.2.7) está relacionado con la geometría del espaciotiempo mientras que el lado derecho da cuenta del contenido material y la energía del mismo. La ecuación de campo de Einstein (2.2.7) tiene una expresión elegante, pero a pesar de su aparentemente sencillez, se trata de diez ecuaciones en derivadas parciales, acopladas y no lineales. Esto último significa que dos soluciones conocidas no se pueden superponer para encontrar una tercera.

Las ecuaciones contienen el tensor de Riemann y el escalar de Ricci, compuestos por la conexión y sus derivadas primeras. A su vez, la conexión contiene derivadas de la métrica y el tensor energía-momento, por lo general, también involucra la métrica. Esto significa que la teoría tiene una complejidad matemática que será un obstáculo importante a la hora de cuantizarla.

El hecho de que haya diez ecuaciones independientes parece ser correcto para las diez funciones desconocidas de las componentes de la métrica. Sin embargo, la identidad de Bianchi, $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$, representa cuatro vínculos en las funciones $R_{\mu\nu}(x)$, por lo que realmente sólo hay seis ecuaciones independientes en (2.2.7). Esto tiene sentido, ya que si una métrica es solución a la ecuación de Einstein en un sistema de coordenadas x^μ , también debería serlo en cualquier otro sistema de coordenadas $x^{\mu'}$. Esto significa que hay cuatro grados de libertad no físicos en $g_{\mu\nu}$, representados por las cuatro funciones $x^{\mu'}$ (x^μ), y deberíamos esperar que la ecuación de Einstein sólo involucre los seis grados de libertad independientes de las coordenadas.

Tal como venimos describiendo, es muy difícil resolver la ecuación de Einstein (incluso en el vacío) y, por lo general, es necesario hacer algunas simplificaciones. Lo más común es hacer la suposición de que la métrica tiene un importante grado de simetría (las isometrías facilitan mucho el problema).

2.3. Formulación hamiltoniana

2.3.1. Descomposición 3 + 1

Mientras que la formulación lagrangiana es manifiestamente covariante, la formulación hamiltoniana describe la evolución temporal de las variables espaciales, lo que choca con el principio de covarianza de la Relatividad General, que trata todas las variables espaciotemporales por igual. Por esta razón, es necesario reescribir la Relatividad General como un problema de Cauchy. Para expresar la teoría como un problema de valores iniciales, se emplea la descomposición 3+1, en la que se divide la variedad cuatridimensional en dos partes: se escoge una dirección 'temporal' y una hipersuperficie tridimensional 'espacial'. Esto es siempre posible en un espaciotiempo globalmente hiperbólico, en el que se escogen una función temporal t y un campo vectorial t^a . Consideraremos el caso de una variedad lorentziana \mathcal{M} difeomorfa a $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$, donde \mathbb{S} representa el espacio y $t \in \mathbb{R}$ representa el tiempo. De esta manera estamos eligiendo una forma particular de dividir el espaciotiempo en 'instantes de tiempo'. Hay muchas maneras de elegir un difeomorfismo

$$\vartheta : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{S}, \quad (2.3.1)$$

y cada una de esas formas define una coordenada tiempo distinta. Esta coordenada esta dada por el pull-back de la coordenada tiempo en $\mathbb{R} \times \mathbb{S}$.

Decimos que una subvariedad $\Sigma_t \in \mathcal{M}$ es un instante de \mathcal{M} si corresponde a una superficie de tiempo constante para la coordenada temporal elegida. En la formulación hamiltoniana las variables dinámicas son las componentes de la métrica restringida a las hipersuperficies espaciales Σ y sus momentos conjugados. Denominaremos q a esta métrica inducida en Σ .

Por otro lado, el campo vectorial t^a debe ser tal que las hipersuperficies Σ_t de tiempo constante sean de tipo espacio y se satisfaga la condición $t^a \nabla_a t = 1$. De esta manera, se puede interpretar el vector t^a como el flujo temporal y relaciona las hipersuperficies Σ_t con la hipersuperficie inicial, Σ_0 . El parámetro t identificará las distintas hipersuperficies espaciales de la foliación de la variedad.

A partir de un campo vectorial, n^a , ortogonal a la superficie de Cauchy Σ , se puede definir (respetando la signatura $(-, +, +, +)$) una métrica espacial,

$$q^{ab} \equiv g^{ab} + n^a n^b, \quad (2.3.2)$$

definida positiva sobre Σ , que cumpla las condiciones

$$q_{ab}q^{bc} = \delta_a^c \text{ y } q^{ab}\nabla_a t = 0. \quad (2.3.3)$$

Esta definición permite descomponer el vector t^a en dos componentes, una normal y otra tangencial a la hipersuperficie. Por un lado, definimos la función *lapso*, N , tal que,

$$N = -g_{ab}t^a n^b = -t^a n_a \quad (2.3.4)$$

y, por otro, el vector *shift*, N^a , como:

$$N^a = -q^a_b t^b, \quad (2.3.5)$$

cuya expresión covariante es

$$N_a = g_{ac}N^c = g_{ac}q^c_b t^b = q_{ab}t^b. \quad (2.3.6)$$

El campo vectorial t^a , separado en sus componentes normal y tangencial a Σ , es

$$t^a = Nn^a + N^a, \quad (2.3.7)$$

como puede apreciarse en la figura (2.3.1).

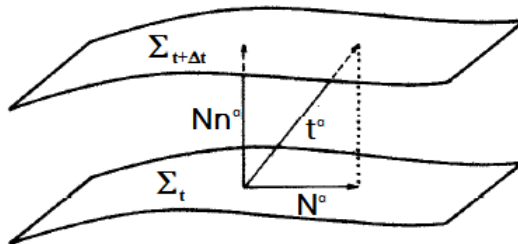


Figura 2.3.1: Esquema espaciotemporal que muestra el significado geométrico de la función *lapso* (N) y el vector *shift* (N^a) en la descomposición 3+1.

Podemos interpretar el *lapso* (N) como una función que mide el flujo de tiempo propio (τ) respecto a la coordenada temporal (t) al desplazarse en la dirección normal a la hipersuperficie Σ , mientras que el *shift* (N^a) mide la cantidad de desplazamiento tangencial respecto a la misma que contiene el flujo temporal t^a .

Podemos obtener otra expresión para la función lapso, multiplicando la ecuación (2.3.7) por el gradiente del tiempo

$$1 = t^a \nabla_a t = N n^a \nabla_a t + N^a \nabla_a t \implies N = (n^a \nabla_a t)^{-1}, \quad (2.3.8)$$

ya que, debido a la condición (2.3.3), tenemos $N^a \nabla_a t = 0$.

Además, el campo vectorial, n^a , normal a la hipersuperficie de Cauchy, puede expresarse en función del lapso y el shift de la siguiente manera:

$$n^a = \frac{1}{N} (t^a - N^a), \quad (2.3.9)$$

y a partir de esta expresión, podemos escribir la inversa de la métrica espaciotemporal como:

$$g^{ab} = q^{ab} - n^a n^b = q^{ab} - \frac{1}{N^2} (t^a - N^a) (t^b - N^b). \quad (2.3.10)$$

Invirtiendo (2.3.10), se obtiene la métrica espaciotemporal:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -N^2 + N^a N_a & -N_a \\ -N_a & -q_{ab} \end{pmatrix}, \quad (2.3.11)$$

expresión que manifiesta que la información contenida en $(q_{ab}, N$ y $N_a)$ es la misma que contiene g_{ab} . El determinante de la métrica espaciotemporal está dado por:

$$\sqrt{-g} = N \sqrt{q}. \quad (2.3.12)$$

Para terminar de comprender la descomposición 3 + 1 es necesario analizar como cambian los tensores y operadores de la Relatividad General y reintroducir el concepto de curvatura extrínseca (mencionado en la subsección (2.1.5.3)) relacionándola con la métrica inducida.

Definimos la derivada de Lie de un campo tensorial $T_{\nu \dots}^{\mu \dots}$ a lo largo de un campo

vectorial X^μ como:

$$\mathcal{L}_X T_{b\dots}^{a\dots} = X^c \nabla_c T_{b\dots}^{a\dots} + T_{c\dots}^{a\dots} \nabla_b X^c + \dots - T_{b\dots}^{c\dots} \nabla_c X^a - \dots \quad (2.3.13)$$

Apliquemos la definición a la métrica inducida y relacionémosla con su derivada temporal de la siguiente manera:

$$\dot{q}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t q_{ab} = N \mathcal{L}_n q_{ab} + \mathcal{L}_N q_{ab}. \quad (2.3.14)$$

El primer término de la expresión (2.3.14) está relacionado con la curvatura extrínseca. Como ya mencionamos, se denomina curvatura extrínseca a la curvatura percibida por observadores en un espacio de dimensiones más grandes a la curvatura intrínseca. La curvatura extrínseca define de buena manera la derivada temporal de la métrica espacial para una hipersuperficie embebida en el espaciotiempo cuatridimensional. Definimos como la curvatura extrínseca de la hipersuperficie Σ_t (percibida desde el espaciotiempo cuatridimensional) al tensor simétrico

$$K_{ab} = q_a^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{ab} = K_{ba}, \quad (2.3.15)$$

y sustituyendo (2.3.14) se obtiene:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_N q_{ab}). \quad (2.3.16)$$

Aplicando la derivada de Lie (2.3.13), así como la definición de derivada covariante sobre la hipersuperficie Σ , y considerando que la misma aniquila la métrica, la expresión (2.3.16) se reduce a:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= \frac{1}{2N} [\dot{q}_{ab} - (N^c \nabla_c q_{ab} + q_{cb} \nabla_a N^c + q_{ac} \nabla_b N^c)] \\ &= \frac{1}{2N} [\dot{q}_{ab} - (D_a N_b + D_b N_a)] = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - 2D_{(a} N_{b)}), \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

donde D_a es la derivada covariante sobre el espacio tangente a la hipersuperficie Σ . Su proyección sobre el espacio tangente a la superficie de Cauchy Σ es:

$$D_c T_{b_1 \dots b_l}^{a_1 \dots a_k} \equiv \left(q_{c_1}^{a_1} \dots q_{c_k}^{a_k} q_{b_1}^{d_1} \dots q_{b_k}^{d_k} \right) q_c^e \nabla_e T_{d_1 \dots d_l}^{c_1 \dots c_k}, \quad (2.3.18)$$

que es compatible con la métrica q_{ab} , por lo cual se cumple

$$D_a q_{bc} = q_a^d q_{b\nu}^e q_c^f \nabla_d (g_{ef} + n_e n_f) = 0, \quad (2.3.19)$$

ya que $q_{ab} n^b = 0$.

Una vez obtenida la expresión de la curvatura extrínseca de Σ y su derivada temporal, debemos definir la curvatura intrínseca, que en el espaciotiempo cuatridimensional se mide mediante el tensor de Riemann. En el formalismo de la descomposición 3 + 1, utilizamos proyecciones del tensor, que dan lugar a las ecuaciones de Gauss-Codacci.

Análogamente a como se hace con el tensor de Riemann en la variedad cuatridimensional, se puede obtener el tensor de curvatura intrínseca a partir de la definición:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d{}^{(3)}X_d = 2D_{[a}D_{b]}{}^{(3)}X_c, \quad (2.3.20)$$

siendo el superíndice ${}^{(3)}$ a la izquierda referido a los elementos definidos solamente en tres dimensiones. Buscamos una relación entre ${}^{(3)}R_{abc}{}^d$ y $R_{abc}{}^d$. Partiendo de la expresión (2.3.20), aplicando la definición de la derivada covariante y teniendo en cuenta que $q_a^b q_c^d \nabla_b q_d^e = q_a^b q_c^d \nabla_b (g_d^e + n_d n^e) = K_{ac} n^e$, obtenemos:

$$\begin{aligned} D_a D_b {}^{(3)}X_c &= D_a (q_b^d q_c^e \nabla_d {}^{(3)}X_e) = q_a^f q_b^g q_c^k \nabla_f (q_g^d q_k^e \nabla_d {}^{(3)}X_e) \\ &= q_a^f q_b^d q_c^e \nabla_f \nabla_d {}^{(3)}X_e + q_b^d K_{ac} n^e \nabla_d {}^{(3)}X_e + q_c^e K_{ab} n^d \nabla_d {}^{(3)}X_e. \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

El último término en (2.3.21) se anula al antisimetrizar (pues $K_{ab} = K_{ba}$). Si, además, consideramos que

$$q_b^d n^e \nabla_d {}^{(3)}X_e = q_b^d \nabla_d (n^e {}^{(3)}X_e) - q_b^d {}^{(3)}X_e \nabla_d n^e = -K_b^e {}^{(3)}X_e, \quad (2.3.22)$$

sustituimos en (2.3.20) y antisimetrizamos, tenemos:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d{}^{(3)}X_d = q_a^f q_b^d q_c^e 2\nabla_{[f} \nabla_{d]} {}^{(3)}X_e - (K_{ac} K_b^e K_{bc} K_a^e) {}^{(3)}X_e. \quad (2.3.23)$$

El primer término de (2.3.23) es el tensor de Riemann y, como esta igualdad se

cumple para cualquier campo vectorial tridimensional, X_a , se tiene:

$${}^{(3)}R_{abc}{}^d = q_a^e q_b^f q_c^j q_g^d R_{efj}{}^g - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d. \quad (2.3.24)$$

De un manera similar se puede demostrar que

$$R_{cd} n^d q_b^c = D_a K_b^a - D_b K_a^a. \quad (2.3.25)$$

Las expresiones (2.3.24) y (2.3.25) son las *ecuaciones de Gauss-Codacci* [34].

2.3.2. Formalismo ADM

El formalismo ADM (Arnowitt-Deser-Misner), es una formulación hamiltoniana de la Relatividad General [35], publicada en 1962, en la cual las variables de configuración son la métrica q_{ab} (inducida sobre Σ), la función *lapso* (N) y el vector *shift* en forma covariante (N_a).

Para obtener una descripción hamiltoniana se debe reescribir la densidad lagrangiana en función de las variables de configuración ADM y sus derivadas temporales, y realizar una transformada de Legendre. Cabe aclarar que obviaremos los términos de frontera, ya que se anulan al integrar para obtener el hamiltoniano total. La expresión del hamiltoniano total a partir de la densidad hamiltoniana es:

$$H_G = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}_G d^3x. \quad (2.3.26)$$

Para hallar la densidad lagrangiana en función de las variables de configuración q_{ab} , N y N_a , partimos de la expresión

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{-g} R, \quad (2.3.27)$$

empleamos (2.3.12) y las relaciones de Gauss-Codacci, (2.3.24) y (2.3.25). Contrayendo la expresión del tensor de Riemann tridimensional (2.3.24) se obtiene el escalar de Ricci en tres dimensiones:

$${}^{(3)}R = K^2 - K_{ab} K^{ab} + R. \quad (2.3.28)$$

Despejando R de (2.3.28) y sustituyéndolo en (2.3.27) se obtiene:

$$\mathcal{L}_G = \sqrt{q}N \left({}^{(3)}R + K_{ab}K^{ab} - (K_a^a)^2 \right), \quad (2.3.29)$$

siendo

$$K^{ab} = \frac{1}{2}\mathcal{L}_n q_{ab} = \frac{1}{N}(\dot{q}_{ab} - D_a N_b + D_b N_a). \quad (2.3.30)$$

Observemos que \mathcal{L}_G no contiene ningún término en derivadas temporales de N y N_a , por lo cual sus momentos conjugados, π^N y π^{N^a} , son nulos. Eso significa que N y N_a no son variables dinámicas del sistema sino multiplicadores de Lagrange y que las ecuaciones

$$\pi^N = \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta N} = 0, \quad (2.3.31)$$

$$\pi^{N^a} = \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta N^a} = 0, \quad (2.3.32)$$

son vínculos primarios del sistema. El momento canónico conjugado, π^{ab} , de la variable de configuración, q_{ab} , es

$$\pi^{ab} \equiv \frac{\delta \mathcal{L}_G}{\delta \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q} (K^{ab} - K q^{ab}). \quad (2.3.33)$$

Por otro lado, el corchete de Poisson entre la métrica espacial y su momento conjugado cumple la relación

$$\{q_{ab}(x); \pi^{cd}(x')\} = \delta_{(a}^c \delta_{b)}^d \delta^{(3)}(x - x'). \quad (2.3.34)$$

La densidad hamiltoniana está dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_G &= \pi^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{L}_G \\ &= -\sqrt{q}N {}^{(3)}R + \frac{N}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) + 2\pi^{ab} D_a N_b, \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

donde $\pi = \pi_a^a$. A partir de (2.3.35) podemos escribir:

$$\mathcal{H}_G = \sqrt{q} \left\{ N \left(-{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab}\pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right) - 2N_b \left[D_a \left(\frac{\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) \right] + 2D_a \left(\frac{N_b\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) \right\}. \quad (2.3.36)$$

El último término de (2.3.36) es una derivada total, por lo que no contribuye al hamiltoniano total. La densidad hamiltoniana resultante es, entonces,

$$\mathcal{H}_G = \sqrt{q} N \left(-{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab}\pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right) - 2N_b \sqrt{q} \left[D_a \left(\frac{\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) \right]. \quad (2.3.37)$$

Según la expresión anterior, el lapso, N , y el shift, N_a , son multiplicadores de Lagrange de los siguientes vínculos secundarios:

$$C^a = \{ \pi^{N^a}, \mathcal{H}_G \} = -2D_b \left(\frac{\pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) = 0, \quad (2.3.38)$$

$$C = \{ \pi^N, \mathcal{H}_G \} = \sqrt{q} \left(-{}^{(3)}R + \frac{\pi^{ab}\pi_{ab}}{q} - \frac{\pi^2}{2q} \right) = 0. \quad (2.3.39)$$

La ecuación (2.3.38) se denomina *vínculo de difeomorfismos*, y la (2.3.39) es el *vínculo hamiltoniano*. Introduciendo ambas expresiones en la densidad hamiltoniana (2.3.37) obtenemos:

$$\mathcal{H}_G = NC + N_a C^a = 0. \quad (2.3.40)$$

Esto significa que el hamiltoniano de Relatividad General es un vínculo, lo que no implica que la teoría carezca de dinámica, como se muestra en la referencia [36]. En efecto, esto concuerda con el hecho de que en la Teoría de la Relatividad General no existe un observador privilegiado respecto al cual se pueda definir una evolución temporal; el hamiltoniano de Relatividad General da cuenta de la 'evolución temporal' en función de un parámetro arbitrario sin significado físico; la dinámica del sistema se encuentra codificada en la relación entre las variables físicas que lo constituyen.

Las ecuaciones dinámicas de la Relatividad General vienen dadas por las ecua-

ciones de Hamilton:

$$\dot{q}_{ab} = \frac{\delta \mathcal{H}_G}{\delta \pi^{ab}} = \frac{2N}{\sqrt{q}} \left(\pi_{ab} - \frac{1}{2} q_{ab} \pi \right) + 2D_{(a} N_{b)}, \quad (2.3.41)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_{ab} = -\frac{\delta \mathcal{H}_G}{\delta q^{ab}} = & -N\sqrt{q} \left({}^{(3)}R^{ab} - \frac{1}{2} {}^{(3)}R q^{ab} \right) + \frac{N}{2\sqrt{q}} q^{ab} \left(\pi_{cd} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ & + \frac{2N}{\sqrt{q}} \left(\pi^{ac} \pi_c^b - \frac{1}{2} \pi \pi^{ab} \right) + \sqrt{q} \left(D^a D^b N - q^{ab} D^c D_c N \right) \\ & + \sqrt{q} D_c \left(\frac{N^c \pi^{ab}}{\sqrt{q}} \right) - 2\pi^{c(a} D_c N^{b)}. \end{aligned} \quad (2.3.42)$$

Los vínculos (2.3.38) y (2.3.39), junto con las ecuaciones de Hamilton (2.3.41) y (2.3.42), equivalen a las ecuaciones de vacío de Einstein (2.2.3).

Por otro lado, podemos hallar la acción de los vínculos sobre las variables dinámicas mediante el cálculo de los corchetes de Poisson con las mismas. Conviene utilizar la versión suavizada de los vínculos:

$$C(N) = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{q} N C, \quad (2.3.43)$$

es el vínculo hamiltoniano suavizado, y

$$C(\vec{N}) = \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{q} N^a C_a, \quad (2.3.44)$$

es el vínculo de difeomorfismos suavizado. Entonces, la acción de los vínculos sobre la métrica inducida y sobre su momento conjugado es:

$$\left\{ q_{ab}(x), C(\vec{N}) \right\} = 2\mathcal{L}_{\vec{N}} q_{ab}(x), \quad (2.3.45)$$

$$\left\{ \pi^{ab}(x), C(\vec{N}) \right\} = 2\mathcal{L}_{N^a} \pi^{ab}(x), \quad (2.3.46)$$

para el vínculo de difeomorfismos, y

$$\left\{ q_{ab}(x), C(N) \right\} = \mathcal{L}_{N\bar{n}} q_{ab}(x), \quad (2.3.47)$$

$$\{\pi^{ab}(x), C(N)\} = \mathcal{L}_{N\vec{n}}\pi^{ab}(x), \quad (2.3.48)$$

para el vínculo hamiltoniano, que es una derivada de Lie en la dirección normal a Σ , es decir, la acción de $C(N)$ es una evolución temporal.

Por último, vamos a verificar el álgebra de vínculos. Se puede demostrar que los corchetes de Poisson entre vínculos cumplen:

$$\{C(\vec{N}), C(\vec{M})\} = C([\vec{N}, \vec{M}]), \quad (2.3.49)$$

$$\{C(\vec{N}), C(N)\} = C(\vec{N}(N)), \quad (2.3.50)$$

$$\{C(N), C(M)\} = C((N\partial^i M - M\partial^i N)\partial_i). \quad (2.3.51)$$

Esto significa que los corchetes entre vínculos dan como resultado otro vínculo, por lo tanto, estamos tratando con vínculos de primera clase. El álgebra que forman no es un álgebra de Lie.

Resumiendo, partiendo de la densidad lagrangiana de la Relatividad General, hemos obtenido una descripción hamiltoniana en la cual la variable de configuración es la métrica espacial inducida sobre las superficies de Cauchy, y su momento canónicamente conjugado está relacionado con la curvatura extrínseca según la ecuación (2.3.33).

2.4. Solución de Schwarzschild

2.4.1. Métrica de Schwarzschild

La aplicación más obvia de la teoría de la gravedad es el caso de un campo gravitacional con simetría esférica. Esta es una situación importante a describir, ya que se aproxima de muy buena manera a casos conocidos como sistemas solares. El primer interés está en las soluciones exteriores (espacio vacío que rodea un cuerpo gravitante), ya que comprender el movimiento de partículas de prueba que orbitan un objeto es más fácil y útil que considerar el interior, que es relativamente inaccesible.

Además de su utilidad práctica, la respuesta a este problema de Relatividad General nos conducirá a soluciones que describen nuevos fenómenos de gran interés para físicos y astrónomos: los agujeros negros. En Relatividad General, la única solución de vacío esféricamente simétrica es la *métrica de Schwarzschild* la cual, en coordenadas esféricas $\{t, r, \theta, \varphi\}$, está dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.4.1)$$

donde $d\Omega^2$ es la métrica de una esfera unitaria

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.4.2)$$

La constante M puede ser interpretada como la masa del objeto gravitante (aunque se requiere cierto cuidado al realizar esta identificación). A continuación, derivaremos la métrica de Schwarzschild y, dado que nos interesa en particular la solución fuera de un cuerpo esférico, utilizaremos la ecuación de Einstein en el vacío, (2.2.3), que implica

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (2.4.3)$$

Supondremos una fuente estática y esféricamente simétrica, por lo que buscaremos soluciones que mantengan estas propiedades pero, ¿cómo se interpreta cada una de ellas? El hecho de ser una fuente estática implica dos condiciones: que todas las componentes de la métrica son independientes del tiempo, y que no hay términos cruzados espacio-tiempo ($dt dx^i + dx^i dt$) en la métrica. Dado que buscamos una solución independiente del tiempo, la segunda condición tiene sentido al realizar una inversión temporal $t \rightarrow -t$; el término dt^2 permanece invariante (así como cualquier término del tipo $dx^i dx^j$) mientras que los términos cruzados no, por ello los descartamos. Para imponer la simetría esférica, comenzamos escribiendo la métrica del espacio de Minkowski en coordenadas polares $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$:

$$ds_{Minkowski}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4.4)$$

Un requisito para preservar la simetría esférica es mantener la forma de $d\Omega^2$, es decir, si queremos que nuestras esferas sean perfectamente redondas, el coeficiente del término $d\varphi^2$ debería ser \sin^2 veces el del término $d\theta^2$. Por otro lado, somos libres de multiplicar todos los términos por coeficientes separados, siempre que sean funciones solamente de la coordenada radial r :

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + e^{2\beta(r)}dr^2 + e^{2\gamma(r)}r^2d\Omega^2 \quad (2.4.5)$$

Hemos expresado nuestras funciones como exponenciales para que la signatura de la métrica no cambie. Podemos hacer una ligera simplificación a la métrica estática y simétrica esférica (2.4.5), incluso antes de imponer la ecuación de Einstein ya que, a diferencia de otras teorías físicas, en la Relatividad General definimos simultáneamente las coordenadas y la métrica en función de las mismas. Esto significa que no sabemos de antemano cuál es realmente, por ejemplo, la coordenada radial r , solamente podemos interpretarlo una vez tengamos la solución. Por lo tanto, definamos una nueva coordenada \tilde{r} de la forma

$$\tilde{r} = e^{\gamma(r)}r, \quad (2.4.6)$$

tal que,

$$d\tilde{r} = e^{\gamma}dr + e^{\gamma}rd\gamma = \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)e^{\gamma}dr. \quad (2.4.7)$$

En términos de esta nueva variable, la métrica (2.4.5) se escribe

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}dt^2 + \left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2}e^{2\beta(r)-\gamma(r)}d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2d\Omega^2, \quad (2.4.8)$$

donde cada función de r es también función de \tilde{r} . Ahora, renombremos algunas cantidades de la siguiente manera:

$$\tilde{r} \rightarrow r, \quad (2.4.9)$$

$$\left(1 + r\frac{d\gamma}{dr}\right)^{-2}e^{2\beta(r)-\gamma(r)} \rightarrow e^{\beta(r)}, \quad (2.4.10)$$

por lo que (2.4.5) será:

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)} dt^2 + e^{\beta(r)} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4.11)$$

Hemos elegido nuestra coordenada radial de modo que el factor $e^{2\gamma}$ no exista, por tanto, (2.4.11) es tan general como (2.4.5). Utilizaremos esta métrica y la ecuación de Einstein para resolver las funciones $\alpha(r)$ y $\beta(r)$. Para ello, debemos evaluar los símbolos de Christoffel, el tensor de Riemann y, finalmente, el tensor de Ricci, identificando las etiquetas $(0, 1, 2, 3)$ como (t, r, θ, φ) :

$$R_{tt} = e^{2(\alpha-\beta)} \left[\partial_r^2 \alpha + (\partial_r \alpha)^2 - \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha \right], \quad (2.4.12)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \alpha - (\partial_r \alpha)^2 + \partial_r \alpha \partial_r \beta + \frac{2}{r} \partial_r \alpha, \quad (2.4.13)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\beta} [r (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) - 1] + 1, \quad (2.4.14)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2 \theta R_{\theta\theta}. \quad (2.4.15)$$

Ahora, debemos imponer la anulación del tensor de Ricci. Dado que R_{tt} y R_{rr} se anulan independientemente, podemos escribir

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)} R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r} (\partial_r \alpha + \partial_r \beta), \quad (2.4.16)$$

que implica $\alpha = -\beta + c$, donde c es una constante. Es posible establecer esta constante a cero reescalando la coordenada temporal, de modo que $t \rightarrow e^{-c} t$, con lo cual

$$\alpha = -\beta. \quad (2.4.17)$$

Además, es fácil ver que $R_{\theta\theta} = 0$ equivale a

$$\partial_r (r e^{2\alpha}) = 1, \quad (2.4.18)$$

e inmediatamente,

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r}, \quad (2.4.19)$$

donde R_S es una constante indeterminada. Con (2.4.17) y (2.4.19), nuestra métrica se convierte en

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4.20)$$

Ahora no nos queda libertad excepto para la constante R_S , por lo que es conveniente que esta resuelva las ecuaciones restantes $R_{tt} = 0$ y $R_{rr} = 0$; es sencillo comprobar que lo hace para cualquier valor de R_S .

Sólo debemos interpretar la constante R_S , llamada *radio de Schwarzschild*, en términos de algún parámetro físico. En el límite de campo débil, la componente tt de la métrica alrededor de una masa puntual satisface

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right). \quad (2.4.21)$$

La métrica de Schwarzschild debe reducirse al caso de un campo débil cuando $r \gg 2GM$, pero para la componente tt la forma es exactamente la misma; sólo debemos identificar

$$R_S = 2GM. \quad (2.4.22)$$

Esta se puede considerar como la definición del parámetro M . El resultado final es la métrica de Schwarzschild, (2.4.1). Hemos demostrado que esta es una solución de vacío estática y esféricamente simétrica de la ecuación de Einstein; M funciona como un parámetro, que sabemos que se puede interpretar como la masa newtoniana convencional, que mediríamos al estudiar órbitas a grandes distancias de la fuente gravitante. No será simplemente la suma de las masas constituyentes del cuerpo que esté curvando el espaciotiempo, ya que habrá una contribución de lo que podríamos considerar como la energía de enlace gravitacional. Sin embargo, en el límite de campo débil, las cantidades coinciden.

Obsérvese que a medida que $M \rightarrow 0$ recuperamos el espacio de Minkowski. Téngase en cuenta también que la métrica se vuelve progresivamente Minkowskiana a

medida que $r \rightarrow \infty$; esta propiedad se conoce como *asintoticidad plana*.

2.4.2. Singularidades

A partir de la forma (2.4.1), los coeficientes métricos se vuelven infinitos en $r = 0$ y $r = 2GM$, una señal aparente de que algo va mal. Dichos coeficientes son cantidades dependientes de las coordenadas y, como tales, no deberíamos dar demasiada importancia a sus valores. ¿Qué tipo de señal independiente de las coordenadas deberíamos tomar como advertencia de que algo sobre la geometría está fuera de control? Esta resulta ser una pregunta muy difícil de responder, por lo cual, recurriremos a un criterio simple para cuando algo sale mal: cuando la curvatura se vuelve infinita. La curvatura se mide mediante el tensor de Riemann y es difícil decir cuándo un tensor se vuelve infinito, ya que sus componentes dependen de las coordenadas. Pero a partir de la curvatura podemos construir varias cantidades escalares, y dado que los escalares son independientes de las coordenadas, es significativo decir que se vuelven infinitos. El escalar más simple de este tipo es el escalar de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, pero también podemos construir escalares de orden superior como $R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$, $R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\rho\sigma\lambda\tau} R_{\lambda\tau}{}^{\mu\nu}$, etc. Si alguno de estos escalares (no necesariamente todos) se va a infinito cuando nos acercamos a algún punto, consideramos ese punto como una *singularidad de la curvatura*. También deberíamos comprobar que dicho punto no es infinitamente lejano; es decir, que se puede alcanzar viajando una distancia finita a lo largo de una curva.

Ahora tenemos una condición suficiente para que un punto sea considerado una singularidad. Sin embargo, no es una condición necesaria y generalmente es más difícil demostrar que un punto dado no es singular. En el caso de la métrica de Schwarzschild (2.4.1), el cálculo directo revela que

$$R^{\mu\nu\rho\sigma} R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48G^2 M^2}{r^6}. \quad (2.4.23)$$

Esto es suficiente para convencernos de que $r = 0$ representa una singularidad. El otro punto problemático es $r = 2GM$, el radio de Schwarzschild. Se puede comprobar que ninguno de los invariantes de curvatura explota allí. Por lo tanto, comenzamos a creer que efectivamente no es singular, y simplemente hemos elegido un sistema de

coordenadas incorrecto. Lo ideal, de ser posible, es transformar a coordenadas más apropiadas. De hecho, en este caso es posible, y la superficie $r = 2GM$ se comporta muy bien en la métrica de Schwarzschild: delimita el *horizonte de eventos* de un agujero negro.

Debemos señalar que el comportamiento de la métrica de Schwarzschild dentro del radio de Schwarzschild tiene pocas consecuencias en el día a día. La solución obtenida es válida sólo en el vacío y esperamos se mantenga fuera de un cuerpo esférico como, por ejemplo, una estrella. Sin embargo, en el caso del Sol se trata de un cuerpo que se extiende hasta un radio de

$$R_{\odot} = 10^6 GM_{\odot}, \quad (2.4.24)$$

por lo tanto, $r = 2GM_{\odot}$ está muy por dentro del interior solar, donde no esperamos que se aplique la métrica de Schwarzschild. De hecho, las soluciones para interiores estelares consisten en hacer coincidir la métrica de Schwarzschild exterior con una métrica interior que es perfectamente suave en el origen. Hay objetos para los que se requiere la métrica completa de Schwarzschild, los *agujeros negros*.

2.4.3. Agujeros negros de Schwarzschild

Los *agujeros negros* son objetos descritos por la solución de Schwarzschild hasta radios inferiores a $r = 2GM$. Una forma de comprender la geometría de un espacio-tiempo es explorar su estructura causal, definida por los conos de luz. Consideramos curvas radiales nulas, aquellas para las que θ y φ son constantes y $ds^2 = 0$:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (2.4.25)$$

por lo cual,

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}. \quad (2.4.26)$$

Esto mide la pendiente de los conos de luz en un diagrama de espaciotiempo del plano $t - r$. Para r grande, la pendiente es ± 1 , como lo sería en un espacio plano, mientras que cuando nos acercamos a $r = 2GM$ obtenemos $dt/dr \rightarrow \pm\infty$, y los conos

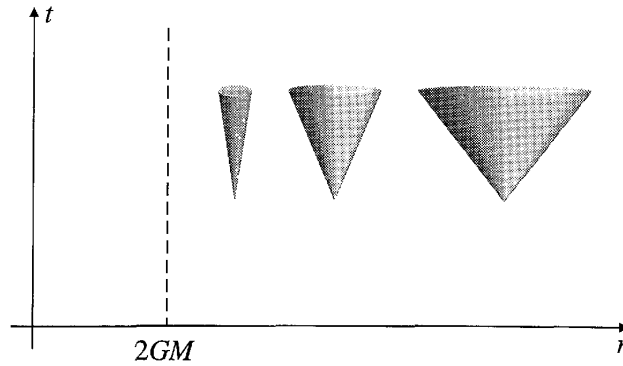


Figura 2.4.1: En las coordenadas de Schwarzschild los conos de luz parecen cerrarse cuando nos aproximamos a $r = 2GM$.

de luz 'se cierran', como se muestra en la figura (2.4.1). Por lo tanto, un rayo de luz que se acerca a $r = 2GM$ nunca parece llegar allí en este sistema de coordenadas; parece una asíntota a este radio.

La aparente imposibilidad de llegar a $r = 2GM$ es una ilusión; el rayo de luz (o una partícula masiva) en realidad no tiene problemas para alcanzar este radio, pero un observador lejano nunca podría percibirlo. Si estuviésemos fuera del agujero negro mientras una persona se encuentra en el interior del mismo, enviando señales todo el tiempo, simplemente veríamos que las señales nos llegan cada vez más lentamente, como se puede apreciar en la figura (2.4.2). A medida que un observador en caída se acerca a $r = 2GM$, cualquier intervalo fijo $\Delta\tau_1$ de su tiempo propio corresponde a un intervalo $\Delta\tau_2$ cada vez más largo desde nuestro punto de vista. Esto continúa para siempre, nunca veremos al observador cruzar el límite $r = 2GM$, simplemente lo veríamos moverse cada vez más lentamente.

El hecho de que la trayectoria del observador en caída nunca llegue a $r = 2GM$, en el plano $t - r$, depende en gran medida de nuestro sistema de coordenadas. Sería mejor hacernos una pregunta que fuese más independiente de las coordenadas, como por ejemplo, '¿El observador alcanza este radio en una cantidad finita de su tiempo propio?'. Una manera de hacer esto es realizar un cambio de coordenadas a un sistema que se comporte mejor en $r = 2GM$. No existe una forma de derivar una transformación de coordenadas, por supuesto, simplemente decimos cuáles son las nuevas coordenadas y las hacemos aparecer en las ecuaciones. Motivaremos la elección

en varios pasos.

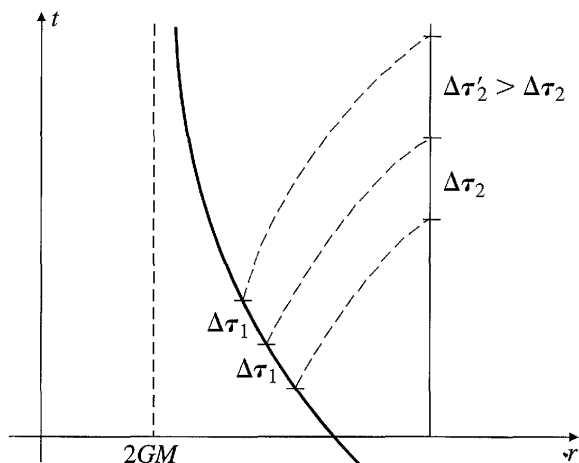


Figura 2.4.2: Un foco de luz que cae libremente en un agujero negro emite señales a intervalos de tiempo propio constante $\Delta\tau_1$. Un observador en un r fijo recibe las señales en intervalos de tiempo sucesivamente más largos $\Delta\tau_2$.

El problema con las coordenadas actuales es que $dt/dr \rightarrow \infty$ a lo largo de geodésicas radiales nulas que se aproximan a $r = 2GM$, por lo que el progreso en la dirección r se vuelve cada vez más lento con respecto a la coordenada tiempo t . Podemos intentar solucionar este problema reemplazando t con una coordenada que se mueva más lentamente a lo largo de geodésicas nulas. Nótese que podemos resolver explícitamente la condición (2.4.26) que caracteriza las curvas radiales nulas, para obtener

$$t = \pm r^* + \text{constante}, \quad (2.4.27)$$

donde r^* es llamada *coordenada tortuga* y está definida por

$$r^* = r + 2GM \ln \left(\frac{r}{2GM} - 1 \right); \quad (2.4.28)$$

(r^* sólo está sensiblemente relacionada con r cuando $r \geq 2GM$, pero en ese rango nuestras coordenadas no son muy buenas de todos modos). En términos de la coordenada tortuga, la métrica de Schwarzschild pasa a ser

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.4.29)$$

donde r es función de r^* .

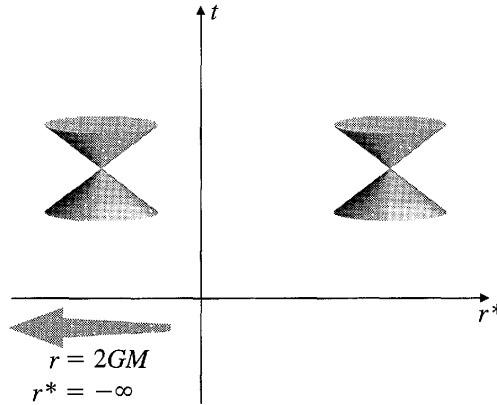


Figura 2.4.3: Conos de luz de Schwarzschild en coordenadas tortuga. Estos permanecen no degenerados, pero la superficie $r = 2GM$ ha sido empujada al infinito.

Parece haber cierto progreso, ya que, como se aprecia en la figura (2.4.3), los conos de luz ahora no parecen cerrarse; además, ninguno de los coeficientes métricos se vuelve infinito en $r = 2GM$ (aunque tanto g_{tt} como $g_{r^*r^*}$ se vuelven cero). El precio que pagamos por este cambio de variables es que la superficie de interés en $r = 2GM$ es empujada al infinito. Nuestro siguiente paso es definir coordenadas que se adapten naturalmente a las geodésicas. Si

$$v = t + r^*, \quad (2.4.30)$$

$$u = t - r^*, \quad (2.4.31)$$

entonces las geodésicas radiales nulas entrantes se caracterizan por tener $v = \text{constante}$, mientras que las salientes satisfacen $u = \text{constante}$. Ahora consideremos volver a la coordenada radial original r , pero reemplazando la coordenada temporal t con la nueva coordenada v . Estas se conocen como *coordenadas de Eddington-Finkelstein*. En términos de las mismas, la métrica es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dv^2 + (dvdr + drdv) + r^2 d\Omega^2. \quad (2.4.32)$$

Aquí vemos el primer signo de progreso concreto. Aunque el coeficiente métrico g_{vv} se anula en $r = 2GM$, no hay una degeneración real. El determinante de la métrica es

$$g = -r^4 \sin^2 \theta, \quad (2.4.33)$$

que es perfectamente regular en $r = 2GM$. Por lo tanto, la métrica es invertible, y vemos que $r = 2GM$ es simplemente una singularidad de coordenadas en nuestro sistema original (t, r, θ, φ) . En las coordenadas de Eddington-Finkelstein, la condición para las curvas radiales nulas se resuelve mediante

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0, & \text{(entrante)} \\ 2 \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} & \text{(saliente)}. \end{cases} \quad (2.4.34)$$

Pero, ¿qué es lo que sucedió?. En este sistema de coordenadas, los conos de luz se mantienen bien comportados en $r = 2GM$, y dicha superficie tiene un valor de coordenadas finito. No hay ningún problema en rastrear las trayectorias de partículas nulas o de tipo tiempo más allá de la superficie. Por otro lado, es interesante ver que, aunque los conos de luz no se cierran, sí se inclinan, de modo que para $r < 2GM$ todas las trayectorias dirigidas al futuro están en la dirección de r decreciente, como se muestra en la figura (2.4.4).

