



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

FACULTAD DE CIENCIAS
CENTRO DE MATEMÁTICA

Tesis de Doctorado:

*Modelos asimétricos de Lévy en
Finanzas.*

27 de abril de 2016

Federico De Olivera

Orientador: Ernesto Mordecki

Doctorado en Matemática
(PEDECIBA)
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

RESUMEN

El tema central de la tesis es el estudio de la asimetría en mercados de Lévy y la visualización de ésta por medio de un parámetro que encontramos de gran relevancia. Introducimos los modelos de Lévy asimétricos, que tienen una medida simétrica de saltos multiplicada por un factor exponencial de amortiguación, con el objetivo de estudiar la forma de la volatilidad implícita que simula la sonrisa de una cara (*smirk*), extendiendo en este sentido los resultados obtenidos por Fajardo and Mordecki [2006] y Carr and Lee [2009].

El factor de amortiguación depende de un parámetro β , que resulta en una medida de la asimetría del modelo. Mostramos que la variación de este parámetro produce la sonrisa típica observada en la curva de volatilidad implícita y obtenemos la propiedad de “bi-simetría” de la volatilidad implícita en términos del logaritmo de la monetización y el parámetro de asimetría β . El principal resultado encontrado en este contexto muestra cierto comportamiento de monotonía de la volatilidad implícita de los modelos asimétricos alrededor del punto de simetría $\beta = -1/2$. Con este resultado y la “bi-simetría” obtenemos respuesta negativa en un contexto general al supuesto realizado en Fajardo and Mordecki [2014] sobre el crecimiento del precio de una opción de compra como función de β . Mostramos, por medio de un sencillo ejemplo no usual, que nuestro resultado no puede ser extendido en un contexto más general. Los resultados encontrados, que se aplican a los principales modelos encontrados en la literatura, son independientes del vencimiento de la opción. Esto se diferencia de los resultados encontrados últimamente en la literatura, donde principalmente se estudia la *smirk* cuando el vencimiento de las opciones tiende a cero (por ejemplo ver Gerhold and Gülüm

[2014] o Figueroa-López and Ólafsson [2015]).

El análisis visual correspondiente al parámetro de asimetría β nos conduce a la posibilidad de neutralizar el riesgo de un portafolio con respecto a este parámetro, con el objetivo de disminuir el riesgo de caer en grandes pérdidas. De esta forma proponemos un portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral (con derivada nula respecto al precio de stock y al parámetro β), este tipo de portafolio neutraliza el efecto de un cambio grande en el precio de stock y un cambio en la smirkness. Obtenemos una sensible reducción de la varianza de las ganancias y pérdidas con respecto al portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral (con derivada primera y segunda nula respecto al precio de stock) cuando usamos datos del índice SP&500 correspondientes al período del 2 de enero de 2006 al 31 de diciembre de 2006, dando sustancial evidencia empírica de la utilidad del portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. Una exploración sobre la variabilidad en el tiempo de los parámetros del modelo usado en la calibración para el cálculo de derivadas (modelo Normal Inverse Gaussian), sobre los períodos de tiempos utilizados en la evaluación de la cobertura, muestran que el parámetro con mayor variación relativa es justamente nuestro parámetro de asimetría, ratificando la importancia de neutralizar la variabilidad en este parámetro. Por otra parte, obtenemos fórmulas para la esperanza y varianza de un portafolio al variar el tiempo, bajo un modelo de Lévy, cuando éste está formado por opciones de compra y venta, el activo subyacente y el activo sin riesgo.

Una vez que hemos estudiado las características de asimetría en términos del parámetro β en modelos de Lévy, extendemos el marco de trabajo a procesos con incrementos independientes (no necesariamente estacionarios), donde en particular estudiamos la relación entre la asimetría estadística y la asimetría riesgo neutral con la introducción de la transformada de Esscher. Consistente con la literatura, utilizando datos de SP&500 encontramos nuevamente evidencia sobre la variabilidad temporal de los parámetros para un vencimiento fijo (ver por ejemplo Andersen and Andreasen [2000] o Cuadro 3 en Carr et al. [2002a]).

Volviendo a los modelos de Lévy, pero en un contexto general, estudiamos la posibilidad de obtener fórmulas para las griegas (derivadas de cualquier orden respecto a parámetros de interés). En este sentido obtenemos fórmulas para funciones de pagos generales a partir de la fórmula de Lewis (ver Lewis [2001]), pero poniendo especial énfasis en las opciones de compra, obtenemos expresiones agradables para las griegas de cualquier orden, en general dependiendo sólo de la densidad del proceso.

ABSTRACT

The focus of the thesis is the study of skewness in Lévy markets and its visualization through a parameter which is of great importance. We introduce skewed Lévy models, characterized by a symmetric jump measure multiplied by dumping exponential factor. These models exhibit a clear implied volatility pattern, where the dumping parameter controls the skew of the implied volatility curve, resulting in a measure of the skewness of the model. We show that the variation of this parameter produces the typical smirk observed in implied volatility curves, extending in this sense the results by Fajardo and Mordecki [2006] and Carr and Lee [2009].

The dumping factor depends on a parameter β . We show that the variation of this parameter produces the typical smile observed in the implied volatility curve and we get the “bi-symmetry” property of the implied volatility in terms of log moneyness and β . The main results found in this context show a certain monotony in the implied volatility of the skewed models around the point of symmetry $\beta = -1/2$. With this result and the “bi-symmetry” property, in a general context, we get negative response for assumption made in Fajardo and Mordecki [2014], where they assume the call price growth as a function of β . We show, through an unusual example, that our results can not be extended in a more general context. The results, which apply to the main models of literature, are independent of the maturity of the option. This differs from the results found on the literature lately, where the authors studied mainly smile when the maturity tends to zero (see Gerhold and Gülüm [2014] or Figueroa-López and Ólafsson [2015]).

The visual analysis of the asymmetry parameter β , leads to the possibility of neutralizing the risk of a portfolio with respect to this parameter, in order to reduce the risk of large losses. Thus we propose a portfolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral (zero-derivative with respect to stock price and the parameter β). This type of portfolio neutralizes the effect of a large change in the stock price and in smirkness. We get a significant reduction in the variance of the gains and losses on the portfolio $\Delta\Gamma$ -neutral (first and second zero-derivative with respect to stock price), using index data SP& 500 for the period from January 2, 2006 to December 31, 2006, giving substantial empirical evidence of the utility of portfolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. An exploration on the time variability of the parameters, used in the calibration model to calculate derivatives (Normal Inverse Gaussian model), on time periods used in the evaluation of coverage, show that the parameter with more variation is precisely our asymmetry parameter, confirming the importance of neutralizing the variability in this parameter. Moreover, we obtain formulas for the expectation and the variance of a portfolio by varying the time under Lévy model, when it is made by buying and selling options, the underlying asset and the riskless asset.

Once we have studied the characteristics of symmetry in terms of the parameter β in Lévy models, we extend the framework to processes with independent increments (not necessarily stationary), where in particular we study the relationship between skewness and neutral risk asymmetry by introducing the Esscher transform. Using data from SP&500, we find evidence of the temporal variability of the parameters for a fixed maturity, consistently with the literature (see for example Andersen and Andreasen [2000] or Table 3 in Carr et al. [2002a]).

Returning to Lévy models, but in a general context, we studied the possibility of obtaining formulas for the greeks (derivatives of any order with respect to the parameters of interest). In this way, we obtain general formulas for payments functions from the Lewis formula (see Lewis [2001]). When we use the European options payments functions, we obtain nice expressions of the greeks of any order, in general, depending only through the density process.



*Dedicado a mi familia:
Marcela, Santiago, Matías y Gonzalo.*

AGRADECIMIENTOS

Sin lugar a duda una lista de agradecimientos siempre quedará incompleta, no obstante pondré mi mejor esfuerzo en no dejar de lado a aquellas personas que hicieron su aporte para permitirme llegar a este punto.

Lamarlo tutor ya resultaría muy poco, quiero expresar mi más profundo agradecimiento a Ernesto Mordecki, nuestro “padre académico”. Son extensísimas las acciones que no dejan de asombrarme: la confianza, el apoyo, las ideas, la disponibilidad, etc. Ernesto siempre confió en que el camino podía ser transitado, desde mis inicios en la Licenciatura en Estadística, dando pelea para que me permitieran inscribir en la Maestría en Ingeniería Matemática y abriendo la puerta confiando en que podía llegar a culminar esta tesis. Se dice que uno aprende muchas cosas de los grandes maestros, en particular cuento con la gran suerte de haber estudiado con Ernesto Mordecki.

También agradezco a mis “hermanos académicos”, en particular a aquellos con los que compartimos y discutimos en los seminarios de finanzas: Federico Dalmao, Andrés Sosa, Gabriel Illanes, Fabián Croce y Alejandro Cholaquidis. Sin lugar a duda las convivencias y aliento fueron de gran motivación.

Por haberme apoyado a continuar con mis estudios, mi agradecimiento para con Raúl Tempone. Lamentablemente la distancia nos hizo imposible trabajar en esta tesis, debiendo cambiar mi tema propuesto originalmente.

Agradezco a José Fajardo por la ayuda invaluable.

A mi padre, madre y hermanos (Claudia, Alejandro y Pablo), por haberme

enseñado en el día a día, desde la infancia, que a pesar de no tener recursos, uno puede levantarse y soñar, que siempre se puede salir adelante y que no hay metas imposibles. En forma de resumen, cito un proverbio árabe que lo escuché por primera vez de mi hermano:

“Si uno quiere hacer algo, siempre encuentra un medio.

Pero si no quiere hacerlo, seguro encuentra una excusa.”

Para cerrar, mi agradecimiento a Marcela Ribas, por haberme enseñado a estudiar cuando arrancamos en estadística, por siempre apoyar que la educación no es para obtener un mejor trabajo, sino que es un estilo de vida, por la inagotable tolerancia, por “bancarme” y enseñarme día a día a ser una mejor persona, y por darme a mis tres angelitos: Santiago, Matías y Gonzalo a quienes agradezco, en lo que respecta a esta tesis, por enseñarme a poner constantemente a prueba mi poder de concentración.

Mis estudios de doctorado recibieron el apoyo financiero del Consejo Formación en Educación y la Agencia Nacional de Investigación e Innovación, sin el cual hubiese sido definitivamente imposible haber soñado siquiera en comenzarlos.

ÍNDICE GENERAL

Resumen	3
Introducción	15
0.1. Elementos del mercado financiero	16
0.2. Tres nociones de asimetría en mercados de Lévy	22
0.3. Contribuciones	24
0.4. Organización	27
1. Volatilidad implícita en modelos asimétricos	29
1.1. Introduction	30
1.2. El modelo	31
1.2.1. Modelos asimétricos	31
1.3. Dualidad Put-Call y volatilidad implícita.	32
1.4. Relaciones para las densidades de los modelos asimétricos.	36
1.5. Volatilidad implícita en un entorno de $x = 0$ y $\beta = -1/2$	42
1.6. Ejemplos	47

1.6.1. Modelos de Actividad Infinita.	48
1.6.2. Modelos de difusión con saltos	50
1.6.3. Un ejemplo complementario	52
1.7. Conclusiones	53
2. Cobertura estática sobre una opción de compra	55
2.1. Introducción	56
2.2. Esperanza y varianza del portafolio	61
2.3. Coberturas $\Delta\Gamma$ -neutral y $\Delta\mathcal{B}$ -neutral con datos de SP&500	67
2.3.1. Variabilidad del modelo en el tiempo	77
2.4. Conclusiones	80
3. Asimetrías estadística y riesgo neutral en procesos con incrementos independientes	83
3.1. Modelo de mercado	84
3.1.1. Estructura de saltos	84
3.1.2. Medidas de asimetrías de Lévy	85
3.2. Modelos estocásticos de Lévy exponenciales	87
3.3. Momentos	88
3.4. De asimetría estadística a asimetría riesgo neutral	92
3.5. Asimetría y prima de riesgo por saltos	94
3.6. Curva $\beta(t)$ para SP&500	96
3.7. Conclusiones	99
4. Griegas bajo modelos de Lévy	101
4.1. Introducción	102
4.2. Griegas para opciones europeas	103

4.2.1. Griegas de primer orden	105
4.2.2. Griegas de segundo orden	105
4.3. Griegas para opciones de compras	106
4.3.1. Fórmula de Black-Scholes generalizada para procesos de Lévy.	109
4.3.2. Griegas de primer orden	110
4.3.3. Griegas de segundo orden	115
4.3.4. Griegas de tercer orden	120
4.4. Ejemplos	122
4.4.1. El modelo de Black-Scholes	123
4.4.2. El modelo de Merton	123
4.4.3. El modelo Variance Gamma	128
4.5. Conclusiones	129
5. Visualización en finanzas y aspectos numéricos	133
5.1. Visualización	134
5.2. Aspectos numéricos	140
5.2.1. Cálculo del precio de opciones	140
5.2.2. Cálculo de la volatilidad implícita	143
5.2.3. Calibración	143
5.2.4. Simulación rápida de Procesos infinitamente divisibles. . .	146
5.3. Programación	148
A. Monotonía de la volatilidad implícita en función de la medida de Lévy.	153
B. Procesos de Lévy	157
B.1. Equivalencia de medidas	165

C. Reglas de precios y medidas martingala	169
Índice de figuras	177
Índice de cuadros	181
Bibliografía	183

INTRODUCCIÓN

En este capítulo presentamos los principales elementos que funcionan como eje transversal a lo largo de la tesis. La tesis es complementada con los Apéndices B y C donde exponemos una breve introducción a los procesos de Lévy y presentamos las principales nociones de fijación de precios y medidas martingalas.

En la sección 0.1 mostramos las nociones generales de mercados de Lévy, opciones, volatilidad implícita y la fórmula de Lewis para valuación de opciones europeas, conceptos que usaremos a lo largo de la tesis.

En la sección 0.2 introducimos tres conceptos distintos de asimetría encontrados en la literatura, dando lugar al principal elemento desarrollado en la presente tesis, la variabilidad en términos de un parámetro que encontramos relevante a la hora de cuantificar la asimetría de la volatilidad implícita.

Por último, en la sección 0.3 describimos los principales aportes realizados en la tesis y comentamos algunas futuras posibles líneas de trabajo.

0.1. Elementos del mercado financiero

En esta sección introducimos algunos conceptos importantes en el desarrollo de la tesis como los mercados de Lévy, las nociones de opciones y la volatilidad implícita. Con el fin de simplificar la exposición y mantenernos en el contexto de la tesis, hacemos referencia siempre a un proceso de Lévy, pero varias de las nociones aquí introducidas no dependen del tipo de proceso al que hacemos referencia cómo ser opciones, volatilidad implícita, etc.

Por un *mercado de Lévy* entendemos un modelo de un mercado financiero con dos activos: una cuenta de ahorros determinista $B = \{B_t\}_{t \geq 0}$, con

$$B_t = e^{rt}, \quad r \geq 0,$$

donde tomamos $B_0 = 1$ por simplicidad, y un activo con riesgo $S = \{S_t\}_{t \geq 0}$, con evolución aleatoria, modelado por

$$S_t = S_0 e^{X_t + rt}, \quad S_0 > 0, \quad (1)$$

donde $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ determinado por la terna característica (γ, σ, Π) (ver descomposición de Lévy-Itô: Proposición B.1). Mediante la representación de Lévy-Kinchine (ver Proposición B.2) obtenemos

$$\mathbb{E}[e^{zX_t}] = e^{t\psi(z)},$$

donde

$$\psi(z) = \gamma z + \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zh(y)) \Pi(dy)$$

y la función de truncación usual es $h(y) = y \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}}$.

Bajo la condición de riesgo neutral, consideramos la medida martingala \mathbb{Q} , equivalente a \mathbb{P} , bajo la cual el proceso descontado $\{e^{-rt} S_t\}$ es una \mathbb{Q} -martingala (ver Apéndice C).

En términos del exponente característico del proceso, esto significa que

$$\psi(1) = 0, \quad (2)$$

basado en el hecho que $\mathbb{E} e^{-rt} S_t = e^{t\psi(1)} = 1$, la condición (2) puede también ser formulada en términos de la terna característica (γ, σ, Π) del proceso X como en la Proposición B.6:

$$\gamma = -\sigma^2/2 - \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) \Pi(dy). \quad (3)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \psi(z) &= z\gamma + z^2 \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{zy} - 1 - zh(y)] \Pi(dy) \\ &= -z(1-z) \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} [(e^{zy} - 1) - z(e^y - 1)] \Pi(dy) \end{aligned} \quad (4)$$

A lo largo de la tesis, salvo que se quiera explicitar otro caso, a un proceso de Lévy con terna (γ, σ, Π) con la restricción riesgo neutral (3) lo anotaremos

$$\{X_t, \mathbb{Q}\} \quad (5)$$

Una *opción* es un instrumento financiero derivado que se establece en un contrato que da a su comprador el derecho, pero no la obligación, de comprar o vender bienes o valores a un precio predeterminado (strike o precio de ejercicio), hasta una fecha concreta (vencimiento). Si bien existe una gran variedad de opciones, como por ejemplo las opciones digitales, activo-o-nada, etc. básicamente son dos la más usadas: las opciones de compra (Call) y las opciones de ventas (Put).

Si el precio del activo es un proceso estocástico S_t , entonces, una opción de compra con precio de ejercicio K y vencimiento T , tiene un valor a tiempo $t = 0$ igual a

$$Call(K) = e^{-rT} \mathbb{E}(S_t - K)^+.$$

De forma análoga una opción de venta tiene un valor igual a

$$Put(K) = e^{-rT} \mathbb{E}(K - S_t)^+.$$

Si consideramos un mercado de Lévy y anotamos $x = \log(K/S_0 e^{-rT})$, el logaritmo de la monetización, entonces $Call(x) = S_0 \mathbb{E}(e^{X_T} - e^x)^+$ y $Put(x) = S_0 \mathbb{E}(e^x - e^{X_T})^+$.

Aquí obtenemos una primera identidad, llamada paridad entre opciones de compra y venta:

$$\begin{aligned}
Call(x) + Put(x) &= S_0 \mathbb{E}(e^{X_t} - e^x)^+ + S_0 \mathbb{E}(e^x - e^{X_t})^+ \\
&= S_0 \mathbb{E}(e^{X_t} - e^x) = S_0(1 - e^x)
\end{aligned} \tag{6}$$

Además, a partir del valor de una opción de compra o venta, podemos obtener la ley del proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$.

Sea $x \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Call(x, T)}{\partial x} &= S_0 \frac{\partial}{\partial x} \int_x^{+\infty} (e^y - e^x) \mathbb{Q}(dy, T) \\
&= -e^x \mathbb{Q}(X_T > x),
\end{aligned}$$

donde hemos supuesto la existencia de densidad de la medida \mathbb{Q} .

Este resultado es conocido en Dupire [1994] donde además, suponiendo la existencia de densidad suave de S_t , se obtiene directamente:

$$\frac{\partial^2 Call(K, T)}{\partial K^2} = f_{S_t}(K).$$

El modelo de Black-Scholes (ver Black and Scholes [1973]) es un pilar en la valuación de opciones. Dicho modelo puede verse en nuestro contexto quitando los saltos correspondientes al proceso de Lévy.

Usando la simetría de la distribución gaussiana obtenemos:

$$BS_c(x, \sigma) = S_0 N(d_1) - S_0 e^x N(d_2), \tag{7}$$

donde $d_1 = \frac{-x + \sigma^2 \frac{t}{2}}{\sigma \sqrt{t}}$, $d_2 = \frac{-x - \sigma^2 \frac{t}{2}}{\sigma \sqrt{t}}$ y $N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{-\frac{u^2}{2}} du$.

Manteniendo fijos los restantes parámetros y el precio de ejercicio, tenemos que

$$\frac{\partial BS_c(x, \sigma)}{\partial \sigma} = S_0 \phi(d_1) \sqrt{t} > 0.$$

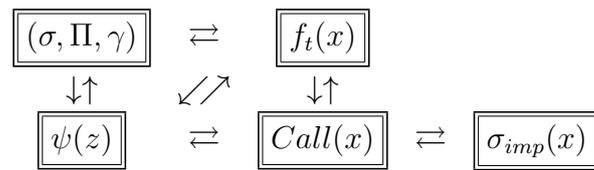
Por lo tanto tenemos que $BS_c(\sigma)$ es una biyección entre los intervalos $(0, \infty)$ e $I = (S_0(1 - e^x) \mathbf{1}_{x < 0}, S_0)$.

De este modo, dado el valor de una opción de compra para un valor de x , $Call(x)$, existe un único $\sigma_{imp}(x)$ tal que

$$Call(x) = BS_c(x, \sigma_{imp}(x)).$$

La función $\sigma_{imp} : I \rightarrow (0, \infty)$ es llamada *volatilidad implícita*.

Hemos mostrado que la volatilidad implícita determina de forma única el valor de una opción de compra. Así mismo, el valor de la opción de compra en términos del precio de ejercicio (o del logaritmo de la monetización), determina de forma única la ley del proceso de base y si éste es dado por un proceso de Lévy, por la fórmula de Lévy-Itô (ver B.1) queda determinada por su exponente característico. De forma resumida tenemos el siguiente esquema:



En la Figura 1 mostramos la comparación de la variabilidad de la densidad, el precio de una opción de compra y la volatilidad implícita cuando uno de los parámetros es modificado. Observamos la relevancia de la volatilidad implícita, siendo su curva notoriamente más sensible a los cambios en los parámetros que el resto de las curvas representadas.

Como último punto haremos una breve introducción a la fórmula de Lewis, la cual es una herramienta ampliamente utilizada en este trabajo a la hora de determinar el valor de una opción en un mercado de Lévy.

Fórmula de Lewis

Consideremos como antes que el precio de stock es modelado por $S_t = S_0 e^{X_t + rt}$ donde $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy que satisface $\mathbb{E}(e^{X_t}) = 1$, además supongamos que la función característica de X_t puede ser extendida sobre una franja paralela al eje real \mathcal{S}_X .

Consideremos también una función de pagos w y supongamos que existe su transformada de Fourier en términos de $s = \log(S_T)$ sobre una franja paralela al

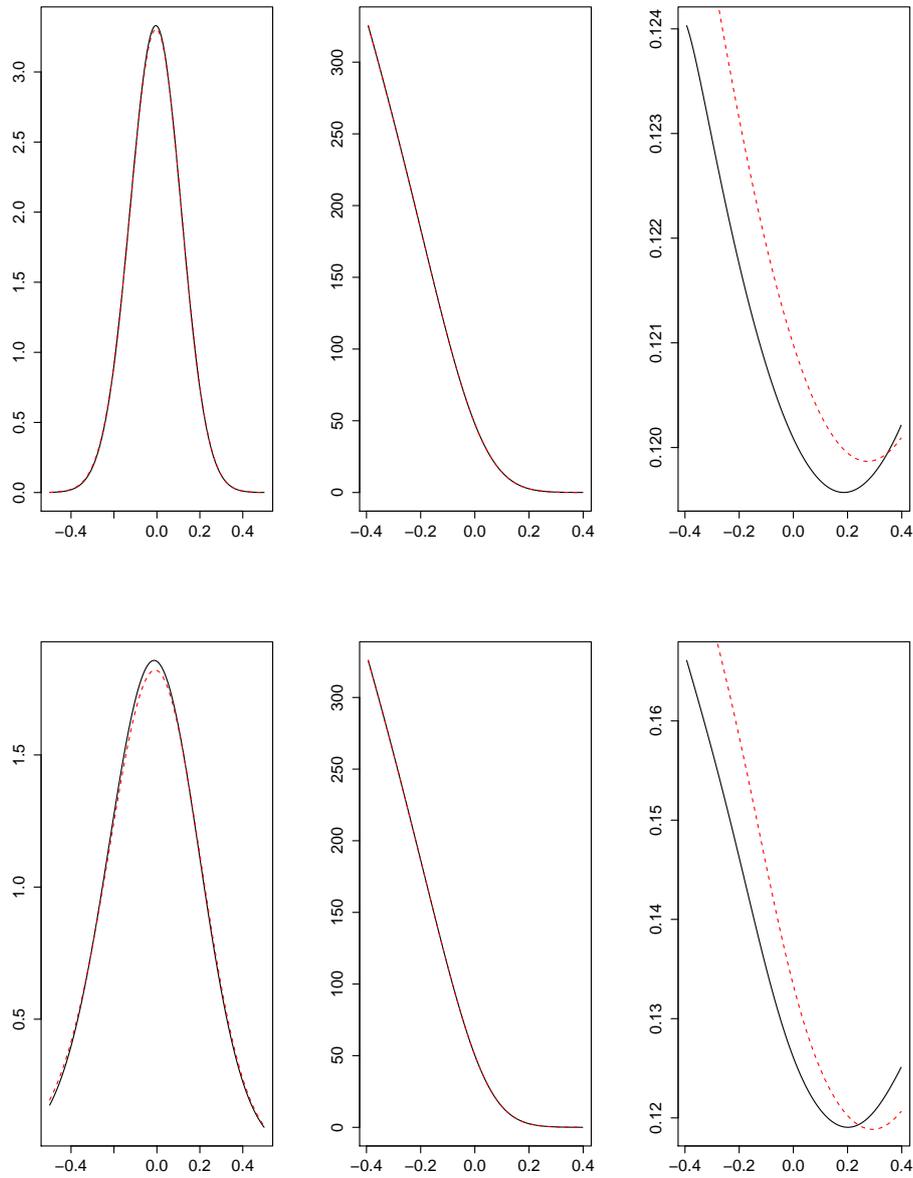


Figura 1: Gráficos de densidad (izquierda), precio de una opción de compra (centro) y volatilidad implícita (derecha) bajo el modelo Normal Inverse Gaussian (arriba) y el modelo de Merton (abajo). Para el modelo Normal Inverse Gaussian tomamos: en negro $\alpha = 70$, $\beta = -7$, $\lambda = 1$, en rojo $\alpha = 70$, $\beta = -10$, $\lambda = 1$. Para el modelo de Merton tomamos: $\sigma = 0,1$, $\sigma_J = 0,1$, $\mu_J = -0,07$, $\lambda = 0,5$, en rojo $\sigma = 0,1$, $\sigma_J = 0,1$, $\mu_J = -0,1$, $\lambda = 0,5$. Otros parámetros: $T = 1$, $r = 0,05$, $S_0 = 1000$.

eje real \mathcal{S} :

$$\widehat{w}(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{izs} w(s) ds,$$

donde $z \in \mathcal{S}_w$.

Por ejemplo, para la función de pago correspondiente a una opción de compra tenemos $w(s) = (e^s - K)^+$ y aquí $\mathcal{S}_w = \{z \in C : \text{Im}(z) > 1\}$ ya que

$$\begin{aligned} \widehat{w}(z) &= \int_{\mathbb{R}} e^{izs} (e^s - K)^+ ds \\ &= \int_{s > \log(K)} e^{izs} (e^s - K) ds, \end{aligned}$$

converge sólo para $\text{Im}(z) > 1$ y en tal caso obtenemos

$$\widehat{w}(z) = -K^{iz+1}/(z^2 - iz). \quad (8)$$

Volviendo al caso general, sea \mathcal{S}_X^* la reflexión de \mathcal{S}_X respecto al eje real, si $\mathcal{S}_X^* \cap \mathcal{S}_w \neq \emptyset$ entonces el valor de la opción es dado por

$$V = \frac{e^{-rT}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{-izY} e^{T\Psi(-z)} \widehat{w}(z) dz, \quad (9)$$

donde $Y = \ln(S_0) + rT$, $z = u + iv$ con $v \in \mathcal{S}_X^* \cap \mathcal{S}_w$ (ver Lewis [2001]).

En particular, para una opción de compra, de (8) y (9) tenemos:

$$Call(K) = -\frac{Ke^{-rT}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{-iz(\ln(S_0/K)+rT)} \frac{e^{T\Psi(-z)}}{z^2 - iz} dz, \quad (10)$$

donde $v > 1$, adicionalmente se agrega alguna condición del tipo $v < \beta$ dependiendo del modelo de Lévy (ver Tablas 2.1 y 3.1 en Lewis [2001]).

A lo largo de la tesis usaremos mayormente el precio de la opción de compra en términos del logaritmo de la monetización $x = \ln(K/S_0) - rT$, de donde (10) queda expresado en términos de x como sigue:

$$Call(x) = -\frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\Psi(-z)}}{z^2 - iz} dz. \quad (11)$$

Para una opción de venta el desarrollo es análogo, con la diferencia que la función de pago $w(x) = (e^x - K)^-$ tiene una transformada de Fourier para $\text{Im}(z) < 0$. Por ende las fórmulas (10) y (11) se adaptan para una opción de venta tomando simplemente $v < 0$.

Para otras funciones de pago hacemos referencia a Lewis [2001] y Eberlein et al. [2008].

0.2. Tres nociones de asimetría en mercados de Lévy

Desde la introducción del modelo Black-Scholes en 1973 (Black and Scholes [1973]) y su correspondiente fórmula de precios para opciones, se han aclarado dos hechos prácticamente al mismo momento: por un lado la importancia de la contribución de este trabajo, que puede ser considerado fundacional de la matemática financiera moderna, introduciendo, en particular, el concepto de “probabilidad riesgo-neutral” y, por otro lado, las inexactitudes encontradas entre los precios de las opciones de mercado y los de las opciones predichas por la fórmula de Black-Scholes. Para distinguir la distribución de probabilidad de los precios cotizados con esta nueva noción de probabilidad riesgo-neutral, fue utilizado el nombre de medida de probabilidad “histórica” o “física”. Respecto a esto, consideramos que la fórmula de Black-Scholes en finanzas juega un rol similar a la regresión lineal en estadística. Aunque se sobreentiende que en muchas situaciones las relaciones entre dos variables no son lineales, la regresión lineal provee información relevante sobre esta relación, y puede ser considerada como un “primer orden” de aproximación para el modelo correcto. Y la propuesta alternativa de modelos, que puede ser en términos matemáticos considerada como una “aproximación de segundo orden”, abre un rango completo de diferentes posibilidades, resultando de la sustitución del movimiento browniano por familias más sofisticadas de procesos estocásticos, por supuesto, con más parámetros.

Varias características empíricas, ambas de probabilidades estadísticas y de riesgo neutral no corresponden a la exacta naturaleza del movimiento browniano.

En términos muy generales, clasificamos modelos alternativos en dos grupos, los que preservan la propiedad de continuidad de las trayectorias (aquí tenemos los modelos de un factor, donde la volatilidad tiene dependencia espacio-temporal

y los modelos de dos factores que incorporan una segunda fuente de aleatoriedad), y los que preservan la independencia de los incrementos, principalmente procesos de Lévy.

Modelos de referencia en estas tres direcciones se pueden considerar, el modelo de elasticidad constante por Cox and Ross [1976], el modelo de volatilidad estocástica de Hull and White [1987], y el modelo de difusión con saltos propuesto por Merton [1976].

Una discusión interesante sobre la dicotomía “saltos o no saltos” puede encontrarse en el libro de modelado con saltos en finanzas por Cont and Tankov [2004].

Un hecho relevante y definitivo relacionado con el éxito del modelo de Black-Scholes es su dependencia prácticamente de un sólo parámetro σ , la volatilidad. Ninguno de los modelos alternativos, los cuales contienen la volatilidad como su principal parámetro, contienen un segundo parámetro que puede ser trazado a lo largo de diferentes modelos. Y esto es uno de los puntos débiles de los modelos con saltos: ellos incorporan la medida de Lévy partiendo de modelos uniparamétricos en el caso de Black-Scholes, a modelos infinito dimensionales en el caso de Lévy.

