

TESIS DE MAESTRÍA

Difeomorfismos parcialmente
hiperbólicos de codimensión uno
con foliación central compacta

Por: Santiago Martinchich Rodríguez

Orientador: Rafael Potrie Altieri

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA
PEDECIBA - UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Febrero de 2019

Resumen

El objetivo principal de esta tesis es exponer el siguiente resultado de clasificación para difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con foliación central compacta:

Teorema. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con foliación central compacta \mathcal{W}^c . Supongamos que $\dim(E^u) = 1$. Entonces, a menos de un cubrimiento doble que oriente a E^u , el espacio de hojas M/\mathcal{W}^c es homeomorfo a un toro \mathbb{T}^d y la dinámica $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ inducida por f es topológicamente conjugada a un automorfismo lineal hiperbólico.*

La prueba del mismo se obtiene en dos partes. Por un lado, se prueba de acuerdo a [DMM18] que bajo las hipótesis del teorema el volumen de las hojas de \mathcal{W}^c debe ser uniformemente acotado en M .

Por otro lado, se prueba la tesis del teorema asumiendo que el volumen de \mathcal{W}^c es uniformemente acotado basándose en la demostración que se realiza en [B13].

Abstract

The purpose of this thesis is to present the following classification result for partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliation:

Teorema. *Let $f : M \rightarrow M$ be a partially hyperbolic dynamically coherent diffeomorphism with compact center foliation \mathcal{W}^c . Assume that $\dim(E^u) = 1$. Then, modulo taking an orientable double cover for the bundle E^u , the space of center leaves M/\mathcal{W}^c is homeomorphic to a \mathbb{T}^d torus and the homeomorphism $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ induced by f is topologically conjugate to a hyperbolic automorphism.*

The proof of the theorem is obtained in two steps. First, we prove as in [DMM18] that the hypothesis of the theorem implies that the volume of center leaves is bounded in M .

Second, we prove the thesis of the theorem assuming that the volume of center leaves is bounded in M as it was done in [B13].

Índice

1. Introducción	4
2. Preliminares de parcialmente hiperbólicos	9
3. Skew products y otros ejemplos	11
3.1. Skew products	11
3.2. Otros ejemplos	15
4. Preliminares de teoría de foliaciones	17
4.1. Holonomía	17
4.2. Estabilidad de Reeb	18
4.3. Foliaciones compactas	19
4.4. Holonomías estable e inestable y entornos producto	21
4.4.1. Holonomías estable e inestable	21
4.4.2. Entornos producto	23
5. Compacto implica uniformemente compacto	24
5.1. El conjunto malo es saturado por hojas centro-inestables	24
5.2. Caso no transitivo	28
5.2.1. Construcción del repulsor \mathcal{R}	28
5.2.2. Las hojas centro-estables de \mathcal{R} son completas y tienen holonomía trivial	30
5.2.3. Argumentos para descartar la existencia de \mathcal{R}	33
5.2.4. Un comentario sobre la prueba	36
5.3. Breves comentarios en codimensión arbitraria	39
6. Caso uniformemente compacto	42
6.1. El espacio de hojas centrales	42
6.2. El recurrente por cadenas para la dinámica cociente	44
6.3. Transitividad en el cociente	46
6.4. Holonomía central trivial	47
6.5. Conjugación de la dinámica cociente con un Anosov lineal	48
6.5.1. Dinámica cociente es Anosov topológico	49
6.5.2. Cubrimiento universal es \mathbb{R}^d y el grupo fundamental es abeliano libre	50
6.5.3. Construcción de la conjugación	51

1. Introducción

Un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$ en una variedad cerrada M se dice que es *parcialmente hiperbólico* si el fibrado tangente TM se descompone como la suma de tres subfibrados continuos y Df -invariantes

$$TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u$$

de forma tal que los vectores de E^s son uniformemente contraídos para el futuro, los vectores de E^u son uniformemente contraídos para el pasado y los vectores de E^c poseen un comportamiento intermedio (ver capítulo 2 para una definición precisa).

Los fibrados estable E^s e inestable E^u siempre integran a foliaciones invariantes \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u , respectivamente (ver [HPS77]). Existen ejemplos en que los fibrados $E^s \oplus E^c$ y $E^c \oplus E^u$ no son integrables (ver e.g. [BW08] o [RHRHU16]). Cuando sí integran a foliaciones \mathcal{W}^{cs} y \mathcal{W}^{cu} decimos que el difeomorfismo es *dinámicamente coherente*. En tales casos el fibrado central E^c también es integrable a una foliación \mathcal{W}^c cuyas hojas son las componentes conexas de las intersecciones entre hojas de \mathcal{W}^{cs} y \mathcal{W}^{cu} .

Esta tesis se enmarca en el estudio de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con foliación central \mathcal{W}^c por hojas compactas.

En 1976 D. Sullivan [S76] presentó el primer ejemplo de foliación por hojas compactas con volumen de hoja no uniformemente acotado. Existe una dicotomía especial en el estudio de foliaciones compactas desde entonces. Por un lado, si el volumen de hoja no es uniformemente acotado el espacio de hojas no es Hausdorff y puede tener una estructura particularmente compleja (ver e.g. [E76] y [V77]). Por otro lado, si el volumen de hoja es acotado entonces el espacio de hojas es Hausdorff y tiene estructura natural de “orbifold” considerablemente más sencilla.

C. Pugh formuló las siguientes preguntas (ver [RHRHU07], [G12] y [HP18]):

Preguntas (Pugh). Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliación central compacta \mathcal{W}^c . ¿Se cumple que el volumen de hojas centrales es uniformemente acotado? ¿En caso de serlo, f admite un levantamiento finito $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ que sea un parcialmente hiperbólico skew product?

Con *parcialmente hiperbólico skew product* nos referimos a un difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \rightarrow M$ tal que M es un fibrado $p : M \rightarrow N$ cuyas fibras son las hojas de la foliación central de f y tal que existe $g : N \rightarrow N$ Anosov

(diferenciable o continuo) tal que $p \circ f = g \circ p$. Ver el capítulo 3 para más detalles sobre este tipo de ejemplos.

Avances en la dirección de una respuesta afirmativa a ambas preguntas de Pugh han sido obtenidos en [BW05], [G12], [B13], [C15], [BB16] y [DMM18]. En particular, los únicos ejemplos conocidos de parcialmente hiperbólicos con foliación central compacta siguen siendo, a menos de cubrimiento finito, parcialmente hiperbólicos skew product.

En [BW05] Bonatti y Wilkinson estudian parcialmente hiperbólicos transitivos en dimensión 3. Uno de sus objetivos era investigar la posibilidad de construir nuevos ejemplos además de los ya conocidos. Como consecuencia de las obstrucciones que encuentran se obtiene:

Teorema ([BW05]). *Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico transitivo con foliación central compacta \mathcal{W}^c en M una 3-variedad. Entonces f es, a menos de cubrimiento finito, un parcialmente hiperbólico skew product.*

El teorema anterior se generaliza al caso en que los fibrados estable e inestable son unidimensionales, sin restricción en la dimensión del fibrado central. Esto fue hecho, independientemente, por Bohnet, Carrasco y Gogolev:

Teorema ([C15]/[B13]/[G12]). *Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliación central compacta \mathcal{W}^c tal que $\dim(E^s) = \dim(E^u) = 1$. Entonces f es, a menos de cubrimiento finito, un parcialmente hiperbólico skew product.*

En [G12, Main Theorem] Gogolev también generaliza parte del enunciado anterior encontrando otras condiciones bajo las que toda foliación central compacta tiene necesariamente volumen de hoja uniformemente acotado. Para una exposición de este resultado recomendamos la monografía de De Martino [DM17]:

Teorema ([G12]). *Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con foliación central compacta \mathcal{W}^c . Supongamos que $\dim(E^c) = 1$, $\dim(E^s) \leq 2$ y $\dim(E^u) \leq 2$. Entonces el volumen (longitud) de hoja central es uniformemente acotado en M .*

Asumiendo que la foliación central \mathcal{W}^c es uniformemente compacta, Bohnet y Bonatti en [BB16] prueban varias propiedades relevantes que valen en general: coherencia dinámica del sistema [BB16, Theorem 1], propiedad de “shadowing”

en el espacio de hojas [BB16, Theorem 2] (ver sección 6.3), “plaque expansivity” [BB16, Theorem 3] y como consecuencia de esto último que (f, \mathcal{W}^c) es C^1 -estructuralmente estable en el sentido de [HPS77].

Si bien ninguna de las dos preguntas de Pugh ha podido ser respondida en general, sí es el caso cuando el fibrado estable o inestable es unidimensional y el sistema es dinámicamente coherente. La exposición de dichos resultados es el tema central de este trabajo.

Un conocido teorema de clasificación en sistemas dinámicos, ver [F70] y [N70], versa:

Teorema (Franks-Newhouse). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov tal que $\dim(E^u) = 1$. Entonces M es homeomorfa a un toro \mathbb{T}^d y f es topológicamente conjugado a un automorfismo lineal hiperbólico.*

En lugar de puntos consideremos hojas compactas de una foliación. El teorema que desarrollaremos será también, en este sentido, una generalización del teorema de Franks-Newhouse.

Notar que cuando $\dim(E^s) \geq 2$ y $\dim(E^u) \geq 2$ no mucho se sabe respecto a una posible clasificación de difeomorfismos de Anosov (ver e.g. la monografía de Camargo [C18]).

El objetivo es entonces probar el siguiente teorema.

Teorema principal. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con foliación central compacta \mathcal{W}^c . Supongamos que $\dim(E^u) = 1$. Entonces, a menos de un cubrimiento doble que oriente a E^u , el espacio de hojas M/\mathcal{W}^c es homeomorfo a un toro \mathbb{T}^d y la dinámica $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ inducida por f es topológicamente conjugada a un automorfismo lineal hiperbólico.*

Observar que si en lugar de $\dim(E^u) = 1$ se tiene que $\dim(E^s) = 1$ entonces todos los resultados son válidos trabajando con f^{-1} en vez de f .

La prueba del Teorema principal será en dos partes.

Por un lado probaremos que bajo las hipótesis del Teorema principal la foliación central tiene que tener volumen de hoja acotado uniformemente. Seguiremos la prueba que De Martino y el autor realizan en [DMM18]:

Teorema A ([DMM18]). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con foliación central compacta \mathcal{W}^c . Si*

$\dim(E^u) = 1$ entonces el volumen de hojas de \mathcal{W}^c es uniformemente acotado en M .

Como corolario del Teorema A y el teorema de Gogolev citado anteriormente se obtiene una respuesta afirmativa a la primera pregunta de Pugh en dimensión menor o igual que 5.

Corolario. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con foliación central compacta. Si $\dim(M) \leq 5$ entonces el volumen de hojas centrales es uniformemente acotado en M .*

En particular con este corolario se puede descartar completamente a la foliación de Sullivan [S76] como la foliación central de un parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente.

Por otro lado, la prueba del Teorema principal se completará con el siguiente teorema que es el resultado central del trabajo de Bohnet en [B13]:

Teorema B ([B13]). *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliación central uniformemente compacta \mathcal{W}^c . Supongamos que $\dim(E^u) = 1$. Entonces, a menos de un cubrimiento doble que oriente a E^u , el espacio de hojas M/\mathcal{W}^c es homeomorfo a un toro \mathbb{T}^d y la dinámica $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ inducida por f es topológicamente conjugada a un automorfismo lineal hiperbólico.*

Veamos cómo se organiza el presente texto a la vez que hacemos un esbozo de la estructura de la prueba del Teorema A y la prueba del Teorema B.

En el Capítulo 2 se realizan breves preliminares sobre difeomorfismos parcialmente hiperbólicos y se fijan algunas notaciones.

En el Capítulo 3 se define lo que llamaremos un *parcialmente hiperbólico skew product* y se estudian ejemplos de parcialmente hiperbólicos con foliación central compacta.

El Capítulo 4 contiene preliminares sobre foliaciones compactas. Se prueban también algunos resultados previos específicos para nuestro contexto (ver sección 4.4).

El Capítulo 5 está dedicado a la prueba del Teorema A y su estructura es como sigue:

Estructura de la prueba del Teorema A. La prueba será por contradicción. Asumamos que la foliación central \mathcal{W}^c no tiene volumen de hoja uniformemente acotado en M . Esto es equivalente a que el *conjunto malo*

$$\mathcal{B} := \{x \in M : \text{vol no es localmente acotado en } x\}$$

sea no vacío (ver sección 4.3).

El resultado principal de la sección 5.1 y la observación crucial que inicia la prueba del Teorema A es que \mathcal{B} debe ser saturado por hojas de la foliación centro-inestable.

Esto se obtiene de la siguiente forma: como la holonomía inestable de hojas centrales es trivial (ver Lema 5.2), entonces el grupo de holonomía estable se conjuga a lo largo de las hojas inestables, es decir, dos puntos en la misma hoja inestable tienen grupos de holonomía estable isomorfos (Lema 5.3). Se deduce que \mathcal{B} es un atractor para f . En particular, esto implica que f no puede ser transitivo.

El resto de la prueba está dedicado a descartar el caso en que f no sea transitivo.

El atractor \mathcal{B} induce un repulsor asociado \mathcal{R} . Se observa primero que \mathcal{R} es saturado por hojas de la foliación central, obteniendo que el volumen de hoja central es uniformemente acotado en \mathcal{R} (sección 5.2.1). En espíritu, esto permite trabajar en \mathcal{R} con un espacio de hojas centrales hasta cierto punto “manejable”.

La prueba continúa luego con una cierta descripción topológica de las hojas centro-estables de \mathcal{R} , a saber, todas ellas son fibrados con base alguna hoja central \mathcal{C} particular y fibras variedades estables por puntos de \mathcal{C} . Con esto se obtiene que todas las hojas de \mathcal{R} tienen holonomía trivial (sección 5.2.2).

Finalmente, la descripción de \mathcal{R} obtenida permite adaptar los argumentos usados por Hiraide [H01] (ver también Bohnet [B13]) para descartar la existencia del repulsor de codimensión uno transversalmente inestable $\partial\mathcal{R}$.

El Capítulo 5 finaliza con algunos comentarios respecto a la prueba implementada (sección 5.2.4) y unos breves comentarios sobre el caso general (sección 5.3).

El Capítulo 6 está dedicado a la prueba del Teorema B y su estructura es como sigue:

Estructura de la prueba del Teorema B. Consideremos, si es necesario, un cubrimiento doble de M que oriente a E^u .

Dado que la foliación \mathcal{W}^c es uniformemente compacta el espacio de hojas M/\mathcal{W}^c es un espacio métrico compacto (en particular es Hausdorff) con la distancia de Hausdorff d_H (sección 6.1).

Sea $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ la dinámica en el espacio de hojas inducida por f . Estudiando las clases de recurrencia por cadenas para F se obtiene que estas deben ser finitas, usando en particular que para cualesquiera dos centrales \mathcal{C} y

\mathcal{C}' suficientemente cercanas se cumple que en M la variedad estable local de una debe intersectar a la inestable local de la otra y viceversa (sección 6.2).

Se prueba a continuación que F debe ser transitivo por cadenas: En caso de no serlo, existe una clase Ω_R que vista como subconjunto de M es un repulsor de codimensión uno, saturado por hojas de la foliación centro-estable. Esto permite usar el argumento de Hiraide [H01] ya mencionado para descartar la existencia de un tal Ω_R .

Usando la propiedad de “shadowing” probada en [BB16] es posible luego transformar la transitividad por cadenas de F en transitividad usual (sección 6.3).

La transitividad de F se usa a continuación para probar que toda hoja central en M debe tener holonomía trivial: El conjunto \mathcal{A} de las hojas de holonomía de orden máximo en M es un cerrado, f -invariante y saturado por hojas de la foliación centro-inestable (notar la similitud con el conjunto \mathcal{B} del Teorema A). La transitividad de F permite ver que \mathcal{A} debe ser todo M y se deduce de esto que toda central debe tener holonomía trivial (sección 6.4).

A esta altura de la prueba se tiene ya que M es un fibrado cuyas fibras son las hojas de la foliación central \mathcal{W}^c . Las foliaciones centro-estable y centro-inestable en M descienden a foliaciones (topológicas) estable e inestable para $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$. Se obtiene que F es un Anosov topológico de codimensión uno. El resto de la prueba consiste en adaptar el teorema de Franks [F70] de clasificación de difeomorfismos transitivos de codimensión uno a este escenario particular (sección 6.5).

2. Preliminares de parcialmente hiperbólicos

Citamos como referencia para este capítulo [CP15], [HP18] y [RHRHU07].

Consideraremos difeomorfismos $f : M \rightarrow M$ de clase C^1 en variedades Riemannianas cerradas y conexas M .

Decimos que un tal difeomorfismo es *parcialmente hiperbólico* si existe una descomposición del fibrado tangente en subfibrados continuos y Df -invariantes

$$TM = E^s \oplus E^c \oplus E^u,$$

y un entero $\ell > 0$ tales que para todo $x \in M$ y vectores unitarios $v^\sigma \in E^\sigma$ con $\sigma \in \{s, c, u\}$ se tiene que

$$\|D_x f^\ell(v^s)\| < 1, \quad \|D_x f^{-\ell}(v^u)\| < 1 \quad \text{y}$$

$$\|D_x f^\ell(v^s)\| < \|D_x f^\ell(v^c)\| < \|D_x f^\ell(v^u)\|.$$

Denominamos fibrados estable, centro-estable, central, centro-inestable e inestable a los fibrados E^s , $E^s \oplus E^c$, E^c , $E^c \oplus E^u$ y E^u , respectivamente.

Los fibrados estable e inestable integran únicamente a foliaciones f -invariantes \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u , respectivamente (ver [HPS77]). Sin embargo, el fibrado central así como los centro-estable y centro-inestable pueden no ser integrables (ver e.g. [BW08] o [RHRHU16]). Decimos que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico es *dinámicamente coherente* si los fibrados centro-estable y centro-inestable integran a foliaciones f -invariantes \mathcal{W}^{cs} y \mathcal{W}^{cu} , respectivamente. Dado un punto $x \in M$ denotamos por $W^\sigma(x)$ la hoja de \mathcal{W}^σ que contiene a x para cada $\sigma \in \{s, cs, cu, u\}$.

Si f es dinámicamente coherente el fibrado central también es integrable: la hoja central por un punto x siendo la componente conexa de $W^{cs}(x) \cap W^{cu}(x)$ que contiene a x . La foliación resultante, \mathcal{W}^c , es entonces f -invariante y tangente al fibrado E^c . En tal caso, dado un punto $x \in M$ denotamos por \mathcal{C}_x la hoja de \mathcal{W}^c por el punto x .

Dada una hoja central \mathcal{C} denotamos por $W^{cs}(\mathcal{C})$ a la hoja de \mathcal{W}^{cs} que contiene a \mathcal{C} . Denotamos por $W^s(\mathcal{C})$ al conjunto $\bigcup_{x \in \mathcal{C}} W^s(x)$. Observar que $W^s(\mathcal{C}) \subset W^{cs}(\mathcal{C})$ pero la igualdad a priori no queda garantizada. De hecho, para el caso en que \mathcal{W}^c es por hojas compactas, que la igualdad se verifique para toda hoja central es equivalente a que el volumen de hoja central sea uniformemente acotado (ver Teorema 5.27). Definimos análogamente $W^{cu}(\mathcal{C})$ y $W^u(\mathcal{C})$.

Para $x \in M$ y $r > 0$ denotamos $B_r^\sigma(x) \subset W^\sigma(x)$ a la bola de centro x y radio r para la métrica intrínseca en $W^\sigma(x)$ para todo $\sigma \in \{s, cs, cu, u\}$. Análogamente definimos $B_r^c(x) \subset \mathcal{C}_x$. Si $\dim(E^\sigma) = 1$, para $\sigma \in \{s, cs, cu, u\}$, la denotamos simplemente $(x - r, x + r)^\sigma$. Si $\dim(E^\sigma) = 1$ y \mathcal{W}^σ está orientada denotamos $(x, x + \delta)^u = \{y \in B_\delta^u(x) : x < y\}$ y $W_+^u(x) = \{y \in W^u(x) : x < y\}$. En este último caso, si $y \in W^u(x)$ denotamos $[x, y]^u$ y $(x, y)^u$ los segmentos cerrado y abierto, respectivamente, desde x a y en $\mathcal{W}^u(x)$ según la orientación fijada.

Las hojas de \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^u pueden obtenerse como la unión creciente de bolas euclídeas y, por lo tanto, son homeomorfas a $\mathbb{R}^{\dim E^s}$ y $\mathbb{R}^{\dim E^u}$.

Decimos que un parcialmente hiperbólico es de *codimensión uno* si $\dim(E^s) = 1$ o $\dim(E^u) = 1$. Como ya mencionamos, en este trabajo nos concentraremos en el caso $\dim(E^u) = 1$ pero todos los resultados son válidos para $\dim(E^s) = 1$ trabajando con f^{-1} en lugar de f .

3. Skew products y otros ejemplos

Los únicos ejemplos conocidos de parcialmente hiperbólicos con foliación central compacta son cocientes finitos de parcialmente hiperbólicos skew product.

El objetivo de este capítulo es ver algunos de dichos ejemplos. Este capítulo puede ser obviado para lo que sigue.

Usaremos en algunas partes de este capítulo terminología básica de teoría de foliaciones. Ver el capítulo siguiente para los preliminares correspondientes a este tema.

