MONOGRAFÍA DE MAESTRÍA

Topologías del Grupo de Cremona

Federico Carrasco

Orientador: Iván Pan

Maestría en Matemática
Universidad de la República
Uruguay

15 de Marzo de 2019

Índice general

Introducción

Sea k un cuerpo y denotemos por $\mathbb{P}^n$ el espacio proyectivo de dimensión n sobre k. El conjunto $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ de aplicaciones birracionales $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ es el llamado grupo de Cremona de dimensión n sobre k. Dado $f \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, existen polinomios homogéneos del mismo grado $f_0, \cdots, f_n \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]$, sin factores en común, tales que si $x = (x_0 : \cdots : x_n)$ no es un cero común de los $f_i's$ entonces $f(x) = (f_0(x) : \cdots : f_n(x))$. El grado de f es el grado de cualquier f_i y se denota $deg(f)$. Para una variedad algebraica A sobre k, hay una noción natural de familia de elementos de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ parametrizada por A (2.1.1). Dicha familia la anotamos $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ y estas familias dan lugar a la topología de Zariski de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.

En 1966 en [Sha66], I.R. Shafarevich preguntó: "¿Es posible introducir una estructura universal de grupo de dimensión infinita en el grupo de automorfismos (automorfismos birracionales) de una variedad algebraica arbitraria?". Años más tarde, en el 2008 en [Ser10], J.P. Serre preguntó: "¿Es posible introducir una topología en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ que sea compatible con $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ y $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}) \times \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$?".

Estas preguntas fueron respondidas por J. Blanc y J.P. Furter en [BF13]. Más detalladamente, la primera fue respondida negativamente, ya que probaron que si $n \geq 2$ no hay una estructura de variedad algebraica de dimensión infinita en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, de modo que las familias $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ correspondan a morfismos de variedades algebraicas. En cuanto a la segunda, tiene respuesta afirmativa, ya que introdujeron una topología, denominada euclídea, tal que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ dotado de ella es un grupo topológico Hausdorff que es compatible con los subgrupos.

El objetivo de este trabajo monográfico es comprender el trabajo de J. Blanc y J.P. Furter así como también presentarlo en un lenguaje más accesible. Más detalladamente, el capítulo 1 está reservado para los prerrequisitos, ya sean las nociones básicas de geometría algebraica, así como también contenidos más específicos que se escapan de cursos iniciales. Además, se presentará la noción de cuerpo local y algunas propiedades de los mismos. La última sección del capítulo está dedicada para nociones topológicas. En el capítulo 2, se introducirá la topología Zariski de $\mathrm{Bir}(X)$, siguiendo [Dem70], y daremos una descripción explícita para el caso $X = \mathbb{P}^n$. Teniendo dicha descripción, se responderá negativamente la primer pregunta planteada. En el capítulo 3, introduciremos la toplogía euclídea en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ para k un cuerpo local no arquimedeano, y probaremos que es un grupo topológico Hausdorff respondiendo así la segunda pregunta planteada de manera afirmativa.

Capítulo 1

Preliminares

En la primer sección recordaremos las nociones básicas de geometría algebraica, así como también de grupos algebraicos; para algunas pruebas de esta sección y la teoría general, remitimos a [Sha] y a [FR]. En la segunda sección, presentaremos las nociones de cuerpos locales y espacios vectoriales sobre cuerpos locales; para la teoría general de cuerpos locales y espacios ultramétricos remitimos a [Bro]. En la tercera sección, presentaremos nociones topológicas que se escapan de los cursos básicos; para la teoría general remitimos a [Bou].

1.1. Geometría Algebraica

Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado. Definimos el espacio afín n-dimensional sobre k como k^n. Un elemento $p \in \mathrm{k}^n$ lo llamamos un punto, y si $p = (a_1, \cdots, a_n)$, con $a_i \in \mathrm{k}$, entonces los a_i son las coordenadas de p.

Sea $A = \mathrm{k}[x_1, \cdots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables sobre k. Dado $T \subset A$, definimos el conjunto de ceros de T como $Z(T) = \{x \in \mathrm{k}^n : \ f(x) = 0 \ \forall f \in T\}$.

Definición 1.1.1. *Un subconjunto X de k^n es un **conjunto algebraico** si existe un subconjunto $T \subset A$ tal que $X = Z(T)$.*

Observación 1.1.2. La familia de conjuntos algebraicos es cerrada por uniones finitas e intersecciones arbitrarias. Además, el conjunto vacío y k^n son algebraicos.

Definición 1.1.3. *Definimos la topología Zariski en k^n como la topología cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos. Designamos por $\mathbb{A}^n$ a k^n con la topología Zariski.*

Definición 1.1.4. *Una **variedad afín** es un cerrado de $\mathbb{A}^n$. Un abierto de una variedad afín es una **variedad casi-afín**.*

Del mismo modo definimos el espacio proyectivo n-dimensional sobre k como el cociente de $\mathbb{A}^{n+1} - \{(0, \cdots, 0)\}$ bajo la relación de equivalencia dada por $(a_0, \cdots, a_n) \sim (\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n)$ para todo $\lambda \in \mathrm{k}$ no nulo. Lo denotamos $\mathbb{P}^n_{\mathrm{k}}$ o $\mathbb{P}^n$. Un elemento de $\mathbb{P}^n$ lo llamamos punto. Si p es un punto y tomamos una $(n+1)-$upla $(a_0, \cdots, a_n)$ en la clase de equivalencia de p, llamamos coordenadas de p a $a_0, \cdots, a_n$, y denotamos a p por $(a_0 : \cdots : a_n)$.

Sea S el anillo de polinomios $\mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]$. Dado $d \in \mathbb{Z}$, designamos S_d el subespacio vectorial sobre k generado por polinomios homogéneos de grado d. Si $f \in S_d$ se tiene $f(\lambda a_0, \cdots, \lambda a_n) = \lambda^d f(a_0, \cdots, a_n)$, por lo que tiene sentido hablar del conjunto de ceros de $f \in S_d$ en $\mathbb{P}^n$. Si $T \subset S$ es un subconjunto de polinomios homogéneos definimos el conjunto de ceros de T como

$$Z(T) = \{p \in \mathbb{P}^n \ : \ f(p) = 0 \ \forall f \in T\}.$$

Definición 1.1.5. *Un subconjunto X de $\mathbb{P}^n$ es un **conjunto algebraico** si existe un subconjunto $T \subset S$ de polinomios homogéneos tal que $X = Z(T)$.*

Observación 1.1.6. Al igual que sucede en el caso afín, la familia de conjuntos algebraicos es cerrada por uniones finitas e intersecciones arbitrarias. Además, el conjunto vacío y $\mathbb{P}^n$ son algebraicos.

Definición 1.1.7. *Definimos la topología Zariski en $\mathbb{P}^n$ como la topología cuyos cerrados son los conjuntos algebraicos.*

Definición 1.1.8. *Una **variedad proyectiva** es un cerrado de $\mathbb{P}^n$. Un abierto de una variedad proyectiva es una **variedad casi-proyectiva**.*

Proposición 1.1.9. *Toda variedad casi-afín es isomorfa a una variedad casi-proyectiva.*

1.1.1. Funciones Regulares

Definición 1.1.10. *Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ una variedad. Definimos el **ideal** de X como el ideal*

$$\mathcal{I}(X) = \{f \in \mathrm{k}[x_1, \cdots, x_n] : \ f(x) = 0 \ \forall x \in X\}$$

de polinomios que se anulan en X.

*Definimos el **anillo de coordenadas** de X como el cociente*

$$A(X) = \mathrm{k}[x_1, \cdots, x_n]/\mathcal{I}(X).$$

Definición 1.1.11. *Sean X variedad afín (irreducible), $U \subset X$ un abierto y $p \in U$ un punto. Una función $f : U \to \mathrm{k}$ es* ***regular*** *en p si en algún entorno de p se puede expresar como g/h, donde $g,h \in \mathrm{k}[x_1,\cdots,x_n]$ tales que h no se anula en p. Decimos que f es regular en U si lo es en todo punto de U. Denotamos por $\mathcal{O}_X(U)$ al anillo de las funciones regulares en U.*

Lema 1.1.12. *Sea X una variedad afín (irreducible). El anillo de funciones regulares en cada punto de X, $\mathcal{O}_X(X)$, es exactamente el anillo de coordenadas $A(X)$.*

Más en general, si $f \in A(X)$ y $U = U_f = \{p \in X : f(p) \neq 0\}$, entonces $\mathcal{O}_X(U)$ es la localización $A(X)[1/f]$.

Definición 1.1.13. *Dado un punto $p \in X$ (irreducible), definimos el* ***anillo local*** *de X en p, $\mathcal{O}_{X,p}$, o simplemente $\mathcal{O}_p$, como el anillo de gérmenes de funciones definidas en algún entorno de p y regulares en p. Un elemento de $\mathcal{O}_p$ es una clase de equivalencia de pares (U,f) donde $U \subset X$ es un abierto que contenga a p, f es una función regular en U, y donde $(U,f) \sim (V,g)$ si $f = g$ en $U \cap V$. Observar que si $Y \subset X$ es un abierto conteniendo p, entonces, $\mathcal{O}_{Y,p} = \mathcal{O}_{X,p}$.*

Tenemos definiciones análogas para variedades proyectivas $X \subset \mathbb{P}^n$.

Definición 1.1.14. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad. Definimos el* ***ideal*** *de X, como el ideal $\mathcal{I}(X)$ generado por*

$$\{F \in \mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n] : F \text{ es homogéneo}, \ F(p) = 0 \forall p \in X\}.$$

Definimos el ***anillo de coordenadas afines*** *de X como el cociente*

$$S(X) = \mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]/\mathcal{I}(X).$$

Definición 1.1.15. *Sean X variedad proyectiva (irreducible), $U \subset X$ un abierto y $p \in U$ un punto. Decimos que una función $f : U \to \mathrm{k}$ es* ***regular*** *en p si en algún entorno de p se puede expresar como G/H, donde $G,H \in \mathrm{k}[z_0,\cdots,z_n]_d$, para cierto $d \in \mathbb{N}$, tales que H no se anula en p. Decimos que f es regular en U si lo es en todo punto de U. Denotamos por $\mathcal{O}_X(U)$ al anillo de las funciones regulares en U.*

Lema 1.1.16. *Sea X una variedad proyectiva (irreducible). El anillo de funciones regulares en cada punto de X, $\mathcal{O}_X(X)$, es exactamente el cuerpo base* k*. Más en general, si $U = U_f$, entonces $\mathcal{O}_X(U)$ es el conjunto de las fracciones de grado* 0 *de la localización $S(X)[1/f]$.*

Definición 1.1.17. *Sea $X \subset \mathbb{P}^n$ una variedad casi-proyectiva. Dado un punto $p \in X$, definimos el* ***anillo local*** *de X en p, $\mathcal{O}_{X,p}$, o simplemente $\mathcal{O}_p$, como el anillo de gérmenes de funciones definidas en algún entorno de p y regulares en p. Un elemento de $\mathcal{O}_p$ es una clase de equivalencia de pares (U, f) donde $U \subset X$ es un abierto que contenga p, f es una función regular en U, y donde $(U, f) \sim (V, g)$ si $f = g$ en $U \cap V$. Observar que si $\tilde{X} \subset X$ es un abierto afín conteniendo p, entonces, $\mathcal{O}_{X,p} = \mathcal{O}_{\tilde{X},p}$, es decir, la localización de $A(\tilde{X})$ con respecto al ideal de funciones que se anulan en p.*

Observación 1.1.18. Tanto en el caso casi-afín, como en el casi-proyectivo, las funciones regulares son continuas para la topología Zariski, al identificar k con $\mathbb{A}^1$. Una consecuencia importante de esto, es que si funciones regulares en una variedad casi-proyectiva o casi-afín X coinciden en un abierto no vacío, entonces coinciden en todo X.

Definiciones 1.1.19. *Sea* k *un cuerpo algebraicamente cerrado.*

Una ***variedad algebraica*** *es una variedad casi-proyectiva. En caso que no haya confusión, diremos* ***variedad****.*

Si X, Y son dos variedades, un ***morfismo*** *$\varphi : X \to Y$ es un mapa continuo tal que para cada abierto $V \subset Y$ y cada función regular $f : V \to \mathrm{k}$, la función $f\varphi : \varphi^{-1}(V) \to \mathrm{k}$ es regular.*

Un morfismo $\varphi : X \to Y$ se dice ***inmersión abierta*** *(resp.* ***inmersión cerrada****) si $\varphi(X)$ es abierto (cerrado) en Y y φ induce un isomorfismo $X \to \varphi(X)$.*

Proposición 1.1.20. *Sea X una variedad. Entonces X puede expresarse de manera única como una unión finita de subvariedades irreducibles X_i, con $X_i \nsubseteq X_j$ si $i \neq j$.*

Definición 1.1.21. *Las subvariedades X_i que aparecen en la expresión de X como unión finita de variedades irreducibles son denominadas las* ***componentes irreducibles*** *de X.*

Lema 1.1.22. *Sean X e Y variedades (irreducibles), φ y ψ dos morfismos de X en Y tales que coinciden en un abierto no vacío. Entonces coinciden en todo X.*

Definición 1.1.23. *Sea X una variedad. El* ***cuerpo de funciones racionales*** *$\mathrm{k}(X)$ de X es el conjunto de clases de equivalencia de pares (U, f) donde U es un abierto no vacío de X, f es una función regular en U, y donde $(U, f) \sim (V, g)$ si $f = g$ en $U \cap V$. Los elementos de $\mathrm{k}(X)$ se los denomina* ***funciones racionales*** *en X. Dada $f \in \mathrm{k}(X)$, el* ***dominio*** *de f, que anotamos $dom(f)$, es el conjunto de los $p \in X$ tales que f es regular en p.*

Observar que $\mathrm{k}(X)$ es efectivamente un cuerpo.

Observación 1.1.24. Si $X \subset \mathbb{A}^n$ es una variedad afín (irreducible), $\mathrm{k}(X)$ es el cuerpo de fracciones de $A(X)$.

Análogamente, si $X \subset \mathbb{P}^n$ es una variedad proyectiva (irreducible), $\mathrm{k}(X)$ es el conjunto de elementos de grado 0 del cuerpo de fracciones de $S(X)$.

1.1.2. Aplicaciones racionales

Definición 1.1.25. *Sean X e Y variedades. Una* ***aplicación racional*** $\varphi : X \dashrightarrow Y$ *es una clase de equivalencia de pares (U, φ_U) con $U \subset X$ abierto no vacío y $\varphi_U : U \to Y$ un morfismo, donde dos tales pares (U, φ_U) y (V, φ_V) son equivalentes si coinciden en $U \cap V$. Una aplicación racional se dice* ***dominante*** *si para algún par (U, φ_U), la imagen de φ_U es densa en Y. El* ***dominio*** *de φ es el conjunto de puntos $p \in X$ tales que existe un par (U, φ_U) en la clase de equivalencia de φ con $p \in U$. El* ***conjunto de puntos base*** *de φ es el conjunto $Bas(\varphi) := X \setminus dom(\varphi)$, i.e., es el conjunto de los puntos de X donde donde la aplicación φ no está definida.*

Observación 1.1.26. Una aplicación racional φ de X en $\mathbb{A}^n$ es una n-upla $(f_1, \cdots, f_n)$ en $\mathrm{k}(X)^n$; el dominio de φ es $dom(\varphi) = \bigcap_{i=0}^{n} dom(f_i)$.

Del mismo modo, una aplicación racional ϕ de X en $\mathbb{P}^n$ es un elemento $(f_0 : \cdots : f_n) \in \mathbb{P}^n_{\mathrm{k}(X)}$; el dominio de ϕ es el subconjunto $dom(\phi) \subset X$ constituido por los $p \in X$ tales que $p \in \cap_{i \geq 0} dom(f f_i)$ para alguna $f \in \mathrm{k}(X)$ y p no es cero común de las $f f_i$.

Observación 1.1.27. Notar que si $X \subset \mathbb{P}^m$ es proyectiva, podemos representar una aplicación racional en $\mathbb{P}^n$ de otra manera. Podemos escribir las funciones racionales f_i de la forma F_i/G_i, con F_i, G_i polinomios homogéneos de grado d_i con $G_i \notin \mathcal{I}(X)$. Luego, multiplicando $(f_0 : \cdots : f_n)$ por el producto de los G_i, obtenemos

$$\phi(x) = (H_0(x) : \cdots : H_n(x))$$

donde los H_i son polinomios homogéneos del mismo grado.

Definición 1.1.28. *Una* ***aplicación birracional*** $\varphi : X \dashrightarrow Y$ *es una aplicación racional que admite una inversa, es decir, una aplicación racional $\psi : Y \dashrightarrow X$ tal que $\varphi \circ \psi = id_Y$ y $\psi \circ \varphi = id_X$. En el caso en que hay un mapa birracional entre X e Y, decimos que son* ***birracionalmente equivalentes****.*

Proposición 1.1.29. *Sea $\phi : X \dashrightarrow Y$ una aplicación birracional con inversa $\psi : Y \dashrightarrow X$. Denotemos por $U_1 = dom(\phi)$ y $U_2 = dom(\psi)$. Entonces*

1. *Los conjuntos $U_{12} := U_1 \cap \phi^{-1}(U_2)$ y $U_{21} := \psi^{-1}(U_1) \cap U_2$ son abiertos densos en X e Y respectivamente.*

2. *ϕ induce un isomorfismo entre U_{12} y U_{21}*

Observación 1.1.30. Observar que si $\phi : X \dashrightarrow Y$, $\psi : Y \dashrightarrow Z$ son aplicaciones birracionales, la composición $\psi \circ \phi$ también es una aplicación birracional. Por lo que tiene sentido considerar el grupo $Bir(X)$ de **automorfismos birracionales**.

Ejemplo 1.1.31. Sea $\phi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1)$. Podemos escribir $\phi = (f_0 : f_1)$, con $f_0, f_1 \in \mathrm{k}[x,y]$ homogéneos del mismo grado, $d \geq 1$, y sin factores en común. Análogamente para su inversa $\phi^{-1} \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1)$, $\phi^{-1} = (g_0 : g_1)$ con g_i homogéneo de grado e. Como $\phi \circ \phi^{-1} = id_{\mathbb{P}^1}$, entonces existe $h \in \mathrm{k}[x,y]$ homogéneo de grado $de - 1$ tal que $f_i(g_0, g_1) = hx_i$ para $i = 0,1$. Observar que si $h(p) = 0$ entonces $p \in Bas(\phi)$, por lo tanto, como $Bas(\phi) \subset \mathbb{P}^1$ es un cerrado propio, tenemos que $\{p \in \mathbb{P}^1 : \ h(p) = 0\}$ es una unión finita de puntos, por lo que $h \in \mathrm{k}^*$, es decir $d = e = 1$. Por lo tanto, tenemos que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1) = \mathrm{PGL}(2,\mathrm{k}) = Aut(\mathbb{P}^1)$.