Una segunda característica relevante en la modelación en finanzas es la *asimetría* (skewness). En términos estadísticos, skewness es una medida de la asimetría de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria. En conclusión, por un lado tenemos la volatilidad, que en términos estadísticos es una medida del segundo momento centrado, y queremos incorporar en el análisis una medida del tercer momento centrado. En finanzas, distinguimos tres diferentes nociones de asimetrías (skewness) que pueden ser encontradas en la literatura:

- La *asimetría estadística* del logaritmo de los precios. Ésta puede ser estimada de los precios históricos, en la medida de probabilidad histórica.
- La *asimetría riesgo neutral* del logaritmo de los precios, que puede ser calculada (indirectamente) de precios de opciones.
- La *asimetría de la volatilidad implícita* o *smirkness* que mide la desviación de la simetría de la volatilidad implícita, cuando la consideramos como una función del logaritmo de la monetización (log-moneyness).

Una discusión sobre la relación entre la *asimetría estadística* y la *asimetría*

riesgo neutral es realizada en el capítulo 3, donde de forma general trabajamos con procesos de incrementos independientes.

Uno de los principales puntos de interés de la presente tesis es el análisis de la volatilidad implícita y su forma de sonrisa *smirk*. El análisis es realizado en función de un parámetro que encontramos especialmente de interés β , *parámetro de asimetría*, basados en la simetría de la volatilidad implícita encontrada en Fajardo and Mordecki [2006].

0.3. Contribuciones

En el presente trabajo se han abordado diferentes aspectos de los mercados financieros, en particular nos concentramos en Mercados de Lévy y en el estudio del comportamiento de la volatilidad implícita y sus consecuencias prácticas como son cubrir portafolios disminuyendo el riesgo de caer en grandes pérdidas.

Una de las contribuciones del trabajo realizado en la tesis es desarrollada en el capítulo 1. La motivación surge del artículo de Fajardo and Mordecki [2006], donde se prueba que cuando el parámetro de asimetría β toma el valor $-1/2$, entonces la volatilidad implícita es simétrica respecto al logaritmo de la monetización $x = \log(K/S_0) - rT$. En este capítulo obtenemos un resultado aún no advertido, en términos de β , que da la “bi-simetría” de la volatilidad implícita en términos de x y β (ver (1.7)).

También en este capítulo nos encontramos motivados en el estudio del crecimiento de la volatilidad implícita, en términos del parámetro de asimetría β , inicialmente estudiado en Fajardo and Mordecki [2014]. En dicho artículo se hace el supuesto que el precio de una opción de compra (y en consecuencia de la volatilidad implícita) es creciente con el parámetro β (ver Assumption 3.2 en Fajardo and Mordecki [2014]).

En el capítulo 1, Teorema 1.1, probamos un resultado de monotonía de la volatilidad implícita en un entorno de $x = 0$ y $\beta = -1/2$, en particular obtenemos que si x se encuentra en un semi entorno derecho del origen, entonces la volatilidad implícita es creciente con respecto a β (en un entorno del punto $\beta = -1/2$). Utilizando la simetría (1.7) obtenemos que si x se encuentra en un semi entorno izquierdo del origen, entonces la volatilidad implícita es decreciente con respecto a β , en un entorno de $\beta = -1/2$. Este resultado muestra la no aplicabilidad,

al menos en condiciones generales, del “supuesto 3.2” en Fajardo and Mordecki [2014].

Así también, en el citado artículo se termina motivando el análisis en términos del parámetro de asimetría:

“However, we are interested in the possible misspecifications in the models when using a fixed equivalent martingale measure. That is, if we change the parameter in the Lévy measure described by (16), what happens to the option price? Unfortunately, we do not have a result that guarantees the validity of assumption 3.2. In that sense, the results obtained by Bergenthum and Rushendorf (2007) and the use of the covariance inequality can give some insight, as shown in proposition 4.5. Also, for stochastic volatility models we only have numerical evidence of the monotonicity properties of option prices with respect to the correlation parameter. We conclude that this is not an easy task and is left as an open question.”

Entendemos que con lo desarrollado en el capítulo 1 se responde de forma negativa dicha pregunta, ya que si en particular nos concentramos en $x = 0$ (*at the money*) entonces la volatilidad implícita es simétrica en el parámetro β respecto a $\beta = -1/2$ (ver (1.7)), lo que impide el crecimiento, al menos en un entorno de dicho punto. También el ejemplo mostrado en la sección 1.6.3 no permite encontrar la monotonía con β incluso para $x > 0$. Vale acotar que si algunos de los otros parámetros del modelo se escribe en función de β , entonces el “supuesto 3.2” podrá verificarse o no, dependiendo de la relación impuesta en un modelo particular (por ejemplo el modelo de Merton donde la varianza de los saltos se ponga en función de β).

El ejemplo introducido en la sección 1.6.3 es de gran importancia, mostrando por un lado que los modelos de Lévy pueden generar gráficas de volatilidades implícitas que no se corresponden con las observadas en el mercado, pero dando lugar a un aspecto teórico de suma importancia al momento de buscar propiedades generales para la volatilidad implícita bajo procesos de Lévy.

A raíz de este ejemplo, cabe preguntarse si para cierto rango de valores de β y de precios de mercados (por ejemplo $\beta \in (-\infty, -1/2)$ y $x \in (-\infty, 0)$) y para cierta familia de modelos (por ejemplo modelos asimétricos con densidad unimodal) la volatilidad implícita sea creciente con el parámetro de asimetría. Esto abre un camino de estudio a futuros trabajos.

El trabajo realizado en el capítulo 1 es motivo del artículo *Implied Volatility*

Smirk in Lévy Markets (ver De Olivera et al. [2015b]), actualmente modificándose con la incorporación de ajuste a datos reales.

Un segundo aporte original de la tesis es referente a las coberturas de portafolios. En el capítulo 2 exponemos un nuevo tipo de coberturas, en este caso con respecto al parámetro de asimetría. Utilizando datos del índice SP&500 del año 2006, comparamos dos tipos de portafolios: el usual portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral (con derivada nula de primer y segundo orden respecto al precio de stock) y un portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral (con derivada nula respecto del precio de stock y del parámetro de asimetría β). Los resultados obtenidos proporcionan evidencia sobre la importancia de neutralizar el portafolio respecto del parámetro de asimetría en busca de una disminución de la varianza de las ganancias y pérdidas.

El trabajo realizado en este capítulo nos aporta elementos para trabajar en un artículo empírico sobre cobertura en el contexto de nuestro modelos asimétricos (De Olivera et al. [2015a]).

Al momento de desarrollar coberturas en mercados de Lévy nos enfrentamos a la necesidad de calcular las derivadas del precio de una opción respecto de determinados parámetros de interés. En el capítulo 4 desarrollamos el cálculo de las derivadas parciales de una opción europea con función de pago general, con respecto a cualquier parámetro de interés. Esas derivadas son usualmente llamadas como “Griegas”. En particular desarrollamos fórmulas para el caso de una opción de compra o venta las cuales en su mayoría dependen solamente de la función de densidad del proceso.

Este capítulo ha sido aceptado para la publicación en “Trends in Mathematical Economics” (De Olivera and Mordecki [2015a]).

Otro aporte realizado en la tesis corresponde a la visualización en finanzas. Podemos considerar como punto de partida para la visualización en finanzas el artículo de Bates [1997], donde en particular se analiza la prima por asimetría en base a datos de SP&500 correspondientes al período del 31 de enero de 1983 al 31 de diciembre de 1993. En los capítulos 2 y 3 hemos trabajado en particular con datos de SP&500 correspondientes al período del 2 de enero de 2006 al 31 de diciembre de 2006. En particular hemos encontrado una fuerte tendencia de asimetría negativa expresada en términos del parámetro de asimetría β , lo cual a su vez se es reflejado en la *smirk* de la volatilidad implícita. Con β hemos cuantificado la asimetría de la volatilidad implícita desde un enfoque visual. Los desarrollos

gráficos obtenidos dan lugar al artículo en trabajo *Smirkness Visualizations in Lévy Models* (ver De Olivera and Mordecki [2015b]).

0.4. Organización

En el capítulo 1 introducimos los modelos asimétricos de Lévy y obtenemos la propiedad de “bi-simetría” de la volatilidad implícita en términos del logaritmo de la monetización y el parámetro de asimetría β . Aquí además se prueba nuestro principal resultado teórico sobre el comportamiento de monotonía de la volatilidad implícita en un entorno del punto $x = 0$ y $\beta = -1/2$ y también son deducidas algunas relaciones para el exponente característico, y en consecuencia para la densidad en caso de existencia, en términos del parámetro de asimetría. Por último mostramos algunos ejemplos y en particular introducimos un modelo de Lévy que permite observar un comportamiento atípico de la correspondiente volatilidad implícita mostrando la imposibilidad de extender la tesis de nuestro Teorema principal.

En el capítulo 2 trabajamos sobre la cobertura de portafolios. Introducimos fórmulas, deducidas a partir de la fórmula de Lewis (10), para el cálculo de la esperanza y varianza del valor de un portafolio en el tiempo, cuando está conformado por opciones de venta, compra, el activo subyacente y el activo sin riesgo. Introducimos la neutralidad del portafolio con respecto al parámetro de asimetría β y analizamos la reducción de varianza de las ganancias y pérdidas de nuestro portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral con respecto al estándar portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral en base a datos de SP&500 del año 2006. Por último analizamos la variabilidad de los parámetros del modelo utilizado en los períodos usados en la calibración.

En el capítulo 3 ampliamos nuestro marco de trabajo de los modelos asimétricos, permitiendo la variabilidad temporal, en particular trabajamos con procesos de incrementos independientes. Estudiamos la relación entre la asimetría estadística y la asimetría riesgo neutral con la introducción de la transformada de Esscher. Estudiamos la prima de riesgo introducida por la incorporación de saltos y por último analizamos la evolución temporal de los parámetros, día a día, en base a datos de SP&500 del año 2006.

El capítulo 4 es dedicado al cálculo de las distintas griegas bajo modelos de Lévy exponenciales, los resultados son comparados con algunas griegas calculadas

en la literatura.

En el capítulo 5 se presentan los principales elementos considerados al momento de los cálculos numéricos y las herramientas de visualización utilizadas.

Por último, en el apéndice A probamos un resultado de monotonía de la volatilidad implícita en términos de la medida de Lévy. En los apéndices B y C, siguiendo de cerca el libro de Cont and Tankov [2004], exponemos los principales elementos de los procesos de Lévy y la construcción de reglas de precios y medidas martingala.

CAPÍTULO 1

VOLATILIDAD IMPLÍCITA EN MODELOS ASIMÉTRICOS

En este capítulo introducimos los modelos de Lévy asimétricos, que tienen una medida simétrica de saltos multiplicada por un factor exponencial de amortiguación, con el objetivo de estudiar la *smirk* de la volatilidad implícita en mercados de Lévy, extendiendo en este sentido los resultados obtenidos por Fajardo and Mordecki [2006] y Carr and Lee [2009].

El factor de amortiguación depende de un parámetro β , que resulta en una medida de la asimetría del modelo. Mostramos que la variación de este parámetro produce la sonrisa típica observada en la curva de volatilidad implícita (ver Figura 1.1).

Nuestro principal resultado muestra cierto comportamiento de monotonía de la volatilidad implícita de los modelos asimétricos alrededor del punto de simetría $\beta = -1/2$. Los resultados, que se aplican a la mayoría de los principales modelos en la literatura, son independientes del vencimiento de la opción. Esto se diferencia de los resultados encontrados últimamente en la literatura, donde principalmente se estudia la *smirk* cuando el vencimiento de las opciones tiende a cero (por ejemplo ver Gerhold and Gülüm [2014] o Figueroa-López and Ólafsson [2015])

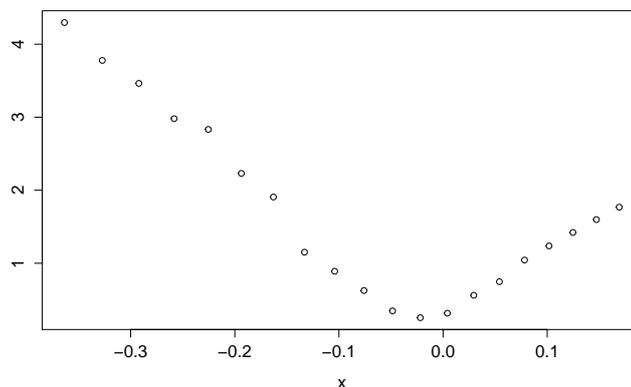


Figura 1.1: Volatilidad implícita en función de $x = \log(K/S_0) - rT$, para una opción de IBM al 12 de enero de 2011 con vencimiento 12 de febrero de 2011.

1.1. Introduction

A partir de Black and Scholes [1973], se han realizado muchos intentos por capturar el verdadero comportamiento de la volatilidad implícita. Los más conocidos son la volatilidad “smile” y “smirk”, que muestran que dependiendo del logaritmo de la monetización (log-moneyness) y el vencimiento, podemos observar un determinado comportamiento. Como por ejemplo el hecho que opciones de venta *out the money* son más caras que la correspondientes opciones de compra *out the money*, este hecho ha sido ampliamente abordado por muchos autores, entre ellos el trabajo de Foresi and Wu [2005] establece este hecho para un gran conjunto de datos de precios de opciones para los principales índices en doce países. Además, Carr and Wu [2003] analiza el patrón de volatilidad implícita smirk a través de vencimientos usando opciones del índice SP&500. Sus hallazgos implican que el índice tiene una distribución de riesgo neutral asimétrica.

Por otro lado, es bien conocida la relación entre la simetría de la volatilidad implícita y la simetría de mercado o simetría put-call, como Fajardo and Mordecki [2006] y Carr and Lee [2009] han mostrado para procesos de Lévy y modelos de volatilidad local y estocástica, respectivamente. También, Fajardo and Mordecki [2014] han mostrado la relación entre “skewness premium” y el

parámetro de simetría de mercado.

En este capítulo nos enfocamos sobre una subclase de procesos de Lévy, donde la amortiguación exponencial controla la asimetría, usamos técnicas de dualidad para obtener un resultado que nos permite relacionar la asimetría de la volatilidad implícita y el parámetro de asimetría de mercado. Aunque hay en la literatura procesos más generales, incluyendo modelos de volatilidad estocástica, nosotros nos centramos en una clase particular. Para esta clase conseguimos una visión más profunda de cómo este proceso particular genera la asimetría. Más exactamente, el parámetro de simetría de mercado está profundamente conectado con el exceso de kurtosis riesgo neutral, el cuál nos permitirá relacionar la asimetría y kurtosis riesgo neutral con la asimetría de la volatilidad implícita. El principal resultado obtenido muestra que todos los modelos asimétricos con densidad continua tienen una derivada parcial cruzada de la volatilidad implícita positiva, con respecto a x (el log-moneyness) y β en el punto $x = 0$ y $\beta = -1/2$, dando, como consecuencia, un preciso comportamiento de monotonía de la volatilidad implícita en un entorno de este punto.

1.2. El modelo

Bajo un mercado de Lévy (ver sección 0.1), el precio de stock del activo subyacente es completamente determinado por la terna característica (γ, σ, Π) .

1.2.1. Modelos asimétricos

Estamos particularmente interesados en el caso donde $\{X_t, \mathbb{Q}\}$ tiene una medida de Lévy que puede ser representada de la forma,

$$\Pi(dy) = e^{\beta y} \Pi_0(dy), \quad (1.1)$$

donde Π_0 es una medida de saltos de Lévy simétrica (no degenerada), i.e

$$\int_A \Pi_0(dy) = \int_{-A} \Pi_0(dy),$$

donde $-A = \{y: -y \in A\}$ es la imagen simétrica de A . Asumimos que Π_0 no depende de β . En este caso anotamos \mathbb{Q} por \mathbb{Q}_β . Como consecuencia, estudiamos

el proceso de Lévy

$$\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\} \quad (1.2)$$

con terna $(\gamma_\beta, \sigma, \Pi_\beta)$ donde Π_β es como en (1.1) y

$$\gamma_\beta = -\sigma^2/2 - \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) e^{\beta y} \Pi_0(dy).$$

En este caso, anotamos el exponente característico por ψ_β y escribimos $f_t(x; \beta)$ para la densidad de X_t bajo \mathbb{Q}_β , cuando ésta existe. Para la existencia y suavidad de la densidad de una distribución infinitamente divisible ver secciones 27 y 28 en Sato [1999].

Esta parametrización nos permite cuantificar la *smirkness* del modelo por $\mathbf{s} = \beta + 1/2$, en vista que $\beta = -1/2$ ($\mathbf{s} = 0$) proporciona simetría de la volatilidad implícita como función del logaritmo de la monetización $x = \log K/F$, donde K es el precio de ejercicio de una opción de compra y $F = S_0 e^{rT}$ es el correspondiente valor futuro del activo subyacente (ver Fajardo and Mordecki [2006]).

1.3. Dualidad Put-Call y volatilidad implícita.

Comenzamos la sección mostrando un resultado que necesitamos para obtener la simetría de la volatilidad implícita en $x = \log(K/F)$ y en $\mathbf{s} = \beta + 1/2$. Este resultado puede obtenerse directamente de la medida y el proceso dual definidos en Fajardo and Mordecki [2006], sin embargo por el trabajo directo sobre nuestro parámetro de interés preferimos aquí hacer la prueba directamente.

Proposición 1.1. *Sea $\{X_t, \mathbb{Q}_{\mathbf{s}-1/2}\}$ un proceso de Lévy como en (1.2) con $\beta = \mathbf{s} - 1/2$. Entonces*

$$\mathbb{Q}_{\mathbf{s}-1/2}(dx) = e^{-x} \mathbb{Q}_{-\mathbf{s}-1/2}(-dx)$$

En caso de existencia de densidad,

$$f_t(x; \mathbf{s} - 1/2) = e^{-x} f_t(-x; -\mathbf{s} - 1/2).$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}_{s-1/2}(dx) &= e^{-x} \mathbb{Q}_{-s-1/2}(-dx) && \text{si y sólo si} \\
\int_{\mathbb{R}} e^{izx} \mathbb{Q}_{s-1/2}(dx) &= \int_{\mathbb{R}} e^{izx} e^{-x} \mathbb{Q}_{-s-1/2}(-dx) && \text{si y sólo si} \\
\int_{\mathbb{R}} e^{izx} \mathbb{Q}_{s-1/2}(dx) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i(-z-i)x} \mathbb{Q}_{-s-1/2}(dx),
\end{aligned}$$

lo que a su vez es equivalente a que los exponentes característicos sean iguales:

$$\Psi_{\mathbf{s}}(z) = \Psi_{-\mathbf{s}}(-z - i). \quad (1.3)$$

Mostremos la igualdad entre las partes continuas por un lado y por otro entre las partes de saltos.

$$-i(-z - i) \frac{\sigma^2}{2} - \underbrace{(-z - i)^2}_{z^2 + 2iz - 1} \frac{\sigma^2}{2} = -iz \frac{\sigma^2}{2} - z^2 \frac{\sigma^2}{2}. \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(-z-i)y} - 1 - i(-z - i)(e^y - 1) \right) e^{(-s-1/2)y} \Pi_0(dy) \\
&\stackrel{y \rightarrow -y}{=} \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i(z+i)y} - 1 - i(-z - i)(e^{-y} - 1) \right) e^{(s+1/2)y} \Pi_0(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(e^{izy} - 1 - iz(e^y - 1) \right) e^{(s-1/2)y} \Pi_0(dy). \quad (1.5)
\end{aligned}$$

De (1.4) y (1.5) se concluye (1.3) y esto prueba la tesis. \square

Como corolario tenemos una importante relación, que puede ser encontrada de forma general en Fajardo and Mordecki [2014]. Sin embargo, poniendo énfasis en nuestro parámetro de interés, nuevamente hacemos directamente la demostración.

Corolario 1.1. *Sea $\{X_t, \mathbb{Q}_{s-1/2}\}$ un proceso de Lévy como en (1.2) con $\beta = s - 1/2$, entonces:*

$$Call_{\mathbf{s}-1/2}(K_x) = \frac{K_x}{F} Put_{-\mathbf{s}-1/2}(K_{-x}),$$

donde $F = S_0 e^{rT}$ y $K_x = F e^x$.

Demostración.

$$\begin{aligned} Call_{\mathbf{s}-1/2}(x) &= e^{-rT} E_{\mathbf{s}-1/2} \left((S_T - K_x)^+ \right) \\ &= S_0 \left(\int_{[x, +\infty)} (e^u - e^x) \mathbb{Q}_{\mathbf{s}-1/2}(du) \right) \\ &\stackrel{P1,1}{=} S_0 \left(\int_{[x, +\infty)} (e^u - e^x) e^{-u} \mathbb{Q}_{-\mathbf{s}-1/2}(-du) \right) \\ &= S_0 \left(\int_{(-\infty, x]} (1 - e^{x+u}) \mathbb{Q}_{-\mathbf{s}-1/2}(du) \right) \\ &= e^x Put_{-\mathbf{s}-1/2}(-x) \end{aligned}$$

□

Observación 1.1. Si tomamos $\beta = -1/2$ ($\mathbf{s} = 0$) en la Proposición 1.1, entonces tenemos

$$f_t(x; -1/2) = e^{-x} f_t(-x; -1/2). \quad (1.6)$$

Observación 1.2 (Bi-simetría de la volatilidad implícita). A partir del corolario (1.1) tenemos la siguiente relación para la volatilidad implícita

$$\sigma_{imp}(x, \mathbf{s} - 1/2) = \sigma_{imp}(-x, -\mathbf{s} - 1/2). \quad (1.7)$$

En Fajardo and Mordecki [2006] este resultado es obtenido para el caso $s = 0$ ($\beta = -1/2$).

Mostramos en la Figura 1.2, la volatilidad implícita para el modelo Variance Gamma en términos de x y β . Aquí observamos la simetría en (1.7).

Corolario 1.2. Sea $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ como en (1.2) con $\beta = \mathbf{s} - 1/2$, entonces:

$$e^{-x/2} \left(S_0 - Call_{\mathbf{s}-1/2}(x) \right) = e^{x/2} \left(S_0 - Call_{-\mathbf{s}-1/2}(-x) \right).$$

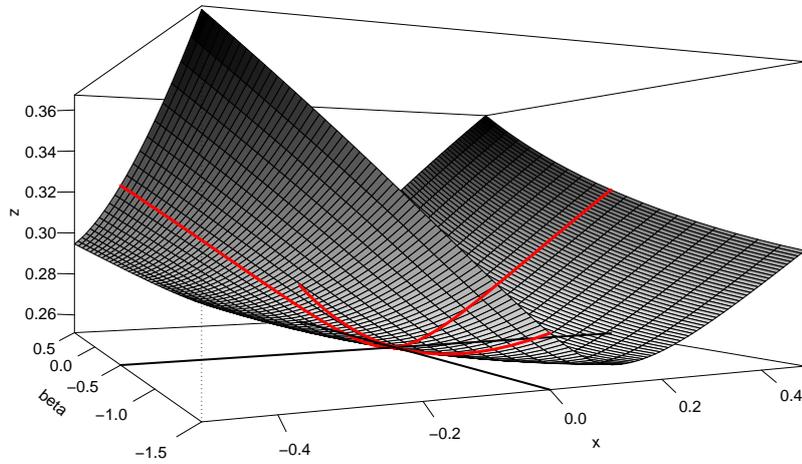


Figura 1.2: Volatilidad implícita para el modelo Variance Gamma como función de x y β . Otros parámetros son: $\alpha = 5$, $\lambda = 1$, $T = 1$, $r = 0,05$.

Demostración. Del corolario 1.1 y la paridad entre opciones de compra y venta (6) tenemos directamente

$$Call_{s-1/2}(x) - e^x Call_{-s-1/2}(-x) = S_0(1 - e^x).$$

Despejando obtenemos la tesis. □

Observación 1.3. Del corolario 1.2 tenemos para $x = 0$

$$Call_{s-1/2}(0) = Call_{-s-1/2}(0),$$

por lo tanto, para $x = 0$ (*at-the-money*) la opción de compra es simétrica respecto de s y en particular:

$$\left. \frac{\partial Call_{s-1/2}(x=0)}{\partial s} \right|_{s=0} = 0.$$

1.4. Relaciones para las densidades de los modelos asimétricos.

En esta sección introducimos algunas relaciones distribucionales del proceso $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ como en (1.2), en términos del parámetro de β o más explícitamente, en términos del parámetro de smirkness $\mathbf{s} = \beta + 1/2$. En particular la Proposición 1.3 será de suma importancia al momento de estudiar el comportamiento de la volatilidad implícita en torno de $\beta = -1/2$.

Proposición 1.2. *Sea $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ como en (1.2), entonces la distribución de X_t es simétrica si y sólo si $\beta = 0$.*

Demostración. Observemos que X_t es simétrica respecto de ta_β , si y sólo si

$$(X_t - ta_\beta) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (-X_t + ta_\beta)$$

y esto es equivalente a

$$e^{t(-iza_\beta + \Psi_\beta(iz))} = \mathbb{E}(e^{iz(X_t - ta_\beta)}) = \mathbb{E}(e^{iz(-X_t + ta_\beta)}) = e^{t(iza_\beta + \Psi_\beta(-iz))}. \quad (1.8)$$

Usando la condición de medida martingala, $\mathbb{E}(e^{X_t}) = 1$ (lo que equivale a $\psi_\beta(1) = 0$), al evaluar (1.8) en $z = i$ obtenemos que el único posible eje de simetría es $a_\beta = -\frac{\Psi_\beta(-1)}{2}$. Siendo

$$\Psi_\beta(z) = -z \left(\frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) e^{\beta y} \Pi_0(dy) \right) + z^2 \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zh(y)) e^{\beta y} \Pi_0(dy),$$

tenemos que

$$\begin{aligned} a_\beta &= -\frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) e^{\beta y} \Pi_0(dy) + \int_{\mathbb{R}} (e^{-y} - 1 + h(y)) e^{\beta y} \Pi_0(dy) \right) \\ &\stackrel{y \rightarrow -y}{=} -\frac{1}{2} \left(\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) e^{\beta y} \Pi_0(dy) + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) e^{-\beta y} \Pi_0(dy) \right) \\ &= -\frac{\sigma^2}{2} - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) \left(e^{\beta y} + e^{-\beta y} \right) \Pi_0(dy) \end{aligned}$$

Luego, observemos que de (1.8) tenemos que la simetría es equivalente a $\Psi_\beta(iz) - \Psi_\beta(-iz) = 2iza_\beta$, donde

$$\begin{aligned} \Psi_\beta(iz) - \Psi_\beta(-iz) &= -iz \left[\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) (e^{\beta y} + e^{-\beta y}) \Pi_0(dy) \right] \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (e^{izy} - 1 - izh(y)) (e^{\beta y} - e^{-\beta y}) \Pi_0(dy) \\ &= -iz \underbrace{\left[\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y)) (e^{\beta y} + e^{-\beta y}) \Pi_0(dy) \right]}_{-2iza_\beta} \end{aligned}$$

Por tanto, X_t es simétrica respecto de a_β si y sólo si

$$\int_{\mathbb{R}} (e^{izy} - 1 - izh(y)) (e^{\beta y} - e^{-\beta y}) \Pi_0(dy) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}. \quad (1.9)$$

Consideremos los procesos de Lévy Y_t^β e $Y_t^{-\beta}$ con ternas características $(0, e^{\beta y} \Pi_0(dy), 0)$ y $(0, e^{-\beta y} \Pi_0(dy), 0)$ respectivamente. La igualdad (1.9) es equivalente a $Y_t^\beta \stackrel{\mathcal{L}}{=} Y_t^{-\beta}$ y por la unicidad de Lévy Kinchine, esto equivale a $e^{\beta y} \Pi_0(dy) = e^{-\beta y} \Pi_0(dy)$. Siendo $\Pi_0(dy)$ no concentrada en $y = 0$ tenemos que X_t es simétrica si y sólo si $\beta = 0$.

□

Observación 1.4. *Observemos que en caso de simetría, $\beta = 0$, tenemos $a_0 = \gamma_0$ y por ende el eje de simetría es dado por el término de tendencia (“drift”).*

Si existe densidad, tenemos

$$f_t(x + t\gamma_0; 0) = f_t(-x + t\gamma_0; 0). \quad (1.10)$$

Proposición 1.3. *Sea $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ como en (1.2). Entonces,*

$$\psi_\beta(z) = \psi_0(z + \beta) - \psi_0(\beta) - z\mu_\beta. \quad (1.11)$$

Si existe densidad tenemos

$$f_t(x; \beta) = e^{\beta(x + t\mu_\beta) - t\psi_0(\beta)} f_t(x + t\mu_\beta; 0), \quad (1.12)$$

donde $\mu_\beta = \beta\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1)(e^{\beta y} - 1) \Pi_0(dy)$.

Demostración. Definamos la medida $\hat{\mathbb{Q}}$ tal que:

$$\frac{d\hat{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}_0} = e^{\beta X_t - t\psi_0(\beta)}. \quad (1.13)$$

Luego, a partir de la transformada de Esscher, $\{X_t, \hat{\mathbb{Q}}\}$ es un proceso de Lévy con terna característica $(\hat{\gamma}, \sigma, e^{\beta y} \Pi_0(dy))$ donde $\hat{\gamma} = \beta\sigma^2 + \gamma_0 + \int_{\mathbb{R}} (e^{\beta y} - 1)h(y)\Pi_0(dy)$.

Observemos que $\{X_t, \hat{\mathbb{Q}}\}$ y $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ son ambos procesos de Lévy y sólo difieren en el término de tendencia (*drift*), por lo tanto

$$\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{X_t - t\mu_\beta, \hat{\mathbb{Q}}\} \quad (1.14)$$

donde $\mu_\beta = \beta\sigma^2 + \gamma_0 - \gamma_\beta + \int_{\mathbb{R}} (e^{\beta y} - 1)h(y)\Pi_0(dy)$.

A partir de (1.13) y (1.14) obtenemos:

$$\mathbb{E}_\beta(e^{zX_t}) = \hat{\mathbb{E}}(e^{z[X_t - t\mu_\beta]}) = \mathbb{E}_0(e^{(z+\beta)X_t - t[z\mu_\beta + \psi_0(\beta)]}), \quad (1.15)$$

y de (1.15) obtenemos (1.11).

Por otro lado, si existe densidad tenemos

$$\begin{aligned} f_t(x; \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} e^{t\psi_0(iz)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} e^{t[\psi_0(iz+\beta) - \psi_0(\beta) - iz\mu_\beta]} dz \\ &= e^{-t\psi_0(\beta)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iz(x+t\mu_\beta)} e^{t\psi_0(iz+\beta)} dz \\ &= e^{-t\psi_0(\beta)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-(iw-\beta)(x+t\mu_\beta)} e^{t\psi_0(iw)} dw \\ &= e^{\beta(x+t\mu_\beta) - t\psi_0(\beta)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iw(x+t\mu_\beta)} e^{t\psi_0(iw)} dw \\ &= e^{\beta(x+t\mu_\beta) - t\psi_0(\beta)} f_t(x + t\mu_\beta; 0), \end{aligned}$$

lo que demuestra (1.12). □

Observación 1.5. *Observemos que de la Proposición 1.2 tenemos que la densidad $f_t(x; 0)$ en la Proposición 1.3 es simétrica respecto de $t\gamma_0$.*

A continuación probamos una relación de simetría que vincula la densidad en términos de β .