3.1. Skew products

Decimos que un difeomorfismo parcialmente hiperbólico $f : M \rightarrow M$ es un *skew product* si M es un fibrado $p : M \rightarrow N$ con base N y fibra F tal que

- El difeomorfismo f lleva fibras en fibras, es decir, existe $g : N \rightarrow N$ tal que

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ N & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

- El fibrado E^c es el tangente a las fibras, es decir, $E^c(x) = T_x F(x)$ para todo $x \in M$. En consecuencia, el fibrado E^c integra a una foliación compacta \mathcal{W}^c cuyas hojas son las fibras del fibrado.

Un ejemplo trivial de parcialmente hiperbólico skew product es:

$$g \times \text{id} : N \times F \rightarrow N \times F$$

con $g : N \rightarrow N$ un difeomorfismo de Anosov.

Recordar que $g : N \rightarrow N$ es un *difeomorfismo de Anosov* si el tangente de N se descompone en dos subfibrados Df -invariantes, $TN = E^s \oplus E^u$, para los que existe $\ell > 0$ tal que $\|Dg_x^{-\ell}(v^s)\| \geq 1$ y $\|Dg_x^\ell(v^u)\| \geq 1$ para cualesquiera vectores unitarios $v^s \in E^s(x)$ y $v^u \in E^u(x)$. No es difícil ver que esto es equivalente a que existan constantes $C > 0$ y $\lambda > 1$ tales que para todo $n > 0$ se cumple que $\|Dg_x^{-n}(v^s)\| \geq C\lambda^n$ y $\|Dg_x^n(v^u)\| \geq C\lambda^n$ para cualesquiera vectores unitarios $v^s \in E^s(x)$ y $v^u \in E^u(x)$.

Veamos en la próxima proposición un criterio que nos permite extender el ejemplo anterior de parcialmente hiperbólico skew product. La prueba se basa en el

conocido ‘‘Criterio de conos’’ (ver e.g. [CP15, Theorem 2.6] o [HP06, Proposition 2.11.]).

Notación: si T es una transformación lineal entre espacios vectoriales normados de dimensión finita denotamos $m(T) = \min\{\|T(v)\| : \|v\| = 1\}$ y $\|T\| = \max\{\|T(v)\| : \|v\| = 1\}$.

Proposición 3.1. *Sea $g : N \rightarrow N$ un difeomorfismo de Anosov con constante de expansión/contracción $\lambda > 1$. Sea $p : M \rightarrow N$ un fibrado con base N y fibra F . Supongamos que $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo tal $p \circ f = g \circ p$. Si para todo $z \in M$ se cumple que*

$$m(Df|_{F(z)})^{-1}, \|Df|_{F(z)}\| < \lambda$$

entonces f es un parcialmente hiperbólico skew product.

Demostración. Sea $TN = E^s \oplus E^u$ la descomposición correspondiente a g difeomorfismo de Anosov en N .

Sea $E = Dp^{-1}(E^s)$. El fibrado E es el candidato a ser el fibrado $E^s \oplus E^c$ de f . Tenemos a priori que E es Df -invariante. A partir de la métrica Riemanniana de M podemos construir coordenadas para TM de la siguiente forma: Dado $z \in M$, $u \in E^u(p(z))$ y $v \in E(z)$ denotamos (u, v) al vector de T_zM tal que $Dp_z(u, v) = u$ y $v - (u, v) \perp E(z)$.

Dado que a futuro Dg contrae uniformemente las distancias en la dirección E^s y que $\|Df|_{F(z)}\| < \mu < \lambda$ para toda fibra $F(z)$ entonces existe $R > 0$ tal que $\|Df^k|_{E(z)}\| < R\mu^k$ para todo $z \in M$. Asumamos, por simplicidad, que $R = 1$.

Tenemos luego que en las coordenadas (u, v) el diferencial Df en un punto z es de la forma

$$\begin{pmatrix} A_1(z) & 0 \\ A_2(z) & A_3(z) \end{pmatrix}$$

con $A_1(z) : E^u(p(z)) \rightarrow E^u(g(p(z)))$, $A_2(z) : E^u(p(z)) \rightarrow E(f(z))$ y $A_3(z) : E(z) \rightarrow E(f(z))$ lineales tales que $\|A_3(z)\| < \mu < \lambda$ y $\|A_1(z)\| > \lambda$. Aquí por simplicidad obviamos la constante $C > 0$ del difeomorfismo de Anosov g .

Sea $K = \frac{1}{\lambda - \mu} \max_{z \in M} \{\|A_2(z)\|\}$. Para cada $z \in M$ sea $\Lambda_z := \{(u, v) : K\|u\| \geq \|v\|\}$. Luego Λ es un campo de conos continuo en M .

Sea $(u, v) \in \Lambda_z$. Tenemos que $Df_z(u, v) = (A_1(z)u, A_2(z)u + A_3(z)v)$ y luego, como $K\|A_1(z)u\| > K\lambda\|u\|$ y $\|A_2(z)u + A_3(z)v\| < \|A_2(z)u\| + \|A_3(z)v\| \leq K(\lambda - \mu)\|u\| + \mu\|v\| \leq K(\lambda - \mu)\|u\| + K\mu\|u\| = K\lambda\|u\|$ deducimos que

$$f(\Lambda_z) \subset \text{int}(\Lambda_{f(z)}),$$

donde $\text{int}(\Lambda_{f(z)}) = \{(u, v) \in T_{f(z)}M : K\|u\| > \|v\|\}$.

Luego a partir del ‘‘Criterio de conos’’ (ver e.g. [CP15, Theorem 2.6] o [HP06, Proposition 2.11.]) podemos afirmar que existe \tilde{E}^u fibrado inestable Df -invariante en M .

Realizando la misma construcción para el pasado a partir del fibrado Df -invariante $E' = Dp^{-1}(E^u)$ obtenemos \tilde{E}^s fibrado estable Df -invariante. \square

Usando la proposición anterior es posible construir otros ejemplos de parcialmente hiperbólicos skew product en un producto $N \times F$. Si $g : N \rightarrow N$ es un difeomorfismo de Anosov y consideramos $h : N \rightarrow \text{Isom}(F)$ diferenciable entonces

$$(x, y) \mapsto (g(x), h_x(y))$$

es un parcialmente hiperbólico skew product. En particular, $g \times R_\theta$ es un parcialmente hiperbólico skew product en $N \times S^1$ para toda $R_\theta : S^1 \rightarrow S^1$ rotación.

Con la proposición anterior también es posible construir otros ejemplos de parcialmente hiperbólicos skew product en fibrados no triviales:

Ejemplo 3.2 ([BW05]). Sean $A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ un automorfismo lineal hiperbólico y $p : M \rightarrow \mathbb{T}^2$ un fibrado por círculos en \mathbb{T}^2 . Existe $f : M \rightarrow M$ parcialmente hiperbólico skew product tal que $p \circ f = A \circ p$.

Demostración. Los fibrados por círculos sobre el toro \mathbb{T}^2 quedan caracterizados (a menos de difeomorfismos que preserven las fibras) por un entero k , el número de Euler del fibrado (ver [CC00, Chapter 4 Vol. II]).

Sabemos entonces que podemos considerar $\epsilon_1 > \epsilon_2 > 0$ y difeomorfismos

$$\phi_1 : B_{\epsilon_1}(0) \times S^1 \rightarrow M \quad \text{y} \quad \phi_2 : \mathbb{T}^2 \setminus B_{\epsilon_2}(0) \times S^1 \rightarrow M$$

tales que $p \circ \phi_i(x, \theta) = x$ y tales que el cambio de cartas $\phi_2^{-1} \circ \phi_1$ es una isometría (rotación) en las fibras.

Es posible ver que A se puede escribir como una composición, $A = g_2 \circ g_1$, de dos difeomorfismos $g_1, g_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ tales que

$$g_1|_{\mathbb{T}^2 \setminus B_{\epsilon_1}(0)} = \text{id} \quad \text{y} \quad g_2|_{B_{\epsilon_2}(0)} = \text{id}.$$

Luego podemos definir f como $\phi_1 \circ (g_1 \times \text{id}) \circ \phi_1^{-1}$ en $\phi_1(B_{\epsilon_1}(0) \times S^1)$ y $\phi_2 \circ (g_2 \times \text{id}) \circ \phi_2^{-1}$ en $\phi_2((\mathbb{T}^2 \setminus B_{\epsilon_2}(0)) \times S^1)$.

Dado que f actúa en las fibras como una isometría y en la base como A , la Proposición 3.1 nos da que f es un parcialmente hiperbólico skew product que levanta a A . \square

Observar que el ejemplo anterior se puede extender naturalmente a un contexto más general:

Observación 3.3. El Ejemplo 3.2 puede extenderse al caso en que $g : N \rightarrow N$ es un difeomorfismo de Anosov cualquiera con $x \in N$ punto fijo y $p : M \rightarrow N$ es un fibrado con fibra F tal que

$$p^{-1}(N \setminus \{x\}) \simeq (N \setminus \{x\}) \times F, \quad p^{-1}(B_\epsilon(x)) \simeq B_\epsilon(x) \times F$$

y el cambio de cartas de $(N \setminus \{x\}) \times F$ a $B_\epsilon(x) \times F$ es una isometría en las fibras.

En particular a partir de la observación anterior pueden construirse parcialmente hiperbólicos skew product de dimensión alta en fibrados no triviales. Por ejemplo, puede realizarse un ejemplo análogo al Ejemplo 3.2 levantado un automorfismo lineal hiperbólico $A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ a un fibrado no trivial obtenido “pegando” una copia de $B_\epsilon^n(0) \times F$ con una copia de $\mathbb{T}^n \setminus B_\epsilon^n(0) \times F$ por un mapa no homotópicamente trivial

$$\rho : \partial B_\epsilon^n(0) \rightarrow \text{Isom}_0(F)$$

para una fibra F elegida adecuadamente.

Por otro lado, veamos que por razones meramente topológicas existen fibrados con base toro \mathbb{T}^n que no admiten parcialmente hiperbólicos skew product que actúen Anosov en la base.

No Ejemplo 3.4 Sea $\rho : \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Diff}(F)$ una representación de \mathbb{Z}^n en $\text{Diff}(F)$ siendo F un toro \mathbb{T}^2 . Consideremos la acción $\Gamma : \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n \times F \rightarrow \mathbb{R}^n \times F$ dada por $\Gamma_v(x, y) = (x + v, \rho_v(y))$. Si $M_\Gamma = (\mathbb{R}^n \times F)/\Gamma$ tenemos que M_Γ es un fibrado sobre el toro \mathbb{T}^n con fibra F .

Supongamos que $\rho_v : F \rightarrow F$ tiene parte lineal hiperbólica para algún $v \in \mathbb{Z}^n$. Entonces para toda $A \in SL(n, \mathbb{Z})$ matriz hiperbólica se cumple que $A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ no levanta a un skew product en el fibrado M_Γ .

Demostración. Sea $p : M_\Gamma \rightarrow \mathbb{T}^n$ la proyección que define el fibrado M_Γ . Para cada loop γ en \mathbb{T}^n con punto base 0 tenemos que $p^{-1}\gamma$ es una subvariedad de M_Γ difeomorfa a la variedad suspensión $F_{\rho_{[\gamma]}} = [0, 1] \times F / (0, y) \sim (1, \rho_{[\gamma]}y)$ siendo $[\gamma] \in \mathbb{Z}^n$ la clase de γ en $\pi_1(\mathbb{T}^n, 0)$.

Supongamos que $A : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ levanta a un skew product $f_A : M_\Gamma \rightarrow M_\Gamma$. Lo anterior implica que para todo $[\gamma] \in \mathbb{Z}^n$ las clases de isotopía de $\rho_{[\gamma]} : F \rightarrow F$ y $\rho_{[A\gamma]} : F \rightarrow F$ deben ser conjugadas ya que f_A debe llevar difeomórficamente la subvariedad $F_{\rho_{[\gamma]}}$ en la subvariedad $F_{\rho_{[A\gamma]}}$ preservando las fibras.

Por otro lado, si para cierto $v \in \mathbb{Z}^n$ se cumple que $\rho_v : F \rightarrow F$ tiene parte lineal hiperbólica entonces, puesto que ρ_v y ρ_w deben conmutar para todo w en \mathbb{Z}^n , obtenemos que debe existir $B \in SL(2, \mathbb{R})$ hiperbólica tal que para todo w en \mathbb{Z}^n la parte lineal de ρ_w es igual B^{n_w} para cierto $n_w \in \mathbb{Z}$.

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canónica de \mathbb{Z}^n . Para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ sea $v_i = n_{e_i}e_1 - n_{e_1}e_i \in \mathbb{Z}^n$. Obtenemos que $\rho_{v_2}, \dots, \rho_{v_n}$ son isotópicos a la identidad puesto que su parte lineal es la identidad. Además, dado que ρ_{v_i} y ρ_{Av_i} deben ser conjugados para cada i , obtenemos que $\rho_{Av_2}, \dots, \rho_{Av_n}$ también deben ser isotópicos a la identidad.

Puesto que A no fija subespacios con pendiente racional en \mathbb{R}^n entonces para cierto $i \in \{2, \dots, n\}$ se cumple que $v_1 = Av_i$ es tal que $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ forma una base de \mathbb{R}^n . Como para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que ρ_{v_i} es isotópico a la identidad entonces M_Γ es un cociente finito del fibrado trivial. Esto contradice el hecho de que ρ_v tenga parte lineal hiperbólica para cierto $v \in \mathbb{Z}^n$. \square

El No Ejemplo anterior ilustra la existencia de fibrados sobre el toro \mathbb{T}^n que no admiten parcialmente hiperbólicos skew product que sean Anosov en la base.

Una pregunta que el autor no sabe responder es la siguiente:

Pregunta 3.5. ¿Qué fibrados $p : M \rightarrow \mathbb{T}^n$ admiten parcialmente hiperbólicos skew product?

3.2. Otros ejemplos

Veremos a lo largo de este texto que en codimensión uno, módulo tomar un cubrimiento doble que oriente al fibrado E^u , si la foliación central es compacta entonces sus hojas tienen holonomía trivial (ver Teorema 6.12) y por lo tanto el sistema es un parcialmente hiperbólico skew product.

El siguiente ejemplo (ver [BW05]) ilustra la necesidad de tomar un cubrimiento doble. En particular, es un ejemplo de parcialmente hiperbólico con foliación central compacta que no es un parcialmente hiperbólico skew product.

Ejemplo 3.6 ([BW05]). Sea $A \in SL(2, \mathbb{R})$ matriz hiperbólica. Consideremos A como difeomorfismo de Anosov en \mathbb{T}^2 .

Sea M la variedad de dimensión 3 que se obtiene cocientando $\mathbb{T}^3 = \mathbb{T}^2 \times S^1$ por la involución libre $T(x, y, z) = (-x, -y, x + \frac{1}{2})$. La involución T conmuta con $A \times \text{id}$ y por lo tanto $A \times \text{id}$ desciende al cociente a un difeomorfismo $f : M \rightarrow M$.

El difeomorfismo f es entonces parcialmente hiperbólico con foliación central compacta \mathcal{W}^c cuyas hojas centrales son las fibras del fibrado de Seifert M . La foliación central posee entonces cuatro hojas (círculos) excepcionales con holonomía no trivial de orden dos.

El espacio de hojas centrales M/\mathcal{W}^c es la esfera S^2 , naturalmente munido con una estructura de “orbifold” con cuatro puntos singulares. Las foliaciones centro-estable y centro-inestable en M descienden a M/\mathcal{W}^c a foliaciones singulares con singularidades exactamente en los puntos singulares de M/\mathcal{W}^c . La dinámica en M/\mathcal{W}^c es entonces la de un *pseudo Anosov generalizado* con singularidades con un sólo “prong”.

Observar que, en particular, la dinámica en M/\mathcal{W}^c no es expansiva ya que en cualquier entorno de 0 existen pares de puntos en una misma variedad estable e inestable local.

El ejemplo siguiente [B13, Example 1.4.] muestra cómo en codimensión mayor no alcanza un cubrimiento doble para “trivializar” la foliación central.

Ejemplo 3.7 ([B13]). Sea $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ una matriz hiperbólica. Sea A' la matriz $\text{diag}(A, A, 1) \in SL(5, \mathbb{Z})$ que induce un difeomorfismo parcialmente hiperbólico $A' : \mathbb{T}^5 \rightarrow \mathbb{T}^5$. Tenemos que A' tiene foliación central compacta unidimensional cuyas hojas son los círculos $\{x\} \times S^1$.

Sea $B = \begin{pmatrix} 0 & -\text{id} & 0 \\ \text{id} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in SL(5, \mathbb{Z})$. Podemos definir la acción libre de \mathbb{Z}_4 en \mathbb{T}^5 dada por $T = B + (0, 0, 0, 0, \frac{1}{4})^t$. Tenemos que T y A' conmutan y luego A' desciende a un difeomorfismo $f_{A'} : \mathbb{T}^5/T \rightarrow \mathbb{T}^5/T$. Como T preserva las foliaciones estable e inestable de A' obtenemos que $f_{A'}$ es parcialmente hiperbólico.

Las hojas de la foliación central de $f_{A'}$ son círculos, cuatro de los cuales tienen holonomía de orden cuatro: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(0, 0, 0, 0)$. Las restante doce círculos con holonomía no trivial tienen holonomía de orden dos.

Obtenemos de esta forma un ejemplo de un parcialmente hiperbólico con foliación central compacta cuya foliación central no pasa a tener holonomía trivial luego de un cubrimiento doble.

Existen ejemplos de foliaciones \mathcal{W} por hojas compactas de holonomía finita para los que no existe un cubrimiento finito que haga que todas las hojas tengan

holonomía trivial (ver, por ejemplo, [CH04]). En tales casos el espacio de hojas M/\mathcal{W} es lo que se denomina un “bad orbifold”.

Veremos en el próximo capítulo (ver Proposición 4.7) que para una foliación por hojas compactas es equivalente tener volumen de hoja uniformemente acotado a que sus hojas sean de holonomía finita.

Vale entonces la siguiente pregunta, en particular contenida en las preguntas de Pugh:

Pregunta 3.8. ¿Existe algún ejemplo de parcialmente hiperbólico con foliación central compacta \mathcal{W}^c tal que para cualquier cubrimiento finito el levantamiento $\tilde{\mathcal{W}}^c$ no tiene todas sus hojas con holonomía trivial? ¿Equivalentemente, existe algún ejemplo de parcialmente hiperbólico con foliación central compacta que no admita un cubrimiento finito que sea un skew product?

4. Preliminares de teoría de foliaciones

Desarrollamos en el presente capítulo preliminares de teoría de foliaciones que serán utilizados en los capítulos siguientes.

Consideraremos foliaciones continuas con hojas de clase C^1 tangentes a una distribución continua. Una referencia general para el presente capítulo es [CC00] o [CLN85].

4.1. Holonomía

Recordemos brevemente la definición del grupo de holonomía de una hoja.

Sea W la hoja de una foliación \mathcal{W} de codimensión $q \in \mathbb{Z}^+$. Fijemos x_0 un punto de W y sea D un disco de dimensión q transversal a \mathcal{W} por x_0 .

Para todo loop $\gamma : [0, 1] \rightarrow W$ basado en x_0 podemos considerar $h_\gamma : D' \rightarrow D$ el *mapa de retorno de holonomía* a D de las hojas de \mathcal{W} por puntos desde un disco transversal más pequeño $D' \subset D$ que contiene x_0 . Explícitamente, podemos considerar pequeños discos transversales $D_{\gamma(t)}$ por cada punto $\gamma(t)$ y, dado y en $D' = D_{\gamma(0)}$ definir $h_\gamma(y)$ como el punto final de la curva continua γ_y definida por $\gamma_y(t) \in D_{\gamma(t)} \cap W(y)$ y $\gamma_y(0) = y$.

Para un homeomorfismo local $h : D' \subset D \rightarrow D$ que fija x_0 se define el *germen de h* como la clase de todos los homeomorfismos locales que coinciden con h en un entorno de x_0 . Con la operación dada por la composición, estas clases forman $G(x_0, D)$ el *grupo de gérmenes de homeomorfismos locales en x_0* .

Se tiene que a loops homotópicos con punto base x_0 fijo en W les corresponde un mismo germen de retorno de holonomía. Puesto que la concatenación de tales loops se corresponde con la composición de los retornos de holonomía (en un entorno de x_0 donde la composición quede bien definida) entonces uno tiene un homomorfismo bien definido

$$\phi : \pi_1(W, x_0) \rightarrow G(x_0, D)$$

donde $\pi_1(W, x_0)$ es el grupo fundamental de W con punto base x_0 .

Definimos entonces el *grupo de holonomía de W en x_0* como $\phi(\pi_1(W, x_0))$. Se verifica que la clase de isomorfismo de $\phi(\pi_1(W, x_0))$ no depende de x_0 y D , luego simplemente lo denominamos *grupo de holonomía de W* y lo denotamos $\text{Hol}(W)$.