En general se tiene $Aut(\mathbb{P}^n) = \mathrm{PGL}(n+1,\mathrm{k})$.

Teorema 1.1.32 (Noether-Castelnuovo)**.** *Sea* k *un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ *es generado por* $Aut(\mathbb{P}^2) = \mathrm{PGL}(3,\mathrm{k})$ *y la transformación cuadrática estándar* $\sigma = (x : y : z) \dashrightarrow (yz : xz : xy)$.

Para la prueba remitimos a [AC].

Teorema 1.1.33. *Sea $f : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ un mapa birracional con inversa f^{-1}. Entonces*

$$deg(f^{-1}) \leq deg(f)^{n-1}.$$

Para la prueba remitimos a [BCW82](Teorema 1.5, página 292).

1.1.3. Espacio tangente y diferencial

Sea $p = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{A}^n$. Consideramos el operador diferencial $d_p : \mathrm{k}[x_1, \cdots, x_n] \to \mathrm{k}[x_1, \cdots, x_n]$, definido por

$$d_p f := \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - a_i), \ f \in \mathrm{k}[x_1, \cdots, x_n];$$

d_pf es un polinomio homogéneo en $x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n$ de grado 1 si y sólo si $p \notin Z\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$. Por lo tanto si $p \notin Z\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$, tenemos que $Z(d_pf) \subset \mathbb{A}^n$ es un hiperplano (afín), que contiene a p.

Definición 1.1.34. *Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ un conjunto algebraico afín. El espacio tangente de X en $p \in X$ es*

$$T_pX := \bigcap_{f \in \mathcal{I}(X)} Z(d_pf)$$

Observación 1.1.35.

1. T_pX es un subespacio afín que contiene a p.
2. Si $\mathcal{I}(X) = (f_1, \cdots, f_l)$, entonces $T_pX = \bigcap_{i=1}^{l} Z(d_pf_i)$.

Ejemplo 1.1.36. Si $X = Z(f)$, con $f = x^2 + y^2z \in \mathrm{k}[x,y,z]$, tenemos $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2yz$, $\frac{\partial f}{\partial z} = y^2$. En este caso

$$d_pf = 2a_1(x - a_1) + 2a_2a_3(y - a_2) + a_2^2(z - a_3).$$

Obtenemos:

$$T_pX = \begin{cases} \textit{plano} & \textit{si} \quad p \neq (0,0,0) \\ \mathbb{A}^3 & \textit{si} \quad p = (0,0,0) \end{cases}$$

Definición 1.1.37. *Si $g \in A(X)$ y $G \in k[x_1, \cdots, x_n]$ es tal que $G|_X = g$, la **diferencial** de g en $p \in X$ es*

$$d_pg = d_pG|_{T_pX} : T_pX \to \mathrm{k}$$

Observación 1.1.38.

1. Se prueba fácilmente que la definición anterior es independiente de la representación de g.
2. Dadas $f, g \in A(X)$ y $p \in X$, entonces $d_p(f+g) = d_pf + d_pg$ y se verifica la regla de Leibniz $d_p(fg) = f(p)d_pg + g(p)d_pf$.

Sean $u, v \in T_pX$, $\lambda \in \mathrm{k}$. Definimos $u +_p v = u + v - p$ y $\lambda \cdot_p v = \lambda(v - p) + p$. Se verifica fácilmente que T_pX es un espacio vectorial con esta estructura. Además, si $f \in A(X)$, $p \in X$, la diferencial $d_pf : T_pX \to \mathrm{k}$ es una funcional lineal, es decir $d_pf \in (T_pX)^\vee$.

Por lo tanto, tenemos una transformación lineal

$$d_p : A(X) \to (T_pX)^\vee, \; f \mapsto d_pf.$$

Denotemos $\mathfrak{m}_p := (x_1 - a_1, \cdots, x_n - a_n) + \mathcal{I}(X) \subset A(X)$, con $p = (a_1, \cdots, a_n)$.

Teorema 1.1.39. *La transformación lineal d_p induce un isomorfismo canónico*

$$\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2 \simeq (T_pX)^\vee.$$

Veamos ahora que el espacio tangente depende apenas del anillo local de X en p. Si $p \in X$, tenemos $A(X) \subset \mathcal{O}_{X_p} \subset \mathrm{k}(X)$. El operador diferencial $d_p : A(X) \to (T_pX)^\vee$ se extiende a $\mathcal{O}_{X,p}$ de la forma siguiente.

Si $f/g \in \mathcal{O}_{X,p}$ con $f,g \in A(X)$ y $g(p) \neq 0$, definimos

$$d_p(f/g) := \frac{g(p)d_pf - f(p)d_pg}{g(p)^2}.$$

Obtenemos entonces el siguiente.

Teorema 1.1.40.
$$\mathfrak{m}_{X,p}/\mathfrak{m}_{X,p}^2 \simeq (T_pX)^\vee.$$

Definición 1.1.41. *Sea X una variedad, definimos el* ***espacio tangente de Zariski*** *de X en p como $(\mathfrak{m}_{X,p}/\mathfrak{m}_{X,p}^2)^\vee$.*

Sean $\phi : X \to Y$ un morfismo entre variedades y $p \in X$. Tenemos un morfismo de k-álgebras $\phi_p^* : \mathcal{O}_{Y,\phi(p)} \to \mathcal{O}_{X,p}$, tal que $\phi^*(\mathfrak{m}_{Y,\phi(p)}^l) \subset \mathfrak{m}_{X,p}^l$ para todo $l \leq 1$. Por lo tanto ϕ_p^* induce una aplicación k-lineal

$$\tilde{\phi}_p^* : \frac{\mathfrak{m}_{Y,\phi(p)}}{\mathfrak{m}_{Y,\phi(p)}^2} \to \frac{\mathfrak{m}_{X,p}}{\mathfrak{m}_{X,p}^2}.$$

Definición 1.1.42. *Sean $\phi : X \to Y$ morfismo de variedades y $p \in X$. La* ***diferencial*** *de ϕ en p a la transformación traspuesta de $\tilde{\phi}_p^*$, que denotaremos*

$$d_p\phi : T_pX \to T_{\phi(p)}Y.$$

Teorema 1.1.43. *Si $\phi : X \to Y$ es un isomorfismo, entonces $d_p\phi : T_pX \to T_{\phi(p)}Y$ es un isomorfismo para todo $p \in X$.*

1.1.4. Dimensión y singularidades

Sea X una variedad irreducible. Podemos considerar la función $\delta : X \to \mathbb{R}$ que a cada punto asigna la dimensión del espacio tangente a X en p, es decir

$$\delta(p) := dim\ T_pX.$$

Se puede probar que la función es semicontinua superiormente, de donde se deduce que el conjunto

$$Reg(X) = \{p \in X \ : \ dim\ T_pX = min\ \delta\}$$

es un abierto denso de X. Lo que permite las siguientes definiciones.

Definición 1.1.44. *Sea X una variedad irreducible, decimos que p es un **punto singular** de X (o que X es **singular** en p) si $\delta(p) = dimT_pX > min\delta$. Denotamos $Sing(X) = \{p \in X \ : p \text{ es singular en } X\}$.*

*Definimos la **dimensión** de X como*

$$dimX := min\delta = dimT_pX,$$

donde $p \in Reg(X)$.

Definición 1.1.45. *Decimos que una variedad X es **no singular** (o **lisa**, o **regular**) si $Sing(X) = \emptyset$.*

El siguiente teorema es conocido y para su demostración remitimos a [Sha]

Teorema 1.1.46 (Chevalley)**.** *Sea $\phi : X \to Y$ un morfismo dominante entre variedades irreducibles. Entonces*

1. *$dim\,X \geq dim\,Y$.*

2. *Si F es una componente irreducible de una fibra $\phi^{-1}(y)$, con $y \in \phi(X)$ entonces*
$$dim\,F \geq dim\,X - dim\,Y.$$

3. *Existe un abierto no vacío V de Y tal que*
$$dim\ \phi^{-1}(y) = dim\,X - dim\,Y,\ \forall y \in V \cap \phi(X).$$

Definición 1.1.47. *Sea $\phi : X \dashrightarrow Y$ un mapa birracional entre variedades proyectivas lisas de la misma dimensión. Se define el conjunto excepcional de ϕ cómo*

$$Exc(\phi) := \overline{\{x \in X \setminus Bas(\phi) :\ d\phi_x : T_xX \to T_{\phi(x)}Y \text{ no es inyectivo}\}}.$$

Observar que

$$Exc(\phi)\setminus Bas(\phi)=\{x\in X\setminus Bas(\phi):\ d\phi_x:T_xX\to T_{\phi(x)}Y \textit{ no es inyectivo}\}.$$

Sea $\psi:Y\dashrightarrow X$ la inversa de ϕ. Consideremos $x\in Exc(\phi)\setminus Bas(\phi)$, entonces, $\phi(x)\in Bas(\psi)$; de lo contrario se tiene

$$id_{T_xX}=d_x(\psi\circ\phi)=d_{\phi(x)}\psi\circ d_x\phi$$

de donde sigue que $d_x\phi$ es inyectivo.

Recíprocamente, si $x\in X\setminus Bas(\phi)$ es tal que $\phi(x)\in Bas(\psi)$, se tiene que $x\in Exc(\phi)\setminus Bas(\phi)$; de lo contrario, $d_x\phi$ sería un isomorfismo por ser X e Y lisas y de la misma dimensión, lo que contradice $\phi(x)\in Bas(\psi)$.

En conclusión, dada una aplicación birracional $\phi:X\dashrightarrow Y$ con inversa ψ, entre variedades lisas de la misma dimensión, tenemos que

$$X\setminus(Bas(\phi)\cup\phi^{-1}(Bas(\psi)))=X\setminus(Bas(\phi)\cup Exc(\phi)).$$

Luego, aplicando la Proposición 1.1.29 tenemos el siguiente.

Lema 1.1.48. *Si $\phi:X\dashrightarrow Y$ es un mapa birracional entre variedades proyectivas lisas, entonces ϕ induce un isomorfismo*

$$X\setminus(Exc(\phi)\cup Bas(\phi))\to Y\setminus(Exc(\phi^{-1})\cup Bas(\phi^{-1}))$$

Consideremos ahora el caso $X=Y=\mathbb{P}^n$.

Como vimos antes, un mapa birracional $\phi:\mathbb{P}^n\dashrightarrow\mathbb{P}^n$, lo podemos representar por $(h_0:\cdots:h_n)$ donde los $h_i\in \mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]$ homogéneos del mismo grado. Por lo tanto, podemos definir el **jacobiano** de ϕ, que denotamos por J_ϕ, como el determinante de la matriz

$$\left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=0}^{n}.$$

Es claro que $J_\phi\in \mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]$ es homogéneo y que $Exc(\phi)=Z(J_\phi)$. Ahora, aplicando la fórmula de Euler,

$$\sum_i x_i\frac{\partial f}{\partial x_i}=df$$

donde $f\in \mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]_d$, tenemos $Bas(\phi)\subset Exc(\phi)$. Por lo tanto, tenemos el siguiente lema.

Lema 1.1.49. *Si $\phi:\mathbb{P}^n\dashrightarrow\mathbb{P}^n$ es una aplicación birracional, entonces ϕ induce un isomorfismo de $\mathbb{P}^n\setminus Z(J_\phi)$ sobre $\mathbb{P}^n\setminus Z(J_{\phi^{-1}})$.*

1.1.5. Grupos Algebraicos

Definición 1.1.50. *Sean* k *un cuerpo algebraicamente cerrado y G una variedad algebraica sobre* k *que además es un grupo con $m : G \times G \to G$ e $i : G \to G$ la multiplicación e inversión respectivamente. Decimos que (G, m, i), o simplemente G, es un* ***grupo algebraico*** *si m e i son morfismos de variedades algebraicas. Si además G es una variedad afín, entonces G es un* ***grupo algebraico afín*** *o* ***grupo algebraico lineal****.*

Observación 1.1.51. Observar que en $G \times G$ se considera la topología Zariski y no la topología producto. Por lo que un grupo algebraico no es un grupo topológico, salvo en el caso en que sea finito.

Observación 1.1.52. Si $x \in G$, la traslación a derecha $\rho_x : G \to G$, dada por $\rho_x(y) = xy$ es claramente un isomorfismo de variedades que lleva 1 en x, con inversa $\rho_{x^{-1}}$. Del mismo modo, la traslación a izquierda $\lambda_x(y) = yx$ es un isomorfismo de variedades. Por lo tanto, las propiedades locales que se satisfacen en un punto, se satisfacen en todo punto. En particular, como el conjunto de puntos regulares es no vacío, se tiene que todo punto es regular, y en conclusión G es no singular.

Definición 1.1.53. *Sea G un grupo algebraico. Un subgrupo abstracto $H \subset G$ tal que H es un subconjunto cerrado es llamado* ***subgrupo algebraico*** *o* ***subgrupo cerrado****. Además si H es normal como subgrupo abstracto decimos que H es un* ***subgrupo algebraico normal*** *o* ***subgrupo cerrado normal****.*

Observación 1.1.54. Como $H \times H$ es cerrado en $G \times G$ al ser H cerrado, es claro que H es un grupo algebraico.

Definición 1.1.55. *Sen H, G grupos algebraicos. Un* ***morfismo de grupos algebraicos*** *es un morfismo de variedades algebraicas $\varphi : H \to G$ tal que es además un morfismo de grupos.*

Lema 1.1.56. *Sean U, V dos abiertos densos de un grupo algebraico G. Entonces $G = UV$, es decir, todo elemento de G es el producto de un elemento de U y uno de V.*

Demostración. Como la inversión y la traslación a derecha son isomorfismos de variedades algebraicas, se tiene que $xV^{-1} = \{xv^{-1} : v \in V\}$ es abierto y denso para todo $x \in G$. Por lo tanto, $xV^{-1} \cap U \neq \emptyset$, es decir, existe $a \in U$ y $b \in V$ tal que $xb^{-1} = a$. $\square$

Lema 1.1.57. *Sean G un grupo algebraico y H un subgrupo abstracto, entonces $\overline{H}$ es un subgrupo algebraico de G.*

Demostración. Consideremos $m : G \times G \to G$ el producto. Observar que como $m(H \times H) \subset H$ se tiene $m(\overline{H \times H}) \subset \overline{H}$. Por lo tanto, $m(\overline{H} \times \overline{H}) \subset \overline{H}$, lo que implica que $\overline{H}$ es cerrado por la multiplicación. Análogamente, se prueba que $\overline{H}$ es cerrado por la inversión, de donde se sigue que $\overline{H}$ es un subgrupo abstracto y por consiguiente un subgrupo algebraico. □

Teorema 1.1.58. *Sean G un grupo algebraico y H un subgrupo abstracto. Si H es constructible entonces H es un subgrupo algebraico.*

Demostración. Como H es constructible existe un abierto no vacío de $\overline{H}$ contenido en H. Trasladando este abierto por elementos de H, deducimos que H es abierto en $\overline{H}$. Aplicando el Lema 1.1.56, tenemos $H = HH = \overline{H}$. El resultado se sigue del lema anterior. □

Teorema 1.1.59. *Sea $\varphi : H \to G$ un morfismo de grupos algebraicos. Entonces*

1. *$Ker(\varphi) \subset H$ es un subgrupo normal cerrado*
2. *$Im(\varphi)$ es un subgrupo cerrado*
3. *$dim H = dim Ker(\varphi) + dim Im(\varphi)$*

Demostración. La primer afirmación es consecuencia de la continuidad de φ.

Para la segunda, observar que $Im(\varphi)$ es constructible, por lo tanto por el teorema anterior es un subgrupo cerrado.

Para la tercer afirmación, observar que las fibras de φ son las coclases de $Ker(\varphi)$ en H, y por lo tanto son isomorfas como variedades algebraicas a $Ker(\varphi)$. Por el Teorema 1.1.46, tenemos que su dimensión es $dim H - dim Im(\varphi)$. □

Teorema 1.1.60. *Sea G un grupo algebraico.*

1. *Dado $x \in G$, existe una única componente irreducible que contiene a x. Estas componentes irreducibles son también las componentes conexas de G.*
2. *La componente irreducible que contiene la identidad (que denominaremos G_1) es un subgrupo normal cerrado de índice finito en G.*
3. *Dado $x \in G$, la componente irreducible que contiene a x es xG_1, por tanto es isomorfa a G_1 (como variedad).*

4. *Si $H \subset G$ es un subgrupo cerrado de G de índice finito, entonces $G_1 \subset H$. En particular, G_1 es el único subgrupo algebraico irreducible de G de índice finito.*

5. *Si $\varphi : H \to G$ es un morfismo de grupos algebraicos entonces $\varphi(H_1) = \varphi(H)_1$.*

Demostración. 1 : Es suficiente probarla para el caso $x = 1$. En efecto, si X es una componente irreducible de G que contiene a x, entonces $x^{-1}X$ es una componente irreducible que contiene a 1. Sean X e Y componentes irreducibles que contienen a 1, entonces XY es un conjunto irreducible que contiene $X \cdot 1 = X$ y a $1 \cdot Y = Y$. Por lo tanto, $X = Y = XY$, en particular $G_1G_1 = G_1$.

2 : Ya probamos que $G_1G_1 = G_1$. Si i es el mapa inversión, entonces $i(G_1)$ es una componente irreducible que contiene a 1, por lo tanto $i(G_1) = G_1$. El hecho de que G_1 es un subgrupo normal se deduce de que la conjugación por un elemento es un isomorfismo, lo que implica que $x^{-1}G_1x$ es una componente irreducible que contiene a 1. Además, como hay finitas componentes irreducibles, el índice de G_1 es finito.

3 : Fue probado en la observación para probar (1).

4 : Sea $H \subset G$ un subgrupo cerrado de índice finito. Sea H_1 la componente irreducible de H que contiene a 1; entonces $H_1 \subset G_1$. Como H tiene índice finito en G, también lo tiene H_1, por consiguiente H_1 tiene índice finito en G_1. Al ser G_1 irreducible, tenemos $H_1 = G_1$ y por tanto $G_1 \subset H$.

Si H es cerrado e irreducible, como contiene a 1, deducimos $H \subset G_1$. Si además, H tiene índice finito, acabamos de probar que $G_1 \subset H$, entonces $H = G_1$.