Proposición 1.4. *Sea $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ como en (1.2). entonces,*

$$\psi_\beta(z) = \psi_\beta(-z - 2\beta) - 2(z + \beta)(\mu_\beta - \gamma_0).$$

Si existe densidad tenemos

$$f_t(x + t[\gamma_0 - \mu_\beta]; \beta) = e^{2\beta x} f_t(-x + t[\gamma_0 - \mu_\beta]; \beta). \quad (1.16)$$

Demostración. Por la simetría de la distribución para $\beta = 0$, de la Proposición 1.2 tenemos

$$\psi_0(-z - \beta) = \psi_0(z + \beta) - 2(z + \beta)\gamma_0. \quad (1.17)$$

Luego, de la Proposición 1.3 y la igualdad (1.17) tenemos

$$\begin{aligned} \psi_\beta(-z - 2\beta) &= \psi_0(-z - \beta) - \psi_0(\beta) + (z + 2\beta)\mu_\beta \\ &= \psi_0(z + \beta) - 2(z + \beta)\gamma_0 - \psi_0(\beta) + (z + 2\beta)\mu_\beta \\ &= \psi_\beta(z) - 2(z + \beta)\gamma_0 + (2z + 2\beta)\mu_\beta \\ &= \psi_\beta(z) + 2(z + \beta)(\mu_\beta - \gamma_0). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Por otro lado, si existe densidad, a partir de (1.18) tenemos

$$\begin{aligned}
f_t(x; \beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} e^{t\psi(iz)} dz \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} e^{t[\psi_\beta(-iz-2\beta)-2(iz+\beta)(\mu_\beta-\gamma_0)]} dz \\
&= e^{-2t\beta(\mu_\beta-\gamma_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iz[x+2t(\mu_\beta-\gamma_0)]} e^{t\psi_\beta(-iz-2\beta)} dz \\
&\stackrel{-iz-2\beta=iw}{=} e^{-2t\beta(\mu_\beta-\gamma_0)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{(iw+2\beta)[x+2t(\mu_\beta-\gamma_0)]} e^{t\psi_\beta(iw)} dz \\
&= e^{2t\beta(\mu_\beta-\gamma_0)+2\beta x} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iw[x+2t(\mu_\beta-\gamma_0)]} e^{t\psi_\beta(iw)} dz \\
&= e^{2\beta[x+t(\mu_\beta-\gamma_0)]} f_t(-x-2t(\mu_\beta-\gamma_0); \beta). \tag{1.19}
\end{aligned}$$

Mediante el cambio de variable $x = y - t(\mu_\beta - \gamma_0)$ obtenemos la tesis.

□

Observación 1.6. 1. *Observemos que en la Proposición 1.4 el término $\mu_\beta - \gamma_0$ puede ser simplificado. En efecto, recordemos los términos involucrados $\mu_\beta = \beta\sigma^2 + \gamma_0 - \gamma_\beta + \int_{\mathbb{R}} h(y)(e^{\beta y} - 1)\Pi_0(dy)$ y también el término de tendencia $\gamma_\beta = -\sigma^2/2 - \int_{\mathbb{R}} [e^y - 1 - h(y)]e^{\beta y}\Pi_0(dy)$, tenemos*

$$\mu_\beta - \gamma_0 = (\beta + 1/2)\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} [(e^y - 1)e^{\beta y} - h(y)]\Pi_0(dy) \tag{1.20}$$

2. *De (1.20) para $\beta = -1/2$, por la imparidad $(e^y - 1)e^{-y/2} - h(y)$, tenemos que se verifica $\mu_{-1/2} - \gamma_0 = 0$.*

Por tanto, de (1.16), con $\beta = -1/2$ obtenemos nuevamente el resultado (1.6). Ahora el resultado obtenido es válido para todo β .

Para terminar esta sección mostramos un resultado que vincula la distribución en términos del parámetro β con la distribución en términos de $-\beta$.

Proposición 1.5. *Sea $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ como en (1.2). Entonces,*

$$\psi_{-\beta}(z) = \psi_\beta(-z) - z(\mu_\beta + \mu_{-\beta} - 2\gamma_0).$$

Si existe densidad tenemos

$$f_t(x + t[\gamma_0 - \mu_\beta]; \beta) = f_t(-x + t[\gamma_0 - \mu_{-\beta}]; -\beta).$$

Demostración. Recordemos que $\mu_\beta = \beta\sigma^2 + \gamma_0 - \gamma_\beta + \int_{\mathbb{R}} (e^{\beta y} - 1)h(y)\Pi_0(dy)$ y $\gamma_\beta = -\sigma^2/2 + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y))\Pi_0(dy)$. Luego, reagrupando términos y utilizando la simetría de Π_0 tenemos

$$\begin{aligned} \psi_\beta(-z) - z(\mu_{-\beta} + \mu_\beta - 2\gamma_0) &= \\ &= z\sigma^2 + z \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y))e^{\beta y}\Pi_0(dy) + z^2\sigma^2/2 \\ &\quad + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} (e^{-zy} - 1 + zh(y))e^{\beta y}\Pi_0(dy)}_{\int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zh(y))e^{-\beta y}\Pi_0(dy)} \\ &\quad - z \left[\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} [(e^y - 1 - h(y))e^{-\beta y} + (e^{-\beta y} - 1)h(y) \right. \\ &\quad \quad \left. + (e^y - 1 - h(y))e^{\beta y} + (e^{\beta y} - 1)h(y)] \Pi_0(dy) \right] \\ &= -z\sigma^2/2 - z \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - h(y))e^{-\beta y}\Pi_0(dy) + z^2\sigma^2/2 \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zh(y))e^{-\beta y}\Pi_0(dy) - z \left[\underbrace{\int_{\mathbb{R}} (e^{\beta y} + e^{-\beta y} - 2)h(dy)}_{\text{impar}} \right] \Pi_0(dy) \\ &= \psi_{-\beta}(z) \end{aligned}$$

Por otro lado, en caso de existencia de densidad tenemos,

$$\begin{aligned} f_t(-x + t[\gamma_0 - \mu_{-\beta}]; -\beta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iz(-x+t[\gamma_0-\mu_{-\beta}])} e^{t\psi_{-\beta}(iz)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iz(-x-t[\gamma_0-\mu_\beta])} e^{t\psi_{-\beta}(iz)+tiz[\mu_{-\beta}+\mu_\beta-2\gamma_0]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iw(x+t[\gamma_0-\mu_\beta])} e^{t\psi_{-\beta}(-iw)-tiw[\mu_{-\beta}+\mu_\beta-2\gamma_0]} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iw(x+t[\gamma_0-\mu_\beta])} e^{t\psi_\beta(iw)} dw \\ &= f_t(x + t[\gamma_0 - \mu_\beta]; \beta), \end{aligned}$$

lo que concluye la prueba.

□

1.5. Volatilidad implícita en un entorno de $x = 0$ y $\beta = -1/2$.

En esta sección presentamos nuestro principal resultado, describimos el comportamiento de la volatilidad implícita en un entorno de $x = 0$ y $\beta = -1/2$. Obtenemos de esta forma la prueba, al menos en un entorno de $x = 0$ y $\beta = -1/2$, del comportamiento observado en la práctica con los principales modelos.

Obtenemos dos resultados que involucran la volatilidad implícita. El primero muestra que la volatilidad implícita como función de β , en un entorno de $\beta = -1/2$, es creciente cuando x está en un entorno derecho de $x = 0$ y es decreciente cuando x está en un entorno izquierdo de $x = 0$. El segundo resultado muestra que la volatilidad implícita, como función de x , en un entorno de $x = 0$, es creciente cuando β está en un entorno derecho de $-1/2$ y es decreciente cuando β está en un entorno izquierdo de $-1/2$.

Con el objetivo de formular el siguiente resultado, escribimos la fórmula de Black-Scholes en términos de x como

$$BS(K_x, \sigma_{imp}(x, \beta)) = S_0 N(d_1) - K_x e^{-rT} N(d_2),$$

donde

$$d_1 = \frac{-x + \sigma_{imp}^2(x, \beta) \frac{T}{2}}{\sigma_{imp}(x, \beta) \sqrt{T}} \quad \text{y} \quad d_2 = \frac{-x - \sigma_{imp}^2(x, \beta) \frac{T}{2}}{\sigma_{imp}(x, \beta) \sqrt{T}}.$$

Ahora, derivando respecto de x obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial BS(K_x, \sigma_{imp}(x, \beta))}{\partial x} &= \frac{\partial BS(K_x, \sigma_{imp})}{\partial K_x} \frac{\partial K_x}{\partial x} + \frac{\partial BS(K_x, \sigma_{imp})}{\partial \sigma_{imp}} \frac{\partial \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial x} \\ &= -S_0 e^x N(d_2) + \sqrt{T} \phi(d_1) \frac{\partial \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial x}. \end{aligned}$$

donde N y ϕ denotan la función de distribución y la densidad de la distribución normal estándar respectivamente. Por otro lado, el valor de una opción de compra

bajo el proceso de Lévy (1.2) es denotado por $Call$, y dado por

$$Call(x, \beta) = e^{-rT} \mathbb{E}_\beta (S_T - K_x)^+ = S_0 \int_x^{+\infty} (e^y - e^x) d\mathbb{Q}_\beta. \quad (1.21)$$

Para obtener la diferenciabilidad de la volatilidad implícita con respecto a x , necesitamos obtener la derivabilidad de la función $Call(x, \beta)$ con respecto a x . En vista de (1.21), la existencia de una densidad continua de la medida \mathbb{Q}_β es una condición suficiente para la diferenciabilidad de la función $Call$. De acuerdo a la proposición 28.1 en Sato [1999], la condición

$$\int_{\mathbb{R}} |e^{t\psi_\beta(iz)}| dz < \infty \quad (1.22)$$

implica la existencia de una densidad continua.

A lo largo de esta sección asumimos la existencia de una densidad continua. Luego, tenemos

$$\frac{\partial Call(x, \beta)}{\partial x} = -S_0 e^x \mathbb{Q}_\beta(X_T > x),$$

y de la igualdad $BS(K_x, \sigma_{imp}(x, \beta)) = Call(x, \beta)$, obtenemos

$$\frac{\partial \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial x} = \frac{S_0 e^x (N(d_2) - \mathbb{Q}_\beta(X_T > x))}{\phi(d_1) \sqrt{T}} = S_0 \frac{N(d_2) - \mathbb{Q}_\beta(X_T > x)}{\phi(d_2) \sqrt{T}}. \quad (1.23)$$

A continuación, presentamos nuestro principal resultado.

Teorema 1.1. *Para cualquier vencimiento T , si $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ es un modelo asimétrico con densidad continua, entonces*

1. existe $\varepsilon > 0$ tal que:

a) si $\beta \in (-\frac{1}{2} - \varepsilon; -\frac{1}{2})$ entonces $\frac{\partial \sigma_{imp}(0, \beta)}{\partial x} < 0$,

b) si $\beta \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2} + \varepsilon)$ entonces $\frac{\partial \sigma_{imp}(0, \beta)}{\partial x} > 0$,

2. existe $\varepsilon > 0$ tal que:

a) si $x \in (0, \varepsilon)$, entonces $\frac{\partial \sigma_{imp}(x, -1/2)}{\partial \beta} > 0$,

b) si $x \in (-\varepsilon, 0)$, entonces $\frac{\partial \sigma_{imp}(x, -1/2)}{\partial \beta} < 0$.

Con el objetivo de facilitar la prueba del Teorema 1.1 introducimos los dos siguientes Lemas.

Lema 1.1. Si $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ es un modelo asimétrico con densidad continua, entonces

$$f_t(x; -1/2) \leq f_t(0; -1/2)e^{-1/2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Observemos que

$$\begin{aligned} \mu_{-1/2} &= -\sigma^2/2 + \gamma_0 - \gamma_{-1/2} + \int_{\mathbb{R}} h(y)(e^{-y/2} - 1)\Pi_0(dy) \\ &= \gamma_0 + \int_{\mathbb{R}} \left((e^y - 1)e^{-y/2} - h(y) \right) \Pi_0(dy) = \gamma_0, \end{aligned} \quad (1.24)$$

porque $(e^y - 1)e^{-y/2} - h(y)$ es una función impar. Por otro lado,

$$\begin{aligned} f_t(x + t\gamma_0; 0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iz(x+t\gamma_0)} e^{t\psi_\beta(iz)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-izx} e^{t[-iz\gamma_0 + \psi_\beta(iz)]} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \cos(zx) e^{t[-iz\gamma_0 + \psi_0(iz)]} dz \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{t[-iz\gamma_0 + \psi_0(iz)]} dz \\ &= f_t(t\gamma_0; 0), \end{aligned} \quad (1.26)$$

donde en (1.25) usamos que la parte imaginaria de $-iz\gamma_0 + \psi_0(iz) = -z^2\sigma^2/2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{izy} - 1 - izh(y))\Pi_0(dy)$ se anula.

A partir de la Proposición 1.3 y (1.24) tenemos

$$\begin{aligned} f_t(x; -1/2) &= e^{-1/2(x+t\gamma_0) - t\psi_0(-1/2)} f_t(x + t\gamma_0; 0) \\ &= f_t(0; -1/2) e^{-x/2} \frac{f_t(x + t\gamma_0; 0)}{f_t(t\gamma_0; 0)}. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Observemos que de (1.26), $f_t(t\gamma_0; 0) \neq 0$.

A partir de (1.26) y (1.27) obtenemos el resultado. \square

El siguiente resultado admite una interpretación en términos de una opción digital de compra. Bajo un modelo asimétrico, el precio de una opción digital en $x = 0$ es decreciente con β en $\beta = -1/2$.

Lema 1.2. *Si $\{X_t, \mathbb{Q}_\beta\}$ es un modelo asimétrico con densidad continua, entonces*

$$\left. \frac{\partial \mathbb{Q}_\beta(X_t > 0)}{\partial \beta} \right|_{-1/2} < 0$$

Demostración. Por simplicidad, anotaremos $f_t(y) := f_t(y; -1/2)$, la densidad de la distribución de X_t en $\beta = -1/2$. A partir de la fórmula de Lewis para una opción digital de compra (ver Lewis [2001]) tenemos

$$\mathbb{Q}_\beta(X_t > x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{izx} e^{t\psi_\beta(-iz)}}{iz} dz.$$

Luego, derivando respecto de β obtenemos

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial \mathbb{Q}_\beta(X_t > 0)}{\partial \beta} \right|_{-1/2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{t\psi_\beta(-iz)}}{iz} \left. \frac{\partial t\psi_\beta(-iz)}{\partial \beta} \right|_{-1/2} dz \\ &= -\frac{t}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{t\psi_\beta(-iz)}}{iz} \left[\int_{\mathbb{R}} (e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1)) ye^{-y/2} \Pi_0(dy) \right] dz \end{aligned} \quad (1.28)$$

$$= t \int_{\mathbb{R}} ye^{-y/2} \left[\mathbb{Q}_{-1/2}(X_t > -y) - \mathbb{Q}_{-1/2}(X_t > 0) - (e^y - 1)f_t(0) \right] \Pi_0(dy) \quad (1.29)$$

$$\begin{aligned} &= t \int_0^{+\infty} ye^{-y/2} \left[\mathbb{Q}_{-1/2}(X_t > -y) - \mathbb{Q}_{-1/2}(X_t > 0) - (e^y - 1)f_t(0) \right] \Pi_0(dy) \\ &\quad - t \int_0^{+\infty} ye^{y/2} \left[\mathbb{Q}_{-1/2}(X_t > y) - \mathbb{Q}_{-1/2}(X_t > 0) - (e^{-y} - 1)f_t(0) \right] \Pi_0(dy) \end{aligned} \quad (1.30)$$

$$\begin{aligned} &= t \int_0^{+\infty} ye^{-y/2} \left[\mathbb{Q}_{-1/2}(-y < X_t < 0) - (e^y - 1)f_t(0) \right] \Pi_0(dy) \\ &\quad - t \int_0^{+\infty} ye^{y/2} \left[-\mathbb{Q}_{-1/2}(0 < X_t < y) - (e^{-y} - 1)f_t(0) \right] \Pi_0(dy) \\ &= t \int_0^{+\infty} ye^{-y/2} \left[\mathbb{Q}_{-1/2}(-y < X_t < 0) + e^y \mathbb{Q}_{-1/2}(0 < X_t < y) \right. \\ &\quad \left. - 2(e^y - 1)f_t(0) \right] \Pi_0(dy), \end{aligned}$$

donde en (1.28) usamos que Π_0 no depende de β , en (1.29) usamos el Teorema de Fubini y en (1.30) usamos la propiedad de simetría de Π_0 .

Sea $g(y) := \mathbb{Q}_{-1/2}(-y < X_t < 0) + e^y \mathbb{Q}_{-1/2}(0 < X_t < y) - 2(e^y - 1)f_t(0)$. De (1.6), obtenemos que

$$\begin{aligned} g'(y) &= f_t(-y) + e^y \mathbb{Q}_{-1/2}(0 < X_t < y) + e^y f_t(y) - 2e^y f_t(0) \\ &= e^y \left[\mathbb{Q}_{-1/2}(0 < X_t < y) + 2[f_t(y) - f_t(0)] \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

A partir del Lema 1.1 y (1.31) tenemos

$$\begin{aligned} e^{-y} g'(y) &= \int_0^y f_t(s) ds + 2[f_t(y) - f_t(0)] \\ &\leq f_t(0) \int_0^y e^{-1/2s} ds + 2[f_t(y) - f_t(0)] \\ &= -2f_t(0)e^{-1/2y} + 2f_t(y) \leq 0. \end{aligned}$$

Observemos que $f_t(0)e^{-1/2y}$ no puede ser igual a $f_t(y)$ para cada $y > 0$ porque en este caso, de (1.6), obtendríamos el absurdo $f_t(-y) = f_t(0)e^{1/2y}$ para $y > 0$. Luego, existe un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}^+$ tal que $g'(y) < 0$ para $y \in I$.

Siendo g decreciente, $g(y) \leq g(0) = 0$ para $y > 0$ y $g(y) < 0$ para $y \in I$, esto implica

$$\left. \frac{\partial \mathbb{Q}_\beta(X_t > 0)}{\partial \beta} \right|_{-1/2} = t \int_0^{+\infty} ye^{-y/2} g(y) \Pi_0(dy) < 0,$$

lo que concluye el resultado. \square

Prueba del Teorema 1.1. De (1.23) obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial \beta \partial x} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial x} \\ &= S_0 \frac{[\phi(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \beta} - \frac{\partial \mathbb{Q}_\beta(X_T > x)}{\partial \beta}] - [N(d_2) - \mathbb{Q}_\beta(X_T > x)](-d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \beta}}{\phi(d_2) \sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{\partial d_2}{\partial \beta} = - \frac{T^{3/2} \sigma_{imp}^2(x, \beta) \frac{\partial \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial \beta} - (x + \sigma_{imp}^2(x, \beta) \frac{T}{2}) \frac{\partial \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial \beta}}{\sigma_{imp}^2(x, \beta) T}.$$

A partir de (1.7), tenemos $\partial_\beta \sigma_{imp}(0, -1/2) = 0$ y luego $\partial_\beta d_2(0, -1/2) = 0$ donde concluimos que, del Lema 1.2

$$\frac{\partial^2 \sigma_{imp}(0, -1/2)}{\partial \beta \partial x} = - \frac{S_0}{\phi(\sigma_{imp}(0, -1/2) \frac{\sqrt{T}}{2}) \sqrt{T}} \frac{\partial \mathbb{Q}_\beta(X_T > 0)}{\partial \beta} \Big|_{\beta=-1/2} > 0. \quad (1.32)$$

A partir de (1.32) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{\partial \sigma_{imp}(0, \beta)}{\partial x} \Big|_{-1/2} > 0,$$

luego, existe $\varepsilon > 0$ tal que $\partial_x \sigma_{imp}(0, \beta)$ es creciente como función de $\beta \in (-\frac{1}{2} - \varepsilon; -\frac{1}{2} + \varepsilon)$. Los resultados 1(a) y 1(b) se obtienen de $\partial_x \sigma_{imp}(0, -1/2) = 0$.

Ahora probaremos 2(a). El resultado 2(b) se obtiene de la simetría de la volatilidad implícita (1.7).

Bajo condiciones de regularidad tenemos $\frac{\partial^2 \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial \beta \partial x} = \frac{\partial^2 \sigma_{imp}(x, \beta)}{\partial x \partial \beta}$, luego de (1.32) tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial \beta}(0, -1/2) = \frac{\partial^2 \sigma_{imp}(0, -1/2)}{\partial x \partial \beta} > 0. \quad (1.33)$$

A partir de (1.33) y la simetría (1.7) tenemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que, si $x \in (0, \varepsilon)$ entonces

$$\frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial \beta}(x, -1/2) > \frac{\partial \sigma_{imp}}{\partial \beta}(0, -1/2) = 0.$$

Esto concluye la prueba del Teorema. \square

1.6. Ejemplos

En esta sección discutimos la aplicabilidad de nuestro Teorema a modelos de actividad infinita, modelos de difusión con saltos y mostramos un ejemplo complementario que muestra por qué los resultados obtenidos de monotonía de la volatilidad implícita son sólo locales, mostrando que los resultados del Teorema 1.1 no pueden ser generalizados más allá de un entorno de $x = 0$ y $\beta = -1/2$, al menos para los modelos de asimetría en general.

1.6.1. Modelos de Actividad Infinita.

El modelo Hiperbólico Generalizado (GH), incluyendo el *Variance Gamma* (VG) y el *Normal Inverse Gaussian* (NIG) y el modelo de Meixner, son modelos asimétricos. Casos particulares del modelo CGMY corresponden también a modelos asimétricos.

Todos ellos tienen densidad continua, por tanto verifican las hipótesis del Teorema 1.1. A continuación detallamos las correspondientes medidas de Lévy para estos modelos.

El modelo Hiperbólico Generalizado.

El modelo GH es de asimetría ya que su medida de Lévy es

$$\Pi_{\beta}(y) = e^{\beta y} \frac{1}{|y|} \left(\int_0^{\infty} \frac{\exp(-\sqrt{2z + \alpha^2|y|})}{\pi^2 z (J_{\lambda}^2(\delta\sqrt{2z}) + Y_{\lambda}^2(\delta\sqrt{2z}))} dz + \mathbf{1}_{\{\lambda \geq 0\}} \lambda e^{-\alpha|y|} \right),$$

donde los parámetros satisfacen las condiciones $0 \leq |\beta| < \alpha$, y $\delta > 0$; y J_{λ} , Y_{λ} son las funciones de Bessel de primer y segunda clase (por detalles ver Eberlein and Prause [2002]). Dos casos particulares ampliamente usados en la literatura son el VG y el NIG, obtenidos cuando $\lambda = 1$ y cuando $\lambda = -1/2$ respectivamente.

Para el modelo Variance Gamma la medida de Lévy resulta

$$\Pi(dy) = e^{\beta y} \frac{\delta e^{-\alpha|y|}}{|y|} dy,$$

donde $\delta > 0$ y $|\beta| < \alpha$. En este caso la función característica con la restricción de medida martingala es

$$\varphi_{\beta}(z) = \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} \right)^{-zT\delta} \left(\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - (\beta + z)^2} \right)^{\delta T}. \quad (1.34)$$

En la Figura 1.3 mostramos cómo la volatilidad implícita se mueve en términos de β .

Para el caso NIG la medida de Lévy resulta

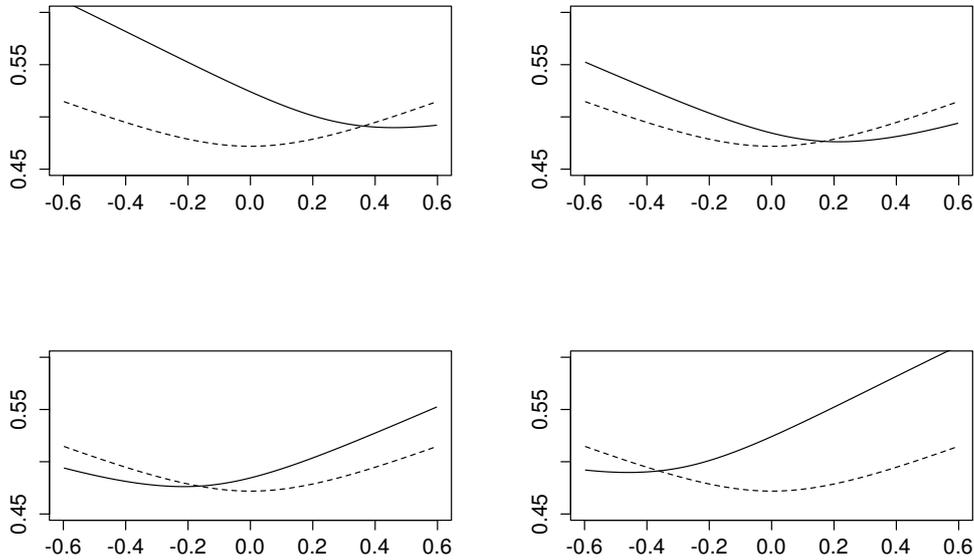


Figura 1.3: Volatilidad implícita del modelo Variance Gamma en términos de $x = \log(K/S_0) - rT$. Línea punteada $\beta = -0,5$. Línea continua: Arriba a la izquierda $\beta = -1,5$, arriba a la derecha $\beta = -1$, abajo a la izquierda $\beta = 0$, abajo a la derecha $\beta = 0,5$. Otros parámetros son: $\alpha = 4$, $\delta = 2$, $T = 1$, $r = 0,05$.

$$\Pi(dy) = e^{\beta y} \frac{\delta \alpha}{\pi |y|} K_1(\alpha |y|) dy,$$

donde K_1 es la función de Bessel de tercer tipo con índice 1.

El exponente característico para el modelo NIG, con la restricción de medida martingala es:

$$\begin{aligned} \psi(z) = & -z\delta \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + 1)^2} \right) \\ & + \delta \left(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + z)^2} \right) \end{aligned} \quad (1.35)$$

Modelo de Meixner

El modelo de Meixner, mediante un pequeño cambio de nombre en los parámetros, es un nuevo modelo asimétrico con medida de Lévy dada por

$$\Pi(dy) = e^{\beta y} \frac{\lambda}{y \sinh(\pi y/\alpha)} dy.$$

Modelo CGMY

El modelo CGMY fue introducido en Carr et al. [2002b]. Éste tiene terna de Lévy $(\gamma, 0, \Pi)$ con

$$\Pi(dy) = \left[\frac{c^+ e^{-\lambda^+ y}}{y^{1+\alpha^+}} \mathbf{1}_{y \geq 0} + \frac{c^- e^{\lambda^- y}}{|y|^{1+\alpha^-}} \mathbf{1}_{y < 0} \right] dy,$$

donde $\lambda^\pm > 0$, $c^\pm > 0$ y $0 < \alpha^\pm < 2$ (ver Cont and Tankov [2004]).

Con el objetivo de incluir este modelo en nuestra clase de modelos asimétricos, debemos tomar algunas restricciones: $\lambda = c^+ = c^-$, $\beta = -\lambda^+ = \lambda^-$ y $\alpha = \alpha^+ = \alpha^-$.

Ahora

$$\Pi(dy) = e^{\beta y} \lambda |y|^{-(1+\alpha)} dy.$$

Por otro lado, γ es determinado por la condición de medida martingala.

1.6.2. Modelos de difusión con saltos

Observemos que todo modelo de difusión con saltos con componente de difusión positivo ($\sigma > 0$) tiene una densidad diferenciable de cualquier orden (eso se deduce de usar el Teorema 4 V.4 en Feller [1971] y el Teorema 2.27 en Folland [1999]).

Modelo asimétrico de Merton

El modelo de Merton tiene una medida de Lévy del tipo $\Pi(dy) = e^{\beta y} \Pi_0(dy)$ con Π_0 simétrica, pero dependiendo de β :

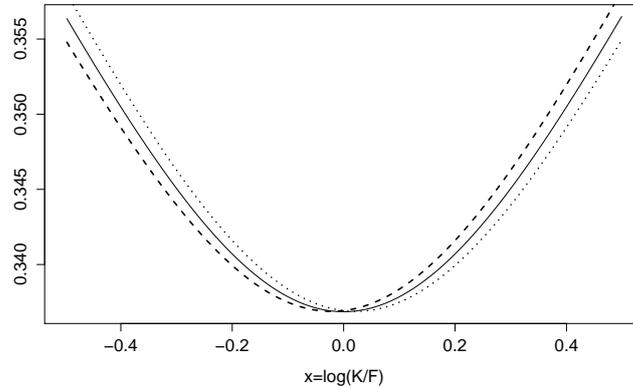


Figura 1.4: Volatilidad implícita bajo el modelo asimétrico de Merton con: $T = 1$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $\lambda = 2$, $\sigma_J = 0,2$. Línea continua $\beta = -0,5$, Línea punteada: $\beta = -0,6$, línea discontinua: $\beta = -0,4$.

$$\begin{aligned}\Pi(dy) &= \lambda \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - \mu_J}{\sigma_J}\right)^2\right\} dy \\ &= \left(\lambda e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_J}{\sigma_J}\right)^2}\right) e^{\beta y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_J^2}\right\} dy,\end{aligned}\quad (1.36)$$

donde $\beta = \mu_J/\sigma_J^2$ y μ_J depende de β . Por esta razón adaptamos el modelo de Merton re-parameterizando su medida de Lévy.

Definición 1.1 (Modelo asimétrico de Merton). *Definimos el modelo asimétrico de Merton como un proceso de Lévy con terna característica $(\gamma, \sigma, \Pi(dy))$, donde*

$$\Pi(dy) = \lambda e^{\beta y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_J} \exp\left\{-\frac{y^2}{2\sigma_J^2}\right\} dy.$$

El exponente característico para el modelo asimétrico de Merton es

$$\psi_\beta(z) = -z(1-z)\frac{\sigma^2}{2} + \lambda e^{\frac{\beta^2 \sigma_J^2}{2}} \left[e^{(\beta + \frac{z}{2})z\sigma_J^2} - 1 - z \left(e^{(\beta + \frac{1}{2})\sigma_J^2} - 1 \right) \right].$$

En la Figura 1.4 mostramos el comportamiento de la volatilidad implícita en un entorno de $\beta = -1/2$.

Modelo asimétrico de Kou

El modelo de Kou tiene densidad de salto dada por $g(y) = p\theta_1 e^{\theta_1 y} \mathbf{1}_{\{y \leq 0\}} + (1-p)\theta_2 e^{-\theta_2 y} \mathbf{1}_{\{y > 0\}}$, donde $p \in (0, 1)$ y $\theta_1, \theta_2 > 0$. El siguiente caso particular constituye un modelo asimétrico.

Definición 1.2 (Modelo asimétrico de Kou). *Definimos el modelo asimétrico de Kou como un proceso de Lévy con terna característica $(\gamma, \sigma, \Pi(dy))$, donde*

$$\Pi(dy) = \lambda e^{\beta y - \alpha|y|} dy.$$

La relación entre los parámetros del modelo general y el modelo asimétrico son $\lambda = p\theta_1 = (1-p)\theta_2$, $\theta_1 = \beta + \alpha$ y $\theta_2 = \beta - \alpha$.