4.2. Estabilidad de Reeb

El siguiente es un teorema clásico de teoría de foliaciones. Como referencia ver e.g. [CC00, Theorem 2.4.3] o [CLN85, Theorem 3.]:

Teorema 4.1 (Estabilidad de Reeb generalizado). *Sea \mathcal{W} una foliación y W una hoja compacta de \mathcal{W} con grupo de holonomía $\text{Hol}(W)$ finito. Entonces existe $\mathcal{U}(W)$ entorno de W , saturado por hojas de \mathcal{W} , tal que todas las hojas de $\mathcal{U}(W)$ son compactas con grupo de holonomía finito. Más aún, $\mathcal{U}(W)$ tiene asociado una proyección $\pi : \mathcal{U}(W) \rightarrow W$ tal que para toda hoja $W' \in \mathcal{U}(W)$ el mapa $\pi|_{W'} : W' \rightarrow W$ es un cubrimiento finito k a 1, con $k \leq |\text{Hol}(W)|$, y tal que para cada $y \in W$ el conjunto $\pi^{-1}(\{y\})$ es un disco transversal a \mathcal{W} . El entorno $\mathcal{U}(W)$ puede ser considerado arbitrariamente pequeño.*

Demostración. Para todo $x \in W$ sea $N_x^1 W = \{v \in T_x M : v \perp T_x W \text{ y } \|v\| = 1\}$ el normal unitario a $T_x W$. Para cada $v \in N_x^1 W$ sea γ_v la geodésica tal que $\gamma_v(0) = x$ y $\dot{\gamma}_v(0) = v$. Sea $D_r(x) = \bigcup \{\gamma_v([0, r]) : v \in N_x^1 W\}$ para cada $x \in W$.

Podemos considerar $r > 0$ suficientemente chico como para que $D_r(x) \cap D_r(y) = \emptyset$ si $x \neq y \in W$. Para un tal r sea $N_r(W) = \bigcup_{x \in W} D_r(x)$. Para $N_r(W)$ existe una proyección $\pi : N_r(W) \rightarrow W$ bien definida como $\pi(z) = x$ si $z \in D_r(x)$.

Si fuera necesario, achicamos $r > 0$ como para asegurar que para todo $x \in W$ se cumpla que $D_r(x) \pitchfork \mathcal{W}$.

Fijemos $x_0 \in W$ y sea $N = |\text{Hol}(W)|$. Por la continuidad de \mathcal{W} podemos asegurar que existe $D \subset D_r(x_0)$ con $x_0 \in D$ tal que si $W(y)$ no está contenido en $N_r(W)$ para $y \in D$ entonces la componente conexa de $W(y) \cap N_r(W)$ que contiene a y corta a $D_r(x_0)$ en más de N puntos.

Puesto que esto último no puede valer para todo disco suficientemente pequeño ya que $N = |\text{Hol}(W)|$ deducimos que para todo $D' \subset D$ suficientemente pequeño con $x_0 \in D'$ se cumple que $W(y) \subset N_r(W)$ para todo $y \in D_0$.

Definiendo $\mathcal{U}(W)$ como la saturación de D' por hojas de W se obtiene la tesis del teorema. □

4.3. Foliaciones compactas

Decimos que una foliación \mathcal{W} es *compacta* si toda hoja W de \mathcal{W} es compacta.

Dada una foliación compacta \mathcal{W} en una variedad Riemanniana M podemos considerar la *función volumen de hoja*

$$\text{vol} : M \rightarrow [0, +\infty)$$

que a cada punto $x \in M$ le asigna el volumen de la hoja $W(x)$ respecto de la métrica en $W(x)$ inducida por la métrica de M .

Observación 4.2. Existen ejemplos de foliaciones compactas en las que el volumen de hoja no es uniformemente acotado. El primer ejemplo de este tipo fue el ejemplo de Sullivan [S76] de una foliación por círculos en una variedad de dimensión cinco en el que el largo de los círculos no está uniformemente acotado. Ver [DM17] para una exposición de dicho ejemplo. Otros ejemplos de foliaciones compactas se encuentran e.g. en [V77] y [EV78].

Para una foliación compacta \mathcal{W} definimos el *conjunto malo de \mathcal{W}* como

$$\mathcal{B} := \{x \in M : \text{vol no es localmente acotado en } x\}.$$

Observar que el conjunto \mathcal{B} no depende de la métrica en M y que es, por definición, saturado por hojas de \mathcal{W} .

Observación 4.3. Que \mathcal{W} tenga volumen de hoja acotado en M es equivalente a que el conjunto \mathcal{B} sea vacío. Diremos que en estos caso \mathcal{W} es *uniformemente compacta*

Observación 4.4. Observar que si \mathcal{W} es invariante por un difeomorfismo f de clase \mathcal{C}^1 entonces \mathcal{B} debe ser invariante para f (es decir, $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}$). Este será el caso en nuestro contexto en el que \mathcal{W} será la foliación central de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico.

Veamos algunas propiedades de \mathcal{B} . Para una prueba del próximo resultado ver, por ejemplo, Epstein [E76] o Lessa [L15, Corollary 3.7.]:

Proposición 4.5. *Sea \mathcal{W} una foliación compacta. Se tiene que la función volumen de hoja es semicontinua inferiormente, es decir, $\liminf_{x_n \rightarrow x} \text{vol}(W(x_n)) \geq \text{vol}(W(x))$.*

Usando la proposición anterior se prueba:

Proposición 4.6. *El conjunto malo \mathcal{B} es cerrado con interior vacío.*

Demostración. Que \mathcal{B} es cerrado es directo de su definición. Por otro lado, funciones semicontinuas son continuas en un residual y tenemos que $\mathcal{B} \subset \{x \in M : \text{vol no es continuo en } x\}$. Luego, puesto que vol es semicontinua inferiormente, se deduce que \mathcal{B} tiene interior vacío. Ver [EMS77] o [L15]. \square

Hojas en \mathcal{B} pueden ser completamente caracterizadas en términos de holonomía (ver e.g. Epstein [E76, Theorem 4.2.]):

Proposición 4.7. *Sea \mathcal{W} una foliación compacta y W una hoja de \mathcal{W} . Tenemos que $W \in \mathcal{B}$ si y sólo si $|\text{Hol}(W)| = \infty$.*

Demostración. Veamos que una hoja W está en $M \setminus \mathcal{B}$ si y sólo si $|\text{Hol}(W)| < \infty$. Supongamos que $|\text{Hol}(W)| < \infty$. El teorema de estabilidad de Reeb generalizado (ver Teorema 4.1) nos da directamente un entorno $\mathcal{U}(W)$ en el que el volumen de hoja es necesariamente acotado.

Por otro lado, supongamos que W es una hoja en $M \setminus \mathcal{B}$. Veamos que $|\text{Hol}(W)| < \infty$. Sea U_1 un entorno foliado de $x_0 \in W$ tal que toda hoja que intersecta a U_1 tiene volumen acotado, digamos que por cierta constante $K > 0$. Completamos U_1 a $\{U_1, \dots, U_k\}$ cubrimiento de W por entornos foliados.

Sea $d > 0$ el volumen mínimo de placa entre todos los $\{U_1, \dots, U_k\}$. Sea $x_0 \in D \subset U_1$ disco transversal a \mathcal{W} . Por continuidad de \mathcal{W} podemos tomar $D' \subset D$ con $x_0 \in D'$ un disco más chico tal que si $W(y)$ es la hoja por un punto y de D' y $W(y)$ no está incluida en $U_1 \cup \dots \cup U_k$ entonces $W(y)$ pasa por más de $N = \frac{K}{d}$ placas de algún U_i . Puesto que esto no puede ocurrir ya que en tal caso $W(y)$ tendría volumen mayor que K deducimos que toda hoja por un punto $y \in D'$ está contenida en $U_1 \cup \dots \cup U_k$ y contiene a lo sumo N placas de U_1 que podemos asumir que también intersectan a D a menos de achicar un poco más D' .

Sea $A = \cup_{y \in D'} W(y) \cap D$. Tenemos entonces que para todo loop γ en W con punto base x_0 le corresponde un mapa de holonomía h_γ que es un homeomorfismo de A en A .

Realizamos de esta forma a $\text{Hol}(W)$ como un subgrupo de homeomorfismos de A . Más aún, tenemos que la órbita por $\text{Hol}(W)$ de todo punto $y \in A$ es finita con a lo sumo N elementos. Veremos que esto implica que $\text{Hol}(W)$ es finito.

Llamemos \mathcal{O} a todas las órbitas por $\text{Hol}(W)$ de puntos de A . En \mathcal{O} consideremos la siguiente clase de equivalencia: dos órbitas o_1 y o_2 son equivalentes si existe una biyección h entre los puntos de o_1 y los de o_2 tal que h conjuga la acción de $\text{Hol}(W)$, es decir, $gp = h^{-1}(gh(p))$ para todo $p \in o_1$ y $g \in \text{Hol}(W)$.

Veamos que existen sólo finitas clases de equivalencia. Para eso, veamos que para cada $1 \leq i \leq N$, existen finitas clases de equivalencia de órbitas con i elementos. Si esto no fuera así, numerando sucesivamente órbitas no equivalentes dos a dos con los números $\{1, \dots, n\}$ podríamos obtener una cantidad arbitrariamente grande de homomorfismos de $\text{Hol}(W)$ al grupo simétrico $S(i)$. Puesto que $\text{Hol}(W)$ es finitamente generado, existen finitos homomorfismos de $\text{Hol}(W)$ a $S(i)$. Deducimos que existen sólo finitas clases de equivalencia.

Sean $\{o_1, \dots, o_m\}$ representantes de cada una de estas clases de equivalencia. Observar que para cada elemento g de $\text{Hol}(W)$ la acción de g en los puntos de A queda determinada por la acción de g en cada o_j de $\{o_1, \dots, o_m\}$.

Para cada o_j de $\{o_1, \dots, o_m\}$ existen tantas acciones de un elemento g de $\text{Hol}(W)$ como permutaciones de $|o_j|$ elementos, con $|o_j|$ la cantidad de puntos en la órbita o_j . Sea P_j la cantidad de permutaciones de $|o_j|$ elementos. Luego $\text{Hol}(W)$ tiene a lo sumo $P_1 \cdots P_m$ elementos. \square

4.4. Holonomías estable e inestable y entornos producto

A lo largo de esta subsección $f : M \rightarrow M$ será un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente con foliación central compacta.

4.4.1. Holonomías estable e inestable

Una consecuencia de la coherencia dinámica es que cada hoja W de \mathcal{W}^{cs} es foliada por hojas centrales. Denotamos a dicha foliación por $\mathcal{W}^c|_W$.

Dada una hoja central \mathcal{C} denotamos $\text{Hol}(\mathcal{C})$ al grupo de holonomía de \mathcal{C} como hoja de \mathcal{W}^c .

Denotamos $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$ y $\text{Hol}^u(\mathcal{C})$ a los grupos de holonomía de \mathcal{C} como hoja de $\mathcal{W}^c|_{\mathcal{W}^{cs}(\mathcal{C})}$ y $\mathcal{W}^c|_{\mathcal{W}^{cu}(\mathcal{C})}$, respectivamente.

Observación 4.8. Observar que cada una de la holonomías definidas anteriormente es invariante por f .

La coherencia dinámica nos da una relación entre la holonomía $\text{Hol}(\mathcal{C})$ y las holonomías $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$ y $\text{Hol}^u(\mathcal{C})$. En particular, tenemos lo siguiente (ver e.g. Carrasco [C15, Proposition 2.5.]):

Proposición 4.9. *Para toda hoja central \mathcal{C} tenemos que*

$$\max\{|\text{Hol}^s(\mathcal{C})|, |\text{Hol}^u(\mathcal{C})|\} \leq |\text{Hol}(\mathcal{C})| \leq |\text{Hol}^s(\mathcal{C})| |\text{Hol}^u(\mathcal{C})|.$$

En particular, $\text{Hol}(\mathcal{C})$ es finita si y sólo si $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$ y $\text{Hol}^u(\mathcal{C})$ son finitas.

Demostración. Consideremos D un pequeño disco transversal a \mathcal{W}^c tangente a $E^s \oplus E^u$ en x_0 . Denotemos D^s y D^u las componentes conexas de $D \cap W^{cs}(x_0)$ y $D \cap W^{cu}(x_0)$ que contienen a x_0 , respectivamente. Más aún, para cada $x \in D$ denotemos $D^s(x)$ y $D^u(x)$ las componentes conexas de $D \cap W^{cs}(x)$ y $D \cap W^{cu}(x)$ que contienen a x , respectivamente.

Tenemos entonces, en un entorno $D' \subset D$ de x_0 , coordenadas locales estables/inestables. Es decir, que para todo $x \in D'$ existen únicos $x_s \in D^s$ y $x_u \in D^u$ tales que $x = D^u(x_s) \cap D^s(x_u)$. Denotemos a las coordenadas de x como (x_s, x_u) .

Dado un loop $\gamma \subset \mathcal{C}$ con punto base x_0 tenemos bien definidos mapas de holonomía $h_\gamma^s : D^{s'} \rightarrow D^s$ y $h_\gamma^u : D^{u'} \rightarrow D^u$ para la foliación central \mathcal{W}^c restringida a $W^{cs}(x_0)$ y $W^{cu}(x_0)$, respectivamente. La coherencia dinámica nos dice entonces que estos mapas de holonomía asociados a γ en D pueden ser escritos en coordenadas locales como

$$h_\gamma = (h_\gamma^s, h_\gamma^u),$$

donde h_γ esta dado por $h_\gamma(x) = (h_\gamma^s(x_s), h_\gamma^u(x_u))$, con $x = (x_s, x_u)$ las coordenadas estables/inestables definidas anteriormente.

Los elementos de $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$ y $\text{Hol}^u(\mathcal{C})$ son gérmenes de homeomorfismos locales que fijan x_0 en D^s y D^u , respectivamente. Lo visto anteriormente muestra entonces que el mapa

$$\psi : \text{Hol}^s(\mathcal{C}) \times \text{Hol}^u(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Hol}(\mathcal{C})$$

definido como $\psi(h_\gamma^s, h_\gamma^u) = h_\gamma$ es sobreyectivo. Esto implica que $|\text{Hol}(\mathcal{C})| \leq |\text{Hol}^s(\mathcal{C})| |\text{Hol}^u(\mathcal{C})|$.

Más aún, puesto que $h_\gamma(x_s, x_0) = (h^s(x_s), x_0)$ y $h_\gamma(x_0, x_u) = (x_0, h^u(x_u))$ obtenemos también que $\max\{|\text{Hol}^s(\mathcal{C})|, |\text{Hol}^u(\mathcal{C})|\} \leq |\text{Hol}(\mathcal{C})|$. \square

4.4.2. Entornos producto

Asumimos en esta subsección que $\dim(E^u) = 1$ y $\text{Hol}^u(\mathcal{C}) = \text{Id}$ para toda hoja central. Estas hipótesis serán satisfechas más adelante durante la prueba del Teorema A.

Usaremos lo siguiente varias veces (para resultados similares ver e.g. [CC00]) or [HH87]):

Proposición 4.10 (Entornos producto). *Sea \mathcal{C} una hoja central y consideremos $E = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} B^s(x)$, donde $B^s(x) \subset W^s(x)$ es un disco tal que $B^s(x) \cap \mathcal{C} = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{C}$ y $B^s(x)$ varía continuamente con x . Entonces existe un homeomorfismo sobre su imagen $\varphi : E \times [-1, 1] \rightarrow M$ tal que:*

1. $\varphi(E \times \{0\}) = E$.
2. $\varphi(E \times \{y\})$ está contenido en una hoja de \mathcal{W}^{cs} para todo $y \in [-1, 1]$.
3. $\varphi(\{x\} \times [-1, 1])$ está contenido en una hoja de \mathcal{W}^u para todo $x \in E$.

En estos casos, diremos que $\varphi(E \times [-1, 1])$ es un (cs, u) -entorno producto de E y, haciendo un poco de abuso notación, nos referiremos a él simplemente por $E \times [-1, 1]$.

Demostración. Podemos considerar $\epsilon > 0$ tal que para cualesquiera $x, x' \in E$ distintos tenemos que $(x - \epsilon, x + \epsilon)^u \cap (x' - \epsilon, x' + \epsilon)^u = \emptyset$.

Fijemos $x_0 \in \mathcal{C}$. Por la continuidad de \mathcal{W}^{cs} podemos considerar $\delta > 0$ tal que para toda curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ con $\gamma(0) = x_0$ y $\text{long}(\gamma) \leq 2 \text{diám}(E)$ se cumple que existe un mapa de holonomía bien definido

$$h_\gamma : (x_0 - \delta, x_0 + \delta)^u \rightarrow (\gamma(1) - \epsilon, \gamma(1) + \epsilon)^u.$$

Observar que si una tal γ es cerrada entonces γ será homotópica a un loop en \mathcal{C} por ser $E = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} B^s(x)$ con cada $B^s(x)$ un disco estable. Luego como $\text{Hol}^u(\mathcal{C}) = \text{Id}$ podemos tomar $\delta > 0$ suficientemente chico como para asegurar que h_γ coincide con la identidad de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)^u$ a sí mismo para toda γ cerrada con $\text{long}(\gamma) \leq 2 \text{diám}(E)$.

Para todo $x \in E$ consideremos $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow E$ una curva desde x_0 a x tal que $\text{long}(\gamma) \leq \text{diám}(E)$. Definamos ahora, para $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)^u$, el mapa

$$\varphi(x, y) = h_{\gamma_x}(y).$$

Veamos que la definición de φ es independiente de la elección de γ_x . En efecto, si $\gamma'_x : [0, 1] \rightarrow E$ es otra curva como γ_x entonces la concatenación $\gamma_x * \gamma'_x$ tiene largo a lo sumo $2 \text{diám}(E)$ y luego $id = h_{\gamma_x * \gamma'_x} = h_{\gamma_x} \circ h_{\gamma'_x}^{-1}$ implica que $h_{\gamma_x}(y) = h_{\gamma'_x}(y)$ para todo $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)^u$.

Las propiedades anunciadas del mapa φ se deducen directamente de su definición. \square

Precisaremos algunas veces un instancia particular de la proposición anterior: *Observación 4.11.* Para toda hoja central \mathcal{C} tal que $|\text{Hol}(\mathcal{C})| < \infty$ podemos considerar $\mathcal{U}^s(\mathcal{C})$ un entorno de \mathcal{C} en $W^{cs}(\mathcal{C})$ dado por el teorema de estabilidad de Reeb generalizado (ver Teorema 4.1) tal que:

- La proyección asociada $\pi : \mathcal{U}^s(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}$ satisface que $\pi^{-1}(x)$ es un disco en $W^s(x)$ para todo $x \in \mathcal{C}$.
- Existe un (cs, u) -entorno producto $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}) \times [-1, 1]$ de $\mathcal{U}^s(\mathcal{C})$.

Demostración. Por la transversalidad de las foliaciones \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^c dentro de $W^{cs}(\mathcal{C})$ y el hecho de que $\mathcal{U}^s(\mathcal{C})$ puede considerado arbitrariamente pequeño obtenemos que la proyección π puede tomarse a lo largo de hojas de \mathcal{W}^s , es decir, constante en variedades estables locales.

El entorno $\mathcal{U}^s(\mathcal{C})$ cumple las hipótesis de la Proposición 4.10 y esto implica la existencia del entorno producto $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}) \times [-1, 1]$. \square

5. Compacto implica uniformemente compacto

5.1. El conjunto malo es saturado por hojas centro-inestables

De ahora en más sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo parcialmente hiperbólico y dinámicamente coherente tal que $\dim(E^u) = 1$.

Asumamos que la foliación central \mathcal{W}^c es compacta. El objetivo es ver que \mathcal{W}^c es, de hecho, uniformemente compacta.

Observación 5.1. Podemos asumir de ahora en más durante el resto del capítulo que todos los fibrados E^s , E^{cs} , E^c , E^{cu} y E^u son orientables.

Demostración. Tomando un cubrimiento finito adecuado $p : \tilde{M} \rightarrow M$ podemos levantar los fibrados E^s , E^{cs} , E^c , E^{cu} y E^u a fibrados orientables. Luego f levanta a un parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente y de codimensión uno, $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$, cuya foliación central $\tilde{\mathcal{W}}^c$ coincide con levantar \mathcal{W}^c . La foliación

central $\tilde{\mathcal{W}}^c$ sigue siendo compacta y cada una de sus hojas es un cubrimiento finito de las hojas de \mathcal{W}^c . Luego, si $\tilde{\mathcal{W}}^c$ es uniformemente compacta, también lo es \mathcal{W}^c . \square

Veamos primero una consecuencia simple (pero crucial para lo que sigue) de la hipótesis de codimensión uno:

Lema 5.2. *Para toda hoja central \mathcal{C} se cumple que $\text{Hol}^u(\mathcal{C}) = \text{Id}$.*

Demostración. Sea \mathcal{C} una hoja central. Recordar que $\text{Hol}^u(\mathcal{C})$ es el grupo de gérmenes mapas de holonomía de hojas centrales asociados a \mathcal{C} dentro de $W^{cu}(\mathcal{C})$.

Sea x_0 un punto de \mathcal{C} y $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$ una curva cerrada basada en x_0 . Consideremos $\lambda' \subset \lambda \subset W^u(x_0)$ una transversal a \mathcal{C} por x , suficientemente chica como para que el mapa de retorno de holonomía $h_\gamma : \lambda' \rightarrow \lambda$ esté bien definido. Puesto que estamos asumiendo que la foliación inestable es orientable el mapa h_γ preserva orientación.

