



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Una contribución al análisis de estructuras pretensadas

Tesis por compendio de artículos

Pablo Martín Páez Gus

Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Noviembre de 2021



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Una contribución al análisis de estructuras pretensadas

Tesis por compendio de artículos

Pablo Martín Páez Gus

Tesis de Doctorado presentada al Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Doctor en Ingeniería Estructural.

Director:

Dr. Ing. Prof. Berardi Sensale-Cozzano

Montevideo – Uruguay

Noviembre de 2021

Páez Gus, Pablo Martín

Una contribución al análisis de estructuras pretensadas / Pablo Martín Páez Gus. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería, 2021.

XXIX, 234 p.: il.; 29, 7cm.

Director:

Berardi Sensale-Cozzano

Tesis de Doctorado – Universidad de la República, Programa en Ingeniería Estructural, 2021.

Referencias bibliográficas: p. 166 – 174.

1. Torres atirantadas, 2. funciones de estabilidad, 3. teoría de segundo orden, 4. no-linealidad geométrica, 5. pretensado no adherente, 6. elementos compuestos, 7. análisis de largo plazo, 8. pérdida de pretensado.
I. Sensale-Cozzano, Berardi, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Ingeniería Estructural. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Ing. Prof. Antonio Aguado de Cea

D.Sc. Prof. Americo Campos Filho

Dr. Ing. Prof. Gonzalo Cetrangolo

Dr. Ing. Prof. Atilio Morquio

Dr. Ing. Prof. Luis Segura

Montevideo – Uruguay

Noviembre de 2021

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mi familia. La realización de este Doctorado no hubiera sido posible sin su apoyo.

Luego quiero agradecer a Jimena Machado, la bibliotecóloga del Instituto de Estructuras y Transporte quien me ha ayudado a conseguir gran parte del material bibliográfico de este trabajo, principalmente por el esfuerzo en conseguir aquel más antiguo que no está disponible en formato digital. Agradecer a Alberto “Beto” Gómez quién nos ha dado una mano con algunos dibujos. Agradecer también a los compañeros que me han dado una mano con LaTeX, principalmente Alfredo Canelas y Agustín Spalvier, pero también a Jorge Pérez.

Un especial agradecimiento para los integrantes del tribunal.

Quiero agradecer a la Comisión Académica de Posgrado por el apoyo brindado a través de la *Beca de apoyo para la finalización de estudios de posgrado en la Udelar*.

Finalmente, agradecer a mi orientador Berardi Sensale-Cozzano.

RESUMEN

El principal objetivo de este trabajo ha sido profundizar en el análisis del comportamiento de estructuras pretensadas con pretensado no adherente. En este sentido el trabajo se ha enfocado en dos tipos de estructuras: las torres atirantadas y las vigas de hormigón pretensadas.

Con respecto a las torres atirantadas, se ha propuesto una nueva forma de análisis, en donde el cálculo de las deformaciones producidas por los efectos de segundo orden se realiza a partir de las funciones de estabilidad. A tales efectos, la torre se modela como una viga-columna equivalente, continua, sobre apoyos elásticos no-lineales, cuyas rigideces axial, flexional y de corte se calculan según sea el patrón de construcción de la torre. Los cables pretensados (los tirantes), son reemplazados por apoyos elásticos no-lineales cuya constante elástica se obtiene a partir de la utilización de módulo de elasticidad secante de los cables. En este sentido se han propuesto dos alternativas para el análisis, una por medio de las funciones de estabilidad basados en la teoría de viga de Euler-Bernoulli y otra basados en el teoría de vigas de Haringx-Timoshenko. En la primera de ellas, la deformación por fuerza cortante es tenida en cuenta mediante una inercia reducida y en la segunda dicho efecto queda contemplado directamente en las ecuaciones que gobiernan el problema.

Con respecto a las vigas de hormigón, este trabajo se centra en las vigas pretensadas con pretensado interior no adherente. El análisis de piezas con pretensado no adherente es inherentemente más complejo que el análisis de piezas con pretensado adherente, ya que, a diferencia del pretensado adherente, en el pretensado no adherente no existe compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado y el hormigón que lo rodea, lo que significa que el acero de pretensado y el hormigón pueden moverse uno con respecto al otro. Luego, la fuerza en el cable no adherente dependerá de la deformación del elemento estructural como un todo. En otras palabras, la fuerza en el cable no adherente sometido a cargas externas es elemento-dependiente en lugar de sección-dependiente.

La principal contribución de este trabajo ha sido proponer fórmulas simplificadas para calcular la pérdida de la fuerza de pretensado en vigas isostáticas

e hiperestáticas con pretensado interior no adherente teniendo en cuenta los efectos reológicos del hormigón, la relajación del acero activo y la presencia de armadura pasiva. La segunda contribución ha sido desarrollar la formulación del Método Paso a Paso y del Módulo Efectivo Ajustado por la Edad (denominado también Método del Coeficiente de Envejecimiento) para el análisis en tiempo de este tipo de vigas. El análisis se ha extendido de vigas simples a vigas compuestas de hormigón con pretensado interior no adherente. También se ha contribuido en una formulación para tener en cuenta el rozamiento del cable a lo largo de las vainas. Por último, se ha propuesto un enfoque basado en el Método de los Elementos Finitos para el análisis a lo largo del tiempo de esta tipología de vigas que tiene en cuenta los efectos reológicos del hormigón, la relajación del acero activo, la presencia de armadura pasiva y el rozamiento del cable.

Palabras clave:

Torres atirantadas, funciones de estabilidad, teoría de segundo orden, no-linealidad geométrica, pretensado no adherente, elementos compuestos, análisis de largo plazo, pérdida de pretensado.

ABSTRACT

The main objective of this work has been to deepen the analysis of the behavior of prestressed structures with unbonded prestressing. In this sense, the work has focused on two types of structures: the cable-stayed masts and the unbonded prestressed concrete beams.

With regard to the cable-stayed masts, a new form of analysis has been proposed, where the calculation of the deformations produced by the second-order effects is carried out from the stability functions. For this purpose, the mast is modeled as an equivalent, continuous beam-column, on non-linear elastic supports, whose axial, flexural and shear stiffnesses are calculated according to the construction pattern of the mast. The prestressed cables (the tie rods) are replaced by non-linear elastic supports whose elastic constant is obtained from the use of the secant modulus of elasticity of the cables. In this sense, two alternatives have been proposed for the analysis, one using the stability functions based on the Euler-Bernoulli beam theory and the other based on the Haringx-Timoshenko beam theory. In the first one, shear force deformation is taken into account through reduced inertia and in the second, this effect is directly contemplated in the equations that govern the problem.

With regard to concrete beams, this work focuses on prestressed beams with unbonded internal prestressing. The analysis of members with unbonded prestressing is inherently more complex than the analysis of members with bonded prestressing, since, unlike the bonded prestressing, in the unbonded prestressing there is no compatibility between the prestressing steel and the surrounding concrete, which means that prestressing steel and concrete can move relative to each other. Then, the force in the unbonded tendon will depend on the deformation of the structural element as a whole. In other words, the force in the unbonded tendon subjected to external loads is element-dependent rather than section-dependent.

The main contribution of this work has been to propose simplified equations to calculate the prestress loss in isostatic and hyperstatic beams with unbonded internal prestressing, taking into account the rheological effects of concrete, the relaxation of the prestressing steel and the presence of non-prestressed steel

reinforcement. The second contribution has been to develop the formulation of the Step-by-Step Method and the Age-Adjusted Effective Modulus (also known as the Aging Coefficient Method) for the time analysis of this type of beams. The analysis has been extended from simple beams to composite concrete beams with unbonded internal prestressing. It has also contributed a formulation to account for the friction between the tendons and their duct. Finally, an approach based on the Finite Element Method has been proposed for the analysis over time of this type of beam that takes into account the rheological effects of concrete, the relaxation of the prestressing steel and the presence of the reinforcing steel and the friction between the tendons and their duct.

Keywords:

Guyed towers, stability functions, second order analysis, geometric non-linearity, unbonded prestressing, composite elements, long-term analysis, prestress loss.

Lista de símbolos

Lista de los símbolos más relevantes de la tesis.

- A Área. 12
- A_d Área de la sección de la barra diagonal. 12
- A_c Área de la sección de hormigón. 40
- A_{cb} Área de la sección del cable. 15
- A_h Área de la sección de la barra horizontal. 12
- \hat{A} Parámetro. 182
- A_m Área de la sección de la barra del montante. 12
- A_p Área de la sección de la armadura activa. 37
- \tilde{A} Constante de integración. 182
- $[B_a]$ Matriz de deformación del elemento. 58
- $\hat{B}_{c,D}$ Momento estático del área no fisurada del hormigón de la losa. 85
- $\hat{B}_{c,G}$ Momento estático del área no fisurada del hormigón de la viga 85
- $[B_f]$ Matriz de curvatura del elemento. 57
- \hat{B} Parámetro. 182
- \tilde{B} Constante de integración. 182
- C Función de estabilidad. 19
- \hat{C} Parámetro. 182
- \tilde{C} Constante de integración. 182
- D Subíndice que denota la losa en vigas compuestas. 83
- $[D^{(e)}]$ Vector de desplazamientos nodales. 55
- ΔF_c Variación en la fuerza resultante en el hormigón. 39
- ΔP_p Variación en la fuerza en el acero de pretensado. 39
- ΔP_{rs} Variación en la fuerza en el acero (pasivo y activo). 39
- $\Delta \sigma_{pr}$ Relación intrínseca. 36
- $\Delta \sigma_{ps}$ Variación en la tensión en el acero de pretensado. 37

\hat{D} Parámetro. 182
 \tilde{D} Constante de integración 182
 E Módulo de elasticidad. 179
 E_R Función de relajación del hormigón. 35
 E_c Módulo de elasticidad del hormigón. 34
 E_{cb} Módulo de elasticidad del material del cable. 11
 \bar{E}_c Módulo de elasticidad ajustado por la edad. 35
 $E_{ct}(t, t_0)$ Módulo de elasticidad ajustado por la edad. 125
 E_s Módulo de elasticidad del acero pasivo. 36
 $E_{\text{sec},1}$ Módulo de elasticidad secante del cable. 15
 $E_{\text{sec},2}$ Módulo de elasticidad secante del cable. 15
 F Fuerza. 15
 $F_{p,\hat{i}}$ Fuerza axial nodal de equilibrio del cable. 130
 $F_{p,\hat{j}}$ Fuerza axial nodal de equilibrio del cable. 130
 G Módulo de deformación por cortante. Subíndice en vigas compuestas. 181
 H_j Fuerza resultante horizontal. 18
 I_c Inercia de una sección de hormigón. 40
 $\hat{I}_{c,D}(x)$ Momento de inercia del área no fisurada del hormigón de la losa 85
 $\hat{I}_{c,G}(x)$ Momento de inercia del área no fisurada del hormigón de la viga. 85
 I_y Inercia respecto al eje y 179
 J Función de fluencia. 79
 $[K_b^{(e)}]$ Matriz de rigidez del elemento de viga 52
 $[K_s^{(e)}]_{\text{trans}}$ Matriz transformada 53
 L Longitud 181
 M Momento flector. 19
 M_A Momento flector aplicado en el extremo A de la viga. 181
 M_B Momento flector aplicado en el extremo B de la viga 181
 M_F Momento de empotramiento perfecto para una viga - columna. 21
 $M_{F,A}$ Momento de empotramiento perfecto del extremo A para una viga - columna. 188
 $M_{F,B}$ Momento de empotramiento perfecto del extremo B para una viga - columna. 188
 M_S Momento flector en una sección de la viga. Momento flector secundario de pretensado. 184

M_c Momento flector resistido por el hormigón. 44
 $M_{e,j}$ Momento debido a la excentricidad de los cables. 19
 M_{ext} Momento flector externo en una sección. 44
 \hat{M} Momento flector debido a la carga externa. 123
 M_p Momento flector resistido por el acero activo no adherente. 44
 M_s Momento flector resistido por el acero pasivo. 44, 123
 N_H Componente horizontal de la fuerza de tracción. 193
 N_c Fuerza axial resistida por el hormigón. 44
 N_{ext} Fuerza axial externa en una sección. 44
 N_p Fuerza en el cable de pretensado. 37, 44
 N_s Fuerza en el acero pasivo. 44
 Ω_{red} Sección reducida. 21
 Ω_x Parámetro. 122
 P Fuerza axial de compresión 21, 181
 Π_x Función. 120
 Ψ Relación de flechas. Función relativa a la pérdida por rozamiento. 120
 P_x Fuerza puntual horizontal. 17
 P_z Fuerza puntual vertical. 17
 $P_{z0,j}$ Fuerza resultante vertical. 18
 $P_{z,j}$ Fuerza resultante vertical. 19
 R_A Reacción vertical en el extremo A . Rigidez axial. 47
 R_B Reacción vertical en el extremo B . Rigidez relativa al momento de primer orden. 47
 R_I Rigidez flexional. 47
 S Función de estabilidad. 19
 T_0 Fuerza. 11
 T_1 Fuerza. 11
 $[T_2]$ Matriz de transformación. 55
 T' Fuerza. 197
 T'' Fuerza. 197
 $[T_s]$ Matriz de transformación. 53
 U Coordenada. 15
 V Fuerza cortante. 178
 V_S Cortante en una sección de la viga. 184

W_n Reacción hiperestática. 91
 $[a_a^{(e)}(t)]$ Vector de desplazamientos axiales nodales. 58
 $[a_f^{(e)}(t)]$ Vector de desplazamientos nodales en flexión. 57
 α Ángulo. 15, 38
 b Ancho de la sección. 181
 β Parámetro de pandeo. 20
 c_{cb} Proyección horizontal de l_{cb} . 11, 18
 χ Coeficiente de envejecimiento. 35
 χ_r Coeficiente de relajación reducida. 37
 δ Alargamiento del cable. 11
 δ_1 Alargamiento del cable. 14
 δ_2 Alargamiento del cable. 14
 δ_A Desplazamiento vertical del extremo A . 181
 δ_B Desplazamiento vertical del extremo B . 181
 d_p Canto útil del acero de pretensado. 38
 e_{cp} Excentricidad del cable. 40
 \hat{e}_{cp} Excentricidad debida al momento secundario de pretensado. 125
 e_s Excentricidad del acero pasivo. 53
 $[f_{a,cr}^{(e)}(t_j)]$ Vector de las fuerzas nodales equivalentes debidas a la fluencia de la fuerza axial. 138
 $[f_a^{(e)}(t_0)]$ Vector de fuerzas nodales equivalentes debidas a cargas axiales. 58
 f_{ck} Resistencia característica de compresión del hormigón. 35
 f_{cm} Resistencia media a compresión del hormigón. 79
 f_{ctm} Resistencia media a tracción del hormigón. 79
 $[f_{f,cr}^{(e)}(t_j)]$ Vector de las fuerzas nodales equivalentes debidas a la fluencia del momento flector. 136
 $[f_f^{(e)}(t_0)]$ Vector de fuerzas nodales equivalentes debidas a cargas transversales. 57
 f_{ptk} Resistencia característica a tracción del acero. 37
 $f_{r_{ij}}$ Fuerza de fricción por unidad de longitud. 130
 γ Ángulo. 179
 γ_{cb} Ángulo que forma el cable con la horizontal. 11
 g_{cb} Peso por unidad de longitud del cable. 11
 h_j Distancia entre niveles de tirantes. 17

$h_{p,i}$ Fuerza horizontal uniformemente distribuida. 133
 h_t Altura total del mástil. 17
 k Parámetro. Coeficiente parásito. 120
 κ Curvatura. 44
 k_{eq} Constante elástica equivalente. 15
 l Longitud. Longitud de la viga. 38
 λ_x Parámetro. 122
 l_{cb} Longitud de cuerda del cable. 11
 l_p Longitud del acero de pretensado. 38
 $l_{p,0}$ Longitud inicial del acero de pretensado. 38
 m_p Capas de acero activo no adherente. 42
 $m_{p,i}$ Momento flector uniformemente distribuido. 133
 m_s Capas de acero pasivo. 42
 μ Momento estático de primer orden. Coeficiente de rozamiento. 120
 n Niveles de tirantes. Parámetro. 17
 ϕ Ángulo. Coeficiente de fluencia. 80
 ψ Factor de reducción por cortante. 21
 p_x Cargas distribuidas horizontales. 17
 p_z Cargas distribuidas verticales. 17
 q Carga uniformemente distribuida. 181
 $[q_a^{(e)}(t)]$ Vector de fuerzas axiales nodales en equilibrio. 58
 $[q_f^{(e)}(t)]$ Vector de fuerzas nodales en equilibrio en flexión. 57
 $q_{p,i}$ Fuerza vertical uniformemente distribuido. 133
 σ_0 Tensión. 11, 13
 σ_1 Tensión. 11, 13
 σ_c Tensión en el hormigón. 34
 σ_p Tensión en el acero activo. 37
 $\sigma_{p,0}$ Tensión inicial en el acero de pretensado. 37
 t Tiempo. 34
 t_0 Edad del hormigón al momento de aplicar la primer carga. 34
 τ Tiempo. 80
 t_s Edad del hormigón al inicio de la retracción. 34
 u Desplazamiento horizontal. 13
 ε Deformación unitaria. 38

ε_T Deformación unitaria de origen térmico. 79
 $\varepsilon_{c,p}$ Deformación unitaria en el hormigón. 38
 $\varepsilon_{c,p,0}$ Deformación unitaria en el hormigón para el estado de referencia. 38
 ε_{cr} Deformación unitaria debida a la fluencia. 34
 ε_e Deformación unitaria instantánea. 34
 ε_r Deformación unitaria a nivel de un punto de referencia O . 44
 ε_{sh} Deformación unitaria debida a la retracción. 34
 φ Ángulo. Coeficiente de fluencia. 12, 34
 v_j Elástica para el nivel j de tirantes. 18
 w Desplazamiento vertical. 13
 w_0 Desplazamiento vertical. 178
 x Coordenada. 38
 ξ Coordenada local normalizada. Constante de integración. 57
 $x_{i,u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo i . 54
 $x_{\hat{i},u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo \hat{i} . 54
 $x_{j,u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo j . 54
 $x_{\hat{j},u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo \hat{j} . 54
 y Coordenada. 179
 $y_{i,u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo i . 54
 $y_{\hat{i},u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo \hat{i} . 54
 $y_{j,u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo j . 54
 $y_{\hat{j},u}^{(g)}$ Coordenada global del nodo \hat{j} . 54
 $z_{cb,j}$ Altura del anclaje del cable del nivel j . 18
 z_{cb} Altura del anclaje del cable. 198

Tabla de contenidos

| | |
|--|---------------|
| Lista de símbolos | XV |
| Lista de figuras | XXI |
| Lista de tablas | XXVIII |
| 1 Presentación del problema y motivación | 1 |
| 1.1 Introducción | 1 |
| 1.2 Objetivos generales | 3 |
| 1.3 Principales componentes del estudio | 3 |
| 2 Análisis de mástiles atirantados mediante las funciones de estabilidad basadas en la viga-columna de Timoshenko | 6 |
| 2.1 Introducción | 6 |
| 2.2 Las torres atirantados | 9 |
| 2.3 Modelo de la torre: propiedades de la viga-columna equivalente . | 10 |
| 2.4 El modelo de los tirantes | 11 |
| 2.4.1 El cable elástico: módulo de elasticidad secante | 11 |
| 2.4.2 El sistema de cables: constante elástica equivalente . . . | 13 |
| 2.5 Método propuesto | 17 |
| 2.5.1 Ecuaciones pendiente-deflexión basadas en la viga-columna de Timoshenko: “el enfoque modificado” | 19 |
| 2.6 Análisis de la estructura | 21 |
| 2.6.1 Obtención de la configuración deformada: análisis de segundo orden método iterativo | 23 |
| 2.7 Caso de estudio: comparación entre el método de elementos finitos y el método propuesto | 24 |
| 2.7.1 Análisis, discusión y comparación de resultados | 26 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.8 | Conclusiones | 26 |
| 3 | Predicción mejorada de la pérdida de pretensado a largo plazo en elementos de hormigón con pretensado interior no adherente | 30 |
| 3.1 | Introducción | 30 |
| 3.2 | Ecuaciones constitutivas de los materiales: comportamiento instantáneo y diferido | 33 |
| 3.2.1 | Hormigón | 33 |
| 3.2.2 | Acero pasivo | 36 |
| 3.2.3 | Acero de pretensado | 36 |
| 3.3 | Condiciones de compatibilidad para el acero de pretensado no adherente | 37 |
| 3.4 | Análisis a lo largo del tiempo de vigas con pretensado interior no adherente: ecuación propuesta para calcular la pérdida de pretensado | 38 |
| 3.4.1 | Vigas isostáticas con cable recto y armadura pasiva constante | 40 |
| 3.4.2 | Trazado genérico de los cables: Vigas isostáticas | 42 |
| 3.5 | Generalización del Método de Paso a Paso y del módulo efectivo ajustado por la edad | 42 |
| 3.5.1 | Método Paso a Paso | 42 |
| 3.5.2 | Método del módulo efectivo ajustado por la edad | 48 |
| 3.6 | Implementación de un algoritmo computacional para obtener la pérdida de pretensado no adherente mediante el Método Paso a Paso en vigas isostáticas | 50 |
| 3.7 | Enfoque de elementos finitos | 51 |
| 3.7.1 | Análisis de corto plazo: matriz de rigidez del elemento de viga de Navier-Bernoulli y del acero pasivo | 52 |
| 3.7.2 | Acero de pretensado no adherente | 54 |
| 3.7.3 | Análisis de largo plazo utilizando el método del módulo efectivo ajustado por la edad | 56 |
| 3.8 | Aplicación | 59 |
| 3.8.1 | Ejemplo 1: vigas de hormigón de sección rectangular y cables rectos no adherentes | 59 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.8.2 | Ejemplo 2: viga de hormigón de sección rectangular y cables no adherentes de trazado curvo | 63 |
| 3.8.3 | Ejemplo 3: viga I de hormigón con trazado curvo de los cables | 66 |
| 3.8.4 | Ejemplo 4: influencia del acero pasivo en la pérdida de pretensado. | 70 |
| 3.9 | Conclusiones | 73 |
| 4 | Análisis en servicio de elementos compuestos de hormigón con pretensado interior no adherente bajo cargas de corta y larga duración | 77 |
| 4.1 | Introducción | 77 |
| 4.2 | Relaciones constitutivas de los materiales | 79 |
| 4.2.1 | Hormigón | 79 |
| 4.2.2 | Acero activo y pasivo | 80 |
| 4.2.3 | Contribución del hormigón entre fisuras | 81 |
| 4.3 | Aplicación del Método Paso a Paso a vigas compuestas con pretensado interior no adherente | 82 |
| 4.3.1 | Vigas estáticamente determinadas | 82 |
| 4.3.2 | Vigas continuas | 90 |
| 4.4 | Implementación computacional | 92 |
| 4.5 | Breve descripción de las pérdidas instantáneas | 94 |
| 4.6 | Validación | 94 |
| 4.6.1 | Ejemplo 1 | 95 |
| 4.6.2 | Ejemplo 2 | 98 |
| 4.6.3 | Ejemplo 3 | 99 |
| 4.6.4 | Ejemplo 4 | 103 |
| 4.6.5 | Ejemplo 5 | 104 |
| 4.7 | Validación estadística de la formulación propuesta | 110 |
| 4.8 | Conclusiones | 112 |
| 5 | Análisis a lo largo del tiempo de vigas de hormigón con pretensado adherente simplemente apoyadas y continuas | 114 |
| 5.1 | Introducción | 114 |
| 5.2 | Ecuaciones constitutivas instantáneas y de largo plazo de los materiales | 117 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.3 | Ecuación simplificada para estimar la pérdida de pretensado en vigas continuas con pretensado interior no adherente | 122 |
| 5.4 | Formulación mediante elementos finitos | 126 |
| 5.4.1 | Análisis instantáneo | 128 |
| 5.4.2 | Acero de pretensado no adherente | 130 |
| 5.4.3 | Análisis de largo plazo utilizando el Método de Paso a Paso | 135 |
| 5.5 | Validación y ejemplos numéricos | 140 |
| 5.5.1 | Ejemplo 1: ensayo de Breckenridge y Bugg | 140 |
| 5.5.2 | Ejemplo 2: viga continua con pretensado interior no adherente | 142 |
| 5.5.3 | Ejemplo 3: viga continua con pretensado interior no adherente | 146 |
| 5.5.4 | Ejemplo 4: losa unidireccional continua con pretensado interior no adherente | 154 |
| 5.6 | Conclusiones | 159 |
| 6 | Conclusiones finales | 162 |
| | Bibliografía | 166 |
| | Glosario | 174 |
| | Apéndices | 175 |
| | Apéndice 1 Teorías de vigas y de vigas-columna: Euler-Bernoulli y Timoshenko | 176 |
| 1.1 | Introducción | 176 |
| 1.2 | Teoría de vigas de Euler-Bernoulli | 178 |
| 1.3 | Teoría de vigas de Timoshenko | 179 |
| 1.4 | Análisis de la viga-columna bajo las hipótesis de Euler-Bernoulli | 181 |
| 1.5 | Análisis de la viga-columna bajo las hipótesis de Haringx-Timoshenko | 183 |
| 1.6 | Momentos de empotramiento perfecto para las vigas-columna . . | 186 |
| 1.7 | Ecuaciones pendiente - deflexión con fuerza axial de compresión | 187 |
| | Apéndice 2 Modelo alternativo para la torre: teoría de viga-columna de Euler-Bernoulli | 190 |
| 2.1 | Propiedades de la viga-columna equivalente | 190 |

| | | |
|------------|--|-----|
| 2.1.1 | Obtención del momento de inercia reducido | 190 |
| Apéndice 3 | Modelo matemático de los tirantes | 192 |
| 3.1 | El cable flexible e inextensible: obtención de la ecuación de la catenaria | 192 |
| 3.2 | Longitud del cable | 196 |
| 3.3 | Alargamiento del cable elástico | 196 |
| 3.4 | Fuerza transmitida por los cables al mástil debido al desplazamiento | 197 |
| Apéndice 4 | Métodos propuestos para el análisis de mástiles atirantados | 199 |
| 4.1 | Introducción | 199 |
| 4.2 | Análisis de la estructura | 201 |
| 4.3 | Obtención de la configuración deformada: análisis de segundo orden método iterativo | 205 |
| 4.4 | Casos de estudio: comparación entre el método de los elementos finitos y el método propuesto | 207 |
| 4.4.1 | Torre de 150 metros: aplicando la teoría de Euler-Bernoulli | 208 |
| 4.4.2 | Torre de 120 metros: aplicando la teoría de Haringx - Timoshenko | 212 |
| 4.4.3 | Análisis discusión y comparación de resultados | 214 |
| 4.5 | Conclusiones parciales: comparación entre los métodos propuestos | 215 |
| Apéndice 5 | Breve descripción de los métodos para el análisis estructural de los efectos de la fluencia | 218 |
| 5.1 | Método del Módulo Efectivo | 219 |
| 5.2 | Método de la Tasa de Fluencia | 220 |
| 5.3 | Método de la Tasa de Flujo | 224 |
| 5.4 | Método de Dischinger Mejorado | 225 |
| 5.5 | Método de Paso a Paso | 228 |
| 5.6 | Método de Módulo Efectivo Ajustado por la Edad | 228 |
| Apéndice 6 | Diagramas de flujo | 231 |
| 6.1 | Programa para mástiles atirantados | 231 |
| 6.2 | Programa vigas con pretensado interior no adherente | 231 |

Lista de figuras

| | | |
|------|--|----|
| 2.1 | Configuraciones típicas de reticulado en una de las caras de la torre. | 11 |
| 2.2 | Cable inclinado sometido al peso propio: relación entre la deformación y la fuerza aplicada en la dirección de la cuerda. | 13 |
| 2.3 | Curva módulo de elasticidad secante vs. tensión en el cable. Tomando $E_{cb} = 185$ GPa y $\sigma_0 = 0.1 \cdot f_u = 140$ MPa. | 14 |
| 2.4 | Sistema plano simétrico, formado por el mástil y dos cables. Configuración deformada al aplicar una carga horizontal F en el extremo superior. | 15 |
| 2.5 | Curva fuerza vs. desplazamiento del cable con origen en la condición inicial de tensado (Adaptada de Gimsing y Georgakis, 2012) | 16 |
| 2.6 | Sistema tridimensional formado por el mástil y tres cables de igual longitud de cuerda e igual inclinación. | 17 |
| 2.7 | a) Acciones exteriores sobre el mástil atirantado. b) Modelo matemático de cálculo, configuración deformada. | 18 |
| 2.8 | Configuración deformada de la viga-columna continua sobre apoyos elásticos discretos para las barras entre los nudos $j - 1$, j y $j + 1$. Diagramas de cuerpo libre para el planteamiento de las ecuaciones de pendiente - deflexión. | 20 |
| 2.9 | Modelo de reticulado espacial de la torre atirantada de 120 m de altura en FEM. Configuración inicial: cables tensados al 10% de la tensión de rotura. (Observar la configuración catenaria de los cables.) | 25 |
| 2.10 | Torre 120m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM:retic, con la base de la torre articulada. | 26 |

| | |
|--|----|
| 2.11 Torre 120m: diagrama de fuerza directa para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada. | 27 |
| 2.12 Torre 120m: diagrama de momento flector para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada. | 27 |
| 3.1 Sección transversal: viga estáticamente determinada con pretensado interior no adherente y acero pasivo de refuerzo. | 39 |
| 3.2 Sección transversal y disposición del acero pasivo una viga de hormigón pretensada. | 43 |
| 3.3 Modelo estructural para el enfoque basado en elementos finitos. | 54 |
| 3.4 Variables nodales de la viga de Navier-Bernoulli, elemento de barra y de cable, y la relación entre ellos. | 55 |
| 3.5 Sección transversal de la viga ensayada por Lan et al. (2013). . . | 60 |
| 3.6 Geometría de la viga PC2 ensayada por Guo et al. (2018). . . . | 64 |
| 3.7 Sección transversal de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964). | 68 |
| 3.8 Representación esquemática del trazado de los cables de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964). | 68 |
| 3.9 Geometría y sección transversal de la viga PP3R2-3 ensayada por H. Harajli (1992). | 71 |
| 3.10 Estudio de la influencia de la cantidad del acero pasivo sobre la pérdida de pretensado. | 72 |
| 3.11 Fuerza de pretensado a $t = 10000$ días en función de la sección del acero pasivo de refuerzo inferior $A_{s(2)}$ con $A_{s(1)} = 0$ | 72 |
| 3.12 Fuerza de pretensado a $t = 10000$ días en función del área del acero pasivo de refuerzo superior $A_{s(1)}$ con $A_{s(2)} = 200 \text{ mm}^2$. . . | 74 |
| 3.13 Flecha a $t = 10000$ días en función del área del acero pasivo superior $A_{s(1)}$ con $A_{s(2)} = 200 \text{ mm}^2$ | 74 |
| 4.1 Escala temporal de un procedimiento general de construcción del tablero de un puente con vigas pretensadas. | 82 |
| 4.2 a) Sección de la viga, secciones de acero pasivo y activo no adherente. Ejes de referencia. b) Sección de la viga compuesta. Áreas de hormigón no fisuradas. | 83 |
| 4.3 Sección de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964). | 96 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.4 | Esquema del trazado de las barras de pretensado en las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964). | 96 |
| 4.5 | Evolución de la tensión en el hormigón en la sección central de la viga para el Caso N °3. | 98 |
| 4.6 | Evolución de la tensión en el hormigón en la construcción compuesta a diferentes edades. | 99 |
| 4.7 | Viga YLB2 ensayada por Lou et al. (2013). | 101 |
| 4.8 | Deformación vertical $w(x)$ (z positivo hacia abajo). | 101 |
| 4.9 | Diagrama de momentos flectores (momentos flectores positivos traccionan las fibras inferiores). | 103 |
| 4.10 | Evolución de las tensiones en la sección ubicada en $x = 2.76$ m. | 105 |
| 4.11 | Evolución de las tensiones en la sección sobre el apoyo, $x = 4.80$ m. | 105 |
| 4.12 | Deformación vertical $w(x)$ (z positivo hacia abajo). | 106 |
| 4.13 | Diagrama de momentos flectores (momentos flectores positivos traccionan las fibras inferiores). | 106 |
| 4.14 | Losa unidireccional de tres vanos. | 107 |
| 4.15 | Deformación vertical de la losa unidireccional sometida a su peso propio. | 108 |
| 4.16 | Momento flector de la losa unidireccional sometida a su peso propio. | 108 |
| 4.17 | Deformación vertical de la losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta. | 109 |
| 4.18 | Momento flector de la losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta. | 109 |
| 5.1 | Sección transversal de la viga. | 123 |
| 5.2 | Análisis de las fuerzas internas a lo largo del tiempo en una viga continua con pretensado interior no adherente: a) fuerzas internas en el tiempo t_0 ; b) fuerzas internas en el tiempo $t > t_0$. | 124 |
| 5.3 | Viga continua de hormigón con pretensado interior no adherente, con trazado genérico del cable y refuerzo de acero: discretización por elementos finitos. $x^{(l)}$ y $z^{(l)}$ son ejes locales del elemento de viga y $l^{(e)}$ y $\alpha^{(e)}$ son la longitud del elemento de viga y el ángulo del segmento de cable (positivo como se muestra), respectivamente. | 127 |

| | | |
|------|---|-----|
| 5.4 | Convención de signos para los grados de libertad locales del elemento de barra genérico. | 128 |
| 5.5 | Discretización del i -ésimo elemento de viga entre los nodos i y j : a) segmento de cable sometido a fuerzas nodales axiales y una carga axial distribuida; b) fuerzas internas del cable; c) fuerzas y momentos equivalentes del cable. | 131 |
| 5.6 | Relación entre las variables nodales. | 132 |
| 5.7 | Sección transversal y disposición del acero pasivo en las vigas I ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964). | 141 |
| 5.8 | Flecha en función de tiempo después del tensado. | 143 |
| 5.9 | Pérdida de pretensado en función del tiempo después del tensado. | 143 |
| 5.10 | Espécimen ensayado por Burns et al. (1991). Esquema de la disposición del acero pasivo y el acero de pretensado. | 144 |
| 5.11 | Caso No. 1: diagrama de desplazamiento vertical instantáneo y diferido. | 146 |
| 5.12 | Caso No. 1: diagrama de momento flector instantáneo y diferido. | 147 |
| 5.13 | Caso No. 1: fuerza de pretensado en función de la distancia al momento de tensado y en el largo plazo. | 147 |
| 5.14 | Caso No. 2: diagrama de deformación vertical a 28, 42 y 10000 días. | 148 |
| 5.15 | Caso No. 2: diagrama de momento flector a 28, 42 y 10000 días. | 148 |
| 5.16 | Caso No. 2: fuerza de pretensado en función de la distancia a 28, 42 y 10000 días. | 149 |
| 5.17 | Viga YLB2 ensayada por Lou et al. Lou et al. 2013. | 150 |
| 5.18 | Diagrama de deformación vertical: viga YLB2 sometida a su peso propio (R: rozamiento). | 151 |
| 5.19 | Diagrama de momento flector: viga YLB2 sometida a su peso propio (R: rozamiento). | 151 |
| 5.20 | Fuerza de pretensado en función de la distancia: viga YLB2 sometida a su peso propio (R: rozamiento). | 152 |
| 5.21 | Diagrama de deformación vertical: viga YLB2 sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento). | 152 |
| 5.22 | Diagrama de momento flector: viga YLB2 sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento). | 153 |
| 5.23 | Fuerza de pretensado en función de la distancia: viga YLB2 sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento). | 153 |

| | | |
|------|--|-----|
| 5.24 | Geometría esquemática de la losa unidireccional continua. | 155 |
| 5.25 | Diagrama de deformación vertical: losa unidireccional sometida a su peso propio (R: rozamiento). | 156 |
| 5.26 | Diagrama de momento flector: losa unidireccional sometida a su peso propio (R: rozamiento). | 156 |
| 5.27 | Fuerza de pretensado en función de la distancia: losa unidireccional sometida a su peso propio (R: rozamiento). | 157 |
| 5.28 | Diagrama de deformación vertical: losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento). | 157 |
| 5.29 | Diagrama de momento flector: losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento). | 158 |
| 5.30 | Fuerza de pretensado en función de la distancia: losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento). | 158 |
| | | |
| 1.1 | Desplazamientos, giros y fuerzas internas en un elemento de viga de Euler-Bernoulli. | 179 |
| 1.2 | Desplazamientos, giros y fuerzas internas en un elemento de viga de Timoshenko. | 180 |
| 1.3 | Viga - columna isostática: configuración deformada bajo la acción de cargas externas. | 182 |
| 1.4 | Viga - columna de Haringx - Timoshenko. <i>a)</i> Cargas externas; <i>b)</i> Diagrama de cuerpo libre y fuerzas internas. | 184 |
| 1.5 | Viga - columna empotrada y sometida a una carga uniformemente distribuida. | 186 |
| 1.6 | Convención de signos para los giros y los momentos de extremo; y para las reacciones verticales. | 187 |
| | | |
| 2.1 | Viga simplemente apoyada de luz de vano L , sometida a momentos de extremo M_i y M_j y a una carga uniformemente distribuida q | 191 |
| | | |
| 3.1 | Cable flexible e inextensible sometido al peso propio. | 192 |
| 3.2 | Elemento diferencial en equilibrio del cable flexible e inextensible sometido al peso propio. | 193 |
| 3.3 | Sistema tridimensional formado por el mástil y tres cables de igual longitud de cuerda e igual inclinación. | 198 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.1 | a) Acciones exteriores sobre el mástil atirantado. b) Modelo matemático de cálculo, configuración deformada. | 200 |
| 4.2 | Configuración deformada de la viga – columna continua sobre apoyos elásticos discretos para las barras entre los nudos $j - 1$, j y $j + 1$. Diagramas de cuerpo libre para el planteamiento de las ecuaciones de pendiente - deflexión. | 202 |
| 4.3 | Modelo de reticulado espacial de la torre atirantada de 150 m de altura en FEM. Configuración inicial: cables tensados al 10 % de la tensión de rotura. (Observar la configuración catenaria de los cables.) | 208 |
| 4.4 | Torre 150m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col, con la base de la torre empotrada. | 209 |
| 4.5 | Torre 150m: diagrama de fuerza directa para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre empotrada. | 210 |
| 4.6 | Torre 150m: diagrama de momento flector para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre empotrada. | 210 |
| 4.7 | Torre 150m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM:retic y FEM: viga-col, con la base de la torre articulada. | 211 |
| 4.8 | Torre 150m: Diagrama de fuerza directa para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre articulada. | 211 |
| 4.9 | Torre 150m: diagrama de momento flector para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre articulada. | 212 |
| 4.10 | Torre 120m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM:retic, con la base de la torre articulada. | 213 |
| 4.11 | Torre 120m: diagrama de fuerza directa para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada. | 213 |

| | | |
|------|--|-----|
| 4.12 | Torre 120m: diagrama de momento flector para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada. | 214 |
| 5.1 | Tensión en el hormigón bajo deformación unitaria constante. La tensión inicial de 2000 psi (13.79 MPa) causó una deformación unitaria inmediata de 36×10^{-5} la que se mantuvo constante durante 140 días. Tomada de A. Ross (1958). | 221 |
| 5.2 | Deformación unitaria en el hormigón sometido a una historia creciente de tensiones. Tomada de A. Ross (1958). | 222 |
| 5.3 | Deformación unitaria en el hormigón sometido a una historia decreciente de tensiones. Tomada de A. Ross, 1958. | 223 |
| 5.4 | Representación esquemática del coeficiente de fluencia de acuerdo al Método de la Tasa de Fluencia. | 224 |
| 5.5 | Deformación unitaria en función del tiempo debida a una tensión unitaria mantenida constante entre t_0 y t_1 , de acuerdo a la función de fluencia propuesta por England y Illston (1965). . . . | 226 |
| 5.6 | Función de fluencia para el método de Dischinger mejorado . . . | 227 |
| 5.7 | Discretización del intervalo de tiempo e incrementos de tensión para la obtención de la función de relajación del hormigón. . . . | 230 |
| 6.1 | Diagrama de flujo: método iterativo para el análisis de mástiles atirantados. | 232 |
| 6.2 | Diagrama de flujo: Método de Paso a Paso en vigas isostáticas con pretensado interior no adherente. | 233 |
| 6.3 | Diagrama de flujo: subrutina Obtención N_p | 234 |

Lista de tablas

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Propiedades geométricas equivalentes de la sección de la viga-columna según el patrón de reticulado de una cara de la torre (Adaptada de (Ben Kahla, 1995)). | 12 |
| 3.1 | Parámetros del hormigón utilizados para calcular la pérdida de pretensado en la viga de hormigón de Lan et al. (2013) | 60 |
| 3.2 | Comparación entre los valores de la pérdida de pretensado para la viga de Lan et al. Lan et al. 2013, calculados de acuerdo con los parámetros del Model Code 2010 (2012) y del ACI 209.2R-08 (2008). | 61 |
| 3.3 | Comparación entre los valores de la pérdida de pretensado para la viga PC2 ensayada por Guo et al. (2018), calculados de acuerdo con los parámetros del Model Code 2010 (2012) y del ACI 209.2R-08 (2008). | 65 |
| 3.4 | Parámetros del hormigón utilizados para calcular la pérdida de pretensado en la viga de Guo et al. Lan et al. 2013 | 66 |
| 3.5 | Comparación de los valores de la pérdida de pretensado para la viga I de hormigón pretensado de Breckenridge y Bugg (1964). | 69 |
| 4.1 | Comparativo de los valores de la pérdida de pretensado entre lo medido y lo pronosticado. | 97 |
| 4.2 | Comparativo de los valores de deformación en el centro del vano (flecha). | 97 |
| 4.3 | Deflexión en el centro del vano (flecha) en milímetros. | 102 |
| 4.4 | Parámetros de cálculo de la prueba T de Student para los valores de la Tabla 4.1. | 111 |
| 4.5 | Parámetros de cálculo de la prueba T de Student para los valores de la Tabla 4.2 y los valores a $t = 600$ días de la Tabla 4.3. | 112 |

| | | |
|-----|--|-----|
| 5.1 | Tabla comparativa: flecha a 28 y 600 días [mm] para la viga YLB2. | 151 |
| 5.2 | Tabla comparativa: pérdida de pretensado para la viga YLB2 a los 600 días [MPa]. | 154 |
| 5.3 | Tabla comparativa: pérdida de pretensado para la losa unidireccional a los 10000 días [MPa]. | 159 |

Capítulo 1

Presentación del problema y motivación

1.1. Introducción

La utilización de barriles de madera para el transporte de líquidos y mercaderías data de la época Celta. Las duelas de madera que conforman la estructura del barril, son colocadas adyacentes unas con otras y se mantienen juntas y firmes mediante una serie de aros metálicos colocados alrededor de éste a presión. Este proceso estira los aros metálicos generando compresión en las duelas, es decir *pretensado* al barril. Esta técnica es la que le proporciona su rigidez y estanqueidad.

A principio del siglo XVIII, el ingeniero alemán Mathias Koenen propuso, aunque sin poder resolver los aspectos técnicos más importantes, pretensar barras de acero para mejorar el comportamiento del hormigón. Esta propuesta, que data de 1903, se efectuó antes de que el propio Eugène Freyssinet, hoy en día el padre más reconocido del pretensado, abriese el camino correcto. Desde entonces, los avances y las soluciones técnicas de las estructuras pretensadas en obra civil y en edificación han avanzado mucho, siendo hoy en día una especialidad muy desarrollada y reconocida (Llorente Zurdo, 2016).

Al pretensar una estructura se persigue un doble objetivo: en estado límite de servicio, se controlan las deformaciones al contar con el pretensado como una fuerza exterior de signo contrario al del resto de las cargas actuantes; en estado límite último, se reduce la sección resistente necesaria puesto que, por un lado se introducen esfuerzos que compensan parcialmente los provocados por las cargas exteriores, y, por otro, se emplea un acero de más alto límite elástico.

El resultado es el diseño de elementos más esbeltos y la obtención de un cierto ahorro económico como consecuencia de la reducción de material. El concepto de pretensado así expuesto, es aplicable no solo a estructuras de hormigón y metálicas, sino, prácticamente, a cualquier material de construcción.

En este trabajo, se va a profundizar en el análisis de dos tipos de estructuras pretensadas con pretensado no adherente:

- las torres o mástiles atirantados;
- las vigas de hormigón simples y compuestas por una losa de hormigón armado superior construida in situ con pretensado interior no adherente.

En el ejercicio profesional de la ingeniería estructural muchas veces los ingenieros nos topamos con problemas que necesitan ser resueltos, o en otras ocasiones con problemas que habiendo sido resueltos necesitan ser analizados desde otro punto de vista. Este trabajo está enteramente motivado por la necesidad de resolver determinados problemas de la práctica de la ingeniería estructural que hasta el momento no habían sido resueltos o que habiendo sido resueltos necesitaban ser analizados desde otro punto de vista.

1.2. Objetivos generales

- Proponer un método aproximado para el cálculo de las deformaciones producidas por los efectos de segundo orden en torres atirantadas de sección triangular.
- Proponer una ecuación simplificada para calcular la pérdida de pretensado en vigas estáticamente determinadas y en vigas continuas con pretensado interior no adherente.
- Desarrollar la formulación del Método Paso a Paso y del Método del Módulo Efectivo Ajustado por la Edad para vigas simplemente apoyadas y continuas con pretensado interior no adherente.
- Proponer un algoritmo computacional para el análisis a lo largo del tiempo de vigas compuestas simplemente apoyadas y continuas con pretensado interior no adherente sin utilizar elementos finitos.
- Proponer una ecuación de forma integral para calcular la deformación unitaria del acero de pretensado interior no adherente teniendo en cuenta el rozamiento entre el acero y la vaina.
- Proponer un modelo numérico basado en el método de los elementos finitos para el análisis a lo largo del tiempo de esta tipología de vigas.

1.3. Principales componentes del estudio

Este trabajo que se centra en el estudio y análisis de estructuras pretensadas se ha desarrollado como una *tesis por compendio de artículos*.

Si bien tanto las torres atirantadas como las vigas con pretensado interior no adherente son estructuras pretensadas, su desarrollo a lo largo de la historia ha viajado por caminos diferentes. Es por ello que se ha decidido separar en distintos capítulos el *Estado del Conocimiento* de dichas tipologías de estructuras a los efectos de generar una lectura clara y ordenada. El Capítulo 2 presenta la introducción y el estado del conocimiento para el análisis de torres atirantadas y el Capítulo 3 lo hace para las vigas con pretensado interior no adherente.

Los Capítulos 2, 3, 4 y 5 recogen los trabajos de los artículos publicados a lo largo del trabajo de esta tesis. Estos son: *Analysis of guyed masts by the stability functions based on the Timoshenko beam-column*, *Improved prediction of long-term prestress loss in unbonded prestressed concrete members*, *Análisis*

en servicio de elementos compuestos de hormigón con pretensado interior no adherente bajo cargas de corta y larga duración y Time-dependent analysis of simply supported and continuous unbonded prestressed concrete beams.

El Capítulo 2 presenta una nueva formulación para el análisis de torres arriostradas en la que el mástil se modela como una viga-columna equivalente continua sobre apoyos elásticos no-lineales. Debido a que los efectos de segundo orden no pueden ser despreciados y dada la importancia de considerar la deformación por cortante en el análisis de este tipo de estructuras, el método propone el cálculo de la deformación de segundo orden utilizando las funciones de estabilidad basadas en la viga-columna de Timoshenko. Las propiedades equivalentes de la viga-columna se calculan en función del patrón de construcción de la torre y los tirantes se reemplazan por apoyos elásticos no-lineales. A partir de la configuración catenaria del cable, la constante elástica del resorte se obtiene a partir del módulo de elasticidad secante del cable. Para validar el método propuesto se realiza un estudio comparativo analizando un mástil arriostrado utilizando el método propuesto y un modelo numérico mediante el uso de elementos finitos.

En el Capítulo 3 se propone un enfoque basado en el método de elementos finitos para modelar el comportamiento de vigas de hormigón con pretensado interior no adherente a lo largo del tiempo y una ecuación simplificada mejorada para calcular las pérdidas de pretensado en elementos estáticamente determinados con pretensado interior no adherente. Ambos métodos tienen en cuenta los efectos de la fluencia y la retracción del hormigón, la relajación del acero pretensado y la presencia de la armadura de refuerzo. Además, se presenta una generalización de los Métodos de Paso a Paso y del Módulo Efectivo Ajustado por la Edad para el análisis de secciones a lo largo del tiempo de elementos de hormigón pretensado con tendones internos no adheridos. La precisión de la ecuación propuesta se evalúa con base en los resultados de estudios previos y se contrasta con la implementación computacional del Método Paso a Paso.

Basado en el Método de Paso a Paso para el análisis en el tiempo de las deformaciones diferidas en el hormigón, en el Capítulo 4 se desarrolla una formulación para el análisis de vigas compuestas de hormigón pretensado con tendones internos no adherentes sin utilizar el método de los elementos finitos. Dicha formulación contempla tanto el análisis en el corto como en el largo plazo, el estado no fisurado y fisurado del elementos, la fluencia y la retracción

del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. Además, el trazado de la armadura de pretensado puede ser genérico. A partir de la formulación desarrollada se propone un algoritmo computacional para el análisis de este tipo de vigas. Dicha implementación computacional permite el análisis tanto de vigas estáticamente determinadas como el de vigas continuas. La eficacia del algoritmo computacional propuesto es evaluada a partir de la comparación con estudios experimentales.

En el Capítulo 5 se propone una ecuación para estimar la pérdida de pretensado en vigas continuas de hormigón con pretensado interior no adherente. La ecuación tiene en cuenta la fluencia y la retracción del hormigón y la relajación del acero de pretensado. Además, se desarrolla un modelo numérico basado en el método de elementos finitos para el análisis a lo largo del tiempo de este tipo de vigas. El enfoque también tiene en cuenta la presencia de refuerzo de acero no pretensado y la fricción entre los tendones y sus vainas. Además, se propone una ecuación de forma integral correctamente justificada para calcular la deformación en cada sección del acero de pretensado no adherido teniendo en cuenta la fricción entre los tendones y las vainas. Esta ecuación se basa en la ecuación de pérdida por fricción aceptada por las diferentes normas internacionales. La deformación en cada sección del pretensado no adherido se calcula a partir de la deformación en el hormigón al nivel del tendón pretensado a lo largo de toda la viga. Resultados numéricos y experimentales son comparados para validar la ecuación y el enfoque de elementos finitos propuestos, mostrando el buen desempeño de ambos en la modelización del comportamiento de este tipo de pieza de hormigón pretensado en el tiempo.

En el Capítulo 6 se presentan las conclusiones finales.

Capítulo 2

Análisis de mástiles atirantados mediante las funciones de estabilidad basadas en la viga-columna de Timoshenko

Páez, P.M.; Sensale, B. (2017). Analysis of guyed masts by the stability functions based on the Timoshenko beam-column. *Engineering Structures*, 152: 597-606.

doi: 10.1016/j.engstruct.2017.09.036

Impact Factor (2017): 3.356; Quartile 1.

2.1. Introducción

Las comunicaciones de radio y televisión, así como la telefonía celular, son posibles en el mundo moderno gracias a estructuras que auspician de soporte para los equipos de transmisión de las señales de un lugar a otro. Las torres de celosía son estructuras con una amplia utilización como soporte de los sistemas de comunicación, debido a su gran resistencia en relación al consumo de material y a su permeabilidad, lo que reduce las fuerzas del viento generadas sobre ellas. Estas estructuras suelen ser elementos esbeltos y ligeros, ubicados en su mayoría en lugares expuestos por lo que las cargas ambientales prevalecen en el diseño.

Dos tipos de torres de celosía se emplean de acuerdo a la tipología estructural: las torres autoportantes y las torres atirantadas. Cuando se requieren

grandes alturas y las condiciones del sitio de implantación lo permiten, estas últimas son las usualmente utilizadas, debido a su menor costo de construcción en relación con las autoportantes.

Para el análisis de torres atirantadas existen varios métodos. La norma TIA 222-G (2006) especifica tres tipos de análisis. El primero consiste en un análisis donde la torre es modelada como una viga-columna equivalente soportada por cables representados como elementos tipo cable o como apoyos elásticos no lineales. El segundo consiste en un análisis tridimensional elástico en donde la torre se modela como un reticulado espacial cuyas barras solo pueden tomar fuerza directa y por último, puede realizarse un análisis elástico tridimensional en donde algunos de los miembros de la torre se modelan como elementos que trabajan a flexión y a fuerza directa, y otros como elementos que trabajan exclusivamente a fuerza directa. En los dos últimos métodos de análisis, los cables se modelan como elementos tipo cable.

Cualquiera sea el método de análisis utilizado, la complejidad en el análisis radica en la inherente no linealidad que presentan estas estructuras. Por una parte la no linealidad de las riendas, las que se materializan mediante cables de acero pretensado de alta resistencia y por otra, la no linealidad geométrica. Debido a la esbeltez que presentan estas torres las hace susceptibles al fenómeno de pandeo, en otras palabras, los efectos de segundo orden no pueden ser despreciados. Las acciones horizontales, provocan desplazamientos que incrementan el nivel de tensión en los cables y a su vez las fuerzas de compresión sobre la torre. Estas fuerzas de compresión tienden a aumentar el desplazamiento y así sucesivamente, fenómeno que se denomina comúnmente efecto $P - \Delta$.

Dentro de los métodos de análisis basados en la viga-columna equivalente, diferentes investigadores han realizado distintas propuestas por más de cincuenta años. Cohen y H. Perrin (1957) propusieron un análisis bi-dimensional mediante un modelo de viga-columna sobre apoyos elásticos considerando únicamente la rigidez flexional de la viga. En el mismo sentido Ezra (1962), propuso un análisis bi-dimensional basado en el modelo de la viga-columna sobre apoyos elásticos no-lineales y considerando la torsión de la estructura mediante resortes de torsión. Básicamente, el análisis consiste en calcular los desplazamientos de la estructura en forma iterativa a partir de un conjunto arbitrario de desplazamientos iniciales. Ben Kahla (1995), propone un método aproximado para el análisis de mástiles atirantados utilizando para la torre una viga-columna equivalente y para los tirantes elementos tipo cable. Esto

es llevado a cabo ensamblando en forma matricial elementos tridimensionales tipo viga para la torre y elementos de cable para los cables. Si bien el método tiene en cuenta el acoplamiento geométrico entre los diferentes grados de libertad y los efectos de segundo orden, es difícil de aplicar pues requiere un alto grado de programación computacional. Wahba et al. (1998), analizaron tres modelos diferentes para torres atirantadas, uno de ellos consistió en modelar la torre como viga-columna equivalente y elementos no-lineales para los cables. Sus resultados validaron las conclusiones de estudios previos de Ben Kahla y confirmaron la respuesta no lineal geométrica de estas estructuras frente a las cargas de viento. Margariti y Gantes (2015) proponen un método aproximado basado en las expresiones clásicas de pandeo para el cálculo de la carga crítica en torres atirantadas y en pilones de puentes atirantados. Dicho método se basa en un modelo de un solo vano de viga-columna, considerando únicamente la rigidez flexional del mástil o pilón. La no linealidad de los cables se tiene en cuenta mediante el módulo de elasticidad equivalente obtenido a partir de la fórmula del módulo tangente de los cables. Williamson y Margolin (1966) estudiaron el efecto de la fuerza cortante en el diseño de mástiles atirantados. Para esto, utilizaron un modelo de viga-columna equivalente sobre apoyos elásticos, reemplazando el sistema reticular de cada una de las caras de la torre por un alma ficticia sólida de igual rigidez al corte pero cuya rigidez flexional es nula. Sus resultados mostraron la importancia de considerar el efecto de la deformación por corte en el análisis de este tipo de estructuras. Basados en el método de la viga-columna equivalente Páez y Sensale (2017) propusieron un método analítico para el cálculo de mástiles arriostrados utilizando las funciones de estabilidad basadas en la teoría de Euler-Bernoulli. Las riendas se reemplazan por apoyos elásticos no-lineales y el efecto de las deformaciones por cortantes se tuvieron en cuenta mediante un momento de segundo orden reducido obtenido de la teoría de la viga de Timoshenko.

Entre los diferentes métodos de análisis, los más utilizados en la actualidad se basan en elementos finitos. Estos métodos son muy precisos, sin embargo para que las soluciones converjan se requiere discretizar la estructura en un elevado número de elementos, además de requerir un gran esfuerzo de programación computacional (Ben Kahla, 1995; Wahba et al. 1998). Las contribuciones basadas en los métodos analíticos requieren de análisis complejos, y si bien permiten obtener soluciones cuyos resultados son próximos a los obtenidos mediante la utilización de elementos finitos, en general, presentan diferencias

significativas (Cohen y H. Perrin, 1957; Ezra, 1962; Margariti y Gantes, 2015; Williamson y Margolin, 1966). Es por ello que en este trabajo se propone desarrollar un nuevo método analítico para el análisis de mástiles atirantados basado en el modelo de la viga-columna equivalente. En este sentido, el método mantiene el rigor de los métodos analíticos pero su aplicación es sencilla. Es decir, se obtienen soluciones suficientemente precisas para el diseño de torres arriostradas en un tiempo razonable y con un esfuerzo razonable. El método propuesto está motivado por el trabajo de Páez y Sensale (2017). La principal diferencia entre este método y el de Páez y Sensale (2017) está esencialmente en la forma en que los dos métodos calculan la deformación de segundo orden.

El método propuesto considera la no-linealidad de los cables y los efectos de segundo orden. Para ello, la torre se modela como una viga-columna continua equivalente, sobre apoyos elásticos no-lineales, cuya rigidez axial, rigidez flexional y rigidez a cortante se calculan en función del patrón de construcción de la torre (Romstad y Chiesa, 1997). Los tirantes se sustituyen por apoyos elásticos no-lineales cuya constante elástica se obtiene a partir del módulo de elasticidad secante de los cables (Gimsing y Georgakis, 2012). El método propone el cálculo de la deformación de segundo orden utilizando las funciones de estabilidad basadas en la viga-columna de Timoshenko (Dario Aristizabal-Ochoa, 2008; F. J. Lin et al. 1960; Timoshenko, 1957).

2.2. Las torres atirantados

Las torres atirantadas están formadas por una serie de barras verticales, en general denominadas como montantes, barras horizontales y barras diagonales conformando de esta manera un reticulado espacial. La sección transversal de torre frecuentemente utilizada es la triangular equilátera, si bien en algunos casos pueden utilizarse secciones cuadradas. Para las estructuras de menor porte los elementos estructurales que conforman el reticulado son materializados mediante barras circulares macizas de acero, mientras que para estructuras de mayor porte son utilizados tubos circulares de acero, perfiles angulares y perfiles de chapas plegadas.

Los tirantes proporcionan soporte lateral a las torres. Se colocan en general uniformemente distribuidos en la altura y se los pretensa con un valor inicial de tensión. En el caso de torres de sección triangular se colocan tres por cada nivel

y en el caso de sección rectangular se colocan cuatro por nivel. Los tirantes se anclan en el terreno de manera tal que los ángulos que forman los planos constituidos por cada tirante y la torre sean iguales, es decir, para el caso de torres de sección triangular dichos ángulos son de 120° y para el caso de torres de sección cuadrada de 45° . Las inclinaciones típicas utilizadas para éstos, medidas como el ángulo que forma el tirante con la horizontal, están el entorno de los 40° a 60° , pudiendo alcanzar inclinaciones menores para los tirantes del primer nivel.

La tensión inicial de pretensado de los cables es uno de los principales parámetros que afectan la estabilidad de este tipo de estructuras (Carrasco et al. 2021). Éste es impuesto durante la construcción del mástil y debe ser verificado periódicamente. La norma TIA 222-G (2006) recomienda valores medios del 10 % de la tensión de rotura del cable, con un rango de variación entre el 7 % y el 15 % de la tensión de rotura ya que dentro de este rango pueden ser despreciados los efectos de las vibraciones y de inestabilidad aeroelástica. Por su parte, la norma UNE-EN 1993-3-1 (2013) proporciona lineamientos algo más generales, permitiendo tensiones iniciales de hasta el 45 % de la tensión de rotura. No obstante, requiere que sean verificados los fenómenos de vibración e inestabilidad aeroelástica (UNE-EN 1993-3-1, 2013).

Este trabajo se centrará en torres de sección transversal triangular equilátera, aunque la mayoría de los razonamientos aquí expuestos pueden extenderse a torres de sección cuadrada.

2.3. Modelo de la torre: propiedades de la viga-columna equivalente

El modelo de la torre como una viga-columna equivalente se basa en las siguientes hipótesis: el material de la viga presenta un comportamiento elástico lineal, las deformaciones de la viga son pequeñas y se admite que, bajo la acción del momento flector y de la fuerza cortante, las secciones planas y perpendiculares al eje longitudinal de la viga previas a la deformación, permanecen planas pero no necesariamente perpendiculares al eje longitudinal deformado. Estas hipótesis corresponden a la teoría de vigas de Timoshenko.

La Figura (2.1) muestra los patrones típicos de reticulado de una de las caras de la torre. Para cada uno de dichos patrones, las propiedades geométricas de la viga-columna equivalente pueden ser obtenidas utilizando el principio de

los trabajos virtuales. En la Tabla 2.1 se hallan dichas propiedades para el caso de torres de sección triangular (Ben Kahla, 1995; Romstad y Chiesa, 1997).

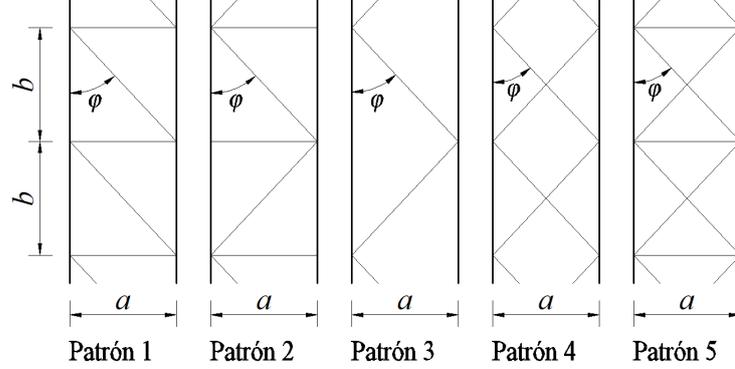


Figura 2.1: Configuraciones típicas de reticulado en una de las caras de la torre.

2.4. El modelo de los tirantes

2.4.1. El cable elástico: módulo de elasticidad secante

Sea un cable inclinado cuya longitud de cuerda sea igual a l_{cb} y su proyección con respecto a la horizontal c_{cb} , sometido a la acción de una fuerza de tracción T_0 en el sentido de la cuerda y a la acción de su peso propio g_{cb} , Figura (2.2). Basados en la configuración catenaria del cable, al aplicar una fuerza de tracción T_1 en la dirección de la cuerda, el alargamiento δ del mismo, puede expresarse mediante la Ecuación (2.1) (Gimsing y Georgakis, 2012):

$$\frac{\delta}{l_{cb}} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_0)\gamma_{cb} + c_{cb}^{-1} [\sigma_1^2 \sinh(\gamma_{cb}c_{cb}\sigma_1^{-1}) - \sigma_0^2 \sinh(\gamma_{cb}c_{cb}\sigma_0^{-1})]}{2E_{cb}\gamma_{cb} \cosh(1/2\gamma_{cb}c_{cb}\sigma_1^{-1})} + \dots$$

$$\dots + \frac{4E_{cb}c_{cb}^{-1} [\sigma_1 \sinh(1/2\gamma_{cb}c_{cb}\sigma_1^{-1}) - \sigma_0 \sinh(1/2\gamma_{cb}c_{cb}\sigma_0^{-1})]}{2E_{cb}\gamma_{cb} \cosh(1/2\gamma_{cb}c_{cb}\sigma_1^{-1})} \quad (2.1)$$

siendo E_{cb} el módulo de elasticidad del material del cable, σ_1 y σ_0 las tensiones en el cable debido a las fuerzas en la dirección en la cuerda T_1 y T_0 , respectivamente, y γ_{cb} la densidad del cable.

La no-linealidad existente entre la fuerza de tracción aplicada en la dirección de la cuerda y la deformación debido al cambio en la flecha bajo diferentes condiciones de carga, puede ser tenida en cuenta mediante los módulos de elasticidad tangente y secante. De esta manera puede tratarse el fenómeno no-lineal

Tabla 2.1: Propiedades geométricas equivalentes de la sección de la viga-columna según el patrón de reticulado de una cara de la torre (Adaptada de (Ben Kahla, 1995)).

| Propiedades equivalentes | Patrón 1 | Patrones 2 y 3 | Patrón 4 | Patrón 5 |
|----------------------------|--|--------------------------------------|--------------------------------------|---|
| $E \cdot A$ | $3 \cdot E \cdot A_m$ | $3 \cdot E \cdot A_m$ | $3 \cdot E \cdot A_m$ | $3 \cdot E \cdot (A_m + \hat{A})$ |
| $E \cdot I_y, E \cdot I_z$ | $1/2 \cdot E \cdot A_m \cdot a^2$ | $1/2 \cdot E \cdot A_m \cdot a^2$ | $1/2 \cdot E \cdot A_m \cdot a^2$ | $1/2 \cdot E \cdot (A_m + \hat{A}) \cdot a^2$ |
| $G \cdot A_y, G \cdot A_z$ | $\frac{3}{2} \left(\frac{1}{E \cdot A_d \cdot \psi_1} + \frac{\tan(\varphi)}{E \cdot A_h} \right)^{-1}$ | $3/2 \cdot E \cdot A_d \cdot \psi_1$ | $3/2 \cdot E \cdot A_d \cdot \psi_1$ | $3 \cdot E \cdot A_d \cdot \psi_1$ |

E y G son el módulo de elasticidad y el módulo de corte del material.

$E \cdot A$ es la rigidez axial equivalente de la viga-columna.

$E \cdot I_z, E \cdot I_y, G \cdot A_z$ y $G \cdot A_y$ corresponden a la rigidez flexional y a la rigidez de cortante de la viga-columna equivalente con respecto a ejes coordenados baricentros z e y , respectivamente.

A_m, A_d y A_h son las áreas de las secciones de las barras de los montantes, las barras diagonales y horizontales que conforman el reticulado, respectivamente.

a y b son la distancia entre las barras montantes y la distancia entre las barras horizontales, respectivamente.

φ es el ángulo que forman las barras montantes con las diagonales.

$$\psi_1 = \sin^2(\varphi) \cos(\varphi)$$

$$\hat{A} = \frac{A_d \cdot A_h \cdot \cos^3(\varphi)}{A_h + 2 \cdot A_d \cdot \sin^3(\varphi)}$$

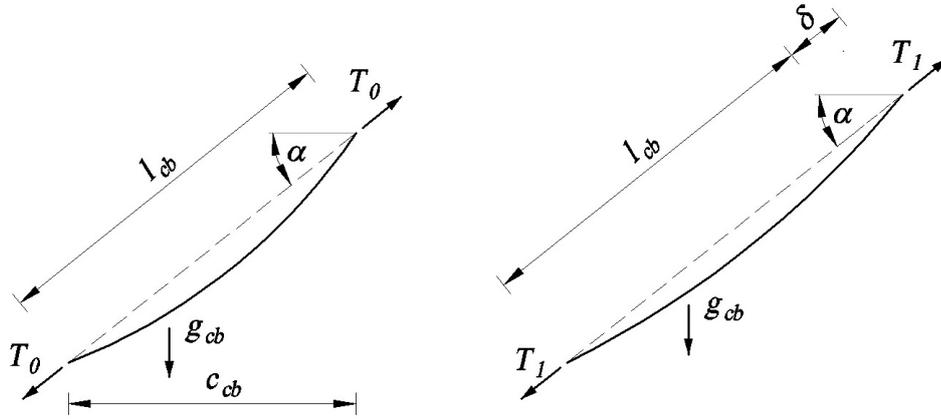


Figura 2.2: Cable inclinado sometido al peso propio: relación entre la deformación y la fuerza aplicada en la dirección de la cuerda.

como uno lineal. Sin embargo, el módulo tangente debe utilizarse cuando la relación entre las tensiones σ_1 y σ_0 es pequeña; de lo contrario, deberá utilizarse el módulo secante cuya expresión viene dada por la Ecuación (2.2) (Gimsing y Georgakis, 2012):

$$E_{\text{sec}} = \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_0}{\delta} \right) l_{cb} \quad (2.2)$$

donde la relación δ/l_{cb} se obtiene a partir de la Ecuación (2.1).

La gráfica de la Figura (2.3) muestra la variación del módulo de elasticidad secante en función de la tensión final σ_1 para longitudes de cable de 60 m, 100 m y 160 m, cuyo módulo de elasticidad es $E_{cb} = 185$ GPa y su tensión inicial es $\sigma_0 = 140$ MPa, que corresponde al 10% de la tensión de rotura. Podemos ver que para tensiones finales del orden del 50% de la tensión de rotura, la relación entre el módulo de elasticidad del cable y el módulo secante no excede del 10% para una longitud del cable de 160 metros, ni del 4% para una longitud del cable de 100 metros.

2.4.2. El sistema de cables: constante elástica equivalente

Consideremos en primera instancia el sistema plano simétrico, en equilibrio, formado por el mástil y dos cables, Figura (2.4). Si aplicamos una fuerza horizontal en el extremo superior del mástil, éste se deformará y su posición puede describirse como un desplazamiento horizontal u y uno vertical w , siendo ambas componentes del desplazamiento pequeñas. Dado que el desplazamiento

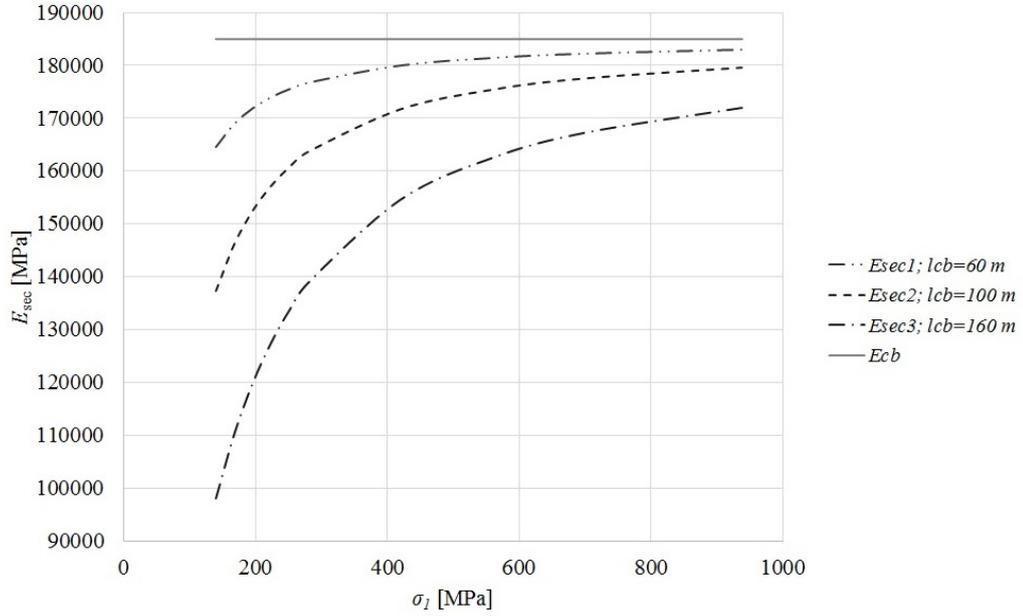


Figura 2.3: Curva módulo de elasticidad secante vs. tensión en el cable. Tomando $E_{cb} = 185 \text{ GPa}$ y $\sigma_0 = 0.1 \cdot f_u = 140 \text{ MPa}$.

de mástil está compuesto por un movimiento rígido y por la flexión del mismo, puede asumirse que el desplazamiento w es un infinitésimo de segundo orden de u ($w \sim O(u^2)$) (Irvine y O’Sullivan, 1979).

Al desplazarse el mástil, el cable a la izquierda se alargará mientras que el de la derecha se acortará. Si ambos cables están sometidos a una fuerza de tracción inicial T_0 en la dirección de la cuerda, el cable de la izquierda experimentará un rápido aumento de la tensión mientras que el de la derecha un rápido descenso. La Figura (2.5) muestra de manera esquemática el razonamiento precedente.

En relación a la Figura (2.5), el alargamiento δ_1 del cable de la izquierda y el acortamiento δ_2 del cable de la derecha en función del desplazamiento horizontal u pueden expresarse por medio de la Ecuación (2.3):

$$\delta_1 = -\delta_2 = \frac{c_{cb}}{l_{cb}} \cdot u \quad (2.3)$$

Planteando el equilibrio de fuerzas en el nodo superior del mástil, es decir, donde está aplicada la fuerza F , y considerando la relación lineal entre la tensión y la deformación mediante el empleo del módulo de elasticidad secante,

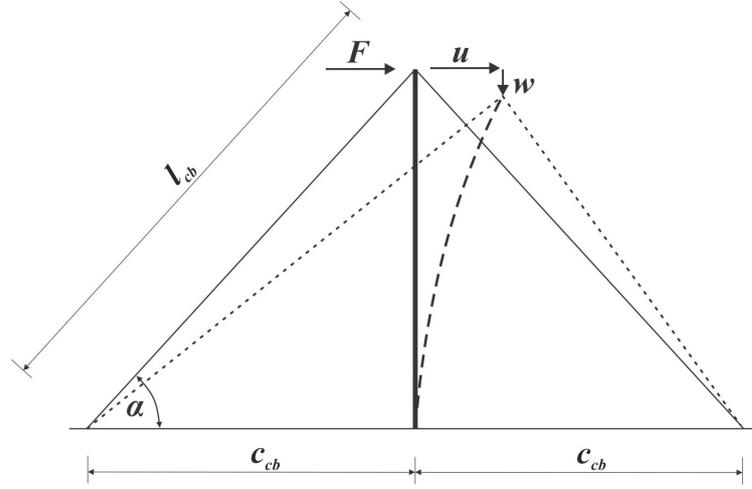


Figura 2.4: Sistema plano simétrico, formado por el mástil y dos cables. Configuración deformada al aplicar una carga horizontal F en el extremo superior.

obtenemos la Ecuación (2.4):

$$F = \frac{E_{\text{sec},1} \delta_1 A_{cb}}{l_{cb}} \cos(\alpha) + \frac{E_{\text{sec},2} \delta_2 A_{cb}}{l_{cb}} \cos(\alpha) \quad (2.4)$$

Si la fuerza F aplicada es de valor unidad y teniendo en cuenta la relación dada por la Ecuación (2.3), la constante elástica equivalente k_{eq} utilizada para sustituir el sistema de cables viene dada por la Ecuación (2.5):

$$k_{\text{eq}} = (E_{\text{sec},1} + E_{\text{sec},2}) \cdot A_{cb} \cdot \frac{c_{cb}^2}{l_{cb}^3} \quad (2.5)$$

siendo A_{cb} el área de la sección transversal de los cables, $E_{\text{sec},1}$ y $E_{\text{sec},2}$ son los módulos de elasticidad secante del cable que se estira y del cable que se acorta, respectivamente, y α la inclinación de los cables con respecto a la horizontal.

Consideremos ahora el sistema tridimensional constituido por el mástil y tres cables de igual longitud de cuerda l_{cb} , igual inclinación α y tal que los planos formados por cada cable y el mástil equidistan entre sí, al que se aplica una fuerza horizontal F de valor unidad en el extremo superior del mástil en la dirección del eje U , Figura (2.6). Si la fuerza se aplica en el sentido positivo del eje U (como se muestra en la figura), la relación entre el alargamiento δ_1 de los cables a barlovento y el desplazamiento horizontal u , así como la relación entre el acortamiento δ_2 del cable a sotavento y el desplazamiento horizontal,

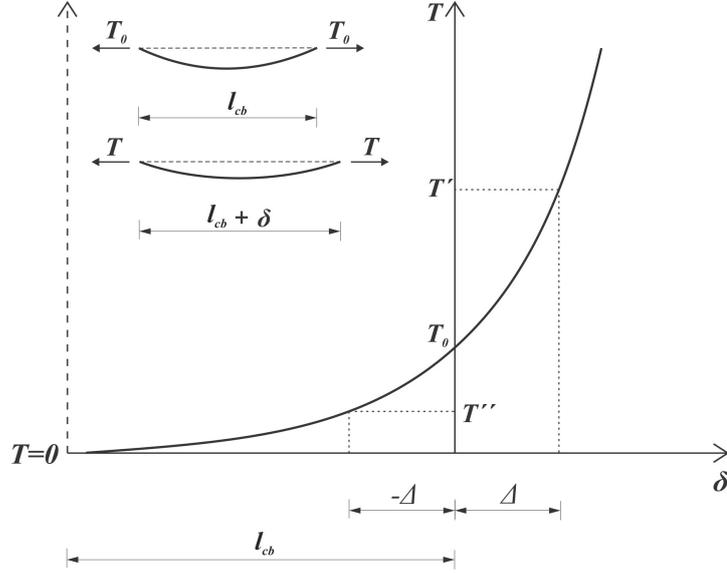


Figura 2.5: Curva fuerza vs. desplazamiento del cable con origen en la condición inicial de tensado (Adaptada de Gimsing y Georgakis, 2012)

puede expresarse mediante las Ecuaciones (2.6):

$$\delta_1 = \frac{c_{cb}}{2 \cdot l_{cb}} \cdot u \quad (2.6)$$

$$\delta_2 = \frac{-c_{cb}}{l_{cb}} \cdot u$$

La primer ecuación en la Ecuación (2.6) se deduce teniendo en cuenta que $\sin(30) = 1/2$ y que el coseno del ángulo que forma la rienda con la recta formada por la intersección del plano UY con el plano que contiene la rienda y su vector desplazamiento u , es $c_{cb}/(2l_{cb})$.