5 : El subgrupo $\varphi(H_1)$ es cerrado y conexo en $\varphi(H)$ y tiene índice finito. Entonces $\varphi(H_1) = \varphi(H)_1$. □

1.1.6. Otras nociones

Definición 1.1.61. *Una **ind-variedad** sobre* k *es un conjunto X junto con una filtración*

$$X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots$$

tal que

1. $\displaystyle\bigcup_{n\geq 0} X_n = X$

2. *cada X_n es una variedad algebraica sobre* k *de dimensión finita, tal que la inclusión $X_n \hookrightarrow X_{n+1}$ es un inmersión cerrada.*

Decimos además que una ind-variedad es ***proyectiva*** *(resp.* ***afín****), si cada* X_n *es proyectiva (afín).*

Definición 1.1.62. *Sea* X *una ind-variedad. La topología* **Zariski** *en* X *está dada por* $U \subset X$ *es abierto si y sólo si* $U \cap X_n$ *es abierto Zariski de* X_n *para cada* n.

Observación 1.1.63. Es fácil ver que lo mismo pasa para los cerrados, es decir, $U \subset X$ es cerrado si y sólo si $U \cap X_n$ es cerrado en X_n para cada n.

Ahora, introduciremos en el contexto de variedades herramientas que se escapan del contexto general del trabajo. Remitimos a [G] y a [M] para la información detallada. Para ciertos nociones y resultados de álgebra conmutativa remitimos a [AM]

Definición 1.1.64. *Sean* $\varphi : X \to Y$ *y* $\psi : Z \to Y$ *dos morfismos de variedades. El* ***producto fibrado*** *de* X *y* Z *sobre* Y *es la variedad*

$$X \times_Y Z = \{(x,z) \in X \times Z \ : \ \varphi(x) = \psi(z)\}$$

Observación 1.1.65. Considerando las proyecciones $\psi' : X \times_Y Z \to X$ y $\varphi' : X \times_Y Z \to Z$, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Z \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\psi'"'] & Z \arrow[d, "\psi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Es más, el producto fibrado es universal respecto a esta propiedad.

Definición 1.1.66. *El mapa* $\varphi' : X \times_Y Z \to Z$ *se llama* ***cambio de base*** *de* φ *con respecto a* ψ.

Definición 1.1.67. *Decimos que un morfismo de variedades* $f : X \to Y$ *es* ***universalmente inyectivo*** *si para todo morfismo de variedades* $h : Z \to Y$ *el cambio de base* $X \times_Y Z \to Z$ *es inyectivo.*

Observaciones 1.1.68. Se puede probar que la definición anterior es equivalente a que para todo cuerpo K el morfismo inducido $X(\mathrm{K}) \to Y(\mathrm{K})$ sea inyectivo. Donde $X(\mathrm{K}) = Hom(Spec(\mathrm{K}), X)$.

Observar que si $f : X \to Y$ es un morfismo de variedades sobreyectivo, también lo será el cambio de base $X \times_Y Z \to Z$, por lo que no tiene sentido la definición análoga para morfismos sobreyectivos.

Definiciones 1.1.69. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades.*

*Decimos que f es **plano** (resp. sin ramificaciones) si para todo $x \in X$ el morfismo de anillos $f_x : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$ es plano (sin ramificaciones).*

*Decimos que f es **étale** si es plano y sin ramificaciones.*

Observación 1.1.70. En el caso que trabajemos con variedades no singulares, la noción de étale (resp. sin ramificaciones) es equivalente a que el diferencial sea un isomorfismo (inyectivo) para cada punto.

Proposición 1.1.71. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades. Si f es plano, entonces es abierto.*

Demostración. Sea $U \subset X$ abierto, entonces $f(U)$ constructible. Usando el teorema "going down" (ver [AM]) para morfismos planos, tenemos que $Y \setminus f(U)$ es cerrado, es decir, $f(U)$ es abierto. □

Definición 1.1.72. *Sea $f : X \to Y$ un morfismo de variedades. Decimos que f es **finito** si existe un cubrimiento $Y = \bigcup_i U_i$ de Y por abiertos afines tal que, para cada i, el conjunto $f^{-1}(U_i)$ sea afín y $\mathrm{k}[f^{-1}(U_i)]$ es una $\mathrm{k}[U_i]-$álgebra finita.*

Proposición 1.1.73. *Todo morfismo de variedades $f : X \to Y$ universalmente cerrado tal que $f^{-1}(y)$ es un conjunto finito para todo $y \in Y$ es finito.*

Demostración. Por el Teorema Principal de Zariski (la reformulación de Grothendiek, ver [M]), tenemos la siguiente factorización de f

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

donde j es una inmersión abierta y g es finito.

Además, podemos considerar la siguiente factorización de j

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "j'"] \arrow[dr, "j"'] & & X \times_Y Z \arrow[dl, "f'"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

donde j' es el mapa definido por $x \mapsto (x, j(x))$ y f' es el cambio de base de f por g. Es claro que la imagen de j' es Γ_j que es cerrado en $X \times_Y Z$ y, como f es universalmente cerrado, f' es un mapa cerrado. Por lo tanto, j es una inmersión abierta con imagen cerrada. En conclusión la imagen de j es una componente conexa de Z, entonces al ser j una inmersión, induce un isomorfismo $X \to j(X)$, es decir X es isomorfo a una componente conexa de Z y f es finito. □

Lema 1.1.74. *Sea $f: X \to Y$ un morfismo de variedades. Si f es étale y universalmente inyectivo, entonces f es una inmersión abierta.*

Demostración. Como f es inyectivo, podemos trabajar localmente, es decir, suponer que Y es afín. Al ser f étale, es plano y por lo tanto es abierto. Por lo que, sustituyendo Y por $f(X)$, podemos suponer que f es sobreyectivo.

Además, las propiedades de ser étale, plano, universalmente inyectivo son preservadas por cambio de base, por lo tanto tenemos que f es un homeomorfismo universal y por tanto universalmente cerrado. De donde se desprende que es finito.

Por lo tanto para probar que es un isomorfismo, podemos probar que es un isomorfismo local.

Sea A anillo local de $y \in Y$, B anillo local de $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Se tiene que B es un A-módulo plano de presentación finita, por lo tanto, B es libre como A-módulo. Si $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal en y y $\mathrm{k} = A/\mathfrak{m}$, entonces, $B/\mathfrak{m}B$ es una extensión radical, finita y separable de k, por lo que es isomorfo a k. Al ser B libre se deduce que $B \simeq A$. □

Para la prueba del siguiente lema remitimos a [G](Corollaire 17.11.2, página 84) que se encuentra la versión general del mismo.

Lema 1.1.75. *Sea $f: X \times Z \to X \times Z$ un morfismo de variedades donde Z es no singular y tal que $p_1 \circ f = p_1$, siendo $p_1 : X \times Z \to X$. Entonces f es étale si y sólo si $d_{(x,z)}f$ es un inyectivo para todo $(x,z) \in X \times Z$.*

1.2. Cuerpos Locales

Sea k un cuerpo

Definición 1.2.1. *Un **valor absoluto** en* k *es un mapa $|\cdot| : \mathrm{k} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que*

1. $|x| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$ *para todo* $x, y \in \mathrm{k}$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(desigualdad triangular)*

Definición 1.2.2. *Un valor absoluto en* k *se dice* ***no arquimedeano*** *si satisface*

$$|x+y| \leq \text{máx}\{|x|,|y|\},\ \forall x,y \in \mathrm{k}\ (\textit{desigualdad triangular fuerte})$$

en otro caso se dice ***arquimedeano****.*

Ejemplos 1.2.3.

1. En $\mathbb{Q}$, definimos $|\cdot|$ como el valor absoluto usual dado por la inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$. Es un valor absoluto arquimedeano.

2. Definiendo $|x| = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, se obtiene un valor absoluto no arquimedeano, llamado valor absoluto trivial.

3. Consideremos $\mathbb{Q}$ y sea p un número primo. Para $x \in \mathbb{Q}^*$ la valuación p-ádica se define como $\nu_p(x) = r$ si y sólo si $x = p^r \frac{u}{v}$ con $u,v \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}$ tales que $p \nmid uv$. Se extiende a $\mathbb{Q}$ tomando $\nu_p(0) = +\infty$. Definimos entonces el valor absoluto p-ádico en $\mathbb{Q}$ como

$$|x|_p = \begin{cases} p^{\nu_p(x)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$$

   Es un valor absoluto no arquimedeano

4. Sea k un cuerpo, tomemos $F = \mathrm{k}(T) = \left\{\frac{p(T)}{q(T)} :\ p,q \in \mathrm{k}[T],\ q \neq 0\right\}$. Definimos

$$\nu_\infty(p/q) = \begin{cases} degp - degq & p/q \neq 0 \\ +\infty & p/q = 0. \end{cases}$$

   Si $c > 1$, tenemos entonces un valor absoluto no arquimedeano en F dado por $|f(t)|_\infty := c^{-\nu_\infty(f(t))}$.

Lema 1.2.4. *Sea* $|\cdot|$ *un valor absoluto en un cuerpo* k*. Entonces*

1. $|1| = 1$
2. *Si* $x \in \mathrm{k}$ *es tal que* $x^n = 1$*, entonces* $|x| = 1$
3. $|-x| = |x|$
4. *Si* k *es un cuerpo finito, el valor absoluto es el trivial.*

Lema 1.2.5. *Sea* $|\cdot|$ *un valor absoluto en un cuerpo* k*. Entonces* $|\cdot|$ *es no arquimedeano si y sólo si* $|e| \leq 1$ *para todo* e *en el anillo aditivo generado por el* 1.

Corolario 1.2.6. *Si char*$(\mathrm{k}) \neq 0$ *entonces todo valor absoluto en* k *es no arquimedeano.*

Corolario 1.2.7. *Sea* $F \subset \mathrm{k}$ *un subcuerpo de* k *y* $|\cdot|$ *un valor absoluto en* k*. Entonces* $|\cdot|$ *es no arquimedeano en* k *si y sólo si lo es en* F*.*

Lema 1.2.8. *Sea* k *un cuerpo con un valor absoluto no arquimedeano. Si* $x, y \in \mathrm{k}$ *son tales que* $|x| \neq |y|$*, entonces* $|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$*.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer $|x| > |y|$.

Entonces, $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\} = |x|$, además, como estamos suponiendo $|x| > |y|$, tenemos $|x| = |x+y-y| \leq \max\{|x+y|, |y|\} = |x+y|$.

De donde tenemos $|x| \leq |x+y| \leq |x|$. $\square$

1.2.1. Topología

En esta sección, k va a ser una cuerpo con valor absoluto $|\cdot|$. Tenemos entonces una métrica en k, $d : \mathrm{k} \times \mathrm{k} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida como

$$d(x,y) = |x-y|.$$

En caso que $|\cdot|$ sea no arquimeadeano, d es una ultramétrica, ya que cumple la llamada desigualdad triangular fuerte.

En k consideramos la topología inducida por d. Designaremos por $B(a,r)$ a la bola abierta de radio r y centro a y por $\overline{B}(a,r)$ a la bola cerrada de radio r y centro a.

Recordar que un conjunto $U \subset \mathrm{k}$ se dice abierto si para todo $x \in \mathrm{k}$ existe un $r > 0$ tal que $B(x,r) \subset U$ y que un conjunto se dice cerrado si su complemento en k es abierto.

Lema 1.2.9. *Si* $|\cdot|$ *es no arquimedeano se tiene:*

1. $B(a,r)$ *es abierto y cerrado en* k
2. *si* $B(a,r) \cap B(a',r) \neq \emptyset$ *entonces* $B(a,r) = B(a',r)$
3. *sean* B *y* B' *dos bolas cualesquiera en* k*. Si* $B \cap B' \neq \emptyset$*, entonces* $B \subset B'$ *o* $B' \subset B$
4. k *es totalmente disconexo, esto es, no tiene subconjuntos conexos con más de un elemento.*

Observación 1.2.10. El lema anterior tiene un análogo para bolas cerradas.

Definiciones 1.2.11. *Sea* $(\mathrm{k}, |\cdot|)$ *un cuerpo con valor absoluto.*

1. $(\mathrm{k}, |\cdot|)$ *se dice* ***completo*** *si toda sucesión de Cauchy es convergente*

2. *Un subconjunto* $S \subset \mathrm{k}$ *se dice* ***denso*** *si para todo* $x \in \mathrm{k}$ *y todo* $\varepsilon > 0$*,* $B(x, \varepsilon) \cap S \neq \emptyset$

3. *Un cuerpo con valor absoluto* $(\hat{\mathrm{k}}, ||\cdot||)$ *es una completación de* $(\mathrm{k}, |\cdot|)$ *si existe una función continua e inyectiva* $\iota : \mathrm{k} \to \hat{\mathrm{k}}$ *que respeta los valores absolutos tal que*

   - $\iota(\mathrm{k})$ *es denso en* $\hat{\mathrm{k}}$
   - $(\hat{\mathrm{k}}, ||\cdot||)$ *es completo.*

Teorema 1.2.12. *Sea* $(\mathrm{k}, |\cdot|)$ *un cuerpo con valor absoluto. Existe una completación* $(\hat{\mathrm{k}}, ||\cdot||)$ *de* $(\mathrm{k}, |\cdot|)$*. Además, ésta es única a menos de isomorfismos.*

Teorema 1.2.13 (Ostrowski)**.** *Si* k *es completo respecto a un valor absoluto arquimedeano, entonces,* $\mathrm{k} \cong \mathbb{R}$ *ó* $\mathrm{k} \cong \mathbb{C}$ *y el valor absoluto es equivalente al usual.*

Ahora nos centraremos en el caso en el que $|\cdot|$ es no arquimedeano.

Se define el **anillo de enteros** de k como $\mathcal{O}_\mathrm{k} = \{x \in \mathrm{k} \,:\, |x| \leq 1\}$. Consideremos $\mathcal{P}_\mathrm{k} = \{x \in \mathrm{k} \,:\, |x| < 1\}$. Se puede verificar que $\mathcal{O}_\mathrm{k}$ es un anillo local y que $\mathcal{P}_k$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_\mathrm{k}$.

Se define también el **grupo de unidades** de k como $\mathcal{U}_\mathrm{k} = \{x \in \mathrm{k} \,:\, |x| = 1\}$ y el **cuerpo residual** de k como $\mathrm{k}_\mathrm{k} = \mathcal{O}_\mathrm{k}/\mathcal{P}_\mathrm{k}$.

Definición 1.2.14. *Un valor absoluto no arquimedeano se dice que es* ***discreto*** *si*

$$\Gamma_\mathrm{k} = \{|x| \,:\, x \in \mathrm{k}^*\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$$

es discreto.

Lema 1.2.15. *Un valor absoluto no arquimedeano es discreto si y sólo si* $\mathcal{P}_\mathrm{k}$ *es principal.*

En el caso en el que $|\cdot|$ es discreto, tenemos entonces $\mathcal{P}_\mathrm{k} = \langle \pi \rangle$ para cierto $\pi \in \mathcal{O}_\mathrm{k}$. Denominamos π el **uniformizador** del valor absoluto. Tenemos entonces que cualquier $x \in \mathrm{k}^*$ puede ser escrito como

$$x = \pi^n \varepsilon,$$

con $n \in \mathbb{Z}$ y $\varepsilon \in \mathcal{U}_{\mathrm{k}}$. Si escribimos $V_{\mathrm{k}}(x) = n \in \mathbb{Z}$ el **orden** de x, tenemos una valuación $V_{\mathrm{k}} : \mathrm{k} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definiendo $V_{\mathrm{k}}(0) = \infty$.

Se puede ver que si $|\cdot|$ es discreto entonces $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ es un dominio de ideales principales.

Definición 1.2.16. *Un **cuerpo local** no arquimedeano es un cuerpo que es completo respecto a un valor absoluto no arquimedeano discreto no trivial con cuerpo residual finito.*

Lema 1.2.17. *Sea* k *un cuerpo local no arquimedeano. Entonces $\mathcal{O}_{\mathrm{k}}$ es compacto, por lo tanto* k *es localmente compacto.*

Observación 1.2.18. De hecho se puede ver que un cuerpo es localmente compacto respecto a un valor absoluto no arquimedeano si y sólo si es un cuerpo local no arquimedeano.

Sea k un cuerpo local no arquimedeano

Definición 1.2.19. *Sea V un espacio vectorial sobre* k*. Una función $||\cdot|| : V \to \mathbb{R}_{>0}$ es una **norma** (no arquimedeana) si*

1. $||x|| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$
2. $||x+y|| \leq \text{máx}\{||x||, ||y||\}$
3. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x||$.

*Además, V se dice **normado** si está equipado con una norma.*

Observación 1.2.20. Si V es un espacio vectorial normado sobre k, entonces es un espacio ultramétrico con respecto a la métrica $d(x,y) := ||x-y||$.

Definición 1.2.21. *Dos normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_2$ sobre un espacio vectorial V son equivalentes si $\exists c_1, c_2$ tales que $c_1||x||_2 \leq ||x||_1 \leq c_2||x||_2$ para todo $x \in V$.*

Observación 1.2.22. Dos normas son equivalentes si y sólo si inducen la misma topología.

Lema 1.2.23. *Si V es un espacio vectorial de dimensión finita sobre* k*, entonces todas las normas en V son equivalentes. Además, V es completo respecto a la norma inducida.*

Demostración. Lo probaremos por inducción en $n = dim_{\mathrm{k}} V$.

Si $n = 1$, es claro.

Si $n > 1$, sea $e_1, \cdots, e_n$ una base de V. Dado $a \in V$, tenemos $a = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ con $a_j \in \mathrm{k}$. Definimos entonces $||a||_0 := \max_j |a_j|$. Observar que dada una sucesión de Cauchy en V, para cada coordenada obtenemos una sucesión de Cauchy en k, de donde se deduce que V es completo con respecto a $||\cdot||_0$. Resta ver que toda norma $||\cdot||$ en V es equivalente a $||\cdot||_0$. Observar que $||a|| \leq \sum_j |a_j| ||e_j|| \leq c_2 ||a||_0$, siendo $c_2 = \sum_j ||e_j||$.

Por lo tanto tenemos que ver que existe $c > 0$ tal que $||a||_0 \leq c||a||$ para todo $a \in V$. Si no existe tal c, para todo $\varepsilon > 0$, existe $b = b_\varepsilon \in V$ tal que $||b|| < \varepsilon ||b||_0$. Asumamos, sin pérdida de generalidad, que $||b||_0 = |b_n|$. Remplazando b por $b_n^{-1} b$ podemos también asumir $b = d + e_n$ con $d \in \langle e_1, \cdots, e_{n-1} \rangle_{\mathrm{k}}$.