La superficie $r = 2GM$, aunque localmente es perfectamente regular, funciona globalmente como un punto de no retorno; una vez que una partícula de prueba se sumerge por debajo de ella, nunca podrá retroceder. Definimos el *horizonte de eventos* como una superficie del pasado de la cual las partículas nunca pueden escapar al infinito. En el caso de Schwarzschild, el horizonte de eventos se ubica en $r = 2GM$. A pesar de estar ubicado en una coordenada radial fija, el horizonte de eventos es una superficie nula, en lugar de una de tipo tiempo, por lo que es realmente la estructura causal del espaciotiempo mismo lo que hace que sea imposible cruzar el horizonte en una dirección hacia afuera. Dado que nada puede escapar del horizonte de sucesos, es imposible para nosotros ver el interior, de allí, el nombre de *agujero*

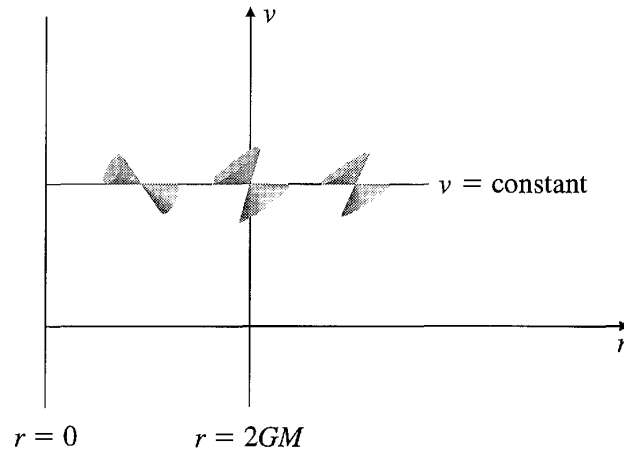


Figura 2.4.4: Conos de luz de Schwarzschild en las coordenadas (v, r) de Eddington-Finkelstein. En estas coordenadas podemos seguir trayectorias temporales dirigidas hacia el futuro más allá de $r = 2GM$.

negro. Un agujero negro es simplemente una región del espaciotiempo separada del infinito por un horizonte de eventos. El concepto de horizonte de eventos es global; la localización del horizonte se determina sobre el espaciotiempo como un todo, no algo que se pueda determinar con sólo conocer la geometría en dicha localización.

Hay algunas confusiones comunes que conviene evitar. Primero, la geometría externa de un agujero negro es la misma solución de Schwarzschild que tendríamos fuera de una estrella o planeta. En particular, un agujero negro no succiona todo lo que lo rodea como tampoco lo hace el Sol; una partícula muy fuera de $r = 2GM$ se comporta exactamente de la misma manera si la fuente gravitante es un agujero negro o no. En segundo lugar, existe una analogía newtoniana engañosa para los agujeros negros. La velocidad de escape newtoniana de una partícula a una distancia r de un cuerpo gravitante de masa M es

$$v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}. \quad (2.4.35)$$

Si nos preguntamos dónde la velocidad de escape newtoniana es igual a la velocidad de la luz, encontramos que es exactamente en $r = 2GM$. A pesar del hecho de que la velocidad de la luz no juega un papel fundamental en la teoría newtoniana, podría parecer provocador que la luz, considerada como partículas inerciales que

se mueven a velocidad c , aparentemente no pueda escapar de un cuerpo con masa M y radio menor que $2GM$. Pero hay una profunda diferencia entre este caso y lo que vemos en Relatividad General. La velocidad de escape es la velocidad que una partícula necesitaría tener inicialmente para escapar de una fuente gravitante en una trayectoria libre, pero nada nos impide considerar trayectorias aceleradas; por ejemplo, podríamos imaginar una aceleración elegida de modo que la partícula se alejara constantemente del cuerpo masivo a una velocidad constante. Por lo tanto, un supuesto agujero negro newtoniano no tendría la propiedad crucial de que nada puede escapar; mientras que en Relatividad General, las trayectorias temporales arbitrarias deben permanecer dentro de sus conos de luz y, por lo tanto, nunca escapar del horizonte de eventos.

2.5. Formalismo de Ashtekar-Barbero

La formulación hamiltoniana ADM es una descripción satisfactoria de la Relatividad General. No obstante, a la hora de llevar a cabo una cuantización, dicha formulación no arroja buenos resultados, ya que no admite regularizaciones independientes del fondo, ni tratamientos invariantes bajo difeomorfismos consistentes. En 1987, Abhay Ashtekar introdujo un nuevo formalismo [37] en el cual reescribe las variables métricas en términos de un campo, una conexión de gauge $SU(2)$ llamada *conexión de Ashtekar-Barbero*, y de sus momentos canónicamente conjugados llamados *tríadas*. En términos de estas nuevas variables, denominadas *variables de Ashtekar*, los vínculos se simplifican notablemente. A esta nueva representación se le llama representación de conexión de la Relatividad General canónica y presenta como ventaja el hecho de permitir expresar la Relatividad General en un lenguaje de teorías de gauge, lo que provee nuevas formas de abordar problemas tanto clásicos como cuánticos.

2.5.1. Tétradas

Sea \mathcal{M} la variedad de dimensión 4 caracterizada por una métrica Lorentziana, g , del espaciotiempo, sobre la cual existe un mapa inyectivo $e : \mathcal{M} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow T_p\mathcal{M}$. El mapa e envía campos tensoriales en \mathcal{M} a campos tensoriales en su espacio tangente

$T_p\mathcal{M}$ (espacio interno) para todo punto $p \in \mathcal{M}$. A las componentes del mapa se las denomina *tétradas* y las escribimos e_a^μ . Equivalentemente, a las componentes, e_μ^a , del mapa inverso, $e^{-1} : T_p\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathbb{R}^4$, se las denomina *co-tétradas*.

Las tétradas son un conjunto de campos vectoriales que relacionan el espacio-tiempo curvo con el de Minkowski en cada punto de la siguiente manera:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b, \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu, \quad (2.5.1)$$

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a, \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu, \quad (2.5.2)$$

donde η_{ab} son las componentes de la métrica de Minkowski. De aquí en más, nos referiremos al espacio interno con índices latinos, mientras que las letras griegas refieren a índices espaciotemporales.

Las tétradas contienen toda la información de la métrica, pero el recíproco no es válido. La métrica $g_{\mu\nu}$ tiene 10 grados de libertad mientras que e_μ^a tiene 16. Estos 6 grados de libertad extra en las tétradas corresponden al número de grados de libertad del grupo $SO(3, 1)$, el número de parámetros independientes de una transformación de Lorentz en el espacio interno.

Queremos imponer la compatibilidad de la derivada covariante con la tétrada. Para ello, debemos observar que e_a^μ tiene un índice interno y un índice espaciotemporal, por lo cual debemos definir una derivada covariante que actúe en ambos índices. Primero, aplicamos el operador ∇ , asociado a la conexión de Levi-Civita, $\Gamma_{\mu\rho}^\nu$, que actúa sobre los campos tensoriales en el índice espaciotemporal:

$$\nabla_\mu e_a^\nu = \partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho. \quad (2.5.3)$$

Luego, de manera análoga a (2.3.18), definimos la derivada covariante D que actúa sobre un tensor T , tanto en su índice índice espaciotemporal, como en su índice interno mediante una conexión espinorial ω , cuyas componentes son $\omega_{a\mu}^b$, de modo que.

$$\begin{aligned} D_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} &= \partial_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu_1} T_{a_1 \dots a_m}^{\rho \dots \nu_n} + \dots - \omega_{a_1\mu}^b T_{b \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} - \dots \\ &= \nabla_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} - \omega_{a_1\mu}^b T_{b \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} - \dots \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Ahora estamos en condiciones de imponer la compatibilidad de la derivada covariante con la tétrada,

$$D_\mu e_\nu^a = \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b = 0, \quad (2.5.5)$$

para así determinar la relación entre las componentes de la conexión espinorial y las tétradas y co-tétradas:

$$\omega_{a\mu}^b = e_\nu^b \nabla_\mu e_a^\nu. \quad (2.5.6)$$

Las tétradas serán unas de las variables fundamentales en la formulación Hamiltoniana de la Relatividad General.

De la manera análoga a la sección (2.3.1), vamos a suponer el espaciotiempo como una variedad globalmente hiperbólica y vamos a dividirlo en espacio y tiempo, mediante un difeomorfismo de la forma (2.3.1). Llamamos $q_{\mu\nu}$ a las componentes de la métrica inducida por $g_{\mu\nu}$ en Σ , las cuales están dadas por

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.5.7)$$

Recordemos también que las componentes de la curvatura extrínseca siguen la expresión:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{\mu\nu}. \quad (2.5.8)$$

Sustituyendo (2.5.1) en (2.5.7), tenemos

$$q_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b + n_\mu n_\nu = -e_\mu^0 e_\nu^0 + \delta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j + n_\mu n_\nu, \quad (2.5.9)$$

donde los índices i, j son espaciales, por lo tanto $i, j = 1, 2, 3$. Esta forma de la métrica sugiere una fijación de gauge simple para eliminar algunos grados de libertad. En el gauge temporal, la componente e_μ^0 coincide con el vector normal, eliminando la componente del boost del grupo de Lorentz. El grupo de simetrías de gauge queda reducido al grupo de las rotaciones espaciales,

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j, \quad (2.5.10)$$

donde $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ y los índices i, j están relacionados con la simetría $SO(3)$ (o,

equivalentemente, $SU(2)$).

2.5.2. Tríadas densitizadas y vínculo rotacional

A continuación, relacionaremos las tétradas con la tríada densitizada, una de las variables introducidas por Ashtekar [37] para construir la nueva representación de la Relatividad General.

En la ecuación (2.5.10) se puede observar que la métrica espacial es invariante bajo transformaciones gauge en el espacio interno, es decir, rotaciones $SO(3)$. La tétrada proyectada en Σ tiene tres grados de libertad más que la métrica espacial, por lo tanto, deben existir tres ecuaciones más que en la formulación ADM, que serán un vínculo de primera clase relacionado con la simetría de las transformaciones gauge del grupo $SO(3)$. Queremos hallar dicho vínculo pero antes es útil definir algunos conceptos. En primer lugar, vamos a definir la 1-forma K_α^i en Σ :

$$K_\alpha^i = X_a^i X_\alpha^\mu \omega_\mu^{a0}. \quad (2.5.11)$$

X_α^μ son las componentes del proyector de \mathcal{M} en Σ y X_a^i son las componentes del mapa inverso al que va desde el espacio interno cuadridimensional al tridimensional. Utilizando (2.5.6) y (2.5.11) se obtiene:

$$K_\alpha^i = X_\alpha^\mu X_\nu^\beta e_\beta^i (\nabla_\mu n^\nu). \quad (2.5.12)$$

Así como las tétradas están relacionadas con la métrica espacial según (2.5.1), la 1-forma K_α^i está relacionada con la curvatura extrínseca.

En segundo lugar vamos a definir una 2-forma, \mathcal{K} , en la hipersuperficie Σ , dada por la contracción de índices internos de K y e con la métrica euclídea:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{ij} K_\alpha^i e_\beta^j. \quad (2.5.13)$$

Desarrollando la expresión de la curvatura extrínseca en función de la derivada de Lie de la métrica, se puede verificar que K es la parte simétrica de \mathcal{K} :

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = K_{(\alpha\beta)}. \quad (2.5.14)$$

Reemplazando el par de variables ADM (q_{ab}, K_{ab}) por la 1-forma K_α^i y las tétradas e_i^α se obtiene una dinámica equivalente. Vamos a exigir ahora que \mathcal{K}_{ab} sea igual a la curvatura extrínseca, la cual es simétrica, de manera que la parte antisimétrica de \mathcal{K} debe satisfacer el siguiente vínculo:

$$\mathcal{K}_{[\alpha\beta]} \approx 0. \quad (2.5.15)$$

El mismo consiste en tres ecuaciones, ya que $\mathcal{K}_{[\alpha\beta]}$ es antisimétrica. Aquí se absorben los tres grados de libertad extra introducidos al elegir las tétradas como variables.

A las tétradas proyectadas en Σ les llamamos *tríadas*. Estas deben multiplicarse por el determinante de la métrica espacial para poder integrarlas. Llamamos *tríadas densitizadas* a

$$E_i^\alpha = e e_i^\alpha, \quad (2.5.16)$$

donde $e = \det [e_\alpha^i] = (\det [e_i^\alpha])^{-1}$. Las tríadas se relacionan con las variables ADM de la siguiente manera:

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{ij} e^2 E_\alpha^i E_\beta^j = \delta_{ij} E E_\alpha^i E_\beta^j, \quad (2.5.17)$$

siendo $E = \det [E_i^\alpha] = \det [e e_i^\alpha] = e^3 \det [e_i^\alpha] = e^2$. Podemos escribir el momento conjugado de la métrica como

$$\begin{aligned} \pi^{\alpha\beta} &= \sqrt{q} (K^{\alpha\beta} - K q^{\alpha\beta}) = \sqrt{q} (K^{i(\alpha} e_i^{\beta)}) - q^{\alpha\beta} K^{i\gamma} e_{i\gamma}) \\ &= \sqrt{E} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{K^{i\alpha} E_i^\beta - K^{i\beta} E_i^\alpha}{2} \right) - \frac{1}{E} \delta^{ij} E_i^\alpha E_j^\beta \sqrt{E} K^{i\gamma} E_{i\gamma} \right) \\ &= \frac{(K^{i\alpha} E_i^\beta - K^{i\beta} E_i^\alpha)}{2} - \delta^{ij} E_i^\alpha E_j^\beta K^{i\gamma} E_{i\gamma} \\ &= 2\delta_\delta^{(\alpha} E^{\beta)i} E_\gamma^j E_i^{[\gamma} K_j^{\delta]}, \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

donde el determinante q cumple: $q = \det[E_i^\alpha]^3 \det[E_\alpha^i]^2 = \det[E_i^\alpha] = E$. Además, expresaremos el vínculo (2.5.15) en términos de las nuevas variables

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{ij} &= ee_i^\alpha e_i^\beta \mathcal{K}_{[\alpha\beta]} = ee_i^\alpha e_i^\beta K_{[\alpha}^k e_{\beta]k} \\
&= ee_i^\alpha e_i^\beta \frac{1}{2} (K_\alpha^k e_{\beta k} - K_\beta^k e_{\alpha k}) \\
&= e \left(\frac{1}{e} E_i^\alpha \right) \left(\frac{1}{e} E_j^\beta \right) \frac{1}{2} (K_{\alpha k} (e E_\beta^k) - K_{\beta k} (e E_\alpha^k)) \\
&= \frac{1}{2} E_i^\alpha E_j^\beta (E_\beta^k K_{\alpha k} - E_\alpha^k K_{\beta k})
\end{aligned} \tag{2.5.19}$$

esto es,

$$\mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{2} (E_i^\alpha K_{\alpha j} - E_j^\beta K_{\beta i}) = K_{\alpha[i} E_{j]}^\alpha \approx 0 \tag{2.5.20}$$

y haremos lo propio con el resto de los vínculos. El vínculo de difeomorfismos será

$$C_\alpha = -2D_\beta \pi_\alpha^\beta = -2D_\beta (K_\alpha^i E_i^\beta - \delta_\alpha^\beta K_j^\gamma E_j^\gamma), \tag{2.5.21}$$

donde se usó que $\delta_\alpha^\beta = \delta_i^j e_\alpha^i e_j^\beta = \delta_i^j E_\alpha^i E_j^\beta = E_\alpha^i E_i^\beta$ y la igualdad débil $K_{[\alpha}^i e_{\beta]i} \approx 0 \Rightarrow K_\alpha^i E_i^\beta \approx K_i^\beta E_\alpha^i$. Por último, el vínculo hamiltoniano es

$$C = \sqrt{E} E_i^\alpha E_j^\beta (K_\alpha^j K_\beta^i - K_\alpha^i K_\beta^j) - \frac{1}{\sqrt{E}} ({}^3R(E)). \tag{2.5.22}$$

Nos encontramos con un nuevo espacio de fases cuya álgebra cumple:

$$\{E_\alpha^j(t, x), K_i^\beta(t, y)\} = \delta_i^j \delta_\alpha^\beta \delta(x - y), \tag{2.5.23}$$

$$\{E_\alpha^i(t, x), E_\beta^j(t, y)\} = \{K_i^\alpha(t, x), K_j^\beta(t, y)\} = 0. \tag{2.5.24}$$

Análogamente al tratamiento que dimos a los vínculos hamiltoniano y de difeomorfismos, consideraremos la versión suavizada del vínculo (2.5.20), denominado también *vínculo rotacional*, integrándolo contra una función suave, α^{ij} ,

$$\mathcal{R}(\alpha) = \int \alpha^{ij} K_{\alpha i} E_j^\alpha d^3x. \tag{2.5.25}$$

El álgebra generada por el mismo,

$$\{\mathcal{R}(\alpha), \mathcal{R}(\alpha')\} = \mathcal{R}([\alpha, \alpha']), \quad (2.5.26)$$

es el álgebra de las rotaciones espaciales $SO(3)$, y su corchete de Poisson con las variables ADM es cero pues estas son manifiestamente invariantes bajo rotaciones. Como la métrica espacial es función únicamente de las tríadas satisface

$$\{q_{\alpha\beta}(t, x), q_{\gamma\delta}(t, y)\} = 0, \quad (2.5.27)$$

y su momento canónicamente conjugado cumple

$$\{\pi^{\alpha\beta}(t, x), \pi^{\gamma\delta}(t, y)\} = -\frac{\sqrt{q}}{8} (q^{\alpha\gamma}\mathcal{R}^{\beta\delta} + q^{\alpha\delta}\mathcal{R}^{\beta\gamma} + q^{\beta\gamma}\mathcal{R}^{\alpha\delta} + q^{\beta\delta}\mathcal{R}^{\alpha\gamma}) \delta(x - y) \quad (2.5.28)$$

Obsérvese que los corchetes (2.5.28) se anulan cuando se satisface el vínculo rotacional. Además,

$$\{\pi^{\alpha\beta}(t, x), q_{\gamma\delta}(t, y)\} = \delta_{(\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta)}^{\beta} \delta(x - y). \quad (2.5.29)$$

Finalmente, podemos asegurar que, cuando se satisface el vínculo rotacional, las variables E_{α}^i y K_i^{α} son equivalentes a las variables ADM.

2.5.3. Variables de Ashtekar

Como ya mencionamos, Ashtekar introdujo un nuevo formalismo [37, 38] en el cual reescribió las variables métricas en términos una conexión compleja de gauge $SU(2)$, y de sus momentos canónicamente conjugados llamados tríadas. Estas nuevas variables extienden el espacio de fases y simplifican las ecuaciones de vínculos.

Dado que la conexión es compleja, a la hora de cuantizar se deben imponer condiciones para asegurar que el límite clásico sea Relatividad General. Barbero propuso el uso de una conexión real (*conexión de Ashtekar-Barbero*) introduciendo el *parámetro de Barbero-Immirzi*, γ_I .

Observemos que la estructura del espacio de fases (2.5.23) y (2.5.24) no se altera al realizar una transformación canónica del tipo $E_i^{\alpha} \rightarrow \frac{E_i^{\alpha}}{\gamma_I}$, $K_{\alpha}^i \rightarrow \gamma_I K_{\alpha}^i$. El vínculo

rotacional también es invariante bajo esta transformación.

Vamos a introducir una conexión con componentes, Γ_α^{ij} , asociada a la simetría $SO(3)$, para definir la derivada covariante de un tensor con índices internos y espaciotemporales:

$$\begin{aligned} D_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{i_1 \dots i_n} &= \partial_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{i_1 \dots i_n} - \sum_{j=1}^m \Gamma_{\alpha \beta_j}^\rho T_{\beta_1 \dots \beta_{j-1} \rho \beta_{j+1} \dots \beta_m}^{i_1 \dots i_n} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{k\alpha}^{i_l} T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{i_1 \dots i_{l-1} k i_{l+1} \dots i_n} \\ &= \nabla_\alpha T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{i_1 \dots i_n} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{k\alpha}^{i_l} T_{\beta_1 \dots \beta_m}^{i_1 \dots i_{l-1} k i_{l+1} \dots i_n}. \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

Esta derivada covariante debe ser compatible con las tétradas, es decir, debe cumplir $D_\alpha e_\beta^i = 0$, lo que implica,

$$\Gamma_\beta^{ij} = e^{\alpha i} \nabla_\beta e_\alpha^j. \quad (2.5.31)$$

Definiendo $\Gamma_\alpha^i \equiv -\frac{1}{2} \varepsilon_{jk}^i \Gamma_\alpha^{jk}$, podemos verificar que,

$$\begin{aligned} D_\alpha E_j^\alpha &= \partial_\alpha E_j^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^k E_k^\alpha \\ &= \partial_\alpha E_j^\alpha + \varepsilon_{jk}^l \Gamma_\alpha^k E_l^\alpha = 0. \end{aligned} \quad (2.5.32)$$

Se puede verificar que Γ_α^i tampoco varía bajo la transformación $(\gamma_I) E_i^\alpha = \frac{E_i^\alpha}{\gamma_I}$. Podemos modificar el vínculo rotacional, adicionando la igualdad fuerte (2.5.32), obteniendo así, el *vínculo de Gauss*:

$$G_i = \partial_\alpha ((\gamma_I) E_i^\alpha) + \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^j ((\gamma_I) E_k^\alpha) + \varepsilon_{ij}^k ((\gamma_I) K_\alpha^j) ((\gamma_I) E_k^\alpha), \quad (2.5.33)$$

esto es,

$$G_i = \partial_\alpha ((\gamma_I) E_i^\alpha) + \varepsilon_{ij}^k ((\gamma_I) A_\alpha^j) ((\gamma_I) E_k^\alpha) \approx 0. \quad (2.5.34)$$

Aquí, $(\gamma_I) A_\alpha^j = \Gamma_\alpha^j + \gamma_I K_\alpha^j$ es la *conexión de Ashtekar-Barbero* y forma un par canónicamente conjugado con $(\gamma_I) E_j^\alpha$, ya que sus corchetes de Poisson cumplen

$$\left\{ (\gamma_I) E_\alpha^i(t, x), (\gamma_I) A_j^\beta(t, y) \right\} = \delta_i^j \delta_\alpha^\beta \delta(x - y), \quad (2.5.35)$$

$$\{({}^{\gamma I})E_\alpha^i(t, x), ({}^{\gamma I})E_\beta^j(t, y)\} = \{({}^{\gamma I})A_i^\alpha(t, x), ({}^{\gamma I})A_j^\beta(t, y)\} = 0. \quad (2.5.36)$$

En función de estas nuevas variables podemos calcular el vínculo de difeomorfismos,

$$C_\alpha = F_{\alpha\beta}^i E_i^\beta - ({}^{\gamma I})K_\alpha^i G_i, \quad (2.5.37)$$

y el vínculo hamiltoniano,

$$C = \frac{(\gamma I)^2}{\sqrt{E}} \left(E_i^\alpha E_j^\beta \left[\varepsilon_k^{ij} F_{\alpha\beta}^k - 2(\gamma I^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\beta]}^j \right] + ({}^{\gamma I})E_i^\alpha D_\alpha G^i \right), \quad (2.5.38)$$

donde $F_{\alpha\beta}^k = 2\partial_{[\alpha} ({}^{\gamma I})A_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k ({}^{\gamma I})A_\alpha^i ({}^{\gamma I})A_\beta^j$, y puede escribirse como

$$F_{\alpha\beta}^k = R_{\alpha\beta}^k + 2D_{[\alpha} ({}^{\gamma I})K_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k ({}^{\gamma I})K_{[\alpha}^i ({}^{\gamma I})K_{\beta]}^j,$$

siendo $R_{\alpha\beta}^k = \partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^i \Gamma_\beta^j$.

Las conexiones son las nuevas variables de configuración. Estas variables se comportan como una conexión de Yang-Mills $SU(2)$ (ver anexo (C)), por lo que se pueden utilizar ciertas técnicas de dichas teorías para analizar la Relatividad General. Las teorías de Yang-Mills se basan en una invariancia gauge local, que en el caso del electromagnetismo viene descrita por el grupo $U(1)$. La Relatividad General escrita en términos de las variables de Ashtekar responde a un gauge $SU(2)$ y los vínculos se simplifican notablemente. Los vínculos (2.5.34), (2.5.37), (2.5.38) son completamente equivalentes a:

$$G_i = \mathcal{D}_\alpha E_i^\alpha \equiv \partial_\alpha E_i^\alpha + \varepsilon_{ij}^k ({}^{\gamma I})A_\alpha^j E_k^\alpha \approx 0, \quad (2.5.39)$$

$$C_\alpha = E_i^\beta F_{\alpha\beta}^i \approx 0, \quad (2.5.40)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{E}} E_i^\alpha E_j^\beta \left[\varepsilon_k^{ij} F_{\alpha\beta}^k - 2(\gamma I^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\beta]}^j \right] \approx 0, \quad (2.5.41)$$

respectivamente. Para determinar la acción de los vínculos sobre la tríada y la cone-

xi3n es necesario calcular los corchetes de Poisson entre los primeros (en su versi3n versi3n suavizada) y las variables de Ashtekar. El v3nculo de Gauss, que en su versi3n suavizada es

$$C_G(\Lambda) \equiv \int_{\Sigma} d^3x \Lambda^i G_i, \quad (2.5.42)$$

donde Λ es un campo suave en Σ . Su acci3n sobre la triada y la conexi3n est3 determinada por

$$\{A_{\alpha}^i, C_G(\Lambda)\} = -D_{\alpha} \Lambda^i, \quad \{E_i^{\alpha}, C_G(\Lambda)\} = \varepsilon_{ij}^k \Lambda^j E_k^{\alpha}. \quad (2.5.43)$$

Este genera rotaciones en el espacio interno, es decir, rotaciones correspondientes al grupo $SO(3)$ (o equivalentemente $SU(2)$). La versi3n suavizada del v3nculo de difeomorfismos es

$$C_{Dif}(\vec{N}) \equiv \int_{\Sigma} d^3x \left(N^{\alpha} E_i^{\beta} F_{\alpha\beta}^i - (N^{\alpha} A_{\alpha}^i) G_i \right), \quad (2.5.44)$$

y su acci3n sobre las variables de Ashtekar es

$$\{A_{\alpha}^i, C_{Dif}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} A_{\alpha}^i, \quad \{E_i^{\alpha}, C_{Dif}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^{\alpha}, \quad (2.5.45)$$

es decir, genera difeomorfismos espaciales en la direcci3n del vector \vec{N} (tangenciales a la hipersuperficie Σ). Por 3ltimo, el v3nculo hamiltoniano en su versi3n suavizada:

$$C(N) \equiv \int_{\Sigma} d^3x N \frac{1}{\sqrt{E}} E_i^{\alpha} E_j^{\beta} \left[\varepsilon_{\alpha\beta}^{ij} F_{\alpha\beta}^k - 2(\gamma_I^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\beta]}^j \right] \quad (2.5.46)$$

y sus corchetes de Poisson con las variables de Ashtekar dan como resultado:

$$\{A_{\alpha}^i, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn} A_{\alpha}^i, \quad \{E_i^{\alpha}, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn} E_i^{\alpha}, \quad (2.5.47)$$

que corresponde a la evoluci3n temporal, un difeomorfismo en la direcci3n perpendicular a la hipersuperficie Σ . Aqu3 se utilizan s3mbolos de igualdad debil (\approx) debido a que existen otros t3rminos que se anulan en la superficie de v3nculos.

Finalmente se puede verificar que el álgebra de vínculos cumple:

$$\{C_G(\Lambda), C_G(\Lambda')\} = C_G([\Lambda, \Lambda']), \quad (2.5.48)$$

$$\{C_G(\Lambda), C_{Dif}(\vec{N})\} = -C_G(\mathcal{L}_{\vec{N}}\Lambda), \quad (2.5.49)$$

$$\{C_{Dif}(\vec{N}), C_{Dif}(\vec{N}')\} = C_{Dif}([\vec{N}, \vec{N}']), \quad (2.5.50)$$

$$\{C_G(\Lambda), C(N)\} = 0, \quad (2.5.51)$$

$$\{C_{Dif}(\vec{N}), C(M)\} = -C(\mathcal{L}_N M), \quad (2.5.52)$$

$$\begin{aligned} \{C(N), C(M)\} = & -4 \left(C_{Dif}(\vec{S}) + C_G(S^\alpha A_\alpha^i) \right) \\ & + \left(1 + \frac{1}{\gamma I^2} \right) C_G \left(\frac{[E_\alpha^i \partial^\alpha N, E_\beta^i \partial^\beta N]}{q} \right). \end{aligned} \quad (2.5.53)$$

Aquí se definió: $S^\alpha = (N\partial_\beta M - M\partial_\beta N) \frac{E_i^\beta E^{\alpha i}}{q}$.

Para concluir este capítulo podemos decir que la Teoría de la Relatividad General se puede reescribir como una teoría dinámica de conexiones con grupos de estructura compactos, pero con la desventaja de tener más grados de libertad, un vínculo extra y una estructura de corchetes de Poisson más compleja.

Capítulo 3

Gravedad cuántica de Lazos

Tanto la teoría de la Relatividad General como la teoría de la Mecánica Cuántica han revolucionado nuestro entendimiento de la física. La Relatividad General, que describe fenómenos macroscópicos, ha cambiado por completo nuestra perspectiva del espacio y el tiempo. Esta nos conduce al estudio de la astrofísica, la cosmología y hasta la tecnología GPS. Por otra parte, la Mecánica Cuántica, rompió con el determinismo de la dinámica e introdujo una visión discreta del mundo a pequeñas escalas, que estaría gobernado por leyes probabilísticas. Nos conduce al estudio de la física atómica, nuclear y de partículas, así como la materia condensada, etc.

Pero estas dos teorías tan importantes han destruido la coherencia del mundo de la física clásica pre-relativista, ya que han sido formuladas bajo supuestos completamente contradictorios entre sí. La Mecánica Cuántica fue formulada utilizando una variable de tiempo externo o un espaciotiempo de fondo fijo, no dinámico. Esta variable de tiempo y este fondo fijo son incompatibles con la Relatividad General. La Relatividad General fue formulada en términos de la geometría Riemanniana, asumiendo que la métrica es un campo dinámico suave y determinista. Por otro lado, la teoría cuántica nos dice que cualquier entidad dinámica está formada por cuantos discretos y se encuentra en una superposición de estados probabilísticos. Por todo esto, se puede concluir que, a pequeña escala, deben existir cuantos de espacio y cuantos de tiempo, y una superposición cuántica de estados. Esto último significa una sólo cosa: vivimos en un espaciotiempo cuántico, pero, ¿cómo podemos describirlo? Para hacerlo debemos combinar lo aprendido acerca de las dos teorías y este

es probablemente el mayor desafío en la física fundamental actual.

No obstante, cabe preguntarse, si la gravedad es tan difícil de cuantizar y, a la vez, los efectos cuánticos son pequeños en los dominios dónde esta es importante, ¿por qué realizar tanto esfuerzo por cuantizarla?

Por más que no conocemos situaciones experimentales accesibles donde sea necesario cuantizar la gravedad para su descripción, sí existen muchos procesos físicos que requieren una teoría cuántica de la gravedad para explicarlos. Por ejemplo, la colisión de dos partículas con energía suficientemente alta para que la gravedad sea relevante. O el proceso que sufre un agujero negro al evaporarse por radiación de Hawking hasta que su masa se vuelve comparable a la masa de Planck¹. Otro ejemplo lo posible resulta de preguntarse qué sucede con el universo cerca del Big Bang. Por último, y un paso más allá, está el asunto de la unificación en física que sugiere que cuantizar tres de las cuatro interacciones fundamentales² dejando a la gravedad como una teoría clásica, es insatisfactorio. El punto de vista de unificación de teorías o, más precisamente, la unificación de paradigmas subyacentes a teorías, no es un simple antojo, sino que ha sido muy exitoso históricamente. Por ejemplo, el poner a la mecánica de Newton en pie de igualdad con la electrodinámica de Maxwell condujo a la relatividad especial; incorporar la gravedad en este paradigma fue lo que motivó la Relatividad General; incorporar la relatividad especial en la Mecánica Cuántica llevó a la teoría cuántica de campos. Similarmente, unificar el electromagnetismo y las interacciones débiles condujo a la primer teoría satisfactoria de estas interacciones. En todos los casos poner las teorías en pie de igualdad ha llevado la producción de una nueva física con implicaciones importantísimas. El hecho de no contar con una teoría completa de la gravedad cuántica hace difícil discutir la existencia, o no, de consecuencias experimentales de dicha teoría.

Además de todo lo mencionado, tanto la propia teoría de la relatividad como las teorías cuánticas de campos tienen problemas en sí mismas. En Relatividad General está demostrado que bajo condiciones genéricas los espaciotiempos desarrollan singularidades; por ejemplo, el Big Bang (que creemos está presente en el origen del universo) o las singularidades que aparecen en el interior de los agujeros negros. En general, una singularidad está asociada con una divergencia de cantidades que indi-

¹ $m_{Planck} = 2 \times 10^{-5}g$

²Las cuatro interacciones fundamentales: débil, fuerte, electromagnética, y gravitatoria.

can que la teoría ha sido llevada más allá de su dominio de aplicabilidad. Cerca de las singularidades se suelen encontrar densidades de energía que no son compatibles con un tratamiento puramente clásico. Aquí radica la expectativa de que una teoría que unifique la Teoría Cuántica de Campos y la Relatividad General pueda entregar una nueva perspectiva y, posiblemente, eliminar las singularidades completamente.

De forma similar, la Teoría Cuántica de Campos tiene el problema de que muchos operadores no son funciones sino distribuciones (como, por ejemplo, la delta de Dirac). Al estudiar interacciones se deben considerar productos de dichos operadores y tales productos no están bien definidos. Algunas de las divergencias en esta teoría pueden ser eliminadas redefiniendo las constantes de acoplamiento a través de un procedimiento llamado renormalización. A pesar de ello, desde el punto de vista de la formalidad matemática, las teorías cuánticas de campos no están definidas óptimamente y deben ser tratadas usando series perturbativas que no son realmente convergentes (series asintóticas). Las singularidades aparecen debido a la naturaleza distribucional de los campos y operadores. Si se cambia la naturaleza del espacio-tiempo el carácter distribucional de los campos también puede cambiar y se abre la posibilidad de eliminar las singularidades de la teoría cuántica de campos.

A la hora de cuantizar el campo gravitatorio se puede proceder de dos formas distintas [48]: partiendo de una visión perturbativa o a partir de un planteamiento no perturbativo. En la década de los '80 nacieron la *Teoría de Cuerdas* (perturbativa) y la *Gravedad Cuántica de Lazos* (no perturbativa [20]). Luego de una década de intenso trabajo, ambas comenzaron a proporcionar predicciones físicas como, por ejemplo, relaciones entre la superficie de los agujeros negros y la entropía [46]. En particular, la Gravedad Cuántica de Lazos intenta respetar en todo momento la independencia del fondo, un aspecto clave de la Relatividad General. Este es un elemento fundamental a la hora de obtener una teoría cuántica de la gravedad [48, 22].

En este capítulo describiremos las bases de la cuantización canónica y las aplicaremos a las formulaciones hamiltonianas vistas en el capítulo previo. El formalismo ADM se orientará hacia la ecuación de Wheeler-deWitt, en tanto, la cuantización de la Relatividad General escrita en función de las variables de Ashtekar derivará en la formulación de la Gravedad Cuántica de Lazos.

3.1. Cuantización canónica

La cuantización canónica es un procedimiento en el cual a una magnitud física (expresada en términos de las coordenadas canónicas del sistema clásico) se asigna un operador hermítico, de forma que la descripción cuántica conserve la estructura dada por los corchetes de Poisson de la teoría clásica [42]. El corchete de Poisson de dos funciones en el espacio de fases en el caso unidimensional se define como:

$$\{A; B\} = \frac{\partial A}{\partial q} \frac{\partial B}{\partial p} - \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial B}{\partial q}, \quad (3.1.1)$$

donde q es la variable de configuración y p su momento canónicamente conjugado. El formalismo hamiltoniano permite describir la evolución temporal de las variables del sistema. Si A es una función, su evolución en el tiempo está dada por:

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}, \quad (3.1.2)$$

donde H es el hamiltoniano del sistema.

Como se ha mencionado, la cuantización canónica promueve las variables dinámicas clásicas a operadores lineales que actúan sobre funciones de onda pertenecientes a un espacio de Hilbert. El conmutador entre dos operadores se define de la siguiente manera:

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}, \quad (3.1.3)$$

y está relacionado con el corchete de Poisson de la formulación clásica, tal que,

$$\{A, B\} \rightarrow [\hat{A}, \hat{B}] = i\hbar\{A, B\}. \quad (3.1.4)$$

La evolución temporal queda definida, de forma análoga a la ecuación (3.1.2), por la ecuación de Heisenberg:

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}. \quad (3.1.5)$$

Los vínculos también deben ser cuantizados y para ello se promueven a operadores que aniquilan las funciones de onda del espacio de Hilbert:

$$\mathcal{C}(q, p) = 0 \rightarrow \hat{\mathcal{C}}(\hat{q}, \hat{p})\psi = 0. \quad (3.1.6)$$

Estas funciones de onda son los estados físicos del sistema pues, de no satisfacer la condición anterior, no representan una situación física real.

3.1.1. Ecuación de Wheeler-DeWitt

Hemos visto que la Teoría de la Relatividad General puede ser formulada como un sistema dinámico definido por las ecuaciones de Hamilton-Jacobi:

$$F_{ab}^{ij} \frac{\delta S[A]}{\delta A_a^i} \frac{\delta S[A]}{\delta A_b^j} = 0, \quad (3.1.7)$$

donde $F_{ab}^{ij} = \epsilon_k^{ij} F_{ab}^k$ y $F_{ab}^k = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + \epsilon_{jk}^i A_a^j A_b^k$. Además, la funcional $S[A]$ está definida en el espacio \mathcal{G} de las conexiones $SU(2)$, A_a^i , y es invariante bajo transformaciones internas de gauge y bajo difeomorfismos espaciales. Equivalentemente, la teoría está definida por el hamiltoniano $H[A, E] = F_{ab}^{ij} E_i^a E_j^b$.

Cabe aclarar que, para simplificar el desarrollo, vamos a construir el espacio de estados a partir de una conexión real, en lugar de una compleja. La ecuación (3.1.7) vale solamente para el caso euclídeo. La teoría lorentziana puede ser formulada a partir de este operador, considerando el término adicional de la ecuación (2.5.41).

Una cuantización de la teoría puede ser obtenida en términos de funcionales de onda $\Psi[A]$. La dinámica cuántica es inferida por la dinámica clásica interpretando $S[A]$ como \hbar veces la fase de $\Psi[A]$, es decir, interpretando la teoría clásica de Hamilton-Jacobi como una aproximación de la ecuación de onda cuántica. Esto puede realizarse definiendo la dinámica cuántica mediante el reemplazo de las derivadas de la funcional de Hamilton-Jacobi, $S[A]$, por operadores derivadas. En primer lugar, debemos pedir que $\Psi[A]$ sea invariante bajo transformaciones $SU(2)$ y bajo difeomorfismos, a través de las ecuaciones

$$D_a \frac{\delta}{\delta A_a^i} \Psi[A] = 0. \quad (3.1.8)$$

Además, la ecuación (3.1.7) da lugar a

$$F_{ab}^{ij} \frac{\delta}{\delta A_a^i} \frac{\delta}{\delta A_b^j} \Psi[A] = 0. \quad (3.1.9)$$

La expresión (3.1.9) se conoce como la *ecuación de Wheeler-DeWitt* [43], o *ecuación de Einstein-Schrödinger*, una ecuación diferencial funcional que gobierna la dinámica cuántica del espacio tiempo.

Necesitamos un espacio de Hilbert adecuado para las funcionales $\Psi[A]$. Debemos identificar su estructura que, como veremos, será única.

3.2. Espacio de estados cinemático \mathcal{K}

En esta sección construiremos la estructura del espacio de estados cinemático³. Para lo que resta del capítulo, puede ser de útil leer los apéndices (A) y (B) o las referencias [113] y [20].

Sea \mathcal{G} el espacio de las conexiones, A , definidas en todos los puntos de una superficie tridimensional, Σ (posiblemente, con excepción de algunos puntos aislados). Sea \mathcal{S} el espacio definido por funcionales en \mathcal{G} .