Planteando equilibrio horizontal, Ecuación (2.7):

$$(E_{\text{sec},1} + 2 \cdot E_{\text{sec},2}) \cdot A_{cb} \cdot u \cdot \frac{c_{cb}^2}{2 \cdot l_{cb}^3} = 1 \quad (2.7)$$

Por lo tanto, la constante elástica equivalente utilizada para sustituir el sistema de cables queda determinada por la Ecuación (2.8):

$$k_{\text{eq}} = (E_{\text{sec},1} + 2 \cdot E_{\text{sec},2}) \cdot A_{cb} \cdot \frac{c_{cb}^2}{2 \cdot l_{cb}^3} \quad (2.8)$$

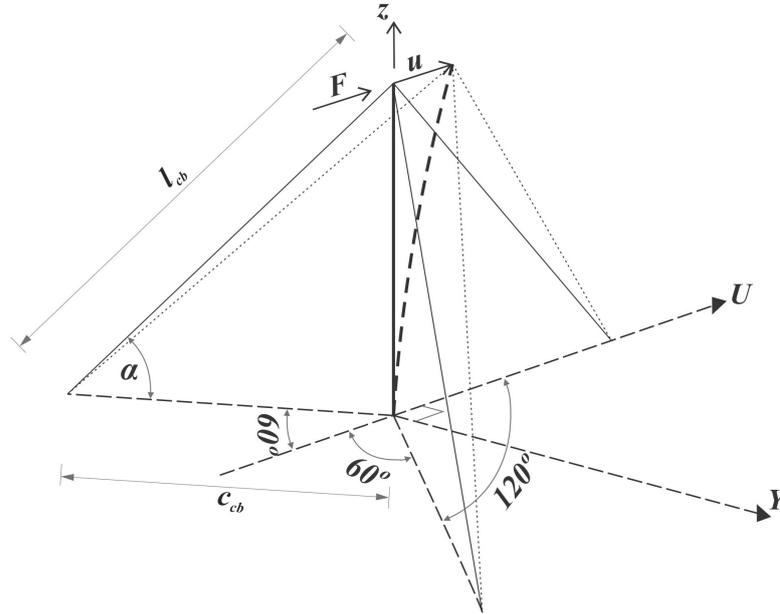


Figura 2.6: Sistema tridimensional formado por el mástil y tres cables de igual longitud de cuerda e igual inclinación.

A partir de las Ecuaciones (2.1), (2.6) y (2.8), podemos concluir que, bajo las hipótesis planteadas, la estructura de la Figura (2.6) es más flexible en el sentido positivo del eje U que en el sentido negativo.

2.5. Método propuesto

Consideremos una estructura tipo mástil atirantado, de altura h_t , con n niveles de tirantes uniformemente espaciados entre sí una distancia h_j . Sin pérdida de generalidad, consideremos que la estructura está empotrada en la base, como se representa en la Figura (2.7a).

La torre estará sujeta a cargas distribuidas verticales $p_z(z)$ como ser su peso propio; cargas verticales puntuales P_z , debidas por ejemplo al peso de los accesorios, pero en carácter general serán debidas al alargamiento y acortamiento de los cables y a la carga de viento sobre los mismos; y a cargas puntales y distribuidas horizontales, P_x y $p_x(z)$, respectivamente, básicamente debidas a la acción del viento sobre el mástil, los cables y los accesorios.

Planteando equilibrio en la configuración deformada en el nodo j , en referencia a la Figura (2.7b) podemos escribir para el momento de continuidad

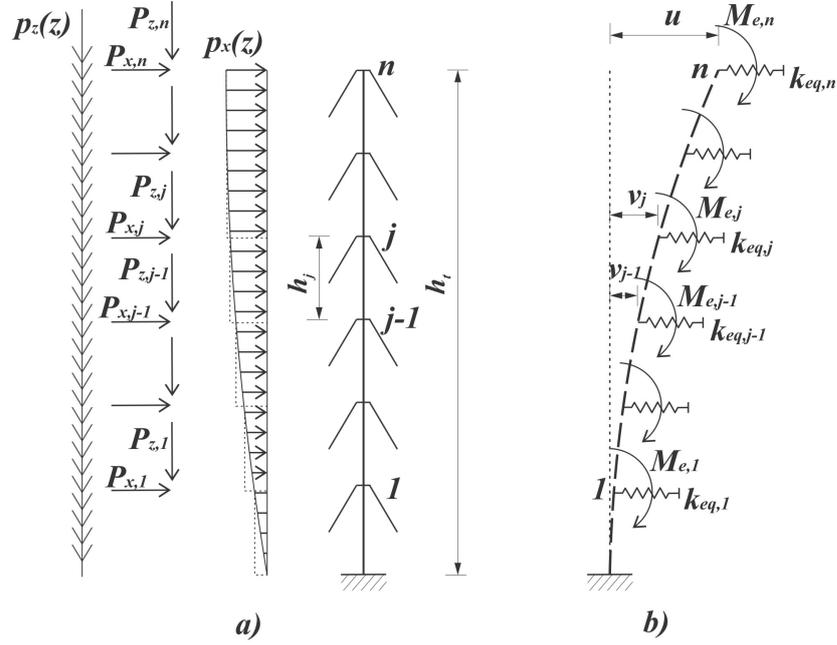


Figura 2.7: a) Acciones exteriores sobre el mástil atirantado. b) Modelo matemático de cálculo, configuración deformada.

$j - 1$, Ecuación (2.9) (Páez y Sensale, 2017):

$$\begin{aligned}
M_{j-1} &= M_j + \sum_{i=j}^{i=n} (H_i + P_{x,i} - k_{eq,i} \cdot v_i) \cdot h_i + \sum_{i=j}^{i=n} M_{e,i} + \dots \\
&\dots + (v_j - v_{j-1}) \sum_{i=j}^{i=n} (P_{z0,i} + P_{z,i}) + \dots \\
&\dots + (v_j - v_{j-1}) \sum_{i=j}^{i=n} \left[2 \left(\frac{E_{sec,1} - E_{sec,2}}{E_{sec,1} + 2 \cdot E_{sec,2}} \right)_i k_{eq,i} \cdot \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} \cdot v_i \right] + \dots \\
&\dots + (v_j - v_{j-1}) \sum_{i=j}^{i=n} \left(3 \cdot T_{0,i} \cdot \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} \right) \quad (2.9)
\end{aligned}$$

siendo $z_{cb,j}$ la altura correspondiente al nivel j de tirantes, v_j el valor de la elástica para dicho nivel de tirantes, k_{eq} es el valor de la constante elástica equivalente para el nivel j de tirantes, $c_{cb,j}$ es la distancia horizontal entre el pie de los tirantes del nivel j y la torre, H_j es la fuerza resultante horizontal entre dos niveles de tirantes, obtenida mediante la expresión de la Ecuación (2.10), $P_{z0,j}$ es la fuerza resultante vertical debida a la carga vertical uniformemente distribuida entre dos niveles de tirantes, obtenida mediante la expresión de la

Ecuación (2.11), $P_{z,j}$ es la fuerza vertical en el nivel de tirantes j debida a la acción del viento sobre éstos y $M_{e,j}$ es el momento debido a la excentricidad de los cables en el nivel j de tirantes y su expresión viene dada por la Ecuación (2.12).

$$H_j = \int_{z_{cb,j}-h_j/2}^{z_{cb,j}+h_j/2} p_x(z) dz \quad (2.10)$$

$$P_{z0,j} = \int_{z_{cb,j}-h_j/2}^{z_{cb,j}+h_j/2} p_z(z) dz \quad (2.11)$$

$$M_{e,j} = - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} E_{\text{sec},1} + \frac{\sqrt{3}}{3} E_{\text{sec},2} \right)_j \frac{a \cdot A_{cb,j} \cdot z_{cb,j}}{l_{cb,j}^3} \cdot v_j \quad (2.12)$$

2.5.1. Ecuaciones pendiente-deflexión basadas en la viga-columna de Timoshenko: “el enfoque modificado”

Dos formulaciones diferentes se han propuesto para analizar la influencia de la fuerza cortante sobre la carga crítica de pandeo elástica y el efecto de segundo orden en vigas-columnas, una realizada por Engesser y otra por Haringx (Ziegler, 1982). El modelo de Haringx ha sido aplicado y discutido por Timoshenko y Gere y se conoce como “el enfoque modificado” (Timoshenko y Gere, 1961).

De acuerdo con las hipótesis propuestas por Haringx, podemos deducir las ecuaciones pendiente-deflexión que nos permiten considerar las deformaciones a flexión y las deformaciones por esfuerzo cortante; su expresión para la barra j entre los nodos $j-1$ y j vienen dadas por la Ecuación (2.13) (Dario Aristizabal-Ochoa, 2008):

$$M_{j-1,j} = \left(\frac{E \cdot I}{h} \right)_j \left[C \cdot \theta_{j-1} + S \cdot \theta_j - (C + S) \cdot \frac{v_j - v_{j-1}}{h} \right]_j - M_{F,j} \quad (2.13)$$

$$M_{j,j-1} = \left(\frac{E \cdot I}{h} \right)_j \left[S \cdot \theta_{j-1} + C \cdot \theta_j - (C + S) \cdot \frac{v_j - v_{j-1}}{h} \right]_j + M_{F,j}$$

donde $M_{j-1,j}$ y $M_{j,j-1}$ son los momentos de empotramiento para la barra j ; C_j y S_j son las funciones de estabilidad basadas en la viga-columna de

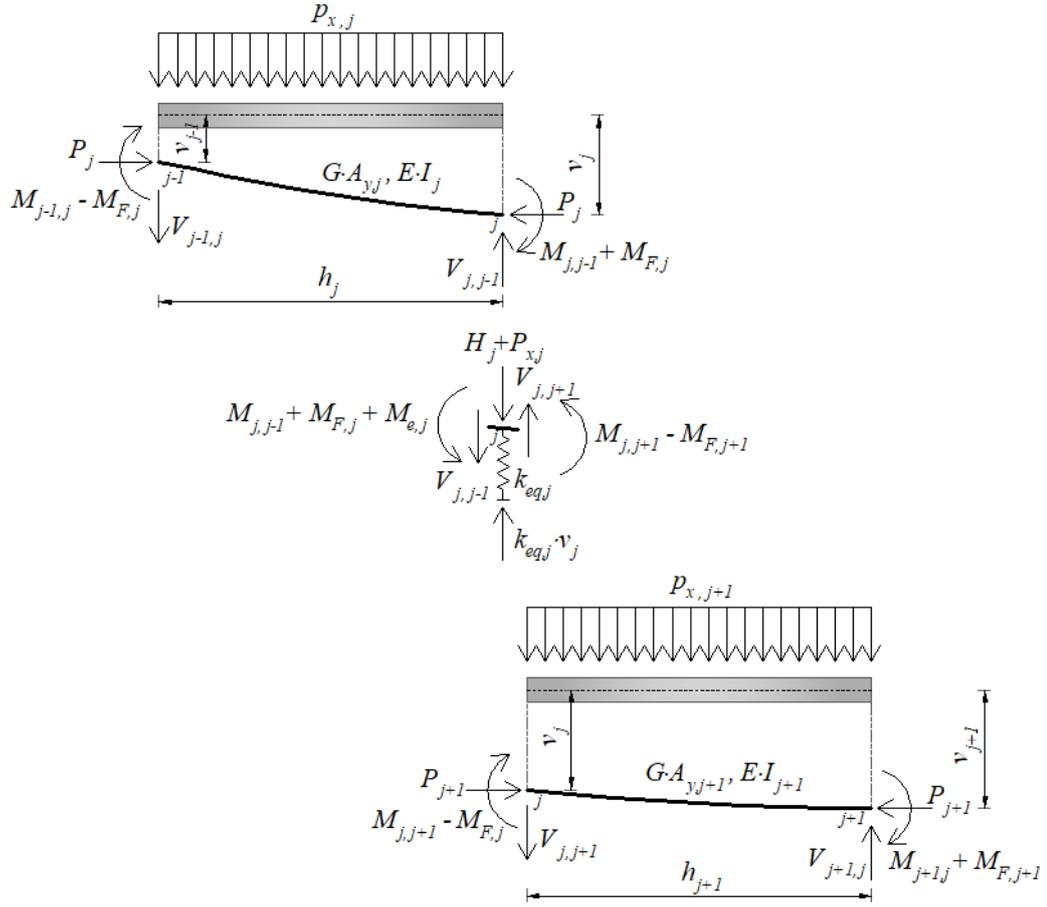


Figura 2.8: Configuración deformada de la viga-columna continua sobre apoyos elásticos discretos para las barras entre los nudos $j - 1$, j y $j + 1$. Diagramas de cuerpo libre para el planteamiento de las ecuaciones de pendiente - deflexión.

Timoshenko para la barra j , Ecuación (2.14):

$$C_j = \frac{1 - \psi_j \cdot \beta_j \cdot \cot(\beta_j)}{(2 \tan(\beta_j/2)) / \beta_j - \psi_j} \quad (2.14)$$

$$S_j = \frac{\psi_j \cdot \beta_j \cdot \csc(\beta_j) - 1}{(2 \tan(\beta_j/2)) / \beta_j - \psi_j}$$

β_j es el parámetro de pandeo y su expresión viene dada por la Ecuación (2.15):

$$\beta_j = \sqrt{\left| \frac{P_j h_j^2}{(\psi EI)_j} \right|} \quad (2.15)$$

ψ_j es el factor de reducción por cortante, Ecuación (2.16):

$$\psi_j = \left(1 + \frac{P_j}{G_j \Omega_{red,j}} \right)^{-1} \quad (2.16)$$

Ω_{red} es el área efectiva de cortante de la sección transversal de la viga-columna, siendo, $\Omega_{red} = A$ (Tabla 2.1); P_j es la fuerza de compresión en la barra j y su expresión viene dada por la Ecuación (2.17):

$$P_j = \sum_{i=j}^{i=n} \left(P_{0,i} + P_{z,i} + 2 \left(\frac{E_{sec,1} - E_{sec,2}}{E_{sec,1} + 2E_{sec,2}} \right) k_{eq,i} \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} v_i + 3 \cdot T_{0,i} \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} \right) \quad (2.17)$$

Los subíndices para las expresiones entre paréntesis indican a la barra que corresponde, por ejemplo $\left(\frac{EI}{h} S \right)_j$ indica que el módulo de elasticidad, el momento de segundo orden, la longitud de vano y la función de estabilidad S , son las correspondientes a la barra j .

$M_{F,j}$ es el momento de empotramiento perfecto para una viga sometida a una carga uniformemente distribuida en el plano de la flexión y a una carga axial de compresión. Su expresión depende de las condiciones de apoyo; por ejemplo, para una viga fija en ambos extremos, su expresión viene dada por la Ecuación (2.18):

$$M_{F,j} = \frac{p_{x,j} h_j^2}{12} \left(\frac{12}{\beta_j^2} \right) \left(\frac{1}{\psi_j} \right) \left[1 - \frac{\beta_j}{2 \tan(\beta_j/2)} \right] \quad (2.18)$$

2.6. Análisis de la estructura

Consideremos una viga-columna continua sobre apoyos elásticos discretos, sometida a la acción de cargas externas para la que son conocidas las propiedades seccionales y de los materiales, Figura (2.8) y de acuerdo a las ecuaciones de pendiente-deflexión basadas en la viga-columna de Timoshenko con fuerza de compresión axial (Ecuación (2.13)), obtenemos las Ecuaciones (2.19) y (2.20):

$$\begin{aligned} a_{2j,1} \theta_{j+1} + a_{2j,2} v_{j+1} + a_{2j,3} \theta_j + a_{2j,4} v_j + a_{2j,5} \theta_{j-1} + a_{2j,6} v_{j-1} = \dots \\ \dots = M_{F,j+1} - M_{F,j} - M_{e,j} \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$a_{2j-1,1}\theta_{j+1} + a_{2j-1,2}v_{j+1} + a_{2j-1,3}\theta_j + a_{2j-1,4}v_j + a_{2j-1,5}\theta_{j-1} + \dots \\ \dots + a_{2j-1,6}v_{j-1} = P_{x,j} + H_j \quad (2.20)$$

Los coeficientes $a_{i,j}$ dependen de las propiedades geométricas de la viga, las propiedades de los materiales, de las fuerzas de compresión, de las constantes elásticas equivalentes y de las funciones de estabilidad. Sus expresiones vienen dados por la Ecuación (2.21):

$$\begin{aligned} a_{2j,1} &= \left(\frac{EI}{h} S \right)_{j+1} \\ a_{2j,2} &= -a_{2j-1,1} = - \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_{j+1} \\ a_{2j,3} &= \left(\frac{EI}{h} C \right)_{j+1} + \left(\frac{EI}{h} C \right)_j \\ a_{2j,4} &= a_{2j-1,3} = \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_j - \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_{j+1} \\ a_{2j,5} &= \left(\frac{EI}{h} S \right)_j \\ a_{2j,6} &= -a_{2j-1,5} = \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_j \\ a_{2j-1,2} &= - \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_{j+1} + \frac{P_{j+1}}{h_{j+1}} \\ a_{2j-1,4} &= \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_{j+1} + \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_j - \frac{P_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{P_j}{h_j} + k_{eq,j} \\ a_{2j-1,6} &= - \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_j + \frac{P_j}{h_j} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Los subíndices para las expresiones entre paréntesis indican a la barra que corresponde, por ejemplo $\left(\frac{EI}{h} S \right)_j$ indica que el módulo de elasticidad, el momento de segundo orden, la longitud de vano y la función de estabilidad S , son las correspondientes a la barra j .

Para una viga - columna de n tramos, a partir de la Ecuaciones (2.19) y (2.20) se forma un sistema de $2n - 1 \times 2n - 1$ ecuaciones cuyas incógnitas son los giros y los desplazamientos laterales de los nudos $\theta_1 \dots \theta_j \dots \theta_{n-1}$ y $v_1 \dots v_j \dots v_n$, respectivamente, ya que, por un lado, el extremo superior de mástil se considera articulado, lo que implica que θ_n puede escribirse en función de θ_{n-1} ; y por otro, cuando el extremo inferior está empotrado $\theta_0 = v_0 = 0$ y

cuando está articulado $v_0 = 0$ y θ_0 puede escribirse en función de θ_1

2.6.1. Obtención de la configuración deformada: análisis de segundo orden método iterativo

Bajo la acción de las fuerzas externas, el método propuesto asume que la forma inicial de la curva elástica corresponde a una función parabólica y tal que el valor máximo de la curva elástica es menor que un valor prefijado $v_{m,i}$, con $v_{m,i} = 0,001 \cdot h_t$. Las constantes elásticas equivalentes en cada uno de los niveles se calculan a partir de los desplazamientos laterales supuestos. De esta manera puede estimarse de forma razonable la relación entre la fuerza de compresión en la barra j y la fuerza de compresión en la barra n de extremo. Sea ζ el factor de relación entre dichas fuerzas, esto es $P_j = \zeta \cdot P_n$, de esta manera la relación entre los parámetros de pandeo puede escribirse como, Ecuación (2.22):

$$\beta_j = \sqrt{\zeta \cdot \frac{(\psi EI)_n}{(\psi EI)_j} \left(\frac{h_j}{h_n} \right)} \beta_n \quad (2.22)$$

Los pasos del procedimiento iterativo para la obtención del desplazamiento lateral son:

1. Se calculan los desplazamientos laterales de la torre, esto es v_j para $j = 1$ a n . El método propuesto supone considerar que la curva elástica inicial es una función parabólica.
2. Con los valores de los desplazamientos laterales calculados en el Paso 1 se obtienen los módulos de elasticidad $E_{\text{sec},1}$ y $E_{\text{sec},2}$ para cada nivel de tirantes.
3. El nuevo desplazamiento lateral de la torre bajo la acción de las cargas actuantes se obtiene resolviendo el sistema de $2n - 1 \times 2n - 1$ ecuaciones, obtenido a partir de la Ecuaciones (2.19) y (2.20).
4. Si para cada uno de los niveles de tirantes, la diferencia entre el desplazamiento obtenido en el Paso 3 y el desplazamiento del Paso 1 es menor que un valor predeterminado, se da por finalizado el proceso. En caso contrario, con el desplazamiento obtenido en el Paso 3 se repite el proceso hasta la convergencia.
5. Si la diferencia entre los desplazamientos en cada nivel de tirantes no puede hacerse menor que un valor predeterminado, la estructura es ines-

table bajo la acción de las cargas actuantes. Deberá modificarse la rigidez de la viga-columna y/o la rigidez de las constantes elásticas equivalentes.

Luego, planteando las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada para cualquier sección se obtienen las solicitaciones y se procede al dimensionado de las secciones de los elementos que conforman la torre utilizando los métodos habituales de resistencia de materiales y la norma que se tome como referencia.

En relación a la Figura (2.8), para la barra j y para una sección a una distancia x del extremo $j - 1$, el momento en dicha sección $M_j(x)$ viene dado por la Ecuación (2.23):

$$\begin{aligned}
 M_j(x) = & \frac{p_{x,j} h_j^2}{\psi_j} \left(\frac{1}{\beta_j} \right)^2 \left[\left(\frac{1 - \cos(\beta_j)}{\sin(\beta_j)} \right) \sin \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right) + \cos \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right) - 1 \right] \\
 & \cdots + \frac{1}{\sin(\beta_j)} [M_{j,j-1} - M_{j-1,j} \cos(\beta_j)] \sin \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right) + \cdots \\
 & \cdots + M_{j-1,j} \cos \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right)
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.7. Caso de estudio: comparación entre el método de elementos finitos y el método propuesto

A los efectos de validar el método propuesto (MP), se analizará una estructura tipo mástil atirantado de 120 metros de altura. A tales efectos, se realiza un modelo utilizando el Método de Elementos Finitos (FEM) mediante el uso del programa SAP 2000. En este modelo (FEM: retic), la estructura se modela como un reticulado tridimensional donde las barras trabajan principalmente en fuerza axial y los cables se modelan como elementos de cable. La torre se encuentra articulada en su base y los efectos de segundo orden se consideran a partir de un análisis no línea $P - \Delta$, Figura (2.9). Los resultados se compararán con los obtenidos por el PM.

La torre tiene sección triangular, de 1.20 metros de ancho de cara medida eje a eje de las barras verticales. Las barras son materializadas por perfiles tubulares circulares de acero de módulo de elasticidad $E_s = 200$ GPa. Los

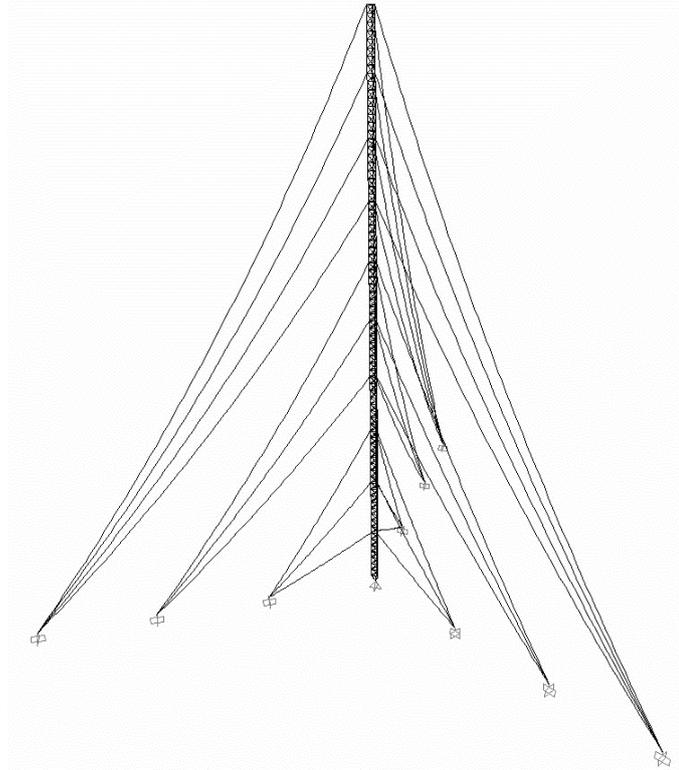


Figura 2.9: Modelo de reticulado espacial de la torre atirantada de 120 m de altura en FEM. Configuración inicial: cables tensados al 10 % de la tensión de rotura. (Observar la configuración catenaria de los cables.)

montantes son de 73.00 mm de diámetro exterior y 5.20 mm de espesor y las barras horizontales y las diagonales de diámetro exterior 42.16 mm y 3.42 mm de espesor. La inclinación de las diagonales es de 45.

Los tirantes son de acero EHS, de tensión de rotura 1400 MPa y módulo de elasticidad $E_{cb} = 185$ GPa. Están colocados con espaciamientos de 12 metros en la altura. Los tirantes cuyas cota de anclaje a la torre es +12 m, +24 m y +36 m, se anclan al terreno a una distancia de 23 m del eje del mástil y son de diámetro nominal 6.35 mm. Los tirantes cuyas cotas de anclaje son +48 m, +60 m y +72 m, se anclan al terreno a una distancia de 46 m y sus diámetros nominales son de 8.00 mm. Los restantes tirantes, cuyos niveles de anclaje a la torre son +84 m, +96 m, +108 m y +120 m, se anclan al terreno a una distancia de 69 m del eje de la torre y sus diámetros nominales son de 8.00 mm.

Las cargas de viento sobre la estructura se calculan a partir de los lineamientos establecidos por la norma TIA 222-G, y se considera una velocidad

característica de viento de 43.4 m/s calculada como la velocidad media del viento en un intervalo de 3 segundos a una altura de 10 m sobre el nivel de terreno para una categoría de exposición C y cuyo período de retorno es de 50 años.

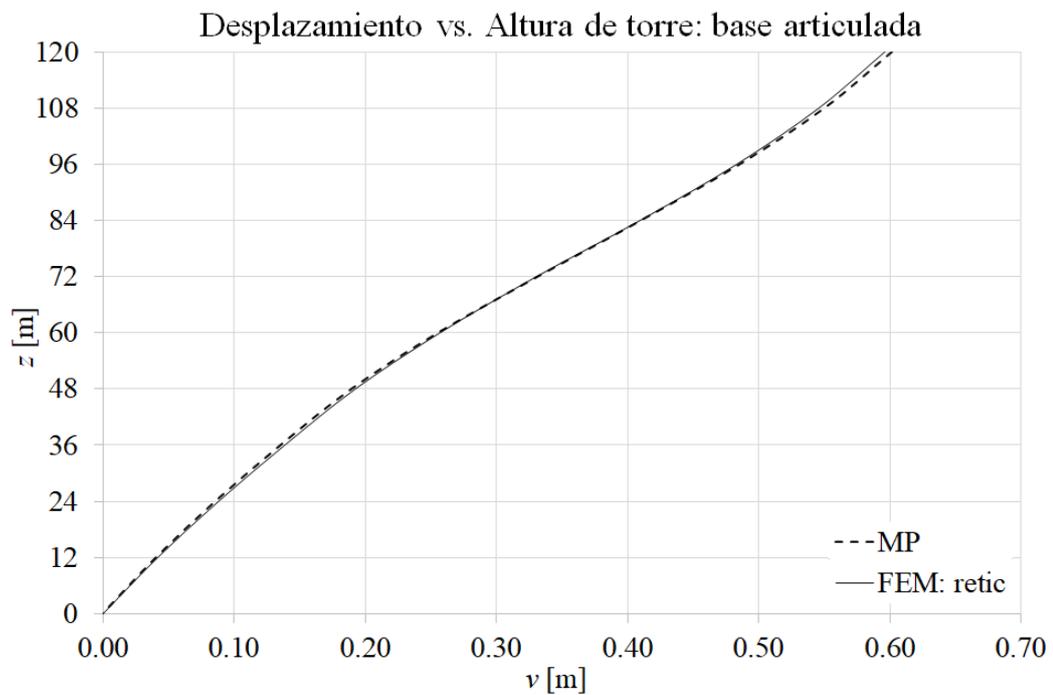


Figura 2.10: Torre 120m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM:retic, con la base de la torre articulada.

2.7.1. Análisis, discusión y comparación de resultados

En relación al máximo desplazamiento de la torre, la diferencia entre el MP y el FEM:retic. es del orden del 0.86%. La diferencia entre el máximo momento flector positivo es del orden de 1.5%, mientras que entre el máximo momento flector negativo es del orden del 12.8%. Con respecto a las fuerzas axiales, solo pequeñas diferencias fueron observadas.

2.8. Conclusiones

En este trabajo se ha propuesto un método aproximado para el cálculo de la deflexión producida por los efectos de segundo orden en mástiles arriostrados

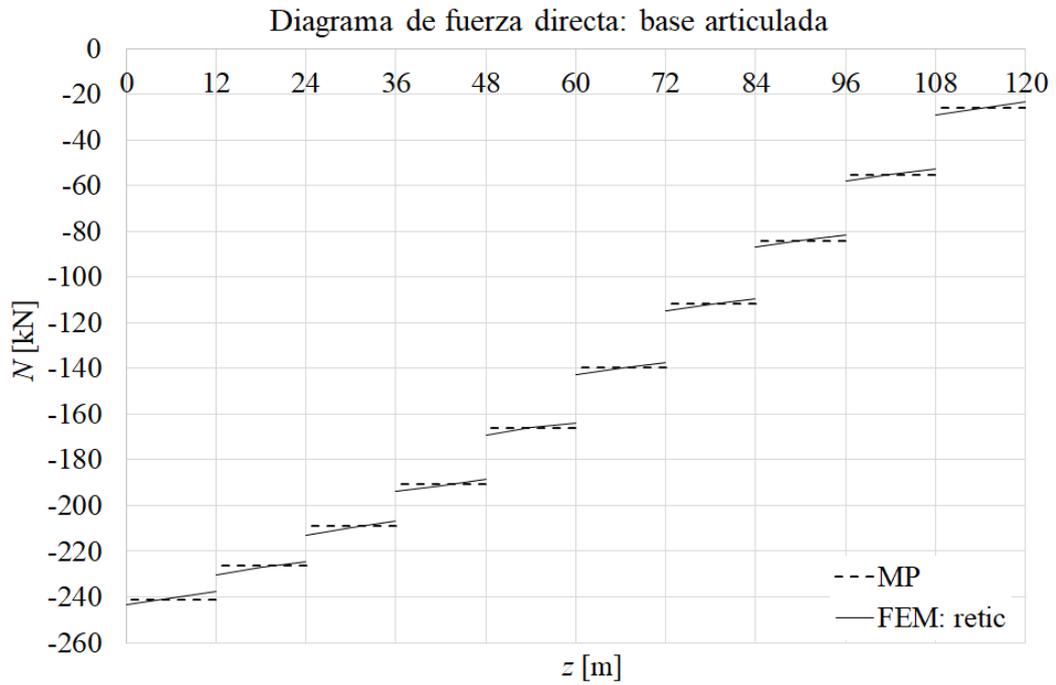


Figura 2.11: Torre 120m: diagrama de fuerza directa para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada.

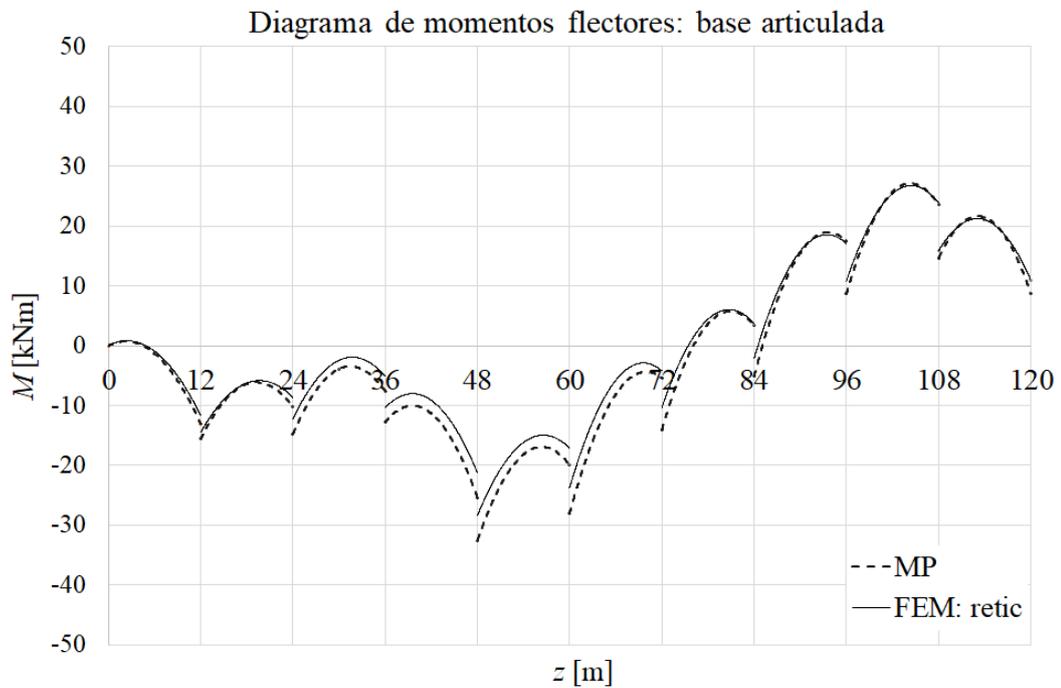


Figura 2.12: Torre 120m: diagrama de momento flector para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada.

de sección triangular. El método se basa en las funciones de estabilidad de la viga-columna de Timoshenko. Las propiedades geométricas de la viga-columna equivalente se obtienen según el patrón de celosía de cada una de las caras de la torre. Los tirantes se modelan como constantes de resorte equivalentes a partir del módulo de elasticidad secante de los cables y tienen en cuenta las excentricidades de los cables a los puntos de anclaje a la torre.

El método propuesto ha sido validado numéricamente mediante dos casos de estudio comparándolo con los métodos de elementos finitos. A partir de los resultados expuestos las siguientes conclusiones pueden ser deducidas:

1. Se observan diferencias poco significativas en el cálculo de los efectos producidos por las deformaciones de segundo orden de la estructura entre el método propuesto y los métodos de elementos finitos. En otras palabras, los valores de las solicitaciones y de los desplazamientos de la estructura obtenidos mediante el método propuesto son suficientemente precisos comparados con los obtenidos mediante el método de elementos finitos, lo que confirma la validez de las hipótesis adoptadas en el desarrollo del método.
2. El método propuesto mantiene la complejidad y rigurosidad matemática de los métodos analíticos, sin embargo ha sido concebido como un método de aplicación simple. Utiliza los conceptos básicos y más generales desde el punto de vista de la ingeniería estructural lo que permiten al ingeniero visualizar rápidamente cuales son los parámetros que influyen en el diseño.
3. El método propuesto considera los efectos de la deformación por cortante y de segundo orden directamente a partir de las funciones de estabilidad, lo que permite trabajar con mayor precisión, sin necesidad de artificio matemático para considerar el efecto de la deformación por cortante o hacer aproximaciones y/o divisiones de los elementos entre los niveles de cada tirante.
4. Es muy sencillo de programar, incluso comparado con el uso de hojas de cálculo, ya que no es necesario discretizar la estructura en una gran cantidad de elementos para la convergencia. Es por ello que el método puede resultar de gran utilidad en las etapas preliminares del diseño, permitiendo un importante ahorro de tiempo. En otras palabras, el método de elementos finitos no presenta mayores ventajas en la etapa de diseño

preliminar que el método propuesto.

5. Si bien el trabajo se ha centrado en las torres de sección triangular equilátera, con un arreglo para los tirantes de tres por nivel, el método propuesto puede extenderse a otro tipo de arreglo de los cables y a otro tipo de formas de sección. Por lo tanto, el método propuesto, inicialmente desarrollado para el análisis de torres atirantadas puede extenderse al análisis de pilones de puentes atirantados.

Capítulo 3

Predicción mejorada de la pérdida de pretensado a largo plazo en elementos de hormigón con pretensado interior no adherente

Páez, P.M.; Sensale, B. (2018). Improved prediction of prestress loss in unbonded prestressed concrete members. *Engineering Structures*, 174: 111-125.

doi: 10.1016/j.engstruct.2018.07.038

Impact Factor (2018): 3.709; Quartile 1.

3.1. Introducción

El término “pretensado no adherente” se utiliza para aquellas piezas de hormigón pretensado para las cuales no existe adherencia entre el hormigón y el acero de pretensado o si existe es tan pequeña que no puede considerarse la adherencia perfecta entre ambos materiales. El pretensado no adherente puede dividirse en dos tipologías diferentes: el pretensado externo y el pretensado interno. En el pretensado interno los cables se colocan embebidos en el hormigón, como ser el en caso de vigas y de losas planas postensadas; mientras que en el pretensado externo los cables no quedan embebidos en el hormigón, como por ejemplo en las vigas cajón de puentes.

El comportamiento de las piezas con pretensado interno está caracterizado

por el hecho de que la posición del cable en cada sección no cambia con la deformación del elemento que lo contiene, mientras que en el pretensado externo, la posición del cable, al deformarse el elemento, está condicionada por el desplazamiento de los puntos de anclajes y los puntos de desvío del cable. El análisis de piezas con pretensado no adherente es inherentemente más complejo que el análisis de piezas con pretensado adherente; ya que a diferencia del pretensado adherente, en el pretensado no adherente no existe compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado y el hormigón que lo rodea, lo que significa que el acero de pretensado y el hormigón pueden moverse uno con respecto al otro. Luego, la fuerza en el cable no adherente dependerá de la deformación del miembro estructural como un todo. En otras palabras, la fuerza en el cable no adherente sometido a cargas externas es elemento-dependiente en lugar de sección-dependiente (Naaman y Alkhairi, 1991b).

Sin pérdida de generalidad, podemos establecer que a partir de la década de los años 60', los diferentes investigadores han puesto mayor énfasis en el estudio del comportamiento de las estructuras con pretensado no adherente, en particular de vigas y de losas (Naaman y Alkhairi, 1991a). A partir de allí, la mayoría de las investigaciones se han enfocado en predecir el comportamiento de dichos elementos hasta la rotura (Alkhairi y Naaman, 1993; Ariyawardena y Ghali, 2002; Du et al. 2016; Gauvreau, 1992, 1993; M. H. Harajli, 2011; M. Harajli y Kanj, 1991; M. H. Harajli, 2012; He y Liu, 2010; Lee y Kim, 2011; Lou et al. 2013; Mattock et al. 1971; Naaman y Alkhairi, 1991a, 1991b; Pisani y Nicoli, 1996; Vu et al. 2010; Xuekang Tao y Gongchen Du, 1985); sin embargo, existen relativamente pocos trabajos enfocados a predecir el comportamiento en servicio de los elementos en flexión bajo cargas instantáneas (Ariyawardena y Ghali, 2002; Du et al. 2016; H. Harajli, 1992; Lee y Kim, 2011; Lou et al. 2013) y menos aún trabajos que permitan predecir el comportamiento en servicio bajo cargas de larga duración (CEB-FIP, 2010; Gauvreau, 1993; Lou et al. 2013).

Para estudiar el comportamiento diferido bajo cargas de servicio en piezas con pretensado interior no adherente, CEB-FIP (2010) establece una fórmula para estimar la pérdida en la fuerza del pretensado basada en el Método de la Tasa de Fluencia (Glanville, 1930; Whitney, 1932). Dicho método se basa en asumir que la tasa de cambio de la fluencia con el tiempo es independiente de la edad de carga, lo cual, las nuevas investigaciones muestran que dicha hipótesis no es correcta (Bazant y Baweja, 1995). Gauvreau (1993) propone una fórmu-

la simplificada para estimar la pérdida en la fuerza del pretensado en piezas con pretensado interior no adherente. Sin embargo, dicha formulación no tiene en cuenta la relajación del acero de pretensado ni tampoco la existencia de armadura pasiva. Para el análisis de largo plazo, Lou et al. (2013) utilizan una formulación basada en el método de los elementos finitos. Si bien la metodología que utilizan los autores para el análisis en el tiempo puede denominarse como de “paso a paso”, es decir, mediante la división del intervalo de tiempo en pequeños intervalos, la función de fluencia utilizada no es la preconizada por los distintos códigos, sino que su forma tiene la ventaja de facilitar la programación con respecto a la simulación de la historia de tensión aplicada. Por otro parte, la utilización del procedimiento propuesto mediante el Método de Elementos Finitos requiere de un alto grado de programación computacional. Guo et al. (2018) proponen un modelo para predecir las pérdidas diferidas en piezas pretensadas. Dicho modelo tiene en cuenta el efecto de la retracción del hormigón, la fluencia y la relajación del acero. Sin embargo, si bien los autores utilizan el método tanto para piezas con pretensado adherente como no adherente, el método se basa en las hipótesis de adherencia y por lo tanto su utilización para piezas con pretensado no adherente no es del todo correcta.

En vista de las tendencias actuales de las normativas basadas en el “Método de los Estados Límites”, tan importante como predecir el comportamiento de una pieza con pretensado no adherente en la rotura es poder predecir su comportamiento bajo cargas de servicio y en particular bajo cargas de servicio de larga duración. Es importante estimar la pérdida de pretensado tan precisamente como sea posible, ya que una incorrecta estimación puede causar problemas de serviciabilidad de la pieza; por ejemplo, puede excederse la resistencia a tracción del hormigón bajo cargas de servicio y/o puede producirse una excesiva deformación (Youakim et al. 2007).

En la mayoría de las aplicaciones prácticas con pretensado, los elementos se calculan de modo que, bajo la acción de las cargas de larga duración todas las secciones de la pieza se encuentren en Estado I, es decir, que no se alcance la resistencia a flexo-tracción del hormigón, por lo que las deformaciones por fluencia del hormigón tenderán a ser mucho mayores que en el caso de elementos parcialmente pretensados. Los efectos de la fluencia, la retracción del hormigón y la relajación del acero provocarán una redistribución de tensiones entre el acero y el hormigón, que se traducirá en general en una pérdida en la fuerza en el acero de pretensado y por lo tanto en un aumento de las deformaciones.

Este trabajo está motivado por la necesidad de predecir el comportamiento de los elementos con pretensado interior no adherente bajo cargas de larga duración. El principal objetivo de este trabajo es proponer una fórmula simplificada para calcular la pérdida de la fuerza de pretensado en piezas isostáticas con pretensado interior no adherente que tenga en cuenta los efectos de la relajación del acero y la existencia de la armadura pasiva. El segundo objetivo de este trabajo es desarrollar la formulación del Método Paso a Paso (SSM) y del Método del Módulo Efectivo Ajustado por la Edad (AAEM) para el análisis en tiempo de piezas con pretensado interior no adherente; hasta la fecha no existe bibliografía ni trabajo de investigación que haya desarrollado dicha formulación. Finalmente, un enfoque basado en el método de los elementos finitos (FEM) para modelar el comportamiento de las vigas de hormigón con pretensado interior no adherente a lo largo del tiempo es propuesto. La originalidad de esta técnica radica en el tratamiento de los efectos de largo plazo. También en este trabajo, se implementará un algoritmo computacional basado en el Método de Paso a Paso a partir de los principios básicos de la Resistencia de los Materiales sin utilizar elementos finitos. La precisión de la ecuación propuesta se evaluó a partir de los resultados de estudios previos y se contrastó con el implemento computacional basado en el Método de Paso a Paso. Los resultados muestran que la ecuación propuesta predice adecuadamente la pérdida de pretensado y tiene una mayor precisión comparada con los formulaciones simplificadas existentes.

3.2. Ecuaciones constitutivas de los materiales: comportamiento instantáneo y diferido

3.2.1. Hormigón

Para hormigones de resistencias convencionales, esto es, para hormigones cuya resistencia característica a la compresión en probetas cilíndricas a los 28 días de edad sea menor a 50 MPa, puede considerarse un comportamiento elástico lineal en compresión hasta tensiones del orden del 40 % de su resistencia característica. Por lo tanto la relación tensión-deformación para el hormigón a

compresión, puede expresarse como, Ecuación (3.1):

$$\sigma_c = E_c \varepsilon_e \quad (3.1)$$

en donde σ_c es la tensión producida en el hormigón por una deformación unitaria de compresión, ε_e y E_c es el módulo de elasticidad del hormigón. El módulo de elasticidad del hormigón puede calcularse a partir de los modelos proporcionados en las diferentes normas, por ejemplo, el proporcionado por el Model Code 2010 (2012).

La deformación unitaria total en el tiempo de un elemento de hormigón no fisurado a temperatura constante, puede escribirse como la suma de la deformación instantánea, $\varepsilon_e(t)$, la deformación debida a la fluencia entre los tiempos t_0 y t , $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$, y la deformación debida a retracción entre los tiempos t_s y t , $\varepsilon_{sh}(t, t_s)$, siendo t_0 la edad del hormigón al momento de la aplicación de la carga y t_s la edad del hormigón al comienzo de la retracción (Bazant, 1982), Ecuación (3.2):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (3.2)$$

La deformación por retracción en el hormigón puede definirse como la deformación dependiente del tiempo de una pieza de hormigón en un ambiente dado, no restringida contra el desplazamiento y no sometida a carga externa (Neville, 1970). La deformación por retracción puede calcularse a partir del modelo proporcionado por el Model Code 2010 (2012).

Si un espécimen de hormigón es sometido a una tensión de compresión en el instante $t = t_0$, $\sigma_c(t_0)$ y mantenida constante en el tiempo, la deformación por fluencia en el instante $t > t_0$ viene dada por la Ecuación (3.3):

$$\varepsilon_{cr}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \quad (3.3)$$

donde $\varphi(t, t_0)$ es el coeficiente de fluencia and $E_c(t_0)$ es el módulo de elasticidad del hormigón en el instante $t = t_0$. El valor del coeficiente de fluencia puede calcularse a partir del modelo propuesto por el Model Code 2010 (2012).

Si la magnitud de la tensión varía a lo largo del tiempo, lo que es usual en las estructuras de hormigón, la deformación por fluencia puede obtenerse a partir del principio de superposición. El principio de superposición fue aplicado por primera vez al hormigón por McHenry (1943) y requiere del cumplimiento de ciertas hipótesis para la obtención de resultados suficientemente precisos.

Estas hipótesis suelen denominarse hipótesis de linealidad (A. Ross, 1958) y pueden enunciarse de la siguiente manera: (a) la tensión en el hormigón es menor que 40 % de la resistencia característica a la compresión, f_{ck} ; (b) ε es no decreciente; es decir, no se producen deformaciones unitarias de magnitud decreciente; (c) no se produce un cambio significativo en el contenido de humedad de la pieza; y (d) no existen variaciones bruscas de la tensión. En la mayoría de las aplicaciones prácticas de la ingeniería civil se cumplen dichas hipótesis por lo que el principio de superposición suele aceptarse en la mayoría de los análisis y los cálculos. La deformación unitaria en el hormigón en el tiempo t , para una historia determinada de tensiones se obtiene a partir de la Ecuación (3.4):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} (1 + \varphi(t, t_0)) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (3.4)$$

Si la variación de la tensión entre t_0 y t es conocida, $\Delta\sigma_c(t)$, la Ecuación (3.4) puede escribirse de manera simplificada (Bazant, 1972; W. Dilger y Neville, 1971; Neville, 1983), Ecuación (3.5):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} (1 + \varphi(t, t_0)) + \frac{\Delta\sigma_c(t)}{\bar{E}_c(t, t_0)} + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (3.5)$$

donde $\bar{E}_c(t, t_0)$ se denomina módulo de elasticidad ajustado por la edad y su expresión viene dada por la Ecuación (3.6):

$$\bar{E}_c(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} \quad (3.6)$$

$\chi(t, t_0)$ es el coeficiente de envejecimiento (aging coefficient) cuya expresión viene dada por la Ecuación (3.7):

$$\chi(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{\sigma_c(t_0) - \sigma_c(t)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} = \frac{E_c(t_0)}{E_c(t_0) - E_R(t, t_0)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} \quad (3.7)$$

en donde $E_R(t, t_0)$ representa la función de relajación del hormigón, definida como la tensión en el instante t debida a una deformación unitaria aplicada en el instante t_0 y mantenida constante durante el período t_0 a t . Los valores de la función de relajación para el caso de una deformación unitaria constante pueden calcularse mediante la aplicación de la Ecuación (3.4) o pueden obtenerse de manera aproximada a partir de la fórmula propuesta por Bazant et

al. (2013).

3.2.2. Acero pasivo

Bajo cargas de servicio, el acero pasivo suele trabajar a tensiones relativamente bajas y por lo tanto su comportamiento será elástico lineal para cualquier instante de tiempo. La relación tensión-deformación del acero pasivo puede expresarse mediante la Ecuación (3.8):

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (3.8)$$

siendo E_s el módulo de elasticidad del acero pasivo.

3.2.3. Acero de pretensado

En general, los aceros de pretensado presentan un comportamiento elástico lineal hasta aproximadamente el 70 % de su límite elástico característico y partir de allí presentan un comportamiento no lineal. Sin embargo, los diferentes códigos permiten la utilización de diagramas idealizados de tensión-deformación para dicho acero, asumiendo un comportamiento elástico lineal para tensiones hasta su límite elástico característico CEB-FIP, 2010 (MC10), Ecuación (3.9):

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p \quad (3.9)$$

En contraposición con los acero pasivos, los aceros de pretensado suelen trabajar a elevadas tensiones en condiciones de servicio, lo que originará un proceso de relajación del acero. Por lo tanto para un tiempo $t > t_0$ la relación tensión-deformación se expresa como, Ecuación (3.10):

$$\varepsilon_p(t_0) = \frac{\sigma_p(t_0) - \Delta\sigma_{pr}(t - t_0)}{E_p} \quad (3.10)$$

donde $\Delta\sigma_{pr}(t - t_0)$ es la relajación intrínseca, esto es, la pérdida de tensión en el acero a longitud y temperatura constantes (si bien $\Delta\sigma_{pr}(t - t_0)$ representa una reducción en la tensión del acero, se ha considerado de magnitud positiva). Sin embargo, para elementos de hormigón pretensados el proceso de relajación será a longitud variable y por lo tanto la pérdida de tensión en el acero será menor que en el caso de relajación intrínseca. Uno de los modelos utilizados para el

cálculo de la relajación a longitud variable es el del coeficiente de relajación χ_r ; la pérdida de tensión a longitud variable se expresa como (Ghali et al. 2002), Ecuación (3.11):

$$\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t-t_0) = \chi_r \Delta\sigma_{pr}(t-t_0) \quad (3.11)$$

donde $\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t-t_0)$ es la relajación reducida. El coeficiente de relajación viene dado por la Ecuación (3.12):

$$\chi_r = \int_{\xi=0}^{\xi=1} (1-\Omega\xi) \left(\frac{\lambda(1-\Omega\xi)-0.4}{\lambda-0.4} \right)^2 d\xi \quad (3.12)$$

en donde Ω y λ vienen dados por las Ecuaciones (3.13):

$$\Omega = \frac{\Delta\sigma_{ps}(t-t_0) - \Delta\sigma_{pr}(t-t_0)}{\sigma_{p,0}} \quad (3.13)$$

$$\lambda = \frac{\sigma_{p,0}}{f_{ptk}}$$

donde $\sigma_{p,0}$ es la tensión inicial del pretensado, f_{ptk} es la resistencia característica a tracción del acero y $\Delta\sigma_{ps}(t-t_0)$ la variación de tensión en el acero debido a la combinación de los efectos de fluencia y retracción del hormigón y de la relajación del acero. En la Ecuación (3.13), $\Delta\sigma_{ps}(t-t_0)$ se ingresa en valor absoluto. Por lo tanto, es necesario efectuar un proceso iterativo para determinar el valor del coeficiente de relajación.

3.3. Condiciones de compatibilidad para el acero de pretensado no adherente

El comportamiento de los elementos pretensados de hormigón con pretensado interior no adherente es caracterizado por no existir compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado y el hormigón que lo rodea. Si asumimos perfecta no adherencia entre el cable y el hormigón, la fuerza en el cable de pretensado N_p será constante a lo largo de su longitud entre los puntos de anclaje, Ecuación (3.14):

$$N_p = A_p \sigma_p(\varepsilon_p) \quad (3.14)$$

donde A_p y $\sigma_p(\varepsilon_p)$ son el área del acero de pretensado no adherente y la tensión

para una deformación unitaria ε_p , respectivamente. La deformación unitaria del acero puede escribirse como, Ecuación (3.15):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + \frac{\Delta l_p}{l_{p,0}} \quad (3.15)$$

donde $\varepsilon_{p,0}$ es la deformación unitaria inicial del cable, Δl_p es el cambio en la longitud del cable y $l_{p,0}$ su longitud inicial. La longitud inicial es medida a partir de un estado de deformaciones de referencia.

Bajo las hipótesis de la teoría de vigas de Navier-Bernoulli podemos asumir que para el pretensado interior no adherente la distancia $d_p(x)$ medida desde la cara superior de la viga hasta el baricentro del cable no varía con la aplicación de las cargas externas, siendo x la distancia entre un extremo de la viga y la sección de la viga que se analiza. Por otra parte, para las vigas comúnmente utilizadas en puentes, edificios o para otros elementos estructurales pretensados, el ángulo de inclinación del cable $\alpha(x)$ es pequeño y por lo tanto la deformación del cable Δl_p puede escribirse como la Ecuación (3.16) (Gauvreau, 1993):

$$\Delta l_p = \int_{x=0}^{x=l} \Delta \varepsilon_{c,p}(x) dx \quad (3.16)$$

siendo l la longitud de la viga entre puntos de anclaje y $\Delta \varepsilon_{c,p}(x)$ la variación en la deformación unitaria en el hormigón en una fibra coincidente con el centro de gravedad del cable para una sección ubicada a una distancia x , su expresión viene dada por la Ecuación (3.17):

$$\Delta \varepsilon_{c,p}(x) = \varepsilon_{c,p}(x) - \varepsilon_{c,p,0}(x) \quad (3.17)$$

en donde $\varepsilon_{c,p}(x)$ es la deformación unitaria del hormigón de una fibra coincidente con el centro de gravedad del cable y $\varepsilon_{c,p,0}(x)$ es la deformación unitaria en el hormigón para el estado de referencia en una fibra coincidente con el centro de gravedad del cable y en una sección ubicada a una distancia x .

3.4. Análisis a lo largo del tiempo de vigas con pretensado interior no adherente: ecuación propuesta para calcular la pérdida de pretensado

Consideremos una viga pretensada estáticamente determinada con preten-

sado interior no adherente cuya sección presente un eje de simetría y tal que el eje de la flexión sea perpendicular a dicho eje, Figura (3.1). Consideremos que la fuerza de pretensado y todas las cargas externas de larga duración son aplicadas en el instante $t = t_0$ y que bajo estas condiciones la pieza se encuentra en Estado I, es decir no fisurada. Supongamos además que el acero activo y el acero pasivo están colocados en la sección suficientemente próximos, como para considerar que están concentrados en una misma fibra.

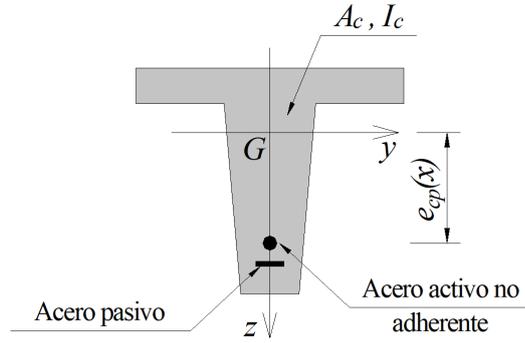


Figura 3.1: Sección transversal: viga estáticamente determinada con pretensado interior no adherente y acero pasivo de refuerzo.

La fluencia y retracción del hormigón y la relajación del acero de pretensado generan un cambio en la redistribución de las tensiones entre el hormigón y el acero, pasivo y activo. Este cambio puede considerarse como una redistribución en el estado de auto-equilibrio inducido por el acero de pretensado; además, bajo los supuestos establecidos, la suma del cambio en las fuerzas del hormigón y del acero debe ser nula (Ghali et al. 2002; Menn C., 1990), Ecuación (3.18):

$$\Delta F_c(t) = -\Delta P_{rs}(t) = -\Delta P_p(t) - \Delta P_s(t) \quad (3.18)$$

donde $\Delta F_c(t)$ es la variación en la fuerza resultante en el hormigón, $\Delta P_{rs}(t)$ es la variación en la fuerza del acero (pasivo y activo), $\Delta P_p(t)$ es la variación en la fuerza del acero activo y $\Delta P_s(t)$ es la variación en la fuerza del acero pasivo.

Por otra parte, puede mostrarse que la variación en la tensión en el hormigón en una fibra coincidente con el centro de gravedad del acero de pretensado $\Delta\sigma_{c,p}(t, x)$ es (Menn C., 1990), Ecuación (3.19):

$$\Delta\sigma_{c,p}(t, x) = \sigma_{c,p}(t, x) - \sigma_{c,p}(t_0, x) = \frac{\Delta F_c(t, x)}{A_c} + \frac{\Delta F_c(t, x)}{I_c} e_{cp}(x)^2 \quad (3.19)$$

siendo A_c e I_c el área y el momento de inercia de la sección de hormigón respecto a ejes coordenados baricéntricos, y $e_{cp}(x)$ la distancia entre el baricentro de la sección de hormigón y el baricentro del acero de pretensado.

3.4.1. Vigas isostáticas con cable recto y armadura pasiva constante

Consideremos que el trazado de los cables de pretensado no adherente es recto, que el acero pasivo de refuerzo es constante a lo largo de la viga y que el acero de pretensado y el acero pasivo están colocados en la sección suficientemente próximos como para considerar que están concentrados en una misma fibra. Luego, la variación de la deformación unitaria del acero activo en el tiempo puede escribirse como en la Ecuación (3.20):

$$\Delta\varepsilon_p(t) = \frac{\Delta P_p(t)}{E_p A_p} + \frac{\Delta\bar{\sigma}_{pr}}{E_p} = \frac{\Delta l_p(t)}{l_p} \quad (3.20)$$

$\Delta\bar{\sigma}_{pr}$ se ha considerado una magnitud positiva.

La variación en la longitud del acero de pretensado no adherente puede obtenerse a partir de la Ecuación (3.16). Luego, aplicando el método del módulo efectivo ajustado por la edad a una fibra del hormigón coincidente con la ubicación del acero, Ecuación (3.5), la variación en la longitud del acero de pretensado puede escribirse como la Ecuación (3.21):

$$\begin{aligned} \Delta l_p(t) = & \int_{x=0}^{x=l} \frac{\sigma_{c,p,0}}{E_c(t_0)} \varphi(t, t_0) dx + \int_{x=0}^{x=l} \varepsilon_{sh}(t, t_0) dx + \dots \\ & \dots + \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}(x)^2}{I_c} \right) \frac{\Delta F_c(t, x)}{\bar{E}_c(t, t_0)} dx \end{aligned} \quad (3.21)$$

siendo $\sigma_{c,p,0}(x)$ la tensión inicial en el hormigón en una fibra coincidente con el baricentro del acero, considerando las acciones exteriores de larga duración y la acción del pretensado.

Teniendo en cuenta la compatibilidad de deformaciones entre el acero pasivo y el hormigón en una fibra del hormigón coincidente con el baricentro del acero, la variación de la deformación en el hormigón será igual a la variación de la

deformación en el acero pasivo, Ecuación (3.22):

$$\Delta\varepsilon_s(t, x) = \Delta\varepsilon_{c,p}(t, x)$$

$$\frac{\sigma_s(t, x)}{E_s} = \frac{\sigma_{c,p,0}(x)}{E_c(t_0)}\varphi(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_0) + \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}(x)^2}{I_c} \right) \frac{\Delta F_c(t, x)}{\bar{E}_c(t, t_0)} \quad (3.22)$$

Si la sección del acero pasivo es A_s , la variación en la fuerza en el acero pasivo es $\Delta P_s(t, x) = A_s \Delta \sigma_s(t, x)$. Luego, teniendo en cuenta las Ecuaciones (3.18) y (3.22), $\Delta P_s(t, x)$ puede escribirse como la Ecuación (3.23):

$$\begin{aligned} \Delta P_s(t, x) &= \frac{\sigma_{c,p,0}(x)}{E_c(t_0)} E_s A_s \varphi(t, t_0) + E_s A_s \varepsilon_{sh}(t, t_0) + \dots \\ &\dots - E_s A_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}(x)^2}{I_c} \right) \frac{(\Delta P_s(t, x) + \Delta P_p(t))}{\bar{E}_c(t, t_0)} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Reordenando, la variación en la fuerza en el acero pasivo viene dada por la Ecuación (3.24):

$$\Delta P_s(t, x) = \frac{\frac{\sigma_{c,p,0}(x)}{E_c(t_0)} E_s A_s \varphi(t, t_0) + E_s A_s \varepsilon_{sh}(t, t_0) - E_s A_s \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}(x)^2}{I_c} \right) \frac{\Delta P_p(t)}{E_c(t, t_0)}}{1 + \frac{E_s A_s}{E_c(t, t_0)} \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}(x)^2}{I_c} \right)} \quad (3.24)$$

Teniendo en cuenta que $e_{cp}(x) = e_{cp} = \text{constante}$, $l_p = l$; sustituyendo las Ecuaciones (3.18) y (3.24) en la Ecuación (3.21), e igualando las Ecuaciones (3.21) y (3.20), obtenemos la Ecuación (3.25):

$$\Delta P_p(t) = \frac{\frac{1}{l} \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \eta(t, t_0) \int_{x=0}^{x=l} \sigma_{c,p,0}(x) dx + \eta(t, t_0) \varepsilon_{sh}(t, t_0) - \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr}}{E_p}}{\frac{1}{E_p A_p} + \frac{\omega}{\bar{E}_c(t, t_0)} - \frac{\omega^2 E_s A_s}{E_c(t, t_0)^2} \left(1 + \frac{\omega E_s A_s}{E_c(t, t_0)} \right)} \quad (3.25)$$

en donde ω y $\eta(t, t_0)$ vienen dados por las Ecuaciones (3.26) y (3.27), respectivamente.

$$\omega = \frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}^2}{I_c} \quad (3.26)$$

$$\eta(t, t_0) = 1 - \frac{\omega E_s A_s}{\bar{E}_c(t, t_0) \left(1 + \frac{E_s A_s \omega}{E_c(t, t_0)} \right)} \quad (3.27)$$

La Ecuación (3.25) es la *ecuación propuesta* para el cálculo de la pérdida de la fuerza de pretensado para el caso de vigas con tendones rectos. El valor

de $\Delta P_p(t)$ obtenido mediante dicha ecuación es de magnitud negativa.

3.4.2. Trazado genérico de los cables: Vigas isostáticas

Cuando el trazado de los cables es genérico, la distancia entre el baricentro de la sección de hormigón y el baricentro del acero de pretensado deja de ser constante; además, no puede considerarse que el acero pasivo y el acero de pretensado están ubicados suficientemente próximos en la sección, y por lo tanto, algunos de los razonamientos antes expuestos dejan de ser válidos. Despreciando la colaboración de la armadura pasiva y teniendo en cuenta que $\Delta F_c(t) = -\Delta P_p(t)$ (Ecuación (3.18)), e igualando la Ecuación (3.20) y (3.21), obtenemos la Ecuación (3.28):

$$\Delta P_p(t) = \frac{\frac{1}{l} \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \int_{x=0}^{x=l} \sigma_{c,p,0}(x) dx + \varepsilon_{sh}(t, t_0) - \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr}}{E_p}}{\frac{1}{E_p A_p} + \frac{1}{l \cdot E_c(t, t_0)} \int_{x=0}^{x=l} \left(\frac{1}{A_c} + \frac{e_{cp}(x)^2}{I_c} \right) dx} \quad (3.28)$$

La Ecuación (3.28) es la *ecuación propuesta* para el cálculo de la pérdida de la fuerza de pretensado para el caso de vigas con trazado genérico de los cables.

3.5. Generalización del Método de Paso a Paso y del módulo efectivo ajustado por la edad

A los efectos de validar las fórmulas simplificadas propuestas, se generalizará la metodología de análisis de secciones en el tiempo para su aplicación al análisis de vigas pretensadas con pretensado interior no adherente.

3.5.1. Método Paso a Paso

Consideremos nuevamente una viga pretensada estáticamente determinada, con pretensado interior no adherente, cuya sección presente un eje de simetría y tal que el eje de la flexión sea perpendicular a dicho eje. Supongamos que la viga tenga m_s capas de acero pasivo y m_p capas de acero activo no adherente, Figura (3.2). Consideremos que bajo la acción de la fuerza de pretensado y todas las cargas externas de larga duración la pieza no está fisurada.

Las relaciones constitutivas para el hormigón y para el acero para los tiempos $t = t_0$ y $t = t_j$ son:

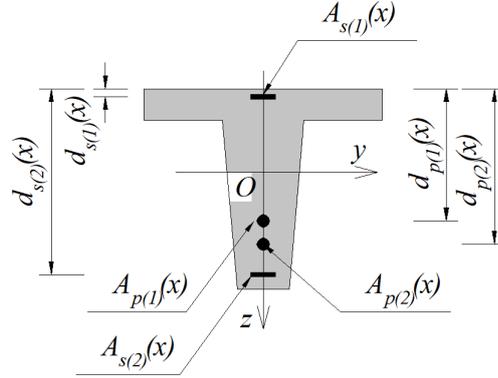


Figura 3.2: Sección transversal y disposición del acero pasivo una viga de hormigón pretensada.

Para $t = t_0$ (Ecuación (3.29)):

$$\begin{aligned}
 \sigma_{c,0}(x) &= E_{c,0}\varepsilon_0 \\
 \sigma_{s(i),0}(x) &= E_{s(i)}\varepsilon_{s,0} \\
 \sigma_{p(i),0}(x) &= E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i),0}}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} \right)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Utilizando la “regla rectangular” para la integración numérica, la Ecuación (3.5) puede reescribirse como la Ecuación (3.30) (Gilbert y Ranzi, 2010):

$$\varepsilon(t_j) = J(t_j, t_0)\sigma_c(t_0) + \sum_{i=1}^{i=j} J(t_j, t_i)\Delta\sigma_c(t_i) + \varepsilon_{sh}(t_j, t_s) \tag{3.30}$$

donde $\Delta\sigma_c(t_i) = \sigma_c(t_i) - \sigma_c(t_{i-1})$ y $J(t_j, t_i)$ representa la función de fluencia calculada al tiempo t_j relativa a una tensión unitaria aplicada en el tiempo t_i ; su expresión viene dada por la Ecuación (3.31):

$$J(t_j, t_i) = \frac{1 + \varphi(t_j, t_i)}{E_c(t_i)} \tag{3.31}$$

siendo $E_c(t_i)$ el módulo de deformación instantáneo del hormigón en el instante de tiempo t_i .

Por lo tanto, para el instante $t = t_j$ la relación constitutiva de los materiales

puede escribirse como la Ecuación (3.32):

$$\begin{aligned}
\sigma_c(t_j, x) &= E_c(t_j) (\varepsilon(t_j, x) - \varepsilon_{sh}(t_j)) + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \sigma_c(t_i, x) \\
\sigma_{s(i)}(t_j, x) &= E_{s(i)} \varepsilon_s(t_j, x) \\
\sigma_{p(i)}(t_j, x) &= E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right)
\end{aligned} \tag{3.32}$$

donde $F_e(t_j, t_i) = (J(t_j, t_{i+1}) - J(t_j, t_i)) / J(t_j, t_j)$.

Si $N_{ext}(t_j, x)$ y $M_{ext}(t_j, x)$ son la fuerza axial y el momento flector externos en una sección ubicada a una distancia x del extremo, para un instante de tiempo t_j , y $N_{int}(t_j, x)$ y $M_{int}(t_j, x)$ son la fuerza axial y el momento flector internos en la misma sección y en el mismo instante de tiempo, con respecto a un sistema de ejes coordenados de referencia, respectivamente; las condiciones de equilibrio se expresan como la Ecuación (3.33):

$$\begin{aligned}
N_{int}(t_j, x) &= N_{ext}(t_j, x) \\
M_{int}(t_j, x) &= M_{ext}(t_j, x)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

La fuerza axial y el momento flector interno pueden escribirse como la suma de las fuerzas y de los momentos flectores resistidos por el hormigón, el acero pasivo y los tendones no adherentes, Ecuación (3.34):

$$\begin{aligned}
N_{int}(t_j, x) &= N_c(t_j, x) + N_s(t_j, x) + N_p(t_j, x) \\
M_{int}(t_j, x) &= M_c(t_j, x) + M_s(t_j, x) + M_p(t_j, x)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

donde $N_c(t_j, x)$, $N_s(t_j, x)$ y $N_p(t_j, x)$ son las fuerzas axiales en la sección x y en instante de tiempo t_j resistidos por el hormigón, el acero pasivo y el acero activo no adherente con respecto a un sistema de ejes coordenados de referencia, respectivamente; y $M_c(t_j, x)$, $M_s(t_j, x)$ y $M_p(t_j, x)$ son los momentos flectores resistidos por dichos materiales.

Teniendo en cuenta las hipótesis de Euler-Bernoulli, la deformación unitaria en una fibra del hormigón ubicada a una distancia z medida desde el sistema de ejes de referencia para un instante de tiempo t_j viene dada por la Ecuación (3.35):

$$\varepsilon(t_j, x, z) = \varepsilon_r(t_j, x) + z \cdot \kappa(t_j, x) \tag{3.35}$$

en donde $\varepsilon_r(t_j)$ y $\kappa(t_j, x)$ son la deformación unitaria a nivel del punto de

referencia O y la curvatura, respectivamente.

A partir de la Ecuación (3.32) y teniendo en cuenta la relación dada en la Ecuación (3.35), la fuerza axial resistida por el hormigón en una sección ubicada a una distancia x del extremo y para el instante t_j , viene dada por la Ecuación (3.37):

$$\begin{aligned}
N_c(t_j, x) &= \int_{A_c} \sigma_c(t_j, x) dA & (3.36) \\
&= \int_{A_c} [E_c(t_j) (\varepsilon_r(t_j, x) + z \cdot \kappa(t_j, x) - \varepsilon_{sh}(t_j))] dA + \dots \\
&\quad \dots \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \int_{A_c} \sigma_c(t_i, x) dA \\
&= A_c(x) E_c(t_j) \varepsilon_r(t_j, x) + B_c(x) E_c(t_j) \kappa(t_j, x) + \dots \\
&\quad \dots - A_c(x) E_c(t_j) \varepsilon_{sh}(t_j) + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) N_c(t_i, x)
\end{aligned}$$

siendo $A_c(x)$ y $B_c(x)$ el área de la sección de hormigón y el momento de primer orden de la sección con respecto al eje de referencia Oy , respectivamente.

La fuerza axial resistida por el acero pasivo en una sección ubicada a una distancia x del extremo y para el instante t_j , viene dada por la Ecuación (3.37):

$$N_s(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) \quad (3.37)$$

y la fuerza axial resistida por el acero activo no adherente viene dada por la Ecuación (38):

$$N_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (3.38)$$

El momento flector resistido por el hormigón en una sección ubicada a una

distancia x del extremo y para el instante t_j , viene dada por la Ecuación (3.39):

$$\begin{aligned}
M_c(t_j, x) &= \int_{A_c} z \cdot \sigma_c(t_j, x) dA \\
&= \int_{A_c} z [E_c(t_j) (\varepsilon_r(t_j, x) + z \cdot \kappa(t_j, x) - \varepsilon_{sh}(t_j))] dA + \dots \\
&\quad \dots \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \int_{A_c} z \cdot \sigma_c(t_i, x) dA \\
&= B_c(x) E_c(t_j) \varepsilon_r(t_j, x) + I_c(x) E_c(t_j) \kappa(t_j, x) + \dots \\
&\quad \dots - B_c(x) E_c(t_j) \varepsilon_{sh}(t_j) + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) M_c(t_i, x) \quad (3.39)
\end{aligned}$$

siendo $I_c(x)$ el momento de segundo orden de la sección de hormigón con respecto al eje de referencia Oy .

El momento flector resistido por el acero pasivo en una sección ubicada a una distancia x del extremo y para el instante t_j , viene dada por la Ecuación (3.40):

$$M_s(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) \quad (3.40)$$

y el momento flector resistido por el acero activo no adherente viene dada por la Ecuación (3.41):

$$M_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} z_{p(i)}(x) A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (3.41)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (3.37) a la (3.41) en la Ecuación (3.34), pode-

mos rescribir dicha ecuación como la Ecuación (3.42):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) \end{bmatrix} &- \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A(t_j, x) & R_B(t_j, x) \\ R_B(t_j, x) & R_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} + \dots \\
\dots &+ \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_c(t_i, x) \\ M_c(t_i, x) \end{bmatrix} - E_c(t_j) \varepsilon_{sh}(t_j) \begin{bmatrix} A_c(x) \\ B_c(x) \end{bmatrix} + \dots \\
\dots &- \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} + \dots \\
\dots &+ \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \tag{3.42}
\end{aligned}$$

en donde $R_A(t_j, x)$, $R_B(t_j, x)$ y $R_I(t_j, x)$ representan la rigidez axial, la rigidez relativa al momento de primer orden y la rigidez flexional, respectivamente, con respecto a un sistema de eje coordenados de referencia. Sus expresiones vienen dados por la Ecuación (3.43):

$$\begin{aligned}
R_A(t_j, x) &= A_c(x) E_c(t_j) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \\
R_B(t_j, x) &= B_c(x) E_c(t_j) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \tag{3.43} \\
R_I(t_j, x) &= I_c(x) E_c(t_j) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x) E_{s(i)}
\end{aligned}$$

El alargamiento del cable de pretensado no adherente ubicado en capa i , para instante de tiempo t_j , se obtiene mediante la Ecuación (3.44):

$$\begin{aligned}
\Delta l_{p(i)}(t_j) &= \int_{x=0}^{x=l} (\varepsilon_r(t_j, x) + z_{p(i)} \kappa(t_j, x)) dx + \dots \\
&\dots \int_{x=0}^{x=l} (\varepsilon_{r,0,ref}(x) + z_{p(i)} \kappa_{0,ref}(x)) dx \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Luego, la deformación unitaria a nivel del sistema de ejes de referencia y la curvatura en una sección ubicada a una distancia x del extremo, se obtienen

a partir de la Ecuación (3.45):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} &= [R(t_j, x)] \left(\begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
\dots &- [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_c(t_i, x) \\ M_c(t_i, x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
\dots &+ [R(t_j, x)] \left(E_c(t_j) \varepsilon_{sh}(t_j) \begin{bmatrix} A_c(x) \\ B_c(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
\dots &+ [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) + \dots \\
\dots &- [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) \quad (3.45)
\end{aligned}$$

en donde $[R(t_j, x)]$ viene dada por la Ecuación (3.46):

$$\begin{aligned}
[R(t_j, x)] &= \\
&\frac{1}{(R_A(t_j, x)R_I(t_j, x) - R_B(t_j, x)^2)} \begin{bmatrix} R_I(t_j, x) & -R_B(t_j, x) \\ -R_B(t_j, x) & R_A(t_j, x) \end{bmatrix} \quad (3.46)
\end{aligned}$$

3.5.2. Método del módulo efectivo ajustado por la edad

La relación constitutiva para el hormigón en el tiempo dado por la Ecuación (3.32), puede reescribirse utilizando el método del coeficiente de envejecimiento para cualquier tiempo t mayor que t_0 (Gilbert y Ranzi, 2010), Ecuación (3.47):

$$\sigma_c(t, x) = \bar{E}_c(t) (\varepsilon(t, x) - \varepsilon_{sh}(t)) + F_{e,TB} \cdot \sigma_c(t_0, x) \quad (3.47)$$

en donde $F_{e,TB}(t, t_0)$ viene dado por la Ecuación (3.48):

$$F_{e,TB}(t, t_0) = \varphi(t, t_0) \left(\frac{\chi(t, t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} \right) \quad (3.48)$$

Siguiendo un procedimiento análogo al descrito en el ítem anterior, la Ecuación

ción (3.45) puede describirse según la Ecuación (3.49):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \varepsilon_r(t, x) \\ \kappa(t, x) \end{bmatrix} &= [R(t, x)] \left(\begin{bmatrix} N_{ext}(t, x) \\ M_{ext}(t, x) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots - [R(t, x)] \left(F_{e,TB}(t, t_0) \begin{bmatrix} N_c(t_0, x) \\ M_c(t_0, x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t, x)] \left(\bar{E}_c(t) \varepsilon_{sh}(t) \begin{bmatrix} A_c(x) \\ B_c(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots - [R(t, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) \quad (3.49)
\end{aligned}$$

La rigidez axial, la rigidez relativa al momento de primer orden y la rigidez flexional vienen dadas ahora por la Ecuación (3.50):

$$\begin{aligned}
R_A(t_j, x) &= A_c(x) \bar{E}_c(t) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \\
R_B(t_j, x) &= B_c(x) \bar{E}_c(t) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \quad (3.50) \\
R_I(t_j, x) &= I_c(x) \bar{E}_c(t) + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x) E_{s(i)}
\end{aligned}$$

y $[R(t, x)]$ viene dada por la Ecuación (3.51):

$$\begin{aligned}
[R(t, x)] &= \\
&\frac{1}{(R_A(t, x) R_I(t, x) - R_B(t, x)^2)} \begin{bmatrix} R_I(t, x) & -R_B(t, x) \\ -R_B(t, x) & R_A(t, x) \end{bmatrix} \quad (3.51)
\end{aligned}$$

3.6. Implementación de un algoritmo computacional para obtener la pérdida de pretensado no adherente mediante el Método Paso a Paso en vigas isostáticas

Los pasos del procedimiento computacional son los siguientes:

1. Los datos de entrada son recolectados: la geometría de la sección transversal y la longitud de la viga, las propiedades de los materiales, el trazado, la cantidad de tendones y las tensiones iniciales de pretensado, la distribución de la armadura pasiva, , las cargas externas, tiempo inicial y final y las condiciones ambientales.
2. El intervalo de tiempo $(t_m - t_0)$ es dividido en m intervalos de tiempo mediante la serie dada por la Ecuación (3.52) (Gilbert y Ranzi, 2010):

$$t_1 = t_0 + \frac{(t_m - t_0)}{m \cdot t_m} \tag{3.52}$$
$$t_j = t_0 + (m \cdot t_m)^{1/(m-1)} \cdot (t_j - t_0)$$

3. Para cada tiempo j ($t = t_j$) se obtiene el valor de la retracción y de la relajación del acero. Para ello se utilizan procedimientos específicos que hemos denominado “Retracción” y “Relajación”.
4. Se obtienen las matrices $J(t_j, t_i)$ y $F_e(t_j, t_i)$. Dichas matrices tienen dimensiones de $m + 1 \times m + 1$.
5. La viga se divide en $n + 1$ secciones.
6. En $t = t_0$:

6.1. Al momento del tensado. Obtención de $l_{p,0}$:

6.1.1. Para cada una de las secciones se obtienen los diagramas de momentos flectores debidos al peso propio.

6.1.2. Para cada una de las secciones se calculan sus propiedades geométricas $A_c(x)$, $B_c(x)$ e $I_c(x)$ y las rigideces relativas $R_A(t_j, x)$, $R_B(t_j, x)$ y $R_I(t_j, x)$ con $t_j = t_0$.

