



FACULTAD DE  
CIENCIAS ECONÓMICAS  
Y DE ADMINISTRACIÓN



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
FACULTAD DE CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRACIÓN  
TRABAJO FINAL DE GRADO PARA OBTENER EL TÍTULO DE  
LICENCIADO EN ESTADÍSTICA

## Formas de Reaseguro Óptimas

por

Ayala Deurado, Daniela

García Chabat, Cecilia

Tutor:

Dr. Marco Scavino

Montevideo

URUGUAY

2021



FACULTAD DE  
CIENCIAS ECONÓMICAS  
Y DE ADMINISTRACIÓN



UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY

El tribunal docente integrado por los abajo firmantes aprueba el trabajo  
final de grado:

## Formas de Reaseguro Óptimas

Ayala Deurado, Daniela

García Chabat, Cecilia

Tutor:

Dr. Marco Scavino

Licenciatura en Estadística

Puntaje .....

### Tribunal

Profesor Ramón Álvarez-Vaz ..... (firma).

Profesora Paula Bouza ..... (firma).

Profesor Hugo Carrasco ..... (firma).

Profesor Marco Scavino ..... (firma).

Fecha .....

# RESUMEN EJECUTIVO

El reaseguro surge como una herramienta para la mitigación de los daños causados por los desequilibrios que deben afrontar las compañías de seguros en relación a sus egresos. Esta mitigación se realiza mediante la transferencia y distribución de los riesgos entre la compañía aseguradora y la reaseguradora, de manera que la responsabilidad asumida por la primera en cada contrato y en la cartera global se mantenga debajo de un cierto límite, consistente con su capacidad económica y financiera (Arónica, 2012).

La relación entre la aseguradora directa y la reaseguradora se realiza mediante un contrato de reaseguro, que especifica las obligaciones entre ambas partes. Estas obligaciones estarán determinadas por el tipo de reaseguro elegido.

El presente trabajo se centra en el estudio de reaseguros automáticos, es decir, aquellos que funcionan en base a un contrato que comprende una serie de riesgos cedidos durante un período de tiempo determinado, en particular dentro de esta clase de reaseguros se focalizará en los contratos de reaseguro proporcional, en donde el reasegurador toma una proporción determinada de las primas y de los siniestros.

El objetivo general del trabajo es determinar el tipo de reaseguro proporcional óptimo para una cartera de pólizas de incendio compuesta por datos locales, mediante la aplicación de forma sistemática de una técnica de optimización convexa, propuesta por Bruno de Finetti (de Finetti, 1940) y su respectiva implementación, a partir de una selección de distribuciones de probabilidad para la exposición al riesgo y el costo agregado de los siniestros, utilizando lenguaje R.

# Tabla de Contenido

<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Antecedentes históricos del reaseguro . . . . .	1
1.2. Aspectos generales de los reaseguros . . . . .	3
1.3. Tipos de Reaseguro . . . . .	5
1.3.1. Reaseguros Proporcionales . . . . .	5
1.3.2. Reaseguros No Proporcionales . . . . .	7
<b>2. METODOLOGÍA</b>	<b>10</b>
2.1. La ganancia del asegurador para reaseguro proporcional . . . . .	11
2.2. Optimización . . . . .	13
2.2.1. Resolución del problema de minimización . . . . .	14
2.3. Distribuciones . . . . .	21
2.3.1. Distribución MBBEFD para la exposición al riesgo . . . . .	21
2.3.2. Distribución Gamma Shifted para el costo agregado de los siniestros. . . . .	27
<b>3. APLICACIÓN</b>	<b>30</b>
3.1. Presentación del caso de estudio . . . . .	30
3.2. Cálculo de distribuciones para la cartera utilizada . . . . .	31

3.3. Consideraciones generales . . . . .	33
3.3.1. Respecto a las particularidades de la aplicación . . . . .	33
3.3.2. Respecto al procedimiento . . . . .	34
<b>4. RESULTADOS</b>	<b>36</b>
4.1. Resultados obtenidos para cuota parte global . . . . .	37
4.2. Resultados obtenidos para cuota parte variable . . . . .	39
4.3. Resultados obtenidos para excedente global . . . . .	47
4.4. Resultados obtenidos para excedente con tabla de líneas . . . . .	49
4.5. Comparación de resultados . . . . .	51
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>53</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>55</b>
<b>APÉNDICE I - APLICACIÓN MATEMÁTICA</b>	<b>57</b>
<b>APÉNDICE II - SINTAXIS UTILIZADA</b>	<b>66</b>

# Índice de figuras

1.	Relación entre asegurado, aseguradora directa y reaseguradora, tomado de Arónica (2012) . . . . .	4
2.	Reaseguro cuota parte con tasa de cesión de 40 % . . . . .	6
3.	Reaseguro excedente considerando un pleno de retención igual a 150, uno conservado por el asegurador y tres cedidos en reaseguro . . . . .	7
4.	Distribución empírica del tamaño relativo del siniestro . . . . .	22
5.	Curva de exposición al riesgo ( <i>Deductible Credit Curve</i> ) . . . . .	23
6.	Ejemplos de curvas de exposición al riesgo y sus respectivas distribuciones MBBEFD en función del parámetro $c$ . . . . .	26
7.	Densidades MBBEFD asociadas a las curvas de exposición presentadas en la figura 6 . . . . .	26
8.	Zoom para densidades MBBEFD asociadas a las curvas de exposición presentadas en la figura 7 - Parámetros $c=3,4,5$ , valores del tamaño relativo del siniestro menores que 10 % . . . . .	27
9.	Aumento de la proporción de variabilidad retenida luego del reaseguro cuota parte global en función de la porción retenida de riesgo . . . . .	39
10.	Coefficiente de variación - Caso 1: $\rho = 7\%$ , $\rho^R = 10\%$ . . . . .	44
11.	Coefficiente de variación - Caso 2: $\rho = 7\%$ , $\rho^R = 7\%$ . . . . .	45
12.	Coefficiente de variación - Caso 3: $\rho = 10\%$ , $\rho^R = 7\%$ . . . . .	46

# Índice de cuadros

1.	Características de la distribución de las sumas aseguradas de la cartera utilizada para el caso de estudio . . . . .	30
2.	Características de la distribución del tamaño relativo del siniestro $X_{i,j}$	32
3.	Primeros tres momentos de la distribución del tamaño relativo del siniestro $X_{i,j}$ . . . . .	32
4.	Características de la distribución del costo agregado de los siniestros $S$ considerando una única clase de riesgo para toda la cartera . . . . .	33
5.	Características de la distribución del costo agregado de los siniestros $S$ considerando una cartera dividida en 3 clases de riesgo . . . . .	33
6.	Casos considerados para el análisis . . . . .	34
7.	Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte global . . . . .	38
8.	Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte variable . . . . .	41
9.	Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte variable mediante la redistribución de la retención . . . . .	43
10.	Resultados obtenidos para el reaseguro excedente . . . . .	48
11.	Resultados obtenidos para el reaseguro excedente con tabla de líneas .	50
12.	Resultados obtenidos para el reaseguro excedente con tabla de líneas con redistribución de la retención . . . . .	51

# 1. INTRODUCCIÓN

## 1.1. Antecedentes históricos del reaseguro<sup>1</sup>

Los orígenes del reaseguro son muy antiguos, se podría decir que tanto como los del seguro mismo y si bien existen pocos documentos que lo comprueben se puede afirmar que ambos surgen como una herramienta para el comercio marítimo.

Desde sus orígenes el reaseguro se usó como un método para remediar un acto imprudente por parte del asegurador al momento de suscribir a un riesgo. El mismo, sin afectar su obligación para con el asegurado, recurría a otro asegurador mejor informado, o con mayores posibilidades financieras, para protegerse total o parcialmente.

El primer contrato de reaseguro del que se tiene conocimiento se remonta al año 1370 y se refería a un cargamento que se debía transportar desde Génova (Italia) a Sluys (Holanda) y que ya había sido asegurado, pero se reaseguró para la última parte de la ruta, desde Cadiz (España) a Sluys, debido a la peligrosidad de la travesía (probablemente por el riesgo de piratería).

Entre los siglos XIV y XVIII el centro de la actividad de seguros se trasladó desde las repúblicas marítimas italianas a Londres. Es en esta ciudad que la cafetería del señor Edward Lloyd cumple un rol fundamental para la actividad aseguradora, siendo punto de encuentro para la gente del mar, agentes de seguros, comerciantes y armadores.

Aún en estas épocas, no se contaba con el conocimiento actuarial moderno, implicando que las formas de seguro existentes se basaban en el carácter especulativo,

---

<sup>1</sup>Los siguientes párrafos están basados los textos de Canestraro (2006), Albrecher *et al.* (2017) y Holland (2009)

el cual hacía que además de los suscriptores que se podrían llamar “serios y confiables”, existieran personas con intenciones fraudulentas. Estas personas llevaban a cabo prácticas, que de hecho carecían de valor real, y motivaron en 1745 al Rey Jorge II de Inglaterra a promulgar una ley que declaraba ilegales ciertos tipos de seguros marítimos y prohibía el reaseguro, excepto en el caso de que el asegurador se volviera insolvente, cayera en bancarrota, o muriera. Esta prohibición del reaseguro marítimo permaneció vigente en Inglaterra por más de un siglo.

A principios del siglo XIX en el continente europeo se popularizó una única forma de reaseguro, la opcional, utilizada generalmente para la rama de incendios, en la cual las compañías de seguros se ofrecían mutuamente la parte del riesgo que no estaban capacitadas para asumir. Esta práctica se basa en el hecho de que las empresas jóvenes no podían agrandar sus carteras sin aumentar su probabilidad de ruina.

El desarrollo de la industria y el comercio a lo largo de la primer parte del siglo XIX fue seguido por un aumento en la demanda de seguros y un aumento en las sumas aseguradas. Esto provocó que el reaseguro no fuera utilizado sólo en casos particulares sino que se convirtiera en un instrumento de uso habitual, logrando ser una actividad comercial en sí misma.

En principio, los contratos de reaseguro se efectuaban en reciprocidad entre compañías locales, pero luego, debido a la desconfianza que generaba a las aseguradoras el brindar información en detalle de los riesgos cedidos a sus competidoras, se recurrió al uso de compañías extranjeras. Sin embargo, a mediados del siglo XIX, cuando el flujo de divisas por motivo de reaseguros comenzó a tomar magnitudes de importancia se crearon las primeras compañías de reaseguro profesionales, eliminando las preocupaciones en cuanto al uso de la información con fines competitivos, ya que las mismas sólo administraban negocios indirectos.

Hoy en día muchas de las compañías reaseguradoras que se fundaron entre los siglos XVIII y XIX siguen aún trabajando como tales. Algunas sólo como reasegu-

radoras y otras como aseguradoras-reaseguradoras. Tales son los casos de la famosa *Lloyds of London* (Inglesa), la *Swiss Reinsurance Company* (Suiza), y la *Münchener Rück* (Alemana).

## 1.2. Aspectos generales de los reaseguros

Para comenzar se definirá la operación de reaseguro con el objeto de esclarecer el tipo de negocio que se está tratando. Canestraro en su trabajo *Metodologie di pricing per le riassicurazioni non proporzionali: il modello di Pareto* (Canestraro, 2006) define al reaseguro de la siguiente manera:

Es una relación contractual cuyo objeto es la transferencia mediante el pago de una prima, de parte de los riesgos asumidos por la aseguradora directa, a un segundo sujeto que puede ser otra aseguradora que también realiza negocios indirectos o una reaseguradora profesional. (p. 14)

Es decir, una operación de reaseguro es una relación contractual entre dos sujetos, el cedente (aseguradora directa) y el cesionario (reaseguradora), mediante la cual el segundo toma a su cargo total o parcialmente el riesgo asumido por el primero.

Mediante la definición se puede ver claramente que el objetivo principal de dicha operación es reducir la posible pérdida de la aseguradora directa mediante la distribución del riesgo. Pero no es la única causa que justifica la utilización del mismo. A continuación se listarán algunas de las características adicionales:

- Permite a la aseguradora directa homogeneizar cuantitativamente el tamaño de sus exposiciones al riesgo equilibrando los activos y pasivos de la misma.
- A través del uso del reaseguro una empresa puede aumentar significativamente su capacidad para tomar mayor cantidad de riesgos o bien riesgos de mayor

entidad, ganando valor y prestigio en los mercados en los que opera.

- La aseguradora puede verse beneficiada del vasto conocimiento de la reaseguradora, ya que la última en general cuenta con una mayor experiencia en el ámbito nacional e internacional y puede prestar asesoramiento teórico y práctico en algunas situaciones en que la empresa cedente se encontrara en dificultad.
- Genera confiabilidad al hacer que las pólizas sean más atractivas para los asegurados ya que el reaseguro brinda a la compañías mayor estabilidad.

Por lo tanto el reaseguro no puede constituirse si no existe un contrato de seguro, pero habiendo considerado las causas justificantes del mismo, se puede afirmar que el seguro no podría existir (o lo haría muy precariamente) sin la existencia del reaseguro.

Cabe destacar que una parte importante de esta operación es la redacción del contrato de reaseguro, ya que éste regulará la transferencia de riesgos entre las partes. El mismo deberá contener una serie de cláusulas de carácter técnico, comercial y legal entre las que se destacan: la fecha de inicio y vencimiento del contrato, los límites de la cobertura en términos de retención y alcance, el monto de la prima, las comisiones de retención y cesión, las cláusulas de arbitraje, entre otras.

Para finalizar, se debe tener en cuenta que la responsabilidad de la reaseguradora es con la aseguradora directa, no con el asegurado. Utilizando el esquema presentado por Arónica (2012)



Figura 1: Relación entre asegurado, aseguradora directa y reaseguradora, tomado de Arónica (2012)

Una tarea fundamental para la empresa aseguradora es determinar la capacidad propia de retención del riesgo, es decir, el monto o proporción de riesgo del que puede responsabilizarse, sin exceder su capacidad económica y financiera.

Esa cantidad o proporción dependerá no solo de las características particulares de la cartera que se quiere reasegurar (sumas aseguradas, frecuencia o severidad relativa de los siniestros, tipos de cobertura, clases de riesgo en las que está dividida la cartera), sino que también dependerá de otros factores relacionados con lo económico, tales como las primas cobradas, las cargas de seguridad de la aseguradora y de la reaseguradora, la ganancia que se espera obtener y el margen de solvencia de la empresa, entre otras.

Luego de calculado ese monto o proporción máxima de riesgo, todo lo que supere ese umbral, será transferido en reaseguro.

### **1.3. Tipos de Reaseguro**

Se pueden diferenciar dos grandes clases de reaseguro:

- Reaseguros proporcionales
- Reaseguros no proporcionales

A continuación se detallarán cada una de éstas.

#### **1.3.1. Reaseguros Proporcionales**

En las formas proporcionales de reaseguro el asegurador y el reasegurador acuerdan a priori una proporción (de aquí en adelante *tasa de retención*) que se utilizará

para asignar primas y compensaciones. Dicha proporción podrá ser común a todos los contratos de la cartera o en su defecto podrá variar contrato a contrato.

En esta clase de reaseguros se distinguen dos tipos:

- reaseguro cuota parte (quota share)
- reaseguro de excedente (surplus)

### Contrato cuota parte

Es la forma más simple de reaseguro proporcional desde el punto de vista operativo y de gestión. El mismo consiste en la implementación de una única tasa de retención para todo un ramo de contratos. Es decir, la aseguradora acepta retener un cierto porcentaje fijo de primas y riesgo, y la reaseguradora se compromete a hacerse cargo de la parte transferida.

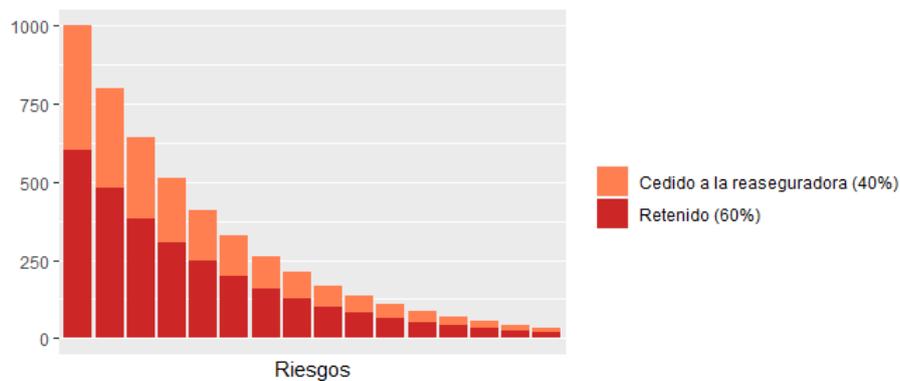


Figura 2: Reaseguro cuota parte con tasa de cesión de 40 %

### Contrato cuota parte variable

Es un caso particular de reaseguro cuota parte, donde se subdivide la cartera en clases homogéneas de riesgo, y se aplica una tasa de transferencia para cada una de ellas.

## Contrato de excedente

Es una forma más compleja y sofisticada de reaseguro proporcional. En este caso, la aseguradora acepta mantener para cada contrato un monto fijo de exposición al riesgo, llamado “*pleno de retención*” y cede a la reaseguradora una proporción de las primas igual a la proporción de suma asegurada que excede este monto. Asimismo, la reaseguradora acepta hacerse cargo del riesgo que exceda el pleno de retención hasta un cierto límite.