En conclusión, si no existe un tal $c > 0$, podemos construir una sucesión $d^{(m)} \in W = \langle e_1, \cdots, e_{n-1} \rangle_{\mathrm{k}}$ tal que $||d^{(m)} + e_n|| \to 0$ si $m \to \infty$. Entonces tenemos $||d^{(m)} - d^{(l)}|| \to 0$ y usando la hipotésis de inducción, como $dimW = n - 1$, existe un $d^* \in W$ tal que $||d^{(m)} - d^*|| = 0$. Por lo tanto $||d^* + e_n|| = \lim ||d^{(m)} + e_n|| = 0$, de donde se sigue $d^* + e_n = 0$, lo que es imposible. Por lo tanto, existe un tal $c > 0$, es decir $||\cdot||$ y $||\cdot||_0$ son equivalentes. □

Observación 1.2.24. En k^n tenemos la métrica $||x|| = \max_i |x_i|$.

Lema 1.2.25. *Si $f, g : \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}$ son funciones continuas, entonces $f + g$ y fg son continuas.*

Demostración. Para la suma observar que

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - f(y)| \\ &\leq \max\{|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)|\} \end{aligned}$$

mientras que la multiplicación se desprende de

$$\begin{aligned} |fg(x) - fg(y)| &= |f(x)g(x) - f(y)g(y)| \\ &= |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| \\ &\leq \max\{|f(x) - f(y)||g(x)|, |g(x) - g(y)||f(y)|\} \end{aligned}$$

y $|f(y)| = |f(y) - f(x) + f(x)| \leq \max\{|f(x)|, |f(x) - f(y)|\}$. □

Corolario 1.2.26. *Los polinomios en n variables sobre* k *son continuos como funciones de* k^n *en* k

Demostración. Por el lema anterior solo resta ver que las funciones coordenadas $x_j : \mathrm{k}^n \to \mathrm{k}$ son continuas.

Observar que $|x_j - y_j| \leq \text{máx}_i |x_i - y_i| = d(x,y)$, por lo tanto las funciones coordenadas son continuas. □

1.3. Preliminares Topológicos

1.3.1. Mapas Propios

Sea X un espacio topológico, designaremos por $\imath_X$ a la identidad de X.

Definición 1.3.1. *Sea $f : X \to Y$ un mapa entre espacios topológicos. Se dice que f es **propio** si f es continuo y $f \times \imath_Z : X \times Z \to Y \times Z$ es cerrado (considerando las topologías producto) para todo espacio topológico Z.*

Si en la definición anterior tomamos al espacio topológico Z consistiendo de un punto obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.3.2. *Todo mapa propio es cerrado*

Proposición 1.3.3. *Sea $f : X \to Y$ un mapa continuo e inyectivo. Entonces las siguientes son equivalentes:*

1. *f es propio.*
2. *f es cerrado.*
3. *f es un homeomorfismo de X sobre un subconjunto cerrado de Y.*

Demostración. 1. ⇒ 2. es la proposición anterior, mientras que 2. ⇒ 3. es claro.

Ahora si 3. se cumple, entonces $f \times \imath_Z$ es un homeomorfismo de $X \times Z$ en un cerrado de $Y \times Z$, y por tanto, cerrado. Es decir, 3. ⇒ 1. □

Proposición 1.3.4. *Sea $f : X \to Y$ un mapa continuo. Si $T \subset Y$ y $f_T : f^{-1}(T) \to T$ es la restricción de f a $f^{-1}(T)$, entonces:*

1. *Si f es propio, también lo es f_T*
2. *Sea $(T_i)_{i\in I}$ una familia de subconjuntos cuyos interiores son un cubrimiento de Y, o tal que es un cubrimiento cerrado localmente finito de Y; entonces, si cada f_{T_i} es propio, también lo es f.*

Demostración. Observar que si Z es un espacio topológico se tiene

$$f_T \times \iota_Z = (f \times \iota_Z)_{T\times Z}.$$

Si f es propio, tenemos que $f \times \iota_Z$ es cerrado, y por lo tanto lo es $(f \times \iota_Z)_{T\times Z}$. Es decir, f_T es propio.

Si $(T_i)_{i\in I}$ satisface una de las dos condiciones, se tiene que $(T_i \times Z)_{i\in I}$ es un cubrimiento de $Y \times Z$ que verifica la misma condición. Si los f_{T_i} son propios, entonces $(f \times \iota_Z)_{T_i\times Z}$ es cerrado. Se sigue que $f \times \iota_Z$ es cerrado. En efecto, si B es un subconjunto cerrado de $X \times Z$ y designamos por B_i a $B \cap (f \times \iota_Z)^{-1}(T_i \times Z)$; entonces $f(B) \cap T_i \times Z = (f \times \iota_Z)_{T_i}(B_i)$ es cerrado en $T_i \times Z$ y por tanto $f \times \iota_Z(B)$ en $Y \times Z$. □

Proposición 1.3.5. *Sea $\{f_i : X_i \to Y_i\}_{i\in I}$ una familia finita de mapas continuos. Tomemos $X = \prod X_i$, $Y = \prod Y_i$ y $f = \prod f_i$, entonces:*

1. *Si f_i es propio para todo $i \in I$, también lo es f.*

2. *Si f es propio y X_i es no vacío $\forall i \in I$, entonces f_i es propio $\forall i \in I$.*

Demostración. Por inducción basta probarlo para el caso $I = \{1,2\}$.

Observar que $f_1 \times f_2 \times \iota_Z = (\iota_{Y_1} \times f_2 \times_Z) \circ (f_1 \times \iota_{X_2} \times \iota_Z)$ y como composición de mapas cerrados es cerrado, tenemos 1.

Supongamos ahora que f es propio. Si F es un subconjunto cerrado de $X_2 \times Z$ y $G = f_2 \times \iota_Z(F) \subset Y_2 \times Z$, entonces $f_1 \times f_2 \times \iota_Z(X_1 \times F) = f_1(X_1) \times G$, que es cerrado por ser f propio. Si además $X_1 \neq \emptyset$, tenemos que $f(X_1)$ es no vacío y por lo tanto G es cerrado, es decir, f_2 es propio. Análogamente, f_1 es propio si $X_2 \neq \emptyset$. □

Proposición 1.3.6. *Sean $f : X \to X'$ y $g : X' \to X''$ dos mapas continuos.*

1. *Si f y g son propios, entonces $g \circ f$ lo es.*

2. *Si $g \circ f$ es propio y f sobreyectivo, entonces g es propio.*

3. *Si $g \circ f$ es propio y g inyectivo, entonces f es propio.*

4. *Si $g \circ f$ es propio y X' es Hausdorff, entonces f es propio.*

Demostración. Sea Z un espacio topológico, se tiene

$$(g \circ f) \times \iota_Z = (g \times \iota_Z) \circ (f \times \iota_Z).$$

Si f y g son propios, $f \times \imath_Z$ y $g \times \imath_Z$ son cerrados, por lo tanto $(g \circ f) \times \imath_Z$ es cerrado, o sea, $g \circ f$ es propio.

Si f es sobreyectiva, también lo es $f \times \imath_Z$, por lo tanto que $(g \circ f) \times \imath_Z$ sea cerrado implica que $g \times \imath_Z$ es cerrado, lo que prueba 2.

Análogamente, se deduce 3 del hecho que al ser g inyectiva, $g \times \imath_Z$ lo es.

Finalmente, considerar el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & X \times X \arrow[d, "(g\circ f)\times \imath_{X'}"] \\ X' \arrow[r, "\psi"'] & X'' \times X' \end{tikzcd}$$

donde $\varphi(x) = (x, f(x))$ y $\psi(x') = (g(x'), x')$. Observar que φ y ψ son homeomorfismos sobre el gráfico de f y g respectivamente. Como X' es Hausdorff, el gráfico de f es cerrado en $X \times X'$, de donde usando la Proposición 1.3.3 φ es propio. Por otro lado la proposición anterior implica que $(g \circ f) \times \imath_{X'}$ es propio. Usando 1 y que el diagrama es conmutativo, tenemos que $\psi \circ f$ es propio. Como además, ψ es inyectivo, se tiene que f es propio usando 3. $\square$

Observación 1.3.7. Si X' no es Hausdorff, puede pasar que $g \circ f$ sea propio pero f no.

Corolario 1.3.8. *Si $f : X \to Y$ es un mapa propio, la restricción de f a un subconjunto cerrado $F \subset X$ es un mapa propio de F en Y.*

Demostración. La restricción es la composición $f \circ j$, donde $j : F \to X$ es la inclusión, que es propio por la Proposición 1.3.3. $\square$

Corolario 1.3.9. *Sea $f : X \to Y$ un mapa propio. Si X es Hausdorff, entonces el subespacio $f(X)$ de Y es Hausdorff.*

Demostración. Usando 3. de la proposición anterior, basta probarlo para el caso en que $f(X) = Y$.

Si $\Delta_X = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}$ es la diagonal de $X \times X$, tenemos que $f \times f(\Delta_X) = \Delta_Y$ es cerrado en $Y \times Y$ y por lo tanto Y es Hausdorff. $\square$

Corolario 1.3.10. *Sea $\{f_i : X \to Y_i\}_{i \in I}$ una familia finita de mapas propios. Si X es Hausdorff, entonces $f : X \to \prod Y_i$ dado por $f(x) = (f_i(x))$ es propio.*

Demostración. Observar que f es la composición de $\prod f_i : X^I \to \prod Y_i$ con el mapa diagonal de X en X^I y ambos son propios. $\square$

Corolario 1.3.11. *Sean X e Y dos espacios topológicos, $f : X \to Y$ un mapa continuo, R la relación de equivalencia $f(x) = f(y)$ en X, y*

$$X \xrightarrow{p} X/R \xrightarrow{h} f(X) \xrightarrow{i} Y$$

la descomposición canónica de f. Entonces f es propio si y sólo si p es propio, h un homeomorfismo y $f(X)$ cerrado en Y.

Demostración. Si f es propio, entonces $f(X)$ es cerrado en Y y h es un homeomorfismo. Además, $h \circ p$ es propio 3 de la proposición anterior, lo que implica que $p = h^{-1} \circ (h \circ p)$ es propio por 1 de la misma proposición. El recíproco es consecuencia de 1 de la proposición anterior y de la Proposición 1.3.3. □

Definición 1.3.12. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es* ***quasi-compacto*** *si todo cubrimiento abierto tiene un subcubrimiento finito. Si además, X es Hausdorff decimos que es* ***compacto****.*

Designaremos por P al espacio que consiste de un sólo punto.

Lema 1.3.13. *Si X un espacio topológico tal que el mapa constante $X \to P$ es propio, entonces X es quasi-compacto.*

Teorema 1.3.14. *Sea $f : X \to Y$ un mapa continuo. Son equivalentes:*

1. *f es propio.*
2. *f es cerrado y $f^{-1}(y)$ es quasi-compacto para cada $y \in Y$.*

Corolario 1.3.15. *Un espacio topológico X es quasi-compacto si y sólo si el mapa $X \to P$ es propio.*

Corolario 1.3.16. *Todo mapa continuo $f : X \to Y$ donde X es quasi-compacto e Y es Hausdorff es propio.*

Corolario 1.3.17. *Si $(f_i)_{i \in I}$ es una familia de mapas propios, entonces $f = \prod f_i$ es propio.*

Corolario 1.3.18. *Sea $f_i : X \to Y_i$ una familia de mapas propios donde X es Hausdorff. El mapa $f : X \to \prod Y_i$ dado por $x \mapsto (f_i(x))$ es propio.*

Corolario 1.3.19. *Si X es quasi-compacto entonces la proyección $p_2 : X \times Y \to Y$ es propia.*

Proposición 1.3.20. *Sea $f : X \to Y$ un mapa propio. Si $K \subset Y$ es quasi-compacto, entonces $f^{-1}(K)$ es quasi-compacto.*

Demostración. El mapa $f_K : f^{-1}(K) \to K$ es propio por la Proposición 1.3.4. Como el mapa $K \to P$ es propio (Corolario 1.3.15), se deduce que el mapa $f^{-1}(K) \to K \to P$ es propio y aplicando nuevamente el Corolario 1.3.15 tenemos que $f^{-1}(K)$ es quasi-compacto. $\square$

Definición 1.3.21. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es* ***localmente compacto*** *si es Hausdorff y todo punto tiene un entorno compacto.*

Proposición 1.3.22. *Sea $f : X \to Y$ un mapa continuo donde X es Hausdorff e Y es localmente compacto. Entonces f es propio si y sólo si $f^{-1}(K)$ es compacto para todo $K \subset Y$ compacto. Además, si f es propio, entonces X es localmente compacto.*

Demostración. Si f es propio y K es un subconjunto compacto de Y, entonces $f^{-1}(K)$ es compacto por la proposición anterior. Recíprocamente, si se verifica esta condición, sea (U_α) un cubrimiento de Y por compactos. Entonces los conjuntos $f^{-1}(\overline{U_\alpha})$ son compactos y sus interiores cubren X, al ser X Hausdorff, esto implica que X es localmente compacto. Además, cada mapa $f_{\overline{U_\alpha}} : f^{-1}(\overline{U_\alpha}) \to \overline{U_\alpha}$ es propio y por lo tanto, en virtud de la Proposición 1.3.4. $\square$

Corolario 1.3.23. *Sean X, X' dos espacios localmente compacto e Y (resp Y') el espacio compacto obtenido de X (resp X') adjuntandole un punto en el infinito ω (resp ω'). Entonces un mapa continuo $f : X \to X'$ es propio si y sólo si su extensión $f' : Y \to Y'$ tal que $f'(\omega) = \omega'$ es continuo.*

Demostración. Por la proposición anterior, f es propio si y sólo si para cada compacto $K' \subset X'$, $f^{-1}(X' - K') = X - f^{-1}(K')$ es el complemento de un compacto de X. Lo que es equivalente con que f' sea continua en ω. $\square$

Proposición 1.3.24. *Sean X un espacio topológico compacto, R una relación de equivalencia en X, C el grafo de R en $X \times X$ y $f : X \to X/R$ la proyección al cociente. Son equivalentes:*

1. *C es cerrado en $X \times X$.*

2. *R es cerrada.*

3. *f es propio.*

4. *X/R es Hausdorff.*

Además, si alguna de las anteriores se verifica, X/R es compacto.

Demostración. R es cerrada si y sólo si f es cerrado; luego 2 implica 3. $3 \Rightarrow 4$ es un caso particular del Corolario 1.3.11. $4 \Rightarrow 1$ es claro, así que solo resta ver $1 \Rightarrow 2$.

Si F es un subconjunto cerrado de X, su saturación con respecto a R, es $p_2(C \cap (F \times X))$. Por hipótesis $C \cap (F \times X)$ es cerrado en el compacto $X \times X$, y por lo tanto compacto. El resultado se desprende de la continuidad de la proyección p_2.

Además es claro que si X/R es Hausdorff, entonces es compacto. □

Proposición 1.3.25. *Sean X un espacio localmente compacto, R una relación de equivalencia en X, C el gráfico de R en $X \times X$, $f : X \to X/R$ la proyección al cociente. Si X' es el compacto obtenido por adjuntar un punto en el infinito ω a X y R' es la relación de equivalencia en X' cuyo gráfico es $C' = C \cup \{(\omega, \omega)\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es propio.*

2. *La saturación de cada compacto de X es compacta.*

3. *R' es cerrada.*

4. *La restricción de p_2 a C es propio.*

5. *R es cerrada y las clases de equivalencia con respecto a R son compactas.*

Además, si alguna de las afirmaciones anteriores se verifica, X/R es localmente compacto.

Demostración. $1 \Rightarrow 2$: Como $X/R = f(X)$ y f es propio, entonces X/R es Hausdorff (Corolario 1.3.11); por lo tanto la imagen por f de todo compacto $K \subset X$ es compacta. La saturación de K es $f^{-1}f(K)$, que es compacto por la Proposición 1.3.20.

$2 \Rightarrow 3$: Si F' es un subconjunto cerrado de X' que no contiene ω, entonces F' es un compacto de X. Por lo tanto, su saturación con respecto a R' (que coincide con la saturación respecto a R) es un compacto, luego cerrado en X'. Si $\omega \in F'$ y $F = F' \cap X = F' - \{\omega\}$, entonces la saturación de F' con respecto a R' es la unión de $\{\omega\}$ y la saturación H de F con respecto a R, de donde se sigue que basta probar que H es cerrado en X, es decir, que R es cerrada. Observar que como X

es localmente compacto, basta ver que $H \cap K$ es compacto para todo compacto K. Sea L la saturación de K con respecto a R, por hipótesis es un compacto. Además, $H \cap L$ es la saturación de $F \cap L$, que es compacto, entonces $H \cap K = (H \cap L) \cap K$ es compacto.

$3 \Rightarrow 4$: Como X' es regular, C' es cerrado en $X' \times X'$, entonces es compacto. Se sigue que C' es la compactificación por un punto de C. Como la restricción C' de $p_2 : X' \times X' \to X'$ es continua en ω, el resultado se desprende del Corolario 1.3.23

$4 \Rightarrow 5$: Si F es un cerrado de X, entonces $C \cap (F \times X)$ es cerrado en C, entonces también lo es la saturación de F respecto de R, ya que es igual a $p_2(C \cap (F \times X))$. Además, la clase de equivalencia de $x \in X$ *mod* R es homeomorfa a la preimagen de $\{x\}$ por la restricción a C de p_2, o sea, es compacta.

$5 \Rightarrow 1$: Si R es cerrada, entonces por definición f es cerrado y para cada $z \in X/R$, $f^{-1}(z)$ es la clase de equivalencia de z con respecto a R, que es un compacto en virtud del Teorema 1.3.14.

Finalmente, hay que probar que X/R es localmente compacto. Observar que X'/C' es compacto por 3 y la proposición anterior. La relación R es la inducida en X por R', como además X es abierto en X' y saturado con respecto a R', tenemos que X/R es homeomorfo a la imagen $f'(X)$ de X bajo la proyección al cociente $f' : X' \to X'/R'$. Ahora, $f'(X)$ es abierto en X'/R' y por lo tanto localmente compacto. $\square$

Corolario 1.3.26. *Sea $f : X \to Y$ un mapa propio donde X es Hausdorff. Entonces X es compacto (resp. localmente compacto) si y sólo si $f(X)$ es compacto (resp. localmente compacto). Además, si Y es compacto (res. localmente compacto) también lo es X.*

1.3.2. Grupos Topológicos

Definición 1.3.27. *Un **grupo topológico** es conjunto G que tiene estructura de grupo y una topología, de modo que las operaciones del grupo son funciones continuas, considerando en $G \times G$ la topología producto.*

Observación 1.3.28. Pedir que la multiplicación y tomar inverso sean continuas es equivalente a que el mapa $G \times G \to G$ definido por $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ sea continuo.