6.1.3. Para este instante de tiempo la fuerza en el pretensado es conocida, $N_p = N_{p,0}$.

6.1.4. Se calculan las deformaciones unitarias en el hormigón a nivel del pretensado y luego se integran para obtener $l_{p,0}$ con $l_{p,0} = l - \Delta l_{p,0}$ en donde $\Delta l_{p,0}$ es la variación en la longitud de la viga, a nivel del centro de

gravidad del pretensado, debida al peso propio y al pretensado efectivo.

6.2. Al aplicar la carga externa de larga duración:

6.2.1. Para cada una de las secciones se obtienen los diagramas de momentos flectores debidos a las cargas externas de larga duración, incluido el peso propio.

6.2.2. Se toma un valor inicial de N_p , $N_p = N_{p, \text{inic}}$. En particular se comienza con $N_{p, \text{inic}} = N_{p,0}$.

6.2.3. A partir de la Ecuación (3.45), se calculan las deformaciones unitarias en el hormigón a nivel del pretensado, las que se integran (mediante métodos numéricos) para obtener la elongación del cable, Δl_p . Para $t_j = t_0$, $F_e(t_0, t_0) = [0]$ y $\varepsilon_{p, \text{rel}(i)}(t_0) = 0$; en la mayoría de las aplicaciones prácticas suele considerarse $\varepsilon_{sh}(t_0) = 0$.

6.2.4. Se calcula la deformación unitaria del cable, $\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + \frac{\Delta l_p/l - \Delta l_{p,0}/l}{(1 - \Delta l_{p,0}/l)}$ y se obtiene N_p , la fuerza en el cable de pretensado.

6.2.5. Si el nuevo valor de N_p es diferente a menos de una tolerancia que el valor de N_p al inicio del proceso, $N_{p, \text{inic}}$ (6.2.2) se encontró N_p y se da por finalizado el proceso. Se almacenan los valores de $N_c(t_0, x)$ y $M_c(t_0, x)$.

6.2.6. En caso contrario se hace $N_{p, \text{inic}} = N_p$ siendo N_p el valor obtenido en el paso 6.2.5 y se repite el proceso hasta la convergencia.

7. En $t > t_0$: La carga externa se mantiene constante entre t_0 y t_m .

7.1. Para cada uno de los m intervalos de tiempo restantes se calculan las rigideces relativas $R_A(t_j, x)$, $R_B(t_j, x)$ y $R_I(t_j, x)$ y se aplica el procedimiento del paso 6.2 teniendo en cuenta las variables dependientes del tiempo. Se obtiene N_p para $t = t_j$.

7.2. Con el valor obtenido de N_p en el paso anterior, se ajusta el valor de la relajación (Ecuaciones (3.11)-(3.13)) y se repite el proceso (Paso 7.1).

7.3. Para $t = t_m$ se obtiene la fuerza final de pretensado.

3.7. Enfoque de elementos finitos

Basados en las hipótesis realizadas en la Sección 4 de este trabajo, en esta sección se presenta un enfoque que utiliza el métodos de los elementos finitos para modelar el comportamiento de vigas de hormigón con pretensado interior no adherente a lo largo del tiempo. Se hace una excepción a las hipótesis

planteadas, por la cual el acero de pretensado y el acero pasivo se pueden colocar en cualquier lugar dentro de la sección de hormigón.

A diferencia de los métodos propuestos por otros autores, en los que el hormigón y el acero pasivo se modelan como un elemento único de viga o de pórtico plano (Ariyawardena y Ghali, 2002; Lou et al. 2013), en este enfoque, la viga de hormigón con pretensado interior no adherente y acero pasivo de refuerzo se modela ensamblando elementos de viga, que simulan la sección de hormigón, y elementos de barra, que simulan el acero de refuerzo, mientras que el acero de pretensado no adherente se modela mediante fuerzas nodales equivalentes.

La originalidad de esta técnica radica en su tratamiento de los efectos a largo plazo. Se propone un enfoque de elementos finitos basado en la relación constitutiva dependiente del tiempo para el hormigón dado por la Ecuación (3.47). La fluencia y la retracción del hormigón y la relajación del acero de pretensado en el período de tiempo t_0 a t se tienen en cuenta aplicando un sistema de fuerzas externas elegido convenientemente y modificando la matriz de rigidez del elemento de viga.

3.7.1. Análisis de corto plazo: matriz de rigidez del elemento de viga de Navier-Bernoulli y del acero pasivo

Utilizando funciones de forma de Hermit para modelar el desplazamiento vertical y funciones de forma lineales para el desplazamiento axial del elemento de viga, con referencia a un sistema de ejes locales, la matriz de rigidez del elemento de viga $[K_b^{(e)}]$ se puede escribir como en la Ecuación (3.53) (Oñate, 2009, 2013):

$$[K_b^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & 0 & -\frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} \\ 0 & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{4E_c I_c}{l^{(e)}} & 0 & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{2E_c I_c}{l^{(e)}} \\ -\frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & 0 & \frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} \\ 0 & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{2E_c I_c}{l^{(e)}} & 0 & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{4E_c I_c}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

El acero pasivo se modela ensamblando elementos de barra. La matriz de

rigidez de un elemento de barra con dos grados de libertad viene dada por la Ecuación (3.54) (Oñate, 2009):

$$[K_s^{(e)}] = \frac{E_s A_s}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis de secciones planas, la contribución del elemento de barra a la rigidez del elemento de viga se puede tener en cuenta utilizando la Ecuación (3.55):

$$[K_s^{(e)}]_{\text{trans}} = [T_s]^T [K_s^{(e)}] [T_s] \quad (3.55)$$

donde $[T_s]$ es la matriz de transformación, obtenida a partir de las relaciones geométricas entre los desplazamientos. La expresión para esta matriz se da en la Ecuación (3.56):

$$[T_s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_s \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

donde e_s es la distancia desde el centro de gravedad de la viga al centro de gravedad del acero de pasivo, como se muestra en la Figura (3.3). Luego, $[K_s^{(e)}]_{\text{trans}}$ viene dada por la Ecuación (3.57):

$$[K_s^{(e)}]_{\text{trans}} = \frac{E_s A_s}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_s & -1 & 0 & e_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_s & 0 & e_s^2 & e_s & 0 & -e_s^2 \\ -1 & 0 & e_s & 1 & 0 & -e_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_s & 0 & -e_s^2 & -e_s & 0 & e_s^2 \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

La Ecuación (3.57) supone que el acero pasivo es horizontal y que se coloca en una sola capa, aunque se pueden modelar diferentes capas, creando tantas matrices $[K_s^{(e)}]_{\text{trans}}$ como capas de acero haya.

Luego, la matriz de rigidez del elemento de viga de hormigón armado puede escribirse como la Ecuación (3.58):

$$[K^{(e)}] = [K_b^{(e)}] + [K_s^{(e)}]_{\text{trans}} \quad (3.58)$$

3.7.2. Acero de pretensado no adherente

Consideremos un elemento de viga con pretensado interior no adherente y acero pasivo de refuerzo como se muestra en la Figura (3.3). Sean $x_{i,u}^{(g)}$, $y_{i,u}^{(g)}$, $x_{j,u}^{(g)}$ y $y_{j,u}^{(g)}$ las coordenadas globales de los nodos i y j del i -ésimo elemento de viga en la posición indeformada, respectivamente, y $x_{\hat{i},u}^{(g)}$, $y_{\hat{i},u}^{(g)}$, $x_{\hat{j},u}^{(g)}$ y $y_{\hat{j},u}^{(g)}$ las coordenadas globales de los nodos \hat{i} y \hat{j} del segmento de cable, respectivamente.

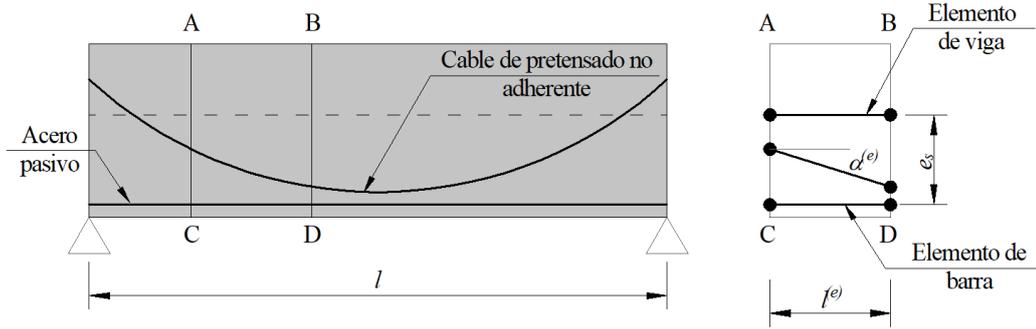


Figura 3.3: Modelo estructural para el enfoque basado en elementos finitos.

Para tener en cuenta el deslizamiento entre el acero de pretensado no adherente y el hormigón, la acción del cable se modela en términos de cargas nodales equivalentes (Ariyawardena y Ghali, 2002). Luego, la acción del cable sobre el elemento de viga puede tenerse en cuenta utilizando la Ecuación (3.59):

$$[P^{(e)}] = -N_p \begin{bmatrix} -\cos(\alpha^{(e)}) \\ -\sin(\alpha^{(e)}) \\ e_{cp,i} \cos(\alpha^{(e)}) \\ \cos(\alpha^{(e)}) \\ \sin(\alpha^{(e)}) \\ -e_{cp,j} \cos(\alpha^{(e)}) \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

donde $[P^{(e)}]$ es el vector de las fuerzas nodales equivalentes debido al pretensado, $N_p = N_p(\varepsilon_p)$ es la fuerza de pretensado y $\alpha^{(e)}$ es el ángulo de inclinación del cable, como se muestra en la Figura (3.4).

Bajo la acción de las cargas externas y del pretensado el elemento se deforma. Si $u_i^{(e)}$, $w_i^{(e)}$, $\theta_i^{(e)}$, $u_j^{(e)}$, $w_j^{(e)}$ y $\theta_j^{(e)}$ son los desplazamientos nodales del i -ésimo elemento de viga, las posiciones deformadas de los nodos \hat{i} y \hat{j} , $x_{\hat{i},d}^{(g)}$, $y_{\hat{i},d}^{(g)}$, $x_{\hat{j},d}^{(g)}$ y $y_{\hat{j},d}^{(g)}$ pueden obtenerse mediante relaciones geométricas (utilizando la hipótesis de secciones planas), como se muestra en la Figura (3.4) y en la

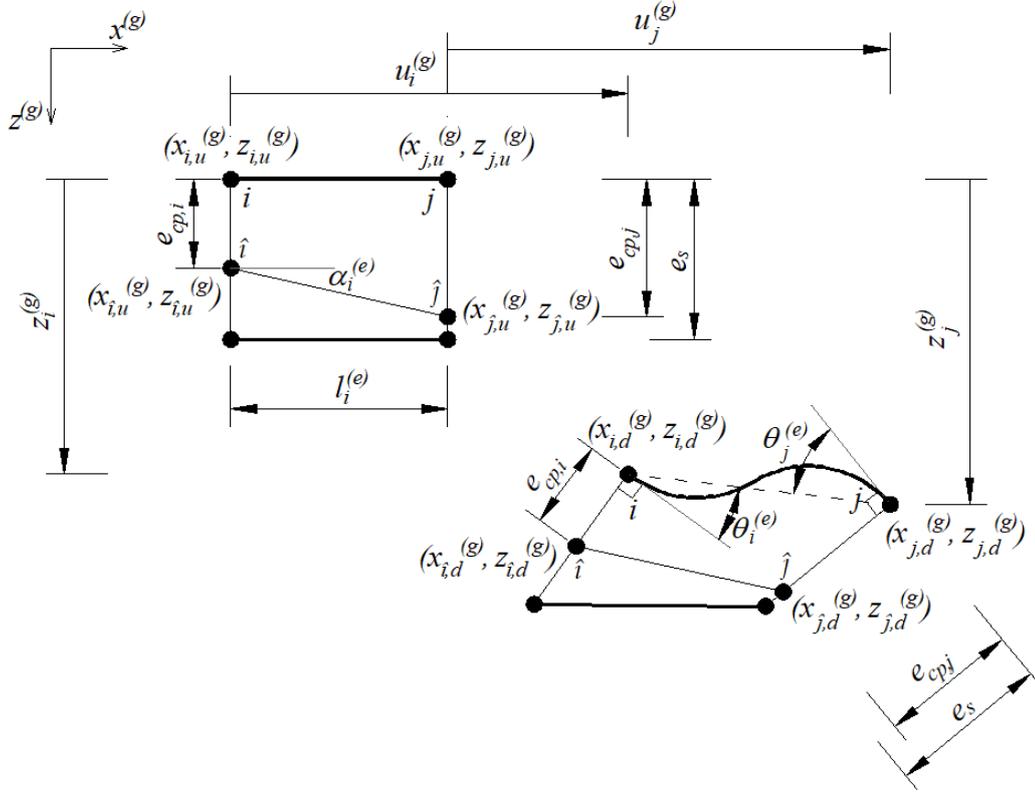


Figura 3.4: Variables nodales de la viga de Navier-Bernoulli, elemento de barra y de cable, y la relación entre ellos.

Ecuación (3.60):

$$\begin{bmatrix} x_{i,d}^{(g)} \\ y_{i,d}^{(g)} \\ x_{j,d}^{(g)} \\ y_{j,d}^{(g)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{i,u}^{(g)} \\ y_{i,u}^{(g)} + e_{cp,i} \\ x_{j,u}^{(g)} \\ y_{j,u}^{(g)} + e_{cp,j} \end{bmatrix} + [T_2][D^{(e)}] \quad (3.60)$$

donde $[D^{(e)}]$ y $[T_2]$ son el vector de los desplazamientos nodales del elemento de viga y la matriz de transformación, respectivamente. Sus expresiones vienen dadas por las Ecuaciones (3.61) y (3.62):

$$[D^{(e)}] = \left[u_i^{(e)} \quad w_i^{(e)} \quad \theta_i^{(e)} \quad u_j^{(e)} \quad w_j^{(e)} \quad \theta_j^{(e)} \right]^T \quad (3.61)$$

$$[T_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_{cp,i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_{cp,j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

La deformación unitaria del acero activo no adherente viene dada por la Ecuación (3.63) (Sección 6, Punto 6.2.4.):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + \frac{\Delta l_p/l - \Delta l_{p,0}/l}{(1 - \Delta l_{p,0}/l)} \quad (3.63)$$

y teniendo en cuenta las Ecuaciones (3.16) y (3.17), el cambio en la longitud del cable viene dado por la Ecuación (3.64):

$$\Delta l_p = \sum_{i=1}^{i=m} l_{p,i}^{(e)} - l_{p,i,0}^{(e)} \quad (3.64)$$

donde m el número de elementos de viga, $l_{p,i,0}^{(e)}$ es la longitud inicial del segmento de cable (distancia entre los nodos) y $l_{p,i}^{(e)}$ es su longitud deformada.

Finalmente, para cada escalón de carga debe realizarse un procedimiento iterativo para encontrar la fuerza de pretensado, $N_p(\varepsilon_p)$.

3.7.3. Análisis de largo plazo utilizando el método del módulo efectivo ajustado por la edad

La Ecuación (3.47) puede reescribirse como la Ecuación (3.65), donde el primer término entre paréntesis representa la tensión en el hormigón generada por la deformación axial y el segundo término entre paréntesis representa la tensión generada por la flexión.

$$\begin{aligned} \sigma_c(t, x) = & \left[\bar{E}_c(t) (\varepsilon_r(t, x) - \varepsilon_{sh}(t, t_0)) + F_{e,TB}(t, t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot \varepsilon_r(t_0, x) \right] + \dots \\ & \dots \left[\bar{E}_c(t) \cdot z \cdot \kappa(t, x) + F_{e,TB}(t, t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot z \cdot \kappa(t_0, x) \right] \quad (3.65) \end{aligned}$$

Consideremos en primera instancia las tensiones y deformaciones unitarias generadas por la flexión de la viga. El principio de los trabajos virtuales aplicado a las tensiones internas del elemento de viga se puede expresar como en

la Ecuación (3.66):

$$\begin{aligned}
\int_V \delta\varepsilon(t, x) \cdot \sigma_c(t, x) dV &= \int_V (z \cdot \delta\kappa(t, x) \cdot \bar{E}_c(t) \cdot z \cdot \kappa(t, x)) dV + \dots \\
&\dots + \int_V (z \cdot \delta\kappa(t, x) \cdot F_{e, TB}(t, t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot z \cdot \kappa(t_0, x)) dV \\
&= \int_{l^{(e)}} \bar{E}_c(t) I_c \delta\kappa(t, x) \kappa(t, x) dx + \dots \\
&\dots + \int_{l^{(e)}} F_{e, TB}(t, t_0) E_c(t_0) I_c \delta\kappa(t_0, x) \kappa(t_0, x) dx \quad (3.66)
\end{aligned}$$

La curvatura puede escribirse como en la Ecuación (3.67) (Oñate, 2013):

$$\begin{aligned}
\kappa(t, \xi) &= - \left[\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2} \quad \frac{(-1+3\xi)}{l^{(e)}} \quad -\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2} \quad \frac{(1+3\xi)}{l^{(e)}} \right] \cdot \\
&\quad \left[u_i^{(e)}(t) \quad w_i^{(e)}(t) \quad \theta_i^{(e)}(t) \quad u_j^{(e)}(t) \quad w_j^{(e)}(t) \quad \theta_j^{(e)}(t) \right]^T \\
&= [B_f][a_f^{(e)}(t)] \quad (3.67)
\end{aligned}$$

donde ξ es una coordenada local normalizada para el elemento ($\xi \in [-1, 1]$), $[B_f]$ es la matriz de curvatura del elemento y $[a_f^{(e)}(t)]$ es el vector de desplazamientos nodales en flexión en el tiempo t . Luego, el trabajo virtual de las tensiones internas se puede expresar como en la Ecuación (3.68):

$$\begin{aligned}
\int_V \delta\varepsilon(t, x) \cdot \sigma_c(t, x) dV &= [\delta a_f^{(e)}(t)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_f]^T [B_f] \bar{E}_c(t) I_c l^{(e)}}{2} d\xi \right) [a_f^{(e)}(t)] + \dots \\
&\dots + F_{e, TB}(t, t_0) [\delta a_f^{(e)}(t)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_f]^T [B_f] E_c(t_0) I_c l^{(e)}}{2} d\xi \right) [a_f^{(e)}(t_0)] \quad (3.68)
\end{aligned}$$

Las expresiones entre paréntesis corresponden a la matriz de rigidez del elemento de la viga considerando el módulo de elasticidad efectivo ajustado por edad $\bar{E}_c(t)$, es decir, reemplazando $E_c(t_0)$ con $\bar{E}_c(t)$ en la Ecuación (3.53) y la matriz de rigidez para el elemento en flexión en el tiempo t_0 , respectivamente.

El trabajo virtual de las tensiones internas en volumen del elemento debe ser igual al trabajo virtual de las fuerzas externas, como lo expresa la Ecuación (3.69):

$$\int_V \delta\varepsilon(t, x) \cdot \sigma_c(t, x) dV = [\delta a_f^{(e)}(t)]^T [q_f^{(e)}(t)] - [\delta a_f^{(e)}(t)]^T [f_f^{(e)}(t_0)] \quad (3.69)$$

donde $[f_f^{(e)}(t_0)]$ y $[q_f^{(e)}(t)]$ son el vector de las fuerzas nodales equivalentes en el elemento debido a las cargas transversales aplicadas en el instante t_0 y el vector de las fuerzas nodales de equilibrio en el tiempo t , respectivamente.

Consideremos ahora las tensiones generadas por las deformaciones axiales

del elemento de viga. Al aplicar el principio de los trabajos virtuales a las tensiones internas, obtenemos la Ecuación (3.70):

$$\begin{aligned} \int_V \delta\varepsilon(t, x) \cdot \sigma_c(t, x) dV &= \int_V (\delta\varepsilon_r(t, x) \cdot \bar{E}_c(t) \cdot \varepsilon_r(t, x)) dV + \dots \\ &\dots - \int_V (\delta\varepsilon_r(t, x) \cdot \bar{E}_c(t) \cdot \varepsilon_{sh}(t, t_0)) dV + \dots \\ &\dots + \int_V (\delta\varepsilon_r(t, x) \cdot F_{e, TB}(t, t_0) \cdot E_c(t_0) \cdot \varepsilon_r(t_0, x)) dV \end{aligned} \quad (3.70)$$

La deformación unitaria puede escribirse como en la Ecuación (3.71) (Oñate, 2013):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t, \xi) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{l^{(e)}} & \frac{1}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_i^{(e)}(t) & u_j^{(e)}(t) \end{bmatrix}^T \\ &= [B_a][a_a^{(e)}(t)] \end{aligned} \quad (3.71)$$

donde $[B_a]$ es la matriz de deformación del elemento y $[a_a^{(e)}(t)]$ es el vector de los desplazamientos axiales nodales en el tiempo t . Luego, el trabajo virtual de las tensiones internas se puede expresar como en la Ecuación (3.72):

$$\begin{aligned} \int_V \delta\varepsilon(t, x) \cdot \sigma_c(t, x) dV &= [\delta a_a^{(e)}(t)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T [B_a] \bar{E}_c(t) A_{cl}^{(e)}}{2} d\xi \right) [a_f^{(e)}(t)] + \dots \\ &\dots - [\delta a_f^{(e)}(t)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T \bar{E}_c(t) A_{cl}^{(e)} \varepsilon_{sh}(t, t_0)}{2} d\xi \right) + \dots \\ &\dots + F_{e, TB}(t, t_0) [\delta a_a^{(e)}(t)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T [B_a] E_c(t_0) A_{cl}^{(e)}}{2} d\xi \right) [a_a^{(e)}(t_0)] \end{aligned} \quad (3.72)$$

El primer y último término entre paréntesis en la Ecuación (3.72) representan la matriz de rigidez axial para el elemento, considerando el módulo de elasticidad efectivo ajustado por edad $\bar{E}_c(t)$, y la matriz de rigidez axial para el elemento en el instante t_0 .

El trabajo virtual de las tensiones internas en el volumen del elemento debe ser igual al trabajo virtual de las fuerzas externas, como lo expresa la Ecuación (3.73):

$$\int_V \delta\varepsilon(t, x) \cdot \sigma_c(t, x) dV = [\delta a_a^{(e)}(t)]^T [q_a^{(e)}(t)] - [\delta a_a^{(e)}(t)]^T [f_a^{(e)}(t_0)] \quad (3.73)$$

donde $[f_a^{(e)}(t_0)]$ y $[q_a^{(e)}(t)]$ son el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las cargas axiales sobre el elemento aplicadas en el instante t_0 y el vector de las fuerzas nodales de equilibrio en el tiempo t , respectivamente.

Luego, las Ecuaciones (3.69) y (3.73) pueden escribirse como la Ecuación

(3.74):

$$\begin{aligned} \frac{\bar{E}_c(t)}{E_c(t_0)} [K_b^{(e)}(t_0)] [D^{(e)}] &= F_{e,TB}(t, t_0) [K_b^{(e)}(t_0)] \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \dots \\ &\dots + [q^{(e)}(t)] - [f^{(e)}(t_0)] \end{aligned} \quad (3.74)$$

donde $[f^{(e)}(t_0)]$ y $[q^{(e)}(t)]$ son el vector de las fuerzas nodales equivalentes debido a las cargas axiales y transversales sobre el elemento aplicadas en el instante t_0 y el vector de las fuerzas nodales de equilibrio en el tiempo t , respectivamente.

La matriz de rigidez para el elemento de viga de hormigón armado en el tiempo t puede escribirse como Ecuación (3.75):

$$[K_b^{(e)}(t)] = \frac{\bar{E}_c(t)}{E_c(t_0)} [K_b^{(e)}(t_0)] + [K_s^{(e)}]_{\text{trans}} \quad (3.75)$$

La relajación del acero de pretensado puede ser tenida en cuenta aplicando un vector de fuerzas nodales equivalente, como se expresa en la Ecuación (3.76):

$$[\Delta P_{pr}^{(e)}] = \Delta \bar{\sigma}_{pr}(t - t_0) \cdot A_p \cdot \begin{bmatrix} -\cos(\alpha^{(e)}) \\ -\sin(\alpha^{(e)}) \\ e_{cp,i} \cos(\alpha^{(e)}) \\ \cos(\alpha^{(e)}) \\ \sin(\alpha^{(e)}) \\ -e_{cp,j} \cos(\alpha^{(e)}) \end{bmatrix}$$

3.8. Aplicación

3.8.1. Ejemplo 1: vigas de hormigón de sección rectangular y cables rectos no adherentes

Lan et al. (2013) ensayaron una serie de vigas pretensadas con pretensado interior adherente y no adherente para verificar el concepto de control de la pérdida de tensión mediante el uso de los hilos de acero inteligentes. Una de las vigas con pretensado no adherente es utilizada para mostrar la validez de las fórmulas propuestas, Figura (3.5). La viga tiene sección rectangular de 100×200 mm y su longitud de vano es de 2000 mm. El trazado del cable de pretensado es recto y su diámetro nominal es de 15.24 mm ($A_p = 141.88$

mm²), su resistencia característica a tracción es de 1660 MPa, su módulo de elasticidad es de 195 GPa y la tensión inicial de tensado es $\sigma_{p,0} = 0.5 \cdot f_{ptk}$. El acero pasivo de refuerzo está constituido por cuatro barras de 12 mm de diámetro y tensión de fluencia 335 MPa. La resistencia a compresión cúbica nominal del hormigón es de 30 MPa (24 MPa en probetas cilíndricas). La viga fue curada durante 28 días a temperatura ambiente y luego se tesaron los cables. La pérdida de tensión en los cables se midió hasta las 300 horas con la viga sometida a la acción de su peso propio, resultando en una pérdida de tensión a $t = 300$ hs de $\Delta\sigma_p = 46$ MPa.

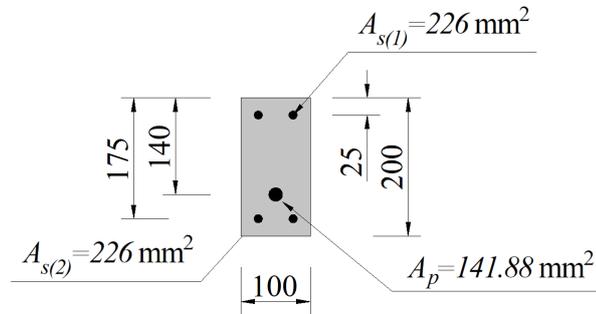


Figura 3.5: Sección transversal de la viga ensayada por Lan et al. (2013).

La Tabla 3.1 muestra los valores del coeficiente de fluencia, de la retracción, del coeficiente de envejecimiento y del módulo de elasticidad del hormigón, calculados de acuerdo a las normas Model Code 2010 (2012) y ACI 209.2R-08 (2008); el coeficiente de envejecimiento se calcula de acuerdo con la Ecuación (3.7). La pérdida de pretensado se calcula utilizando estos parámetros. La Tabla 3.2 muestra los valores calculados de la pérdida de pretensado de acuerdo con varios de los diferentes enfoques mencionados en este trabajo, distinguiendo entre los que son válidos para el pretensado no adherente y los que son válidos para el pretensado adherente.

Tabla 3.1: Parámetros del hormigón utilizados para calcular la pérdida de pretensado en la viga de hormigón de Lan et al. (2013)

| Norma | $\varphi(t, t_0)$ | $\chi(t, t_0)$ | $\varepsilon_{sh}(t, t_0)[10^{-6}]$ | $E_c(t_0)$ [GPa] |
|------------------------|-------------------|----------------|-------------------------------------|------------------|
| Model Code 2010 (2012) | 0.853 | 0.921 | -130.46 | 31.19 |
| ACI 209.2R-08 (2008) | 0.708 | 0.992 | -160.96 | 27.49 |

En la estimación de los parámetros se consideró: cemento de clase resistente 42.5 N, temperatura media de 20°C y humedad relativa ambiente (HR) del

Tabla 3.2: Comparación entre los valores de la pérdida de pretensado para la viga de Lan et al. 2013, calculados de acuerdo con los parámetros del Model Code 2010 (2012) y del ACI 209.2R-08 (2008).

| Norma | Medido | $\Delta\sigma_p$: pérdida de pretensado a $t = 300$ horas [MPa] | | | | | | | | | |
|-----------------|--------|--|-----------------|--------------------|------------------|-----------------|----------------------|-------------------------|--------------------|--|--|
| | | Válidas para pretensado no adherente | | | | | Pretensado adherente | | | | |
| | | SSM | AAEM | EP (Ec. (3.25)) | Gauvreau 1993 | CEB-FIP 2010 | FEM | UNE-EN 1992-1-1 2016 | Guo et al. 2018 | | |
| Model Code 2010 | 46 | 47.2 (2.61%) | 46.7 (1.52%) | 54.5 (18.5%) | 63.9 (38.9%) | 64.4 (40.0%) | 46.4 (0.87%) | 65.4 (42.1%) | 51.9 (12.8%) | | |
| ACI 209.2R-08 | 46 | 47.9 (4.13%) | 47.3 (3.48%) | 56.0 (21.7%) | 66.4 (44.3%) | 67.9 (47.6%) | 47.3 (2.83%) | 67.0 (45.7%) | 53.3 (15.9%) | | |

75 %. Los restantes parámetros utilizados para calcular el coeficiente de fluencia y la retracción de acuerdo con el ACI 209.2R-08 (2008) fueron contenido de cemento de 300 kg/m^3 , porcentaje de agregado fino del 42 % y asentamiento de 60 mm. Estos parámetros se estimaron de acuerdo con ACI 211.1-91 (2009) para obtener la resistencia característica en probetas cilíndricas de 24 MPa como se mencionó anteriormente.

Usando los parámetros del Model Code 2010 (2012), al aplicar el SSM, se obtiene una pérdida de pretensado de $\Delta\sigma_p = 47.2 \text{ MPa}$, mientras que al aplicar el AAEM y el FEM, las pérdidas de pretensado son $\Delta\sigma_p = 46.7 \text{ MPa}$ y $\Delta\sigma_p = 46.4 \text{ MPa}$, respectivamente. Si se aplica la ecuación propuesta (EP) (Ecuación (3.25)), la pérdida de pretensado es $\Delta\sigma_p = 54.5 \text{ MPa}$, la que representa una diferencia del orden del 18.5 % con el valor medido. Si se aplica la ecuación de Gauvreau (1993), la pérdida de pretensado es $\Delta\sigma_p = 63.9 \text{ MPa}$, la que representa una diferencia del orden del 38.9 % (Tabla 3.2). Se puede hacer un análisis similar en relación con los parámetros calculados de acuerdo con ACI 209.2R-08 (2008).

La EP considera que la armadura pasiva inferior está suficientemente próxima del acero de pretensado no adherente como para considerar la hipótesis que $d_{s(2)} = d_p$. Si en el ejemplo anterior se aplica el procedimiento de paso a paso considerando $d_{s(2)} = d_p = 140 \text{ mm}$, se obtiene $\Delta\sigma_p = 51.8 \text{ MPa}$, que representa una diferencia del orden de 5.21 % en relación a la EP. Si además se considera $A_{s(1)} = 0$ se obtiene $\Delta\sigma_p = 52.1 \text{ MPa}$, que representa una diferencia del orden del 4.61 %.

Si aplicamos la fórmula propuesta en el UNE-EN 1992-1-1 (2016) y la ecuación propuesta por Guo et al. (2018), que son válidas solo para pretensado adherente, las pérdidas de pretensado calculadas utilizando los parámetros del Model Code 2010 (2012) son $\Delta\sigma_p = 65.4 \text{ MPa}$ y $\Delta\sigma_p = 51.9 \text{ MPa}$, respectivamente.

Podemos concluir a partir de este ejemplo que la hipótesis de considerar que la armadura pasiva inferior es próxima al acero de pretensado no adherente en la Ecuación (3.25) tiene una influencia significativa en los resultados, en particular cuando las secciones son pequeñas. Por otra parte, si bien para el caso particular el valor obtenido de la pérdida del pretensado con la EP presenta una diferencia significativa con el valor medido (18.5 %), es un mejor estimador comparado con la fórmula propuesta por Gauvreau (1993) (38.9 %).

3.8.2. Ejemplo 2: viga de hormigón de sección rectangular y cables no adherentes de trazado curvo

Con el objetivo de monitorear las pérdidas diferidas de pretensado, Guo et al. (2018) ensayaron una serie de vigas con pretensado interior adherente y una con pretensado interior no adherente denominada PC2. La viga fue realizada con hormigón de resistencia nominal cúbica de 55 MPa a los 28 días de edad (44 MPa en probetas cilíndricas). La sección es rectangular de dimensiones 200×300 mm y su longitud de vano es de 4200 mm, Figura (3.6). Los cables de pretensado tienen una resistencia nominal a tracción de 1860 MPa, son aceros de baja relajación y el área nominal de la sección es de 140 mm^2 . Se utilizó acero pasivo de refuerzo de 12 mm de diámetro y tensión de fluencia 335 MPa.

El cable tiene un trazado curvo cuya posición a lo largo de la viga viene dado por la Ecuación (3.76):

$$\begin{aligned}d_p(x) &= -(4.5918 \cdot 10^{-5}(x - 1400)^2) + 240 \quad \text{para } 0 \leq x < 1400 \text{ mm} \\d_p(x) &= 240 \quad \text{para } 1400 \text{ mm} \leq x < 2800 \text{ mm} \\d_p(x) &= -(4.5918 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 - 25.7143 \cdot 10^{-2} \cdot x + 360) + 240 \\&\quad \text{para } 2800 \text{ mm} \leq x < 4200 \text{ mm}\end{aligned} \tag{3.76}$$

con $d_p(x)$ medido desde la fibra superior de la sección y x es la distancia en el eje de la viga medida desde el apoyo.

La fuerza de pretensado es de 103.9 kN y fue aplicada a los 30 días de edad. La viga fue sometida a cargas puntuales de 3.125 kN aplicadas a los tercios del vano inmediatamente luego de anclados los cables.

La pérdida de pretensado medida por los autores a $t = 395$ días y la calculada utilizando varios de los diferentes enfoques mencionados en este trabajo, utilizando para el cálculo de los parámetros del hormigón las normas Model Code 2010 (2012) y ACI 209.2R-08 (2008), se muestran en la Tabla 3.3. Los parámetros del hormigón se muestran en la Tabla 3.4. Se consideró un cemento de clase resistente 42.5 N, una temperatura ambiente media de $20 \text{ }^\circ\text{C}$ y una humedad relativa del 73 %. Los parámetros restantes utilizados para calcular el coeficiente de fluencia y la retracción del hormigón se estimaron de acuerdo a la norma ACI 211.4R-08 (2008) para lograr la resistencia característica en probetas cilíndricas (se consideró la utilización de aditivos reductores de agua de alto rango, contenido de cemento de 410 kg/m^3 , porcentaje agregado fino

de 38 %, relación agua-cemento de 0.42 y asentamiento de 50 mm).

Basados en los parámetros utilizados por el Model Code 2010 (2012), la diferencia entre la pérdida de pretensado medida y la calculada por SSM es del orden del 0.93 %; para el AAEM, esta diferencia es del orden del 0.37 %; y para el FEM, es del orden del 0.93 %. Por otro lado, el error cometido con la EP (Ecuación (3.28)) es del orden del 12.9 %. En este caso, se obtiene el mismo resultado aplicando tanto la ecuación de Gauvreau como la EP, ya que la relajación del acero de pretensado es despreciable.

Los valores de las pérdidas de pretensado obtenidas al aplicar la norma ACI 209.2R-08 (2008) para el cálculo de los parámetros del hormigón no difieren significativamente de los valores anteriores. Solo se observan pequeñas diferencias.

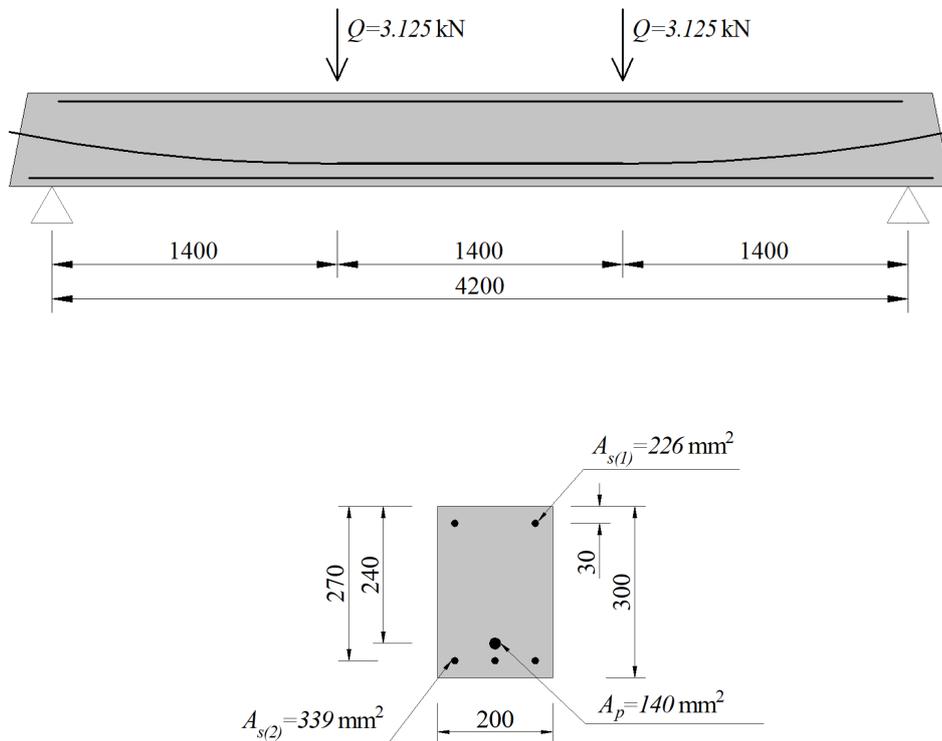


Figura 3.6: Geometría de la viga PC2 ensayada por Guo et al. (2018).

Tabla 3.3: Comparación entre los valores de la pérdida de pretensado para la viga PC2 ensayada por Guo et al. (2018), calculados de acuerdo con los parámetros del Model Code 2010 (2012) y del ACI 209.2R-08 (2008).

| Norma | Medido | $\Delta\sigma_p$: pérdida de pretensado a $t=395$ días [MPa] | | | | | | | | | |
|------------------|--------|---|----------|----------|----------|----------|----------------------|-----------------|----------|------|--|
| | | Válidas para pretensado no adherente | | | | | Pretensado adherente | | | | |
| | | SSM | AAEM | EP | Gauvreau | CEB-FIP | FEM | UNE-EN 1992-1-1 | 2016 | 2018 | |
| Modelo Code 2010 | 53.9 | 54.4 | 53.7 | 60.9 | 60.9 | 61.7 | 53.4 | 59.9 | 52.8 | | |
| 2012 | | (0.93 %) | (0.37 %) | (12.9 %) | (12.9 %) | (14.5 %) | (0.93 %) | (11.1 %) | (2.04 %) | | |
| ACI 209.2R-08 | 53.9 | 55.2 | 54.4 | 63.1 | 63.1 | 64.2 | 54.1 | 61.9 | 54.0 | | |
| 2008 | | (2.41 %) | (0.93 %) | (17.1 %) | (17.1 %) | (19.1 %) | (0.37 %) | (14.8 %) | (0.19 %) | | |

Tabla 3.4: Parámetros del hormigón utilizados para calcular la pérdida de pretensado en la viga de Guo et al. Lan et al. 2013

| Norma | $\varphi(t, t_0)$ | $\chi(t, t_0)$ | $\varepsilon_{sh}(t, t_0)[10^{-6}]$ | $E_c(t_0)$ [GPa] |
|------------------------|-------------------|----------------|-------------------------------------|------------------|
| Model Code 2010 (2012) | 1.139 | 0.851 | -264.53 | 36.08 |
| ACI 209.2R-08 2008 | 1.150 | 0.911 | -273.24 | 35.34 |

3.8.3. Ejemplo 3: viga I de hormigón con trazado curvo de los cables

En 1953, Breckenridge y Bugg (1964) realizaron pruebas de largo plazo en vigas I de hormigón pretensado en el Laboratorio Naval de Ingeniería Civil de los Estados Unidos. Las vigas tenían 609.6 mm de altura, el ancho de las alas inferiores era de 355.6 mm, el de las alas superiores de 304.8 mm y el espesor del alma de 101.6 mm (Figura (3.7)). El área bruta del hormigón es $A_c = 11.645 \times 10^4 \text{ mm}^2$ y el momento de inercia es $I_c = 51.476 \times 10^8 \text{ mm}^4$. La longitud de vano era de 12192 mm. Dos de estas vigas se postensaron utilizando barras de acero de pretensado no adherente y fueron sometidas a la acción de su peso propio durante un período de aproximadamente seis años y medio. Para el acero de pretensado, se utilizaron dos barras de acero de alta resistencia del sistema Stressteel Bar de 28.5 mm de diámetro ($A_p = 641.29 \text{ mm}^2$) y de resistencia a la tracción nominal de 1007 MPa. La tensión efectiva de cada barra luego de ancladas fue de 683.23 MPa. Sus trazados se dan en las Ecuaciones (3.77) y (3.78) y la Figura (3.8) muestra dichos trazados de manera esquemática. El acero pasivo de refuerzo consistió de ocho barras de 9.50 mm de diámetro ($A_s = 70.79 \text{ mm}^2$) y un límite elástico de 335 MPa. El módulo de elasticidad del acero de pretensado y el acero pasivo fueron 168.9 GPa y 200 GPa, respectivamente. Se utilizó cemento de resistencia normal y la resistencia característica del hormigón en probetas cilíndricas fue $f_{ck} = 36.27 \text{ MPa}$ ($E_c(t_0) = 26.44 \text{ GPa}$).

$$\begin{aligned}
 d_{p(1)}(x) &= -3.5334 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 20.4605 \cdot 10^{-2} \cdot x + 192.79 \\
 &\text{para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm} \\
 d_{p(1)}(x) &= 488.95 \text{ para } 2895.6 \text{ mm} \leq x < 9296.4 \text{ mm} \\
 d_{p(1)}(x) &= -3.5334 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 65.7029 \cdot 10^{-2} \cdot x - 2564.89 \\
 &\text{para } 9296.4 \text{ mm} \leq x < 12192 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
d_{p(2)}(x) &= -1.6119 \cdot 10^{-5} x^2 + 9.3341 \cdot 10^{-2} \cdot x + 471.32 \\
&\text{para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm} \\
d_{p(2)}(x) &= 552.45 \text{ para } 2895.6 \text{ mm} \leq x < 9296.4 \text{ mm} \\
d_{p(2)}(x) &= -1.6119 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 29.9698 \cdot 10^{-2} \cdot x - 840.49 \\
&\text{para } 9296.4 \text{ mm} \leq x < 12192 \text{ mm}
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Según los autores, las vigas se curaron durante ocho días y luego se tesaron las barras. Durante el período de la prueba, la temperatura promedio fue de 15.6 °C y la humedad relativa promedio fue de 72.8 %. La pérdida de pretensado medida a los 6.5 años fue del 22 %, es decir, $\Delta\sigma_p = 150.3$ MPa.

A los efectos de hacer una comparación entre los diferentes métodos de cálculos, los parámetros del hormigón se calcularon de acuerdo con la norma Model Code 2010 (2012) con correcciones debido al uso de una temperatura de 15.6°C en lugar de una de 20°C. En estas condiciones, el coeficiente de fluencia fue $\varphi(t, t_0) = 1.915$, la retracción fue $\varepsilon_{sh}(t, t_0) = -385.84 \times 10^{-6}$ y el coeficiente de envejecimiento fue $\chi(t, t_0) = 0.678$. La relajación del acero de pretensado fue $\Delta\sigma_{pr}(t - t_0) = 28.5$ MPa. Los valores del coeficiente de relajación calculados utilizando el AAEM, EP, FEM y la ecuación de Guo et al. fueron 0.605, 0.532, 0.610 y 0.6461, respectivamente. Según el UNE-EN 1992-1-1 (2016), $\chi_r(t, t_0) = 0.8$.

Las pérdidas de pretensado obtenidas a $t = 2372.5$ días para los diferentes enfoques descritos en este trabajo se resumen en la Tabla 3.5.

A los efectos de poder sacar conclusiones precisas debemos hacer las siguientes observaciones. En este caso particular, la ecuación de Gauvreau y la ecuación del CEB-FIB estiman correctamente la pérdida de pretensado; sin embargo, estas formulaciones no tienen en cuenta la pérdida de pretensado debida a la relajación del acero ni la presencia del acero pasivo. Dado que los trazados de las barras de pretensado son curvos, la EP corresponde a la Ecuación (3.28) que tampoco tiene en cuenta el acero pasivo. Si el método SSM se aplica sin tener en cuenta el acero pasivo, la pérdida de pretensado obtenida es 164.8 MPa, lo que representa una diferencia del orden de 0.06 % con respecto a la EP. En otras palabras, la EP estima la pérdida de pretensado con suficiente precisión cuando se compara con enfoques complejos como el método SSM, lo que da un cierto margen de seguridad. La influencia del acero pasivo en la

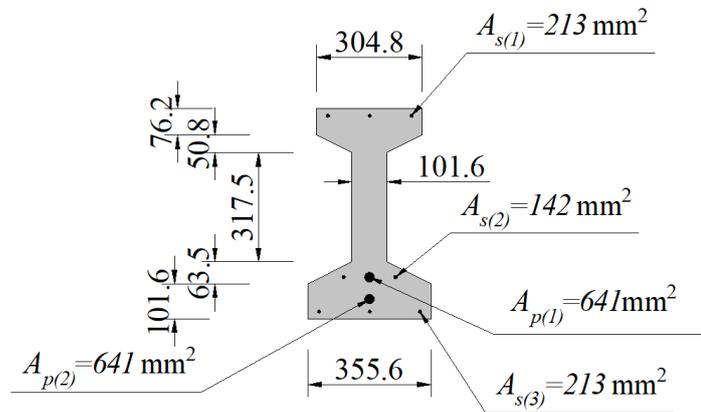


Figura 3.7: Sección transversal de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964).

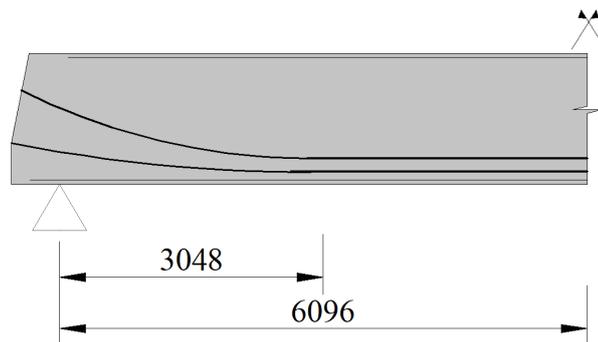


Figura 3.8: Representación esquemática del trazado de los cables de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964).

Tabla 3.5: Comparación de los valores de la pérdida de pretensado para la viga I de hormigón pretensado de Breckenridge y Bugg (1964).

| | | $\Delta\sigma_p$: pérdida de pretensado a $t = 2372.5$ días [MPa] | | | | | | | |
|-------|-------|--|--------------------|-------------------|----------------------|-------------------|-------------------------|--------------------|--------------------|
| | | Válidas para pretensado no adherente | | | Pretensado adherente | | | | |
| Medio | SSM | AAEM | EP (Ec. (3.28)) | Gauvreau 1993 | CEB-FIB 2010 | FEM | UNE-EN 1992-1-1 2016 | Guo et al. 2018 | |
| | 150.3 | 154.9 (3.06 %) | 150.6 (0.20 %) | 163.8 (8.98 %) | 146.0 (2.86 %) | 149.7 (0.40 %) | 149.3 (0.67 %) | 125.4 (16.57 %) | 129.7 (13.71 %) |

pérdida de pretensado se estudia en el siguiente ejemplo.

3.8.4. Ejemplo 4: influencia del acero pasivo en la pérdida de pretensado.

En este ejemplo se analiza una de las vigas ensayadas por H. Harajli (1992), denominada PP3R2-3, Figura (3.9). Los autores no realizaron un estudio de las pérdidas de pretensado. La viga es simplemente apoyada y la distancia entre ejes de apoyos es de 2540 mm. El cable de pretensado no adherente presenta un trazado recto y la viga fue ensayada hasta la rotura sometida a cargas puntuales Q a los tercios de su longitud. La viga es de sección rectangular de ancho 127 mm y altura 279 mm. La sección del acero de pretensado es $A_p = 116.13 \text{ mm}^2$, su altura útil $d_p = 211 \text{ mm}$ y su módulo de elasticidad $E_p = 206.85 \text{ GPa}$. El acero pasivo tiene una sección de $A_s = 226 \text{ mm}^2$, un canto útil $d_s = 254 \text{ mm}$ y un módulo de elasticidad es $E_s = 200 \text{ GPa}$. La tensión de fluencia del acero pasivo y del acero activo son de 564 MPa y 1290 MPa, respectivamente. La tensión efectiva de pretensado es $f_{se} = 882.56 \text{ MPa}$ y el hormigón tiene una resistencia característica a la compresión en probetas cilíndricas de $f_{ck} = 42.54 \text{ MPa}$.

Los valores de los restantes parámetros utilizados para calcular el coeficiente de fluencia y la retracción fueron HR de 70 %, temperatura media de 20°C y cemento de clase resistente 42.5 N. Luego, el coeficiente de fluencia es $\varphi(t, t_0) = 1.615$, la retracción es $\varepsilon_{sh}(t, t_0) = -205.76 \times 10^{-6}$ y el coeficiente de envejecimiento es $\chi(t, t_0) = 0.836$.

Si bien los autores no lo especifican, para el ejemplo se considera un acero de pretensado de baja relajación, $\Delta\sigma_{pr}(t - t_0) = 25.2 \text{ MPa}$.

Para una carga $Q = 23 \text{ kN}$ (carga total = 46 kN) aplicada en $t_0 = 28$ días y mantenida constante, la pérdida de pretensado a $t = 10000$ días obtenida mediante la aplicación de la Ecuación (3.25) es $\Delta\sigma_p = 60.9 \text{ MPa}$ y por lo tanto la fuerza de pretensado es $N_p(t) = 97734 \text{ N}$. Mediante la aplicación de SSM la fuerza de pretensado a $t = 10000$ días es $N_p(t) = 97353 \text{ N}$, lo que representa una diferencia del orden de 0.4 %.

A partir de la viga PP3R2-3 de H. Harajli (1992) y de las consideraciones antes expuestas, se estudió la variación de la fuerza de pretensado en función de la sección de la armadura pasiva, Figura 3.10. Para ello, se calcularon los valores de la fuerza de pretensado a $t = 10000$ días a partir de la EP, de la ecuación de Gauvreau (1993), de la ecuación del CEB-FIB Model Code

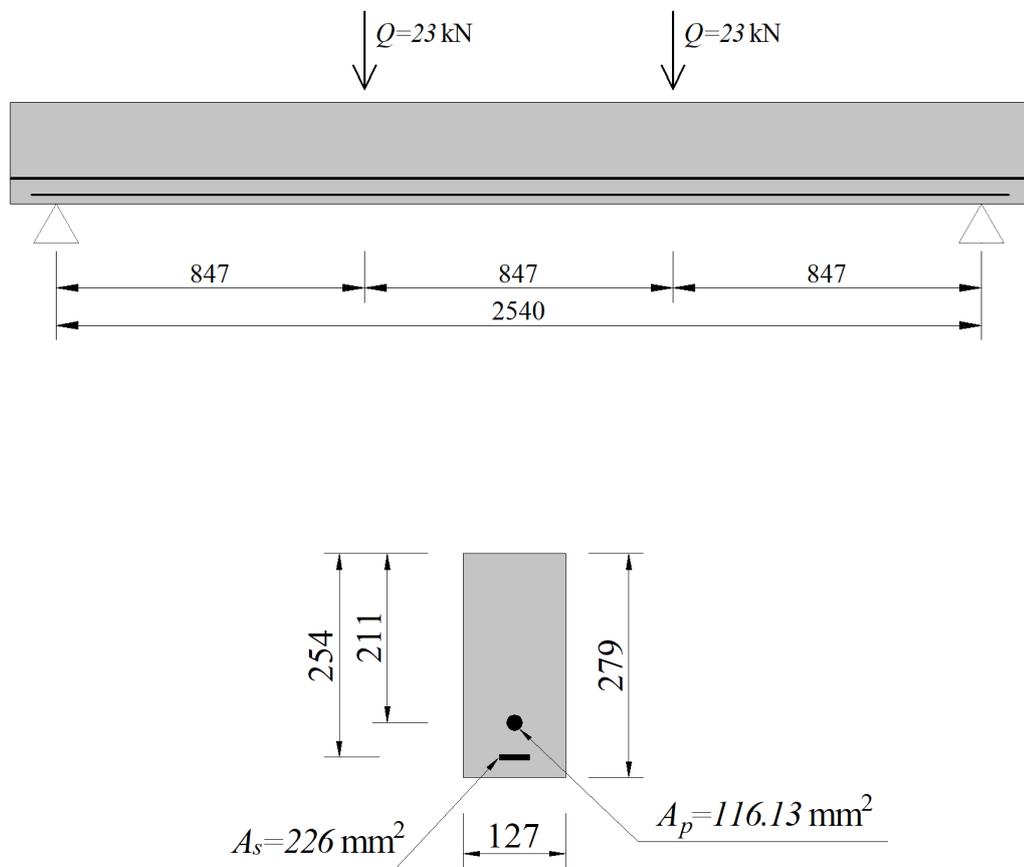


Figura 3.9: Geometría y sección transversal de la viga PP3R2-3 ensayada por H. Harajli (1992).

2010 (2012) y de los métodos SSM y AAEM. En una primera instancia se consideró que la sección de la armadura pasiva superior $A_{s(1)}$ es nula y se varió la sección de la armadura pasiva inferior $A_{s(2)}$ desde cero hasta 1256 mm^2 , lo que representa una cuantía geométrica de armadura pasiva de $\rho_s = 35.28 \times 10^{-3}$. Los resultados se muestran en la gráfica de la Figura 3.11.

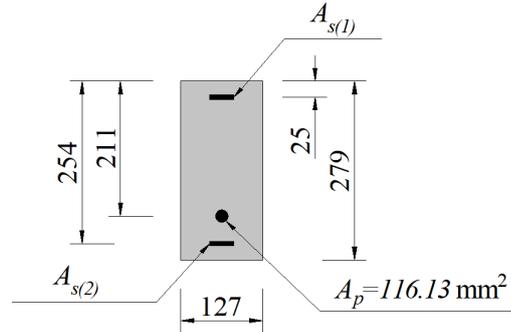


Figura 3.10: Estudio de la influencia de la cantidad del acero pasivo sobre la pérdida de pretensado.

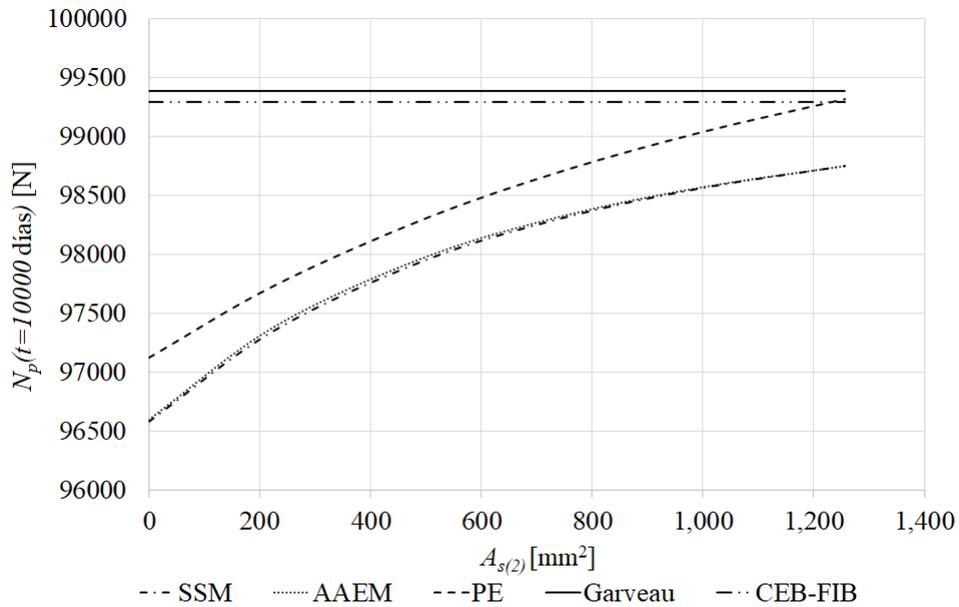


Figura 3.11: Fuerza de pretensado a $t = 10000$ días en función de la sección del acero pasivo de refuerzo inferior $A_{s(2)}$ con $A_{s(1)} = 0$.

Para diferentes cantidades de armadura pasiva inferior, la diferencia obtenida entre la EP, Ecuación (3.25), y el SSM, es del orden de 0.46%. Para elementos con poca cuantía geométrica de armadura pasiva inferior, como puede ser el caso de losas, la fórmula de Gauvreau presenta una diferencia del orden

del 2.83 % al 2.04 % con el SSM, mientras que para la EP dicha diferencia es del orden del 0.56 % al 0.39 %. La diferencia obtenida entre SSM y AAEM es del orden de 0.01 %. La pérdida de pretensado obtenida mediante la aplicación de la ecuación del Model Code 2010 (2012) is $\Delta\sigma_p = 49.9$ MPa, la que representa una diferencia del 1.63 % con respecto a la ecuación de Gauvreau (1993).

Se puede observar que las ecuaciones de Gauvreau (1993) y del Model Code 2010 (2012) representan un límite inferior de la pérdida de pretensado al no considerar ni la relajación del acero de pretensado ni la influencia de la armadura pasiva.

Si se aplica la fórmula propuesta por el EC2 (UNE-EN 1992-1-1, 2016), la fuerza de pretensado a $t = 10000$ días es $N_p(t) = 99280$ N, mientras que al aplicar la fórmula de Guo et al. (2018) la fuerza de pretensado varía desde $N_p(t) = 99390$ N hasta $N_p(t) = 99711$ N, dependiendo de la cantidad del acero pasivo.

La gráfica de la Figura (3.12) muestra la variación de la fuerza de pretensado a $t = 10000$ días en función de la sección de armadura pasiva superior $A_{s(1)}$ y para una sección de armadura pasiva inferior de $A_{s(2)} = 200$ mm². Se puede observar que a medida que la sección de la armadura pasiva superior aumenta, también aumenta la pérdida en el pretensado no adherente, sin embargo, la pérdida obtenida para $A_{s(1)} = 200$ mm² es del orden de 1.7 % mayor que la obtenida con $A_{s(1)}$ nula.

La gráfica de la Figura (3.13) muestra la variación de la deflexión en el centro del vano para $t = 10000$ días en función de la sección de armadura pasiva superior $A_{s(1)}$ y para una sección de armadura inferior de $A_{s(2)} = 200$ mm². A medida que aumenta la cuantía de la armadura pasiva superior disminuye la deformación. La deformación obtenida a $t = 10000$ días para $A_{s(1)} = 0$ es del orden de 36 % mayor que para el caso con $A_{s(1)} = 200$ mm².

Es importante observar que, mientras que el aumento de la armadura pasiva superior entre cero y 200 mm² tienen una influencia significativa en la deformación de viga (del orden del 36 %), la influencia en la pérdida del pretensado es muy poco significativa (el orden del 1.7 %).

3.9. Conclusiones

En este artículo, se ha propuesto un enfoque basado en el método de ele-

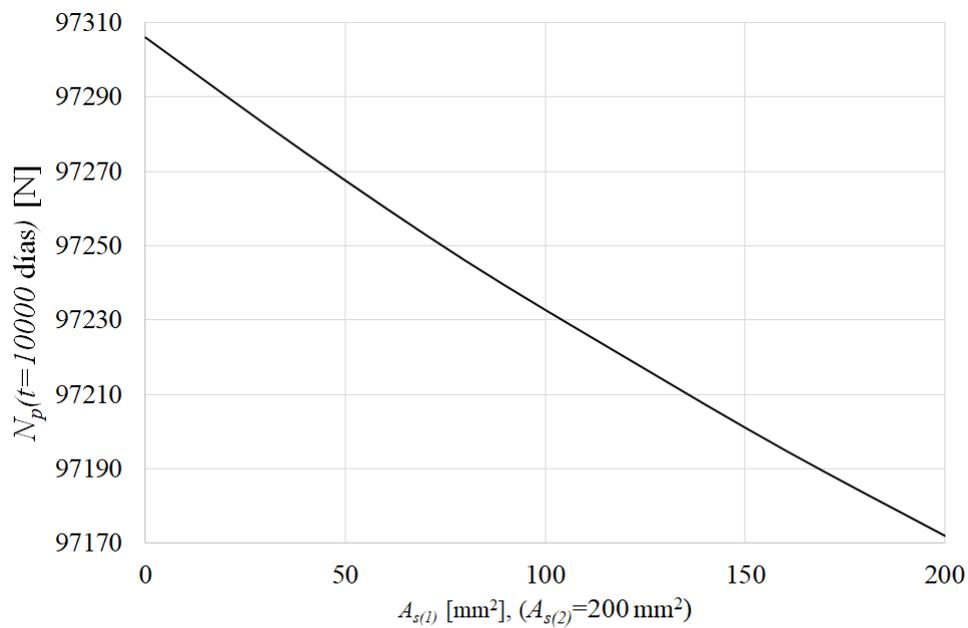


Figura 3.12: Fuerza de pretensado a $t = 10000$ días en función del área del acero pasivo de refuerzo superior $A_{s(1)}$ con $A_{s(2)} = 200 \text{ mm}^2$.

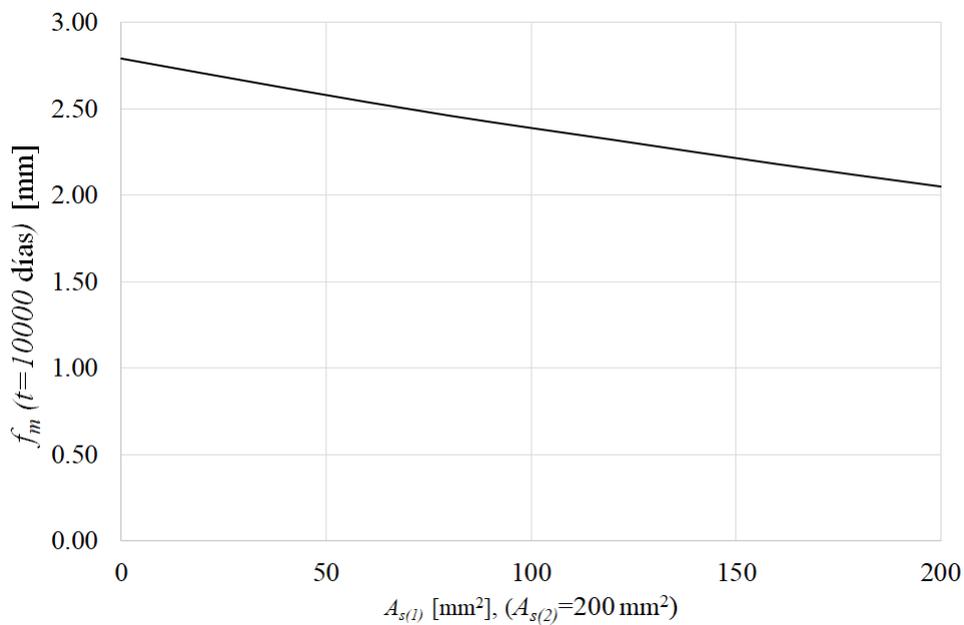


Figura 3.13: Flecha a $t = 10000$ días en función del área del acero pasivo superior $A_{s(1)}$ con $A_{s(2)} = 200 \text{ mm}^2$.

mentos finitos para el análisis en el tiempo de vigas de hormigón pretensadas con pretensado interior no adherente, y una ecuación simplificada mejorada para calcular las pérdidas de pretensado en vigas estáticamente determinadas con el mismo tipo de pretensado . Ambos métodos tienen en cuenta las pérdidas debidas a la fluencia y la retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y el efecto del acero pasivo longitudinal de refuerzo. Además, se presentó una generalización de dos métodos ampliamente utilizados para el análisis seccional en el tiempo de elementos de hormigón con pretensado no adherente. Estos métodos son el Método Paso a Paso y el Método de Módulo Efectivo Ajustado por Edad. Los métodos propuestos se evaluaron con base en los resultados de estudios previos, y las principales conclusiones se pueden resumir de la siguiente manera:

1. Para elementos de hormigón pretensado con cables rectos y acero pasivo longitudinal constante a lo largo de la viga, solo se observan pequeñas diferencias entre la pérdida de pretensado calculada por la fórmula propuesta, la calculada aplicando el Método Paso a Paso y los valores medidos en estudios previos, mientras que para los elementos con trazados genéricos para los cables, los valores obtenidos con la fórmula propuesta muestran diferencias algo mayores. Por lo tanto, para los propósitos prácticos de la ingeniería estructural, la ecuación simplificada propuesta permite estimar de manera simple y con suficiente precisión la pérdida de pretensado en el acero de pretensado no adherente. Sin embargo, para aquellos casos que requieren mayor precisión, se puede aplicar la formulación del método paso a paso o del método del módulo efectivo ajustado por la edad.
2. La cantidad de acero pasivo longitudinal de refuerzo superior e inferior influye en la pérdida de pretensado. A medida que aumenta la relación de acero de refuerzo inferior, disminuye la pérdida de pretensado. Por lo tanto, incluso si el miembro no lo requiere, es conveniente incorporar acero de refuerzo inferior. Por otro lado, a medida que aumenta la relación de acero de refuerzo superior, también aumenta la pérdida de pretensado; sin embargo, aunque el aumento en la pérdida de pretensado es muy poco significativa, hay una reducción significativa en las deformaciones a largo plazo.
3. Si se utilizan formulaciones basadas en hipótesis de adherencia para calcular la pérdida de pretensado en vigas con pretensado interior no adhe-

rente, se obtienen valores inconsistentes; en otras palabras, estos valores en algunos casos pueden estar cerca de los valores medidos y en otros pueden diferir significativamente. Esto se debe principalmente a que estas formulaciones no tienen en cuenta la deformación del elemento estructural en su conjunto.

4. Desde el punto de vista del costo computacional, la implementación del SSM tiene un costo más alto que para los métodos basados en el módulo ajustado por la edad. Esto se debe al hecho de que para cada intervalo de tiempo en el SSM, se debe llevar a cabo un procedimiento iterativo para obtener la fuerza de pretensado, que a su vez incluye un ajuste del coeficiente de relajación del acero. Además, obtener las tensiones en el hormigón en un tiempo dado requiere conocer las tensiones en el hormigón en todos los instantes anteriores de tiempo. Sin embargo, este costo computacional más alto se ve compensado por el hecho de que el SSM permite un análisis más directo y preciso cuando la estructura está sujeta a cargas aplicadas a diferentes edades, como es habitual en la construcción de puentes, por ejemplo.
5. En general, las normas más importantes a nivel mundial proponen ecuaciones simplificadas para el cálculo de las pérdidas de pretensado en vigas de hormigón isostáticas con pretensado interno adherido. Como se ha demostrado, el uso de dichas ecuaciones para el caso de pretensado interior no adherente proporciona valores con errores significativos. Por lo tanto, sería aconsejable incorporar la ecuación simplificada propuesta para el cálculo de la pérdida de pretensado en vigas de hormigón pretensado isostáticas con pretensado interior no adherente.

Capítulo 4

Análisis en servicio de elementos compuestos de hormigón con pretensado interior no adherente bajo cargas de corta y larga duración

Páez Gus, P.; Sensale, B. (2021). Análisis en servicio de elementos compuestos de hormigón con pretensado interior no adherente bajo cargas de corta y larga duración. *Hormigón y Acero*, 72 (293) 63-75.

doi: 10.33586/hya.2019.2975

4.1. Introducción

Existen muchas situaciones en la práctica de la ingeniería estructural donde es necesario estimar la pérdida de pretensado en vigas de hormigón pretensadas de sección compuesta, como por ejemplo en las vigas de puentes (W. H. Dilger, 1982; Fuente Antequera et al. 2008; Hue y Ontañón, 1998; Marí Bernat, 1995; Marí Bernat et al. 1996; Martínez Calzón, 1991; Rivas et al. 2005; Sánchez Pérez et al. 2004; Y. Wang, 1967). La estimación exacta de la pérdida de pretensado en este tipo de elementos estructurales es muy difícil, incluso mediante análisis complejos como puede ser el Método Paso a Paso, no solo por la precisión en la estimación de los parámetros envueltos en el fenómeno sino también porque la acción compuesta comienza a desarrollarse gradualmente a lo largo del tiempo.

El análisis se vuelve aún más complejo si las vigas son elementos pretensados con pretensado interior no adherente. El pretensado interior no adherente está caracterizado por no existir compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado y el hormigón, lo que significa que el acero de pretensado y el hormigón que lo rodea pueden moverse uno con respecto al otro.

Existen relativamente pocos trabajos de investigación enfocados en predecir el comportamiento en servicio de vigas pretensadas con pretensado interior no adherente sometidas a cargas de larga duración (Barbieri et al. 2006; CEB-FIP, 2010; Gauvreau, 1993; Guo et al. 2018; Lou et al. 2013; Moon y Burns, 1997; Páez y Sensale, 2017). Sin embargo no existen trabajos de investigación enfocados en predecir el comportamiento bajo cargas de larga duración de elementos compuestos con pretensado interior no adherente. Este trabajo se enfoca en el análisis en servicio bajo cargas de larga duración de elementos compuestos de hormigón pretensado con pretensado interior no adherente. Basado en el Método de Paso a Paso para el análisis en el tiempo de las deformaciones diferidas en el hormigón, en este trabajo se propone un algoritmo computacional para el análisis de vigas compuestas de hormigón pretensado con tendones internos no adherentes sin utilizar el método de los elementos finitos. El algoritmo computacional propuesto puede aplicarse tanto a vigas estáticamente determinadas como a vigas continuas. La originalidad de este trabajo se encuentra en la formulación propuesta. Esta formulación tiene en cuenta el estado no fisurado y fisurado del elemento, la fluencia y retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. Además, el trazado de los tendones puede ser genérico.

Una de las principales ventajas del método propuesto es que se basa en los principios básicos de la resistencia de los materiales, sin recurrir a formulaciones matemáticas altamente complejas como pueden ser las formulaciones de elementos finitos del tipo híbrido (Barbieri et al. 2006; Moon y Burns, 1997). Otra ventaja del método propuesto radica en la utilización de la función de fluencia dada por los diferentes códigos a nivel internacional, a diferencia de otras investigaciones, en donde se utiliza una función de fluencia diferente a las que aparecen en los códigos para el cálculo de estructuras de hormigón Lou et al. (2013).

La eficacia del algoritmo computacional propuesto es evaluada a partir de la comparación con estudios experimentales, obteniendo como principales conclusiones que el modelo computacional propuesto predice satisfactoriamente la

pérdida de pretensado y las deformaciones de la viga a lo largo del tiempo.

4.2. Relaciones constitutivas de los materiales

4.2.1. Hormigón

La deformación unitaria total en el tiempo de una fibra de hormigón puede escribirse como la Ecuación (4.1) (Bazant, 1982):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) + \varepsilon_T \quad (4.1)$$

donde $\varepsilon_e(t)$ es la deformación unitaria elástica, $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$ es la deformación unitaria por fluencia entre los tiempos t_0 y t , $\varepsilon_{sh}(t, t_s)$ es la deformación unitaria debida a la retracción entre los tiempos t_s y t , y ε_T es la deformación unitaria de origen térmico. t_0 y t_s corresponden a la edad del hormigón al momento de carga y al inicio de la retracción, respectivamente.

La relación tensión-deformación del hormigón para cargas instantáneas puede expresarse de acuerdo a la Ecuación (4.2) (Branson y Trost, 1982; Model Code 2010, 2012):

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad \text{para} \quad -0.40 \cdot f_{cm} \leq \sigma_c \leq f_{ctm} \quad (4.2)$$

siendo σ_c la tensión, f_{cm} y f_{ctm} son la resistencia media a compresión y la resistencia media a tracción, respectivamente, y E_c el módulo de elasticidad secante.

Cuando el hormigón es sometido a cargas de larga duración cuya magnitud varía en el tiempo, la deformación unitaria total puede obtenerse a partir del principio de superposición (McHenry, 1943). La aplicación de este principio requiere del cumplimiento de las hipótesis de linealidad (A. Ross, 1958). La deformación unitaria total a temperatura constante puede escribirse como la Ecuación (4.3):

$$\varepsilon(t) = J(t, t_0)\sigma_c(t_0) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} J(t, \tau)d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (4.3)$$

donde $\sigma_c(t_0)$ es la tensión en el hormigón en el instante t_0 , $J(t, \tau)$ es la función de fluencia del hormigón entre los tiempos τ y t , su expresión viene dada por

la Ecuación (4.4):

$$J(t, t_0) = \frac{1 + \phi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (4.4)$$

siendo $\phi(t, \tau)$ el coeficiente de fluencia entre los tiempos τ y t , y $E_c(\tau)$ el módulo de elasticidad del hormigón en el tiempo τ .

4.2.2. Acero activo y pasivo

La relación tensión-deformación para los aceros pasivo y activo puede considerarse lineal hasta la tensión de fluencia mediante la utilización de diagramas idealizados (Model Code 2010, 2012). La Ecuación (4.5) establece la relación constitutiva para el acero pasivo y activo:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= E_s \varepsilon_s \\ \sigma_p &= E_p \varepsilon_p \end{aligned} \quad (4.5)$$

donde σ_s , E_s y ε_s representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero pasivo, respectivamente, y σ_p , E_p y ε_p representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero activo, respectivamente.

Bajo la hipótesis de adherencia perfecta entre el acero pasivo y el hormigón, la deformación unitaria del acero pasivo será igual a la deformación unitaria de una fibra del hormigón ubicada en la misma posición que dicho acero. Sin embargo, al no existir compatibilidad de deformaciones entre el acero de pretensado no adherente y el hormigón, la condición de compatibilidad entre este acero y el hormigón puede escribirse bajo la hipótesis de perfecta no adherencia como la Ecuación (4.6) (Gauvreau, 1993):

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{p,0} + \frac{1}{l_{p,0}} \int_{x=0}^{x=l} \Delta \varepsilon_{c,p}(x) dx \quad (4.6)$$

siendo $\varepsilon_{p,0}$ la deformación unitaria inicial del acero activo, $l_{p,0}$ la longitud inicial del acero activo, l la longitud de la viga, y $\Delta \varepsilon_{c,p}(x)$ el cambio en la deformación unitaria del hormigón en una fibra que coincide con la ubicación del acero de pretensado en una sección ubicada a una distancia x del extremo de la viga.

Debido al proceso de relajación que experimenta el acero cuando es sometido a tensiones superiores al 40% de su resistencia máxima característica $f_{p,max,k}$, la relación tensión-deformación para el acero de pretensado puede ob-

tenerse a partir del modelo del coeficiente de relajación χ_r (Ghali et al. 2002).