1.6.3. Un ejemplo complementario

En esta sección mostramos un ejemplo de un proceso de Lévy donde el correspondiente modelo verifica las condiciones de regularidad del Teorema 1.1, pero no verifica $\partial\sigma_{imp}(0, \beta)/\partial\beta > 0$ para todo $\beta > -1/2$ ni tampoco $\partial\sigma_{imp}(x, -1/2)/\partial\beta > 0$ para todo $x > 0$.

Definición 1.3 (Proceso de difusión con Poisson a dos lados). *Definimos el proceso de difusión con Poisson a dos lados como un proceso de Lévy donde la medida de salto es dada por*

$$\Pi_\beta(dy) = \lambda e^{\beta y} \left(\delta_a(y) + \delta_{-a}(y) \right) dy.$$

Si el proceso de difusión con Poisson a dos lados tiene componente de difusión positivo, entonces verifica el Teorema 1.1. Sin embargo, como mostramos en la Figura 1.6, tenemos que $\partial_x \sigma_{imp}(0, \beta)$ no es positiva, tampoco negativa ¹ para todo $\beta > -1/2$. Mostramos además en la Figura 1.5 que σ_{imp} tiene mínimos locales en $x = a$ y $x = -a$, donde el resultado del Teorema 1.1 no puede ser extendido a toda la recta real.

Es claro que este modelo no es interesante como un modelo realista, sin embargo es un ejemplo importante cuando tratamos de derivar resultados sobre la volatilidad implícita en el contexto de procesos de Lévy.

¹Observemos que aquí consideramos cualquier vencimiento, en contraste con los resultados obtenidos en Gerhold and Gülüm [2014] para opciones de corto vencimiento.

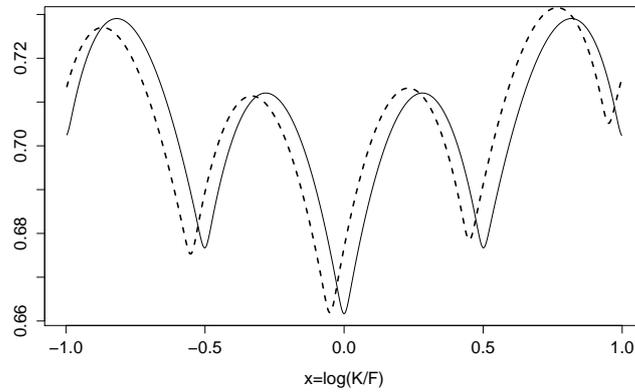


Figura 1.5: Volatilidad implícita bajo proceso de difusión con Poisson a dos lados: $\sigma = 0,01$, $a = 0,5$ y $\lambda = 2$. Línea continua: $\beta = -0,5$, línea discontinua: $\beta = -0,4$.

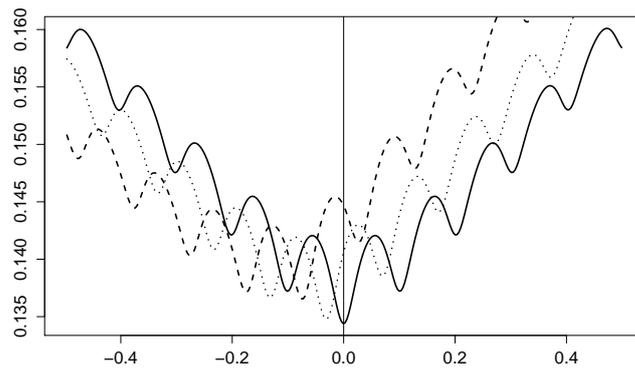


Figura 1.6: Volatilidad implícita bajo proceso de difusión con Poisson a dos lados: $\sigma = 0,01$, $a = 0,1$, $\lambda = 2$, $T = 1$ y $r = 0,05$. Línea continua: $\beta = -0,5$, línea punteada: $\beta = 1$ y línea discontinua: $\beta = 3$.

1.7. Conclusiones

Los modelos asimétricos introducidos en este capítulo son caracterizados por una medida de saltos simétrica multiplicada por un factor de amortiguación exponencial que depende de un parámetro β . Este parámetro cuantifica la asimetría del modelo, y su variación captura la característica típica de “sonrisa” observada en las curvas de volatilidad implícita. Nuestro principal resultado (ver Teore-

ma 1.1) muestra que los modelos asimétricos con densidad continua exhiben un comportamiento preciso de monotonía de la superficie de la volatilidad implícita, como función del log-moneyness y el parámetro de asimetría. Esos resultados son independientes del vencimiento de las opciones, y aplican a la mayoría de los principales modelos usados en la literatura. Otros modelos populares pueden ser fácilmente adaptados para ser modelos asimétricos. Finalmente, presentamos un ejemplo simple que muestra que el comportamiento de monotonía obtenida no puede ser extendido.

Nuestra propuesta establece un link entre el análisis visual de las curvas de volatilidad implícita y su modelación matemática, a través del parámetro de asimetría β . También plantea varias cuestiones relativas a las demás derivadas segundas de la superficie de la volatilidad implícita, por ejemplo conjeturamos la presencia de un mínimo absoluto de la volatilidad implícita en el punto $x = 0$ y $\beta = -1/2$ para la clase de modelos aquí trabajados.

CAPÍTULO 2

COBERTURA ESTÁTICA SOBRE UNA OPCIÓN DE COMPRA

Nuestro principal objetivo es hacer cobertura del riesgo, generando portafolios que neutralicen la posible variación de determinadas variables que pueden afectar sustancialmente el valor de nuestro portafolio. De esta forma, buscamos disminuir el riesgo de obtener grandes pérdidas mediante la neutralización de éstos con respecto a variables de interés.

Comenzamos este capítulo desarrollando fórmulas para la varianza de un portafolio basado en opciones de compra y venta junto con el activo subyacente, cuando este último es modelado mediante un proceso de Lévy bajo la medida riesgo neutral. Bajo este supuesto obtenemos también que el portafolio descontado es una martingala.

Por otro lado, nos enfrentamos a la problemática de tratar de disminuir el riesgo al emitir una opción, en particular trabajamos con una opción de compra. Como es usual en la literatura (ver Hull [2006]), creamos un portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, es decir, con derivada primera y segunda nula respecto al precio de stock. Aquí podemos obtener las *ganancias y pérdidas* (profit and loss: P/L) observando el valor que toma nuestro portafolio en el mercado, luego de transcurrido cierto tiempo y comparándolo con el valor de nuestro portafolio en el instante inicial, con la debida actualización temporal.

En función de nuestro parámetro de asimetría β , introducimos una nueva

forma de hacer cobertura. Construimos un portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral, con derivada nula respecto del precio de stock y del parámetro β . Este tipo de portafolio neutraliza el efecto de un cambio grande en el precio de stock y un cambio en la smirkness asociada a la opción de compra.

En la sección 2.3 comparamos estos dos tipos de portafolios, $\Delta\Gamma$ -neutral y $\Delta\mathcal{B}$ -neutral, con datos del índice SP&500 correspondientes al año 2006. Aquí observamos que el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral logra una sensible reducción del riesgo con respecto al portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, medida en una reducción de la varianza de ganancias y pérdidas.

Por último, analizamos la variabilidad de los parámetros del modelo NIG (usado para armar los portafolios), donde encontramos evidencia que el parámetro de asimetría β es el que presenta mayor variabilidad relativa y de esta forma se justifica la neutralización del parámetro en este sentido.

2.1. Introducción

Consideremos de forma general un mercado con d activos cuyos precios son modelados por un proceso estocástico $S_t = (S_t^1, \dots, S_t^d)$, en particular algunos de estos activos pueden ser función de otros, por ejemplo S_t^2 puede ser el precio de una opción de compra sobre el primer activo. Un *portafolio dinámico* es un vector, dependiente del tiempo, que describe la cantidad de cada activo en poder del inversor en cada instante:

$$\mathcal{P}_t = (\phi_t^1, \dots, \phi_t^d).$$

El valor del portafolio al tiempo t es dado por:

$$V_t(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^d \phi_t^i S_t^i. \quad (2.1)$$

Decimos que el portafolio es *estático* cuando \mathcal{P}_t no depende de t , es decir, cuando la cantidad de cada activo en poder del inversor no varía con el tiempo.

En este capítulo analizamos algunos portafolios estáticos. En un mercado real, los portafolios son modificados, pero dichas modificaciones no suceden dentro de pequeños intervalos de tiempo. En este sentido analizamos dos portafolios y la

variación de su valor en pequeños períodos de tiempo, por ende consideramos portafolios estáticos para representar la forma usual de éstos en mercados reales.

Una institución financiera que emite una opción se encuentra con el problema de gestionar el riesgo. Si la opción en cuestión es negociada en la bolsa, se puede neutralizar completamente el riesgo comprando la misma opción. Este procedimiento no suele ser de utilidad, pues si bien se elimina completamente el riesgo, bajo la condición de libre arbitraje, también se elimina toda posibilidad de ganancia, salvo costos administrativos. Por otro lado, si la opción emitida se ha adaptado a las necesidades de un cliente particular, es altamente probable que no se encuentren en la bolsa otras opciones de iguales características, con lo cual hay que diseñar estrategias para cubrir la exposición al riesgo.

La gestión del riesgo es un tópico ampliamente desarrollado en la literatura. Una importante referencia es el libro Hull [2006], el cual es basado en el modelo Black-Scholes.

En la literatura son estudiados distintos tipos de coberturas, sin embargo, en la práctica los *formadores de precios* (market makers) suelen seguir una estrategia parcialmente estática, cubriendo su portafolio ante cambios en el precio del activo subyacente, y reajustando su portafolio periódicamente para mantener la neutralidad ante variaciones del precio del activo.

En lo que sigue consideramos un único activo subyacente cuyo precio al tiempo t es denotado por S_t y anotamos con C_t y P_t el valor de una opción de compra y venta respectivamente para determinado precio de ejercicio y vencimiento.

Cobertura Δ -neutral.

Supongamos que tenemos un portafolio \mathcal{P} dependiendo de un único activo de interés y otros instrumentos financieros dependientes de éste como por ejemplo opciones. A tiempo $t = 0$ queremos cubrirnos ante variaciones lineales del precio del activo. En el corto plazo, si la derivada del valor del portafolio respecto a S_t la anotamos con $\Delta_t^{\mathcal{P}}$, tenemos:

$$\Delta_t^{\mathcal{P}} = \frac{\partial V_t(\mathcal{P})}{\partial S_t}.$$

Estamos interesados en transformar levemente nuestro portafolio, pasando de

\mathcal{P} a \mathcal{P}^* de modo que $\Delta_0^{\mathcal{P}^*} = 0$. Para ello, una alternativa inmediata es comprar o vender la cuota parte de activo, correspondiente a $\Delta_0^{\mathcal{P}}$.

En efecto, consideremos el valor del nuevo portafolio

$$V_t(\mathcal{P}^*) = V_t(\mathcal{P}) - \Delta_0^{\mathcal{P}} \cdot S_t.$$

En este caso hemos agregado a nuestro portafolio una fracción del activo obteniendo la neutralidad de éste en el corto plazo, respecto a variaciones del precio del activo,

$$\Delta_0^{\mathcal{P}^*} = \frac{\partial V_0(\mathcal{P}^*)}{\partial S_0} = 0.$$

El portafolio \mathcal{P}^* , construido de modo que la derivada de su valor respecto de S_0 se anule, es llamado *portafolio Δ -neutral*.

En virtud que $\Delta_t^{\mathcal{P}}$ cambia con el tiempo, la posición del inversor está “ Δ cubierta” por un período relativamente corto del tiempo. La cobertura tiene que ser ajustada periódicamente, lo que se conoce como *rebalanceo*.

Cobertura $\Delta\Gamma$ -neutral

Cuando construimos un portafolio Δ -neutral estamos disminuyendo el riesgo ante aumentos del precio del activo en un pequeño intervalo de variación de precios. Si la derivada segunda del valor del portafolio respecto al precio del activo es pequeña, entonces $\Delta_t^{\mathcal{P}}$ cambia lentamente y por tanto los ajustes para mantener el portafolio Δ -neutral se hacen bastante espaciados. Sin embargo, si la derivada segunda del valor del portafolio respecto del precio del activo es grande en módulo, $\Delta_t^{\mathcal{P}}$ es muy sensible a cambios en el precio del subyacente, y para mantener el portafolio Δ -neutral se requiere un gran número de operaciones.

Una vía de evitar ese gran número de operaciones, las cuales llevarían a un elevado costo administrativo, es neutralizar el portafolio también respecto a dicha segunda derivada.

Definimos Γ de un portafolio como la derivada segunda del valor del portafolio respecto al valor del activo:

$$\Gamma_t^{\mathcal{P}} = \frac{\partial^2 V_t(\mathcal{P})}{\partial S_t^2}.$$

Una posición o un contrato “forward” en el propio activo subyacente, tiene derivada segunda nula respecto del precio del activo, por lo tanto éstos no son útiles para hacer un portafolio Γ -neutral. Lo que se requiere es un instrumento que no sea lineal con el precio del subyacente, como por ejemplo lo son las opciones de compra y de venta.

Supongamos que tenemos un portafolio \mathcal{P} , Δ -neutral a tiempo $t = 0$ y una opción cotizada \mathcal{O} tiene en el mismo momento, derivada segunda respecto del precio del activo $\Gamma_0^{\mathcal{O}}$. Si agregamos una proporción ω de estas opciones al portafolio, la derivada segunda respecto al precio del activo en el nuevo portafolio \mathcal{P}^* será:

$$\Gamma_0^{\mathcal{P}^*} = \omega \Gamma_0^{\mathcal{O}} + \Gamma_0^{\mathcal{P}}.$$

Si ahora queremos que dicha derivada se anule, debemos imponer $\omega = -\Gamma_0^{\mathcal{P}}/\Gamma_0^{\mathcal{O}}$. Al incluir la opción cotizada es muy probable que la derivada primera respecto a S_t haya cambiado y por ende el nuevo portafolio no será Δ -neutral, por lo tanto la posición en el activo subyacente debe cambiarse para volver a tener la Δ -neutralidad en el nuevo portafolio. Agregando una fracción del activo subyacente podemos modificar la derivada primera pero no la segunda respecto de S_t . En resumen el valor de nuestro nuevo portafolio al tiempo t construido para ser $\Delta\Gamma$ -neutral a tiempo $t = 0$ es

$$V_t(\mathcal{P}^*) = V_t(\mathcal{P}) - \frac{\Gamma_0^{\mathcal{P}}}{\Gamma_0^{\mathcal{O}}} \mathcal{O}_t - \left(\Delta_0^{\mathcal{P}} - \frac{\Gamma_0^{\mathcal{P}}}{\Gamma_0^{\mathcal{O}}} \Delta_0^{\mathcal{O}} \right) S_t$$

Al igual que antes, el nuevo portafolio es $\Delta\Gamma$ -neutral sólo por un período de tiempo. Cuando el tiempo pasa, la $\Delta\Gamma$ -neutralidad puede ser mantenida sólo si la posición en la opción cotizada es ajustada.

Hacer que un portafolio Δ -neutral se convierta en $\Delta\Gamma$ -neutral puede ser considerado como una primera corrección para que la posición en el activo subyacente pueda no ser cambiada continuamente cuando se usa una cobertura Δ -neutral.

La Δ -neutralidad provee protección contra movimientos de precios del stock relativamente pequeños entre rebalanceos. La $\Delta\Gamma$ -neutralidad provee protección contra movimientos mayores en el precio de stock entre el rebalanceo.

También pueden ser consideradas otras variables al momento de neutralizar portafolios. Por ejemplo es común, bajo el modelo Black-Scholes, que se estudie la neutralidad de un portafolio ante movimientos de la volatilidad σ .

En el presente capítulo introduciremos la noción de neutralidad respecto del parámetro de asimetría β , haciendo necesaria la definición de una nueva *griega*. El estudio general de griegas bajo mercados de Lévy es desarrollado en el Capítulo 4.

A continuación introducimos la notación para cierto tipo de portafolios que usaremos a lo largo del capítulo.

Consideremos un portafolio $\mathcal{P} = (\phi^1, \dots, \phi^d)$ formado sobre el vector de activos constituidos por: el activo sin riesgo, el activo subyacente, una cantidad finita de opciones de venta y compra. Si anotamos a una opción de compra al tiempo t , con precio de ejercicio K y vencimiento T mediante $C_t(K, T)$ y la correspondiente opción de venta con $P_t(K, T)$ entonces el valor del portafolio es

$$V_t(\mathcal{P}) = \phi^1 e^{rt} + \phi^2 S_t + \sum_{i=3}^n \phi^i C_t(K_i, T_i) + \sum_{i=n+1}^m \phi^i P_t(K_i, T_i) =: \sum_{i=1}^{m+2} \phi^i \mathcal{O}_i, \quad (2.2)$$

Donde \mathcal{O}_i representa de forma general e^{rt} , S_t , $C_t(K_i, T_i)$ o $P_t(K_i, T_i)$.

En este contexto es útil extender levemente la relación de paridad entre opciones de compra y venta (6) cuando nos movemos en el tiempo, esto es, a tiempo t tenemos

$$\begin{aligned} Call_t(K, T) + Put_t(K, T) &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] + e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K)^- | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[(S_T - K) | \mathcal{F}_t] \\ &= e^{rt} \mathbb{E}[e^{-rT} S_T | \mathcal{F}_t] - e^{-r(T-t)} K \\ &= e^{rt} S_0 e^{X_t} \mathbb{E}[e^{X_{T-t}} | \mathcal{F}_t] - e^{-r(T-t)} K \\ &= S_t - e^{-r(T-t)} K \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde hemos usado que X_{T-t} es independiente de \mathcal{F}_t y $\mathbb{E}(e^{X_{T-t}}) = 1$ por estar bajo la medida de riesgo neutral.

2.2. Esperanza y varianza del portafolio

En esta sección nos proponemos obtener de forma exacta la esperanza y varianza de un portafolio como en (2.2) luego de transcurrido un tiempo t . Usando la fórmula de Lewis, obtenemos expresiones que no se pueden calcular de forma exacta pero que pueden ser aproximadas de forma precisa y rápida usando la transformada rápida de Fourier (en caso que se desee para varios valores de precios de ejercicio).

Comenzamos por mostrar la propiedad martingala de un portafolio como (2.2), la cual se deduce de la propiedad martingala para el valor del activo subyacente. En efecto, sea $S_t = S_0 e^{X_t + rt}$, donde $\{X_t, \mathbb{Q}\}$ es como en (5) y sea ξ una función tal que $\xi(S_{T-t})$ es integrable para $t < T$, entonces, de la independencia de los incrementos de $\{X_t\}$ tenemos

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi(S_{T-t})|\mathcal{F}_s)) = \mathbb{E}(\xi(S_{T-s})). \quad (2.4)$$

La propiedad martingala del precio de opciones de compra y venta, así como para otras opciones europeas, se obtiene directamente tomando ξ como la correspondiente función de pago descontada en (2.4).

A partir de esto, siendo nuestro valor del portafolio una combinación lineal de tales opciones, obtenemos:

Proposición 2.1 (Propiedad martingala del portafolio). *Sea \mathcal{P} un portafolio, con valor a tiempo t como en (2.2). Entonces el valor del portafolio descontado es \mathbb{Q} -martingala, esto es, para $0 \leq s \leq t < T$:*

$$\mathbb{E}(e^{-rt}V_t(\mathcal{P})|\mathcal{F}_s) = e^{-rs}V_s(\mathcal{P}).$$

Observación 2.1. *De la Proposición 2.1 tenemos que el valor del portafolio descontado es \mathbb{Q} -martingala, de donde en particular obtenemos el valor esperado para éste:*

$$\mathbb{E}(e^{-rt}V_t(\mathcal{P})) = V_0(\mathcal{P}). \quad (2.5)$$

A continuación nos ocupamos del problema de hallar la varianza del portafolio luego de transcurrido cierto tiempo. En este caso recurrimos a la fórmula de Lewis tanto para opciones de compra como de venta para obtener las varianzas y covarianzas de los términos que integran el portafolio.

Proposición 2.2 (Covarianza entre opciones de compra). *Consideremos dos precios de ejercicio K_1 y K_2 y dos vencimientos T_1 y T_2 . Entonces*

La covarianza entre dos opciones de compra a tiempo t , descontadas, es dada por:

$$\begin{aligned} Cov(e^{-rt}C_t(K_1, T_1); e^{-rt}C_t(K_2, T_2)) = & e^{-2rt} \mathbb{E}[C_t(K_1, T_1)C_t(K_2, T_2)] \\ & - C_0(K_1, T_1)C_0(K_2, T_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde

$$\begin{aligned} e^{-2rt} \mathbb{E} [C_t(K_1, T_1)C_t(K_2, T_2)] = & \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 K_1 K_2 e^{-r(T_1+T_2)} \int_{iv+\mathbb{R}} \int_{iv+\mathbb{R}} & \left(\frac{K_1}{S_0 e^{r(T_1-t)}}\right)^{iz_1} \left(\frac{K_2}{S_0 e^{r(T_2-t)}}\right)^{iz_2} \times \\ \frac{\exp \left\{ (T_1 - t)\Psi(-iz_1) + (T_2 - t)\Psi(-iz_2) + t\Psi(-i(z_1 + z_2)) \right\}}{z_1 z_2 (z_1 - i)(z_2 - i)} & dz_1 dz_2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

con $v > 1$.

Demostración. Es conocido que la covarianza entre dos variables aleatorias es dada por $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$. De la propiedad martingala para el precio de la opción de compra tenemos $\mathbb{E}[e^{-rt}C_t(K_i, T_i)] = C_0(K_i, T_i)$, por ende sólo nos falta el primer término en (2.6).

Usando la fórmula de Lewis y expresando el producto de integrales como una integral doble obtenemos,

$$\begin{aligned}
& e^{-2rt} \mathbb{E} [C_t(K_1, T_1)C_t(K_2, T_2)] = \\
& = e^{-2rt} \mathbb{E} \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \int_{iw+\mathbb{R}} S_t^{-iz_1} \left(\frac{K_1}{e^{r(T_1-t)}} \right)^{iz_1+1} \frac{e^{(T_1-t)\Psi(-iz_1)}}{z_1(z_1-i)} dz_1 \times \\
& \quad \int_{iw+\mathbb{R}} S_t^{-iz_2} \left(\frac{K_2}{e^{r(T_2-t)}} \right)^{iz_2+1} \frac{e^{(T_2-t)\Psi(-iz_2)}}{z_2(z_2-i)} dz_2 \\
& = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 K_1 K_2 e^{-r(T_1+T_2)} \int_{iw+\mathbb{R}} \int_{iw+\mathbb{R}} \left(\frac{K_1}{S_0 e^{r(T_1-t)}} \right)^{iz_1} \left(\frac{K_2}{S_0 e^{r(T_2-t)}} \right)^{iz_2} \times \\
& \quad \frac{\exp \left\{ (T_1-t)\Psi(-iz_1) + (T_2-t)\Psi(-iz_2) + t\Psi(-i(z_1+z_2)) \right\}}{z_1 z_2 (z_1-i)(z_2-i)} dz_1 dz_2,
\end{aligned}$$

lo cual concluye el resultado. \square

Observación 2.2. Si tomamos $K = K_1 = K_2$ y $T = T_1 = T_2$ en la Proposición 2.2 obtenemos directamente la varianza de una opción de compra descontada,

$$\text{Var} [e^{-rt} C_t(K, T)] = e^{-2rt} \mathbb{E} [C_t(K, T)^2] - [C_0(K_1, T_1)]^2,$$

donde $\mathbb{E} [C_t(K, T)^2]$ se obtiene como en (2.7).

Para obtener la covarianza entre dos opciones de venta o entre una opción de compra y una de venta basta considerar que la fórmula de Lewis para una opción de venta es análoga a la opción de compra pero cambiando la franja de integración $iw + \mathbb{R}$ por $iw + \mathbb{R}$ con $w < 0$, donde es posible tomar por ejemplo $w = -v$ (ver Lewis [2001]).

Proposición 2.3 (Covarianza entre opciones de compra y venta y entre opciones de venta). Consideremos dos precios de ejercicio K_1 y K_2 y dos vencimientos T_1 y T_2 . Entonces

1. La covarianza entre una opción de venta y una de compra a tiempo t , descontadas, es dada por:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e^{-rt}C_t(K_1, T_1); e^{-rt}P_t(K_2, T_2)) &= e^{-2rt} \mathbb{E}[C_t(K_1, T_1)P_t(K_2, T_2)] \\ &\quad - C_0(K_1, T_1)P_0(K_2, T_2) \end{aligned}$$

donde tomamos $\alpha < 0$ y $\beta > 1$ en (2.8)

2. La covarianza entre dos opciones de venta a tiempo t , descontadas, es dada por:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(e^{-rt}P_t(K_1, T_1); e^{-rt}P_t(K_2, T_2)) &= e^{-2rt} \mathbb{E}[P_t(K_1, T_1)P_t(K_2, T_2)] \\ &\quad - P_0(K_1, T_1)P_0(K_2, T_2) \end{aligned}$$

donde tomamos $\alpha = \beta < 0$ en (2.8).

La esperanza del primer término se calcula tomando \mathcal{O} como una opción de compra o venta según corresponda:

$$\begin{aligned} e^{-2rt} \mathbb{E} [\mathcal{O}_t(K_1, T_1)P_t(K_2, T_2)] &= \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 K_1 K_2 e^{-r(T_1+T_2)} \int_{i\alpha+\mathbb{R}} \int_{i\beta+\mathbb{R}} \left(\frac{K_1}{S_0 e^{r(T_1-t)}}\right)^{iz_1} \left(\frac{K_2}{S_0 e^{r(T_2-t)}}\right)^{iz_2} \times \\ &\quad \frac{\exp\left\{(T_1-t)\Psi(-iz_1) + (T_2-t)\Psi(-iz_2) + t\Psi(-i(z_1+z_2))\right\}}{z_1 z_2 (z_1-i)(z_2-i)} dz_1 dz_2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Por último, en el valor del portafolio (2.2) tenemos otro termino con aleatoriedad, el valor del activo subyacente. Por esto debemos calcular su varianza y la covarianza entre éste y las opciones de compra y venta.

Bajo la medida de riesgo neutral sabemos que $\mathbb{E}[e^{-rt}S_t] = S_0$, además, la varianza puede ser calculada directamente por medio del exponente característico:

$$\text{Var}(e^{-rt}S_t) = S_0^2 \mathbb{E}(e^{2X_t}) - S_0^2 = S_0^2 [e^{t\Psi(2)} - 1] \tag{2.9}$$

Por último, la covarianza entre una opción de compra (o venta) y el valor del activo subyacente se obtiene nuevamente usando la fórmula de Lewis:

Proposición 2.4. *La covarianza entre una opción de compra (o venta) descontada y el valor del activo subyacente descontado, es dado por*

$$Cov(e^{-rt}\mathcal{O}_t(K, T); e^{-rt}S_t) = e^{-2rt} \mathbb{E}[\mathcal{O}_t(K, T)S_t] - \mathcal{O}_0(K, T)S_0,$$

donde \mathcal{O} representa C o P según se trate de una opción de compra o venta y

$$\begin{aligned} e^{-2rt} \mathbb{E}[\mathcal{O}_t(K, T)S_t] &= \mathbb{E} \frac{1}{2\pi} \int_{i\alpha + \mathbb{R}} S_t^{1-iz} \left(\frac{K}{e^{r(T-t)}} \right)^{iz+1} \frac{e^{(T-t)\Psi(-iz)}}{z(z-i)} dz \\ &= \frac{S_0^2}{2\pi} \int_{i\alpha + \mathbb{R}} \left(\frac{K}{S_0 e^{r(T-t)}} \right)^{iz+1} \frac{e^{(T-t)\Psi(-iz) + t\Psi(1-iz)}}{z(z-i)} dz, \end{aligned}$$

donde $\alpha > 1$ si se trata de una opción de compra y $\alpha < 0$ si se trata de una opción de venta.

Una vez que tenemos las varianzas y covarianzas de los términos del valor del portafolio podemos calcular la varianza de éste.

Sea $V_t(\mathcal{P})$ el valor de un portafolio al tiempo t como en (2.2), entonces

$$\begin{aligned} Var(e^{-rt}V_t(\mathcal{P})) &= \sum_{i=1}^{m+2} (\phi^i)^2 Var(\mathcal{O}_i) + \sum_{\substack{i=1, \dots, m+1 \\ j=i+1, \dots, m+2}} \phi^i \phi^j 2Cov(\mathcal{O}_i; \mathcal{O}_j), \end{aligned} \tag{2.10}$$

donde \mathcal{O}_i representa de forma general $C_t(K_i, T_i)$, $P_t(K_i, T_i)$, 1 o S_t . Cada varianza y covarianza es calculada según las Proposiciones 2.2, 2.3, 2.4 y la igualdad (2.9).

A continuación, a modo de ejemplo, obtenemos la varianza del valor de una opción de compra en función del tiempo t , desde que se conoce su valor en el mercado ($t = t_0$). Usamos un modelo asimétrico de Merton (ver definición 1.1) para calibrar la volatilidad implícita correspondientes a opciones de IBM con fecha 20 de julio de 2013. En la figura 2.1 se muestran los valores de la volatilidad implícita junto con la curva calibrada del modelo.

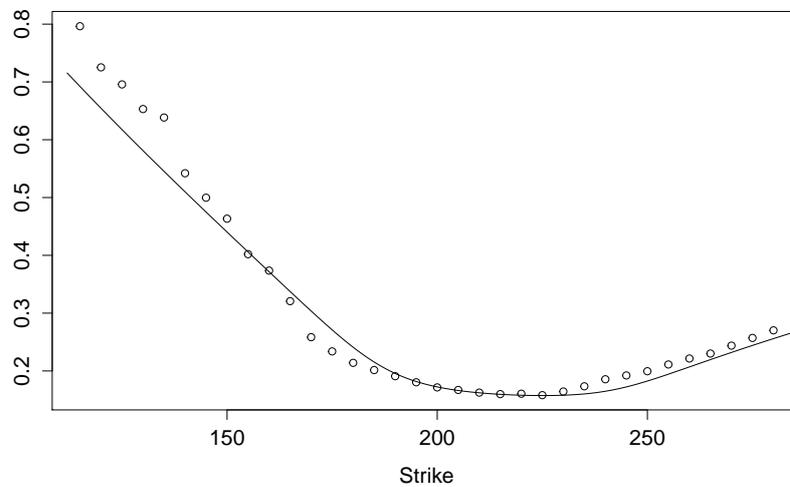


Figura 2.1: Volatilidad implícita bajo el modelo asimétrico de Merton calibrado para datos de IBM al 20 de julio de 2013 con vencimiento 10 de octubre de 2013. Puntos: datos reales, línea continua: modelo

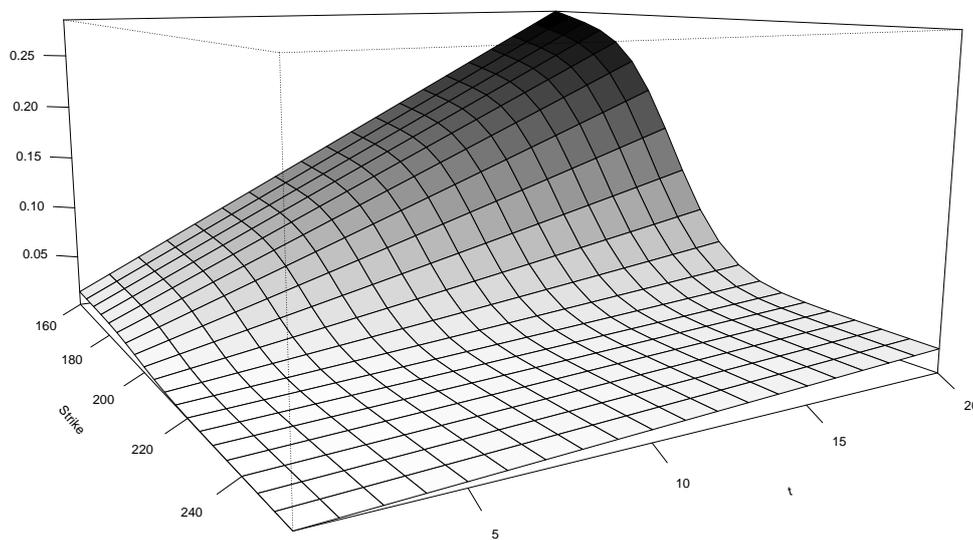


Figura 2.2: Varianza del precio de una opción de compra sobre los datos correspondientes a la figura 2.1, en función de los días desde t_0 igual al 20 de julio de 2013 y el precio de ejercicio.