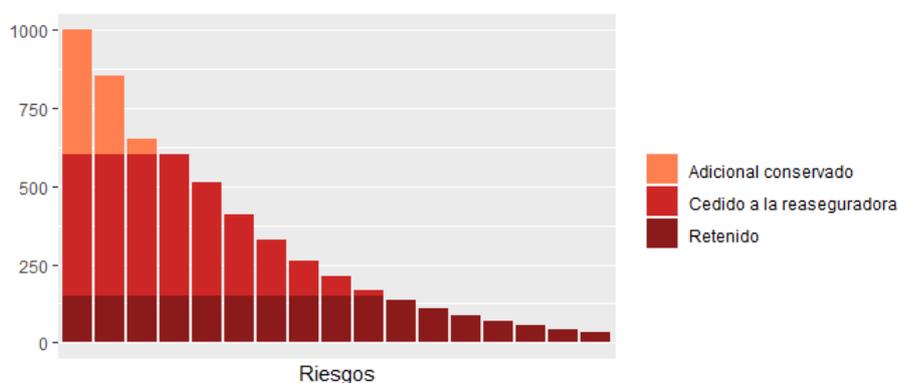


Figura 3: Reaseguro excedente considerando un pleno de retención igual a 150, uno conservado por el asegurador y tres cedidos en reaseguro

## Contrato de excedente con tabla de líneas

Es un caso particular de contrato de excedente donde se divide la cartera en clases homogéneas de riesgo y se fija un pleno de retención dentro de cada una de éstas.

### 1.3.2. Reaseguros No Proporcionales

En esta modalidad de reaseguro, no se fija de antemano una proporción de primas y riesgo a repartir, sino que la reaseguradora protege a la aseguradora de las pérdidas. Es decir, la aseguradora participa a la reaseguradora cuando los siniestros superan una cierta cantidad. Como dice Arónica en su libro “*Teoría y práctica del seguro*” (Arónica, 2012):

*“..el reaseguro no proporcional es al asegurador directo, lo que el seguro con franquicia es al asegurado.”*

Dentro del tipo de reaseguros no proporcionales existen dos clases a tener en cuenta:

- reaseguro de exceso de pérdida (excess of loss)
- reaseguro de exceso de siniestralidad (stop loss)

### **Contrato exceso de pérdida**

En este caso el asegurador y reasegurador definen un monto monetario, llamado prioridad, dentro del cual el primero se hará cargo de los reembolsos, mientras que el segundo cubrirá el exceso de pérdida hasta un límite de cobertura acordado llamado alcance.

Este tipo de reaseguro no proporcional presenta las siguientes variantes:

- Reaseguro por riesgo de exceso de pérdida (WXL/R):  
Protege al asegurado riesgo a riesgo, es decir, las cantidades monetarias que caracterizan al contrato son definidas a nivel global pero las compensaciones refieren a cada contrato individual. Este tipo de contrato es ideal cuando ocurren grandes siniestros individuales.
- Reaseguro por exceso de pérdida por evento. (WXL/E):  
En este caso la prioridad y el alcance se definen en base a un único evento, no en base a un único siniestro. Este tipo de contrato es ideal cuando se cuenta con una gran cantidad de pequeños riesgos referidos a un único evento.

### **Contrato stop loss**

Este tipo de contratos ofrece una cobertura más amplia para la aseguradora ya que se

define la prioridad no en términos monetarios sino en términos porcentuales. Dicho porcentaje se calculará como un ratio de pérdida, es decir siniestros netos/primas netas.

En este caso el reasegurador protegerá al cedente por el resultado de la siniestralidad global de un período (por ejemplo un año), no de los siniestros individuales.

## 2. METODOLOGÍA

Como se mencionó anteriormente, el objetivo del presente trabajo es determinar el tipo de reaseguro óptimo para una cartera de pólizas de incendio. Para alcanzar este objetivo el primer paso será la elección de los tipos de reaseguro a analizar para la cartera objeto de estudio.

Una vez elegidos los tipos de reaseguro a utilizar, es necesario abordar el problema de la determinación del nivel de retención. Varios autores han trabajado en este sentido y han propuesto diversas respuestas a esta problemática cuando se consideran esquemas específicos para el reaseguro de un conjunto de pólizas (una cartera o una rama de seguros) (Centeno, 2006).

Por un lado, se encuentran aquellos autores que han encontrado la forma de determinar el nivel de retención a partir de los momentos de la distribución del costo agregado de los siniestros como por ejemplo fijando un nivel de ganancia o beneficio y minimizando la varianza del riesgo retenido, o maximizando la ganancia esperada sujeto a una restricción en el nivel de varianza del riesgo retenido, entre otras.

Otros autores proponen que la determinación del nivel de retención puede ser realizada a partir del coeficiente de ajuste de los reclamos agregados o mediante la probabilidad de ruina.

El primero en estudiar el problema del reaseguro cuando se tienen en consideración varios riesgos por separado fue *Bruno de Finetti* (de Finetti, 1940). Para obtener el nivel de retención, *de Finetti* consideró un conjunto de  $n$  riesgos independientes y resolvió el problema utilizando el criterio de minimización de la varianza del riesgo retenido sujeto a un nivel de ganancia esperado constante.

Este procedimiento será el utilizado en el presente trabajo para buscar el nivel

de retención que permita a la empresa aseguradora minimizar la variabilidad de la ganancia que se espera obtener luego de un contrato de reaseguro proporcional.

## 2.1. La ganancia del asegurador para reaseguro proporcional

Supongamos que se tiene una cartera con  $n$  riesgos independientes,  $S_1, \dots, S_n$ , con primas  $P_1, \dots, P_n$ , reasegurados mediante un reaseguro proporcional, con tasas de retención  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , es decir que el asegurador retendrá una proporción  $\alpha_i$  del riesgo que corresponde a esta cartera o para cada clase de riesgo dentro de la misma.

Vamos a suponer también que la reaseguradora carga la prima mediante el principio del valor esperado con un cargamento  $\rho_i^R$ , por lo tanto la prima de reaseguro estará dada por  $(1 + \rho_i^R)(1 - \alpha_i)ES_i$ .

La ganancia del asegurador estará dada por la suma de las primas que recibe, menos la suma de las primas que cede al reasegurador, menos la suma de lo que paga por siniestros, es decir:

$$Z(\bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^n (P_i - (1 + \rho_i^R)(1 - \alpha_i)ES_i - \alpha_i S_i) \quad (1)$$

donde  $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n)$  es el vector de tasas de retención.

La ganancia esperada será:

$$E[Z(\bar{\alpha})] = E \left[ \sum_{i=1}^n (P_i - (1 + \rho_i^R)(1 - \alpha_i)ES_i - \alpha_i S_i) \right]$$

$$\begin{aligned}
E[Z(\bar{\alpha})] &= \sum_{i=1}^n E[(P_i - (1 + \rho_i^R)(1 - \alpha_i)ES_i - \alpha_i S_i)] \\
E[Z(\bar{\alpha})] &= \sum_{i=1}^n (P_i - \rho_i^R(1 - \alpha_i)ES_i - ES_i) \\
E[Z(\bar{\alpha})] &= \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n \rho_i^R(1 - \alpha_i)ES_i - \sum_{i=1}^n ES_i \tag{2}
\end{aligned}$$

Y la varianza de la ganancia será:

$$\begin{aligned}
Var[Z(\bar{\alpha})] &= Var\left[\sum_{i=1}^n (P_i - (1 + \rho_i^R)(1 - \alpha_i)ES_i - \alpha_i S_i)\right] \\
Var[Z(\bar{\alpha})] &= \sum_{i=1}^n [Var(-\alpha_i S_i)] \\
Var[Z(\bar{\alpha})] &= \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 Var(S_i) \tag{3}
\end{aligned}$$

Si el asegurador determina una ganancia esperada igual a la constante  $g$ , se tiene que:

$$\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n \rho_i^R(1 - \alpha_i)ES_i - \sum_{i=1}^n ES_i = g$$

por lo tanto la prima de reaseguro será:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R(1 - \alpha_i)ES_i = -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones anteriores se propone utilizar el método de *de Finetti* que permite determinar el vector  $\bar{\alpha}$  de tasas de retención de manera de minimizar la varianza de la ganancia del asegurador dado un nivel fijo  $g$  de ganancia esperada. Es decir, se resolverá el siguiente problema de minimización:

$$\min_{\bar{\alpha}} \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \text{Var}(S_i) \quad (4)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i = -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i \quad (5)$$

$$\alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

$$-\alpha_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Este método de minimización, propuesto por *Bruno de Finetti* en su trabajo titulado *“Il problema dei pieni”* de Finetti (1940) es precursor del famoso trabajo de Harry Markowitz (1952) (Premio Nobel en Economía, 1990) llamado *Portfolio Selection* en el que se utiliza el enfoque de media-varianza para resolver el problema de selección de la cartera (Pressacco, 1986).

## 2.2. Optimización

Considerando que la varianza de la ganancia del asegurador es una función convexa -por ser una simple suma de funciones cuadráticas-, que la primer restricción es una suma de funciones lineales por lo tanto también es convexa, así como las dos últimas restricciones son funciones lineales y por lo tanto convexas, el problema anterior se convierte en un problema de optimización convexa.

### 2.2.1. Resolución del problema de minimización

Para resolver este problema se utilizarán las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) ya que en este caso son necesarias y suficientes para encontrar un valor óptimo del vector  $\bar{\alpha}$  de tasas de retención.

Previamente se deberá obtener la función de Lagrange ya que esta será necesaria para plantear luego las condiciones KKT:

$$L(\bar{\alpha}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \lambda) = \sum_{i=1}^n [\alpha_i^2 Var(S_i) + \mu_{1i}(-\alpha_i) + \mu_{2i}(\alpha_i - 1)] \\ + \lambda \left( \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i + g - \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n ES_i \right)$$

Las condiciones de KKT para este problema serán:

Condición estacionaria:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} L(\bar{\alpha}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \lambda) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} L(\bar{\alpha}, \bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2, \lambda) = \frac{\partial}{\partial \bar{\alpha}} \left[ \sum_{i=1}^n [\alpha_i^2 Var(S_i) + \mu_{1i}(-\alpha_i) + \mu_{2i}(\alpha_i - 1)] \right. \\ \left. + \lambda \left( \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i + g - \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{i=1}^n ES_i \right) \right] = 0$$

$$2\alpha_i Var S_i - \mu_{1i} + \mu_{2i} - \lambda \rho_i^R ES_i = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Condiciones de factibilidad

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i = -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i$$

$$-\alpha_i \leq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

$$\alpha_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n$$

Condiciones de holgura:

$$\mu_{1i}\alpha_i = 0$$

$$\mu_{2i}(\alpha_i - 1) = 0$$

Condiciones de signo:

$$\mu_{1i} \geq 0$$

$$\mu_{2i} \geq 0$$

A continuación se consideraran tres casos, en los cuales se analizan las posibles soluciones del problema considerando cada una de las condiciones de KKT. Para simplificar la resolución de este problema de minimización se ignorará en primera instancia la condición de factibilidad expresada mediante igualdad.

### Caso 1

Si  $\mu_{2i} > 0$  se cumple que  $\alpha_i - 1 = 0$ , es decir  $\alpha_i = 1$  y  $\mu_{1i} = 0$ .

Esto implica que la condición estacionaria queda de la forma:

$$2Var(S_i) + \mu_{2i} - \lambda\rho_i^R E(S_i) = 0$$

$$\mu_{2i} = \lambda\rho_i^R E(S_i) - 2Var(S_i)$$

Si también se quiere cumplir que  $\mu_{2i} \geq 0$

$$\lambda\rho_i^R E(S_i) - 2Var(S_i) \geq 0$$

$$\lambda\rho_i^R E(S_i) \geq 2Var(S_i)$$

$$\frac{\lambda\rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \geq 1$$

### Caso 2

Si  $\mu_{1i} > 0$  se cumple que  $\alpha_i = 0$  y  $\mu_{2i} = 0$

Esto implica que:

$$-\mu_{1i} - \lambda\rho_i^R E(S_i) = 0$$

$$\mu_{1i} = -\lambda\rho_i^R E(S_i)$$

Y si también se quiere cumplir  $\mu_{1i} \geq 0$

$$-\lambda\rho_i^R E(S_i) \geq 0$$

$$\lambda\rho_i^R E(S_i) \leq 0$$

$$\frac{\lambda\rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \leq 0$$

### Caso 3

Por último, en el caso que  $\mu_{1i} = 0$  y  $\mu_{2i} = 0$  se cumple que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ .

Esto implica que:

$$2\alpha_i Var(S_i) - \lambda\rho_i^R E(S_i) = 0$$

$$2\alpha_i Var(S_i) = \lambda\rho_i^R E(S_i)$$

$$\alpha_i = \frac{\lambda\rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)}$$

Lo cual solo es posible cuando:

$$0 \leq \frac{\lambda\rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \leq 1$$

Considerando los tres casos anteriores se llega a que las componentes del vector  $\bar{\alpha}$  de tasas de retención tendrán la siguiente forma:

$$\alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda\rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right)$$

Para terminar de resolver el problema de minimización se debe elegir  $\lambda$  considerando la condición de factibilidad expresada mediante igualdad no utilizada hasta el momento:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i = -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i$$

Se sabe que  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , entonces se puede demostrar que para cualquier  $\lambda$  la expresión  $\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i$  puede variar entre las siguientes cantidades:

$$\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i \leq \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i \leq \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i$$

Se muestra ahora cómo la elección de  $\lambda$  permite obtener todos los valores posibles dentro de este rango, analizando los cinco casos posibles.

1. Si  $\lambda > 0$  y  $\rho_i^R < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$

Esto implica que:

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) = 0$$

Lo cual lleva a que:

$$\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i = \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i$$

2. Si  $\lambda$  es suficientemente grande y  $\rho_i^R > 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$

Esto implica que:

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} > 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) = 1$$

Lo cual lleva a que:

$$0 = \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i \leq \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i$$

3. Si  $\lambda \rightarrow 0^+$

- En el caso que  $\rho_i^R > 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) \rightarrow 0^+$$

Lo cual lleva a que:

$$(1 - \alpha_i) \rightarrow 1^-$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i \leq \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i$$

- En el caso que  $\rho_i^R < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \rightarrow 0^- \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) = 0$$

Lo cual lleva a que:

$$\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i = \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i$$

4. Si  $\lambda \rightarrow 0^-$

- En el caso que  $\rho_i^R > 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \rightarrow 0^- \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) = 0$$

Lo cual lleva a que:

$$\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i = \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i$$

- En el caso que  $\rho_i^R < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ :

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \rightarrow 0^+ \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) \rightarrow 0^+$$

Lo cual lleva a que:

$$(1 - \alpha_i) \rightarrow 1^-$$

Entonces:

$$\sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) E S_i \leq \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R E S_i$$

5. Si  $\lambda < 0$  y  $|\lambda|$  es suficientemente grande

- Si  $\rho_i^R < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) = 1$$

Lo cual lleva a que:

$$(1 - \alpha_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R E S_i \leq \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) E S_i = 0$$

- Si  $\rho_i^R > 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n$

$$\frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) = 0$$

Lo cual lleva a que:

$$(1 - \alpha_i) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) E S_i = \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R E S_i$$

Finalmente, se puede concluir que aplicando las condiciones de KKT se cumple, para cualquier elección de  $\lambda$ , que

$$\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i \leq \sum_{i=1}^n \rho_i^R (1 - \alpha_i) ES_i \leq \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i$$

Lo cual se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i \leq -g + \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i \leq \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i$$

Despejando se obtiene que:

$$\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i - \sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i \leq g \leq \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i - \sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i \quad (6)$$

donde:

- $\sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n ES_i$  es el margen de ganancia del aseguradora antes de realizar cualquier operación con el reasegurador
- $\sum_{i|\rho_i^R > 0} \rho_i^R ES_i$  es la máxima ganancia de la reaseguradora
- $\sum_{i|\rho_i^R < 0} \rho_i^R ES_i$  es la máxima pérdida de la reaseguradora

De esta forma se llega a que la solución óptima del problema de minimización planteado es la siguiente:

$$\alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho_i^R E(S_i)}{2Var(S_i)} \right) \right) \quad (7)$$

donde  $\lambda$  se obtiene reemplazando (7) en (5) siempre que  $E[Z(\bar{\alpha})] = g$  cumpla la condición (6).

## 2.3. Distribuciones

Para la aplicación práctica será necesario introducir distribuciones de probabilidad tanto para el tamaño relativo de los siniestros como para el costo agregado de los siniestros. La elección de estas distribuciones dependerá en primer lugar de las características particulares de la cartera y en segundo lugar de la experiencia previa que tenga la aseguradora para el tipo de seguros particular.

En el caso de la distribución del tamaño relativo de los siniestros se pueden utilizar distribuciones como Log Normal, Pareto, Transformada de Pareto y Weibull (Arónica, 2012), entre otras. Para el presente caso de estudio se utilizará la distribución MBBEFD propuesta por Bernegger (1997) y utilizada por Lampaert y Walhin (2005), ya que permite modelar curvas de exposición al riesgo definidas en el intervalo acotado  $[0, 1]$  y están relacionadas a las características curvas utilizadas por la Swiss Re y Lloyd's of London.

En el caso del costo agregado de los siniestros las distribuciones que se proponen en la bibliografía de referencia son Poisson, Binomial Negativa y Gamma (Arónica, 2012), entre otras. En el presente trabajo se utilizará la distribución Gamma-Shifted propuesta por Lampaert y Walhin (2005).

### 2.3.1. Distribución MBBEFD para la exposición al riesgo

#### Curvas de exposición al riesgo

Las curvas de exposición al riesgo permiten determinar directamente la tasa de retención en función del deducible. Para construirlas se parte de la distribución del cociente entre el tamaño del siniestro y la suma asegurada, al que llamaremos tamaño relativo del siniestro ( $X$ ).