Haremos uso de la interpretación geométrica del campo A como una conexión. El álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ es la misma que el álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$. Es conveniente ver a A como una conexión $\mathfrak{su}(2)$, por lo cual, escogiendo una base fija τ_i en $\mathfrak{su}(2)$, definida como $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$ (donde σ^i son las matrices de Pauli), podemos escribir la conexión como

$$A(\vec{\tau}) = A_a^i(\vec{\tau})\tau^i dx^a. \quad (3.2.1)$$

Holonomías de la conexión

Un camino orientado, ζ , en Σ y una conexión A determinan un elemento del grupo, $U(\zeta, A) = \mathcal{P} \exp \left(\int_{\zeta} A \right)$, siendo \mathcal{P} es el producto ordenado en el camino, llamado holonomía de la conexión a lo largo del camino. Aquí, \mathcal{P} es el producto

³La lectura de esta sección y las siguientes puede encontrarse en el libro "Quantum gravity" de C. Rovelli [20].

ordenado en el camino. Para un camino dado, ζ , la holonomía, $U(\zeta, A)$, es una funcional en \mathcal{G} . Consideremos una colección ordenada, Γ , de caminos suaves orientados, ζ_l , con $l = 1, \dots, L$, y una función suave $f(U_1, \dots, U_L)$ de L elementos del grupo. El par (Γ, f) define una funcional de A :

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(U(A, \zeta_1), \dots, U(A, \zeta_L)). \quad (3.2.2)$$

Se define \mathcal{S} como el espacio lineal de todas las funcionales $\Psi_{\Gamma, f}[A]$ para todo Γ y f . A estas funcionales las llamamos *funciones cilíndricas*. Decimos que Γ es un grafo orientado, ordenado, embebido en Σ . En cuanto a las funciones cilíndricas, cambiar el orden o la orientación de un grafo, es equivalente a cambiar el orden de los argumentos de f , o reemplazarlos por su inverso.

Producto escalar

A continuación, definiremos un producto escalar en el espacio \mathcal{S} . Si dos funcionales, $\Psi_{\Gamma, f}[A]$ y $\Psi_{\Gamma, g}[A]$, están definidas con el mismo grafo, Γ , definimos el producto

$$\langle \Psi_{\Gamma, f}[A] | \Psi_{\Gamma, g}[A] \rangle \equiv \int dU_1, \dots, dU_L \overline{f(U_1, \dots, U_L)} g(U_1, \dots, U_L), \quad (3.2.3)$$

dónde dU es la medida de Haar⁴ en $SU(2)$.

La definición del producto escalar de funcionales definidas en un mismo grafo puede extenderse a funcionales definidas en diferentes grafos, es decir, (3.2.3) se vuelve una definición válida para dos funcionales cualesquiera en \mathcal{S} :

$$\langle \Psi_{\Gamma', f'}[A] | \Psi_{\Gamma'', g''}[A] \rangle \equiv \langle \Psi_{\Gamma, f}[A] | \Psi_{\Gamma, g}[A] \rangle, \quad (3.2.4)$$

donde Γ es la unión de Γ' y Γ'' .

⁴La medida de Haar es una forma de asignar un 'volumen invariante' a los subconjuntos de grupos topológicos localmente compactos y de definir una integral para las funciones sobre esos grupos.

3.2.1. Estructuras en el espacio de Hilbert cinemático \mathcal{K}

El espacio de Hilbert cinemático \mathcal{K} de la gravedad cuántica es la completación en la norma definida por el producto escalar (3.2.3). Dicho producto escalar es invariante bajo difeomorfismos y transformaciones locales de gauge, y es tal que los observables clásicos se promueven a operadores autoadjuntos. Esta es una de las condiciones que el producto escalar debe satisfacer de modo que la teoría sea consistente con el límite clásico.

Las funciones cilíndricas con soporte en un grafo dado, Γ , forman un subespacio $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ de \mathcal{K} . Por definición, $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma = L_2[SU(2)^L]$, donde L es el número de caminos en Γ . El espacio $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ es el espacio de Hilbert de una teoría de gauge en redes con lattice (red) espacial Γ .

Podemos utilizar el teorema de Peter-Weyl para encontrar una base en \mathcal{K} . El mismo establece que una base en el espacio de Hilbert de funciones L_2 en $SU(2)$ está dada por los elementos de matriz de las representaciones irreducibles del grupo. Las representaciones irreducibles de $SU(2)$ están etiquetadas por un espín semientero j . Llamamos \mathcal{H}_j al espacio de Hilbert en el que está definida la representación j y llamamos v_α a sus vectores. Podemos escribir los elementos de matriz de la representación j como

$$R^{(j)\alpha}_\beta(U) = \langle U | j, \alpha, \beta \rangle. \quad (3.2.5)$$

Entonces una base de $\tilde{\mathcal{K}}_\Gamma$ está dada por

$$|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle \equiv |\Gamma, j_1, \dots, j_L, \alpha_1, \dots, \alpha_L, \beta_1, \dots, \beta_L\rangle. \quad (3.2.6)$$

Sin embargo, esta no es una base de \mathcal{K} . Una base de \mathcal{K} está dada por los estados $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$, en los cuales los espines $j_l (= 1/2, 1, 3/2, 2, \dots)$ nunca toman el valor cero.

3.2.2. Invariancia del producto escalar

Bajo una transformación local gauge, suave, $\lambda : \Sigma \rightarrow SU(2)$, la conexión A transforma de manera inhomogénea, como un potencial gauge:

$$A \rightarrow A_\lambda = \lambda A \lambda^{-1} + \lambda d\lambda^{-1}. \quad (3.2.7)$$

Esta transformación de A induce una representación natural de las transformaciones gauge locales, $\Psi(A) \rightarrow \Psi(A_{\lambda^{-1}})$ en \mathcal{K} . A pesar de esta transformación inhomogénea de A , la holonomía de la conexión transforma de manera homogénea:

$$U[A, \zeta] \rightarrow U[A_{\lambda}, \zeta] = \lambda(x_f^{\zeta}) U[A, \zeta] \lambda^{-1}(x_i^{\zeta}), \quad (3.2.8)$$

donde x_i^{ζ} y x_f^{ζ} son los puntos iniciales y finales del camino ζ . Para un par (Γ, f) dado, definimos

$$f_{\lambda}(U_1, \dots, U_L) = f\left(\lambda(x_f^{\zeta_1}) U_1 \lambda^{-1}(x_i^{\zeta_1}), \dots, \lambda(x_f^{\zeta_L}) U_L \lambda^{-1}(x_i^{\zeta_L})\right). \quad (3.2.9)$$

Es fácil ver que la transformación de los estados cuánticos es la siguiente:

$$\Psi_{\Gamma, f}(A) = (U_{\lambda} \Psi_{\Gamma, f})(A) = \Psi_{\Gamma, f}(A_{\lambda^{-1}}) = \Psi_{\Gamma, f_{\lambda^{-1}}}(A). \quad (3.2.10)$$

Dado que la medida de Haar es invariante bajo transformaciones izquierdas y derechas del grupo, surge que (3.2.3) es invariante. Se puede ver que, bajo una transformación U_{λ} , la base de estados, $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$, transforma como

$$\begin{aligned} U_{\lambda} |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle &= R^{(j_1)\alpha_1}_{\alpha'_1}(\lambda^{-1}(x_{f_1})) R^{(j_1)\beta_1}_{\beta_1}(\lambda(x_{i_1})) \dots \\ &\quad R^{(j_L)\alpha_L}_{\alpha'_L}(\lambda^{-1}(x_{f_L})) R^{(j_L)\beta_L}_{\beta_L}(\lambda(x_{i_L})) \\ &\quad \dots |\Gamma, j_l, \alpha'_l, \beta'_l\rangle, \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

donde i_l y f_l son los puntos iniciales y finales de l .

3.2.3. Estados invariantes de gauge e invariantes bajo difeomorfismos

Sea $\vartheta : \Sigma \rightarrow \Sigma$ un mapa continuo, invertible y, tal que, tanto él como su inverso son suaves en todos los puntos excepto, posiblemente, en un número finito de puntos aislados. Llamaremos al mapa ϑ *difeomorfismo*, y Dif^* al grupo formado por dichos mapas.

Bajo la acción de un difeomorfismo, la transformación de la conexión está bien definida. A , que pertenece a \mathcal{G} (el grupo de las conexiones en Σ) y está definida en

todo Σ (a menos de algunos posibles puntos aislados) transforma como una 1-forma

$$A \rightarrow \vartheta^* A. \quad (3.2.12)$$

Por lo tanto, \mathcal{S} lleva la representación U_ϑ de Dif^* definida por $U_\vartheta \Psi(A) = \Psi((\vartheta^*)^{-1} A)$. La holonomía transforma como

$$U[A, \zeta] \rightarrow U[\vartheta^* A, \zeta] = U[A, \vartheta^{-1} \zeta]. \quad (3.2.13)$$

El espacio de estados cinemático \mathcal{K} es un espacio de funcionales de onda de la conexión $\Psi[A]$, pero recordemos que necesitamos un espacio de estados donde las funcionales de onda sean invariantes bajo transformaciones gauge locales y bajo difeomorfismos. Más precisamente, las ecuaciones clásicas correspondientes a un sistema de Hamilton-Jacobi deben implementarse en la teoría cuántica de la siguiente manera

$$D_a \frac{\delta}{\delta A_a^i(\vec{\tau})} \Psi[A] = 0, \quad (3.2.14)$$

$$F_{ab}^i(\vec{\tau}) \frac{\delta}{\delta A_a^i} \Psi[A] = 0. \quad (3.2.15)$$

Estrictamente, para imponer la invariancia bajo difeomorfismos se debe realizar la integración en el grupo de transformaciones Dif^* , dando lugar a (3.2.15).

Llamaremos \mathcal{K}_0 al espacio de estados invariantes bajo transformaciones locales $SU(2)$. Por otro lado, llamaremos \mathcal{K}_{Dif} al espacio de estados invariantes bajo $SU(2)$ y bajo Dif^* . Si llamamos \mathcal{H} al espacio de soluciones de la ecuación de Wheeler-DeWitt (estados invariantes bajo la acción del hamiltoniano), tenemos entonces la secuencia de espacios de Hilbert

$$\mathcal{K} \xrightarrow{SU(2)} \mathcal{K}_0 \xrightarrow{Dif^*} \mathcal{K}_{Dif} \xrightarrow{H} \mathcal{H}, \quad (3.2.16)$$

dónde los tres pasos corresponden a la implementación de las tres ecuaciones que la funcional de onda debe satisfacer (3.2.14), (3.2.15) y (3.1.9), respectivamente.

3.3. El espacio \mathcal{K}_0 (invariancia de gauge)

Como ya mencionamos \mathcal{K}_0 es el espacio de estados invariante bajo transformaciones de gauge locales $SU(2)$. Llamaremos \mathcal{S}_0 al subespacio invariante gauge de \mathcal{S} , y \mathcal{S}'_0 a su dual. No es difícil ver que \mathcal{K}_0 es un subespacio propio de \mathcal{K} .

Introduciremos estados de una red de espín en \mathcal{K} que pueden ser vistos como combinaciones lineales finitas de estados de multilazos que forman una base ortonormal genuina. Los estados de multilazos son suficientes para generar \mathcal{K}_0 , sin embargo, la base es sobrecompleta y esto complica el formalismo.

3.3.1. Red de espín

Las *redes de espín* constituyen una base para las funciones invariantes gauge que minimiza el grado de sobrecompletitud de la base de lazos. Básicamente, se pueden utilizar matrices de cualquier representación para construir una conexión y, a partir de esta, operadores de transporte paralelo a lo largo de curvas. En las intersecciones entre las curvas se contraen los índices de las matrices mediante entrelazadores, o *intertwiners*, y sus aristas están etiquetadas por un número, el *espín*, asociado a la dimensionalidad de las matrices que describen la representación del grupo $SU(2)$ correspondiente. Describamos su estructura más detalladamente.

Llamaremos nodos a los puntos finales de las curvas orientadas en el grafo Γ . Sin pérdida de generalidad asumiremos que Γ está formado por curvas que, en caso de solaparse, lo hacen solamente en los nodos. Visto de esta manera Γ es un grafo inmerso en una variedad, es decir, una colección de nodos n , que son puntos de Σ , unidos por aristas, l , que son curvas en Σ .

La multiplicidad o valencia, m , de un nodo, es el número de aristas que comienzan en el nodo ($m_{salientes}$) sumado al número de aristas que terminan en el nodo ($m_{entrantes}$). Dado un grafo al que se ha adjudicado cierto orden y cierta orientación, asignamos a cada arista l una representación irreducible, j_l , del grupo. A cada nodo, n , asignamos un intertwiner, i_n , entre las representaciones asociadas a las aristas adyacentes a n . Al triplete $S = (\Gamma, j_l, i_n)$ le llamamos 'red de espín embebida en Σ '. A la elección de j_l y de i_n se le llama *color* de las aristas y los nodos.

Estados de la red de espín

Consideremos una red de espín $S = (\Gamma, j_l, i_n)$ con L aristas y N nodos. El estado $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$ definido anteriormente tiene L índices α_l y L índices β_l . Los N intertwiners, i_n , tienen un conjunto de índices duales a estos. La contracción de ambos:

$$|S\rangle \equiv \sum_{\alpha_l \beta_l} v_{i_1}^{\beta_1 \dots \beta_{n_1}}{}_{\alpha_1 \dots \alpha_{n_1}} v_{i_2}^{\beta_{n_1+1} \dots \beta_{n_2}}{}_{\alpha_{n_1+1} \dots \alpha_{n_2}} \dots v_{i_N}^{\beta_{n_{(N-1)+1}} \dots \beta_L}{}_{\alpha_{n_{(N-1)+1}} \dots \alpha_L} |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle, \quad (3.3.1)$$

define el estado de la red de espín $|S\rangle$. El patrón de contracción de los índices está definido por la topología del grafo: el índice α_l de la arista l es contraído con el correspondiente índice del intertwiner v_{i_n} del nodo n , donde comienza la arista (el razonamiento análogo se hace para β_l , donde termina la arista). La invariancia gauge de estos estados surge inmediatamente de las propiedades de transformación de la base de estados y de la invariancia de los intertwiners. Como funcional de la conexión, este estado es:

$$\Psi_S[A] = \langle A | S \rangle \equiv \left(\bigotimes_l R^{(j_l)}(H[A, \zeta_l]) \right) \cdot \left(\bigotimes_n i_n \right). \quad (3.3.2)$$

El punto indica la contracción entre espacios duales: a la izquierda, el producto tensorial de matrices vive en el espacio $\bigotimes_l (\mathcal{H}_{j_l}^* \otimes \mathcal{H}_{j_l})$, a la derecha, el producto tensorial de todos los intertwiners vive en el espacio dual del anterior.

El conjunto de todos los estados $|S\rangle$ de la red de espín forma una base ortonormal en \mathcal{K}_0 . La base está etiquetada por la red de espín, es decir, por los grafos Γ y los colores (j_l, i_n) . Nótese que en la base, $|S\rangle = |\Gamma, j_l, i_n\rangle$, la etiqueta Γ recorre todos los grafos no orientados y no ordenados. Sin embargo, para la definición de color se debe escoger una orientación y un orden para cada Γ .

\mathcal{S}_0 es el espacio de las combinaciones lineales finitas de los estados de la red de espín, que es denso en \mathcal{K}_0 , y del cual \mathcal{S}'_0 es su dual.

3.4. El espacio \mathcal{K}_{dif} (invariancia bajo difeomorfismos)

Pasemos ahora a la segunda invariancia: la invariancia bajo difeomorfismos espaciales. Los estados de la red de espín $|S\rangle$ no son invariantes bajo difeomorfismos; un difeomorfismo mueve el grafo alrededor de la variedad, por lo tanto, el estado cambia. Nótese que un difeomorfismo puede cambiar más que el grafo de una red de espín, es decir, la ecuación $U_\vartheta |\Gamma, j_l, i_n\rangle = |\vartheta\Gamma, j_l, i_n\rangle$ no siempre es correcta. En particular, un difeomorfismo que deja el grafo Γ invariante aún puede afectar el estado de la red de espín $|\Gamma, j_l, i_n\rangle$.

Los estados invariantes bajo difeomorfismos no están en \mathcal{K}_0 , sino en \mathcal{S}'_0 , cuyos elementos son funcionales lineales, Φ , sobre las funcionales, $\Psi \in \mathcal{S}_0$. El requerimiento de invariancia bajo difeomorfismos tiene sentido en \mathcal{S}'_0 porque la acción del grupo está bien definida en el mismo:

$$(U_\vartheta\Phi)(\Psi) \equiv \Phi(U_{\vartheta^{-1}}\Psi). \quad (3.4.1)$$

Por tanto, un elemento invariante bajo difeomorfismos es una funcional lineal, tal que,

$$\Phi(U_\vartheta\Psi) \equiv \Phi(\Psi). \quad (3.4.2)$$

El espacio \mathcal{K}_{Dif} es el espacio de los elementos invariantes bajo difeomorfismos de \mathcal{S}'_0 ; sus elementos pueden ser vistos como estados cuánticos del espacio físico.

Definamos ahora un mapa $P_{Dif} : \mathcal{S}_0 \rightarrow \mathcal{S}'_0$ y demostremos que la imagen de este mapa es precisamente \mathcal{K}_{Dif} . Sea $P_{Dif}\Psi$ un elemento de \mathcal{S}'_0 definido por

$$(P_{Dif}\Psi)(\Psi') = \sum_{\Psi''=U_\vartheta\Psi} \langle \Psi'', \Psi' \rangle. \quad (3.4.3)$$

La suma es sobre todos los estados Ψ'' en \mathcal{S}_0 para los cuales existe $\vartheta \in Dif^*$ tal que $\Psi'' = U_\vartheta\Psi$. Un detalle importante es que la suma es siempre finita y, por lo tanto, está bien definida. Para observar notemos lo siguiente; dado que Ψ y Ψ' están en \mathcal{S}_0 , estos pueden ser expandidos en una combinación lineal finita de estados de la red de espín. Si un difeomorfismo cambia el grafo de un estado de la red de espín Ψ_S ,

entonces lo lleva a un estado ortogonal al mismo. Si no cambia el grafo entonces, o bien lo deja invariante de modo que ninguna multiplicidad aparece en (3.4.3), o bien cambia el orden o la orientación de las aristas; pero estas son operaciones discretas que dan lugar, a lo sumo, a multiplicidades discretas en la suma (3.4.3). Por lo tanto, la misma siempre está bien definida.

Claramente, $P_{Dif}\Psi$, es invariante bajo difeomorfismos ya que satisface (3.4.2). Además, no es difícil ver que las funcionales de la forma (3.4.3) abarcan el espacio de los estados invariantes bajo difeomorfismos. Entonces, la imagen de P_{Dif} es \mathcal{K}_{Dif} . Los estados relacionados por un difeomorfismo son proyectados por P_{Dif} al mismo elemento de \mathcal{K}_{Dif} :

$$P_{Dif}\Psi_S = P_{Dif}(U_\vartheta\Psi_S). \quad (3.4.4)$$

Finalmente, el producto escalar en \mathcal{K}_{Dif} está definido por

$$\langle P_{Dif}\Psi_S, P_{Dif}\Psi_{S'} \rangle_{\mathcal{K}_{Dif}} \equiv (P_{Dif}\Psi_S)(\Psi_{S'}). \quad (3.4.5)$$

Esto determina por completo \mathcal{K}_{Dif} que, equivalentemente, está definido por la forma bilineal

$$\langle \Psi, \Psi' \rangle_{\mathcal{K}_{Dif}} \equiv \langle \Psi | P_{Dif} | \Psi' \rangle \equiv \sum_{\Psi''=\vartheta\Psi} \langle \Psi'', \Psi' \rangle \quad (3.4.6)$$

en \mathcal{S}_0 .

Nudos y estados de espín-nudos

Para entender la estructura de \mathcal{K}_{Dif} , consideremos la acción de P_{Dif} en la base de estados de la red de espín. Obsérvese que un difeomorfismo envía un estado $|S\rangle$ a un estado ortogonal, o a un estado obtenido por un cambio en el orden o la orientación de las aristas, a los cuales denotaremos $g_k|S\rangle$. Los mapas g_k forman un grupo discreto finito, G_Γ , por lo cual, el rango del índice discreto k es finito. Es fácil ver que

$$\langle S | P_{Dif} | S' \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma \neq \vartheta\Gamma' \\ \sum_k \langle S | g_k | S' \rangle & \text{si } \Gamma = \vartheta\Gamma'. \end{cases} \quad (3.4.7)$$

Llamamos *nudo* a una clase de equivalencia K bajo difeomorfismos de grafos, Γ , no orientados. Según (3.4.7) podemos decir que dos redes de espín S y S' definen

estados ortogonales en \mathcal{K}_{Dif} a menos que estén "anudadas" de la misma forma, es decir, a menos que estén definidas en grafos Γ y Γ' que pertenezcan a la misma clase de equivalencia K . Esto significa que una base de estados en \mathcal{K}_{Dif} , está etiquetada por nudos K . Llamaremos \mathcal{K}_K al subespacio de \mathcal{K}_{Dif} generado por la base de estados etiquetada por el nudo K :

$$\mathcal{K}_K = P_{Dif}\mathcal{K}_\Gamma, \forall \Gamma \in K. \quad (3.4.8)$$

Los estados en \mathcal{K}_K son distinguibles únicamente por el color de las aristas y los nodos, y no son necesariamente ortonormales, dada la acción no trivial del grupo de simetría G_Γ . Para encontrar una base ortonormal en \mathcal{K}_K se debe diagonalizar la forma cuadrática definida por la segunda línea de (3.4.7). Denotamos $|s\rangle = |K, c\rangle$ a los estados resultantes, llamados *espín-nudos* o *s-nudos*, donde c es el color del nudo K .

Los nudos forman un conjunto discreto, por lo que el espacio \mathcal{K} es discreto. Resulta que \mathcal{K}_{Dif} admite una base ortonormal $|s\rangle = |K, c\rangle$; por tanto, \mathcal{K}_{Dif} es un espacio de Hilbert separable. El 'tamaño excesivo' del espacio de Hilbert cinemático \mathcal{K} no era más que gauge.

Con esto concluimos la construcción del espacio de estados cinemático de Gravedad Cuántica de Lazos. Es momento de definir los operadores.

3.5. Operadores

Existen dos variables básicas en la teoría canónica a partir de las cuales se pueden construir cantidades medibles: La conexión, $A_a^i(\tau)$, y su momento, $E_i^a(\tau)$. Los estados cuánticos serán funcionales $\Psi[A]$ de la conexión. El momento conjugado de la conexión A es $(1/8\pi G)E$. Vamos a incluir aquí el parámetro de Immirzi, ya que veníamos utilizando una conexión más general en lugar de la real. Podemos definir dos operadores que actúan sobre los estados funcionales de A de la siguiente forma:

$$\hat{A}_a^i(\tau)\Psi[A] = A_a^i(\tau)\Psi[A], \quad (3.5.1)$$

$$\frac{1}{8\pi G\gamma_I}\hat{E}_i^a(\tau)\Psi[A] = -i\hbar\frac{\delta\Psi[A]}{\delta A_a^i(\tau)}, \quad (3.5.2)$$

donde \hbar es la constante de Planck reducida. La conexión es un operador multiplicativo y la tríada una derivada funcional. Ambos operadores envían $\Psi[A]$ fuera del espacio de estados que hemos construido. En particular, no están bien definidos en \mathcal{K} , algo que puede solucionarse tomando, en lugar de A y E , una función de los mismos.

La conexión A

La holonomía $U(A, \zeta)$ está bien definida en \mathcal{S} (espacio de las funcionales de la conexión). Sean $U_B^A(A, \zeta)$ los elementos de matriz de los elementos del grupo, $U(A, \zeta)$, entonces

$$(U_B^A(A, \zeta) \Psi)[A] = U_B^A(A, \zeta)[A] \Psi[A]. \quad (3.5.3)$$

El lado derecho está bien definido en \mathcal{S} . De hecho, cualquier función cilíndrica de la conexión está bien definida como un operador multiplicativo en \mathcal{K} .

Por ejemplo, consideremos un lazo cerrado α y un operador $T_\alpha[A] = \text{tr}(U(A, \alpha))$. La acción de este operador sobre un estado $|S\rangle$ con un grafo que no interseca con α es

$$T_\alpha |S\rangle = |S \cup \alpha\rangle, \quad (3.5.4)$$

donde $S \cup \alpha$ es la red de espín formada por S más el lazo α en la representación $j = 1/2$.

Nótese la diferencia respecto a la Teoría Cuántica de Campos en un espaciotiempo de fondo, donde los operadores campo son distribuciones y, por lo tanto, están bien definidas cuando se extienden en tres dimensiones. En (3.5.3), un operador bien definido (o su exponencial ordenada en el camino) es obtenido simplemente expandiendo en una sola dimensión: a lo largo del lazo ζ . Esta es una característica distintiva de las teorías de campo invariantes bajo difeomorfismos.

El momento conjugado E

Para entender la acción de E debemos computar la derivada funcional de la holonomía, el bloque fundamental de las funciones cilíndricas. Se puede demostrar que

$$\frac{\delta}{\delta A_a^i(x)} U(A, \zeta) = \int \dot{\zeta}^a(s) \delta^3(\zeta(s), x) [U(A, \zeta_1) \tau_i U(A, \zeta_2)] ds. \quad (3.5.5)$$

Aquí, s es una parametrización arbitraria de la curva, ζ . Denotamos $\zeta^a(s)$ a las coordenadas de la curva, $\dot{\zeta}^a(s) \equiv d\zeta^a(s)/ds$ a la tangente a la curva en el punto s y, finalmente, ζ_1, ζ_2 son dos segmentos en los cuales ζ está separada por el punto s .

Observemos que el lado derecho de (3.5.5) es una distribución, pero solamente en dos dimensiones (una de las tres deltas en δ^3 será integrada en ds). Esto nos lleva a buscar un operador bien definido en \mathcal{K} expandiendo E en dos dimensiones. Para ello, consideraremos una superficie bidimensional \mathcal{S} embebida en una variedad tridimensional.

Sea $\vec{\rho} = (\rho^1, \rho^2)$ coordenadas en la superficie \mathcal{S} definida por

$$\mathcal{S} : (\rho^1, \rho^2) \rightarrow x^a(\rho^1, \rho^2). \quad (3.5.6)$$

Definamos la cantidad $E_i(\mathcal{S})$ como el flujo de la tríada a través de la superficie \mathcal{S} :

$$E_i(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} d\rho^1 d\rho^2 n_a(\vec{\rho}) E_i^a, \quad (3.5.7)$$

donde $n_a(\vec{\rho}) = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b(\vec{\rho})}{\partial \rho^1} \frac{\partial x^c(\vec{\rho})}{\partial \rho^2}$ es la 1-forma normal a la misma y ϵ_{abc} es el tensor de Levi-Civita.

Vamos a promover (3.5.7) a un operador de la siguiente manera:

$$E_i(\mathcal{S}) = -i8\pi G\hbar\gamma_I \int_{\mathcal{S}} d\rho^1 d\rho^2 n_a \frac{\delta}{\delta A_a^i(x(\vec{\rho}))}. \quad (3.5.8)$$

Evaluemos la acción de este operador sobre la holonomía $U(A, \zeta)$. Asumamos, por el momento, que los puntos finales de ζ no caen sobre la superficie. También asumiremos que ζ cruza \mathcal{S} , como mucho, una sola vez, y llamaremos P al punto de intersección, si es que existe (ver figura (3.5.1)).

Teniendo en cuenta que $\zeta = \zeta_1 \cup \zeta_2$, y utilizando (3.5.5) y (3.5.8), tenemos

$$\begin{aligned} E_i(\mathcal{S})U(A, \zeta) &= -i8\pi G\hbar\gamma_I \int_{\mathcal{S}} \int_{\zeta} d\rho^1 d\rho^2 ds \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \rho^1} \frac{\partial x^b}{\partial \rho^2} \frac{\partial x^c}{\partial s} \delta^3(\vec{x}(\vec{\rho}), \vec{x}(s)) \\ &\quad \times U(A, \zeta_1) \tau_i U(A, \zeta_2). \end{aligned} \quad (3.5.9)$$

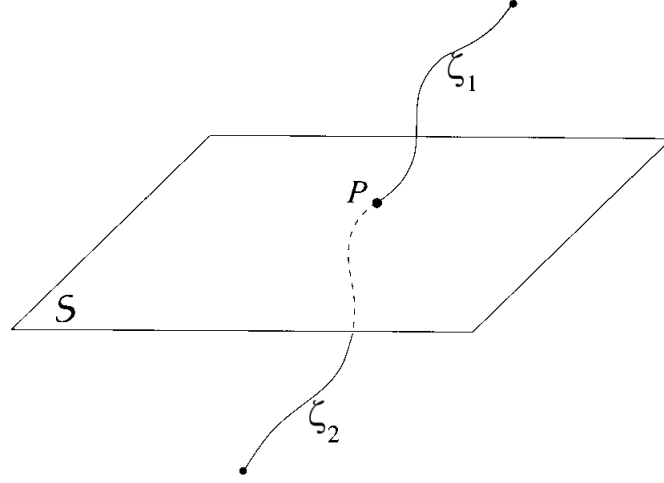


Figura 3.5.1: La curva ζ intersecciona \mathcal{S} en P .

Obsérvese que la integral se anula a menos que la curva interseccione a la superficie. Consideremos un cambio de coordenadas dado por el mapa $(\rho^1, \rho^2, s) \rightarrow (x^1, x^2, x^3)$, definido por:

$$x^a(\rho^1, \rho^2, s) = x^a(\rho^1, \rho^2) + x^a(s). \quad (3.5.10)$$

El Jacobiano correspondiente es

$$J \equiv \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\rho^1, \rho^2, s)} = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \rho^1} \frac{\partial x^b}{\partial \rho^2} \frac{\partial x^c}{\partial s}, \quad (3.5.11)$$

que aparece en la integral (3.5.9). Esto significa que podemos aplicar el cambio de variables $(\rho^1, \rho^2, s) \rightarrow (x^1, x^2, x^3)$ en dicha expresión y, así, deshacernos de la función delta. Obtenemos, entonces:

$$\int_{\mathcal{S}} \int_{\zeta} d\rho^1 d\rho^2 ds \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a(\vec{\rho})}{\partial \rho^1} \frac{\partial x^b(\vec{\rho})}{\partial \rho^2} \frac{\partial x^c(s)}{\partial s} \delta^3(\vec{x}(\vec{\rho}), \vec{x}(s)) = \pm 1. \quad (3.5.12)$$

Esta integral es una expresión analítica independiente de las coordenadas y, por lo tanto, se puede verificar que (3.5.9) da como resultado

$$E_i(\mathcal{S})U(A, \zeta) = \pm i 8\pi G \hbar \gamma_I U(A, \zeta_1) \tau_i U(A, \zeta_2), \quad (3.5.13)$$

donde el signo está determinado por la orientación relativa entre la superficie y la curva. Entonces, la acción del operador $E_i(\mathcal{S})$ sobre las holonomías consiste en insertar la matriz $\pm i8\pi G\hbar\gamma_I\tau_i$ en el punto de intersección. La generalización a múltiples intersecciones es inmediata:

$$E_i(\mathcal{S})U(A, \zeta) = \sum_{P \in (S \cap \zeta)} \pm i8\pi G\hbar\gamma_I \tau_i U(A, \zeta_1^P) \tau_i U(A, \zeta_2^P), \quad (3.5.14)$$

donde el índice P enumera las distintas intersecciones.

$E_i(\mathcal{S})$ es, entonces, un operador bien definido en \mathcal{K} . El mismo es una integral de superficie de $E_i^a(\tau)$, que no es un campo vectorial sino una densidad vectorial. La cantidad geométrica asociada es la 2-forma $E_i = \epsilon_{abc} E_i^a dx^b \wedge dx^c$. Una 2-forma puede ser integrada sobre una superficie dando un objeto bien comportado bajo difeomorfismos. El operador definido anteriormente corresponde a la cantidad clásica

$$E_i(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} E_i. \quad (3.5.15)$$

Lo mismo vale para la teoría cuántica. La derivada funcional es una densidad vectorial y, por lo tanto, una 2-forma, la cual puede ser integrada naturalmente en una superficie.

Los operadores T_α y $E_i(\mathcal{S})$ definidos en el espacio de Hilbert \mathcal{K} forman una representación del álgebra de Poisson (clásica) correspondiente. Un resultado importante del riguroso enfoque matemático de Gravedad Cuántica de Lazos es la prueba del teorema de unicidad de dicha representación. Este es el análogo al teorema de Stone-vonNeuman en Mecánica Cuántica no relativista, que demuestra la unicidad de la representación de Schrödinger. La representación de lazos es la única forma posible de cuantizar una teoría invariante bajo difeomorfismos.

3.6. Operadores en \mathcal{K}_0

Para estar bien definido en \mathcal{K}_0 , un operador debe ser invariante bajo transformaciones de gauge internas. En cuanto a la conexión, es algo fácil de obtener, ya que, como vimos anteriormente, cualquier función cilíndrica da un operador bien definido.

La función cilíndrica sólo necesita ser invariante gauge para estar bien definida en \mathcal{K}_0 . Por ejemplo, el operador T_α , definido en (3.5.4), está bien definido en \mathcal{K}_0 .

3.6.1. Operador $\mathbf{A}(\mathcal{S})$: El cuanto de área

El caso de la tríada E se vuelve más complicado. El operador $E_i(\mathcal{S})$ no es invariante gauge, ya que el índice i transforma bajo transformaciones de gauge internas. Por otro lado, no podemos obtener una cantidad invariante gauge contrayendo los índices i , tal que,

$$E^2(\mathcal{S}) \equiv \sum_i E_i(\mathcal{S})E_i(\mathcal{S}), \quad (3.6.1)$$

ya que la propiedad de transformación de $E_i(\mathcal{S})$ es complicada por la integral sobre \mathcal{S} . De todas maneras, será útil evaluar la acción de $E^2(\mathcal{S})$ sobre un estado $|S\rangle$ de la red de espín. Asumamos una única intersección P entre la superficie \mathcal{S} y la red de espín (el grafo Γ). Sea j el espín de la arista correspondiente a la intersección. Considerando que la acción del operador inserta una matriz τ_i en la intersección, al tener dos operadores $E_i(\mathcal{S})$, la acción resultante es la inserción de $-(j)\tau_i^{(j)}\tau_i = j(j+1) \times \mathbb{I}$, que es el operador de Casimir⁵ de $SU(2)$. Por lo tanto,

$$E^2(\mathcal{S})|S\rangle = (8\pi G\hbar\gamma_I)^2 j(j+1)|S\rangle. \quad (3.6.2)$$

Obsérvese que este resultado no se sostiene si Γ intersecciona \mathcal{S} más de una vez, ya que matrices τ_i en diferentes puntos se contraen y no se obtiene un estado invariante gauge.

Para sortear esta dificultad, definamos un operador invariante gauge $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ asociado a la superficie \mathcal{S} . No se debe confundir el operador invariante gauge $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ con la conexión A ; utilizamos la letra $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ pues existe una relación con el área, que veremos más adelante. Para cualquier partición de \mathcal{S} en N trozos de superficie, \mathcal{S}_n , que se vuelven cada vez más pequeños a medida que $N \rightarrow \infty$ y que cumplen

⁵Para cualquier álgebra de Lie, el operador de Casimir conmuta con todo el grupo de generadores. En $SU(2)$ las representaciones son caracterizadas por el espín total, ya que, j^2 es constante en cualquier representación.

$\bigcup_n \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$, definimos:

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_N \sqrt{E^2(\mathcal{S}_n)}. \quad (3.6.3)$$

En el caso clásico

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) = \int_S d\rho^1 d\rho^2 \sqrt{n_a E_i^a n_b E_i^b}, \quad (3.6.4)$$

es una cantidad invariante gauge, bien definida. En el caso cuántico la acción del operador (3.6.3) es fácil de computar. Evaluémosla sobre un estado $|S\rangle$ de la red asumiendo que ningún nodo de la misma cae en \mathcal{S} . Para un N lo suficientemente grande ningún \mathcal{S}_n contendrá más de una intersección con Γ (figura (3.6.1)). Por lo

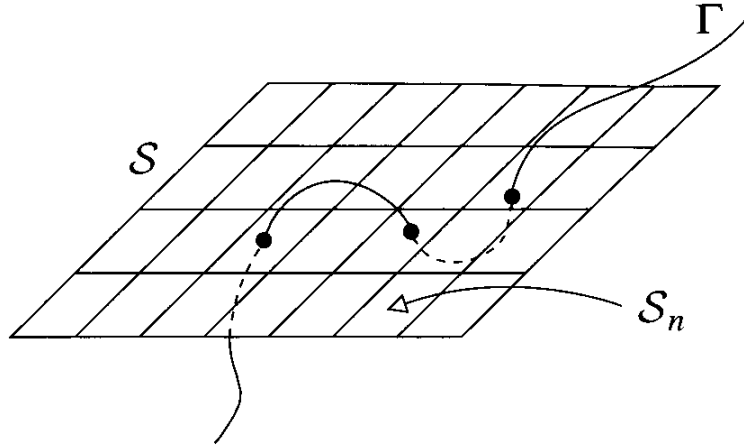


Figura 3.6.1: Partición de S .

anterior, la suma en n se reduce a la suma sobre los puntos de intersección P y es independiente de N (ver figura (3.6.2)). Utilizando la expresión (3.6.2) tenemos

$$\mathbf{A}(\mathcal{S}) |S\rangle = 8\pi G \hbar \gamma_I \sum_{P \in (S \cap \Gamma)} \sqrt{j_P(j_P + 1)} |S\rangle, \quad (3.6.5)$$

donde j_P es el color de la arista que cruza \mathcal{S} en P . En primer lugar el operador $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ está bien definido en \mathcal{K} (corresponde a la cantidad clásica (3.6.4)). En segundo lugar, los estados de la red de espín son funciones propias de este operador.

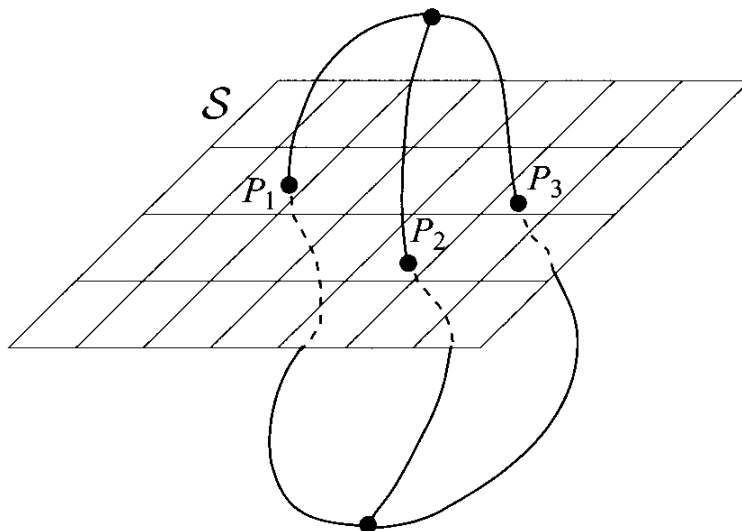


Figura 3.6.2: Red de espín intersectando la superficie S .

En resumen, hemos obtenido para cada superficie \mathcal{S} un operador $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ invariante gauge, autoadjunto y bien definido, que es diagonal en la red de espín que no contiene un nodo en \mathcal{S} . El espectro correspondiente (con las restricciones mencionadas) está etiquetado por el multiplete $\vec{j} = (j_1, \dots, j_n)$ ($i = 1, \dots, n$ y n arbitrario) de semienteros positivos j_i . Este es llamado la *secuencia principal* del espectro y está dado por

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = 8\pi G\hbar\gamma_I \sum_i \sqrt{j_i(j_i + 1)}. \quad (3.6.6)$$

Como el operador es diagonal en los estados de la red de espín y todos sus autovalores son reales, entonces, también es autoadjunto.

En principio, los operadores T_α y $\mathbf{A}(\mathcal{S})$ son suficientes para definir una teoría cuántica. En la práctica, será conveniente definir otros operadores.

Una vez construido y diagonalizado el operador autoadjunto e invariante gauge $\mathbf{A}(\mathcal{S})$, el siguiente paso es preguntarnos sobre su interpretación física. En una comparación con el desarrollo clásico se puede demostrar que este es precisamente el área física de la superficie \mathcal{S} . Esta interpretación es un resultado muy importante; el observable dado por el área de una superficie fija bidimensional está representado en

la teoría cuántica por un operador autoadjunto con espectro discreto. Una medida de área sólo puede dar un resultado contenido en el espectro de $\mathbf{A}(\mathcal{S})$.

Si recuperamos las unidades físicas (ya que habíamos fijado $c = 1$), (3.6.6) es

$$\mathbf{A}_{\vec{j}} = \frac{8\pi G}{c^3} \hbar \gamma_I \sum_i \sqrt{j_i(j_i + 1)}, \quad (3.6.7)$$

donde podemos reconocer $\ell_P \equiv \sqrt{G\hbar/c^3} \approx 1,6 \times 10^{-35} m$ como la longitud de Planck.