Asumamos, por contradicción, que h_γ no es la identidad. Existe entonces $y \in \lambda'$ tal que $\{h_\gamma^n(y)\}_{n \geq 0}$ o $\{h_\gamma^{-n}(y)\}_{n \geq 0}$ contiene una cantidad infinita de puntos de λ . Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\#\{h_\gamma^n(y)\}_{n \geq 0} = \infty$.

Fijemos U un pequeño entorno foliado de \mathcal{W}^c conteniendo a λ . Luego a cada punto de $\{h_\gamma^n(y)\}_{n \geq 0} = \infty$ le corresponde una placa diferente de U . Puesto que cada una de estas placas están contenidas en \mathcal{C}_y esto contradice que \mathcal{C}_y es compacto. \square

De lema previo deducimos que cada hoja central \mathcal{C} tiene un entorno producto en $W^{cu}(\mathcal{C})$ de la forma $\mathcal{C} \times (-\delta, \delta)^u$, donde cada $\mathcal{C} \times \{y\}$ corresponde a una hoja central, cada $\{x\} \times (-\delta, \delta)^u$ corresponde a un segmento inestable (ver Figura 5.1).

Este ‘‘apilado’’ de hojas centrales a lo largo de la dirección inestable implica que la holonomía estable sea constante a lo largo de hojas inestables (ver Figura 5.2):

Lema 5.3. *Para cada $x \in M$ e $y \in W^u(x)$ se cumple que los grupos $\text{Hol}^s(\mathcal{C})$ y $\text{Hol}^s(y)$ son isomorfos.*

Demostración. Observar que alcanza con dar un argumento local: supongamos que para todo $x \in M$ existe un arco inestable $(x - \delta, x + \delta)^u$ tal que $\text{Hol}(\mathcal{C}_y) \simeq \text{Hol}(\mathcal{C}_x)$ para todo $y \in (x - \delta, x + \delta)^u$. Esto implica que $\{y \in W^u(x) : \text{Hol}(\mathcal{C}_y) \text{ es isomorfo a } \text{Hol}(\mathcal{C}_x)\}$ es un subconjunto abierto de $W^u(x)$ al igual que su complemento.

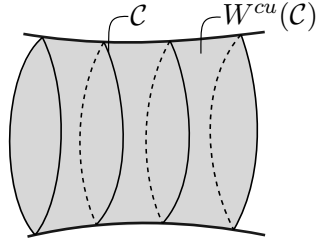


Figura 5.1

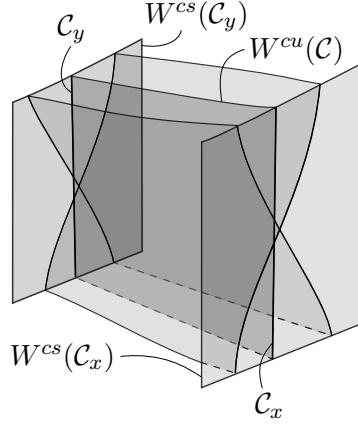


Figura 5.2

Deducimos que $\{y \in W^u(x) : \text{Hol}(\mathcal{C}_y)\}$ es isomorfo a $\text{Hol}(\mathcal{C}_x)$ tiene que ser todo $W^u(x)$.

Sea x un punto de M . Denotemos por \mathcal{C} la hoja central por x . Dado que \mathcal{C} es compacta existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta^s(z) \cap B_\delta^s(z') = \emptyset$ para cualesquiera z y z' puntos distintos en \mathcal{C} . Luego $\bigcup_{z \in \mathcal{C}} B_\delta^s(z)$ (denotémoslo de ahora en más como $B_\delta^s(\mathcal{C})$) se encuentra en las hipótesis de la Proposición 4.10 y podemos considerar un (cs, u) -entorno producto $B_\delta^s(\mathcal{C}) \times (-1, 1)$.

Para cada $t \in (-1, 1)$ podemos definir una proyección $p_t : B_\delta^s(\mathcal{C}) \times \{0\} \rightarrow B_\delta^s(\mathcal{C}) \times \{t\}$ a lo largo de placas inestables en $B_\delta^s(\mathcal{C}) \times (-1, 1)$. Más precisamente,

$$p_t(z, 0) = (z, t).$$

La proyección p_t identifica $\mathcal{W}^c|_{B_\delta^s(\mathcal{C}) \times \{0\}}$ homeomórficamente con $\mathcal{W}^c|_{B_\delta^s(\mathcal{C}) \times \{t\}}$ ya que por definición las hojas de \mathcal{W}^c son las componentes conexas de la intersección entre hojas de \mathcal{W}^{cs} con hojas de \mathcal{W}^{cu} . Esto implica que

$$\text{Hol}^s(\mathcal{C}_y) \simeq \text{Hol}^s(\mathcal{C}_x)$$

para todo $y \in \{x\} \times (-1, 1)$. □

Recordar que llamamos conjunto malo \mathcal{B} de \mathcal{W}^c a los puntos de M en los que el volumen de hoja central no es localmente acotado. Del lema anterior obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 5.4. *El conjunto malo \mathcal{B} de \mathcal{W}^c es saturado por hojas de la foliación centro-inestable.*

Demostración. A partir de la Proposición 4.7 sabemos que una hoja central está en \mathcal{B} si y sólo si $|\text{Hol}(\mathcal{C})| = \infty$. Por la Proposición 4.9 y el Lema 5.2, tenemos que $|\text{Hol}(\mathcal{C})| = |\text{Hol}^s(\mathcal{C})|$.

El Lema 5.3 implica entonces que \mathcal{B} es saturado por hojas de la foliación inestable. Por otro lado, \mathcal{B} también es, claramente, saturado por hojas de la foliación central. \square

Llegados a este punto, obtenemos lo siguiente:

Corolario 5.5. *El conjunto malo \mathcal{B} es un atractor. En particular, f no puede ser transitivo.*

Demostración. El conjunto \mathcal{B} es compacto, f -invariante, tiene interior vacío y es saturado por hojas de la foliación centro-inestable. En particular, \mathcal{B} es transversalmente estable y no es todo M . Deducimos que es un atractor propio y que, por lo tanto, f no puede ser transitivo. \square

El objetivo del resto de la prueba es ver que la misma tesis se obtiene para el caso en que f no sea transitivo.

Finalizamos esta sección observando que con lo que hemos visto hasta este punto sumado a los trabajos de Gogolev [G12], es posible ya descartar la foliación de Sullivan [S76] como la foliación central de un parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente:

No Ejemplo 5.6 La foliación de Sullivan [S76] no puede ser la foliación central de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente.

Demostración. El ejemplo dado por Sullivan es una foliación por círculos en una variedad cerrada de dimensión cinco M tal que el volumen de hojas no está acotado.

Asumiremos que el lector está familiarizado con dicho ejemplo. Para una exposición del mismo ver e.g. [DM17].

Asumamos que el ejemplo de Sullivan es la foliación central de un difeomorfismo parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente.

Dado que entonces la foliación central es de dimensión uno en una variedad de dimensión cinco el trabajo de Gogolev [G12] (ver Teorema 5.28) implica que el volumen de hojas debe ser uniformemente acotado si $\dim(E^s) = 2$ y $\dim(E^c) = 2$.

Queda por descartar entonces el caso de codimensión uno. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\dim(E^u) = 1$.

Denotemos por \mathcal{F} a la foliación de Sullivan. Para esta foliación en particular el conjunto malo \mathcal{B} es difeomorfo al tangente unitario T^1S^2 de la esfera S^2 . Más aún, las hojas de la foliación en \mathcal{B} coinciden exactamente con las fibras de dicho tangente unitario.

Por el Corolario 5.4 tenemos que \mathcal{B} es saturado por hojas de la foliación centro-inestable y por lo tanto \mathcal{B} queda foliado por dichas hojas.

Dada una hoja central \mathcal{C} , a partir de que $\text{Hol}^u(\mathcal{C}) = \text{Id}$ (Lema 5.2), tenemos que \mathcal{C} tiene un entorno de la forma $\mathcal{C} \times (-\delta, \delta)^u$ en $W^{cu}(\mathcal{C})$ tal que cada $\mathcal{C} \times \{y\}$ es una hoja central (ver Figura 5.1).

Esto implica que la foliación centro-inestable en $\mathcal{B} \simeq T^1S^2$ proyecta a una foliación (topológica) sin singularidades en la base S^2 lo cual es imposible. \square

5.2. Caso no transitivo

Vimos en la sección pasada que si el conjunto malo \mathcal{B} de \mathcal{W}^c es no vacío entonces es un atractor propio, saturado por hojas de la foliación centro-inestable, y que por tanto f no puede ser transitivo.

El objetivo de esta sección es profundizar en las consecuencia que implican la existencia de un tal \mathcal{B} hasta llegar a descartar también el caso en que f no sea transitivo.

5.2.1. Construcción del repulsor \mathcal{R}

Consideremos el repulsor \mathcal{R} inducido por el atractor \mathcal{B} (ver Figura 5.3):

$$\mathcal{R} = M \setminus \bigcup_{x \in \mathcal{B}} W^s(x)$$

Estudiaremos a continuación al repulsor \mathcal{R} . En particular, veremos que es saturado por hojas de la foliación centro-estable.

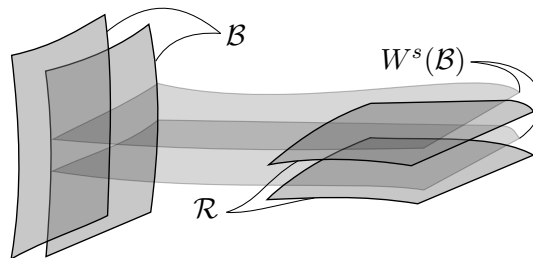


Figura 5.3

Para cada $r > 0$ denotemos $B_r^s(\mathcal{B}) = \bigcup_{x \in \mathcal{B}} B_r^s(x)$.

Lema 5.7. *El conjunto \mathcal{R} es no vacío, f -invariante, cerrado y saturado por hojas de \mathcal{W}^s .*

Demostración. Como \mathcal{B} es saturado por hojas de \mathcal{W}^{cu} entonces $\bigcup_{x \in \mathcal{B}} W^s(x)$ es abierto. Luego \mathcal{R} es cerrado.

Veamos que \mathcal{R} no es vacío. El conjunto $\bigcup_{x \in \mathcal{B}} W^s(x)$ es la unión creciente de abiertos $\{B_n^s(\mathcal{B})\}_n$. Si fuera el caso que $M = \bigcup_{x \in \mathcal{B}} W^s(x)$ entonces M coincidiría con $B_{n_0}^s(\mathcal{B})$ para algún n_0 . Luego $f^{-n}(M)$ estaría contenido en un pequeño entorno de \mathcal{B} para n suficientemente grande y esto es imposible.

Como $\bigcup_{x \in \mathcal{B}} W^s(x)$ es f -invariante y saturado por hojas de \mathcal{W}^s entonces lo mismo ocurre con \mathcal{R} . \square

El objetivo ahora es ver que \mathcal{R} es también saturado por hojas centrales (observar que a priori esto no es obvio). La prueba se basará en los siguientes tres lemas.

El primero es la principal observación que nos permitirá continuar trabajando en un entorno de \mathcal{R} como si la foliación allí fuera uniformemente compacta:

Lema 5.8. *Para cada $\epsilon > 0$ existe $K > 0$ tal que si \mathcal{C} es una hoja central con $\text{vol}(\mathcal{C}) > K$ entonces $\mathcal{C} \subset B_\epsilon^s(\mathcal{B})$.*

Demostración. Fijemos $\epsilon > 0$ y supongamos, por contradicción, que no existe un tal K . Existe entonces una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en $M \setminus B_\epsilon^s(\mathcal{B})$ tal que $\text{vol}(\mathcal{C}_{x_n}) \xrightarrow{n} \infty$. Tomando una subsucesión convergente $x_{n_k} \xrightarrow{k} x \in M \setminus B_\epsilon^s(\mathcal{B})$ obtenemos que vol no es localmente acotado en x . Luego x debería ser un punto de \mathcal{B} pero esto es imposible puesto que $x \in M \setminus B_\epsilon^s(\mathcal{B})$. \square

El siguiente es un lema técnico que relaciona diámetro y volumen de hojas:

Lema 5.9. *Para todo $K > 0$ existe $D > 0$ tal que si \mathcal{C} es una hoja central con $\text{vol}(\mathcal{C}) < K$ entonces $\text{diám}(\mathcal{C}) < D$.*

Demostración. Consideremos $\{U_i\}_{i=1, \dots, l}$ un cubrimiento finito de M por entornos foliados de la foliación central \mathcal{W}^c . Para cada $i \in \{1, \dots, l\}$ sea d_i el supremo de los diámetros de placas de U_i y v_i el ínfimo de los volúmenes de placas de U_i . Denotemos $d = \max_i \{d_i\}$ y $v = \min_i \{v_i\}$.

Sea \mathcal{C} una hoja central tal que $\text{vol}(\mathcal{C}) < K$. Entonces necesariamente en cada U_i hay menos de $\frac{K}{v} + 1$ placas que pertenecen a \mathcal{C} y, por lo tanto, $\text{diám}(\mathcal{C}) < ld(\frac{K}{v} + 1) = D$. \square

A partir de la continuidad de la foliación \mathcal{W}^c tenemos:

Lema 5.10. *Dado $D > 0$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo x e y con $d(x, y) < \delta$ se cumple que $B_D^c(y) \subset B_\epsilon(\mathcal{C}_x)$.*

Podemos probar entonces:

Proposición 5.11. *El conjunto \mathcal{R} es saturado por hojas de la foliación central.*

Demostración. Supongamos, por contradicción, que existe $x \in \mathcal{R}$ e $y \in \mathcal{C}_x$ tales que $y \in M \setminus \mathcal{R}$. Dado que $y \in M \setminus \mathcal{R}$ existe $w \in \mathcal{B}$ tal que $y \in W^s(w)$.

Sea $d = \text{dist}(\mathcal{B}, \mathcal{R}) > 0$. Observar que por Lema 5.8 tenemos que el volumen de hojas centrales es acotado en \mathcal{R} por cierta constante $K > 0$

Por el Lema 5.9 existe $D > 0$ tal que para toda hoja central \mathcal{C} con $\text{vol}(\mathcal{C}) < K$ el diámetro de \mathcal{C} es menor que D . Luego, para todo $z \in \mathcal{R}$ tenemos que $B_D^c(z) = \mathcal{C}_z$.

Podemos ahora considerar $N > 0$ suficientemente grande como para que, por Lema 5.10, los puntos $f^N(w)$ y $f^N(y)$ estén suficientemente cerca como para asegurar que $B_D^c(f^N(y)) \subset B_{d/2}(\mathcal{B})$. Esto nos lleva a una contradicción puesto que, por otro lado, $B_D^c(f^N(y))$ contiene a $f^N(y)$ que es un punto de \mathcal{R} ya que \mathcal{R} es f -invariante. \square

5.2.2. Las hojas centro-estables de \mathcal{R} son completas y tienen holonomía trivial

El objetivo de esta sección es probar algunas propiedades más de \mathcal{R} que serán usadas en la próxima sección.

Veamos primero en la siguiente proposición que las hojas centro-estables en \mathcal{R} son *completas* (esta terminología es la usada en [BW05], [C15] y [BB16]). Recordar que para cada central \mathcal{C} denotamos $W^s(\mathcal{C})$ a $\bigcup_{x \in \mathcal{C}} W^s(x)$.

Proposición 5.12. *Para toda hoja central \mathcal{C} en \mathcal{R} se tiene que $W^s(\mathcal{C}) = W^{cs}(\mathcal{C})$.*

Demostración. Sea \mathcal{C} una hoja central en \mathcal{R} . Si probamos que $W^s(\mathcal{C})$ es saturado por hojas centrales entonces $W^s(\mathcal{C})$ será un abierto y cerrado no vacío en $W^{cs}(\mathcal{C})$ y por lo tanto deberá coincidir con $W^{cs}(\mathcal{C})$.

Consideremos $y_0 \in W^s(\mathcal{C})$. Queremos ver que $\mathcal{C}_{y_0} \subset W^s(\mathcal{C})$. Sea x_0 un punto cualquiera en \mathcal{C} y sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(\mathcal{C})$ una curva de x_0 a y_0 .

Para todo $t \in [0, 1]$ denotemos \mathcal{C}_t la hoja central por $\gamma(t)$.

Recordar que por la Proposición 4.7 las hojas centrales en \mathcal{B} son las que tienen grupo de holonomía con infinitos elementos. Luego, puesto que $\mathcal{R} \cap \mathcal{B} = \emptyset$, para cada $t \in [0, 1]$ tenemos que $\mathcal{C}_t \subset W^{cs}(\mathcal{C})$ cumple $|\text{Hol}^s(\mathcal{C}_t)| < \infty$.

Podemos considerar entonces para cada \mathcal{C}_t un entorno $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_t)$ de \mathcal{C}_t en $W^{cs}(\mathcal{C}_t)$ dado por el teorema generalizado de estabilidad de Reeb (ver Teorema 4.1). La proyección asociada a dicho entorno, $\pi_t : \mathcal{U}^s(\mathcal{C}_t) \rightarrow \mathcal{C}_t$, puede ser tomada tal que $\pi_t^{-1}(x)$ es un disco en $W^s(x)$ para cada $x \in \mathcal{C}_t$ (ver Observación 4.11).

Luego $\{\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_t)\}_{t \in [0,1]}$ es un cubrimiento por abiertos de $\gamma([0,1])$. Consideremos $\{\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_0}), \dots, \mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_k})\}$ un subcubrimiento finito tal que $\mathcal{C}_{x_0} = \mathcal{C}_{t_0}$, $\mathcal{C}_{y_0} = \mathcal{C}_{t_k}$ y $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_i}) \cap \mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_{i+1}}) \neq \emptyset$ para cada $0 \leq i \leq k-1$.

Observar que, si \mathcal{C}' es una hoja central en algún $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_i})$, entonces cada s -disco $\pi^{-1}(x)$ en $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_i})$ por un punto x de \mathcal{C}_{t_i} intersecta a \mathcal{C}' .

Observar también que, puesto que cada $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_i})$ es saturado por hojas centrales, también lo es cada $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_i}) \cap \mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{t_{i+1}})$.

Luego, por intermedio de $\mathcal{C}'_i \subset \mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{\gamma(t_i)}) \cap \mathcal{U}^s(\mathcal{C}_{\gamma(t_{i+1})})$ deducimos que cada hoja estable por \mathcal{C}_i intersecta a \mathcal{C}_{i+1} .

Esto implica que $\mathcal{C}_y \subset W^s(\mathcal{C})$ como queríamos. \square

Una hoja central en \mathcal{R} no puede intersectar muchas veces una hoja estable puesto que esto generaría excesiva recurrencia de hoja centrales y esto sólo puede ocurrir en un entorno de \mathcal{B} :

Lema 5.13. *Existe una constante $C > 0$ tal que para todo x en \mathcal{R} se tiene que $\#\{\mathcal{C}_x \cap W^s(x)\} < C$.*

Demostración. Cubramos \mathcal{R} por una cantidad finita de entornos foliados $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$ de la foliación \mathcal{W}^c . Sea $d > 0$ tal que cada placa de cada U_i tiene volumen mayor que d .

Por el Lema 5.8 tenemos que el volumen de hojas centrales es acotado en \mathcal{R} por una cierta constante $K > 0$.

Veamos que $\#\{\mathcal{C}_x \cap W^s(x)\} < \frac{K}{d} + 1$ para todo $x \in \mathcal{R}$.

Supongamos que existe $x \in \mathcal{R}$ y puntos distintos $x = x_0, \dots, x_l$ en $\{\mathcal{C}_x \cap W^s(x)\}$ con $l \geq \frac{K}{d} + 1$.

Sea $\gamma > 0$ un número de Lebesgue para el cubrimiento $\{U_i\}_{1 \leq i \leq k}$. Podemos considerar entonces N suficientemente grande como para asegurar que $\text{diám}(\{f^N(x_0), \dots, f^N(x_l)\}) < \gamma$ en $W^s(f^N(x_0))$ con la métrica intrínseca. Luego $\{f^N(x_0), \dots, f^N(x_l)\}$ está contenido en algún miembro U_{i_0} del cubrimiento.

Puesto que los puntos $\{f^N(x_0), \dots, f^N(x_l)\}$ están cerca en $W^s(f^N(x_0))$ con la métrica intrínseca entonces a cada uno de ellos le corresponde una placa distinta de U_{i_0} . Por otro lado, tenemos que $\{f^N(x_0), \dots, f^N(x_l)\} \subset f^N(\mathcal{C}_x)$. Esto contradice el hecho de que $\text{vol}(f^N(\mathcal{C}_x)) \leq K$. \square

Estamos en condiciones de dar una cierta descripción de las hojas centro-estables en \mathcal{R} (ver Bohnet [B13, Corollary 4.10.] para un descripción similar):

Proposición 5.14. *Sea W una hoja centro-estable en \mathcal{R} . Existe una hoja central \mathcal{C} en W tal que para todo $x \in \mathcal{C}$ se tiene que $\mathcal{C} \cap W^s(x) = \{x\}$. Es decir, W es un fibrado con base una hoja central \mathcal{C} y fibras $\{W^s(x)\}_{x \in \mathcal{C}}$.*

Demostración. Observar primero que alcanza con probar lo que queremos para algún iterado $f^N(W)$.