Para pasar de esta distribución a la curva de exposición se determina qué proporción de la prima debería retener el asegurador para lograr hacerse cargo del deducible  $d$ . Esta proporción corresponde a el cociente entre 1 menos el área bajo la curva a la izquierda de  $d$  y 1 menos el área total bajo la curva, es decir, la curva de exposición al riesgo se construye representando la función  $G(d)$ :

$$G(d) = \frac{\int_0^d (1 - F_X(x))dx}{\int_0^1 (1 - F_X(x))dx} = \frac{\int_0^d (1 - F_X(x))dx}{E(x)}$$

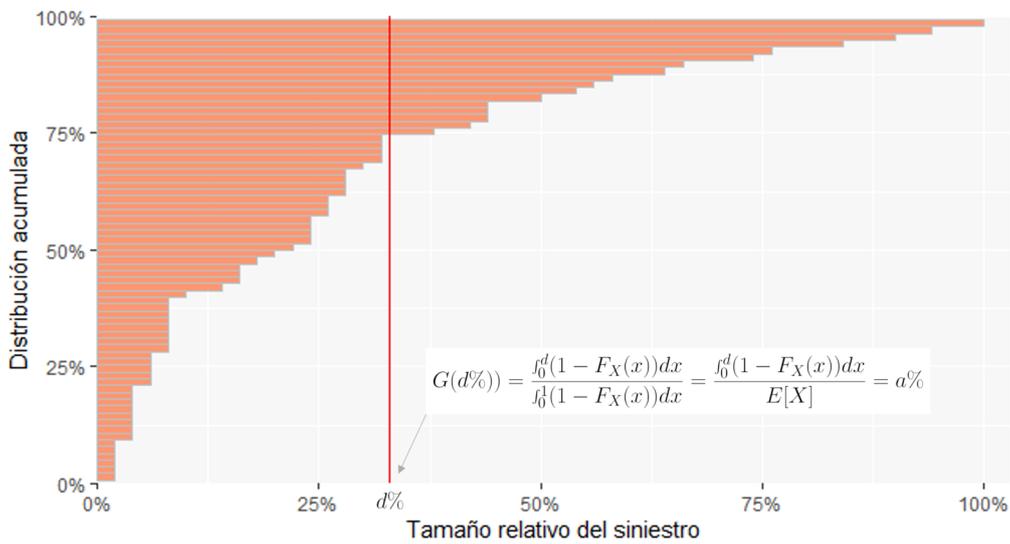


Figura 4: Distribución empírica del tamaño relativo del siniestro

Como  $1 - F_X(x) \geq 0$  y  $F'_X(x) = f_X(x) \geq 0$ , las curvas de exposición al riesgo  $G(d)$  tienen la particularidad de ser crecientes y cóncavas; pasan por los puntos  $(0,0)$  y  $(1,1)$  y cuánto más cerca se encuentran de la recta  $y = x$  más la distribución subyacente contiene siniestros de mayor magnitud, por el contrario, cuánto más alejadas se encuentran de ésta, la distribución subyacente contiene siniestros más pequeños.

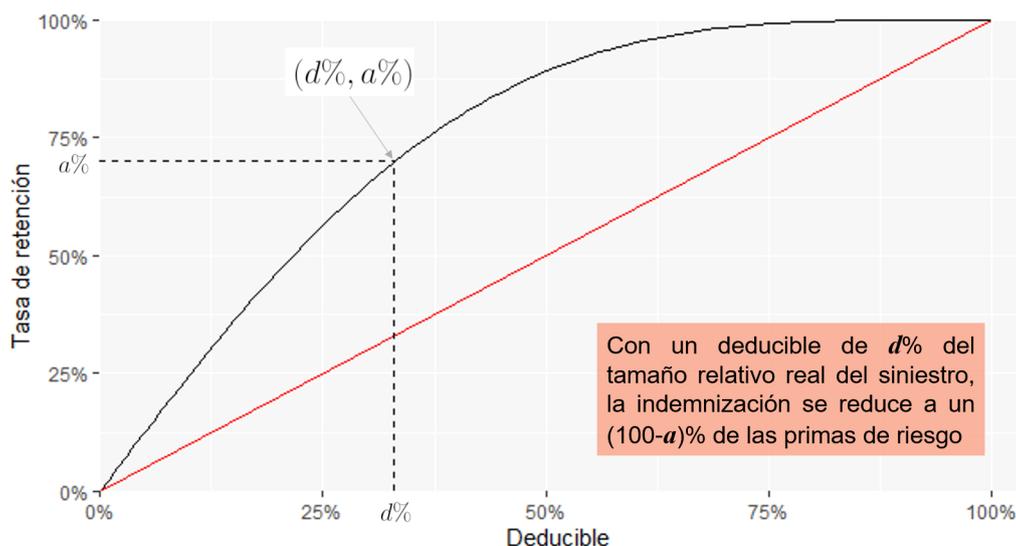


Figura 5: Curva de exposición al riesgo (*Deductible Credit Curve*)

Si se quisiera derivar la función de distribución a partir de la curva de exposición, se debe tener en cuenta la siguiente relación:

$$G'(d) = \frac{1 - F(d)}{E(x)}$$

teniendo en cuenta que  $F(0) = 0$  y  $G'(0) = \frac{1}{E(x)}$  se obtiene que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)} & \text{si } 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

De esta manera, se ha comprobado que la función de distribución de un riesgo y su curva de exposición son representaciones equivalentes.

## Distribución MBBEFD

Las curvas de exposición al riesgo en el pasado se encontraban a menudo de forma gráfica o tabulada, pero esto llevaba la dificultad de no siempre encontrar una adecuada para la cartera a la cuál se querían aplicar.

Para solucionar este inconveniente, Bernegger (1997) propuso utilizar una subclase de la distribución MBBEFD (*Maxwell-Boltzmann, Bose-Einstein, Fermi-Dirac*) para modelar el tamaño relativo del siniestro.

Inicialmente, Bernegger define una clase de curvas de exposición  $G_{b,g}(x)$  la cual cuenta con dos parámetros  $b$  y  $g$  y cuya función de distribución asociada esta dada por:

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x < 1, g = 1 \text{ o } b = 0 \\ 1 - \frac{1}{1+(g-1)x} & \text{si } x < 1, b = 1, g > 1 \\ 1 - b^x & \text{si } x < 1, bg = 1, g > 1 \\ 1 - \frac{1-b}{(g-1)b^{1-x}+(1-gb)} & \text{si } x < 1, b > 0, b \neq 1, bg \neq 1, g > 1 \end{cases}$$

y su función de densidad es:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g = 1 \text{ o } b = 0 \\ \frac{g-1}{(1+(g-1)x)^2} & \text{si } b = 1, g > 1 \\ -\ln(b) \cdot b^x & \text{si } bg = 1, g > 1 \\ \frac{(b-1)(g-1)\ln(b)b^{1-x}}{((g-1)b^{1-x}+(1-bg))^2} & \text{si } b > 0, b \neq 1, bg \neq 1, g > 1 \end{cases}$$

Posteriormente, utiliza una subclase de esta distribución para modelar las curvas de exposición al riesgo. Esta subclase de distribuciones cuenta con un único parámetro  $c$  y es a menudo utilizada como una aproximación para las curvas de exposición de compañías como Swiss Re y Lloyd's of London.

Las curvas de exposición asociadas a la distribución MBBEFD con único parámetro están definidas de la siguiente manera:

$$G_c(x) = G_{b_c, g_c}(x)$$

con

$$b_c = b(c) = e^{3,1-0,15(1+c)c}$$

$$g_c = g(c) = e^{(0,78+0,12c)c}$$

En particular, el valor esperado de la distribución del tamaño relativo del reclamo podrá calcularse de la siguiente forma:

$$E(X) = \frac{\ln(gb)(1-b)}{\ln(b)(1-gb)}$$

A continuación se presentan los gráficos correspondientes a las curvas de exposición, sus distribuciones y densidades asociadas para algunos parámetros  $c$  rele-

vantes<sup>2</sup>. En particular, los parámetros  $c = 2, 3, \text{ y } 4$  son asociados a las reconocidas curvas de exposición  $Y_2, Y_3 \text{ y } Y_4$  de la Swiss Re, y cuando  $c = 5$  la curva coincide con la utilizada por Lloyds of London para riesgo industrial.

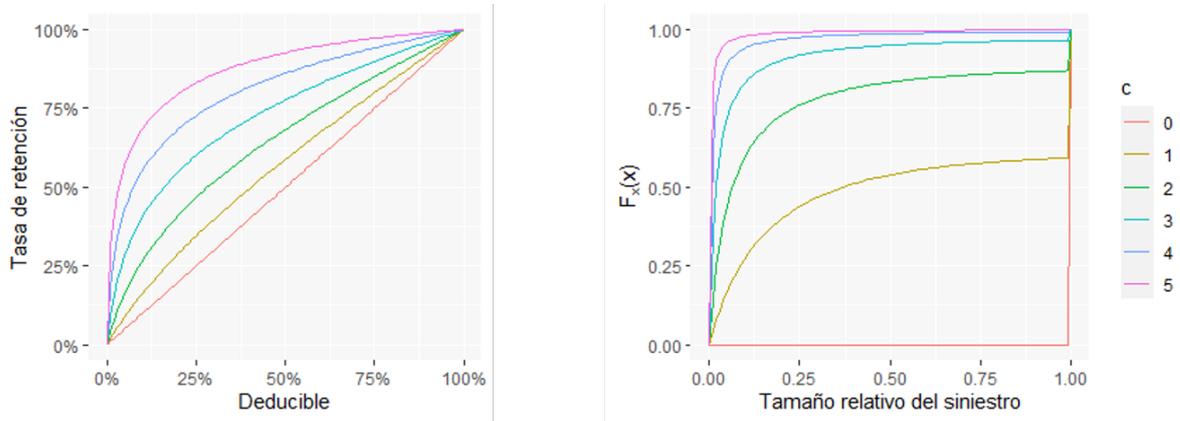


Figura 6: Ejemplos de curvas de exposición al riesgo y sus respectivas distribuciones MBBEFD en función del parámetro  $c$

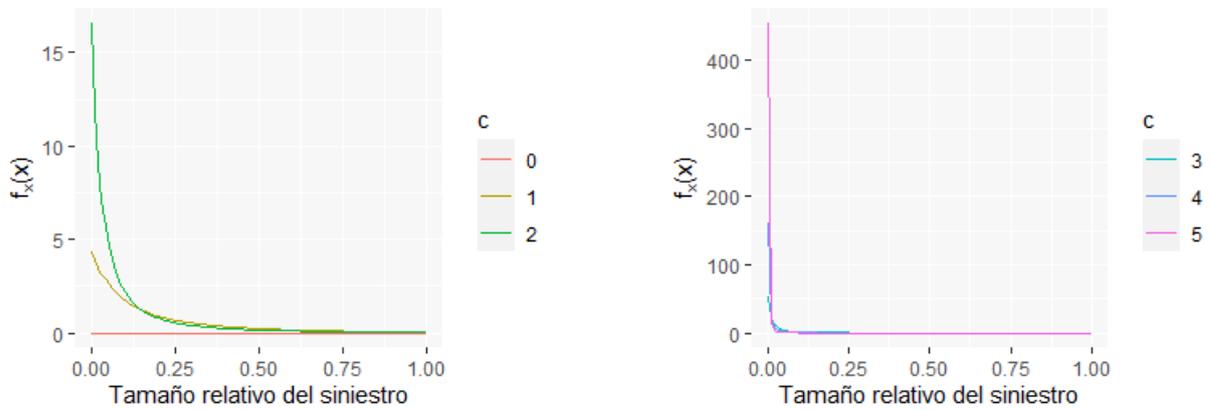


Figura 7: Densidades MBBEFD asociadas a las curvas de exposición presentadas en la figura 6

<sup>2</sup>Los gráficos presentados en las figuras 6, 7 y 8 fueron creados utilizando de manera explícita las expresiones de las funciones  $G(x)$ ,  $F_X(x)$  y  $f_X(x)$  correspondientes a la clase de distribuciones MBBEFD a un único parámetro  $c$  (Bernegger, 1997), no obstante las mismas visualizaciones se pueden crear utilizando el paquete *mbbefd* disponible en R. Ver APÉNDICE 2 - SINTAXIS UTILIZADA.

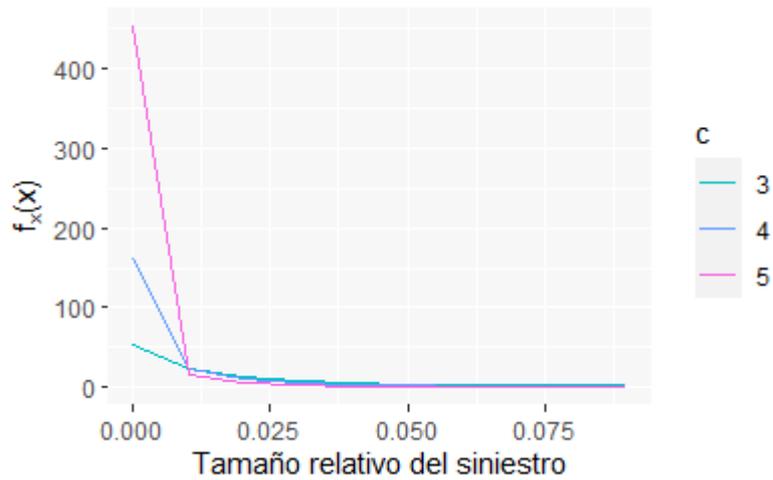


Figura 8: Zoom para densidades MBBEFD asociadas a las curvas de exposición presentadas en la figura 7 - Parámetros  $c=3,4,5$ , valores del tamaño relativo del siniestro menores que 10 %

En la figura 6 se puede apreciar que el valor del parámetro  $c$  afecta directamente en la concavidad de la curva de exposición. La curva asociada al parámetro  $c = 0$  es una función lineal del deducible, esto quiere decir que los riesgos de la cartera asociada a esa curva de exposición provoca pérdidas equivalentes a la totalidad de las sumas aseguradas. A medida que aumenta el valor de  $c$  aumenta la concavidad de la curva y, tal como se mencionó anteriormente, las curvas con mayor concavidad implican carteras con pólizas menos riesgosas, o pólizas con menor tamaño relativo del siniestro.

### 2.3.2. Distribución Gamma Shifted para el costo agregado de los siniestros.

Para una cartera con  $N$  riesgos divididos en  $J$  clases, cada una de estas conteniendo  $n_j$  riesgos, el cálculo del costo agregado de los siniestros utilizando el modelo de riesgo individual tendrá la siguiente forma general:

$$S = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} D_{ij} L_{ij} = \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^{n_j} S_{ij}$$

donde:

- $D_{ij}$  es la variable indicadora del siniestro, es decir

$$D_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si hay reclamo en la póliza } j \\ 0 & \text{si no hay reclamo en la póliza } j \end{cases}$$

con  $P(D_{ij} = 1) = P(D_j = 1) = q_j$ .

- $L_{ij} = SC_{ij} \cdot X_{ij}$  es el monto del daño de la póliza  $i$  en la clase de riesgo  $j$ , siendo  $SC_{ij}$  la sumas de capitales asegurados.
- $S_{ij}$  es la pérdida asociada a la póliza  $i$  de la clase  $j$ .

Para el presente trabajo se utilizará la distribución Gamma Shifted como una aproximación paramétrica del costo agregado de los siniestros, de manera similar al trabajo realizado por Lampaert y Walhin (2005). Mediante esta distribución se reproducirán los primeros momentos de la distribución original.

La distribución Gamma Shifted (S) ésta definida según la fórmula:  $S \approx Z + x_0$  donde  $Z \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ , es decir

$$f_Z(x) = \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \quad \text{para } x > 0$$

$$F_Z(x) = \int_0^x f_Z(t) dt$$

donde  $\Gamma(x)$  es la función Gamma.

Los primeros tres momentos centrados de esta distribución están dados por:

$$\mu = \sum_{j=1}^J [q_j EX_j] \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}$$

$$\mu_2 = \sum_{j=1}^J [q_j Var X_j + q_j(1 - q_j)(EX_j)^2] \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}^2$$

$$\mu_3 = \sum_{j=1}^J [q_j EX_j^3 - 3q_j^2 EX_j EX_j^2 + 2q_j^3 (EX_j)^3] \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}^3$$

De los cuales se puede derivar la esperanza  $\mu$ , el desvío  $\sigma$ , el coeficiente de variación  $CV = \frac{\sigma}{\mu}$  y el índice de asimetría  $\gamma = \frac{(S-\mu)^3}{\sigma^3}$ .

### 3. APLICACIÓN

#### 3.1. Presentación del caso de estudio

El objetivo principal del presente trabajo es determinar el tipo de reaseguro óptimo para una cartera de pólizas de seguro contra incendio.

Para ello se aplicarán los resultados vistos anteriormente a una cartera generada con las características específicas de un conjunto de pólizas de seguros nacionales.