4.2.3. Contribución del hormigón entre fisuras

Cuando en una sección de un elemento sometido a flexión compuesta la tensión de tracción en el hormigón sobrepasa f_{ctm} , la sección se fisura. Si bien el hormigón no es capaz de llevar tracción en la sección fisurada, continúa llevando tracción entre las fisuras, colaborando así con la rigidez del elemento. Esta contribución del hormigón entre fisuras se denomina *tension stiffening* (CEB-FIP, 1995).

Cuando la sección del elemento es sometida a flexo-compresión, como es el caso de elementos de hormigón pretensado, la contribución del hormigón entre fisuras es menos significativa que en el caso de elementos sometidos a flexión pura o a flexo-tracción. De acuerdo con Torres et al. (2004) si la relación entre el momento de fisuración y el momento de descompresión es menor o igual a dos, la contribución del hormigón entre fisuras puede ser despreciada. Dicha relación puede expresarse de otra manera como en la Ecuación (4.7) (Torres et al. 2004):

$$\frac{f_{ctm}A_c}{|F_N|} \leq 1 \quad (4.7)$$

siendo A_c el área bruta de la sección de hormigón y $|F_N|$ el valor absoluto de la fuerza axial (compresiones negativas).

En un elemento pretensado, no sometido a fuerzas axiales externas, la relación $|F_N|/A_c$ corresponde a la tensión media de pretensado en la sección. En términos generales, debido a las condiciones de servicio de una pieza pretensada (por ejemplo la limitación del ancho de fisura) la tensión media de pretensado suele ser bastante superior que f_{ctm} . No obstante, de no cumplirse la condición dada por la Ecuación (4.7) la contribución del hormigón entre fisuras puede estimarse de acuerdo a los criterios expuestos en CEB-FIP (1995).

4.3. Aplicación del Método Paso a Paso a vigas compuestas con pretensado interior no adherente

4.3.1. Vigas estáticamente determinadas

La Figura (4.1) muestra un procedimiento general de construcción de una viga compuesta de hormigón de un tablero de un puente en el cual la losa del tablero se hormigona en sitio.

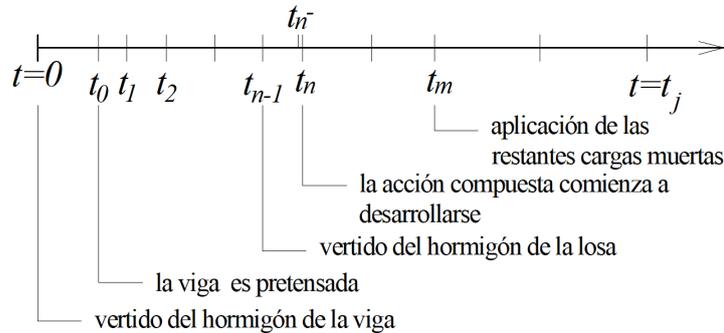


Figura 4.1: Escala temporal de un procedimiento general de construcción del tablero de un puente con vigas pretensadas.

Consideremos en primera instancia una viga estáticamente determinada de hormigón, pretensada con pretensado interior no adherente. Consideremos que la sección transversal de la viga es simétrica con respecto al eje z y que el origen O del eje coordenado se elige arbitrariamente sobre el eje de simetría. Supongamos que una sección de la viga ubicada a una distancia x medida desde el extremo, tiene $m_s(x)$ capas de acero pasivo y $m_p(x)$ capas de acero activo. Denominemos $A_{s(i)}(x)$ el área de la sección de la i -ésima capa de acero pasivo ($1 \leq i \leq m_s(x)$) y $A_{p(i)}(x)$ el área de la sección de la i -ésima capa de acero activo ($1 \leq i \leq m_p(x)$). Como caso más general, consideremos que bajo la acción del pretensado y las cargas de larga duración, la viga puede estar fisurada (Figura (4.2)).

Teniendo en cuenta las hipótesis de Euler-Bernoulli la deformación unitaria en una fibra ubicada a una distancia z del punto de referencia O , en una sección ubicada a una distancia x del extremo de la viga y en un tiempo t_j , puede escribirse como la Ecuación (4.8):

$$\varepsilon(t_j, x, z) = \varepsilon_r(t_j, x) + z \cdot \kappa(t_j, x) \tag{4.8}$$

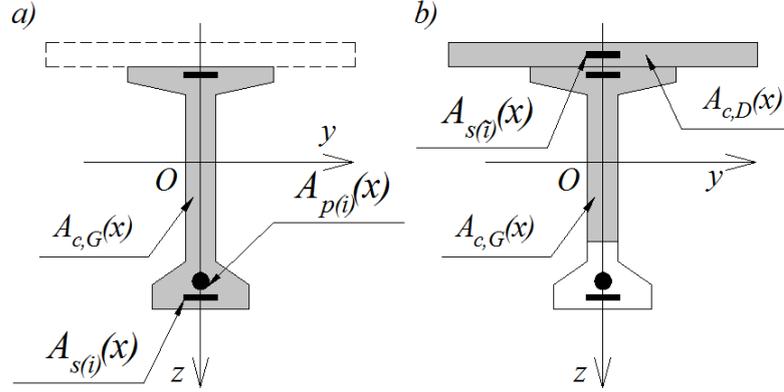


Figura 4.2: a) Sección de la viga, secciones de acero pasivo y activo no adherente. Ejes de referencia. b) Sección de la viga compuesta. Áreas de hormigón no fisuradas.

donde $\varepsilon_r(t_j, x)$ y $\kappa(t_j, x)$ son la deformación unitaria en O y la curvatura, respectivamente.

Las relaciones constitutivas para el hormigón de la viga en todo tiempo $t_j > t_0$ y para el hormigón de la losa en todo tiempo $t_j > t_{n-1}$ pueden escribirse como en las Ecuaciones (4.9) y (4.10), respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_{c,G}(t_j, x, z) = & E_{c,G}(t_j) (\varepsilon(t_j, x, z) - \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0)) + \dots \\ & \dots + \sum_{i=0}^{j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \sigma_{c,G}(t_i, x, z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{c,D}(t_j, x, z) = & E_{c,D}(t_j) (\varepsilon(t_j, x, z) - \varepsilon_{sh,D}(t_j, t_0) - \varepsilon(t_{n-}, x, z)) + \dots \\ & \dots + \sum_{i=0}^{j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \sigma_{c,D}(t_i, x, z) \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde los subíndices G y D corresponden a la viga y a la losa respectivamente, t_{n-1} es el tiempo cuando es colocado el hormigón de la losa, t_n es el tiempo cuando la acción compuesta comienza a desarrollarse, t_{n-} representa un instante de tiempo justo antes de que la acción compuesta se desarrolle, el término $\varepsilon(t_{n-}, x, z)$ representa la deformación unitaria que habría en una fibra de la losa en el instante t_{n-} , justo antes que la acción compuesta se desarrolle (deformación “ficticia”). La inclusión del término $\varepsilon(t_{n-}, x, z)$ garantiza que la losa de hormigón esté descargada en el instante t_n . $F_{e,G}(t_j, t_i)$ y $F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1})$ vienen dados por las Ecuaciones (4.11) y (4.12), res-

pectivamente (Gilbert y Ranzi, 2010):

$$F_{e,G}(t_j, t_i) = \frac{(J_G(t_j, t_{i+1}) - J_G(t_j, t_i))}{J_G(t_j, t_j)} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} & F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \\ &= \frac{(J_D(t_j - t_{n-1}, t_{n+1} - t_{n-1}) - J(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}))}{J_D(t_j - t_{n-1}, t_j - t_{n-1})} \end{aligned} \quad (4.12)$$

La relación constitutiva para el acero pasivo de la i -ésima capa ($1 \leq i \leq m_s(x)$) para todo tiempo $t_j \geq t_0$ vienen dada por la Ecuación (4.13):

$$\sigma_{s(i)}(t_j, x) = E_{s(i)}\varepsilon(t_j, x, z_{s(i)}) \quad (4.13)$$

Si a la losa se le adicionan $\hat{m}_s(x)$ capas de acero pasivo en cualquier sección ($t_j \geq t_n$), la relación constitutiva para el acero pasivo adicionado ($1 \leq i \leq \hat{m}_s(x)$) viene dado por la Ecuación (4.14):

$$\sigma_{s(\hat{i})}(t_j, x) = E_{s(\hat{i})} \left(\varepsilon(t_j, x, z_{s(\hat{i})}) - \varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\hat{i})}) \right) \quad (4.14)$$

donde $\varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\hat{i})})$ es la deformación unitaria que habría en una fibra de la losa localizada en $z_{s(\hat{i})}$ y en el tiempo t_{n-} y $z_{s(\hat{i})}$ es la distancia desde el punto de referencia O hasta el centro de gravedad de la \hat{i} -ésima capa de acero pasivo localizado en la losa. La inclusión del término $\varepsilon(t_{n-}, x, z_{s(\hat{i})})$ garantiza que el acero de la losa esté descargado en el instante t_n .

La relación constitutiva para el acero activo no adherente de la i -ésima capa ($1 \leq i \leq m_p(x)$) para todo tiempo $t_j \geq t_0$ viene dada por la Ecuación (4.15):

$$\sigma_{p(i)}(t_j, x) = E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (4.15)$$

donde $l_{p,0(i)}$, $\varepsilon_{p(i),0}$ y $\Delta l_{p(i)}(t_j)$ son la longitud inicial del acero activo no adherente de la i -ésima capa, su deformación unitaria inicial y su cambio de longitud en el instante t_j , respectivamente. $\varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) = \Delta \bar{\sigma}_{pr(i)}(t_j - t_0)/E_p$ es la deformación unitaria debida a la relajación del acero activo no adherente de la i -ésima capa y $\Delta \bar{\sigma}_{pr(i)}(t_j - t_0)$ su relajación reducida. Si bien $\Delta \bar{\sigma}_{pr(i)}(t_j - t_0)$ representa una pérdida se ha considerado de valor positivo.

La fuerza axial y el momento flector resistido por el hormigón de la viga y la losa en una sección localizada a una distancia x y en un instante $t_j > t_n$

vienen dados por las Ecuaciones (4.16) y (4.17), respectivamente:

$$\begin{aligned}
N_c(t_j, x) &= \int_{A_{c,G}} \sigma_{c,G}(t_j, x, z) dA + \int_{A_{c,D}} \sigma_{c,D}(t_j, x, z) dA \\
&= (A_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + A_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j)) \varepsilon_r(t_j, x) + \dots \\
&\quad \dots + \left(\hat{B}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \right) \kappa(t_j, x) + \dots \\
&\quad \dots - A_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \varepsilon_r(t_{n-}, x) + \dots \\
&\quad \dots - \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,G}(t_j) \kappa(t_{n-}, x) + \dots \\
&\quad \dots - A_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) + \dots \\
&\quad \dots - A_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) + \dots \\
&\quad \dots + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) N_{c,G}(t_i, x) + \dots \\
&\quad \dots + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) N_{c,D}(t_i, x) \quad (4.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_c(t_j, x) &= \int_{A_{c,G}} z \cdot \sigma_{c,G}(t_j, x, z) dA + \int_{A_{c,D}} z \cdot \sigma_{c,D}(t_j, x, z) dA \\
&= \left(\hat{B}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \right) \varepsilon_r(t_j, x) + \dots \\
&\quad \dots + \left(\hat{I}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + \hat{I}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \right) \kappa(t_j, x) + \dots \\
&\quad \dots - \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \varepsilon_r(t_{n-}, x) + \dots \\
&\quad \dots - \hat{I}_{c,D}(x)E_{c,G}(t_j) \kappa(t_{n-}, x) + \dots \\
&\quad \dots - \hat{B}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) + \dots \\
&\quad \dots - \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) + \dots \\
&\quad \dots + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) M_{c,G}(t_i, x) + \dots \\
&\quad \dots + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) M_{c,D}(t_i, x) \quad (4.17)
\end{aligned}$$

siendo $A_{c,G}(x)$ y $A_{c,D}(x)$ son el área no fisurada del hormigón de la viga y de la losa, respectivamente, $\hat{B}_{c,G}(x)$ y $\hat{B}_{c,D}(x)$ son el momento estático respecto al eje de referencia del área no fisurada de la viga y de la losa, respectivamente, y $\hat{I}_{c,G}(x)$ y $\hat{I}_{c,D}(x)$ son el momento de inercia del área no fisurada de la viga y de la losa respecto al eje de referencia, respectivamente.

La fuerza axial y el momento flector resistido por el acero activo no adherente y el acero pasivo en un sección localizada a una distancia x y en un instante $t_j > t_n$ vienen dados por las Ecuaciones (4.18), (4.19), (4.20) y (4.21), respectivamente:

$$N_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (4.18)$$

$$M_p(t_j, x) = \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} z_{p(i)}(x) A_{p(i)}(x) E_{p(i)} \left(\frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} + \varepsilon_{p(i),0} - \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \right) \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned} N_s(t_j, x) &= \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \varepsilon_r(t_j, x) + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \varepsilon_r(t_{n-}, x) + \dots \\ &\dots + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \kappa(t_{n-}, x) \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
M_s(t_j, x) &= \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \varepsilon_r(t_j, x) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \varepsilon_r(t_j, x) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})}^2 A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(i)} \kappa(t_j, x) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \varepsilon_r(t_{n-}, x) + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})}^2 A_{s(\hat{i})}(x) E_{s(\hat{i})} \kappa(t_{n-}, x) \tag{4.21}
\end{aligned}$$

Dado que la resultante de las fuerzas internas (fuerza axial y momento flector) debe ser igual a las fuerzas externas en cada sección x y para todo tiempo t_j (Menn C., 1990), teniendo en cuenta las Ecuaciones (4.16) a (4.21),

obtenemos la Ecuación (4.22):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) \end{bmatrix} &- \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_A(t_j, x) & R_B(t_j, x) \\ R_B(t_j, x) & R_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} + \\
&\dots - \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_{n-}, x) \\ \kappa(t_{n-}, x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_i, x) \\ M_{c,G}(t_i, x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_i, x) \\ M_{c,D}(t_i, x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots - E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots - E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots - \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots + \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \tag{4.22}
\end{aligned}$$

donde $R_A(t_j, x)$, $R_B(t_j, x)$ y $R_I(t_j, x)$ representan la rigidez axial, la rigidez relativa al momento de primer orden y la rigidez flexional, respectivamente, de la sección compuesta respecto a los ejes de referencia. Sus expresiones vienen dadas por la Ecuación (4.23):

$$\begin{aligned}
R_A(t_j, x) &= A_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + A_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) + \dots \\
&\dots \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} A_{s(i)}(x)E_{s(i)} + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} A_{s(\hat{i})}(x)E_{s(\hat{i})} \\
R_B(t_j, x) &= \hat{B}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) + \dots \\
&\dots \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)} A_{s(i)}(x)E_{s(i)} + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x)E_{s(\hat{i})} \\
R_I(t_j, x) &= \hat{I}_{c,G}(x)E_{c,G}(t_j) + \hat{I}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) + \dots \\
&\dots \sum_{i=1}^{i=m_s(x)} z_{s(i)}^2 A_{s(i)}(x)E_{s(i)} + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})}^2 A_{s(\hat{i})}(x)E_{s(\hat{i})}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

mientras que $\hat{R}_A(t_j, x)$, $\hat{R}_B(t_j, x)$ y $\hat{R}_I(t_j, x)$ representan la rigidez axial, la rigidez relativa al momento estático y la rigidez flexional, respectivamente, de la losa y del acero pasivo contenido en ella. Sus expresiones vienen dada por la Ecuación (4.24):

$$\begin{aligned}
\hat{R}_A(t_j, x) &= A_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} A_{s(\hat{i})}(x)E_{s(\hat{i})} \\
\hat{R}_B(t_j, x) &= \hat{B}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})} A_{s(\hat{i})}(x)E_{s(\hat{i})} \\
\hat{R}_I(t_j, x) &= \hat{I}_{c,D}(x)E_{c,D}(t_j) + \sum_{i=1}^{i=\hat{m}_s(x)} z_{s(\hat{i})}^2 A_{s(\hat{i})}(x)E_{s(\hat{i})}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

La deformación del tendón no adherente localizado en la i -ésima capa y en el instante t_j viene dado la Ecuación (4.25):

$$\begin{aligned}
\Delta l_{p(i)}(t_j) &= \int_{x=0}^{x=l} (\varepsilon_r(t_j, x) + z_{p(i)}\kappa(t_j, x)) dx + \dots \\
&\dots \int_{x=0}^{x=l} (\varepsilon_{r,0,ref}(x) + z_{p(i)}\kappa_{0,ref}(x)) dx
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Luego, la deformación unitaria en el punto de referencia O y la curvatura en una sección localizada a una distancia x desde el extremo y en el instante

t_j viene dado la Ecuación (4.26):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} &= [R(t_j, x)] \left(\begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_{n-}, x) \\ \kappa(t_{n-}, x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots - [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_i, x) \\ M_{c,G}(t_i, x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots - [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_i, x) \\ M_{c,D}(t_i, x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \left(E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \left(E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots - [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) \tag{4.26}
\end{aligned}$$

en donde $[R(t_j, x)]$ viene dada por la Ecuación (4.27):

$$\begin{aligned}
[R(t_j, x)] &= \\
&\frac{1}{(R_A(t_j, x)R_I(t_j, x) - R_B(t_j, x)^2)} \begin{bmatrix} R_I(t_j, x) & -R_B(t_j, x) \\ -R_B(t_j, x) & R_A(t_j, x) \end{bmatrix} \tag{4.27}
\end{aligned}$$

4.3.2. Vigas continuas

En el caso de vigas continuas, la principal diferencia radica en que se originan momentos hiperestáticos debidos al pretensado (Calavera, 1999). Por lo que en este caso a la resultante de las acciones externas se le deberá adicionar la componente del momento flector secundario, que depende de la fuerza de pretensado y de la rigidez de la viga.

El CEB-FIP (2010) propone una metodología para la resolución numérica de vigas continuas de hormigón armado. Si bien esta metodología considera

el problema de la fisuración, está basada en consideraciones de linealidad, lo que puede no ser muy eficiente ya que la resolución del sistema de ecuaciones planteado tiene una convergencia más rápida para aquellos casos en los que se parta de valores que sean más próximos a los valores solución.

Dado que el problema que se analiza es altamente no-lineal, basados en el procedimiento descrito en Calavera (1999), el cual está basado en el método de las fuerzas, se ha propuesto una metodología alternativa de análisis. Según dicho método las reacciones hiperestáticas se reemplazan por fuerzas externas y se agregan las condiciones de contorno. El momento secundario de pretensado para una sección de la viga y para un instante de tiempo, puede escribirse como en la Ecuación (4.28):

$$M_S(t, x) = \sum_{n=1}^{n=r} W_n(N_p) \cdot M_{s(n)}(x) \quad (4.28)$$

siendo r el número de vínculos hiperestáticos, $W_n(N_p)$ es el valor de la n -ésima reacción hiperestática, que dependen de la fuerza de pretensado y $M_{s(n)}(x)$ el momento flector que origina la n -ésima reacción hiperestática si la misma fuese de valor unitario, manteniendo las restantes reacciones hiperestáticas nulas. Además deberá cumplirse que la deformación vertical de la viga en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas sea nula.

En el caso de vigas continuas, teniendo en cuenta la Ecuación (4.28), la

Ecuación (4.26) se reescribe como la Ecuación (4.29):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_j, x) \\ \kappa(t_j, x) \end{bmatrix} &= [R(t_j, x)] \begin{bmatrix} N_{ext}(t_j, x) \\ M_{ext}(t_j, x) + \sum_{n=1}^{n=r} W_n(N_p) \cdot M_{s(n)}(x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots - [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} \begin{bmatrix} N_{p(i),0}(x) \\ M_{p(i),0}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \begin{bmatrix} \hat{R}_A(t_j, x) & \hat{R}_B(t_j, x) \\ \hat{R}_B(t_j, x) & \hat{R}_I(t_j, x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r(t_{n-}, x) \\ \kappa(t_{n-}, x) \end{bmatrix} + \dots \\
&\dots - [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,G}(t_j, t_i) \begin{bmatrix} N_{c,G}(t_i, x) \\ M_{c,G}(t_i, x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots - [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_{e,D}(t_j - t_{n-1}, t_i - t_{n-1}) \begin{bmatrix} N_{c,D}(t_i, x) \\ M_{c,D}(t_i, x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \left(E_{c,G}(t_j) \varepsilon_{sh,G}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} A_{c,G}(x) \\ \hat{B}_{c,G}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \left(E_{c,D}(t_j) \varepsilon_{sh,D}(t_j - t_0, t_n - t_0) \begin{bmatrix} A_{c,D}(x) \\ \hat{B}_{c,D}(x) \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots + [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \varepsilon_{p,rel(i)}(t_j) \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) + \dots \\
&\dots - [R(t_j, x)] \left(\sum_{i=1}^{i=m_p(x)} A_{p(i)} E_{p(i)} \frac{\Delta l_{p(i)}(t_j)}{l_{p,0(i)}} \begin{bmatrix} 1 \\ z_{p(i)} \end{bmatrix} \right) \tag{4.29}
\end{aligned}$$

4.4. Implementación computacional

Debido a la no linealidad que presentan las ecuaciones que gobiernan el problema en el análisis de este tipo de estructuras, para cada intervalo de tiempo, es necesario realizar un procedimiento iterativo. En el caso más general de vigas hiperestáticas este procedimiento iterativo incluye la ejecución de dos procedimientos (relacionados entre sí): el primero para la obtención de las reacciones hiperestáticas de pretensado y el segundo para la obtención de la fuerza de pretensado.

Para la obtención de las reacciones hiperestáticas se ha optado por un procedimiento basado en el método de falsa posición (*regula falsi*) (Hilderbrand, 1987). Se parte de un instante de tiempo en el cual es conocido el estado tenso

- deformacional de la estructura, en el instante siguiente los valores de las reacciones hiperestáticas se mantienen constantes, es decir, se inicia la iteración con los valores obtenidos en el instante previo y se calculan las deformaciones en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas. El sentido de la deformación resultante en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas va a ser de sentido contrario al del incremento de fuerza necesario para anular dicha deformación, en otras palabras, la primera iteración establece la dirección de búsqueda. Para el valor de la fuerza incrementada se obtiene un nuevo valor de deformación en los puntos de aplicación de las reacciones hiperestáticas, el que debe ser de signo contrario del primero para garantizar la existencia de la solución en dicho intervalo.

Para cada incremento de las fuerzas hiperestáticas debe obtenerse el incremento de tensión en el acero de pretensado, es decir, debe calcularse la elongación del cable. A los efectos de obtener el alargamiento del acero de pretensado, y por lo tanto la fuerza ejercida por éste, la integración de las deformaciones unitarias y las curvaturas se realiza mediante una integración numérica. Para ello la viga se divide en un número discreto de secciones. Por otra parte, para cada sección, las propiedades geométricas dependen de la deformación unitaria y de la curvatura en dicha sección. Para efectuar el análisis seccional, la sección de la viga (viga-losa) se divide en un número discreto de capas. Mediante un procedimiento de análisis iterativo-incremental basado en los algoritmos de Newton-Raphson se resuelve la Ecuación (4.29). Para cada capa se define una variable de estado que indica si la capa aún no se ha fisurado, si está fisurada o, si estuvo fisurada y ahora está comprimida, debe indicar en que instante de tiempo se ha comprimido. Como se ha mencionado, se considera que la capa está fisurada cuando la tensión en dicha capa supera la resistencia a tracción del hormigón de acuerdo con la Ecuación (4.2). Si la capa se fisura en determinado instante, tanto la retracción como la historia de tensiones dejan de considerarse en los tiempos posteriores. Si la capa está fisurada pero se comprime en determinado instante (ya que en estas condiciones el hormigón no es capaz de tomar tracciones) se considera la historia de tensiones a partir de dicho instante pero ya no se considera la retracción. Obtenidas las nuevas deformaciones unitarias y las curvaturas en todas las secciones se obtiene una nueva fuerza en los cables, nuevos valores de las deformaciones en los puntos de aplicación de las fuerzas hiperestáticas y por lo tanto nuevos valores de éstas. En resumen, es necesaria la aplicación de un algoritmo de

bucles anidados hasta la convergencia del problema.

4.5. Breve descripción de las pérdidas instantáneas

Las pérdidas instantáneas de la fuerza de pretensado son aquellas que pueden ocurrir durante el tesado de las armaduras activas y durante el proceso de anclaje de las mismas. Salvo casos especiales donde pueden producirse otros tipos de pérdidas instantáneas, la pérdida instantánea total de la fuerza de pretensado en cada sección de la pieza se compone de: *a*) la pérdida por rozamiento a lo largo de la vaina o conducto; *b*) la pérdida por penetración de las cuñas y; *c*) las pérdidas por acortamiento elástico del hormigón (CEB-FIP, 2010). En los ejemplos de validación de la formulación propuesta se utiliza el concepto de tensión efectiva de pretensado, es decir, el valor de la fuerza de pretensado luego de producidas las pérdidas instantáneas (Breckenridge y Bugg, 1964; Gauvreau, 1993; M. H. Harajli, 2012; Lou et al. 2013). Por otra parte, la formulación propuesta está basada en la hipótesis de perfecta no adherencia para el acero de pretensado (Gauvreau, 1993). En este sentido en los ejemplos de validación se realizará una estimación de la pérdida debida al rozamiento a lo largo del conducto utilizando para ello los parámetros de cálculo dados por los fabricantes y se mostrará que para los casos analizados es razonable utilizar la hipótesis de perfecta no adherencia.

4.6. Validación

La expresión de la función de fluencia de acuerdo con la Ecuación (4.4) es la comúnmente utilizada en la bibliografía técnica en la descripción del comportamiento visco-elástico del hormigón (Bazant, 1982). En este sentido la formulación propuesta (Ecuación (4.29)) no depende de la normativa utilizada para la estimación de los parámetros de cálculo. En el presente trabajo se han utilizado las formulaciones del Model Code 2010 (2012) para la estimación de los valores del coeficiente de fluencia y de la retracción. La ecuación de la función de fluencia dada por el Model Code 2010 (2012) difiere ligeramente de la Ecuación (4.4); su expresión viene dado por la Ecuación (4.30):

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi(t, \tau)}{E_c(28)} \quad (4.30)$$

donde $E_c(28)$ es el módulo de elasticidad del hormigón a los 28 días de edad y $\varphi(t, \tau)$ el coeficiente de fluencia calculado de acuerdo a dicha formulación. La Ecuación (4.30) puede reescribirse de acuerdo con la Ecuación (4.31):

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_c(\tau)} \left(1 + \frac{E_c(\tau)}{E_c(28)} \varphi(t, \tau) \right) = \frac{1 + \phi(t, \tau)}{E_c(\tau)} \quad (4.31)$$

4.6.1. Ejemplo 1

La Figura (4.3) muestra la sección transversal de las vigas I ensayadas por Breckenridge y Bugg en el U.S. Civil Engineering Naval Laboratory en el año 1964 (Breckenridge y Bugg, 1964). Las vigas simplemente apoyadas y de longitud de vano 12192 mm fueron curadas durante ocho días y luego pretensadas. Seis de ellas fueron postensadas con dos barras no adherentes de alta resistencia del sistema Stressteel. Cada barra de pretensado tenía un diámetro de 28.5 mm ($A_p=641.29 \text{ mm}^2$), una resistencia a tracción nominal de 1007 MPa, un módulo de elasticidad de 200 GPa y la tensión efectiva de pretensado luego del anclaje de las barras fue de 683.23 MPa. El área bruta de la sección de la viga fue de $A_c = 11.645 \times 10^4 \text{ mm}^2$ y el momento de inercia de $I_c = 51.476 \times 10^8 \text{ mm}^4$. El trazado de las barras de pretensado está dado por las Ecuaciones (4.32) y (4.33). La Figura (4.4) muestra el trazado de manera esquemática. El acero pasivo consistió en ocho barras de 9.50 mm de diámetro ($A_s = 70.79 \text{ mm}^2$), tensión de fluencia 335 MPa y módulo de elasticidad 168.9 MPa. Se utilizó cemento de resistencia normal y la resistencia característica del hormigón fue de 36.27 MPa.

Cada par de vigas fue sometida a cargas de diferente magnitud y mantenida constante por un período de tiempo de aproximadamente 6.5 años. Durante ese tiempo la temperatura promedio fue de 15.6°C y la humedad relativa promedio de 72.8%. El primer par de vigas fue sometido a su peso propio, el segundo par a su peso propio y a una sobrecarga de diseño, y el tercer par a su peso propio y a 1.5 veces la sobrecarga de diseño, denominemos Casos N^o1, N^o2 y N^o3, respectivamente. La sobrecarga de diseño consistió en dos cargas concentradas de 67613 N aplicadas a un cuarto de la longitud de vano desde cada extremo y aplicada a los 22 días luego de vertido el hormigón.

$$\begin{aligned}
d_{p(1)}(x) &= -3.5334 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 20.4605 \cdot 10^{-2} \cdot x + 192.79 \\
&\text{para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm} \\
d_{p(1)}(x) &= 488.95 \text{ para } 2895.6 \text{ mm} \leq x < 9296.4 \text{ mm} \\
d_{p(1)}(x) &= -3.5334 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 65.7029 \cdot 10^{-2} \cdot x - 2564.89 \\
&\text{para } 9296.4 \text{ mm} \leq x < 12192 \text{ mm}
\end{aligned}
\tag{4.32}$$

$$\begin{aligned}
d_{p(2)}(x) &= -1.6119 \cdot 10^{-5} x^2 + 9.3341 \cdot 10^{-2} \cdot x + 471.32 \\
&\text{para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm} \\
d_{p(2)}(x) &= 552.45 \text{ para } 2895.6 \text{ mm} \leq x < 9296.4 \text{ mm} \\
d_{p(2)}(x) &= -1.6119 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 29.9698 \cdot 10^{-2} \cdot x - 840.49 \\
&\text{para } 9296.4 \text{ mm} \leq x < 12192 \text{ mm}
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

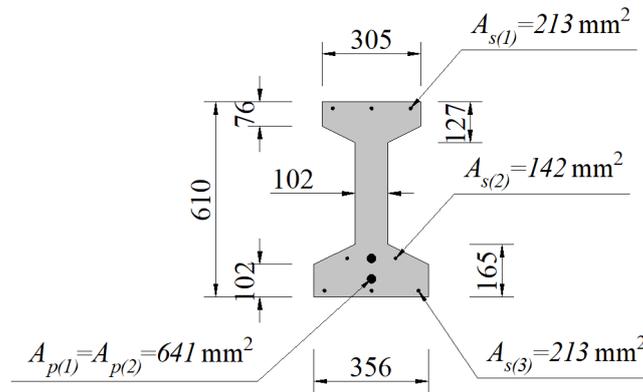


Figura 4.3: Sección de las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964).

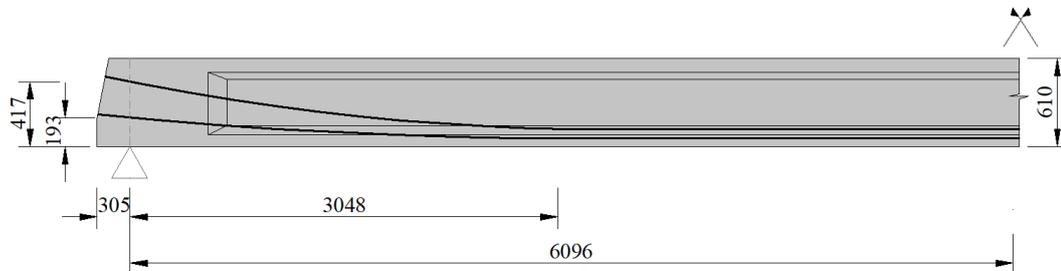


Figura 4.4: Esquema del trazado de las barras de pretensado en las vigas ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964).

Los parámetros del hormigón se calcularon de acuerdo con el Model Code 2010 (2012), teniendo en cuenta las correcciones debidas a temperatura. Los módulos de elasticidad del hormigón a los 8 días y a los 22 días son $E_c(8) = 26.44$ GPa y $E_c(22) = 29.31$ GPa, respectivamente. Los coeficientes de fluencia son $\varphi(22, 8) = 0.913$, $\varphi(2373, 8) = 1.915$ y $\varphi(2373, 22) = 1.564$, la retracción es $\varepsilon_{sh}(2373, 8) = -385.84 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{sh}(2373, 22) = -72.97 \times 10^{-6}$. Las pérdidas de tensión del acero de pretensado debida a relajación entre los 8 días y los 2373 días y entre los 8 días y los 22 días son de $\Delta\sigma_{pr}(2365) = 28.5$ MPa y $\Delta\sigma_{pr}(14) = 12.9$ MPa, respectivamente. La Tabla 4.1 muestra, para cada uno de los casos, la comparación de los valores de la pérdida de pretensado medida y la pronosticada, mientras que la Tabla 4.2 muestra el comparativo de los valores de deformación máxima. Se observan diferencias poco significativas. En la Figura (4.5) se muestra la tensión en el hormigón en la sección central de la viga a los 8, 22 y 2373 días para el Caso N°3.

Tabla 4.1: Comparativo de los valores de la pérdida de pretensado entre lo medido y lo pronosticado.

| Pérdida de pretensado a 2373 días en [MPa] | | | |
|--|--------|----------------------|--------------------|
| Caso N° | Medido | Modelo computacional | Error relativo [%] |
| 1 | 150.3 | 154.9 | 6.1 |
| 2 | 94.9 | 98.2 | 3.5 |
| 3 | 34.2 | 43.5 | 27.2 |

Tabla 4.2: Comparativo de los valores de deformación en el centro del vano (flecha).

| Deformación a 2373 días en [mm](*) | | | |
|------------------------------------|--------|----------------------|--------------------|
| Caso N° | Medido | Modelo computacional | Error relativo [%] |
| 1 | -30.1 | -30.4 | 1.0 |
| 2 | 35.6 | 26.9 | 24.4 |
| 3 | 87.6 | 71.7 | 18.2 |

La comparación entre los resultados obtenidos de la pérdida de pretensado entre el modelo computacional y los resultados experimentales, permite concluir que el modelo propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente a lo largo del tiempo, la validez estadística de esta afirmación se presenta en la Sección 4.7. Si bien algunas diferencias algo significativas se observan con respecto a la pérdida de pretensado para el Caso N°3, es oportuno mencionar que las tensiones en el hormigón superan el límite para considerar un comportamiento lineal de la fluencia y por lo tanto

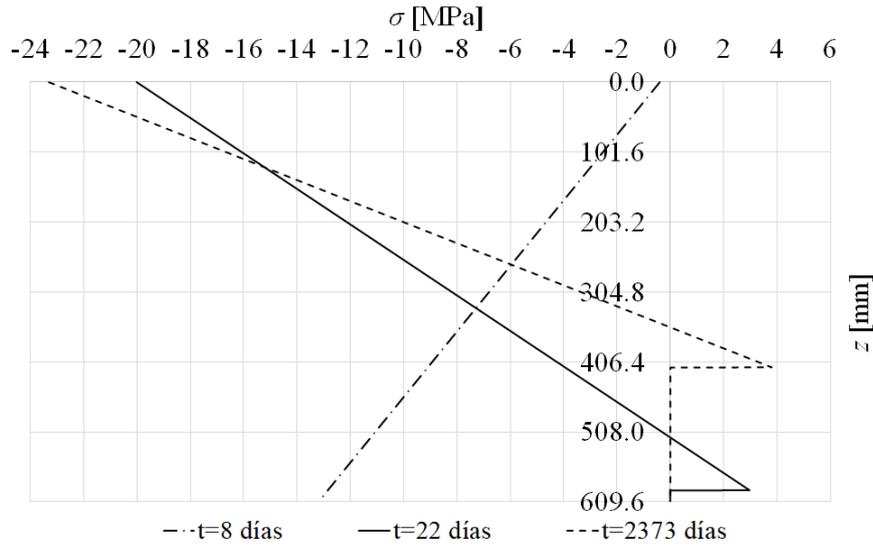


Figura 4.5: Evolución de la tensión en el hormigón en la sección central de la viga para el Caso N °3.

no son válidas las hipótesis de linealidad, lo que puede estar dando lugar a tales diferencias. Si asumimos que el coeficiente de rozamiento en curva es $\mu = 0.06$ y que la relación entre el coeficiente de rozamiento parásito y el coeficiente de rozamiento en curva es $K/\mu = 0.010$ (del lado de la seguridad), el valor de la pérdida por rozamiento entre el anclaje activo y la sección central de la viga es del orden de 10980 N, que representa una pérdida del 1.25 % (2.50 % entre las secciones extremas). El valor de la pérdida por rozamiento es relativamente pequeño, por lo que es razonable utilizar la hipótesis de no adherencia perfecta al modelar este tipo de elementos pretensados.

4.6.2. Ejemplo 2

Supongamos a modo de ejemplo que a la viga con pretensado interior no adherente del ejemplo anterior, bajo las mismas condiciones de fabricación y de exposición ambiental se le hormigona una losa a los 35 días. Consideremos que la dimensión de la losa es de 1000 mm \times 200 mm y que su resistencia característica es de 25 MPa. Supongamos además que una carga permanente uniformemente distribuida de 11.1 kN/m a los 35 días. Esta carga incluye el peso propio de la losa y cualquier otra carga muerta. Se pretende calcular la pérdida de pretensado.

Los parámetros del hormigón han sido calculados de acuerdo al Model Code 2010 (2012). El módulo de elasticidad del hormigón de la viga a los 35 días es $E_{c,G}(35) = 30.28$ GPa. Los coeficientes de fluencia de la viga son $\varphi_G(35, 8) = 1.039$, $\varphi_G(10000, 35) = 1.606$ y $\varphi_G(10000, 8) = 2.119$, la retracción es $\varepsilon_{sh,G}(10000, 8) = -401.41 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{sh,G}(35, 8) = -101.74 \times 10^{-6}$. El módulo de elasticidad de la losa a los 3 días de edad es $E_{c,D}(3) = 19.96$ GPa. El coeficiente de fluencia de la losa es $\varphi_D(9965, 3) = 3.288$, y la retracción de la losa es $\varepsilon_{sh,D}(9965, 3) = -445.00 \times 10^{-6}$. La pérdida de pretensado calculada mediante la formulación propuesta a 10000 días es de 125.1 MPa (14.3%). La Figura (4.6) muestra la evolución de la tensión en el hormigón en la sección central de la viga.

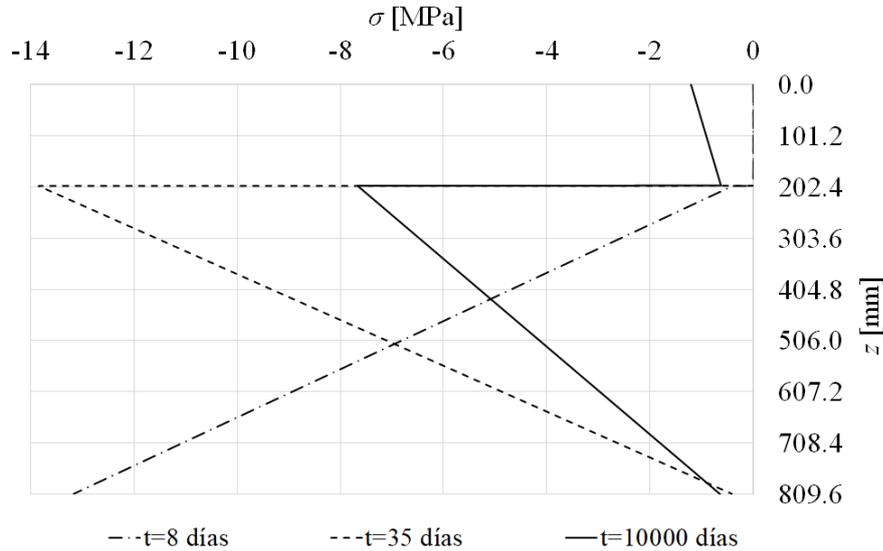


Figura 4.6: Evolución de la tensión en el hormigón en la construcción compuesta a diferentes edades.

Es importante observar a partir de este ejemplo que la construcción de la losa del tablero en sitio, según el procedimiento descrito en este trabajo, tiene un efecto beneficioso en lo que respecta a la redistribución de las tensiones en el hormigón en zonas de momentos positivos y por lo tanto en la pérdida del pretensado.

4.6.3. Ejemplo 3

La viga utilizada en este ejemplo corresponde a la viga YLB2 tomada del

trabajo de Lou et al. (2013). Se trata de una viga continua de dos vanos, pretensada con pretensado interior no adherente, cuya longitud de vano es 4800 mm. La sección de la viga es rectangular de dimensiones 150 mm \times 300 mm, el acero de pretensado consistente en un tendón no adherente de 140 mm² de sección, 197 GPa de módulo de elasticidad y 1941 MPa de resistencia máxima característica. La tensión de pretensado efectiva es de 1193 MPa y su trazado viene dado por la Ecuación (4.34). El esquema de armado de la armadura pasiva está de acuerdo con la Figura (4.7) siendo las secciones de dicho acero $A_{s1} = 603.2 \text{ mm}^2$, $A_{s2} = 226.2 \text{ mm}^2$ y $A_{s3} = 508.9 \text{ mm}^2$ y su módulo de elasticidad 200 GPa. El hormigón de la viga es de resistencia característica 33 MPa. La viga fue tesada a los 28 días de edad contra su peso propio. Dos estados de carga fueron analizados: la viga sometida a la acción del pretensado y su peso propio; y la viga sometida al pretensado, su peso propio y dos cargas puntuales Q de 30 kN aplicadas a los tercios en cada vano, los que denominemos Casos N°1 y N°2 respectivamente. Para ambos casos se estudiaron las deformaciones a la edad de pretensado y a 600 días. Dado que el autor no dispuso de los datos de temperatura y de la humedad relativa bajo las cuales fueron realizadas las mediciones, se han considerado aquí 20°C y 50 %, respectivamente, como valores razonables.

Los valores del coeficiente de fluencia y de la retracción han sido calculados de acuerdo a los lineamientos el Model Code 2010 (2012), siendo $\varphi(600, 28) = 1.885$ y es $\varepsilon_{sh}(600, 28) = -350.66 \times 10^{-6}$.

$$\begin{aligned}
 d_p(x) &= -2.5297 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 0.1006 \cdot x + 150 \\
 &\text{para } 0 \leq x < 1988 \text{ mm} \\
 d_p(x) &= -3.0518 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 0.1214 \cdot x + 129.3 \\
 &\text{para } 1988 \leq x < 4320 \text{ mm} \\
 d_p(x) &= 1.4817 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 1.4225 \cdot x + 3463.9 \\
 &\text{para } 4320 \text{ mm} \leq x \leq 4800 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{4.34}$$

La Tabla 4.3 muestra la comparación entre los valores medidos y los calculados con el modelo computacional propuesto de la deformación máxima en el vano a los 28 y a los 600 días; mientras que la Figura (4.8) muestra la gráfica de la deformación vertical para ambos casos y para ambos instantes de tiempo. La gráfica de la Figura (4.9) muestra los diagramas de momentos flectores.

El valor de la pérdida de pretensado calculado para el Caso N°1 es de

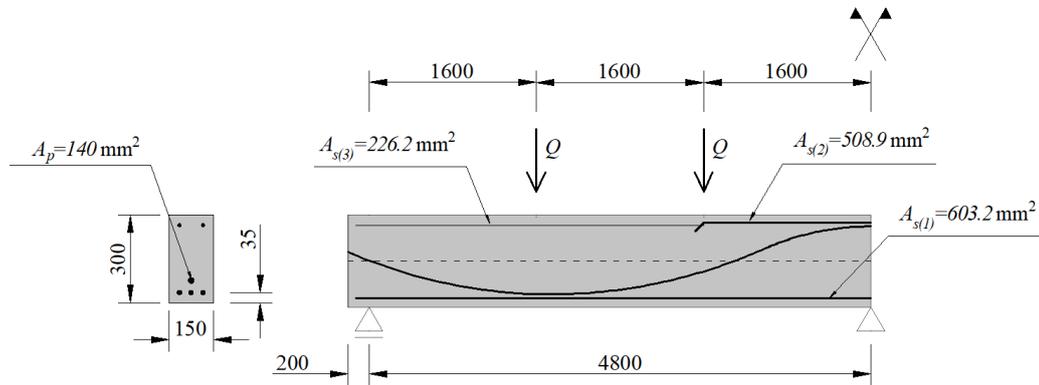


Figura 4.7: Viga YLB2 ensayada por Lou et al. (2013).

106.1 MPa, mientras que para el caso N°2 es de 51.4 MPa, que representan una pérdida del 8.9% y del 4.3%, respectivamente.

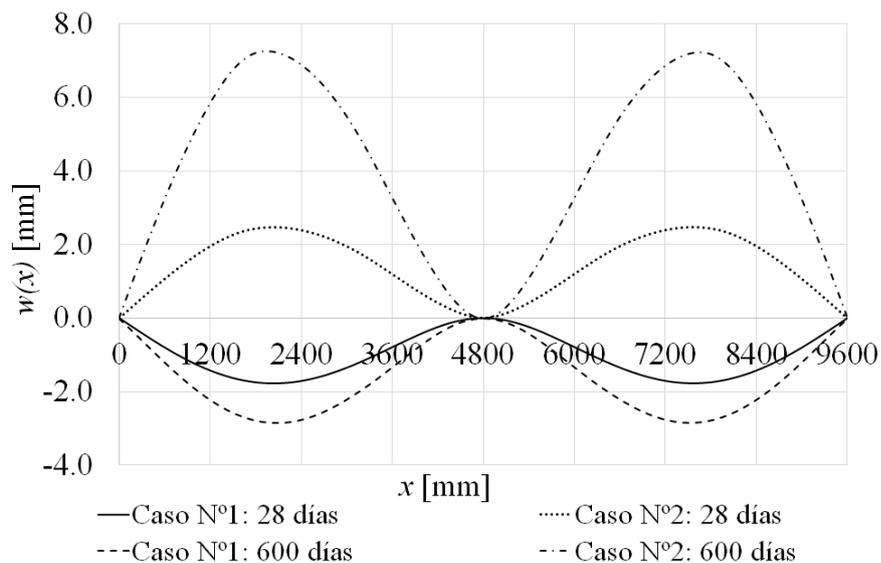


Figura 4.8: Deformación vertical $w(x)$ (z positivo hacia abajo).

Con respecto a la reacción en el apoyo central, para el Caso N°1 se produce un aumento de ésta de 4633 N a 6061 N (hacia arriba) que es del orden del 31%, mientras que en el Caso N°2 la reacción cuyo valor es de 84318 N luego de aplicada la carga Q , tiene un aumento del orden del 2%. Con respecto al momento flector, mientras que los momentos máximos en el vano se mantuvieron aproximadamente constantes, los momentos sobre el apoyo tuvieron una variación del 17% y del 37% para el Caso N°1 y N°2, respectivamente.

Nuevamente podemos decir que el modelo computacional propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adhe-

Tabla 4.3: Deflexión en el centro del vano (flecha) en milímetros.

| Caso N ^o | Medido | | Modelo computacional | | Error relativo [%] | |
|---------------------|---------------|----------------|----------------------|----------------|--------------------|----------------|
| | $t = 28$ días | $t = 600$ días | $t = 28$ días | $t = 600$ días | $t = 28$ días | $t = 600$ días |
| 1 | -1.8 | -3.5 | -1.8 | -2.9 | 0.0 | 17.1 |
| 2 | 2.0 | 8.2 | 2.5 | 7.2 | 25 | 12.2 |

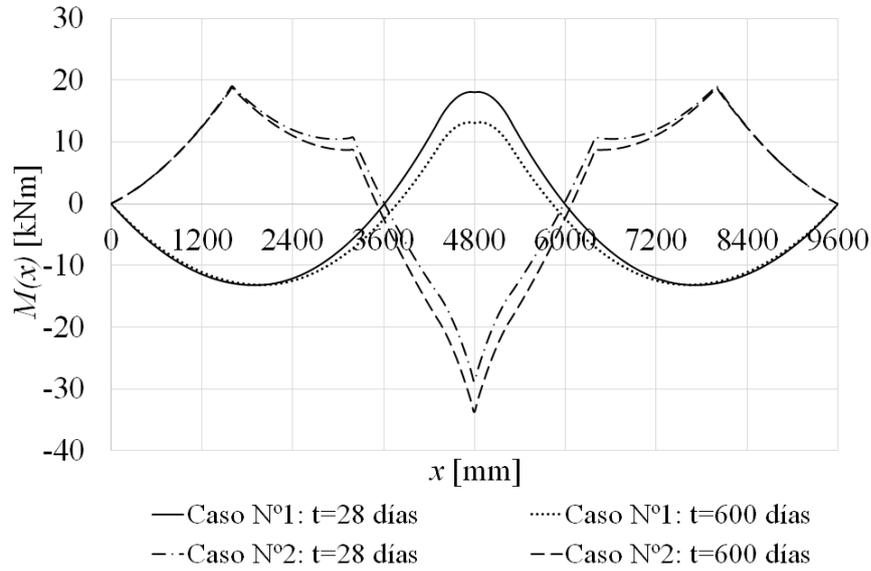


Figura 4.9: Diagrama de momentos flectores (momentos flectores positivos traccionan las fibras inferiores).

rente a lo largo del tiempo. Si asumimos que la penetración de la cuña es de 5 mm (ya que este dato no es suministrado por los autores), que el coeficiente de rozamiento en curva es 0.06 y que el coeficiente de rozamiento parásito es de $5.24 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ (valores recomendados por los diferentes fabricantes), el valor de la pérdida por rozamiento entre las secciones extremas de la viga es del orden de 5812.5 N, que representa una pérdida del 3.48 %.

4.6.4. Ejemplo 4

Supongamos a modo de ejemplo que a la viga continua con pretensado interior no adherente ensayada por Lou et al. (2013) se le hormigona una losa a los 60 días formando así una sección compuesta. Consideremos que la losa tiene dimensiones de 1000 mm \times 50 mm, que las condiciones de exposición ambiental y de fabricación se mantienen iguales, que la resistencia característica a compresión de la losa es igual a la de la viga y que en la losa es colocada una armadura pasiva cuya sección es de $A_{s4} = 140 \text{ mm}^2$ ubicada en la mitad de su espesor. Supongamos además que a los 90 días de edad es aplicada una carga muerta uniformemente distribuida de 3.5 kN/m.

Los parámetros del hormigón han sido calculados de acuerdo al Model Code 2010 (2012). El módulo de elasticidad del hormigón de la viga a los

28 días es $E_{c,G}(28) = 29.32$ GPa. Los coeficientes de fluencia de la viga son $\varphi_G(60, 28) = 0.999$, $\varphi_G(90, 28) = 1.197$ y $\varphi_G(10000, 28) = 2.441$, los valores de la retracción son $\varepsilon_{sh,G}(60, 28) = -89.09 \times 10^{-6}$, $\varepsilon_{sh,G}(90, 28) = -138.31 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{sh,G}(10000, 28) = -456.11 \times 10^{-6}$. El módulo de elasticidad de la losa a los 3 días de edad es $E_{c,D}(3) = 22.67$ GPa. Los coeficientes de fluencia de la losa son $\varphi_D(30, 3) = 2.366$, $\varphi_D(9940, 3) = 4.165$ y los valores de retracción son $\varepsilon_{sh,D}(30, 3) = -303.14 \times 10^{-6}$ y $\varepsilon_{sh,D}(9940, 3) = -597.09 \times 10^{-6}$.

Las gráficas de las Figuras (4.10) y (4.11) muestran al evolución de las tensiones en las secciones ubicadas en $x = 2.76$ m y en $x = 4.80$ m. La primera sección corresponde a la sección donde se produce el momento flector máximo en el vano a los 10000 días de edad y la segunda está ubicada sobre el apoyo intermedio. Las gráficas de las Figuras (4.12) y (4.13) muestran la deformación vertical y los diagramas de momentos flectores. La pérdida estimada de pretensado a los 10000 días es de 125.7 MPa (10.5 %).

Para la sección del vano se puede observar el efecto beneficioso de la redistribución de las tensiones entre la viga y la losa, aliviando las tensiones sobre ésta. En el caso de la sección sobre el apoyo, las tensiones generadas en la losa producen su fisuración a edades tempranas, y si bien se produce redistribución en las tensiones y variación en los momentos flectores a lo largo de la viga, la fibra superior de la viga se mantiene algo traccionada sin que se produzca fisuración, mientras que la losa continúa completamente fisurada. Es importante remarcar que luego de producida la fisuración es necesario que la fibra de hormigón de la sección se comprima para continuar llevando tensiones. Con respecto a la reacción en el apoyo central, a partir de los 90 días se produce una disminución de la misma del orden del 8.3 %, pasando de 38480 N a los 90 días a 35516 N a los 10000 días.

4.6.5. Ejemplo 5

Consideremos la losa unidireccional de tres vanos que se muestra de manera esquemática en la Figura 14. Los datos han sido extraídos de M. H. Harajli (2012). El espesor de la losa es 250 mm, la longitud de los vanos extremos es $L_1 = 8000$ mm y la longitud del vano interior es $L_2 = 10000$ mm. La losa es postensada con tendones no adherentes de 98.7 mm^2 de sección colocados cada 250 mm ($A_p = 394.8 \text{ mm}^2/\text{m}$). La tensión de tensado es 1024.1 MPa, su resistencia máxima característica es 1862 MPa y su módulo de elasticidad es 196.5 GPa. El trazado de los tendones es parabólico y ha sido obtenido de

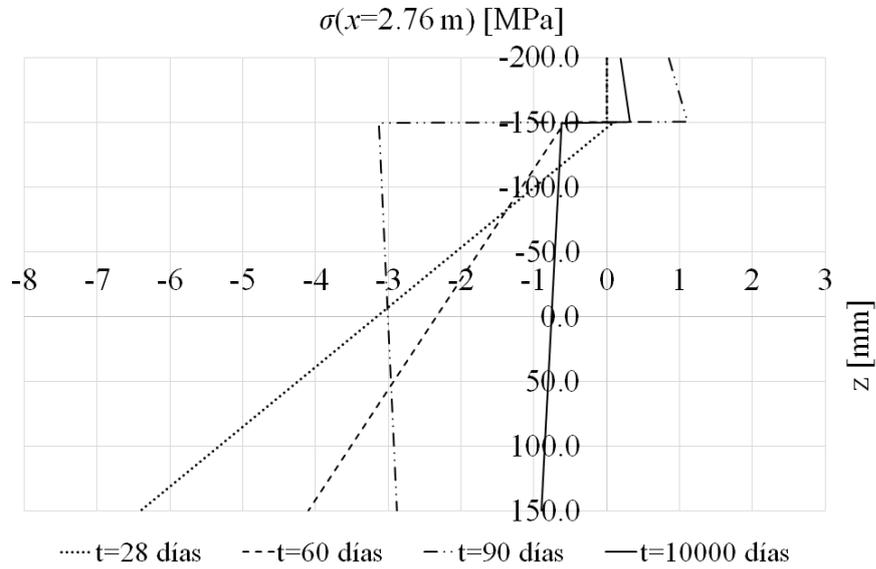


Figura 4.10: Evolución de las tensiones en la sección ubicada en $x = 2.76 \text{ m}$.

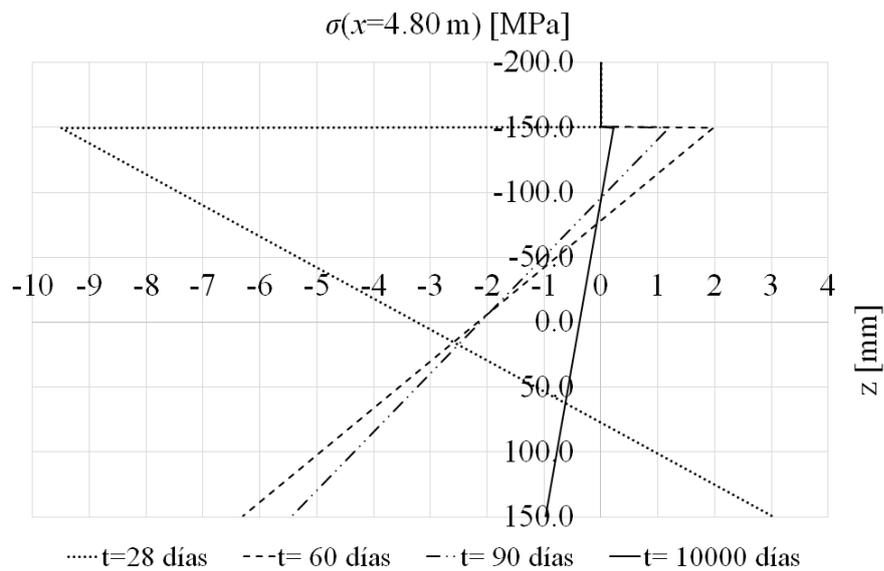


Figura 4.11: Evolución de las tensiones en la sección sobre el apoyo, $x = 4.80 \text{ m}$.

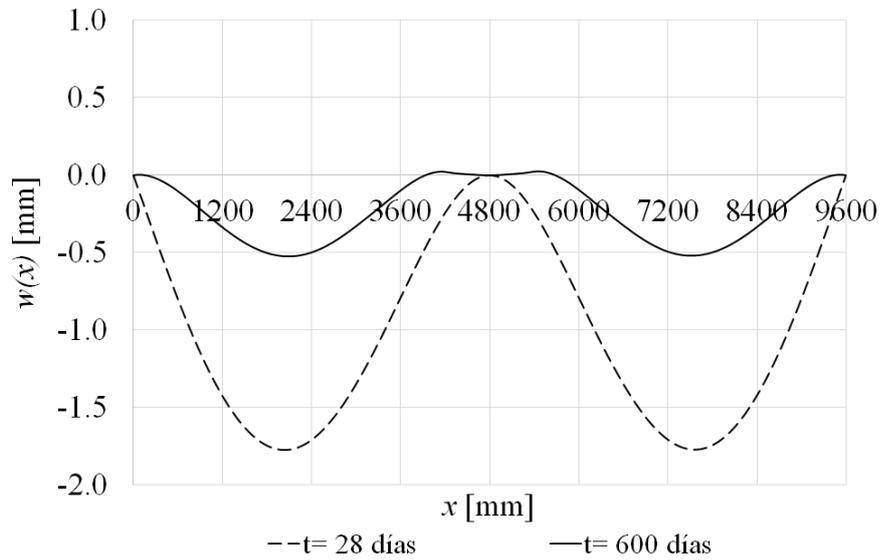


Figura 4.12: Deformación vertical $w(x)$ (z positivo hacia abajo).

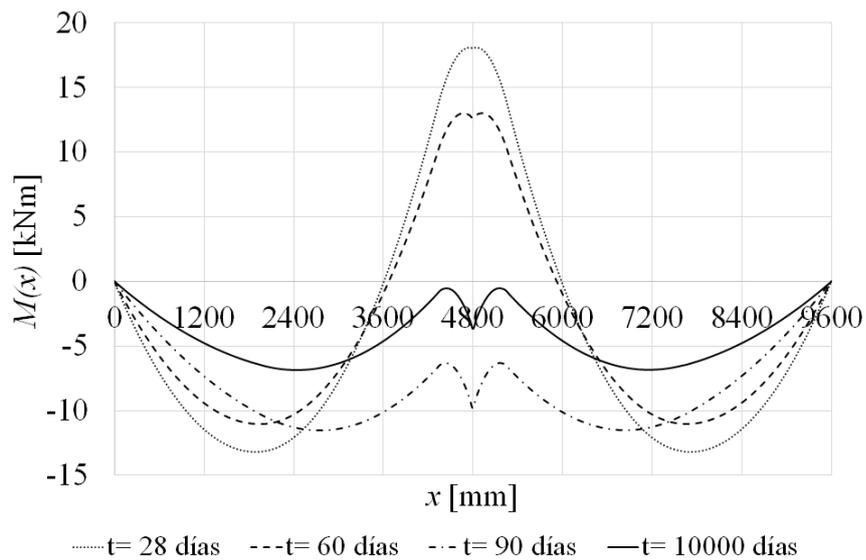


Figura 4.13: Diagrama de momentos flectores (momentos flectores positivos traccionan las fibras inferiores).

acuerdo a balancear el peso propio de la losa (T. Lin, 1963). Las excentricidades del tendón son $e_1 = 75$ mm a $0.4L_1$ desde el apoyo exterior, $e_2 = 95$ mm sobre los apoyos interiores y $e_3 = 95$ mm en el centro del vano interior. La sección de armadura pasiva inferior y superior es $A_s = 513$ mm²/m colocada con un recubrimiento mecánico de 30 mm, su módulo de elasticidad es de 200 GPa. La resistencia característica del hormigón es de 35 MPa.

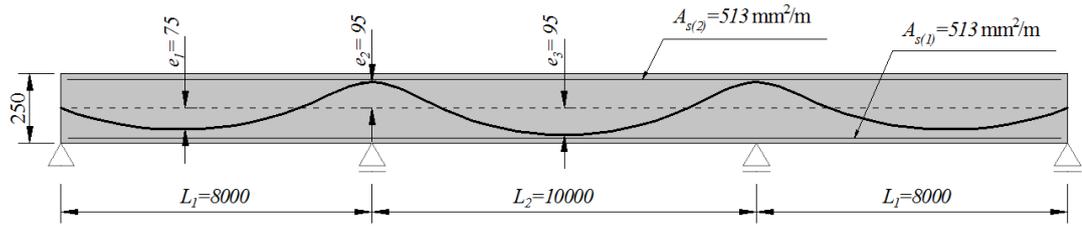


Figura 4.14: Losa unidireccional de tres vanos.

Dado que el autor [30] no realiza un estudio de largo plazo se asume para este ejemplo una temperatura de 20°C, humedad relativa 70 %, inicio de la retracción $t_s = 7$ días y edad de tensado $t_0 = 28$ días. El coeficiente de fluencia y la retracción han sido calculados de acuerdo a las formulaciones del Model Code 2010 (2012), siendo $E_c(28) = 29.89$ GPa, $\varphi(10000, 28) = 1.742$ y es $\varepsilon_{sh}(10000, 28) = -354.31 \times 10^{-6}$.

En el primer caso de estudio se asume que la única carga de larga duración corresponde al peso propio de la losa. En el segundo caso se asume que al peso propio se le adiciona una carga muerta q_{DL} de valor 4.50 kN/m². Esta carga muerta es agregada en t_0 inmediatamente luego del tensado.

Las gráficas de las Figuras (4.15) y (4.16) muestran la deformación vertical y el momento flector para la losa sometida a su peso propio y las gráficas de las Figuras (4.17) y (4.18) muestran los mismos parámetros para el caso de la losa sometida a su peso propio y a la carga muerta q_{DL} .

La pérdida de pretensado a los 10000 días para la losa sometida a su peso propio es de 92.2 MPa que corresponde a una pérdida de pretensado del orden del 9.0 %. Para este caso de carga, el momento flector negativo máximo aumenta con el tiempo, siendo del orden del 45 % superior al momento correspondiente a los 28 días, tanto el momento positivo máximo como el momento negativo máximo del vano interior disminuyen, siendo esta disminución del orden del 32 % y del 57 %, respectivamente.

Para el caso de la losa sometida a su peso propio y a la carga muerta q_{DL} ,

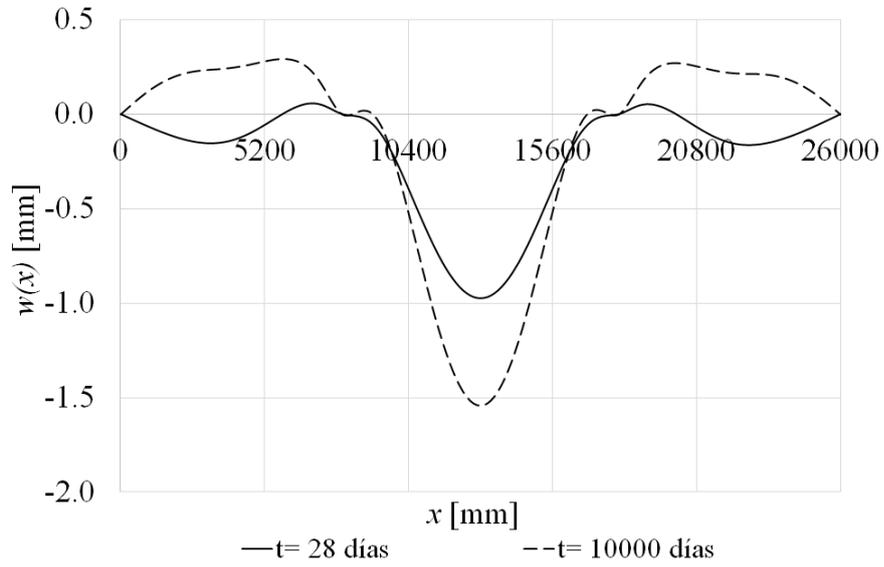


Figura 4.15: Deformación vertical de la losa unidireccional sometida a su peso propio.

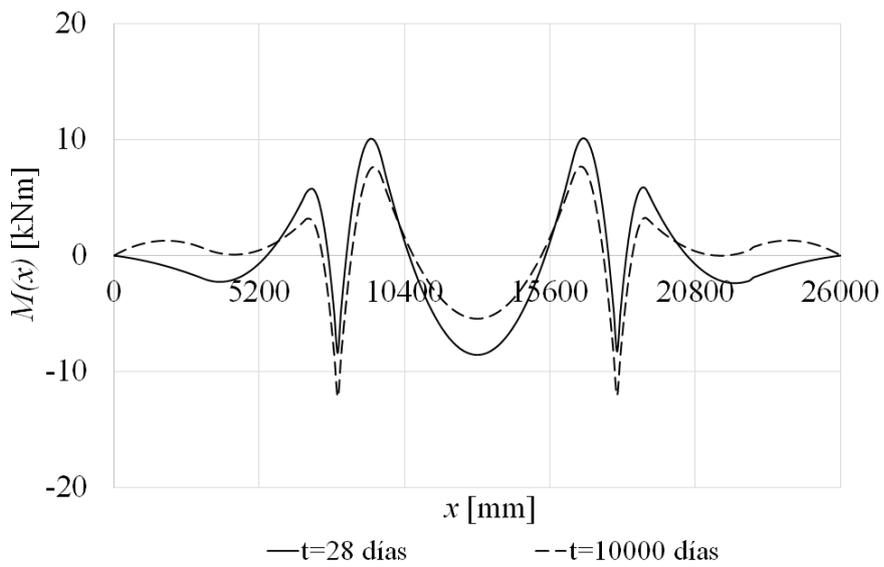


Figura 4.16: Momento flector de la losa unidireccional sometida a su peso propio.

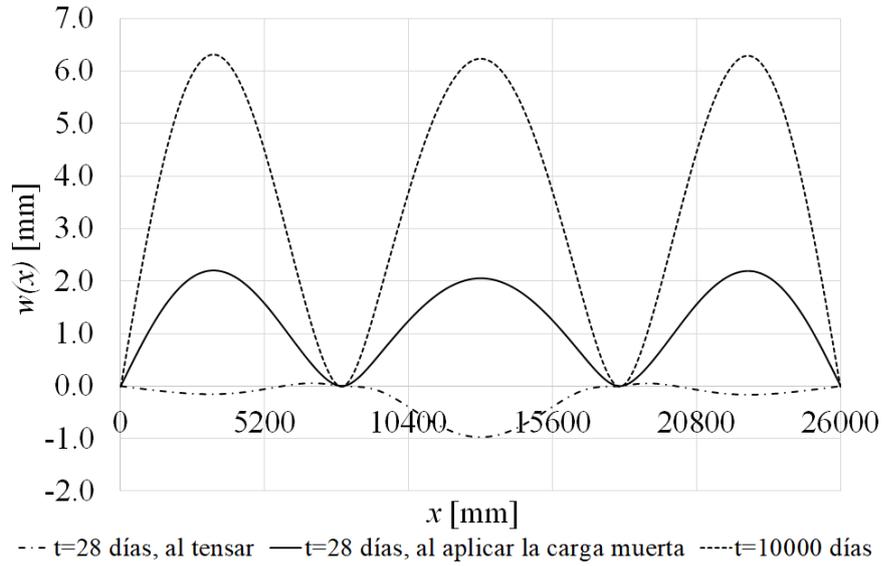


Figura 4.17: Deformación vertical de la losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta.

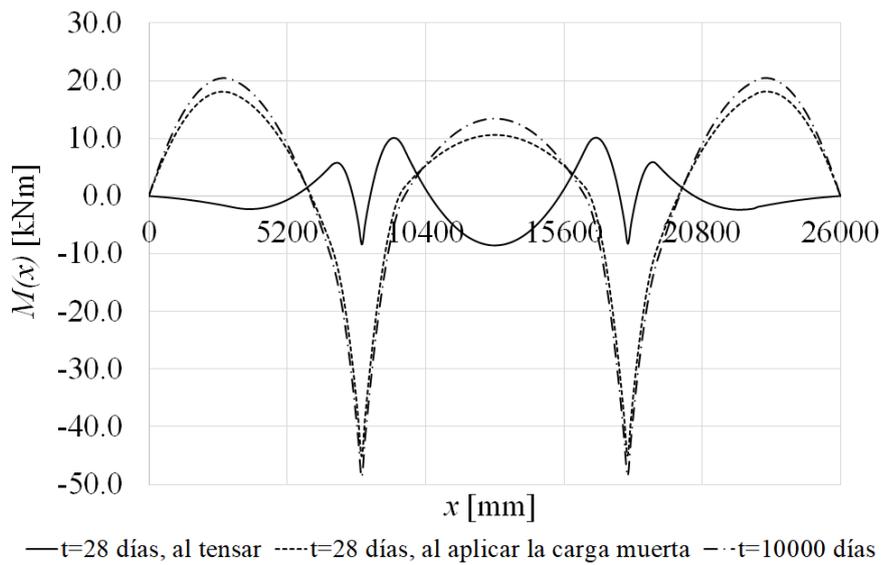


Figura 4.18: Momento flector de la losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta.

la pérdida de pretensado a los 10000 días es de 81.1 MPa que corresponde a una pérdida del 7.9%. Los valores de los momentos flectores máximo en los vanos extremos, los momentos sobre los apoyos intermedios y el momento máximo en el vano central aumentaron a lo largo del tiempo, dicho aumento es del orden del 13%, 8% y 27%, respectivamente. Es importante hacer notar que para ambos casos de carga los valores de las reacciones se mantuvieron aproximadamente constantes a lo largo del tiempo.

Con relación a las deformaciones máximas, mientras que para el caso de la viga sometida a su peso propio las deformaciones verticales máximas a largo plazo son el orden de una vez y media la deformación vertical instantánea, para el segundo caso de estudio las deformaciones verticales máximas a largo plazo son del orden de tres veces la deformación instantánea.

Si asumimos los mismos valores para la penetración de las cuñas, para el coeficiente de rozamiento en curva y para el coeficiente de rozamiento parásito que en el Ejemplo N°3, el valor de la pérdida por rozamiento entre los puntos de anclaje del acero de pretensado es del orden de 11825.2 N, que representa una pérdida del 2.92%.

4.7. Validación estadística de la formulación propuesta

A los efectos de validar estadísticamente la formulación propuesta podemos utilizar la prueba T de Student para muestras relacionadas, una muestra con los valores obtenidos por los ensayos disponibles en la bibliografía y la otra con los valores calculados por la formulación propuesta (Gatti, 2005; S. Ross, 2007). Para los valores medidos y los calculados de la pérdida de pretensado presentados en la Tabla 4.1, podemos hacer la hipótesis de que las medias de ambos conjuntos de datos relacionados no difieren significativamente (hipótesis nula). Para aceptar o rechazar esta hipótesis debemos realizar la prueba T de Student para dos muestras relacionadas. Como esta metodología es válida para distribuciones normales, primero se debe realizar una prueba de normalidad de la muestra. A tales efectos se puede utilizar la prueba de Shapiro - Wilk (Shapiro y Wilk, 1965). Para estas muestras el valor calculado del estadístico W de Shapiro - Wilk es $W = 0.91$, el cual es mayor que el valor crítico del estadístico obtenido por según el tamaño de la muestra y para un nivel de

significación mayor al 5 %, $W_{\text{crit}} = 0.77$, por lo que se acepta la hipótesis nula. En otras palabras la hipótesis de normalidad no puede ser rechazada. En la Tabla 4.4 se hayan tabulados los parámetros de la prueba T de Student. El valor del estadístico T es -3.1460 y el valor crítico del estadístico con un nivel de confianza mayor al 95 % es $T_{\text{crit}} = 4.3027$. Por lo que se acepta la hipótesis nula.

Tabla 4.4: Parámetros de cálculo de la prueba T de Student para los valores de la Tabla 4.1.

| | Medido | Calculado |
|--|----------|-----------|
| Media | 93.133 | 98.867 |
| Varianza | 3372.143 | 3102.823 |
| Observaciones | 3 | 3 |
| Coefficiente de correlación de Pearson | 0.9993 | |
| Diferencia hipotética de las medias | 0 | |
| Grados de libertad | 2 | |
| Estadístico T | -3.1460 | |
| $P(T^* \leq T)$ dos colas | 0.0879 | |
| Valor crítico de T (dos colas) | 4.3027 | |

En conclusión, la media de las pérdidas obtenidas en los ensayos, no difieren significativamente de la media de las pérdidas calculadas por la formulación propuesta, lo cual valida la utilización de esta última.

De manera análoga, podemos estudiar la validez de la formulación propuesta para calcular las deformaciones diferidas. Para ello consideraremos los tres resultados de las deformaciones diferidas de la Tabla 4.2 y los dos de la Tabla 4.3 obtenidos para una edad del hormigón de 600 días. El estadístico W de Shapiro - Wilk es 0.836 y el valor crítico del estadístico es $W_{\text{crit}} = 0.762$ por lo que la hipótesis nula no puede ser rechazada. En la Tabla 4.5 se hayan tabulados los parámetros de la prueba T de Student. El valor del estadístico T es 1.5924 y el valor crítico del estadístico con un nivel de confianza mayor al 95 % es $T_{\text{crit}} = 2.7764$. Por lo que se acepta la hipótesis nula.

Nuevamente podemos concluir que la media de las flechas diferidas obtenidas en los ensayos, no difieren significativamente de la media de las flechas calculadas por la formulación propuesta.

Tabla 4.5: Parámetros de cálculo de la prueba T de Student para los valores de la Tabla 4.2 y los valores a $t = 600$ días de la Tabla 4.3.

| | Medido | Calculado |
|--|----------|-----------|
| Media | 19.56 | 14.5 |
| Varianza | 2003.413 | 1449.415 |
| Observaciones | 5 | 5 |
| Coefficiente de correlación de Pearson | 0.9983 | |
| Diferencia hipotética de las medias | 0 | |
| Grados de libertad | 4 | |
| Estadístico T | 1.5924 | |
| $P(T^* \leq T)$ dos colas | 0.1865 | |
| Valor crítico de T (dos colas) | 2.7764 | |

4.8. Conclusiones

En este trabajo se ha desarrollado una formulación para el análisis de vigas compuestas de hormigón pretensado con pretensado interior no adherente en estado de servicio. Esta formulación contempla tanto el análisis en el corto como en el largo plazo, el estado no fisurado y fisurado del miembro, la fluencia y la retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado y la presencia de armadura pasiva. Adicionalmente, el trazado de la armadura de pretensado puede ser genérico. A partir de dicha formulación se ha propuesto un algoritmo computacional para el análisis de este tipo de vigas sin utilizar el método de elementos finitos. Dicha implementación computacional permite el análisis tanto de vigas estáticamente determinadas como el de vigas continuas.

Una de las principales ventajas del algoritmo computacional propuesto es que se basa en los principios básicos de la resistencia de los materiales. Es por ello que además de poder aplicarse en el diseño y el cálculo de las estructuras, puede utilizarse como una herramienta de verificación para formulaciones matemáticas más complejas.

La comparación entre los resultados obtenidos de la pérdida de pretensado entre el modelo computacional y los resultados experimentales, permite concluir que el modelo propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente en estado de servicio a lo largo del tiempo tanto para vigas estáticamente determinadas como para vigas continuas. Si bien algunas diferencias fueron observadas para uno de los casos comparados, es oportuno mencionar que para dicho caso las tensiones en el hormigón superan el límite para considerar un comportamiento lineal de la fluencia y por lo

tanto no válidas las hipótesis de linealidad, lo que puede estar dando lugar a tales diferencias.

Podemos concluir además que la construcción de la losa del tablero en sitio, según el procedimiento descrito en este trabajo, tiene un efecto beneficioso en lo que respecta a la redistribución de las tensiones en el hormigón en zonas de momentos positivos y por lo tanto en la pérdida del pretensado.

Capítulo 5

Análisis a lo largo del tiempo de vigas de hormigón con pretensado adherente simplemente apoyadas y continuas

Páez, P.M., Sensale-Cozzano, B. (2021). Time-dependent analysis of simply supported and continuous unbonded prestressed concrete beams. *Engineering Structures*, 240: 112376.

doi: 10.1016/j.engstruct.2021.112376

Impact Factor (2020): 3.548; Quartile 1.

5.1. Introducción

El pretensado interior no adherente es una tipología de pretensado en el que los cables de pretensado están embebidos en el hormigón pero no hay adherencia entre éste y los cables. Este tipo de pretensado se caracteriza por el hecho de que la tensión en los cables no puede determinarse mediante un análisis seccional como en el caso del pretensado adherente. Por el contrario, la tensión en los cables se debe determinar teniendo en cuenta la deformación global del elemento.