Cubramos \mathcal{R} por una cantidad finita de (cs, u) -entornos producto $\{\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_i) \times [-1, 1]\}_{1 \leq i \leq k}$, siendo cada $\{\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_i) \times [-1, 1]\}_{1 \leq i \leq k}$ un entorno de estabilidad de Reeb de la hoja central \mathcal{C}_i (ver Observación 4.11).

Sea $\gamma > 0$ un número de Lebesgue del cubrimiento.

Sea W una hoja centro-estable en \mathcal{R} . Por lo visto en el lema anterior tenemos que $\#\{\mathcal{C}_x \cap W^s(x)\}$ está acotado por cierta constante $C > 0$ para todo $x \in W$. Podemos considerar entonces x_0 tal que $l = \#\{\mathcal{C}_{x_0} \cap W^s(x_0)\}$ toma su valor máximo en W . Consideremos $\{x_0, \dots, x_{l-1}\} = \mathcal{C}_{x_0} \cap W^s(x_0)$.

Existe $N > 0$ suficientemente grande tal que $\text{diám}(\{f^N(x_0), \dots, f^N(x_{l-1})\}) < \gamma$ en $W^s(f^N(x_0))$ con la métrica intrínseca. Luego existen $i \in \{1, \dots, k\}$ y $t_i \in [-1, 1]$ tales que $\{f^N(x_0), \dots, f^N(x_{l-1})\} \subset \mathcal{U}^s(\mathcal{C}_i) \times \{t_i\}$ (para asegurar esto γ debe ser menor que la distancia centro-estable mínima entre cualesquiera dos placas distintas de un mismo entorno $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_i) \times [-1, 1]$). Más aún, $\{f^N(x_0), \dots, f^N(x_{l-1})\}$ debe pertenecer al mismo s -disco en el entorno de estabilidad de Reeb $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_i) \times \{t_i\}$. Deducimos que cada s -disco de $\mathcal{U}^s(\mathcal{C}_i) \times \{t_i\}$ interseca $f^N(\mathcal{C}_{x_0})$ en al menos l puntos distintos.

Esto implica que $W^s(x) \cap \mathcal{C}_i \times \{t_i\} = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{C}_i \times \{t_i\}$. De lo contrario, $f^N(\mathcal{C}_{x_0})$ intersectaría una hoja estable en al menos $2l$ puntos distintos y esto es imposible ya que $l = \#\{\mathcal{C}_{x_0} \cap W^s(x_0)\}$ es máximo en W y, como consecuencia, también en $f^N(W)$. \square

Para W una hoja centro-estable como en la proposición anterior tenemos que su grupo de holonomía (como hoja de la foliación \mathcal{W}^{cs}) es trivial. Esto es debido a que todo loop en W es libremente homotópico en W a un loop contenido en \mathcal{C} la hoja central tal que $\mathcal{C} \cap W^s(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Usaremos este hecho en la sección siguiente para justificar que podemos tomar un entorno de \mathcal{C} tan grande como queramos en W con holonomía transversa trivial.

5.2.3. Argumentos para descartar la existencia de \mathcal{R}

Esta última parte de la prueba del Teorema A está dedicada a probar que el conjunto \mathcal{R} así como ha sido descrito no puede existir. Los argumentos usados son una adaptación de los trabajos de Hiraide en [H01] y Bohnet en [B13]. Sin embargo, la prueba que aquí se expone es autocontenida.

De ahora en más trabajaremos tanto con \mathcal{R} como con su borde topológico $\partial\mathcal{R}$. Observar que, al igual que \mathcal{R} , el conjunto $\partial\mathcal{R}$ es no vacío, cerrado, saturado por hojas de la foliación centro-estable cuya holonomía inestable es trivial. El conjunto $\partial\mathcal{R}$ tiene además interior vacío.

Fijemos una orientación para \mathcal{W}^u .

Para cada $x \in \mathcal{R}$ consideremos $\mathcal{U}^s(x) \times [-1, 1]$ un (cs, u) -entorno producto de x , con $\mathcal{U}^s(x)$ un pequeño entorno c -saturado de \mathcal{C}_x dado por el teorema de estabilidad de Reeb generalizado (ver Observación 4.11).

Sea $\{V_i = \mathcal{U}^s(x_i) \times (-1, 1)\}_{0 \leq i \leq k}$ subcubrimiento finito de \mathcal{R} . Sea $\mathcal{V} = \bigcup_{0 \leq i \leq k} V_i$.

Observación 5.15. Podemos asumir que $\mathcal{V} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ si consideramos originalmente cada $\mathcal{U}^s(x) \times [-1, 1]$ disjunto de \mathcal{B} .

Veremos que para ciertos puntos cerca de $\partial\mathcal{R}$ la hoja centro-estable por dicho punto deberá quedar contenida en \mathcal{V} (ver ‘‘Lema del Sandwich’’ 5.19) a la vez que intersectar \mathcal{B} , contradiciendo que $\mathcal{V} \cap \mathcal{B} = \emptyset$.

Observación 5.16. Podemos asumir que cada $\mathcal{U}^s(x_i) \times \{1\}$ es disjunto de $\partial\mathcal{R}$ puesto que $\partial\mathcal{R}$ tiene interior vacío.

Para cada $i \in \{0, \dots, k\}$ definamos $P_i^+ = \mathcal{U}^s(x_i) \times \{t_i\}$, con $0 < t_i < 1$, de forma tal que $\mathcal{U}^s(x_i) \times [t_i, 1] \cap \partial\mathcal{R} = \mathcal{U}^s(x_i) \times \{t_i\}$. Informalmente, P_i^+ es la placa centro-estable de V_i de altura mayor (según la orientación de \mathcal{W}^u) que está contenida en $\partial\mathcal{R}$.

Lema 5.17. *Existe un par $(x_0, \delta) \in \partial\mathcal{R} \times \mathbb{R}^+$ tal que o bien $(x_0, x_0 + \delta)^u \cap \mathcal{R} = \emptyset$ o bien $(x_0 - \delta, x_0)^u \cap \mathcal{R} = \emptyset$.*

Demostración. Observar que el conjunto \mathcal{R} no puede ser saturado por hojas de la foliación inestable puesto en que tal caso coincidiría con la variedad M . Debe existir entonces algún punto x en \mathcal{R} tal que $W^u(x) \cap (M \setminus \mathcal{R}) \neq \emptyset$.

Como $\mathcal{R} \cap W^u(x)$ es cerrado en $W^u(x)$ podemos considerar I una componente conexa de $W^u(x) \setminus \mathcal{R}$ y luego elegir x_0 como uno de los extremos del intervalo I . Alcanza luego tomar $\delta > 0$ suficientemente chico. \square

Fijemos (x_0, δ) dado por el lema anterior. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $(x_0, x_0 + \delta)^u \cap \mathcal{R} = \emptyset$ (en caso contrario, simplemente cambiar la orientación de \mathcal{W}^u).

A partir de la Proposición 5.12 y la Proposición 5.14 tenemos que $W^{cs}(x_0) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}} W^s(x)$ para una cierta hoja central $\mathcal{C} \subset W^{cs}(x_0)$ tal que $\mathcal{C} \cap W^s(x) = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{C}$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que \mathcal{C}_{x_0} es dicha hoja.

Podría ocurrir que algunas de las placas $\{P_1^+, \dots, P_k^+\}$ estuvieran contenidas en $W^{cs}(x_0)$. Denotemos todas las que cumplan ello como $\{P_{i_1}^+, \dots, P_{i_m}^+\}$. Podemos considerar ahora $N > 0$ suficientemente grande como para asegurar que:

$$(P_{i_1}^+ \cup \dots \cup P_{i_m}^+) \subset \bigcup_{x \in \mathcal{C}_{x_0}} B_N^s(x),$$

siendo $B_N^s(x)$ la bola en $W^s(x)$ de centro x y radio N . Si $W^{cs}(x_0)$ no contiene ninguna placa de $\{P_1^+, \dots, P_k^+\}$ entonces tomar $N > 0$ cualquiera.

Por simplicidad, denotemos por E al conjunto $\bigcup_{x \in \mathcal{C}_{x_0}} B_N^s(x)$. Luego E es un subconjunto de $W^{cs}(x_0)$ en las hipótesis de la Proposición 4.10 (en particular, recordar que $\text{Hol}^u(\mathcal{C}) = \text{Id}$) así que podemos considerar un (cs, u) -entorno producto $E \times [-1, 1]$ de E . Recordar que esto significa que cada $E \times \{y\}$ es parte de una hoja de \mathcal{W}^{cs} , cada $\{x\} \times [-1, 1]$ es parte de una hoja de \mathcal{W}^u y que $E = E \times \{0\}$.

Observar que, eventualmente achicando $E \times [-1, 1]$ en la dirección inestable podemos asumir que $E \times [-1, 1]$ está contenido en \mathcal{V} .

Lema 5.18. *Para cada $x \in W^{cs}(x_0) \setminus E$ existe $L_x = [x, x + \delta_x]^u$ intervalo inestable cerrado, no trivial, que intersecta a $\partial\mathcal{R}$ sólo en sus extremos. Más aún, L_x varía continuamente con x en $W^{cs}(x_0) \setminus E$ y está contenido en cada V_i que contenga a x .*

Demostración. Sea $x \in W^{cs}(x_0) \setminus E$. El punto x está contenido en algún V_i y la componente conexa de $(W_+^u(x) \cup \{x\}) \cap V_i$ que contiene a x intersecta a \mathcal{R} en al menos otro punto distinto de x ya que $x \notin \bigcup_{0 \leq i \leq k} P_i^+$.

Observar que dado que x es un punto de $W^{cs}(x_0)$ y que $(x_0, x_0 + \delta)^u$ es disjunto de \mathcal{R} entonces x no puede ser acumulado en $W_+^u(x) \cup \{x\}$ por puntos de $W_+^u(x) \cap \mathcal{R}$. Se deduce entonces la existencia del $\delta_x > 0$ enunciado.

La definición de L_x no depende, claramente, de la elección del entorno V_i que contiene a x . La dependencia continua respecto de x se deduce de esto puesto que x siempre se encuentra en el interior de algún V_i . \square

Observar que, achicando aún más $E \times [-1, 1]$ en la dirección inestable (si fuera necesario) podemos asumir que $\{x\} \times [0, 1] \subset L_x$ para todo $x \in \partial E$.

Consideremos ahora $y \in (x_0, x_0 + \delta)^u$ suficientemente cerca de x_0 como para que $y \in E \times [0, 1]$. Puesto que $y \in M \setminus \mathcal{R}$ tenemos que $W^{cs}(y) \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Veremos en el próximo lema que, por otro lado, $W^{cs}(y)$ debe estar contenido en \mathcal{V} obteniendo de esta forma una contradicción.

La prueba está finaliza entonces a menos del siguiente lema:

Lema 5.19 (Lema del Sandwich). *Para y como fue considerado anteriormente se tiene que $W^{cs}(y) \subset \mathcal{V}$.*

Demostración. Notemos primero que $\bigcup_{x \in W^{cs}(x_0) \setminus E} L_x$ es un fibrado foliado con base $W^{cs}(x_0) \setminus E$ y fibras los intervalos L_x 's (que son transversales a las hojas de W^{cs} para cada x).

De ahora en más consideremos los intervalos L_x semiabiertos, conteniendo al punto x pero no a su otro extremo.

Tenemos entonces bien definida una proyección a lo largo de fibras $\pi : \bigcup_{x \in W^{cs}(x_0) \setminus E} L_x \rightarrow W^{cs}(x_0) \setminus E$ definida por $\pi(L_x) = x$.

Observar que para cada $\gamma : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(x_0) \setminus E$ y $z \in L_{\gamma(0)}$ podemos levantar γ a $\gamma_z : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(z)$ tal que $\pi \circ \gamma_z = \gamma$.

Este levantamiento define entonces un mapa $p_\gamma : L_{\gamma(0)} \rightarrow L_{\gamma(1)}$ definido como $p_\gamma(z) = \gamma_z(1)$.

Fijemos $x'_0 \in \partial E$.

Afirmación. Para toda curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(x_0) \setminus E$ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x'_0$ existe una homotopía continua a extremos fijos $\gamma_s : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(x_0) \setminus E$ tal que $\gamma_0 = \gamma$ y $\gamma_1([0, 1]) \subset \partial E$.

Demostración de la afirmación. Recordar que $E = \bigcup_{x \in \mathcal{C}_{x_0}} B_N^s(x)$ para cierto $N > 0$ y que $W^{cs}(x_0) = \bigcup_{x \in \mathcal{C}_{x_0}} W^s(x)$ con $W^s(x)$ disjunto de $W^s(y)$ si $x \neq y$ en \mathcal{C}_{x_0} .

Tenemos que $W^{cs}(x_0)$ retrae por deformación a E en $W^{cs}(x_0)$. Componiendo γ con dicha retracción obtenemos la tesis de la afirmación.

Consideremos ahora para cada $x \in W^{cs}(x_0) \setminus E$ una curva $\gamma_x : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(x_0) \setminus E$ tal que $\gamma_x(0) = x'_0$ and $\gamma_x(1) = x$.

Observación. La existencia de una tal γ_x queda automáticamente garantizada si $\dim(E^s) \geq 2$ puesto que esto implica directamente que $W^{cs}(x_0) \setminus E$ es arcoconexo.

Si es el caso fuera que $\dim(E^s) = 1$ entonces el Teorema A se prueba automáticamente observando que $\text{Hol}^s(\mathcal{C}) = \text{Id}$ para toda central (análogamente al Lema 6.4) y con esto obteniendo que $\text{Hol}(\mathcal{C})$ es trivial para toda central.

Denotemos $y = (x_0, t)$ en $E \times (0, 1)$. Observar que podemos extender $E \times (0, 1)$ a un (cs, u) -entorno producto $(E \cup \partial E) \times (0, 1)$. Denotemos y' al punto (x'_0, t) en dichas coordenadas.

Definamos ahora $F : W^{cs}(x_0) \setminus E \rightarrow W^{cs}(y)$ como

$$F(x) = p_{\gamma_x}(y').$$

Afirmación. La definición de F no depende de la elección de γ_x .

Demostración de la afirmación. Si $\gamma'_x : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(x_0) \setminus E$ es otra curva tal que $\gamma'_x(0) = x'_0$ y $\gamma'_x(1) = x$, tenemos que probar que $\gamma'^{-1}_x * \gamma_x$ levanta a una curva cerrada $(\gamma_x * \gamma'^{-1}_x)_{y'}$ de y' a sí mismo.

Por la primera Afirmación tenemos que $\gamma'^{-1}_x * \gamma_x$ es homotópica a extremos fijos en $W^{cs}(x_0) \setminus E$ a una cierta curva cerrada $\alpha : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(x_0) \setminus E$ tal que $\alpha([0, 1]) \subset \partial E$. Esta homotopía se levanta a una homotopía a extremos fijos contenida en $W^{cs}(y')$ entre $(\gamma'^{-1}_x * \gamma_x)_{y'}$ y $\alpha_{y'}$, con $\alpha_{y'}$ siendo el levantado de α a partir de y' .

Recordar que $y' \in (E \cup \partial E) \times \{t\}$. Veamos que $\alpha_{y'}$ tiene que ser una curva cerrada. Puesto que $\alpha_{y'}([0, 1])$ está contenida en $W^{cs}(y')$, esto implica que $\alpha_{y'}([0, 1]) \subset (\partial E \times \{t\})$ y por lo tanto $\alpha_{y'}(1) = (\partial E \times \{t\}) \cap L_{x'_0} = y'$. Esto prueba la afirmación.

Tenemos entonces un mapa bien definido $F : W^{cs}(x_0) \setminus E \rightarrow W^{cs}(y)$. Podemos extender F a E como: $F(x) = (x, t)$ para todo $x \in E$. Tenemos entonces

$$F : W^{cs}(x_0) \rightarrow W^{cs}(y)$$

El mapa F es claramente un homeomorfismo local inyectivo. Para ver que es sobreyectivo, observemos que si tomamos $\eta > 0$ número de Lebesgue del cubrimiento $\bigcup_{0 \leq i \leq k} V_i$ entonces para todo $z \in F(W^{cs}(x_0))$ se tiene que cumplir que $B_\eta^{cs}(z) \subset F(W^{cs}(x_0))$. Luego no puede existir un punto $z' \in \partial F(W^{cs}(x_0))$ ya que estaría acumulado por puntos de $F(W^{cs}(x_0))$. Concluimos que F es sobreyectivo y esto implica que $W^{cs}(y) \subset \mathcal{V}$ puesto que $E \times \{t\}$ y cada L_x están contenidos en \mathcal{V} . \square

5.2.4. Un comentario sobre la prueba

La prueba del Teorema A ya finalizó, sin embargo vale hacer un pequeño comentario respecto a la misma. Justificaremos en la digresión siguiente el uso de las técnicas de Hiraide [H01] para descartar la existencia de \mathcal{R} .

Decimos que dos foliaciones \mathcal{W} y \mathcal{W}^{h} son *transversas* si $T_x M = T_x \mathcal{W}(x) \oplus T_x \mathcal{W}^{\text{h}}(x)$ para todo $x \in M$.

En caso de ser foliaciones C^0 decimos que son *transversas* si todo punto tiene un entorno homeomorfo a $[0, 1]^n \times [0, 1]^m$ con cada $[0, 1]^n \times \{y\}$ correspondiendo a placas de \mathcal{W} y cada $\{x\} \times [0, 1]^m$ correspondiendo a placas de \mathcal{W}^{h} .

Decimos que dos foliaciones \mathcal{W} y \mathcal{W}' tienen *estructura de producto global* si para todo par de hojas W de \mathcal{W} y W' de \mathcal{W}' se cumple que W y W' se intersectan y dicha intersección se da en un único punto de M .

El siguiente teorema fue probado inicialmente por Novikov [N65], y luego Imanishi [I74], en el contexto diferenciable. Para una prueba en el contexto C^0 ver Hector-Hirsch [HH87, Theorem 2.2.1]:

Teorema 5.20. *Sean $(\mathcal{W}, \mathcal{W}^{\text{h}})$ un par de foliaciones transversas en M variedad cerrada tal que \mathcal{W} es de codimensión uno y toda hoja de \mathcal{W} tiene grupo de holonomía trivial. Entonces el levantamiento $(\tilde{\mathcal{W}}, \tilde{\mathcal{W}}^{\text{h}})$ al cubrimiento universal \tilde{M} tiene estructura de producto global.*

Por medio del teorema anterior es posible obtener la transitividad de los difeomorfismos de Anosov de codimensión uno con una prueba alternativa a la original de Newhouse:

Teorema 5.21. *Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de Anosov de codimensión uno. Entonces f es transitivo.*

Demostración. Se asumirá familiaridad con los difeomorfismos de Anosov.

En caso de que el difeomorfismo f no sea transitivo entonces el conjunto no errante $\Omega(f)$ se descompone como la unión disjunta de finitos cerrados invariantes $\Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_k$ (ver “descomposición espectral” [KH95, Section 18.3.]). Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $\dim(E^u) = 1$. Luego alguna pieza Λ_i de la descomposición es un repulsor y por lo tanto es saturada por hojas de la foliación estable de f .

Puesto que cada hoja de la foliación estable es difeomorfa a $\mathbb{R}^{\dim M - 1}$ y Λ_i es un cerrado con interior vacío entonces Λ_i es transversalmente un conjunto de Cantor. Luego, en particular por existir más de una hoja estable contenida en Λ_i , a partir del Teorema 5.20 deducimos que

$$(W_+^u(x) \setminus x) \cap \Lambda_i \neq \emptyset$$

para todo $x \in \Lambda_i$. Observar que asumimos implícitamente que \mathcal{W}^u está orientada, en caso de no ser orientable podemos considerar el cubrimiento doble orientable de \mathcal{W}^u y probar la transitividad en el levantado.

Luego para cada $x \in \Lambda_i$ sea $[x, x + \delta_x]^u$ tal que

$$[x, x + \delta_x]^u \cap \Lambda_i = \{x, x + \delta_x\}.$$

Posiblemente $\delta_x = 0$ para muchos $x \in \Lambda_i$ pero con seguridad existe algún $x \in \Lambda_i$ tal que $\delta_x > 0$ por ser Λ_i transversalmente Cantor. Más aún, existe

$$\delta_{\text{máx}} = \text{máx}\{\delta_x : x \in M\} > 0$$

puesto que si $x_n \rightarrow x$ con $x_n \in \Lambda_i$ y $\delta_{x_n} \rightarrow \infty$ entonces $x \in \Lambda_i$ y $(W_+^u(x) \setminus x) \cap \Lambda_i = \emptyset$ lo cual por el Teorema 5.20 vimos que no ocurre.

Iteremos ahora para el futuro. Los segmentos inestables crecen en longitud y, puesto que Λ_i es invariante, esto contradice la existencia de $\delta_{\text{máx}}$. \square

La prueba anterior puede adaptarse naturalmente al siguiente escenario:

Proposición 5.22. *Sean $(\mathcal{W}, \mathcal{W}^{\text{h}})$ un par de foliaciones transversas en M variedad cerrada tal que \mathcal{W} es de codimensión uno. Supongamos que existe $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo que preserva las foliaciones \mathcal{W} y \mathcal{W}^{h} y tal que f expande a futuro las hojas de \mathcal{W}^{h} . Entonces si todas las hojas de \mathcal{W} tienen holonomía trivial no puede existir un cerrado no trivial Λ , saturado por hojas de \mathcal{W} e invariante por f .*

El comentario respecto a la prueba realizada viene a continuación. Una primera idea para descartar la existencia de \mathcal{R} podría ser usar la proposición anterior. Si bien se probó que las hojas centro-estables en \mathcal{R} tienen holonomía trivial (consecuencia de la Proposición 5.14), no es posible asegurar esto para todas las hojas centro-estables en $M \setminus \mathcal{R}$, es decir, para las hojas centro-estables de puntos del conjunto malo \mathcal{B} .