Proposición 1.3.29. *Un grupo topológico G es Hausdorff si y sólo si $\{e\}$ es cerrado*

Demostración. Es claro que si G es Hausdorff $\{e\}$ es cerrado. Recíprocamente, si $\{e\}$ es cerrado, entonces Δ_G es cerrado en $G \times G$ por ser la preimagen de $\{e\}$ por el mapa $(x,y) \mapsto xy^{-1}$. Si $x \neq y$, entonces $(x,y) \notin \Delta_G$. Como Δ_G es cerrado en $G \times G$, existen U y V entornos de x e y respectivamente tales que $(U \times V) \cap \Delta_G = \emptyset$, es decir $V \cap W = \emptyset$. Es decir, G es Hausdorff. $\square$

Definición 1.3.30. *Sea G un grupo topológico. Decimos que G es* ***compactamente generado*** *si existe un subconjunto compacto $K \subset G$ que genera G.*

Ejemplo 1.3.31. Todo grupo conexo localmente compacto es compactamente generado.

Capítulo 2

Topología Zariski

2.1. Topología Zariski en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$

Definición 2.1.1. *Un mapa birracional $f : A \times X \dashrightarrow A \times X$, donde A, X son variedades algebraicas con X irreducible, se dice que es un* ***morfismo*** *de A en $\mathrm{Bir}(X)$ si existe un abierto $U \subset A \times X$ tal que*

1. *f está definida en U;*
2. *$U_a := U \cap (\{a\} \times X)$ es denso en $\{a\} \times X$ para todo $a \in A$;*
3. *existe un morfismo $\varphi : U \to X$ tal que $f|_U(a,x) = (a, \varphi(a,x))$ y $f|_{U_a} : U_a \to \{a\} \times X$ es un mapa birracional.*

En tal caso, denotamos $f : A \to \mathrm{Bir}(X)$ la aplicación $a \mapsto (x \mapsto \varphi(a,x))$.

Proposición 2.1.2. *Sean $\tau : B \to \mathrm{Bir}(X)$ un morfismo y $\rho : A \to B$ un morfismo de variedades algebraicas. Entonces $\tau \circ \rho$ define un morfismo $A \to \mathrm{Bir}(X)$.*

Demostración. Sea $U \subset B \times X$ un abierto como en la definición anterior. Consideramos $V := (\rho \times id_X)^{-1}(U)$. Tenemos que V es un abierto de $A \times X$ que verifica las primeras dos condiciones. Además, tomando $\psi : V \to X$ como $\psi = \varphi \circ (\rho \times id_X)$, es claro que se verifica la ultima condición. $\square$

Definición 2.1.3. *Un subconjunto $F \subseteq \mathrm{Bir}(X)$ es* ***cerrado*** *en la topología Zariski si para cualquier variedad algebraica A y cualquier morfismo $A \to \mathrm{Bir}(X)$ la preimagen de F es cerrada.*

En lo que queda trataremos de describir la topología de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.

Observación 2.1.4. Recordar que un mapa birracional h de $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathrm{k}}$ está dado por

$$h : (x_0 : \cdots : x_n) \dashrightarrow (h_0(x_0, \cdots, x_n) : \cdots : h_n(x_0, \cdots, x_n)),$$

donde los $h_i's$ son polinomios homogéneos del mismo grado. Eligiendo los $h_i's$ sin factores comunes, el grado de h es el grado de los $h_i's$.

Definición 2.1.5. $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ *(*$\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$*) es el conjunto de los elementos de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *de grado menor o igual a d (respectivamente, de grado d).*

Observación 2.1.6. Observar que tenemos una sucesión creciente

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq 1} \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq 2} \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq k} \subseteq \cdots$$

cuya unión es el grupo $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.

Veremos que cada $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ y que la topología en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ esta inducida por la sucesión anterior.

Definición 2.1.7. *Dado d un entero positivo, definimos* $W_d := \mathbb{P}(\mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_d^{n+1})$ *y $H_d \subseteq W_d$ el conjunto de los elementos $h = (h_0 : \cdots : h_n) \in W_d$ tales que el mapa racional inducido $\psi_h : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dado por*

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto\!\dashrightarrow (h_0(x_0, \cdots, x_n) : \cdots : h_n(x_0, \cdots, x_n))$$

es birracional. Denotamos π_d el mapa $H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ que manda h en ψ_h.

Observación 2.1.8. Observar que W_d es isomorfo a $\mathbb{P}^r$ donde $r = (n+1)\binom{d+n}{d} - 1$.

Lema 2.1.9. *Sean W_d y H_d como en la definición anterior. Se verifica*

1. *H_d es localmente cerrado en W_d, por tanto, hereda de W_d la estructura de variedad algebraica.*
2. *El mapa $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es un morfismo cuya imagen es $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$. Además, induce una biyección entre $(\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d)$ y $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$.*
3. *Dado $\varphi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, el conjunto $(\pi_d)^{-1}(\varphi)$ es cerrado en W_d y por lo tanto en H_d.*
4. *Si m es un entero positivo y $F \subseteq H_m$ es cerrado, entonces $(\pi_d)^{-1}(\pi_m(F))$ es cerrado en H_d.*

Demostración. Para probar la primer afirmación consideremos $Y \subseteq W_{d^{n-1}} \times W_d$ el conjunto de los pares (g,f) tales que $h := (g_0(f_0,\cdots,f_n),\cdots,g_n(f_0,\cdots,f_n))$ es un múltiplo de la identidad, es decir, $h_i x_j = h_j x_i$ para todo i,j. Por lo tanto, existe $a \in \mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]_{d^n-1}$ tal que $h_i = a x_i$ para todo i. Si a es no nulo, se tiene que ψ_f y ψ_g son birracionales e inversas entre sí; además el jacobiano de ψ_f es no nulo. Si a es nulo, tenemos que ψ_f contrae $\mathbb{P}^n$ a una subvariedad, que está incluida en el conjunto $g_i = 0$ para cada i, por lo que ψ_f no es birracional y además tiene jacobiano nulo. En particular, dado $(g,f) \in Y$, tenemos que ψ_f es birracional si y sólo si su jacobiano es no nulo.

Además, como la inversa de cada mapa birracional de $\mathbb{P}^n$ de grado d tiene grado menor o igual a d^{n-1} (Teorema 1.1.33), todo elemento $f \in H_d$ corresponde, al menos, a un par $(g,f) \in Y$.

Por definición Y es cerrado en $W_{d^{n-1}} \times W_d$. Además, al ser $W_{d^{n-1}}$ proyectivo, la proyección $p_2 : W_{d^{n-1}} \times W_d \to W_d$ es cerrada, por lo tanto $p_2(Y)$ es cerrado en W_d. Sea $U \subseteq W_d$ el abierto de los elementos que tienen jacobiano no nulo. Por construcción, tenemos $H_d = U \cap p_2(Y)$, es decir H_d es localmente cerrado en W_d.

Para la segunda afirmación, tomemos $f : H_d \times \mathbb{P}^n \dashrightarrow H_d \times \mathbb{P}^n$ el mapa racional dado por

$$(h,x) \dashrightarrow (h,h(x)).$$

Denotemos J el jacobiano de f y sea $V \subseteq H_d \times \mathbb{P}^n$ el abierto donde J es no nulo. Afirmamos que la restricción de f a V es una inmersión abierta, lo que implica que $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es un morfismo. Para probar la afirmación debemos ver que f es universalmente inyectivo y étale (Lema 1.1.74).

Como vimos en 1.1.49 sabemos que un mapa birracional de $\mathbb{P}^n$ induce una biyección en donde su jacobiano no se anula, sobre su imagen. Por lo tanto, para toda extensión de cuerpos $\mathrm{K}|\mathrm{k}$, se tiene que la extensión de f a K restricta a $V(\mathrm{K}) \cap (\{h\} \times \mathbb{P}^n)$ es una biyección, para toda $h \in H_d(\mathrm{K})$. Por lo tanto, f es universalmente inyectiva. Ahora, como $d_{(h,x)}f$ es inyectivo para todo $(h,x) \in V$, ya que $d_{(h,x)}f = id \oplus d_x h$, tenemos que f es étale (Lema 1.1.75).

Si nos restringimos a $(\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d)$, la sobreyectividad es clara, así que veamos la inyectividad. Dados $f,g \in H_d$, se tiene que $\pi_d(f) = \pi_d(g)$ es equivalente a $f_i g_j = f_j g_i \ \forall i,j$, entonces $f_i | f_j g_i \ \forall i,j$. Ahora, si tomamos $f,g \in (\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d)$, tenemos $\deg f_i = d = \deg g_i$ y los f_i sin factores en común, por lo tanto $f_i | g_i \ \forall i$, es decir, $f_i = \lambda_i g_i \ \forall i$ con $\lambda_i \in \mathrm{k}$. Además, como $f_i g_j = f_j g_i$, se tiene que $\lambda_i g_i g_j = \lambda_j g_j g_i$. Por consiguiente $\exists \lambda \in \mathrm{k}$ tal que $f_i = \lambda g_i$, de donde se sigue que $f = g$.

Probemos la tercer afirmación ahora; sea $\varphi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, que corresponde a un mapa birracional $\psi_h : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dado por

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapstochar\dashrightarrow (h_0(x_0, \cdots, x_n) : \cdots : h_n(x_0, \cdots, x_n))$$

para algún polinomio homogéneo de grado $k \leq d$, sin factores en común.

Observar que $(\pi_d)^{-1}(\varphi) \subseteq H_d$ es el conjunto de los elementos $(g_0 : \cdots : g_n) \in W_d$ tales que $g_i h_j = g_j h_i$ para todo i, j. Por lo tanto es cerrado en W_d y por tanto en H_d.

Por último, sean m un entero positivo y $F \subseteq H_m$ un subconjunto cerrado. Consideremos el subconjunto Y_F de $Y \times \overline{F}$ de los elementos $((g, f), h)$ tales que $f = (f_0 : \cdots : f_n)$ y $h = (h_0 : \cdots : h_n)$ inducen el mismo mapa $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, donde $\bar{F}$ es la clausura de F en W_m. Que f y h produzcan el mismo mapa es equivalente a decir que $h_i f_j = h_j f_i$ para todo i, j, por lo cual Y_F es cerrado en $Y \times \bar{F}$ y también en $W_{d^{n-1}} \times W_d \times W_m$. Sea $p_2 : W_{d^{n-1}} \times W_d \times W_m \to W_d$ la segunda proyección, el subconjunto $p_2(Y_F)$ de W_d es cerrado en W_d y también en $p_2(Y)$. Intersectando con U, tenemos que $p_2(Y_F) \cap U$ es cerrado en $p_2(Y) \cap U = H_d$. Por construcción, $p_2(Y_F) \cap U = (\pi_d)^{-1}(\pi_m(F))$, que es, por consiguiente, cerrado en H_d. $\square$

Observación 2.1.10. El lema anterior muestra que W_d y H_d son variedades algebraicas. Como probaremos más adelante, lo mismo ocurre con $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$ pero no con $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, el cual no puede ser visto como una variedad algebraica para $d, n \geq 2$. Sin embargo, la topología de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ está dada por el mapa $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, en el sentido que π_d es un cociente topológico (Corolario 2.1.14)

Lema 2.1.11. *Sea A una variedad algebraica irreducible y $\rho : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un morfismo. Existe un cubrimiento abierto afín $(A_i)_{i \in I}$ de A tal que para todo i, existe un entero d_i y un morfismo $\rho_i : A_i \to H_{d_i}$ tal que la restricción de ρ a A_i coincide con ρ_i.*

Demostración. Sea $\rho : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un morfismo dado por un mapa birracional $f : A \times \mathbb{P}^n \dashrightarrow A \times \mathbb{P}^n$, que se restringe a una inmersión abierta en un abierto U como en la Definición 2.1.1. Sea $a_0 \in A$ un punto y $A_0 \subseteq A$ un abierto afín que contenga a_0. Fijamos un punto $w_0 = (a_0, y) \in U$ y coordenadas homogéneas $x_0, \cdots, x_n$ en $\mathbb{P}^n$ de modo que y sea $(1 : 0 : \cdots : 0)$ y que $f(w_0)$ no pertenezca al plano $x_0 = 0$. Anotamos $\mathbb{A}^n \subseteq \mathbb{P}^n$ el conjunto afín $x_0 = 1$, que tiene coordenadas afines $z_1 = \frac{x_1}{x_0}, \cdots, z_n = \frac{x_n}{x_0}$. En estas coordenadas, f se restringe a un mapa racional $A_0 \times \mathbb{A}^n \dashrightarrow \mathbb{A}^n$ que es definido en w_0. Componiendo con la i-ésima proyección obtenemos una función racional en $A_0 \times \mathbb{A}^n$, que está definida en w_0. Por lo tanto, obtenemos que $f\big|_{A_0\times\mathbb{A}^n}$ puede ser escrito, en un entorno de w_0, como $(a,(z_1,\cdots,z_n)) \mapsto \left(\frac{P_1}{Q_1},\cdots,\frac{P_n}{Q_n}\right)$ para ciertos $P_i, Q_i \in \mathrm{k}[A_0][z_1,\cdots,z_n]$ tales que ningún Q_i se anule en w_0. Tomando denominador común, tenemos que f en un entorno de w_0 está dada por,

$$(a,(x_0:\cdots:x_n)) \mapsto (h_0:\cdots:h_n)$$

donde $h_i \in \mathrm{k}[A_0][x_0,\cdots,x_n]$ son polinomios homogéneos en $x_0,\cdots,x_n$, del mismo grado d_0, tales que no todos se anulen en w_0.

Sea U_0 el conjunto de los puntos de $(A_0 \times \mathbb{P}^n) \cap U$ donde al menos un h_i no se anula; observar que U_0 es un abierto de $A \times \mathbb{P}^n$ y su proyección $p_1(U_0)$ en A es un abierto de A_0 que contiene a_0. Por lo tanto, existe un abierto afín $\tilde{A}_0 \subseteq p_1(U_0)$ que contiene a a_0. La $(n+1)$-upla $(h_0,\cdots,h_n)$ produce entonces un morfismo $\rho_0 : \tilde{A}_0 \to H_{d_0}$. Por construcción, la restricción de ρ a $\tilde{A}_0$ coincide con $\pi_{d_0} \circ \rho_0$.

Iterando el proceso para cada $a \in A$ obtenemos el cubrimiento afín deseado. □

Corolario 2.1.12. *Un conjunto* $F \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *es cerrado si y sólo si* $(\pi_d)^{-1}(F)$ *es cerrado en* H_d *para todo* d.

Demostración. Por definición F es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ si y sólo si su preimagen es cerrada para todo morfismo. Como cada π_d es un morfismo, se tiene que $(\pi_d)^{-1}(F)$ es cerrado en H_d para todo d si F lo es en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.

Recíprocamente, asumamos que $(\pi_d)^{-1}(F)$ sea cerrado en H_d para todo d y sea $\rho : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un morfismo. Aplicando el lema anterior, obtenemos un cubrimiento afín $(A_i)_{i\in I}$ de A tal que para todo i existe un entero d_i y un morfismo $\rho_i : A \to H_{d_i}$ de modo que la restricción de ρ a A_i coincide con $\pi_{d_i} \circ \rho_i$. Como $(\pi_{d_i})^{-1}(F)$ es cerrado y $(\rho)^{-1}(F) \cap A_i$ es igual a $(\rho_i)^{-1}((\pi_d)^{-1}(F))$, obtenemos que $(\rho)^{-1}(F) \cap A_i$ es cerrado en A_i para todo i, por lo cual $\rho^{-1}(F)$ es cerrado en A. □

Corolario 2.1.13. $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ *es cerrado en* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *para todo* d.

Demostración. Por el corolario anterior, y como $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} = \pi_d(H_d)$, basta con ver que $(\pi_m)^{-1}(\pi_d(H_d))$ es cerrado en H_m para todo m. El resultado es entonces consecuencia del Lema 2.1.9 □

Corolario 2.1.14. *El mapa* $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ *es sobreyectivo, continuo y cerrado para todo* d. *En particular es un cociente topológico.*

Demostración. La sobreyectividad se deduce de la construcción de H_d y π_d, y la continuidad viene dada por ser π_d un morfismo.

Sea $F \subseteq H_d$ cerrado. Por el Lema 2.1.9, $(\pi_m)^{-1}(\pi_d(F))$ es cerrado en H_m para todo m, por lo tanto por el Corolario 2.1.12 $\pi_d(F)$ es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$. $\square$

La siguiente proposición se deduce de lo probado anteriormente.

Proposición 2.1.15. *La topología de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *es la topología del límite inductivo dada por las topologías Zariski de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$*,* $d \in \mathbb{N}$*, que son las topologías cociente de* $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$*, dónde* H_d *está equipado con la topología Zariski.*

Es decir, $F \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *es cerrado si y sólo si* $\pi_d^{-1}(F \cap \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d})$ *es un cerrado Zariski en* H_d *para todo* $d \in \mathbb{N}$*.*

Ejemplo 2.1.16. Sean $C \subseteq \mathbb{P}^n$ la cúbica nodal dada por $abc = a^3 + b^3$, donde a, b, c son coordenadas homogéneas en $\mathbb{P}^n$ y $\rho_3 : C \to H_3$ dado por

$$(a : b : c) \mapsto (x_0 R : x_1 S : x_2 R : \cdots : x_n R),$$

$$R = ax_2^2 + cx_0x_2 + bx_0^2, \; S = ax_2^2 + (b+c)x_0x_2 + (a+b)x_0^2.$$

Si $\rho := \pi_3 \circ \rho_3$, entonces afirmamos que $\rho(C) \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq 2}$ y no existe un morfismo $\rho_2 : C \to H_2$ de modo que $\rho = \pi_2 \circ \rho_2$.