En la figura 2.2 se muestra la evolución de la varianza del call en términos del tiempo desde que se conoce su valor de mercado, relativizada respecto al precio de stock en t_0 ($var[Call(S_t)]/S_0$). Aquí observamos el crecimiento de la varianza al ir pasando los días, además de tener un comportamiento muy próximo al lineal para cada precio de ejercicio, además se observa la mayor varianza del precio de la opción de compra para precios de ejercicios menores.

En la presente sección obtuvimos la esperanza y varianza del valor de un portafolio cuando varía el tiempo, suponiendo que el activo subyacente es modelado con un proceso de Lévy. Sin embargo, como veremos en la sección 3.6 para datos de SP&500, en los mercados reales los parámetros suelen variar en el tiempo.

Con este objetivo, en la sección 2.3 implementamos la construcción de portafolios en base a datos reales de SP&500, donde evitamos en todo sentido hacer simulación con el objetivo de apegarnos a las situaciones realmente ocurridas en el mercado. La modelación se hace con el único objetivo de construir los portafolios $\Delta\Gamma$ -neutral y $\Delta\mathcal{B}$ -neutral, pero no es utilizada en la evaluación posterior de ganancias y pérdidas.

2.3. Coberturas $\Delta\Gamma$ -neutral y $\Delta\mathcal{B}$ -neutral con datos de SP&500

Estamos interesados en analizar la disminución del riesgo al momento de emitir una opción de compra. Para ello disponemos de datos reales del índice SP&500 correspondientes al año 2006.

Un elemento importante del presente análisis es que tratamos de evitar la simulación de valores para el precio del activo subyacente como de las opciones utilizadas. En su lugar usamos datos reales según el comportamiento que se registró y del cual disponemos (SP&500 correspondientes al año 2006).

En esta sección consideramos que emitimos una opción de compra, con precio de ejercicio $K = S_0 e^{rT}$, o equivalentemente en términos del logaritmo de la monetización $x = 0$ (*at the money*). Dicha opción la anotamos ATM. También analizamos la cobertura sobre la emisión de una opción de compra *in the money* ($x < 0$) y otra *out the money* ($x > 0$).

Aquí consideramos puntualmente los siguientes valores, para la opción de

compra *in the money* consideramos $x = -0,01$ y para la opción de compra *out the money* consideramos $x = 0,01$. Podríamos haber tomado otras elecciones, sin embargo optamos por estos valores en virtud de que la variabilidad con respecto a nuestro parámetro de asimetría β se manifiesta de forma más notoria en un entorno de $x = 0$.

El procedimiento para conformar los portafolios es el siguiente: utilizando el 10% del valor de la opción emitida, conformamos dos portafolios que contienen cuatro activos: la opción emitida, el activo subyacente y otras dos opciones de compra, de modo que, un portafolio sea $\Delta\Gamma$ -neutral y el otro portafolio sea $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. El 10% es tomado como referencia, pero podría ser otra proporción del valor de la opción de compra emitida.

A modo de resumen, buscamos construir dos portafolios $\mathcal{P}^i = (0,9, \phi^{i,1}, \phi^{i,2}, \phi^{i,3})$ sobre el vector de activos/opciones $(C_{e,t}, C_{1,t}, C_{2,t}, S_t)$ con valor a tiempo t dado por

$$V_t(\mathcal{P}^i) = 0,9C_{e,t} + \underbrace{\phi^{i,1}C_{1,t} + \phi^{i,2}C_{2,t} + \phi^{i,3}S_t}_{0,1C_{e,t}}, \quad (2.11)$$

donde $i = 1, 2$ corresponde al portafolio: $i = 1$ el portafolio es $\Delta\Gamma$ -neutral e $i = 2$ el portafolio es $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. Por $C_{e,t}$ anotamos el valor de la opción de compra emitida, al tiempo t , $C_{1,t}$ y $C_{2,t}$ son los valores de las opciones de compra, a tiempo t , utilizadas para disminuir el riesgo ($C_{1,t}$ y $C_{2,t}$ son obligadas a tener distinto precio de ejercicio que $C_{e,t}$) y S_t es el valor del índice a tiempo t .

Los coeficientes del portafolio son determinados para cada portafolio según las restricciones exigidas. Admitiendo que podemos hacer la siguiente operación (determinante no nulo), para el portafolio \mathcal{P}^1 tenemos en $t = 0$

$$\begin{bmatrix} \phi^{1,1} \\ \phi^{1,2} \\ \phi^{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & S_t \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,1C_e \\ -0,9\Delta_e \\ -0,9\Gamma_e \end{bmatrix}.$$

Mientras que para el portafolio \mathcal{P}^2 tenemos en $t = 0$

$$\begin{bmatrix} \phi^{2,1} \\ \phi^{2,2} \\ \phi^{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & S_t \\ \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{B}_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0,1C_e \\ -0,9\Delta_e \\ -0,9\mathcal{B}_e \end{bmatrix},$$

donde recordamos que con \mathcal{B} anotamos la derivada de la opción o del activo según corresponda, respecto del parámetro de asimetría β en el punto calibrado.

En la Figura 2.3 se muestra la curva de los valores de los portafolios $\Delta\Gamma$ -neutral y $\Delta\mathcal{B}$ -neutral para las fechas 13 de marzo y 24 de abril de 2006 del índice SP&500. Aquí se observa la similitud de ambos portafolios al variar el precio de stock, sin embargo, también se observan diferencias, además de no contemplarse la posible variación de los parámetros del modelo para una fecha próxima.

Con la construcción antes descrita de los portafolios podemos tener dos formas posibles de evaluación de ganancias y pérdidas, una mediante simulación y la otra tomando los valores reales observados en el mercado.

Con el uso de simulación podemos obtener gran volumen de datos para analizar, sin embargo tiene algunos inconvenientes que deseamos evitar. El primer inconveniente es la elección del modelo. Es claro que si optamos por un modelo, entonces la simulación de nuestro futuro precio de stock se verá sujeta a dicha elección, sesgando los resultados obtenidos. El segundo y más importante inconveniente de la simulación para nuestro análisis es que, habiendo elegido un modelo y calibrado los parámetros de dicho modelo, no tenemos información para provocar movimientos en los parámetros. En el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral buscamos neutralizar las posibles variaciones del parámetro de asimetría β , por tanto trabajar con parámetros constantes nos llevará a la inmediata conclusión de que es preferible (en el sentido de disminución del riesgo) el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral. Una forma para evitar este problema es utilizar parámetros dependientes del tiempo, pero nos alejamos del objetivo inicial en esta sección que es trabajar con procesos de Lévy. La dependencia o variación temporal de los parámetros es analizada en el capítulo 3.

La segunda forma posible para evaluar ganancias y pérdidas, que describimos y consideramos a continuación, es tomar los valores observados de mercado, tanto para el precio del activo subyacente como para las opciones involucradas.

El procedimiento a seguir para obtener las ganancias y pérdidas es el siguiente: calibramos nuestro modelo según la información del día corriente. Este modelo es utilizado para calcular las derivadas necesarias al momento de construir los dos portafolios de interés. A continuación, usando la estructura descrita en (2.11) tomamos dos opciones de compra y el activo (con los valores dados del mercado) y conformamos nuestros portafolios $\Delta\Gamma$ -neutral y $\Delta\mathcal{B}$ -neutral.

Dado que hay gran cantidad de opciones disponibles, con distintos vencimientos, debemos optar por algunas de ellas. En primera instancia nos restringimos a utilizar para todas las opciones involucradas el menor vencimiento del cual se tenga información, en el rango de 15 a 45 días con respecto a la fecha en la cual se hace la calibración. Esta restricción se justifica por la búsqueda de liquidez entre las opciones utilizadas.

Con los precios de ejercicios disponibles para las opciones de compra, luego de la anterior restricción, seguimos el siguiente procedimiento. Calculamos para todas las combinaciones posibles, las curvas del valor del portafolio en función del precio de stock S_0 y optamos por quedarnos con aquellas opciones de compra que, verificando la neutralidad deseada del portafolio, sean tales que nuestro nuevo portafolio se acerque lo mayor posible al portafolio constante como función de S_0 . Esto es, optamos por las opciones de compra $C_{1,t}(K_1, T_1)$ y $C_{2,t}(K_2, T_2)$ de modo que si el valor de nuestro portafolio como función de S_0 a tiempo $t = 0$ es $V_{S_0}(\mathcal{P}^i)$ se minimice

$$\int_{0,95 \cdot S_0}^{1,05 \cdot S_0} (V_{S_0}(\mathcal{P}^i) - C_{e,0})^2 dS_0. \quad (2.12)$$

Donde el intervalo $[0,95S_0; 1,05S_0]$ es considerado para acotar la posible variación de S_0 en el corto plazo. Para los datos observados, el cambio de S_0 nunca excedió la barrera del 5% en cada sentido.

Con este criterio buscamos extender lo más posible el concepto detrás de la construcción del portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, promoviendo que los cambios en el precio de stock del activo subyacente afecten lo menos posible al valor de nuestro portafolio. En el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral uno asume que los parámetros del modelo son constantes en el tiempo o al menos que la variabilidad no afecta fuertemente el valor del portafolio. No obstante ello, si los parámetros cambian día a día entonces la neutralidad en alguno de estos parámetros (aquí analizamos neutralidad en el parámetro de asimetría β) ayudaría a disminuir el riesgo.

Observemos que sólo utilizamos el 10% del valor de la opción emitida. En caso de no tener esta restricción y la opción ser operada en el mercado, uno puede eliminar todo el riesgo comprando exactamente la opción. Este caso es ajeno a la realidad y por ello la restricción considerada.

Pasado un período de tiempo de contruidos nuestros portafolios (por ejemplo

un día, tres días o siete días), evaluamos las ganancias y pérdidas que obtuvimos, siempre utilizando datos reales (no simulaciones) de los valores tanto del índice como de las opciones de compra involucradas.

Es importante aclarar este punto ya que, en el análisis presentado en esta sección, la modelización mediante modelos de Lévy sólo es utilizado a los efectos de elegir nuestros coeficientes $\phi^{i,1}$, $\phi^{i,2}$ y $\phi^{i,3}$, pero no es realizada ninguna valoración con respecto a la evolución futura del precio y demás usando el modelo.

Este procedimiento es aplicado día tras día a lo largo de las fechas válidas¹ correspondientes al 2006.

A los efectos ilustrativos, exponemos los resultados obtenidos cuando el modelo de referencia utilizado en el procedimiento es el modelo Normal Inverse Gaussian. Otros modelos puede utilizarse, en particular optamos por este ya que es ampliamente usado en la literatura, sólo cuenta con tres parámetros (incluyendo nuestro parámetro de asimetría β) y además calibra a los datos de SP&500 de forma precisa, obteniendo un error ℓ^2 con pesos (ver 2.13) del orden de 10^{-2} para todas las curvas de opciones calibradas.

El error ℓ^2 con pesos es definido como sigue,

$$err = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{Vol(K_i)}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{Vol(K_i)}} \left(Call_{obs}(K_i) - Call_{modelo}(K_i) \right)^2, \quad (2.13)$$

donde $Vol(i)$ es el volumen efectivamente transado, $Call_{obs}(K_i)$ y $Call_{modelo}(K_i)$ son los valores de la opción de compra reales observados y ajustados según nuestro modelo respectivamente, por último K_i con $i = 1, \dots, n$, representa los precios de ejercicios disponibles en cada fecha. Tomamos como pesos la raíz cuadrada del volumen transado para amortiguar el efecto de gran heterogeneidad en los volúmenes transados que produce que los algoritmos se inclinen a optar por minimizar la distancia sólo para algunos puntos.

En la Figura 2.3, como ya mencionamos antes, se muestra un ejemplo típico de las curvas del valor del portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral y $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. Aquí se indica con la línea vertical el nuevo precio de stock luego de tres días de construido el portafolio. Observemos en el gráfico de la izquierda que el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral es más próximo al valor original del portafolio para el nuevo valor de stock, sin embargo

¹Entendemos por fechas válidas aquellas fechas para la cual hay transacción de la opción emitida y de las utilizadas en el portafolio, y a su vez también están disponibles los valores en la fecha de evaluación posterior (un día, tres días o siete días).

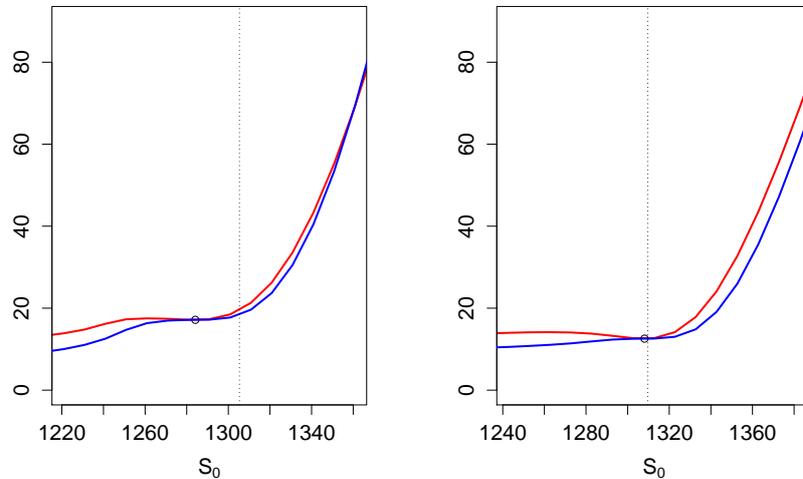


Figura 2.3: Portafolios neutralizados para una opción de compra. Izquierda: opción emitida el 13 de marzo de 2006 ; derecha: opción emitida el 24 de abril de 2006, sobre SP&500. Azul: portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral. Rojo: portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. Punto circular: valor de la opción emitida y del portafolio al día de emisión. Línea vertical: nuevo precio del activo luego de tres días.

en este día, con el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ neutral se obtienen ganancias por 0,49 dólares mientras que con el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral se obtienen pérdidas por 2,34 dólares. Por otro lado, también en la Figura 2.3 (gráfico de la derecha), observamos que para el nuevo valor de stock los portafolios son prácticamente indistinguibles, sin embargo el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral luego de tres días produce ganancias por valor de 1,6 dólares, mientras que el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral produce ganancias sólo por 0,65 dólares. En términos relativos significa que el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral obtiene una reducción relativa de la variación de 59% con respecto al portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral. Es importante aclarar que si bien en este día el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral obtuvo mayores ganancias, lo que es deseable, el objetivo de la neutralidad no va orientado a obtener mayor ganancia, sino que va orientado a disminuir la variabilidad para así disminuir el riesgo de caer en grandes pérdidas. De todos modos, como se observa en el cuadro 2.1, en promedio se obtienen mayores ganancias y menores pérdidas con el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral.

En la Figura 2.4 observamos la estimación de densidad de las ganancias y pérdidas obtenidas a lo largo del año en estudio, cuando evaluamos ganancias y pérdidas luego de uno, tres y siete días de construido el portafolio. Dicha gráfica

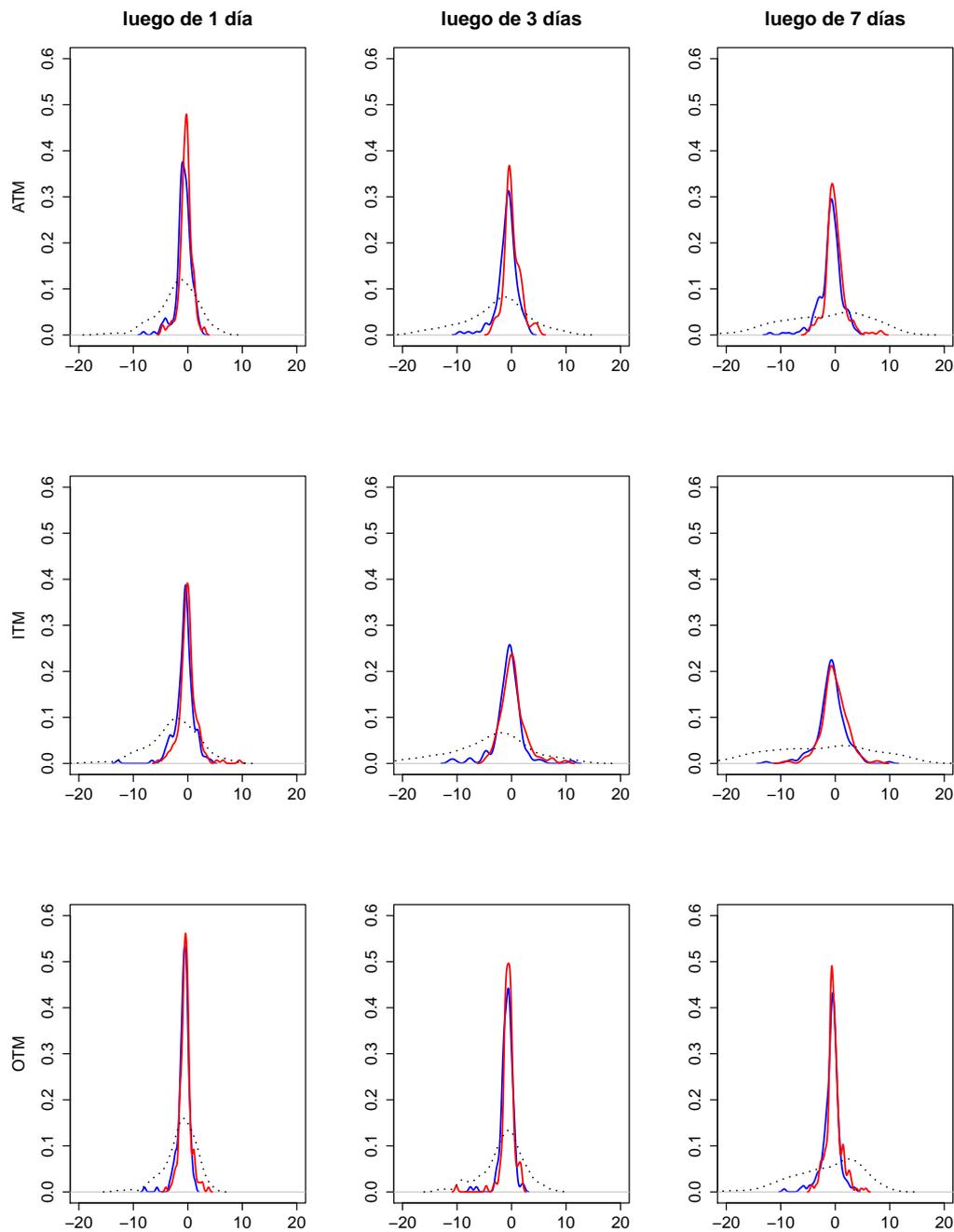


Figura 2.4: Estimación de densidad de ganancias y pérdidas según los portafolios, para una opción de compra con precio de ejercicio correspondiente a $x = 0$ (arriba), $x = -0,01$ (medio), $x = 0,01$ (abajo); sobre SP&500 del 2006. Línea azul: portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, línea roja: portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral, línea negra: portafolio sin cubrir. Tiempo para re-evaluado luego de neutralizado el portafolio: izquierda 1 días, centro 3 días, derecha 7 días.

es complementada con el cuadro 2.1 donde se muestran media y desvío estándar en cada caso.

Se observa una disminución de la variabilidad del portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral respecto al estándar portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, medida en términos del desvío estándar de las ganancias y pérdidas. Esta disminución de riesgo es acompañada por una media mayor en todos los períodos considerados, reflejando una disminución del riesgo acompañada con mayores ganancias (y menos pérdidas) en promedio.

En el cuadro 2.2 observamos la disminución en términos relativos de la varianza de las ganancias y pérdidas de los portafolios estudiados. Es importante notar que con el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral obtenemos una disminución relativa del riesgo mayor al 10 % en todos los escenarios estudiados. La mayor disminución de varianza relativa se produce cuando la opción de compra corresponde a $x = 0$ y la evaluación del portafolio es un día después de construido, obteniendo una reducción del 35 % de la varianza.

Del cuadro 2.2 se puede intentar inferir que cuando la opción a cubrir corresponde a $x = 0$ es cuando se obtiene la mayor reducción de varianza de ganancias y pérdidas del portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral respecto del portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, y que para este precio de ejercicio, cuando nos alejamos en el tiempo para evaluar ganancias y pérdidas, la reducción de varianza disminuye (posiblemente porque comience a afectar en mayor medida la variación del precio de stock, neutralizada para valores grandes por la derivada segunda en el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral).

Para la opción emitida con precio de ejercicio correspondiente a $x = 0,01$, con nuestro portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral se obtiene una reducción de varianza con una tendencia inversa a la que sucedía para el caso $x = 0$ en el tiempo, es decir, a medida que nos alejamos en el tiempo la reducción de varianza aumenta para nuestro portafolio con respecto al $\Delta\Gamma$ -neutral. Una posible explicación es que para valores $x > 0$, los cambios en el valor del activo afectan a los valores de las opciones de compra y del portafolio, pero en menor medida que la variabilidad producida por el cambio de asimetría, dando lugar a una mayor reducción de varianza del portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral.

Cuando la opción de compra tiene el precio de ejercicio correspondiente a $x = -0,01$, en los tres períodos de evaluación observamos reducción de varianza mayor al 12 % con nuestro portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. Sin embargo no hay una tendencia como sucedía para $x = 0$ o $x = 0,01$ cuando nos alejamos en el tiempo.

		luego de 1 día	luego de 3 días	luego de 7 días
$x = 0$				
$\Delta\Gamma$ -neutral	mean P/L	-0.767	-0.848	-0.878
	var P/L	2.190	3.587	4.566
$\Delta\mathcal{B}$ -neutral	mean P/L	-0.376	0.0895	-0.107
	var P/L	1.415	2.361	3.406
sin cubrir	mean P/L	-1.846	-2.666	-1.947
	var P/L	13.859	33.419	58.455
$x = -0,01$				
$\Delta\Gamma$ -neutral	mean P/L	-0.6410	-0.622	-0.716
	var P/L	3.326	6.699	6.633
$\Delta\mathcal{B}$ -neutral	mean P/L	0.0004	0.232	-0.182
	var P/L	2.920	5.262	5.498
sin cubrir	mean P/L	-2.544	-3.543	-2.773
	var P/L	20.597	49.252	88.600
$x = 0,01$				
$\Delta\Gamma$ -neutral	mean P/L	-0.784	-0.848	-0.782
	var P/L	1.142	1.443	2.371
$\Delta\mathcal{B}$ -neutral	mean P/L	-0.431	-0.648	-0.308
	var P/L	1.008	1.651	1.915
sin cubrir	mean P/L	-1.265	-1.462	-1.297
	var P/L	8.358	14.181	34.575

Cuadro 2.1: Media y varianza de Ganancias y pérdidas, para portafolios en base a una opción de compra con precio de ejercicio correspondiente a $x = 0$ (arriba), $x = -0,01$ (centro) y $x = 0,01$ (abajo); luego de 1 día de construido el portafolio (izquierda), 3 días (centro), 7 días (derecha); sobre SP&500 del 2006.

$\frac{var(\mathcal{P}_{\Delta\mathcal{B}})}{var(\mathcal{P}_{\Delta\Gamma})} - 1$	luego de 1 día	luego de 3 días	luego de 7 días
$x = 0$	-35.4 %	-34.2 %	-25.4 %
$x = -0,01$	-12.2 %	-21.5 %	-17.1 %
$x = 0,01$	-11.8 %	-14.4 %	-19.2 %

Cuadro 2.2: Variación relativa en porcentaje (+ aumento, – disminución) del riesgo del portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral respecto del portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, medida respecto de la varianza, para portafolios en base a una opción de compra con precio de ejercicio correspondiente a $x = 0$ (arriba), $x = -0,01$ (centro) y $x = 0,01$ (abajo); luego de 1 día de construido el portafolio (izquierda), 3 días (centro), 7 días (derecha); sobre SP&500 del 2006.

Posiblemente esto sea explicado porque al pasar el tiempo el valor de stock tiene mayor variabilidad, pero como se observa en la Figura 2.3 para valores $x < 0$ (in the money) los portafolios neutrales se parecen más al portafolio contante que para valores $x > 0$ (out the money). Luego de tres días la neutralización en el parámetro de asimetría β es más efectiva que en la derivada segunda respecto al stock, sin embargo, luego de siete días la variación del precio de stock es mayor y el portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral tiene mayor capacidad de neutralizar estos valores altos.

En general podemos concluir que para los datos utilizados, el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral obtiene una disminución de la varianza mayor al 10% con respecto al portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral en todos los casos analizados.

En el cuadro 2.4 observamos que hacer cobertura, tanto por portafolios $\Delta\Gamma$ -neutrales como por portafolios $\Delta\mathcal{B}$ -neutrales, siempre disminuye el riesgo del portafolio con respecto a no hacerla, medido en términos del desvío estándar o de la varianza de las ganancias y pérdidas. Así mismo, la media siempre es mayor para los portafolios con estas coberturas que para el portafolio sin cobertura.

En la sección 2.3.1 estudiamos la variabilidad de los parámetros como función del tiempo, dando lugar a una explicación del comportamiento antes descrito de los portafolios $\Delta\mathcal{B}$ -neutrales respecto de los portafolios $\Delta\Gamma$ -neutrales.

2.3.1. Variabilidad del modelo en el tiempo

Aquí analizamos la variabilidad del modelo en los períodos de evaluación descritos en la sección anterior, en base a los datos del índice SP&500 del año 2006. En particular trabajamos con el modelo Normal Inverse Gaussian y analizamos la variación absoluta y relativa de los parámetros para una misma opción luego de uno, tres y siete días, avanzando a lo largo del año 2006.

Análisis estadístico de los parámetros

En la sección 2.3 observamos que construir un portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral nos conduce a una disminución del riesgo (mayor al 10% en términos relativos, medido sobre la varianza de las ganancias y pérdidas) respecto al portafolio estándar $\Delta\Gamma$ -neutral, usando datos de SP&500 para el año 2006. Ahora nos disponemos a analizar el comportamiento de los parámetros con los datos utilizados para los períodos de evaluación de los portafolios: luego de uno, tres y siete días.

Recordemos el procedimiento realizado para la evaluación de los portafolios. Tomamos una fecha válida y calibramos nuestro modelo, con esos valores se determina el portafolio con los requisitos explicados en la sección 2.3. A continuación evaluamos el portafolio luego de uno, tres y siete días donde se registran las ganancias y pérdidas. Por último, tomamos la siguiente fecha válida y aplicamos el mismo procedimiento. Este mecanismo es usado al recorrer por todas las fechas válidas.

En términos de los parámetros tenemos la siguiente situación. El modelo es calibrado en una fecha válida de donde obtenemos un primer vector con los parámetros. Al momento de evaluar el portafolio (luego de uno, tres y siete días) podemos re-calibrar el modelo para estudiar cuánto han variado los parámetros. Si bien esta re-calibración no es usada en la evaluación de ganancias y pérdidas, nos aporta información relevante sobre la variabilidad en el tiempo del modelo. A continuación tomamos otra fecha válida calibramos y re-calibramos (luego de uno, tres y siete días). Para la re-calibración luego de un día, se registran los pares de vectores ($param_{inic}, param_{re}$) y por tanto tenemos una muestra de parámetros calibrados y su respectiva re-calibración. Lo mismo se hace para tres y siete días.

Es importante observar que aquí no analizamos la evolución a lo largo del tiempo de una opción particular, lo que buscamos es obtener la muestra co-

respondiente de parámetros calibrados y re-calibrados según el procedimiento empleado en la sección 2.3. El estudio de la evolución en el tiempo para una opción de compra con precio de ejercicio y vencimientos determinados es realizado en la sección 3.6.

En la Figura 2.5 se observa la evolución relativa de los parámetros α , β y λ correspondientes al modelo NIG utilizado en la cobertura realizada en la sección 2.3. Dicha evolución relativa es calculada como sigue. Anotemos con $\alpha_0(t)$, $\beta_0(t)$ y $\lambda_0(t)$ los parámetros del modelo NIG para una fecha válida t (calibrados sobre opciones de compra con un vencimiento fijo T) y anotemos con $\alpha_i(t)$, $\beta_i(t)$ y $\lambda_i(t)$ los parámetros re-calibrados (sobre las mismas opciones de compra) luego de i días. Entonces la evolución relativa es calculada como sigue

Luego, al movernos por las fechas válidas t_1, t_2, \dots, t_n obtenemos las muestra:

- Para re-calibración luego de un día:

$$(ER_{\alpha,1}(t_1), ER_{\beta,1}(t_1), ER_{\lambda,1}(t_1)), \dots, (ER_{\alpha,1}(t_n), ER_{\beta,1}(t_n), ER_{\lambda,1}(t_n))).$$

- Para re-calibración luego de tres días:

$$(ER_{\alpha,3}(t_1), ER_{\beta,3}(t_1), ER_{\lambda,3}(t_1)), \dots, (ER_{\alpha,3}(t_n), ER_{\beta,3}(t_n), ER_{\lambda,3}(t_n))).$$

- Para re-calibración luego de siete días:

$$(ER_{\alpha,7}(t_1), ER_{\beta,7}(t_1), ER_{\lambda,7}(t_1)), \dots, (ER_{\alpha,7}(t_n), ER_{\beta,7}(t_n), ER_{\lambda,7}(t_n))).$$

Es de observar que los parámetros α y β tienen una gran variabilidad en términos absolutos. Adicionalmente λ varía en una magnitud diferente. Estudiamos la variabilidad relativa con el objetivo de analizar conjuntamente la variación de los tres parámetros según el procedimiento descripto antes.