Esto es debido a que la topología de una hoja centro-estable que pasa por \mathcal{B} puede no reducirse a la de las hojas centrales contenidas en ella (recordar que para toda central \mathcal{C} sí se cumple $\text{Hol}^u(\mathcal{C}) = \text{Id}$). Es decir, para toda hoja centro-estable en M a priori no vale la Proposición 5.14 que describe a las hojas centro-estables de \mathcal{R} como fibrados con base una hoja central y fibras variedades estables (difeomorfas a $\mathbb{R}^{\dim E^s}$).

Recordar que para una central \mathcal{C} denotamos $W^s(\mathcal{C})$ a $\bigcup_{x \in \mathcal{C}} W^s(x)$. Veremos en la próxima sección cómo, y esto vale en general para cualquier codimensión,

existen centrales \mathcal{C} en \mathcal{B} tales que $W^s(\mathcal{C}) \not\subseteq W^{cs}(\mathcal{C})$ (ver Proposición 5.23). Luego, para una tal hoja centro-estable $W^{cs}(\mathcal{C})$ podría existir a priori un loop γ que sea una concatenación de segmentos estables y centrales de forma tal que γ no sea homotópico en $W^{cs}(\mathcal{C})$ a un loop contenido en una hoja central. La topología de $W^{cs}(\mathcal{C})$ podría ser tremendamente complicada! De ahí que no podemos asegurar que toda hoja centro-estable tenga holonomía trivial y que no podamos usar la Proposición 5.22 para descartar la existencia de \mathcal{R} .

Vale la pena un comentario más. Otra posibilidad hubiera sido adaptar la prueba original de Newhouse [N70] para la transitividad de los difeomorfismos de Anosov de codimensión uno. En dicha prueba también se descarta la existencia de un repulsor de codimensión uno.

La adaptación natural de dicha prueba sería seguir los mismos pasos sólo que en este caso en vez de puntos se tiene hojas centrales compactas y en lugar de variedades estables se tienen variedades centro-estables. Si bien ciertas partes de la prueba funcionan de la misma forma, en cierto momento para ejecutar un argumento de tipo separación de Jordan se usan dos cosas que no podemos afirmar en nuestro caso: que las variedades estables (en nuestro caso centro-estables) son homeomorfas a \mathbb{R}^{n-1} y que todo punto (en nuestro caso hoja central) tenga un entorno cuyo borde es una bola euclídea ∂B_n .

Más aún, la prueba de Newhouse usa un argumento en cierta forma más “global”, lo que en nuestro caso es una desventaja puesto que puede implicar tener que trabajar con la topología de hojas centro-estable de \mathcal{B} y cerca de la región “mala” donde se pierde el control de la topología cociente en el espacio de hojas.

El argumento de Hiraide tiene la particularidad de que se desarrolla en un entorno del repulsor \mathcal{R} , es decir, “lejos” del conjunto malo \mathcal{B} donde se encuentran las dificultades mayores.

5.3. Breves comentarios en codimensión arbitraria

En general no se sabe si puede existir un ejemplo de parcialmente hiperbólico con foliación central compacta no uniformemente compacta.

Permitámonos una pequeña digresión, para nada exhaustiva, respecto a este escenario general.

Supongamos que el conjunto malo \mathcal{B} es no vacío. Como en [G12] podemos considerar en \mathcal{B} hojas centrales \mathcal{C} de volumen recurrente, es decir, tales que existe $n_k \rightarrow \infty$ y $V > 0$ tal que $\text{vol}(f^{n_k}\mathcal{C}) \rightarrow V$. La existencia de tales hojas queda

garantizada, por ejemplo, usando el lema de recurrencia de Poincaré (ver Gogolev [G12] o De Martino [DM17, Proposición 5.3.]).

Supongamos para lo que sigue que $\dim(E^c) = 1$. Veamos que se cumple la siguiente proposición:

Proposición 5.23. *Para toda central \mathcal{C} en \mathcal{B} de volumen recurrente se cumple que $W^s(\mathcal{C}) \not\subseteq W^{cs}(\mathcal{C})$.*

En particular, vemos con la proposición anterior que la Proposición 5.14 no se verifica para toda hoja centro-estable en M .

Usaremos para probar la proposición el siguiente lema (ver Proposition 3.7 en [G12]), análogo al Lema 5.13:

Lema 5.24. *Para todo $x \in \mathcal{C}$ con \mathcal{C} de volumen recurrente se cumple que $W^s(x) \cap \mathcal{C}$ es un conjunto finito de puntos con menos de N elementos para cierto $N > 0$.*

Demostración. Podemos cubrir \mathcal{B} por finitos entornos foliados U_1, \dots, U_k de la foliación \mathcal{W}^c . Sea $\gamma > 0$ número de Lebesgue del cubrimiento. Sea $v > 0$ menor al volumen mínimo de placa central de entre todos los U_1, \dots, U_k .

Veamos que $W^s(x) \cap \mathcal{C}$ no puede contener más de $\frac{V+1}{v}$ puntos. Si $W^s(x) \cap \mathcal{C}$ contuviera x_1, \dots, x_n puntos distintos con $n > \frac{V+1}{v}$ entonces tendríamos

$$\text{diám}\{f^{n_k}(x_1), \dots, f^{n_k}(x_n)\} < \gamma$$

para todo n_k suficientemente grande. Luego para cada uno de estos n_k el conjunto $\{f^{n_k}(x_1), \dots, f^{n_k}(x_n)\}$ estaría contenido en algún elemento U_i . Puesto que para cada $f^{n_k}(x_j)$ corresponde una placa central distinta por ser $\{f^{n_k}(x_1), \dots, f^{n_k}(x_n)\}$ parte de una misma estable local entonces se contradice que $\text{vol}(f^{n_k}\mathcal{C}) \rightarrow V$. \square

Decimos que una cierta transformación T es periódica si existe $k > 0$ tal que $T^k = \text{Id}$. Recordemos un clásico teorema de Montgomery [M37]:

Teorema 5.25 (Montgomery). *Sea $T : X \rightarrow X$ un homomorfismo en X una variedad topológica. Si toda órbita de T es periódica entonces T es periódico.*

Podemos probar ahora la proposición enunciada:

Demostración de la Proposición 5.23. Supongamos que $W^s(\mathcal{C}) = W^{cs}(\mathcal{C})$. Fijemos $x \in \mathcal{C}$.

La observación crucial es que en este caso se cumple que

$$\#\{\mathcal{C}_y \cap W^s(x)\} < \infty$$

para todo $y \in W^s(x)$. Veamos por qué. Si esto no ocurre entonces existe $y \in W^s(x)$ y $z \in \mathcal{C}_y$ de forma tal que z está acumulado por puntos de $\mathcal{C}_y \cap W^s(x)$. Dado que $z \in W^s(w)$ para cierto $w \in \mathcal{C}_x$ entonces transportando por holonomía estable se obtiene que w está acumulado por puntos de $\mathcal{C}_x \cap W^s(x)$, lo cual contradice el Lema 5.24.

Fijemos una orientación de \mathcal{W}^c . Obtenemos entonces que para todo $y \in W^s(x)$ existe un primer retorno bien definido $T(y)$ de \mathcal{C}_y a $W^s(x)$.

Este primer retorno nos define entonces un homeomorfismo $T : W^s(x) \rightarrow W^s(x)$ que, por ser $\mathcal{C}_y \cap W^s(x)$ finito para cada $y \in W^s(x)$, cumple que todas sus órbitas son finitas. Luego a partir del teorema de Montgomery obtenemos que existe $k > 0$ tal que $T^k = \text{Id}$.

Esto contradice el hecho de que \mathcal{C} , por ser una central en \mathcal{B} , está acumulada por hojas centrales de $W^{cs}(x)$ de largo arbitrariamente grande o, equivalentemente, que $|\text{Hol}^s(\mathcal{C})| = \infty$. \square

Obtenemos como corolario de la discusión precedente:

Corolario 5.26. *Sea \mathcal{W}^c foliación central compacta con $\dim(E^c) = 1$. Entonces \mathcal{W}^c es uniformemente compacta si y sólo si $W^s(\mathcal{C}) = W^{cs}(\mathcal{C})$ para toda central \mathcal{C} en M .*

El corolario anterior puede encontrarse en [G12] o [C15]. De hecho, es la versión para dimensión central uno de [C15, Theorem 2]:

Teorema 5.27 ([C15]). *Sea \mathcal{W}^c foliación central compacta. Entonces \mathcal{W}^c es uniformemente compacta si y sólo si $W^s(\mathcal{C}) = W^{cs}(\mathcal{C})$ para toda central \mathcal{C} en M .*

La prueba de este teorema usa una versión generalizada del teorema de Montgomery para acciones de grupos cuyas órbitas son todas finitas (ver [E76]).

Como vemos, la existencia de hojas centrales \mathcal{C} para las que $W^s(\mathcal{C}) \subsetneq W^{cs}(\mathcal{C})$ está en la esencia misma del problema.

En caso de que $W^s(\mathcal{C}) \subsetneq W^{cs}(\mathcal{C})$, definamos el *borde accesible* de $W^s(\mathcal{C})$ en $W^{cs}(\mathcal{C})$: Consideremos Γ^s el conjunto de curvas $\alpha : [0, 1] \rightarrow W^{cs}(\mathcal{C})$ tales que $\dot{\alpha} \in E^c$, $\alpha([0, 1) \subset W^s(\mathcal{C})$ y $\alpha(1) \notin W^s(\mathcal{C})$. Definimos en Γ^s la siguiente relación de equivalencia: Decimos que dos curvas α_0 y α_1 en Γ^s son equivalentes si existe una

homotopía continua $\alpha_t|_{t \in [0,1]} \subset \Gamma^s$ entre α_0 y α_1 de forma tal que $\alpha_t(1) = \alpha_0(1)$ para todo $t \in [0, 1]$. Luego el *borde accesible* de $W^s(\mathcal{C})$ se define como:

$$\partial \bigcup_{x \in \mathcal{C}} W^s(x) := \{[\alpha] : \alpha \in \Gamma^s\}$$

Mediante un estudio en detalle del borde accesible Gogolev [G12] (ver también De Martino [DM17] para una exposición de dicho resultado) prueba que el borde accesible de toda central volumen recurrente debe ser vacío si $\dim(E^c) = 1$ y $\dim(E^2) \leq 2$ y $\dim(E^u) \leq 2$. Junto con el Corolario 5.26 se obtiene entonces:

Teorema 5.28 ([G12]). *Sea \mathcal{W}^c la foliación central de un parcialmente hiperbólico dinámicamente coherente tal que $\dim(E^c) = 1$, $\dim(E^s) \leq 2$ y $\dim(E^u) \leq 2$. Si \mathcal{W}^c es compacta entonces es uniformemente compacta.*

6. Caso uniformemente compacto

El objetivo de lo que resta del presente texto es exponer la estructura de ideas usadas por Bohnet en [B13] para la clasificación de difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con foliación central uniformemente compacta de codimensión uno.

De ahora en más suponemos que $f : M \rightarrow M$ es un difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliación central uniformemente compacta tal que $\dim E^u = 1$.

Observación 6.1. Suponemos de ahora en más que E^u es orientable. El resultado que obtenemos valdrá entonces en general a menos de tomar un cubrimiento doble que oriente a E^u .

6.1. El espacio de hojas centrales

Sea M/\mathcal{W}^c el *espacio de hojas centrales*, es decir, el espacio topológico cociente de M por la relación de equivalencia

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x \text{ e } y \text{ pertenecen a la misma hoja de } \mathcal{W}^c.$$

Observación 6.2. Como \mathcal{W}^c es uniformemente compacta entonces M/\mathcal{W}^c es Hausdorff.

Demostración. Se deduce de la continuidad de \mathcal{W}^c y el volumen acotado de hojas. \square

Más aún, veamos que M/\mathcal{W}^c es un espacio métrico compacto con la *distancia de Hausdorff*:

$$d_H(\mathcal{C}, \mathcal{C}') = \max\{\max_{x \in \mathcal{C}} \inf_{y \in \mathcal{C}'} d(x, y), \max_{x \in \mathcal{C}'} \inf_{y \in \mathcal{C}} d(x, y)\},$$

para todo par \mathcal{C} y \mathcal{C}' de hojas centrales. Denotemos $B_\epsilon^H(\mathcal{C})$ la bola de centro \mathcal{C} y radio ϵ para la distancia d_H .

Observación 6.3. El espacio de hojas M/\mathcal{W}^c es un espacio métrico compacto con la distancia de Hausdorff d_H .

Demostración. Veamos que la topología cociente en M/\mathcal{W}^c coincide con la generada por d_H .

Sea \mathcal{C} una hoja central y U entorno de \mathcal{C} saturado por hojas de \mathcal{W}^c . Si $d = \text{dist}(\mathcal{C}, M \setminus U)$ entonces $B_d^H(\mathcal{C}) \subset U$.

Recíprocamente, sea $\epsilon > 0$. Sea $x \in \mathcal{C}$. Por la continuidad de \mathcal{W}^c existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B_\delta(x)$ entonces $\mathcal{C}_y \subset \bigcup_{z \in \mathcal{C}} B_\epsilon(z)$. Luego para $U = \bigcup_{y \in B_\delta(x)} \mathcal{C}_y$ se cumple que U es un entorno de \mathcal{C} saturado por hojas de \mathcal{W}^c tal que $U \subset B_\epsilon^H(\mathcal{C})$.

Finalmente, el espacio de hojas es compacto a partir de que la variedad M es compacta. \square

En caso de que la holonomía central sea trivial podemos decir aún más sobre M/\mathcal{W}^c :

Observación 6.4. Si $\text{Hol}(\mathcal{C}) = \text{Id}$ para toda hoja central \mathcal{C} entonces M/\mathcal{W}^c es una variedad topológica. En tal caso todas las hojas centrales son difeomorfas entre sí y M es un fibrado (topológico) con fibras las hojas centrales y base M/\mathcal{W}^c .

Demostración. Dada una central \mathcal{C} , si consideramos D un pequeño disco transversal a \mathcal{C} en el que la holonomía esté bien definida obtenemos que $\bigcup_{x \in D} \mathcal{C}_x \simeq \mathcal{C} \times D$. Dichos entornos forman un atlas de M/\mathcal{W}^c que lo dotan de estructura de variedad topológica. La proyección al espacio cociente $p : M \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ dota a M de estructura de fibrado para el que las hojas de \mathcal{W}^c son las fibras. Que M sea una variedad conexa implica que todas las hojas son difeomorfas entre sí. \square

Las próximas tres secciones (6.2, 6.3 y 6.4) están dedicadas a probar que efectivamente, si E^u es orientable y de dimensión uno como estamos asumiendo, entonces la holonomía central debe ser trivial.

6.2. El recurrente por cadenas para la dinámica cociente

Denotemos $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ a la dinámica de f en el espacio de hojas M/\mathcal{W}^c .

Observamos que los resultados de esta sección valen en cualquier codimensión siempre que \mathcal{W}^c sea uniformemente compacta.

Para todo $\epsilon > 0$ denominamos ϵ -pseudo órbita de \mathcal{C} a \mathcal{C}' a toda secuencia finita $\{\mathcal{C}_0, \dots, \mathcal{C}_n\}$ de hojas centrales tales que $d_H(F(\mathcal{C}_i), \mathcal{C}_{i+1}) < \epsilon$ para cada $i = 0, \dots, n-1$ con $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}'$.

Decimos que una central \mathcal{C} es *recurrente por cadenas* si para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ -pseudo órbita de \mathcal{C} a sí misma. Denotemos $\text{CR}(F)$ al conjunto de las hojas centrales recurrentes por cadenas y lo llamaremos *conjunto recurrente por cadenas para F* .

Para cada hoja central \mathcal{C} en $\text{CR}(F)$ definimos su *clase de recurrencia por cadenas* como

$$\text{CR}(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}' \in \mathcal{W}^c : \forall \epsilon > 0 \text{ existe } \epsilon\text{-pseudo órbita de } \mathcal{C} \text{ a } \mathcal{C}' \text{ y de } \mathcal{C}' \text{ a } \mathcal{C}\}.$$

Luego el recurrente por cadenas $\text{CR}(F)$ es la unión disjunta $\bigcup \text{CR}(\mathcal{C})$ de las clases de recurrencia por cadenas. Observar que, vistas como subconjuntos de M , las clases de recurrencia por cadenas son cerrados, saturados por hojas de \mathcal{W}^c y f -invariantes.

Lema 6.5. *La dinámica en el cociente $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ tiene sólo finitas clases de recurrencia por cadenas.*

Demostración. Supongamos que existen infinitas clases. Luego para todo $\delta > 0$ existen hojas centrales \mathcal{C} y \mathcal{C}' tales $d_H(\mathcal{C}, \mathcal{C}') < \delta$ y $\text{CR}(\mathcal{C}) \neq \text{CR}(\mathcal{C}')$.

Podemos tomar δ suficientemente chico como para que $W_{loc}^u(\mathcal{C}) \cap W_{loc}^s(\mathcal{C}') \neq \emptyset$ y $W_{loc}^u(\mathcal{C}) \cap W_{loc}^s(\mathcal{C}') \neq \emptyset$. Esto nos permite construir, para todo $\epsilon > 0$, una ϵ -pseudo órbita desde $f^{-n}(\mathcal{C})$ a $f^m(\mathcal{C}')$ y de $f^{-n}(\mathcal{C}')$ a $f^m(\mathcal{C})$ para $n, m > 0$ suficientemente grandes. Puesto que $\text{CR}(\mathcal{C})$ y $\text{CR}(\mathcal{C}')$ son invariantes esto implica que para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ -pseudo órbita de $\text{CR}(\mathcal{C})$ a $\text{CR}(\mathcal{C}')$ y viceversa. Esto contradice que $\text{CR}(\mathcal{C})$ y $\text{CR}(\mathcal{C}')$ sean clases distintas. \square

Denotemos $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ a las finitas clases de recurrencia por cadenas.

Para toda central \mathcal{C} definimos $\omega(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}' : \inf\{d(f^n \mathcal{C}, \mathcal{C}')\}_{n>0} = 0\}$ el *omega límite* de \mathcal{C} . Análogamente $\alpha(\mathcal{C}) = \{\mathcal{C}' : \inf\{d(f^n \mathcal{C}, \mathcal{C}')\}_{n<0} = 0\}$ el *alfa límite* de \mathcal{C} .

Lema 6.6. *Para toda hoja central $\mathcal{C} \subset M \setminus \text{CR}(F)$ existen clases $\Omega_i \neq \Omega_j$ tales que $\omega(\mathcal{C}) \subset \Omega_i$ y $\alpha(\mathcal{C}) \subset \Omega_j$.*

Demostración. Sea \mathcal{C} una hoja central y $\mathcal{C}' \in \omega(\mathcal{C})$. Para todo ϵ podemos construir una ϵ -pseudo órbita de \mathcal{C}' a \mathcal{C}' “saltando” en primera instancia de $f(\mathcal{C}')$ a un elemento $f^k(\mathcal{C})$ de la órbita de \mathcal{C} y luego de vuelta \mathcal{C}' cuando $f^k(\mathcal{C})$ vuelva a pasar cerca de \mathcal{C}' . De esta forma vemos que $\omega(\mathcal{C}) \subset \text{CR}(F)$ para toda central \mathcal{C} .

Supongamos que el futuro de una central \mathcal{C} acumula tanto en Ω_{i_1} como en Ω_{i_2} con $\Omega_{i_1} \neq \Omega_{i_2}$. Entonces considerando un $\delta > 0$ como en el lema anterior podemos asegurar que existen \mathcal{C}_1 en Ω_{i_1} y \mathcal{C}_2 en Ω_{i_2} tales que para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ -pseudo órbita de \mathcal{C}_1 a \mathcal{C}_2 y una de \mathcal{C}_2 a \mathcal{C}_1 . Esto contradice que Ω_{i_1} y Ω_{i_2} sean dos clases distintas.

Análogamente para el alfa límite de toda hoja central.

Tenemos entonces que para toda central $\mathcal{C} \setminus \text{CR}(F)$ existen Ω_i y Ω_j tales que $\omega(\mathcal{C}) \subset \Omega_i$ y $\alpha(\mathcal{C}) \subset \Omega_j$. Resta ver que $\Omega_i \neq \Omega_j$. Esto se obtiene observando que, en caso de que $\Omega_i = \Omega_j$, entonces para todo $\epsilon > 0$ podemos hacer una ϵ -pseudo órbita de \mathcal{C} a \mathcal{C} y esto no puede ser por que \mathcal{C} no es una central de $\text{CR}(F)$. \square

Existe un orden natural para el conjunto de clases de recurrencia por cadenas: Decimos que $\Omega_i \leq \Omega_j$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ -pseudo órbita desde una central de Ω_i a una central de Ω_j . Es directo verificar que esta relación forma un orden parcial en $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$.