La imagen de $(0 : 0 : 1)$ por ρ_3 es $(x_0(x_0x_2) : x_1(x_0x_2) : \cdots : x_n(x_0x_2))$, que corresponde a la identidad. En el abierto $C \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ de C, ni a ni b se anulan, por lo que la restricción de ρ_3 a este abierto corresponde a

$$(a : b : c) \mapsto (x_0 R' : x_1 S' : x_2 R' : \cdots : x_n R'),$$

$$R' = abR = a^2bx_2^2 + abcx_0x_2 + ab^2x_0^2,$$

$$S' = abS = a^2bx_2^2 + (ab^2 + abc)x_0x_2 + ab(a+b)x_0^2.$$

Observar que $R' = a^2bx_2^2 + (a^3+b^3)x_0x_2 + ab^2x_0^2 = (a^2x_2 + b^2x_0)(bx_2 + ax_0)$ y $S' = (a^2x_2 + b(a+b)x_0)(bx_2 + ax_0)$. Esto muestra que $\pi_3(\rho_3(a : b : c))$ tiene grado 2 para cualquier $(a : b : c) \in C \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$. Por lo cual concluimos que $\rho(C) \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq 2}$.

Supongamos ahora que existe un morfismo $\rho_2 : C \to H_2$ tal que $\pi_2 \circ \rho_2 = \rho$. Como π_2 es biyectiva en $(\pi_2)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_2)$ y $\rho(C \setminus \{(0 : 0 : 1)\}) \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_2$, la restricción de ρ_2 a $C \setminus \{(0 : 0 : 1)\}$ está dada por

$$(a : b : c) \mapsto (x_0 R'' : x_1 S'' : x_2 R'' : \cdots : x_n R''),$$

$$R'' = a^2x_2 + b^2x_0,\ S'' = a_2^x + b(a+b)x_0.$$

Faltaría ver que este morfismo no se extiende a C. Sea $\varphi : \mathbb{P}^1 \to C$ el mapa birracional que dado por $(u:v) \mapsto (u^2v : uv^2 : u^3+v^3)$. De ser posible extender ρ_2 tendríamos que la imagen de (u,v) por $\rho_2 \circ \varphi : \mathbb{P}^1 \to H_2$ es

$$(x_0(u^2x_2+v^2x_0) : x_1(u^2x_2+v(u+v)x_0) : x_2(u^2x_2+v^2x_0) : \cdots : x_n(u^2x_2+v^2x_0)).$$

En particular, vemos que $\rho_2(\varphi(1:0))$ y $\rho_2(\varphi(0:1))$ son distintos, lo cual es imposible ya que $\varphi(1:0) = \varphi(0:1)$.

El ejemplo anterior muestra un morfismo $C \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq 2}$ que no se levanta a H_2. Esto ocurre por la degeneración de elementos de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_2$ a elementos de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_1$. El siguiente lema muestra que la situación es mejor si el grado está fijo.

Lema 2.1.17. *Sean d_1, d_2 enteros tales que $1 \leq d_1 \leq d_2$. El conjunto*

$$H_{d_1,d_2} := (\pi_{d_2})^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{d_1})$$

es localmente cerrado en H_{d_2} e isomorfo a $H_{d_1,d_1} \times \mathbb{P}(\mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]_{d_2-d_1})$. Además, la proyección

$$\rho_{d_1,d_2} : H_{d_1,d_2} \to H_{d_1,d_1} \subseteq H_{d_1}$$

es tal que $\pi_{d_1} \circ \rho_{d_1,d_2}$ y π_{d_2} coinciden en H_{d_1,d_2}.

Demostración. Por el Corolario 2.1.13, $(\pi_{d_2})^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d_1})$ y $(\pi_{d_2})^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d_1-1})$ son cerrados en H_{d_2}. Lo que implica que H_{d_1,d_2} es localmente cerrado en H_{d_2} y por tanto hereda la estructura de variedad algebraica. Tenemos la biyección natural

$$\tau : H_{d_1,d_1} \times \mathbb{P}(\mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]_{d_2-d_1}) \to H_{d_1,d_2}$$

$$((f_0 : \cdots : f_n), h) \to (f_0h : \cdots : f_nh),$$

que es la restricción del morfismo

$$\hat{\tau} : W_{d_1} \times \mathbb{P}(\mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]_{d_2-d_1}) \to H_{d_1,d_2}$$

$$((f_0 : \cdots : f_n), h) \to (f_0h : \cdots : f_nh).$$

Anotando como $U_{d_1} \subseteq W_{d_1}$ el abierto de los elementos $(f_0 : \cdots : f_n)$ tales que los f_i no tengan factores en común, para probar el resultado basta con ver que $\hat{\tau}$ se restringe a un isomorfismo de $V = U_{d_1} \times \mathbb{P}(\mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]_{d_2-d_1})$ con su imagen.

El morfismo $\hat{\tau}$ es universalmente cerrado por ser proyectivo y, como $V = \hat{\tau}^{-1}(\hat{\tau}(V))$, su restricción a V también es universalmente cerrado. Calculando el diferencial, se ve que no es ramificado. En efecto, pensemos el mapa en los espacio afines correspondientes,

$$\tilde{\tau} : \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_{d_1}^{n+1} \times \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_{d_2-d_1} \to \mathrm{k}[x_0 \cdots, x_n]_{d_2}^{n+1}$$

$$((f_0, \cdots, f_n), h) \to (f_0 h, \cdots, f_n h)$$

y calculemos el diferencial.

Fijemos $((f_0, \cdots, f_n), h) \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_{d_1}^{n+1} \times \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_{d_2-d_1}$. Identificando los tangentes, tenemos $((f_0 + \varepsilon g_0, \cdots, f_n + \varepsilon g_n), h + \mu\Delta)$ es un elemento del tangente. Aplicando $\tilde{\tau}$, obtenemos $((f_0 + \varepsilon g_0)(h + \mu\Delta), \cdots, (f_0 + \varepsilon g_0)(h + \mu\Delta))$, que en cada coordenada es $f_i h + \varepsilon g_i h + f_i \mu\Delta + \varepsilon g_i \mu\Delta$. En conclusión, el diferencial en $((f_0, \cdots, f_n), h)$ evaluado en $((\varepsilon g_0, \cdots, \varepsilon g_n), \mu\Delta)$ es

$$(\varepsilon g_0 h + f_0 \mu\Delta, \cdots, \varepsilon g_n h + f_n \mu\Delta).$$

Observar que $\varepsilon g_i h + f_i \mu\Delta = 0 \ \forall i$ es equivalente a $h | f_i \mu\Delta$ para todo i. Si ahora los $f_i\,'s$ no tienen factores en común, es equivalente a que $h|\mu\Delta$ y como tienen el mismo grado, deben ser proporcionales. Sustituyendo en la ecuación y usando grados, tenemos que $(g_0, \cdots, g_n)$ y $(f_0, \cdots, f_n)$ también son proporcionales, es más, se tiene que $Ker\ d_{(f,h)}\tilde{\tau} = \mathrm{k} \cdot (-f, h)$. Por lo tanto, pasando a los proyectivos, obtenemos que es no ramificado.

Además es claramente universalmente inyectiva y sobreyectiva, por lo tanto es un isomorfismo. □

Corolario 2.1.18. *Sea A una variedad algebraica irreducible y $\rho : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un morfismo cuya imagen está contenida en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$ para cierto d entero. Existe un único morfismo $\tilde{\rho} : A \to H_d$ tal que $\rho = \pi_d \circ \tilde{\rho}$.*

Demostración. El Lema 2.1.11 produce un cubrimiento abierto afín $(A_i)_{i \in I}$ de A tal que para todo i, existen un entero d_i y un morfismo $\rho_i : A_i \to H_{d_i}$ de modo que la restricción de ρ a A_i coincida con $\pi_{d_i} \circ \rho_i$. Como $\rho(A)$ está contenida en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$, se tiene que $d_i \geq d$ para todo i y la imagen de ρ_i está contenida en H_{d,d_i}. Podemos, entonces, remplazar ρ_i por $\rho_{d,d_i} \circ \rho_i$ donde ρ_{d,d_i} es la obtenida en el lema anterior.

Luego del remplazo, cada d_i es igual a d. Además como π_d se restringe a una biyección $H_{d,d} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$, los mapas ρ_i y ρ_j coinciden en $A_i \cap A_j$. En particular producen un morfismo $\tilde{\rho} : A \to H_d$ tal que $\rho = \pi_d \circ \tilde{\rho}$. La unicidad se deduce del hecho que π_d se restringe a una biyección $H_{d,d} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$. □

Proposición 2.1.19. *Sea $d \geq 1$ un entero. Se satisface:*

1. *El mapa $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ se restringe a una biyección*

$$H_{d,d} = (\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d,$$

donde $H_{d,d}$ es abierto en H_d, y por lo tanto una variedad algebraica.

2. *Sea A una variedad algebraica irreducible. Los morfismos $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ cuya imagen está contenida en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$ corresponden, vía π_d, a morfismos de variedades algebraicas $A \to H_{d,d}$.*

Demostración. Para la primer afirmación, solo resta ver que $H_{d,d}$ es abierto, lo que se desprende del hecho que $(\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d-1})$ es cerrado en H_d. Por lo tanto $(\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d)$ es abierto en H_d.

Probemos la segunda. Si $\rho : A \to H_{d,d}$ es un morfismo de variedades algebraicas, entonces $\pi_d \circ \rho$ es un morfismo $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ con imagen contenida en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$.

Recíprocamente, si $\rho : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es un morfismo con imagen contenida en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$, este corresponde de manera única a un mapa $\tilde{\rho} : A \to H_{d,d}$ tal que $\rho = \pi_d \circ \tilde{\rho}$. El corolario anterior implica que $\tilde{\rho}$ es un morfismo de variedades algebraicas. □

2.2. Subgrupos algebraicos de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$

En la literatura, un subgrupo algebraico G de $\mathrm{Bir}(X)$ corresponde a tomar un grupo algebraico G y un morfismo $G \to \mathrm{Bir}(X)$ que a su vez es un morfismo de grupos.

Algunos ejemplos de subgrupos algebraicos de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ son $Aut(\mathbb{P}^n) \simeq \mathrm{PGL}(n+1, \mathrm{k})$ y $Aut^0(X)$, siendo X una variedad tórica compacta no singular de dimensión n. Además en el último ejemplo se tiene que $Aut^0(X)$ contiene un toro algebraico de dimensión n.

Para más ejemplos y una clasificación de los subgrupos maximales de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^3)$ remitimos a [O].

El Corolario 2.2.2 permite dar una definición intrínseca en el caso $X = \mathbb{P}^n$, mientras que el Lema 2.2.3 muestra que ambas definiciones coinciden.

Proposición 2.2.1. *Sea $G \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un subgrupo cerrado, conexo y con $G \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ para cierto d natural de modo que $\pi_d^{-1}(G \cap \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d)$ es no vacío.*

Sea K su clausura en H_d, entonces

1. *π_d induce un homeomorfismo $K \to G$.*

2. *Sea A una variedad algebraica irreducible. El morfismo $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ con imagen contenida en G corresponde, mediante π_d, al morfismo de variedades algebraicas $A \to K$.*

3. *Los levantamientos a K del producto $G \times G \to G$, $(f,g) \to f \circ g$ y el mapa $G \to G$, $f \to f^{-1}$, dan lugar a morfismos de variedades algebraicas $K \times K \to K$ y $K \to K$.*

Esto dota a G de una única estructura de grupo algebraico.

Demostración. Como G es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, el pullback $(\pi_d)^{-1}(G)$ es cerrado en H_d y por lo tanto tiene un número finito de componentes irreducibles $I_1, \cdots, I_r$. Por el Corolario 2.1.14, los conjuntos $\pi_d(I_1), \cdots, \pi_d(I_r)$ son cerrados e irreducibles y cubren G. Quedándonos con los maximales, obtenemos las componentes irreducibles de G, digamos $Z_1, \cdots, Z_m$.

Para $i = 1, \cdots, m$, sea $A_i := \{g \in G \ : \ gZ_1 = Z_i\}$, que es igual a $\cap_{h \in Z_1} Z_i h^{-1}$ y por lo tanto cerrado en G. Al ser G la unión disjunta de los A_i, cada A_i también es abierto. Por lo tanto, existe un i tal que $A_i = G$, lo que implica $GZ_1 = Z_i$. Como $GZ_1 = G$, entonces $m = 1$ y por lo tanto G es irreducible.

Ahora, al ser G irreducible, el abierto $G_d := G \cap \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$ es irreducible y denso en G. Escribiendo $K_d = (\pi_d)^{-1}(G) \cap H_{d,d} = (\pi_d)^{-1}(G_d)$, el mapa π_d induce un homeomorfismo $K_d \to G_d$, de donde resulta K_d irreducible. Su clausura $K = \overline{K_d}$ está contenida en $(\pi_d)^{-1}(G)$, por lo tanto satisface $\pi_d(K) \subseteq G$. Además, $\pi_d(K)$ es cerrado en G y contiene a G_d, un abierto denso de G. Por lo tanto, $\pi_d(K) = G$.

Fijemos $f \in K$ y consideremos el mapa $K \to H_{d^2}$, $g \to g \circ f$. Afirmamos que existe $p \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_{d^2-d}$ que divide cada componente de $g \circ f$, para todo $g \in K$. En efecto, dado $g \in K$, se tiene $\pi_{d^2}(g \circ f) \in G$, por lo que tiene grado $\leq d$. Si el grado es exactamente d, entonces existen $p_g \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_{d^2-d}$ y $h_g \in H_d$ tales que $g \circ f = p_g h_g$. Si suponemos que $\pi_d(g)$ tiene grado d, entonces la hipersuperficie $p_g = 0$ es contraída por f a los puntos base de g, por lo tanto tenemos que p_g es un producto de algunos factores del jacobiano de f. Esto genera, a menos de multiplicación por constantes, un número finito de polinomios homogéneos de grado $d^2 - d$, $p_1, \cdots, p_s$.

Para $i = 1, \cdots, s$, sea F_i el conjunto de elementos $g \in K$ tales que p_i divide cada componente de $g \circ f$. Observar que cada F_i es cerrado en K, y $F_1 \cup \cdots \cup F_s$ contiene el abierto de los $g \in K$ tales que $\pi_d(g)$ y $\pi_{d^2}(g \circ f)$ tienen grado d. Por lo tanto, como $K = \overline{K_d}$ es irreducible, se tiene que $K = F_i$ para cierto i, lo que prueba que existe tal $p \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_{d^2-d}$.

Consecuentemente, existe un morfismo $\mu_f : K \to (\pi_d)^{-1}(G) \subseteq H_d$ tal que para cada $g \in K$, $g \circ f = p\mu_f(g)$. Como $U := \mu_f^{-1}(K_d) = \mu_f^{-1}(H_{d,d})$ es un abierto denso de K, se tiene $\mu_f(K) = \mu_f\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{\mu_f(U)} \subseteq K$.

Como $\pi_d(K) = G$, existe un $g \in K$ tal que $\pi_{d^2}(f \circ g) = \pi_{d^2}(g \circ f) = id_{\mathbb{P}}^n$. Lo que implica que los morfismos de K en K, $\mu_g \circ \mu_f$ y $\mu_f \circ \mu_g$, coinciden con la identidad en K_d, que es denso en K, por lo tanto coinciden con la identidad en K. Concluimos que $\mu_f : K \to K$ es un isomorfismo.

Probemos 1). Veamos que si $\pi_d(g) = \pi_d(h)$ para ciertos $g, h \in K$, entonces $g = h$. Sea $f \in K$ tal que $\pi_d(g) \circ \pi_d(f) \in G_d$. Como $\pi_d(\mu_f(g)) = \pi_d(\mu_f(h))$ en G_d, se tiene que $\mu_f(g) = \mu_f(h)$, por lo cual $g = h$. Entonces tenemos que π_d induce un morfismo biyectivo $K \to G$ y por el Corolario 2.1.14 sabemos que es cerrado, por lo tanto es un homeomorfismo.

Probemos la segunda afirmación. Si $\rho : A \to K$ es un morfismo de variedades algebraicas, entonces $\pi_d \circ \rho$ es un morfismo $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ con su imagen contenida en G.

Recíprocamente, sea $\varphi : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un morfismo con imagen contenida en G que corresponde a un único mapa $\rho : A \to K$ tal que $\varphi = \pi_d \circ \rho$. Por la Proposición 2.1.19, ρ es un morfismo de variedades algebraicas en el abierto $\varphi^{-1}(G_d)$. Para cualquier $f \in K$, componiendo ρ y φ con m_f y la multiplicación a derecha por $\pi_d(f)$ y usando la Proposición 2.1.19 se tiene que ρ es un morfismo en $\rho^{-1}(m_f^{-1}(K_d))$. Como los abiertos $m_f^{-1}(K_d)$ cubren K, deducimos que ρ es un morfismo de A en K.

Por último, como $\pi_d : K \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es un morfismo, también lo es $I \circ \pi_d : K \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, donde $I : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es el mapa que manda a un elemento en su inverso. Por la parte anterior, $I \circ \pi_d : K \to G$ corresponde a un morfismo de variedades algebraicas $K \to K$, que manda cada elemento en su inverso. Del mismo modo, la composición de los morfismos $K \times K \to H_{d^2},\ (f,g) \mapsto f \circ g$ y $\pi_{d^2} : H_{d^2} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es un morfismo $K \times K \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ con imagen incluida en G. Aplicando la parte anterior, obtenemos un mapa $K \times K \to K$ que es el producto de la estructura de grupo, lo que termina la demostración. □

Corolario 2.2.2. *Sea $G \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un subgrupo, cerrado y de grado acotado. Existen un grupo algebraico K y un morfismo $K \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, induciendo un homeomorfismo $\pi : K \to G$ que es un morfismo de grupos y tal que para cualquier variedad algebraica irreducible A, el morfismo $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ con imagen contenida en G, corresponde vía π, al morfismo de variedades algebraicas $A \to K$.*

Demostración. El hecho que G tiene finitas componentes conexas puede ser verificado de la misma manera que en el teorema anterior. El resto de la prueba es consecuencia directa de la proposición anterior y del Teorema 1.1.60. □

Lema 2.2.3. *Sean A un grupo algebraico y $\rho : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un morfismo, que además es un morfismo de grupos. Entonces, la imagen G de A es un subgrupo cerrado de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, con grado acotado. Si $\pi : K \to G$ es el homeomorfismo construido en el corolario anterior, existe un único morfismo de grupos algebraicos $\tilde{\rho} : A \to K$ tal que $\rho = \pi \circ \tilde{\rho}$.*

Demostración. Por el Lema 2.1.11, la imagen $G = \rho(A)$ es de grado acotado. Denotemos por $\overline{G}$ su clausura. Observar que es un subgrupo de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.