Esta cartera cuenta con 35137 pólizas y está dividida en 3 clases de riesgo:

- $j = 1$  Hogares (HOGTOT+INCLEY+INCVIV)
- $j = 2$  Propiedades Horizontales (INCPH)
- $j = 3$  Empresas (INCEMP+CCOMVT)

En el siguiente cuadro se muestra la información sobre el capital asegurado para la cartera:

Cuadro 1: Características de la distribución de las sumas aseguradas de la cartera utilizada para el caso de estudio

Clase $j$	$n_j$	$SC_j$	$\mu_j(SC)$	$\sigma_j(SC)$	$q_{ij}$
1	24348	2262337452	92917	82139	0.014
2	1782	1072206048	601687	623040	0.020
3	9007	904869014	100463	105147	0.021

donde:

- $n_j$  es la cantidad de pólizas en la clase  $j$
- $SC_j$  es la suma de capitales asegurados para la clase  $j$
- $\mu_j(SC)$  es la media de la suma de capitales asegurados para la clase  $j$
- $\sigma_j(SC)$  es el desvío de la suma de capitales asegurados para la clase  $j$
- $q_{ij}$  es la frecuencia del siniestro para la póliza  $i$  en la clase  $j$

Además se va a definir las siguientes variables aleatorias:

- $X_{ij}$  severidad o tamaño relativo del siniestro para la póliza  $i$  en la clase  $j$
- $L_{ij} = SC_{ij} \cdot X_{ij}$  monto del daño referido a un único siniestro

### 3.2. Cálculo de distribuciones para la cartera utilizada

Para iniciar el caso de estudio se supone que las variables  $X_{i,j}$ , que representan el tamaño relativo del siniestro de la póliza  $i$  en la clase  $j$ , son idénticamente distribuidas dentro de cada clase de riesgo, es decir:

$$X_{i,j} = X_j \text{ para } i \in \{1, 2, 3, \dots, n_j\} \text{ y } j \in \{1, 2, 3\}$$

También se supone que la probabilidad de que se produzca un reclamo es la misma para todas las pólizas dentro su clase de riesgo:

$$q_{i,j} = q_j \text{ para } i \in \{1, 2, 3, \dots, n_j\} \text{ y } j \in \{1, 2, 3\}$$

Como se adelantó en el capítulo anterior, para modelar el tamaño relativo del siniestro se utilizará la subclase de distribuciones MBBEFD a un único parámetro propuesta por Bernegger. Las características de esta distribución se encuentran en el cuadro 2, donde cada fila representa los parámetros asociados a cada una de las

clases de riesgo consideradas en la cartera.

Cuadro 2: Características de la distribución del tamaño relativo del siniestro  $X_{i,j}$

Clase de riesgo ( $j$ )	Frecuencia relativa del siniestro ( $q_j$ )	Parámetro de la distribución ( $c$ )
1	0.014	2
2	0.020	3
3	0.021	4

Los momentos simulados para la distribución del tamaño relativo del siniestro se encuentran en el cuadro 3.

Cuadro 3: Primeros tres momentos de la distribución del tamaño relativo del siniestro  $X_{i,j}$

Clase de riesgo ( $j$ )	$E(X_j)$	$E(X_j^2)$	$E(X_j^3)$	$Var(X_j)$
1	0.2278	0.1628	0.1445	0.1130
2	0.0932	0.0485	0.0432	0.0434
3	0.0326	0.0115	0.0096	0.0100

De esta manera, se puede apreciar que si bien en el cuadro 2 la primera clase de riesgo, que corresponde a pólizas contra incendio en hogares, tiene la frecuencia relativa más baja entre las tres clases de riesgo que se están considerando, esta clase es la que tiene un valor esperado del tamaño relativo del siniestro más grande. Por otro lado, la clase de riesgo 3, correspondiente a pólizas de incendio en empresas, tiene la frecuencia relativa más alta y el valor esperado del tamaño relativo del siniestro más pequeño.

Luego, tal como se adelantó en el capítulo anterior, para el costo agregado de los

siniestros  $S$  se utiliza la distribución *Gamma Shifted* y se reproducen su esperanza  $\mu$ , desvío standard  $\sigma$ , coeficiente de variación  $CV$  e índice de asimetría  $\gamma$ , suponiendo primero una única clase de riesgo para toda la cartera (Cuadro 4) y luego considerando las tres clases de riesgo por separado (Cuadro 5).

Cuadro 4: Características de la distribución del costo agregado de los siniestros  $S$  considerando una única clase de riesgo para toda la cartera

$\mu$	9871529
$\sigma$	1506331
$CV$	0.1526
$\gamma$	0.6419

Cuadro 5: Características de la distribución del costo agregado de los siniestros  $S$  considerando una cartera dividida en 3 clases de riesgo

	Clase 1	Clase 2	Clase 3
$\mu$	7316790	1949385	605354
$\sigma$	934130	1163386	207287
$CV$	0.1277	0.5968	0.3424
$\gamma$	0.2264	1.2689	1.2749

### 3.3. Consideraciones generales

#### 3.3.1. Respecto a las particularidades de la aplicación

Uno de los objetivos fundamentales de la práctica del reaseguro, es la disminución de la probabilidad de ruina mediante la reducción en la variabilidad de los resultados. La determinación de la prima, ya sea de seguro o de reaseguro es otra de las prácticas que contribuye a disminuir la probabilidad de ruina.

La prima pura por sí misma, definida como la esperanza de la siniestralidad,

protege a la empresa únicamente frente a la siniestralidad promedio, y la deja indefensa frente a las desviaciones excesivas e imprevistas. Para ello la prima recargada, definida como la prima pura más una carga de seguridad, ofrece como medio para proteger a la empresa frente a las oscilaciones de la siniestralidad.

En el presente estudio se diferenciarán tres posibles casos para la determinación de la carga de seguridad de las primas de seguro y reaseguro. En el primer caso la carga de la aseguradora será  $\rho = 7\%$  y la de la reaseguradora será  $\rho^R = 10\%$ . En el segundo caso tanto la carga de la aseguradora como la de la reaseguradora se tomarán iguales, siendo estas  $\rho = \rho^R = 7\%$ . Finalmente, en el tercer caso la carga de la aseguradora será  $\rho = 10\%$  y la de la reaseguradora será  $\rho^R = 7\%$ .

Cuadro 6: Casos considerados para el análisis

	$\rho$	$\rho^R$
Caso 1	7%	10%
Caso 2	7%	7%
Caso 3	10%	7%

### 3.3.2. Respecto al procedimiento

Si bien los reaseguros de la forma no proporcional tienen especiales capacidades tanto en la reducción del riesgo, como en su eficiencia en general, también los reaseguros de la forma proporcional tienen sus propias ventajas, tales como la reducción del *moral hazard* o riesgo moral por parte de la compañía cedente, su simplicidad computacional es mayor y son más fáciles de valorar (Lampaert y Walhin, 2005).

Por ello, el presente estudio se centrará en las formas de reaseguro proporcional, en particular en contratos del tipo Cuota Parte y Excedente. Los resultados se analizarán para los tres casos mencionados en el apartado anterior, para cada uno de los siguientes tipos de reaseguro proporcional:

- Cuota parte global, con un única tasa de retención para toda la cartera.
- Cuota parte variable, con diferentes tasas de retención entre las clases de riesgo definidas, pero comunes dentro de ellas.
- Excedente global, con pleno de retención común a toda la cartera.
- Excedente con tabla de líneas, con líneas diferentes para cada clase de riesgo, pero comunes dentro de ellas.

## 4. RESULTADOS

Tal como se planteó al inicio de este trabajo, se busca encontrar la forma de reaseguro óptima que permita minimizar la varianza de la ganancia de la aseguradora directa, suponiendo una ganancia esperada determinada.

La ganancia de la cartera queda determinada por la siguiente ecuación:

$$Z(\bar{\alpha}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} ((1 + \rho)E(S_{ij}) - (1 + \rho^R)(1 - \alpha_{ij})E(S_{ij}) - \alpha_{ij}S_i) \quad (8)$$

y el problema de *de Finetti* queda determinado de la siguiente manera:

$$\min_{\alpha} Var[Z(\bar{\alpha})]$$

Sujeto a la restricción  $E[Z(\bar{\alpha})] = g$  y con solución

$$\alpha_{ij} = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho^R E(S_{ij})}{2Var(S_{ij})} \right) \right) \quad \text{para } j = 1, 2, 3; \quad \text{e } i = 1, 2, \dots, n_j$$

Para la aplicación de la optimización la ganancia esperada se calcula tomando un margen de ganancia de 5 % sobre el total de las primas cobradas en ausencia del reaseguro, es decir

$$\begin{aligned} E[Z(\bar{\alpha})] &= 0,05 \cdot \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} P_{ij} \\ &= 0,05 \cdot \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho)ES_{ij} \\ &\approx 500000 \end{aligned}$$

## 4.1. Resultados obtenidos para cuota parte global

Para el caso de un contrato de reaseguro del tipo cuota parte global las características de la cartera serán:

$$E(S^R) = \alpha E(S)$$

$$Var(S^R) = \alpha^2 Var(S)$$

$$\sigma(S^R) = \alpha \sigma(S)$$

$$CV(S^R) = CV(S)$$

$$\gamma(S^R) = \gamma(S)$$

Por lo tanto el reaseguro cuota parte global contribuirá a la disminución del valor esperado y la varianza del costo agregado de los siniestros, mientras que los coeficientes de variación y de asimetría se mantendrán en el mismo nivel que en ausencia del reaseguro.

Suponiendo una ganancia esperada igual a 500000, la tasa de retención óptima para la cartera será calculada utilizando la expresión:

$$\alpha = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho^R E(S)}{2Var(S)} \right) \right)$$

donde la constante  $\lambda$  se obtiene mediante la sustitución de la expresión anterior en la expresión de la esperanza de la ganancia (ecuación 5)<sup>3</sup>,

$$\lambda = \frac{g - E(S)(\rho - \rho^R)}{\frac{(\rho^R E(S))^2}{2Var(S)}}$$

---

<sup>3</sup>Ver demostración en APÉNDICE I - APLICACIÓN MATEMÁTICA

y la tasa de retención finalmente toma la siguiente forma general

$$\alpha = \min \left( 1, \max \left( 0, 1 - \frac{\rho E(S) - 500000}{\rho^R E(S)} \right) \right)$$

El resultado del reaseguro cuota parte global para los tres casos propuestos se ve resumido en el siguiente cuadro.

Cuadro 7: Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte global

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$\alpha$	0.81	0.72	0.30
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	1214867	1089953	444383
$CV(S^R)$	0.1526	0.1526	0.1526
$\gamma(S^R)$	0.6419	0.6419	0.6419

Para el caso 1, es decir, el caso en el que la reaseguradora propone una carga de seguridad mayor que la aseguradora, la proporción óptima de riesgo que debería retener la aseguradora es de un 81 %. En el caso 2, para cargas de seguridad iguales entre aseguradora y reaseguradora, la tasa de retención es de 72 % y en el caso 3, caso en el que la carga de la reaseguradora es menor que la de la aseguradora, la tasa de retención baja al 30 %.

Por lo tanto, según los resultados presentados en el cuadro 7, a medida que la carga de seguridad de la aseguradora sube y la de la reaseguradora baja, se puede apreciar que la tasa de retención baja, es decir, es menor el porcentaje de riesgo que debería retener la empresa aseguradora.

Tal como se había anticipado, luego de aplicar un reaseguro cuota parte global se obtendrá una disminución proporcional tanto del costo agregado de los siniestros como de su desvío, pero se mantendrán los mismos niveles de coeficiente de variación

e índice de asimetría.

Este comportamiento particular del desvío del costo agregado de los siniestros se representa gráficamente en la figura 9. Desde ella se puede deducir que si la aseguradora deseara transferir una proporción  $x$  de riesgo a la reaseguradora, le bastará con determinar una tasa de retención global equivalente a  $1 - x$  %.

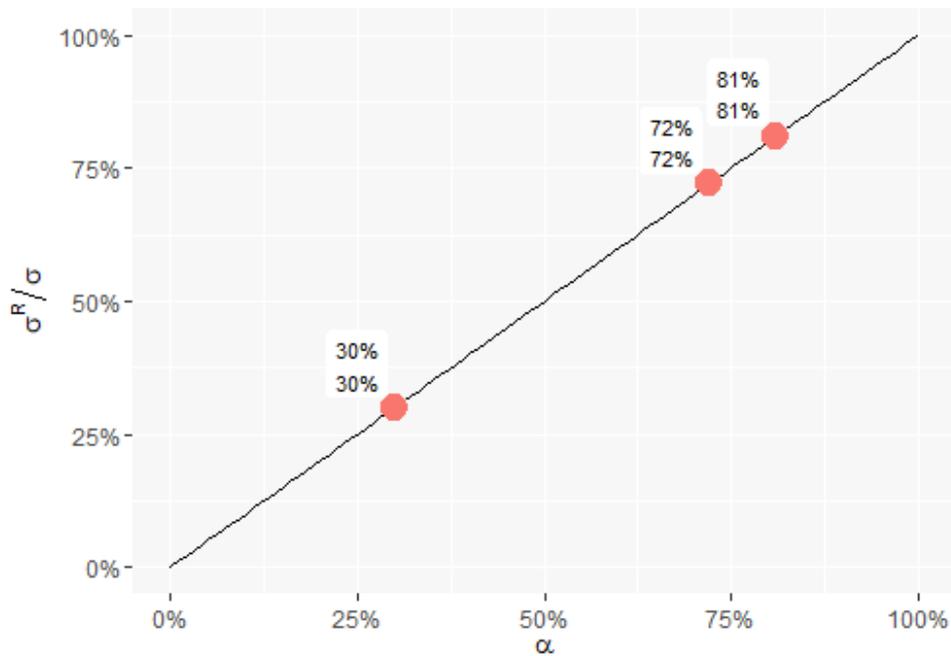


Figura 9: Aumento de la proporción de variabilidad retenida luego del reaseguro cuota parte global en función de la porción retenida de riesgo

## 4.2. Resultados obtenidos para cuota parte variable

En el caso del reaseguro cuota parte variable, es decir, si se supone que la tasa de retención varía en función de la clase de riesgo, definimos  $S_j = \sum_{i=1}^{n_j} S_{ij}$  y las características de la cartera luego del reaseguro serán las siguientes:

$$E(S^R) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j E(S_j)$$

$$Var(S^R) = \sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 Var(S_j)$$

$$\sigma(S^R) = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \alpha_j^2 Var(S_j)}$$

$$CV(S^R) \neq CV(S)$$

$$\gamma(S^R) \neq \gamma(S)$$

Considerando una ganancia esperada igual a 500000, las tasas de retención óptimas para cada clase de riesgo estarán dadas por la siguiente expresión:

$$\alpha_j = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho^R \sum_{i=1}^{n_j} E(S_j)}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(S_j)} \right) \right)$$

donde la constante  $\lambda$  se obtiene mediante la sustitución de la expresión anterior en la expresión de la esperanza de la ganancia (ecuación 5)<sup>4</sup>

$$\lambda = \frac{g - \sum_{j=1}^3 E(S_j)(\rho - \rho^R)}{\frac{\sum_{j=1}^3 (\rho^R E S_j)^2}{2 \sum_{j=1}^3 Var(S_j)}}$$

En el cuadro 8 se presentan las características del costo agregado de los siniestros luego de haber aplicado un reaseguro cuota parte variable.

---

<sup>4</sup>Ver demostración en APÉNDICE I - APLICACIÓN MATEMÁTICA

Cuadro 8: Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte variable

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$\alpha_1$	0.92	0.82	0.34
$\alpha_2$	0.16	0.14	0.06
$\alpha_3$	1.00	1.00	0.56
$E(S^R)$	7632689	6910134	2912202
$\sigma(S^R)$	901480	813955	341578
$CV(S^R)$	0.1181	0.1178	0.1173
$\gamma(S^R)$	0.2213	0.2230	0.2364

Para el caso 1, es decir, para el caso en el que la aseguradora propone una carga de seguridad más baja que la reaseguradora, el método de *de Finetti* lleva a una combinación tasas de retención igual a 92 % para la clase 1, 16 % para la clase 2 y 100 % para la clase 3. Para el caso 2, en el que la aseguradora y la reaseguradora proponen la misma carga de seguridad, se encuentran tasas de retención iguales a 82 % para la clase 1, 14 % para la clase 2 y 100 % para la clase 3. Finalmente, para el caso 3, es decir cuando la aseguradora propone una carga de seguridad mayor que la reaseguradora, se encuentran tasas de retención de 34 % para la clase 1, 6 % para la clase 2 y 56 % para la clase 3.

En el cuadro 8 se visualiza como el resultado de la optimización para un reaseguro de este tipo logra una reducción más que proporcional en la varianza de la cartera. Al mismo tiempo, si se analiza el coeficiente de variación y el índice de asimetría, se encuentra que para este tipo de reaseguro la aplicación de las tasas óptimas de retención logra mejorar la homogeneidad de la cartera.

Es interesante apreciar que para el caso del reaseguro cuota parte variable, tal como en el caso del reaseguro cuota parte global, a medida que aumenta la carga de la aseguradora respecto a la de la reaseguradora, el método sugiere menores tasas

de retención.

El procedimiento utilizado para llegar a las combinaciones de tasas de retención presentadas en el cuadro 8 es el sugerido por la bibliografía de referencia, sin embargo, en los casos en los que se requiere el truncamiento de la tasa correspondiente a alguna clase de riesgo por sobrepasar el valor máximo posible, estas combinaciones óptimas no permiten alcanzar la ganancia propuesta para el caso de estudio en cuestión.

Si bien la bibliografía de referencia no hace alusión a esta problemática, al analizar el ejemplo numérico propuesto por Glineur y Walhin (2006), se encuentra que en los casos en los que alguna de las tasas de retención óptimas calculadas supera el valor máximo permitido, aplicar una redistribución de la retención sin tomar en cuenta las clases de riesgo para las cuales el valor óptimo requiere truncamiento permite llegar a la ganancia esperada propuesta inicialmente.

Siguiendo esta línea de acción, se decide recalcular las tasas de retención óptimas y las características de la cartera para los casos en los cuales alguno de los valores óptimos obtenidos superan el valor 1, es decir, para los casos 1 y 2. El siguiente cuadro presenta los resultados obtenidos mediante este proceso de redistribución de la retención óptima.