Nótese que la cuantización del área surge en unidades de la longitud de Planck al cuadrado, lo que implica que los 'cuantos' de área son extremadamente pequeños, como era de esperar. Cabe destacar la presencia del parámetro de Barbero-Immirzi, γ_I , en los autovalores de área. Recordemos que dicho parámetro surgió en el proceso de expresar una conexión de Lorentz con el grupo no compacto $SO(3, 1)$ en términos de una conexión compleja con valores en un grupo compacto de rotaciones, ya sea $SO(3)$ o su doble cobertura $SU(2)$. En Gravedad Cuántica de Lazos, el rol del parámetro de Barbero-Immirzi toma relevancia al calcular el espectro del operador área. Resulta que el espectro de área es proporcional al parámetro, lo que implica que distintos valores de γ_I no conducen a la misma descripción física. La determinación del mismo es imprescindible para ofrecer predicciones físicas en Gravedad Cuántica de Lazos.

También se debe resaltar la independencia del fondo de esta construcción: el operador de área solamente depende del hecho de que la arista intersecte la superficie, sin precisar una estructura de fondo.

Tomando el valor del parámetro de Immirzi igual a 1, el autovalor más pequeño en (3.6.7) es

$$\mathbf{A}_0 = 4\sqrt{3} \frac{\pi \hbar G}{c^3} \sim 10^{-66} cm^2. \quad (3.6.8)$$

Este es un cuanto elemental de área, del orden del área de Planck. Es el cuanto de área de una arista en la representación fundamental $j = 1/2$. El hecho de que exista un mínimo de área indica que hay un tamaño mínimo del espacio físico en la escala de Planck.

Una discretización intrínseca del espacio físico en la escala de Planck ha sido una expectativa en Gravedad Cuántica. Nótese que en el contexto de la Gravedad Cuántica de Lazos esta discreción no se impone ni se postula, sino que es una consecuencia

directa una cuantización directa de la Relatividad General. La geometría espacial se cuantiza de igual manera que la energía de un oscilador armónico.

3.6.2. Operador volumen $V_{\mathcal{R}}$

Existe un segundo operador que juega un papel importante en la interpretación física de los estados cuánticos del campo gravitacional, y es un operador geométrico $V_{\mathcal{R}}$ asociado con el volumen de una determinada región \mathcal{R} . La expresión explícita es más complicada que la del operador $\mathbf{A}(\mathcal{S})$, ya que depende del tipo de entrelazador y de las valencias entrantes.

Dada una región \mathcal{R} tridimensional, su volumen está dado clásicamente por la expresión:

$$V_{\mathcal{R}} [E] = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\frac{1}{3!} |\epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c|}. \quad (3.6.9)$$

Supondremos, sin perder generalidad, que \mathcal{R} se puede cubrir con un sistema de coordenadas $\{x^a\}$. Consideremos también una región de Σ que contiene a \mathcal{R} y que puede ser cubierta por una familia de celdas cúbicas \mathcal{C} cuyas caras son paralelas a los planos de coordenadas. Dentro de cada celda \mathcal{C} consideraremos una terna ordenada de 2-superficies orientadas \mathcal{S}^a , con $a = 1, 2, 3$, definidas por $x^a = cte$. Realizaremos una partición de \mathcal{R} a partir de las celdas cúbicas. Para cada cubo $C \in \mathcal{C}$ definimos la cantidad clásica

$$q_C [E] = \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} E_i(\mathcal{S}_a) E_j(\mathcal{S}_b) E_k(\mathcal{S}_c). \quad (3.6.10)$$

Cuando la arista l_C de los cubos tiende a cero, el flujo $E_i(\mathcal{S}_a)$ tiende a $l_C^2 E_i^a$ y la cantidad $q_C [E]$ tiende a $l_C^6 \det(E_i^a)$. Por lo tanto, podemos expresar el volumen de \mathcal{R} mediante la expresión aproximada:

$$V_{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}} [E] = \sum_{C \in \mathcal{C}} \sqrt{|q_C [E]|}. \quad (3.6.11)$$

Si $l_C < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, tenemos

$$V_{\mathcal{R}} [E] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}} [E]. \quad (3.6.12)$$

Dado que $q_C[E]$ sólo depende del flujo de la tríada densitizada, se puede promover esta cantidad a un operador cuántico en el espacio de estados:

$$\mathbf{q}_C[E] \equiv \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon^{ijk} \mathbf{E}_i(\mathcal{S}_a) \mathbf{E}_j(\mathcal{S}_b) \mathbf{E}_k(\mathcal{S}_c). \quad (3.6.13)$$

Entonces, podemos construir el operador asociado al volumen de la región \mathcal{R} de la siguiente manera

$$\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}}[E] \equiv \sum_{C \in \mathcal{C}} \sqrt{|\mathbf{q}_C[E]|}. \quad (3.6.14)$$

Recuperando las unidades físicas, tenemos

$$\mathbf{V}_{\mathcal{R}}^{\mathcal{C}}[E] = (8\pi \ell_P^2 \gamma_I)^{3/2} \sum_{C \in \mathcal{C}} \sqrt{|\mathbf{q}_C[E]|}. \quad (3.6.15)$$

Nótese que los autovalores de volumen dependen de la longitud de Planck al cubo. La acción del operador es no trivial en los vértices y, genéricamente, los estados de la base de la red de espín no son estados propios del operador volumen.

Las tres integrales de superficie (en los flujos que definen \mathbf{q}_C) en el cubo y la integral de línea a lo largo de los lazos, se combinan para dar tres números que seleccionan tres puntos de intersección entre la red de espín y los bordes del cubo.

Para un ε lo suficientemente pequeño, los únicos cubos cuyas superficies tienen al menos tres intersecciones con la red de espín son cubos que contienen un nodo i de la misma. Por lo tanto, la suma sobre los cubos se reduce a una suma sobre los nodos n ($\in \{S \cap \mathcal{R}\}$) de la red de espín, contenidos en \mathcal{R} . Denotemos C_{ε}^n al cubo que contiene el nodo n y, por lo tanto,

$$\mathbf{V}_{\mathcal{R}}|S\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n \in \{S \cap \mathcal{R}\}} \varepsilon^3 \sqrt{|\mathbf{q}_C[E]|} |S\rangle. \quad (3.6.16)$$

Cabe destacar que en el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ el operador no cambia el grafo del estado de la red de espín, ni el color de las aristas. La única acción posible del operador es sobre los intertwiners.

Se puede demostrar que el anterior es un operador no negativo, autoadjunto, bien definido y con espectro discreto. Para cada grafo escogeremos una base i_n de intertwiners que diagonaliza el operador volumen. Denotaremos V_{i_n} a los autovalores

correspondientes.

3.7. Geometría cuántica

Interpretación física de los estados de la red de espín

La propiedad esencial del operador volumen es que sólo tiene contribución de los nodos de un estado de la red de espín $|S\rangle$, esto significa que el volumen de una región \mathcal{R} es una suma de términos, uno para cada nodo de S dentro de \mathcal{R} . Así, cada nodo de una red de espín representa un cuanto de volumen. Por todo esto, podemos interpretar una red de espín con N nodos como un ensemble de N cuantos de volumen, o N 'ladrillos elementales', localizados en la variedad 'alrededor' del nodo, cada uno con un volumen cuantizado V_{i_n} .

Los ladrillos elementales de volumen cuantizado están separados unos de otros por superficies. El área de estas superficies está gobernada por el operador área. Este operador tiene contribución de cada arista de la red S que cruza la superficie \mathcal{S} . Dos ladrillos elementales son contiguos si los nodos correspondientes están conectados por una arista l . En este caso, existe una superficie elemental que los separa y el área de la misma está determinada por el color j_l de la arista l :

$$\mathbf{A}_l = 8\pi\ell_P^2\gamma_I\sqrt{j_l(j_l + 1)}. \quad (3.7.1)$$

Por lo tanto, los intertwiners asociados con los nodos son los números cuánticos del volumen y los espines asociados con las aristas son los números cuánticos del área. El volumen está en los nodos y el área está en las aristas que los separan. El grafo Γ de la red de espín determina la adyacencia entre los ladrillos elementales. Por último, un estado $|S\rangle$ de la red de espín determina una métrica tridimensional discreta.

Interpretación física de los estados de s -nudos

Consideremos un estado de s -nudos al que llamamos $|s\rangle$. Supongamos el caso genérico en el que la simetría de grupo es simple, a modo de evitar tecnicismos debido a los difeomorfismos que cambian la orientación y el orden. Podemos ver a $|s\rangle$ como la proyección bajo P_{Dif} de un estado de la red de espín. Al pasar del estado $|S\rangle$ al

s -nudo $|s\rangle$ preservamos la información completa en $|S\rangle$ excepto por su localización en la variedad tridimensional. Esto es precisamente la implementación de la invariancia bajo difeomorfismos en la teoría clásica, donde la geometría física es una clase de equivalencia de las métricas bajo difeomorfismos. En el caso cuántico $|s\rangle$ retiene la información acerca del volumen y la adyacencia de los ladrillos elementales, y también acerca del área de las superficies que separan dichos volúmenes; pero cualquier información acerca de la localización de los ladrillos en la variedad tridimensional se pierde bajo P_{Dif} .

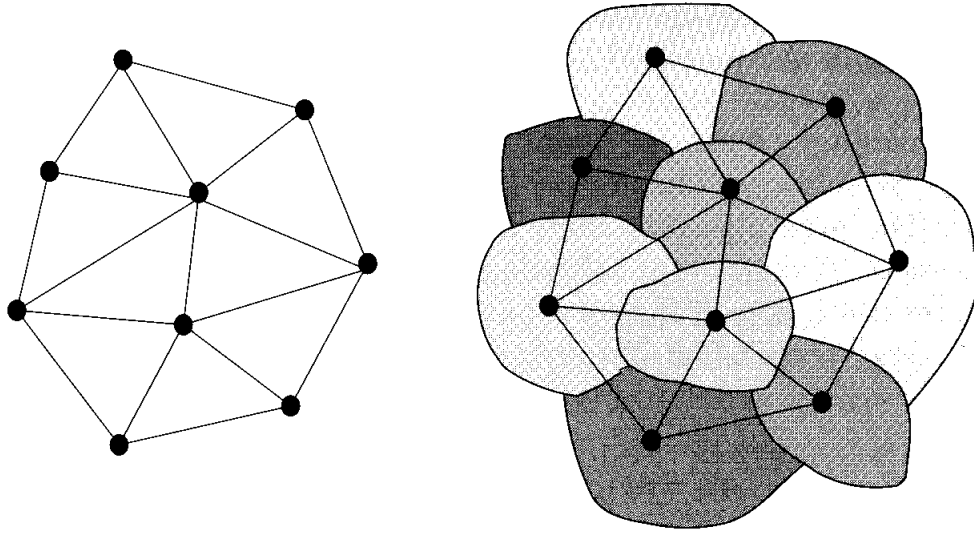


Figura 3.7.1: El grafo y el ensemble de ladrillos elementales o cuántos de volumen. Los ladrillos elementales son adyacentes cuando los nodos correspondientes están conectados por una arista. Cada Arista corta una superficie elemental que separa los ladrillos.

El estado resultante $|s\rangle$ se puede interpretar como la geometría cuántica discreta. Está formada por ladrillos espaciales abstractos que no viven en la variedad tridimensional, solamente están localizados con respecto a otro ladrillo. Su relación espacial sólo está determinada por la adyacencia definida por las aristas (figura (3.7.1)). Estas no son excitaciones cuánticas *en* el espacio, sino que son excitaciones cuánticas *del* espacio mismo. Los ladrillos elementales y las superficies de área están dadas por los colores del s -nudo. Los espines j_l son los números cuánticos del área y los intertwiners i_n son los números cuánticos del volumen. Estos son estados cuánticos

definidos de una manera completamente invariante bajo difeomorfismos espaciales y con una interpretación física simple. Son estados cuánticos del espacio.

3.8. El operador hamiltoniano

El siguiente paso es promover el vínculo hamiltoniano a un operador cuántico. Partiendo de su expresión en la versión clásica (2.5.41) se puede demostrar que es posible escribirlo como:

$$H(N) = \int d^3x N \text{tr} (F \wedge \{\mathbf{V}, A\}). \quad (3.8.1)$$

Esta es la forma más conveniente de expresar el hamiltoniano, dado que ya tenemos definido un operador cuántico \mathbf{V} y, por otro lado, los operadores F y A pueden ser definidos como 'operadores holonomía' en caminos pequeños. Además, el corchete de Poisson clásico puede promoverse a un conmutador cuántico.

Fijemos un punto x y un vector tangente u en x . Consideremos un camino $\zeta_{x,u}$ de longitud ε que comienza en x y es tangente a u . La holonomía puede expandirse como

$$U(A, \zeta_{x,u}) = 1 + \varepsilon u^a A_a(x) + O(\varepsilon^2). \quad (3.8.2)$$

De manera similar, fijemos un punto x , dos vectores tangentes, u y v , en x , y consideremos un lazo triangular pequeño, $\alpha_{x,uv}$, con un vértice en x y dos lados tangentes a los vectores u y v en x , cada uno de longitud ε . Entonces,

$$U(A, \alpha_{x,uv}) = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon^2 u^a v^b F_{ab}(x) + O(\varepsilon^3). \quad (3.8.3)$$

A partir de estas dos expresiones y escribiendo $h_\zeta = U(A, \zeta)$ podemos regularizar la expresión del hamiltoniano (mediante un regulador ε), de la siguiente manera:

$$H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \int N \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(h_{\zeta_{x,u_k}}^{-1} h_{\alpha_{x,u_i u_j}} \{ \mathbf{V}, h_{\zeta_{x,u_k}} \} \right) d^3x. \quad (3.8.4)$$

Aquí (u_1, u_2, u_3) son tres vectores tangentes en x cuyo triple producto es igual a la unidad. Siguiendo la misma estrategia que utilizamos para los operadores área y volumen, tomaremos una partición del espacio de coordenadas tridimensional en

pequeñas regiones \mathcal{R}_m , de volumen ε^3 . Podemos escribir la integral como una suma Riemanniana, tal que,

$$H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^3} \sum_m \varepsilon^3 N_m \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(h_{\zeta_{x_m, u_k}}^{-1} h_{\alpha_{x_m, u_i u_j}} \{ \mathbf{V}(\mathcal{R}_m), h_{\zeta_{x_m, u_k}} \} \right), \quad (3.8.5)$$

donde x es ahora un punto arbitrario en \mathcal{R}_m y $N_m = N(x_m)$. El teorema de Riemann nos asegura que el límite sea independiente de la elección de dicho punto.

Ya que $\mathbf{V}(\mathcal{R}_m)$ y h_ζ son operadores bien definidos en \mathcal{K} podemos considerar el operador cuántico correspondiente al hamiltoniano como:

$$H = -\frac{i}{\hbar} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_m N_m \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(h_{\zeta_{x_m, u_k}}^{-1} h_{\alpha_{x_m, u_i u_j}} [\mathbf{V}(\mathcal{R}_m), h_{\zeta_{x_m, u_k}}] \right). \quad (3.8.6)$$

Para completar la definición del operador debemos llevar a cabo la elección del punto x_m , de los tres vectores (u_1, u_2, u_3) y de los caminos ζ_{x, u_k} y $\alpha_{x, u_i u_j}$ en cada región \mathcal{R}_m . Esto debe ser realizado de forma que el operador cuántico resultante esté bien definido, sea covariante bajo difeomorfismos, invariante bajo transformaciones gauge internas y no trivial.

Por la presencia del volumen, cuando este operador actúa sobre un estado de la red de espín, lo hace únicamente sobre los nodos. Esto no cambia por la presencia del término en $h_{\zeta_{x, u}}$ en el conmutador debido a que el operador volumen se anula en nodos trivalentes. El operador $h_{\zeta_{x, u}}$ puede, a lo sumo, incrementar la valencia del nodo en uno, por lo cual, debe haber en el estado al menos un nodo trivalente para que H no se anule.

Ahora, en la suma (3.8.6) solamente las regiones \mathcal{R}_m en las cuales existe un nodo n darán una contribución no nula. Llamemos \mathcal{R}_m a estas regiones en las cuales está localizado un nodo n de la red de espín S . Entonces,

$$H |S\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} H_\varepsilon |S\rangle, \quad (3.8.7)$$

donde

$$H_\varepsilon |S\rangle = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n \in S} N_n \epsilon^{ijk} \text{tr} \left(h_{\zeta_{x_n, u_k}}^{-1} h_{\alpha_{x_n, u_i u_j}} [\mathbf{V}(\mathcal{R}_n), h_{\zeta_{x_n, u_k}}] \right) |S\rangle. \quad (3.8.8)$$

La suma es, por tanto, en los nodos; la única posibilidad de obtener un conmutador no trivial es si el camino $h_{\zeta_{x_n, u_k}}$ toca el nodo. Esto es lo que demandaremos, requiriendo que x_n sea precisamente la localización del nodo. La localización precisa de x_n es irrelevante en la teoría clásica, debido al teorema de Riemann, pero no lo es en la teoría cuántica. Esto fija x_n .

Finalmente, existe una elección natural de los tres vectores (u_1, u_2, u_3) y de los caminos ζ_{x, u_k} y $\alpha_{x, u_i u_j}$; tomaremos (u_1, u_2, u_3) tangentes a las tres aristas l, l', l'' que emergen del nodo n (se puede ajustar el largo para que el triple producto de como resultado la unidad).

Tomemos ζ_{x, u_k} como un camino $\zeta_{x, l}$ de longitud ε a lo largo de la arista l . Además, tomemos $\alpha_{x, u_i u_j}$ como un triángulo $\alpha_{x, l', l''}$ formado por dos lados de longitud ε a lo largo de dos aristas y un tercer lado que es una línea recta que conecta los dos puntos finales. Esta línea recta es denominada *arco*. La suma sobre i, j, k es una suma sobre todas las permutaciones de las tres aristas (ver figura (3.8.1)). Si el nodo

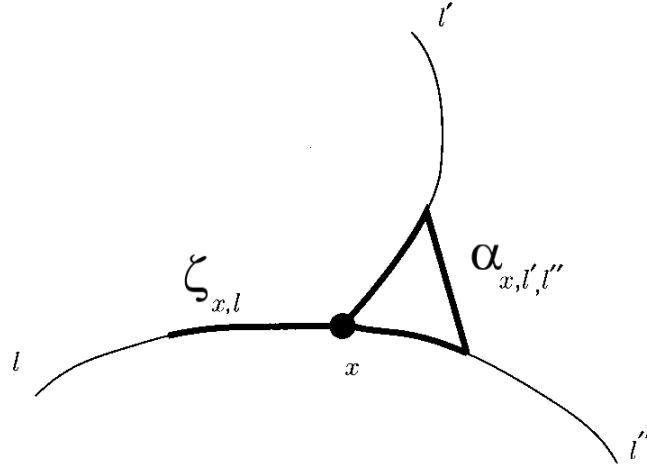


Figura 3.8.1: El camino $\zeta_{x,l}$ y el lazo $\alpha_{x,l',l''}$ en un nodo trivalente en el punto x .

tiene valencia mayor a 3, es decir, si existen más de 3 aristas en el nodo n , se preserva la covarianza sumando sobre todos los tripletes ordenados de distintas aristas. Por lo tanto,

$$H_\varepsilon |S\rangle = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n \in S} N_n \sum_{l, l', l''} \epsilon_{ll'l''} \text{tr} \left(h_{\zeta_{x_n, l}}^{-1} h_{\alpha_{x_n, l', l''}} [\mathbf{V}(\mathcal{R}_n), h_{\zeta_{x_n, l}}] \right) |S\rangle, \quad (3.8.9)$$

dónde ϵ_{UVW} es la paridad de la permutación, determinada por el signo del triple producto. Esto completa la definición del vínculo hamiltoniano.

Quedan abiertas dos preguntas. En primer lugar, cabe preguntarse si el límite es finito y, en segundo lugar, si es bien comportado bajo difeomorfismos y transformaciones gauge. En particular, nos preguntamos si es independiente de la elección de coordenadas.

En general, el límite (3.8.7) no existe. Esto no sorprende ya que los productos de operadores, generalmente, están mal definidos en Teoría Cuántica de Campos; estos pueden estar definidos en forma regularizada, pero luego se desarrolla una divergencia, al remover el regulador ϵ .

Sorprendentemente, el límite sí existe en una subclase de estados: los estados invariantes bajo difeomorfismos. Al ser estados físicos, es precisamente lo que estamos necesitando, y es suficiente para definir la teoría. Aquí, estamos en el núcleo de la Teoría Cuántica de Campos invariante bajo difeomorfismos.

Para computar H sobre estados invariantes bajo difeomorfismos, debemos recordar que estos están definidos en el espacio dual \mathcal{S}' . Hasta ahora, sólo hemos considerado H sobre estados de la red de espín o, por linealidad, sobre \mathcal{S} . La acción de H sobre \mathcal{S}' está definida por

$$(H\Phi)(\Psi) \equiv (\Phi)(H\Psi) \quad (3.8.10)$$

(rigurosamente, deberíamos llamar H^\dagger al operador del lado izquierdo de la ecuación, pero por simplicidad no lo haremos). Equivalentemente, para cada estado de la red de espín

$$(H\Phi)(|S\rangle) = (\Phi)(H|S\rangle). \quad (3.8.11)$$

El punto clave es que queremos considerar el operador regularizado en \mathcal{S}' y tomar el límite allí. Por lo tanto, en lugar de simplemente insertar (3.8.7) en la última ecuación y escribir

$$(H\Phi)(|S\rangle) = \Phi\left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} H_\epsilon |S\rangle\right), \quad (3.8.12)$$

definiremos el operador hamiltoniano en \mathcal{S}' como

$$(H\Phi)(|S\rangle) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(H_\epsilon |S\rangle). \quad (3.8.13)$$

Nótese que el límite pasa a ser un límite de una secuencia de números, no un límite de una secuencia de vectores del espacio de Hilbert. Se demuestra que el límite existe (es decir, es finito) si $\Phi \in \mathcal{K}_{Dif}$, o sea, si Φ es un estado invariante bajo difeomorfismos.

Esto puede verse de la siguiente manera. Dada una red de espín S , el operador entre paréntesis en (3.8.13) modifica el estado en dos formas: tanto cambiando el grafo así como los colores. El operador volumen no cambia el grafo. El grafo es modificado por los dos operadores $h_{\zeta_{x,l}}$ y $h_{\alpha_{x,l',l''}}$. El primero superpone un camino de longitud ε con la arista l de Γ . El segundo superpone un triángulo con dos lados de longitud proporcional a ε sobre las aristas l' y l'' de Γ , y un tercer lado, que no está en Γ , como muestra la figura (3.8.1). La observación fundamental es que, para ε suficientemente pequeño, variarlo en el operador cambia el estado resultante pero no su clase de equivalencia de difeomorfismos. Esto es bastante obvio: colocar un triángulo pequeño es lo mismo que colocar un triángulo más grande y luego reducirlo aplicando un difeomorfismo. Por lo tanto, para $\varepsilon < \varepsilon_m$, el término entre paréntesis se mantiene en la misma clase de equivalencia a medida que ε se reduce. Pero Φ es invariante bajo difeomorfismos por lo cual la dependencia en ε del argumento del límite se vuelve constante para $\varepsilon < \varepsilon_m$.

El valor del límite (3.8.13) es, entonces,

$$(H\Phi)(|S\rangle) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Phi(H_\varepsilon |S\rangle) = \Phi(H|S\rangle), \quad (3.8.14)$$

dónde

$$H|S\rangle = -\frac{i}{\hbar} \sum_{n \in S} N_n \sum_{l', l''} \epsilon_{ll''} \text{tr} \left(h_{\zeta_{x_n, l}}^{-1} h_{\alpha_{x_n, l', l''}} \left[\mathbf{V}(\mathcal{R}_n), h_{\zeta_{x_n, l}} \right] \right) |S\rangle, \quad (3.8.15)$$

y el tamaño de ε en los caminos de regularización es tomado lo suficientemente pequeño de modo que el arco del triángulo no corra sobre otros nodos sobre o entrelace otras aristas de S . La finitud del límite es, entonces, inmediata.

Este es un resultado muy importante y merece una breve discusión. El primer punto clave es que el sistema de coordenadas espaciales \vec{x} no tiene un significado físico. La localización física de los elementos es solamente una localización relativa respecto a otros, no una localización respecto a las coordenadas \vec{x} . El nivel de invariancia bajo difeomorfismos de la teoría implementa este requisito relativista

(general) esencial. Esto se refleja en la discretitud a corta escala o en la estructura discreta de los estados. Este es el resultado de las propiedades cuánticas del campo gravitacional. Cuando estas dos características se combinan no hay lugar para límites divergentes a cortas distancias. El límite $\varepsilon \rightarrow 0$ es un límite de distancias pequeñas, es decir, se vuelve finito simplemente porque el hecho de reducir el regulador, no puede cambiar nada por debajo de la escala de Planck.

Una vez que el lazo de regularización $\alpha_{x,\nu,\nu'}$ se vuelve más pequeño que el tamaño necesario para unir o cruzar otras partes de la red de espín, cualquier disminución adicional de su tamaño es gauge, no física. Así es como la invariancia bajo difeomorfismos enmienda las patologías ultravioletas de la teoría cuántica de campos.

3.9. Inclusión de materia

Tener un vínculo hamiltoniano bien definido es un resultado muy importante; constituye una teoría bien definida, sin infinitos. Esta es una de las mayores respuestas de la Gravedad Cuántica de Lazos a los problemas que aparecen en la Teoría Cuántica de Campos perturbativa. Aquí tenemos un tratamiento no perturbativo, que es finito y sin divergencias. Thiemann también ha demostrado que cuando se acopla materia la gravedad, usando técnicas similares, los vínculos hamiltonianos resultantes también son finitos. No obstante, la introducción de campos escalares acoplados gravitacionalmente ha presentado dificultades insalvables para su cuantización, aún para cuantizaciones con simetrías congeladas en el midisuperespacio.

Cuando se cuantizan teorías con vínculos, como la Relatividad General, es necesario lidiar con los mismos. Los vínculos de segunda clase generalmente se tratan con corchetes de Dirac o eliminación de variables. Los vínculos de primera clase se promueven a operadores cuánticos o, a través de la fijación gauge, se transforman en vínculos de segunda clase. De no fijar el gauge, debemos asegurarnos de que el álgebra de vínculos bajo conmutadores cuánticos reproduzca el álgebra clásica, que es cerrada bajo corchetes de Poisson. A veces, el proceso de cuantización estropea esta propiedad del álgebra de vínculos; esto sucede en algunas circunstancias en la Gravedad Cuántica de Lazos. En modelos reducidos por simetría esférica con materia, la parte material del vínculo contiene derivadas espaciales que el proceso de

cuantización convierte en diferencias finitas. Estos últimos no satisfacen la regla de Leibnitz, que se utiliza para probar que el álgebra es cerrada [89].

En la formulación de Ashtekar-Barbero es sabido que, una vez que se introducen las correcciones de holonomía, el campo escalar del sistema acoplado a la gravedad con simetría esférica posee un álgebra de vínculos (cuántica) no cerrada, lo que prohíbe la cuantización de lazos del modelo.

En la última década, los modelos con simetría reducida han desempeñado un papel fundamental cada vez mayor en Gravedad Cuántica de Lazos, aunque aún no se puede acceder a la teoría completa. Los sectores más interesantes para aplicar la cuantización de lazos son los que admiten singularidades clásicas, por ejemplo, la cosmología del universo temprano y la geometría de los agujeros negros. De hecho, se espera que teniendo en cuenta la naturaleza cuántica de la geometría, se generen, a través de la cuantización de lazos, geometrías cuánticas regulares en las que las singularidades se resuelvan de forma natural. Las geometrías cuánticas dinámicas regulares de agujeros negros serían la plataforma ideal para probar ideas sobre el escenario del colapso gravitacional, la radiación de Hawking y el túnel de agujeros negros a agujeros blancos [90]-[95].

Para obtener la teoría efectiva, una vez que se obtiene el espacio de fases reducido por simetría, se polimerizan las componentes de la variable de conexión (el proceso de polimerización se explicará en detalle en la sección (6.3)). Como vimos en la sección anterior, físicamente, esto se justifica por el hecho de que, a nivel cuántico, el campo gravitacional no está bien descrito por la conexión, pero sí lo está por su holonomía, que es un objeto unidimensional extendido. Se obtiene, así, un nuevo espacio de fases donde los vínculos reducidos por simetría son modificados por las correcciones de holonomía. Estas correcciones cuánticas codifican el efecto de la naturaleza cuántica de la geometría a escala Planck. Usando esta estrategia y técnicas de lazos, se cuantiza este espacio de fases efectivo que se cree es el adecuado para describir los efectos cuánticos de la gravedad.

Sin embargo, las correcciones de holonomía introducidas en los vínculos clásicos tienen importantes consecuencias sobre las simetrías del sistema descrito por los generadores de gauge modificados. Los vínculos de primera clase de Relatividad General, forma un álgebra cerrada. Es natural preguntarse si el álgebra de víncu-

los permanece cerrada después de implementar las correcciones de holonomía. Tal pregunta refiere a la covarianza del espacio de fases efectivo. De hecho, si el álgebra de vínculos modificados no cierra, entonces es imposible cuantizar canónicamente el sistema siguiendo el procedimiento de Dirac, ya que se estaría violando la simetría gauge que, en el caso de la gravedad, es la covarianza general. Finalmente, habría un número menor de vínculos de primera clase para generar transformaciones gauge y, por ende, tendríamos grados de libertad espurios en el sistema modificado.

Un sistema admite una cuantización covariante si se satisfacen los siguientes requisitos [96]:

- Los vínculos de primera clase siguen siendo de primera clase aún luego de implementar las correcciones de holonomía. Corresponden por tanto a generadores infinitesimales de algunas simetrías para las variables del espacio de fases, y forman un álgebra cerrada.
- Los vínculos de primera clase modificados admiten el límite clásico correcto y conducen al álgebra cerrada habitual de Relatividad General en ese límite.

Repasemos lo que se ha estudiado hasta ahora sobre la cuantización de lazos del modelo reducido por simetría esférica. En el caso vacío, la covarianza se mantiene después de implementar las correcciones de holonomía, por lo cual, se puede completar la cuantización de manera segura. La cuantización por polimerización del interior del espaciotiempo de Schwarzschild fue elaborada por primera vez por Ashtekar y Bojowald [97]. Su cuantización se basa en el hecho de que el interior del espaciotiempo de Schwarzschild puede describirse como una cosmología contractiva homogénea (el espaciotiempo homogéneo de Kantowski-Sachs). Siguiendo la dinámica mejorada introducida en Gravedad Cuántica de Lazos, Bohmer y Vandersloot introdujeron un nuevo esquema [98, 99], solucionando algunos inconvenientes de los trabajos anteriores, tal como la dependencia de algunas estructuras auxiliares no físicas. Más tarde, el problema del interior fue revisado por Campiglia, Gambini y Pullin [100], quienes también completaron el estudio del espaciotiempo exterior no homogéneo [102]. En el artículo [103], Gambini y Pullin ampliaron el estudio a todo el espaciotiempo. En estos trabajos, el vínculo de difeomorfismo se eliminó mediante una fijación gauge adecuada. Gambini y Pullin introdujeron un nuevo procedimiento de cuantización

basado en la abelianización de los vínculos, evitando la fijación de gauge previa del vínculo de difeomorfismos [18]. Más recientemente, el problema interior fue revisado por Corichi y Singh [101], mejorando el límite clásico de estudios precedentes. Como era de esperar, un resultado común de estos trabajos es que la singularidad central se elimina mediante el procedimiento de polimerización, lo que conduce a una geometría cuántica regular para el agujero negro en el vacío.

Desafortunadamente, como ya mencionamos, la cuantización de lazos del sistema dinámico completo acoplado a la materia, de momento, sigue siendo esquivada debido a la dificultad de obtener un álgebra modificada cerrada (una excepción a esta afirmación es el caso de electrovacío tratado en [104]). La primera cuantización de un campo escalar acoplado a la gravedad con simetría esférica se inició en los trabajos [105, 106] utilizando una estrategia llamada técnica de discretización uniforme [107]. Luego, en [108, 109], se propuso una estrategia basada en una nueva fijación gauge que conduce a una simplificación de los vínculos modificados.

En los artículos [110, 111], Gambini y Pullin introdujeron el primer estudio de la radiación de Hawking en este marco, y la cuantización de un cascarón de prueba se presentó en [112]. Si bien los resultados de estos trabajos son muy interesantes, cabe señalar que se basan en el estudio de un campo escalar de prueba sobre una geometría de vacío cuántica, esféricamente simétrica y, por lo tanto, no estamos hablando de la cuantización completa de un campo escalar acoplado a la gravedad con simetría esférica. Dichos modelos suelen tener una versión no coincidente entre la covarianza de la materia y los sectores de gravedad [96].

Aunque los resultados obtenidos hasta ahora sobre la geometría del agujero negro en el vacío son muy prometedores, y conducen a conocimientos importantes, todo indica que debemos intentar ir más allá del caso vacío y obtener un modelo cuantizable para el campo escalar del sistema completo acoplado a la gravedad esféricamente simétrica.

Parte II

Relatividad numérica y colapso gravitacional de un campo escalar (caso clásico)

Los métodos numéricos proveen la única herramienta para derivar información detallada sobre la naturaleza de la interacción gravitacional en muchos problemas de interés teórico y astrofísico. Como en otras ramas de la física computacional, la utilidad esencial de la relatividad numérica tiene sus raíces en la capacidad que ofrece la computación para simular el comportamiento de un sistema complejo. La computadora pasa a ser un "laboratorio teórico" donde son estudiadas las consecuencias físicas de la teoría. Tales estudios proveen respuestas a preguntas sobre el comportamiento de un sistema físico en particular, pero también existe la posibilidad de que aporten más conocimiento sobre la naturaleza de la teoría, lo que sugiere nuevos enfoques analíticos.

Muchos de los modelos más interesantes en Relatividad General involucran la generación y propagación de radiación gravitacional (mucho más, luego de su detección directa en el año 2015 a través del interferómetro LIGO). Los eventos astrofísicos que se espera sean las fuentes de ondas gravitacionales más importantes, como las explosiones de supernovas, el colapso estelar o la fusión de agujeros negros, son candidatos ideales para ser estudiados numéricamente.

En particular, la simetría esférica reduce las ecuaciones de campo a un sistema de ecuaciones diferenciales que dependen solamente de una variable espacial y del tiempo. Las soluciones de las ecuaciones de Einstein con simetría esférica no pueden contener radiación, por eso un campo escalar puede ser utilizado como fuente de energía, proporcionando al sistema los grados de libertad radiativos.

En mi tesis utilicé las técnicas numéricas desarrolladas por Choptuik, para estudiar el colapso de un campo escalar sin masa acoplado al campo gravitatorio, en un espaciotiempo esféricamente simétrico, incorporando efectos cuánticos. En los siguientes capítulos presentaré una descripción de las dichas técnicas numéricas aplicadas al caso de un campo escalar acoplado mínimamente a la gravedad. La información que aparece en esta parte de la tesis puede encontrarse en la tesis doctoral de M. Choptuik [4].

Capítulo 4

Descripción del modelo

4.1. Ecuaciones en el formalismo 3+1

Como ya vimos en la sección (2) la Relatividad General es conocida como la teoría del espaciotiempo. El continuo espaciotemporal es representado por una variedad diferenciable 4-dimensional, \mathcal{M} , dotada con una métrica ${}^{(4)}g_{\mu\nu}$ que provee, en cada evento del espaciotiempo, medios para determinar distancias a eventos cercanos. También se pueden introducir en la variedad campos adicionales representando fuentes de energía y materia. El contenido de energía no gravitacional del espaciotiempo se describe mediante el tensor energía-momento, $T_{\mu\nu}$. El concepto fundamental de que la materia le dice al espaciotiempo cómo curvarse, y la curvatura del espaciotiempo le dice a la materia como moverse, encuentra su expresión matemática en las ecuaciones de Einstein,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.1.1)$$

un conjunto de 10 ecuaciones diferenciales parciales, no lineales, para las 10 componentes del tensor métrico.

Con el fin de encontrar soluciones numéricas para las ecuaciones de Einstein, es útil reestructurar el sistema descomponiendo la variedad espaciotemporal en espacio y tiempo por separado, como vimos en la sección (2.3). De esta manera, la naturaleza dinámica de las ecuaciones del campo gravitatorio se manifiesta y la construcción del espaciotiempo puede formularse como un problema de valores iniciales o de Cauchy.

Recordemos que en el enfoque 3+1, la variedad \mathcal{M} debe representarse como una foliación infinita de hipersuperficies tridimensionales, Σ_t , de tipo espacio, con una estructura geométrica intrínseca inducida por el espaciotiempo. Se deben identificar cantidades adecuadas que caractericen una hipersuperficie en particular, luego, las ecuaciones de campo de Einstein determinan los valores correspondientes a las hipersuperficies pasadas y futuras.

Las cuatro cantidades cinemáticas comúnmente se agrupan como una función escalar, N , *función Lapso*, y un 3-vector, N^i , '*vector desplazamiento*' o '*Shift*'. Un observador que se mueve en dirección normal a la hipersuperficie (desde el evento \mathcal{P} al evento \mathcal{P}' de la figura (4.1.1)) medirá un tiempo propio $N dt$. El mismo observador, al llegar a la hipersuperficie cercana, encontrará que debe desplazar su posición por N^i para llegar a un evento que tenga las mismas coordenadas espaciales que el evento del que partió.

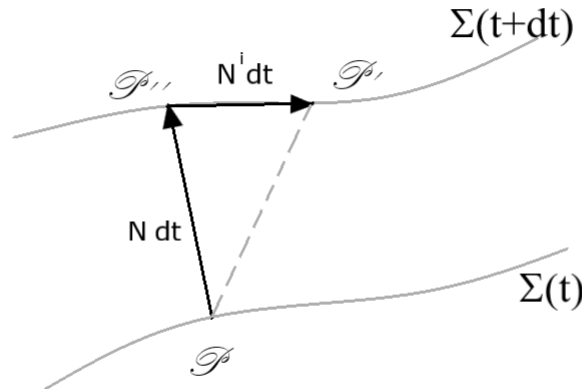


Figura 4.1.1: Desplazamiento espaciotemporal en 3+1.

La arbitrariedad en la elección de N y N^i , así como la elección de la hipersuperficie inicial y sus coordenadas internas es la realización 3+1 de la libertad de coordenadas en Relatividad General.

En la sección (2) analizamos en detalle las ecuaciones de Einstein en el vacío. Para

describir nuestro modelo debemos incorporar el contenido material en el lado derecho de la ecuación (4.1.1). En el enfoque 3+1 no es conveniente trabajar directamente con las componentes del tensor energía-momento, $T^{\mu\nu}$. De hecho, es más útil introducir un escalar, ρ , un 3-vector, j^i , y un 3-tensor, S_{ij} , definidos de la siguiente manera:

$$\rho \equiv n_\mu n_\nu T^{\mu\nu}, \quad (4.1.2)$$

$$j_i = {}^{(3)}g_{ik} j^k \equiv -n_\mu T_i^\mu, \quad (4.1.3)$$

$$S_{ij} \equiv T_{ij}, \quad (4.1.4)$$

Estas cantidades son denominadas *densidad de energía*, *densidad de 3-momento* y *tensor espacial energía-momento*, respectivamente. Recordar que n_μ es el vector normal a la hipersuperficie, Σ_t . Dado que en Relatividad General no hay una única manera de definir la energía y el momento, debe notarse que estos términos refieren al hecho de que observadores "momentáneamente en reposo" en la hipersuperficie determinan, por ejemplo, que la energía local es ρ .

La derivación de las ecuaciones de Einstein en 3 + 1, partiendo de la forma covariante (4.1.1), no será desarrollada aquí, ya que el cálculo está bien documentado en [79, 86].

Cuatro de las ecuaciones de Einstein no contienen derivadas segundas de la métrica respecto al tiempo y, por lo tanto, representan ecuaciones de vínculos que deben ser satisfechos por las variables geométricas y materiales en cada una de las hipersuperficies. Estas son el vínculo hamiltoniano,

$$R - K^i_j K^j_i + K^2 = 16\pi\rho, \quad (4.1.5)$$

y los vínculos de momento,

$$K^j_i{}_{|j} + K_{|i} = 8\pi j_i. \quad (4.1.6)$$

Aquí, R , es el escalar de Ricci 3-dimensional (2.1.23) y K es la traza de la curvatura extrínseca (2.3.15),

$$K = g^{ij} K_{ij}. \quad (4.1.7)$$

La notación "|" en los índices indica diferenciación covariante en la variedad tridimensional, mientras que utilizaremos la "," para indicar la derivación parcial. Una expresión explícita para las componentes R_{ij} es

$$R_{ij} = \partial_n \Gamma^n_{ij} - \partial_j \Gamma^n_{in} + \Gamma^n_{nm} \Gamma^m_{ij} - \Gamma^n_{jm} \Gamma^m_{in} \quad (4.1.8)$$

donde Γ^i_{jk} son los símbolos de Christoffel (2.1.35).