Por el corolario anterior, obtenemos un homeomorfismo canónico $K \to \overline{G}$, donde K es un grupo algebraico, y un levantamiento $\tilde{\rho} : A \to K$ del morfismo $\rho : A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ con imagen en $\overline{G}$. Como ρ es un morfismo de grupos, $\tilde{\rho}$ es un morfismo de grupos algebraicos, por lo que su imagen es cerrada y por tanto es K. Entonces $\overline{G} = G$, lo que finaliza la prueba. □

2.3. Estructura de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$

En esta sección se verá que no se puede dotar a $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ de una estructura de variedad algebraica coherente con los morfismo $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, si $d, n \geq 2$. Esta imposibilidad radica en la topología de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ y no en la dimensión del espacio. El siguiente ejemplo será crucial para ver esto.

Ejemplo 2.3.1. Consideremos $\varphi : \mathbb{P}^2 \to W_2$ el morfismo definido por

$$(a : b : c) \mapsto (x_0(ax_2 + cx_0) : x_1(ax_2 + bx_0) : x_2(ax_2 + cx_0) : \cdots : x_n(ax_2 + cx_0));$$

observar que φ es un mapa cerrado que, además, es inyectivo.

En efecto, $\varphi(a : b : c) = \varphi(a' : b' : c')$ si y sólo si existe $\lambda \in \mathrm{k}$ tal que

$$\lambda = \frac{ax_2 + cx_0}{a'x_2 + c'x_0} = \frac{ax_2 + bx_0}{a'x_2 + b'x_0},$$

lo que implica, $(a : b : c) = (a' : b' : c')$.

Observar que $\varphi(0 : 1 : 0) \notin H_2$, pues $\varphi(0 : 1 : 0) = (0 : x_0x_1 : 0 : \cdots : 0)$ y claramente el mapa racional asociado no es birracional. Análogamente, se tiene que $\varphi(0 : 0 : 1) \notin H_2$. Además si $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2 \setminus \{(0 : 1 : 0), (0 : 0 : 1)\}$ el mapa asociado a $\varphi(a : b : c)$ es birracional y su inverso es el asociado a $\varphi(a : c : b)$: en efecto, escribamos $\varphi(a:b:c)=(f_0:\cdots:f_n)$ y $\varphi(a:c:b)=(g_0:\cdots:g_n)$. Si $i\neq 1$, se tiene

$$\begin{aligned} f_i(g_0,\cdots,g_n) &= g_i(ag_2+cg_0)=x_i(ax_2+bx_0)(ax_2(ax_2+bx_0)+cx_0(ax_2+bx_0)) \\ &= x_i(ax_2+bx_0)^2(ax_2+cx_0). \end{aligned}$$

Si $i=1$, se tiene

$$\begin{aligned} f_1(g_0,\cdots,g_n) &= g_1(ag_2+bg_0)=x_1(ax_2+cx_0)(ax_2(ax_2+bx_0)+bx_0(ax_2+bx_0)) \\ &= x_1(ax_2+cx_0)(ax_2+bx_0)^2. \end{aligned}$$

Deducimos que $(f_0(g_0,\cdots,g_n):\cdots:f_n(g_0,\cdots,g_n))$ es igual a

$$(x_0(ax_2+bx_0)^2(ax_2+cx_0):\cdots:x_n(ax_2+bx_0)^2(ax_2+cx_0)).$$

Definamos $\hat{V}=\mathbb{P}^2\setminus\{(0:1:0),(0:0:1)\}$ y designemos $V\subseteq\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq 2}$ la imagen del morfismo $\rho=\pi_2\circ\varphi$.

Sea $L=\{(a:b:c)\in\hat{V}\ :\ b=c\}\subset\hat{V}$, observar que $\rho(L)=\{id\}$ y ρ induce una biyección $\hat{V}\setminus L\to V\setminus\{id\}$. En efecto, por un lado

$$\begin{aligned} \rho(a:c:c) &= \pi_2(x_0(ax_2+cx_0):x_1(ax_2+cx_0):x_2(ax_2+cx_0):\cdots:x_n(ax_2+cx_0)) \\ &= (x_0:\cdots:x_n). \end{aligned}$$

Por otro lado $\varphi(a:b:c)\in H_{2,2}$ si $(a:b:c)\in\hat{V}\setminus L$, de donde sigue la afirmación.

Lema 2.3.2. *En el contexto del ejemplo anterior, se cumple:*

1. *El conjunto* $V\subseteq\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *es cerrado*
2. *El mapa* $\rho:\hat{V}\to V$ *es un cociente topológico*

Demostración. Para probar 1. basta ver que $\varphi(\hat{V})$ es cerrado en H_2 ya que π_2 es un mapa cerrado.

Consideremos $A\subset H_2$ como el conjunto de los elementos $(h_0:\cdots:h_n)\in H_2$ tales que $h_0x_j=h_jx_0\ \forall j\geq 2$. Es claro que A es cerrado en H_2, además, cada elemento de A es de la forma $(x_0l_1:l_2:x_2l_1:\cdots:x_nl_1)$ con $l_i\in \mathrm{k}[x_0,\cdots,x_n]_i$. Imponiendo las condiciones que l_1 dependa de x_0 y x_2 y que l_2 sea una combinación lineal de x_1x_2 y x_0x_1 obtenemos

$$(x_0(ax_2+cx_0):x_1(dx_2+bx_0):x_1(ax_2+cx_0):\cdots:x_n(ax_2+cx_0))$$

para ciertos $a,b,c,d\in\mathrm{k}$ con $(a,c)\neq 0$ y $(b,d)\neq 0$. Si además pedimos que $a=d$ obtenemos $\varphi(\hat{V})$, por lo tanto es cerrado en H_2. Además, como π_d es un cociente topológico y φ es un homeomorfismo sobre su imagen, tenemos que $\rho=\pi_d\circ\varphi$ es un cociente topológico. $\square$

Proposición 2.3.3. *Dados $d,n \geq 2$ se cumple:*

1. *No hay una estructura de variedad algebraica (o ind-variedad algebraica) en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ tal que los morfismos $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ con imagen contenida en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ correspondan con morfismos de (ind)variedades algebraicas $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$.*

2. *No hay una estructura de ind-variedad algebraica en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ tal que los morfismos $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, correspondan con morfismos de (ind-)variedades algebraicas $A \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.*

Demostración. Supongamos, por absurdo, la existencia de la estructura de ind-variedad en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ o $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$. Sea $\rho : \hat{V} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ el morfismo del ejemplo anterior. Como la imagen es $V \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq 2} \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, y V es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, luego lo es en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$. Por lo tanto el mapa ρ corresponde a un morfismo de ind-variedades de $\hat{V}$ a $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ o $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$. Como además, $\hat{V}$ es una variedad algebraica, el morfismo se factoriza por un morfismo de $\hat{V}$ a una variedad algebraica cerrada (de dimensión finita). Al ser la imagen V de $\hat{V}$ cerrada, el mapa $\hat{V} \to V$ es un morfismo de variedades algebraicas, por lo cual V es una variedad irreducible de dimensión 2. El lema anterior afirma que este mapa es un cociente topológico. Por lo tanto todos los cerrados irreducibles de V corresponden a puntos, a V o a la imagen de curvas de $\hat{V}$. En particular, como todas las curvas de $\mathbb{P}^2$ se cortan con L tenemos que todas las curvas de V pasan por la identidad, lo cual es imposible para una variedad algebraica de dimensión ≥ 2. $\square$

Definición 2.3.4. *Sea S un espacio topológico. Decimos que un punto cerrado $p \in S$ es un punto atractor de S si se verifican:*

1. *S contiene un cerrado propio infinito*

2. *p está contenido en todos los cerrados infinitos $F \subseteq S$.*

Lema 2.3.5. *Si X es una ind-variedad algebraica, entonces el conjunto de los puntos atractores de cualquier cerrado irreducible de X es vacío.*

Demostración. Sea $Y \subseteq X$ un cerrado irreducible. Supongamos primero que Y es una variedad algebraica de dimensión ≥ 2. Entonces, para cualquier punto $p \in Y$, podemos encontrar una curva cerrada $\Gamma \subseteq Y$ que no pase por p. Consecuentemente, Y no tiene puntos atractores. Lo mismo sucede si hay algún cerrado $Z \subseteq Y$ que sea una variedad algebraica de dimensión ≥ 2.

Si Y es variedad de dimensión < 2, entonces no contiene ningún cerrado infinito propio.

Resta considerar el caso en que Y es una ind-variedad, siendo la unión de $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq \cdots$, donde los Y_i son variedades algebraicas de dimensión menor o igual que 1 e $Y_i \neq Y_{i+1}$. Tomamos $p \in Y$ y consideramos d un entero tal que $p \in Y_d$.

Consideremos $q_i \in Y_i \setminus Y_{i-1}$ para cada $i \geq d+1$ y sea F la union de los q_i. $\square$

Observación 2.3.6. Se puede probar que en el caso de considerar la topología Zariski de la ind-variedad también se verifica el lema anterior.

Proposición 2.3.7. *Si $n \geq 2$, cualquier elemento $\varphi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es un punto atractor de algún cerrado irreducible $Y \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$.*

Demostración. Podemos asumir que φ es la identidad, pues el mapa $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ dado por $\varphi' \mapsto \varphi \circ \varphi'$ es un homeomorfismo.

Consideremos el mapa $\rho : \hat{V} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ del ejemplo anterior. Sabemos que V es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ y su topología está dada por el cociente $\hat{V} \to V$. El conjunto $\hat{V}$ es irreducible, contiene infinitos cerrados infinitos y todos intersectan $L = \rho^{-1}(id)$. Esto muestra que V es irreducible, con infinitos cerrados infinitos y que todos contienen la identidad. Es decir, id es punto atractor de V. $\square$

Capítulo 3

Topología euclídea

Sea (k, $|\ |$) un cuerpo local no arquimedeano y consideremos la función $d : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida de la siguiente manera

$$d(x,y) = \frac{\text{máx}_{i<j} |x_i y_j - x_j y_i|}{\text{máx}_i |x_i| \, \text{máx}_i |y_i|},$$

donde $x_0, \cdots, x_n$ e $y_0, \cdots, y_n$ son coordenadas homogéneas de x e y respectivamente. Veamos que d es una ultramétrica en $\mathbb{P}^n$.

Observar que la función así definida es efectivamente independiente del representante, simétrica y verifica $d(x,y) = 0$ si y solamente si $x \sim y$.

Para verificar la desigualdad triangular fuerte, observar que

$$\begin{aligned}
|x_i y_j - x_j y_i||z_k| &= |x_i y_j z_k - x_j y_i z_k| \\
&= |x_i y_j z_k - x_k y_j z_i + x_k y_j z_i - x_k y_i z_j + x_k y_i z_j - x_j y_i z_k| \\
&\leq \text{máx}\{|x_i z_k - x_k z_i||y_j|, |y_i z_j - y_j z_i||x_k|, |x_k z_j - x_j z_k||y_i|\} \\
&\leq \text{máx}\left\{\underset{i<j}{\text{máx}} |x_i z_j - x_j z_i| \underset{k}{\text{máx}} |y_k|, \underset{i<j}{\text{máx}} |z_i y_j - z_j y_i| \underset{i}{\text{máx}}\, \text{k}|x_k|\right\}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se tiene

$$\underset{i<j}{\text{máx}} |x_i y_j - x_j y_i| \underset{k}{\text{máx}} |z_k| \leq \text{máx}\left\{\underset{i<j}{\text{máx}} |x_i z_j - x_j z_i| \underset{k}{\text{máx}} |y_k|, \underset{i<j}{\text{máx}} |z_i y_j - z_j y_i| \underset{k}{\text{máx}} |x_k|\right\},$$

Dividiendo entonces por $(\text{máx}_k |x_k|)(\text{máx}_k |y_k|)(\text{máx}_k |z_k|)$, concluimos

$$d(x,y) \leq \text{máx}\{d(x,z), d(z,y)\},$$

o sea, d es una ultramétrica en $\mathbb{P}^n$.

Definición 3.0.1. *La topología* ***euclídea*** *de $\mathbb{P}^n$ es la inducida por d.*

Lema 3.0.2. *Las cartas afines $\varphi_i : \mathbb{A}^n \to U_i \subset \mathbb{P}^n$, donde $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n \ : \ x_i \neq 0\}$, son homeomorfismos con respecto a la topología euclídea.*

Demostración. Observar que si consideramos representantes con $\text{máx}_l |x_l| = M$, tenemos

$$\begin{aligned} |x_l y_j - x_j y_l| &= |x_l y_j - x_l x_j + x_l x_j - x_j y_l| \\ &\leq \text{máx}\{|x_j - y_j||x_l|, |x_l - y_l||x_j|\} \\ &\leq \text{máx}\{|x_j - y_j|, |x_l - y_l|\} \\ &\leq \underset{l}{\text{máx}} |x_l - y_l|. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) = \underset{i<j}{\text{máx}} |x_i y_j - x_j y_i| \leq \underset{i}{\text{máx}} |x_i - y_i| = d(x,y),$$

de donde se deduce que φ es continua.
Sea $\psi : U_i \to \mathbb{A}^n$ la inversa de φ, que está definida mediante

$$\psi(x_0 : \cdots : x_n) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i} \right).$$

Tenemos entonces,

$$\begin{aligned} d(\psi(x), \psi(y)) &= \underset{j}{\text{máx}} \left| \frac{x_j}{x_i} - \frac{y_j}{y_i} \right| \\ &= \frac{1}{|x_i||y_i|} \underset{j}{\text{máx}} |x_j y_i - x_i y_j| \\ &\leq \frac{1}{|x_i||y_i|} \underset{j<i}{\text{máx}} |x_j y_i - x_i y_j| \\ &= \frac{1}{|x_i||y_i|} d(x,y) \underset{k}{\text{máx}} |x_k| \underset{k}{\text{máx}} |y_k|. \end{aligned}$$

Considerando, representantes con $\text{máx}_k |x_k| = M = \text{máx}_k |y_k|$, si además los tomamos con $x_i = 1 = y_i$, concluimos que ψ es continua, lo que completa la demostración. $\square$

Lema 3.0.3. *La topología euclídea de $\mathbb{P}^n$ es más fina que la topología Zariski.*

Demostración. Usando las cartas afines $\varphi_i : \mathbb{A}^n \to U_i$ tenemos para cada i el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[dr, "\tilde{h}"'] & U_i \subset \mathbb{P}^n \arrow[d, "h"] \\ & \mathrm{k} \end{tikzcd},$$

donde $h \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]_d$ y $\tilde{h}$ su deshomogenización.

Por lo tanto tenemos que $Z(h) \cap U_i$ es cerrado según la topología euclídea para todo i, por ser φ_i un homeomorfismo y $\tilde{h}$ continuo.

En conclusión, $Z(h) = \bigcup_i (Z(h) \cap U_i)$ es cerrado en la topología euclídea.

Además, $\mathbb{P}^n$ con la topología euclídea es un espacio métrico, por lo que es Hausdorff, es decir, existen abiertos euclídeos no Zariski. □

3.1. La topología euclídea sobre $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$

Las variedades W_d y H_d (notación como en la Definición 2.1.7) están definidas sobre cualquier cuerpo. Por el Lema 2.1.9, W_d es un espacio proyectivo y H_d es localmente cerrado en W_d en la topología Zariski, por lo que tiene sentido considerar la siguiente definición.

Definición 3.1.1. *La topología euclídea en* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ *es la topología cociente inducida por el mapa sobreyectivo* $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$*, considerando en* H_d *la topología euclídea relativa.*

Si $f : X \to Y$ es un mapa cociente entre espacios topólogicos y A un subespacio de X, notar que el mapa inducido $A \to f(A)$ no siempre es un cociente. Sin embargo, esto es cierto si A es abierto y $A = f^{-1}(f(A))$. Como $H_{d,d} = (\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d)$ es abierto Zariski en H_d, y por tanto es un abierto euclídeo, π_d se restringe a un homeomorfismo $(\pi_d)^{-1}(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_d$, para cualquier $d \geq 1$.

Lema 3.1.2. *Sea $d \geq 1$ un entero. Dotados con la topología euclídea, W_d y H_d son espacios métricos localmente compactos. En particular, los conjuntos W_d, H_d y* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ *son espacios sequenciales.*

Demostración. Por construcción de la topología euclídea, W_d y H_d son espacios métricos. Como W_d es compacto y H_d es localmente cerrado en W_d, se tiene que H_d es localmente compacto. El resto sigue del hecho que los espacios métricos son secuenciales y que cociente de secuenciales es secuencial. □

Recordar que un mapa $f: X \to Y$ entre espacios topológicos es propio si es continuo y para cualquier espacio topológico Z, el mapa $f \times id_Z$ es cerrado. También recordar que un espacio topológico es localmente compacto si es Hausdorff y cada punto tiene un entorno compacto.

Lema 3.1.3. *Dado $d \geq 1$ se cumplen las siguientes.*

1. $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ *es propio (y cerrado).*

2. $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ *es localmente compacto.*

Demostración. Recordar el siguiente resultado: si $f: X \to Y$ es un cociente con X localmente compacto, entonces f es propio si y sólo si es cerrado y $f^{-1}(y)$ es compacto para todo $y \in Y$. Además, si se verifica alguna de la anteriores, Y es localmente compacto.

Dado $\varphi \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, del Lema 2.1.9 sigue que, $(\pi_d)^{-1}(\varphi)$ es cerrado en W_d. Como W_d es compacto, se deduce que $(\pi_d)^{-1}(\varphi)$ es compacto. Por lo tanto, como H_d es localmente compacto, solo resta ver que π_d es cerrado.

Sea $F \subseteq H_d$ un cerrado. Queremos ver que $\pi_d(F)$ es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, lo que es equivalente a ver que $\hat{F} = (\pi_d)^{-1}(\pi_d(F))$ es cerrado en H_d. Para esto, tomemos una sucesión $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \hat{F}$ que converge a $\varphi \in H_d$ y veamos que $\varphi \in \hat{F}$.

Como π_d es continuo por construcción, la sucesión $(\pi_d(\varphi_i))_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $\pi_d(\varphi) \in \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$. Remplazando por una subsucesión, podemos suponer que el grado de los $\pi_d(\varphi_i)$ es el mismo, digamos $m \leq d$.

Si $m = d$, tenemos $(\pi_d)^{-1}(\pi_d(\varphi_i)) = \{\varphi_i\}$ para todo i, por lo tanto $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset F$ y, al ser F cerrado, se tiene $\varphi \in F \subseteq \hat{F}$.