Cuadro 9: Resultados obtenidos para el reaseguro cuota parte variable mediante la redistribución de la retención

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3<sup>5</sup></b>
$\alpha_1$	0.96	0.85	0.34
$\alpha_2$	0.17	0.15	0.06
$\alpha_3$	1.00	1.00	0.56
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	941473	842083	341578
$CV(S^R)$	0.1183	0.1179	0.1173
$\gamma(S^R)$	0.2209	0.2223	0.2364

Las tasas de retención óptimas obtenidas mediante el proceso de redistribución no parecen ser significativamente diferentes a las encontradas para el caso sin redistribución, sin embargo, éstas si permiten llegar a la ganancia esperada de 500000 propuesta en el presente caso de estudio, a costas de un leve incremento en el desvío de la cartera luego del reaseguro, pero sin causar grandes cambios en el coeficiente de variación e índice de asimetría.

En las siguientes figuras se realiza el análisis numérico del coeficiente de variación para los tres casos analizados, luego de realizar la redistribución de la retención. En ellas se muestra como la combinación óptima de tasas de retención logra minimizar el coeficiente de variación de la cartera, entre todas las combinaciones que permiten llegar a un objetivo de ganancia esperada mayor o igual al planteado en el caso de estudio.

Para cada una de estas figuras se creó una grilla de valores con las posibles combinaciones de tasas de retención, manteniendo fijas dos de ellas y variando la tercera.

<sup>5</sup>Para el caso 3 no fue necesaria la redistribución ya que las tasas óptimas encontradas se encuentran en el rango de valores permitidos.

Los puntos rojos representan todos aquellos valores del coeficiente de variación asociados a una ganancia esperada mayor o igual a 500000. Las líneas verdes verticales muestran la proporción que representa el valor esperado de los siniestros luego del reaseguro con respecto al valor esperado de los siniestros en la cartera original para la combinación óptima de tasas de retención encontradas mediante el método de *de Finetti*.

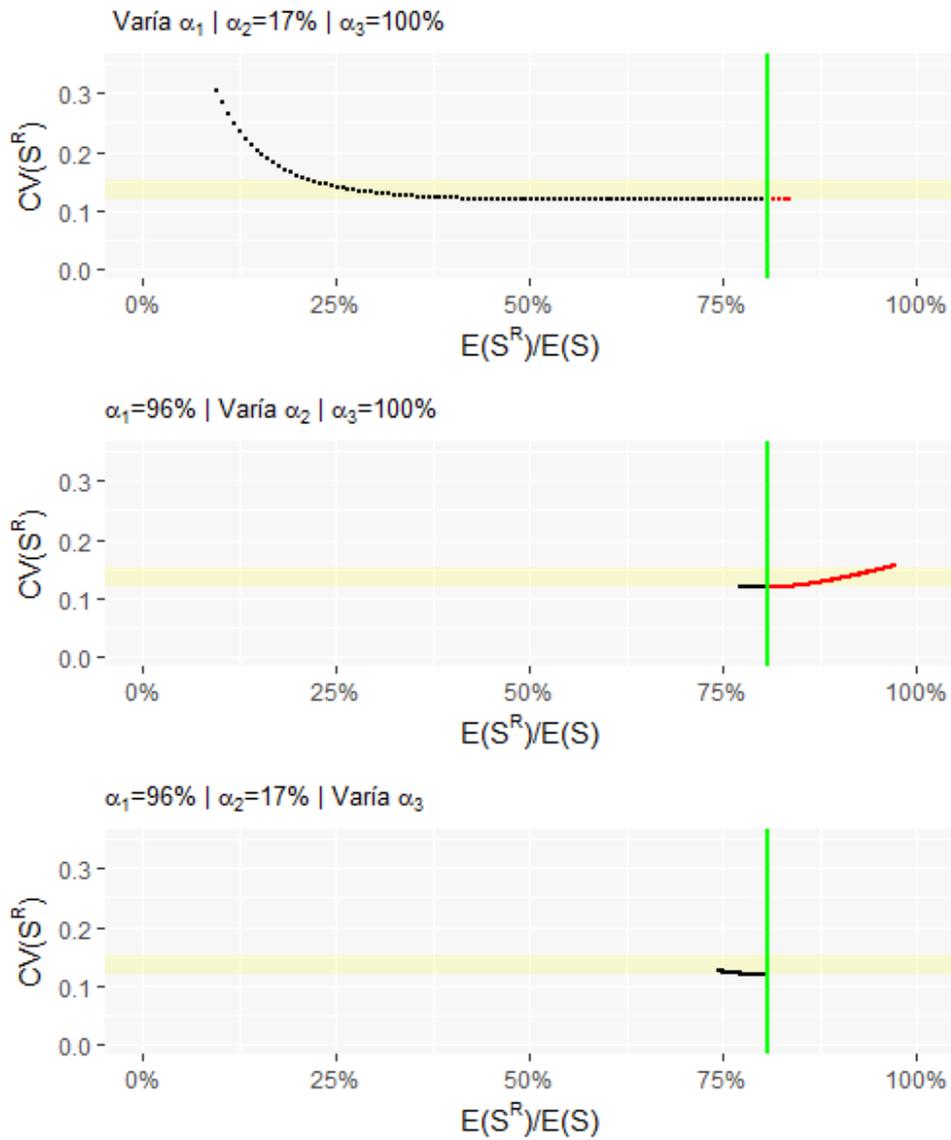


Figura 10: Coeficiente de variación - Caso 1:  $\rho = 7\%$ ,  $\rho^R = 10\%$

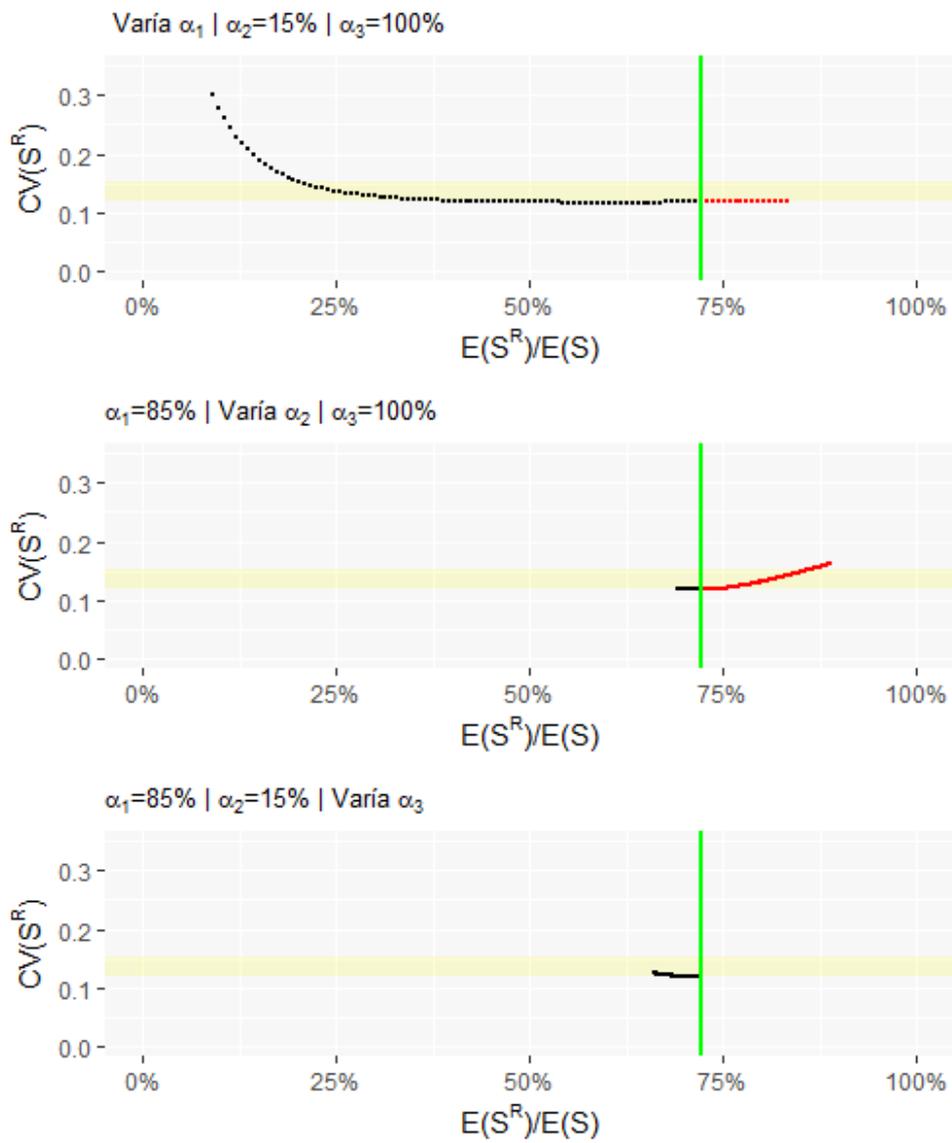


Figura 11: Coeficiente de variación - Caso 2:  $\rho = 7\%$ ,  $\rho^R = 7\%$

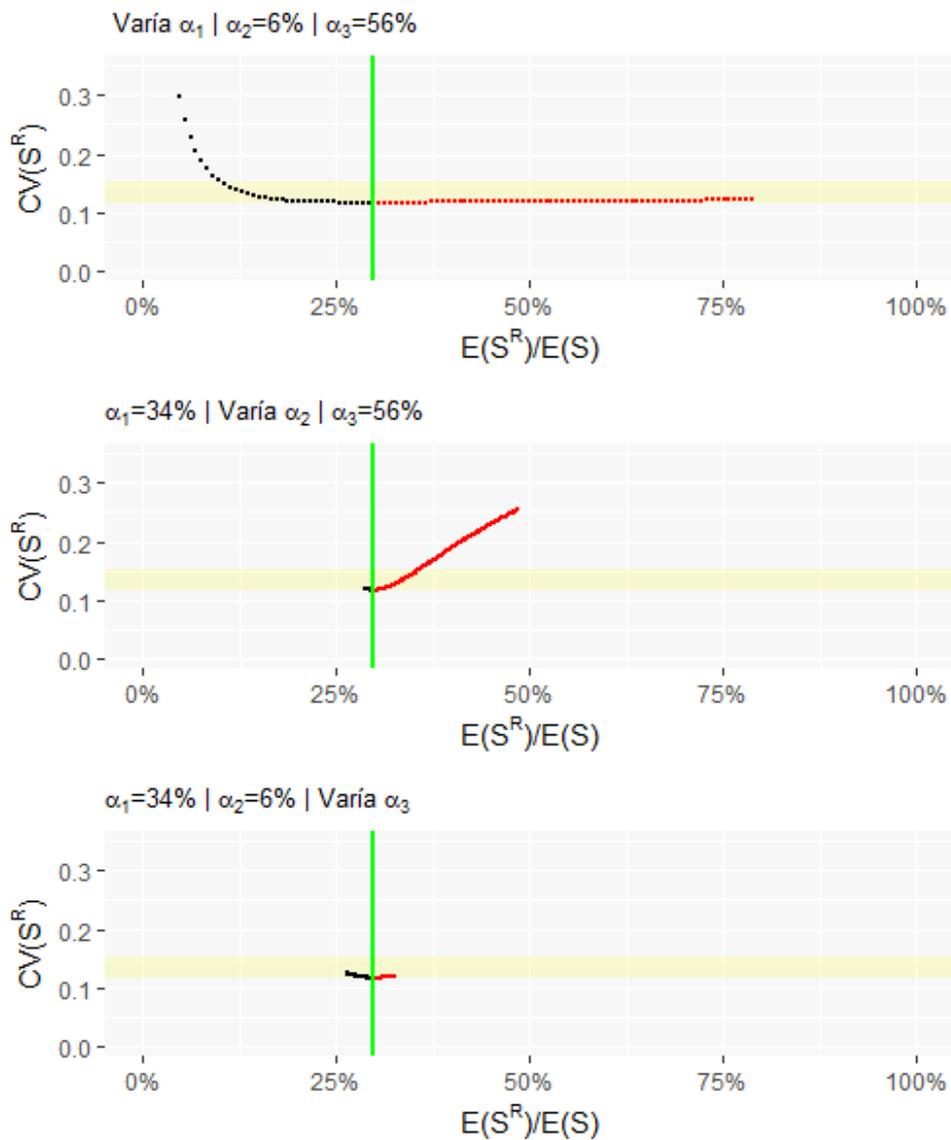


Figura 12: Coeficiente de variación - Caso 3:  $\rho = 10\%$ ,  $\rho^R = 7\%$

Se puede apreciar en los gráficos que al crecer el cargamento de seguridad de la aseguradora y disminuir el de la reaseguradora, la proporción de riesgo retenido por la aseguradora disminuye. Si bien existen valores de tasas de retención que producen un coeficiente de variación menor al que produce el óptimo, éstas no permiten alcanzar la ganancia esperada propuesta en el presente caso de estudio.

### 4.3. Resultados obtenidos para excedente global

El resultado del método de *de Finetti* en el caso de un reaseguro del tipo excedente puede ser obtenido de manera simple aplicando el mismo razonamiento que para el caso del reaseguro cuota parte, siempre teniendo en consideración que el valor buscado es un pleno de retención óptimo que representa el máximo importe que debería retener la aseguradora directa para minimizar la variabilidad de su cartera.

Suponiendo una ganancia esperada igual a 500000, la tasa de retención óptima para la cartera será calculada utilizando la expresión:

$$\alpha_{i,j} = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{R}{SC_{i,j}} \right) \right)$$

donde R representa el pleno de retención óptimo para la totalidad de la cartera y está determinado por la siguiente expresión

$$R = \frac{\lambda \rho^R E(S) SC}{2Var(S)}$$

Dado que para la cartera utilizada en el presente caso de estudio no se conocen los montos asegurados de las pólizas individuales, la tasa de retención  $\alpha$  quedará en la práctica determinada por

$$\alpha_j = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{R}{SC_j/n_j} \right) \right)$$

donde los valores de R y su  $\lambda$  respectivo tienen la siguiente forma general:

$$R = \frac{\lambda \sum_{j=1}^3 E(S_j) \frac{SC_j}{n_j}}{\rho^R \sum_{j=1}^3 Var(S_j)} \quad \lambda = \frac{g - (1 + \rho) \sum_{j=1}^3 E(S_j) + (1 + \rho^R) \sum_{j=1}^3 E(S_j)}{\rho^{R^2} \sum_{j=1}^3 E(S_j) \frac{SC_j/n_j}{2Var(S_j)}}$$

Las características de la cartera luego del reaseguro en función del pleno de retención serán las siguientes

$$E(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{R}{SC_j/n_j} \right) E(S)$$

$$Var(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{R}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)$$

$$\sigma(S^R) = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left( \frac{R}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)}$$

$$CV(S^R) \neq CV(S)$$

$$\gamma(S^R) \neq \gamma(S)$$

El resultado del reaseguro por excedente global para los tres casos propuestos se ve resumido en el siguiente cuadro.

Cuadro 10: Resultados obtenidos para el reaseguro excedente

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$R$	90459.87	81158.74	33089.09
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	944716	847579	345565
$CV(S^R)$	0.1187	0.1187	0.1187
$\gamma(S^R)$	0.2198	0.2198	0.2198

Por lo tanto la aplicación de un reaseguro excedente global provoca en la cartera una reducción proporcional de la variabilidad y una mayor homogeneidad en la cartera, con un coeficiente de variación e índice de asimetría menores que los encontrados para la cartera sin reasegurar.

Según los resultados del cuadro 10 en la comparación de casos se encuentra que el pleno de retención es menor a medida que la carga de la reaseguradora baja y la de la aseguradora sube, tal como se encontró para los casos de reaseguro cuota parte.

#### 4.4. Resultados obtenidos para excedente con tabla de líneas

En el caso del reaseguro excedente con tabla de líneas, es decir, si se considera un pleno de retención diferente por clase de riesgo, las características de la cartera luego del reaseguro serán las siguientes:

$$E(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{R_j}{SC_j/n_j} \right) E(S)$$

$$Var(S^R) = \sum_{j=1}^3 \left( \frac{R_j}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)$$

$$\sigma(S^R) = \sqrt{\sum_{j=1}^3 \left( \frac{R_j}{SC_j/n_j} \right)^2 Var(S)}$$

$$CV(S^R) \neq CV(S)$$

$$\gamma(S^R) \neq \gamma(S)$$

donde el pleno de retención para cada clase de riesgo está determinado de la siguiente forma:

$$R_j = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \lambda \rho^R E S_i(SC_{ij})}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(S_i)}$$

Que se puede reescribir en función de las variables aleatorias  $D_{ij}$  y  $X_{ij}$  como<sup>6</sup>:

$$R_j = \frac{\lambda}{2} \rho^R \frac{q_j EX_j}{q_j EX_j^2 - (q_j EX_j)^2}$$

y la constante  $\lambda$  tendrá la siguiente forma

$$\lambda = \frac{g - (\rho_{ij} - \rho^R) \sum_{j=1}^3 q_j EX_j SC_j}{\sum_{j=1}^3 \rho^{R^2} \frac{(EX_j)^2}{q_j EX_j^2 - (q_j EX_j)^2} n_j}$$

Cuadro 11: Resultados obtenidos para el reaseguro excedente con tabla de líneas

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3</b>
$R_1$	83465.11	74883.19	30530.49
$R_2$	114614.45	102829.73	41924.53
$R_3$	168882.69	151518.09	61775.18
$E(S^R)$	7549186	6835218	2912202
$\sigma(S^R)$	1041452	805761	342091
$CV(S^R)$	0.1380	0.1179	0.1175
$\gamma(S^R)$	0.1407	0.2254	0.2463

Al calcular las tasas de retención asociadas para las líneas presentadas en el cuadro 11 se encuentra que para los casos 1 y 2 éstas sobrepasan el valor máximo permitido, haciendo necesario el truncamiento en el valor 1. Por consiguiente estas tasas de retención no permiten generar la ganancia propuesta en el presente trabajo.

Para corregir estos plenos encontrados por el método de *de Finetti*, se decide realizar la misma redistribución de la retención realizada en el caso del reaseguro

<sup>6</sup>Ver demostración en Apendice 1

cuota parte variable. En el siguiente cuadro se presentan los resultados para surplus con tabla de líneas luego de la redistribución.