Además de los vínculos, hay seis ecuaciones de evolución para las componentes de la métrica:

$$\dot{g}_{ij} = 2N g_{ik} K^k_j + N^k \partial_k g_{ij} + g_{ik} \partial_j N^k + g_{kj} \partial_i N^k, \quad (4.1.9)$$

y seis ecuaciones de evolución para el tensor curvatura extrínseca, que derivan de aquellas ecuaciones de Einstein que contienen derivadas segundas respecto al tiempo

$$\dot{K}^j_i = N^k \partial_k K^j_i + K^j_k \partial_i N^k - K^k_i \partial_k N^j - N^j_{|i} + N (R^j_i + K K^j_i + 4\pi(S - \rho)\delta^j_i - 8\pi S^j_i). \quad (4.1.10)$$

Ahora, los dos escenarios básicos en la construcción 3+1 del espaciotiempo pueden ser resumidos. En primer lugar, se deben definir los datos iniciales. Esto involucra decidir qué topología tendrá la hipersuperficie inicial, la introducción de un sistema de coordenadas espacial, y la especificación de un conjunto inicial de datos $\{g_{ij}, K^i_j, \rho, j_i\}$, que satisface (4.1.5) y (4.1.6). Debido a que los vínculos deben ser resueltos, esta parte del procedimiento está, en general, lejos de ser trivial. Sólo 8 de las 12 cantidades geométricas pueden ser fijadas libremente, y no es obvio cuáles 8 deben ser [71, 86, 87]. El segundo escenario en la construcción 3 + 1 del espacio tiempo es la evolución de los datos iniciales. Esto requiere la imposición de condiciones sobre las coordenadas, lo que determinará los valores del lapso, N , y el shift, N^i , en todo punto. No es necesario que esta especificación sea explícita. Las condiciones sobre las coordenadas pueden ser tales que, N o N^i , o ambas, satisfagan ecuaciones diferenciales en cada hipersuperficie. En cualquier caso, una vez que las elecciones

sobre las coordenadas están hechas, en lapso y el shift serán consideradas funciones dadas. El lado derecho de las ecuaciones (4.1.9) y (4.1.10) pueden ser evaluados en la hipersuperficie inicial proporcionando los medios para determinar las cantidades geométricas sobre hipersuperficies pasadas o futuras. Asumiendo que existen ecuaciones de evolución adicionales para el campo material, los valores de las variables materiales pueden ser evolucionados de la misma manera. En general, tal procedimiento puede ser continuado indefinidamente, a menos que aparezca una singularidad en la solución, algo muy probable en Relatividad General, particularmente en casos donde existe un campo fuerte.

En virtud de las identidades de Bianchi (2.1.65), cualquier conjunto de datos iniciales que satisfaga las ecuaciones de vínculo, al ser evolucionado a una hipersuperficie futura o pasada, automáticamente satisfecerá las ecuaciones de vínculo en dicha hipersuperficie. Equivalentemente, podemos imaginarnos la generación del espaciotiempo en términos de la 'libre evolución' de un número mínimo de cantidades (dependiendo de las condiciones sobre las coordenadas) con las variables geométricas restantes ajustándose automáticamente para mantener los vínculos satisfechos. El punto a notar es que, cuando el procedimiento de construcción del espaciotiempo es implementado numéricamente, deben ser tomadas ciertas decisiones sobre cómo cada cantidad es actualizada al pasar de un nivel de tiempo al siguiente. Por ejemplo, se puede elegir utilizar una o más de las ecuaciones de vínculos para computar el avance de las variables geométricas en lugar de actualizarlas usando las ecuaciones de evolución. Según la experiencia de investigadoras e investigadores en relatividad numérica, los diferentes tipos de esquemas que pueden ser ideados algunas veces, dan como resultado diferencias significativas en el comportamiento numérico. Esto ha llevado a una cantidad considerable de especulaciones con respecto a la relación entre los vínculos y las ecuaciones de evolución en las soluciones numéricas.

4.2. Ecuaciones de movimiento

El estudio de técnicas que sirvan para tratar problemas radiativos en relatividad numérica implica que el modelo sea lo suficientemente dócil para permitir la experimentación con diferentes sistemas de coordenadas y niveles de discretización. Tales

demandas esencialmente impiden sistemas con dependencia en más de una dimensión espacial. Con algunos de los códigos actuales es posible trabajar en dos dimensiones espaciales, pero dichos códigos no son lo ideal para realizar experimentos numéricos.

El número de dimensiones espaciales con el que debemos tratar un sistema físico puede ser reducido imponiendo condiciones de simetría. Dado que queremos estudiar espaciotiempos que dependen tanto del tiempo como de solamente una dimensión espacial, existen esencialmente tres opciones: las variedades pueden tener simetría esférica, plana o cilíndrica. Intuitivamente, un espaciotiempo esféricamente simétrico en cualquier instante de tiempo es invariante bajo rotaciones. Similarmente, la simetría plana implica invariancia bajo traslaciones en dos direcciones espaciales independientes, y los sistemas con simetría cilíndrica son invariantes bajo rotaciones y traslaciones a lo largo de un eje espacial de preferencia. Estos tres tipos de espaciotiempo ya han sido estudiados numéricamente. Los sistemas con simetría cilíndrica y plana tienen la ventaja de que pueden contener radiación gravitacional. Sin embargo, los espaciotiempos esféricamente simétricos no pueden contenerla en virtud del teorema de Birkhoff, que establece que la única solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, con simetría esférica es la solución estática de Schwarzschild¹. Al mismo tiempo, de los tres sistemas mencionados anteriormente, los sistemas esféricamente simétricos son la mejor aproximación a la mayoría de los escenarios astrofísicos interesantes; particularmente aquellos que involucran un único objeto aislado.

Los estudios numéricos de espaciotiempos esféricamente simétricos previos al elaborado por Choptuik [65, 66, 69, 72, 77, 78, 85] empleaban un fluido perfecto como fuente de energía-momento. Esto involucra la solución de las ecuaciones de hidrodinámica relativista junto con las ecuaciones de Einstein. Esas investigaciones han sido utilizadas para examinar variadas características del colapso estelar y formación de agujeros negros, así como el desarrollo y el testeado de técnicas numéricas. En estos sistemas hidrodinámicos no hay grados de libertad radiativos, sin embargo, no está claro (y probablemente no es cierto) que los métodos numéricos desarrollados para lidiar con un fluido sean apropiados para lidiar con la radiación de cualquier tipo en un sistema de RG.

¹Las ecuaciones de Maxwell para el electromagnetismo tampoco admiten soluciones radiativas con simetría esférica; ambos resultados pueden ser entendidos como una consecuencia de la naturaleza transversal de la radiación electromagnética y gravitacional

La manera más simple de introducir un comportamiento radiativo en un espacio-tiempo esféricamente simétrico es utilizar un campo escalar sin masa, ϕ , como fuente de energía-momento. En un espacio tiempo plano el campo satisface la ecuación de Klein-Gordon,

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi = 0, \quad (4.2.1)$$

que es derivable de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L}_\phi = \Gamma L_\phi = -\kappa' \Gamma \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi. \quad (4.2.2)$$

L_ϕ es el lagrangiano, $\Gamma \equiv \sqrt{-^{(4)}g}$ con $^{(4)}g$ el determinante de la 4-métrica, y κ' es una constante positiva. La manera más fácil de imponer que el campo escalar interactúe gravitacionalmente es simplemente adicionando la densidad (4.2.2) a la densidad lagrangiana gravitacional

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_\phi = \Gamma \left(^{(4)}R - \kappa' \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi \right) \quad (4.2.3)$$

donde $^{(4)}R$ es el escalar de Ricci 4-dimensional. Exigiendo que la acción,

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (4.2.4)$$

sea estacionaria con respecto a variaciones en ϕ , obtenemos la ecuación de movimiento para el campo escalar:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi - \frac{1}{\Gamma} \partial_\nu \left(\Gamma ^{(4)}g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \right) = 0 \quad (4.2.5)$$

De manera similar variando la acción con respecto a las componentes de la 4-métrica obtenemos las ecuaciones de Einstein. En particular, el tensor energía-momento puede ser calculado por la siguiente expresión

$$T_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta L_\phi}{\delta ^{(4)}g^{\mu\nu}} + ^{(4)}g^{\mu\nu} L_\phi, \quad (4.2.6)$$

que tiene como resultado:

$$T_{\mu\nu} = 2\kappa' \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} {}^{(4)}g_{\mu\nu} \partial^\alpha \phi \partial_\alpha \phi \right). \quad (4.2.7)$$

La restricción a la simetría esférica es una simplificación enorme de las ecuaciones de Einstein. Escogiendo coordenadas esféricas polares (r, θ, φ) adaptadas a la simetría, es bien sabido que la 3-métrica más general puede ser expresada como

$$g_{ij} = \text{diag} (a^2(r, t), r^2 b^2(r, t), r^2 b^2(r, t) \sin^2 \theta). \quad (4.2.8)$$

A su vez, esto implica que la curvatura extrínseca también es diagonal, con solamente dos componentes independientes (ya que, $K^\theta_\theta = K^\varphi_\varphi$), es decir,

$$K^i_j = \text{diag} (K^r_r(r, t), K^\theta_\theta(r, t), K^\theta_\theta(r, t)). \quad (4.2.9)$$

Finalmente, el vector shift tiene una única componente no nula:

$$N^i = \text{diag} (N^r(r, t), 0, 0) = (\beta, 0, 0), \quad (4.2.10)$$

ya que las otras dos componentes se anulan por la elección de coordenadas. Entonces, el elemento de línea espaciotemporal en su forma más general es

$${}^{(4)}ds^2 = (-N^2 + a^2 \beta^2) dt^2 + 2a^2 \beta dt dr + a^2 dr^2 + r^2 b^2 d\Omega^2, \quad (4.2.11)$$

donde

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (4.2.12)$$

Nótese que sólo debemos lidiar con 6 de las 16 posibles variables geométricas y, además, las expresiones de cantidades como R son mucho más simples que en el caso general.

Los coeficientes de la conexión Γ^i_{jk} pueden ser calculados directamente a partir de (2.1.35). Los coeficientes no nulos son:

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{a'}{a} \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{(r^2 b^2)'}{2a^2} \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \Gamma^r_{\theta\theta}$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{(r^2 b^2)'}{2r^2 b^2} \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \sin \theta \cos \theta$$

$$\Gamma^{\varphi}_{r\varphi} = \Gamma^{\theta}_{r\theta} \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \cot \theta \quad (4.2.13)$$

donde $' \equiv \partial/\partial r$. El cálculo de las componentes del tensor de Ricci puede realizarse a través de (4.1.8). Por ejemplo,

$$R_r^r = g^{rr} R_{rr} = g^{rr} \left(-(\Gamma^{\theta}_{r\theta} + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi})' + (\Gamma^{\theta}_{r\theta} + \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}) \Gamma^r_{rr} - \Gamma^{\theta}_{r\theta}{}^2 - \Gamma^{\varphi}_{r\varphi}{}^2 \right). \quad (4.2.14)$$

Utilizando la expresión anterior y relacionandola con los elementos de la métrica, tenemos:

$$R_r^r = \frac{2}{arb} \left(\frac{(rb)'}{a} \right). \quad (4.2.15)$$

Análogamente,

$$R_{\theta}^{\theta} = R_{\varphi}^{\varphi} = \frac{1}{a(rb)^2} \left(a - \left(\frac{rb}{a} (rb)' \right)' \right). \quad (4.2.16)$$

El término $\alpha_{|i}{}^{lj}$, que también aparece en la ecuación de evolución para las componentes de la curvatura extrínseca, se evalúa utilizando

$$N_{|i}{}^{lj} = g^{jk} (N_{,ik} - \Gamma^n_{ik} N_{,n}), \quad (4.2.17)$$

resultando

$$N_{|r}{}^{lr} = \frac{1}{a} \left(\frac{N'}{a} \right)', \quad (4.2.18)$$

$$N_{|\theta}{}^{l\theta} = N_{|\varphi}{}^{l\varphi} = \frac{N' (rb)'}{a^2 rb}. \quad (4.2.19)$$

Pasando al cálculo de las cantidades del tensor energía-momento, es conveniente introducir las funciones auxiliares:

$$\Phi \equiv \phi', \quad (4.2.20)$$

$$\Pi \equiv \frac{a}{N} \left(\dot{\phi} - \beta \phi' \right). \quad (4.2.21)$$

De (4.2.11), las componentes no nulas de la 4-métrica están dadas por

$$\begin{aligned} {}^{(4)}g_{tt} &= -N^2 + a^2\beta^2 & {}^{(4)}g_{tr} &= {}^{(4)}g_{rt} = a^2\beta & {}^{(4)}g_{rr} &= a^2 \\ {}^{(4)}g_{\theta\theta} &= r^2b^2 & {}^{(4)}g_{\varphi\varphi} &= r^2b^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

y las componentes covariantes correspondientes (tal que ${}^{(4)}g_{\mu\rho}{}^{(4)}g^{\rho\nu} = \delta_\mu{}^\nu$)

$$\begin{aligned} {}^{(4)}g^{tt} &= -N^{-2} & {}^{(4)}g^{tr} &= {}^{(4)}g^{rt} = \beta N^{-2} & g^{rr} &= a^{-2} - \beta^2 N^{-2} \\ {}^{(4)}g^{\theta\theta} &= r^{-2}b^{-2} & {}^{(4)}g^{\varphi\varphi} &= r^{-2}b^{-2} \sin^{-2} \theta. \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

Luego,

$$\partial^t \phi = {}^{(4)}g^{tt} \partial_t \phi + {}^{(4)}g^{tr} \partial_r \phi = -\frac{\Pi}{Na}, \quad (4.2.24)$$

y similarmente,

$$\partial^t \phi \partial_t \phi = \frac{(\Phi^2 - \Pi^2)}{a^2}. \quad (4.2.25)$$

Notando que las componentes de la 1-forma n_μ son simplemente $(-N, 0, 0, 0)$ y tomando $\kappa' = 1/2$, la densidad de energía es computada a partir de (4.1.2) y (4.2.7):

$$\rho = N^2 T^{tt} = \frac{(\Phi^2 + \Pi^2)}{2a^2}. \quad (4.2.26)$$

Similarmente, la única componente no nula de la densidad de momento j_r es, a partir de (4.1.3)

$$j_r = NT^t{}_r - \frac{\Phi\Pi}{a}. \quad (4.2.27)$$

Las componentes del tensor de estrés

$$S_j^i = g^{ik} S_{kj}, \quad (4.2.28)$$

donde S_{ij} está definido por (4.1.4), son

$$S_r^r = \rho = \frac{(\Phi^2 + \Pi^2)}{2a^2} \quad (4.2.29)$$

y

$$S_\theta^\theta = S_\varphi^\varphi = \frac{(\Pi^2 - \Phi^2)}{2a^2}. \quad (4.2.30)$$

Utilizando los resultados anteriores, el vínculo hamiltoniano (4.1.5) es

$$-\frac{2}{arb} \left(\left(\frac{(rb)'}{a} \right)' + \frac{1}{rb} \left(\left(\frac{rb}{a} (rb)' \right)' - a \right) \right) + 4K_r^r K_\theta^\theta + 2(K_\theta^\theta)^2 = 8\pi \frac{(\Phi^2 + \Pi^2)}{a^2}. \quad (4.2.31)$$

Para escribir el vínculo de momento, primero debe notarse que

$$\begin{aligned} K^{|i}_{|i} &= K^i_{r,i} + \Gamma^i_{ni} K_r^n - \Gamma^n_{ri} K_n^i \\ &= (K_r^r)' + 2\Gamma^\theta_{r\theta} (K_r^r - K_\theta^\theta), \end{aligned} \quad (4.2.32)$$

y

$$K_{|r} = (K_r^r + 2K_\theta^\theta)', \quad (4.2.33)$$

y usando (4.1.6) y (4.2.27) tenemos

$$(K_\theta^\theta)' + \frac{(rb)'}{rb} (K_\theta^\theta - K_r^r) = 4\pi \frac{\Phi\Pi}{a}. \quad (4.2.34)$$

Las ecuaciones de evolución para las funciones de la métrica a y b pueden ser calculadas fácilmente a partir de (4.1.9), resultando

$$\dot{a} = -NaK_r^r + (a\beta)' \quad (4.2.35)$$

y

$$\dot{b} = -NbK_\theta^\theta + \frac{\beta}{r} (rb)'. \quad (4.2.36)$$

La ecuación de evolución para la componente K_r^r de la curvatura extrínseca es calculada a partir de (4.1.10):

$$\dot{K}_r^r = \beta (K_r^r)' + K_r^r \beta' - N^r_{|r} + N (R_r^r + K K_r^r + 4\pi (S - \rho) - 8\pi S_r^r), \quad (4.2.37)$$

lo cual, utilizando resultados anteriores, se convierte en

$$\dot{K}_r^r = \beta (K_r^r)' - \frac{1}{a} \left(\frac{N'}{a} \right)' + N \left(\frac{2}{arb} \left(\frac{(rb)'}{a} \right)' + KK_r^r - 8\pi \frac{\Phi^2}{a^2} \right). \quad (4.2.38)$$

De forma similar,

$$\dot{K}_\theta^\theta = \beta (K_\theta^\theta)' + \frac{N}{(rb)^2} - \frac{1}{a(rb)^2} \left(\frac{Nrb}{a} (rb)' \right)' + NK K_r^r. \quad (4.2.39)$$

Las expresiones anteriores contienen el conjunto completo de las ecuaciones de Einstein 3+1 para este modelo. Las únicas ecuaciones que resta definir son las ecuaciones de evolución para el campo escalar. Resolviendo para el campo escalar, ϕ , a partir de la definición de Π dada por (4.2.21) y luego diferenciando respecto a r , obtenemos la ecuación de evolución para Φ :

$$\dot{\Phi} = \left(\beta\Phi + \frac{N}{a}\Pi \right)'. \quad (4.2.40)$$

Luego, multiplicando (4.2.5) por Γ y utilizando las expresiones (4.2.23), tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\nu (\Gamma g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi) = \partial_t (\Gamma g^{\mu t} \partial_\mu \phi) + \partial_r (\Gamma g^{\mu r} \partial_\mu \phi) \\ &= \partial_t \left(Nar^2 b^2 \left(-N^{-2} \dot{\phi} + \beta N^{-2} \phi' \right) \right) \\ &\quad + \partial_r \left(Nar^2 b^2 \left((a^{-2} - \beta^2 N^{-2}) \phi' + \beta N^{-2} \dot{\phi} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

Utilizando la definición de Π ,

$$\partial_t (r^2 b^2 \Pi) = \partial_r \left(r^2 b^2 \left(\beta \Pi + \frac{N}{a} \Phi \right) \right). \quad (4.2.42)$$

Resolviendo para $\dot{\Pi}$ y utilizando (4.2.36), obtenemos el resultado final

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{r^2 b^2} \left(r^2 b^2 \left(\beta \Pi + \frac{N}{a} \Phi \right) \right)' + 2 \left(NK_\theta^\theta - \beta \frac{(rb)'}{rb} \right) \Pi. \quad (4.2.43)$$

Nótese que es necesario reescribir las ecuaciones del campo escalar como un par de

ecuaciones acopladas de primer orden para evitar la aparición de términos tales como \dot{N} o $\dot{\beta}$, que son difíciles de tratar en el formalismo $3 + 1$.

4.3. Análisis característico del campo escalar

Las ecuaciones (4.2.40) y (4.2.43) forman un sistema cuasilineal de primer orden para el campo material. Se puede tener una idea de la naturaleza de este sistema escribiéndolo de la forma

$$u_t + \mathbf{A}u_x = \mathbf{B}, \quad (4.3.1)$$

donde \mathbf{u} es el vector de dos componentes $(\Phi, \Pi)^T$ y \mathbf{A} y \mathbf{B} son coeficientes de matrices que dependen de \mathbf{u} , las variables geométricas, r y t . Específicamente,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \beta & N/a \\ N/a & \beta \end{pmatrix} \quad (4.3.2)$$

y las direcciones características del sistema, τ , están dadas por

$$|\mathbf{A} - \tau\mathbf{I}| = 0, \quad (4.3.3)$$

y un simple cálculo lleva a

$$\tau = -\beta \pm \frac{N}{a}. \quad (4.3.4)$$

Siempre que $N/a \neq 0$, el sistema tiene dos direcciones características reales y distintas y, por lo tanto, es hiperbólico. Si N es 0 en algún lugar de alguna hipersuperficie, entonces la foliación no es buena desde el punto de vista del formalismo $3 + 1$. Tal caso indica que la foliación no es estrictamente de tipo espacio o que las hipersuperficies están degeneradas, lo cual es un tipo de patología de coordenadas. De aquí en más asumiremos que $N/a \neq 0$, y cualquier violación de esta desigualdad detendrá necesariamente la evolución del espaciotiempo.

Las cantidades dadas por (4.3.4) determinan las direcciones locales de propagación de pequeñas perturbaciones en el campo escalar, a partir de las cuales se pueden construir los dominios locales de influencia y dependencia. Esta información es útil

para comprender la condición de estabilidad de algunos de los esquemas diferenciales diseñados para resolver el modelo. El análisis característico anterior puede parecer incompleto en el sentido que no se han tratado las ecuaciones de evolución para las variables geométricas. En realidad, este no es el caso ya que, como se señaló anteriormente, un espaciotiempo esféricamente simétrico puede poseer dinámica sólo donde hay materia presente. La propagación de perturbaciones en las variables geométricas tendrá que estar ligada a perturbaciones en el campo escalar. Desde un punto de vista más fundamental, en cada evento la métrica contiene toda la información necesaria para determinar la estructura causal local del espaciotiempo. En concreto, los conos de luz pasado y futuro delimitan los dominios de dependencia e influencia del evento. La propagación de cualquier información hacia o desde el evento debe ocurrir dentro o sobre los conos de luz. Por tanto, otra forma de determinar las direcciones características dadas por (4.3.4) es buscar direcciones nulas $dr : dt$ definidas por

$${}^{(4)}ds^2 = -N^2 dt^2 + a^2 (dr + \beta dt)^2 = 0. \quad (4.3.5)$$

4.4. Condiciones de borde en el origen ($r = 0$)

El problema de Cauchy para el campo escalar autogravitante debe resolverse en el semiplano $t \geq 0$, $r \geq 0$. Debido a que este campo escalar puede ser tanto entrante como saliente, se debe proporcionar una condición de borde para $r = 0$ y $t \geq 0$ de modo que el problema esté bien planteado. Esta condición puede derivarse simplemente exigiendo que ϕ sea diferenciable en $r = 0$. En una base de coordenadas esféricas polares (r, θ, φ) , y con ϕ esféricamente simétrico:

$$\nabla\phi = \phi' \hat{r}, \quad (4.4.1)$$

que no está definido en $r = 0$ a menos que

$$\phi'(0, t) = 0. \quad (4.4.2)$$

Se pueden derivar condiciones de borde internas similares para las cantidades geométricas usando un procedimiento descrito en detalle por Bardeen y Piran en [51]. Básicamente, la idea es exigir que todas las componentes tensoriales sean regulares

en $r = 0$. El objetivo es asumir inicialmente la regularidad y preocuparse por el comportamiento irregular sólo si realmente se desarrolla durante la evolución. No hay ningún obstáculo práctico para construir datos iniciales regulares, se espera que tales conjuntos de datos iniciales generen todo o casi todo el espaciotiempo físicamente relevante. Este enfoque parece ser adecuado ya que nunca hubo ninguna evidencia de ruptura de la regularidad inducida dinámicamente en $r = 0$.

Lo único que debemos pedir es que las cantidades a , b , K_r^r y K_θ^θ tengan expansiones en potencias pares de r cerca del origen. Esto implica las siguientes condiciones de borde:

$$a'(0, t) = b'(0, t) = (K_r^r)'(0, t) = (K_\theta^\theta)'(0, t) = 0. \quad (4.4.3)$$

Estas relaciones serán consistentes con las ecuaciones de movimiento (4.1.9) y (4.1.10) sólo si las variables cinemáticas satisfacen

$$N'(0, t) = \beta(0, t) = 0. \quad (4.4.4)$$

Una condición de borde adicional sobre las componentes de la métrica en $r = 0$ surge de exigir que el espaciotiempo sea localmente plano en ese punto. La condición se obtiene considerando el transporte paralelo de un vector arbitrario alrededor de un lazo que encierra el origen en el plano ecuatorial de cualquier hipersuperficie y demandando que no exista rotación neta en el límite en que el lazo se reduce a un punto. El resultado es bien conocido [64] y es simplemente

$$(rb)^{;\mu} (rb)_{;\mu} \Big|_{r=0} = 0, \quad (4.4.5)$$

el cual, luego de manipularlo e introduciendo las condiciones de borde (4.4.3) y (4.4.4), da lugar a

$$a(0, t) = b(0, t) = 0. \quad (4.4.6)$$

De (4.2.35) y (4.2.36) es fácil ver que estas condiciones de borde y las anteriores, son simplemente

$$K_r^r(0, t) = K_\theta^\theta(0, t) = 0. \quad (4.4.7)$$

4.5. Horizontes aparentes y formación de agujeros negros

La topología de las hipersuperficies de tipo espacio debe ser incluida como parte de la especificación del problema de Cauchy para la generación de cualquier espacio-tiempo. Todas las soluciones construidas en este trabajo tienen la topología espacial \mathbb{R}^3 y son asintóticamente planas. Por lo tanto, la 3-métrica en cualquier hipersuperficie tiende a la métrica euclídea usual en \mathbb{R}^3 a grandes distancias. Entre otras cosas, esto permite definir la masa total conservada, M (masa ADM o energía ADM), de cualquiera de los espaciotiempos estudiados. M puede expresarse de varias formas. Por ejemplo, si el elemento de línea esféricamente simétrico se escribe como

$$ds^2 = \psi^4 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) = 0 \quad (4.5.1)$$

mediante una elección adecuada de las coordenadas radiales, la masa está dada por [54, 86]

$$M = \frac{1}{2\pi} \oint \psi^4 d^2 S_i = \lim_{r \rightarrow \infty} 2r^2 \partial_r \psi \quad (4.5.2)$$

siendo la integral tomada sobre la 2-esfera en el infinito. Físicamente, esta masa puede ser deducida por observadores a grandes distancias a partir del movimiento orbital de partículas de prueba.

Las configuraciones del campo escalar que vamos a evolucionar se componen típicamente de dos paquetes de ondas, uno entrante y otro saliente, que se propagan de forma eficaz e independiente entre sí. Debido a la simetría esférica, es posible hablar de la masa (o energía) asociada con cada pulso. Usando una coordenada radial, r , tal que el área de una 2-esfera de $r = \text{constante}$ es $4\pi r^2$, dos escalas de longitud pueden ser asociadas al pulso entrante. Una es la extensión espacial, l , del pulso. La otra, es el radio de Schwarzschild, $R_S = 2M_{\text{entrante}}$, asociado con su contenido energético. Para un pulso débil, $l \gg R_S$, y el pulso se autoreflejará en $r = 0$ y luego se propagará hacia afuera. Sin embargo, si $l \approx R_S$ o menor, entonces existe la posibilidad de que el campo gravitacional se vuelva lo suficientemente fuerte para formar un agujero negro, como lo ha demostrado Christodolou en 1971 [58]. El borde de un agujero negro, conocido como *horizonte de eventos*, es una característica global

del espaciotiempo. Su posición no puede ser determinada por mediciones locales. Sin embargo, la existencia de un agujero negro en una solución dada está inferida por la aparición de *horizontes aparentes*, definidos como una superficie en la cual la divergencia de los rayos de luz salientes se anula, y puede demostrarse [63] que los horizontes aparentes siempre se encuentran sobre o dentro del horizonte de eventos. Como plantean Hawking y Ellis [63], la ventaja de trabajar con horizontes aparentes, en lugar de hacerlo con horizontes de eventos, es que los primeros dependen solamente de la geometría de la hipersuperficie en la cual están embebidos. La ecuación para una superficie atrapada es [60]

$$s^i{}_{|i} - K + s^i s^j K_{ij} = 0, \quad (4.5.3)$$

donde s^μ es la normal saliente a la superficie. Para el caso de simetría esférica con el elemento de línea (4.2.11),

$$s^i = (a^{-1}, 0, 0), \quad (4.5.4)$$

entonces

$$s^i{}_{|i} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\sqrt{g} s^i)_{,i} = \frac{1}{ar^2 b^2} (r^2 b^2)_{,r} = 2 \frac{(rb)'}{arb}. \quad (4.5.5)$$

Usando

$$K = K_r^r + 2K_\theta^\theta \quad (4.5.6)$$

la ecuación (4.5.3) se vuelve

$$(rb)' - arbK_\theta^\theta = 0 \quad (4.5.7)$$

El lado izquierdo de la última ecuación puede calcularse fácilmente para cada hipersuperficie y, cuando se anula, es una señal de formación de un horizonte aparente que, a su vez, implica que el espaciotiempo contiene un agujero negro.

Capítulo 5

Algoritmo AMR

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales a ser resuelto numéricamente, se debe decidir primero cómo pasar del sistema diferencial continuo a un sistema algebraico tal que la solución de este último sea una aproximación aceptable del primero.

Los tres criterios a tener en cuenta para definir si un esquema es aceptable son: que represente correctamente la física del modelo, que numéricamente aporte información detallada sobre el comportamiento y que no consuma excesivos recursos computacionales. Además, debe garantizar la estabilidad y convergencia de la solución.

En esta sección describiremos las características principales del código de refinamiento de malla adaptativa (AMR, por sus siglas en inglés -Adaptive Mesh Refinement-) desarrollado por Choptuik [4] y que utilizaremos para resolver numéricamente el colapso gravitacional del campo escalar polimerizado.

5.1. Descripción del algoritmo numérico

El programa construido por Choptuik para resolver las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica del campo escalar acoplado a la gravedad está basado en un algoritmo general para ecuaciones hiperbólicas descrito en Berger & Olinger (1984). La característica clave de este algoritmo es que es adaptativo; la escala local de discretización h puede variar de región en región del dominio computacional,

de modo que el error local de truncamiento se mantenga por debajo de un límite especificado por el usuario.

El algoritmo de Berger & Olinger [53] logra la adaptatividad utilizando un mecanismo de refinamiento uniforme y local. Esta es una técnica que durante mucho tiempo ha sido defendida por Brandt (1977) [88] como la base de una estrategia general para desarrollar soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales con una eficiencia casi óptima. En este enfoque, el dominio computacional (conjunto de todos los puntos de la grilla en los cuales están definidas las versiones diferenciales finitas de las ecuaciones) consiste en un conjunto de grillas jerárquicas, cada una de las cuales tiene un espaciado de malla constante, tanto en la dirección de la coordenada temporal, como en la espacial. Para dominios rectangulares simplemente conectados como el que consideraremos aquí, la jerarquía está arraigada en una grilla base, única, denotada por G_0^0 . Luego, en cualquier tiempo de integración, el dominio computacional es un conjunto $\{G_l^i\}$. El subíndice l etiqueta el nivel de refinamiento, $l = 1, \dots, L$, siendo L el nivel de refinamiento máximo, definido a priori, y el superíndice i etiqueta una grilla particular en un nivel dado. Cada nivel de refinamiento se caracteriza por una única escala de discretización, h_l , donde los diversos h_l satisfacen, típicamente ,

$$h_l = \rho h_{l+1}, \quad l = 0 \dots L - 1, \quad (5.1.1)$$

para alguna tasa de refinamiento, ρ , de valor entero y fijo en general. Cabe destacar que el refinamiento local se realiza tanto en el espacio como en el tiempo. El tamaño de malla espacial Δr_l de cualquier grilla siempre se puede identificar con h_l , mientras que el espaciado temporal es siempre una fracción fija $\lambda (< 1)$ de Δr_l .

Para las ecuaciones hiperbólicas que son diferenciadas finitamente en el mismo orden en espacio y tiempo, esta es una forma natural de proceder, ya que las variaciones espaciales y temporales suelen ser de magnitud comparable. Además de la relación (5.1.1) entre las diferentes escalas de discretización, cada grilla G_l^i debe estar contenida adecuadamente dentro del dominio de alguna grilla parental G_{l-1}^i (propiedad de anidamiento) y colocarse de modo que sus límites exteriores se encuentren a lo largo de las líneas de la grilla parental (propiedad de alineación).

La Figura (5.1.1) muestra un ejemplo simple del tipo de estructura de grilla admitida por el algoritmo de Berger & Olinger con $\rho = 2$ y $L = 2$. Como puede verse la

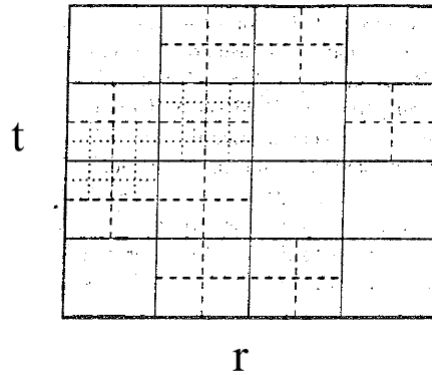


Figura 5.1.1: Ejemplo de la estructura de la grilla admitida por el algoritmo de refinamiento de Berger & Oliger.

distribución espacial de los puntos de la grilla no es estática en general y por supuesto el proceso dinámico de regrillado del dominio resulta en la adaptatividad del algoritmo. Berger & Oliger investigaron diferentes estrategias de regrillado y eventualmente encontraron una técnica que, como mencionamos anteriormente, mantiene el error de truncamiento local de la solución por debajo de un límite especificado a priori.

Choptuik adoptó este enfoque que está basado en principios básicamente idénticos a los que aún se emplean hoy en día. La idea, que se remonta a los primeros trabajos de Richardson en 1910 [76] sobre métodos de diferencias finitas, es fácilmente comprensible si se considera una ecuación de evolución simple (por ejemplo, $u_t = u_x$) para una incógnita escalar u que, asumiremos, ha sido diferenciada a orden $O(h^2)$, utilizando un esquema de diferencias explícitas de dos niveles. Por tanto, la incógnita \hat{u} (discreta) satisface

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{Q}(h)\hat{u}^n, \quad (5.1.2)$$

donde $\hat{Q}(h)$ es el 'operador de actualización' de un paso en la escala de malla h . El error de truncamiento local, τ^n , asociado con $\hat{Q}(h)$ está definido por

$$\tau^n \equiv u^{n+1} - \hat{Q}(h)u^n, \quad (5.1.3)$$

y, dado que el esquema diferencial es de segundo orden, tendrá la forma

$$\tau^n = h^3 t_2 + O(h^4), \quad (5.1.4)$$

dónde t_2 es una función suave independiente de h y dependiente tanto del esquema diferencial como de u . Siguiendo el enfoque de Richardson, si asumimos que localmente la solución diferencial admite una expansión asintótica de la forma

$$\hat{u} = u + h^2 e_2 + \dots, \quad (5.1.5)$$

dónde e_2 es otra función suave e independiente de h , no es difícil mostrar que podemos estimar τ^n comparando la solución diferencial luego de dos pasos en h con otra solución diferente, obtenida evolucionando las incógnitas discretas un paso en una malla gruesa (de espaciado $2h$) pero usando las mismas ecuaciones en diferenciales. Específicamente

$$\tau^n \approx \text{constante} \left(\hat{Q}(h)\hat{Q}(h) - \hat{Q}(2h) \right) \hat{u}^n. \quad (5.1.6)$$

El procedimiento de regrillado se lleva a cabo de la siguiente manera. Periódicamente, y en cada grilla, se generan estimaciones del error de truncamiento local utilizando el método anterior y se marcan todos los puntos de la grilla donde la estimación del error excede el umbral predeterminado. A partir de estos puntos marcados, se identifican las regiones que requieren refinamiento y luego se cubren con nuevas grillas G_{l+1}^i (ver [53] por detalles sobre estrategias para la generación de grillas).

En la figura (5.1.2) se muestra una descripción de un pseudocódigo¹ del algoritmo de Berger & Olinger. La tarea básica de la 'pseudorutina' llamada 'time_step[1]' es hacer avanzar un sólo paso de tiempo las ecuaciones de diferenciales del nivel l . La rutina primero verifica si ha sido llamada en un tiempo de regrillado. Si lo ha hecho, se invoca la 'rutina de regrillado' para realizar la estimación del error de truncamiento y el procedimiento de regrillado, no sólo en el nivel l , sino también en los niveles existentes más finos. De hecho, el proceso de regrillado comienza en el nivel más fino y trabaja "hacia arriba", lo que asegura que todas las grillas estén correctamente anidadas en todo tiempo. Esta parte del código también implica la inicialización

¹Un pseudocódigo es una forma de escribir los pasos que realizará un programa de la forma más cercana al lenguaje de programación que se utilizará.

```

ROUTINE time_step[l]
  IF regridding time AND  $l < L$  THEN
    regrid on all levels  $l' \geq l$ 
  END IF
  FOR  $i = \dots$  (all grids on level  $l$ )
    o advance solution on  $G_i^l$  (basic difference equations)
    o if necessary, compute boundary values from interpolation
      in some  $G_j^{l-1}$ 
  END FOR
  IF  $G_i^{l+1} \neq \emptyset$  THEN
    FOR  $k = 1 \dots \rho$ 
      time_step[l+1]
    END FOR
  END IF
  IF  $l > 0$  AND time-aligned with  $l - 1$  THEN
    inject level  $l$  values into parental  $l - 1$  grids
  END IF
END ROUTINE

```

Figura 5.1.2: Pseudocódigo del algoritmo de Berger & Olinger.

de las incógnitas discretas en las grillas recién creadas. En general, esto implica una combinación de transferencia de los valores antiguos del nivel l (en aquellas partes del dominio que anteriormente estaban cubiertas por una grilla de nivel l) y la interpolación de las cantidades del nivel $l - 1$ (en las regiones recientemente refinadas). De hecho, la operación de regrillado en el nivel l siempre implica una reconstrucción completa de la jerarquía general de la grilla en el nivel l y en los más finos pero, en la práctica, los gastos generales incurridos son un pequeño porcentaje del costo computacional total.

Después de cualquier regrillado, la rutina 'time_step[l]' aplica las ecuaciones de evolución básicas en todas las grillas en el nivel l . Si l no es el nivel más fino, la rutina se autoinvoa recursivamente para efectuar ρ pasos de tiempo en el nivel $l + 1$. Obsérvese que la estructura 'time_step[l]' garantiza que las ecuaciones diferenciales de un nivel "grosso" avancen antes que las de nivel fino. Esto permite que los valores límite para las grillas de nivel l que tienen uno o más límites en el interior del dominio numérico se determinen a partir de la interpolación de valores adecuados de la grilla principal. Una vez que la rutina 'time_step[l]' ha culminado los ρ pasos de tiempo finos (el final del loop 'FOR'), el nivel $l + 1$ ha avanzado hasta

el mismo tiempo que la grilla del nivel l . En este punto, otra rutina, 'inject', es llamada para sobrescribir los valores de la grilla principal con los valores correspondientes de los refinamientos contenidos. Esto asegura que en todo tiempo cada grilla contenga la mejor aproximación disponible de las incógnitas continuas. Si esto no se hiciera, grandes errores en las incógnitas de la grilla gruesa en regiones refinadas se propagarían a regiones que no requieren refinamiento, corrompiendo toda la solución.

Choptuik siguió de cerca la implementación del algoritmo de Berger & Oligier, sin embargo, hizo algunas modificaciones necesarias para la descripción de este modelo. Por ejemplo, el algoritmo original fue diseñado estrictamente para sistemas hiperbólicos pero la necesidad de resolver ecuaciones espacialmente no locales como, por ejemplo, el vínculo hamiltoniano y las condiciones sobre las coordenadas, introducen complicaciones tanto conceptualmente como en la práctica. Una vez insertadas las ecuaciones no hiperbólicas en el código AMR, es necesario realizar un estudio minucioso de la precisión, estabilidad y convergencia de las soluciones.

5.2. Condiciones sobre las coordenadas

La elección de coordenadas siempre ha sido un tema central en relatividad numérica. La literatura contiene varias discusiones sobre el tema, particularmente para el caso de espacio tiempo axisimétricos [51, 74, 80].

La especificación de la función lapso es crucial a la hora de elegir un sistema de coordenadas para la construcción de un espaciotiempo, en particular cuando tratamos con un campo gravitacional fuerte. Trabajos de Penrose, Hawking y Geroch [63] en los años 60 establecen claramente el hecho de que las singularidades son una característica general de las soluciones de las ecuaciones de Einstein; específicamente, cualquier espaciotiempo que contenga uno o más agujeros negros contendrá singularidades, las cuales pueden desarrollarse a partir de datos iniciales regulares como, por ejemplo, datos que representan una estrella suficientemente masiva previo a su colapso. El problema es que, una vez que una hipersuperficie de tiempo intersecta una singularidad, la evolución debe cesar inmediatamente. Esto deja algunas porciones físicamente relevantes del espaciotiempo sin explorar (parte del exterior de un agujero negro, por ejemplo). Con el fin de evitar este escenario se ha puesto un gran

esfuerzo en el estudio de las condiciones sobre las hipersuperficies (elección sobre la función lapso que evita singularidades). Una singularidad se evita haciendo que la función lapso tienda rápidamente a cero en la vecindad de la singularidad, lo cual tiene el efecto de congelar la evolución.

La condición más conocida sobre las hipersuperficies es la condición '*máxima*', en la que demandamos que la traza de la curvatura extrínseca se anule en todas las hipersuperficies de la foliación,

$$K \equiv g_{ij}K^{ij} = 0. \quad (5.2.1)$$

Esta condición da lugar a una ecuación elíptica que determina el lapso en cada hipersuperficie. También tiene la ventaja de simplificar las ecuaciones 3+1 y puede ser utilizada para eliminar una de las componentes diagonales de la curvatura extrínseca.