El principal objetivo de los investigadores en este campo ha sido predecir el comportamiento en rotura por flexión de elementos de hormigón con pretensa-

do interior no adherente simplemente apoyados y continuos. Algunos enfoques se basan en el método de los elementos finitos y otros en métodos analíticos. Dentro de los métodos analíticos se puede encontrar una extensa revisión de la literatura para vigas simplemente apoyadas en Manisekar y Senthil (2006) y Naaman y Alkhairi (1991a) y para vigas continuas y losas unidireccionales en Cook et al. (1981), Du et al. (2016), M. H. Harajli (2011), M. H. Harajli (2012) y Mattock et al. (1971). Dentro de los enfoques basados en el método de elementos finitos, podemos hacer referencia a los siguientes trabajos de Barbieri et al. (2006), Lou et al. (2013), Moon y Burns (1997) y Vu et al. (2010).

Aunque es muy importante predecir el comportamiento de los elementos de hormigón con pretensado interior no adherente en rotura, también es muy importante predecir el comportamiento de este tipo de elementos bajo condiciones de carga de servicio, particularmente bajo cargas de servicio de larga duración. Cuando un elemento de hormigón está sujeto a acciones externas de largo plazo, incluyendo la acción del pretensado, la fluencia y la retracción del hormigón y relajación del acero de pretensado toman lugar. Estos fenómenos reológicos provocan un aumento de las deformaciones y una pérdida de tensión en el acero de pretensado. Si los parámetros anteriores no se estiman correctamente, pueden ocurrir problemas en el estado de servicio del elemento (Youakim et al. 2007).

Sin embargo, existen pocos trabajos que permitan predecir el comportamiento en flexión bajo acciones de larga duración en vigas de hormigón simplemente apoyadas y continuas con pretensado interior no adherente. El CEB-FIP (2010), Gauvreau (1993) y Guo et al. (2018) propusieron ecuaciones simplificadas para estimar la pérdida de pretensado en vigas simplemente apoyadas de hormigón con pretensado interior no adherente. Para tener en cuenta los efectos de largo plazo, la ecuación del CEB-FIP (2010) se basa en el Método de la Tasa de Fluencia (Glanville, 1930), mientras que la ecuación de Gauvreau (1993) se basa en el Método de Módulo Efectivo Ajustado por la Edad (AAEMM) (Bazant, 1972). Ninguna de estas ecuaciones incluye la relajación del acero de pretensado o el rozamiento entre los cables y sus vainas. La ecuación de Guo et al. (2018) se basa en el AAEMM bajo supuestos de adherencia y, aunque los autores lo aplican a cables no adheridos, este procedimiento no es correcto. Páez y Sensale (2017) propusieron una ecuación simplificada para estimar la pérdida de pretensado en elementos simplemente apoyados con pretensado interior no adherente basados en el AAEMM. La ecuación incluye la

fluencia y la retracción del hormigón y la relajación del acero de pretensado. Moon y Burns (1997) desarrollaron un programa computacional para análisis a lo largo del tiempo utilizando elementos de tipo híbrido. En este modelo numérico la deformación por fluencia se calcula utilizando el algoritmo de cadena lineal de Maxwell desarrollado por Bazant y Wu (1974) basado en el Método de la Tasa de Fluencia. El modelo tiene en cuenta el rozamiento entre los cables y las vainas. El trabajo de Barbieri et al. (2006) se basa en el trabajo de Moon y Burns (1997), por lo tanto, se pueden hacer comentarios similares. Aunque el algoritmo de cadena lineal de Maxwell se ha utilizado ampliamente para modelar el comportamiento del hormigón como material viscoelástico y se ha demostrado que se obtienen resultados suficientemente precisos, Bazant y Baweja (1995) demostraron que la hipótesis en la que se basa el Método de la Tasa de Fluencia no es correcta. El modelo actual de fluencia utilizado por las normativas se basa en el trabajo mencionado. Lou et al. (2013) propusieron un modelo numérico basado en el método de elementos finitos. Este modelo predice el comportamiento bajo carga de servicio a lo largo del tiempo de vigas continuas con pretensado interior no adherente. Las rigideces de las secciones de la viga se calculan dividiendo la sección en pequeñas capas. Sin embargo, para el análisis a lo largo del tiempo, los autores utilizaran una función de fluencia que no es la recomendada por las diferentes normativas a nivel mundial. Tampoco se considera el rozamiento entre el acero de pretensado y las vainas.

Aunque los diferentes normas permiten que los elementos de hormigón se fisuren de forma parcial bajo ciertas condiciones de carga y/o exposiciones ambientales, es decir, que los elementos tengan secciones fisuradas (Estado II), en general, bajo carga de servicio de larga duración, o más precisamente bajo la combinación cuasi-permanente de acciones, los elementos de hormigón pretensado son diseñados para que sus secciones no estén fisuradas. La fisuración debida a la carga variable es de naturaleza transitoria (Ghali et al. 2002).

El principal objetivo de este trabajo es obtener una ecuación para estimar la pérdida de pretensado en vigas continuas de hormigón con pretensado interior no adherente. Esta ecuación se basa en la hipótesis de perfecta no adherencia entre el acero de pretensado y el hormigón y tiene en cuenta la fluencia y la retracción del hormigón y la relajación del acero de pretensado.

Si bien la hipótesis de perfecta no adherencia es correcta para la mayoría de los casos prácticos, hay casos en los que dicha hipótesis no es del todo

correcta, como ser por ejemplo en cables largos con muchos cambios en la desviación angular. Para estos casos, el segundo objetivo de este trabajo está relacionado con la fórmula utilizada para calcular la tensión en cada sección del acero de pretensado no adherente teniendo en cuenta el rozamiento entre los cables y sus vainas. En este artículo, proponemos una ecuación de forma integral, correctamente justificada, para calcular la deformación unitaria en cada sección del acero de pretensado no adherente. Esta ecuación se basa en la ecuación para la pérdida por rozamiento aceptada por las diferentes normas. La deformación unitaria en cada sección del acero de pretensado se calcula a partir de la deformación unitaria del hormigón a nivel del centro de gravedad del acero de pretensado a lo largo de toda la viga.

El último objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo numérico basado en el método de elementos finitos para el análisis a lo largo del tiempo de vigas simplemente apoyadas y continuas con pretensado interior no adherente. El enfoque propuesto tiene en cuenta la fluencia y la retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado, el acero pasivo de refuerzo y el rozamiento entre los cables y sus vainas. La originalidad de este enfoque radica en cuatro aspectos que mejoran la precisión en comparación con los enfoques existentes: (1) para tener en cuenta el envejecimiento del hormigón, se utiliza un modelo basado en el Método Paso a Paso y la función de fluencia es la recomendada por las normas actuales; (2) el modelo numérico tiene en cuenta el rozamiento entre los cables y sus vainas; (3) el acero pasivo de refuerzo se modela como un elemento diferente al elemento de viga de hormigón y; (4) los cables no adherentes se modelan utilizando un sistema de fuerzas y momentos equivalentes aplicados a los elementos de viga.

5.2. Ecuaciones constitutivas instantáneas y de largo plazo de los materiales

La deformación total en el tiempo t de un espécimen de hormigón cargado axialmente puede expresarse mediante la Ecuación (5.1) (Bazant, 1982):

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_{cr}(t, t_0) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (5.1)$$

donde $\varepsilon_e(t)$ es la deformación instantánea, $\varepsilon_{cr}(t, t_0)$ es la deformación debida

a la fluencia, $\varepsilon_{sh}(t, t_s)$ es la deformación debida a la retracción y t_0 y t_s , son la edad del hormigón al momento de puesta en carga y la edad del hormigón al comienzo de la retracción, respectivamente.

Asumiendo que en el estado de servicio del elemento de hormigón se cumplen las hipótesis de linealidad (A. Ross, 1958), es decir, es válido el principio de superposición, el hormigón puede ser tratado como un material viscoelástico lineal, y la deformación en el instante t causado por una historia de tensiones puede obtenerse utilizando la Ecuación (5.2):

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} (1 + \varphi(t, t_0)) + \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} \frac{1 + \varphi(t, \tau)}{E_c(\tau)} d\sigma_c(\tau) + \varepsilon_{sh}(t, t_s) \quad (5.2)$$

donde $\sigma_c(t_0)$ es la tensión de compresión en el hormigón en el instante $t = t_0$ $\varphi(t, t_0)$ y $\varphi(t, \tau)$ son los coeficientes de fluencia entre los tiempos t_0 y t y entre los tiempos τ y t , respectivamente, y $E_c(t_0)$ y $E_c(\tau)$ son los módulos de elasticidad del hormigón en los instantes $t = t_0$ y $t = \tau$, respectivamente.

Además, la relación tensión-deformación del hormigón en cualquier instante en estado de servicio, bajo carga de corta duración, se puede expresar mediante la Ecuación (5.3) (CEB-FIP, 2010):

$$\varepsilon_e(t) = \frac{\sigma_c}{E_c} \quad \text{para} \quad -0.40 \cdot f_{cm} \leq \sigma_c \leq f_{ctm} \quad (5.3)$$

donde $f_{cm}(t)$ y $f_{ctm}(t)$ son la resistencia media a compresión y la resistencia media a tracción del hormigón en el instante t , respectivamente.

Si se utiliza la “regla rectangular” para la integración numérica de la Ecuación (5.2), se puede reescribir como Ecuación (5.4) (Gilbert y Ranzi, 2010):

$$\varepsilon(t_j) = J(t_j, t_0)\sigma_c(t_0) + \sum_{i=1}^{i=j} J(t_j, t_i)\Delta\sigma_c(t_i) + \varepsilon_{sh}(t_j, t_s) \quad (5.4)$$

donde $\Delta\sigma_c(t_i) = \sigma_c(t_i) - \sigma_c(t_{i-1})$ y $J(t_j, t_i)$ representa la función de fluencia calculada al tiempo t_j relativa a una tensión unitaria aplicada en el tiempo t_i ; su expresión viene dada por la Ecuación (5.5):

$$J(t_j, t_i) = \frac{1 + \varphi(t_j, t_i)}{E_c(t_i)} \quad (5.5)$$

siendo $E_c(t_i)$ el módulo de deformación del hormigón en el instante de tiempo

t_i .

Dado que bajo condiciones de carga de servicio la tensión en el acero pasivo y en el acero activo permanece por debajo de sus respectivos límites elásticos característicos, se puede asumir un comportamiento elástico lineal para tensiones hasta la tensión de fluencia. Luego, para el análisis a corto plazo, la relación tensión-deformación para el acero pasivo y para el acero activo se puede expresar como Ecuaciones (5.6) y (5.7), respectivamente:

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (5.6)$$

$$\sigma_p = E_p \varepsilon_p \quad (5.7)$$

donde σ_s , E_s y ε_s representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero pasivo, respectivamente, y σ_p , E_p y ε_p representan la tensión, el módulo de elasticidad y la deformación unitaria del acero activo, respectivamente.

Bajo la hipótesis de perfecta no adherencia, la fuerza en el cable de pretensado puede asumirse constante a lo largo de toda su longitud entre los puntos de anclaje. Sin embargo, la fuerza del cable no será constante si se produce rozamiento entre éste y la vaina. La deformación unitaria en el acero de pretensado no adherente ubicado a una distancia x del extremo de la viga $\varepsilon_p(x)$ se puede escribir como en la Ecuación (5.8):

$$\varepsilon_p(x) = \varepsilon_{p,0}(x) + \Delta\varepsilon_p(x) \quad (5.8)$$

donde $\varepsilon_{p,0}(x)$ es la deformación unitaria inicial del cable en una sección ubicada a una distancia x luego que todas las pérdidas por rozamiento han ocurrido y $\Delta\varepsilon_p(x)$ es su cambio en la deformación unitaria.

La condición de compatibilidad para el acero de pretensado no adherente requiere que su deformación sea igual al valor integrado de la deformación unitaria del hormigón a nivel del centro de gravedad del acero de pretensado a lo largo de toda su longitud. Bajo la hipótesis de la teoría de vigas de Navier-Bernoulli y considerando que el ángulo de inclinación del cable $\alpha(x)$ es pequeño, dicha condición puede expresarse matemáticamente como la Ecuación (5.9) (Gauvreau, 1993):

$$\Delta l_p = \int_{x=0}^{x=l} \Delta\varepsilon_{c,p}(x) dx \quad (5.9)$$

donde Δl_p es la deformación del acero de pretensado no adherente, l es la longitud de la viga entre los puntos de anclaje del cable y $\Delta\varepsilon_{c,p}(x)$ la variación en la deformación unitaria en el hormigón a nivel del acero de pretensado.

La Ecuación (5.9) puede reescribirse en términos del cambio de deformación unitaria del acero de pretensado, como en la Ecuación (5.10):

$$\Delta l_p = \int_{x=0}^{x=l} \Delta\varepsilon_p(x) dx \quad (5.10)$$

Debido a que la condición de perfecta no adherencia entre el acero de pretensado y el hormigón no existe, se generará una pérdida en la fuerza de pretensado por rozamiento entre una sección ubicada en x y una sección ubicada en s . La pérdida por rozamiento se puede escribir en términos de la variación de la deformación unitaria de acero, como en la Ecuación (5.11) Model Code 2010, 2012:

$$\Delta\varepsilon_p(x) = \Delta\varepsilon_p(s)\Psi(x - s) \quad (5.11)$$

donde $\Psi(x - s)$ viene dado por la Ecuación (5.12):

$$\Psi(x - s) = e^{-(\mu \cdot \alpha(x-s) + k \cdot |x-s|)} \quad (5.12)$$

donde k es el coeficiente parásito, $\alpha(x - s)$ es el ángulo acumulado en radianes a través del cual la tangente al trazado del cable ha girado entre los puntos ubicados en las secciones x y s , μ es el coeficiente de rozamiento en la curva, y $|x - s|$ es la longitud entre las secciones ubicadas en x y s .

Supongamos que se aplica un cambio en la deformación unitaria en el hormigón $\Delta\varepsilon_{c,p}(s)$ en la sección s mientras que las otras secciones permanecen indeformadas. Teniendo en cuenta las Ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11), e igualando las Ecuaciones (5.9) y (5.10), se puede obtener la relación dada por la Ecuación (5.13):

$$\Delta\varepsilon_{c,p}(s) ds = \int_{x=0}^{x=l} \Delta\varepsilon_p(s)\Psi(x - s) dx = \Delta\varepsilon_p(s) \cdot \Pi_x(s) \quad (5.13)$$

donde $\Pi_x(s)$ viene dada por la Ecuación (5.14):

$$\Pi_x(s) = \int_{x=0}^{x=l} \Psi(x - s) dx \quad (5.14)$$

Ahora bien, si el cambio de deformación en el hormigón $\varepsilon_{c,p}(s)$ se aplica a todas las secciones, las condiciones de compatibilidad se pueden escribir como en la Ecuación (5.15):

$$\int_{s=0}^{s=l} \Delta\varepsilon_{c,p}(s)ds = \int_{s=0}^{s=l} \frac{\Delta\varepsilon_p(s) \cdot \Pi_x(s)}{l} ds = \frac{1}{l} \int_{s=0}^{s=l} \frac{\Delta\varepsilon_p(x)}{\Psi(x-s)} \Pi_x(s) ds \quad (5.15)$$

Reordenando la Ecuación (5.15), el cambio en la deformación unitaria del acero de pretensado en la sección ubicada a una distancia x se puede escribir como en la Ecuación (5.16):

$$\Delta\varepsilon_p(x) = l \int_{s=0}^{s=l} \Delta\varepsilon_{c,p}(s) ds \int_{s=0}^{s=l} \frac{\Psi(x-s)}{\Pi_x(s)} ds \quad (5.16)$$

La relajación en acero se desarrolla para niveles de tensión superiores al 40 % de su límite elástico característico. Dado que el acero pasivo de refuerzo está sujeto a bajos niveles de tensión en estado de servicio, la relajación en el acero pasivo es insignificante. En cambio, el acero de pretensado está sujeto a altos niveles de tensión, y por lo tanto se desarrollará una pérdida de tensión a lo largo del tiempo. Luego, la relación tensión-deformación para el acero de pretensado puede expresarse como en la Ecuación (5.17):

$$\varepsilon_p(t, x) = \frac{\sigma_p(t, x) + \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t - t_0, x)}{E_p} \quad (5.17)$$

donde $\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t - t_0, x)$ es la relajación reducida en una sección ubicada a una distancia x . Ésta se puede calcular de acuerdo con el modelo del coeficiente de relajación $\chi_r(x)$ (Ghali et al. 2002), Ecuación (5.18):

$$\Delta\bar{\sigma}_{pr}(t - t_0, x) = \chi_r(x) \Delta\sigma_{pr}(t - t_0, x) \quad (5.18)$$

donde $\Delta\sigma_{pr}(t - t_0, x)$ es la relajación intrínseca. La relajación reducida tiene en cuenta que la relajación del acero de pretensado será un proceso de longitud variable en lugar de un proceso de longitud constante.

El coeficiente de relajación puede calcularse de acuerdo con la Ecuación (5.19):

$$\chi_r(x) = \int_{\xi=0}^{\xi=1} (1 - \Omega_x \xi) \left(\frac{\lambda_x(1 - \Omega_x \xi) - 0.4}{\lambda_x - 0.4} \right)^2 d\xi \quad (5.19)$$

en donde Ω_x y λ_x vienen dados por las Ecuación (5.20):

$$\Omega_x = \frac{\Delta\sigma_{ps}(t - t_0, x) - \Delta\sigma_{pr}(t - t_0, x)}{\sigma_{p,0}(x)} \quad (5.20)$$

$$\lambda_x = \frac{\sigma_{p,0}(x)}{f_{ptk}}$$

donde $\sigma_{p,0}(x)$ es la tensión inicial del pretensado en una sección ubicada a una distancia x , f_{ptk} es la resistencia característica a tracción del acero y $\Delta\sigma_{ps}(t - t_0, x)$ es la variación de tensión en el acero debido a la combinación de los efectos de fluencia y retracción del hormigón y de la relajación del acero en la sección x .

Finalmente, las relaciones de tensión-deformación del hormigón y el acero para los tiempos $t = t_0$ y $t = t_j$ se pueden escribir como en las Ecuaciones (5.21) y (5.22), respectivamente:

$$\begin{aligned} \sigma_c(t_0, x) &= E_c(t_0)\varepsilon_0(x) \\ \sigma_s(t_0, x) &= E_s\varepsilon_{s,0}(x) \\ \sigma_p(t_0, x) &= E_p(\varepsilon_{p,0}(x) + \Delta\varepsilon_p(t_0, x)) \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \sigma_c(t_j, x) &= E_c(t_j)(\varepsilon(t_j, x) - \varepsilon_{sh}(t_j)) + \sum_{i=0}^{j-1} F_e(t_j, t_i)\sigma_c(t_i, x) \\ \sigma_s(t_j, x) &= E_s\varepsilon_s(t_j, x) \\ \sigma_p(t_j, x) &= E_{p(i)}(\varepsilon_{p,0}(x) + \Delta\varepsilon_p(t_j, x) - \varepsilon_{p,rel}(t_j, x)) \end{aligned} \quad (5.22)$$

donde $F_e(t_j, t_i) = (J(t_j, t_{i+1}) - J(t_j, t_i)) / J(t_j, t_j)$ y $\varepsilon_{p,rel}(t_j, x) = \Delta\bar{\sigma}_{pr}(t - t_0, x) / E_p$

5.3. Ecuación simplificada para estimar la pérdida de pretensado en vigas continuas con pretensado interior no adherente

Consideremos una viga continua de hormigón con pretensado interior no adherente con un trazado genérico del cable y cuya sección transversal es simétrica con respecto al eje z . El eje ortogonal y pasa a través del centro

de gravedad de la sección y el momento flector se aplica alrededor del eje y (Figura (5.1)). Supongamos que todas las cargas externas de larga duración, incluido el pretensado, se aplican en el tiempo t_0 , que existe perfecta no adherencia para el acero de pretensado y que, bajo la acción de todas las cargas externas de largo plazo, el elemento está no fisurado. Además, se desprecia la contribución del acero pasivo.

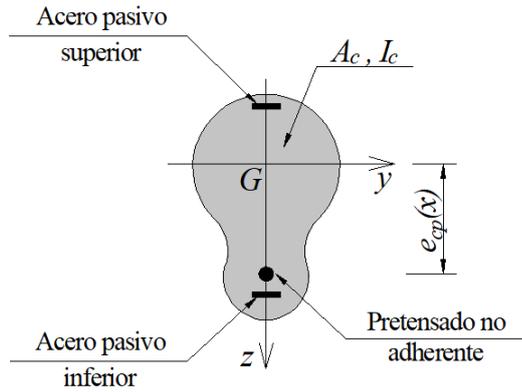


Figura 5.1: Sección transversal de la viga.

La Figura (5.2) muestra una sección ubicada a una distancia x medida desde un extremo de la viga. En el tiempo t_0 , el momento interno debe ser igual al momento externo en la sección, Ecuación (5.23) (Figura (5.2a)):

$$F_{c,0}(x) (e_{cp}(x) + a(x)) = M_{ext} = \hat{M}(x) + M_s(x) \quad (5.23)$$

donde $F_{c,0}(x)$ es la fuerza interna en el hormigón; $e_{cp}(x)$ es la excentricidad del cable; $a(x)$ es la distancia desde el centro de gravedad de la sección hasta el punto de aplicación de $F_{c,0}(x)$; y $M_{ext}(x)$, $\hat{M}(x)$ y $M_s(x)$ son el momento externo total debido a las cargas de larga duración, el momento debido a la carga externa de larga duración, incluido el pretensado, y el momento secundario debido al pretensado. El equilibrio axial de las fuerzas internas en la sección requiere, Ecuación (5.24):

$$F_{c,0}(x) = N_{p,0} \quad (5.24)$$

donde $N_{p,0}$ es la fuerza en el cable después de aplicar todas las cargas de largo plazo (esta fuerza es diferente de la fuerza inicial de pretensado).

Para todo tiempo $t > t_0$ se debe cumplir la relación dada por la Ecuación

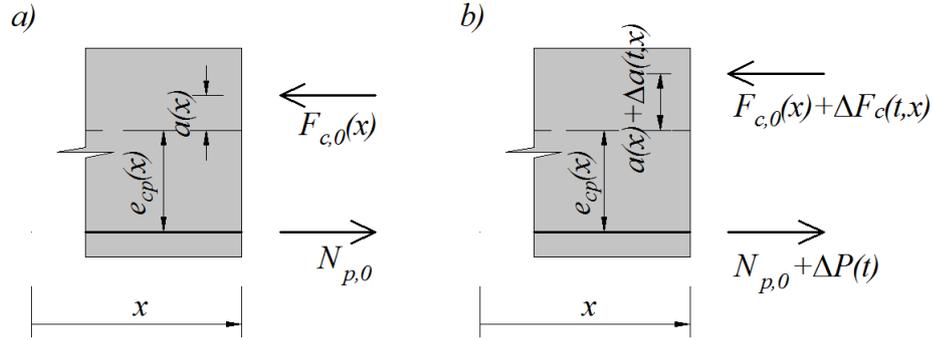


Figura 5.2: Análisis de las fuerzas internas a lo largo del tiempo en una viga continua con pretensado interior no adherente: a) fuerzas internas en el tiempo t_0 ; b) fuerzas internas en el tiempo $t > t_0$.

(5.25):

$$\begin{aligned} (F_{c,0}(x) + \Delta F_c(t, x)) (e_{cp}(x) + a(x) + \Delta a(t, x)) &= M_{ext} \\ &= \hat{M}(x) + M_s(x) + \Delta M_s(t, x) \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde $\Delta F_c(t, x)$ es el cambio en la fuerza de compresión resultante en el hormigón y $\Delta M_s(t, x)$ es el cambio en el momento secundario.

Teniendo en cuenta que la viga continua es postensada (debido al uso de cables no adherentes) y suponiendo que el hormigón de la viga se vierte en una sola etapa, el cambio en el momento secundario se puede escribir como en la Ecuación (5.26) (Neville, 1983):

$$\Delta M_s(t, x) = \frac{M_s(x)}{N_{p,0}} \Delta P_p(t) \quad (5.26)$$

donde $\Delta P_p(t)$ es el cambio en la fuerza de pretensado.

Por otra parte, el equilibrio interno requiere, Ecuación (5.27):

$$\Delta F_{c,0}(x) = \Delta P_p(t) \quad (5.27)$$

El cambio en la tensión en el hormigón a nivel del centro de gravedad del acero de pretensado $\Delta \sigma_{c,p}(t, x)$ entre los tiempos t_0 y t viene dado por la

Ecuación (5.28):

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{c,p}(t, x) &= \sigma_{c,p}(t, x) - \sigma_{c,p}(t_0, x) \\
&= -\frac{(F_{c,0}(x) + \Delta F_c(t, x))}{A_c} + \dots \\
&\quad \dots + \frac{(F_{c,0}(x) + \Delta F_c(t, x))(a(x) + \Delta a(x))}{I_c} e_{cp}(x) \\
&\quad \dots - \frac{F_{c,0}(x)}{A_c} + \frac{F_{c,0}a(x)}{I_c} e_{cp}(x)
\end{aligned} \tag{5.28}$$

donde A_c y I_c son el área y el momento de inercia de la sección de la viga.

Igualando las Ecuaciones (5.23) y (5.24), teniendo en cuenta la Ecuación (5.27) y despreciando los términos de segundo orden, $\Delta a(t, x)$ puede expresarse como la Ecuación (5.29):

$$\Delta a(t, x) = -\frac{(e_{cp}(x) + a(x))}{F_{c,0}(x)} \Delta P_p(t) + \frac{\hat{e}_{cp}(x)}{F_{c,0}} \Delta P_p(t) \tag{5.29}$$

donde $\hat{e}_{cp}(x)$ viene dado por la Ecuación (5.30):

$$\hat{e}_{cp}(x) = \frac{M_s(x)}{N_{p,0}} \tag{5.30}$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (5.29) y despreciando los términos de segundo orden, la Ecuación (5.28) se puede escribir como Ecuación (5.31):

$$\Delta\sigma_{c,p}(t, x) = -\frac{\Delta P_p(t)}{A_c} - \frac{(e_{cp}(x) - \hat{e}_{cp}(x)) \Delta P_p(t)}{I_c} e_{cp}(x) \tag{5.31}$$

Reordenando la Ecuación (5.2) y aplicando el AAEMM, el cambio en la deformación unitaria en una fibra del hormigón ubicada al nivel del centro de gravedad del acero de pretensado puede expresarse como la Ecuación (5.32) (Bazant, 1972):

$$\Delta\varepsilon_{c,p}(t, x) = \frac{\sigma_{c,p}(t_0, x)}{E_c(t_0)} \varphi(t, t_0) + \frac{\Delta\sigma_{c,p}(t, x)}{E_{ct}(t, t_0)} + \varepsilon_{sh}(t, t_0) \tag{5.32}$$

donde $E_{ct}(t, t_0)$ es el módulo de elasticidad ajustado por la edad y su expresión viene dada por la Ecuación (5.33):

$$E_{ct}(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0) \varphi(t, t_0)} \tag{5.33}$$

siendo $\chi(t, t_0)$ el coeficiente de envejecimiento.

Luego, la deformación del cable no adherente (Ecuación (5.9)) se puede expresar como Ecuación (5.34):

$$\begin{aligned} \Delta l_p &= \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \int_0^l \sigma_{c,p}(t_0, x) dx + \varepsilon_{sh}(t, t_0)l + \dots \\ &\dots + \frac{\Delta P_p(t)}{E_{ct}(t, t_0)} \int_0^l \left[\frac{1}{A_c} + \frac{(e_{cp}(x) - \hat{e}_{cp}(x))}{I_c} e_{cp}(x) \right] dx \end{aligned} \quad (5.34)$$

teniendo en cuenta la relación dada por la Ecuación (5.35):

$$\frac{\Delta l_p}{l} = \frac{\Delta P_p(t)}{E_p A_p} + \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr}(t - t_0)}{E_p} \quad (5.35)$$

Luego, la pérdida de pretensado en una viga continua de hormigón con pretensado interior no adherente puede calcularse como en la Ecuación (5.36):

$$\Delta P_p(t) = \frac{\frac{1}{l} \frac{\varphi(t, t_0)}{E_c(t_0)} \int_0^l \sigma_{c,p}(t_0, x) dx + \varepsilon_{sh}(t, t_0) - \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr}(t - t_0)}{E_p}}{\frac{1}{E_p A_p} + \frac{1}{l E_{ct}(t, t_0)} \int_0^l \left[\frac{1}{A_c} + \frac{(e_{cp}(x) - \hat{e}_{cp}(x))}{I_c} e_{cp}(x) \right] dx} \quad (5.36)$$

5.4. Formulación mediante elementos finitos

Consideremos una viga continua de hormigón con pretensado interior no adherente cuyo trazado del cable sea genérico y con acero pasivo de refuerzo (Figura (5.3)). El enfoque de elementos finitos propuesto en este trabajo se basa en el modelo propuesto por Páez y Sensale (2017), en el que la viga de hormigón con pretensado interior no adherente y acero pasivo se modela mediante el ensamblaje de elementos de viga y elementos de barra. Los elementos de viga simulan la sección de hormigón, mientras que los elementos de barra simulan el acero pasivo. En el enfoque propuesto, los cables se modelan utilizando un sistema de fuerzas y momentos equivalentes aplicados a los elementos de viga.

Consideremos nuevamente que la sección transversal de la viga es simétrica con respecto al eje z , el eje ortogonal y pasa a través de su baricentro y el momento flector se aplica alrededor del eje y (Figura (5.1)). Las cargas externas de larga duración se pueden aplicar en cualquier momento t_s y el elemento se encuentra no fisurado bajo la acción de todas las cargas externas de larga

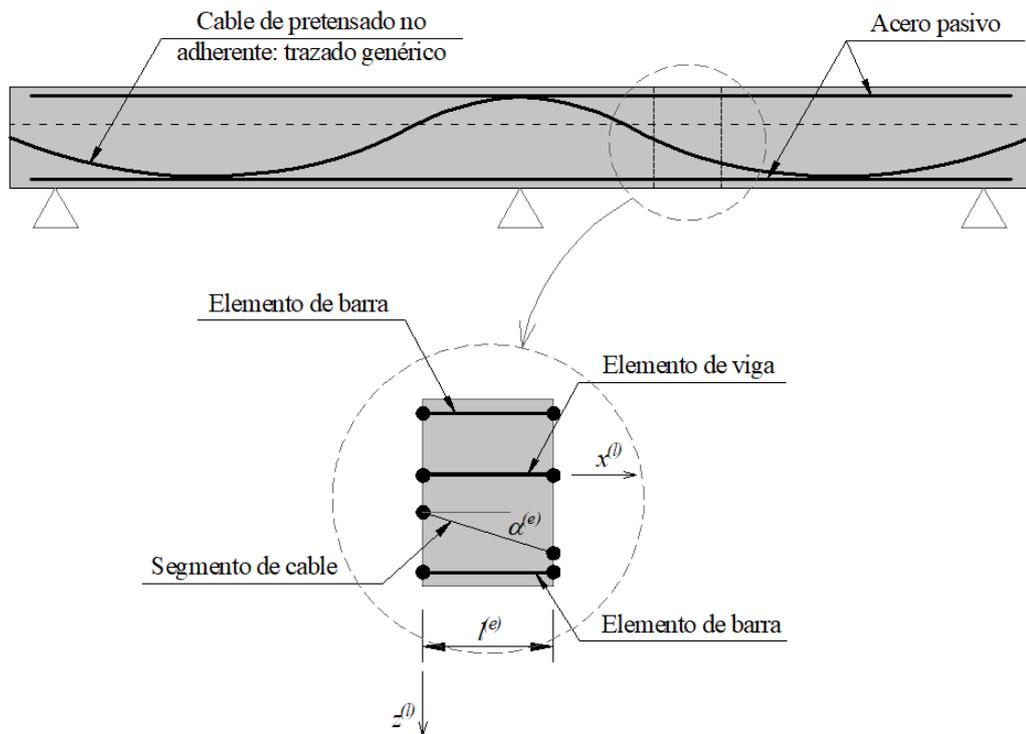


Figura 5.3: Viga continua de hormigón con pretensado interior no adherente, con trazado genérico del cable y refuerzo de acero: discretización por elementos finitos. $x^{(l)}$ y $z^{(l)}$ son ejes locales del elemento de viga y $l^{(e)}$ y $\alpha^{(e)}$ son la longitud del elemento de viga y el ángulo del segmento de cable (positivo como se muestra), respectivamente.

duración.

Debido a la respuesta no lineal de la estructura, es necesario utilizar modelos numéricos para evaluar las ecuaciones que gobiernan el problema. Por lo tanto, la longitud del elemento de viga debe ser suficientemente pequeña para lograr la convergencia de la solución.

5.4.1. Análisis instantáneo

Dado que las cargas se pueden aplicar en cualquier momento $t = t_s$, el análisis instantáneo puede realizarse para cualquier tiempo $t = t_s$.

La matriz de rigidez del elemento de viga de Navier-Bernoulli de dos nodos $[K_b^{(e)}]$ se puede escribir como Ecuación (5.37). La Figura (5.4) muestra las convenciones de signo para los grados de libertad locales de un elemento de barra genérico. Esta expresión de la matriz de rigidez supone que el desplazamiento axial es una función lineal y el desplazamiento vertical es una función polinomial cúbica (Ghali y Neville, 1978; Oñate, 2009).

$$[K_b^{(e)}] = \begin{bmatrix} \frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 & -\frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & 0 & -\frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} \\ 0 & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{4E_c I_c}{l^{(e)}} & 0 & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{2E_c I_c}{l^{(e)}} \\ -\frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 & \frac{E_c A_c}{l^{(e)}} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & 0 & \frac{12E_c I_c}{(l^{(e)})^3} & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} \\ 0 & \frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{2E_c I_c}{l^{(e)}} & 0 & -\frac{6E_c I_c}{(l^{(e)})^2} & \frac{4E_c I_c}{l^{(e)}} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

donde $E_c = E_c(t_s)$ es el módulo de elasticidad del hormigón el tiempo t_s ; A_c e I_c son el área y el momento de inercia de la sección transversal de hormigón del elemento de viga, respectivamente; y $l^{(e)}$ es la longitud del elemento.

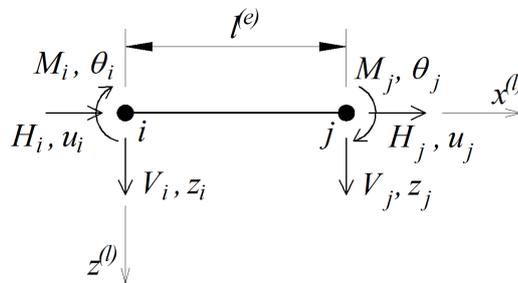


Figura 5.4: Convención de signos para los grados de libertad locales del elemento de barra genérico.

La matriz de rigidez de un elemento de barra con dos grados de libertad

viene dada por la Ecuación (5.38) (Oñate, 2009):

$$[K_s^{(e)}] = \frac{E_s A_s}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

La contribución del elemento de barra a la rigidez del elemento de viga viene dada por la Ecuación (5.39):

$$[K_s^{(e)}]_{\text{trans}} = [T_s]^T [K_s^{(e)}] [T_s] \quad (5.39)$$

donde $[T_s]$ es la matriz de transformación obtenida por las relaciones geométricas del desplazamiento y su expresión está dada por la Ecuación (5.40):

$$[T_s] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -e_s \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

donde e_s es la distancia desde el centro de gravedad de la viga al baricentro del acero pasivo. Luego, $[K_s^{(e)}]_{\text{trans}}$ viene dada por la Ecuación (5.41):

$$[K_s^{(e)}]_{\text{trans}} = \frac{E_s A_s}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_s & -1 & 0 & e_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_s & 0 & e_s^2 & e_s & 0 & -e_s^2 \\ -1 & 0 & e_s & 1 & 0 & -e_s \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_s & 0 & -e_s^2 & -e_s & 0 & e_s^2 \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Si la viga tiene más de una capa de acero pasivo, como se muestra en la Figura (5.2), $[K_s^{(e)}]_{\text{trans}}$ se puede calcular usando la Ecuación (5.42):

$$[K_s^{(e)}]_{\text{trans}} = \sum_{i=1}^{i=m_s} \frac{E_s A_{s(i)}}{l^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -e_{s(i)} & -1 & 0 & e_{s(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_{s(i)} & 0 & e_{s(i)}^2 & e_{s(i)} & 0 & -e_{s(i)}^2 \\ -1 & 0 & e_{s(i)} & 1 & 0 & -e_{s(i)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_{s(i)} & 0 & -e_{s(i)}^2 & -e_{s(i)} & 0 & e_{s(i)}^2 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

donde m_s es el número de capas de acero pasivo, $A_{s(i)}$ y $e_{s(i)}$ son el área de acero pasivo de la i -ésima capa y la distancia desde el baricentro de la viga al

baricentro del acero pasivo de la capa i -ésima capa, respectivamente.

Luego, la matriz de rigidez del elemento de viga de hormigón armado viene dada por la Ecuación (5.43):

$$[K^{(e)}] = [K_b^{(e)}] + [K_s^{(e)}]_{\text{trans}} \quad (5.43)$$

5.4.2. Acero de pretensado no adherente

Consideremos el i -ésimo elemento de viga entre los nodos i y j cuya longitud es $l_i^{(e)}$ y su correspondiente segmento de cable entre los nodos \hat{i} y \hat{j} cuya longitud es $l_{p,i}^{(e)}$. Sean $F_{p,\hat{i}}$ y $F_{p,\hat{j}}$ la fuerza del cable en los nodos \hat{i} y \hat{j} , respectivamente, y $f_{r_{\hat{i}\hat{j}}}$ la fuerza de fricción por unidad de longitud en el segmento de cable entre los nodos \hat{i} y \hat{j} , Figura (5.5a). La Figura (5.5b) muestra el diagrama de cuerpo libre del segmento de cable $\hat{i}\hat{j}$, donde $N_{p,\hat{i}}$ y $N_{p,\hat{j}}$ son las respectivas fuerzas axiales internas en cada extremo del segmento de tendón. Según la convención de signos comúnmente utilizada de la Resistencia de los Materiales, las fuerzas axiales positivas producen tracción (Oñate, 2009) (Figura (5.5b)). Las fuerzas $N_{p,\hat{i}}$ y $N_{p,\hat{j}}$ dependen de la tensión unitaria del tendón y se pueden calcular de acuerdo con la Ecuación (5.8). Luego, la relación entre las fuerzas axiales internas y las fuerzas nodales de equilibrio viene dada por la Ecuación (5.44):

$$\begin{aligned} F_{p,\hat{i}} &= -N_{p,\hat{i}} \\ F_{p,\hat{j}} &= N_{p,\hat{j}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

Sean $x_{i,u}^{(g)}$, $y_{i,u}^{(g)}$, $x_{j,u}^{(g)}$ y $y_{j,u}^{(g)}$ las coordenadas globales de los nodos i y j del i -ésimo elemento de viga en la posición indeformada, y $x_{\hat{i},u}^{(g)}$, $y_{\hat{i},u}^{(g)}$, $x_{\hat{j},u}^{(g)}$ y $y_{\hat{j},u}^{(g)}$ las coordenadas globales de los nodos \hat{i} y \hat{j} del segmento de cable, respectivamente (Figura (5.6)).

Si las fuerzas del segmento de cable se proyectan sobre los ejes locales del elemento de viga, éstas se pueden escribir como fuerzas y momentos concentrados en los nodos del elemento y fuerzas y momentos distribuidos en su longitud (Figura (5.5c)). Como el segmento de cable es pequeño, se puede suponer que $f_{r_{\hat{i}\hat{j}}}$ es constante a lo largo de su longitud y, por lo tanto, se puede suponer que $m_{p,i}$, $h_{p,i}$ y $q_{p,i}$ también son constantes. Teniendo en cuenta la Ecuación (5.44), las fuerzas y momentos equivalentes del cable se pueden obtener mediante el

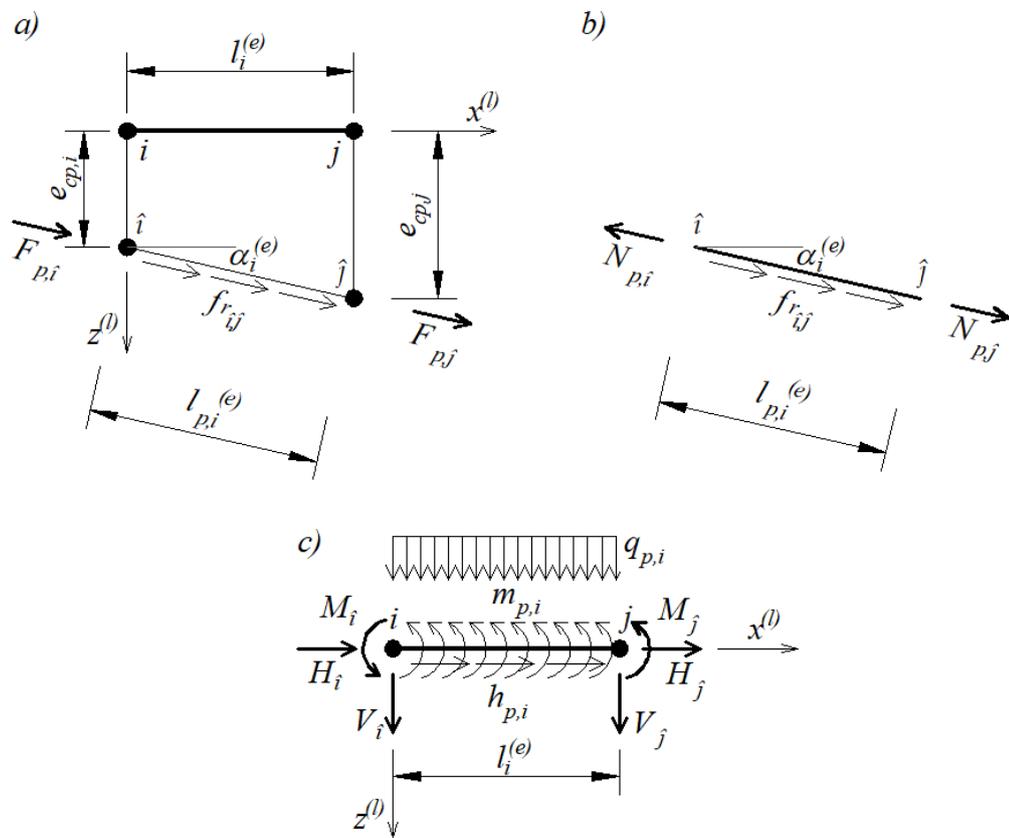


Figura 5.5: Discretización del i -ésimo elemento de viga entre los nodos i y j : a) segmento de cable sometido a fuerzas nodales axiales y una carga axial distribuida; b) fuerzas internas del cable; c) fuerzas y momentos equivalentes del cable.

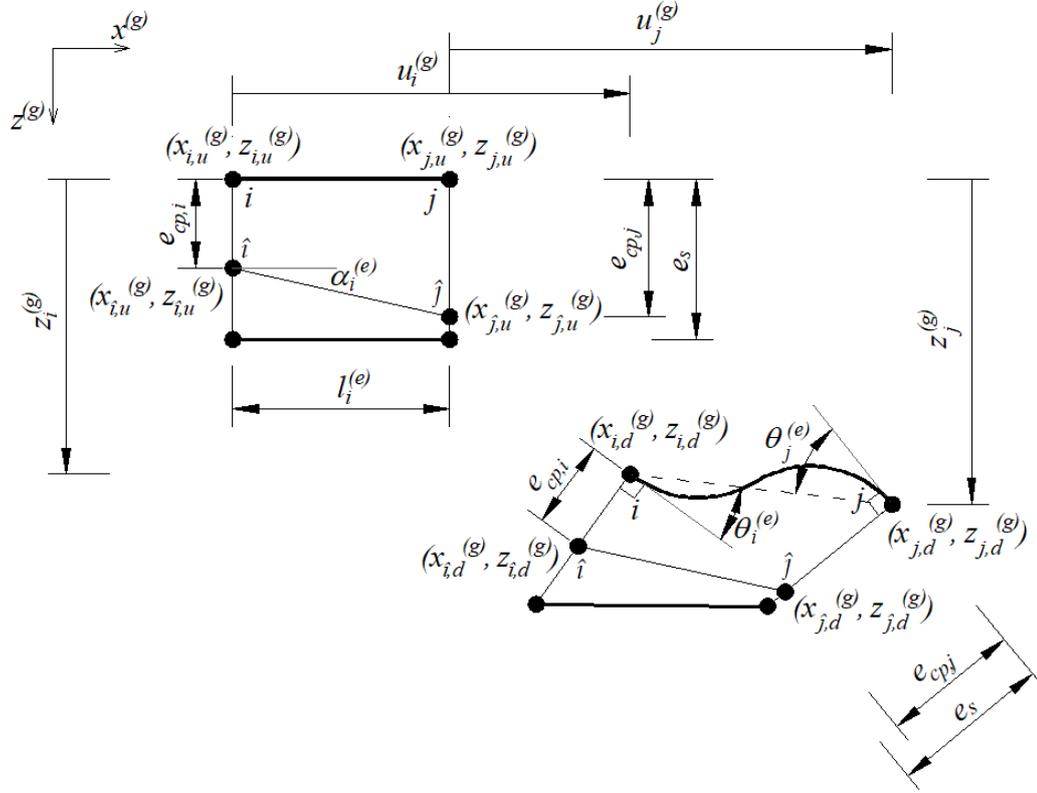


Figura 5.6: Relación entre las variables nodales.

equilibrio del elemento, y sus expresiones se dan en la Ecuación (5.45):

$$\begin{aligned}
 H_{\hat{i}} &= -N_{p,\hat{i}} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
 V_{\hat{i}} &= -N_{p,\hat{i}} \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \\
 M_{\hat{i}} &= N_{p,\hat{i}} \cdot e_{cp,i} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
 H_{\hat{j}} &= N_{p,\hat{j}} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
 V_{\hat{j}} &= N_{p,\hat{j}} \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \\
 M_{\hat{j}} &= -N_{p,\hat{j}} \cdot e_{cp,j} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
 q_{p,i} &= f_{r_{i\hat{j}}} \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) = \left(\frac{N_{p,\hat{i}} - N_{p,\hat{j}}}{l_{p,i}^{(e)}} \right) \sin(\alpha_i^{(e)}) \\
 h_{p,i} &= f_{r_{i\hat{j}}} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) = \left(\frac{N_{p,\hat{i}} - N_{p,\hat{j}}}{l_{p,i}^{(e)}} \right) \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
 m_{p,i} &= \left(\frac{N_{p,\hat{i}} \cdot e_{cp,i} - N_{p,\hat{j}} \cdot e_{cp,j}}{l_{p,i}^{(e)}} \right) \cos(\alpha_i^{(e)}) + \left(\frac{N_{p,\hat{i}} + N_{p,\hat{j}}}{2} \right) \sin(\alpha_i^{(e)})
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

El vector de las fuerzas nodales equivalentes se puede obtener aplicando el principio de los trabajos virtuales. Los vectores de las fuerzas nodales equivalentes debido a una carga transversal uniformemente distribuida $q_{p,i}$, a una carga axial uniformemente distribuida $h_{p,i}$, y a un momento uniformemente distribuido $m_{p,i}$, se pueden calcular de acuerdo con Oñate (2009, 2013) y sus expresiones se dan en las Ecuaciones (5.46), (5.47) y (5.48):

$$[f_{q_{p,i}}^{(e)}] = q_{p,i} \cdot l_i^{(e)} \left[0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{l_i^{(e)}}{12} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l_i^{(e)}}{12} \right]^T \quad (5.46)$$

$$[f_{h_{p,i}}^{(e)}] = \frac{h_{p,i} \cdot l_i^{(e)}}{2} \left[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right]^T \quad (5.47)$$

$$[f_{m_{p,i}}^{(e)}] = m_{p,i} \cdot \left[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \right]^T \quad (5.48)$$

La acción del cable de pretensado sobre el elemento de viga se puede modelar como un sistema de fuerzas y momentos de igual módulo pero de sentido contrario a las fuerzas y momentos dados por la Ecuación (5.45). Luego, teniendo en cuenta las Ecuaciones (5.46) a (5.48) y que $l_{p,i}^{(e)} \approx l_i^{(e)}$, la acción del cable de pretensado sobre el elemento de viga puede escribirse como en la Ecuación (5.49):

$$\begin{aligned} [P_i^{(e)}] &= - \left[H_{\hat{i}} \quad V_{\hat{i}} \quad M_{\hat{i}} \quad H_{\hat{j}} \quad V_{\hat{j}} \quad M_{\hat{j}} \right]^T + \dots \\ &\dots - (N_{p,\hat{i}} - N_{p,\hat{j}}) \sin(\alpha_i^{(e)}) \left[0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{l_i^{(e)}}{12} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad -\frac{l_i^{(e)}}{12} \right]^T + \dots \\ &\dots - \left(\frac{N_{p,\hat{i}} - N_{p,\hat{j}}}{2} \right) \cos(\alpha_i^{(e)}) \left[1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \right]^T + \dots \\ &\dots - \left(\frac{N_{p,\hat{i}} \cdot e_{cp,i} - N_{p,\hat{j}} \cdot e_{cp,j}}{l_{p,i}^{(e)}} \right) \cos(\alpha_i^{(e)}) \left[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \right]^T + \dots \\ &\dots - \left(\frac{N_{p,\hat{i}} + N_{p,\hat{j}}}{2} \right) \sin(\alpha_i^{(e)}) \left[0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \right]^T \end{aligned} \quad (5.49)$$

donde $[P_i^{(e)}]$ es el vector de las fuerzas nodales equivalentes debidas al pretensado.

De acuerdo con la dirección positiva del eje z , como se muestra la Figura (5.4), la curvatura $\kappa(x)$ en cualquier sección x de la viga está dada por la

Ecuación (5.50) (Oñate, 2013):

$$\kappa(x) = -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (5.50)$$

donde $w(x)$ es el desplazamiento vertical de la viga en la sección (positiva hacia abajo).

La deformación unitaria axial puede escribirse como en la Ecuación (5.51):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r(t_j, \xi) &= \left[-\frac{1}{l^{(e)}} \quad \frac{1}{l^{(e)}} \right] \cdot \left[u_i^{(e)}(t_j) \quad u_j^{(e)}(t_j) \right]^T \\ &= [B_a][a_a^{(e)}(t_j)] \end{aligned} \quad (5.51)$$

y teniendo en cuenta la Ecuación (5.50), la curvatura puede escribirse como en la Ecuación (5.52) (Oñate, 2013):

$$\begin{aligned} \kappa(t_j, \xi) &= - \left[\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2} \quad \frac{(-1+3\xi)}{l^{(e)}} \quad -\frac{6\xi}{(l^{(e)})^2} \quad \frac{(1+3\xi)}{l^{(e)}} \right] \cdot \\ &\quad \left[w_i^{(e)}(t_j) \quad \theta_i^{(e)}(t_j) \quad w_j^{(e)}(t_j) \quad \theta_j^{(e)}(t_j) \right]^T \\ &= [B_f][a_f^{(e)}(t_j)] \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde ξ es una coordenada local normalizada para el elemento ($\xi \in [-1, 1]$), $[B_a]$ y $[B_f]$ son la matriz de deformación y la matriz de curvatura del elemento, respectivamente, $[a_a^{(e)}(t_j)]$ y $[a_f^{(e)}(t_j)]$ son el vector de los desplazamientos axiales nodales y el vector de desplazamientos nodales en flexión en el tiempo t_j , respectivamente, y $u_i^{(e)}(t_j)$, $w_i^{(e)}(t_j)$, $\theta_i^{(e)}(t_j)$, $u_j^{(e)}(t_j)$, $w_j^{(e)}(t_j)$, y $\theta_j^{(e)}(t_j)$ son los desplazamientos nodales del i -ésimo elemento de viga en el tiempo t_j (Figura (5.6)).

La deformación unitaria al nivel del acero de pretensado en los nodos i y j en el tiempo t_j puede escribirse como en la Ecuación (5.53):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cp,i}(t_j) &= \varepsilon_r(t_j, -1) + e_{cp,i} \cdot \kappa(t_j, -1) \\ \varepsilon_{cp,j}(t_j) &= \varepsilon_r(t_j, 1) + e_{cp,j} \cdot \kappa(t_j, 1) \end{aligned} \quad (5.53)$$

Si las expresiones de las Ecuaciones (5.13) y (5.16) se evalúan utilizando integración numérica, pueden reescribirse como las Ecuaciones (5.54) y (5.54), respectivamente.

$$\Pi_{x,k} = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left(\frac{\Psi_{i,k} + \Psi_{i+1,k}}{2} \right) l_i^{(e)} \quad (5.54)$$

$$\Delta\varepsilon_{p,\hat{i}} = l \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{\Delta\varepsilon_{cp,k} + \Delta\varepsilon_{cp,k+1}}{2} \right) l_k^{(e)} \sum_{k=1}^{k=n-1} \left(\frac{\Psi_{i,k}}{\Pi_{x,k}} + \frac{\Psi_{i,k+1}}{\Pi_{x,k+1}} \right) \left(\frac{l_k^{(e)}}{2} \right) \quad (5.55)$$

La deformación unitaria en el acero de pretensado en el \hat{i} -ésimo nodo viene dada por la Ecuación (5.56):

$$\varepsilon_{p,\hat{i}} = \varepsilon_{p,0,\hat{i}} + \Delta\varepsilon_{p,\hat{i}} \quad (5.56)$$

Dado que la fuerza en el cable en el \hat{i} -ésimo nodo es función de la deformación unitaria en dicho nodo, es decir, $N_{p,\hat{i}} = N_p(\varepsilon_{p,\hat{i}})$, se utiliza un algoritmo iterativo para eliminar las fuerzas de desequilibrio para cada escalón de carga.

5.4.3. Análisis de largo plazo utilizando el Método de Paso a Paso

La relación tensión-deformación para el hormigón, Ecuación (5.22), puede reescribirse como en la Ecuación (5.57):

$$\begin{aligned} \sigma_c(t_j, x, z) &= E_c(t_j) (\varepsilon_r(t_j, x) + z \cdot \kappa(t_j, x) - \varepsilon_{sh}(t_j)) + \dots \\ &\dots + \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \sigma_c(t_i, x, z) \end{aligned} \quad (5.57)$$

La tensión en cualquier fibra del hormigón puede dividirse en la tensión generada por la deformación axial y la tensión generada por la flexión. Consideremos las tensiones y las deformaciones unitarias generadas por la flexión de la viga. El principio de los trabajos virtuales aplicado a las tensiones internas del elemento de viga se puede expresar como en la Ecuación (5.58):

$$\begin{aligned} \int_V \delta\varepsilon(t_j, x, z) \cdot \sigma_c(t_j, x, z) dV &= \int_V (z \cdot \delta\kappa(t, x) \cdot E_c(t_j) \cdot z \cdot \kappa(t_j, x)) dV + \dots \\ &\dots + \int_V \left(z \cdot \delta\kappa(t_j, x) \cdot \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \sigma_c(t_i, x, z) \right) dV \\ &= \int_{l^{(e)}} E_c(t_j) I_c \delta\kappa(t_j, x) \kappa(t_j, x) dx + \dots \\ &\dots + \int_{l^{(e)}} \delta\kappa(t_j, x) \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) M_c(t_i, x) dx \end{aligned} \quad (5.58)$$

Considerando la Ecuación (5.52), el trabajo virtual de las tensiones internas

se puede expresar utilizando la Ecuación (5.59):

$$\begin{aligned} \int_V \delta \varepsilon \cdot \sigma_c dV &= [\delta a_f^{(e)}(t_j)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_f]^T [B_f] E_c(t_j) I_c l^{(e)}}{2} d\xi \right) [a_f^{(e)}(t_j)] + \dots \\ &\dots + [\delta a_f^{(e)}(t_j)]^T \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \int_{-1}^{+1} \frac{[B_f]^T M_c(t_i, \xi) l^{(e)}}{2} d\xi \right) \end{aligned} \quad (5.59)$$

La primera expresión entre paréntesis corresponde a la matriz de rigidez para el elemento de viga en flexión en el tiempo t_j y la segunda corresponde a las fuerzas nodales equivalentes debidas a la fluencia del momento flector resistido por el hormigón.

Teniendo en cuenta la relación entre el momento flector y la curvatura, el momento flector resistido por el hormigón en el tiempo t_i puede expresarse como en la Ecuación (5.60):

$$\begin{aligned} M_c(t_i, \xi) &= -E_c(t_i) I_c \left(-\frac{1}{l^{(e)}} \theta_i^{(e)}(t_i) + \frac{1}{l^{(e)}} \theta_j^{(e)}(t_i) \right) + \dots \\ &\dots - E_c(t_i) I_c \left(\frac{6}{(l^{(e)})^2} w_i^{(e)}(t_i) + \frac{3}{l^{(e)}} \theta_i^{(e)}(t_i) \right) \xi + \dots \\ &\dots - E_c(t_i) I_c \left(-\frac{6}{(l^{(e)})^2} w_j^{(e)}(t_i) + \frac{3}{l^{(e)}} \theta_j^{(e)}(t_i) \right) \xi + \dots \\ &\dots + \sum_{k=0}^{k=i-1} F_e(t_i, t_k) M_c(t_k, \xi) \end{aligned} \quad (5.60)$$

Observar que $M_c(t_k, \xi)$ es conocido para todo tiempo t_k menor que t_i .

La Ecuación (5.60) se puede escribir en forma simplificada como la Ecuación (5.61):

$$M_c(t_i, \xi) = m_c(t_i) + \hat{m}_c(t_i) \cdot \xi \quad (5.61)$$

Luego, teniendo en cuenta la Ecuación (5.61), el segundo término en la Ecuación (5.59) puede reescribirse como en la Ecuación (5.62):

$$\begin{aligned} &[\delta a_f^{(e)}(t_j)]^T \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \int_{-1}^{+1} \frac{[B_f]^T M_c(t_i, \xi) l^{(e)}}{2} d\xi \right) \\ &= [\delta a_f^{(e)}(t_j)]^T \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_f]^T (m_c(t_i) + \hat{m}_c(t_i) \cdot \xi) l^{(e)}}{2} d\xi \right) \\ &= [\delta a_f^{(e)}(t_j)]^T [f_{f,cr}^{(e)}(t_j)] \end{aligned} \quad (5.62)$$

donde $[f_{f,cr}^{(e)}(t_j)]$ es el vector de las fuerzas nodales equivalentes debido a la

fluencia del momento flector resistido por el hormigón. Su expresión viene dada por la Ecuación (5.63):

$$[f_{f,cr}^{(e)}(t_j)] = \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \begin{bmatrix} -\frac{2}{l^{(e)}} \hat{m}_c(t_i) \\ m_c(t_i) - \hat{m}_c(t_i) \\ \frac{2}{l^{(e)}} \hat{m}_c(t_i) \\ -m_c(t_i) - \hat{m}_c(t_i) \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

El trabajo virtual de las tensiones internas debe ser igual al trabajo virtual de las fuerzas externas, como se muestra en la Ecuación (5.64):

$$\int_V \delta\varepsilon(t_j, x, z) \cdot \sigma_c(t_j, x, z) dV = [\delta a_f^{(e)}(t_j)]^T [q_f^{(e)}(t_j)] - [\delta a_f^{(e)}(t_j)]^T \sum_{i=0}^{i=j-1} [f_f^{(e)}(t_i)] \quad (5.64)$$

donde $[f_f^{(e)}(t_i)]$ y $[q_f^{(e)}(t_j)]$ son el vector de las fuerzas nodales equivalentes en el elemento debido a las cargas transversales aplicadas en el instante t_i y el vector de las fuerzas nodales de equilibrio en el tiempo t_j , respectivamente.

Consideremos ahora las tensiones generadas por las deformaciones unitarias axiales del elemento de viga. La Ecuación (5.65) puede obtenerse aplicando el principio de los trabajos virtuales a las tensiones internas:

$$\begin{aligned} \int_V \delta\varepsilon(t_j, x, z) \cdot \sigma_c(t_j, x, z) dV &= \int_V \delta\varepsilon_r(t_j, x) \cdot E_c(t_j) \cdot \varepsilon_r(t_j, x) dV + \dots \\ &\dots - \int_V \delta\varepsilon_r(t_j, x) \cdot E_c(t_j) \cdot \varepsilon_{sh}(t_j, t_0) dV + \dots \\ &\dots + \int_V \delta\varepsilon_r(t_j, x) \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \sigma_c(t_i, x, z) dV \end{aligned} \quad (5.65)$$

Teniendo en cuenta la Ecuación (5.51), el trabajo virtual de las tensiones internas se puede expresar como la Ecuación (5.66):

$$\begin{aligned} \int_V \delta\varepsilon \cdot \sigma_c dV &= [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T [B_a] E_c(t_j) A_c l^{(e)}}{2} d\xi \right) [a_a^{(e)}(t_j)] + \dots \\ &\dots - [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T E_c(t_j) A_c \varepsilon_{sh}(t_j, t_0) l^{(e)}}{2} d\xi \right) + \dots \\ &\dots + [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T \left(\sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T N_c(t_i, \xi) l^{(e)}}{2} d\xi \right) \end{aligned} \quad (5.66)$$

La primera expresión entre paréntesis en la Ecuación (5.66) corresponde a la matriz de rigidez axial del elemento en el tiempo t_j , la segunda corresponde al vector de las fuerzas nodales equivalentes debido a la retracción, y la tercera corresponde al vector de las fuerzas nodales equivalentes debidas a la fluencia

de la fuerza axial resistida por el hormigón. La fuerza axial resistida por el hormigón en el tiempo t_i puede expresarse como la Ecuación (5.67):

$$\begin{aligned}
N_c(t_i, \xi) &= E_c(t_i)A_c \left(-\frac{1}{l^{(e)}}u_i^{(e)}(t_i) + \frac{1}{l^{(e)}}u_j^{(e)}(t_i) \right) + \dots \\
&\dots - E_c(t_i)A_c\varepsilon_{sh}(t_i, t_0) + \dots \\
&\dots + \sum_{k=0}^{i-1} F_e(t_i, t_k)N_c(t_k, \xi)
\end{aligned} \tag{5.67}$$

La Ecuación (5.67) puede escribirse en forma simplificada como Ecuación (5.68):

$$N_c(t_i, \xi) = n_c(t_i) \tag{5.68}$$

Luego, teniendo en cuenta la Ecuación (5.67), el tercer término en la Ecuación (5.66) puede reescribirse como en la Ecuación (5.69):

$$\begin{aligned}
[\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T &\sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T N_c(t_j, \xi) l^{(e)}}{2} d\xi \right) \\
&= [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) \left(\int_{-1}^{+1} \frac{[B_a]^T n_c(t_i) l^{(e)}}{2} d\xi \right) \\
&= [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T \sum_{i=0}^{i=j-1} F_e(t_j, t_i) n_c(t_i) \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T \\
&= [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T [f_{a,cr}^{(e)}(t_j)]
\end{aligned} \tag{5.69}$$

donde $[f_{a,cr}^{(e)}(t_j)]$ es el vector de las fuerzas nodales equivalentes debido a la fluencia de la fuerza axial.

El trabajo virtual de las tensiones internas debe ser igual al trabajo virtual de las fuerzas externas, como en la Ecuación (5.70):

$$\int_V \delta\varepsilon(t_j, x, z) \cdot \sigma_c(t_j, x, z) dV = [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T [q_a^{(e)}(t_j)] - [\delta a_a^{(e)}(t_j)]^T \sum_{i=0}^{i=j-1} [f_a^{(e)}(t_i)] \tag{5.70}$$

donde $[f_a^{(e)}(t_i)]$ y $[q_a^{(e)}(t_j)]$ son el vector de fuerzas nodales equivalentes debido a las cargas axiales sobre el elemento aplicadas en el tiempo t_i y el vector las fuerzas nodales de equilibrio en el tiempo t_j , respectivamente.

Teniendo en cuenta las Ecuaciones (5.62) y (5.69), las Ecuaciones (5.59),

(5.64), (5.66) y (5.70) pueden escribirse como la Ecuación (5.71):

$$\begin{aligned}
[K_b^{(e)}(t_j)][D^{(e)}(t_j)] &= -[f_{cr}^{(e)}(t_j)] + E_c(t_i)A_c\varepsilon_{sh}(t_j, t_0) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \\
&\quad \cdots + [q^{(e)}(t)] - \sum_{i=0}^{j-1} [f^{(e)}(t_i)] \quad (5.71)
\end{aligned}$$

donde $[f^{(e)}(t_i)]$ y $[q^{(e)}(t_j)]$ son el vector de las fuerzas nodales equivalentes debido a las cargas axiales y transversales sobre el elemento aplicadas en el instante t_i y el vector de las fuerzas nodales de equilibrio en el tiempo t_j , respectivamente; y $[f_{cr}^{(e)}(t_j)]$ es el vector de las fuerzas nodales equivalentes debido a la fluencia de la fuerza axial y del momento flector.

La matriz de rigidez para el elemento de viga de hormigón armado en el tiempo t_j puede escribirse como Ecuación (5.72):

$$[K^{(e)}(t_j)] = [K_b^{(e)}(t_j)] + [K_s^{(e)}]_{\text{trans}} \quad (5.72)$$

La relajación del acero de pretensado puede tenerse en cuenta mediante la aplicación de un vector de fuerzas equivalentes, como se indica en la Ecuación (5.73):

$$\begin{aligned}
[\Delta P_{pr,i}^{(e)}] &= \left[\Delta H_{pr,\hat{i}} \quad \Delta V_{pr,\hat{i}} \quad \Delta M_{pr,\hat{i}} \quad \Delta H_{pr,\hat{j}} \quad \Delta V_{pr,\hat{j}} \quad \Delta M_{pr,\hat{j}} \right]^T + \cdots \\
&\quad \cdots + \Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0) A_p \sin(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{l_i^{(e)}}{12} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{l_i^{(e)}}{12} \end{bmatrix}^T + \cdots \\
&\quad \cdots - \Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0) A_p \sin(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{l_i^{(e)}}{12} & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{l_i^{(e)}}{12} \end{bmatrix}^T + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0)}{2} A_p \cos(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \cdots \\
&\quad \cdots - \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0)}{2} A_p \cos(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0) \cdot e_{cp,i}}{l_{p,i}^{(e)}} A_p \cos(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + \cdots \\
&\quad \cdots - \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0) \cdot e_{cp,j}}{l_{p,i}^{(e)}} A_p \cos(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T + \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0)}{2} A_p \sin(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \cdots \\
&\quad \cdots + \frac{\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0)}{2} A_p \sin(\alpha_i^{(e)}) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.73)
\end{aligned}$$

donde $[\Delta P_{pr,i}^{(e)}]$ es el vector de las fuerzas nodales equivalentes debido a la relajación. $\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0)$ y $\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0)$ son la relajación reducida en los nodos \hat{i} y \hat{j} , respectivamente, entre los tiempos t_0 y t_j . $\Delta H_{pr,\hat{i}}$, $\Delta V_{pr,\hat{i}}$, $\Delta M_{pr,\hat{i}}$, $\Delta H_{pr,\hat{j}}$, $\Delta V_{pr,\hat{j}}$ y $\Delta M_{pr,\hat{j}}$ son los cambios en las fuerzas nodales debido a la relajación y sus expresiones vienen dadas por la Ecuación (5.74):

$$\begin{aligned}
\Delta H_{pr,\hat{i}} &= -\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0) \cdot A_p \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
\Delta V_{pr,\hat{i}} &= -\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0) \cdot A_p \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \\
\Delta M_{pr,\hat{i}} &= \Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{i}}(t_j - t_0) \cdot A_p \cdot e_{cp,i} \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
\Delta H_{pr,\hat{j}} &= \Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0) \cdot A_p \cdot \cos(\alpha_i^{(e)}) \\
\Delta V_{pr,\hat{j}} &= \Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0) \cdot A_p \cdot \sin(\alpha_i^{(e)}) \\
\Delta M_{pr,\hat{j}} &= -\Delta \bar{\sigma}_{pr,\hat{j}}(t_j - t_0) \cdot e_{cp,j} \cdot A_p \cdot \cos(\alpha_i^{(e)})
\end{aligned} \tag{5.74}$$

5.5. Validación y ejemplos numéricos

Hay dos etapas de carga para el análisis a corto plazo en el momento del pretensado. El primero corresponde a la operación de pretensado y el segundo corresponde a la aplicación de carga adicional. En el caso de tendones perfectamente no adheridos, en el momento del pretensado, la fuerza de pretensado efectiva N_{pe} corresponde a un estado de equilibrio descrito por la viga y los desplazamientos del tendón vinculado, que es en general la única información disponible (Moreira et al. 2018). N_{pe} es la fuerza de pretensado después de que se hayan producido todas las pérdidas instantáneas. Esta fuerza permanece constante a lo largo del tendón.

En la práctica, para los sistemas de postesado, la fuerza aplicada por el gato suele ser conocida, por lo que considerando la penetración de las cuñas y las propiedades de fricción, ambas en general dadas por el fabricante del sistema, la fuerza de pretensado efectiva $N_{pe}(x)$ en cada sección puede evaluarse. A esta fuerza corresponde la deformación inicial $\varepsilon_{p,0}(x)$.

5.5.1. Ejemplo 1: ensayo de Breckenridge y Bugg

Breckenridge y Bugg (1964) llevaron a cabo estudios experimentales de largo plazo sobre vigas de hormigón de sección transversal en forma de I simplemente apoyadas y pretensadas mediante barras de pretensado interiores no adherentes en el Laboratorio de Ingeniería Civil Naval en 1953. La sec-

cción transversal de las vigas I se muestra en la Figura (5.7). El área de la sección transversal y el momento de inercia son $A_c = 11.645 \times 10^4 \text{ mm}^2$ e $I_c = 51.476 \times 10^8 \text{ mm}^4$, respectivamente. Las vigas tenían una longitud de vano de 12192 mm y se pretensaron con dos barras de acero de alta resistencia ocho días después del vertido del hormigón. Cada barra de pretensado tenía 28.5 mm de diámetro ($A_p = 641.29 \text{ mm}^2$), módulo de elasticidad de 168.9 GPa y el pretensado efectivo se midió en 683.23 kN. Se asume perfecta no adherencia. Los trazados de las barras de pretensado se dan en las Ecuaciones (5.75) y (5.76). Las vigas se diseñaron para cargas vivas concentradas de 67.61 kN aplicadas a los cuartos de la longitud. Dos de las vigas estaban sujetas solo a su propio peso (LL = 0.0 P), mientras que otras dos estaban sujetas a su propio peso y al 100 % de la carga viva de diseño (LL = 1.0 P). Esta carga se aplicó para una edad del hormigón de 22 días y se mantuvo constante hasta la edad del hormigón de 2373 días. La temperatura promedio y la humedad relativa promedio durante los 2373 días fueron de 15.6 °C y 72.8 %, respectivamente. El refuerzo de acero pasivo consistía en ocho barras con un diámetro de 9.50 mm ($A_s = 70.79 \text{ mm}^2$), límite elástico característico de 335 MPa y módulo de elasticidad de 200 GPa. Se usó cemento de resistencia normal, y la resistencia característica a compresión del hormigón en probetas cilíndricas fue $f_{ck} = 36.27 \text{ MPa}$ ($E_c(t_0) = 26.44 \text{ GPa}$).

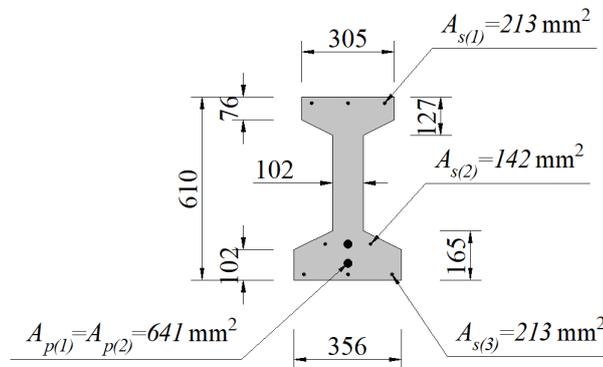


Figura 5.7: Sección transversal y disposición del acero pasivo en las vigas I ensayadas por Breckenridge y Bugg (1964).

$$\begin{aligned}
d_{p(1)}(x) &= -3.5334 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 20.4605 \cdot 10^{-2} \cdot x + 192.79 \\
&\text{para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm} \\
d_{p(1)}(x) &= 488.95 \quad \text{para } 2895.6 \text{ mm} \leq x < 9296.4 \text{ mm} \\
d_{p(1)}(x) &= -3.5334 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 65.7029 \cdot 10^{-2} \cdot x - 2564.89 \\
&\text{para } 9296.4 \text{ mm} \leq x < 12192 \text{ mm}
\end{aligned} \tag{5.75}$$

$$\begin{aligned}
d_{p(2)}(x) &= -1.6119 \cdot 10^{-5} x^2 + 9.3341 \cdot 10^{-2} \cdot x + 471.32 \\
&\text{para } 0 \leq x < 2895.6 \text{ mm} \\
d_{p(2)}(x) &= 552.45 \quad \text{para } 2895.6 \text{ mm} \leq x < 9296.4 \text{ mm} \\
d_{p(2)}(x) &= -1.6119 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 29.9698 \cdot 10^{-2} \cdot x - 840.49 \\
&\text{para } 9296.4 \text{ mm} \leq x < 12192 \text{ mm}
\end{aligned} \tag{5.76}$$

El gráfico de la Figura (5.8) muestra la flecha en función del tiempo después del tensado y el gráfico de la Figura (5.9) muestra la pérdida de pretensado en función del tiempo después del tensado. Ambos gráficos incluyen los valores medidos y los valores calculados de acuerdo con los parámetros Model Code 2010 (2012) y ACI 209.2R-08 (2008).

Para ambos gráficos, los valores calculados utilizando los parámetros normativos y aplicando el enfoque propuesto están muy próximos uno del otro, aunque pueden observarse algunas pequeñas diferencias con respecto a los valores medidos. Podemos concluir que el enfoque propuesto fue capaz de predecir con suficiente precisión, la flecha de la viga y la pérdida de pretensado para un historial de cargas dado.

5.5.2. Ejemplo 2: viga continua con pretensado interior no adherente

Burns et al. (1991) ensayó dos vigas continuas de hormigón con pretensado interior no adherente para monitorear la pérdida de pretensado debida al rozamiento y al acomodamiento de las piezas de anclaje. Los autores no estudiaron la pérdida de pretensado a lo largo del tiempo; sin embargo, una de sus conclusiones se usa aquí para mostrar la validez del enfoque propuesto. Los autores expresaron que no hubo ningún efecto sobre la redistribución de

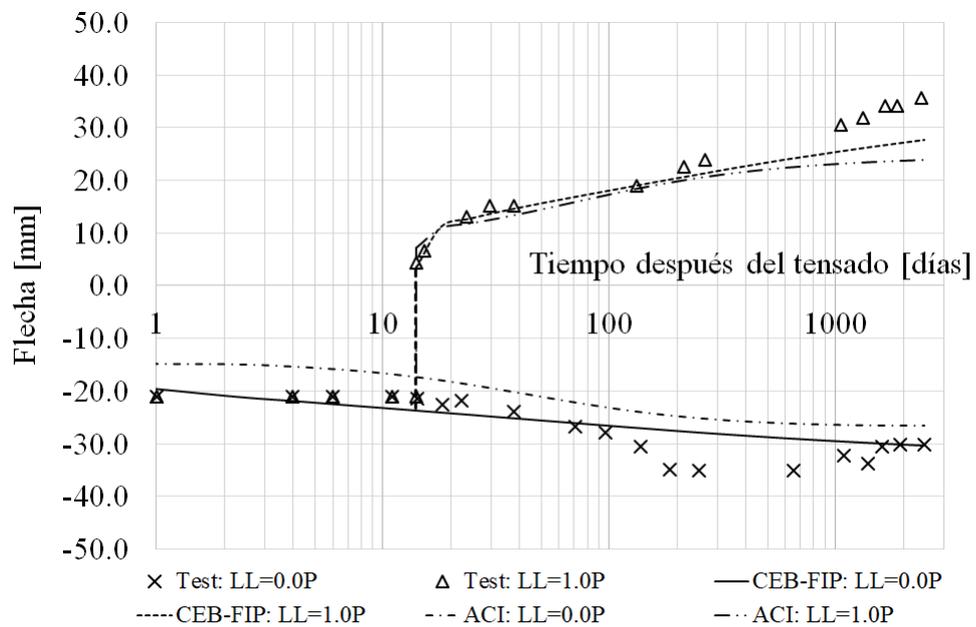


Figura 5.8: Flecha en función de tiempo después del tensado.