Cuadro 12: Resultados obtenidos para el reaseguro excedente con tabla de líneas con redistribución de la retención

	<b>Caso 1</b>	<b>Caso 2</b>	<b>Caso 3<sup>7</sup></b>
$R_1$	89729.71	79744.41	30530.49
$R_2$	89602.41	79631.28	41925.53
$R_3$	168882.69	151518.09	61775.18
$E(S^R)$	7961459	7142857	2912202
$\sigma(S^R)$	1042684	985387	342091
$CV(S^R)$	0.1310	0.1380	0.1175
$\gamma(S^R)$	0.1624	0.1386	0.2463

Tal como en el caso cuota parte variable, la redistribución provoca plenos de retención que no son significativamente diferentes a los encontrados anteriormente, y a costas de un mínimo incremento de la varianza y el desvío permiten generar la ganancia deseada.

## 4.5. Comparación de resultados

Al analizar y comparar los resultados obtenidos en cada uno de los tipos de reaseguro analizados previamente, se observan algunas diferencias en las características de la cartera luego de la aplicación.

En el caso de los reaseguros cuota parte, se encuentra que en el caso variable se generan tasas óptimas que permiten no solo disminuir la variabilidad de la cartera

---

<sup>7</sup>Para el caso 3 no fue necesaria la redistribución ya que las tasas óptimas correspondientes a los plenos de retención encontrados se encuentran en el rango de valores permitidos.

luego del reaseguro, sino que también se logra mejor homogeneidad y simetría con coeficientes de variación e índices de asimetría menores que los encontrados en el caso cuota parte global.

Por otro lado, para los reaseguros por excedente se encuentra que en el reaseguro global para los casos 1 y 2 el desvío y el coeficiente de variación son menores que para el reaseguro con tabla de líneas pero el índice de asimetría tiene un comportamiento inverso. En cambio, para el caso 3 tanto el desvío como el coeficiente de variación son menores en el reaseguro con tabla de líneas, y también en este caso el índice de asimetría tiene un comportamiento inverso.

En la comparación de los casos globales, se encuentra que el reaseguro excedente global no solo logra una mayor disminución en el desvío de la cartera luego del reaseguro con respecto al reaseguro cuota parte global, sino también logra mejor homogeneidad y simetría en la cartera luego de haber aplicado el reaseguro.

En relación a los tipos de reaseguro cuota parte variable y excedente por tabla de líneas, los resultados indican que el primero provoca mayor disminución en la variabilidad de la cartera en comparación con el segundo. Sin perjuicio de lo anterior, para los casos en los que el cargamento de seguridad de la aseguradora es menor o igual al cargamento de la reaseguradora, es decir para los casos 1 y 2, el contrato excedente con tabla de líneas genera una mayor simetría en la cartera luego del reaseguro que la encontrada para cuota parte variable.

## 5. CONCLUSIONES

Mediante la técnica de optimización convexa propuesta por *de Finetti* se logra una expresión matemática que permite encontrar de manera sencilla una combinación óptima de tasas (o plenos) de retención que logran minimizar la variación de la ganancia que la empresa aseguradora se propone obtener, sujeto a un nivel fijo de ganancia esperada. Cuando las tasas de retención óptimas obtenidas se encuentran fuera del rango permitido el procedimiento requiere un truncamiento de las mismas.

Al analizar en detalle el presente caso de estudio se encuentra que la ganancia esperada en los casos que se debe realizar el truncamiento mencionado es menor a la que se quiere obtener.

Dado que la bibliografía de referencia no menciona esta problemática, se analizaron otros casos prácticos propuestos por diferentes autores que permitieron llegar a la conclusión de que realizar una redistribución de la retención luego del truncamiento genera tasas de retención que sí logran el objetivo de ganancia propuesto, a costas de un leve incremento en la variabilidad de la misma.

Con respecto a la elección del tipo de reaseguro más conveniente para la empresa aseguradora, el análisis presentado para el presente caso de estudio muestra que no existe evidencia que permita afirmar de manera determinante la superioridad de un contrato de reaseguro cuota parte o excedente sobre el otro, sino que la elección dependerá de las características que la empresa requiera de su cartera luego de haber aplicado un contrato de reaseguro. Estos resultados coinciden con los obtenidos por Glineur y Walhin (2006) en su caso de estudio.

Por otra parte, se encontró que la relación entre las cargas de seguridad propuestas por la aseguradora y la reaseguradora tienen un efecto determinante en el nivel de retención óptimo: cuanto menor es la carga de la reaseguradora con respecto a la de

la aseguradora el riesgo retenido será menor.

Los resultados que se obtienen sobre la cartera objeto de estudio luego del proceso de optimización para cada tipo de reaseguro no se deberían extrapolar a otros conjuntos o tipos de pólizas, ya que los mismos dependerán no solo de las características particulares de la cartera en cuestión sino también de otros factores como primas, cargamentos de seguridad, ganancia esperada, entre otras.

Finalmente, dado que en el presente trabajo, al igual que en el trabajo de de Finetti (1940), se realizó el supuesto de independencia para el tamaño relativo del siniestro y la frecuencia relativa de los mismos, una posible extensión podría realizarse basándose en el trabajo propuesto por Pressacco y Serafini (2007) en el que se extiende el resultado método de *de Finetti* para el caso una cartera con riesgos correlacionados.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Albrecher, H., Beirlant, J., y Teugels, J. (2017). *Reinsurance: Actuarial and Statistical Aspects*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, Ltd.
- Arónica, E. (2012). *Teoría y práctica del seguro*. UNR Editora. Editorial de la Universidad Nacional de Rosario, 1 edición.
- Auguie, B. (2017). *gridExtra: Miscellaneous Functions for "Grid" Graphics*. R package version 2.3.
- Bernegger, S. (1997). The swiss re exposure curves and the mbbefd distribution class. *ASTIN Bulletin*, 27(1):99–111.
- Canestraro, D. (2006). Metodologie di pricing per le riassicurazioni non proporzionali: il modello di pareto. Tesis de máster, Università degli Studi di Firenze.
- Centeno, M. (2006). *Retention and Reinsurance Programmes*, capítulo 1, pp. 1–9. John Wiley & Sons, Ltd.
- de Finetti, B. (1940). Il problema dei pieni. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, 11:1–88.
- Dutang, C. y Spedicato, G. (2021). *mbbefd: Maxwell Boltzmann Bose Einstein Fermi Dirac Distribution and Destruction Rate Modelling*. R package version 0.8.10.
- Glineur, F. y Walhin, J. (2006). de finetti's retention problem for proportional reinsurance revisited. *Blätter DGVM*, 1(27):451–462.
- Holland, D. M. (2009). A brief history of reinsurance. *Society of Actuaries*, 65:4–29. Special Edition - Reinsurance News.

- Lampaert, I. y Walhin, J. F. (2005). On the optimality of proportional reinsurance. *Scandinavian Actuarial Journal - SCAND ACTUAR J*, 2005:225–239.
- Meschiari, S. (2021). *latex2exp: Use LaTeX Expressions in Plots*. R package version 0.5.0.
- Pressacco, F. (1986). *Separation theorems in proportional reinsurance*, volumen 171 de *C: Mathematical and Physical Sciences*, pp. 209–215. Springer.
- Pressacco, F. y Serafini, P. (2007). The origins of the mean-variance approach in finance: revisiting de finetti 65 years later. *Decisions in Economics and Finance*, 1(30):19–49.
- R Core Team (2019). *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria.
- Wickham, H., Averick, M., Bryan, J., Chang, W., McGowan, L. D., François, R., Grolemund, G., Hayes, A., Henry, L., Hester, J., Kuhn, M., Pedersen, T. L., Miller, E., Bache, S. M., Müller, K., Ooms, J., Robinson, D., Seidel, D. P., Spinu, V., Takahashi, K., Vaughan, D., Wilke, C., Woo, K., y Yutani, H. (2019). Welcome to the tidyverse. *Journal of Open Source Software*, 4(43):1686.

# APÉNDICE I

El objetivo de este apéndice es mostrar de forma exhaustiva la aplicación del nivel de retención óptimo para cada una de las formas de reaseguros propuestas en este trabajo. En primer lugar se aplicará a los reaseguros cuota parte con sus dos variantes, global y variable, y posteriormente se aplicará a los reaseguros excedente también con sus dos variantes, global y por tabla de líneas.

## Cálculo de la tasa de retención para los reaseguros cuota parte.

Para este tipo de reaseguro se quiere encontrar tasa de retención óptima:

$$\alpha_i = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{\lambda \rho^R E(S_i)}{2 \text{Var}(S_i)} \right) \right)$$

Particularmente para el caso global no es necesario realizar el calculo explícito de la constante de optimización  $\lambda$ , alcanza con despejar la tasa de retención de la formula de la ganancia esperada. De todas formas se demostrará como obtener el valor de la constante de optimización a partir de la ganancia esperada.

### Cuota parte global

Se despeja la tasa de retención de la ganancia esperada:

$$E[Z(\bar{\alpha})] = g = \sum_{i=1}^n P_i - \sum_{i=1}^n \rho^R (1 - \alpha_i) E(S_i) - \sum_{i=1}^n E(S_i)$$

$$\sum_{i=1}^n \rho^R (1 - \alpha_i) E(S_i) = \sum_{i=1}^n P_i - g - \sum_{i=1}^n E(S_i)$$

$$(1 - \alpha_i) = \frac{\sum_{i=1}^n P_i - g - \sum_{i=1}^n E(S_i)}{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)}$$

$$\alpha_i = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n P_i - g - \sum_{i=1}^n E(S_i)}{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)} \right]$$

$$\alpha_i = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n (1 - \rho) E(S_i) - g - \sum_{i=1}^n E(S_i)}{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)} \right]$$

$$\alpha_i = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \rho E(S_i) - g}{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)} \right]$$

Sustituyendo el resultado de la optimización se puede encontrar la constante de optimización  $\lambda$ :

$$\frac{\lambda \sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)}{\sum_{i=1}^n 2Var(S_i)} = 1 - \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \rho E(S_i) - g}{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)} \right]$$

$$\frac{\lambda \sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)}{\sum_{i=1}^n 2Var(S_i)} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i) - \sum_{i=1}^n \rho E(S_i) + g}{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i)}$$

$$\lambda = \frac{\sum_{i=1}^n \rho^R E(S_i) - \sum_{i=1}^n \rho E(S_i) + g}{\frac{\sum_{i=1}^n (\rho^R E(S_i))^2}{\sum_{i=1}^n 2Var(S_i)}}$$

$$\lambda = \frac{g - \sum_{i=1}^n E(S_i)(\rho - \rho^R)}{\frac{\sum_{i=1}^n (\rho^R E(S_i))^2}{\sum_{i=1}^n 2Var(S_i)}}$$

## Cuota parte variable

Para el caso variable es necesario encontrar la constante de optimización  $\lambda$ . Para esto se comienza simplificando la formula de la ganancia esperada:

$$\begin{aligned}
 E[Z(\bar{\alpha})] = g &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (P_{ij} - \rho_{ij}^R(1 - \alpha_j)E(S_{ij}) - E(S_{ij})) \\
 g &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} ((1 + \rho)E(S_{ij}) - \rho^R(1 - \alpha_j)E(S_{ij}) - E(S_{ij})) \\
 g &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} ((1 + \rho)E(S_{ij}) - \rho^R [(E(S_{ij}) - \alpha_j E(S_{ij}))] - E(S_{ij})) \\
 g &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} ((1 + \rho)E(S_{ij}) - \rho^R E S_{ij} + \rho^R \alpha_j E(S_{ij}) - E(S_{ij})) \\
 g &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (\rho E(S_{ij}) - \rho^R E(S_{ij}) + \rho^R \alpha_j E(S_{ij})) \\
 g &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (\rho - \rho^R) E(S_{ij}) + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R \alpha_j E(S_{ij})
 \end{aligned}$$

Por último, se sustituye la tasa de retención óptima en la formula simplificada de la ganancia esperada.

$$\begin{aligned}
 g &= \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (\rho - \rho^R) E(S_{ij}) + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R \left[ \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E(S_{ij})}{2Var(S_{ij})} \right] E(S_{ij}) \\
 \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R \left[ \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E(S_{ij})}{2Var(S_{ij})} \right] E(S_{ij}) &= g - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (\rho - \rho^R) E(S_{ij})
 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{g - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij})(\rho - \rho^R)}{\sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \frac{\sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E(S_{ij})}{2\text{Var}(S_{ij})} \rho^R E(S_{ij})}$$

## Cálculo del pleno de retención para los reaseguros por excedente

Como se mencionó en la sección 5.3 lo que se quiere encontrar es un pleno de retención  $R$ . La tasa de retención óptima se puede reescribir a través de éste como:

$$\alpha_{ij} = \min \left( 1, \max \left( 0, \frac{R_j}{SC_{ij}} \right) \right)$$

Para demostrarlo se define  $\frac{S_i}{SC_{ij}}$  como la pérdida relativa para el  $i$ -ésimo riesgo. Podemos escribir el pleno de retención de la siguiente forma:

$$R_j = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E\left(\frac{S_i}{SC_{ij}}\right)}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var\left(\frac{S_i}{SC_{ij}}\right)}$$

$$R_j = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E(S_i) \frac{1}{SC_{ij}}}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(S_i) \frac{1}{SC_{ij}^2}}$$

$$R_j = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E(S_i)(SC_{ij})}{2 \sum_{j=1}^{n_j} Var(S_i)}$$

Entonces:

$$\alpha_{ij} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E(S_i)(SC_{ij})}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(S_i)} \frac{1}{SC_{ij}}$$

### Excedente global

De la misma forma que se hizo para el reaseguro cuota parte global, se puede encontrar el pleno de retención sin calcular explícitamente la constante de optimización  $\lambda$  despejando directamente de la ganancia esperada:

$$E[Z(\bar{\alpha})] = g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (P_{ij} - \rho_{ij}^R(1 - \alpha_j)E(S_{ij}) - E(S_{ij}))$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho)E(S_{ij}) - \rho^R \sum_{j=1}^3 (1 - \alpha_j) \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij})$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho)E(S_{ij}) - \rho^R \sum_{j=1}^3 \left(1 - \frac{n_j R}{SC_j}\right) \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij})$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho)E(S_{ij}) - \rho^R \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) + \rho^R \sum_{j=1}^3 \frac{n_j R}{SC_j} \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij})$$

$$\rho^R \sum_{j=1}^3 \frac{n_j R}{SC_j} \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) = g + \rho^R \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho)E(S_{ij})$$

$$\rho^R \sum_{j=1}^3 \frac{n_j R}{SC_j} \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) = g + (1 + \rho^R) \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho)E(S_{ij})$$

$$R = \frac{g + (1 + \rho^R) \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (1 + \rho)E(S_{ij})}{\rho^R \sum_{j=1}^3 \frac{n_j}{SC_j} \sum_{i=1}^{n_j} E(S_{ij})}$$

## Excedente por tabla de líneas

Para este caso se va a reescribir el pleno de retención  $R$  en función de la variables aleatorias  $D_{ij}$  y  $X_{ij}$ :

$$R_j = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R E(S_i)(SC_{ij})}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(S_i)}$$

$$R_j = \frac{\lambda \rho^R \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij} E(D_{ij} L_{ij})}{2 \sum_{i=1}^{n_j} Var(D_{ij} L_{ij})}$$

$$R_j = \frac{\lambda \rho^R \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij} SC_{ij} E(D_{ij} X_{ij})}{2 \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}^2 Var(D_{ij} X_{ij})}$$

$$R_j = \frac{\lambda \rho^R E(D_j X_j) \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}^2}{2 Var(D_j X_j) \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij}^2}$$

$$R_j = \frac{\lambda \rho^R E(D_j X_j)}{2 Var(D_j X_j)}$$

Este resultado final se puede reescribir como:

$$R_j = \frac{\lambda}{2} \rho^R \frac{q_j E X_j}{q_j E X_j^2 - (q_j E X_j)^2} \quad (9)$$

Entonces:

$$\alpha_{ij} = \frac{R_j}{SC_{ij}} = \frac{\lambda}{2} \rho^R \frac{q_j E X_j}{q_j E X_j^2 - (q_j E X_j)^2} \frac{1}{SC_{ij}}$$