Otra condición sobre las hipersuperficies que también tiene la propiedad de evitar singularidades fue implementada por Stark y Piran [74, 75, 82, 83] en el contexto del colapso estelar axisimétrico; es la condición '*polar*'. Nuevamente la foliación está definida bajo una condición sobre la curvatura extrínseca:

$$K = K_r^r. \quad (5.2.2)$$

Esta relación da lugar a una ecuación parabólica que el lapso debe satisfacer en cada hipersuperficie. Al igual que la condición máxima, la condición polar puede ser utilizada para eliminar una de las K_j^i y, combinada con una elección apropiada de las coordenadas espaciales, puede dar lugar a una simplificación considerable de las ecuaciones 3 + 1.

Aunque existen varios estudios que sugieren que la elección sobre las coordenadas espaciales tiene algún significado geométrico (y posiblemente físico) especial, los grados de libertad espaciales son generalmente utilizados para simplificar el sistema de ecuaciones. La posibilidad más evidente es utilizar un vector shift nulo, lo que resulta en trayectorias espaciales normales a las hipersuperficies. Estas coordenadas eliminan términos de las derivadas convectivas y simplifican la tarea reproducir esquemas diferenciables estables. Esta condición ha sido empleada satisfactoriamente en muchos códigos de relatividad numérica [55, 56, 57, 59, 61, 67, 68, 69, 70, 73, 81].

Otro enfoque general sobre la elección de coordenadas espaciales [85] involucra imponer relaciones algebraicas sobre algunas de las componentes de la 3-métrica. Generalmente esto da lugar a ecuaciones parabólicas o elípticas que el vector shift deberá satisfacer en cada hipersuperficie. Se debe tener cuidado a la hora de asegurar que las condiciones sean compatibles con la elección sobre la foliación y con otras consideraciones como la regularidad en $r = 0$ en coordenadas esféricas. Dos de las condiciones sobre las coordenadas (referidas a la expresión (4.2.11)) son

$$a = b \quad (5.2.3)$$

y

$$b = 1. \quad (5.2.4)$$

La primera se conoce como condición isotérmica y es útil en cálculos para colapsos esféricamente simétricos [85, 77, 78]. La segunda es la condición radial, introducida por Bardeen y Piran [51]. En este caso, las 2-esferas de radio r tienen una superficie propia igual a $4\pi r^2$, de modo que la coordenada radial tiene un significado geométrico directo. Ambas condiciones reducen la complejidad de las ecuaciones diferenciales y eliminan al menos una variable del conjunto $\{a, b, K_r^r, K_\theta^\theta, \beta\}$. En nuestro trabajo, utilizamos la condición Polar/Radial.

Sistema de coordenadas polar radial

La elección del sistema de coordenadas polar radial resulta en un sistema de ecuaciones de Einstein particularmente simple. En una región vacía del espaciotiempo las coordenadas son simplemente aquellas del elemento de línea de Schwarzschild. Es conveniente reescribir el elemento de línea como

$$ds^2 = -N^2(r, t) dt^2 + a^2 \left(1 - \frac{2m(r, t)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = 0, \quad (5.2.5)$$

siendo $m(r, t) = \frac{1}{2}r(1 - a^{-2})$, la *función aspecto de masa*, definida en analogía con el elemento de línea (2.4.1), y que puede ser interpretada en cualquier región del espaciotiempo como la cantidad de masa o energía contenida en la 2-esfera de superficie propia $4\pi r^2$ en un tiempo t . Se puede demostrar que el vínculo hamiltoniano

(4.1.5) es equivalente a la ecuación:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho, \quad (5.2.6)$$

que puede ser escrita como una ecuación diferencial de primer orden para a :

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - 4\pi r a^2 \rho = 0. \quad (5.2.7)$$

El vínculo de momento (4.1.6) implica, en este sistema de coordenadas:

$$K_r^r = 4\pi r j_r. \quad (5.2.8)$$

Recordemos que para el caso con simetría esférica la traza de la curvatura extrínseca es $K = K_r^r + 2K_\theta^\theta$, entonces, la condición polar, $K = K_r^r$, implica que $K_\theta^\theta = 0$ en todo punto. Por lo tanto, la condición

$$\dot{K}_\theta^\theta = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (5.2.9)$$

debe ser impuesta para generar la foliación polar. Utilizando (4.1.10) e imponiendo $K_\theta^\theta = (K_\theta^\theta)' = 0$ y la condición radial $b = 1$, tenemos

$$\frac{N'}{N} - \frac{a'}{a} + \frac{1 - a^2}{r} + 4\pi r a^2 (\rho - S_r^r) = 0, \quad (5.2.10)$$

una ecuación diferencial de primer orden para el lapso. Las cantidades ρ , j_r y S_r^r , asociadas al contenido material, pueden ser calculadas a partir de (4.2.26), (4.2.27) y (4.2.29), respectivamente.

Dado que la condición sobre las coordenadas espaciales es $b = 1$ y la condición polar implica $K_\theta^\theta = 0$, la ecuación de evolución para b (4.2.36) implica que $\beta = 0$, por lo tanto, estas coordenadas también son espacialmente normales a las hipersuperficies de tiempo. Teniendo en cuenta esto, las ecuaciones (5.2.7) y (5.2.10) dan lugar a

$$\frac{a'}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} - 2\pi r (\Phi^2 + \Pi^2) = 0, \quad (5.2.11)$$

$$\frac{N'}{N} - \frac{a'}{a} + \frac{1 - a^2}{r} = 0. \quad (5.2.12)$$

La componente de la curvatura extrínseca K_r^r es computada a partir del vínculo de momento (5.2.8) que, en función de la expresión del campo escalar y su momento, toma la forma:

$$K_r^r = -4\pi r \frac{\Pi\Phi}{a}. \quad (5.2.13)$$

Además, las ecuaciones de movimiento, (4.2.40) y (4.2.43), para las variables asociadas al campo escalar y su momento canónico pasar a ser

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{N}{a} \Pi \right)', \quad (5.2.14)$$

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{r^2} \left(\left(\frac{N}{a} \Phi \right) \right)'. \quad (5.2.15)$$

El sistema (5.2.11)-(5.2.15) es el sistema de ecuaciones a resolver bajo la elección polar/radial. La simplificación de las ecuaciones 3 + 1 que resulta del uso de este sistema de coordenadas en un espacio tiempo con simetría esférica es notable. Esta deja un conjunto de variables $\{a, N, K_r^r, \Phi, \Pi\}$ con las cuales debemos lidiar numéricamente. Ha sido demostrado en estudios analíticos del modelo que este sistema de coordenadas es muy útil (ver, por ejemplo, Berger et al [52] y Unruh [84]). El esquema completo tiene error de truncamiento de segundo orden tanto en espacio como en tiempo.

La manera más sencilla de generar datos iniciales que satisfagan el vínculo de momentos es requerir que la superficie de datos iniciales represente un instante de simetría temporal; esto es, que el espaciotiempo posea una simetría $t \rightarrow -t$, de modo que la evolución hacia atrás en el tiempo, desde la superficie inicial ($t = 0$), sea idéntica a la evolución hacia adelante. Una hipersuperficie de tiempo simétrica posee un tensor curvatura extrínseca idénticamente nulo. Por otro lado, las derivadas temporales de las variables materiales también deben ser cero. La configuración inicial del campo escalar puede ser elegida libremente y será de la forma

$$\phi(r, 0) = \phi_0 \exp \left(- \left(\frac{r - r_0}{\Delta} \right)^2 \right), \quad (5.2.16)$$

dónde ϕ_0 , r_0 y Δ son parámetros.

La experiencia numérica en [74, 75, 82, 83] muestra que la función lapso colapsa más rápidamente en la foliación polar que en la foliación máxima, pero la primera tiene la ventaja de cubrir todo el espacio tiempo fuera del horizonte de eventos. Además, el colapso del lapso es una clara indicación de que el espaciotiempo contiene un agujero negro. Dado que la coordenada radial mide el área de la superficie propia, el borde exterior de la grilla no es 'arrastrado hacia adentro' como en el caso de la foliación máxima y, por lo tanto, esperando el tiempo suficiente, la radiación que llegue eventualmente al infinito se escapará de la grilla.

Parte III

Nuestro trabajo: Colapso gravitacional de un campo escalar polimerizado

Capítulo 6

Colapso gravitacional del campo escalar polimerizado

6.1. Motivación

En 1993 M.Choptuik [3] publicó el estudio numérico del colapso de un campo escalar sin masa, mínimamente acoplado a la Relatividad General y esféricamente simétrico. Para una familia de datos iniciales de un parámetro, señaló que existe un valor crítico del parámetro, tal que, para valores subcríticos, el campo escalar se dispersa hasta el infinito y, para valores supercríticos, se forma un agujero negro a través de una transición de fase de segundo orden. La relación entre la masa final del agujero negro, m_{BH} , y el parámetro p de los datos iniciales es universal y tiene la forma

$$m_{BH} \approx \mathbb{C}(p - p^*)^\gamma. \quad (6.1.1)$$

Aquí, p^* es el valor crítico del parámetro y $\gamma \sim 0,37$ es un exponente universal independiente de la elección de p y de los datos iniciales, siempre que p^* no sea nulo. Este comportamiento crítico y la escala universal se han observado en otros sistemas (ver [5]). Si bien parecía probable que la transición fuese de segundo orden ya que no existe una escala de longitud natural en el problema, antes de estos estudios numéricos, el orden de la transición de fase no estaba resuelto [8].

Posteriormente, Hod y Piran [23] notaron que existe una pequeña corrección a la ley anterior (6.1.1),

$$\ln(m_{BH}) \approx \gamma \ln |p - p^*| + c_f + \Psi(\ln |p - p^*|) \quad (6.1.2)$$

donde $\Psi(\ln |p - p^*|)$ toma la forma de una oscilación o "wiggles" de carácter universal.

El resultado de la autosimilitud discreta del sistema implica que si se considera una variable $Z(r; t)$ del problema (que puede representar, por ejemplo, el campo escalar o las componentes métricas g_{tt} o g_{rr}) y se la escribe en términos de coordenadas logarítmicas,

$$\rho = \ln(r), \quad (6.1.3)$$

$$\tau = \ln(T_0^* - T_0), \quad (6.1.4)$$

donde T_0^* es el tiempo propio central en el cual la evolución crítica se detiene, se tiene que

$$Z(\rho - \Delta, \tau - \Delta) \sim Z(\rho, \tau). \quad (6.1.5)$$

La cantidad $\Delta = 3, 4$ es una constante universal independiente de los datos iniciales. La autosimilitud que se manifiesta en las coordenadas logarítmicas, se hace notoria a través lo que llamamos "ecos", un comportamiento difícil de observar si se usa un código con malla fija, ya que requeriría un espaciado de grilla muy pequeño a lo largo de la misma. Esto se aborda de mejor manera utilizando un código con refinamiento de malla adaptativa (AMR, por sus siglas en inglés).

Resulta curioso preguntarse qué cambiaría en un tratamiento cuántico del colapso gravitacional. La gravedad cuántica tiene una escala de longitud natural, la longitud de Planck. De hecho, estudios previos de la dinámica polimerizada de la Relatividad General parecían sugerir que la transición pasa a ser de primer orden [6, 7]. Incluso al día de hoy, un tratamiento cuántico completo del problema no está disponible.

Nos propusimos estudiar el colapso crítico de campos escalares sin masa, mínimamente acoplados a las ecuaciones semiclásicas que derivan de la gravedad cuántica de lazos con simetría esférica [9]. El objetivo principal es estudiar si ciertos comportamientos críticos que muestra la Relatividad General cuando colapsa materia para formar agujeros negros siguen estando presentes cuando se incluyen efectos cuánticos. Para ello se estudia una teoría efectiva de campos polimerizados que incluye dichos efectos y que puede representar bien lo que ocurre en el exterior de un agujero negro.

6.2. Ecuaciones clásicas en el sistema Polar-Radial

El lagrangiano de un campo escalar, ϕ , sin masa, sin auto-interacción, y acoplado mínimamente al campo gravitacional es:

$$L_{Total} = L_{Einstein} + 16\pi L^\phi \propto R - 8\pi \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi. \quad (6.2.1)$$

Asumiremos las unidades geométricas, tal que, $G = c = 1$. Nos restringiremos al caso con simetría esférica, adoptando un sistema de coordenadas (t, x, θ, φ) que consideraremos una generalización de las coordenadas de Schwarzschild para el caso de un espaciotiempo dependiente del tiempo. Las variables clásicas de la gravedad están dadas por las componentes esféricas de las tríadas en las direcciones radial y transversal, E^x y E^φ , y sus momentos canónicamente conjugados, K_x y K_φ , respectivamente [39]. La métrica del espaciotiempo se puede escribir como,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \Lambda^2 dx^2 + R^2 d\Omega^2, \quad (6.2.2)$$

donde N es la función lapso, Λ es la función métrica radial, y $d\Omega^2$ es la métrica usual de la 2-esfera. La relación de las componentes con las tríadas de gravedad cuántica de lazos es

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{E^\varphi}{x}, \\ R^2 &= |E^x|, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

y con las curvaturas extrínsecas

$$\begin{aligned} K_{xx} &= -\text{sig}(E_x) \frac{K_x (E^\varphi)^2}{\sqrt{|E^x|}}, \\ K_{\theta\theta} &= -\frac{\sqrt{|E^x|} A_\varphi}{2\gamma_I}, \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

siendo γ_I el parámetro Immirzi. El hamiltoniano total en variables de Ashtekar con simetría esférica es [12]:

$$\begin{aligned}
H_T = \int dx \{ & N^x ((E^x)' K_x - E^\varphi (K_\varphi)' - 8\pi P_\phi \phi') \\
+ N \left(& -\frac{E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} - 2\sqrt{E^x} K_\varphi K_x - \frac{K_\varphi^2 E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} + \frac{((E^x)')^2}{8\sqrt{E^x} E^\varphi} - \frac{\sqrt{E^x} (E^x)' (E^\varphi)'}{2(E^\varphi)^2} \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{E^x} (E^x)''}{2E^\varphi} + \frac{2\pi P_\phi^2}{\sqrt{E^x} E^\varphi} + \frac{2\pi\sqrt{E^x} E^x (\phi')^2}{E^\varphi} \right) \}, \tag{6.2.5}
\end{aligned}$$

donde la notación 'prima' refiere a la derivada respecto a la coordenada radial, x .

Para tratar de permanecer lo más cerca posible del tratamiento de Choquet, realizamos una elección de gauge tal que $E^x = x^2$. Esto corresponde a la coordenada radial habitual de Schwarzschild y elimina K_x a través del vínculo de difeomorfismos. La condición polar ($K_{xx} = \text{tr}(K)$) corresponde en estas variables a $K_\varphi = 0$, lo que implica que la métrica sea diagonal. Esto tendrá consecuencias importantes para la cuantización que veremos más adelante.

Una vez fijado el gauge, el hamiltoniano total (6.2.5) pasa a ser

$$\begin{aligned}
H_T = \int dx \{ & N^x \left(2\sqrt{E^x} K_x - 8\pi P_\phi \phi' \right) \\
+ N \left(& -\frac{E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} + \frac{\sqrt{E^x}}{2E^\varphi} - \frac{E^x (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^2} \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{E^x}}{E^\varphi} + \frac{2\pi P_\phi^2}{\sqrt{E^x} E^\varphi} + \frac{2\pi\sqrt{E^x} E^x (\phi')^2}{E^\varphi} \right) \}. \tag{6.2.6}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que el álgebra cumple

$$\{K_x(y), E^x(x)\} = \delta(y-x), \tag{6.2.7}$$

$$\{K_\varphi(y), E^\varphi(x)\} = \delta(y-x), \tag{6.2.8}$$

imponemos la conservación de la primera condición gauge, $E^x - x^2 = 0$, mediante la cancelación de su corchete de Poisson con el hamiltoniano total; es decir,

$$\{E^x - x^2; H_T\} = 0. \tag{6.2.9}$$

Como consecuencia de la ecuación (6.2.9),

$$(N^x + NK_\varphi) 2\sqrt{E^x} = 0, \quad (6.2.10)$$

y como además $K_\varphi = 0$, tenemos

$$N^x = 0. \quad (6.2.11)$$

Análogamente, la conservación para la segunda condición, $K_\varphi = 0$, implica

$$\{K_\varphi; H_T\} = 0. \quad (6.2.12)$$

Considerando que, luego de fijar el gauge, la expresión (6.2.6) del hamiltoniano total toma la forma

$$H_T = N \left(\frac{3x}{2E^\varphi} - \frac{E^\varphi}{2x} - \frac{x^2 (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^2} + \frac{2\pi}{E^\varphi} \left(\frac{P_\phi^2}{x} + x^3 (\phi')^2 \right) \right), \quad (6.2.13)$$

la condición (6.2.12) es

$$\left\{ K_\varphi; N \left[\frac{3x}{2E^\varphi} - \frac{E^\varphi}{2x} - \frac{x^2 (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^2} + \frac{2\pi}{E^\varphi} \left(\frac{P_\phi^2}{x} + x^3 (\phi')^2 \right) \right] \right\} = 0. \quad (6.2.14)$$

Teniendo en cuenta que los únicos corchetes no nulos son los de K_φ con funciones de E^φ o $(E^\varphi)'$, obtenemos

$$\left(\frac{Nx^2}{(E^\varphi)^2} \right)' + \frac{2Nx^2 (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^3} - \frac{3xN}{2(E^\varphi)^2} - \frac{N}{2x} - \frac{2\pi N}{(E^\varphi)^2} \left(\frac{P_\phi^2}{x} + x^3 (\phi')^2 \right) = 0. \quad (6.2.15)$$

Finalmente,

$$\frac{N'}{N} + \frac{1}{2x} - \frac{(E^\varphi)^2}{2x^3} - 2\pi \left(\frac{P_\phi^2}{x^3} + x (\phi')^2 \right) = 0 \quad (6.2.16)$$

A partir del vínculo hamiltoniano tenemos la expresión

$$\frac{x^2}{(E^\varphi)^2} - 1 + \frac{2x^2}{(E^\varphi)^2} - \frac{2x^3 (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^3} + \frac{4\pi P_\phi^2}{(E^\varphi)^2} + \frac{4\pi x^4 (\phi')^2}{(E^\varphi)^2} = 0, \quad (6.2.17)$$

por lo tanto,

$$\frac{(E^\varphi)'}{E^\varphi} - \frac{3}{2x} + \frac{(E^\varphi)^2}{2x^3} - \frac{2\pi P_\phi^2}{x^3} - 2\pi x (\phi')^2 = 0. \quad (6.2.18)$$

Por otro lado, partiendo del lagrangiano (6.2.1), la ecuación de Euler-Lagrange para el campo escalar es

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi \equiv \square \phi = 0. \quad (6.2.19)$$

Será útil introducir las siguientes variables auxiliares (en correspondencia a (4.2.20) y (4.2.21)),

$$\Phi \equiv \phi' \quad (6.2.20)$$

$$\Pi \equiv \frac{E^\varphi}{Nx} \dot{\phi} \quad (6.2.21)$$

La ecuación de movimiento para Φ surge directamente de derivar (6.2.20) y sustituir (6.2.21):

$$\dot{\Phi} = \left(\frac{Nx}{E^\varphi} \Pi \right)'. \quad (6.2.22)$$

Definiendo

$$\Gamma \equiv (-\det(g_{\mu\nu}))^{1/2} = xNE^\varphi \quad (6.2.23)$$

podemos escribir la ecuación de movimiento del campo como

$$\square\phi = \Gamma^{-1}\partial_\nu(\Gamma g^{\mu\nu}\partial_\mu\phi) = 0 \quad (6.2.24)$$

o, equivalentemente,

$$\partial_t(xNE^\varphi g^{tt}\partial_t\phi) + \partial_x(xNE^\varphi g^{xx}\partial_x\phi) = \partial_t\left(-\frac{xE^\varphi}{N}\dot{\phi}\right) + \partial_x\left(\frac{x^3N}{E^\varphi}\phi'\right) = 0. \quad (6.2.25)$$

Finalmente, tenemos

$$-\frac{xE^\varphi}{N}\ddot{\phi} + \frac{x^3N}{E^\varphi}\phi'' + \frac{x^3N'}{E^\varphi}\phi' + \frac{3x^2N}{E^\varphi}\phi' - \frac{x^3N(E^\varphi)'}{(E^\varphi)^2}\phi' = 0, \quad (6.2.26)$$

y, utilizando (6.2.21),

$$\dot{\Pi} = \frac{xN}{E^\varphi}\Phi' + \left(\frac{xN'}{E^\varphi} + \frac{3N}{E^\varphi} - \frac{xN(E^\varphi)'}{(E^\varphi)^2}\right)\Phi. \quad (6.2.27)$$

El sistema de ecuaciones clásicas está conformado por las expresiones (6.2.16), (6.2.18), (6.2.22) y (6.2.27).

6.3. Polimerización

Sería un objetivo muy ambicioso intentar construir una versión cuántica del modelo estudiado por Choptuik. Lamentablemente, nadie sabe aún cómo realizarla, y varios intentos de cuantización completa, incluso en sistemas más sencillos que el propuesto aquí, han fracasado. En efecto, el problema de la inclusión de materia autogravitante en sistemas con infinitos grados de libertad no ha sido resuelto en gravedad cuántica de lazos, tal como discutimos en la sección (3.9).

En este trabajo nos inclinamos por un primer paso más modesto: realizar un análisis semiclásico del colapso gravitacional del campo escalar. En realidad, determinar las verdaderas ecuaciones semiclásicas es un problema muy difícil que requiere identificar estados semiclásicos en la teoría completa. Nuestra comprensión actual de la gravedad cuántica de lazos aún no se encuentra en ese lugar, incluso para modelos simplificados. En vista de ello, utilizamos un enfoque común para generar candidatos

a las ecuaciones semiclásicas, un procedimiento llamado *polimerización*, que ha sido utilizado ampliamente en el contexto de la cosmología cuántica de lazos [15].

En este enfoque, algunas de las variables de la teoría que estarían representadas por holonomías en la Gravedad Cuántica de Lazos serán reemplazadas por una versión 'polimerizada' de ellas mismas. Para una variable genérica φ esto corresponde a una transformación $\varphi \rightarrow \sin(k\varphi)/k$, donde k es llamado *parámetro de polimerización*. Pero, ¿Cuál es la justificación para dicho procedimiento?. La motivación para considerar representaciones poliméricas para campos escalares en gravedad cuántica de lazos fueron señaladas por primera vez por Thiemann [11] como una necesidad de lidiar con la invariancia de difeomorfismos y tener una medida bien definida en el espacio de Hilbert de los campos materiales. Para hacer compatible la materia con los espacios de Hilbert de interés, generalmente se consideran productos internos en los que ciertas variables (como la conexión) no están bien definidas [27], pero su holonomía sí lo está. En el capítulo (3), en el cual introdujimos la representación de lazos, vimos que una holonomía corresponde a una exponencial, por lo tanto, el proceso de polimerización implica reemplazar las variables por sus versiones exponenciadas y tomar la función seno, ya que el interés físico está en la parte real de la variable exponenciada.

En el caso en que la variable a polimerizar sea una conexión (como se da en las variables gravitacionales), el parámetro de polimerización corresponde a la longitud del lazo a lo largo del cual se calcula la holonomía. En el límite donde ese lazo se reduce a un punto, la variable exponenciada devuelve la variable original y se recupera la teoría clásica:

$$\sin(k\varphi) \underset{k\varphi \approx 0}{\approx} k\varphi \Rightarrow \varphi \rightarrow \sin(k\varphi)/k \underset{k\varphi \approx 0}{\approx} \varphi. \quad (6.3.1)$$

En gravedad cuántica de lazos se espera que exista un cuanto de área y, por ende, debe haber un valor propio mínimo de la misma, lo que implica que la longitud de un lazo no puede reducirse a cero. El valor mínimo de dicha longitud será el valor del parámetro de polimerización. El valor propio mínimo de las áreas está relacionado con la longitud de Planck y, por lo tanto, los parámetros de polimerización serán del orden de la escala de Planck.

Este tipo de construcción también se entiende como una representación no están-

dar de las relaciones de conmutación canónicas y se puede aplicar en sistemas ordinarios de Mecánica Cuántica [28]. En el caso en que la variable no sea una conexión, la cantidad exponenciada se conoce como *holonomía puntual*. El uso de holonomías puntuales también se ha recomendado en la teoría completa para representar campos escalares. Estas se pueden promover a operadores definidos como densidades en un espacio de Hilbert que implementa las relaciones de adjunción apropiadas. En el trabajo de Thiemann [11] se demuestra que si una medida cinemática está en conflicto con la invariancia bajo difeomorfismos cuando se implementan las relaciones de conmutación canónicas y las relaciones de adjunción, cualquier intento por resolver los problemas que se presenten, conduce naturalmente a la consideración de holonomías puntuales.

No se garantiza que la polimerización produzca la teoría semiclásica correcta, sin embargo, en todos los ejemplos estudiados hasta ahora ha cosechado buenos resultados. Idealmente, se podría derivar una teoría semiclásica a partir de una teoría cuántica completa de la gravedad, pero desafortunadamente no se conoce tal descripción. Nos conformamos con la teoría polimerizada como el mejor candidato disponible para una teoría semiclásica.

6.4. Ecuaciones semiclásicas

Comencemos observando que la fijación de gauge elegida, además de estar en concordancia con el tratamiento de Choquet, casualmente, hace que la parte gravitacional de las ecuaciones semiclásicas se reduzca a la forma clásica. Tanto K_φ como K_x se eliminan de las ecuaciones, siendo estas las variables que se deberían polimerizar en la teoría semiclásica. Esto significa que el único efecto de la cuantización de lazos está en la polimerización de las variables escalares.

Para construir las ecuaciones semiclásicas polimerizamos el campo escalar mediante la transformación

$$\phi \longrightarrow \frac{\sin(k\varphi)}{k}, \quad (6.4.1)$$

y su momento canónico,

$$P_\phi \longrightarrow P_\varphi, \quad (6.4.2)$$

donde k es el parámetro de polimerización. Como ya mencionamos anteriormente, la discretización fundamental que aparece a nivel cuántico establece un límite inferior para estos parámetros, del orden de la escala de Planck (en nuestro caso el parámetro tiene dimensiones de longitud por lo que la escala natural sería la longitud de Planck). Nótese que en este contexto lo más natural es polimerizar las variables de configuración, que en el caso gravitacional son conexiones. En el caso de las teorías métricas polimerizadas, no está claro cuál es la elección más natural, si polimerizar la variable de configuración o el momento [6, 7].

Para calcular las ecuaciones semiclásicas primero debemos aplicar la polimerización (6.4.1)-(6.4.2) en el hamiltoniano (6.2.13), que toma la forma

$$H_T = N \left\{ \frac{3x}{2E^\varphi} - \frac{E^\varphi}{2x} - \frac{x^2 (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^2} + \frac{2\pi}{E^\varphi} \left(\frac{P_\varphi^2}{x} + x^3 (\varphi' \cos(k\varphi))^2 \right) \right\}. \quad (6.4.3)$$

Las nuevas ecuaciones de movimiento vienen dadas por los corchetes de Poisson de las variables escalares con el hamiltoniano total, de manera que

$$\dot{\varphi} = \{\varphi(y), H_T(x)\}, \quad (6.4.4)$$

$$\dot{P}_\varphi = \{P_\varphi(y), H_T(x)\}. \quad (6.4.5)$$

Recordemos que para dos funciones $F[\varphi(x), P_\varphi(x)]$ y $G[\varphi(y), P_\varphi(y)]$ los corchetes de Poisson están definidos de la siguiente manera:

$$\{F, G\} = \int dz \left(\frac{\partial F[\varphi(x), P_\varphi(x)]}{\partial \varphi(z)} \frac{\partial G[\varphi(y), P_\varphi(y)]}{\partial P_\varphi(z)} - \frac{\partial F[\varphi(x), P_\varphi(x)]}{\partial P_\varphi(z)} \frac{\partial G[\varphi(y), P_\varphi(y)]}{\partial \varphi(z)} \right). \quad (6.4.6)$$

Los corchetes en (6.4.4) se resuelven sencillamente teniendo en cuenta que el álgebra satisface: $\{\varphi(y), P_\varphi(x)\} = \delta(y-x)$. Observando que el único término con corchete distinto de cero es $(2\pi N/E^\varphi x) \{\varphi(y), P_\varphi^2(x)\}$, la ecuación de movimiento para el campo escalar polimerizado tiene la forma:

$$\dot{\varphi} = \frac{4\pi N}{E^\varphi x} P_\varphi. \quad (6.4.7)$$

Por otra parte, en (6.4.5) sólo sobrevive el término:

$$\dot{P}_\varphi = \left\{ P_\varphi(y), \frac{f(x)}{k^2} \left[(\sin[k\varphi(x)])' \right]^2 \right\}, \quad (6.4.8)$$

donde $f(x) = \frac{2\pi N}{E^\varphi} x^3$. La definición (6.4.6) nos permite calcular el lado derecho de la expresión (6.4.8):

$$\begin{aligned} \dot{P}_\varphi &= \int dz \frac{f(x)}{k^2} \left[-\frac{\partial P_\varphi(y)}{\partial P_\varphi(z)} \frac{\partial ((\sin(k\varphi(x)))')^2}{\partial \varphi(z)} \right] \\ &= \int dz \frac{f(x)}{k^2} \left[-\delta(y-z) \frac{\partial}{\partial \varphi(z)} \left(\frac{\partial \sin(k\varphi(x))}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= - \int dz \frac{f(x)}{k^2} 2 \left(\frac{\partial \sin(k\varphi(x))}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi(z)} \left(\frac{\partial \sin(k\varphi(x))}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

Invirtiendo el orden de las derivadas en x y $\varphi(z)$, tenemos

$$\begin{aligned} \dot{P}_\varphi &= -2 \int dz \frac{f(x)}{k^2} (k\varphi' \cos(k\varphi(x))) \frac{\partial}{\partial x} (k \cos(k\varphi(x)) \delta(x-z)) \\ &= 2f(x) k (\varphi')^2 \cos(k\varphi(x)) \sin(k\varphi(x)) + 2 [f(x) \varphi' \cos^2(k\varphi(x))]', \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

y, finalmente, la ecuación para el momento conjugado del campo escalar es:

$$\begin{aligned} \dot{P}_\varphi &= \frac{4\pi x^2}{E^\varphi} \left[\left(\frac{3NE^\varphi - xN(E^\varphi)' + N'E^\varphi x}{E^\varphi} \right) \varphi' \cos^2(k\varphi) \right. \\ &\quad \left. + xN\varphi'' \cos^2(k\varphi) - xNk(\varphi')^2 \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (6.4.11)$$

Al introducir la transformación (6.4.1)-(6.4.2) en la ecuación (6.2.16), se obtiene

$$\frac{(E^\varphi)'}{E^\varphi} - \frac{3}{2x} + \frac{(E^\varphi)^2}{2x^3} - 2\pi x \left(\frac{(P_\varphi)^2}{x^4} + (\varphi')^2 \cos^2(k\varphi) \right) = 0, \quad (6.4.12)$$

mientras que al hacerlo en la ecuación (6.2.18), la misma se mantiene invariante:

$$\frac{N'}{N} - \frac{(E^\varphi)'}{E^\varphi} + \frac{2}{x} - \frac{(E^\varphi)^2}{x^3} = 0. \quad (6.4.13)$$

El sistema formado por las expresiones (6.4.12), (6.4.13), (6.4.7) y (6.4.11) son las ecuaciones semiclásicas que describen el colapso gravitacional del campo escalar polimerizado. Nótese que cuando $k \rightarrow 0$ se recupera el límite clásico, ya que φ se reduce a ϕ y P_φ a $x^2\Pi$ en ese límite. Para facilitar la comparación con la notación de Choptuik, debe tenerse en cuenta que $E^\varphi = xa$ en términos de las variables utilizadas en [3]. Cabe señalar que las ecuaciones polimerizadas retienen la invariancia de escala de las ecuaciones clásicas: $x \rightarrow cx$, $t \rightarrow ct$ con c constante. Esta es una diferencia clave con otros tratamientos polimerizados basados en variables métricas [6, 7] que introducen una corrección dependiente de la escala de longitud cerca del origen de la coordenada radial, y que encontraron una brecha en la función de la masa del agujero negro. Garfinkle señaló en [16] que esta simetría es una condición necesaria para la existencia de una solución crítica autosimilar y, por lo tanto, una brecha de masa cero.

6.5. Simulaciones numéricas con código AMR

Procedimos a integrar las ecuaciones adaptando una versión del código original de Choptuik (disponible públicamente en [17]), utilizando técnicas de diferencias finitas, un método que ha sido de gran utilidad en el estudio de fenómenos similares que se describen en este trabajo, ya que pueden desplegarse en escalas espaciotemporales arbitrariamente pequeñas. Elegimos como familia de datos iniciales un conjunto de gaussianas parametrizadas, de la forma

$$\varphi(x) = \varphi_0 \exp(-[(x - x_0)/\delta]^q). \quad (6.5.1)$$

Mantendremos $x_0 = 25$, $\delta = 1,5$ y $q = 2$ fijos y variaremos φ_0 , que asumirá el papel del parámetro p . La amplitud inicial $p = \phi_0$, caracteriza la fuerza de la autointeracción gravitacional del campo escalar¹. Existe un valor, $p_{débil}$, tal que en el

¹También hemos realizado pruebas eligiendo x_0 , δ o q como parámetro variable, p , obteniendo los mismos resultados.

límite $p \rightarrow p_{débil}$, la evolución del campo escalar está descrita por una solución (bien aproximada por una solución lineal de la ecuación de onda usual con simetría esférica) donde el paquete de onda implosiona a través de $x = 0$ y luego se dispersa al infinito. En el otro extremo existe un valor del parámetro, p_{fuerte} , tal que, cuando $p \rightarrow p_{fuerte}$, el estado final de la evolución (no lineal) es un agujero negro formado por el colapso del paquete de onda, con una pequeña fracción del campo escalar que se escapa hasta el infinito. Genéricamente, entre estos dos extremos existe un valor crítico de parámetro p , que llamamos p^* , donde ocurre la formación de un agujero negro. El valor de p^* puede hallarse utilizando una búsqueda binaria basada en identificar si se ha formado o no un agujero negro durante un cálculo. Asumiendo que $p_{débil} < p^* < p_{fuerte}$ (como es en el caso en que $p = \phi_0$) nos referiremos a las soluciones $\mathcal{S}[p < p^*]$ y $\mathcal{S}[p > p^*]$, como subcrítica y supercrítica, respectivamente.

En la figura (6.5.1) vemos un ejemplo de la evolución del campo escalar. Se trata de una solución supercrítica para un valor del parámetro de polimerización $k = 1$. Se puede distinguir claramente cómo el pulso colapsa al llegar al origen de coordenadas y una pequeña fracción del mismo se dispersa hacia el infinito. Las

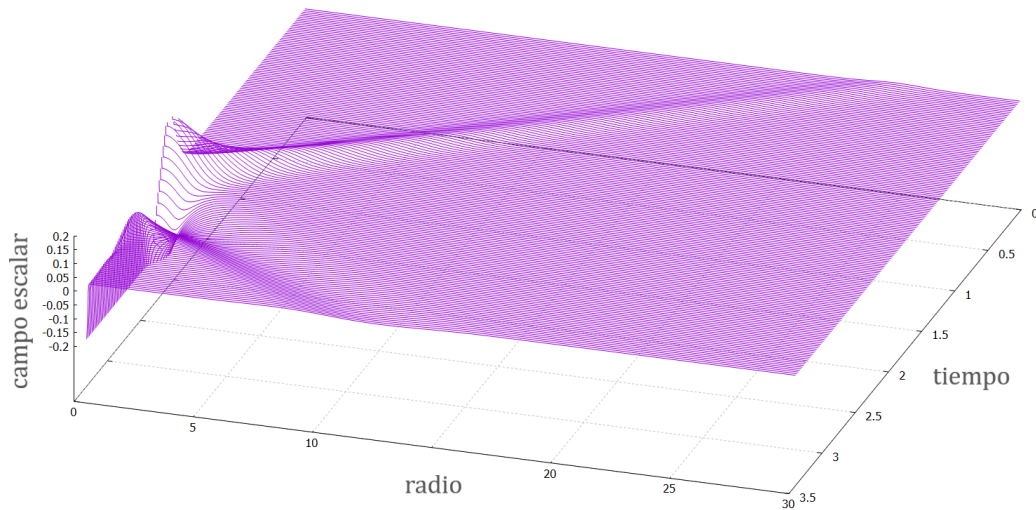


Figura 6.5.1: Evolución del campo escalar polimerizado para $k = 1$.

simulaciones muestran que existe el valor crítico mencionado, p^* , del parámetro por debajo del cual no se forma ningún agujero negro y por encima de él se ve el colapso

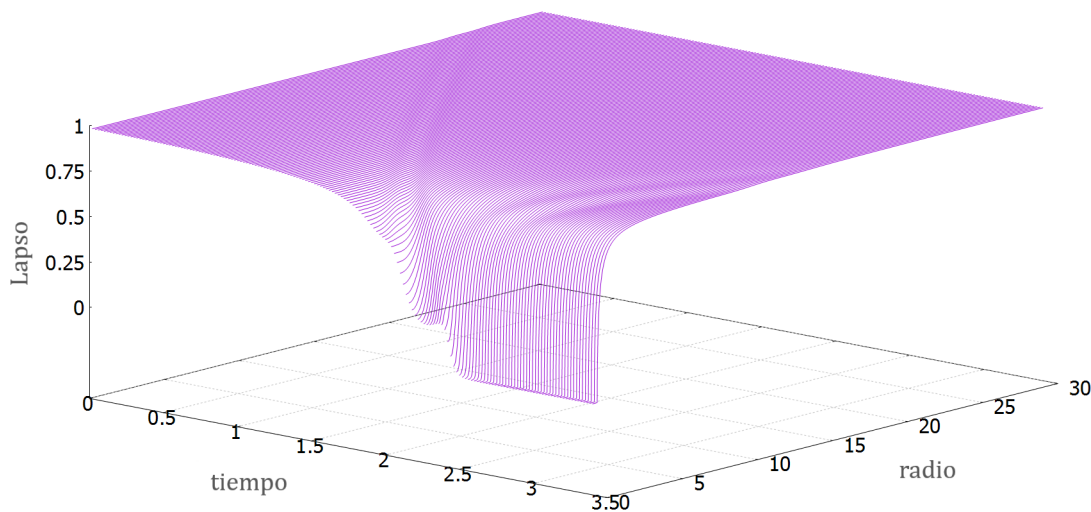


Figura 6.5.2: El lapso se desvía de uno en la región que el pulso viaja hacia $x = 0$. A medida que este se aproxima al origen de coordenadas, el lapso cae rápidamente a cero, lo que indica la formación de un agujero negro. Se ve una onda saliente de campo escalar que no es capturada por la formación del agujero negro. Para esta evolución, el parámetro de polimerización k es igual 1, un valor muy grande (dado que se espera que el parámetro sea de la escala de Planck) y, sin embargo la dinámica es muy similar al caso clásico ($k = 0$).

de la función lapso (ver figura (6.5.2)), comportamiento típico ante la formación de un agujero negro. El sistema de coordenadas (polar/radial) que hemos utilizado no puede penetrar el horizonte, sin embargo, existen claros indicios de la formación de un agujero negro en los regímenes apropiados. Por ejemplo, la cantidad $2m(x, t)/x$ tiende rápidamente a 1 en un radio R_{BH} , el radio de Schwarzschild, y esto sucede justamente cuando el lapso se anula (figura (6.5.3)). De aquí podemos obtener una aproximación de la masa del agujero negro.

Para encontrar el valor crítico p^* utilizamos un método de búsqueda binaria en el que uno aumenta monótonamente el valor del parámetro hasta que se forma un agujero negro, luego retrocede, determinando un rango (cada vez más pequeño) en el cual se encuentra el valor crítico.

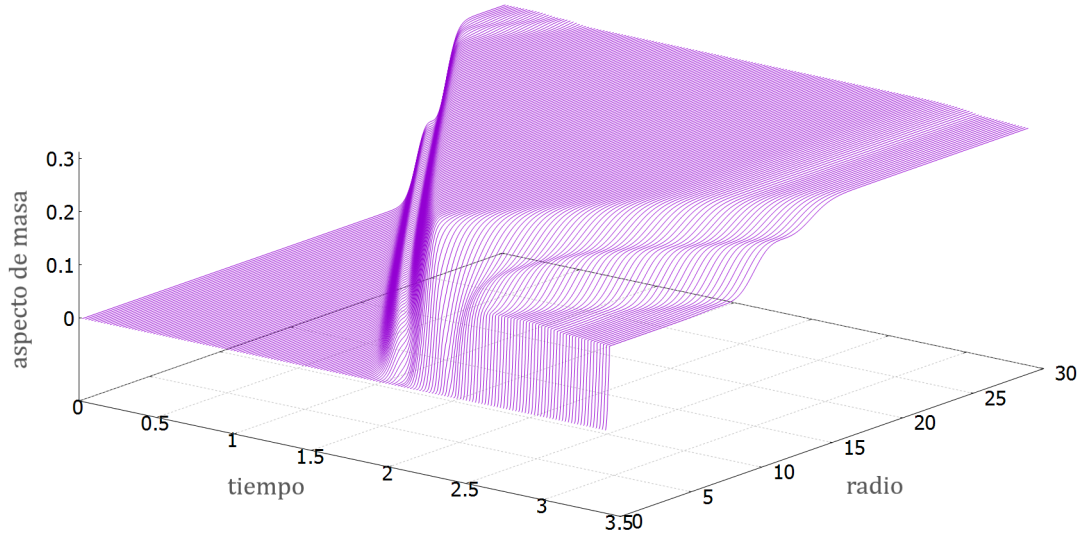


Figura 6.5.3: Comportamiento de la función aspecto de masa, $m(x,t)$, definida a partir de $g_{xx}(x,t) = \left(1 - \frac{2m(x,t)}{x}\right)^{-1}$ para la misma evolución de la figura (6.5.2). Se establece rápidamente a su valor final después de la formación del agujero negro.