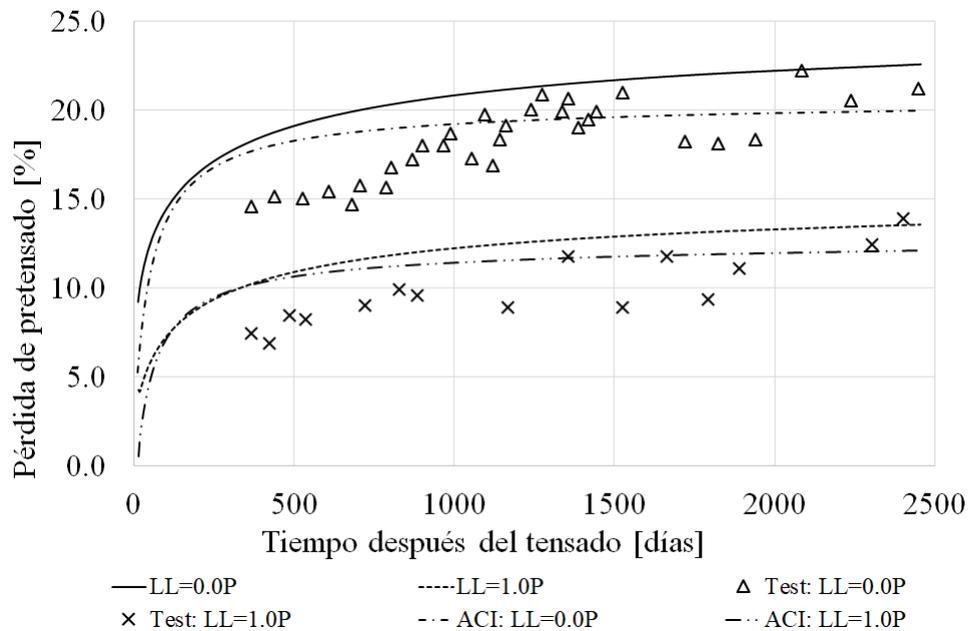


Figura 5.9: Pérdida de pretensado en función del tiempo después del tensado.

la tensión en el cable para los niveles de carga de servicio y ni para las cargas de servicio repetidas.

La viga utilizada aquí corresponde al espécimen No. 1 ensayado por Burns et al. (1991). La viga es de sección transversal rectangular con un ancho de 304.8 mm y una altura de 355.6 mm. Es continua de dos vanos, cada uno de ellos de 7620 mm de largo. Las cargas consistieron en su peso propio, una carga muerta de 1.05 kN/m y dos cargas puntuales aplicadas a 4114.8 mm a cada lado del apoyo central. El pretensado no adherente consistió en tres cables de 12.7 mm de diámetro formados por 7 alambres, Grado 270 (resistencia a tracción nominal de 1860 MPa) y baja relajación ($A_p = 3 \times 98.71 \text{ mm}^2$). El módulo de elasticidad del acero de pretensado fue de 196.5 MPa. La fuerza de pretensado aplicada en el anclaje activo fue de $0.75f_{ptk}$, la penetración de las cuñas de anclaje fue de 1.27 mm y el coeficiente de rozamiento parásito y el coeficiente de rozamiento fueron $3.28 \times 10^{-3} \text{ m}^{-1}$ y 0.07, respectivamente. Se utilizó hormigón de peso normal con una resistencia característica en probetas cilíndricas de 34.5 MPa. El trazado de los cables en el vano izquierdo están dados por la Ecuación (5.77). La Figura (5.10) muestra las propiedades de la viga.

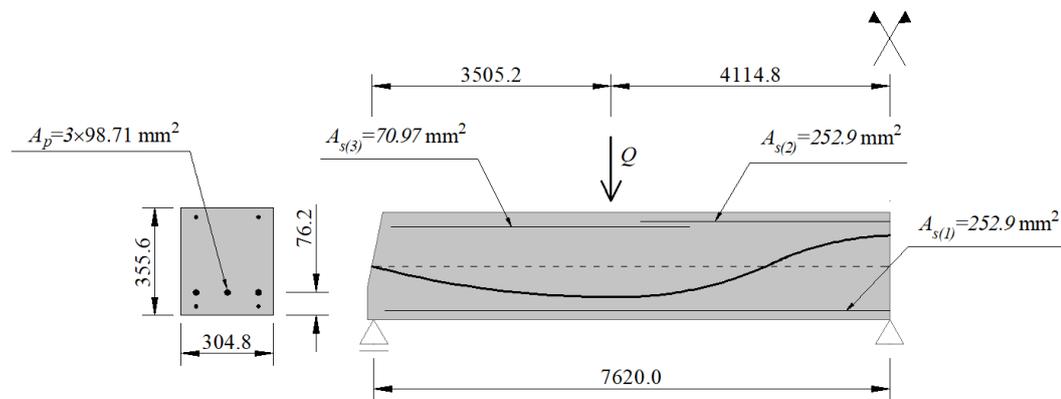


Figura 5.10: Especimen ensayado por Burns et al. (1991). Esquema de la disposición del acero pasivo y el acero de pretensado.

$$\begin{aligned}
d_p(x) &= -0.8269 \times 10^{-5} \cdot x^2 + 5.7971 \times 10^{-2} \cdot x + 177.8 \\
&\text{para } 0 \leq x < 3505.2 \text{ mm} \\
d_p(x) &= -1.4729 \times 10^{-5} \cdot x^2 + 10.3255 \times 10^{-2} \cdot x + 98.4361 \\
&\text{para } 3505.2 \leq x < 6858 \text{ mm} \\
d_p(x) &= 6.4807 \times 10^{-5} \cdot x^2 - 98.7664 \times 10^{-2} \cdot x + 3839.2 \\
&\text{para } 6858 \text{ mm} \leq x \leq 7620 \text{ mm}
\end{aligned} \tag{5.77}$$

Antes de la transferencia de la fuerza de pretensado al anclaje, la pérdida medida debida a rozamiento entre el anclaje activo y el anclaje pasivo fue de 27.97 kN; es decir, la fuerza en el cable en el anclaje pasivo fue de 385.5 kN, y luego que la fuerza de pretensado fue transferida, esta diferencia fue de 14.29 kN, lo que significa que la fuerza en el cable en el anclaje activo fue de 399.8 kN. Los valores calculados utilizando el modelo propuesto son 26.73 kN y 3.76 kN, respectivamente, y, por lo tanto, la fuerza calculada del anclaje activo y en el anclaje pasivo son 390.2 kN y 386.4 kN, respectivamente, lo que representa una diferencia del orden del 2.5 % entre las fuerzas en el anclaje activo y una diferencia de menos del 0.3 % entre las fuerzas para el anclaje pasivo. De acuerdo con Burns et al. (1991), al comienzo del ensayo, la viga experimentó cierta pérdida en la fuerza de pretensado; sin embargo, no se modificó la diferencia en la fuerza de pretensado entre ambos extremos.

Con el objetivo de estudiar el efecto de largo plazo, se analizaron dos situaciones de carga diferentes. En el primero, Caso No. 1, la viga es sometida a su peso propio y la carga muerta desde el momento del tensado, digamos a los 28 días luego de vertido el hormigón, hasta 10000 días. El segundo, Caso No. 2, es similar al anterior, pero además se aplicaron dos cargas puntuales de 50.27 kN a los 42 días y se mantuvieron constantes hasta los 10000 días. Se supone una temperatura de 20 °C y una humedad relativa del 70 %.

Las Figuras (5.11), (5.12) y (5.13) muestran respectivamente la deformación vertical, el diagrama de momento de flector y la fuerza de pretensado al momento del tensado y en el tiempo $t = 10000$ días para el Caso No. 1 y las Figuras (5.14), (5.15) y (5.16) muestran respectivamente la deformación vertical, el diagrama de momento de flector y la fuerza de pretensado para el caso No. 2. De acuerdo con la convención de signos, una deformación vertical negativa significa deflexión hacia arriba. Las gráficas de la fuerza de pretensado

en función de la distancia para los diferentes tiempos son casi paralelas, lo que concuerda con la conclusión de Burns et al. (1991).

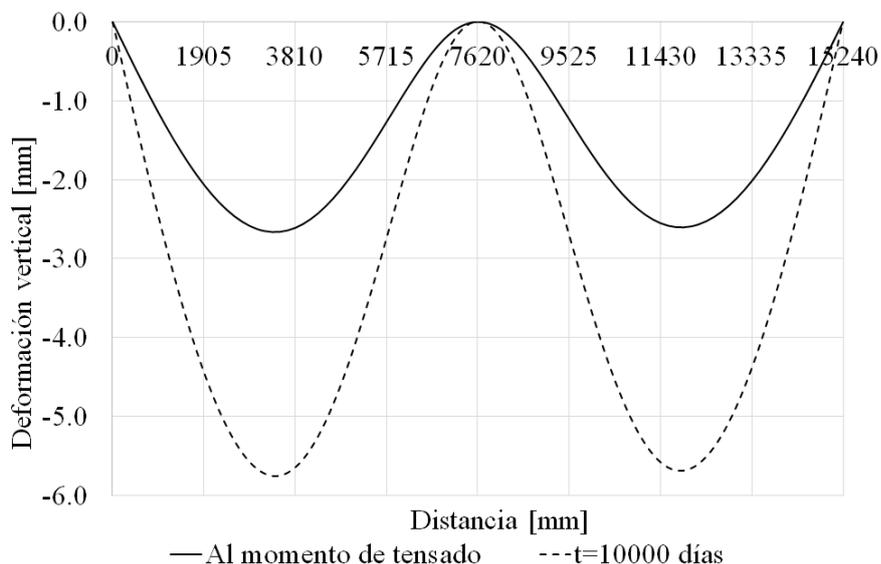


Figura 5.11: Caso No. 1: diagrama de desplazamiento vertical instantáneo y diferido.

Es importante hacer notar que se observa una pequeña diferencia entre las deformaciones verticales en el vano izquierdo y el derecho. Esto se debe a que la fuerza de pretensado no es simétrica con respecto al apoyo central. Sin embargo, debido a que la longitud afectada por la penetración de las cuñas es aproximadamente igual a la longitud del vano, todos los gráficos son casi simétricos con respecto al apoyo central.

5.5.3. Ejemplo 3: viga continua con pretensado interior no adherente

La viga continua de hormigón utilizada en este ejemplo corresponde a la viga YLB2 ensayada por Lou et al. (2013). La viga tiene sección rectangular de 150 mm de ancho y 300 mm de altura y la resistencia característica del hormigón de 33.0 MPa. Se utilizó un cable de pretensado no adherente de 15 mm de diámetro formado por siete alambres ($A_p = 140 \text{ mm}^2$). Su módulo de elasticidad y su resistencia a tracción nominal son 197 GPa y 1.941 MPa, respectivamente. La fuerza efectiva de pretensado es de 1193 MPa. El trazado del cable viene dado por la Ecuación (5.77). El acero pasivo longitudinal de

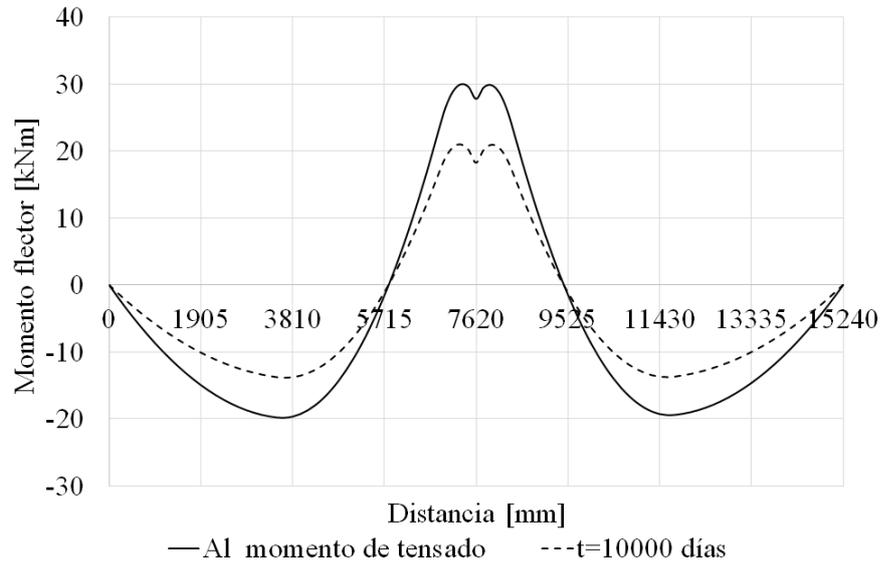


Figura 5.12: Caso No. 1: diagrama de momento flector instantáneo y diferido.

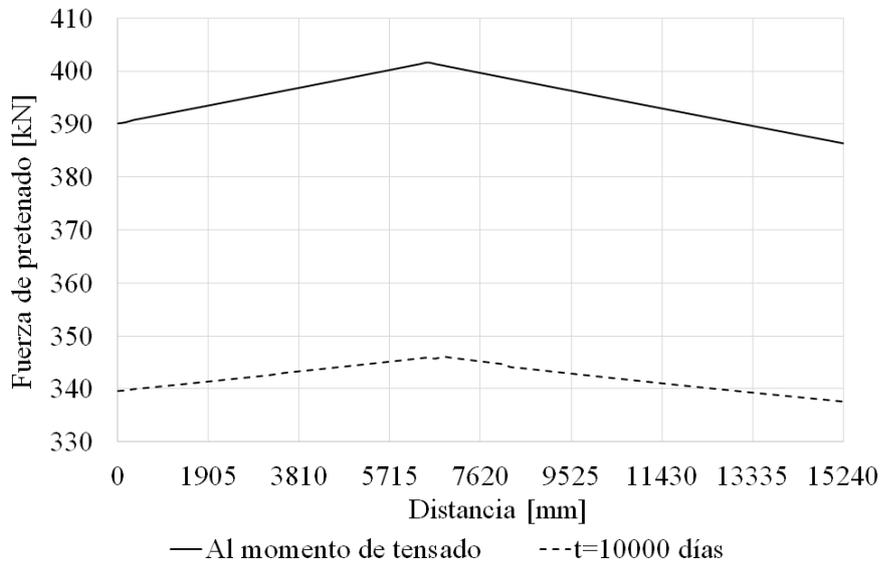


Figura 5.13: Caso No. 1: fuerza de pretensado en función de la distancia al momento de tensado y en el largo plazo.

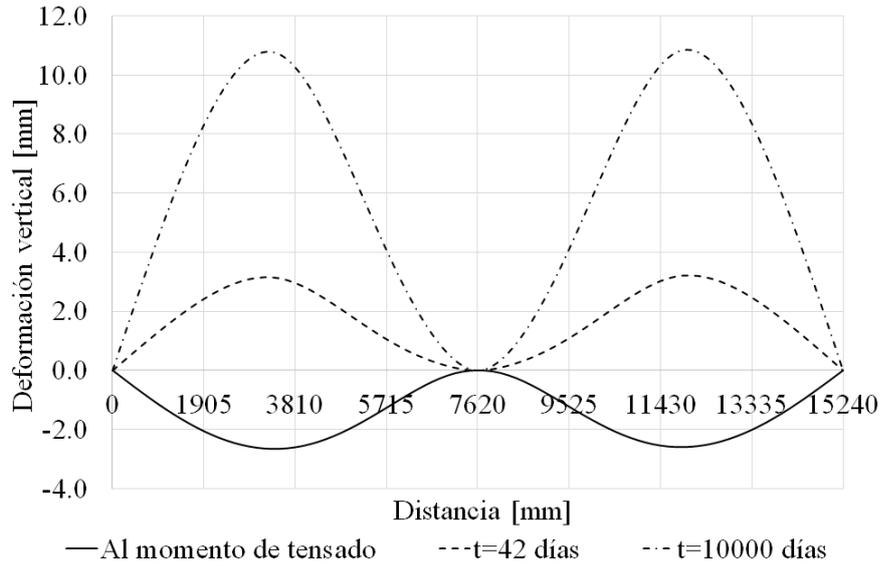


Figura 5.14: Caso No. 2: diagrama de deformación vertical a 28, 42 y 10000 días.

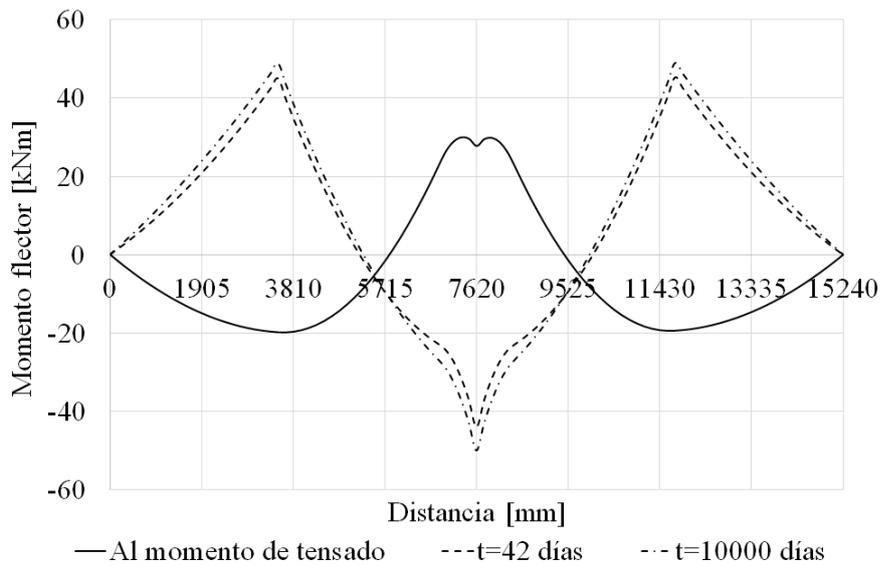


Figura 5.15: Caso No. 2: diagrama de momento flector a 28, 42 y 10000 días.

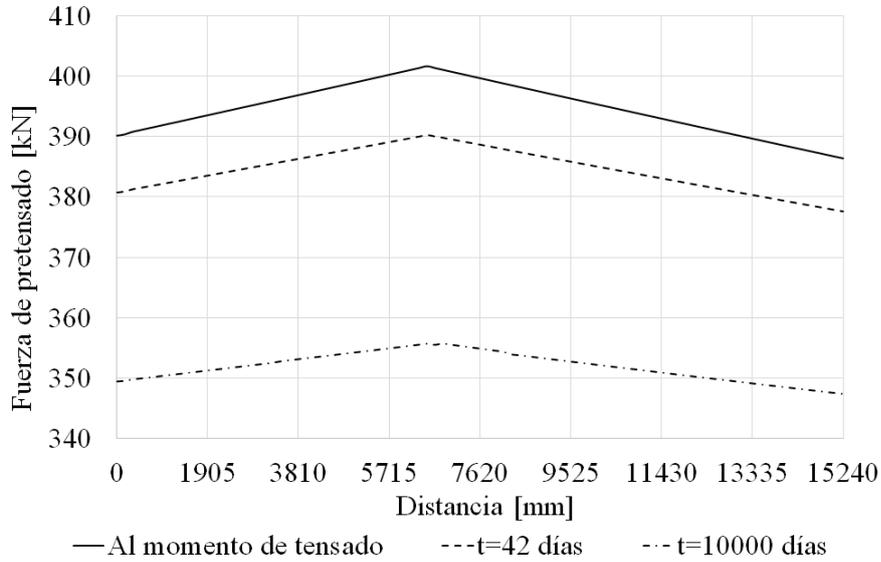


Figura 5.16: Caso No. 2: fuerza de pretensado en función de la distancia a 28, 42 y 10000 días.

refuerzo consiste en barras de acero tratadas cuyo módulo de elasticidad es de 200 GPa. Las áreas del acero pasivo, A_{s1} , A_{s2} y A_{s3} son 603.2, 226.2 y 508.9 mm², respectivamente, y se colocaron como se muestra esquemáticamente en la Figura (5.17). De acuerdo con Lou et al. (2013), los cálculos se realizaron bajo la hipótesis de perfecta no adherencia. Con el objeto de mostrar la precisión de la ecuación propuesta dos casos fueron analizados. En el primero se consideraron asumieron las hipótesis de perfecta no adherencia y en el segundo, se tuvo en cuenta la fricción. Para ello, se supone que el coeficiente de rozamiento parásito y el coeficiente de rozamiento son $5.24 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ y 0.06, respectivamente, y que la penetración de las cuñas es de 5 mm. Estos valores son los recomendados por los fabricantes.

$$\begin{aligned}
 d_p(x) &= -2.5297 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 0.1006 \cdot x + 150 \\
 &\text{para } 0 \leq x < 1988 \text{ mm} \\
 d_p(x) &= -3.0518 \cdot 10^{-5} \cdot x^2 + 0.1214 \cdot x + 129.3 \\
 &\text{para } 1988 \leq x < 4320 \text{ mm} \\
 d_p(x) &= 1.4817 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 1.4225 \cdot x + 3463.9 \\
 &\text{para } 4320 \text{ mm} \leq x \leq 4800 \text{ mm}
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

La viga fue tensada a los 28 días después de vertido el hormigón y sometida a dos casos de carga. En el primer caso, la viga estuvo sujeta a su peso propio

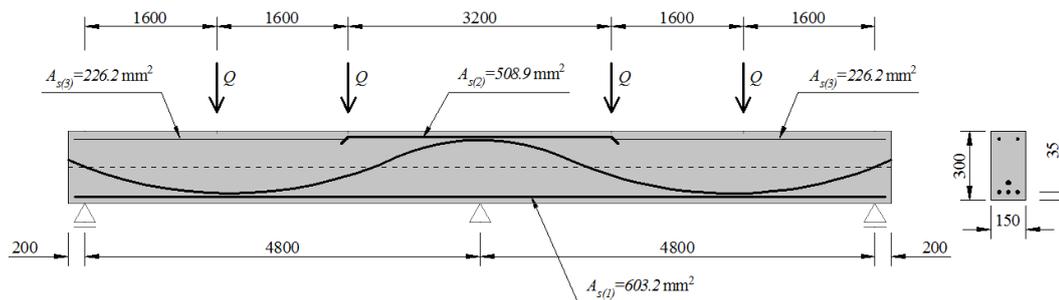


Figura 5.17: Viga YLB2 ensayada por Lou et al. Lou et al. 2013.

y el segundo, la viga estuvo sujeta a su peso propio y a dos cargas puntuales $Q = 30$ kN igualmente espaciados a lo largo de cada vano. Como no todos los datos fueron suministrados por los autores, se asumió razonablemente 20 °C y 50% de humedad relativa. Los valores del coeficiente de fluencia y de la retracción del hormigón se calcularon de acuerdo con Model Code 2010 (2012), siendo $\varphi(600, 28) = 1.885$ y $\varepsilon_{sh}(600, 28) = -350.66 \times 10^{-6}$.

Las Figuras (5.18), (5.19) y (5.20) muestran respectivamente el diagrama de deformación vertical, el diagrama de momento flector y la fuerza de pretensado en función de la distancia en el momento del pretensado y en el tiempo $t = 600$ días para la viga sujeta a su peso propio y las Figuras (5.21), (5.22) y (5.23) muestran las mismas variables pero para la viga sujeta a su peso propio y las cargas puntuales. Las figuras también muestran los parámetros suponiendo se cumpla la hipótesis de perfecta no adherencia (PU) y que dicha hipótesis no se cumpla (NPU).

Para el primer caso de carga, las deformaciones verticales medidas hacia arriba por Lou et al. (2013) en el momento de tensado y en el tiempo $t = 600$ días fueron 1.8 y 3.5 mm, respectivamente. Las deformaciones verticales calculadas por el enfoque propuesto en para los mismos tiempos son 1.92 mm y 3.29 mm, respectivamente. Para el segundo caso de carga, las deformaciones verticales medidas hacia abajo por los autores en el momento de tensado y en el tiempo $t = 600$ días fueron 2.0 y 8.2 mm, respectivamente. Las deformaciones verticales calculadas por el enfoque propuesto son 2.40 mm y 6.85 mm, respectivamente. Tanto la deflexión como el momento flector solo muestran pequeñas diferencias para los vanos izquierdo y derecho cuando se considera el rozamiento. La Tabla 5.1 muestra los valores comparativos de las flechas

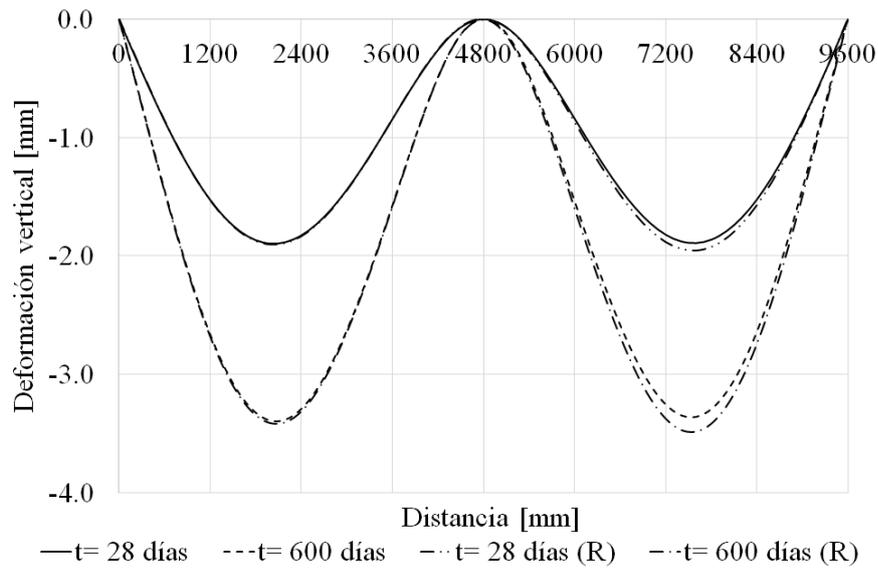


Figura 5.18: Diagrama de deformación vertical: viga YLB2 sometida a su peso propio (R: rozamiento).

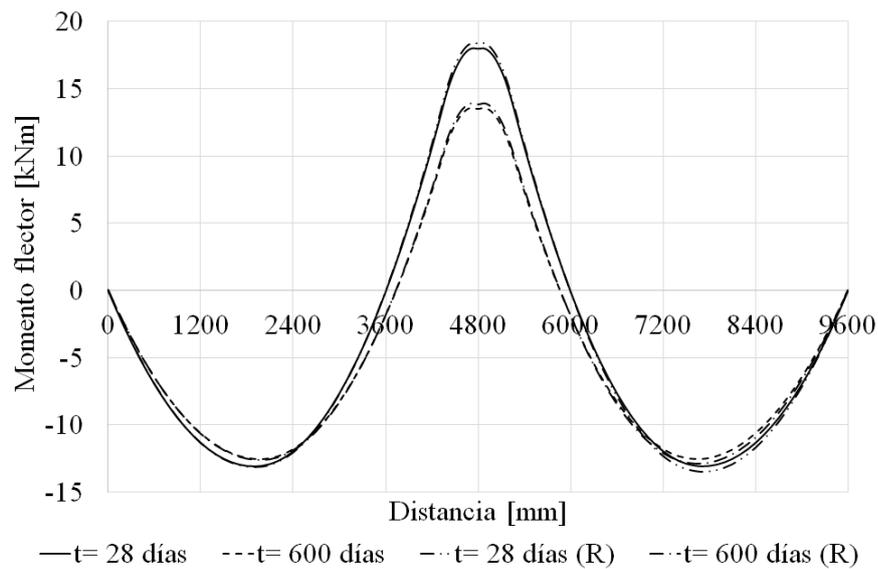


Figura 5.19: Diagrama de momento flector: viga YLB2 sometida a su peso propio (R: rozamiento).

Tabla 5.1: Tabla comparativa: flecha a 28 y 600 días [mm] para la viga YLB2.

| Caso N ^o | Medido | Enfoque propuesto - FEM |
|---------------------|--------|-------------------------|
| 1 | 1.8 | 1.92 |
| | 3.5 | 3.29 |
| 2 | 2.0 | 2.40 |
| | 8.2 | 6.85 |

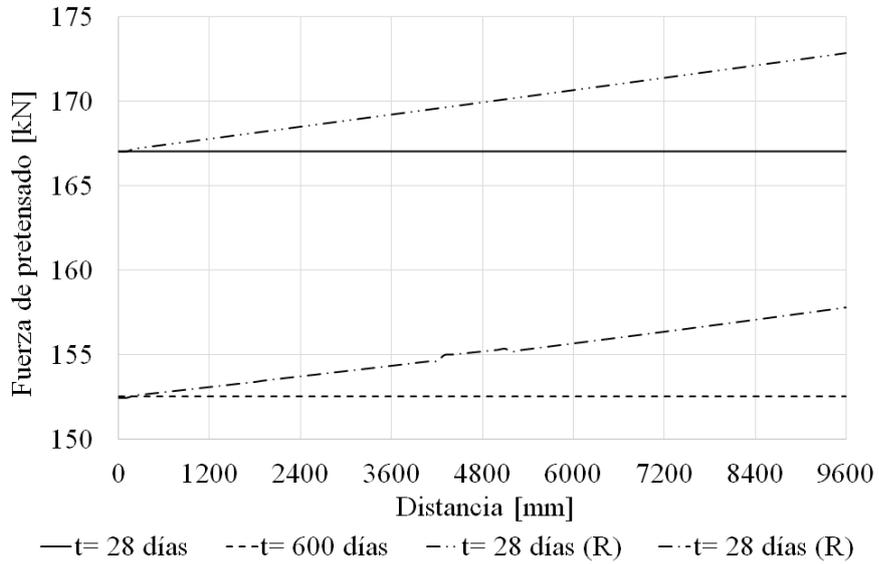


Figura 5.20: Fuerza de pretensado en función de la distancia: viga YLB2 sometida a su peso propio (R: rozamiento).

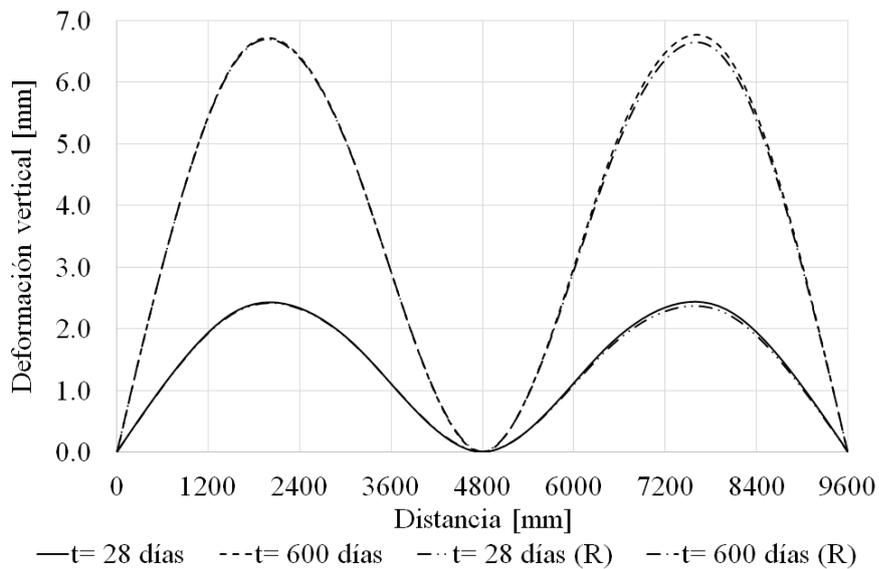


Figura 5.21: Diagrama de deformación vertical: viga YLB2 sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento).

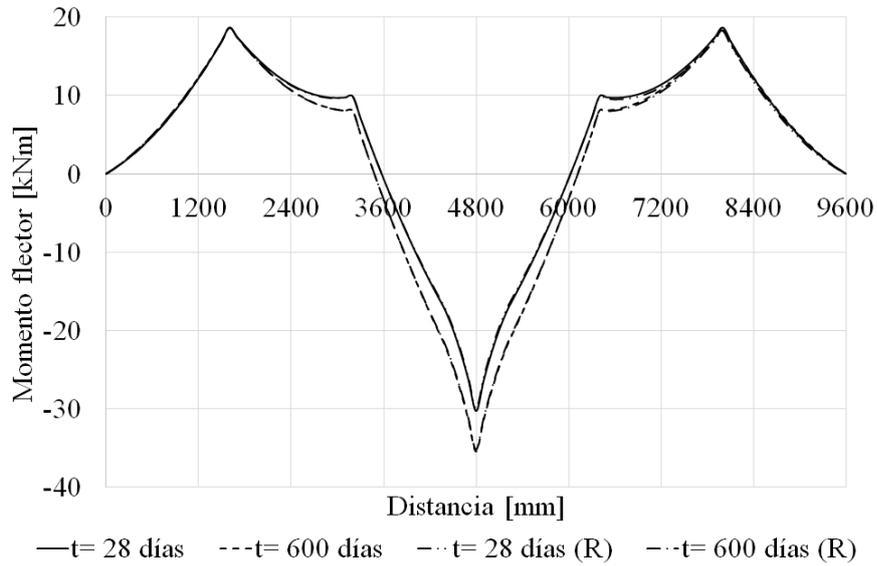


Figura 5.22: Diagrama de momento flector: viga YLB2 sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento).

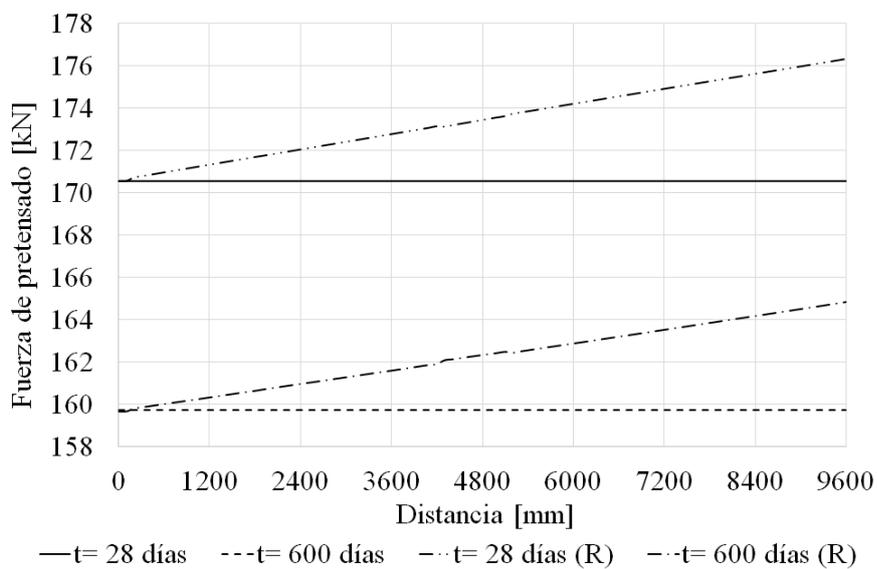


Figura 5.23: Fuerza de pretensado en función de la distancia: viga YLB2 sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento).

máximas a los 28 y 600 días para la viga YLB2.

En este ejemplo, la longitud afectada por la penetración de las cuñas es más larga que la longitud de la viga. Se esperaba que los gráficos fueran asimétricos con respecto al soporte central. Debido a que la fuerza entre el anclaje activo y en pasivo es muy pequeña, aproximadamente a 5.8 kN ($3.45 \times 10^{-2} \cdot f_{pe}$), los diagramas de deformación vertical y de momento de flector son casi simétricos. Sin embargo, la diferencia entre los valores de los vanos izquierdo y derecho son mayores que para los de la viga Burns et al. (1991).

La Tabla 5.2 muestra los valores de la pérdida de pretensado en el tiempo 600 días para la viga YLB2 para los dos casos de estudio, calculados usando la ecuación propuesta. Estos valores se comparan con los valores calculados usando el enfoque de elementos finitos con y sin acero de refuerzo bajo la hipótesis de perfecta no adherencia para el pretensado. La ecuación propuesta predice correctamente la pérdida de pretensado. Como se esperaba, el acero de refuerzo tiene un efecto beneficioso sobre la pérdida de pretensado, reduciendo su valor.

Tabla 5.2: Tabla comparativa: pérdida de pretensado para la viga YLB2 a los 600 días [MPa].

| Caso N ^o | Ecuación propuesta | PU-FEM sin acero pasivo | PU-FEM con acero pasivo |
|---------------------|--------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1 | 144.1 | 144.4 | 103.6 |
| 2 | 64.7 | 65.1 | 52.1 |

5.5.4. Ejemplo 4: losa unidireccional continua con pretensado interior no adherente

Consideremos una losa unidireccional continua con pretensado interior no adherente como se muestra en la Figura (5.24). Este ejemplo fue tomado de M. H. Harajli (2012). Las longitudes de los vanos son $L_1 = 8000 \text{ mm}$ y $L_2 = 10000 \text{ mm}$, el espesor de la losa es de 250 mm , se utilizan cordones de siete alambre de 12.7 mm de diámetro, Grado 270, espaciados entre si 250 mm ($A_p = 394.8 \text{ mm}^2/\text{m}$). La tensión de pretensado efectiva fue de 1024.1 MPa , la resistencia característica a tracción de los cordones fue de 1862 MPa y su módulo de elasticidad fue de 196.5 GPa . Se utilizó un trazado parabólico para el cable y el método de la carga balanceada para equilibrar el peso propio de

la losa. Las excentricidades son $e_1 = 75$ mm a $0.4L_1$ medida desde el apoyo extremo, $e_2 = 95$ mm sobre el apoyo interior y $e_3 = 95$ mm en el medio del vano interior. Se colocó acero pasivo de refuerzo superior e inferior de área $A_s = 513$ mm²/m a lo largo de toda la viga con un canto útil de 220 mm. El módulo de elasticidad del acero pasivo fue de 200 GPa y la resistencia característica a la compresión en probetas cilíndricas del hormigón fue de 35 MPa.

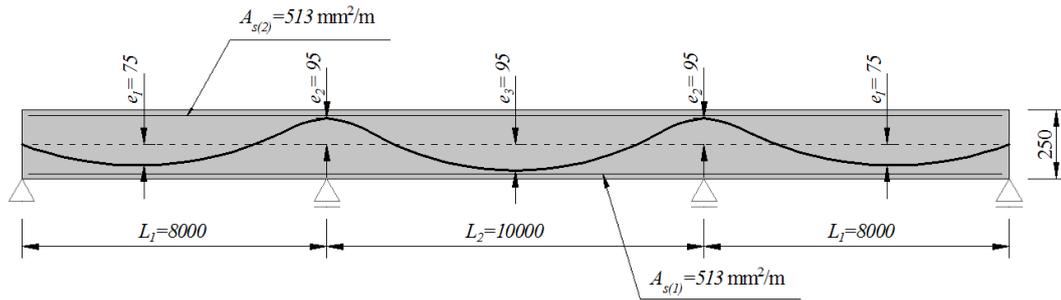


Figura 5.24: Geometría esquemática de la losa unidireccional continua.

Como el autor (M. H. Harajli, 2012) no realizó un estudio a largo plazo, asumimos para este ejemplo 20 °C, 70% de humedad relativa, el tiempo de inicio de la retracción $t_s = 7$ días y la edad de tensado $t_0 = 28$ días. Los valores del módulo de elasticidad del hormigón, del coeficiente de fluencia y de la retracción se calcularon de acuerdo con el Model Code 2010 (2012) y son $E_c(28) = 29.89$ GPa, $\varphi(10000, 28) = 1.742$ y $\varepsilon_{sh}(10000, 28) = -354.31 \times 10^{-6}$, respectivamente.

En el primer caso de estudio, se supuso que la única carga de larga duración es el peso propio y, en el segundo caso, se supuso que las cargas de larga duración son en el peso propio y una carga muerta de 4.50 kN/m. Esta carga se aplica en el tiempo t_0 poco después del tensado. El coeficiente de rozamiento parásito y el coeficiente de rozamiento son los mismos que en el Ejemplo 3.

Las Figuras (5.25), (5.26) y (5.27) muestran el diagrama de deformación vertical, el diagrama de momento flector y la fuerza de pretensado, respectivamente, en función de la distancia en el momento del tensado y en el tiempo $t = 10000$ días para la losa sometida a su peso propio y Las Figuras (5.28), (5.29 y (5.30) muestran las mismas variables pero para la losa sometida su peso propio y la carga muerta.

La Tabla 5.3 muestra los valores de la pérdida de pretensado a 10000 días calculada utilizando la ecuación propuesta. Nuevamente, la ecuación propuesta predice correctamente la pérdida de pretensado.

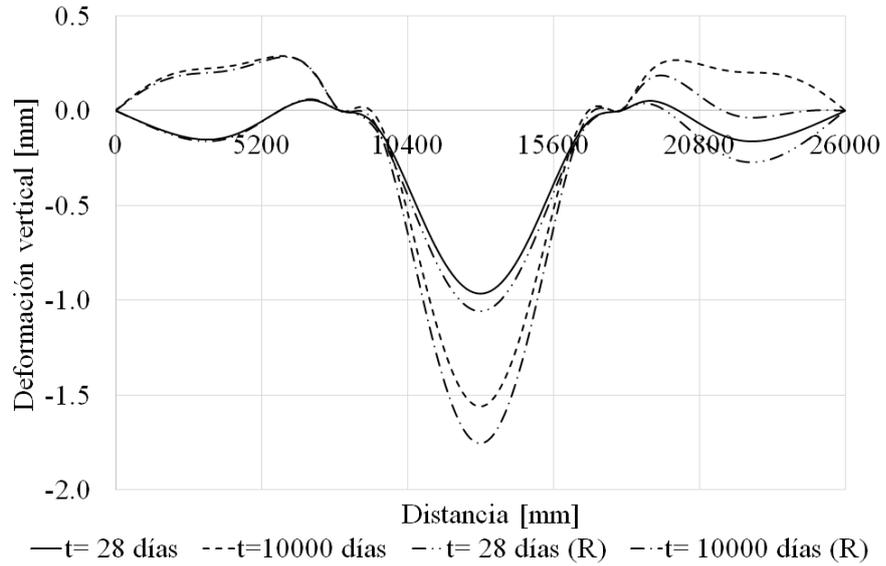


Figura 5.25: Diagrama de deformación vertical: losa unidireccional sometida a su peso propio (R: rozamiento).

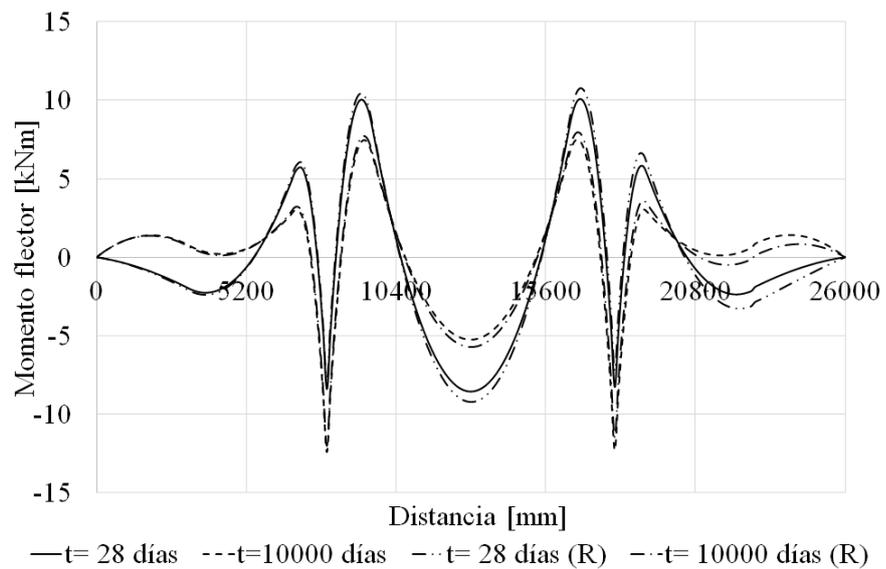


Figura 5.26: Diagrama de momento flector: losa unidireccional sometida a su peso propio (R: rozamiento).

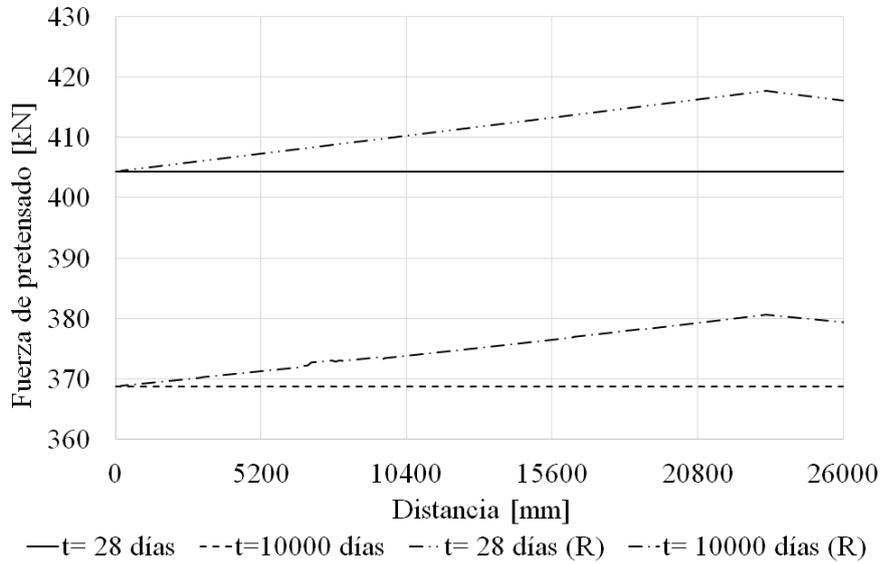


Figura 5.27: Fuerza de pretensado en función de la distancia: losa unidireccional sometida a su peso propio (R: rozamiento).

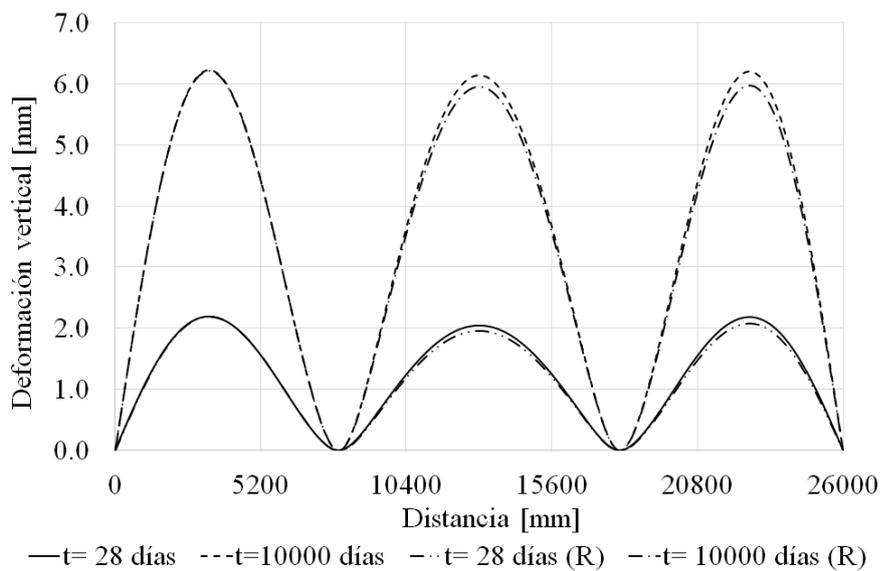


Figura 5.28: Diagrama de deformación vertical: losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento).

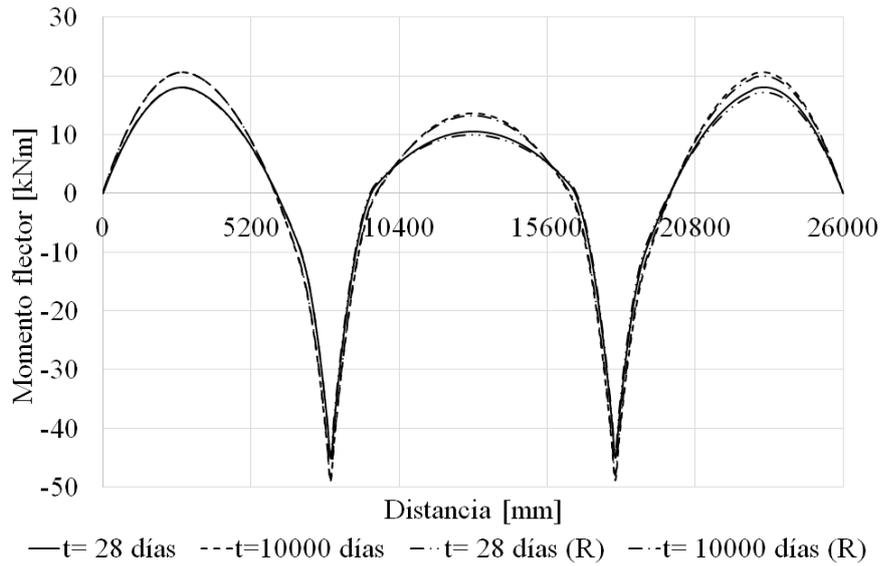


Figura 5.29: Diagrama de momento flector: losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento).

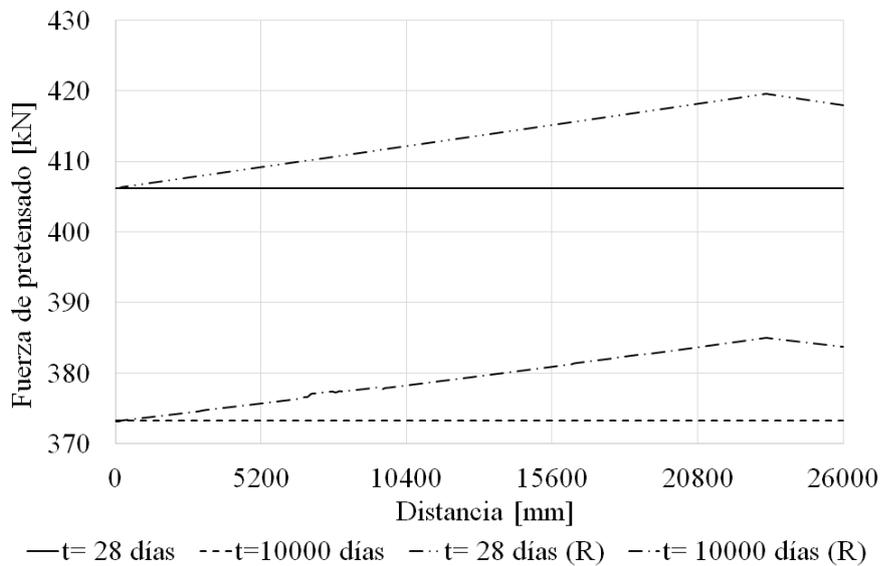


Figura 5.30: Fuerza de pretensado en función de la distancia: losa unidireccional sometida a su peso propio y a la carga muerta (R: rozamiento).

Tabla 5.3: Tabla comparativa: pérdida de pretensado para la losa unidireccional a los 10000 días [MPa].

| Caso N ^o | Ecuación propuesta | PU-FEM sin acero pasivo | PU-FEM con acero pasivo |
|---------------------|--------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1 | 96.0 | 96.6 | 92.2 |
| 2 | 83.7 | 83.9 | 80.7 |

Para la losa unidireccional, la diferencia entre la pérdida de pretensado calculada teniendo y no teniendo en cuenta el acero pasivo longitudinal de refuerzo es menos significativa que para la viga YLB2. La razón de esto es que la viga YLB2 tiene una cuantía de acero pasivo elevada, mientras que la losa tiene una cuantía de acero pasivo baja, una condición que mejor se ajusta a la hipótesis de la ecuación propuesta.

5.6. Conclusiones

En este trabajo se propuso una ecuación para estimar la pérdida de pretensado en vigas continuas de hormigón con pretensado interior no adherente. La ecuación tiene en cuenta la fluencia y la retracción del hormigón y la relajación del acero de pretensado. Además, se desarrolló un modelo numérico basado en el método de elementos finitos para el análisis a lo largo del tiempo de este tipo de vigas. El enfoque incluye la fluencia y la retracción del hormigón, la relajación del acero de pretensado, la presencia de acero pasivo longitudinal de refuerzo y el rozamiento entre los cables y sus vainas. Además, se propuso una ecuación de forma integral, correctamente justificada, para calcular la tensión en cada sección del acero de pretensado no adherente teniendo en cuenta el rozamiento entre los cables y sus vainas. Esta ecuación se basa en la ecuación para la pérdida por rozamiento aceptada por las diferentes normas. La deformación en cada sección del acero de pretensado no adherente se calculó a partir de la deformación en el hormigón al nivel del centro de gravedad del cable de pretensado a lo largo de toda la viga.

La ecuación propuesta y el modelo numérico se validaron comparándolos con los resultados de ensayos experimentales y las siguientes conclusiones pueden ser deducidas:

1. Se observaron pequeñas diferencias entre los valores calculados usando la ecuación propuesta y los obtenidos de los resultados de los ensayos.

Estas diferencias provienen del carácter aproximado de la ecuación ya que se desprecia la contribución del acero pasivo de refuerzo. Para elementos estructurales con una cuantía de acero pasivo baja a media, estas diferencias son de muy poca importancia. Mientras que en el caso de una cuantía de acero pasivo alta, estas diferencias tienen cierta importancia. Sin embargo, las diferencias siempre están en el lado de la seguridad.

2. La principal ventaja de la ecuación propuesta radica en su resolución mediante cálculos manuales. Además, puede ser de gran utilidad en el diseño preliminar de vigas continuas de varios vanos e incluso para diseños finales.
3. Se puede observar que el acero pasivo es muy beneficioso sobre la pérdida de pretensado, mejorando el comportamiento a lo largo del tiempo para vigas continuas de hormigón con pretensado interior no adherente. Por lo tanto, es muy conveniente colocar una cantidad mínima de acero pasivo de refuerzo inferior y superior a lo largo de todo el elemento, incluso en zonas de compresión donde el acero de refuerzo no es estrictamente necesario.
4. Se ha demostrado que para la mayoría de los casos, teniendo en cuenta los parámetros de rozamiento sugeridos por los fabricantes, la fricción entre los cables y la vaina tiene poca influencia sobre los momentos flectores y las deformaciones verticales a lo largo del tiempo. Luego, la hipótesis de perfecta no adherencia para el acero de pretensado no adherente puede utilizarse en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Sin embargo, para un elemento con longitudes de vano muy largas, teniendo muchas curvas invertidas con desviaciones angulares grandes, esta hipótesis puede no ser del todo correcta. Por lo tanto, el modelo numérico desarrollado podría ser una herramienta muy poderosa para estudiar y analizar el comportamiento en tales casos.
5. El modelo numérico propuesto fue capaz de replicar el comportamiento de las vigas de hormigón simplemente apoyadas y continuas con pretensado interior no adherente a lo largo del tiempo, independientemente de la historia de carga, el trazado de los cables y la disposición del acero pasivo de refuerzo, mostrando el gran desempeño del enfoque propuesto.
6. La ecuación propuesta y el enfoque de elementos finitos propuesto son capaces de replicar el comportamiento de vigas de hormigón con preten-

sado interior no adherente simplemente apoyadas y continuas a lo largo del tiempo, independientemente de la historia de carga, los perfiles de los tendones y la disposición de la armadura de refuerzo no pretensada.

7. Una de las principales ventajas del algoritmo computacional propuesto es que se basa en los principios básicos de la resistencia de los materiales. Es por ello que además de poder aplicarse en el diseño y el cálculo de las estructuras, puede utilizarse como una herramienta de verificación para formulaciones matemáticas más complejas.
8. La comparación entre los resultados obtenidos de la pérdida de pretensado entre el modelo computacional y los resultados experimentales, permite concluir que el modelo propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente en estado de servicio a lo largo del tiempo tanto para vigas estáticamente determinadas como para vigas continuas. Si bien algunas diferencias fueron observadas para uno de los casos comparados, es oportuno mencionar que para dicho caso las tensiones en el hormigón superan el límite para considerar un comportamiento lineal de la fluencia y por lo tanto no son válidas las hipótesis de linealidad, lo que puede estar dando lugar a tales diferencias.
9. Podemos concluir además que la construcción de la losa del tablero en sitio, según el procedimiento descrito en este trabajo, tiene un efecto beneficioso en lo que respecta a la redistribución de las tensiones en el hormigón en zonas de momentos positivos y por lo tanto en la pérdida del pretensado.
10. El número de elementos en el que se divide la viga influye sobre la precisión de la solución. En particular por el hecho de modelar el cable curvo como segmentos rectos. En este trabajo se han utilizado longitudes de elementos de entre un tercio y un canto de la viga mostrando una convergencia casi absoluta.

Capítulo 6

Conclusiones finales

En este trabajo se ha profundizado en el análisis del comportamiento de estructuras pretensadas con pretensado no adherente, habiendo cumplido con los objetivos previamente establecidos.

Como principales conclusiones del Capítulo 2 podemos mencionar:

1. Se observan diferencias poco significativas en el cálculo de los efectos producidos por las deformaciones de segundo orden de la estructura entre el método propuesto y los métodos de elementos finitos. En otras palabras, los valores de las solicitaciones y de los desplazamientos de la estructura obtenidos mediante el método propuesto son suficientemente precisos comparados con los obtenidos mediante el método de elementos finitos, lo que confirma la validez de las hipótesis adoptadas en el desarrollo del método.
2. El método propuesto mantiene la complejidad y rigurosidad matemática de los métodos analíticos, sin embargo ha sido concebido como un método de aplicación simple. Utiliza los conceptos básicos y más generales desde el punto de vista de la ingeniería estructural lo que permiten al ingeniero visualizar rápidamente cuales son los parámetros que influyen en el diseño.
3. El modelo propuesto utiliza directamente las funciones de estabilidad, lo cual permite trabajar con mayor exactitud, sin la necesidad de realizar aproximaciones y/o divisiones de los elementos entre cada tramo entre tirantes. Es muy simple de programar, incluso a partir del uso de planillas electrónicas como se ha realizado en este trabajo, pues no necesita discretizar la estructura en un número grande de elementos para la con-

vergencia. Es por esto que el método puede ser muy útil en las etapas de diseño preliminar o anteproyecto con un ahorro importante de tiempo en la etapa de diseño. En otras palabras, el método de elementos finitos no presenta en la etapa de anteproyecto mayores ventajas que el método propuesto.

4. En este trabajo también hemos podido establecer que la solución estructural de torre con base articulada es más conveniente desde el punto de vista estructural, ya que, mientras que los desplazamientos máximos presentan diferencias poco significativas, las fuerzas máximas en los elementos estructurales de la torre son menores que para el caso de torre con base empotrada.
5. Si bien el trabajo se ha centrado en las torres de sección triangular equilátera, con un arreglo para los tirantes de tres por nivel, el método propuesto puede extenderse a otro tipo de arreglo de los cables y a otro tipo de formas de sección. Por lo tanto, el método propuesto, inicialmente desarrollado para el análisis de torres atirantadas puede extenderse al análisis de pilones de puentes atirantados.

Como principales conclusiones de los Capítulos 3 a 6 podemos mencionar:

1. Las ecuaciones propuestas y los enfoques de elementos finitos propuestos son capaces de replicar el comportamiento de vigas de hormigón con pretensado interior no adherente simplemente apoyadas y continuas sin losa de hormigón superior de segunda etapa a lo largo del tiempo, independientemente de la historia de carga, los perfiles de los tendones y la disposición de la armadura de refuerzo no pretensada.
2. Para elementos simplemente apoyados de hormigón pretensado con cables rectos, sin losa superior de segunda etapa y acero pasivo longitudinal constante a lo largo de la viga, solo se observan pequeñas diferencias entre la pérdida de pretensado calculada por la fórmula propuesta, la calculada aplicando el Método Paso a Paso y los valores medidos en estudios previos, mientras que para elementos de las mismas características pero con trazados genéricos para los cables, los valores obtenidos con la fórmula propuesta muestran diferencias algo mayores. Por lo tanto, para los propósitos prácticos de la ingeniería estructural, la ecuación simplificada propuesta permite estimar de manera simple y con suficiente precisión la pérdida de pretensado en el acero de pretensado no adherente. Sin

embargo, para aquellos casos que requieren mayor precisión, se puede aplicar la formulación del Método Paso a Paso o del Método del Módulo Efectivo Ajustado por la Edad.

3. La principal ventaja de las ecuaciones propuestas radica en su resolución mediante cálculos manuales. Además, pueden ser de gran utilidad en el diseño preliminar de vigas continuas de varios vanos e incluso para diseños finales.
4. Los modelos numéricos propuestos fueron capaces de replicar el comportamiento de las vigas de hormigón simplemente apoyadas y continuas con pretensado interior no adherente a lo largo del tiempo, independientemente de la historia de carga, el trazado de los cables y la disposición del acero pasivo de refuerzo, mostrando el gran desempeño del enfoque propuesto.
5. Desde el punto de vista del costo computacional, la implementación del SSM tiene un costo más alto que para los métodos basados en el módulo ajustado por la edad. Esto se debe al hecho de que para cada intervalo de tiempo en el SSM, se debe llevar a cabo un procedimiento iterativo para obtener la fuerza de pretensado, que a su vez incluye un ajuste del coeficiente de relajación del acero. Además, obtener las tensiones en el hormigón en un tiempo dado requiere conocer las tensiones en el hormigón en todos los instantes anteriores de tiempo. Sin embargo, este costo computacional más alto se ve compensado por el hecho de que el SSM permite un análisis más directo y preciso cuando la estructura está sujeta a cargas aplicadas a diferentes edades, como es habitual en la construcción de puentes, por ejemplo.
6. Se ha demostrado que para la mayoría de los casos, teniendo en cuenta los parámetros de rozamiento sugeridos por los fabricantes, la fricción entre los cables y la vaina tiene poca influencia sobre los momentos flectores y las deformaciones verticales a lo largo del tiempo. Luego, la hipótesis de perfecta no adherencia para el acero de pretensado no adherente puede utilizarse en la mayoría de las aplicaciones prácticas. Sin embargo, para un elemento con longitudes de vano muy largas, teniendo muchas curvas invertidas con desviaciones angulares grandes, esta hipótesis puede no ser del todo correcta. Por lo tanto, el modelo numérico desarrollado podría ser una herramienta muy poderosa para estudiar y analizar el comportamiento en tales casos.

7. Respecto al modelo computacional propuesto para el análisis de vigas simplemente apoyadas y continuas compuestas por una losa superior construida en segunda etapa, la comparación entre los resultados obtenidos de la pérdida de pretensado entre el modelo y los datos experimentales, permite concluir que el modelo propuesto reproduce satisfactoriamente el comportamiento de viga con pretensado no adherente en estado de servicio a lo largo del tiempo tanto para vigas estáticamente determinadas como para vigas continuas. Si bien algunas diferencias fueron observadas para uno de los casos comparados, es oportuno mencionar que para dicho caso las tensiones en el hormigón superan el límite para considerar un comportamiento lineal de la fluencia y por lo tanto válidas las hipótesis de linealidad, lo que puede estar dando lugar a tales diferencias.
8. Podemos concluir que la construcción de la losa del tablero en sitio, según el procedimiento descrito en este trabajo, tiene un efecto beneficioso en lo que respecta a la redistribución de las tensiones en el hormigón en zonas de momentos positivos y por lo tanto en la pérdida del pretensado.
9. Se puede observar que el acero pasivo es muy beneficioso sobre la pérdida de pretensado y sobre el control de las deformaciones, mejorando el comportamiento a lo largo del tiempo tanto para vigas simplemente apoyadas como para vigas continuas de hormigón con pretensado interior no adherente. Por lo tanto, es muy conveniente colocar una cantidad mínima de acero pasivo de refuerzo inferior y superior a lo largo de todo el elemento, incluso en zonas de compresión donde el acero de refuerzo no es estrictamente necesario.

Bibliografía

- ACI 209.2R-08. (2008). *Guide for Modeling and Calculating Shrinkage and Creep* (inf. téc.).
- ACI 211.1-91. (2009). *Standard practice for selecting proportions for normal, heavyweight, and mass concrete*. (inf. téc.).
- ACI 211.4R-08. (2008). *Guide for selecting proportions for high-strength concrete using Portland cement and other cementitious materials*. (inf. téc.).
- Alkhairi, F. y Naaman, A. (1993). Analysis of beams prestressed with unbonded internal or external tendons. *Journal of Structural Engineering*, 119(9), 2680-2700.
- Apostol, T. (1992). *Calculus, Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal. Volumen 1*. (Segunda ed).
- Ariyawardena, N. y Ghali, A. (2002). Prestressing with Unbonded Internal or External Tendons: Analysis and Computer Model. *Journal of Structural Engineering*, 128(12), 1493-1501. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2002\)128:12\(1493\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2002)128:12(1493))
- Barbieri, R. A., de Paula Simões Lopes Gastal, F. y Filho, A. C. (2006). Numerical Model for the Analysis of Unbonded Prestressed Members. *Journal of Structural Engineering*, 132(1), 34-42. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2006\)132:1\(34\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2006)132:1(34))
- Bazant, Z. P. y Baweja, S. (1995). No Title Creep and shrinkage prediction model for analysis and design of concrete structures – model B3. *Materials and Structures*, 28, 357-365.
- Bazant, Z. P. y Najjar, L. J. (1973). Comparison of Approximate Linear Methods for Concrete Creep. *ASCE J Struct Div*, 99(ST9), 1851-1874. <https://doi.org/10.1061/jsdeag.0003602>

- Bazant, Z. (1972). Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method. *ACI Journal Proceedings*, 69(4), 212-217. <https://doi.org/10.14359/11265>
- Bazant, Z. (1982). Mathematical models for creep and shrinkage of concrete. En In Z.P. BaZant and F.H. Wittmann (eds.) (Ed.), *Creep and Shrinkage in Concrete Structures* (pp. 163-256). Wiley, London.
- Bažant, Z. P. y Wu, S. T. (1974). Rate-type creep law of aging concrete based on maxwell chain. *Matériaux et Constructions*, 7(1), 45-60. <https://doi.org/10.1007/BF02482679>
- Bažant, Z. P., Hubler, M. H. y Jirásek, M. (2013). Improved Estimation of Long-Term Relaxation Function from Compliance Function of Aging Concrete. *Journal of Engineering Mechanics*, 139(2), 146-152. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)em.1943-7889.0000339](https://doi.org/10.1061/(asce)em.1943-7889.0000339)
- Ben Kahla, N. (1995). Equivalent beam-column analysis of guyed towers. *Computers and Structures*, 55(4), 631-645. [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)00489-P](https://doi.org/10.1016/0045-7949(94)00489-P)
- Branson, D. E. y Trost, H. (1982). Unified Procedures for Predicting the Deflection and Centroidal Axis Location of Partially Cracked Nonprestressed and Prestressed Concrete Members. *Journal of The American Concrete Institute*, 79(2), 119-130. <https://doi.org/10.14359/10887>
- Breckenridge, R. A. y Bugg, S. L. (1964). Effects of Long-Time Loads on Prestressed Concrete Beams. *PCI Journal*, 9(6), 75-89. <https://doi.org/10.15554/pcij.12011964.75.89>
- Burns, N. H., Helwig, T. y Tsuijimoto, T. (1991). Effective prestress force in continuous post-tensioned beams with unbonded tendons. *ACI Structural Journal*, 88(1), 84-90. <https://doi.org/10.14359/2780>
- Calavera, J. (1999). *Proyecto y cálculo de estructura de hormigón. Tomo 2.* (Intemac Ed).
- Carrasco, A., Parnas, V. y Rodriguez, P. (2021). Guy tension influence on the structural behavior of a guyed mast. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 53(2), 111-116.
- CEB-FIP. (1995). *Design manual on cracking and deformations.* (inf. téc.). Comité Euro-International du Béton (CEB).
- CEB-FIP. (2010). *Structural concrete: textbook on behaviour, design and performance, vol. 2. CEB-FIP Bulletin no. 52.* (inf. téc.). International Federation for Structural Concrete (FIB). Lausanne, Switzerland.

- Cohen, E. y H. Perrin, H. (1957). Design of multi-level guyed towers: structural analysis. *Journal of Structural Division, ASCE*, 83, 1-29.
- Cook, N., Park, R. y Yong, P. (1981). Flexural strength of prestressed concrete members with unbonded tendons. *PCI Journal*, (November-December), 53-81.
- Dario Aristizabal-Ochoa, J. (2008). Slope-deflection equations for stability and second-order analysis of Timoshenko beam-column structures with semi-rigid connections. *Engineering Structures*, 30(9), 2517-27.
- Dilger, W. y Neville, A. (1971). Method of creep analysis of structural members. *ACI SP27-17*, 17, 349-372.
- Dilger, W. H. (1982). Creep Analysis of Prestressed Concrete Structures Using Creep-Transformed Section Properties. *Journal - Prestressed Concrete Institute*, 27(1), 98-118. <https://doi.org/10.15554/pcij.01011982.98.119>
- Du, J. S., Au, F. T., Chan, E. K. y Liu, L. (2016). Deflection of unbonded partially prestressed concrete continuous beams. *Engineering Structures*, 118, 89-96. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2016.03.040>
- England, G. y Illston, J. (1965). *Methods of computing stress in concrete from a history of measured strain*. (Civil Engi).
- Ezra, G. (1962). Analysis of high guyed towers. *Journal of Structural Division, ASCE*, 92, 169-198.
- Faber, O. (1927). Plastic yield, shrinkage and other problems of concrete and their effect on design. *Minutes of the Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, 225, 27-73.
- Fuente Antequera, A., Aguado de Cea, A. y Molins Borrell, C. (2008). Modelo numérico para el análisis no lineal de secciones prefabricadas construidas evolutivamente. *Hormigón y Acero*, 57(247), 69-87.
- Galambos, T. V. y Surovek, A. E. (2008). *Structural stability of steel and application for structural engineers*. (I. J. Wiley and Sons, Ed.).
- Gatti, P. (2005). *Probability theory and mathematical statistic for engineers*. (S. Press, Ed.).
- Gauvreau, P. (1992). *Load Tests of Concrete Girders Prestressed with Unbonded Tendons*.
- Gauvreau, P. (1993). *Ultimate limit state of concrete girders prestressed with unbonded tendons*.
- Gere, J. M. (2006). *Mecánica de Materiales*. (Thomson, Ed.; Sexta edic).

- Ghali, A., Favre, R. y Eldbadry, M. (2002). *Concrete structures: stresses and deformation* (New York: Spon Press, Ed.; 3rd ed.).
- Ghali, A. y Neville, A. (1978). Structural analysis, a unified classical and matrix approach. [https://doi.org/10.1016/0160-9327\(78\)90009-1](https://doi.org/10.1016/0160-9327(78)90009-1)
- Gilbert, R. I. y Ranzi, G. (2010). *Time-Dependent Behaviour of Concrete Structures*. <https://doi.org/10.1201/9781482288711>
- Gimsing, N. J. y Georgakis, C. T. (2012). *Cable supported bridges: concept and design*. (I. J. Wiley and Sons, Ed.; Third edit).
- Glanville, W. (1930). Studies in reinforced concrete – III, The creep or flow of concrete under load. *Building research technical paper no. 12, Department of Scientific and Industrial Research, London*.
- Guo, T., Chen, Z., Lu, S. y Yao, R. (2018). Monitoring and analysis of long-term prestress losses in post-tensioned concrete beams. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*, 122(July), 573-581. <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2017.07.057>
- Harajli, H. (1992). Service load behavior of concrete members prestressed with unbonded tendons. *ASCE, Journal of Structural Engineering*, 118(9), 2569-89.
- Harajli, M. H. (2011). Proposed Modification of AASHTO-LRFD for Computing Stress in Unbonded Tendons at Ultimate. *Journal of Bridge Engineering*, 16(6), 828-838. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)be.1943-5592.0000183](https://doi.org/10.1061/(asce)be.1943-5592.0000183)
- Harajli, M. y Kanj, M. (1991). Ultimate flexural strength of concrete members prestressed with unbonded tendons. *ACI Structural Journal*, 88(6), 663-73.
- Harajli, M. H. (2012). Tendon stress at ultimate in continuous unbonded post-tensioned members: Proposed modification of ACI 318, Eq. (18-4) and (18-5). *ACI Structural Journal*, 109(2), 183-192. <https://doi.org/10.14359/51683629>
- He, Z.-Q. y Liu, Z. (2010). Stresses in External and Internal Unbonded Tendons: Unified Methodology and Design Equations. *Journal of Structural Engineering*, 136(9), 1055-1065. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)st.1943-541x.0000202](https://doi.org/10.1061/(asce)st.1943-541x.0000202)
- Hilderbrand, F. (1987). *Introduction to numerical analysis* (I. Dover Publications, Ed.; Second edi).

- Hue, F. y Ontañón, G. (1998). Puente sobre el río Guadalete de tablero de vigas pretensadas prefabricadas de hormigón de alta resistencia. *Hormigón y Acero*, 207, 67-81.
- International Federation for Structural Concrete (FIB). (1978). *Model Code for Concrete Structures* (inf. téc.). Federation Internationale du Béton.
- Irvine, H. (1981). *Cable Structures*. (M. Press, Ed.).
- Irvine, H. M. y O'Sullivan, M. (1979). Elastic stability of simple guyed towers. *Applied Ocean Research*, 1(4), 203-207.
- Lan, C., Zhou, Z. y Ou, J. (2013). Monitoring of structural prestress loss in RC beams by inner distributed Brillouin and fiber Bragg grating sensors on a single optical fiber. *Structural Control and Health Monitoring*. <https://doi.org/DOI:10.1002/stc.1563>
- Lee, D. H. y Kim, K. S. (2011). Flexural strength of prestressed concrete members with unbonded tendons. *Structural Engineering and Mechanics*, 38(5), 675-696. <https://doi.org/10.12989/sem.2011.38.5.675>
- Lin, F. J., Glauser, E. C. y Johnston, B. J. (1960). Behavior of laced and battened structural members. *Journal of Structural Division ASCE.*, 123(5), 1377-401.
- Lin, T. (1963). Load balancing method for design and analysis of prestressed concrete structures. *Journal of the American Concrete Institute*, (June), 719-42.
- Llorente Zurdo, M. P. (2016). *El pretensado: la disolución de las tipologías constructivas en la arquitectura del Siglo XX*. (Tesis doctoral). Universidad Politécnica de Madrid.
- Lou, T., Lopes, S. M. y Lopes, A. V. (2013). Nonlinear and time-dependent analysis of continuous unbonded prestressed concrete beams. *Computers and Structures*, 119, 166-176. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2012.12.014>
- Manisekar, R. y Senthil, R. (2006). Stress at Ultimate in Unbonded Post Tensioning Tendons for Simply Supported Beams.pdf. *Advances in Structural Engineering*, 9(3), 321-335.
- Margariti, G. y Gantes, C. (2015). Linear and nonlinear buckling response and imperfection sensitivity of cable-stayed masts and pylons. *Structural Engineering International: Journal of the International Association for Bridge and Structural Engineering (IABSE)*, 25(1), 43-49. <https://doi.org/10.2749/101686614X14043795570255>

- Marí Bernat, A. (1995). Análisis de puentes continuos de hormigón de luces medias con sección evolutiva.pdf. *Rev. Cemento-Hormigón. IECA*, 866-890.
- Marí Bernat, A., López, I. V. y Fragué, J. M. (1996). Evaluación de flecha y estados tensodeformacionales en servicio, en puentes isostáticos de vigas prefabricadas de hormigón pretensado. *Hormigón y Acero*, 202, 25-58.
- Martínez Calzón, J. (1991). Puentes compuestos, conitnuos, con pretenado exento. Puentes sobre el río Turia, en Valencia. *Hormigón y Acero*, 179, 81-88.
- Mattock, A., Yamazaki, J. y Kattula, B. (1971). Comparative study of prestressed concrete beams, with and without bond. *PCI Journal*, 116(25).
- McHenry, D. (1943). A new aspect of creep in concrete and its application to design. *ASTM Proc*, 43.
- Menn C. (1990). *Prestressed concrete bridges*.
- Model Code 2010. (2012). *Model Code 2010, vol. 1. CEB-FIP Bulletin no. 65*. (inf. téc.). International Federation for Structural Concrete (FIB). Lausanne, Switzerland.
- Moon, J. y Burns, N. (1997). Flexural behavior of members with unbonded tendons I: theory. *Journal of the Structural Engineering*, 123, 1087-94.
- Moreira, L., Sousa, J. y Parente, E. (2018). Nonlinear finite element simulation of unbonded prestressed concrete beams. *Engineering Structures*, 170, 167-77.
- Naaman, A. y Alkhairi, F. (1991a). Stress at ultimate in unbonded post-tensioning tendons: Part 1 – Evaluation of the state-of-the-art. *ACI Structural Journal*, 81(5), 641-51.
- Naaman, A. y Alkhairi, F. (1991b). Stress at ultimate in unbonded post-tensioning tendons: Part 2 - Proposed methodology. *ACI Structural Journal*, 88(6), 683-92.
- Neville, A. M. (1983). Creep of plain and structural concrete, 361. https://openlibrary.org/books/OL3488374M/Creep_of_plain_and_structural_concrete
- Neville, A. (1970). *Creep of concrete: Plain reinforced and prestressed* (N.-H. P. Company, Ed.).
- Oñate, E. (2009). *Structural analysis with the finite element method. Linear statics. Volume 1: basis and solids*. Springer.