Se realiza el mismo procedimiento de simplificar la ganancia esperada y sustituir la tasa de retención:

$$E[Z(\bar{\alpha})] = g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} (P_{ij} - \rho_{ij}^R (1 - \alpha_{ij}) E(S_{ij}) - E(S_{ij}))$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} ((1 + \rho)E(S_{ij}) - \rho^R(1 - \alpha_{ij})E(S_{ij}) - E(S_{ij}))$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R(1 - \alpha_{ij})E(S_{ij})$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho E(S_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R \left(1 - \frac{R_j}{SC_{ij}}\right) E(S_{ij})$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho SC_{ij} E(D_{ij} X_{ij}) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R \left(1 - \frac{R_j}{SC_{ij}}\right) SC_{ij} E(D_{ij} X_{ij})$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho SC_{ij} E(D_j X_j) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R \left(1 - \frac{R_j}{SC_{ij}}\right) SC_{ij} E(D_j X_j)$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho SC_{ij} E(D_j X_j) - \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R SC_{ij} E(D_j X_j) + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^{n_j} \rho^R \frac{R_j}{SC_{ij}} SC_{ij} E(D_j X_j)$$

$$g = \sum_{j=1}^3 \rho E(D_j X_j) \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij} - \sum_{j=1}^3 \rho^R E(D_j X_j) \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij} + \sum_{j=1}^3 \rho^R R_j E(D_j X_j) \sum_{i=1}^{n_j} \frac{SC_{ij}}{SC_{ij}}$$

$$g = (\rho - \rho^R) \sum_{j=1}^3 E(D_j X_j) \sum_{i=1}^{n_j} SC_{ij} + \sum_{j=1}^3 \rho^R R_j E(D_j X_j) n_j$$

$$\sum_{j=1}^3 \rho^R R_j E(D_j X_j) n_j = g - (\rho - \rho^R) \sum_{j=1}^3 E(D_j X_j) SC_j$$

$$\sum_{j=1}^3 \rho^R \lambda \rho^R \frac{E(D_j X_j)}{Var(D_j X_j)} E(D_j X_j) n_j = g - (\rho_{ij} - \rho^R) \sum_{j=1}^3 E(D_j X_j) SC_j$$

$$\sum_{j=1}^3 \rho^R \lambda \rho^R \frac{(E(D_j X_j))^2}{\text{Var}(D_j X_j)} n_j = g - (\rho_{ij} - \rho^R) \sum_{j=1}^3 E(D_j X_j) S C_j$$

$$\lambda = \frac{g - (\rho - \rho^R) \sum_{j=1}^3 E(D_j X_j) S C_j}{\sum_{j=1}^3 \rho^{R^2} \frac{(E(D_j X_j))^2}{\text{Var}(D_j X_j)} n_j}$$

$$\lambda = \frac{g - (\rho_{ij} - \rho^R) \sum_{j=1}^3 q_j E X_j S C_j}{\sum_{j=1}^3 \rho^{R^2} \frac{(E X_j)^2}{q_j E X_j^2 - (q_j E X_j)^2} n_j}$$

# APÉNDICE II

## Aplicación del método de *de Finetti*<sup>8</sup>

```
library(mbbefd)
library(tidyverse)
options(scipen=999)

#Número de polizas para cada clase de riesgo. J=1,2,3#
n<-c(24348, 1782, 9007)

#Distribución MBBEFD, momentos y varianza#
c<-c(2,3,4)

b<-rep(0,3)
g<-rep(0,3)
EX<-rep(0,3)
EX2<-rep(0,3)
EX3<-rep(0,3)
VARX<-rep(0,3)

for (i in 1:3){
  b[i]<- exp(3.1 - 0.15*(1+c[i])*c[i])
  g[i]<- exp((0.78+0.12*c[i])*c[i])
}

set.seed(2021)

##X<-rMBBEFD(n[i],g[i],b[i])

for (i in 1:3){
  EX[i]<-mean(rMBBEFD(n[i],g[i],b[i]))
  EX2[i]<-mean(rMBBEFD(n[i],g[i],b[i])^2)
  EX3[i]<-mean(rMBBEFD(n[i],g[i],b[i])^3)
  VARX[i]<- var(rMBBEFD(n[i],g[i],b[i]))
}

tabla5<-as.data.frame(cbind(EX,EX2,EX3,VARX))
tabla5
```

---

<sup>8</sup>Manuales consultados para la construcción de la sintaxis: R Core Team (2019), Dutang y Spedicato (2021), Wickham *et al.* (2019), Auguie (2017), Meschiari (2021)

```

#Distribución Gamma Shifted - Costo del siniestro agregado

q<-c(0.0142, 0.0195, 0.0205) #frecuencia del siniestro
mu_SC<-c(92917, 601687, 100463) #esperanza de suma de capitales para cada clase de riesgo
sigma_SC<-c(82139, 623040, 105147) #desvio de suma de capitales para cada clase de riesgo
asim_SC<-c(1.896, 1.738, 1.767) #coef. asimetria de suma de capitales para cada clase de riesgo

#Momentos centrados gamma shifted#

mu_gamma<-q*EX*n*mu_SC
mu_gamma #esperanza del costo de los siniestro agregados

var_gamma<-(q*VARX + q*(1-q)*EX^2)*(n*(sigma_SC^2+mu_SC^2))
var_gamma #Varianza del costo de los siniestros agregados

sigma_gamma<-sqrt(var_gamma)
sigma_gamma #desvio del costo de los siniestros agregados

#coeficiente de variación del costo de los siniestro agregados
cv_gamma<-sigma_gamma/abs(mu_gamma)

#momento de orden 3
mu3_gamma<- (q*EX3 -3*q^2*EX*EX2 + 2*q^3*EX^3)*(n*(sigma_SC^3*asim_SC+mu_SC^3)+3*mu_SC*(n*(sigma_SC^2+mu_SC^2))-3*mu_SC^2)

asim_gamma <- mu3_gamma/(sigma_gamma^3) #coeficiente de asimetría del costo de los siniestro agregados

tabla8<-as.data.frame(rbind(round(mu_gamma),round(sigma_gamma), cv_gamma, asim_gamma))
tabla8

mu<-sum(mu_gamma)
Var<-sum(var_gamma)
sigma<-sqrt(Var)
cv<-sigma/mu
asim<-sum(mu3_gamma)/(sigma^3)

#Se crea función para calcular el alpha correcto
alpha_correcto<-function(vector){
  for (i in 1:length(vector)){
    if(vector[i]<0) {vector[i]=0}
    else if (vector[i]>1) {vector[i]=1}
    else {vector[i]=vector[i]}
  }
}

```

```

vector
}

#-----
#           Cuota Parte-----
#-----

# Cuota Parte Caso 1-----
rho<-0.07
rhoR<-0.10

#Global.....

alpha1_cpg= 1+((-rho)*mu + 500000)/(rhoR*mu)
alpha1_cpg<-alpha_correcto(alpha1_cpg)

alpha1_cpg

ES1_cpg=alpha1_cpg*mu
VS1_cpg=(alpha1_cpg^2)*Var
SIGS1_cpg=alpha1_cpg*sqrt(Var)
CV1_cpg=cv
A1_cpg=asim

t1_cpg=as.data.frame(rbind(round(ES1_cpg),
                           round(VS1_cpg),
                           round(SIGS1_cpg),
                           CV1_cpg, A1_cpg))>%
  rename(Caso1CPGlobal=V1)
rownames(t1_cpg)<-c("Esperanza", "varianza", "Desvío",
                  "C.Variación", "I.Asimetría")

t1_cpg

#Variable.....

lambda1_cpv=(((mu*(-(rho-rhoR))+500000)))/
  (rhoR^2*(sum((mu_gamma)*mu_gamma/(var_gamma))))

alpha1_cpv<-alpha_correcto((lambda1_cpv*rhoR*(mu_gamma))/(var_gamma))
alpha1_cpv

```

```

ES1_cpv<-alpha1_cpv%*%mu_gamma
VS1_cpv<-alpha1_cpv^2%*%var_gamma
SIGS1_cpv<-sqrt(VS1_cpv)
CV1_cpv<-SIGS1_cpv/ES1_cpv
A1_cpv<-(alpha1_cpv^3%*%mu3_gamma)/SIGS1_cpv^3

t1_cpv=as.data.frame(rbind(alpha1_cpv[1],
                           alpha1_cpv[2],
                           alpha1_cpv[3],
                           round(ES1_cpv),
                           round(VS1_cpv),
                           round(SIGS1_cpv),
                           CV1_cpv, A1_cpv))%>%rename(Caso1CPVariable=V1)
rownames(t1_cpv)<-c(1,2,3,"Esperanza", "varianza", "Desvío",
                   "C.Variación", "I.Asimetría")

t1_cpv

#Ganancia esperada luego del reaseguro
(rho-rhoR)*sum(mu_gamma)+rhoR*ES1_cpv #467123

#Redistribución.....
#Dado que para la clase de riesgo 3 se obtiene una proporción de retención mayor que 1, se redistribuyen
las proporciones de retención correspondientes a las clases 1 y 2

mu_gamma_nuevo<-c(mu_gamma[1], mu_gamma[2])
var_gamma_nuevo<-c(var_gamma[1], var_gamma[2])

lambda1_cpv_nuevo=(500000-(1+rho)*sum(mu_gamma)+sum(mu_gamma)+rhoR*sum(mu_gamma_nuevo))/
(rhoR^2*(sum((mu_gamma_nuevo)*mu_gamma_nuevo/(var_gamma_nuevo))))

alpha1_cpv_nuevo<-(lambda1_cpv_nuevo*rhoR*(mu_gamma_nuevo))/(var_gamma_nuevo)
alpha1_cpv_nuevo<-c(alpha1_cpv_nuevo, 1)

ES1_cpv_nuevo<-alpha1_cpv_nuevo%*%mu_gamma
VS1_cpv_nuevo<-alpha1_cpv_nuevo^2%*%var_gamma
SIGS1_cpv_nuevo<-sqrt(VS1_cpv_nuevo)
CV1_cpv_nuevo<-SIGS1_cpv_nuevo/ES1_cpv_nuevo
A1_cpv_nuevo<-(alpha1_cpv_nuevo^3%*%mu3_gamma)/SIGS1_cpv_nuevo^3

t1_cpv_nuevo=as.data.frame(rbind(alpha1_cpv_nuevo[1],
                                 alpha1_cpv_nuevo[2],
                                 alpha1_cpv_nuevo[3],
                                 round(ES1_cpv_nuevo),

```

```

        round(VS1_cpv_nuevo),
        round(SIGS1_cpv_nuevo),
        CV1_cpv_nuevo, A1_cpv_nuevo))>%rename(Caso1CPVariable=V1)
rownames(t1_cpv_nuevo)<-c(1,2,3,"Esperanza", "varianza", "Desvío",
        "C.Variación", "I.Asimetría")

t1_cpv_nuevo

#Ganancia esperada luego del reaseguro
(rho-rhoR)*sum(mu_gamma)+rhoR*ES1_cpv_nuevo #500000

# Cuota Parte Caso 2-----
rho<-0.07
rhoR<-0.07

#Global.....

alpha2_cpg= 1+((-rho)*mu + 500000)/(rhoR*mu)
alpha2_cpg<-alpha_correcto(alpha2_cpg)

alpha2_cpg

ES2_cpg=alpha2_cpg*mu
VS2_cpg=(alpha2_cpg^2)*Var
SIGS2_cpg=alpha2_cpg*sqrt(Var)
CV2_cpg=cv
A2_cpg=asim

t2_cpg=as.data.frame(rbind(round(ES2_cpg),
        round(VS2_cpg),
        round(SIGS2_cpg),
        CV2_cpg, A2_cpg))>%rename(Caso2CPGlobal=V1)
rownames(t2_cpg)<-c("Esperanza", "varianza", "Desvío",
        "C.Variación", "I.Asimetría")

t2_cpg

#Variable.....

lambda2_cpv=(((mu*(-(rho-rhoR))+500000))/(rhoR^2*(sum((mu_gamma/n)*mu_gamma/(var_gamma/n))))))

```

```

alpha2_cpv<-alpha_correcto((lambda2_cpv*rhoR*(mu_gamma))/(var_gamma))
alpha2_cpv

ES2_cpv<-alpha2_cpv*mu_gamma
VS2_cpv<-alpha2_cpv^2*var_gamma
SIGS2_cpv<-sqrt(VS2_cpv)
CV2_cpv<-SIGS2_cpv/ES2_cpv
A2_cpv<-(alpha2_cpv^3*mu3_gamma)/SIGS2_cpv^3

t2_cpv=as.data.frame(rbind(alpha2_cpv[1],
                           alpha2_cpv[2],
                           alpha2_cpv[3],
                           round(ES2_cpv),
                           round(VS2_cpv),
                           round(SIGS2_cpv),
                           CV2_cpv,
                           A2_cpv))>%rename(Caso2CPVariable=V1)
rownames(t2_cpv)<-c(1,2,3,"Esperanza", "varianza", "Desvío",
                  "C.Variación", "I.Asimetría")

t2_cpv

#Ganancia esperada luego del reaseguro
(rho-rhoR)*sum(mu_gamma)+rhoR*ES2_cpv #483709.4

#Redistribución.....
#Dado que para la clase de riesgo 3 se obtiene una proporción de retención mayor que 1, se redistribuyen las
proporciones de retención correspondientes a las clases 1 y 2

# mu_gamma_nuevo<-c(mu_gamma[1], mu_gamma[2])
# var_gamma_nuevo<-c(var_gamma[1], var_gamma[2])

lambda2_cpv_nuevo=(500000-(1+rho)*sum(mu_gamma)+sum(mu_gamma)+rhoR*sum(mu_gamma_nuevo))/
(rhoR^2*(sum((mu_gamma_nuevo)*mu_gamma_nuevo/(var_gamma_nuevo))))

alpha2_cpv_nuevo<-(lambda2_cpv_nuevo*rhoR*(mu_gamma_nuevo))/(var_gamma_nuevo)
alpha2_cpv_nuevo<-c(alpha2_cpv_nuevo, 1)

ES2_cpv_nuevo<-alpha2_cpv_nuevo*mu_gamma
VS2_cpv_nuevo<-alpha2_cpv_nuevo^2*var_gamma
SIGS2_cpv_nuevo<-sqrt(VS2_cpv_nuevo)
CV2_cpv_nuevo<-SIGS2_cpv_nuevo/ES2_cpv_nuevo

```

```

A2_cpv_nuevo<-(alpha2_cpv_nuevo^3*%mu3_gamma)/SIGS2_cpv_nuevo^3

t2_cpv_nuevo=as.data.frame(rbind(alpha2_cpv_nuevo[1],
                                alpha2_cpv_nuevo[2],
                                alpha2_cpv_nuevo[3],
                                round(ES2_cpv_nuevo),
                                round(VS2_cpv_nuevo),
                                round(SIGS2_cpv_nuevo),
                                CV2_cpv_nuevo, A2_cpv_nuevo))%>%rename(Caso1CPVariable=V1)

rownames(t2_cpv_nuevo)<-c(1,2,3,"Esperanza", "varianza", "Desvío",
                          "C.Variación", "I.Asimetría")

t2_cpv_nuevo

#Ganancia esperada luego del reaseguro
(rho-rhoR)*sum(mu_gamma)+rhoR*ES2_cpv_nuevo #500000

# Cuota Parte Caso3-----
rho<-0.10
rhoR<-0.07

#Global.....

alpha3_cpg<-1+((-rho)*mu + 500000)/(rhoR*mu)
alpha3_cpg<-alpha_correcto(alpha3_cpg)

alpha3_cpg

ES3_cpg=alpha3_cpg*mu
VS3_cpg=(alpha3_cpg^2)*Var
SIGS3_cpg=alpha3_cpg*sqrt(Var)
CV3_cpg=cv
A3_cpg=asim

t3_cpg=as.data.frame(rbind(round(ES3_cpg),
                            round(VS3_cpg),
                            round(SIGS3_cpg),
                            CV3_cpg, A3_cpg))%>%rename(Caso3CPGlobal=V1)

rownames(t3_cpg)<-c("Esperanza", "varianza", "Desvío",
                  "C.Variación", "I.Asimetría")

t3_cpg

```

```

#Variable.....

lambda3_cpv(((mu*(-(rho-rhoR))+500000)))/(rhoR^2*(sum((mu_gamma/n)*mu_gamma/(var_gamma/n))))

alpha3_cpv<-alpha_correcto((lambda3_cpv*rhoR*(mu_gamma))/(var_gamma))
alpha3_cpv

ES3_cpv<-alpha3_cpv%*%mu_gamma
VS3_cpv<-alpha3_cpv^2%*%var_gamma
SIGS3_cpv<-sqrt(VS3_cpv)
CV3_cpv<-SIGS3_cpv/ES3_cpv
A3_cpv<-(alpha3_cpv^3%*%mu3_gamma)/SIGS3_cpv^3

t3_cpv=as.data.frame(rbind(alpha3_cpv[1],
                           alpha3_cpv[2],
                           alpha3_cpv[3],
                           round(ES3_cpv),
                           round(VS3_cpv),
                           round(SIGS3_cpv),
                           CV3_cpv,
                           A3_cpv))%>%rename(Caso3CPVariable=V1)
rownames(t3_cpv)<-c(1,2,3,"Esperanza", "varianza", "Desvío",
                  "C.Variación", "I.Asimetría")

t3_cpv

#Ganancia esperada luego del reaseguro
(rho-rhoR)*sum(mu_gamma)+rhoR*ES3_cpv #500000

#-----

Tablaglobal<-as.data.frame(rbind(c(alpha1_cpg, alpha2_cpg, alpha3_cpg),
                                cbind(t1_cpg,t2_cpg,t3_cpg)))
Tablavariabile<-as.data.frame(cbind(t1_cpv,t2_cpv,t3_cpv))

Tablavariabile_nuevo<-as.data.frame(cbind(t1_cpv_nuevo,t2_cpv_nuevo,t3_cpv))

#-----

```

```

#                               Excedente-----
#-----

SC=mu_SC*n
SUM_SC=sum(SC) #Suma de capitales asegurados
g=500000 #Ganancia esperada

# Excedente Caso 1-----

rho<-0.07
rhoR<-0.10

#Global.....

R1_exg<-(g-sum((1+rho)*mu_gamma)+sum((1+rhoR)*mu_gamma))/(sum((n/SC)*mu_gamma)*(rhoR))
R1_exg

alpha1_exg<-R1_exg*n/SC #R_j/SI_ij
alpha1_exg

ES1_exg=alpha1_exg*mu_gamma
VS1_exg=(alpha1_exg^2)*var_gamma
SIGS1_exg=sqrt(VS1_exg)
CV1_exg=SIGS1_exg/ES1_exg
A1_exg=(alpha1_exg^3)*mu3_gamma/SIGS1_exg^3

t1_exg=as.data.frame(rbind(R1_exg, round(ES1_exg), round(VS1_exg), round(SIGS1_exg), CV1_exg, A1_exg))>%
  rename(Caso1EXGlobal=V1)
rownames(t1_exg)<-c("R", "Esperanza", "varianza", "Desvío",
  "C.Variación", "I.Asimetría")

t1_exg

# Tabla de líneas.....

lambda1_extl=(g+(rhoR-rho)*sum(q*EX*SC))/
  (rhoR^2*(sum((q*(EX^2)*n)/(EX2-q*(EX^2))))))
lambda1_extl

R1=lambda1_extl*rhoR*(EX/(EX2-q*(EX^2)))
R1