6.5.1. Escala de masa

La figura (6.5.4) muestra el comportamiento de la masa final del agujero negro en función del parámetro p , para varios valores del parámetro de polimerización, k . Se observa el mismo comportamiento que Choptuik encontró en la teoría clásica, incluso con el mismo exponente universal y una dependencia muy leve del parámetro de polimerización.

La masa del agujero negro se relaciona con el parámetro p de manera que:

$$m_{BH} = \mathbb{C} (p - p^*)^\gamma, \quad (6.5.2)$$

donde la constante \mathbb{C} depende de los datos iniciales y del parámetro k . No detectamos desviaciones significativas del valor de $\gamma \sim 0,37$ observado en el caso clásico, a menos que forcemos valores exageradamente grandes del parámetro de polimerización. Como se puede ver en la figura (6.5.4), desde $k = 0$ hasta $k \approx 0,5$ el exponente permanece igual (dentro de los errores numéricos). Debemos hacer hincapié en que, físicamente, $k \approx 0,5$ es un valor irrealmente grande, más aún el caso de $k = 1$ y

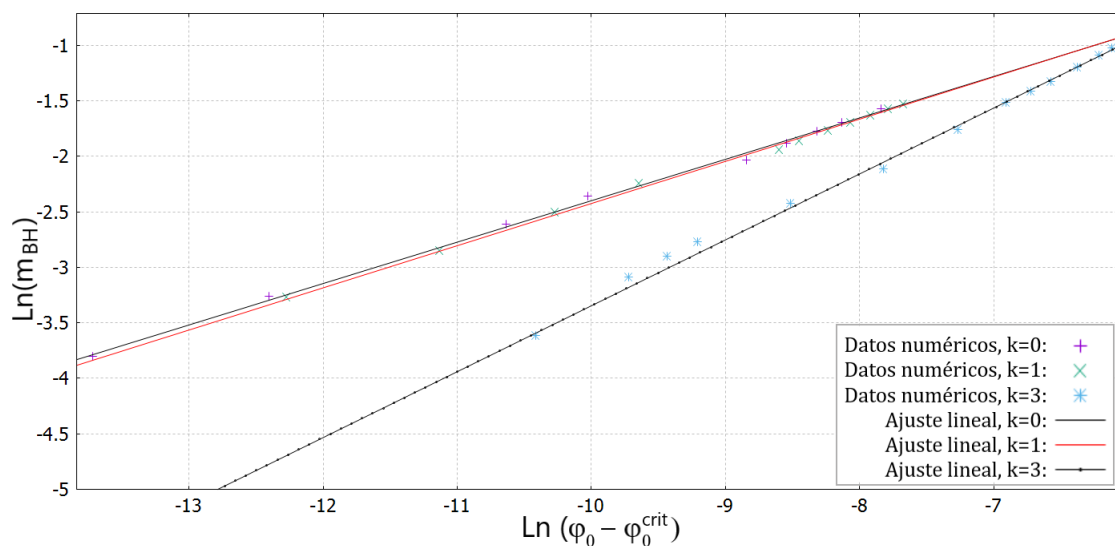


Figura 6.5.4: Gráfica de la masa final del agujero negro en función del parámetro de datos iniciales, para diferentes valores del parámetro de polimerización k . Los signos $+$ corresponden a los datos numéricos de $k = 0$ (el caso estudiado por Choptuik), \times corresponde a $k = 1$, y los $*$ a $k = 3$. Las líneas rectas son ajustes por mínimos cuadrados de los datos numéricos correspondientes.

$k = 3$ (debe recordarse que se supone que k es del orden de la escala de Planck).

6.5.2. Autosimilitud discreta y "wiggles"

Una vez comprobada la ley de potencia para la masa del agujero negro, nos volcamos a explorar la corrección en escala de masa (6.1.2) y la autosimilitud discreta (6.1.5), haciendo uso de un código con AMR. Se observó que en la teoría semiclásica también aparecen ondulaciones ("wiggles") y ecos (repeticiones en los campos), y que sus características difieren sutilmente de las de la Relatividad General clásica, a menos que se tomen valores irrealmente grandes del parámetro de polimerización.

La figura (6.5.5) muestra la ley de potencia de la masa del agujero negro en función de la desviación del parámetro p de los datos iniciales respecto del valor crítico p^* . Los datos iniciales consisten en un perfil gaussiano del campo escalar parametrizado por su amplitud y el parámetro utilizado es $k = 0$, que se corresponde con el caso de Relatividad General clásica. La escala de masa en el panel superior es lineal modulada por un movimiento periódico, y es consistente con la observada por

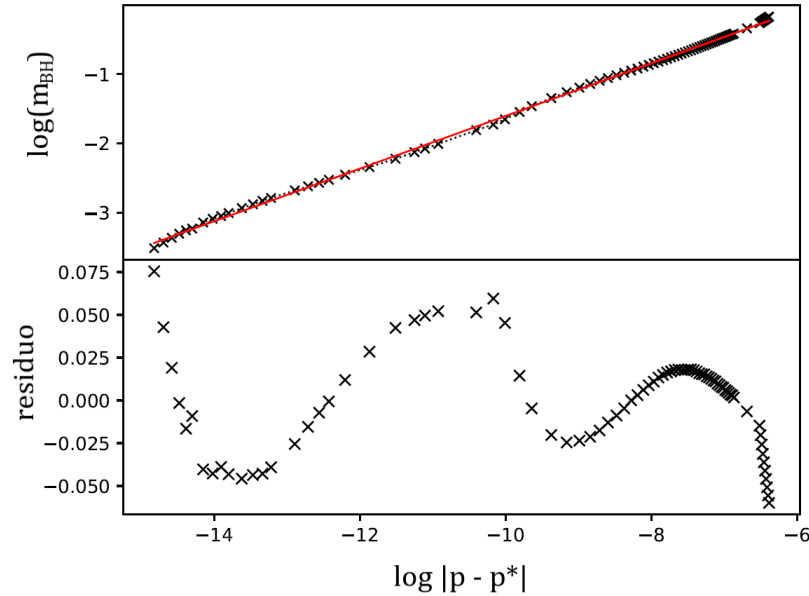


Figura 6.5.5: La escala de masa (panel superior) y los "wiggles" en las desviaciones del ajuste lineal (panel superior) en escala log-log, para la teoría polimerizada con $k = 0$. Las cruces indican los resultados de las evoluciones numéricas y la línea roja se obtiene mediante un ajuste por mínimos cuadrados para dichos datos. Aquí el ajuste tiene una pendiente $\gamma \approx 0,37$, consistente con el valor obtenido por Choptuik. El rango de los parámetros p se eligió de modo de maximizar la visibilidad de los "wiggles" y no necesariamente da el mejor ajuste para el exponente, es por eso que tenemos menos precisión para el valor γ que en [1].

Choptuik. El panel inferior muestra las desviaciones del ajuste lineal por mínimos cuadrados (en el diagrama log-log), mostrando los "wiggles" que Piran y Hod notaron por primera vez, consistentes (dentro de nuestra precisión) con la periodicidad presentada en [23], $\varpi \approx 4,6$.

La figura (6.5.6) muestra los mismos resultados, pero ahora para la teoría polimerizada con $k = 1$, un valor irrealmente grande para hacer los posibles efectos de la polimerización más distinguibles. Se observa una dependencia muy leve del parámetro de polimerización para el exponente de escala de masa ($\gamma_1 \sim 0,38$ para $k = 1$ frente a $\gamma_0 \sim 0,37$ para $k = 0$). El efecto en la frecuencia de los "wiggles" también es muy pequeño. Dentro de los errores numéricos no se aprecia una distinción muy marcada entre los casos $k = 1$ y la Relatividad General ($k = 0$).

Por otro lado, Choptuik notó que sus evoluciones numéricas muy cercanas a la

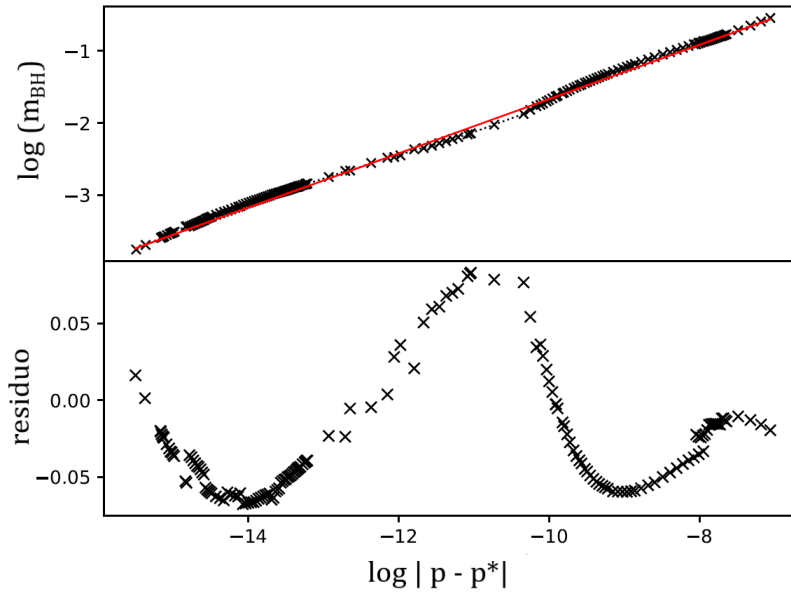


Figura 6.5.6: La escala de masa para $k = 1$, similar a la figura (6.5.5). Recordemos que el valor $k = 1$ es bastante grande, ya que se supone que k es del orden de la longitud de Planck, y sería muy pequeño en comparación con las otras escalas de longitud de la problema, tal como el radio del 'cáscarón' de datos iniciales que colapsa, o la masa final del agujero negro.

criticalidad mostraban una periodicidad acompañada de un cambio de escala. Para demostrar este comportamiento, consideramos un campo representativo en el régimen crítico periódico en la escala logarítmica de tiempo. La figura (6.5.7) muestra la función $2^{m(x)}/x$ (donde $m(x)$ es la función de aspecto de masa) versus $\ln(x)$ para el caso polimerizado $k = 1$. Desplazando esta curva en la coordenada radial logarítmica hacia afuera una cantidad 3,4 se obtiene un perfil que coincide con este mismo campo 3,2 unidades de tiempo antes (también en escala logarítmica). La concordancia de estas dos curvas sugiere que la solución se repite en una escala más pequeña consistente con una autosimilitud discreta. Debido a que estos períodos observados (para el tiempo logarítmico y el radio logarítmico por separado) para $k = 1$ son consistentes con los valores de Choptuik, no detectamos un cambio apreciable en la solución crítica debido a la polimerización.

Hemos realizado pruebas con otras familias de datos iniciales que confirman su universalidad. Un punto interesante a discutir es que la teoría polimerizada tiene una

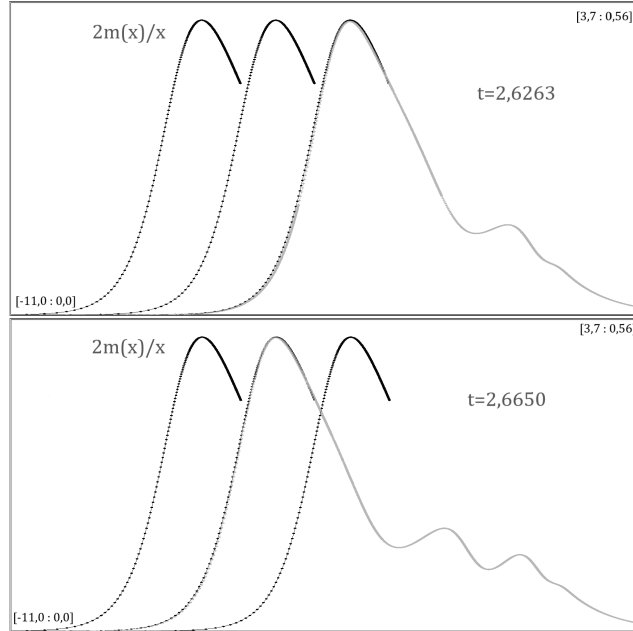


Figura 6.5.7: La curva mostrada es $2M(x)/x$ vs. $\ln(x)$ para el caso polimerizado $k = 1$. Para distinguir el eco, se muestra el campo correspondiente al tiempo $t = 2,6741$. Las dos curvas en negrita a la derecha son la curva anterior desplazada una cantidad 1,7 y 3,4. La curva gris es el mismo campo en dos tiempos anteriores $t = 2,6650$ (arriba) y $t = 2,6263$ (abajo). La coincidencia casi exacta en la forma de estas curvas sugiere una evolución hacia la auto-similaridad discreta. De las curvas podemos determinar que el período en la dirección radial es 1,7 y en el tiempo es 1,6, en amplio acuerdo con los observados por Choptuik de 3,4 (ya que elegimos la función $2M(x)/x$, que ignora el signo del campo escalar, el período es la mitad del observado por Choptuik).

desviación máxima de la teoría clásica cuando $k\varphi = \pi/2$. Al observar simulaciones cercanas a la criticalidad, pero aún subcríticas, observamos que $k\varphi$ es siempre considerablemente menor que $\pi/2$ para un p dado en el dominio cubierto (que en el caso de la formación de un agujero negro es sólo el exterior del mismo). Esto se mantiene incluso para $k = 1$, que como ya hemos argumentado, ya es un valor irrealmente grande. Las regiones con $k\varphi \sim \pi/2$ pueden ocurrir cerca del origen, donde se espera que se desarrollen grandes curvaturas. Esto está en línea con la expectativa de que la teoría polimerizada se apartará de la Relatividad General solo cerca de donde se supone que existe una singularidad. Las soluciones de la teoría cuántica para agujeros negros en [18] refuerzan esta creencia.

Cabe señalar que las ecuaciones para el campo escalar polimerizado permiten la

formación de 'shocks' ya que las velocidades de propagación dependen del $\cos(k\varphi)$. Tales fenómenos requieren condiciones adicionales para elegir una solución única y no existe una teoría bien desarrollada para manejarlos en este caso. Ciertas elecciones iniciales de $k\varphi$ pueden conducir a un comportamiento bastante complejo, en escalas de tiempo más cortas que la formación de un agujero negro (el pulso "se detiene" en la región exterior), donde se desarrollan características difíciles de seguir, incluso con el algoritmo AMR. Dentro del conjunto de familias con grandes $k\varphi$ iniciales se pueden encontrar 'islas' donde el comportamiento es similar al que observamos para k pequeños y es análogo al comportamiento clásico de Choptuik, pero están rodeadas de datos iniciales que no pueden siquiera formar agujeros negros. Se necesitan más estudios para comprender el espacio de fases completo de los datos iniciales cuando se permiten valores de $k\varphi$ grandes. También se debe tener cierta precaución para sacar conclusiones sobre el interior y hay que considerar que, aunque es potencialmente interesante desde un punto de vista matemático, las soluciones con $k\varphi$ grande están realmente más allá del ámbito de la aplicabilidad física de la teoría semiclásica.

Es bien sabido que el fenómeno de Choptuik cercano a la criticalidad genera grandes curvaturas cerca del horizonte, y es esperable que las grandes regiones de curvatura requirieran gravedad cuántica completa para su descripción. Aunque se ha observado, en el contexto de la cosmología cuántica de lazos, que la teoría semiclásica funciona bien incluso en el régimen cuántico profundo [19], no tenemos ninguna razón para esperar algo similar en nuestro caso. No obstante, el hecho de que las velocidades de propagación dependan del valor de φ cuando $k \neq 0$ podría tener consecuencias potencialmente observables incluso en un régimen donde un enfoque semiclásico fuese aplicable.

Otro punto a tener en cuenta es que hemos considerado una polimerización con parámetro constante. En cosmología cuántica de lazos al menos, se ha demostrado que es más correcto físicamente utilizar parámetros de polimerización que dependen de las variables dinámicas [15]. Este tema no se ha explorado significativamente fuera del contexto de la cosmología y es posible que desee considerarlo en un análisis futuro de la situación estudiada aquí [10].

Capítulo 7

Polimerización covariante

El procedimiento de polimerización ha sido muy utilizado en modelos de cosmología cuántica de lazos, sin embargo, ha sido criticado por la falta de covarianza. Dado que normalmente se trabaja en un contexto canónico, la polimerización altera las variables espaciales. La construcción es genéricamente dependiente de la foliación [29]. Si bien puede ser esperable que la cuantización presente desvíos de la covarianza observables para curvaturas de orden Planck o sistemas de referencia que violen los límites establecidos por la escala Planck, existen modelos en que las desviaciones ocurren a escalas mayores.

En esta sección vamos a proponer un nuevo procedimiento de polimerización para variables escalares y aplicarlo al caso de un campo escalar acoplado a la gravedad en simetría esférica. La particularidad es que el nuevo procedimiento de polimerización es una transformación canónica no biyectiva sobre las variables de la Relatividad General clásica acopladas a un campo escalar, que no interfiere con la covarianza de la teoría. En principio, esto puede parecer extraño, ya que, si se trata de una transformación canónica, se trata esencialmente de la misma teoría. ¿Cómo podría esto capturar correcciones cuánticas no triviales? La respuesta es que la transformación canónica utilizada no es invertible y, por lo tanto, la teoría resultante no es unitariamente equivalente a la no holonomizada [30, 31, 32]. La transformación canónica conduce a una teoría que puede verse como la teoría semiclásica que surge de una representación no estándar del álgebra de Weyl.

A continuación, veremos que los resultados del análisis del modelo de la sección

(6) no cambian significativamente con la polimerización covariante.

7.1. Relatividad General con simetría esférica

Recordemos que partiendo de la métrica con simetría esférica,

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + A^2 dx^2 + R^2 d\Omega^2 \quad (7.1.1)$$

el hamiltoniano total tiene la forma (6.2.5)

$$\begin{aligned} H_T = \int dx \{ & N^x ((E^x)' K_x - E^\varphi (K_\varphi)' - 8\pi P_\phi \phi') \\ + N \left(& -\frac{E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} - 2\sqrt{E^x} K_\varphi K_x - \frac{K_\varphi^2 E^\varphi}{2\sqrt{E^x}} + \frac{((E^x)')^2}{8\sqrt{E^x} E^\varphi} - \frac{\sqrt{E^x} (E^x)' (E^\varphi)'}{2(E^\varphi)^2} \right. \\ & \left. + \frac{\sqrt{E^x} (E^x)''}{2E^\varphi} + \frac{2\pi P_\phi^2}{\sqrt{E^x} E^\varphi} + \frac{2\pi\sqrt{E^x} E^x (\phi')^2}{E^\varphi} \right) \}. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

El vínculo hamiltoniano y el de difeomorfismos satisfacen el álgebra habitual con funciones de estructura. Esto dificulta la cuantización. Sin embargo, redefiniendo el shift y el lapso según

$$\bar{N}^x = N^x + \frac{2NK_\varphi\sqrt{E^x}}{(E^x)',} \quad (7.1.3)$$

$$\bar{N} = \frac{E^\varphi N}{(E^x)',} \quad (7.1.4)$$

tenemos que el hamiltoniano total es

$$\begin{aligned} H_T = \int dx \{ & \bar{N}^x ((E^x)' K_x - E^\varphi (K_\varphi)' - 8\pi P_\phi \phi') \\ + \bar{N} \left(& \left[\sqrt{E^x} \left(\frac{((E^x)')^2}{4(E^\varphi)^2} - 1 - K_\varphi^2 \right) \right]' - \frac{2K_\varphi\sqrt{E^x}\phi'P_\phi}{E^\varphi} + \right. \\ & \left. + \frac{2\pi(E^x)'P_\phi^2}{\sqrt{E^x}(E^\varphi)^2} + \frac{2\pi\sqrt{E^x}E^x(E^x)'(\phi')^2}{(E^\varphi)^2} \right) \}, \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

donde

$$D = \bar{N}^x [(E^x)' K_x - E^\varphi (K_\varphi)' - 8\pi P_\phi \phi'] \quad (7.1.6)$$

es el vínculo de difeomorfismos y,

$$H = \bar{N} \left(\left[\sqrt{E^x} \left(\frac{((E^x)')^2}{4(E^\varphi)^2} - 1 - K_\varphi^2 \right) \right]' - \frac{2K_\varphi \sqrt{E^x} \phi' P_\phi}{E^\varphi} + \frac{2\pi (E^x)' P_\phi^2}{\sqrt{E^x} (E^\varphi)^2} + \frac{2\pi \sqrt{E^x} E^x (E^x)' (\phi')^2}{(E^\varphi)^2} \right), \quad (7.1.7)$$

es el vínculo hamiltoniano abelianizado. En el caso del vacío, esto allanó el camino hacia la cuantización completa del modelo [9]. Con el campo escalar presente, el término que involucra a la derivada dificulta la abelianización involucrada en promover el álgebra a una versión cuántica consistente. Esto nos llevó anteriormente (en la sección (6) y el artículo correspondiente [1]) a considerar la versión polimerizada de la teoría considerando la misma elección de gauge hecha por Choptuik, $E^x = x^2$ y $K_\varphi = 0$, lo que conduce a una teoría reducida en la que sólo es necesario polimerizar el campo escalar. Al seguir este procedimiento de cuantización cabe preguntarse si las diferentes elecciones de gauge y polimerizaciones conducirán a una teoría cuántica equivalente; ese debería ser el caso, al menos en la región exterior al agujero negro, donde las desviaciones cuánticas son muy pequeñas.

7.2. Nueva polimerización covariante

En el nuevo enfoque, aplicaremos las siguientes transformaciones canónicas para el campo escalar, ϕ , la curvatura extrínseca, K_ϕ , y sus momentos canónicos, P_ϕ y la tríada E^φ , respectivamente:

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow \frac{\sin(k\varphi)}{k} & P_\phi &\rightarrow \frac{P_\phi}{\cos(k\varphi)} \\ K_\phi &\rightarrow \frac{\sin(\rho K_\phi)}{\rho} & E^\varphi &\rightarrow \frac{E^\varphi}{\cos(\rho K_\phi)} \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

Aquí, k y ρ son los parámetros de polimerización para el campo escalar y la curvatura extrínseca, respectivamente. Cabe destacar que la transformación canónica no es biyectiva en todo el espacio de fases, por lo tanto, es propiamente una transformación

canónica siempre que ρK_φ sea menor que $\pi/2$. Esto permite el surgimiento de una nueva física si se consideran rangos en los que la transformación no es invertible.

Aplicando la transformación canónica (7.2.1) tenemos que el hamiltoniano pasa a ser

$$\begin{aligned}
H(\bar{N}) = & \frac{\bar{N}\sqrt{E^x}(E^x)'(E^x)''\cos^2(\rho K_\varphi)}{2(E^\varphi)^2} + \frac{\bar{N}((E^x)')^3\cos^2(\rho K_\varphi)}{8(E^\varphi)^2\sqrt{E^x}} \\
& - \frac{\bar{N}\sqrt{E^x}((E^x)')^2(E^\varphi)'\cos^2(\rho K_\varphi)}{2(E^\varphi)^3} - \frac{\bar{N}\sqrt{E^x}((E^x)')^2\rho(K_\varphi)'\sin(\rho K_\varphi)\cos(\rho K_\varphi)}{2(E^\varphi)^2} \\
& - \frac{\bar{N}(E^x)'}{2\sqrt{E^x}}\left(1 + \frac{\sin^2(\rho K_\varphi)}{\rho^2}\right) - \frac{2\bar{N}\sqrt{E^x}\sin(\rho K_\varphi)\cos(\rho K_\varphi)(K_\varphi)'}{\rho} \\
& - \frac{2\bar{N}\sin(\rho K_\varphi)\cos(\rho K_\varphi)\sqrt{E^x}P_\varphi\varphi'}{\rho E^\varphi} + \frac{2\pi\bar{N}(E^x)'\cos^2(\rho K_\varphi)P_\varphi^2}{\sqrt{E^x}(E^\varphi)^2\cos^2(k\varphi)} \\
& + \frac{2\pi\bar{N}\sqrt{E^x}E^x(E^x)'(\varphi')^2\cos^2(k\varphi)\cos^2(\rho K_\varphi)}{(E^\varphi)^2}
\end{aligned} \tag{7.2.2}$$

El vínculo de difeomorfismo permanece invariante, por lo tanto, tampoco varía su álgebra con sí mismo, ni con el hamiltoniano. Además, se puede comprobar que el hamiltoniano sigue siendo abeliano, ya que conmuta consigo mismo,

$$[H(\bar{N}(x)), H(\bar{M}(y))] \approx 0. \tag{7.2.3}$$

La teoría resultante, por lo tanto, mantiene su álgebra de vínculos.

7.3. Relación con otros enfoques de polimerización

Para hacer una comparación confiable del nuevo enfoque con la polimerización estudiada en la sección (6), utilizaremos las mismas coordenadas (de Schwarzschild), las habituales para el exterior del agujero negro ($E^x = x^2$), más la condición adicional en la curvatura extrínseca ($K_\varphi = 0$). Una vez fijado el gauge, el hamiltoniano (7.2.2) toma la forma

$$H = N \left\{ \frac{3x}{2E^\varphi} - \frac{E^\varphi}{2x} - \frac{x^2 (E^\varphi)'}{(E^\varphi)^2} + \frac{2\pi}{E^\varphi} \left(\frac{P_\varphi^2}{x \cos^2(k\varphi)} + x^3 (\varphi' \cos(k\varphi))^2 \right) \right\}. \quad (7.3.1)$$

Análogamente a lo realizado en la sección (6) podemos calcular las ecuaciones para el campo escalar y su momento canónico conjugado.

$$\dot{\varphi} = \{\varphi(y), H(x)\} = \frac{4\pi N P_\varphi}{E^\varphi x \cos^2(k\varphi)} \quad (7.3.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_\varphi = \{P_\varphi(y), H(x)\} &= \left\{ P_\varphi(y), \left[\frac{2\pi N}{E^\varphi} \frac{P_\varphi^2}{x \cos^2(k\varphi(x))} + \frac{2\pi N}{E^\varphi} x^3 \left(\left(\frac{\sin(k\varphi)}{k} \right)' \right)^2 \right] \right\} \\ &= -\frac{4\pi N P_\varphi^2}{E^\varphi x} \frac{k \sin(k\varphi)}{\cos^3(k\varphi)} + \frac{4\pi x^2}{E^\varphi} \left[\left(\frac{3NE^\varphi - xN(E^\varphi)' + N'E^\varphi x}{E^\varphi} \right) \varphi' \cos^2(k\varphi) \right. \\ &\quad \left. + xN\varphi'' \cos^2(k\varphi) - xNk(\varphi')^2 \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) \right] \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

Entonces, el sistema de ecuaciones semiclásicas del modelo de Choptuik con la nueva polimerización (7.2.1), toman la forma:

$$\frac{N'}{N} - \frac{(E^\varphi)'}{E^\varphi} + \frac{2}{x} - \frac{(E^\varphi)^2}{x^3} = 0, \quad (7.3.4)$$

$$\frac{(E^\varphi)'}{E^\varphi} - \frac{3}{2x} + \frac{(E^\varphi)^2}{2x^3} - 2\pi x \left(\frac{(P_\varphi)^2}{x^4 \cos^2(k\varphi)} + (\varphi')^2 \cos^2(k\varphi) \right) = 0, \quad (7.3.5)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{4\pi N P_\varphi}{E^\varphi x \cos^2(k\varphi)}, \quad (7.3.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_\varphi = & -\frac{4\pi N P_\varphi^2 k \sin(k\varphi)}{E^\varphi x \cos^3(k\varphi)} + \frac{4\pi x^2}{E^\varphi} \left[-x N k (\varphi')^2 \cos(k\varphi) \sin(k\varphi) \right. \\ & \left. + \left(\frac{3N E^\varphi - xN (E^\varphi)' + N' E^\varphi x}{E^\varphi} \right) \varphi' \cos^2(k\varphi) + xN \varphi'' \cos^2(k\varphi) \right]. \end{aligned} \quad (7.3.7)$$

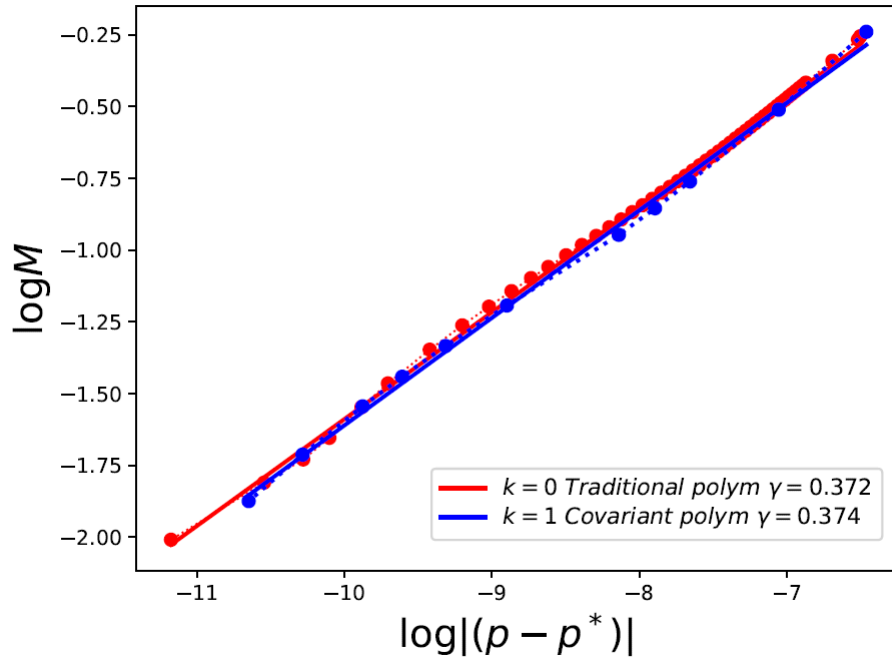


Figura 7.3.1: La escala de masa del agujero negro observado por primera vez por Choptuik [3] para el colapso gravitacional de un campo escalar sin masa esféricamente simétrico. Aquí lo representamos para la teoría clásica ($k = 0$), en color rojo, y para la polimerización covariante, en azul, con un valor exageradamente grande del parámetro de polimerización, $k = 1$, para hacer más visibles las posibles discrepancias con la teoría clásica. Los círculos representan los datos numéricos y las líneas continuas representan un ajuste por mínimos cuadrados.

Comparando con la polimerización más tradicional, considerada en (6), las últimas tres ecuaciones están modificadas. El primer término en (7.3.7) es nuevo y los cosenos en el denominador de (7.3.5) y (7.3.6) estaban ausentes. Estos términos pueden hacer una diferencia potencialmente significativa en algunas regiones del espacio

de fases. Para intentar probar esto, realizamos simulaciones numéricas como las de la sección anterior para determinar la ley de escala de la masa del agujero negro en función de un parámetro en los datos iniciales. La figura (7.3.1) muestra la comparación de la polimerización covariante para el valor $k = 1$ (anormalmente grande del parámetro de polimerización) respecto de la teoría clásica. Como puede verse, la ley de escala de masa para polimerización covariante coincide con la Relatividad General ($k = 0$). Por supuesto, dado que el fenómeno Choptuik está determinado por la geometría exterior del agujero negro donde los campos son débiles, quizás no sea sorprendente que la polimerización produzca el mismo resultado. Por otro lado, proporciona evidencia de que los resultados encontrados en el enfoque anterior no tienen una dependencia significativa de la foliación, ya que difieren poco de la nueva polimerización que no depende de la misma. Cabe señalar que, para agujeros negros pequeños, los fenómenos estudiados por Choptuik involucran regiones de gran curvatura inmediatamente fuera del horizonte y, por lo tanto, los resultados pueden variar con la polimerización. En efecto es esperable que en regiones altamente cuánticas, con $k\varphi \sim \pi/2$ (que no son alcanzadas en los casos aquí analizados) se produzcan desvíos importantes de la teoría covariante clásica.

Capítulo 8

Discusión y Conclusiones

Hemos estudiado la criticalidad en el colapso de un campo escalar sin masa, mínimamente acoplado a la gravedad, en una versión semiclásica de la gravedad cuántica de lazos y en el caso esféricamente simétrico. Encontramos que los resultados para la escala de masa del agujero negro concuerdan con los de la Relatividad General clásica, con una dependencia muy leve respecto al parámetro de polimerización y sin la existencia de un valor mínimo de dicha masa.

Hemos mostrado que en el exponente de la ley de potencia también están presentes los "wiggles" observados por Hod y Piran. El único efecto de la polimerización es alterar ligeramente los valores de la escala exponencial de la masa. No detectamos, dentro de la precisión numérica, la dependencia del período de la autosimilitud discreta respecto al parámetro de polimerización. Esto proporciona evidencia sólida de la existencia de una solución crítica en el régimen semiclásico y que la solución aparenta tener la misma periodicidad que para el caso de la Relatividad General clásica.

Finalmente, introducimos una nueva polimerización para campos escalares acoplada a la gravedad. Esto puede verse como una representación no estándar del álgebra de Weyl diferente a la que suele considerarse en Gravedad Cuántica de Lazos acoplada a campos escalares. Tiene la ventaja de que es una transformación canónica de las variables originales, lo cual significa que conserva el álgebra de vínculos y la covarianza de la teoría, algo que las elecciones previas no hacían. Dado que la transformación no es invertible en todo el espacio de fases, esta permite tener los

fenómenos novedosos habituales que introducen las cuantizaciones de lazos en regiones donde se espera que la Relatividad General no sea válida; por ejemplo, cerca de singularidades. En particular, admite una representación en un espacio de Hilbert definido en términos de la medida de Ashtekar-Lewandowski [27].

Aunque solamente hemos explorado las implicaciones de la polimerización covariante en el contexto de campos escalares esféricamente simétricos, es posible que se pueda encontrar un análogo para la teoría completa. Esto requerirá más investigaciones. Es normal cuestionarse sobre la resolución de la singularidad con la polimerización propuesta. Parece que los mismos ingredientes que han llevado a la resolución de la singularidad en la gravedad cuántica de lazos con simetría esférica en polimerizaciones anteriores (las cuantizaciones μ_0 [9] y $\bar{\mu}$ [10]) están presentes en este enfoque. Es decir, que el observable de Dirac parametrizado correspondiente a la métrica se vuelve complejo para radios menores que un radio dado. Esto requiere eliminar puntos de la red de espín en la región donde solía estar la singularidad clásica para garantizar que la métrica sea autoadjunta. En el espacio de fases, se tiene esencialmente un "rebote" en la superficie en la que K_φ es máximo y la singularidad no puede ser alcanzada. Nos planteamos como trabajo a futuro realizar un análisis exhaustivo de este punto. A partir de todo esto, surge la necesidad de estudiar el régimen subcrítico cercano a la criticalidad, lo que permite un acercamiento máximo a lo que sería una singularidad desnuda y, por consiguiente, donde es esperable que los efectos de la polimerización se manifiesten en las regiones exteriores del agujero negro.

Apéndice A

Teoría de grupos

La teoría de grupos tiene muchas aplicaciones en el campo de la física, y es potencialmente aplicable en situaciones caracterizadas por la simetría. La utilización de la teoría de grupos en la Mecánica Cuántica fue propuesta en la década de los años 30, casi simultáneamente, por Wigner y Weyl.

A.1. Definición y clases de grupos

Se llama grupo (G, \circ) a cualquier conjunto G de transformaciones de simetría que tiene definida una operación binaria interna ' \circ ' que cumple las siguientes propiedades:

1. *Asociativa*:

$$\forall a, b, c \in G : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c. \quad (\text{A.1.1})$$

2. Existe un elemento *neutro*, $e \in G$, tal que:

$$e \circ a = a \circ e = a. \quad (\text{A.1.2})$$

3. Todo elemento a posee un *simétrico*, a^{-1} , tal que:

$$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e. \quad (\text{A.1.3})$$

Cuando un subconjunto, H , de G conserva las propiedades de grupo con la misma

operación se denomina *subgrupo* de G . En todo grupo hay dos subgrupos, llamados *impropios*, que son él mismo y la identidad.

Se dice que un grupo es *abeliano* o *conmutativo* cuando verifica, además, la propiedad conmutativa:

$$a \circ b = b \circ a, \quad \forall a, b \in G. \quad (\text{A.1.4})$$

Se puede medir el grado de conmutatividad de un grupo mediante la operación de conjugación: g' es el conjugado de g si, y sólo si, $\exists h \in G$ tal que $g' = hgh^{-1}$, es decir, $g'h = hg$.

Claramente, si el grupo es conmutativo todos sus elementos coinciden con sus conjugados y sólo existirá una clase de equivalencia de conjugación.

Un subgrupo, H , de G se denomina *normal*, *invariante* o *autoconjugado* si sus conjugados con cualquier elemento de G permanecen en H (todo subgrupo de un grupo abeliano es normal). Si un grupo sólo tiene los subgrupos normales propios se denomina *simple*. Por tanto, un grupo será simple si no posee subgrupos normales propios. Diremos que un grupo es *semisimple* si no posee subgrupos normales abelianos propios.

El grupo se llamará *finito* si tiene un número finito de elementos. A este número se le llama orden del grupo y se denota como $|G|$. En caso contrario hablaremos de un grupo *infinito*.

El grupo infinito más común es el conjunto de matrices invertibles de orden n sobre un cuerpo K , que normalmente es el grupo de los reales o los complejos, tomando como operación interna la multiplicación entre matrices. Hay que tener en cuenta que el orden aquí no es el orden del grupo sino el de las matrices que lo representan. Este grupo se conoce con el nombre de *grupo general lineal de orden n* :

$$GL(n, \mathbb{K}) = (\{A = \{a_{ij}\} / \det(A) \neq 0, a_{ij} \in \mathbb{K}\}, \cdot). \quad (\text{A.1.5})$$

Un grupo H es *homeomorfo* a otro grupo G si existe una correspondencia entre ambos que conserve la operación de grupo. Con esta condición, dos elementos del grupo inicial pueden ir al mismo final pero la identidad se transformará en identidad en el otro grupo. Si este mapeo es biyectivo se denominará *isomorfismo* de grupos.

Si el isomorfismo se realiza sobre el mismo grupo se llamará *automorfismo*.

Generadores Para los grupos finitos se puede definir un subconjunto, S , denominado *sistema de generadores*, consistente en un conjunto de elementos del grupo tales que sus productos (o los productos de sus inversos) generan el grupo. El conjunto generado se denota de la siguiente forma:

$$\langle S \rangle = \{g_1 g_2 \dots g_r / g_i \in S \text{ ó } g_i^{-1} \in S\}. \quad (\text{A.1.6})$$

A.2. Grupos de Lie

Para los grupos infinitos, podemos utilizar la estrategia de etiquetar sus elementos g_a , o bien, $g(a)$, entendiendo a como un conjunto de parámetros que viven en un espacio topológico. De esta forma, podremos hacer una correspondencia entre ese espacio y los elementos del grupo, y muchas veces identificar ambos. Se dice que estos parámetros son *esenciales*, es decir, caracterizan completamente a cada elemento del grupo.

Dentro de los grupos infinitos encontramos los *grupos continuos*, que aseguran que si $g(a)g(b) = g(c)$, entonces c debe ser una función continua en los parámetros a y b .

A su vez, dentro de los grupos continuos hay un conjunto de grupos denominados *grupos de Lie*, en los cuales la función de los parámetros es analítica.

Un grupo continuo con un número de parámetros finito a veces se denomina *grupo continuo finito* y el número de parámetros esenciales es el *orden* del grupo.

No hay que confundir el orden del grupo de Lie con la dimensión del espacio donde viven sus parámetros. Por ejemplo, el grupo $GL(n, \mathbb{R})$ actúa sobre un espacio de dimensión n pero su orden es n^2 (el número de elementos de sus matrices), por tanto, se puede decir que vive en el espacio \mathbb{R}^{n^2} . En el caso de que el cuerpo fuera \mathbb{C} , el orden del grupo sería $2n^2$. Este orden se puede restringir en el caso de los subgrupos. Por ejemplo, en el subgrupo de *matrices unitarias*,

$$U(n) = \{U \in GL(n, \mathbb{C}) / U^\dagger = U^{-1}\}, \quad (\text{A.2.1})$$

se tienen las n^2 condiciones

$$U_{ji} = (U^{-1})_{ij} \quad (\text{A.2.2})$$

lo que reduce el número de parámetros esenciales de nuevo a n^2 . Además, si el grupo es *especial*, es decir, las matrices tienen determinante igual a la unidad,

$$SU(n) = \{U \in U(n) / \det(U) = 1\}, \quad (\text{A.2.3})$$

por la condición añadida el orden del grupo se reduce a $n^2 - 1$.