Fijemos Ω_R un mínimo en $\{\Omega_1, \dots, \Omega_n\}$.

A partir del lema siguiente denominamos a Ω_R de *repulsor*.

Lema 6.7. *La clase Ω_R es saturada por hojas de la foliación \mathcal{W}^{cs} .*

Demostración. Del Lema 6.6 y el hecho de que Ω_R sea un mínimo dentro de todas las piezas se deduce que para toda central \mathcal{C} en $M \setminus \Omega_R$ el omega límite de \mathcal{C} no está contenido en Ω_R .

Por otro lado, si x es un punto de Ω_R e $y \in W^s(x)$ tenemos que $d_H(\mathcal{C}_x, \mathcal{C}_y) \rightarrow 0$ y por lo tanto $\omega(\mathcal{C}_y) \subset \Omega_R$. Deducimos que $W^s(x) \subset \Omega_R$.

Puesto que Ω_R es, entonces, saturado por hojas de \mathcal{W}^s y \mathcal{W}^c entonces es saturado por hojas de \mathcal{W}^{cs} . \square

Tenemos además el siguiente lema:

Lema 6.8. *Se cumple que $\bigcup_{\mathcal{C} \in \text{CR}(F)} \mathcal{W}^{cs}(\mathcal{C}) = M$.*

Demostración. Veamos que para toda hoja central \mathcal{C} existe alguna clase Ω_i tal que $\mathcal{W}^{cs}(\mathcal{C}) \cap \Omega_i \neq \emptyset$.

Sea \mathcal{C} central en M . El Lema 6.6 nos dice que existe alguna clase Ω_i tal que $\omega(\mathcal{C}) \subset \Omega_i$. Luego existe $n > 0$ suficientemente grande como para que exista $\mathcal{C}' \in \Omega_i$ y $x \in W_{loc}^s(f^n(\mathcal{C})) \cap W_{loc}^u(\mathcal{C}')$. Luego por un lado $\alpha(\mathcal{C}_x) \in \Omega_i$ por estar $x \in W_{loc}^u(\mathcal{C}')$ y, por otro, $\omega(\mathcal{C}_x) = \omega(\mathcal{C})$ por estar $x \in W_{loc}^s(f^n(\mathcal{C}))$. Como $\omega(\mathcal{C}) \subset \Omega_i$ deducimos que $\mathcal{C}_x \in \Omega_i$ por Lema 6.6.

Luego $W^s(f^n(\mathcal{C}))$ intersecciona Ω_i y, por ser Ω_i invariante, también lo hace $W^s(\mathcal{C})$. \square

6.3. Transitividad en el cociente

Decimos que un sistema es *transitivo por cadenas* si el recurrente es una única clase de recurrencia. Esto es lo mismo que decir que para todo par de puntos y todo $\epsilon > 0$ existe una ϵ -pseudo órbita de un punto al otro, y viceversa.

Los últimos dos lemas probados en la sección anterior es todo lo que precisamos para implementar el argumento de Hiraide [H01] y deducir que existe una única clase de recurrencia por cadenas para $(M/\mathcal{W}^c, F)$. La siguiente proposición es [B13, Proposition 4.3.]:

Proposición 6.9. *Tenemos que $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ es transitivo por cadenas.*

Demostración. Supongamos que $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ no es transitivo por cadenas. Entonces el conjunto recurrente por cadenas se descompone como la unión de finitas clases de recurrencia $\Omega_1, \dots, \Omega_n$. Sea Ω_R un mínimo dentro de las clases.

Por lo visto en la sección anterior tenemos que Ω_R es un cerrado y f -invariante de M , saturado por hojas de \mathcal{W}^{cs} .

Análogamente a como fue construido en la sección 5.2.3 existe un entorno \mathcal{V} de Ω_R tal que para todo y suficientemente cerca de Ω_R se cumple que $W^{cs}(y) \subset \mathcal{V}$ (ver “Lema del Sandwich” 5.19). El entorno \mathcal{V} se puede considerar disjunto de las restantes clases del recurrente por cadena y esto contradice que, si y es punto cercano a Ω_R pero no contenido en Ω_R , entonces $W^{cs}(y)$ debe interseccionar alguna otra clase del recurrente por cadenas (ver Lema 6.2). \square

En general existen sistemas que son transitivos por cadenas pero no transitivos (por ejemplo, un mapa con dos puntos fijos parabólicos en S^1). Sin embargo este no es el caso si el sistema tiene la “propiedad de shadowing”.

Decimos que $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ tiene la *propiedad de shadowing* si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una δ -pseudo órbita entonces existe una órbita verdadera de F que ϵ -sombrea a $\{\mathcal{C}_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, es decir, existe \mathcal{C} central tal que

$$d_H(f^n(\mathcal{C}), \mathcal{C}_n) < \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

El siguiente teorema está probado en Bohnet-Bonatti [BB16, Theorem 2.]:

Teorema 6.10 (Shadowing). *Sea $f : M \rightarrow M$ difeomorfismo parcialmente hiperbólico con foliación central invariante y uniformemente compacta \mathcal{W}^c . Entonces el mapa inducido $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ tiene la propiedad de shadowing.*

Recordar que F es transitivo si para todo para de abiertos U y V existe $n > 0$ tal que $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$. La propiedad de shadowing y la transitividad por cadenas implican [B13, Theorem 3]:

Proposición 6.11. *El mapa $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ es transitivo.*

Demostración. Sean U y V abiertos de M/\mathcal{W}^c . Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' centrales en U y V , respectivamente. Sea $\epsilon > 0$ suficientemente chico como para que $B_\epsilon^H(\mathcal{C}) \subset U$ y $B_\epsilon^H(\mathcal{C}') \subset V$.

Sea $\delta > 0$ dado por la propiedad de shadowing para $\epsilon > 0$, es decir, tal que toda ϵ -pseudo órbita es δ -sombreada (Teorema 6.10). Puesto que F es transitivo por cadenas (Proposición 6.9) entonces existe $\{\mathcal{C}_i\}_{0 \leq i \leq n}$ una δ -pseudo órbita con $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ y $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}'$. Como dicha pseudo órbita es ϵ -sombreada por una órbita real deducimos que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$. \square

6.4. Holonomía central trivial

Una consecuencia de la demostración de la Proposición 4.7 es que si una foliación es uniformemente compacta entonces no sólo el grupo de holonomía de toda hoja es finito sino que tiene menos que K elementos para cierta constante $K > 0$ uniforme en M .

A partir de lo anterior podemos entonces considerar $\mathcal{A} \subset M$ la unión de todas las hojas de \mathcal{W}^c de holonomía máxima. Es decir, \mathcal{A} es tal que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ si y sólo si $|\text{Hol}(\mathcal{C}')| \leq |\text{Hol}(\mathcal{C})|$ para toda \mathcal{C}' hoja de \mathcal{W}^c . Es fácil ver que \mathcal{A} es f -invariante (la holonomía central lo es) y cerrado (usando el teorema de estabilidad de Reeb generalizado, Teorema 4.1).

Los puntos pertenecientes a una hoja con holonomía no trivial son exactamente los puntos en que la función volumen de hoja es discontinua. Puesto que dicha función es semicontinua inferiormente (ver Proposición 4.5) entonces es continua en un residual de puntos de M . Deducimos que en un residual la holonomía de la hoja central por dicho punto es trivial.

Si probamos entonces que \mathcal{A} coincide con M estamos probando que toda hoja tiene holonomía trivial. Eso es exactamente lo que haremos en el próximo teorema usando la transitividad de F .

El siguiente es [B13, Theorem 4]:

Teorema 6.12 (Holonomía central trivial). *Las hojas de \mathcal{W}^c tienen holonomía trivial.*

Demostración. Observar que, dado que la holonomía inestable es trivial (Lema 5.2) y como corolario de la Proposición 4.9 tenemos que $|\text{Hol}(\mathcal{C})| = |\text{Hol}^s(\mathcal{C})|$ para toda central \mathcal{C} . Luego, dado que la holonomía estable se conjuga a lo largo de hojas inestables (Lema 5.3) deducimos que \mathcal{A} es saturado por hojas de \mathcal{W}^{cu} . Notar que esta observación es completamente análoga, para el caso uniformemente compacto, a que el conjunto malo \mathcal{B} sea saturado por hojas centro-inestables (Corolario 5.4).

Como F es transitivo (Proposición 6.11) existe una hoja central \mathcal{C} con órbita futura $\{f^n(\mathcal{C})\}_{n \geq 0}$ densa. Sea \mathcal{C}' central cualquiera en \mathcal{A} . Luego existe $k \geq 0$ tal que $f^k(\mathcal{C})$ está suficientemente cerca de \mathcal{C}' como para que $W_{loc}^s(f^k(\mathcal{C}))$ intersekte a $W_{loc}^u(\mathcal{C}')$ en una hoja central \mathcal{C}'' que estará contenida \mathcal{A} por ser \mathcal{A} saturado por hojas de \mathcal{W}^{cu} .

Puesto que la órbita futura de $f^k(\mathcal{C})$ es densa y $\mathcal{C}'' \subset W_{loc}^s(f^k(\mathcal{C}))$ deducimos que la órbita futura de \mathcal{C}'' también lo es. Como $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{A}$ con \mathcal{A} cerrado y F -invariante deducimos $M = \mathcal{A}$ como se quería probar. \square

Llegados a este punto tenemos que M es un fibrado con fibras las hojas centrales y base la variedad topológica M/\mathcal{W}^c . Las dos secciones finales están dedicadas a ver que M/\mathcal{W}^c es homeomorfa al toro \mathbb{T}^d y que la dinámica en M/\mathcal{W}^c es conjugada a la de un automorfismo lineal hiperbólico.

6.5. Conjugación de la dinámica cociente con un Anosov lineal

En [F70] Franks prueba que todo difeomorfismo de Anosov transitivo de codimensión uno es conjugado a un automorfismo lineal en el toro.

Lo que sigue son argumentos hasta cierto punto estándar para probar una tal conjugación. Por razones de completitud hacemos un outline de los mismos.

Un detalle a tener en cuenta aquí es que a priori M/\mathcal{W}^c es una variedad topológica y la dinámica en el cociente $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ es lo que llamaremos un *Anosov topológico* (ver la próxima subsección para una definición). De todas formas, una versión simplificada de la prueba de Franks realizada por Hiraide en [H01] nos da una guía que puede traducirse a nuestro escenario. Seguiremos en parte dicha prueba y en parte seguiremos otro camino usando otros resultados como el ya mencionado de estructura de producto global en el cubrimiento universal para ciertas foliaciones transversas (Teorema 5.20) o un teorema de Hölder para acciones libres en la recta.

6.5.1. Dinámica cociente es Anosov topológico

Por lo visto en la sección anterior tenemos que las hojas de \mathcal{W}^c no tienen holonomía. Luego toda central tiene un entorno producto dado por el teorema de estabilidad de Reeb generalizado (ver Teorema 4.1). No es difícil adaptar entonces la Proposiciones 5.12 y 5.14 para ver que para toda hoja centro-estable (o centro-inestable) W y para toda hoja central $\mathcal{C} \subset W$ se cumple que $W^s(x) \cap \mathcal{C} = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{C}$ (o $W^u(x) \cap \mathcal{C} = \{x\}$ para todo $x \in \mathcal{C}$). Obtenemos entonces que las hojas centro-estables y centro-inestables son homeomorfas a $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^{\dim E^s}$ y $\mathcal{C} \times \mathbb{R}^{\dim E^u}$, con $\{x\} \times \mathbb{R}^{\dim E^s}$ y $\{x\} \times \mathbb{R}^{\dim E^u}$ correspondiendo a hojas estables e inestables, respectivamente, y $\mathcal{C} \times \{y\}$ correspondiendo a hojas centrales.

Luego las foliaciones \mathcal{W}^{cs} y \mathcal{W}^{cu} descienden a M/\mathcal{W}^c a foliaciones topológicas \mathcal{L}^s y \mathcal{L}^u cuyas hojas son, respectivamente, homeomorfas a $\mathbb{R}^{\dim E^s}$ y $\mathbb{R}^{\dim E^u}$.

Observación 6.13. Sean \mathcal{C} y \mathcal{C}' dos centrales en una misma hoja de \mathcal{L}^s . Luego $d_H(F^n(\mathcal{C}), F^n(\mathcal{C}')) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ exponencialmente con n . Análogamente para el pasado si \mathcal{C} y \mathcal{C}' en una misma hoja de \mathcal{L}^u .

Demostración. Como \mathcal{C} y \mathcal{C}' están en una misma estable de \mathcal{L}^s entonces $\mathcal{C}' \subset W^s(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C} \subset W^s(\mathcal{C}')$. Podemos considerar entonces $r > 0$ tal que $\mathcal{C}' \subset B_r^s(\mathcal{C})$ y $\mathcal{C} \subset B_r^s(\mathcal{C}')$. Luego $f^n(\mathcal{C}') \subset B_{C\lambda^{-n}}^s(\mathcal{C})$ y $f^n(\mathcal{C}) \subset B_{C\lambda^{-n}}^s(\mathcal{C}')$ para ciertos $\lambda > 1$ y $C > 0$ que se obtienen a partir de ser f parcialmente hiperbólico. Deducimos que $d_H(F^n(\mathcal{C}), F^n(\mathcal{C}')) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ exponencialmente.

Para dos centrales contenidas en una misma inestable es análogo iterando para el pasado. □

La dinámica en el cociente es entonces un homeomorfismo $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ en una variedad topológica M/\mathcal{W}^c que preserva dos foliaciones topológicas transversas \mathcal{L}^s y \mathcal{L}^u de forma tal que

$$d_H(F^n(\mathcal{C}), F^n(\mathcal{C}')) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

exponencialmente con n si \mathcal{C} y \mathcal{C}' en una misma hoja de \mathcal{L}^s y

$$d_H(F^{-n}(\mathcal{C}), F^{-n}(\mathcal{C}')) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

exponencialmente con n si \mathcal{C} y \mathcal{C}' en una misma hoja de \mathcal{L}^u . Denominaremos a esto de *Anosov topológico*.

6.5.2. Cubrimiento universal es \mathbb{R}^d y el grupo fundamental es abeliano libre

Tenemos que \mathcal{L}^s y \mathcal{L}^u son dos foliaciones transversas, con \mathcal{L}^s de codimensión uno y sin holonomía puesto que sus hojas son homeomorfas a $\mathbb{R}^{\dim(E^s)}$. Luego por el Teorema 5.20 anteriormente citado (ver [HH87, Theorem 2.2.1]) tenemos que el levantamiento $(\tilde{\mathcal{L}}^s, \tilde{\mathcal{L}}^u)$ al cubrimiento universal $\pi : \widetilde{M/\mathcal{W}^c} \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ tiene estructura de producto global.

En particular, obtenemos que $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ es homeomorfo a \mathbb{R}^d con $d = \dim(E^s) + \dim(E^u)$.

Sea $\mathcal{G}^s = (\widetilde{M/\mathcal{W}^c})/\tilde{\mathcal{L}}^s$ el espacio de hojas estables en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$. Tenemos entonces que $\mathcal{G}^s \simeq \mathbb{R}$ y que cada elemento de $\pi_1(M/\mathcal{W}^c)$ actúa en \mathcal{G}^s sin puntos fijos ya que de lo contrario las hojas de \mathcal{L}^s no serían todas homeomorfas a $\mathbb{R}^{\dim E^s}$.

Usaremos el siguiente teorema de Hölder. Para una prueba ver, por ejemplo, [N07, Propositiones 2.36 y 2.37].

Teorema 6.14 (Hölder). *Si Γ es un grupo que actúa libremente por homeomorfismos de la recta, entonces Γ es isomorfo a un subgrupo de $(\mathbb{R}, +)$.*

Como consecuencia del teorema obtenemos que $\pi_1(M/\mathcal{W}^c)$ es abeliano libre y, por ser finitamente generado, deducimos que $\pi_1(M/\mathcal{W}^c) \simeq \mathbb{Z}^m$ para cierto $m \in \mathbb{Z}^+$.

Notar que aún no podemos asegurar que M/\mathcal{W}^c sea homeomorfo al toro \mathbb{T}^d con $d = \dim E^s + \dim E^u$. En particular, no podemos afirmar aún que m sea igual a d .

6.5.3. Construcción de la conjugación

Nos dirigimos a probar que el homeomorfismo $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ es conjugado a un automorfismo lineal hiperbólico en el toro \mathbb{T}^d .

Lema 6.15. *Podemos asumir que F tiene un punto fijo.*

Demostración. Veamos primero que F tiene algún punto periódico. De la estructura de producto local de las foliaciones \mathcal{L}^s y \mathcal{L}^u tenemos que existe $\alpha > 0$ constante de expansividad de F . Dado que tenemos la propiedad de shadowing para F (ver Teorema 6.10) entonces existe $\delta > 0$ tal que toda δ -pseudo órbita es $\frac{\alpha}{2}$ -sombreada.

Sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una δ -pseudo órbita periódica, es decir, tal que $x_i = x_{i+r}$ para todo i y cierto $r \in \mathbb{Z}^+$ (puede obtenerse una tal pseudo órbita “cerrando” una órbita cualquiera cerca de su omega límite). Existe entonces z tal que $\{F^i(z)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una órbita que $\frac{\alpha}{2}$ -sombrea a $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Dado que la órbita de $F^r(z)$ cumple que $\frac{\alpha}{2}$ -sombrea a $\{x_{i+r}\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ deducimos que las órbitas de z y $F^r(z)$ se mantienen siempre a distancia menor que α . Luego $F^r(z) = z$ y obtenemos un punto periódico para F .

Tenemos entonces que F^r tiene algún punto fijo para algún $r \in \mathbb{Z}^+$. Luego si probamos que $G = F^r$ es conjugado a un automorfismo lineal hiperbólico en el toro entonces F es homotópico a un automorfismo lineal hiperbólico. El índice de Lefschetz para una matriz hiperbólica es no nulo y es un invariante por homotopías (ver e.g. [C18]), como consecuencia obtenemos que F tiene un punto fijo. \square

Sea $p \in M/\mathcal{W}^c$ punto fijo de F . Sea \tilde{p} un levantado de p y $\tilde{F} : \widetilde{M/\mathcal{W}^c} \rightarrow \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ levantado de F tal que $\tilde{F}(\tilde{p}) = \tilde{p}$.

Consideraremos en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ el *pull-back* por π de la métrica d_H en M/\mathcal{W}^c :

Afirmación 6.16. *Existe una métrica \tilde{d}_H en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ tal que $\pi : \widetilde{M/\mathcal{W}^c} \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ es una isometría local y tal que las transformaciones de recubrimiento para $\pi : \widetilde{M/\mathcal{W}^c} \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ son isometrías.*

Demostración. Explícitamente esta métrica puede construirse de la siguiente forma. Sea $\epsilon > 0$ de forma tal de que para todo $z \in M/\mathcal{W}^c$ se cumpla que $\pi^{-1}(B_\epsilon(z))$ es una unión disjunta $\sqcup_{\tilde{z} \in \pi^{-1}(z)} B_\epsilon(\tilde{z})$ con $\pi : B_\epsilon(\tilde{z}) \rightarrow B_\epsilon(z)$ homeomorfismo. Luego, dados \tilde{z} y \tilde{w} en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$, consideramos todas las curvas continuas γ de \tilde{z} a \tilde{w} , todos los subcubrimientos finitos posibles de estas curvas $B_\epsilon(\tilde{z}_0), \dots, B_\epsilon(\tilde{z}_{n+1})$ y todos los finitos puntos $x_0 = \tilde{z}, x_1, \dots, x_n = \tilde{w}$ en γ tales que $x_i \in B_\epsilon(\tilde{z}_i) \cap B_\epsilon(\tilde{z}_{i+1})$

para $0 \leq i \leq n$ y definimos $\tilde{d}_H(\tilde{z}, \tilde{w})$ como el ínfimo de todas las posibles sumas finitas $\sum_{0 \leq i \leq n} d_H(x_i, x_{i+1})$ construidas de esta manera. Para $\epsilon > 0$ suficientemente chico esto define una distancia como buscamos. \square

Análogamente a como se construye la métrica \tilde{d}_H pueden construirse métricas intrínsecas \tilde{d}_H^s y \tilde{d}_H^u dentro de las hojas de $\tilde{\mathcal{L}}^s$ y $\tilde{\mathcal{L}}^u$, respectivamente. Luego usando la Observación 6.13 se obtiene que \tilde{d}_H^s y \tilde{d}_H^u expanden infinitamente las distancias a pasado y futuro, respectivamente.

Como consecuencia de la estructura de producto global de $\tilde{\mathcal{L}}^s$ y $\tilde{\mathcal{L}}^u$ en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ y de que las hojas de $\tilde{\mathcal{L}}^s$ y $\tilde{\mathcal{L}}^u$ son uniformemente propiamente encajadas en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ se obtiene:

Lema 6.17 (Expansividad infinita). *Si z y z' son puntos distintos en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ entonces $\sup_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{d}_H(\tilde{F}^i(z), \tilde{F}^i(z')) = \infty$.*

Demostración. Pongamos coordenadas favorables en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$. Para $x \in \tilde{L}^s(\tilde{p})$ e $y \in \tilde{L}^u(\tilde{p})$ sea $(x, y) = \tilde{L}^u(x) \cap \tilde{L}^s(y)$. Puesto que $\tilde{L}^s(\tilde{p})$ y $\tilde{L}^u(\tilde{p})$ son fijas por \tilde{F} tenemos que en estas coordenadas $\tilde{F}(x, y) = (\tilde{F}(x), \tilde{F}(y))$.