Evolución relativa de los parámetros

$$ER_{\alpha,i}(t) = \frac{\alpha_i(t) - \alpha_0(t)}{\alpha_0(t)}$$

$$ER_{\beta,i}(t) = \frac{\beta_i(t) - \beta_0(t)}{\beta_0(t)}$$

$$ER_{\lambda,i}(t) = \frac{\lambda_i(t) - \lambda_0(t)}{\lambda_0(t)}$$

De la Figura 2.5 y el cuadro 2.3 se desprende que el parámetro con mayor variabilidad relativa es nuestro parámetro de asimetría β . Esto justifica tomar

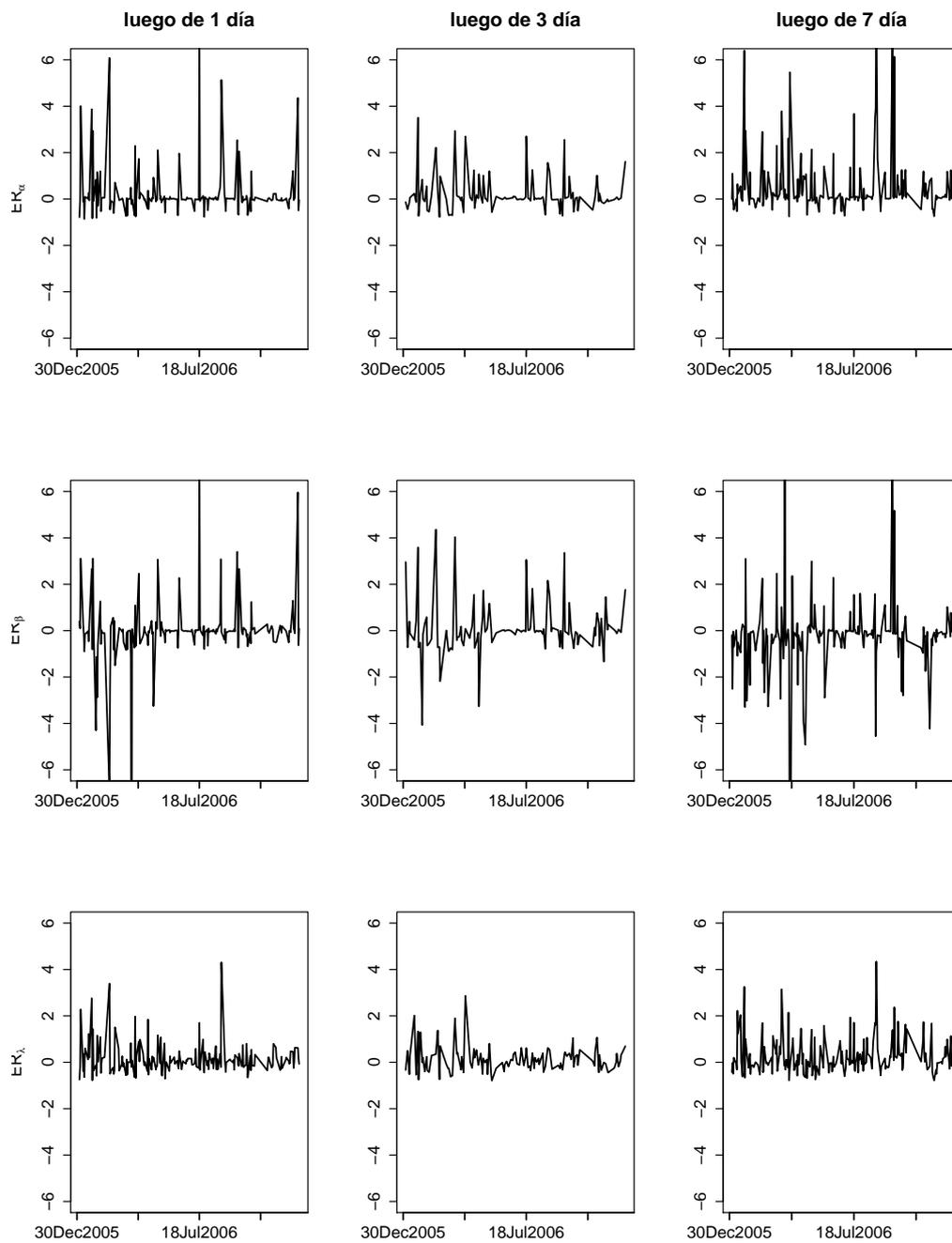


Figura 2.5: Evolución de la variación relativa de los parámetros del modelo NIG para datos de SP&500 del año 2006. Arriba: variación de α ; centro: variación de β ; abajo: variación de λ .

	luego de 1 día	luego de 2 días	luego de 7 días
$\text{std}(ER_\alpha)$	1.12	0.76	1.27
$\text{std}(ER_\beta)$	1.90	1.22	1.80
$\text{std}(ER_\lambda)$	0.69	0.55	0.77

Cuadro 2.3: Desviación estándar de la evolución relativa de los parámetros del modelo NIG al re-calibrar luego de uno (izquierda), tres (centro) y siete (derecha) días, sobre SP&500 del 2006.

como principal parámetro de variabilidad dicho parámetro de asimetría β y por ende se justifica también la construcción de un portafolio \mathcal{B} -neutral.

El presente análisis de la variación de los parámetros en el tiempo es complementado con el análisis realizado en el capítulo 3, donde tomamos una opción de compra particular con vencimiento alejado y calibramos día a día, en función de los datos reales de SP&500 del 2006, los parámetros. En este caso tenemos un desarrollo completo de la variabilidad donde además podemos incorporar la variación temporal real y completa para un modelo particular en una situación del mercado real.

2.4. Conclusiones

En el presente capítulo hemos introducido las noción de cobertura, estudiando en particular las coberturas $\Delta\Gamma$ -neutral y las coberturas $\Delta\mathcal{B}$ -neutral, donde \mathcal{B} es la derivada del valor del portafolio con respecto a nuestro parámetro de asimetría β .

Observando la variabilidad temporal del portafolio, en virtud de la variabilidad del precio de stock, utilizando la fórmula de Lewis (ver Lewis [2001]) hemos obtenido fórmulas explícitas para la esperanza y varianza de un portafolio que utiliza opciones de compra y venta, junto con el activo riesgoso y el activo sin riesgo, donde suponemos que el proceso de precios de stock es conducido por un modelo de Lévy.

En términos de coberturas, nos hemos propuesto la situación particular de la emisión de una opción de compra cuyo logaritmo de la monetización es $x = 0$. También hemos evaluado la cobertura cuando la emisión es de una opción de compra con $x = -0,01$ y $x = 0,01$. Hemos evitado usar la simulación al momento

de evaluar las pérdidas y ganancia. El método utilizado consiste en tomar los datos reales de la base de datos de SP&500 del año 2006, donde se calibran los valores iniciales con un modelo de Lévy a los efectos de la obtención de los coeficientes del portafolio, pero nunca simulamos precios futuros de stock con este modelo.

Concluimos que en todas las situaciones analizadas, cuando la opción de compra emitida corresponde a $x = 0$, $x = -0,01$ y $x = 0,01$, re-evaluando el portafolio luego de uno, tres y siete días, el portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral obtiene una reducción de la varianza de las ganancias y pérdidas de a lo sumo 10% respecto del portafolio usual $\Delta\Gamma$ -neutral. En el caso de la emisión de una opción de compra correspondiente a $x = 0$, hemos obtenido reducciones de varianza mayores al 25% (al re-evaluar luego de siete días) y llegando a obtener una reducción de 35% al re-evaluar luego de un día, valores todos en base a los datos reales de SP&500 del año 2006.

En adición, nuestro portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral presenta, para los datos analizados, una media siempre mayor de ganancias y pérdidas que las del usual portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral.

Con respecto a un portafolio sin cobertura, las reducciones de varianza de ganancias y pérdidas del portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral van desde el 85% al 95%, dejando en clara evidencia la necesidad de hacer coberturas.

Por último, analizamos la variación de los parámetros para el modelo Normal Inverse Gaussian, con el procedimiento descrito y en los períodos utilizados. Como conclusión se obtiene que el parámetro de mayor variabilidad correspondiente a la base utilizada es nuestro parámetro de asimetría β , justificando la construcción de un portafolio que sea neutral en este parámetro por encima de la neutralidad en otro de los parámetros.

CAPÍTULO 3

ASIMETRÍAS ESTADÍSTICA Y RIESGO NEUTRAL EN PROCESOS CON INCREMENTOS INDEPENDIENTES

En este capítulo consideramos un modelo de finanzas donde el precio de stock del activo subyacente es conducido por un proceso con incrementos independientes, y examinamos las diferentes nociones de asimetrías: estadística y riesgo neutral, a través del parámetro de asimetría β , el cual encontramos relevante al momento de cuantificar y explicar los diferentes tipos de asimetrías encontradas en los modelos de mercado.

Por último, estudiamos la variabilidad de los parámetros para distintos modelos sobre datos de la volatilidad implícita de SP&500 correspondientes al año 2006 mostrando la variabilidad temporal de éstos, consistentes con lo encontrado en la literatura (ver por ejemplo Andersen and Andreasen [2000], Carr et al. [2002a]).

3.1. Modelo de mercado

Al igual que lo introducido en la sección 0.1, pero ahora en un contexto más general ya que incorporamos la dependencia temporal, consideramos un modelo de mercado con dos posibilidades de inversión. Una cuenta determinista, modelada a través de un proceso determinista $\{B_t: 0 \leq t \leq T\}$ que satisface

$$B_t = B_0 \exp \left[\int_0^t r(s) ds \right],$$

donde $r(t)$ es una función continua determinista, y un activo aleatorio, $S = \{S_t: 0 \leq t \leq T\}$ que satisface

$$S_t = S_0 \exp \left[\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s) + Y_t \right]$$

donde $\mu(t)$ y $\sigma(t)$ son funciones continuas y deterministas. La estructura e hipótesis sobre el proceso de saltos $Y = \{Y(t): 0 \leq t \leq T\}$ son relevantes y las explicamos a continuación.

3.1.1. Estructura de saltos

Asumimos que Y es un proceso con incrementos independientes, y también una semimartingala especial, caracterizada por su medida compensadora de saltos determinista $\Pi(t, dx)$, y por la función característica de sus incrementos, dada por

$$\mathbb{E} \left(\exp(z(Y_t - Y_s)) \right) = \exp \left[\int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zy) \Pi(r, dy) \right]. \quad (3.1)$$

Con el objetivo de que este proceso sea un modelo de precios de activos factible, debe satisfacer la condición

$$\mathbb{E} e^{Y_t} < \infty, \quad \forall t \in [0, T]$$

que, en términos de la medida compensadora, es equivalente a la condición

$$\int_{y>1} e^y \left[\int_0^t \Pi(s, dy) ds \right] dy < \infty,$$

(ver sección 25 en Sato [1999]). Esta cantidad dice que Y (y en consecuencia X) es *exponencialmente especial* (ver II.8.25 en Jacod and Shiryaev [2003]). El supuesto

del proceso Y , que sea una *semimartingala especial*, no es estrictamente necesario desde un punto de vista financiero, pero simplifica el tratamiento y las fórmulas abajo. En nuestro contexto, esto implica que la cola negativa de la medida de saltos tiene primer momento finito, lo que es trasladado en un comportamiento probabilista de los saltos negativos del proceso como tener esperanza finita.

En términos de la medida de saltos, la condición es

$$\int_{|y|>1} (|y| \wedge y^2) \left[\int_0^t \Pi(s, dy) ds \right] dy < \infty, \quad (3.2)$$

(ver II.2.29 (a) en Jacod and Shiryaev [2003]). Se observa como una consecuencia de nuestro supuesto (3.1) que el proceso Y es continuo por izquierda, y no tiene puntos fijos de discontinuidades, y como consecuencia de (3.2), podemos tomar la función de truncación $h(y) = y$ en su representación de Levy-Itô, lo que conduce a

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y (J(\omega, dt, dy) - \Pi(t, dy) dt).$$

(ver Corolario II.2.38 en Jacod and Shiryaev [2003]), donde $J(\omega, dt, dy)$ es una medida aleatoria de Poisson tiempo-dependiente, completamente especificada por su compensador $\Pi(t, dy) dt$.

El logaritmo del precio de stock es entonces el proceso $\{X_t: 0 \leq t \leq T\}$ definido como

$$X_t = \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dW(s) + Y_t.$$

Es de utilidad recordar que el proceso X es una semimartingala, y que este puede ser construido por su terna característica (B, C, ν) (ver Jacod and Shiryaev [2003]), que en este caso es determinista, y dada por

$$\begin{cases} B_t = \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 \right) ds, \\ C_t = \int_0^t \sigma(s)^2 ds, \\ \nu(dt, dy) = \Pi(t, dy) dt. \end{cases}$$

3.1.2. Medidas de asimetrías de Lévy

Nuestro propósito, con el objetivo de estudiar distintas nociones de asimetría en finanzas, es restringir nuestro modelo a través de la forma del compensador de

la medida de Lévy, en este punto extendemos los modelos asimétricos introducidos en la sección 1.2, asumiendo que

$$\Pi(t, dy) = e^{\beta(t)y} \Pi_0(dy) \tag{3.3}$$

donde $\beta(t)$ es una función determinista, y $\Pi_0(dy)$ es una medida de saltos de Lévy simétrica (no degenerada).

Nuestra idea es fijar Π_0 en orden de obtener un modelo de dos parámetros: la volatilidad del componente de difusión y $\beta(t)$. Llamamos a la cantidad $\beta(t)$ la *función de asimetría*.

Dependiendo del ajuste a la hora de calibrar podríamos requerir incorporar modelos con más parámetros de modo de captar las estructuras de volatilidad implícita observadas (ver sección 3.6). También podemos optar por modelos sin componente de difusión, como por ejemplo el Variance Gamma o el Normal Inverse Gaussian, los cuales tienen tres parámetros, uno de ellos nuestro parámetro de asimetría, y se ajustan lo suficiente a los datos observados.

Procesos de Lévy como caso particular

Es relevante revisar nuestros resultados y supuestos en la clase de procesos de Lévy, obtenidos cuando las funciones $\mu, \sigma, \Pi(\cdot, dy)$, y para consistencia del modelo, r , son constantes. Algunas de las fórmulas desplegadas abajo están en esta clase

$$B_t = B_0 \exp(rt),$$

y

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t + Y_t \right] \tag{3.4}$$

y en este caso el proceso de saltos, descrito a través de su representación de Itô-Lévy, es

$$Y_t = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y (J(\omega, ds, dy) - e^{\beta y} \Pi_0(dy) ds).$$

3.2. Modelos estocásticos de Lévy exponenciales

En algunos casos es conveniente modelar el riesgo a través de la *exponencial estocástica* en lugar de la forma de la exponencial usual en (3.4). (Ver la discusión en Shiryaev [1999].) Definimos el proceso *logaritmo estocástico* $\widehat{X} = \{\widehat{X}_t : 0 \leq t \leq T\}$ a través de la fórmula

$$\begin{aligned}\widehat{X}_t &= X_t + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds + \sum_{0 < s \leq t} (e^{\Delta X_s} - 1 - \Delta X_s) \\ &= X_t + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y) J(\omega, ds, dy) \\ &= \int_0^t \left[\mu(s) + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y) \Pi(s, dy) \right] ds + M_t\end{aligned}\quad (3.5)$$

donde $M = \{M(t) : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala, dada por

$$M_t = \int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) (J(\omega, ds, dy) - \Pi(s, dy) ds). \quad (3.6)$$

En esta vía, el proceso S es la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dS_t = S_t d\widehat{X}_t \quad (3.7)$$

partiendo del punto S_0 tenemos, tomando en cuenta (3.5), que

$$S_t = S_0 \mathcal{E}(\widehat{X}_t) = S_0 \exp(X_t).$$

En orden de analizar cómo la estructura de saltos se modifica cuando se pasa del proceso logaritmo del precio de stock X al proceso de precios de logaritmo estocástico \widehat{X} , observamos que de la forma (3.5) se sigue que

$$\Delta \widehat{X}_t = e^{\Delta X_t} - 1, \quad (3.8)$$

lo que significa que la correspondiente medida compensadora de saltos satisface la relación

$$g(t, y) \widehat{\Pi}(t, dy) = g(t, e^y - 1) \Pi(t, dy)$$

donde siempre el símbolo “ $\widehat{}$ ” refiere al proceso logaritmo estocástico. En particular, de (3.8) se deduce que $\Delta \widehat{X}_t > 1$ *c.s.* (de hecho esta condición es necesaria para que la solución de la ecuación (3.7) tome valores positivos). Si

tenemos densidad de sats, i.e. $\Pi(t, dy) = p(t, y)dy$, entonces la correspondiente densidad del proceso logaritmo estocástico es

$$\widehat{p}(t, y) = p(t, \log(1 + y)), \quad y > 1,$$

y, por ejemplo, si en nuestro modelo (3.3) tenemos densidad simétrica $p_0(y)$, tal que $\Pi_0(dy) = p_0(y)dy$, tenemos entonces

$$\widehat{p}(t, y) = \frac{1}{(1 + y)^\beta} p_0(t, \log(1 + y)), \quad y > 1.$$

3.3. Momentos

Con el objetivo de calcular los momentos del proceso logaritmo de los precios X , introducimos su función característica. Por el teorema de Lévy-Khinchine, la ley de nuestro proceso, que tiene incrementos independientes, es dada por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\exp(z(X_t - X_s))) &= \exp \left[z \int_s^t (\mu(r) - \frac{1}{2}\sigma(r)^2) dr + \frac{z^2}{2} \int_s^t \sigma(r)^2 dr \right. \\ &\quad \left. + \int_s^t \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zy) \Pi(r, dy) \right]. \end{aligned}$$

Tomando $s = 0$ y anotando

$$\begin{aligned} \psi(t, z) &= z \int_0^t (\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2) ds + \frac{z^2}{2} \int_0^t \sigma(s)^2 ds \\ &\quad + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{zy} - 1 - zy) \Pi(s, dy) ds. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Si ψ' denota la derivada de ψ con respecto a z , obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_t &= \psi'(t, 0), \quad \text{Var } X_t = \psi''(t, 0), \quad \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^3 = \psi'''(t, 0), \\ \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^4 &= \psi''''(t, 0) - 3(\psi''(t, 0))^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

y de estas fórmulas, se sigue que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X_t &= \int_0^t (\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2) ds + \int_0^t \int_{|y| \geq 1} y \Pi(s, dy), \\ \text{Var } X_t &= \int_0^t \sigma(s)^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y^2 \Pi(s, dy), \end{aligned}$$

y también que la asimetría estadística es

$$\gamma_s(t) = \frac{\mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^3}{(\mathbb{V}ar X_t)^{3/2}} = \frac{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} y^3 \Pi(s, dy)}{\left[\int_0^t \sigma(s)^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y^2 \Pi(s, dy) \right]^{3/2}}.$$

Tomando en cuenta (3.3), tenemos

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} x^3 \Pi(s, dy) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y^3 e^{\beta(s)y} \Pi_0(dy) ds.$$

Proposición 3.1. *Sea Π_0 no trivial¹.*

- (a) *Si $\beta(t) = 0$ sobre $[0, T]$, entonces $\gamma_s(t) = 0$ sobre $[0, T]$. Además, si $\beta(s)$ tiene signo constante sobre $[0, T]$ entonces $\gamma_s(t)$ tiene el mismo signo sobre $[0, T]$.*
- (b) *Supongamos que $\beta = \beta(t)$ es constante sobre el intervalo $[0, T]$. Entonces,*
- (i) *La ley de X_t es simétrica si y sólo si $\beta = 0$.*
 - (ii) *El tercer momento centrado $\mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^3$ es una función creciente de β .*
 - (iii) *Existe un intervalo $[-\beta_0, \beta_0]$ tal que la asimetría γ_s es una función creciente de β .*

Demostración. La prueba de (a) es una consecuencia de la fórmula (3.10). Tenemos

$$\mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^3 = \psi'''(t, 0) = t \int_{\mathbb{R}} y^3 e^{\beta y} \Pi_0(dy).$$

Si $\beta = 0$ la simetría de $\Pi_0(dy)$ asegura la primer parte de (a), y para $\beta > 0$ obtenemos $|(-y)^3 e^{\beta(-y)}| \leq |y^3 e^{\beta y}|$, obteniendo la segunda parte por la misma propiedad de simetría.

Probemos la parte (b). La parte (i) fue probado en la Proposición 1.2.

La prueba de (ii) es hecha derivando con respecto a β . Tenemos

$$\frac{\partial \mathbb{E}(X_t - \mathbb{E} X_t)^3}{\partial \beta} = t \int_{\mathbb{R}} x^4 e^{\beta y} \Pi_0(dy) > 0.$$

En lo que respecta a (iii), anotemos

$$\sigma_T^2 = \int_0^T \sigma(s)^2 ds, \quad I(\beta, n) = t \int_{\mathbb{R}} y^n e^{\beta y} \Pi_0(dy).$$

¹Entendemos por no trivial la existencia de $A \neq \{0\}$ tal que $\Pi_0(A) > 0$.

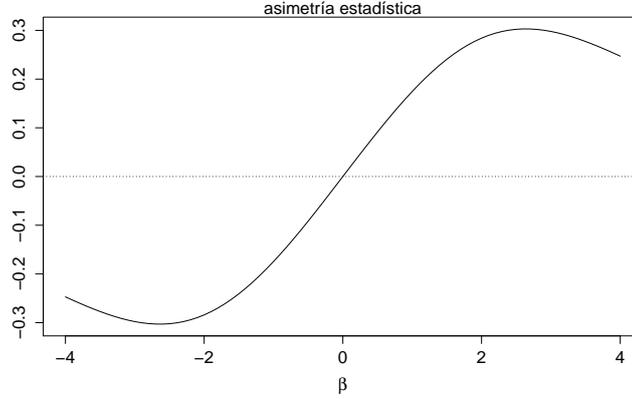


Figura 3.1: Asimetría estadística como función de β con saltos uniformes sobre $[-1, 1]$: $\Pi_0(dy) = \mathbf{1}_{|y|<1}dy$.

Con esta notación, después de derivar obtenemos

$$\frac{\partial \gamma_s}{\partial \beta} = \frac{(\sigma_T^2 + I(\beta, 2))I(\beta, 4) - \frac{3}{2}I(\beta, 3)^2}{(\sigma_T^2 + I(\beta, 2))^{5/2}}.$$

Tenemos

$$(\sigma_T^2 + I(\beta, 2))I(\beta, 4) - \frac{3}{2}I(\beta, 3)^2 \geq I(\beta, 2)I(\beta, 4) - \frac{3}{2}I(\beta, 3)^2. \quad (3.11)$$

Como $I(0, 3) = 0$, y todas las integrales $I(\beta, n)$ son simétricas en β (porque Π_0 es una medida simétrica), obtenemos la existencia de un intervalo simétrico para β donde la derivada es positiva, concluyendo la prueba. \square

Observación 3.1. *Con respecto a la demostración previa, debería ser notado que en la cota en (3.11) no perdemos generalidad, como por ejemplo los procesos de saltos puros (i.e. cuando $\sigma(t) = 0$) son incluidos y relevantes. Lo que es más desconcertante es el factor $3/2$ en (3.11), que dificulta la aplicación de la monotonía de la desigualdad de Cauchy-Schwartz, que proporcionaría la monotonía para toda la recta real. En la Figura 3.1 observamos la asimetría estadística como una función de β , cuando $\Pi_0(dx) = dx$ está sobre el intervalo $[-1, 1]$, y $\sigma_T = 1$.*

Definimos ahora el exceso de kurtosis estadístico:

$$\kappa_t = \frac{\mathbb{E}(X_t - \mathbb{E}(X_t))^4}{(\text{Var}(X_t))^2} = \frac{\int_0^t \int_{\mathbb{R}} y^4 \Pi(s, dy)}{[\int_0^t \sigma(s)^2 ds + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} y^2 \Pi(s, dy)]^2}.$$

Proposición 3.2. *Considere la medida de Lévy $\Pi(dy) = \lambda e^{\beta y} \Pi_0(dy)$ con $\Pi_0(dy) = \Pi_0(-dy)$. Luego*

(a) *Para $\kappa(\lambda)$ tenemos:*

(i) $\kappa(\lambda) \leq \frac{I(\beta,4)}{4\sigma_t^2 I(\beta,2)}$, para todo β y $\lambda \geq 0$.

(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \kappa(\lambda) = 0$ para todo β .

(b) *Para la asimetría estadística $\gamma_t(\lambda)$ tenemos:*

(i) Si $\beta > 0$, $\gamma(\lambda)$ tiene un máximo (mínimo para $\beta < 0$) en $\lambda = 2 \frac{\sigma_t^2}{I(\beta,2)}$.

(ii) $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \gamma(\lambda) = 0$ para todo β .

Donde $I(\beta, n) = t \int_{\mathbb{R}} y^n e^{\beta y} \Pi_0(dy)$ y $\sigma_t^2 = \int_0^t \sigma(s)^2 ds$.

Demostración. (a). Para (i) tenemos:

$$\frac{\partial \kappa(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{I(\beta, 4)[\sigma_t^2 - \lambda I(\beta, 2)]}{(\sigma_t^2 + \lambda I(\beta, 2))^3},$$

donde $\kappa(\lambda)$ es creciente para $\lambda \in [0, \frac{\sigma_t^2}{I(\beta,2)})$ y decreciente para $\lambda \in (\frac{\sigma_t^2}{I(\beta,2)}, +\infty)$. Luego,

$$\kappa(\lambda) \leq \kappa\left(\frac{\sigma_t^2}{I(\beta, 2)}\right) = \frac{I(\beta, 4)}{4\sigma_t^2 I(\beta, 2)},$$

para todo β y $\lambda \geq 0$.

Para la segunda parte de (a) tenemos:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \kappa(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda I(\beta, 3)}{(\sigma_t^2 + \lambda I(\beta, 2))^2} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \frac{I(\beta, 3)}{(I(\beta, 2))^2} = 0$$

(b) Análogamente a la parte (a) tenemos:

$$\frac{\partial \kappa(\lambda)}{\partial \lambda} = \frac{I(\beta, 3)[\sigma_t^2 - \frac{1}{2}\lambda I(\beta, 2)]}{(\sigma_t^2 + \lambda I(\beta, 2))^{5/2}}.$$

Donde $I(\beta, 3) > 0$ si y sólo si $\beta > 0$. El cálculo del límite es similar a lo hecho en (a). \square

Observación 3.2. *El hecho que el exceso de kurtosis tienda a cero cuando $\lambda \rightarrow \infty$, es consistente con la aplicación del teorema del límite central, cuando la medida de saltos tiene colas livianas, que se sigue de la existencia de la kurtosis.*

3.4. De asimetría estadística a asimetría riesgo neutral

Una característica de los modelos de saltos es la incompletitud del mercado, lo que conduce a la necesidad de la elección de una medida de probabilidad riesgo neutral para la fijación de precios. Una vía usual de elegir la medida de probabilidad riesgo neutral es la transformada de Esscher. Queremos encontrar una medida de probabilidad \mathbb{P}^θ tal que el precio del activo descontado sea una \mathbb{P}^θ -martingala. En nuestro contexto, el método de la transformada de Esscher consiste en elegir una función determinista $\theta = \{\theta(t) : 0 \leq t \leq T\}$, para construir el proceso densidad

$$Z_t^\theta = \exp \left[\int_0^t \theta(s) dX_s - K^X(\theta)_t \right] \quad (3.12)$$

donde $K^X(\theta)$ es el cumulante de Laplace de θ , definido por

$$K^X(\theta)_t = \int_0^t \left[\theta(s) \left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 \right) + \frac{1}{2} (\theta(s) \sigma(s))^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta(s)y} - 1 - \theta(s)y) \Pi(s, dy) \right] ds.$$

Basados en el resultado de Kallsen and Shiryaev [2002] (ver también III.7 en Jacod and Shiryaev [2003]), obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 3.3. *Considere la densidad definida en (3.12). Existe una única función determinista $\theta = \{\theta(t) : 0 \leq t \leq T\}$ tal que el stock descontado $\{B(t)^{-1}S(t)\}$ es una martingala bajo la medida de probabilidad $d\mathbb{P}^\theta = Z_T^\theta d\mathbb{P}$. Además, si las funciones r, μ, σ y $\Pi(\cdot, dy)$ son diferenciables ² con respecto a t , entonces la función $\theta(t)$ es continua y diferenciable con respecto a t .*

Demostración. La unicidad se sigue del Teorema 4.2 en Kallsen and Shiryaev [2002]. Es directo adaptar el Teorema III.7.18 en Jacod and Shiryaev [2003] a nuestro caso, una condición necesaria y suficiente para que nuestro enunciado esté presente, es

$$K^X(\theta + 1)_t - K^X(\theta)_t = \int_0^t r(s) ds. \quad (3.13)$$

²Por diferenciable de $\Pi(\cdot, dy)$ entendemos la diferenciable de la integral en (3.15).

(El enunciado en el Teorema III.7.18 en Jacod and Shiryaev [2003] puede ser considerado el caso de tasa de interés cero.) Después de derivar respecto de t , y alguna manipulación, obtenemos que una condición equivalente a (3.13), es

$$\mu(t) + \theta(t)\sigma(t)^2 + \int_{\mathbb{R}} [e^{\theta(t)y}(e^y - 1) - x]\Pi(t, dy) = r(t). \quad (3.14)$$

Esta es la ecuación que debe resolverse para obtener el parámetro de Esscher en el caso de procesos de Lévy. Es bien conocido que, debido a la propiedad de convexidad del exponente de Laplace, esta ecuación tiene una única raíz. En nuestro caso, resolvemos esto para cada t con el objetivo de construir la función θ . Luego revisamos la regularidad de $\theta(t)$. Considere el Teorema de la función implícita. Sea

$$F(t, \theta) = \mu(t) + \theta\sigma(t)^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{(\theta+1)y} - e^{\theta y} - y)\Pi(t, dy) = r(t). \quad (3.15)$$

Como la medida de saltos no es trivial, tenemos

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = \sigma(t)^2 + \int_{\mathbb{R}} e^{\theta y} y (e^y - 1) \Pi(t, dy) > 0,$$

entonces la función F es diferenciable con respecto a t , y las condiciones de regularidad se siguen del Teorema de la función implícita. \square

Una vez establecida la existencia y unicidad de la transformada de Esscher, recordamos que las características del stock descontado bajo la nueva medida de probabilidad \mathbb{P}^θ puede ser obtenida en términos de la correspondientes características bajo \mathbb{P} , como

$$\begin{cases} B_t^\theta = \int_0^t \left[(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma(s)^2) + \theta(s)\sigma(s)^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta(s)y} - 1)y\Pi(s, dy) \right] ds, \\ C_t^\theta = \int_0^t \sigma(s)^2 ds, \\ \nu^\theta(dt, dy) = e^{\theta(t)y}\Pi(t, dy)dt. \end{cases} \quad (3.16)$$

Tomando en cuenta el supuesto para la medida de saltos (3.3), vemos que la medida de saltos en (3.16) se convierte en

$$\nu^\theta(dt, dy) = e^{[\theta(t)+\beta(t)]y}\Pi_0(dy)dt,$$

obteniendo que, bajo la medida de riesgo neutral, el stock tiene la misma forma de parametrización con una traslación del parámetro de asimetría.

$$\beta_{rn}(t) = \theta(t) + \beta_s(t) \quad (3.17)$$

donde agregamos el subíndice en β_s para reforzar que éste es el valor estadístico. El hecho interesante es que, bajo nuestro enfoque, el parámetro de Esscher gana un significado financiero, siendo una medida de la diferencia entre la asimetría estadística y la asimetría riesgo neutral.

3.5. Asimetría y prima de riesgo por saltos

Definimos la prima de riesgo como la diferencia entre el valor esperado del retorno del logaritmo estocástico del precio estadístico menos el correspondiente valor esperado del logaritmo del retorno del proceso riesgo neutral.