El grupo además será *compacto* si el dominio de variación de sus parámetros es cerrado y acotado. En ese sentido, por ejemplo, el grupo de rotaciones es un grupo compacto (sus parámetros varían en el conjunto $[0, 2\pi]$) mientras que el grupo de traslaciones no lo es.

El grupo de matrices ortogonales, normalmente definido sobre el cuerpo real como

$$O(n) = \{R \in GL(n, \mathbb{R}) / R^t = R^{-1}\}, \quad (\text{A.2.4})$$

y cuyo orden es $n(n-1)/2$, nos da las siguientes condiciones cuando se impone $R^t R = 1$:

$$R_{ij}R_{ik} = \delta_{jk} \quad (\text{A.2.5})$$

(utilizando el convenio de suma de Einstein sobre índices repetidos). Esto representa un conjunto de n^2 ecuaciones algebraicas, lo que implica que el dominio de los parámetros es cerrado. Además, es claro que $|R_{ij}| \leq 1$ (de hecho, $\sum_{ij} R_{ij}^2 = n$), entonces el conjunto es acotado. Por tanto, los grupos ortogonales son compactos.

A.3. Representaciones

Dados dos grupos G y H , decimos que una función $\rho : G \rightarrow H$ es un *homeomorfismo* si

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G. \quad (\text{A.3.1})$$

Esto implica que

$$\rho(1) = 1, \quad (\text{A.3.2})$$

$$\rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}. \quad (\text{A.3.3})$$

Un homeomorfismo inyectivo y sobreyectivo se denomina isomorfismo [113].

Decimos que un grupo G actúa sobre un espacio vectorial V si existe un mapa ρ de G en las transformaciones lineales de V , tal que,

$$\rho(g_1 g_2) v = \rho(g_1) \rho(g_2) v \quad \forall v \in V. \quad (\text{A.3.4})$$

Decimos también que ρ es una *representación* de G en V .

Subespacio invariante Un subespacio V' de un espacio vectorial V es invariante si $\forall v' \in V'$ entonces $\rho(g) v' \in V', \forall g \in G$.

Representación irreducible Una representación es irreducible si tiene como espacios invariantes únicamente al vector nulo y al espacio vectorial.

Representaciones equivalentes Para clasificar las representaciones de grupos necesitamos definir el concepto de representaciones equivalentes. Si tenemos dos representaciones

$$\rho : G \rightarrow GL(V), \quad \rho' : G \rightarrow GL(V'), \quad (\text{A.3.5})$$

decimos que son representaciones equivalentes si existe un mapa lineal inyectivo y sobreyectivo, $T : V \rightarrow V'$ con

$$\rho(g) T = T \rho'(g). \quad (\text{A.3.6})$$

Suma directa de representaciones Si ρ y ρ' son dos representaciones de un grupo G , tal que, $\rho : G \rightarrow GL(V)$, $\rho' : G \rightarrow GL(V')$, definimos la suma, $\rho \oplus \rho'$, como la representación de G en el espacio $V \oplus V'$, dada por:

$$(\rho \oplus \rho')(g)(v, v') = (\rho(g)v, \rho'(g)v'), \quad (\text{A.3.7})$$

$\forall v \in V, v' \in V'$. La suma directa $V \oplus V'$ es el espacio de los pares (v, v') con $v \in V, v' \in V'$.

Producto tensorial de representaciones Otra manera de formar nuevas representaciones es tomar el producto tensorial. Sean ρ y ρ' representaciones en V y V' respectivamente. Definimos el producto tensorial $\rho \otimes \rho'$ de dichas representaciones como la representación de G en el espacio $V \otimes V'$ dada por:

$$(\rho \otimes \rho')(g)(v \otimes v') = \rho(g)v \otimes \rho'(g)v'. \quad (\text{A.3.8})$$

A.4. Álgebra de Lie

Sophus Lie mostró que las principales características de un grupo se pueden deducir de aquellos elementos que difieren infinitesimalmente de la identidad. De este modo a cada grupo de Lie podemos asociarle un *álgebra de Lie*, que captura totalmente la estructura local del grupo.

Siempre es posible reparametrizar el grupo de forma que sus parámetros sean normales, es decir, que el origen de la variedad coincida con la identidad del grupo, $g(a=0) = e$. Es posible incluso hacer la identificación ya mencionada de los elementos del grupo, $g(a)$, con la propia variedad, a . De esta manera se puede pensar un grupo de Lie de orden r como el conjunto de transformaciones:

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_r), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.4.1})$$

donde n representa la dimensión del espacio sobre el que actúa. Podemos reescribir (A.4.1) por simplicidad como

$$x' = f(x, a). \quad (\text{A.4.2})$$

Estas transformaciones, lógicamente, deben cumplir las reglas de los grupos continuos. Como ya mencionamos, si utilizamos parámetros normales se debe cumplir

$$f(x, 0) = x. \quad (\text{A.4.3})$$

Si hacemos una transformación infinitesimal de coordenadas inducida por un cambio de parámetros del grupo, obtenemos:

$$dx = \frac{\partial f(x, 0)}{\partial a} da \equiv u(x) da, \quad (\text{A.4.4})$$

o de forma más general

$$dx_i = \left. \frac{\partial f_i(x, a)}{\partial a_\nu} \right|_{a=0} da_\nu \equiv u_{i\nu}(x) da_\nu, \quad (\text{A.4.5})$$

donde $i = 1, \dots, n$, y el índice griego ν recorre la variación a lo largo de todos los parámetros del grupo hasta r . Si aplicamos esto a cualquier función F de las coordenadas obtenemos

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i = da_\nu \left\{ \frac{\partial f_i(x, 0)}{\partial a_\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \right\} F. \quad (\text{A.4.6})$$

En los grupos de Lie, al término entre llaves solemos llamarlo 'generadores del grupo', y habrá uno por cada parámetro esencial, es decir, se trata de un operador vectorial r -dimensional:

$$X_\nu \equiv u_{i\nu} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \nu = 1, 2, \dots, r \quad (\text{A.4.7})$$

donde la suma recorre las dimensiones de la variedad hasta n . El hecho de llamarlos generadores queda claro en la expresión:

$$g = e + da_\nu X_\nu \quad (\text{A.4.8})$$

que representará el comportamiento del grupo en torno a la identidad en el llamado *espacio tangente* a la variedad diferenciable, que definen sus transformaciones. Este espacio tangente es llamado *álgebra de Lie del grupo* y se trata de un espacio vectorial cuya dimensión es el orden del grupo por definición. Los generadores dependerán de la elección de los parámetros del grupo.

Los elementos conjugados g' respecto de un elemento dado g tendrán la forma:

$$gg'g^{-1} = e + da_\nu g X_\nu g^{-1}, \quad (\text{A.4.9})$$

que corresponderían a un subgrupo que tendrá como generadores:

$$\begin{aligned} X'_\nu &= g X_\nu g^{-1} \cong (e + da_\mu X_\mu) X_\nu (e - da_\rho X_\rho) \\ &= X_\nu + da_\mu (X_\mu X_\nu - X_\nu X_\mu). \end{aligned} \quad (\text{A.4.10})$$

El primer miembro, al ser inducido por una transformación lineal de los parámetros, será una combinación lineal de generadores, y por independencia lineal también se

puede afirmar que lo es el conmutador:

$$[X_\mu, X_\nu] = c_{\mu\nu\lambda}X_\lambda, \quad (\text{A.4.11})$$

donde $c_{\mu\nu\lambda}$ son números complejos llamados *constantes de estructura*. Debido a la independencia lineal se puede afirmar que las constantes de estructura cumplen una ley de anticonmutatividad:

$$[X_\mu, X_\nu] = -[X_\nu, X_\mu] \Rightarrow c_{\mu\nu\lambda} = -c_{\nu\mu\lambda}, \quad (\text{A.4.12})$$

y, asimismo, se cumplirá la *identidad de Jacobi*:

$$[[X_\mu, X_\nu], X_\lambda] + [[X_\lambda, X_\mu], X_\nu] + [[X_\nu, X_\lambda], X_\mu] = 0, \quad (\text{A.4.13})$$

equivalente a

$$c_{\mu\nu\delta}c_{\delta\lambda\sigma} + c_{\lambda\mu\delta}c_{\delta\nu\sigma} + c_{\nu\lambda\delta}c_{\delta\mu\sigma} = 0. \quad (\text{A.4.14})$$

De esta forma, vemos cómo el espacio tangente definido por los generadores del grupo es un álgebra de Lie, pero esta definición se puede ampliar para cualquier espacio vectorial L que verifique las siguientes propiedades:

1. Existe una ley de composición llamada conmutador tal que

$$[L_1, L_2] = -[L_2, L_1] \in \mathcal{L}, \quad (\text{A.4.15})$$

lineal en ambos argumentos.

2. Se cumple la identidad de Jacobi:

$$[[L_1, L_2], L_3] + [[L_3, L_1], L_2] + [[L_2, L_3], L_1] = 0. \quad (\text{A.4.16})$$

Si los conmutadores se anulan, entonces el álgebra es abeliana. Si un subespacio, H , lineal de L es también un álgebra de Lie, diremos que es invariante si para todo $h \in H$ y $l \in L$, se cumple que $[h, l] \in H$. Diremos que H es simple si no tiene subálgebras invariantes propias y semisimple si no tiene subálgebras invariantes propias no abelianas.

Apéndice B

Fibrados y conexiones

B.1. Fibrados

Un fibrado es una estructura que implica un mapa sobreyectivo π , denominado *proyección*, que va desde una variedad E , llamada *espacio total*, a una variedad M , que denominamos *espacio base*. Para cada punto $p \in M$, llamamos fibra de q sobre p al espacio

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\}. \quad (\text{B.1.1})$$

El espacio total es la unión de todas las fibras. Esto se puede aplicar al espacio tangente, TM , de una variedad M :

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M. \quad (\text{B.1.2})$$

La proyección $\pi : TM \rightarrow M$ mapea cada vector tangente $v \in T_p M$ al punto $p \in M$, entonces, la fibra sobre el punto $p \in M$ es el espacio tangente $T_p M$.

TM debe tener la estructura de una variedad, de modo que π sea un mapa suave. Tanto M como $T_p M$ son variedades de dimensión n , entonces, localmente se asemejan a \mathbb{R}^n . Especificar un punto en TM equivale a especificar un punto $p \in M$ con un vector $v \in T_p M$. Por tanto, TM es una variedad de dimensión $2n$ y, localmente, se asemeja a $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Fibrados triviales. Dadas dos variedades M y F , definimos un fibrado trivial sobre M con fibra estándar F al producto cartesiano $E = M \times F$ con mapa de proyección dado por

$$\pi(p, f) = p, \quad (\text{B.1.3})$$

$\forall (p, f) \in M \times F$. En el fibrado trivial $E = M \times F$, la fibra sobre un punto p es

$$E_p = \{p\} \times F. \quad (\text{B.1.4})$$

No solo todas las fibras son difeomórficas de la fibra estándar, sino que hay un difeomorfismo 'canónico' obvio entre cada fibra y F , que envía $(p, f) \in E_p$ a $f \in F$. Esta propiedad es especial para fibrados triviales.

Morfismos entre fibrados Supongamos dos fibrados, $\pi : E \rightarrow M$ y $\pi' : E' \rightarrow M'$. Un *morfismo* entre ambos fibrados es un mapa $\psi : E \rightarrow E'$ junto con otro mapa $\phi : M \rightarrow M'$, tal que ψ mapea cada fibra E_p en la fibra $E'_{\phi(p)}$. Decimos que este morfismo es un *isomorfismo* si tanto ϕ como ψ son difeomorfismos.

Restricción de un fibrado. Dado un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ y una subvariedad $S \subseteq M$, definimos la restricción de π a S :

$$E|_S = \{q \in E : \pi(q) \in S\}. \quad (\text{B.1.5})$$

Fibrados localmente triviales Un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ es localmente trivial con fibra estándar F si para cada punto $p \in M$ existe un entorno U de p y un isomorfismo

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times F \quad (\text{B.1.6})$$

que envía cada fibra E_p a $\{p\} \times F$. Decimos que ϕ es una *trivialización local*.

Fibrados vectoriales Un fibrado vectorial real de dimensión n es un fibrado localmente trivial: $\pi : E \rightarrow M$, tal que, cada fibra E_p es un espacio vectorial de dimensión n . Además, para cada punto $p \in M$ hay un entorno U de p y una trivialización local,

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.1.7})$$

que mapea linealmente cada fibra E_p a $\{p\} \times \mathbb{R}^n$.

Sección de un fibrado Decimos que s es una sección de un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ si es una función $s : M \rightarrow E$ tal que, para cada punto $p \in M$, $s(p) \in E_p$.

G-fibrados Sea M una variedad de dimensión n y $\{U_\alpha\}$ un conjunto de abiertos que cubren M . Sea V un espacio vectorial y ρ una representación de un grupo G en V . A partir de la unión de los fibrados triviales $U_\alpha \times V$ podemos formar un fibrado vectorial $\pi : E \rightarrow M$ utilizando funciones de transición $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$. Para obtener E comenzamos con la unión disjunta

$$\bigcup_{\alpha} U_{\alpha} \times V,$$

e identificamos dos puntos $(p, v) \in U_\alpha \times V$ y $(p, v') \in U_\beta \times V$ si

$$v = g_{\alpha\beta} v'. \quad (\text{B.1.8})$$

Las funciones de transición deben cumplir las siguientes condiciones para que este procedimiento sea consistente: $g_{\alpha\alpha} = 1$ en U_α y $g_{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g_{\gamma\alpha} = 1$ en $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Utilizaremos la notación¹, $[p, v]_\alpha$, para nombrar al punto de E correspondiente a $(p, v) \in U_\alpha \times V$. Definimos la proyección $\pi : E \rightarrow V$ como

$$\pi [p, v]_\alpha = p. \quad (\text{B.1.9})$$

La fibra E_p es, por lo tanto, el conjunto de todos los puntos en E de la forma $[p, v]_\alpha$.

Si las condiciones de consistencia sobre las funciones de transición se mantienen, entonces $\pi : E \rightarrow V$ es efectivamente un fibrado vectorial. Llamamos a este tipo de fibrado vectorial un *G-fibrado*. El grupo G es llamado *Grupo de Gauge* del fibrado y V es la *fibra estándar*.

¹No confundir los paréntesis rectos con los corchetes de Lie.

B.2. Transformaciones gauge

Habiendo introducido los fibrados, es momento de introducir los grupos de simetrías naturales de los fibrados vectoriales. El grupo básico de este tipo de simetrías es llamado *Transformaciones Gauge*.

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial. Una transformación gauge es esencialmente una transformación lineal, inyectiva y sobreyectiva, de la fibra E_p , que varía suavemente con el punto $p \in M$. En caso que E sea un G -fibrado, demandaremos que la transformación lineal viva en G .

Endomorfismo Dado un espacio vectorial V , las transformaciones lineales de V en sí mismo son llamadas *endomorfismos*. Denotamos $\text{End}(V)$ al conjunto de todos los endomorfismos de V . Se puede verificar que $\text{End}(V)$ es un espacio vectorial, donde definimos:

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v) \quad (\text{B.2.1})$$

y

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v), \quad (\text{B.2.2})$$

para un escalar α y $S, T \in \text{End}(V)$. Nótese que $\text{End}(V)$ también es un álgebra, con producto definido por

$$(ST)(v) = S(T(v)). \quad (\text{B.2.3})$$

Por ejemplo, $\text{End}(\mathbb{R}^n)$ es el álgebra de las matrices reales $n \times n$.

Se puede verificar que $\text{End}(V)$ es isomorfo a $V \otimes V^*$, siendo V^* el espacio dual de V . Tomemos el elemento $v \otimes f \in V \otimes V^*$ y asignemosle la función

$$x \rightarrow f(x)v, \quad \forall x \in V. \quad (\text{B.2.4})$$

En términos de bases, este isomorfismo está dado por:

$$e^i \otimes e_j \rightarrow e_j^i. \quad (\text{B.2.5})$$

Entonces, dado un fibrado E sobre una variedad M podemos definir el fibrado de endomorfismos como el fibrado correspondiente a $\text{End}(E)$ y lo denotamos $E \otimes E^*$.

Una sección T de $\text{End}(E)$ actúa sobre cualquier sección s de E , dando como resultado una sección Ts de E de la siguiente manera:

$$(Ts)(p) = T(p) + s(p). \quad (\text{B.2.6})$$

Por lo tanto, T determina una función $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$, donde $\Gamma(E)$ es el conjunto de todas las secciones de E y es $C^\infty(M)$ -lineal:

$$T(fs) = fT(s). \quad (\text{B.2.7})$$

En una Teoría de Campos Gauge, los campos son descritos por secciones de G -fibrados, y las leyes físicas son ecuaciones diferenciales, tales que, si la sección s es solución de la misma, también lo es gs para cualquier $g \in G$.

B.3. Conexiones

Dado un fibrado E sobre una variedad M , una conexión D asigna a cada campo vectorial v en M una función $D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$ que satisface las siguientes propiedades:

$$D_v(\alpha s) = \alpha D_v s, \quad (\text{B.3.1})$$

$$D_v(s + t) = D_v s + D_v t, \quad (\text{B.3.2})$$

$$D_v(fs) = v(f)s + fD_v s \quad (\text{B.3.3})$$

$$D_{v+\omega} s = D_v s + D_\omega s \quad (\text{B.3.4})$$

$$D_{fv} s = fD_v s, \quad (\text{B.3.5})$$

$\forall v, \omega \in \text{Vect}(M), s, t \in \Gamma(E), f \in C^\infty(M)$ y α escalar. $D_v s$ es la *derivada covariante* de s en la dirección de v .

Dada una base $\{\partial_\mu\}$ de $\text{Vect}(M)$ y una base de secciones $\{e_j\}$, expresamos $D_\mu e_j$ como una combinación lineal de secciones:

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i. \quad (\text{B.3.6})$$

Denominamos a las funciones $A_{\mu j}^i$ *componentes del vector potencial*. Podemos definir la derivada covariante de una sección s de un fibrado E sobre una variedad U en la dirección de un campo vectorial v , como:

$$\begin{aligned} D_v s &= D_{v^\mu \partial_\mu} s = v^\mu D_\mu s = v^\mu D_\mu (s^i e_i) \\ &= v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i. \end{aligned} \quad (\text{B.3.7})$$

Podemos pensar el vector potencial como una 1-forma en U que toma valores en $\text{End}(E)$, es decir, una sección del fibrado

$$\text{End}(E|_U) \otimes T^*U. \quad (\text{B.3.8})$$

En términos de las coordenadas expresamos el vector potencial como

$$A = A_{\mu j}^i e_i \otimes e^j \otimes dx^\mu. \quad (\text{B.3.9})$$

Además, si $D^0 = v(s^j) e_i$ es una conexión en $E|_U$, llamada *conexión estándar plana*, cualquier conexión se puede escribir como

$$D = D^0 + A, \quad (\text{B.3.10})$$

entonces,

$$D_v s = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i = (v(s^i) + A_{\mu j}^i v^\mu s^j) e_i = D_v^0 s + A(v) s. \quad (\text{B.3.11})$$

Decimos que D es una G -conexión si, en coordenadas locales, las componentes $A_\mu \in \text{End}(E)$ viven en el álgebra de Lie \mathfrak{g} del grupo G del G -fibrado.

Apéndice C

Teorías de Yang-Mills

Las teorías de Yang-Mills son una generalización de la teoría electromagnética de Maxwell y describen con gran éxito las interacciones débil y fuerte del Modelo Estándar de partículas. Estas teorías se basan en una invariancia de gauge local, en el caso del electromagnetismo descrita por el grupo $U(1)$, y en la Relatividad General descrita en términos de las variables de Ashtekar, que responde a un gauge $SU(2)$. Un elemento, A_μ , del álgebra (análogo al potencial vector en electromagnetismo) puede escribirse como una combinación lineal de los elementos de la base:

$$A_a = \sum_{i=1}^3 A_a^i \sigma^i, \quad (\text{C.0.1})$$

siendo A_μ^i las componentes en la base y σ^i las matrices de Pauli¹ generadoras del álgebra $\mathfrak{su}(2)$ (tomando la exponencial de las matrices se obtiene el grupo $SU(2)$). A partir del potencial vector, se define la derivada covariante² asociada a la teoría de Yang-Mills, como

$$D_a \equiv \partial_a - ig\sigma^i A_a^i, \quad (\text{C.0.2})$$

donde g es la constante de acoplamiento. Las matrices que forman la base del álgebra, satisfacen las siguientes relaciones de conmutación:

$${}^1\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

²En este caso, el hecho de ser covariante refiere a las transformaciones internas del grupo.

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i\epsilon^{ijk}\sigma^k. \quad (\text{C.0.3})$$

Al calcular el conmutador entre derivadas covariantes de Yang-Mills, se obtiene

$$[D_a, D_b] = -igF_{ab}^i\sigma^i, \quad (\text{C.0.4})$$

donde el tensor F_{ab}^i está dado por la expresión

$$F_{ab}^i = \partial_a A_b^i - \partial_b A_a^i + g\epsilon^{ijk}A_a^j A_b^k, \quad (\text{C.0.5})$$

similar al tensor de campo de la teoría de Maxwell.

Apéndice D

Relatividad General acoplada a la materia

Consideremos la Teoría de la Relatividad General acoplada a la materia, en particular, a un campo escalar φ . En espaciotiempo plano, el lagrangiano de un campo escalar es

$$L = - \int d^3x (\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + V(\varphi)). \quad (\text{D.0.1})$$

En el espaciotiempo curvo es necesario hacer explícita la dependencia de la métrica y su determinante en el elemento de volumen, por lo tanto, la expresión de la acción pasa a ser

$$S = \int d^4x (-g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - V(\varphi)) \sqrt{-\det(g)}. \quad (\text{D.0.2})$$

Definiendo el momento canónicamente conjugado del campo escalar de la manera usual, $\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}}$, el lagrangiano puede reescribirse de la siguiente manera

$$L = \int d^3x N \left(\frac{\pi^2}{\sqrt{\det(q)}} + \sqrt{\det(q)} [q^{ab} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + V(\varphi)] \right) + N^a \pi \partial_a \varphi, \quad (\text{D.0.3})$$

donde N y N^a son la función lapso y el vector shift, respectivamente. Finalmente el lagrangiano en términos de las variables de Ashtekar, del campo escalar y de su

momento conjugado es

$$L = \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det(q)}} (\pi^2 + E_i^a E^{bi} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \det(q) V(\varphi)) + N^a \pi \partial_a \varphi. \quad (\text{D.0.4})$$

A partir de la expresión (D.0.4) podemos apreciar la contribución del campo escalar a los vínculos hamiltoniano y de difeomorfismos:

$$H_\varphi(N) = \int d^3x \frac{N}{\sqrt{\det(q)}} (\pi^2 + E_i^a E^{bi} \partial_a \varphi \partial_b \varphi + \det(q) V(\varphi)), \quad (\text{D.0.5})$$

$$C_\varphi(\vec{N}) = \int d^3x N^a \pi \partial_a \varphi. \quad (\text{D.0.6})$$

Estos términos deben ser adicionados a los respectivos vínculos asociados al campo gravitatorio. De esta manera se acopla un campo escalar a la gravedad.

Bibliografía

- [1] F. Benítez, R. Gambini, L. Lehner, S. Liebling and J. Pullin, "Critical collapse of a scalar field in semiclassical loop quantum gravity", *Phys. Rev. Lett.* 124 (2020) no.7, 071301.
- [2] F. Benítez, R. Gambini, S. Liebling and J. Pullin, "Criticality in the collapse of spherically symmetric massless scalar fields in semi-classical loop quantum gravity", *Phys. Rev. D* 104, 024008 (2021).
- [3] M. Choptuik. "Universality and Scaling in Gravitational Collapse of a Massless Scalar Field", *Phys. Rev. Lett.* 70, 9 (1993).
- [4] M. Choptuik. "A study of numerical techniques for radiative problems in general relativity", Ph. D. thesis, The University of British Columbia, 1986.
- [5] C. Gundlach and J. Martin-Garcia, "Critical phenomena in gravitational collapse", *Living Rev. Rel.* 10, 5 (2007).
- [6] V. Husain, "Critical behaviour in quantum gravitational collapse" *Adv. Sci. Lett.* 2, 214 (2009).
- [7] J. Ziprick and G. Kunstatter, "Dynamical Singularity Resolution in Spherically Symmetric Black Hole Formation", *Phys. Rev. D* 80, 024032 (2009).
- [8] D. Christodolou, "A mathematical theory of gravitational collapse" *Commun. Math. Phys.* 105, 337 (1986); 106, 587 (1986); 109, 591 (1987); 109, 613 (1987).
- [9] R. Gambini, J. Olmedo and J. Pullin, "Quantum black holes in Loop Quantum Gravity", *Class. Quant. Grav.* 31, 095009 (2014).

- [10] R. Gambini, J. Olmedo and J. Pullin, "Loop quantum black hole extensions within the improved dynamics", *Front. Astron. Space Sci.* 8:647241 (2021).
- [11] T. Thiemann, "Kinematical Hilbert Spaces for Fermionic and Higgs Quantum Field Theories", *Class. Quant. Grav.* 15, 1487 (1998).
- [12] R. Gambini, J. Pullin and S. Rastgoo, "Quantum scalar field in quantum gravity: the vacuum in the spherically symmetric case", *Class. Quant. Grav.* 26, 215011 (2009).
- [13] W. Kaminski, J. Lewandowski and M. Bobiński, "Background independent quantizations: the scalar field I", *Class. Quant. Grav.* 23, 2761 (2006).
- [14] W. Kaminski, J. Lewandowski and A. Okolow, "Background independent quantizations: the scalar field II" *Class. Quant. Grav.* 23, 5547 (2006).
- [15] A. Ashtekar and P. Singh, "Loop Quantum Cosmology: A Status Report", *Class. Quant. Grav.* 28, 213001 (2011).
- [16] D. Garfinkle, "Scaling of curvature in sub-critical gravitational collapse", *Phys. Rev. D* 56, 3169 (1997).
- [17] [//laplace.physics.ubc.ca/pub/](http://laplace.physics.ubc.ca/pub/)
- [18] R. Gambini and J. Pullin, "Loop quantization of the Schwarzschild black hole", *Phys.Rev.Lett.* 110 (2013) no.21, 211301.
- [19] C. Rovelli and E. Wilson-Ewing, "Why are the effective equations of loop quantum cosmology so accurate?", *Phys. Rev. D* 90, no. 2, 023538 (2014).
- [20] C. Rovelli, "Quantum gravity", Cambridge monographs on mathematical physics (2000).
- [21] A. Ashtekar, T. A. Schilling. "Geometry of Quantum Mechanics", *AIP Conf. Proc.* 342 (1995) 471-478.
- [22] N. Bodendorfer. "An elementary introduction to loop quantum gravity" (2016).

- [23] S. Hod and T. Piran, "Fine-Structure of Choptuik's Mass-Scaling Relation", *Phys. Rev. D* 55, 440 (1997).
- [24] D. Garfinkle and G. C. Duncan, "Scaling of curvature in sub-critical gravitational collapse", *Phys. Rev. D* 58, 064024 (1998).
- [25] C. Gundlach, "Critical phenomena in gravitational collapse" *Living Rev. Rel.* 2, 4 (1999).
- [26] A. Einstein. "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie" (The Foundation of the General Theory of Relativity), *Annalen der Physik* 354 (1916) (7), 769-822.
- [27] A. Ashtekar and J. Lewandowski, "Projective Techniques and Functional Integration", *J. Math. Phys.* 36 (1995).
- [28] A. Corichi, T. Vukasinac and J. A. Zapata, "Polymer quantum mechanics and its continuum limit", *Phys. Rev. D* 76 (2007).
- [29] M. Bojowald, "Black-hole models in loop quantum gravity" *Universe* 6 (2020) no.8, 125.
- [30] P. Kramer, M. Moshinsky, T. Seligman "Non-bijective canonical transformations and their representations in quantum mechanics" In P. Kramer, A. Rieckers (eds) "Group Theoretical Methods in Physics", *Lecture Notes in Physics*, vol 79. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [31] A. Anderson, "Canonical Transformations in Quantum Mechanics", *Annals Phys.* 232 (1994), 292-331.
- [32] J. Deenen, "Non-bijective canonical transformations in quantum mechanics", *J. Phys. A* 14 (1981), L273-L276.
- [33] Sean Carroll, "Spacetime and geometry", University of Chicago.
- [34] R. M. Wald, "General Relativity", University of Chicago Press (1984).
- [35] R. Arnowitt, S. Deser, C. W. Misner. "Gravitation: an introduction to current research". John Wiley & Sons Inc. (1962) 227265.

- [36] C. Rovelli, F. Vidotto, "Covariant Loop Quantum Gravity: An elementary introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory", Cambridge University Press (2014).
- [37] A. Ashtekar. "New Hamiltonian formulation of general relativity", Phys. Rev. D 36 (1987) 1587-1602.
- [38] A. Ashtekar "New variables for classical and quantum gravity". Phys. Rev. Lett., 57:2244-2247 (1986).
- [39] Dah-Wei Chiou, Wei-Tou Ni, Alf Tang, "Loop quantization of spherically symmetric midisuperspaces and loop quantum geometry of the maximally extended Schwarzschild spacetime" (2013)
- [40] R. Gambini, J. Pullin, "Un primer curso en Gravedad Cuantica de Lazos", Editorial Reverté (2012).
- [41] R. Borissov, R. De Pietri and C. Rovelli, "Matrix Elements of Thiemann's Hamiltonian Constraint in Loop Quantum Gravity", Class. Quantum Grav. 14 2793 (1997).
- [42] P. A. M. Dirac. "The Fundamental Equations of Quantum Mechanics", Proc. Roy. Soc. Lond. A 109 (1925) 642-653.
- [43] B. S. DeWitt. "Quantum Theory of Gravity. I. The Canonical Theory", Phys. Rev. 160 (1967) 1113-1148.
- [44] "Introducción a la Gravedad Cuantica de Lazos", Asier Alonso Bardaj.
- [45] "Quantization of Gauge Systems", Henneaux & Teitelboim.
- [46] J. Bekenstein "Black holes and entropy", Phys.Rev. D 7 (1973) 2333-2346.
- [47] J. Engle. "Spin Foams" (2013).
- [48] T. Thiemann. "Modern Canonical Quantum General Relativity", Cambridge University Press (2007).

- [49] H. Nicolai, K. Peeters, M. Zamaklar. "Loop quantum gravity: an outside view", *Class. Quant. Grav.* 22 (2005) R193.
- [50] N. Bodendorfer. "An elementary introduction to loop quantum gravity" (2016).
- [51] J. M. Bardeen and T. Piran "General relativistic axisymmetric rotating systems coordinates and equations", *Phys Rep* 96 (1983), 205-250.
- [52] J. M. Berger, D. M. Chitre, V. E. Moncrief and Y. Nutku, "Hamiltonian formulation of spherically symmetric gravitational fields" *Phys. Rev. D* 5 (1972), 2467-2470.
- [53] Berger & Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations" (1984) *J. Comp. Phys.* 53, 484-512.
- [54] D. R. Brill "General relativity: Selected topics of current interest", *Supp. Nuovo Cimento* 2 (1964), 1-56.
- [55] J. Centrella, "Interacting gravitational shocks in vacuum plane-symmetric cosmologies", *Astrophys. J.* 241, 1980, 875-885.
- [56] J. Centrella, "Numerical cosmologies", in *The origin and evolution of galaxies*. B. J. T. Jones and J. E. Jones, eds. Boston: D. Reidel, 1983. 41-64.
- [57] J. Centrella and R. A. Matzner, "Plane-Symmetric cosmologies", *Astrophys. J.* 230 (1979), 311-324.
- [58] D. Christodoulou, Ph.D. thesis, Princeton University 1971 (unpublished).
- [59] K. R. Eppley "The numerical evolution of the collision of two black holes", Princeton Univ. Ph.D. thesis, 1975.
- [60] K. R. Eppley "Evolution of time symmetric gravitational waves: initial data and apparent horizons", *Phys. Rev. D.* 16 (1977), 1609-1614.
- [61] K. R. Eppley "Pure gravitational waves", Cambridge University Press, 1979. L. Smarr, ed, 275-291.
- [62] R. Geroch, "Energy extraction", *Ann. NY Acad. Sci.* 224 (1973), 108-117.

- [63] Hawking S. W. and Ellis G. F. R. The large scale structure of space-time. Cambridge University Press, 1973.
- [64] MacCullum M., et al; Schmutzer E., ed. Exact solutions of Einstein's field equations. Cambridge University Press, 1980.
- [65] Mann, Patrick "Applications of the finite element method to general relativity" Oxford PhD thesis, 1982.
- [66] May, M. M. and White R. H. "Hydrodynamic calculations of general relativistic collapse", Phys. Rev. 141 (1966), 1232-1241.
- [67] Nakamura T., "General relativistic collapse of an axially symmetric star leading to the formation of rotating black holes" Prog. Theor. Phys. 65 (1981), 1876-1890.
- [68] Nakamura T., "Numerical relativity" Supp. Prog. Theor. Phys. 70 (1981), 202-214.
- [69] Nakamura T., Maeda K., Miyama S. and Sasaki M., "General relativistic collapse of an axially symmetric star" Prog. Theor. Phys. 63 (1980), 1229-1244.
- [70] Nakamura T., Maeda K., Miyama S. and Sasaki M., "Numerical integration of axially symmetric systems" in Proceedings of the second Marcel Grossmann meeting on general relativity. R. Ruffini, ed. New York: North Holland (1982), 675-677.
- [71] Murchadha, N and York, J. W. "Initial value problem of General Relativity. General formulation and physical interpretation", Phys. Rev. D 10 (1974), 428-436.
- [72] Petrich L. I., Shapiro S. L., Teukolsky A., "Oppenheimer-Snyder collapse with maximal time slicing an isotropic coordinates" Phys. Rev. D 31 (1985), 2459-2469.
- [73] T. Piran, "Numerical codes for cylindrical general Relativistic systems", J. Comp. Phys. 35 (1980), 254-283.

- [74] T. Piran, "Methods of Numerical Relativity", in Gravitational radiation: N. Deruelle and T. Piran, eds. Amsterdam: North Holland, 1983. 203-256.
- [75] T. Piran and R. F. Stark, "Gravitational radiation, Gravitational collapse and Numerical Relativity" (XII Texas Symposium, 1984). Preprint, 1985.
- [76] L. F. Richardson "The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems involving Differential Equations, with an Application to the Stresses in a Masonry Dam" (1910) Phil. Trans. Roy. Soc., 210, 307.
- [77] Shapiro S. L., Teukolsky A. "Gravitational collapse to neutron stars and black holes: computer generation of spherical Spacetimes." *Astrophys J.* 235 (1980). 199-215.
- [78] Shapiro S. L., Teukolsky A. "Relativistic Stellar Dynamics on the computer. Motivation and numerical method" *Astrophys J.* 298 (1986), 35-57.
- [79] Smarr, L. "The structure of General Relativity with a Numerical Illustration: The Collision of Two Black Holes" Univ. of Texas at Austin PhD. thesis, 1975.
- [80] L. Smarr, "Gauge conditions, radiation formulae and the Black Hole collision" in Sources of Gravitational Radiation. L. Smarr, ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 245-274.
- [81] L. Smarr, "Space-times generated by computers: Black Holes with gravitational radiation" *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 302 (1977), 569-604.
- [82] R. F. Stark and T. Piran, "Gravitational wave emission from rotating Gravitational collapse". Preprint, 1985.
- [83] R. F. Stark and T. Piran, "A numerical computation of the Gravitational radiation from rotating gravitational collapse". Fourth Marcel Grossmann meeting on general relativity, june 1985, Rome.
- [84] W. G. Unruh, "Notes on black hole evaporation", *Phys. Rev. D.* 14 (1976), 870-892.

- [85] Wilson J. R. "A numerical Method for relativistic hydrodynamics", in Sources of Gravitational Radiation. L. Smarr, Ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1979. 423-445.
- [86] York, J. W. "Kinematics and Dynamics of General Relativity", in Sources of Gravitational Radiation. Smarr, L. ed. Cambridge University Press, 1979. 83-126.
- [87] York, J. W. and Piran. T. "The initial value problem and beyond", in Space-time and Geometry: The Alfred Schild Lectures. Matzner R. A. and Shepley L. C., eds. Austin: University of Texas Press, 1982. 147-176.
- [88] A. Brandt "Multi-level adaptive solutions to boundary-value problems", Math. Comput. 31, 333 (1977).
- [89] J. Ben Achour, S. Brahma and A. Marciano, "Spherically symmetric sector of self-dual Ashtekar gravity coupled to matter: Anomaly-free algebra of constraints with holonomy corrections", Phys. Rev. D 96, no. 2, 026002 (2017).
- [90] H. M. Haggard and C. Rovelli , "Black to white hole tunneling: An exact classical solution", Int.J.Mod.Phys. A30 (2015) no.28n29, 1545015.
- [91] H. M. Haggard and C. Rovelli, "Quantum-gravity effects outside the horizon spark black to white hole tunneling", Phys.Rev. D92 (2015) no.10, 104020.
- [92] T. De Lorenzo and A. Perez, "Improved Black Hole Fireworks: Asymmetric Black-Hole-to-White-Hole Tunneling Scenario", Phys.Rev. D93 (2016) no.12, 124018.
- [93] C. Barceló, R. Carballo-Rubio and L. Garay, "Black holes turn white fast, otherwise stay black: no half measures", JHEP 1601 (2016) 157.
- [94] C. Barceló, R. Carballo-Rubio, L. Garay and G. Jannes, "The lifetime problem of evaporating black holes: mutiny or resignation", Class. Quant. Grav. 32 (2015) no.3, 035012
- [95] C. Barceló, R. Carballo-Rubio and L. Garay, "Mutiny at the white-hole district", Int. J. Mod. Phys. D23 (2014) no.12, 1442022.

- [96] M. Bojowald, S. Brahma and J. D. Reyes, "Covariance in models of Loop Quantum Gravity: Spherical symmetry", *Phys.Rev. D*92 (2015) no.4, 045043.
- [97] A. Ashtekar and M. Bojowald, "Quantum geometry and the Schwarzschild singularity", *Class.Quant.Grav.* 23 (2006) 391-411.
- [98] C G. Bohmer and K. Vandersloot, "Loop Quantum Dynamics of the Schwarzschild Interior", *Phys.Rev. D*76 (2007) 104030.
- [99] C G. Bohmer and K. Vandersloot, "Stability of the Schwarzschild interior in LQG", *Phys.Rev. D*78 (2008) 067501.
- [100] M. Campiglia, R. Gambini and J. Pullin, "Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces: the interior problem", *AIP Conf.Proc.* 977 (2008) 52-63.
- [101] A. Corichi and P. Singh, "Loop quantization of the Schwarzschild interior revisited", *Class.Quant.Grav.* 33 (2016) no.5, 055006.
- [102] M. Campiglia, R. Gambini and J. Pullin, "Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces", *Class.Quant.Grav.* 24 (2007) 3649-3672.
- [103] R. Gambini and J. Pullin, "Black holes in loop quantum gravity: the complete spacetime", *Phys.Rev.Lett.* 101 (2008) 161301.
- [104] R. Gambini, E. M. Capurro and J. Pullin, "Quantum space-time of a charged black hole", *Phys.Rev. D*91 (2015) no.8, 084006.
- [105] R. Gambini, J. Pullin and S. Rastgoo, "Quantum scalar field in quantum gravity: the vacuum in the spherically symmetric case", *Class.Quant.Grav.* 26 (2009) 215011.
- [106] R. Gambini, J. Pullin and S. Rastgoo, "Quantum scalar field in quantum gravity: the propagator and Lorentz invariance in the spherically symmetric case", *Gen.Rel.Grav.* 43 (2011) 3569-3592.

- [107] M. Campiglia, C. Di Bartolo, R. Gambini, J. Pullin, "Uniform discretizations: A New approach for the quantization of totally constrained systems", *Phys.Rev. D* 74 (2006) 124012.
- [108] N. Alvarez, R. Gambini and J. Pullin, "A local Hamiltonian for spherically symmetric gravity coupled to a scalar field", *Phys.Rev.Lett.* 108 (2012) 051301.
- [109] R. Gambini and J. Pullin, "Spherically symmetric gravity coupled to a scalar field with a local Hamiltonian: the complete initial value problem using metric variables", *Class.Quant.Grav.* 30 (2013) 025012.
- [110] R. Gambini and J. Pullin, "Hawking radiation from a spherical loop quantum gravity black holes", *Class.Quant.Grav.* 31 (2014) 115003.
- [111] R. Gambini and J. Pullin, "A scenario for black hole evaporation on a quantum geometry", *PoS FFP14* (2015) 038.
- [112] R. Gambini and J. Pullin, "Quantum shells in a quantum space-time", *Class.Quant.Grav.* 32 (2015) no.3, 035003.
- [113] J. Baez, J. Muniain, "Gauge Fields, Knots and Gravity".