- Oñate, E. (2013). *Structural analysis with the finite element method. Linear statics. Volume 2: beams, plates and shells*. Springer.
- Páez, P. M. y Sensale, B. (2017). Cálculo de torres atirantadas sin utilizar elementos finitos. *Hormigón y Acero*, 68(283), 229-240. <https://doi.org/10.1016/j.hya.2017.05.012>
- Páez, P. y Sensale, B. (2017). Analysis of guyed masts by the stability functions based on the Timoshenko beam-column. *Engineering Structures*, 152, 597-606. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2017.09.036>
- Pisani, M. A. y Nicoli, E. (1996). Beams prestressed with unbonded tendons at ultimate. *Canadian Journal of Civil Engineering*, 23(6), 1220-1230. <https://doi.org/10.1139/196-931>
- Rivas, I., Pérez, G. y Barlek, J. (2005). Análisis número y experimental de vigas compuestas para puentes bajo cargas repetitivas. *Hormigón y Acero*, 236, 57-60.
- Romstad, K. y Chiesa, M. (1997). Approximate analysis of guyed towers. *ASCE, Journal of Structural Engineering*.
- Ross, A. (1958). Creep of concrete under variable stress. *Journal of The American Concrete Institute*, 54.
- Ross, S. (2007). *Introducción a la Estadística* (E. Reverté., Ed.).
- Rüsh, H., Jungwirth, D. y Hilsdorf, H. (1983). *Creep and Shrinkage: Their Effect on the Behavior of Concrete Structures* (N. Y. Springer-Verlag, Ed.).
- Sánchez Pérez, M., Pérez Caldentey, A. y Corres Peiretti, H. (2004). Comportamiento en rotura y en servicio de puentes de vigas prefabricadas in-situ con continuidad de negativos. *Hormigón y Acero*, 233, 7-22.
- Shapiro, S. y Wilk, M. B. (1965). An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika*, 52, 591-611.
- Strasky, J. (2011). *Stress ribbon and cable-supported pedestrian bridges* (I. Publishing, Ed.; Second edi).
- TIA 222-G. (2006). *TIA 222-G. Structural Standard for Antenna: Supporting Structures and Antennas*, Telecommunications Industry Association (inf. téc.). Arlington VA.
- Timoshenko, S. (1921). On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars. *Philosophical Magazine*, 41, 744-746.

- Timoshenko, S. (1957). *Resistencia de materiales. Primera parte: teoría elemental y problemas*. (E. .-. C. S.A., Ed.; Traducción).
- Timoshenko, S. y Gere, J. (1961). *Theory of elastic stability*. (McGraw-Hill, Ed.; Second Edi).
- Torres, L., López-Almansa, F. y Bozzo, L. M. (2004). Tension-Stiffening Model for Cracked Flexural Concrete Members. *Journal of Structural Engineering*, 130(8), 1242-1251. [https://doi.org/10.1061/\(asce\)0733-9445\(2004\)130:8\(1242\)](https://doi.org/10.1061/(asce)0733-9445(2004)130:8(1242))
- UNE-EN 1992-1-1. (2016). *Design of concrete structures – Part 1-1: General rules and rules for buildings*. (UNE-EN 1992-1-1:2013/A1:2015. Eurocode 2, Ed.; inf. téc.). CEN.
- UNE-EN 1993-3-1. (2013). *Design of steel structures – Part 3-1: Tower, masts and chimneys – Tower and masts*. (inf. téc.).
- Vu, N. A., Castel, A. y François, R. (2010). Response of post-tensioned concrete beams with unbonded tendons including serviceability and ultimate state. *Engineering Structures*, 32(2), 556-569. <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.11.001>
- Wahba, Y. M. F., Madugula, M. K. S. y Monforton, G. R. (1998). Evaluation of non-linear analysis of guyed antenna towers. 68, 207-212.
- Wang, C., Reddy, J. y Lee, K. (2000). *Shear deformable beams and plates: relationships with classical solutions*. (E. S. bibinitperiod T. Oxford, Ed.).
- Wang, Y. (1967). Método directo para calcular secciones compuestas, en hormigón pretensado. *Hormigón y Acero*, 85, 7-21.
- Whitney, C. (1932). Plain and reinforced concrete arches. *ACI Journal*, 28, 479-519.
- Williamson, R. A. y Margolin, M. N. (1966). Shear effects in design of guyed towers. *Journal of Structural Division, ASCE.*, 92, 213-233.
- Xuekang Tao y Gongchen Du. (1985). Ultimate Stress of Unbonded Tendons in Partially Prestressed Concrete Beams. *Journal - Prestressed Concrete Institute*, 30(6), 72-91.
- Yoo, C. H. y Lee, S. C. (2011). *Stability of structures: principles and applications*. Elsevier.
- Youakim, S. A., Ghali, A., Hida, S. E. y Karbhari, V. M. (2007). Prediction of long-term prestress losses. *PCI Journal*, 52(2), 116-130. <https://doi.org/10.15554/pcij.03012007.116.130>

Ziegler, H. (1982). Arguments for and against Engesser's buckling formulas.
Ingenieur Archiv, 52, 105-13.

APÉNDICES

Apéndice 1

Teorías de vigas y de vigas-columna: Euler-Bernoulli y Timoshenko

1.1. Introducción

La denominada “teoría de vigas de Euler-Bernoulli”, además de ser la más simple de todas la teorías de vigas, es la más utilizada dentro de los problemas referentes a la Ingeniería Estructural (C. Wang et al. 2000). La teoría de vigas de Euler-Bernoulli está basada en las siguientes hipótesis:

1. El material presenta un comportamiento elástico lineal.
2. Los desplazamientos verticales de todos los puntos de una sección transversal son pequeños e iguales a los del eje baricéntrico de la viga.
3. El desplazamiento de la viga en la dirección transversal al plano que la contiene es nulo.
4. Se desprecian los desplazamientos de los puntos del eje baricéntrico en su propia dirección.
5. La tensiones transversales son mucho más pequeñas que las tensiones normales y por lo tanto pueden despreciarse.
6. Las secciones normales al eje de la viga, permanecen planas y normales al eje baricéntrico de la viga, después de la deformación.

La hipótesis n.^o 6 constituye la base fundamental de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. Dicha teoría modela adecuadamente el comportamiento de vigas en flexión siempre que la longitud de ésta sea muy superior a su canto.

Sin embargo, cuando la longitud de las vigas es del orden de su canto o

siendo éstas de elevada relación longitud - canto presentan poca rigidez frente a los esfuerzos cortantes, la deformación transversal debidas a los esfuerzos cortantes dejan de ser despreciables y la hipótesis n.º 6 deja de ser válida. Las vigas y/o columnas reticulares y/o empresilladas y las vigas de alma aligerada, son ejemplos donde no pueden despreciarse las deformaciones por fuerza cortante.

La primera teoría de vigas que tuvo en cuenta la deformación por esfuerzo cortante fue desarrollada por Engesser (C. Wang et al. 2000; Ziegler, 1982) y fue conocida como “teoría de la deformación por corte de primer orden”. Luego siguieron los estudios realizados por Timoshenko (1921) dando lugar a la denominada “teoría de vigas de Timoshenko”, también conocida como “teoría de Engesser-Timoshenko”.

La teoría de vigas de Timoshenko reemplaza la hipótesis n.º 6 de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli de la siguiente manera:

- Bajo la acción del momento flector y la fuerza cortante, las secciones planas y perpendiculares al eje de la viga antes de la deformación, permanecen planas pero no necesariamente perpendiculares al eje baricéntrico de la viga después de la deformación.

La teoría de vigas de Timoshenko considera un giro adicional de la sección debido a la fuerza cortante. Bajo esta hipótesis se asume que la distribución de las tensiones de corte es constantes a lo largo del canto de la sección de la viga. Por lo tanto es necesario incorporar un factor corrector para tener en cuenta la correcta distribución de las tensiones de corte en la sección transversal.

Se denominan vigas - columnas a aquellos miembros que están sometidos a una fuerza axial de compresión y a un momento flector. La mayoría de los miembros sometidos a fuerzas axiales de compresión en las aplicaciones prácticas de la ingeniería estructural se clasifican como vigas - columnas.

La teoría clásica de pandeo en columnas está basada en las hipótesis de Euler-Bernoulli (Gere, 2006). Sin embargo, cuando los miembros poseen baja rigidez a los esfuerzos cortantes, la carga crítica de pandeo y/o de los efectos de segundo orden, deben ser analizados considerando la deformación por fuerza cortante.

Dos diferentes formulaciones han sido propuestas para analizar la influencia de la fuerza cortante sobre la carga crítica de pandeo y el efecto del segundo orden en vigas - columnas en régimen elástico, una fue desarrollada por Enges-

ser y la otra por Haringx (Ziegler, 1982). El modelo de Haringx fue discutido y aplicado por Timoshenko y Gere y es conocido como “el enfoque modificado” (“the modified approach”) (Timoshenko y Gere, 1961).

1.2. Teoría de vigas de Euler-Bernoulli

Sea un sistema de ejes coordenados (x, y, z) tales que el eje coordenado x es tomado en la dirección del eje longitudinal de la viga, el eje coordenado z es tomado en la dirección de su canto y el eje coordenado y es tomado en la dirección de su ancho, Figura (1.1). La viga, como un elemento lineal, está contenida en el plano (x, z) y el eje de flexión de la viga es perpendicular a dicho plano (respecto del eje y). De acuerdo a las hipótesis de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli, el campo de desplazamientos de la viga (u, v, w) en la dirección de los ejes coordenados (x, y, z) , son funciones de x y z (C. Wang et al. 2000). Luego, el campo de desplazamientos de los puntos de la viga puede escribirse de acuerdo a la Ecuación (1.1):

$$u(x, z) = -z \cdot \frac{dw_0(x)}{dx} \tag{1.1}$$

$$w(x, z) = w_0(x)$$

en donde $w_0(x)$ es el desplazamiento vertical de los puntos pertenecientes al eje baricéntrico de la viga.

Supongamos que sobre la viga es aplicada una carga transversal $q(x)$ por unidad de longitud y ninguna otra carga es aplicada. Aplicando equilibrio en un elemento diferencial de viga, obtenemos la ecuación de equilibrio de la viga de Euler-Bernoulli, Ecuación (1.2) (C. Wang et al. 2000):

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} = \frac{dV(x)}{dx} = -q(x) \tag{1.2}$$

en donde $M(x)$ y $V(x)$ son el momento flector y el cortante interno en la coordenada x (ver Figura (1.1)).

Teniendo en cuenta la linealidad del material y la relación lineal entre deformaciones unitarias y desplazamientos, obtenemos la relación entre el momento

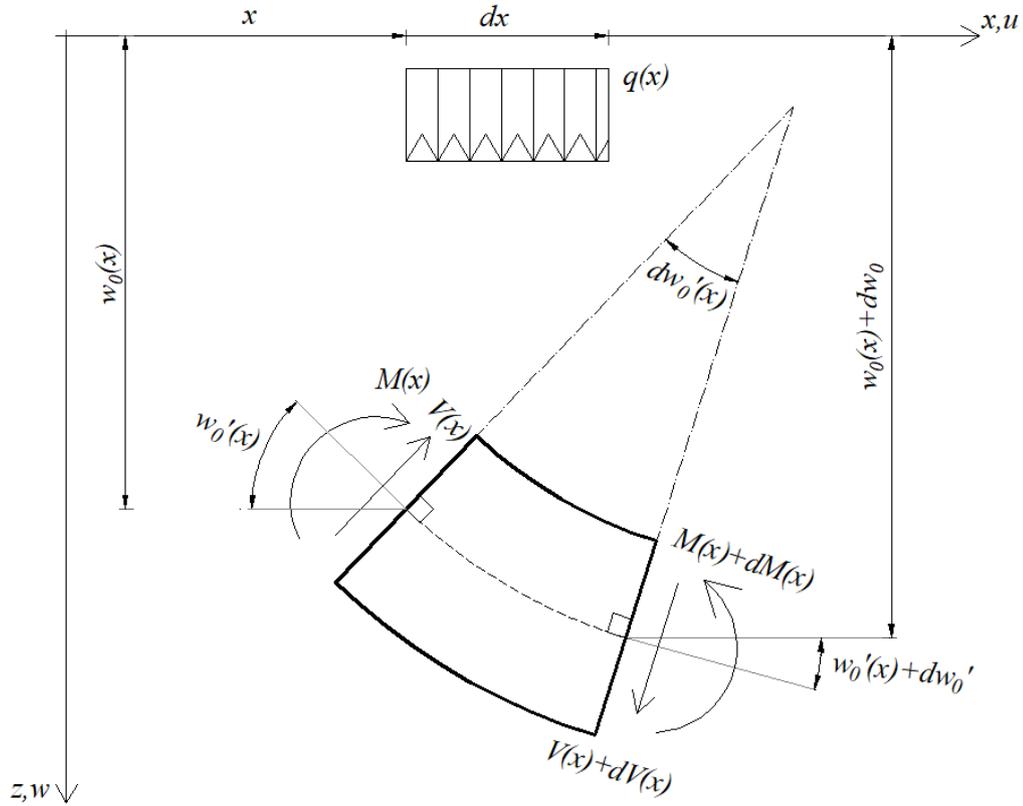


Figura 1.1: Desplazamientos, giros y fuerzas internas en un elemento de viga de Euler-Bernoulli.

flector y el desplazamiento vertical, Ecuación (1.3):

$$M(x) = -E \cdot I_y \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} \quad (1.3)$$

en donde E es el módulo de elasticidad del material e I_y es el momento de inercia de la sección respecto al eje baricéntrico y .

1.3. Teoría de vigas de Timoshenko

De acuerdo a las hipótesis de la teoría de vigas de Timoshenko, la sección transversal de la viga rota un ángulo $\phi(x)$. Éste puede obtenerse como la diferencia entre el ángulo que forma la curva elástica $dw_0(x)/dx$ y ángulo debido a la deformación por fuerza cortante $\gamma(x)$, Figura (1.2). Luego, el campo de desplazamientos de los puntos de la viga puede escribirse de acuerdo a la

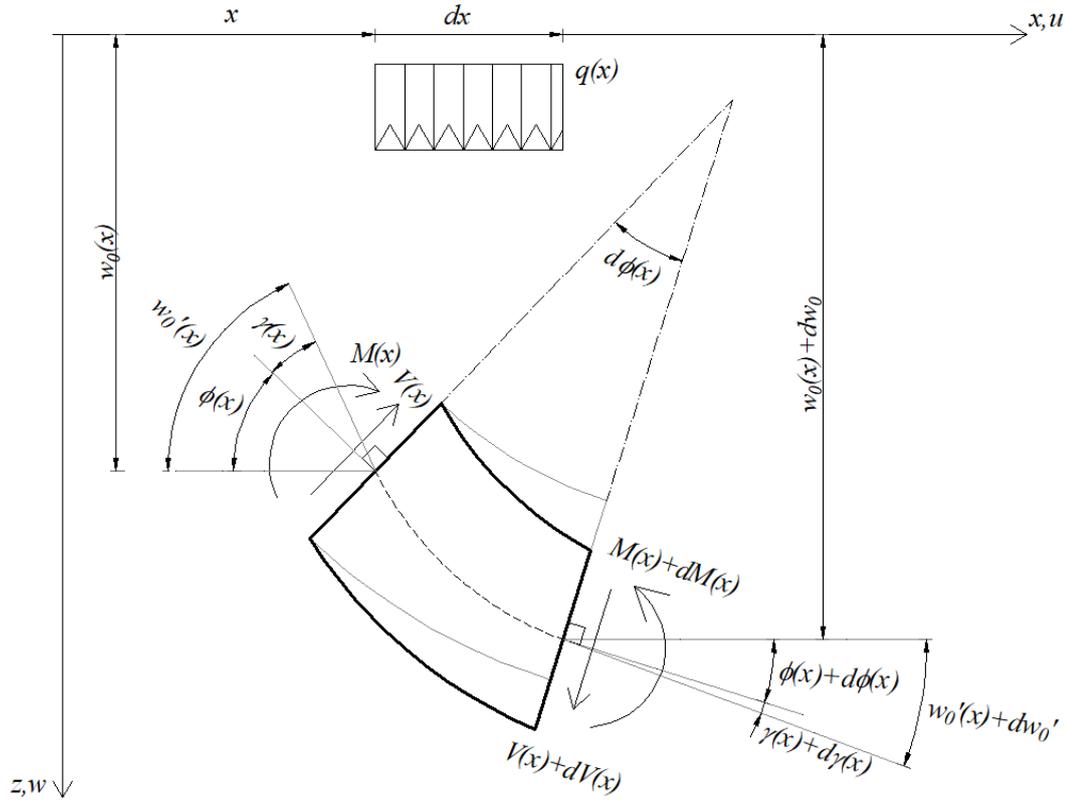


Figura 1.2: Desplazamientos, giros y fuerzas internas en un elemento de viga de Timoshenko.

Ecuación (1.4) (C. Wang et al. 2000):

$$u(x, z) = -z \cdot \phi(x) = -z \cdot \left(\frac{dw_0(x)}{dx} - \gamma(x) \right) \quad (1.4)$$

$$w(x, z) = w_0(x)$$

Teniendo en cuenta la linealidad del material y la relación lineal entre deformaciones unitarias y desplazamientos, obtenemos la relación entre las sollicitaciones internas y las deformaciones, Ecuación (1.5) y (1.6):

$$M(x) = -E \cdot I_y \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (1.5)$$

$$V(x) = G \cdot \Omega_r \left(\frac{dw_0(x)}{dx} - \phi(x) \right) \quad (1.6)$$

en donde Ω_r es la sección reducida, cuya expresión viene dada por la Ecuación

(1.7) (Timoshenko, 1957):

$$\frac{1}{\Omega_r} = \frac{1}{I_y^2} \int \frac{\mu(y, z)^2}{b(z)} dz \quad (1.7)$$

siendo G el módulo de deformación por cortante, $\mu(y, z)$ el momento estático de primer orden respecto al eje baricéntrico y $b(z)$ el ancho de la sección.

Luego, planteando equilibrio en un elemento diferencial de viga, obtenemos las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el problema de la viga de Timoshenko, Ecuaciones (1.8) y (1.9):

$$G \cdot \Omega_r \left(\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} - \frac{d\phi(x)}{dx} \right) = -q(x) \quad (1.8)$$

$$\frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = -\frac{G \cdot \Omega_r}{E \cdot I_y} \left(\frac{dw_0(x)}{dx} - \phi(x) \right) \quad (1.9)$$

1.4. Análisis de la viga-columna bajo las hipótesis de Euler-Bernoulli

Consideremos un elemento prismático e isostático de longitud L que cumple las hipótesis de la teoría de vigas de Euler-Bernoulli. El elemento está sujeto a una fuerza axial de compresión P , a los momentos extremos M_A y M_B , a los descensos de los apoyos δ_A y δ_B , y a una carga transversal externa $q(x)$, Figura (1.3). La ecuación diferencial que gobierna el problema viene dada por la Ecuación (1.10) (Galambos y Surovek, 2008):

$$\frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \frac{q(x)}{EI_y} \quad (1.10)$$

en donde k viene dada por la Ecuación (1.11):

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI_y}} \quad (1.11)$$

Si la carga transversal es uniformemente distribuida, esto es $q(x) = q$, la solución particular de la Ecuación diferencial (1.10) viene dada por la Ecuación

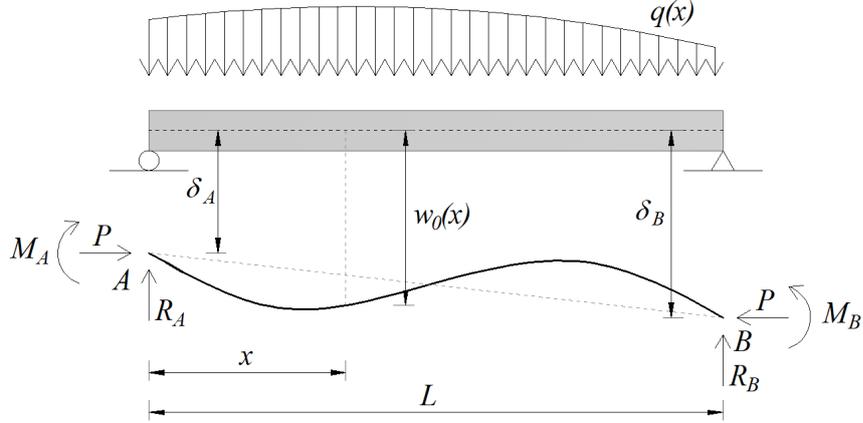


Figura 1.3: Viga - columna isostática: configuración deformada bajo la acción de cargas externas.

(1.12),

$$w_P(x) = \tilde{A} + \tilde{B}x + \tilde{C}x^2 + \tilde{D}x^3 \quad (1.12)$$

en donde \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{C} y \tilde{D} son constantes de integración. Operando obtenemos,

$$\tilde{C} = \frac{q}{2k^2EI_y} \quad (1.13)$$

$$\tilde{D} = 0$$

Luego, la solución de la ecuación diferencial que gobierna el problema viene dada por la Ecuación (1.14):

$$w_0(x) = \hat{A} + \hat{B}x + \hat{C} \sin kx + \hat{D} \cos kx + \frac{q}{2k^2EI_y}x^2 \quad (1.14)$$

y las constantes de integración \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} y \hat{D} quedan definidas por las condiciones de borde dadas en la Ecuación (1.15):

$$w_0(0) = \delta_A \quad w_0(L) = \delta_B \quad (1.15)$$

$$w_0''(0) = -\frac{M_A}{EI_y}; \quad w_0''(L) = -\frac{M_B}{EI_y};$$

Operando se obtienen las expresiones de las constantes de integración \hat{A} ,

\hat{B} , \hat{C} y \hat{D} , Ecuación (1.16):

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \delta_A - \frac{M_A}{k^2 EI_y} - \frac{q}{k^4 EI_y} \\ \hat{B} &= \frac{\delta_B - \delta_A}{L} + \frac{M_A}{Lk^2 EI_y} - \frac{M_B}{Lk^2 EI_y} - \frac{qL}{2k^2 EI_y} \\ \hat{C} &= \frac{q}{k^4 EI_y} \left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) - \frac{M_A \cos(kL)}{k^4 EI_y \sin(kL)} + \frac{M_B}{k^4 EI_y \sin(kL)} \\ \hat{D} &= \frac{M_A}{k^2 EI_y} + \frac{q}{k^4 EI_y}\end{aligned}\tag{1.16}$$

Reordenando los términos, la ecuación de la elástica queda definida por la Ecuación (1.17),

$$\begin{aligned}w_0(x) &= \left(\delta_A - \frac{M_A}{k^2 EI_y} \right) + \left(\frac{\delta_B - \delta_A}{L} + \frac{M_A - M_B}{Lk^2 EI_y} \right) x + \dots \\ &\dots + \left(\frac{M_B - M_A \cos(kL)}{k^2 EI_y \sin(kL)} \right) \sin(kx) + \frac{M_A}{k^2 EI_y} \cos(kx) + \dots \\ &\dots + \frac{qL^4}{(kL)^4 EI_y} \left[\left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kx) + \cos(kx) \right] + \dots \\ &\dots + \frac{qL^4}{(kL)^4 EI_y} \left[\frac{(kL)^2}{2} \left(\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{x}{L} \right) - 1 \right]\end{aligned}\tag{1.17}$$

La expresión del momento flector viene dada por la Ecuación (1.18),

$$\begin{aligned}M(x) &= \frac{qL^4}{(kL)^4} \left[\left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kx) + \cos(kx) - 1 \right] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\sin(kL)} [M_B - M_A \cos(kL)] \sin(kx) + \dots \\ &\dots + M_A \cos(kx)\end{aligned}\tag{1.18}$$

1.5. Análisis de la viga-columna bajo las hipótesis de Haringx-Timoshenko

Sea la viga-columna de longitud de vano L sometida a una carga externa arbitraria $q(x)$ y a los momentos de extremos M_A y M_B como se muestra en

la Figura (1.4). Supongamos que la viga - columna cumple con las hipótesis de la teoría de Haringx - Timoshenko.

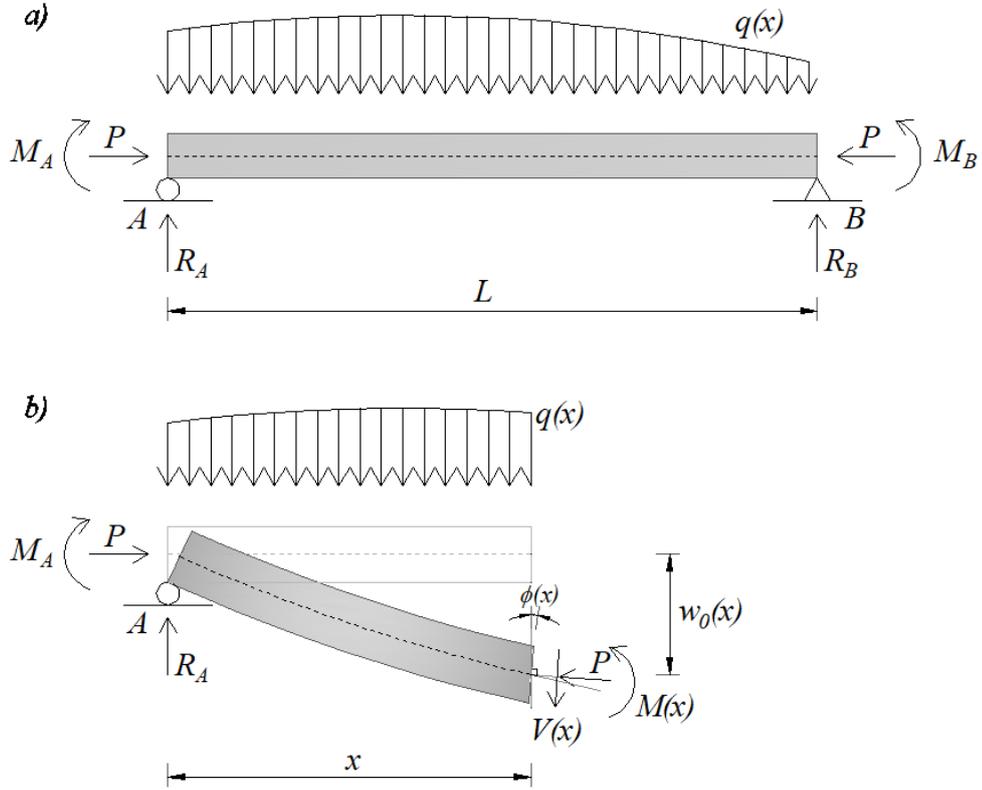


Figura 1.4: Viga - columna de Haringx - Timoshenko. a) Cargas externas; b) Diagrama de cuerpo libre y fuerzas internas.

Planteando el equilibrio del cuerpo libre de la Figura (1.4) en la configuración deformada a una distancia x del extremo A (Timoshenko y Gere, 1961), obtenemos las relaciones para las fuerzas internas, Ecuación (1.19):

$$N(x) = -P + V(x)\phi \approx -P$$

$$V(x) = (1 + \phi^2)^{-1} (V_S(x) + P\phi(x)) \approx V_S(x) + P\phi(x) \quad (1.19)$$

$$M(x) = M_S(x) + Pw_0(x)$$

donde $N(x)$ es la fuerza directa en la sección y M_S y V_S son el momento flector y la fuerza resultante vertical debidos a la carga externa $q(x)$ y a los momentos de extremo, respectivamente.

Teniendo en cuenta las Ecuaciones (1.5), (1.6) y (1.19) obtenemos la ecuación

ción diferencial que gobierna el problema, Ecuación (1.20),

$$\frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} + \frac{P}{\psi EI_y} w_0(x) = -\frac{M_S(x)}{\psi EI_y} + \frac{1}{G\Omega_r} \frac{dV_S(s)}{dx} \quad (1.20)$$

en donde ψ se denomina factor de reducción por cortante y su expresión viene dada por la Ecuación (1.21),

$$\psi = \left(1 + \frac{P}{G\Omega_r}\right)^{-1} \quad (1.21)$$

Si la carga $q(x)$ es uniformemente distribuida, derivando dos veces la Ecuación (1.20), la ecuación diferencial que gobierna el problema puede escribirse como la Ecuación (1.22),

$$\frac{d^4 w_0(x)}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2} = \frac{q}{\psi EI_y} \quad (1.22)$$

donde k viene dado por la Ecuación (1.23),

$$k = \sqrt{\left| \frac{P}{\psi EI_y} \right|} \quad (1.23)$$

Consideremos una viga - columna como la de la Figura (1.3) pero cuyo comportamiento responda a las hipótesis de Haringx - Timoshenko. Observando la analogía entre las Ecuaciones (1.10) y (1.22) podemos deducir la solución de la ecuación diferencial de la Ecuación (1.22), Ecuación (1.24):

$$\begin{aligned} w_0(x) = & \left(\delta_A - \frac{M_A}{k^2 \psi EI_y} \right) + \left(\frac{\delta_B - \delta_A}{L} + \frac{M_A - M_B}{L k^2 \psi EI_y} \right) x + \dots \\ & \dots + \left(\frac{M_B - M_A \cos(kL)}{k^2 \psi EI_y \sin(kL)} \right) \sin(kx) + \frac{M_A}{k^2 \psi EI_y} \cos(kx) + \dots \\ & \dots + \frac{qL^4}{(kL)^4 \psi^2 EI_y} \left[\left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kx) + \cos(kx) \right] + \dots \\ & \dots + \frac{qL^4}{(kL)^4 \psi^2 EI_y} \left[\frac{(kL)^2}{2} \psi \left(\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{x}{L} \right) - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.24)$$

La expresión del momento flector viene dada por la Ecuación (1.25),

$$\begin{aligned}
 M(x) = & \frac{qL^2}{\psi(kL)^2} \left[\left(\frac{1 - \cos(kL)}{\sin(kL)} \right) \sin(kx) + \cos(kx) - 1 \right] + \dots \\
 & \dots + \frac{1}{\sin(kL)} [M_B - M_A \cos(kL)] \sin(kx) + \dots \\
 & \dots + M_A \cos(kx)
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

1.6. Momentos de empotramiento perfecto para las vigas-columna

Consideremos la viga - columna de la Figura (1.5) cuyos extremos A y B se encuentran empotrados, sometida a una fuerza axial de compresión P y a una fuerza uniformemente distribuida q . La condición cinemática del problema requiere que los giros en los apoyos, bajo la acción de las cargas externas, sean nulos.

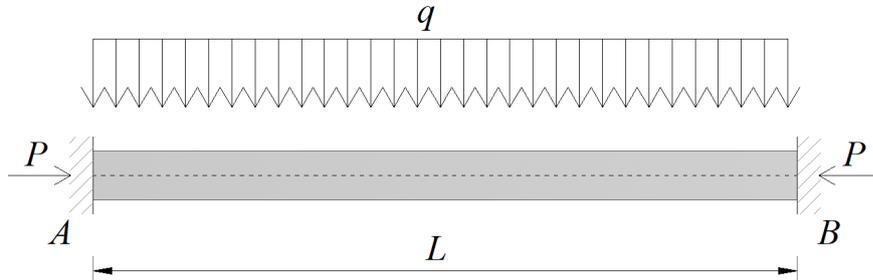


Figura 1.5: Viga - columna empotrada y sometida a una carga uniformemente distribuida.

Si la viga - columna responde a las hipótesis de Euler-Bernoulli, la condición se expresa como la Ecuación (1.26):

$$w'_0(x) = 0 \tag{1.26}$$

$$w'_0(L) = 0$$

Teniendo en cuenta que δ_A y δ_B son nulos, derivando la Ecuación (1.17) y considerando las condiciones de la Ecuación (1.26), obtenemos los momentos

de empotramiento perfecto, Ecuación (1.27):

$$M_F = -M_A = -M_B = \frac{qL^2}{12} \left(\frac{12}{(kL)^2} \right) \left[1 - \frac{kL}{2 \tan(kL/2)} \right] \quad (1.27)$$

Si la viga - columna de la Figura (1.5) responde a las hipótesis de Haringx-Timoshenko, la condición se expresa como la Ecuación (1.28):

$$\phi(x) = 0 \quad (1.28)$$

$$\phi(L) = 0$$

Teniendo en cuenta que δ_A y δ_B son nulos, derivando la Ecuación (1.24), considerando las condiciones de la Ecuación (1.28) y la relación entre $\phi(x)$ y $w_0(x)$, obtenemos los momentos de empotramiento perfecto, Ecuación (1.29):

$$M_F = -M_A = -M_B = \frac{qL^2}{12} \left(\frac{12}{(kL)^2} \right) \left(\frac{1}{\psi} \right) \left[1 - \frac{kL}{2 \tan(kL/2)} \right] \quad (1.29)$$

1.7. Ecuaciones pendiente - deflexión con fuerza axial de compresión

Las ecuaciones pendiente - deflexión pueden obtenerse a partir de las Ecuaciones (1.17) y (1.24). Dado que esta formulación está orientada a un método de análisis sistemático como lo es el método de la rigidez (the stiffness method), se define una nueva convención de signos. Los momentos y los giros de extremos son positivos si actúan y rotan en sentido horario, respectivamente, como se indica en la Figura (1.6).

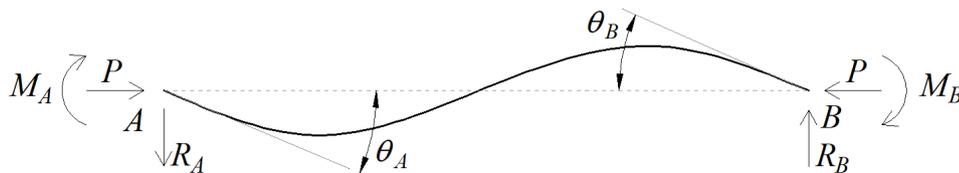


Figura 1.6: Convención de signos para los giros y los momentos de extremo; y para las reacciones verticales.

La expresión de las ecuaciones pendiente - deflexión son independientes

de la teoría de vigas - columnas en las que se trabaje y vienen dadas por la Ecuación (1.30):

$$M_A = \frac{EI_y}{L} \left[C \cdot \theta_A + S \cdot \theta_B - (C + S) \left(\frac{\delta_B - \delta_A}{L} \right) \right] - M_{F,A} \quad (1.30)$$

$$M_B = \frac{EI_y}{L} \left[S \cdot \theta_A + C \cdot \theta_B - (C + S) \left(\frac{\delta_B - \delta_A}{L} \right) \right] + M_{F,B}$$

en donde C y S son las funciones de estabilidad, y $M_{F,A}$ y $M_{F,B}$ son los momentos de empotramiento perfecto en los extremos A y B de la viga - columna, respectivamente.

No obstante, las expresiones de las funciones de estabilidad dependen de la teoría de vigas - columnas en las que se trabaje. Si la viga - columna responde a la teoría de Euler-Bernoulli, su expresiones vienen dadas por las Ecuación (1.31) (Yoo y Lee, 2011):

$$C = \frac{1 - \beta \cdot \cot(\beta)}{(2 \tan(\beta/2)) / \beta - 1} \quad (1.31)$$

$$S = \frac{\beta \cdot \csc(\beta) - 1}{(2 \tan(\beta/2)) / \beta - 1}$$

en donde β se denomina parámetro de pandeo y su expresión viene dada por la Ecuación (1.32):

$$\beta = \sqrt{\frac{PL^2}{EI_y}} \quad (1.32)$$

Si se trabaja bajo las hipótesis de Haringx-Timoshenko, las funciones de estabilidad vienen dadas por la Ecuación (1.33) (Dario Aristizabal-Ochoa, 2008):

$$C = \frac{1 - \psi \cdot \beta \cdot \cot(\beta)}{(2 \tan(\beta/2)) / \beta - \psi} \quad (1.33)$$

$$S = \frac{\psi \cdot \beta \cdot \csc(\beta) - 1}{(2 \tan(\beta/2)) / \beta - \psi}$$

y la expresión del parámetro de pandeo viene dada por la Ecuación (1.34):

$$\beta = \sqrt{\left| \frac{PL^2}{\psi EI_y} \right|} \quad (1.34)$$

Apéndice 2

Modelo alternativo para la torre: teoría de viga-columna de Euler-Bernoulli

2.1. Propiedades de la viga-columna equivalente

La teoría de vigas-columnas de Euler-Bernoulli también puede aplicarse al cálculo de torres atirantadas (Páez y Sensale, 2017). Sin embargo, debe tenerse presente que, como se ha mencionado, en las estructuras reticuladas la deformación por esfuerzo cortante no es despreciable y por lo tanto ésta debe ser tenida en cuenta en los cálculos. Sin embargo, el modelo de la viga de Euler-Bernoulli desprecia la deformación por fuerza cortante. No obstante, es posible tenerla en cuenta en los cálculos mediante un momento de inercia reducido, que puede calcularse a partir de la teoría de vigas de Timoshenko.

El modelo propuesto de cálculo de las deformaciones a partir de las ecuaciones de pendiente - deflexión basadas en la viga - columna de Euler-Bernoulli implica introducir dicho momento de inercia reducido en las ecuaciones de pendiente - deflexión.

2.1.1. Obtención del momento de inercia reducido

Para la viga simplemente apoyada de la Figura (2.1), la curvatura puede calcularse por medio de la Ecuación (2.1) (Ecuaciones (1.5) y (1.6)) (Timoshenko, 1957),

$$\frac{d^2w(x)}{dx^2} = -\frac{1}{E \cdot I_y} \left(M(x) + \frac{E \cdot I_y}{\Omega_r \cdot G} \frac{dV(x)}{dx} \right) \quad (2.1)$$

siendo $w(x)$ el valor de la elástica a una distancia x del extremo y $M(x)$ y $V(x)$ son el momento flector y la fuerza cortante para una sección situada a una distancia x del extremo.

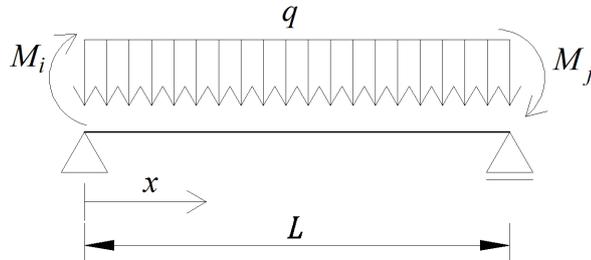


Figura 2.1: Viga simplemente apoyada de luz de vano L , sometida a momentos de extremo M_i y M_j y a una carga uniformemente distribuida q .

Tomando $\Omega_r = A$, la relación entre la flecha por fuerza cortante f_{cor} y la flecha por momento flector en el centro del vano f_{fl} , puede calcularse aproximadamente mediante la Ecuación (2.2),

$$\Psi = \frac{f_{\text{cor}}}{f_{\text{fl}}} = \frac{128}{5} \frac{I_y}{A} \left(\frac{1}{L} \right)^2 \quad (2.2)$$

Por lo tanto, a los efectos de tener en cuenta la deformación por fuerza cortante, puede utilizarse un momento de segundo orden equivalente de valor dado por la Ecuación (2.3),

$$I_{y,\text{eq}} = (1 + \Psi)^{-1} I_y \quad (2.3)$$

Apéndice 3

Modelo matemático de los tirantes

3.1. El cable flexible e inextensible: obtención de la ecuación de la catenaria

Consideremos un cable que cuelga, bajo la acción de su peso, de dos puntos fijos, perfectamente articulados, que se encuentran al mismo nivel y distanciados l_{cb} . Consideremos además que el área de la sección transversal del cable A_{cb} es muy pequeña en comparación con su longitud y admitamos en primera instancia que el cable es un sólido flexible e inextensible, Figura (3.1).

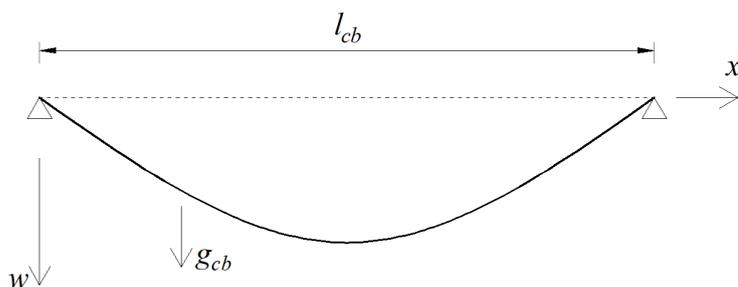


Figura 3.1: Cable flexible e inextensible sometido al peso propio.

Planteando equilibrio horizontal de un elemento diferencial del cable ubicado en las coordenadas (x, w) , obtenemos la Ecuación (3.1), Figura (3.2) (Irvine, 1981):

$$N(s) \frac{dx}{ds} + \frac{d}{ds} \left(N(s) \frac{dx}{ds} \right) ds - N(s) \frac{dx}{ds} = 0 \quad (3.1)$$

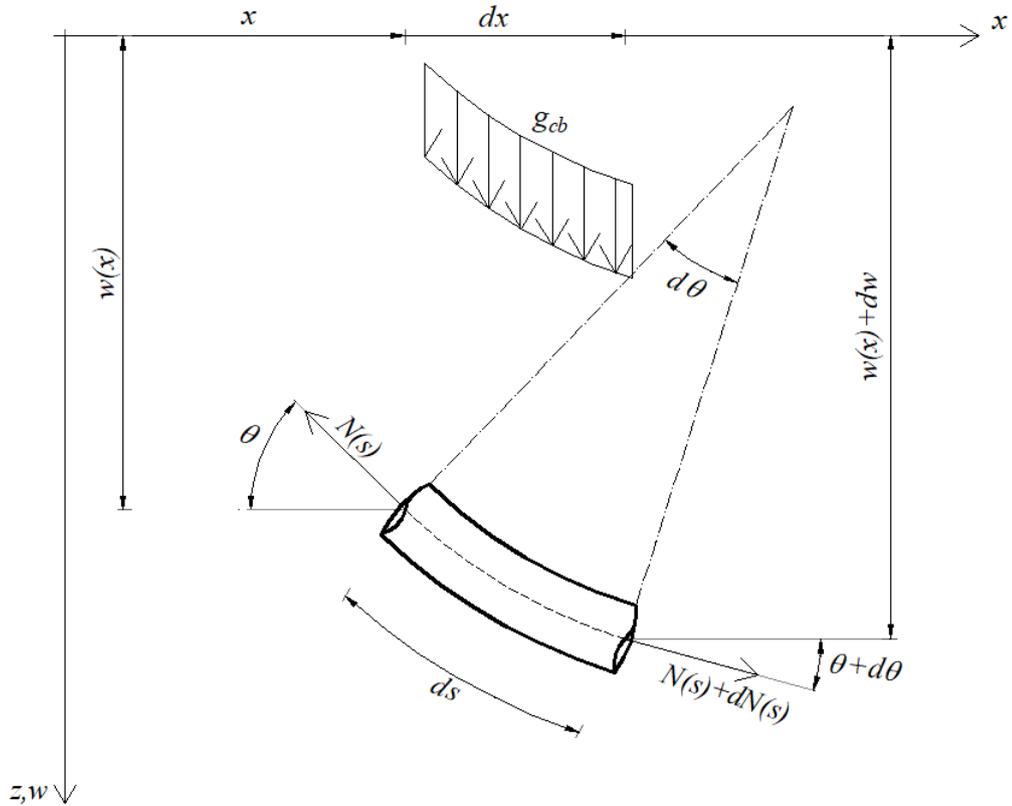


Figura 3.2: Elemento diferencial en equilibrio del cable flexible e inextensible sometido al peso propio.

operando obtenemos la Ecuación (3.2):

$$\frac{d}{ds} \left(N(s) \frac{dx}{ds} \right) = 0 \quad (3.2)$$

en donde $N(s)$ es la fuerza de tracción del cable, s es la coordenada curvilínea del punto (x, w) en el sistema cartesiano, dx/ds y dw/ds son el coseno y el seno del ángulo medido desde la horizontal a la tangente a la curva que forma el cable, respectivamente.

La Ecuación (3.2) implica que la componente horizontal de la fuerza en el cable N_H es constante para en toda su longitud, Ecuación (3.3):

$$N(s) \frac{dx}{ds} = N_H \quad (3.3)$$

Planteando equilibrio vertical en el elemento, obtenemos las Ecuación (3.4),

Figura (3.2):

$$N(s)\frac{dw}{ds} + \frac{d}{ds}\left(N(s)\frac{dw}{ds}\right) ds + g_{cb}ds - N(s)\frac{dw}{ds} = 0 \quad (3.4)$$

operando obtenemos la Ecuación (3.5):

$$\frac{d}{ds}\left(N(s)\frac{dw}{ds}\right) = -g_{cb} \quad (3.5)$$

en donde g_{cb} es el peso del cable.

Sustituyendo la Ecuación (3.3) en la Ecuación (3.5) y derivando con respecto a x a ambos lados de la igualdad obtenemos la Ecuación (3.6):

$$\frac{d}{dx}\left(N_H\frac{dw}{dx}\right) = -g_{cb}\frac{ds}{dx} \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que $ds = dx\sqrt{1 + (dw/dx)^2}$, la Ecuación (3.6) se escribe como la Ecuación (3.7):

$$N_H\frac{d^2w}{dx^2} = -g_{cb}\sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx}\right)^2} \quad (3.7)$$

La Ecuación (3.7) es una ecuación diferencial de variables separables, y por lo tanto puede reescribirse como la Ecuación (3.8):

$$N_H\frac{dw'}{\sqrt{1 + w'^2}} = -g_{cb}dx \quad (3.8)$$

en donde $w' = dw/dx$.

Aplicando el Teorema de la Derivada de las Funciones Inversas (Apostol, 1992) a $g(y) = \arg \sinh(y)$ y $f(x) = \sinh(x)$, obtenemos la Ecuación (3.9):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} [\arg \sinh(y)] &= \frac{1}{\frac{d}{dx} \sinh(x)} = \frac{1}{\cosh(x)} = \dots \\ \dots &= \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + g^2(y)}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Integrando la Ecuación (3.8) y teniendo en cuenta el resultado de la Ecuación

ción (3.9) obtenemos la Ecuación (3.10):

$$\arg \sinh(w') = -\frac{g_{cb}}{N_H}x + \hat{c}_1 \quad (3.10)$$

siendo \hat{c}_1 una constante de integración.

Operando, la Ecuación (3.10) puede escribirse como la Ecuación (3.11):

$$\frac{dw}{dx} = \sinh\left(-\frac{g_{cb}}{N_H}x + \hat{c}_1\right) \quad (3.11)$$

integrado la Ecuación (3.11) obtenemos la Ecuación (3.12)

$$w(x) = -\frac{N_H}{g_{cb}} \cosh\left(-\frac{g_{cb}}{N_H}x + \hat{c}_1\right) + \hat{c}_2 \quad (3.12)$$

siendo \hat{c}_2 una constante de integración.

Las condiciones de contorno para el cable de la Figura 3.1 son

$$w(0) = -\frac{N_H}{g_{cb}} \cosh(\hat{c}_1) + \hat{c}_2 = 0 \quad (3.13)$$

$$w(l_{cb}) = -\frac{N_H}{g_{cb}} \cosh\left(-\frac{g_{cb}}{N_H}l_{cb} + \hat{c}_1\right) + \hat{c}_2 = 0$$

operando en la Ecuación (3.13) obtenemos las siguientes relaciones, Ecuación (3.14):

$$\hat{c}_2 = \frac{N_H}{g_{cb}} \cosh(\hat{c}_1) \quad (3.14)$$

$$\cosh(\hat{c}_1) = \cosh\left(-\frac{g_{cb}}{N_H}l_{cb} + \hat{c}_1\right)$$

Teniendo en cuenta que $\cosh(a) = (e^a + e^{-a})/2$ y operando obtenemos las constantes de integración \hat{c}_1 y \hat{c}_2 , Ecuación (3.15):

$$\hat{c}_1 = \frac{g_{cb}l_{cb}}{2N_H} \quad (3.15)$$

$$\hat{c}_2 = \frac{N_H}{g_{cb}} \cosh\left(\frac{g_{cb}l_{cb}}{2N_H}\right)$$

Luego, la ecuación para el cable de la Figura (3.1) sometido a su propio peso viene dada por la Ecuación (3.16), que se denomina *ecuación de la catenaria*:

$$w(x) = -\frac{N_H}{g_{cb}} \left(\cosh \left(\frac{g_{cb}}{N_H} \left[x - \frac{l_{cb}}{2} \right] \right) - \cosh \left(\frac{g_{cb} l_{cb}}{2N_H} \right) \right) \quad (3.16)$$

3.2. Longitud del cable

La longitud del cable puede calcularse mediante la Ecuación (3.18):

$$\begin{aligned} S_{cb} &= \int_0^{S_{cb}} ds = \int_0^{l_{cb}} \sqrt{1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2} = \dots \\ &\dots = \int_0^{l_{cb}} \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{g_{cb}}{N_H} \left[x - \frac{l_{cb}}{2} \right] \right)} dx \end{aligned} \quad (3.17)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones hiperbólicas (Apostol, 1992), Ecuación (3.18):

$$\cosh^2(a) - \sinh^2(a) = 1$$

$$2 \cosh^2 \left(\frac{a}{2} \right) = \cosh(a) + 1 \quad (3.18)$$

$$\sinh(-a) = -\sinh(a)$$

la longitud del cable puede calcularse mediante la Ecuación (3.20):

$$\begin{aligned} S_{cb} &= \int_0^{l_{cb}} \sqrt{\cosh^2 \left(\frac{g_{cb}}{N_H} \left[x - \frac{l_{cb}}{2} \right] \right)} dx = \dots \\ &\dots = \int_0^{l_{cb}} \cosh \left(\frac{g_{cb}}{N_H} \left[x - \frac{l_{cb}}{2} \right] \right) dx = \dots \\ &\dots = \frac{2N_H}{g_{cb}} \sinh \left(\frac{g_{cb} l_{cb}}{2N_H} \right) \end{aligned} \quad (3.19)$$

3.3. Alargamiento del cable elástico

Consideremos ahora que el cable de la Figura (3.1) está compuesto por un material homogéneo y elástico lineal cuyo módulo de elasticidad es E_{cb} . La

deformación unitaria del cable en la sección ubicada en la coordenada s viene dada por la Ecuación (3.20):

$$\varepsilon(s) = \frac{N(s)}{E_{cb}A_{cb}} \quad (3.20)$$

y por lo tanto el alargamiento del cable $\Delta S_{cb,u}$ viene dado por la Ecuación (Gimsing y Georgakis, 2012; Strasky, 2011):

$$\Delta S_{cb,u} = \int_0^{S_{cb,u}} \frac{N(s)}{E_{cb}A_{cb}} ds = \frac{N_H}{E_{cb}A_{cb}} \int_0^{l_{cb}} \left[1 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (3.21)$$

en donde $S_{cb,u}$ es la longitud del cable sin tensión.

Teniendo en cuenta las propiedades de las funciones hiperbólicas, Ecuación (3.18), la Ecuación (3.21) puede expresarse como la Ecuación (3.22):

$$\begin{aligned} \Delta S_{cb,u} &= \frac{N_H}{E_{cb}A_{cb}} \int_0^{l_{cb}} \cosh^2 \left(\frac{g_{cb}}{N_H} \left[x - \frac{l_{cb}}{2} \right] \right) dx = \dots \\ &\dots = \frac{N_H}{2E_{cb}A_{cb}} \int_0^{l_{cb}} \left[\cosh \left(\frac{2g_{cb}}{N_H} \left[x - \frac{l_{cb}}{2} \right] \right) - 1 \right] dx \quad (3.22) \end{aligned}$$

Luego, el alargamiento del cable viene dado por la Ecuación (3.23):

$$\Delta S_{cb,u} = \frac{N_H^2}{2E_{cb}A_{cb}g_{cb}} \left[\sinh \left(\frac{g_{cb}l_{cb}}{N_H} \right) + \frac{g_{cb}}{N_H} \right] \quad (3.23)$$

3.4. Fuerza transmitida por los cables al mástil debido al desplazamiento

Consideremos nuevamente el sistema de la Figura (3.3). En la configuración inicial del sistema, previo a la aplicación de la fuerza F , los cables se encuentran pretensados con una fuerza inicial T_0 . Al aplicar la fuerza horizontal F los cables a barlovento tendrán una fuerza T' y el cable a sotavento una fuerza T'' cuya expresiones vienen dadas por las Ecuaciones (3.24) y (3.25), respectivamente:

$$T' = T_0 + \left(\frac{E_{sec,1}}{E_{sec,1} + 2 \cdot E_{sec,2}} \right) \left(\frac{l_{cb}}{c_{cb}} \right) \cdot k_{eq} \cdot u \quad (3.24)$$

$$T'' = T_0 - \left(\frac{2 \cdot E_{\text{sec},2}}{E_{\text{sec},1} + 2 \cdot E_{\text{sec},2}} \right) \left(\frac{l_{cb}}{c_{cb}} \right) \cdot k_{\text{eq}} \cdot u \quad (3.25)$$

por lo tanto la fuerza de compresión que los cables transmiten a la torre viene dada por la Ecuación (3.26):

$$P = 3 \cdot T_0 \cdot \left(\frac{z_{cb}}{c_{cb}} \right) + 2 \left(\frac{E_{\text{sec},1} - E_{\text{sec},2}}{E_{\text{sec},1} + 2 \cdot E_{\text{sec},2}} \right) \cdot \left(\frac{z_{cb}}{c_{cb}} \right) \cdot k_{\text{eq}} \cdot u \quad (3.26)$$

en donde z_{cb} es la altura de anclaje de los tirantes, que en este caso coincide con la altura del mástil.

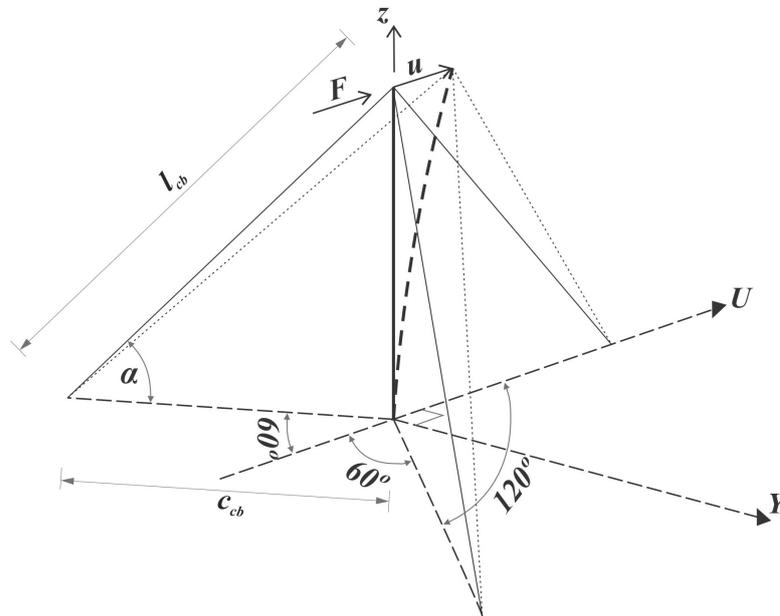


Figura 3.3: Sistema tridimensional formado por el mástil y tres cables de igual longitud de cuerda e igual inclinación.

Apéndice 4

Métodos propuestos para el análisis de mástiles atirantados

El objetivo de este apéndice es desarrollar las bases de los métodos propuestos. En este sentido parte de la información del texto principal vuelve a repetirse aquí con el objeto de un mejor seguimiento del lector.

4.1. Introducción

Consideremos una estructura tipo mástil atirantado, de altura h_t , con n niveles de tirantes uniformemente espaciados entre sí una distancia h_j . Sin pérdida de generalidad, consideremos que la estructura está empotrada en la base, como se representa en la Figura (4.1a).

La torre estará sujeta a cargas distribuidas verticales $p_z(z)$ como ser su peso propio; cargas verticales puntuales P_z , debidas por ejemplo al peso de los accesorios, pero en carácter general serán debidas al alargamiento y acortamiento de los cables y a la carga de viento sobre los mismos; y a cargas puntales y distribuidas horizontales, P_x y $p_x(z)$, respectivamente, básicamente debidas a la acción del viento sobre el mástil, los cables y los accesorios.

Planteando equilibrio en la configuración deformada en el nodo j , en referencia a la Figura (4.1b) podemos escribir para el momento de continuidad

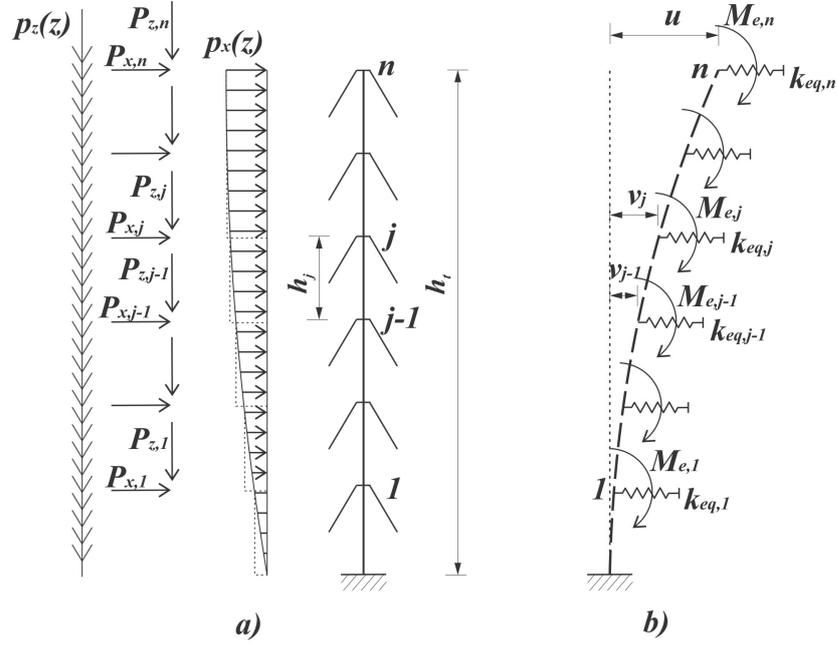


Figura 4.1: a) Acciones exteriores sobre el mástil atirantado. b) Modelo matemático de cálculo, configuración deformada.

$j - 1$, Ecuación (4.1),

$$\begin{aligned}
M_{j-1} &= M_j + \sum_{i=j}^{i=n} (H_i + P_{x,i} - k_{eq,i} \cdot v_i) \cdot h_i + \sum_{i=j}^{i=n} M_{e,i} + \dots \\
&\dots + (v_j - v_{j-1}) \sum_{i=j}^{i=n} (P_{z0,i} + P_{z,i}) + \dots \\
&\dots + (v_j - v_{j-1}) \sum_{i=j}^{i=n} \left[2 \left(\frac{E_{sec,1} - E_{sec,2}}{E_{sec,1} + 2 \cdot E_{sec,2}} \right)_i k_{eq,i} \cdot \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} \cdot v_i \right] + \dots \\
&\dots + (v_j - v_{j-1}) \sum_{i=j}^{i=n} \left(3 \cdot T_{0,i} \cdot \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} \right) \quad (4.1)
\end{aligned}$$

siendo $z_{cb,j}$ la altura correspondiente al nivel j de tirantes, v_j el valor de la elástica para dicho nivel de tirantes, k_{eq} es el valor de la constante elástica equivalente para el nivel j de tirantes, $c_{cb,j}$ es la distancia horizontal entre el pie de los tirantes del nivel j y la torre, H_j es la fuerza resultante horizontal entre dos niveles de tirantes, obtenida mediante la expresión de la Ecuación (2.10), $P_{z0,j}$ es la fuerza resultante vertical debida a la carga vertical uniformemente distribuida entre dos niveles de tirantes, obtenida mediante la expresión de la

Ecuación (4.3), $P_{z,j}$ es la fuerza vertical en el nivel de tirantes j debida a la acción del viento sobre éstos y $M_{e,j}$ es el momento debido a la excentricidad de los cables en el nivel j de tirantes y su expresión viene dada por la Ecuación (4.4).

$$H_j = \int_{z_{cb,j}-h_j/2}^{z_{cb,j}+h_j/2} p_x(z) dz \quad (4.2)$$

$$P_{z0,j} = \int_{z_{cb,j}-h_j/2}^{z_{cb,j}-h_j/2} p_z(z) dz \quad (4.3)$$

$$M_{e,j} = - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} E_{sec,1} + \frac{\sqrt{3}}{3} E_{sec,2} \right) \frac{a \cdot A_{cb,j} \cdot z_{cb,j}}{l_{cb,j}^3} \cdot v_j \quad (4.4)$$

4.2. Análisis de la estructura

Consideremos una viga – columna continua sobre apoyos elásticos discretos, sometida a la acción de cargas externas para la que son conocidas las propiedades seccionales y de los materiales, Figura (4.2). Las ecuaciones pendiente – deflexión con fuerza axial de compresión para la barra j entre los nodos $j - 1$ y j vienen dadas por la Ecuación (4.5) (Dario Aristizabal-Ochoa, 2008; Yoo y Lee, 2011):

$$M_{j-1,j} = \left(\frac{E \cdot I}{h} \right)_j \left[C \cdot \theta_{j-1} + S \cdot \theta_j - (C + S) \cdot \frac{v_j - v_{j-1}}{h} \right]_j - M_{F,j} \quad (4.5)$$

$$M_{j,j-1} = \left(\frac{E \cdot I}{h} \right)_j \left[S \cdot \theta_{j-1} + C \cdot \theta_j - (C + S) \cdot \frac{v_j - v_{j-1}}{h} \right]_j + M_{F,j}$$

Planteando equilibrio vertical y de momentos en el nodo j , en la configuración deformada, obtenemos las Ecuaciones (4.6) y (4.7), respectivamente:

$$V_{j,j-1} - V_{j,j+1} - k_{eq,j} v_j = P_{x,j} + H_j \quad (4.6)$$

$$M_{j,j-1} + M_{j,j+1} + M_{e,j} = 0 \quad (4.7)$$

Planteando equilibrio en la configuración deformada para la barra j y para la barra $j + 1$, obtenemos las expresiones de las fuerzas cortantes $V_{j,j-1}$ y $V_{j,j+1}$

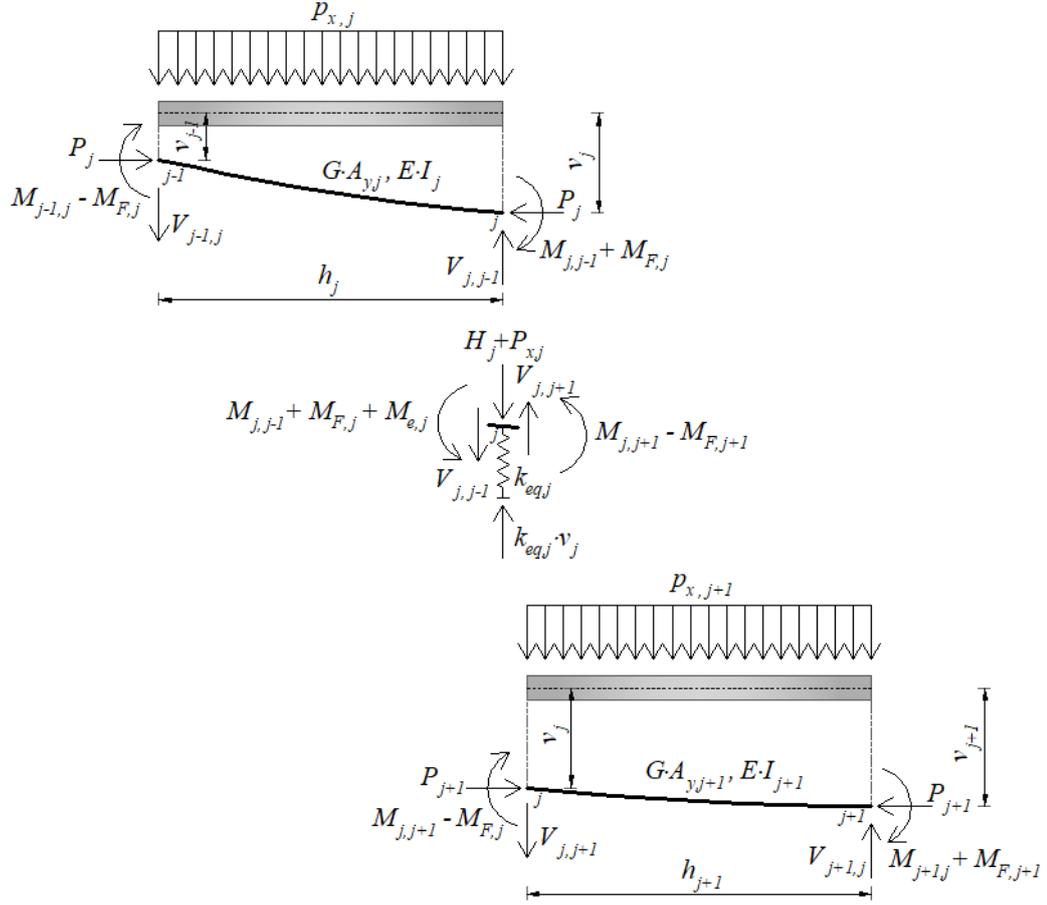


Figura 4.2: Configuración deformada de la viga – columna continua sobre apoyos elásticos discretos para las barras entre los nudos $j - 1$, j y $j + 1$. Diagramas de cuerpo libre para el planteamiento de las ecuaciones de pendiente - deflexión.

en los extremos de las barras, Ecuaciones (4.8) y (4.9):

$$V_{j,j-1} = \frac{M_{j-1,j} + M_{j,j-1}}{h_j} + \frac{P_j}{h_j} (v_j - v_{j-1}) \quad (4.8)$$

$$V_{j,j+1} = \frac{M_{j,j+1} + M_{j+1,j}}{h_{j+1}} + \frac{P_{j+1}}{h_{j+1}} (v_{j+1} - v_j) \quad (4.9)$$

Sustituyendo las Ecuaciones (4.8) y (4.9) en la Ecuación (4.6) y teniendo en cuenta que los momentos de extremo $M_{j-1,j}$, $M_{j,j-1}$, $M_{j,j+1}$ y $M_{j+1,j}$ pueden obtenerse para la barra j y para la $j+1$ a partir de la Ecuación (4.5), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones de equilibrio, Ecuaciones (4.10) y (4.11):

$$\begin{aligned} a_{2j,1}\theta_{j+1} + a_{2j,2}v_{j+1} + a_{2j,3}\theta_j + a_{2j,4}v_j + a_{2j,5}\theta_{j-1} + a_{2j,6}v_{j-1} = \dots \\ \dots = M_{F,j+1} - M_{F,j} - M_{e,j} \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$a_{2j-1,1}\theta_{j+1} + a_{2j-1,2}v_{j+1} + a_{2j-1,3}\theta_j + a_{2j-1,4}v_j + a_{2j-1,5}\theta_{j-1} + \dots \\ \dots + a_{2j-1,6}v_{j-1} = P_{x,j} + H_j \quad (4.11)$$

en donde los coeficientes $a_{i,j}$ vienen dados por las expresiones de la Ecuación (4.12):

$$\begin{aligned} a_{2j,1} &= \left(\frac{EI}{h} S \right)_{j+1} \\ a_{2j,2} &= -a_{2j-1,1} = - \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_{j+1} \\ a_{2j,3} &= \left(\frac{EI}{h} C \right)_{j+1} + \left(\frac{EI}{h} C \right)_j \\ a_{2j,4} &= a_{2j-1,3} = \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_j - \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_{j+1} \\ a_{2j,5} &= \left(\frac{EI}{h} S \right)_j \\ a_{2j,6} &= -a_{2j-1,5} = \left(\frac{EI}{h^2} (C + S) \right)_j \\ a_{2j-1,2} &= - \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_{j+1} + \frac{P_{j+1}}{h_{j+1}} \\ a_{2j-1,4} &= \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_{j+1} + \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_j - \frac{P_{j+1}}{h_{j+1}} - \frac{P_j}{h_j} + k_{eq,j} \\ a_{2j-1,6} &= - \left(2 \frac{EI}{h^3} (C + S) \right)_j + \frac{P_j}{h_j} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Los coeficientes $a_{i,j}$ dependen de las propiedades geométricas de la viga, las propiedades de los materiales, de las fuerzas de compresión, de las constantes elásticas equivalentes y de las funciones de estabilidad. Los subíndices para las expresiones entre paréntesis indican a la barra que corresponde, por ejemplo $\left(\frac{EI}{h} S \right)_j$ indica que el módulo de elasticidad, el momento de segundo orden, la longitud de vano y la función de estabilidad S , son las correspondientes a la barra j .

Para una viga - columna de n tramos, a partir de la Ecuaciones (4.10) y (4.11) se forma un sistema de $2n - 1 \times 2n - 1$ ecuaciones cuyas incógnitas son los giros y los desplazamientos laterales de los nudos $\theta_1 \dots \theta_j \dots \theta_{n-1}$ y $v_1 \dots v_j \dots v_n$, respectivamente, ya que, por un lado, el extremo superior de mástil se considera articulado, lo que implica que θ_n puede escribirse en función

de θ_{n-1} ; y por otro, cuando el extremo inferior está empotrado $\theta_{n-1} = v_0 = 0$ y cuando está articulado $v_0 = 0$ y θ_0 puede escribirse en función de θ_1 .

Las funciones de estabilidad en los coeficientes $a_{i,j}$ dependen de la teoría de vigas - columnas en las que se trabaje. Si se trabaja bajo las hipótesis de Euler-Bernoulli las funciones de estabilidad vienen dadas por la Ecuación (1.31), mientras que bajo las hipótesis de la teoría de Haringx - Timoshenko vienen dados por la Ecuación (1.33). Análogamente para la expresión del momento de empotramiento perfecto. Bajo las hipótesis de Euler-Bernoulli viene dado por la Ecuación (1.27) y bajo las hipótesis de Haringx - Timoshenko mediante la Ecuación (1.29).

Dado que los parámetros a introducir en las ecuaciones de las funciones de estabilidad dependen de cada barra, reescribimos las ecuaciones antes citadas para no perder de vista lo expresado. Bajo las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli las funciones de estabilidad para la barra j (Ecuación (1.31)) se reescriben como la Ecuación (4.13):

$$C_j = \frac{1 - \beta_j \cdot \cot(\beta_j)}{(2 \tan(\beta_j/2)) / \beta_j - 1} \quad (4.13)$$

$$S_j = \frac{\beta_j \cdot \csc(\beta_j) - 1}{(2 \tan(\beta_j/2)) / \beta_j - 1}$$

y el parámetro de pandeo viene dado por la Ecuación (4.14):

$$\beta_j = \sqrt{\frac{P_j h_j^2}{(EI)_j}} \quad (4.14)$$

en donde el momento de inercia I corresponde al momento de inercia equivalente calculado de acuerdo con la Ecuación (2.3).

Bajo las hipótesis de la teoría de Haringx - Timoshenko las funciones de estabilidad para la barra j (Ecuación (1.33)) se reescriben como la Ecuación (4.15):

$$C_j = \frac{1 - \psi_j \cdot \beta_j \cdot \cot(\beta_j)}{(2 \tan(\beta_j/2)) / \beta_j - \psi_j} \quad (4.15)$$

$$S_j = \frac{\psi_j \cdot \beta_j \cdot \csc(\beta_j) - 1}{(2 \tan(\beta_j/2)) / \beta_j - \psi_j}$$

El parámetro de pandeo y el factor de reducción por cortante vienen dados por las Ecuaciones (4.16) y (4.17), respectivamente.

$$\beta_j = \sqrt{\left| \frac{P_j h_j^2}{(\psi EI)_j} \right|} \quad (4.16)$$

$$\psi_j = \left(1 + \frac{P_j}{G_j \Omega_{r,j}} \right)^{-1} \quad (4.17)$$

La fuerza de compresión en la barra j , P_j viene dada por la Ecuación (4.18):

$$P_j = \sum_{i=j}^{i=n} \left(P_{0,i} + P_{z,i} + 2 \left(\frac{E_{\text{sec},1} - E_{\text{sec},2}}{E_{\text{sec},1} + 2E_{\text{sec},2}} \right) k_{\text{eq},i} \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} v_i + 3 \cdot T_{0,i} \frac{z_{cb,i}}{c_{cb,i}} \right) \quad (4.18)$$

4.3. Obtención de la configuración deformada: análisis de segundo orden método iterativo

Para resolver el problema de forma simple, el método propuesto supone conocida la forma inicial de la elástica de la torre bajo la acción de las fuerzas externas, considerando para ésta una función parabólica y tal que el valor máximo de la elástica sea menor que un valor prefijado $v_{m,i}$, con $v_{m,i} = 0,001 \cdot h_t$. Las constantes elásticas equivalentes en cada uno de los niveles se calculan a partir de los desplazamientos laterales supuestos. De esta manera puede estimarse de forma razonable la relación entre la fuerza de compresión en la barra j y la fuerza de compresión en la barra n de extremo. Sea ζ el factor de relación entre dichas fuerzas, esto es $P_j = \zeta \cdot P_n$, de esta manera la relación entre los parámetros de pandeo puede escribirse como, Ecuación (4.19):

$$\beta_j = \sqrt{\zeta \cdot \frac{(EI)_n}{(EI)_j} \left(\frac{h_j}{h_n} \right)} \beta_n \quad (4.19)$$

Los pasos del procedimiento iterativo para la obtención del desplazamiento lateral son:

1. Se calculan los desplazamientos laterales de la torre, esto es v_j para $j = 1$ a n . El método propuesto supone considerar que la curva elástica inicial es una función parabólica.
2. Con los valores de los desplazamientos laterales calculados en el Paso 1 se obtienen los módulos de elasticidad $E_{\text{sec},1}$ y $E_{\text{sec},2}$ para cada nivel de tirantes.
3. El nuevo desplazamiento lateral de la torre bajo la acción de las cargas actuantes se obtiene resolviendo el sistema de $2n - 1 \times 2n - 1$ ecuaciones, obtenido a partir de la Ecuaciones (4.10) y (4.11).
4. Si para cada uno de los niveles de tirantes, la diferencia entre el desplazamiento obtenido en el Paso 3 y el desplazamiento del Paso 1 es menor que un valor predeterminado, se da por finalizado el proceso. En caso contrario, con el desplazamiento obtenido en el Paso 3 se repite el proceso hasta la convergencia.
5. Si la diferencia entre los desplazamientos en cada nivel de tirantes no puede hacerse menor que un valor predeterminado, la estructura es inestable bajo la acción de las cargas actuantes. Deberá modificarse la rigidez de la viga-columna y/o la rigidez de las contantes elásticas.

Luego, planteando las ecuaciones de equilibrio en la configuración deformada para cualquier sección se obtienen las solicitaciones y se procede al dimensionado de las secciones de los elementos que conforman la torre utilizando los métodos habituales de resistencia de materiales y la norma que se tome como referencia.

En relación a la Figura (4.2), para la barra j y para una sección a una distancia x del extremo $j-1$, el momento en dicha sección $M_j(x)$ viene dado por la Ecuación (4.20) para el caso que la viga - columna sea modelada mediante la teoría de Euler-Bernoulli,

$$\begin{aligned}
M_j(x) = & \frac{p_{x,j}h_j^4}{\beta_j^4} \left(\frac{\beta_j}{h_j}\right)^2 \left[\left(\frac{1 - \cos(\beta_j)}{\sin(\beta_j)}\right) \sin\left(\frac{\beta_j}{h_j}x\right) + \cos\left(\frac{\beta_j}{h_j}x\right) - 1 \right] \\
& \cdots + \frac{1}{\sin(\beta_j)} [M_{j,j-1} - M_{j-1,j} \cos(\beta_j)] \sin\left(\frac{\beta_j}{h_j}x\right) + \cdots \\
& \cdots + M_{j-1,j} \cos\left(\frac{\beta_j}{h_j}x\right) \tag{4.20}
\end{aligned}$$

y por la Ecuación (4.21) para el caso que la viga - columna sea modelada

mediante la teoría de Haringx - Timoshenko.

$$\begin{aligned}
 M_j(x) = & \frac{p_{x,j} h_j^2}{\psi_j} \left(\frac{1}{\beta_j} \right)^2 \left[\left(\frac{1 - \cos(\beta_j)}{\sin(\beta_j)} \right) \sin \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right) + \cos \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right) - 1 \right] \\
 & \cdots + \frac{1}{\sin(\beta_j)} [M_{j,j-1} - M_{j-1,j} \cos(\beta_j)] \sin \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right) + \cdots \\
 & \cdots + M_{j-1,j} \cos \left(\frac{\beta_j}{h_j} x \right) \tag{4.21}
 \end{aligned}$$

4.4. Casos de estudio: comparación entre el método de los elementos finitos y el método propuesto

A los efectos de validar el método propuesto (MP), se analizan dos estructuras tipo mástil atirantado, una de 150 metros de altura y otra de 120 metros de altura.

La primera de ellas es analizada a partir del método propuesto bajo las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli y se consideran dos condiciones de vínculo externo en su base, una empotrada y otra articulada. Los resultados se contrastarán utilizando dos modelos diferentes por medio del método de los elementos finitos (FEM) a partir del uso del programa SAP 2000. En el primer modelo por medio de elementos finitos (FEM: retic.) la estructura se modela como un reticulado espacial donde las barras trabajan principalmente a fuerza directa y los cables se modelan como elementos tipo cable, Figura (4.3). En el segundo modelo (FEM: viga-col.) la estructura se modela como una viga – columna equivalente, mediante elementos que trabajan a flexión y a fuerza directa, y cuyas propiedades geométricas se obtienen a partir del patrón de construcción de una de las caras de la torre (Tabla 2.1). Se tienen en cuenta las excentricidades de los cables en los niveles de tirantes y éstos se modelan como elementos tipo cable. En ambos modelos los efectos de segundo orden se consideran a partir de un análisis no lineal $P - \Delta$.

La segunda estructura, de 120 metros de altura, se considera con su extremo articulado en la base. Para este caso los resultados se contrastarán únicamente con el modelo tridimensional de reticulado (FEM: retic.).