```

```

alpha1_ext1<-R1/(SC/n)
alpha1_ext1<-alpha_correcto(alpha1_ext1)
alpha1_ext1

ES1_ext1<-alpha1_ext1*%mu_gamma
VS1_ext1<-alpha1_ext1*%var_gamma
SIGS1_ext1<-sqrt(VS1_ext1)
CV1_ext1<-SIGS1_ext1/ES1_ext1
A1_ext1<-(alpha1_ext1^3*%mu3_gamma)/SIGS1_ext1^3

t1_ext1=as.data.frame(rbind(R1[1],R1[2],R1[3],round(ES1_ext1), round(VS1_ext1), round(SIGS1_ext1),
                           CV1_ext1, A1_ext1))>%rename(Caso1_ext1=V1)
rownames(t1_ext1)<-c("R_1", "R_2", "R_3", "Esperanza", "varianza", "Desvío",
                   "C.Variación", "I.Asimetría")

t1_ext1

# Redistribución.....
#Dado que para la clase de riesgo 3 se obtiene una proporción de retención mayor que 1, se redistribuyen las
#proporciones de retención correspondientes a las clases 1 y 2

q_nuevo<-q[1:2]
SC_nuevo<-SC[1:2]
EX_nuevo<-EX[1:2]
EX2_nuevo<-EX[1:2]
n_nuevo<-n[1:2]

lambda1_ext1_nuevo=(g-(1+rho)*sum(SC*q*EX)+sum(SC*q*EX)+rhoR*sum(SC_nuevo*q_nuevo*EX_nuevo))/
  (rhoR^2*(sum((q_nuevo*(EX_nuevo^2)*n_nuevo)/(EX2_nuevo-q_nuevo*(EX_nuevo^2))))))

lambda1_ext1_nuevo

R1_nuevo=lambda1_ext1_nuevo*rhoR*(EX_nuevo/(EX2_nuevo-q_nuevo*(EX_nuevo^2)))
R1_nuevo

alpha1_ext1_nuevo<-R1_nuevo/(SC_nuevo/n_nuevo)
alpha1_ext1_nuevo<-c(alpha1_ext1_nuevo, 1)

ES1_ext1_nuevo<-alpha1_ext1_nuevo*%mu_gamma

```

```

VS1_extl_nuevo<-alpha1_extl_nuevo%*%var_gamma
SIGS1_extl_nuevo<-sqrt(VS1_extl_nuevo)
CV1_extl_nuevo<-SIGS1_extl_nuevo/ES1_extl_nuevo
A1_extl_nuevo<-(alpha1_extl_nuevo^3%*%mu3_gamma)/SIGS1_extl_nuevo^3

t1_extl_nuevo=as.data.frame(rbind(R1_nuevo[1],R1_nuevo[2],R1[3],
                                round(ES1_extl_nuevo), round(VS1_extl_nuevo), round(SIGS1_extl_nuevo),
                                CV1_extl_nuevo, A1_extl_nuevo))%>%rename(Caso1_extl_nuevo=V1)
rownames(t1_extl_nuevo)<-c("R_1","R_2","R_3","Esperanza", "varianza", "Desvío",
                          "C.Variación", "I.Asimetría")

t1_extl_nuevo

# Excedente Caso 2-----

rho<-0.07
rhoR<-0.07

#Global.....

R2_exg<-(g-sum((1+rho)*mu_gamma)+sum((1+rhoR)*mu_gamma))/(sum((n/SC)*mu_gamma)*(rhoR))
R2_exg

alpha2_exg<-R2_exg*n/SC #R_j/SI_ij
alpha2_exg

ES2_exg=alpha2_exg%*%mu_gamma
VS2_exg=(alpha2_exg^2)%*%var_gamma
SIGS2_exg=sqrt(VS2_exg)
CV2_exg=SIGS2_exg/ES2_exg
A2_exg=(alpha2_exg^3%*%mu3_gamma)/SIGS2_exg^3

t2_exg=as.data.frame(rbind(R2_exg, round(ES2_exg), round(VS2_exg), round(SIGS2_exg), CV2_exg, A2_exg))%>%
  rename(Caso2EXGlobal=V1)
rownames(t2_exg)<-c("R","Esperanza", "varianza", "Desvío",
                  "C.Variación", "I.Asimetría")

t2_exg

```

```

# Tabla de líneas.....

lambda2_ext1=(g+(rhoR-rho)*sum(q*EX*SC))/
  (rhoR^2*(sum((q*(EX^2)*n)/(EX2-q*(EX^2))))))
lambda2_ext1

R2=lambda2_ext1*rhoR*(EX/(EX2-q*(EX^2)))
R2

alpha2_ext1<-R2/(SC/n)
alpha2_ext1<-alpha_correcto(alpha2_ext1)
alpha2_ext1

ES2_ext1<-alpha2_ext1*%*mu_gamma
VS2_ext1<-(alpha2_ext1^2)*%*var_gamma
SIGS2_ext1<-sqrt(VS2_ext1)
CV2_ext1<-SIGS2_ext1/ES2_ext1
A2_ext1<-(alpha2_ext1^3)*%*mu3_gamma)/SIGS2_ext1^3

t2_ext1=as.data.frame(rbind(R2[1],R2[2],R2[3],round(ES2_ext1), round(VS2_ext1), round(SIGS2_ext1),
  CV2_ext1, A2_ext1))%>%rename(Caso2_ext1=V1)
rownames(t2_ext1)<-c("R_1","R_2","R_3","Esperanza", "varianza", "Desvío",
  "C.Variación", "I.Asimetría")

t2_ext1

# Redistribución.....
#Dado que para la clase de riesgo 3 se obtiene una proporción de retención mayor que 1, se redistribuyen
#las proporciones de retención correspondientes a las clases 1 y 2

# q_nuevo<-q[1:2]
# SC_nuevo<-SC[1:2]
# EX_nuevo<-EX[1:2]
# EX2_nuevo<-EX[1:2]
# n_nuevo<-n[1:2]

lambda2_ext1_nuevo=(g-(1+rho)*sum(SC*q*EX)+sum(SC*q*EX)+rhoR*sum(SC_nuevo*q_nuevo*EX_nuevo))/
  (rhoR^2*(sum((q_nuevo*(EX_nuevo^2)*n_nuevo)/(EX2_nuevo-q_nuevo*(EX_nuevo^2))))))

lambda2_ext1_nuevo

R2_nuevo=lambda2_ext1_nuevo*rhoR*(EX_nuevo/(EX2_nuevo-q_nuevo*(EX_nuevo^2)))

```

```

R2_nuevo

alpha2_ext1_nuevo<-R2_nuevo/(SC_nuevo/n_nuevo)
alpha2_ext1_nuevo<-c(alpha2_ext1_nuevo,1)

ES2_ext1_nuevo<-alpha2_ext1_nuevo*%mu_gamma
VS2_ext1_nuevo<-alpha2_ext1_nuevo*%var_gamma
SIGS2_ext1_nuevo<-sqrt(VS2_ext1_nuevo)
CV2_ext1_nuevo<-SIGS2_ext1_nuevo/ES2_ext1_nuevo
A2_ext1_nuevo<-(alpha2_ext1_nuevo^3*%mu3_gamma)/SIGS2_ext1_nuevo^3

t2_ext1_nuevo=as.data.frame(rbind(R2_nuevo[1],R2_nuevo[2],R2[3],round(ES2_ext1_nuevo), round(VS2_ext1_nuevo), round(SIGS2_ext1_nuevo),
rownames(t2_ext1_nuevo)<-c("R_1","R_2","R_3","Esperanza", "varianza", "Desvío",
"C.Variación", "I.Asimetría")

t2_ext1_nuevo

# Excedente Caso 3-----

rho<-0.10
rhoR<-0.07

#Global.....

R3_exg<-(g-sum((1+rho)*mu_gamma)+sum((1+rhoR)*mu_gamma))/(sum((n/SC)*mu_gamma)*(rhoR))
R3_exg

alpha3_exg<-R3_exg*n/SC #R_j/SI_ij
alpha3_exg

ES3_exg=alpha3_exg*%mu_gamma
VS3_exg=(alpha3_exg^2)*%var_gamma
SIGS3_exg=sqrt(VS3_exg)
CV3_exg=SIGS3_exg/ES3_exg
A3_exg=(alpha3_exg^3*%mu3_gamma)/SIGS3_exg^3

t3_exg=as.data.frame(rbind(R3_exg, round(ES3_exg), round(VS3_exg), round(SIGS3_exg), CV3_exg, A3_exg))>%
  rename(Caso3EXGlobal=V1)

```

```

rownames(t3_exg)<-c("R", "Esperanza", "varianza", "Desvío",
                  "C.Variación", "I.Asimetría")

t3_exg

# Tabla de líneas

lambda3_extl=(g+(rhoR-rho)*sum(q*EX*SC))/
              (rhoR^2*(sum((q*(EX^2)*n)/(EX2-q*(EX^2))))))
lambda3_extl

R3=lambda3_extl*rhoR*(EX/(EX2-q*(EX^2)))
R3

alpha3_extl<-alpha_correcto(R3/(SC/n))
alpha3_extl

ES3_extl<-alpha3_extl*%*%mu_gamma
VS3_extl<-(alpha3_extl^2)*%*%var_gamma
SIGS3_extl<-sqrt(VS3_extl)
CV3_extl<-SIGS3_extl/ES3_extl
A3_extl<-(alpha3_extl^3*%*%mu3_gamma)/SIGS3_extl^3

t3_extl=as.data.frame(rbind(R3[1],R3[2],R3[3],round(ES3_extl), round(VS3_extl), round(SIGS3_extl),
                          CV3_extl, A3_extl))>%rename(Caso3_extl=V1)
rownames(t3_extl)<-c("R_1", "R_2", "R_3", "Esperanza", "varianza", "Desvío",
                  "C.Variación", "I.Asimetría")

t3_extl

#-----

Tabla_exg<-as.data.frame(cbind(t1_exg,t2_exg,t3_exg))
Tabla_extl<-as.data.frame(cbind(t1_extl,t2_extl,t3_extl))
Tabla_extl_nuevo<-as.data.frame(cbind(t1_extl_nuevo,t2_extl_nuevo,t3_extl))

#-----

```

## Construcción de gráficos MBBEFD

```
library(mbbefd)
library(tidyverse)
library(latex2exp)
library(gridExtra)

rm(list = ls())

opciones_graficas<-
  theme(panel.background = element_rect(fill = "gray97"),
        panel.grid.major = element_line(colour = "white"))

margin1 = theme(plot.margin = unit(c(0,1,0,0), "cm"))
margin2 = theme(plot.margin = unit(c(0,0,0,1), "cm"))

vectorx<-as.data.frame(seq(0,1,0.01))%>%rename(x="seq(0, 1, 0.01)")

#.....
# Curvas de exposición ----

G<-function(x,c){
  b<-as.numeric(swissRe(c)[1])
  g<-as.numeric(swissRe(c)[2])
  G<-vector()
  for (i in 1:length(x)){
    if (x[i]==1) {G[i]=1}
    else if (g==1 | b==0){G[i]=x[i]}
    else if (b==1 & g>1){G[i]=(log(1+(g-1)*x[i]))/(log(g))}
    else if (b*g==1 & g>1){G[i]=(1-b^x[i])/(1-b)}
    else if (b>0 & b!=1 & b*g!=1 & g>1){G[i]=log(((g-1)*b+(1-g*b)*b^x[i])/(1-b))/log(g*b)}
  }
  G
}

x0=vectorx%>%mutate(y=G(x,0), c=rep(0))
x1=vectorx%>%mutate(y=G(x,1), c=rep(1))
x2=vectorx%>%mutate(y=G(x,2), c=rep(2))
x3=vectorx%>%mutate(y=G(x,3), c=rep(3))
x4=vectorx%>%mutate(y=G(x,4), c=rep(4))
x5=vectorx%>%mutate(y=G(x,5), c=rep(5))

x=rbind(x0,x1,x2,x3,x4,x5)%>%mutate(c=factor(c))
```

```

rm(x0,x1,x2,x3,x4,x5)

g1<-ggplot(x, aes(x,y, group=c))+
  geom_line(aes(x,y, colour=c))+opciones_graficas+
  scale_x_continuous(labels = function(x) paste0(x*100, "%"))+
  scale_y_continuous(labels = function(x) paste0(x*100, "%"))+
  xlab("Deducible")+
  ylab("Tasa de retención")+
  guides(colour="none")

#.....
# Distribuciones -----

Fgrande<-function(x,c){
  b<-as.numeric(swissRe(c)[1])
  g<-as.numeric(swissRe(c)[2])
  Fgrande<-vector()
  for (i in 1:length(x)){
    if (x[i]==1) {Fgrande[i]=1}
    else if (x<1 & (g==1 | b==0)){Fgrande[i]=0}
    else if (x<1 & b==1 & g>1){Fgrande[i]=1-1/(1+(g-1)*x[i])}
    else if (x<1 & b*g==1 & g>1){Fgrande[i]=1-b^x[i]}
    else if (x<1 & b>0 & b!=1 & b*g!=1 & g>1){Fgrande[i]=1-((1-b)/((g-1)*b^(1-x[i])+(1-g*b)))}
  }
  Fgrande
}

x0=vectorx%>%mutate(y=Fgrande(x,0), c=rep(0))
x1=vectorx%>%mutate(y=Fgrande(x,1), c=rep(1))
x2=vectorx%>%mutate(y=Fgrande(x,2), c=rep(2))
x3=vectorx%>%mutate(y=Fgrande(x,3), c=rep(3))
x4=vectorx%>%mutate(y=Fgrande(x,4), c=rep(4))
x5=vectorx%>%mutate(y=Fgrande(x,5), c=rep(5))

x=rbind(x0,x1,x2,x3,x4,x5)%>%mutate(c=factor(c))
rm(x0,x1,x2,x3,x4,x5)

g2<-ggplot(x, aes(x,y, color=c, group=c))+
  geom_line(aes(x,y, colour=c))+
  opciones_graficas+
  xlab("Tamaño relativo del siniestro")+

```

```

ylab(TeX("F_x(x)"))

grid.arrange(g1+margin1,g2+margin2+ theme(legend.position="none"), ncol=2)

#.....
# Densidades -----

fchica<-function(x,c){
  b<-as.numeric(swissRe(c)[1])
  g<-as.numeric(swissRe(c)[2])
  fchica<-vector()
  for (i in 1:length(x)){
    if (g==1 | b==0){fchica[i]=0}
    else if (b==1 & g>1){fchica[i]=(g-1)/((1+(g-1)*x[i])^2)}
    else if (b*g==1 & g>1){fchica[i]=-log(b)*b^x[i]}
    else if (b>0 & b!=1 & b*g!=1 & g>1){
      fchica[i]=((b-1)*(g-1)*log(b)*b^(1-x[i]))/((g-1)*b^(1-x[i])+(1-g*b)^2)
    }
  }
  fchica
}

x0=vectorx%>%mutate(y=fchica(x,0), c=rep(0))
x1=vectorx%>%mutate(y=fchica(x,1), c=rep(1))
x2=vectorx%>%mutate(y=fchica(x,2), c=rep(2))
x3=vectorx%>%mutate(y=fchica(x,3), c=rep(3))
x4=vectorx%>%mutate(y=fchica(x,4), c=rep(4))
x5=vectorx%>%mutate(y=fchica(x,5), c=rep(5))

#Se realizan dos gráficos para lograr mejor visualización

x_1=rbind(x0,x1,x2)%>%mutate(c=factor(c))
rm(x0,x1,x2)

g3<-ggplot(x_1, aes(x,y, color=c, group=c))+geom_line(size=0.7)+
  opciones_graficas+
  opciones_graficas+
  xlab("Tamaño relativo del siniestro")+
  ylab(TeX("f_x(x)"))+
  scale_color_manual(values = c("#F8766D", "#B79F00", "#00BA38"))

x_2=rbind(x3,x4,x5)%>%mutate(c=factor(c))

```

```

rm(x3,x4,x5)

g4<-ggplot(x_2, aes(x,y, color=c, group=c))+geom_line(size=0.7)+
  opciones_graficas+
  opciones_graficas+
  xlab("Tamaño relativo del siniestro")+
  ylab(TeX("f_x(x)"))+
  scale_color_manual(values = c("#00BFC4", "#619CFF", "#F564E3"))

grid.arrange(g3+margin1,g4+margin2, ncol=2)

ggplot(x_2[%>filter(x<0.1), aes(x,y, color=c, group=c))+geom_line()+
  opciones_graficas+
  opciones_graficas+
  xlab("Tamaño relativo del siniestro")+
  ylab(TeX("f_x(x)"))+
  scale_color_manual(values = c("#00BFC4", "#619CFF", "#F564E3"))

#.....
#Prueba de que la función pMBBEFD genera las mismas distribuciones y densidades

library(mbbefd)
n<-1000

x <- seq(0, 1, 0.01)

for (i in 0:5){
  b<-swissRe(i)[1]
  g<-swissRe(i)[2]
  par(mfrow=c(1,2))
  plot(x, pMBBEFD(x, g,b), type="s",
        main = paste0("Función de distribución para c=", i),
        col="coral",
        ylab = "F(x)",
        cex.main=0.9)
  plot(x, dMBBEFD(x, g,b), type="s",
        main = paste0("Función de densidad para c=", i),
        col="coral",
        ylab = "f(x)",
        cex.main=0.9)
}

```