Proposición 3.4 (Prima de riesgo). *En el modelo de mercado descrito en la sección 3.1 la prima de riesgo definida arriba, que denotamos Δ , se descompone como*

$$\Delta = \Delta_\sigma + \Delta_J$$

donde Δ_σ es la prima de riesgo correspondiente al componente browniano del modelo (i.e. correspondiente a la volatilidad σ) y Δ_J es la prima de riesgo correspondiente a los saltos en el modelo, de acuerdo a las fórmulas

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma(t) &= - \int_0^t \theta(s) \sigma^2(s) ds, \\ \Delta_J(t) &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta(s)y} - 1)(e^y - 1) \Pi(s, dy) ds, \end{aligned}$$

donde θ es la función de la Proposición 3.3.

Notemos que el signo de cada prima de riesgo es el opuesto al signo de θ . Más aún, cada prima de riesgo es monótona con θ .

Demostración. Primero calculamos la distribución del logaritmo estocástico de los precios bajo la probabilidad riesgo neutral, construyendo un proceso auxiliar de logaritmo estocástico de los precios X^θ con la fuente de aleatoriedad del espacio

de probabilidad original, cuya distribución coincide con la del proceso X bajo la medida de riesgo neutral \mathbb{P}^θ . De acuerdo con (3.16) tenemos

$$X_t^\theta = \int_0^t \left[\left(\mu(s) - \frac{1}{2} \sigma(s)^2 \right) + \theta(s) \sigma(s)^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta(s)y} - 1) y \Pi(s, dy) \right] ds \\ + \int_0^t \sigma(s) dW_s + Y_t^\theta$$

donde el proceso de saltos es

$$Y_t^\theta = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} x \left[J^\theta(\omega, ds, dy) - e^{[\theta(s)+\beta(s)]y} \Pi_0(dy) ds \right].$$

Aquí J^θ es una medida aleatoria de Poisson con compensador $e^{[\theta(t)+\beta(t)]y} \Pi_0(dy) dt$. Ahora, como en (3.5), construimos el proceso logaritmo del precio de stock:

$$\widehat{X}_t^\theta = X_t^\theta + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2(s) ds + \sum_{0 < s \leq t} (e^{\Delta X_s^\theta} - 1 - \Delta X_s^\theta) \\ = \int_0^t \left[\mu(s) + \theta(s) \sigma(s)^2 + \int_{\mathbb{R}} e^{\beta(s)y} \left[e^{\theta(s)y} (e^y - 1) - y \right] \Pi_0(dy) \right] ds \\ + M_t^\theta$$

donde $M^\theta = \{M^\theta(t) : 0 \leq t \leq T\}$ es una martingala, dada por

$$M_t^\theta = \int_0^t \sigma(s) dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) \left[J^\theta(\omega, ds, dy) - e^{[\theta(s)+\beta(s)]y} \Pi_0(dy) ds \right].$$

Tomando en cuenta (3.5), obtenemos

$$\Delta(t) = \int_0^t \left[\mu(s) + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y) \Pi(s, dy) \right] ds \\ - \int_0^t \left\{ \mu(s) + \theta(s) \sigma(s)^2 + \int_{\mathbb{R}} \left[e^{\theta(s)y} (e^y - 1) - y \right] \Pi(s, dy) \right\} ds \\ = - \int_0^t \theta(s) \sigma(s)^2 - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta(s)y} - 1) (e^y - 1) \Pi(s, dy)$$

Obteniendo el resultado. □

Observación 3.3. Tomando en cuenta la ecuación (3.14), la prima por riesgo puede también ser calculada a través de

$$\Delta(t) = \int_0^t \left[\mu(s) + \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1 - y) \Pi(s, dy) - r(s) \right] ds,$$

que sigue también directamente del hecho que $\{S(t)/B(t)\}$ es una martingala bajo \mathbb{P}^θ .

Observación 3.4. En un modelo sin saltos, i.e. $\Pi(t, dy) = 0$, la función θ es explícita, i.e. tenemos

$$\theta(t) = \frac{r(t) - \mu(t)}{\sigma(t)^2}.$$

$$\Delta(t) = \int_0^t (\mu(s) - r(s)) ds.$$

Si por otro lado, tenemos un modelo de saltos puros, i.e. $\sigma(s) \equiv 0$, entonces θ no es explícita, y

$$\Delta(t) = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta(s)y} - 1)(e^y - 1)\Pi(s, dy).$$

Observación 3.5. En el caso de procesos de Lévy, los parámetros son calculados independientemente del tiempo. Con esto en cuenta, el parámetro de Esscher θ es la solución de la ecuación (ver Shiryaev [1999]):

$$\mu + \theta\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} [e^{\theta y}(e^y - 1) - y]\Pi(dy) = r$$

y la prima de riesgo instantánea es

$$\delta = \mu - r - \int_{\mathbb{R}} (e^{\theta y} - 1)(e^y - 1)\Pi(dy).$$

3.6. Curva $\beta(t)$ para SP&500

En esta sección nos proponemos reconstruir la curva $\beta(t)$ con datos de mercado correspondientes al índice SP&500 durante el año 2006.

Estamos interesados en trabajar con un proceso de incrementos independientes pero no necesariamente incrementos estacionarios. Con ese objetivo proponemos un modelo base sobre el cual calibramos los datos de mercado, es decir, consideramos que el exponente característico $\psi(t, z)$ dado en (3.9) tiene medida de Lévy independiente del tiempo t entre períodos para los cuales se tiene información. Si nos posicionamos a tiempo cero, y tenemos la información para los vencimientos $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ entonces proponemos un modelo aditivo cuyo exponente característico para $t \in (T_i, T_{i+1})$ es:

$$\psi(t, z) = T_1\psi_1(z) + (T_2 - T_1)\psi_2(z) + \dots + (t - T_{i-1})\psi_i(z). \quad (3.18)$$

	$\alpha(t)$	$\beta(t)$	$\lambda(t)$
$t \in [0, T_1)$	212.0	39.9	2.7
$t \in [T_1, T_2)$	229.5	-164.6	1.9
$t \in [T_2, T_3)$	220.8	-174.0	2.3
$t \in [T_3, T_4)$	216.4	-178.5	2.6
$t \in [T_4, T_5)$	206.2	-188.9	0.5
$t \in [T_5, T_6)$	203.8	-191.3	0.5

Cuadro 3.1: Parámetros para el proceso aditivo con modelo base NIG, en función del tiempo, cuando se calibra una opción de compra de SP&500 al 30 de agosto de 2006 con vencimientos en días $T_1 = 17$, $T_2 = 52$, $T_3 = 80$, $T_4 = 108$, $T_5 = 199$ y $T_6 = 290$.

Aquí cada ψ_j con $j = 1, \dots, n$ corresponde al exponente característico del modelo que llamamos base, por ejemplo Normal Inverse Gaussian dado por (1.35). Para $i \neq j$, $\psi_i(z)$ se diferencia de $\psi_j(z)$ en los parámetros α, β, λ .

En la figura 3.2 mostramos la volatilidad implícita para el índice S&P500 al 30 de agosto de 2006 con distintos vencimientos. También mostramos el gráfico en escalera de la curva $\beta(t)$ calibrada con un modelo base Normal Inverse Gaussian, la cual es una representación típica de las encontradas al calibrar durante los distintos días.

Los gráficos de la figura 3.2 se complementan con la tabla 3.1. Aquí se observa que β es positivo en primera instancia, cuando se está muy próximo al vencimiento de la opción, luego β toma fuertes valores negativos. El valor positivo de β al inicio no es lo usual, lo cual puede observarse en la curva media, figura 3.3. Igualmente la rápida caída sí corresponde al comportamiento usual de la curva $\beta(t)$.

En la figura 3.3 observamos la curva media $\beta(t)$ suavizada, correspondiente a calibrar con un proceso aditivo con modelo base NIG. Cada curva $\beta(t)$ es el resultado de calibrar las opciones de compra para cada miércoles del año 2006 con los distintos vencimientos. La curva media se obtiene haciendo el promedio puntual de las distintas curvas y el suavizado es realizado mediante spline cúbico.

Se observa el comportamiento decreciente de $\beta(t)$ con el tiempo y la persistencia de valores negativos.

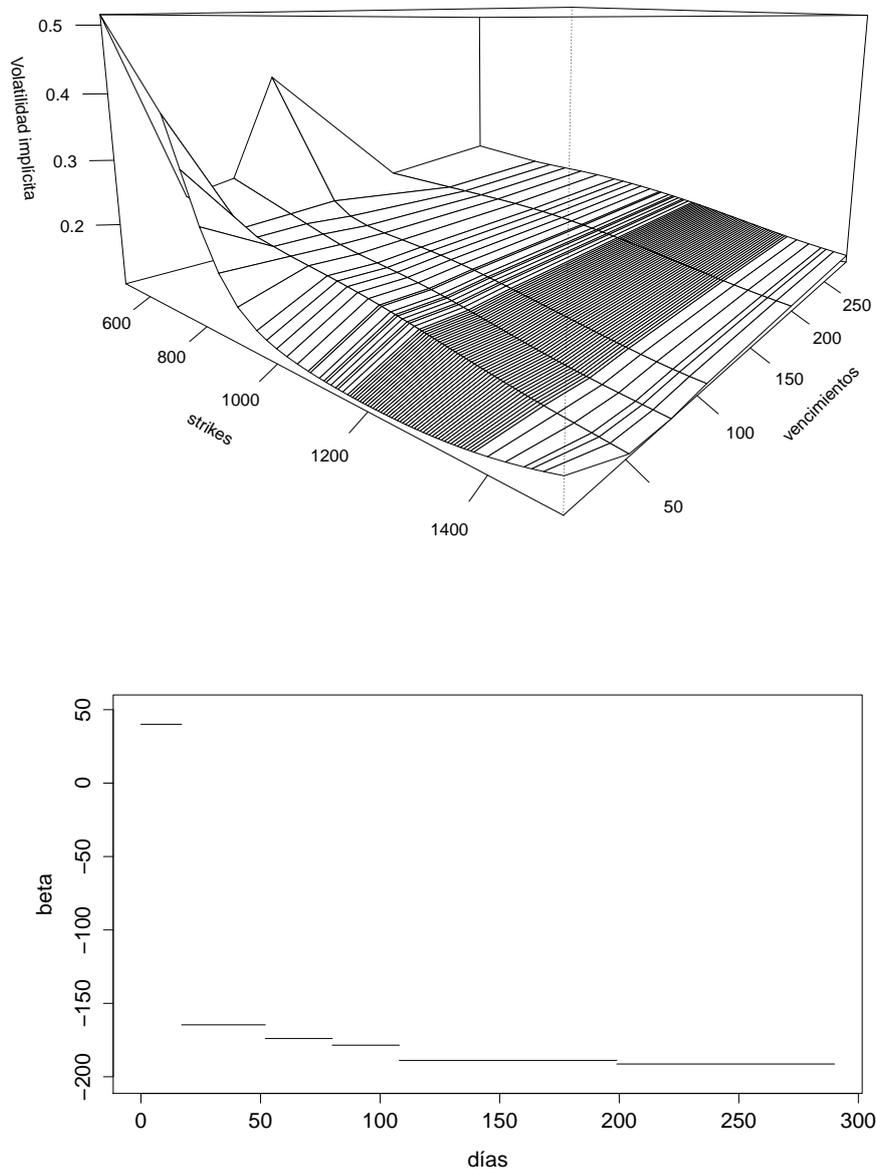


Figura 3.2: Arriba: Volatilidad implícita para una opción de compra de S&P500 al 30 de agosto de 2006. Días al vencimiento $T_1 = 17$, $T_2 = 52$, $T_3 = 80$, $T_4 = 108$, $T_5 = 199$ y $T_6 = 290$. Abajo: curva $\beta(t)$ para un proceso aditivo con modelo base NIG, calibrada para la volatilidad implícita de arriba.

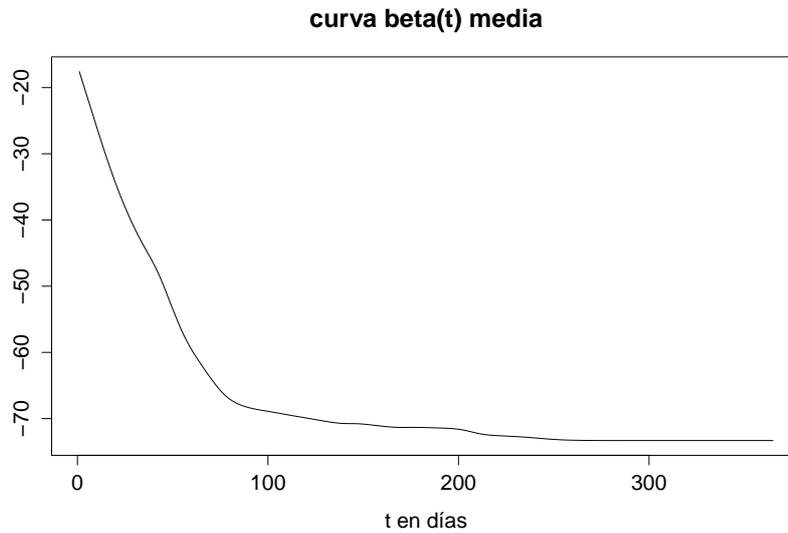


Figura 3.3: Curva $\beta(t)$ media para datos S&P500 correspondientes a todos los miércoles de 2006 calibrados con un proceso aditivo con base NIG.

3.7. Conclusiones

En este capítulo hemos relacionado tres medidas importantes de asimetría usadas en la literatura financiera para explicar propiedades distribucionales del riesgo empírico y distribuciones de riesgo neutral. Como consecuencia hemos obtenido una conexión entre la asimetría de la volatilidad implícita y un parámetro de asimetría obtenido de la estructura de los saltos del proceso riesgo neutral subyacente, que nos ayuda a explicar la forma de la volatilidad implícita.

Mediante la curva de Esscher $\theta(t)$, ver (3.17), concluimos que cuanto mayor es la diferencia entre la asimetría estadística y la riesgo neutral, mayor será el monto de la prima de riesgo.

Hemos analizado datos reales de SP&500 mostrando evidencia de la variación temporal de los parámetros del modelo usado, donde en particular se observa la fuerte tendencia negativa del parámetro de asimetría β y un comportamiento general de decrecimiento de la curva $\beta(t)$.

CAPÍTULO 4

GRIEGAS BAJO MODELOS DE LÉVY

El cálculo de Griegas en modelos de Lévy es realizado usualmente mediante Cálculo de Malliavin y otros métodos, como el cociente de verosimilitud y el método de diferencias finitas.

En este capítulo nos proponemos obtener fórmulas exactas para las Griegas de opciones europeas basados en la fórmula de Lewis (ver Lewis [2001]). Por tanto, es posible obtener aproximaciones precisas usando el método rápido de la transformada de Fourier discreta. Desarrollamos también las Griegas para una de las opciones europeas más importantes, la opción de compra (Call option). Mostramos el error para las Griegas en el modelo Black-Scholes, donde éstas son calculadas de forma exacta (a menos de aproximaciones a la distribución gaussiana). Comparamos también algunos otros modelos usados en la literatura, tales como el modelo de Merton y el modelo Variance Gamma.

Las fórmulas aquí presentadas pueden alcanzar la precisión deseada porque nuestro enfoque genera error sólo a través de la aproximación de la integral. Además, para muchos modelos, gran parte de las griegas aquí presentadas dependen de funciones conocidas como por ejemplo su densidad.

4.1. Introducción

Nuestro objetivo es el cálculo de las derivadas parciales de una opción europea con función de pago general, con respecto a cualquier parámetro de interés. Esas derivadas son usualmente llamadas como “Griegas”, y consecuentemente usaremos ese término *Griegas* para referirnos a cualquier derivada parcial del precio de una opción (de cualquier orden y con respecto a cualquier parámetro).

Nuestro enfoque parte de la sutil observación en Cont y Tankov (ver Cont and Tankov [2004], p. 365):

“Contrary to the classical Black-Scholes case, in exponential-Lévy models there are no explicit formulae for call option prices, because the probability density of a Lévy process is typically not known in closed form. However, the characteristic function of this density can be expressed in terms of elementary functions for the majority of Lévy processes discussed in the literature. This has led to the development of Fourier-based option pricing methods for exponential-Lévy models. In these methods, one needs to evaluate one Fourier transform numerically but since they simultaneously give option prices for a range of s and the Fourier transform can be efficiently computed using the FFT algorithm, the overall complexity of the algorithm per option price is comparable to that of evaluating the Black-Scholes formula.”

En otras palabras, en la necesidad de cálculo de un rango de precios de opciones, desde un punto de vista práctico, la fórmula de Lewis funciona como una fórmula cerrada, ya que ésta puede ser implementada y calculada con aproximadamente la misma precisión y en el mismo tiempo que la fórmula de Black-Scholes.

Algunos artículos han tratado este problema. Eberlein, Glau y Papapantoleon (ver Eberlein et al. [2009]) obtienen una fórmula similar a la de Lewis, y obtienen las derivadas Delta (Δ) y Gamma (Γ), las derivadas de primer y segundo orden respecto al valor inicial S_t , para una función de pagos europea. Los supuestos son similares a lo que nosotros requerimos en este trabajo.

Takahashi y Yamazaki (ver Takahashi and Yamazaki [2008]) también obtienen esas Griegas en el caso de opciones de compra, basados en el enfoque de Carr y Madan (ver Carr and Madan [1999]). La ventaja de la fórmula de Lewis es que ésta da precio de opciones para funciones de pago generales, mientras que Carr-Madan sólo aplica para opciones europeas tipo “vanilla”. Además, en cuestión de

complejidad, las fórmulas arrojadas para Δ y Γ son muchos más sencillas usando la fórmula de Lewis que la fórmula de Carr y Madan .

Con respecto a las diferencias entre la fórmula de Lewis y la de Carr y Madan, en Lee [2004] encontramos una unificación, en algún sentido, para ambas fórmulas, donde se estudia detalladamente el caso cuando la función de pago es del tipo:

$$\begin{aligned} G_1(x, k) &= (e^x - e^k)^+ & b_0 = 1, b_1 = 1, x \in \mathbb{R} \\ G_2(x, k) &= (x - k)^+ & b_0 = 1, b_1 = 0, x \in \mathbb{R} \\ G_3(x, k) &= e^{b_1 x} \mathbf{1}(b_0 x > k) & x \in \mathbb{R}^n \\ G_4(x, k) &= (b_2 x) e^{b_1 x} \mathbf{1}(b_0 x > k) & x \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Aquí también se analizan cotas para los errores cometidos al aproximar las fórmulas. En dicho artículo no se presenta el cálculo de griegas, las cuales, por ejemplo para una opción de compra y venta se pueden obtener directamente para una amplia cantidad de modelos usados en la literatura, por medio del cuadro 4.6 de esta tesis.

Otros trabajos tratan con el problema del cálculo de Griegas para funciones de pago más generales, incluyendo opciones que dependen de la trayectoria (*path-dependent*), ver por ejemplo Chen and Glasserman [2007], Glasserman and Liu [2007], Glasserman and Liu [2008], Kienitz [2008], Boyarchenko and Levendorskií [2009], Jeannin and Pistorius [2010]. Esos trabajos son basados en diferentes técnicas, tal como simulación o diferencias finitas, introduciendo un error de método que tiene que ser analizado, mientras que nuestro método no lo hace.

Para un análisis del error referimos al lector a Croce, F. et al. [2015], donde se estudia una cota para el error en términos de la longitud del intervalo de corte y el tamaño de la partición.

4.2. Griegas para opciones europeas

En este capítulo asumimos trabajar sobre un mercado de Lévy definido en la sección 0.1 bajo la medida de riesgo neutral.

En cuanto a la función de pago, siguiendo Lewis [2001], como fue explicado en la sección 0.1, si anotamos $s = \ln S_T$ y consideramos una función de pagos

$w(s)$, siendo $\widehat{w}(z)$ la transformada de Fourier de $w(s)$, la fórmula de Lewis para opciones europeas, evaluada a tiempo t , y denotando $\tau = T - t$ el tiempo al vencimiento, es:

$$V_t = \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{-iz(\ln(S_t)+r\tau)} e^{\tau\Psi(-z)} \widehat{w}(z) dz, \quad (4.1)$$

donde $z \in S_V = \{u + iv : u \in \mathbb{R}\}$ y v debe ser elegido dependiendo de la función de pagos (ver Lewis [2001]).

Es importante aclarar que a lo largo de este capítulo usamos el subíndice t para considerar el instante donde se obtiene el precio de la opción y por ende, evitar confusión cuando se realiza la derivada respecto de S_t , la cual es variable con el tiempo.

En este contexto, es simple obtener algunas fórmulas generales para las Griegas.

Con el objetivo de derivar bajo el signo integral, presentamos el siguiente resultado.

Lema 4.1. *Sea $\Theta \subset \mathbb{R}$ un intervalo e $\mathcal{I} = iv + \mathbb{R}$. Sea $h : \mathcal{I} \times \Theta \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathcal{I} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que*

- $h(\cdot, \theta)g(\cdot)$ es integrable para todo $\theta \in \Theta$ y g es integrable.
- $h(z, \cdot)$ es derivable en Θ para todo $z \in \mathcal{I}$ y $\frac{\partial h}{\partial \theta}$ es acotada.

Entonces, $\int_{\mathcal{I}} h(x, \theta)g(x)dx$ es derivable y

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathcal{I}} h(x, \theta)g(x)dx = \int_{\mathcal{I}} \frac{\partial h(x, \theta)}{\partial \theta} g(x)dx \quad \forall \theta \in \Theta.$$

Demostración. Observamos que $\left| \frac{\partial h(z, \theta)g(z)}{\partial \theta} \right| \leq C|g(z)|$ para todo $z \in \mathcal{I}$, $\theta \in \Theta$. El resultado se obtiene a partir del Teorema 2.27 en Folland [1999]. \square

En consecuencia, en lo que sigue, asumiremos que se verifican las condiciones en el Lema 4.1 para la parte real del integrando, la parte imaginaria integra cero y por ende no es necesario considerarla al derivar.

4.2.1. Griegas de primer orden

En esta sección presentamos la forma general para opciones europeas con función de pago arbitraria. Para simplificar la notación introducimos una función auxiliar

$$\vartheta(z) = e^{-iz(\ln(S_t) + r\tau)} e^{\tau\Psi(-iz)} \widehat{w}(z).$$

Partiendo del precio de la opción (4.1), con el exponente característico (4), derivando bajo el signo integral obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta_t &= \frac{\partial V_t}{\partial S_t} = -\frac{1}{S_t} \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} iz\vartheta(z)dz, \\ \rho_t &= \frac{\partial V_t}{\partial r} = -\tau \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} (1+iz)\vartheta(z)dz, \\ \mathcal{V}_t &= \frac{\partial V_t}{\partial \sigma} = \tau\sigma \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} iz(1+iz)\vartheta(z)dz, \\ \Theta_t &= \frac{\partial V_t}{\partial \tau} = \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} [\Psi(-iz) - (1+iz)r]\vartheta(z)dz.\end{aligned}$$

Usualmente, los modelos de Lévy usados en la literatura dependen de un conjunto de parámetros, especificado en la medida de salto, como por ejemplo nuestro parámetro de asimetría β . Por tanto anotamos $\nu(dy) = \nu_\theta(dy)$ y $\Psi(z) = \Psi_\theta(z)$, luego:

$$\frac{\partial V_t}{\partial \theta} = \tau \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{\partial \Psi_\theta(-iz)}{\partial \theta} \vartheta(z)dz.$$

4.2.2. Griegas de segundo orden

De forma similar a las griegas de primer orden, ahora podemos obtener las griegas de segundo orden, las cuales presentamos también de forma resumida:

$$\begin{aligned}\Gamma_t &= \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t^2} = \frac{1}{S_t^2} \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} iz(1+iz)\vartheta(z)dz, \\ \text{Vanna}_t &= \frac{\partial^2 V_t}{\partial \sigma \partial S_t} = \tau\sigma \frac{1}{S_t} \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} z^2(1+iz)\vartheta(z)dz,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Vomma}_t &= \frac{\partial^2 V_t}{\partial \sigma^2} = \tau \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} [1 + \tau\sigma^2 iz(1+iz)] iz(iz+1)\vartheta(z) dz, \\
\text{Charm}_t &= \frac{\partial^2 V_t}{\partial S_t \partial \tau} = -\frac{1}{S_t} \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} iz[\Psi(-iz) - (1+iz)r]\vartheta(z) dz, \\
\text{Veta}_t &= \frac{\partial^2 V_t}{\partial \sigma \partial \tau} = \sigma \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} iz(1+iz)[\tau\Psi(-iz) - (iz+1)r\tau + 1]\vartheta(z) dz, \\
\text{Vera}_t &= \frac{\partial^2 V_t}{\partial \sigma \partial r} = -\tau^2 \sigma \frac{e^{-r\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} iz(iz+1)^2\vartheta(z) dz.
\end{aligned}$$

Otras derivadas se pueden obtener de forma análoga. En este capítulo no analizamos la forma genérica ni tampoco las condiciones generales dada que dependen en conjunto del modelo de Lévy específico y de la función de pago.

En la siguiente sección nos enfocamos en el caso de una opción de compra. Esto nos permite obtener fórmulas más explícitas en términos de la medida de probabilidad y de la densidad riesgo neutral.

4.3. Griegas para opciones de compras

Con el objetivo de explotar la particularidad de la función de pagos, desarrollamos exhaustivamente las griegas para opciones de compra derivando el precio de la opción dado por (11). Las correspondientes fórmulas de griegas para opciones de venta se obtienen inmediatamente a través de la paridad Put-Call (6). Para otras funciones de pago el procedimiento para obtener las griegas es análogo, sin embargo se requerirán las hipótesis acordes para la función de pago particular.

Cuando el precio de ejercicio K es fijo, $x = \ln(K/S_t) - r\tau$ es variable en términos de S_t , r y τ . Luego, debemos considerar esto para el cálculo de las griegas Δ , Γ , ρ y otras.

Con el objetivo de asegurar la aplicabilidad del Lema 4.1, debemos introducir algunos resultados previos.

Lema 4.2. *Sea $\{X_\tau, \mathbb{Q}\}$ un proceso de Lévy como en (5) con $\int_{|y|>1} e^{vy}\nu(dy) < \infty$ con $v \geq 0$. entonces, si $z \in iv + \mathbb{R}$*

$$|\Psi_J(-iz)| \leq (|z|^2 + |z|) \frac{e^v}{2} \int_{|y| \leq 1} y^2 \nu(dy) + 2 \int_{|y| > 1} (e^{vy} + 1) \nu(dy)$$

y

$$|\Psi(-iz)| \leq (|z|^2 + |z|) \left(\frac{e^v}{2} \int_{|y| \leq 1} y^2 \nu(dy) + \frac{\sigma^2}{2} \right) + 2 \int_{|y| > 1} (e^{vy} + 1) \nu(dy), \quad (4.2)$$

donde $\Psi_J(iz) = \int_{\mathbb{R}} [e^{izy} - 1 - iz(e^y - 1)] \nu(dy)$.

Demostración. Sea $I(z) = \int_{\mathbb{R}} [e^{izy} - 1 - izy \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}}] \nu(dy)$. Aplicando el desarrollo de Taylor con error de Lagrange en el punto $y = 0$, existe θ_y con $|\theta_y| \leq |y|$ tal que

$$\begin{aligned} e^{izy} - 1 - izy \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}} &= izy \mathbf{1}_{\{|y| > 1\}} - z^2 y^2 \frac{e^{iz\theta_y}}{2} \\ &= -z^2 y^2 \frac{e^{iz\theta_y}}{2} \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}} + (izy - z^2 y^2 \frac{e^{iz\theta_y}}{2}) \mathbf{1}_{\{|y| > 1\}} \\ &= -z^2 y^2 \frac{e^{iz\theta_y}}{2} \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}} + (e^{izy} - 1) \mathbf{1}_{\{|y| > 1\}}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} |I(-z)| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left| -z^2 y^2 \frac{e^{-iz\theta_y}}{2} \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}} + (e^{-izy} - 1) \mathbf{1}_{\{|y| > 1\}} \right| \nu(dy) \\ &\leq |z|^2 \int_{|y| \leq 1} \frac{e^{v\theta_y}}{2} y^2 \nu(dy) + \int_{|y| > 1} (e^{vy} + 1) \nu(dy) \\ &\leq |z|^2 \frac{e^v}{2} \int_{|y| \leq 1} y^2 \nu(dy) + \int_{|y| > 1} (e^{vy} + 1) \nu(dy). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Anotamos Ψ_J y Ψ_C a la correspondiente parte de salto y parte continua del exponente característico. Usando (4.3) tenemos

$$\begin{aligned} |\Psi_J(-z)| &= |I(-z) + izI(-i)| \\ &\leq (|z|^2 + |z|) \frac{e^v}{2} \int_{|y| \leq 1} y^2 \nu(dy) + 2 \int_{|y| > 1} (e^{vy} + 1) \nu(dy). \end{aligned}$$

Para la parte continua, sea $\Psi_C(-iz) = (iz - z^2)\frac{\sigma^2}{2}$, luego

$$\begin{aligned} |\Psi(-iz)| &\leq |\Psi_C(-iz)| + |\Psi_J(-iz)| \\ &\leq (|z|^2 + |z|) \left(\frac{e^v}{2} \int_{|y|\leq 1} y^2 \nu(dy) + \frac{\sigma^2}{2} \right) + 2 \int_{|y|>1} (e^{vy} + 1) \nu(dy). \end{aligned}$$

□

Lema 4.3. *Sea $\{X_\tau, \mathbb{Q}\}$ un proceso de Lévy como en (5) tal que $\mathbb{E}[e^{vX_\tau}] < \infty$ con $v > 0$.*

1. Si $\int_{iv+\mathbb{R}} |z|^{-1} |e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$ luego

$$\mathbb{Q}(X_\tau > x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{izx}}{iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz, \quad (4.4)$$

$$\mathbb{E}(e^{X_\tau} \mathbf{1}_{\{X_\tau > x\}}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x}}{1+iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz. \quad (4.5)$$

2. Si $\int_{iv+\mathbb{R}} |z|^n |e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$ para algún $n \in \mathbb{Z}$, luego X_τ tiene densidad de clase C^n y

$$\frac{\partial^n f_\tau(x)}{\partial x^n} = \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} (iz)^n e^{izx} e^{\tau\Psi(-iz)} dz. \quad (4.6)$$

Demostración. Para una opción de compra, la transformada de Fourier de la función de pago es $\widehat{w}(z) = e^{iz(\ln(S_t) + r\tau + x)} / (iz(1+iz))$. Luego, del valor de la opción (4.1) tenemos, con $x = \log(K/S_t) - r\tau$,

$$C_t(x) = S_t \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{izx} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(iz+1)} dz. \quad (4.7)$$

Por tanto, siendo $x \in [\alpha, \beta]$ y $C_1 = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} e^{(1-v)x}$

$$\left| \frac{\partial e^{(1+iz)x} e^{\tau\Psi(-iz)} [iz(iz+1)]^{-1}}{\partial x} \right| \leq C_1 |z|^{-1} |e^{\tau\Psi(-iz)}| \in L^1(iv + \mathbb{R}),$$

y por 2.27 en Folland [1999] podemos derivar bajo el signo integral. Por lo tanto, con $S_t = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(X_\tau > x) &= -e^{-x} \frac{\partial}{\partial x} \int_x^\infty (e^s - e^x) \mathbb{Q}(ds) \\ &= -e^{-x} \frac{\partial C_t(x)}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{izx}}{iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz.\end{aligned}$$

Por otro lado, con $S_t = 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{X_\tau} \mathbf{1}_{\{X_\tau > x\}}) &= \int_x^\infty e^s F(ds) = -e^x \frac{\partial}{\partial x} \int_x^\infty (e^{s-x} - 1) \mathbb{Q}(ds) \\ &= -e^x \frac{\partial e^{-x} C_t(x)}{\partial x} = C_t(x) - \frac{\partial C_t(x)}{\partial x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x}}{iz(1+iz)} e^{\tau\Psi(-iz)} dz - \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x}}{iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x}}{1+iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz.\end{aligned}$$

Para la segunda parte, observamos en (4.4) que si $x \in [\alpha, \beta]$ y $C_2 = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} e^{-vx}$

$$\left| \frac{\partial^{n+1} \frac{e^{izx}}{iz} e^{\tau\Psi(-iz)}}{\partial x^{n+1}} \right| \leq C_2 |z|^n |e^{\tau\Psi(-iz)}| \in L^1(iv + \mathbb{R}).$$

El resultado es obtenido del Teorema 2.27 en Folland [1999]. \square

4.3.1. Fórmula de Black-Scholes generalizada para procesos de Lévy.

Consideramos, por ahora, que $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ en $S_t = S_0 e^{X_t + rt}$ es un proceso estocástico arbitrario que satisface la condición de medida martingala $\mathbb{E}(e^{X_t}) = 1$, e introducimos la medida $\tilde{\mathbb{Q}}$ dada por

$$\frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{Q}} = e^{X_T}. \quad (4.8)$$

Esta nueva medida $\tilde{\mathbb{Q}}$ corresponde a la transformada de Esscher de \mathbb{Q} con parámetro $\theta = 1$, y fue nombrada por Shiryaev et al. Shiryaev et al. [1994] como la *medida martingala dual*.