Las cargas de viento sobre la estructura se calculan a partir de los linea-

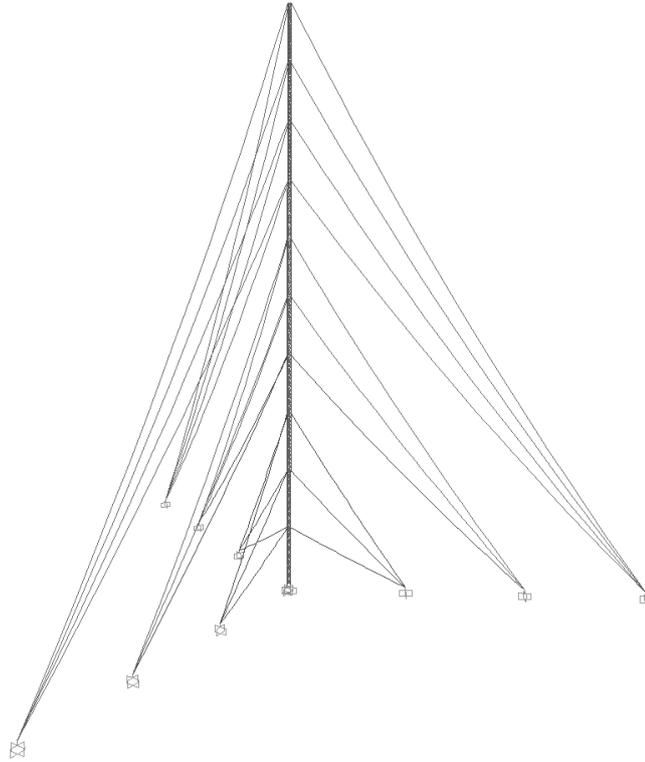


Figura 4.3: Modelo de reticulado espacial de la torre atirantada de 150 m de altura en FEM. Configuración inicial: cables tensados al 10 % de la tensión de rotura. (Observar la configuración catenaria de los cables.)

mientos establecidos por la norma TIA 222-G y se considera una velocidad característica de viento de 43.4m/s calculada como la velocidad media del viento en un intervalo de 3 segundos a una altura de 10 metros sobre el nivel de terreno para una categoría de exposición C y cuyo período de retorno es de 50 años.

4.4.1. Torre de 150 metros: aplicando la teoría de Euler-Bernoulli

La torre de 150 metros de altura es de sección triangular, de un (1) metro de ancho de cara medida eje a eje de las barras verticales. Las barras son materializadas por perfiles tubulares circulares de acero de módulo de elasticidad $E_s = 200$ GPa. Los montantes (barras verticales) son de 73.00 mm de diámetro exterior y 5.20 mm de espesor y las barras horizontales y las diagonales de diámetro exterior 21.33 mm y 2.77 mm de espesor. La inclinación de las diagonales es de 45.

Los tirantes son de acero EHS, de tensión de rotura 1400 MPa y módulo de

elasticidad $E_{cb} = 185$ GPa. Están colocados con espaciamentos de 15 metros en la altura. Los tirantes cuyas cota de anclaje a la torre es +15 m, +30 m y +45 m, se anclan al terreno a una distancia de 30 m del eje del mástil y son de diámetro nominal 6.35mm ($A_{cb} = 24.632$ mm²). Los tirantes cuyas cotas de anclaje son +60 m, +75 m y +90 m, se anclan al terreno a una distancia de 60 m y sus diámetros nominales son 6.35 mm, 8.00 mm y 8.00 mm ($A_{cb} = 38.511$ mm²), respectivamente. Los restantes tirantes, cuyos niveles de anclaje a la torre son +105 m, +120 m, +135 m y +150 m, se anclan al terreno a una distancia de 90 m del eje de la torre y sus diámetros nominales son de 8.00 mm.

Las gráficas de las Figuras (4.4), (4.5) y (4.6) muestran los desplazamientos laterales, las fuerzas directas y los momentos flectores obtenidos a partir del MP y de los modelos mediante elementos finitos FEM: retic. y FEM: viga-col. en el caso de que la base de la torre esté empotrada; y las Figuras (4.7), (4.8) y (4.9) muestran los desplazamientos laterales, las fuerzas directas y los momentos flectores en el caso de que la base de la torre esté articulada.

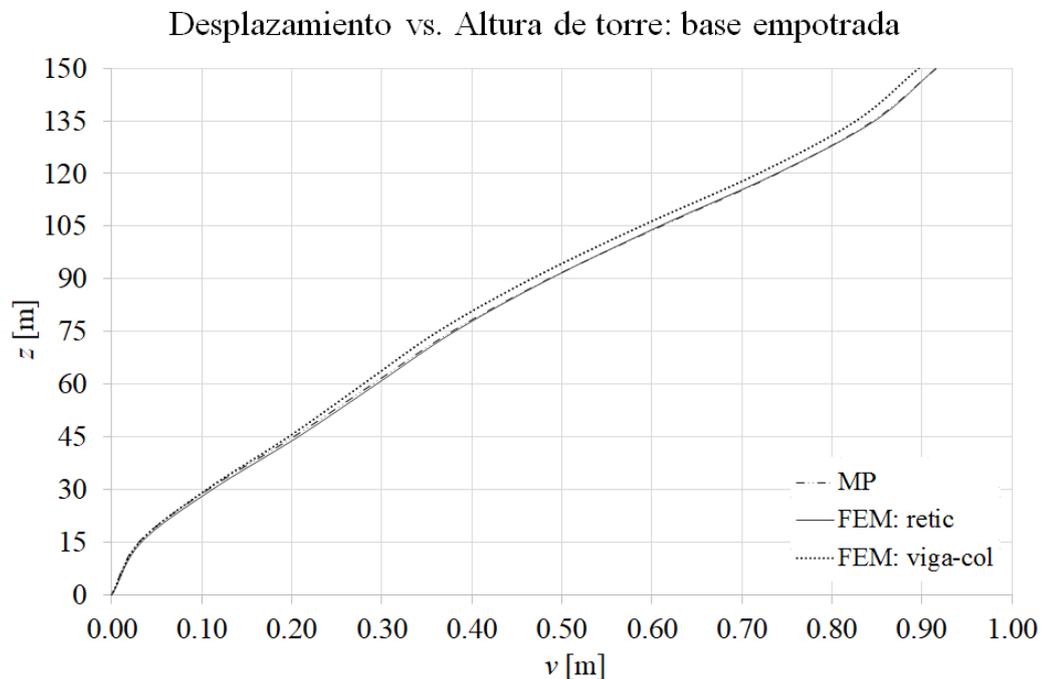


Figura 4.4: Torre 150m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col, con la base de la torre empotrada.

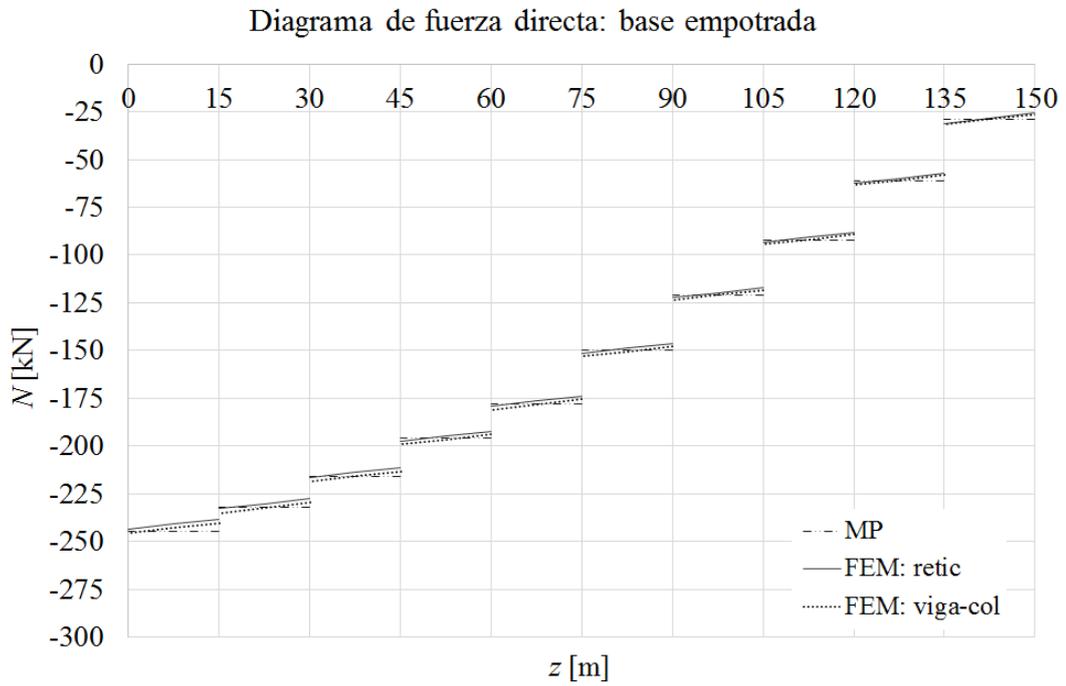


Figura 4.5: Torre 150m: diagrama de fuerza directa para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre empotrada.

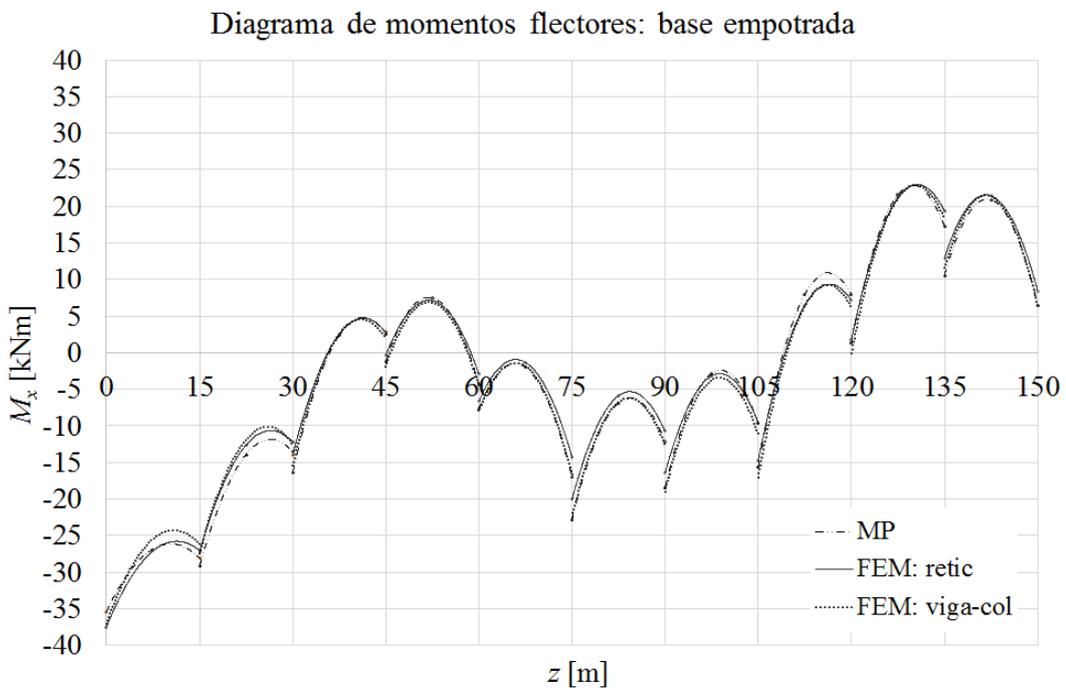


Figura 4.6: Torre 150m: diagrama de momento flector para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre empotrada.

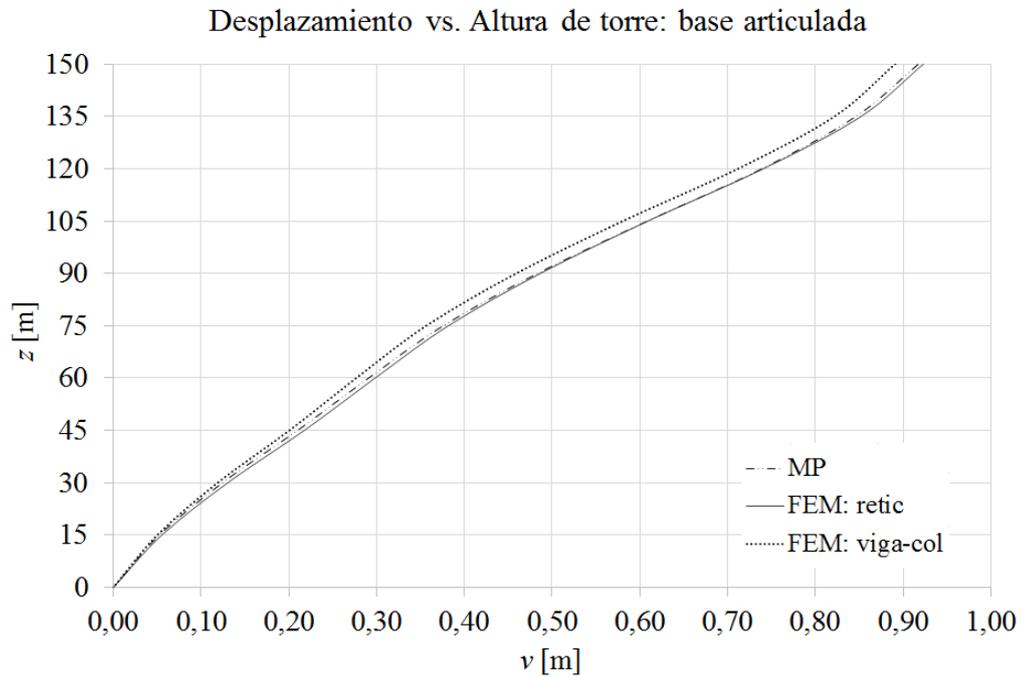


Figura 4.7: Torre 150m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM:retic y FEM: viga-col, con la base de la torre articulada.

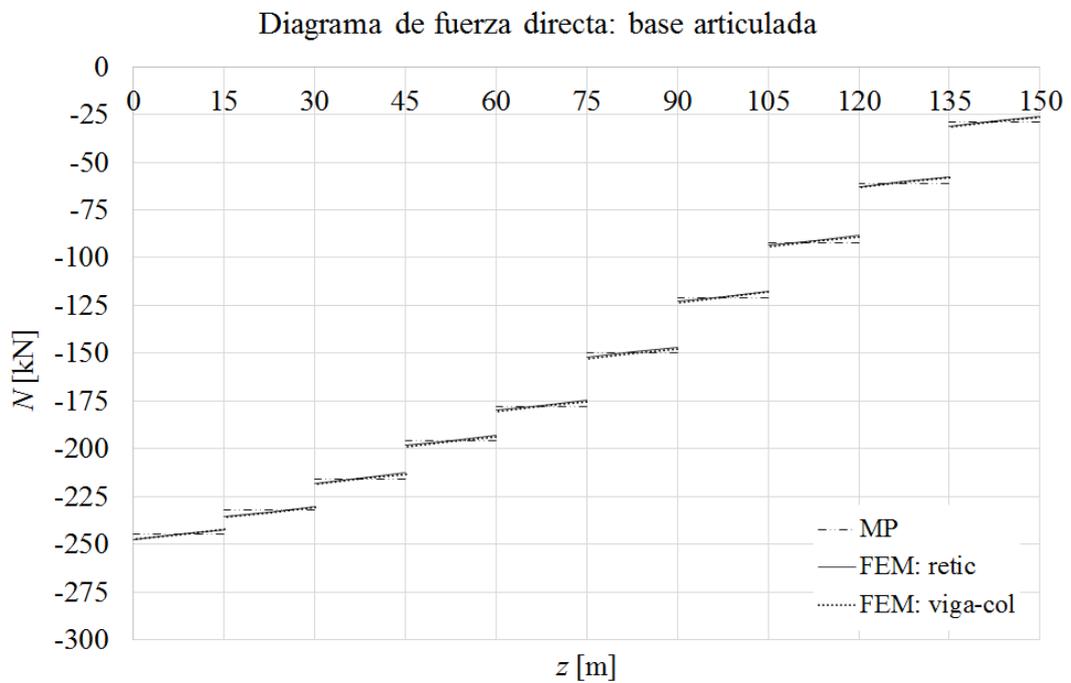


Figura 4.8: Torre 150m: Diagrama de fuerza directa para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre articulada.

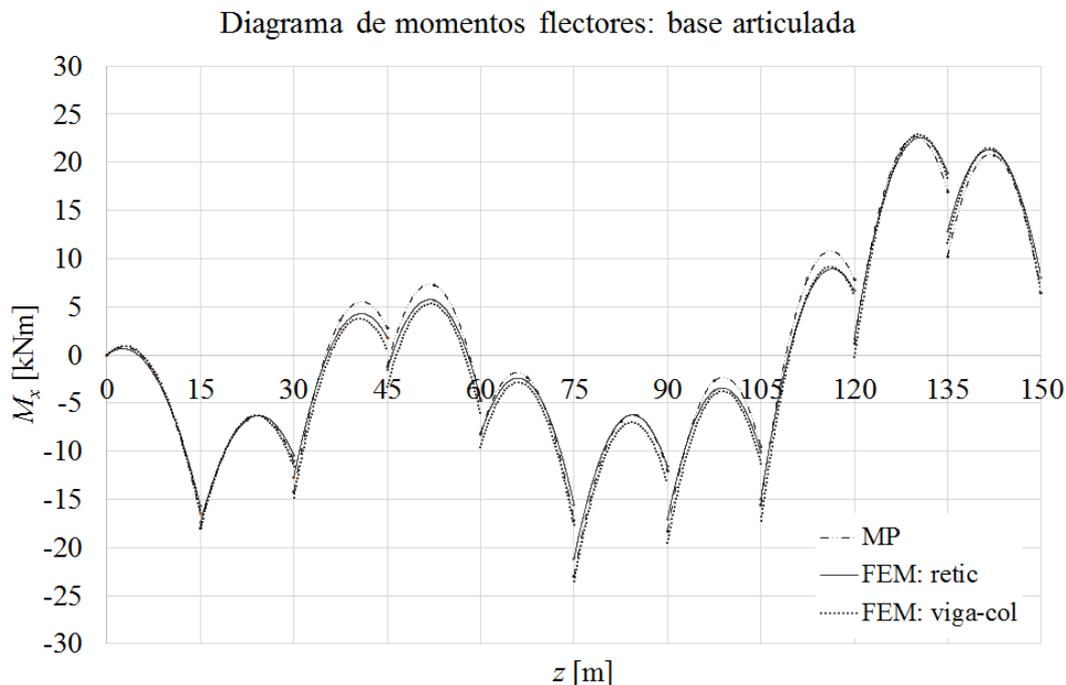


Figura 4.9: Torre 150m: diagrama de momento flector para el MP y para los modelos mediante elementos finitos FEM: retic y FEM: viga-col., con la base de la torre articulada.

4.4.2. Torre de 120 metros: aplicando la teoría de Haringx - Timoshenko

La torre de 120 metros de altura es de sección triangular, de 1.20 metros de ancho de cara medida eje a eje de las barras verticales. Las barras son materializadas por perfiles tubulares circulares de acero de módulo de elasticidad $E_s = 200$ GPa. Los montantes son de 73.00 mm de diámetro exterior y 5.20 mm de espesor y las barras horizontales y las diagonales de diámetro exterior 42.16 mm y 3.42 mm de espesor. La inclinación de las diagonales es de 45.

Los tirantes son de acero EHS, de tensión de rotura 1400 MPa y módulo de elasticidad $E_{cb} = 185$ GPa. Están colocados con espaciamientos de 12 metros en la altura. Los tirantes cuyas cota de anclaje a la torre es +12m, +24m y +36m, se anclan al terreno a una distancia de 23 m del eje del mástil y son de diámetro nominal 6.35mm. Los tirantes cuyas cotas de anclaje son +48m, +60m y +72m, se anclan al terreno a una distancia de 46m y sus diámetros nominales son de 8,00 mm. Los restantes tirantes, cuyos niveles de anclaje a la torre son +84m, +96m, +108m y +120m, se anclan al terreno a una distancia

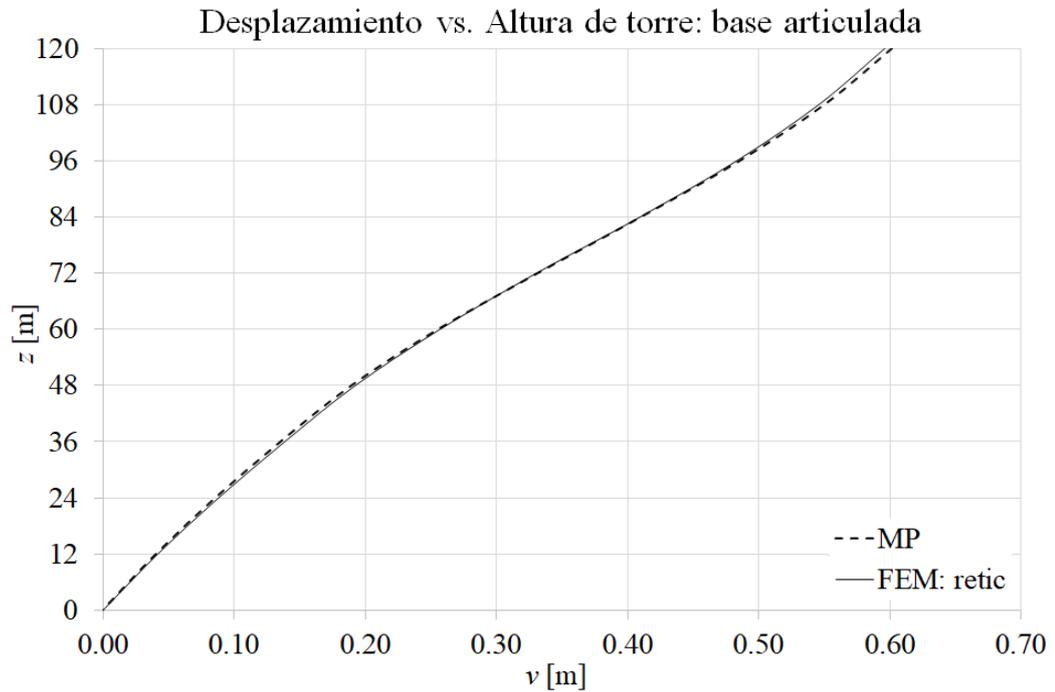


Figura 4.10: Torre 120m: curva desplazamiento lateral vs. altura de la torre para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM:retic, con la base de la torre articulada.

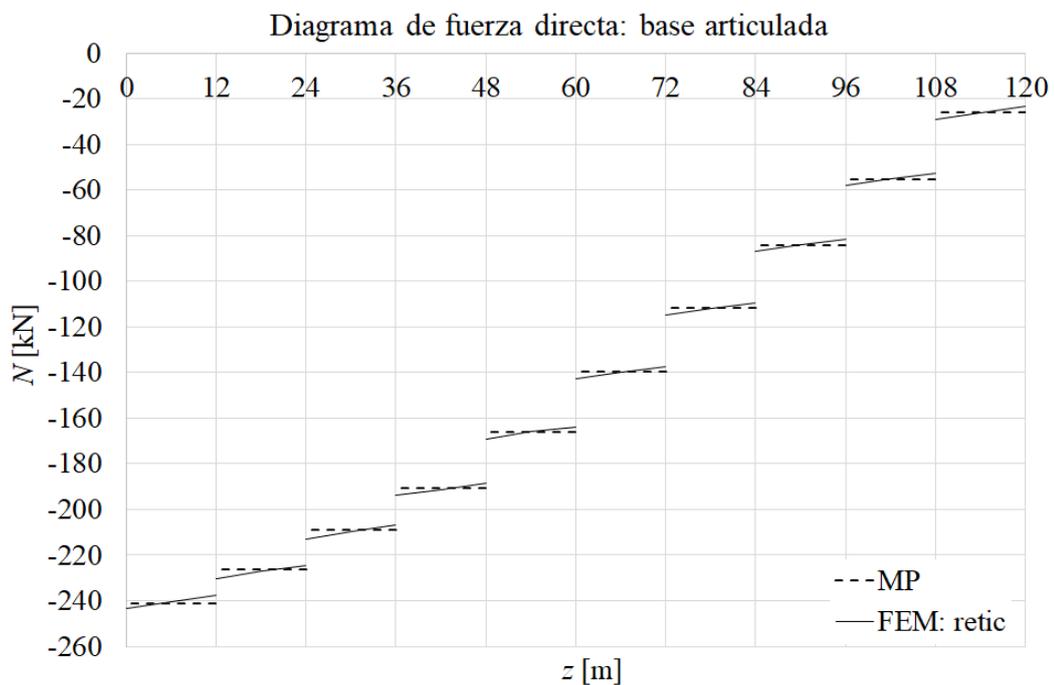


Figura 4.11: Torre 120m: diagrama de fuerza directa para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada.

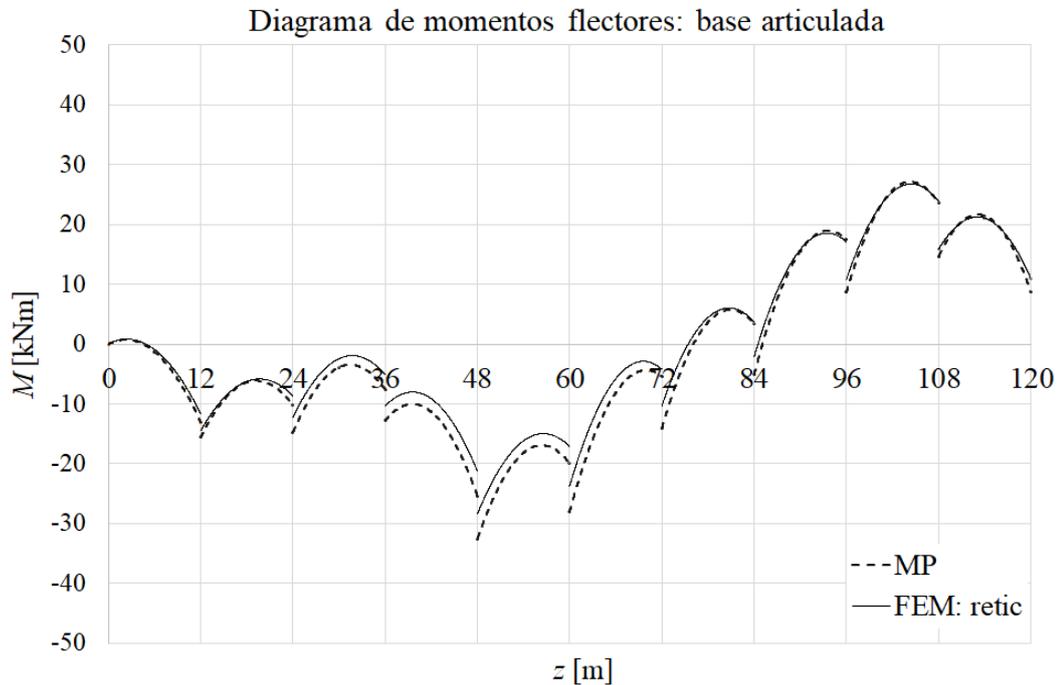


Figura 4.12: Torre 120m: diagrama de momento flector para el MP y el modelo mediante elementos finitos FEM: retic, con la base de la torre articulada.

de 69 m del eje de la torre y sus diámetros nominales son de 8.00mm.

4.4.3. Análisis discusión y comparación de resultados

4.4.3.1. Torre 150 metros

En relación a los desplazamientos máximos de la torre para el modelo cuya base está empotrada, la diferencia entre los modelos MP y FEM: retic., es el orden del 0.06 % y la diferencia entre los modelos FEM: retic., y FEM: viga-col., es del orden del 2 %. En el caso del modelo con la base articulada la diferencia entre los modelo MP y FEM: retic., es el orden del 0.70 % y la diferencia entre los modelos FEM: retic. y FEM: viga-col., es del orden del 2.8 %.

Para la torre con la base empotrada, la diferencia entre los momentos flectores positivos máximos a partir de los modelo MP y FEM: retic., es del orden de 2.2 %, mientras que entre los modelos FEM: retic. y FEM: viga-col., son del orden del 0.2 %. En relación a los momentos flectores negativos máximos la diferencia entre los modelos MP y FEM: retic., es del orden del 5.5 % mientras que entre los modelos FEM: retic. y FEM: viga-col., es del orden del 1.4 %.

Para el caso de la base de la torre con vínculo externo tipo articulación, la diferencia entre los momentos flectores positivos máximos a partir de los

modelo MP y FEM: retic., es del orden de 2.7 %, mientras que entre los modelos FEM: retic. y FEM: viga-col., es del orden del 1.6 %. En relación a los momentos flectores negativos máximos la diferencia entre los modelos MP y FEM: retic., es del orden del 7.8 % mientras que entre los modelos FEM: retic. y FEM: viga-col., es del orden del 10.1 %.

Para los dos tipos de vínculo del extremo de la torre, las deformaciones máximas, los momentos flectores positivos máximos y la fuerza directa presentan diferencias muy poco significativas. Sin embargo, para el caso de la torre con la base empotrada el momento negativo máximo ocurre en la base de la misma y es del orden del 77 % superior que en el caso de la torre con la base articulada y por lo tanto, también lo es el esfuerzo en los montantes del apoyo. De esta manera podemos establecer que el modelo de la torre con la base articulada es más conveniente como solución estructural.

4.4.3.2. Torre 120 metros

En relación al máximo desplazamiento de la torre, la diferencia entre el MP y el FEM:retic. es del orden del 0.86 %. La diferencia entre el máximo momento flector positivo es del orden de 1.5 %, mientras que entre el máximo momento flector negativo es del orden del 12.8 %. Con respecto a las fuerzas axiales, solo pequeñas diferencias fueron observadas.

4.5. Conclusiones parciales: comparación entre los métodos propuestos

En este apéndice se ha expuesto las bases teóricas de un método aproximado propuesto para el cálculo de las deformaciones producidas por los efectos de segundo orden en torres atirantadas de sección triangular. El método se basa en las funciones de estabilidad y puede ser aplicado utilizando la teoría de vigas - columnas de Euler-Bernoulli o la de Haringx - Timoshenko. Si se utiliza la primera de ellas, la reducción de la rigidez de la viga - columna debido a la deformación por fuerza cortante es tenida en cuenta mediante una inercia reducida, mientras que si se utiliza la segunda de ellas, dicho efecto queda contemplando directamente en las ecuaciones que gobiernan el problema. Las propiedades geométricas para la viga - columna equivalente se obtienen

según sea el patrón de reticulado de cada una de las caras de la torre. Los tirantes son modelados como constantes elásticas de resortes equivalentes a partir del módulo de elasticidad secante de los cables, y se tiene en cuenta las excentricidades de los mismos en los puntos de anclaje a la torre.

El método propuesto ha sido validado numéricamente mediante dos casos de estudio comparándolo con los métodos de elementos finitos. A partir de los resultados expuestos las siguientes conclusiones pueden ser deducidas:

1. Se observan diferencias poco significativas en el cálculo de los efectos producidos por las deformaciones de segundo orden de la estructura entre el método propuesto y los métodos de elementos finitos. En otras palabras, los valores de las solicitaciones y de los desplazamientos de la estructura obtenidos mediante el método propuesto son suficientemente precisos comparados con los obtenidos mediante el método de elementos finitos, lo que confirma la validez de las hipótesis adoptadas en el desarrollo del método.
2. El método propuesto mantiene la complejidad y rigurosidad matemática de los métodos analíticos, sin embargo ha sido concebido como un método de aplicación simple. Utiliza los conceptos básicos y más generales desde el punto de vista de la ingeniería estructural lo que permiten al ingeniero visualizar rápidamente cuales son los parámetros que influyen en el diseño.
3. El modelo propuesto utiliza directamente las funciones de estabilidad, lo cual permite trabajar con mayor exactitud, sin la necesidad de realizar aproximaciones y/o divisiones de los elementos entre cada tramo entre tirantes. Es muy simple de programar, incluso a partir del uso de planillas electrónicas como se ha realizado en este trabajo, pues no necesita discretizar la estructura en un número grande de elementos para la convergencia. Es por esto que el método puede ser muy útil en las etapas de diseño preliminar o anteproyecto con un ahorro importante de tiempo en la etapa de diseño. En otras palabras, el método de elementos finitos no presenta en la etapa de anteproyecto mayores ventajas que el método propuesto.
4. En este trabajo también hemos podido establecer que la solución estructural de torre con base articulada es más conveniente desde el punto de vista estructural, ya que, mientras que los desplazamientos máximos

presentan diferencias poco significativas, las fuerzas máximas en los elementos estructurales de la torre son menores que para el caso de torre con base empotrada.

5. Si bien el trabajo se ha centrado en las torres de sección triangular equilátera, con un arreglo para los tirantes de tres por nivel, el método propuesto puede extenderse a otro tipo de arreglo de los cables y a otro tipo de formas de sección. Por lo tanto, el método propuesto, inicialmente desarrollado para el análisis de torres atirantadas puede extenderse al análisis de pilones de puentes atirantados.

Apéndice 5

Breve descripción de los métodos para el análisis estructural de los efectos de la fluencia

En esta sección se describirán brevemente algunos de los métodos para el análisis estructural de los efectos de la fluencia, muchos de los cuales se mencionan a lo largo de esta tesis. El uso del hormigón como un material de construcción hace necesario no solo conocer la propiedades del material en si mismo sino que es necesario comprender y por analizar como estas propiedades afectan el comportamiento de las estructuras.

El análisis matemático de los efectos de la fluencia en las estructuras de hormigón no es una tarea simple. No solo debido a la no-linealidad de las propiedades del hormigón en si mismo, sino que el hormigón suele utilizarse como un material compuesto con acero, tanto pasivo como activo. Por otra parte, el análisis se vuelve aún más complejo cuando se analizan estructuras construidas evolutivamente, como por ejemplo piezas compuestas por hormigones vertidos a diferentes edades y/o vigas o elementos continuos que se forman a partir de elementos prefabricados en los que la continuidad se proporciona mediante el hormigonado en sitio de la juntas entre elementos. Además el fenómeno de la fluencia suele estar acompañado del fenómeno de la retracción del hormigón.

Los métodos que trataremos aquí son aplicables si la ley de fluencia es lineal, lo que implica que es válido el principio de superposición. La ley de fluencia es lineal si se cumplen las hipótesis de linealidad (A. Ross, 1958):

1. la tensión en el hormigón es menor que 40 % de la resistencia característica a la compresión, f_{ck} ;
2. ε es no decreciente; es decir, no se producen deformaciones unitarias de magnitud decreciente;
3. no se produce un cambio significativo en el contenido de humedad de la pieza;
4. no existen variaciones bruscas de la tensión. En la mayoría de las aplicaciones prácticas de la ingeniería civil se cumplen dichas hipótesis por lo que el principio de superposición suele aceptarse en la mayoría de los análisis y los cálculos.

La deformación unitaria en el hormigón en el tiempo t , para una historia determinada de tensiones se obtiene a partir de la Ecuación (5.1):

$$\varepsilon(t) - \varepsilon^0(t) = \int_{\tau=t_0}^{\tau=t} J(t, \tau) d\sigma_c(\tau) \quad (5.1)$$

siendo t es la edad del hormigón al momento de la observación, $J(t, \tau)$ es la función de fluencia y $\varepsilon^0(t)$ es una deformación unitaria no dependiente de la tensión aplicada al hormigón como ser la retracción o la deformación térmica.

Es oportuno mencionar que de acuerdo con el Model Code 2010 (2012) las tensiones en el hormigón deben ser menores que $0.4 \times f_{cm}(t_0)$, de acuerdo al Eurocódigo el valor es $0.45 \times f_{ck}(t_0)$ (UNE-EN 1992-1-1, 2016).

5.1. Método del Módulo Efectivo

El Método del Módulo Efectivo (Effective Modulus Method) es el más viejo, simple y ampliamente utilizado para el análisis de los efectos de largo plazo en elementos de hormigón. Fue propuesto por Faber (1927) a partir de su trabajo experimental.

El método consiste en obtener un módulo de elasticidad reducido que es utilizado en el análisis elástico del elemento. La expresión para dicho módulo viene dado por la Ecuación (5.2):

$$E_{c,eff} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \quad (5.2)$$

siendo $\varphi(t, t_0)$ el coeficiente de fluencia.

Dado que el método no tiene en cuenta la historia de tensiones, proporciona buenos resultados cuando el envejecimiento del hormigón es despreciable, es decir para hormigones de edad avanzada. Si el elemento es sometido a una historia de tensiones decreciente la deformación unitaria a lo largo del tiempo es subestimada, mientras que para una historia de tensiones creciente la deformación unitaria es sobrestimada. La tensión es subestimada en procesos de relajación, es decir la tensión calculada es mayor que los valores reales. La Figura (5.1) muestra la curva de relajación para una muestra de hormigón sometida a deformación constante durante 140 días, la Figura (5.2) muestra la deformación unitaria en el hormigón sometido a una historia de tensiones creciente aplicada en cinco escalones de carga durante 112 días y la Figura (5.3) muestra la deformación unitaria en el hormigón sometido a una historia de tensiones decreciente también aplicada en cinco escalones de carga durante 113 días. En las Figuras se comparan los resultados obtenidos mediante varios métodos de análisis con los valores observados del ensayo.

5.2. Método de la Tasa de Fluencia

Las bases del método (por su nombre en inglés Rate of Creep Method) fueron establecidas por Glanville (1930) a partir su trabajo experimental. La formulación matemática fue posteriormente desarrollada por Whitney (1932) y aplicada a problemas estructurales complejos por Dischinger Rüşh et al. 1983¹.

El método se basa en asumir que la tasa de cambio de la fluencia con el tiempo ($d\varphi/dt$) es independiente de la edad de carga, lo que significa que las curvas de fluencia son paralelas para cualquier edad de aplicación de la carga. Luego, solo se necesita una curva del coeficiente de fluencia para la edad inicial de puesta en carga del hormigón. Bajo estas hipótesis y asumiendo que la deformación unitaria no depende de la tensión ε^0 (como ser por ejemplo la retracción) varía a la misma tasa que la fluencia, la Ecuación (5.1) se escribe como la Ecuación (5.3):

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi} = \frac{1}{E_c(t)} \frac{d\sigma_c}{d\varphi} + \frac{\sigma_c}{E_c(t_0)} + \frac{d\varepsilon^0}{d\varphi} \quad (5.3)$$

donde t_0 es la edad del hormigón al momento de puesta en carga por primera

¹El trabajo citado no es el original, el cual está escrito en idioma Alemán.

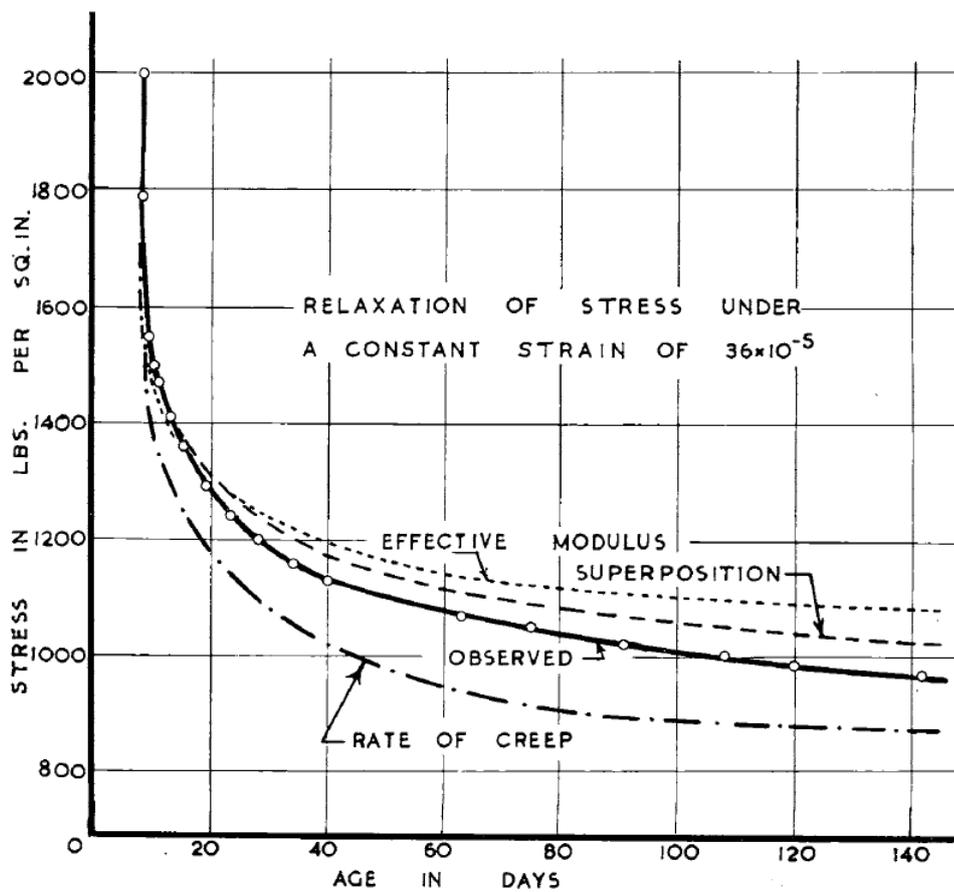


Figura 5.1: Tensión en el hormigón bajo deformación unitaria constante. La tensión inicial de 2000 psi (13.79 MPa) causó una deformación unitaria inmediata de 36×10^{-5} la que se mantuvo constante durante 140 días. Tomada de A. Ross (1958).

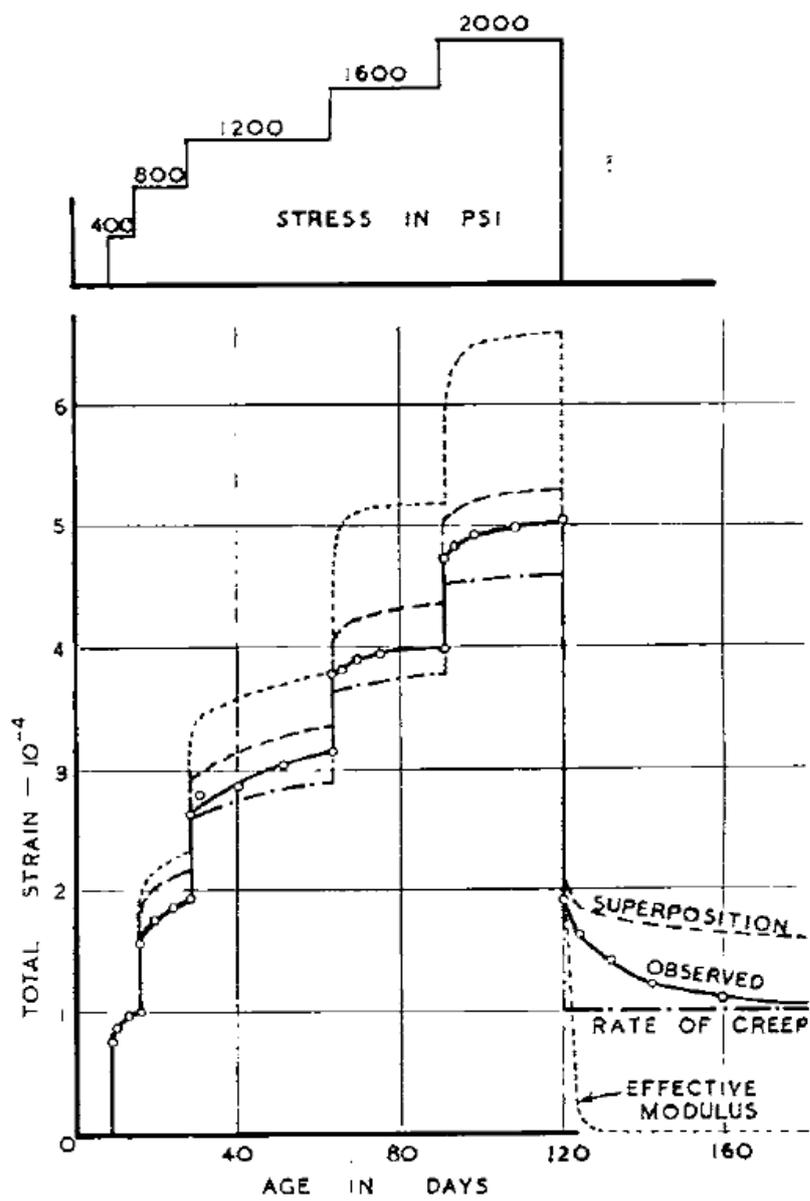


Figura 5.2: Deformación unitaria en el hormigón sometido a una historia creciente de tensiones. Tomada de A. Ross (1958).

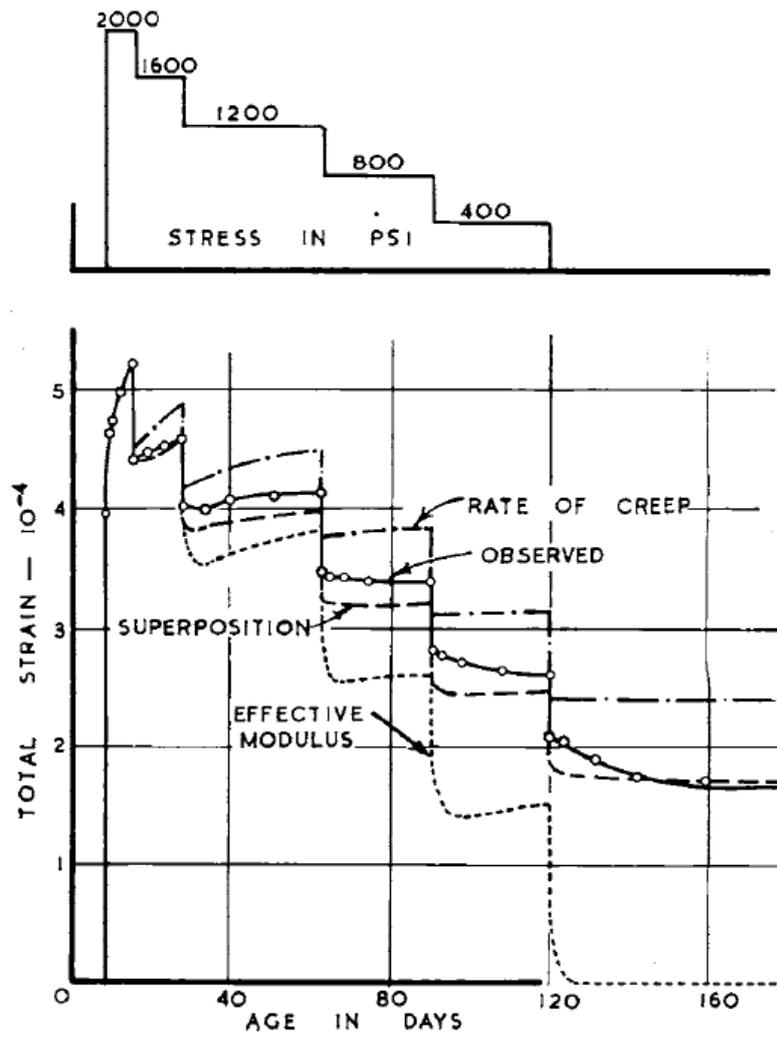


Figura 5.3: Deformación unitaria en el hormigón sometido a una historia decreciente de tensiones. Tomada de A. Ross, 1958.

vez. Esta ecuación diferencial de primer orden con variable independiente φ , puede resolverse de manera exacta para numerosos casos prácticos.

La Figura (5.4) muestra de manera esquemática la representación gráfica del coeficiente de fluencia de acuerdo con el Método de la Tasa de Fluencia.

El método no predice la recuperación por fluencia si la tensión es removida en un tiempo t_1 posterior a t_0 ($t_1 > t_0$). Para una historia de tensiones crecientes la deformación por fluencia es subestimada, Figura (5.2) y para una historia de tensiones decrecientes es sobrestimada, Figura (5.3).

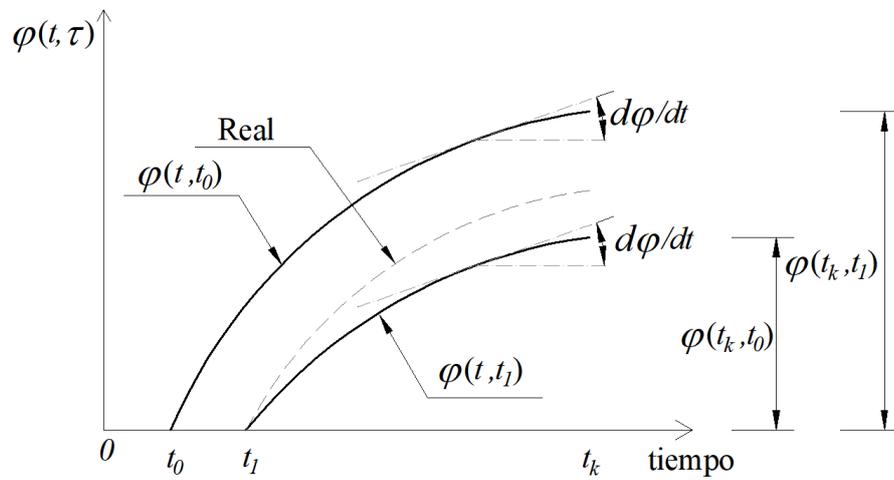


Figura 5.4: Representación esquemática del coeficiente de fluencia de acuerdo al Método de la Tasa de Fluencia.

5.3. Método de la Tasa de Flujo

El Método de la Tasa de Flujo (Rate of Flow Method) fue propuesto por England y Illston (1965). Los autores propusieron representar la función de fluencia como la suma de tres componentes: la deformación unitaria elástica instantánea ε_{el} , la deformación unitaria elástica diferida (recuperable) ε_d y la deformación unitaria por flujo plástico (no recuperable) ε_f . De acuerdo con England y Illston la deformación unitaria elástica diferida es independiente de la edad de aplicación de la carga y las curvas del flujo plástico se asumen que son “paralelas”. Por lo tanto, la función de fluencia para una tensión aplicada en un tiempo τ posterior a t_0 (edad de carga inicial) puede escribirse como en

el Ecuación (5.4):

$$\begin{aligned}
 J(t, \tau) &= \frac{1}{E_c(\tau)} + \check{C}_d(t - \tau) + \check{C}_f(t) - \check{C}_f(\tau) \\
 &= \frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_d(t - \tau)}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_f(t) - \varphi_f(\tau)}{E_c(t_0)} \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

en donde \check{C}_d y \check{C}_f son las funciones de fluencia específica relativas a la deformación unitaria elástica diferida y a la deformación unitaria por flujo plástico, respectivamente, y φ_d y φ_f los coeficientes de fluencia relativos a la deformación unitaria elástica diferida y a la deformación unitaria por flujo plástico, respectivamente. Este tipo de función de fluencia fue utilizado por el CEB-FIP, Model Code de 1978 (International Federation for Structural Concrete (FIB), 1978).

El Método de la Tasa de Flujo proporcionó una mejora considerable con respecto al Método de la Tasa de Fluencia ya que fue capaz de modelar la fluencia recuperable en un hormigón joven en descarga. Sin embargo la función de fluencia en la que se basa el método no representa correctamente la fluencia en un hormigón virgen cargado a edades $t > t_0$ (Neville, 1983).

Basados en la función de fluencia propuesta por England y Illston (1965), la Figura (5.5) muestra la deformación unitaria en función del tiempo, hasta un instante $t_k \gg t_1$, en un hormigón sometido a una tensión unitaria aplicada en t_0 y mantenida constante hasta t_1 .

5.4. Método de Dischinger Mejorado

Siguiendo el modelo para la función de fluencia propuesto por England y Illston (1965), Bazant y Najjar (1973)¹ propusieron tratar la componente elástica diferida mediante la utilización de un módulo de elasticidad ficticio $E_{c,d}$, ya que la deformación unitaria elástica diferida se desarrolla más rápidamente que la deformación debida al flujo plástico. De acuerdo con Rüşh et al. (1983)² el tiempo medio de desarrollo de la primera es del orden de los 30 días mientras que el de la segunda es de 300 días. En vista de lo anterior, para un

¹El trabajo citado no es el original, el cual está escrito en idioma Alemán.

²El trabajo original escrito por Rüşh y Jungwirth está en idioma Alemán.

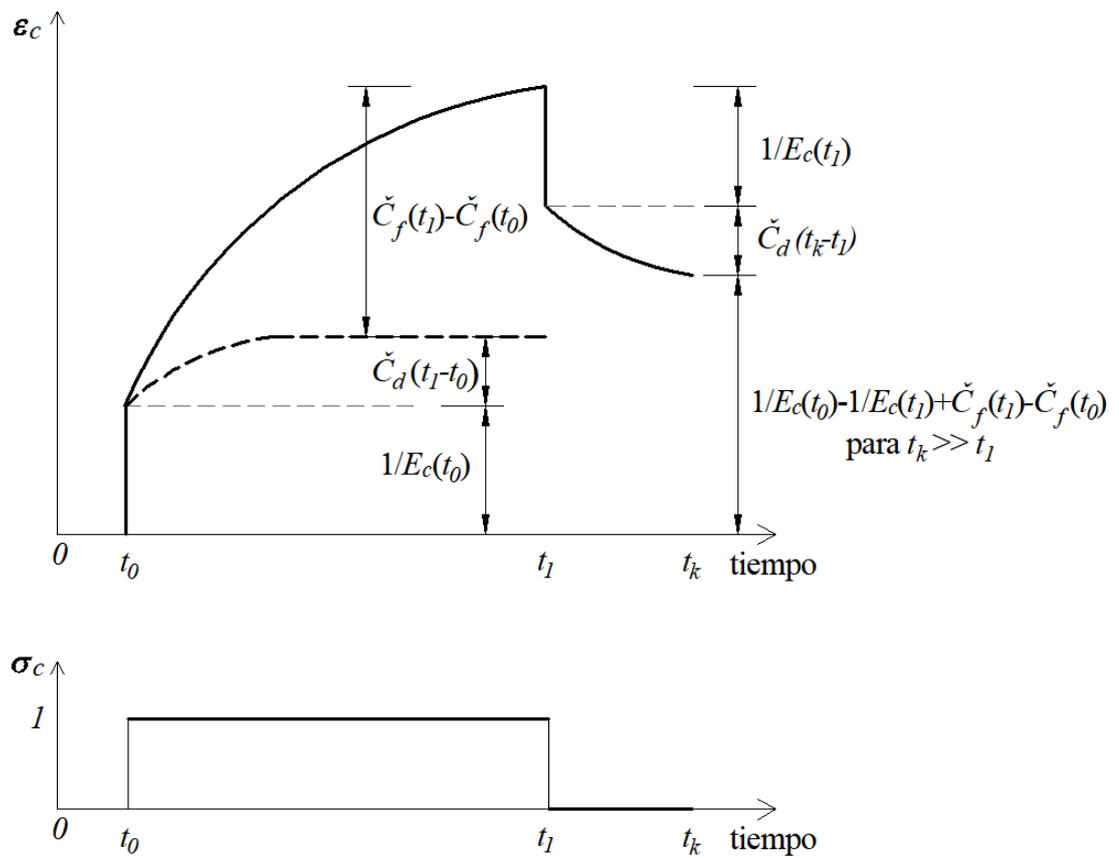


Figura 5.5: Deformación unitaria en función del tiempo debida a una tensión unitaria mantenida constante entre t_0 y t_1 , de acuerdo a la función de fluencia propuesta por England y Illston (1965).

tiempo τ mayor que t_0 , $E_{c,d}$ puede expresarse como en la Ecuación (5.5):

$$\frac{1}{E_{c,d}(\tau)} = \frac{1}{E_c(\tau)} + \frac{\varphi_d}{E_c(t_0)} \quad (5.5)$$

y la expresión de la función de fluencia viene dada por la Ecuación (5.6)

$$J(t, \tau) = \frac{1}{E_{c,d}(\tau)} + \check{C}_f(t) - \check{C}_f(\tau) \quad (5.6)$$

Nielsen (Bazant y Najjar, 1973) sugirió un valor de $\varphi_d = 1/3$ mientras que Rüş et al. (1983) adoptan un valor de $\varphi_d = 0.40$ para $(t - \tau) > 90$ días. En la Figura (5.6) se muestra la función de fluencia del método de Dischinger mejorado. Las líneas punteadas indican la función de fluencia propuesta por England y Illston (1965).

La ecuación diferencial de acuerdo al método de Dischinger mejorado viene dada por la Ecuación (5.7):

$$\frac{d\varepsilon}{d\varphi_f} = \frac{(1 + \varphi_d)}{E_c(t_0)} \frac{d\sigma_c}{d\varphi_f} + \frac{\sigma_c}{E_c(t_0)} + \frac{d\varepsilon^0}{d\varphi_f} \quad (5.7)$$

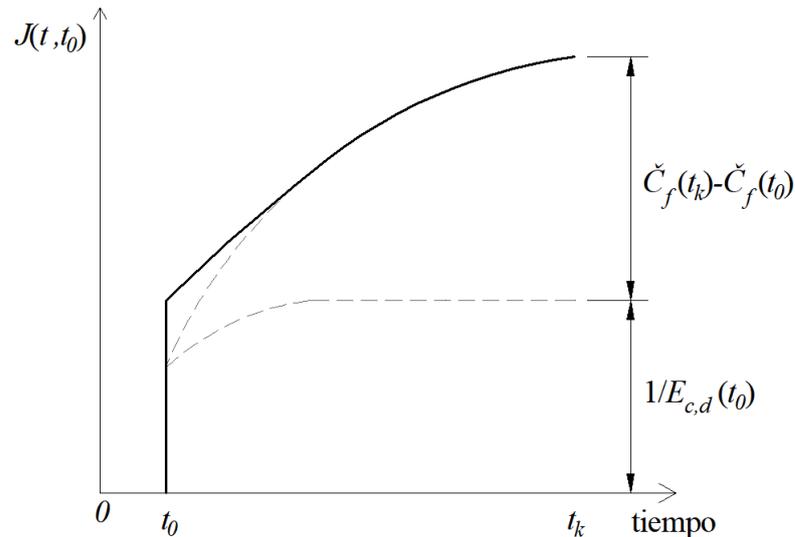


Figura 5.6: Función de fluencia para el método de Dischinger mejorado

5.5. Método de Paso a Paso

La Ecuación (5.1) no puede resolverse de manera exacta a menos que la función de fluencia cumpla ciertos requisitos¹. Por lo que para su resolución puede ser necesario recurrir a métodos numéricos, como por ejemplo el denominado Método de Paso a Paso.

El Método de Paso a Paso es el más general y puede aplicarse a cualquier función de fluencia, cualquiera sea la historia de tensiones o de deformaciones (Neville, 1983). El método consiste en dividir el tiempo total ($t_k - t_0$) en intervalos de tiempo pequeños Δt_j y considerar que en cada intervalo se aplica un incremento de tensión $\Delta\sigma_c(t_j)$.

Existen diferentes métodos para realizar la integración numérica de la Ecuación (5.1). Ghali et al. (2002) asumen que el incremento de tensión $\Delta\sigma_c(t_j)$ se aplica en el medio del j -ésimo intervalo y calculan el incremento de la deformación unitaria al final de dicho intervalo. Bazant y Najjar (1973) utilizan una aproximación trapezoidal en donde la función de fluencia utilizada para el incremento de tensión en el j -ésimo intervalo se aproxima como la media aritmética de la función de fluencia calculada al inicio y al final de dicho intervalo. Gilbert y Ranzi (2010) utilizan tanto la aproximación rectangular como la aproximación trapezoidal. En la aproximación rectangular el incremento de tensión se aplica al inicio del j -ésimo intervalo y la función de fluencia se calcula a partir del tiempo inicial del intervalo.

5.6. Método de Módulo Efectivo Ajustado por la Edad

Si bien el método fue originalmente propuesto por Trost (Rüsh et al. 1983)², la formulación general y su demostración fue realizada por Bazant (1972) de acuerdo con el siguiente teorema:

Si $\varepsilon(t) - \varepsilon^0 = \epsilon_0 + \epsilon_1\varphi(t, t_0)$ para $t \geq t_0$ y $\sigma = 0$ para $t < t_0$ en el cual ϵ_0 y ϵ_1 son constantes arbitrarias, entonces se cumple la Ecuación (5.8):

$$\Delta\sigma(t) = \bar{E}_c(t, t_0) (\Delta\varepsilon(t) - \Delta\hat{\varepsilon}(t)) \quad (5.8)$$

en donde $\Delta\varepsilon(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)$ y $\Delta\sigma(t) = \sigma(t) - \sigma(t_0)$. $\Delta\hat{\varepsilon}(t)$ y $\bar{E}_c(t, t_0)$ vienen

¹Como sucedía por ejemplo en los Métodos de la Tasa de Fluencia y la Tasa de Flujo.

²El trabajo citado no es el original, el cual está escrito en idioma Alemán.

dados por las Ecuaciones (5.9) y (5.9), respectivamente:

$$\Delta\hat{\varepsilon}(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E_c(t_0)}\varphi(t, t_0) + \varepsilon^0(t) - \varepsilon^0(t_0) \quad (5.9)$$

$$\bar{E}_c = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi(t, t_0)\varphi(t, t_0)} \quad (5.10)$$

\bar{E}_c se denomina módulo de elasticidad ajustado por la edad y $\chi(t, t_0)$ se denomina coeficiente de envejecimiento (aging coefficient) y su expresión viene dada por la Ecuación (5.11):

$$\chi(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{\sigma_c(t_0) - \sigma_c(t)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} = \frac{E_c(t_0)}{E_c(t_0) - E_R(t, t_0)} - \frac{1}{\varphi(t, t_0)} \quad (5.11)$$

en donde $E_R(t, t_0)$ representa la función de relajación del hormigón, definida como la tensión en el instante t debida a una deformación unitaria aplicada en el instante t_0 y mantenida constante durante el período t_0 a t .

La contribución más importante del teorema de Bazant (1972) es que tanto el coeficiente de envejecimiento como módulo de elasticidad ajustado por la edad son independientes de las constantes ϵ_0 y ϵ_1 y por lo tanto permanecen invariantes para cualquier historia de deformaciones unitarias que sea lineal con $\varphi(t, t_0)$ (Bazant y Najjar, 1973).

A partir de la Ecuación (5.1) y aplicando el método de integración propuesto por Ghali et al. (2002) puede obtenerse la expresión para la relajación entre t_0 y t_k , Ecuación (5.12):

$$E_R(t_k, t_0) = \sum_{i=1}^{i=k} \frac{E_c(\check{T}_i)}{1 + \varphi(t_i, \check{T}_i)} \left[1 - \sum_{j=1}^{j=i-1} \Delta\sigma_c(\check{T}_j) \left(\frac{1 + \varphi(t_i, \check{T}_j)}{E_c(\check{T}_j)} \right) \right] \quad (5.12)$$

en donde \check{T}_j corresponde al tiempo medio del j -ésimo intervalo de tiempo, es decir, $\check{T}_j = (t_j + t_{j-1})/2$ y $\Delta\sigma_c(\check{T}_j)$ es la variación de tensión aplicada en el instante \check{T}_j .

La Figura (5.7) muestra la discretización del intervalo de tiempo $t_k - t_0$ en k intervalos de tiempo. Dado que la tensión inicial $\sigma_c(t_0)$ se aplica de forma instantánea, el primer intervalo se considera de duración nula, es decir $t_1 - t_0 = 0$.

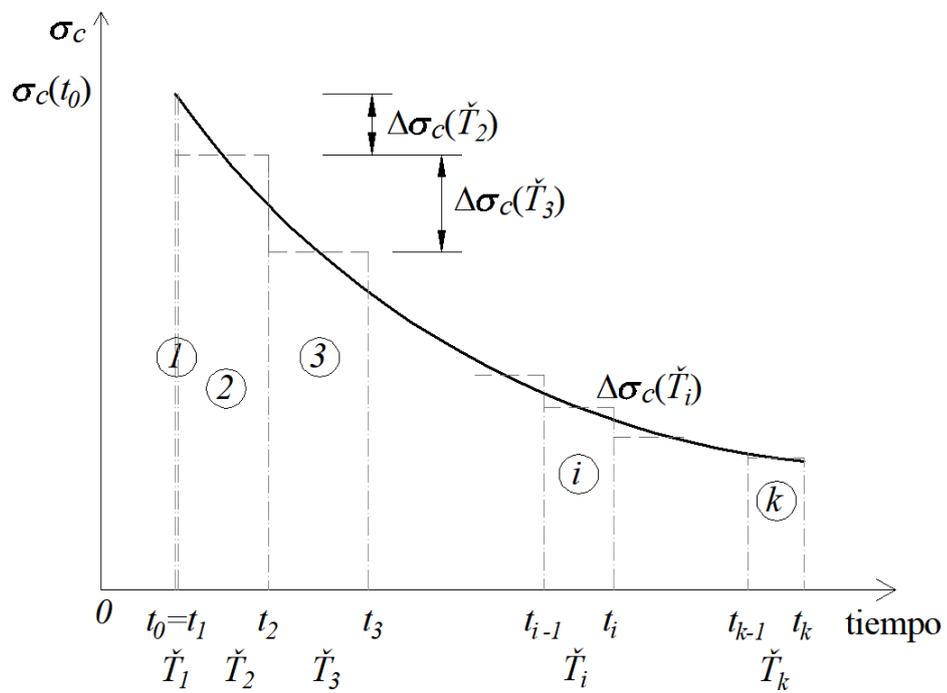


Figura 5.7: Discretización del intervalo de tiempo e incrementos de tensión para la obtención de la función de relajación del hormigón.

Apéndice 6

Diagramas de flujo

6.1. Programa para mástiles atirantados

La Figura 6.1 muestra el diagrama de flujo del algoritmo propuesto para obtener la configuración deformada en el análisis de mástiles atirantados.

6.2. Programa vigas con pretensado interior no adherente

Las Figuras 6.2 y 6.3 muestran los diagrama de flujo del algoritmo computacional propuesto para el análisis a lo largo del tiempo de vigas isostáticas con pretensado interior no adherente mediante el Método de Paso a Paso.

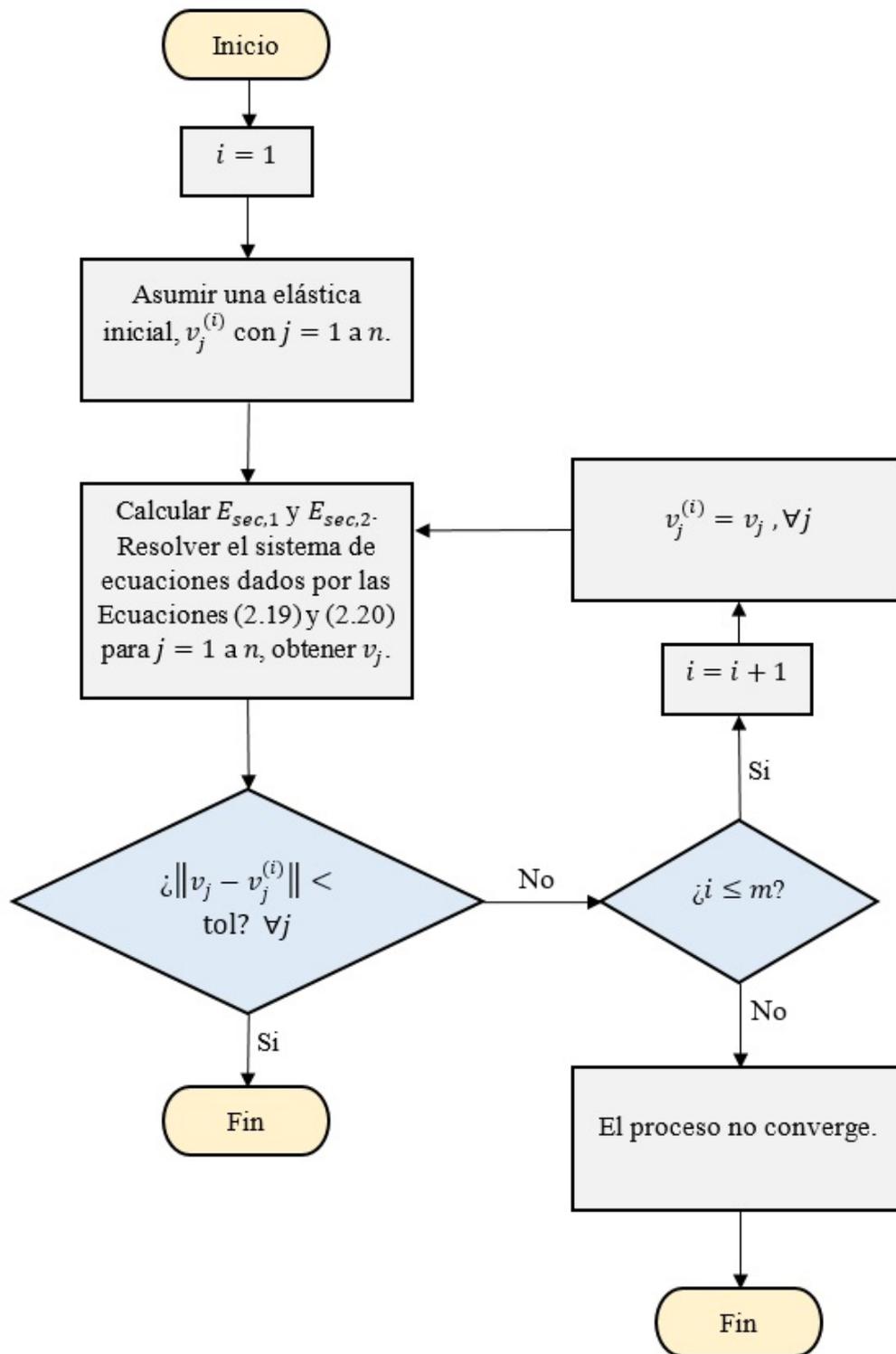


Figura 6.1: Diagrama de flujo: método iterativo para el análisis de mástiles atirantados.

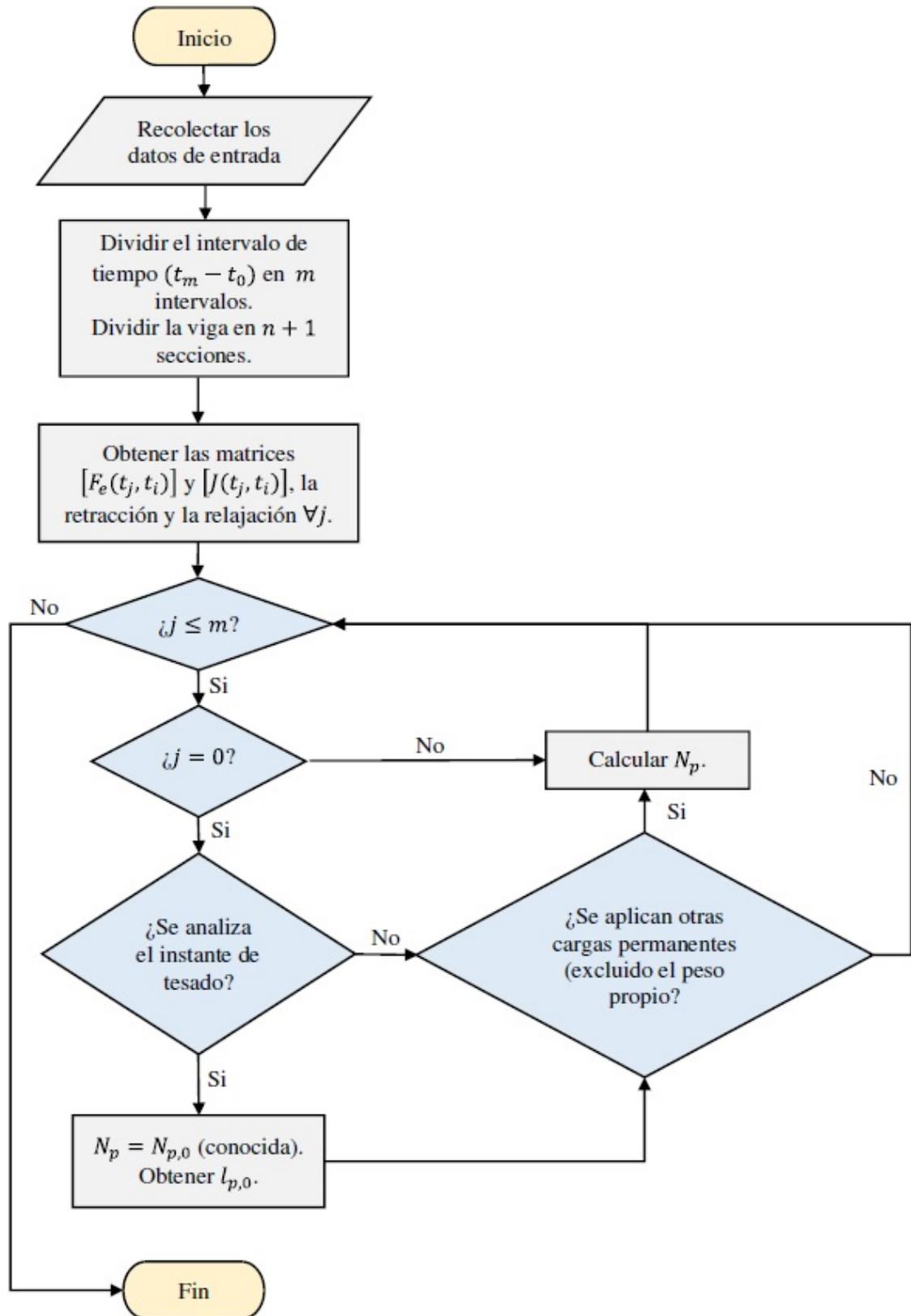


Figura 6.2: Diagrama de flujo: Método de Paso a Paso en vigas isostáticas con pretensado interior no adherente.

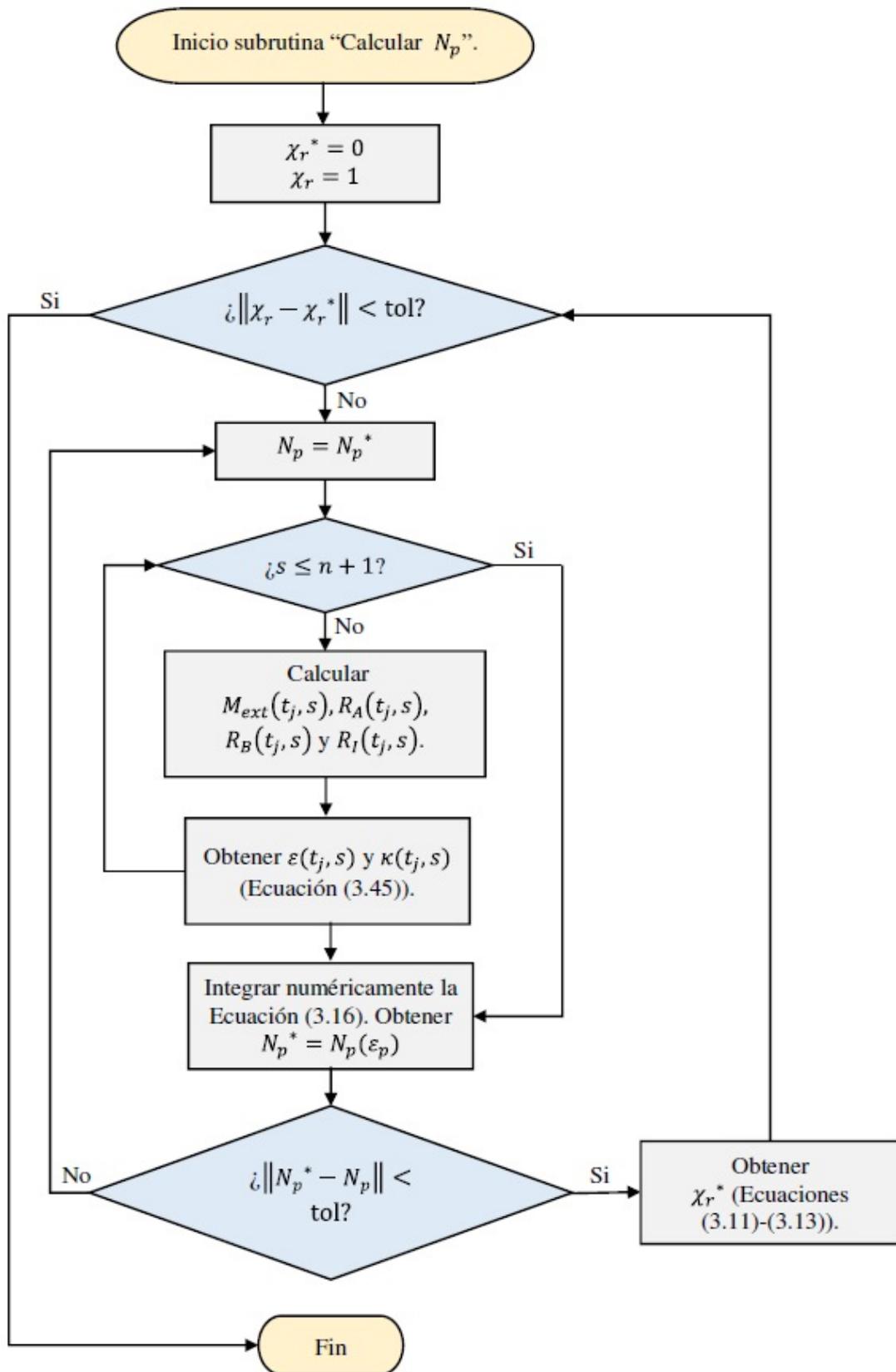


Figura 6.3: Diagrama de flujo: subrutina Obtención N_p .