Sean $z = (x, y)$ y $z' = (x', y')$ puntos distintos en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $x \neq x'$. Puesto que $(x, y) \in \tilde{L}^u(x)$ y $(x', y') \in \tilde{L}^u(x')$ entonces $\tilde{d}_H(\tilde{F}^{-n}(x, y), \tilde{F}^{-n}(x)) \xrightarrow{n} 0$ y $\tilde{d}_H(\tilde{F}^{-n}(x', y'), \tilde{F}^{-n}(x')) \xrightarrow{n} 0$. Luego si vemos que $\tilde{d}_H(\tilde{F}^{-n}(x), \tilde{F}^{-n}(x')) \xrightarrow{n} +\infty$ entonces el lema queda probado.

Como x y x' en $\tilde{L}^s(\tilde{p})$ tenemos que $\tilde{d}_H^s(\tilde{F}^{-n}(x), \tilde{F}^{-n}(x')) \xrightarrow{n} +\infty$. Supongamos ahora que existe $\{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ subsucesión tal que $\tilde{d}_H(\tilde{F}^{-n_k}(x), \tilde{F}^{-n_k}(x')) \leq N$ para cierto $N > 0$ y todo n_k . En tal caso es posible trasladar a cada par $\tilde{F}^{-n_k}(z)$ y $\tilde{F}^{-n_k}(z')$ por una transformación de recubrimiento que lleve a $\tilde{F}^{-n_k}(z)$ a un punto w_k que esté a distancia menor o igual que $\text{diám}(M/\mathcal{W}^c)$ de \tilde{p} . De esta forma podemos construir puntos w y w' con w' en $\tilde{B}_N(w)$ de forma tal de que w está acumulado por puntos $\{w_k\}_k$ y w' por puntos $\{w'_k\}_k$ (siendo cada w'_k el trasladado de $\tilde{F}^{-n_k}(z')$ por la misma transformación) que cumplen que $w'_k \in \tilde{L}^s(w_k)$ y $\tilde{d}_H^s(w_k, w'_k) \xrightarrow{k} +\infty$ (puesto que estas dos propiedades de mantienen por transformaciones de recubrimiento).

Por la estructura de producto global de $\tilde{\mathcal{L}}^s$ y $\tilde{\mathcal{L}}^u$ existe $N' > 0$ de forma tal de que $\tilde{B}_N(w) \subset \tilde{B}_{N'}^s(\tilde{p}) \times \tilde{B}_{N'}^u(\tilde{p})$. Cada hoja de $\tilde{\mathcal{L}}^s$ intersecta a una única placa de $\tilde{B}_{N'}^s(\tilde{p}) \times \tilde{B}_{N'}^u(\tilde{p})$ y, puesto que el diámetro de estas placas está acotado, esto contradice que cada par w_k y w'_k debe estar en una misma placa y a su vez $\tilde{d}_H^s(w_k, w'_k) \xrightarrow{k} +\infty$. \square

Usaremos la siguiente versión de la propiedad de shadowing para \tilde{F} .

Lema 6.18 (Shadowing). *Para todo $L > 0$ existe $K_L > 0$ tal que toda L -pseudo órbita de \tilde{F} para la distancia \tilde{d}_H es K_L -sombreada por un único punto z en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$.*

Demostración. Usemos en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ las coordenadas que consideramos en el lema anterior. Es decir, para $x \in \tilde{L}^s(\tilde{p})$ e $y \in \tilde{L}^u(\tilde{p})$ sea $(x, y) = \tilde{L}^u(x) \cap \tilde{L}^s(y)$. Puesto que $\tilde{L}^s(\tilde{p})$ y $\tilde{L}^u(\tilde{p})$ son fijas por \tilde{F} tenemos que en estas coordenadas $\tilde{F}(x, y) = (\tilde{F}(x), \tilde{F}(y))$.

Sea $L > 0$ y sea $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una L -pseudo órbita para \tilde{F} . Existe $c = c(L) > 0$ tal que $\tilde{d}_H(\tilde{F}(x_i), x_{i+1}) < c$ y $\tilde{d}_H(\tilde{F}(y_i), y_{i+1}) < c$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Para cada $k \in \mathbb{Z}$ e $i \geq 0$ sea $y_k^i = \tilde{F}^{-i}(y_{k+i})$. Tenemos entonces que

$$\tilde{d}_H(y_k^i, y_k^{i+1}) < C\lambda^{-i-1}\tilde{d}_H(\tilde{F}(y_{k+i}), y_{k+i+1}) < Cc\lambda^{-i-1}$$

para ciertas constantes $C > 0$, $\lambda > 1$ dadas por la contracción exponencial de las distancias para el pasado en $\tilde{L}^u(\tilde{p})$ (ver Observación 6.13). Luego $\{y_k^i\}_{i \geq 0}$ es una sucesión de Cauchy y podemos considerar $y_k^u \in \tilde{\mathcal{L}}^u(y_k)$ el punto límite de dicha sucesión.

Sea $K_L^u = Cc \sum_{i \geq 1} \lambda^{-i}$. Para cada k tenemos entonces que $\tilde{d}_H(y_k^u, y_k) \leq K_L^u$. Por otro lado, $y_{k+1}^u = \lim_i \tilde{F}^{-i}(y_{k+1+i}) = \tilde{F}(\lim_i \tilde{F}^{-i-1}(y_{k+1+i})) = \tilde{F}(y_k^u)$. Luego $\{y_k^u\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es una órbita de \tilde{F} .

Sea $y^u = y_0^u \in \tilde{\mathcal{L}}^u(\tilde{p})$. Obtenemos entonces que la órbita de y^u por \tilde{F} cumple que K_L^u -sombrea a $\{y_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$.

Análogamente podemos construir $x^s \in \tilde{\mathcal{L}}^s(\tilde{p})$ y $K_L^s > 0$ tal que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es K_L^s -sombreada por la órbita de x^s .

Existe luego $K_L > 0$ tal que la órbita de (x^s, y^u) cumple que K_L -sombrea a $\{(x_i, y_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

A partir de la estructura de producto global de $\tilde{\mathcal{L}}^s$ y $\tilde{\mathcal{L}}^u$ tenemos que \tilde{F} es infinitamente expansivo (Lema 6.17). La unicidad del punto que sombrea se obtiene como consecuencia de esto. \square

Sea $\Pi \subset \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ el látice $\pi^{-1}(p)$. Podemos identificar Π con $\pi_1(M/\mathcal{W}^c) \simeq \mathbb{Z}^m$ de la siguiente forma: a cada loop $\gamma \in \pi_1(M/\mathcal{W}^c)$ le corresponde en Π el punto $\tilde{\gamma}(1)$ siendo $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}$ y $\pi\tilde{\gamma} = \gamma$. Se define de esta forma una biyección $\Phi : \mathbb{Z}^m \rightarrow \Pi$.

Sea $A = F_* : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ el homomorfismo inducido por F en $\pi_1(M/\mathcal{W}^c)$. Observar que, puesto que $\Phi(0) = \tilde{p}$ es fijo por \tilde{F} , se tiene que $\Phi \circ A = \tilde{F} \circ \Phi$.

Tenemos entonces por un lado a \mathbb{R}^m con la acción de la parte lineal A y la métrica euclídea y por otro a $\widetilde{M/\mathcal{W}^c} \simeq \mathbb{R}^d$ con la acción de \tilde{F} y la métrica pull-back de la métrica en M/\mathcal{W}^c . Veamos que estas acciones son conjugadas por un homeomorfismo que extiende a Φ y con esto finalizaremos la prueba del Teorema B.

Lema 6.19. *La función Φ puede extenderse a $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ continua tal que $\Phi \circ A = \tilde{F} \circ \Phi$.*

Demostración. Consideremos en \mathbb{Z}^m (y a través de las identificaciones ya mencionadas también en $\pi_1(M/\mathcal{W}^c)$ y Π) la métrica d_1 dada por la norma $\|(p_1, \dots, p_m)\|_1 = |p_1| + \dots + |p_m|$. En otras palabras, $\|\cdot\|_1$ es la *word metric* en \mathbb{Z}^m para los generadores canónicos $\{e_1, \dots, e_m\}$.

Para cada $x \in \mathbb{R}^m$ sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^m$ de forma tal que $d(A^i(x), x_i) \leq \|A\| \sqrt{m}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. En cierta forma $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ “lee” en \mathbb{Z}^m a la órbita de x por A . Se cumple entonces que $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una $(\|A\| + 1)\|A\| \sqrt{m}$ -pseudo órbita para la distancia euclídea y por lo tanto es una R -pseudo órbita para la distancia d_1 , siendo $R = (\|A\| + 1)\|A\|m$.

Sean $L = R \cdot \max\{\tilde{d}_H(\tilde{p}, \Phi(e_1)), \dots, \tilde{d}_H(\tilde{p}, \Phi(e_m))\}$. Obtenemos que $\{\Phi(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una L -pseudo órbita en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ y por lo tanto existe $K_L > 0$ como en el Lema de Shadowing 6.18. Fijemos un tal $K_L > 0$. Podemos definir $\Phi(x)$ como el único punto que K_L -sombrea a la pseudo órbita $\{\Phi(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$.

Si $\{x'_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}^m$ fuera una elección de R -pseudo órbita distinta a partir de x entonces $\{\Phi(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y $\{\Phi(x'_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ estarían a distancia acotada una de otra y por lo tanto deberían ser sombreadas por el mismo punto por la expansividad infinita de \tilde{F} en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ (Lema 6.17). Es decir, $\Phi(x)$ está bien definida para cualquier elección de $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. De esta forma hemos extendido Φ a $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$.

Veamos que Φ es continua. Sea $x \in \mathbb{R}^m$ y $\epsilon > 0$. Sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^m$ una elección de R -pseudo órbita construida a partir de x . Por como construimos el punto que sombrea en el Lema del Shadowing 6.18 tenemos que existe $S > 0$ tal que si $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ es una L -pseudo órbita para la que $z_i = \Phi(x_i)$ para todo $|i| \leq S$ entonces el punto z que K_L sombrea a $\{z_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y el punto $\Phi(x)$ están a distancia menor que ϵ . Luego si $y \in \mathbb{R}^m$ se encuentra suficientemente cerca de x podemos considerar una R -pseudo órbita asociada $\{y_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^m$ de forma tal que $y_i = x_i$ si $|i| \leq S$ y obtenemos que $\tilde{d}_H(\Phi(x), \Phi(y)) < \epsilon$.

Veamos ahora que $\Phi \circ A = \tilde{F} \circ \Phi$. Sea $x \in \mathbb{R}^m$ y sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^m$ de forma tal que $d(A^i(x), x_i) \leq \sqrt{m}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$. Luego $\{A(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{Z}^m$ cumple que

$d(A^i(A(x)), A(x_i)) \leq \|A\|\sqrt{m}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto es un R -pseudo órbita asociada a $A(x)$ como fue construida anteriormente. Obtenemos que $\Phi(A(x))$ es el único punto que K_L -sombrea a $\{\Phi(A(x_i))\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Por otro lado, $\Phi(x)$ es el único punto que K_L -sombrea a $\{\Phi(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y, a menos de ajustar la constante L original (y en consecuencia también $K_L > 0$), obtenemos que $\tilde{F}(\Phi(x))$ el único punto que K_L -sombrea $\{\tilde{F}(\Phi(x_i))\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Puesto que $\Phi \circ A = \tilde{F} \circ \Phi$ para $\Phi|_{\mathbb{Z}^m} : \mathbb{Z}^m \rightarrow \Pi$ tenemos que $\{\Phi(A(x_i))\}_{i \in \mathbb{Z}} = \{\tilde{F}(\Phi(x_i))\}_{i \in \mathbb{Z}}$ y por lo tanto $\Phi(A(x))$ y $\tilde{F}(\Phi(x))$ son el mismo punto. \square

La inyectividad de Φ , así como la construcción de una inversa continua, será consecuencia de lo siguiente:

Lema 6.20. *La parte lineal A es hiperbólica.*

Demostración. Supongamos que para A existe algún valor propio λ de módulo 1.

Veamos primero que existe un subespacio $E \subset \mathbb{R}^m$ cuyos puntos tienen órbita por A acotada. Si $\lambda = \pm 1$ podemos tomar E como el subespacio formado por los vectores propios de λ . Si por el contrario, tenemos que $\lambda = a + bi$ con $b \neq 0$ entonces la forma real de Jordan nos da que existe un subespacio E' invariante por A en el que A se escribe de la forma

$$\begin{bmatrix} C & I & & \\ & C & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & C \end{bmatrix}$$

con $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$. En tal caso se puede escoger $E \subset E'$ como el subespacio de dimensión dos en el que A es conjugado a una rotación.

Fijamos un tal subespacio E . Dado $x \in E$ sea $\{x_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una R -pseudo órbita en \mathbb{Z}^m como fue construida anteriormente en la definición de Φ . Se tiene luego que $\{\Phi(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es una L -pseudo órbita para la constante $L > 0$ ya especificada. Para esta constante L recordar que en la definición de Φ (ver prueba del Lema 6.19) hemos fijado $K_L > 0$ dado por el Lema 6.18.

Recordar que $\Phi(0) = \tilde{p}$ con \tilde{p} el fijo de \tilde{F} en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$. Puesto que los puntos del látice Π no pueden acumular en algún punto de $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$, se tiene que existen sólo finitos de ellos contenidos en $B_{K_L}(\tilde{p})$. Luego podemos considerar $x \in E$ con $d(x, 0)$ suficientemente grande como para que $x_0 \in \mathbb{Z}^m$ cumpla que $\Phi(x_0) \in \Pi$

está a distancia mayor que K_L de \tilde{p} . Puesto que $\Phi(x)$ está definido como el único punto que K_L -sombrea a la pseudo órbita $\{\Phi(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ deducimos que $\Phi(x) \neq \tilde{p}$.

Por otro lado, como $x \in E$, la pseudo órbita $\{\Phi(x_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ es acotada en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ y por lo tanto la órbita de $\Phi(x)$ también lo es. Esto contradice la expansividad infinita de \tilde{F} (Lema 6.17) ya que las órbitas de $\Phi(x)$ y el fijo \tilde{p} se mantienen a distancia acotada una de la otra.

□

A partir del lema anterior podemos ahora probar:

Lema 6.21. *El mapa $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ es un homeomorfismo.*

Demostración. A partir de que A es hiperbólica podemos repetir la construcción que hemos realizado intercambiando los roles de A y \tilde{F} para construir una inversa de Φ en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$. En efecto, todo $z \in \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ define una L -pseudo órbita en $\widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ contenida en el látice Π a menos de ajustar el $L > 0$ original. Esta L -pseudo órbita a su vez se corresponde, por $\Phi|_{\mathbb{Z}^m}^{-1} : \Pi \rightarrow \mathbb{Z}^m$, con una $R(L)$ -pseudo órbita en $\mathbb{Z}^m \subset \mathbb{R}^m$. Esta $R(L)$ -pseudo órbita es luego $K_{R(L)}$ -sombreada, para cierto $K_{R(L)} > 0$, por la órbita de un único punto de \mathbb{R}^m ya que A es hiperbólica. Luego $\Phi^{-1}(z)$ se define como este único punto.

Análogamente a como hicimos con Φ se obtiene que la extensión $\Phi^{-1} : \widetilde{M/\mathcal{W}^c} \rightarrow \mathbb{R}^m$ así como fue construida está bien definida, es continua y cumple que $A \circ \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \circ \tilde{F}$. Usando la expansividad infinita de A y \tilde{F} (Lema 6.17) obtenemos luego que Φ y Φ^{-1} son una inversa de la otra. □

Hemos obtenido $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$ homeomorfismo que conjuga a la parte lineal hiperbólica $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ con el levantado $\tilde{F} : \widetilde{M/\mathcal{W}^c} \rightarrow \widetilde{M/\mathcal{W}^c}$. Esta conjugación desciende a una conjugación entre $A : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ y $F : M/\mathcal{W}^c \rightarrow M/\mathcal{W}^c$ y de esta forma finaliza la prueba del Teorema B.

Referencias

- [B13] D. Bohnet, Codimension-1 partially hyperbolic diffeomorphisms with a uniformly compact center foliation, *Journal of Modern Dynamics*, **7** 4 (2013), 565--604.
- [BB16] D. Bohnet, C. Bonatti, Partially hyperbolic diffeomorphisms with a uniformly compact center foliation: The quotient dynamics, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **36** 4 (2016), 1067--1105.

- [BW05] C. Bonatti, A. Wilkinson, Transitive partially hyperbolic diffeomorphisms on 3-manifolds, *Topology*, **44** 3 (2005), 475--508.
- [BW08] K. Burns, A. Wilkinson, Dynamical coherence and center bunching, *Discrete & Continuous Dynamical Systems A*, **22** 1 & 2 (2008), 89-100.
- [CLN85] C. Camacho, A. Lins Neto, Geometric Theory of Foliations, *Birkhäuser*, 1985. viii+206 pp.
- [C18] M. Camargo, Obstrucciones topológicas a la existencia de difeomorfismos de Anosov, *Monografía de Licenciatura*, CMAT - Universidad de la República (2018).
- [CC00] A. Candel, L. Conlon, Foliations I and II, *Graduate Studies in Mathematics*, 23, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. xiv+402 pp.
- [C15] P. Carrasco, Compact dynamical foliations, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **35** 8 (2015), 2474--2498.
- [CH04] H. Colman, S. Hurder, Ls-category of compact Hausdorff foliations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 1463--1487.
- [CP15] S. Crovisier, R. Potrie, Introduction to partially hyperbolic dynamics, *Lecture notes for a minicourse in ICTP*, (2015): <http://www.cmat.edu.uy/~rpotrie/documentos/pdfs/Crovisier-Potrie-PH.pdf>
- [DM17] V. De Martino, Difeomorfismos parcialmente hiperbólicos con foliación central compacta, *Monografía de Licenciatura*, CMAT - Universidad de la República (2017).
- [DMM18] V. De Martino, S. Martinichich, Codimension one compact center foliations are uniformly compact, to appear in *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, arXiv:1809.02355.
- [EMS77] R. Edwards, K. Millett, and D. Sullivan. Foliations with all leaves compact. *Topology*, **16** 1 (1977), 13--32.
- [E76] D. B. A. Epstein, Foliations with all leaves compact, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **26** 1 (1976), 265--282.

- [EV78] D. B. A. Epstein, E. Vogt, A counterexample to the periodic orbit conjecture in codimension 3, *Annals of Math.*, (2) **108** (3) (1978), 539--552.
- [F70] J. Franks, Anosov diffeomorphisms *Global Analysis (Proc. Symp. Pure Math.*, **14**), American Mathematical Society, (1970), 61--93.
- [G12] A. Gogolev, Partially hyperbolic diffeomorphisms with compact center foliations, *Journal of Modern Dynamics*, **5** 4 (2012), 747--769.
- [HP18] A. Hammerlindl, R. Potrie, Partial hyperbolicity and classification: a survey, *Ergodic Theory Dynamical Systems* **38** 2 (2018), 401--443.
- [HP06] B. Hasselblatt, Y. Pesin, Partially hyperbolic dynamical systems, *Handbook of dynamical systems 1B*, Elsevier (2006), 1--55.
- [HH87] G. Hector and U. Hirsch, Introduction to the geometry of foliations, Part B, second ed., *Aspects of Mathematics*, E3, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1987.
- [H01] K. Hiraide, A simple proof of the Franks-Newhouse theorem on codimension-one Anosov diffeomorphisms, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **21** 3 (2001), 801--806.
- [HPS77] M. Hirsch, C. Pugh and M. Shub, Invariant Manifolds, *Springer Lecture Notes in Math.*, **583** (1977).
- [I74] H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, *J. Math. Kyoto Univ.*, **14** (1974) 607-634.
- [KH95] A. Katok y B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press (1995).
- [L15] P. Lessa, Reeb stability and the Gromov-Hausdorff limits of leaves in compact foliations, *Asian Journal of Mathematics*, **19** 3 (2015), 433--464.
- [M37] D. Montgomery, Pointwise Periodic Homeomorphisms, *Amer. J. Math.* **59** 1 (1937), 118-120.

- [N07] A. Navas, Grupos de difeomorfismos del círculo, *Ensaio Matemáticos, Sociedade Brasileira de Matemática* **13** (2007), 1-249.
- [N70] S. E. Newhouse, On Codimension One Anosov Diffeomorphisms, *American Journal of Mathematics*, **92** 3 (1970), 761–770.
- [N65] S. P. Novikov, Topology of foliations *Trudy Mosk. Math. Obsch.* **14** (1965) 248-278. *Trans. Moscow Math. Soc.* 268-304.
- [RHRHU07] F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, R. Ures, A survey of partially hyperbolic dynamics, Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow, 35–87, Fields Inst. Commun., 51, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [RHRHU16] F. Rodriguez Hertz, M. A. Rodriguez Hertz, R. Ures. A non-dynamically coherent example on T^3 , *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **33** 4 (2016), 1023–1032.
- [S76] D. Sullivan, A counterexample to the periodic orbit conjecture *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **46** (1976), 5--14.
- [V77] E. Vogt, A periodic flow with infinite Epstein hierarchy *Manuscripta Math.* **22** 4 (1977), 403–412.