Asumamos $m < d$, y anotemos $k = d - m \geq 1$. Para cada i, existe un polinomio homogéneo $a_i \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]$ de grado k, tal que

$$\varphi_i = (a_i f_{i,0} : \cdots : a_i f_{i,n}),$$

donde $(f_{i,0} : \cdots : f_{i,n}) \in W_m$ corresponde a un mapa birracional de grado $m < d$. Consideremos la sucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Como cada a_i está definido a menos de constantes y $\mathbb{P}(\mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n])$ es compacto, a menos de reemplazar por una subsucesión, podemos asumir que $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a un polinomio homogéneo no nulo $a \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]$ de grado k.

Análogamente, podemos asumir que $\{(f_{i,0} : \cdots : f_{i,n})\}_{i\in\mathbb{N}}$ converge a un elemento $(f_0 : \cdots : f_n) \in W_m$, puesto que W_m es compacto. Además como $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a φ, tenemos que $\varphi = (af_0 : \cdots : af_n) \in H_d$.

Para cada i, existe $\varphi_i' \in F$ con $\pi_d(\varphi_i') = \pi_d(\varphi_i)$ pues $\varphi_i \in \hat{F} = (\pi_d)^{-1}(\pi_d(F))$. Tenemos entonces $\varphi_i' = (b_i f_{i,0} : \cdots : b_i f_{i,n})$, para ciertos polinomios homogéneos no nulos $b_i \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]$ de grado k. Nuevamente, podemos asumir que la sucesión $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge a un polinomio homogéneo no nulo $b \in \mathrm{k}[x_0, \cdots, x_n]$ de grado k. En particular, la sucesión $(\varphi_i')_{i\in\mathbb{N}}$ converge a $(bf_0 : \cdots : bf_n)$, el cual está en F por ser cerrado. Lo que implica que $\varphi = (af_0 : \cdots : af_n) \in \hat{F}$, pues $\pi_d(af_0 : \cdots : af_n) = \pi_d(bf_0 : \cdots : bf_n) \in \pi_d(F)$. $\square$

Observación 3.1.4. Para cualquier $d \geq 2$, $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ no es abierta. En efecto, definamos $f_m = (x_0 x_2^{d-1} : x_1(x_2^{d-1} + \frac{1}{m} x_0^{d-1}) : x_2^d : \cdots : x_n x_2^{d-1}) \in H_d$ para $m \geq 1$. Como $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge en H_d a $f_\infty \in (\pi_d)^{-1}(id)$, tenemos una sucesión $\{\pi_d(f_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ de elementos de grado d que convergen a la identidad. Sean $g \in (\pi_d)^{-1}(id)$ tal que $g \neq f_\infty$ y $U \subseteq H_d$ un entorno abierto de g que no contenga ningún f_m. Entonces, $\pi_d(U)$ no es abierto pues $\{\pi_d(f_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge a $id \in \pi_d(U)$ pero $\pi_d(U)$ no contiene ningún $\pi_d(f_m)$.

Lema 3.1.5. *Dado d entero positivo, la inyección natural*

$$\iota_d : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \hookrightarrow \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d+1}$$

es una inmersión cerrada, i.e. un homeomorfismo sobre su imagen, que es cerrada en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d+1}$.

Demostración. Definimos el mapa $\hat{\iota}_d : H_d \to H_{d+1}$ mediante $\hat{\iota}_d(f_0 : \cdots : f_n) = (x_0 f_0 : \cdots : x_0 f_n)$. Es un morfismo de variedades algebraicas, que es una inmersión cerrada. Por lo tanto es continuo y cerrado respecto a la topología euclídea. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} H_d \arrow[r, "\hat{\iota}_d"] \arrow[d, "\pi_d"] & H_{d+1} \arrow[d, "\pi_{d+1}"] \\ \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \arrow[r, "\iota_d"] & \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d+1}. \end{tikzcd}$$

Observar que la continuidad de $\hat{\iota}_d$ implica la continuidad de ι_d. En efecto, si U es un abierto de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d+1}$, la igualdad $(\pi_d)^{-1}(\iota_d^{-1}(U)) = (\hat{\iota}_d)^{-1}(\pi_{d+1}^{-1}(U))$ muestra que $(\pi_d)^{-1}(\iota_d^{-1}(U))$ es cerrado en H_d, es decir, $\iota_d^{-1}(U)$ es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$.

Es claro que ι_d es inyectiva, por lo que resta probar que es cerrada. Como π_{d+1} y $\hat{\iota}_d$ son cerradas, también lo es $\pi_{d+1} \circ \hat{\iota}_d = \iota_d \circ \pi_d$. Al ser π_d continua y sobreyectiva, tenemos que ι_d es cerrada. $\square$

3.2. La topología euclídea en el grupo de Cremona

Usando el Lema 3.1.5 se puede considerar en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ la topología del límite inductivo dada por $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$, es decir, un subconjunto de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es cerrado (respectivamente abierto) si y sólo si su intersección con cada $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ lo es. En particular, las inyecciones $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \hookrightarrow \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ son inmersiones cerradas. La topología definida de esta manera es la topología euclídea de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$. En esta sección veremos que con esta topología, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es un grupo topológico.

Lema 3.2.1. *Para cualquier entero positivo d, el mapa $I_d : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d^{n-1}}$ que manda un elemento en su inverso, es continuo.*

Demostración. Como en la prueba del Lema 2.1.9, definimos $Y \subseteq W_{d^{n-1}} \times W_d$ como el conjunto de los pares (g, f) tales que $(g_0(f_0, \cdots, f_n) : \cdots : g_n(f_0, \cdots, f_n))$ es un múltiplo de la identidad y sea $U \subseteq W_d$ (respectivamente $U' \subseteq W_{d^{n-1}}$) el conjunto de los elementos con jacobiano no nulo.
Como observamos previamente, Y es cerrado en $W_{d^{n-1}} \times W_d$ y U es abierto en W_d, por lo tanto $L := Y \cap (W_{d^{n-1}} \times U) = Y \cap (U' \times U)$ es localmente cerrado en $W_{d^{n-1}} \times W_d$.
La proyección sobre el segundo factor induce un morfismo sobreyectivo $\eta_2 : L \to H_d$, mientras que la proyección sobre el primer factor induce un morfismo $\eta_1 : L \to H_{d^{n-1}}$ que en general no es sobreyectivo. Por construcción, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "\eta_2"'] \arrow[dr, "\eta_1"] & \\
H_d \arrow[d, "\pi_d"] & & H_{d^{n-1}} \arrow[d, "\pi_{d^{n-1}}"] \\
\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \arrow[rr, "I_d"] & & \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d^{n-1}}
\end{tikzcd} .$$

Afirmamos que η_2 es cerrado para la topología euclídea. En efecto, por un lado, como $W_{d^{n-1}}$ es compacto, tenemos que la proyección sobre la segunda componente $W_{d^{n-1}} \times W_d \to W_d$ es cerrada. Por otro lado, su restricción a un cerrado $Y \subseteq W_{d^{n-1}} \times W_d$ induce un mapa cerrado $\eta_2' : Y \to W_d$. Finalmente, recordar que si $\varphi : A \to B$ es un mapa continuo y cerrado entre espacios topológicos y C es un subconjunto de B, entonces φ induce un mapa continuo y cerrado $\varphi^{-1}(C) \to C$. La afirmación es entonces consecuencia de $L = (\eta_2')^{-1}(H_d)$.

Para cualquier subconjunto F de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d^{n-1}}$, tenemos $\eta_2((\pi_{d^{n-1}}\eta_1)^{-1}(F)) = (I_d\pi_d)^{-1}(F)$. En efecto, ambos conjuntos corresponden a elementos $(f_0 : \cdots : f_n) \in W_d$ tales que el mapa racional ψ_f es el inverso de algún elemento de F.

Ahora, si F es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d^{n-1}}$, como η_1 y $\pi_{d^{n-1}}$ son continuas relativamente a la topología euclídea, el conjunto $F_L := (\pi_{d^{n-1}}\eta_1)^{-1}(F)$ es cerrado en L. Por lo tanto $\pi_d^{-1}(I_d^{-1}(F)) = (I_d\pi_d)^{-1}(F) = \eta_2(F_L)$ es cerrado en H_d, lo que implica que $I_d^{-1}(F)$ es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ y completa la demostración. $\square$

Corolario 3.2.2. *El mapa* $I : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *que manda un elemento en su inverso es un homeomorfismo.*

Demostración. Como I es su propio inverso, solo falta ver que es continuo. Como mencionamos antes, el grado del inverso de un mapa birracional de $\mathbb{P}^n$ de grado d es a lo sumo d^{n-1}. Consecuentemente, I se restringe a un mapa inyectivo $I_d : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d^{n-1}}$, para cualquier $d \geq 1$. Debido a como se define la topología euclídea en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, basta ver que I_d es continuo para cada d, lo cual es consecuencia del lema anterior. $\square$

Lema 3.2.3. *Dados* d, k *enteros positivos, el mapa* $\xi_{d,k} : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \times \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq k} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq dk}$ *que manda* (φ_1, φ_2) *a* $\varphi_1 \circ \varphi_2$ *es continuo.*

Demostración. Usaremos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} H_d \times H_k & \xrightarrow{\hat{\xi}_{d,k}} & H_{dk} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_d \times \pi_k} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_{dk}} \\ \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \times \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq k} & \xrightarrow{\xi_{d,k}} & \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq dk} \end{array},$$

donde $\hat{\xi}_{d,k}$ manda $((f_0 : \cdots : f_n), (g_0 : \cdots : g_n))$ en $(f_0(g_0, \cdots, g_n) : \cdots : f_n(g_0, \cdots, g_n))$. Como $\hat{\xi}_{d,k}$ es un morfismo de variedades algebraicas, entonces es continuo según la topología euclídea. Dado $F \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq dk}$ cerrado, el conjunto $(\pi_{dk}\hat{\xi}_{d,k})^{-1}(F)$ es por tanto cerrado en $H_d \times H_k$. Como el diagrama es conmutativo, tenemos $(\pi_{dk}\hat{\xi}_{d,k})^{-1}(F) = (\pi_d \times \pi_k)^{-1}(K)$, siendo $K = (\xi_{d,k})^{-1}(F)$. Resta probar que $\pi_d \times \pi_k$ es un mapa cociente, lo que implica que K es cerrado y por tanto $\xi_{d,k}$ continua.

Como el producto de mapas propios es propio, tenemos que $\pi_d \times \pi_k$ es propio, y por lo tanto, cerrado. Al ser continuo y sobreyectivo, se deduce que $\pi_d \times \pi_k$ es un mapa cociente. $\square$

Corolario 3.2.4. *El mapa* $P : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n) \times \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n) \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *que manda* (φ, φ') *a* $\varphi \circ \varphi'$ *es continuo, donde en* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n) \times \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *consideramos la topología producto.*

Demostración. Por la definición de la topología en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, basta con probar que la restricción $\xi_{d,k} : \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d} \times \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq k} \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq dk}$ es continua para cada d, k y entonces el resultado es consecuencia del lema anterior. □

Corolario 3.2.5. $(\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n), P, I_d)$ *es un grupo topológico.*

3.3. Restricción de la topología a subgrupos

Como vimos en la Sección 2.2, un subgrupo algebraico de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ corresponde a un subgrupo $G \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ cerrado Zariski de grado acotado. Es más, existe un grupo algebraico K y un morfismo $K \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ que induce un homeomorfismo $\pi : K \to G$ que es un morfismo de grupos.

Proposición 3.3.1. *Sean* $G \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *subgrupo cerrado Zariski de grado acotado y* K *el grupo algebraico obtenido por el Corolario 2.2.2. Poniendo en* G *la restricción de la topología euclídea de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$*, obtenemos la topología euclídea del grupo algebraico* K*, mediante la biyección* $\pi : K \to G$*, que se transforma en un homeomorfismo.*

Demostración. Vía la acción de G en sí mismo por multiplicación, nos podemos restringir al caso en que G es conexo. En este caso, podemos asumir que K es un cerrado Zariski de H_d y que $\pi : K \to G$ es inducida por $\pi_d : H_d \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$. Entonces, K es También cerrado según la topología euclídea. El mapa π_d se restringe a una biyección $K \to G$, el cual es cerrado y continuo para la topología euclídea y por tanto un homeomorfismo. □

3.4. Propiedades de la topología euclídea de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$

Lema 3.4.1. *El grupo topológico* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *es Hausdorff.*

Demostración. Aplicando la Proposición 1.3.29, basta probar que el conjunto $\{id\}$ es cerrado. Como cualquier punto de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es cerrado, por ser cerrado en cualquier $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ por el Lema 2.1.9, tenemos que $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ es Hausdorff. □

Lema 3.4.2. *Cualquier subconjunto compacto de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *está contenido en algún* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$.

Demostración. Asumamos, por absurdo, que K es un compacto de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ conteniendo una sucesión $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$, con $deg(\varphi_{i+1}) > deg(\varphi_i)$ para cada i. Sea $K' := \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\}$. Observar que $K' \cap \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ es un subconjunto finito y por lo tanto cerrado. Tenemos entonces que K' es un cerrado del compacto K, entonces debe ser compacto. Sin embargo, al ser la intersección de cualquier subconjunto de K' con $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)_{\leq d}$ cerrada, se tiene que K' es un subconjunto infinito equipado con la topología discreta, lo que proporciona una contradicción con la compacidad y demuestra el lema. □

Corolario 3.4.3. *Cualquier sucesión convergente de* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *tiene grado acotado.*

Demostración. Sea $(\varphi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$. Supongamos que converge a φ. Entonces $K := \{\varphi_i : i \in \mathbb{N}\} \cup \{\varphi\}$ es compacto. En efecto, sean $\{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de K e $i_o \in I$ tal que $\varphi \in U_{i_0}$. Como $\varphi_i \to \varphi$ existe un m_0 tal que si $m > m_0$, luego $\phi_m \in U_{i_0}$. Si $V_j \in \{U_i\}_{i\in I}$ es tal que $\varphi_j \in V_j$ para todo $j \leq m_0$, entonces $\{V_j\}_{j=1}^{m_0} \bigcup U_{i_0}$ es un subcubrimiento finito. El resultado se deduce del corolario anterior. □

Lema 3.4.4. *Si* $n \geq 2$, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *no es localmente compacto.*

Demostración. Sea $U \subseteq \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ un entorno abierto de la identidad. Veamos que U no está contenido en ningún compacto de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$. Por el Lema 3.4.2, basta mostrar que U contiene elementos de grado arbitrario. Dados enteros $k, m \geq 1$, consideremos el mapa birracional de $\mathbb{A}^n$ dado por

$$f_{m,k} : (x_1, \cdots, x_n) \dashrightarrow (x_1 + \frac{1}{k}x_2^m, x_2, \cdots, x_n).$$

Fijando m, observamos que la sucesión $\{f_{m,k}\}_{k\geq 1}$ converge a la identidad. En particular $f_{m,k} \in U$ para k suficientemente grande. □

Lema 3.4.5. *Si* $n \geq 2$, $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ *no es metrizable.*

Demostración. Consideremos el conjunto $\mathrm{k}[X]$ de polinomios en una variable y sea $\mathrm{k}[X] \hookrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n) \subset \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$ la inclusión que manda P en

$$(x_1, \cdots, x_n) \dashrightarrow (x_1 + P(x_2), x_2 \cdots, x_n).$$

Observar que $k[X]$ es cerrado en $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, y que para cualquier d, la topología inducida en $k[X]_{\leq d}$ es la topología como espacio vectorial. La topología inducida en $k[X]$ es la del límite inductivo dada por

$$k[X]_{\leq 1} \subseteq k[X]_{\leq 2} \subseteq \cdots$$

Dada una sucesión $l = (l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de enteros positivos, el conjunto $\{\sum_{i=0}^{d} a_i X^i : |a_i| < \frac{1}{l_i}\}$ es abierto en $k[X]$. Esto implica que $k[X]$ no verifica el primer axioma de numerabilidad y por tanto no es metrizable. Lo mismo se cumple para $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$. $\square$

Recordar que un grupo topológico se dice compactamente generado si es generado (como grupo) por un subconjunto compacto.

Lema 3.4.6. *El grupo topológico* $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ *es compactamente generado si y sólo si* $n \leq 2$*.*

Demostración. El grupo $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) = \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C})$ es conexo y localmente compacto, por lo tanto es compactamente generado. Por el Teorema 1.1.32, el grupo $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ es generado por $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}) = \mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ y por la transformación cuadrática estándar $\sigma = (x:y:z) \dashrightarrow (yz:xz:xy)$. Como el grupo $\mathrm{PGL}(3,\mathbb{C})$ es compactamente generado, también lo es $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$.
Si $n \geq 3$, el grupo $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ no es generado por $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})_{\leq d}$ para ningún entero d, para la prueba remitimos a [Pan99]. El hecho de que no es compactamente generado se desprende del Lema 3.4.2. $\square$

Bibliografía

[AC] M. Alberich-Carramiñana, *Geometry of the Plane Cremona Maps*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1769, 2002.

[AM] M.F. Atiyah and I.G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley Series in Mathematics, 1969.

[BCW82] H. Bass, E. Connell, D. Wright, *The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse*, Bull. of the A.M.S. 7, 287-330, 1982.

[BF13] J. Blanc and J.P. Furter, *Topologies and Structures of the Cremona groups*, Annals of Math. Vol 178, 1173-1198, 2013.

[Bou] N. Bourbaki, *General Topology*, Chapters 1-4, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Bro] T. Browning, *Local Fields*, Bouyer, 2013

[C] J.W.S. Cassels, *Local Fields*, Cambridge University Press, 1986.

[Dem70] M. Demazure, *Sous-groupes algébriques de rang maximum du groupe de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 3, 507-588, 1970.

[FR] W. Ferrer and A. Rittatore, *Actions and Invariants of Algebraic Groups*, Chapman & Hall/CRC, 2005.

[G] A. Grothendieck, *Élements de géometrie algébrique IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas IV*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 32, 1967.

[Har] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Sixth edition 1993.

[Hum] J.E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer, 1981

[M] J.S. Milne, *Algebraic Geometry*, 2017.

[O] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1985.

[Pan99] I. Pan, *Une remarque sur la génération du groupe de Cremona*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 30, no. 1, 95-98, 1999.

[Sch] P. Schneider, *p-Adic Analysis and Lie Groups*, Course in Münster, 2007/2008

[Ser10] J.P. Serre, *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes finis*, Séminaire Bourbaki, Volume 2008/2009, Astérique No. 332, Exp. No. 1000, vii, 75-100, 2010.

[Sha] I.R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[Sha66] I.R. Shafarevich, *On some infinite-dimentional groups*, Rend. Mat. e Appl. (5) 25, no. 1-2, 208-212, 1966.