Consideramos una opción de compra con función de pagos (8), y anotamos $x = \ln(K/S_t) - r\tau$. Su precio, en el modelo que consideramos puede ser transformado como

$$\begin{aligned} C_t(x) &= e^{-r\tau} \mathbb{E}(S_t e^{r\tau+X_\tau} - S_t e^{r\tau+x})^+ = S_t \mathbb{E}(e^{X_\tau} - e^x)^+ \\ &= S_t \mathbb{E}(e^{X_\tau} - e^x) \mathbf{1}_{\{X_\tau > x\}} = S_t (\mathbb{E} e^{X_\tau} \mathbf{1}_{\{X_\tau > x\}} - e^x \mathbb{E} \mathbf{1}_{\{X_\tau > x\}}) \\ &= S_t (\tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x) - e^x \mathbb{Q}(X_\tau > x)). \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos una fórmula cerrada en término de la probabilidad \mathbb{Q} y $\tilde{\mathbb{Q}}$. Esta fórmula es obtenida en (Tankov [2010], p. 68) y es una generalización de la fórmula de Black-Scholes cuando el activo subyacente es modelado con una variable normal X_T . Además, observamos que el primer término calculado

$$\mathbb{E} e^{X_\tau} \mathbf{1}_{\{X_\tau > x\}} = \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x)$$

es el precio de una opción *activo o nada* (asset or nothing), mientras que el segundo término

$$\mathbb{E} \mathbf{1}_{\{X_\tau > x\}} = \mathbb{Q}(X_\tau > x)$$

es el precio de una opción digital de compra (*digital call*).

En el caso que el proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ sea un proceso de Lévy bajo \mathbb{Q} , obtenemos la terna característica $(\tilde{\gamma}, \tilde{\sigma}, \tilde{\Pi})$ bajo $\tilde{\mathbb{Q}}$ dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} &= \sigma, \\ \tilde{\Pi}(dx) &= e^x \Pi(dx), \\ \tilde{\gamma} &= \frac{\sigma^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{-y} - 1 + h(y)) \tilde{\Pi}(dy). \end{aligned}$$

Además, si X_t tiene densidad $f_t(x)$, por (4.8), obtenemos la densidad \tilde{f}_t de X_t bajo $\tilde{\mathbb{Q}}$, dada por

$$\tilde{f}_t(s) = e^s f_t(s).$$

Recordemos que las fórmulas (4.5), (4.6) y (4.7) son dadas a través de la medida de probabilidad riesgo neutral \mathbb{Q} .

4.3.2. Griegas de primer orden

En esta sección no asumimos requisitos generales, en su lugar especificamos caso a caso los requisitos necesarios para obtener la correspondiente griega.

Delta

Delta es la derivada de la opción, en este caso de compra, respecto del valor del subyacente. En el capítulo 2 se introdujo esta griega la cual es de gran interés al momento de crear portafolios que disminuyan el riesgo ante variaciones del precio del subyacente.

Al momento de hacer coberturas es importante conocer Δ y por tanto, es imprescindible poder calcular de forma precisa esta griega.

Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z|^{-1} |e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$ y $S_t \in [A, B]$. A partir de (4.7) obtenemos

$$\begin{aligned}\Delta_t^L &= \frac{\partial C_t(x(S_t))}{\partial S_t} \\ &= \frac{\partial}{\partial S_t} S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x(S_t)}}{iz(1+iz)} e^{\tau\Psi(-iz)} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x}}{iz(1+iz)} e^{\tau\Psi(-iz)} dz - \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x}}{iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(1+iz)x}}{1+iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz = \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x).\end{aligned}$$

Rho

Rho es la derivada de la opción con respecto a la tasa de interés, mide la sensibilidad de la opción ante cambios en la tasa de interés. Cuando consideramos un modelo de Lévy para la modelación del precio del activo subyacente, implícitamente estamos asumiendo la no variabilidad de los parámetros en el tiempo, lo cual conlleva a la no variabilidad en el tiempo de la tasa de interés por consistencia bajo la condición riesgo neutral (ver sección 3.1).

Sin embargo, es un hecho empírico que la tasa de interés varía en el tiempo, por lo tanto es de utilidad conocer la sensibilidad del precio de la opción, para conocer la sensibilidad del portafolio, cuando varía la tasa de interés.

Recordemos que $x = \ln(K/S_t) - r\tau$, donde x depende de la tasa de interés r . Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z|^{-1} |e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$ y $r \in [R_1, R_2]$. Entonces

$$\rho_t^L = \frac{\partial C_t(x(r))}{\partial r} = S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} -\tau \frac{e^{(1+iz)x}}{iz} e^{\tau\Psi(-iz)} dz = \tau S_t e^x \mathbb{Q}(X_\tau > x).$$

Vega

Bajo el modelo de Black-Scholes, Vega muestra el cambio en la varianza del logaritmo del precio.

En modelos de Lévy, la derivada de $C_t(x)$ con respecto a σ no da exactamente la misma información. Sin embargo es un parámetro de gran interés que ayuda a estudiar la variabilidad de la opción de compra en términos del desvío del componente gaussiano del proceso de Lévy usado.

Es claro que esta griega tiene interés sólo cuando estamos considerando procesos de difusión con saltos, en el caso de procesos con actividad infinita, donde es común evitar el componente gaussiano, esta griega carece de sentido.

Asumamos que X_τ tiene densidad f_τ , $\sigma \in [\Sigma_1, \Sigma_2]$ con $\Sigma_1 > 0$ y $z \in iv + \mathbb{R}$. Sea

$$h(z, \sigma) = e^{\tau iz(1+iz)\frac{\sigma^2}{2}}, \quad g(z) = \frac{e^{izx + \tau \int_{\mathbb{R}} (e^{izy} - 1 - iz(e^y - 1)) \nu(dy)}}{iz(1+iz)}.$$

Luego, $\frac{\partial h(z, \sigma)}{\partial \sigma}$ es acotada. Por otro lado $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(z)| dz < \infty$ porque $|\mathbb{E}(e^{-i(iv+s)J_\tau})| \leq \mathbb{E}(e^{vJ_\tau}) < \infty$, donde J_τ es la parte de salto de X_τ . Por el Lema 4.1 podemos derivar bajo el signo integral.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_t^L &= \frac{\partial C_t(x)}{\partial \sigma} = S_t \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{izx} e^{\tau\Psi_\sigma(-z)}}{iz(iz+1)} \tau \sigma iz(1+iz) dz \\ &= S_t \tau \sigma e^x f_\tau(x). \end{aligned}$$

Para completar la información provista por vega podemos calcular la derivada con respecto a la intensidad de saltos.

Tanto σ como λ nos dan información del nivel en el que se encuentra la volatilidad implícita (ver sección 0.1 y apéndice A).

Supongamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$. Con el objetivo de introducir una notación uniforme para la intensidad de los saltos, consideremos $\Pi(dy) = \lambda\bar{\Pi}(dy)$ donde podemos admitir que $\bar{\Pi}(\mathbb{R}) = 1$ para procesos de difusión con saltos o simplemente $\bar{\Pi}$ no dependiente de λ para procesos de actividad infinita.

Supongamos que $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, luego sea

$$h(z, \lambda) = \frac{e^{\tau\lambda \int_{\mathbb{R}} [e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1)] \bar{\nu}(dy)}}{\tau \int_{\mathbb{R}} [e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1)] \bar{\nu}(dy)},$$

$$g(z) = \frac{e^{(iz+1)x} e^{\tau iz(1+iz)\frac{\sigma^2}{2}}}{iz(iz+1)} \tau \int_{\mathbb{R}} [e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1)] \bar{\nu}(dy),$$

donde $\frac{\partial h(z, \lambda)}{\partial \lambda}$ es acotada y del Lema 4.2 $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(z)| dz < \infty$, entonces por el Lema 4.1 tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\tau C_t(x)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(iz+1)} dz \\ &= \tau S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(iz+1)} \bar{\Psi}_J(-z) dz, \end{aligned}$$

con $\bar{\Psi}_J(-z) = \int_{\mathbb{R}} [e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1)] \bar{\nu}(dy)$. Usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\tau C_t(x)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(iz+1)} dz \\ &= \tau S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(iz+1)} \int_{\mathbb{R}} [e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1)] \bar{\nu}(dy) dz \\ &= \tau S_t \left[\int_{\mathbb{R}} \left(e^y \frac{e^{x-y}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{iz(x-y)} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(1+iz)} dz \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(1+iz)} dz \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (e^y - 1) \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} dz \right) \bar{\nu}(dy) \right] \\ &= \tau \left[\int_{\mathbb{R}} \left(e^y C_t(x-y) - C_t(x) - S_t(e^y - 1) \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x) \right) \bar{\nu}(dy) \right]. \end{aligned}$$

El uso del Teorema de Fubini es justificado por (4.3) y la hipótesis adicional $\int_{iv+\mathbb{R}} |e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$.

Theta

Theta es la derivada de la opción respecto al tiempo al vencimiento. Mide la sensibilidad del valor del derivado con el paso del tiempo.

Theta es una griega que toma mayor interpretación cuando es utilizada en opciones americanas. Aquí, el valor de una opción puede ser descompuesto en el valor intrínseco y el valor temporal, donde el valor intrínseco es la cantidad de dinero que ganaría si se ejerce la opción de inmediato y el valor del tiempo es el valor de mantener la opción más tiempo antes de decidirse a hacerla ejercicio.

Para opciones europeas, Theta nos proporciona una imagen de la variabilidad en el corto plazo de la variabilidad futura del precio de la opción.

Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^2 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$, $\tau \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ y $z \in iv + \mathbb{R}$, sea

$$h(z, \tau) = e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}, \quad g(z) = \frac{1}{iz(1+iz)}.$$

Luego, $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(z)| dz < \infty$, más aún, a partir de (4.2) y $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^2 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$

$$\frac{\partial h(z, \tau)}{\partial \tau} = e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)} \left(-r(1+iz) + \Psi(-iz) \right)$$

es acotada y por el Lema 4.1,

$$\begin{aligned} \Theta_t^L &= \frac{\partial_\tau C_t(x_\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(iz+1)} dz \\ &= S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(1+iz)} \left(\Psi(-iz) - r(1+iz) \right) dz. \end{aligned}$$

Usando el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned} \Theta_t^L &= S_t \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(1+iz)} \left(\Psi(-iz) - r(1+iz) \right) dz \\ &= S_t \left[-\frac{r}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz} dz \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(iz+1)} \left(iz(1+iz) \frac{\sigma^2}{2} \right. \\
& \left. + \int_{\mathbb{R}} [e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1)] \Pi(dy) \right) dz \\
= & S_t \left[r e^{x_\tau} \mathbb{Q}(X_\tau > x_\tau) + \frac{\sigma^2}{2} e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) \right. \\
& + \int_{\mathbb{R}} \left(e^y \frac{e^{x-y}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{iz(x-y)} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(1+iz)} dz - \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz(1+iz)} dz \right. \\
& \left. + (e^y - 1) \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} dz \right) \Pi(dy) \Big] \\
= & S_t \left[r e^{x_\tau} \mathbb{Q}(X_\tau > x_\tau) + \frac{\sigma^2}{2} e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) \right] \\
& + \int_{\mathbb{R}} \left(e^y C_t(x_\tau - y) - C_t(x_\tau) - S_t(e^y - 1) \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x_\tau) \right) \Pi(dy).
\end{aligned}$$

El uso del Teorema de Fubini es justificado por (4.3) y la hipótesis adicional $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^2 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$.

4.3.3. Griegas de segundo orden

Las griegas de segundo orden complementan la información de las griegas de primer orden. No obstante, como vimos en el capítulo 2, Gamma es de suma utilidad al momento de disminuir el riesgo ante variaciones del precio del activo.

Gamma

Mide la tasa de cambio en la que Delta cambia con respecto al precio del subyacente.

Una vez que obtenemos Delta, para obtener Gamma sólo debemos derivar respecto de S_t una vez más. Asumamos que X_τ tiene densidad f y $S_t \in [A, B]$, luego

$$\begin{aligned}\Gamma_t^L &= \frac{\partial^2 C_t(x(S_t))}{\partial S_t^2} = \frac{\partial \tilde{Q}(X_\tau > x(S_t))}{\partial S_t} \\ &= \frac{1}{S_t} \tilde{f}(x) = \frac{e^x}{S_t} f(x).\end{aligned}$$

Vanna

Vanna es la derivada de vega respecto al precio del activo. Mide la variabilidad de vega ante cambios en el precio del subyacente o, alternativamente, mide la sensibilidad de Delta con respecto a la volatilidad del componente gaussiano σ .

Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |ze^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$ y $0 < \Sigma_1 \leq \sigma \leq \Sigma_2$, luego

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C_t(x)}{\partial \sigma \partial S_t} &= \frac{\partial \mathcal{V}_t^L}{\partial S_t} = \tau \sigma e^{x(S_t)} f_t(x(S_t)) - \tau \sigma e^{x(S_t)} \left(f_t(x(S_t)) + f_t'(x(S_t)) \right) \\ &= -\tau \sigma e^x f_t'(x).\end{aligned}$$

Vomma

Es la derivada segunda del precio de la opción respecto a la volatilidad del término de difusión. Al igual que las anteriores griegas que involucran derivadas respecto de σ , esta griega toma mayor interpretación cuando se trabaja en el modelo Black-Scholes. No obstante ello, siendo σ un parámetro de gran importancia en los procesos de difusión con saltos, es útil obtener también ésta griega en este contexto.

Asumamos $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^2 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$ y $0 < \Sigma_1 \leq \sigma \leq \Sigma_2$, sea $z \in iv + \mathbb{R}$ y anotemos

$$h(z, \sigma) = z^2 e^{\tau iz(1+iz)\frac{\sigma^2}{2}}, \quad g(z) = \frac{e^{izx+\tau \int_{\mathbb{R}} (e^{izy}-1-iz(e^y-1))\nu(dy)}}{z^2}.$$

Luego $\frac{\partial h(z, \sigma)}{\partial \sigma}$ es acotado y $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(z)| dz < \infty$, porque $|\mathbb{E}(e^{-izJ_\tau})| \leq \mathbb{E}(e^{vJ_\tau}) < \infty$, donde J_τ es la parte de salto de X_τ . Por Lema 4.1 podemos derivar bajo el signo integral.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C_t(x)}{\partial \sigma^2} &= \frac{\partial \mathcal{V}_t^L}{\partial \sigma} = S_t \tau e^x f_\tau(x) + S_t \tau \sigma \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} e^{\tau\Psi(-iz)} \tau \sigma (iz - z^2) dz \\ &= S_t \tau e^x \left(f_\tau(x) + \tau \sigma^2 [f'_\tau(x) + f''_\tau(x)] \right).\end{aligned}$$

Charm

Charm nos proporciona la tasa instantánea de cambio de la griega Delta sobre el pasaje del tiempo. Charm ayuda por ejemplo para medir o monitorear una cobertura de un portafolio Δ -neutral, cuando transcurre un pequeño período de tiempo sin transacciones en el mercado, como por ejemplo un fin de semana.

Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^3 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$, $\tau \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ y $z \in iv + \mathbb{R}$, sea

$$h(z, \tau) = z e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}, \quad g(z) = \frac{1}{z(1+iz)}.$$

Luego, $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$ y por Lema 4.2

$$\frac{\partial h(z, \tau)}{\partial \tau} = z e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)} \left(-r(1+iz) + \Psi(-iz) \right)$$

es acotada. Por Lema 4.1,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C_t(x)}{\partial \tau \partial S_t} &= \frac{\partial \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x_\tau)}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{-1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{(iz+1)x_\tau} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{(iz+1)x_\tau} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} \left(r(1+iz) - \Psi(-iz) \right) dz.\end{aligned}\quad (4.9)$$

Usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C_t(x)}{\partial \tau \partial S_t} &= \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{(iz+1)x_\tau} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} \left(r(1+iz) - \Psi(-iz) \right) dz \\ &= r e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) - \frac{\sigma^2}{2} e^{x_\tau} f'_\tau(x_\tau) \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \left[e^y \frac{e^{x_\tau-y}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{iz(x_\tau-y)} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} dz - \frac{e^{x_\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx_\tau} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} dz \right. \\ &\quad \left. + (e^y - 1) \left\{ \frac{e^{x_\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)} dz \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{e^{x_\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx_\tau} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{1+iz} dz \right\} \right] \nu(dy)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -re^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) + \frac{\sigma^2}{2} e^{x_\tau} f'_\tau(x_\tau) \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[-e^y \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x_\tau - y) + \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x_\tau) \right. \\
&\quad \left. + (e^y - 1) \{e^x f_\tau(x) + \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x_\tau)\} \right] \nu(dy) \\
&= re^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) - \frac{\sigma^2}{2} e^{x_\tau} f'_\tau(x_\tau) \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}} \left[e^y \left(\tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x_\tau) - \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x_\tau - y) \right) \right. \\
&\quad \left. + (e^y - 1) e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) \right] \nu(dy).
\end{aligned} \tag{4.10}$$

El uso del Teorema de Fubini es justificado por (4.3) y la hipótesis adicional $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^3 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$.

Veta

Veta mide el cambio de vega con respecto al pasaje del tiempo. Es de utilidad cuando se hacen coberturas *vega*-neutrales basadas en el modelo Black-Scholes. Al igual que Charm para la cobertura Δ -neutral, con veta obtenemos información de la variabilidad en el tiempo de vega, la sensibilidad de la opción ante cambios en la volatilidad del componente de difusión.

Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^4 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$. Similar a Charm_t , asumamos que $\tau \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$ y $z \in iv + \mathbb{R}$, y anotemos

$$h(z, \tau) = z^2 e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}, \quad g(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Luego, $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(z)| dz < \infty$ y por Lema 4.2

$$\frac{\partial h(z, \tau)}{\partial \tau} = z^2 e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)} \left(-r(1+iz) + \Psi(-iz) \right)$$

es acotada. Por Lema 4.1 podemos derivar bajo el signo integral,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_t(x_r)}{\partial \sigma \partial \tau} &= \frac{\partial \mathcal{V}_t^L}{\partial \tau} = \frac{\partial S_t \tau \sigma e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau)}{\partial \tau} \\
&= S_t \sigma \left[e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) - r \tau e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) + \frac{\tau e^{x_\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial \tau} e^{izx_\tau} e^{\tau \Psi(-iz)} dz \right] \\
&= S_t \sigma \left[e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) - r \tau e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tau e^{x_\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx_\tau} e^{\tau \Psi(-iz)} \left(\Psi(-iz) - riz \right) dz \right].
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_t(x_r)}{\partial \sigma \partial \tau} &= S_t \sigma \left[e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) - r \tau e^{x_\tau} f_\tau(x_\tau) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tau e^{x_\tau}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx_\tau} e^{\tau \Psi(-iz)} \left(\Psi(-iz) - riz \right) dz \right] \\
&= S_t \sigma e^{x_\tau} \left[f_\tau(x_\tau) - r \tau \left[f_\tau(x_\tau) + f'_\tau(x_\tau) \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{\tau}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx_\tau} e^{\tau \Psi(-iz)} \left\{ \frac{\sigma^2}{2} (iz - z^2) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1) \right) \nu(dy) \right\} dz \right] \\
&= S_t \sigma e^{x_\tau} \left[f_\tau(x_\tau) - r \tau \left[f_\tau(x_\tau) + f'_\tau(x_\tau) \right] + \tau \frac{\sigma^2}{2} \left[f'_\tau(x_\tau) + f''_\tau(\tau) \right] \right. \\
&\quad \left. + \tau \int_{\mathbb{R}} \left(f_\tau(x_\tau - y) - f_\tau(x_\tau) + (e^y - 1) f'_\tau(x_\tau) \right) \nu(dy) \right].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Fubini es justificado por (4.3) y la hipótesis adicional $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^4 e^{\tau \Psi(-iz)}| dz < \infty$.

Vera

Vera es la derivada de veta respecto de la tasa de interés.

Supongamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z e^{\tau \Psi(-iz)}| dz < \infty$, y $0 < \Sigma_1 \leq \sigma \leq \Sigma_2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_t(x_r)}{\partial \sigma \partial r} &= \frac{\partial \mathcal{V}_t^L}{\partial r} = S_t \tau \sigma e^{x_r} \left(-\tau f_\tau(x_r) - \tau f'_\tau(x_r) \right) \\
&= -S_t \tau^2 \sigma e^{x_r} \left(f_\tau(x_r) + f'_\tau(x_r) \right).
\end{aligned}$$

4.3.4. Griegas de tercer orden

En la práctica, las derivadas de tercer orden son menos usadas, sin embargo pueden proporcionar información de utilidad para analizar la variabilidad de algunas de las griegas de segundo orden más usadas con respecto a los parámetros más relevantes.

Color

Color es la derivada de Gamma respecto del tiempo al vencimiento. Es utilizada para medir la variabilidad de un portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral con el tiempo.

Supongamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^4 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$, $\tau \in [\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2]$. Sea $z \in iv + \mathbb{R}$ y

$$h(z, \tau) = z^2 e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)}$$

$$g(z) = \frac{1}{z^2}.$$

Luego, $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$ y por Lema 4.2

$$\frac{\partial h(z, \tau)}{\partial \tau} = z^2 e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)} \left(-r(1+iz) + \Psi(-iz) \right)$$

es acotada. Por Lema 4.1 podemos derivar bajo el signo integral.

Luego,

$$\frac{\partial^3 C_t(x)}{\partial S_t^2 \partial \tau} = \frac{\partial \Gamma_t^L}{\partial \tau} = \frac{1}{S_t 2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)} \left(-r(iz+1) + \Psi(-iz) \right) dz. \quad (4.13)$$

Usando el Teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 C_t(x)}{\partial S_t^2 \partial \tau} &= \frac{1}{S_t 2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{(iz+1)x_\tau} e^{\tau\Psi(-iz)} \left(-r(iz+1) + \Psi(-iz) \right) dz \\
&= \frac{e^x}{S_t} \left[-r(f(x) + f'(x)) + \frac{\sigma^2}{2} (f'(x) + f''(x)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} e^{\tau\Psi(-iz)} \int_{\mathbb{R}} e^{-izy} - 1 + iz(e^y - 1) \nu(dy) dz \right] \\
&= -\frac{e^x}{S_t} \left[r(f_\tau(x) + f'_\tau(x)) - \frac{\sigma^2}{2} (f'_\tau(x) + f''_\tau(x)) \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}} (f_\tau(x) - f_\tau(x-y) - (e^y - 1)f'_\tau(x)) \nu(dy) \right]. \tag{4.14}
\end{aligned}$$

Fubini es justificado por (4.3) y la hipótesis $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^4 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$.

Speed

Speed es la derivada de tercer orden del valor de la opción respecto del precio del activo. Es útil para monitorear un portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral.

Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 C_t(x_r)}{\partial S_t^3} &= \frac{\partial \Gamma_t^L}{\partial S_t} = \frac{e^{x(S_t)} \left(-\frac{1}{S_t} f_\tau(x(S_t)) - \frac{1}{S_t} f'_\tau(x(S_t)) \right) S_t - e^{x(S_t)} f_\tau(x(S_t))}{S_t^2} \\
&= -\frac{e^x}{S_t^2} (2f_\tau(x) + f'_\tau(x)).
\end{aligned}$$

Ultima

Ultima es la derivada de tercer orden del valor de la opción respecto de la volatilidad del componente de difusión. Nuevamente presenta su mayor utilidad en el modelo de Black-Scholes. Siendo σ un parámetro de gran influencia, también es de gran utilidad en procesos de difusión con saltos.

Asumamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^6 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$. Primero calculemos $\frac{\partial f_\tau^{(n)}(x)}{\partial \sigma}$ para $n = 0, 1, 2$. Para $0 < \Sigma_1 \leq \sigma \leq \Sigma_2$ y $z \in iv + \mathbb{R}$, y anotando

$$h_n(z, \sigma) = (iz)^{n+2} e^{\tau\Psi(-iz)}, \quad g(z) = -\frac{e^{izx}}{z^2}.$$

Luego, $\int_{iv+\mathbb{R}} |g(z)| dz < \infty$ y $\frac{\partial h_n(z, \sigma)}{\partial \sigma}$ es acotada para $n = 0, 1, 2$. Por Lema 4.1 podemos derivar bajo el signo integral. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n f_\tau(x)}{\partial \sigma^n} &= \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} (iz)^n e^{izx} e^{\tau\Psi(-iz)} dz \\ &= \tau \sigma \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} [(iz)^{n+1} - (iz)^{n+2}] e^{izx} e^{\tau\Psi(-iz)} dz \\ &= \tau \sigma \left(f_\tau^{(n+1)}(x) + f_\tau^{(n+2)}(x) \right). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ahora, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 C_t(x)}{\partial \sigma^3} &= \frac{\partial S_t \tau e^x \left(f_\tau(x) + \tau \sigma^2 [f'_\tau(x) + f''_\tau(x)] \right)}{\partial \sigma^3} \\ &= S_t \tau^2 \sigma e^x \left(3(f'_\tau(x) + f''_\tau(x)) + \tau \sigma^2 [f''_\tau(x) + 2f'''_\tau(x) + f_\tau^{(iv)}(x)] \right). \end{aligned}$$

Zomma

Por último, zomma es la derivada de Gamma respecto de σ . Es de utilidad por ejemplo cuando tenemos un portafolio Γ -neutral y queremos anticipar cambios en la eficacia de la cobertura respecto a cambios en la volatilidad.

Supongamos que $\int_{iv+\mathbb{R}} |z^2 e^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$ y $0 < \Sigma_1 \leq \sigma \leq \Sigma_2$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 C_t(x_r)}{\partial S_t^2 \partial \sigma} &= \frac{\partial Vanna_t^L}{\partial S_t} = \frac{\partial \tau \sigma e^{x(S_t)} f'_\tau(x(S_t))}{\partial S_t} \\ &= - \frac{\tau \sigma e^x}{S_t} \left(f'_\tau(x) + f''_\tau(x) \right). \end{aligned}$$

4.4. Ejemplos

En la presente sección presentamos algunos ejemplos donde en particular comparamos resultados encontrados en la literatura. Es importante observar que para muchos de los modelos usados en la literatura (por ejemplo Variance Gamma,

Normal Inverse Gaussian y otros), se cuenta con expresiones explícitas (y de fácil aproximación) para las densidades, con lo que el cuadro 4.6 se torna de gran utilidad en estos casos.

No obstante, en casos de no conocer expresiones explícitas para las densidades, por medio de la función característica podemos obtener con gran precisión los valores de las griegas buscados, método que es usado en esta sección.

4.4.1. El modelo de Black-Scholes

Si asumimos que la función de distribución y la densidad gaussiana se obtienen de forma exacta en el software R, entonces podemos comparar las griegas para el modelo de Black-Scholes usando la fórmula de Lewis aproximada.

Para aproximar la transformada de Fourier cortamos la integral entre $-A/2$ y $A/2$ y tomamos una partición uniforme de $[-A/2, A/2]$ de tamaño N :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{izx} g(z) dz \approx \int_{-A/2}^{A/2} e^{izx} g(z) dz \approx \frac{A}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{iz_k x} g(z_k),$$

donde $z_k = -\frac{A}{2} + k \frac{A}{N-1}$ y w_k son pesos correspondientes al método de integración numérico.

En el cuadro 4.1 mostramos el error ℓ_{∞} en el modelo de Black-Scholes via la representación de Lewis y la transformada rápida de Fourier usando: $S_t = 1$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,1$, $A = 300$ y $N = 2^{22}$. El error ℓ_{∞} es

$$\ell_{\infty\text{-error}}(GL) = \max_{x \in [-0,7, 0,7]} |GL - G|,$$

para $x = \ln(K/S_t) - r\tau$.

4.4.2. El modelo de Merton

En esta sección mostramos algunos resultados para el modelo de Merton. Este modelo tiene cuatro parámetros $(\sigma, \mu_J, \sigma_J, \lambda)$ donde σ es el parámetro de difusión, λ es la intensidad de salto, μ_J y σ_J son la media y la desviación estándar de los saltos, los cuales tienen distribución gaussiana. La función característica para el modelo de Merton es:

Griega	Expresión	ℓ_∞ -error
Call	$C = S \mathbb{E}(e^{X_\tau} - e^x)^+$	1.2e-07
Delta	$\partial_S C(x)$	2.4e-07
Rho	$\partial_r C_t(x)$	1.9e-07
Vega	$\partial_\sigma C(x)$	9.5e-08
Theta	$\partial_\tau C(x)$	1.2e-08
Gamma	$\partial_{SS}^2 C(x)$	9.5e-07
Vanna	$\partial_{\sigma S}^2 C(x)$	6.3e-07
Vomma	$\partial_{\sigma\sigma}^2 C(x)$	7.5e-07
Charm	$\partial_{S\tau}^2 C(x)$	6.8e-08
Veta	$\partial_{\sigma\tau}^2 C(x)$	8.9e-08
Vera	$\partial_{\sigma r}^2 C(x)$	5.8e-07
Color	$\partial_{SS\tau}^3 C(x)$	5.6e-07
Speed	$\partial_{SSS}^3 C(x)$	6.3e-06
Ultima	$\partial_{\sigma\sigma\sigma}^3 C(x)$	1.2e-05
Zomma	$\partial_{SS\sigma}^3 C(x)$	9.5e-06

Cuadro 4.1: Error ℓ_∞ en el modelo Black-Scholes vía la representación de Lewis y la Transformada rápida de Fourier usando : $S_t = 1$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,1$, $A = 300$ y $N = 2^{22}$.

$$\mathbb{E}(e^{izX_T}) = \exp \left\{ iz \left[\frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left(e^{\mu_J + \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1 \right) \right] + z^2 \frac{\sigma^2}{2} + \lambda \left(e^{iz\mu_J - z^2 \frac{\sigma_J^2}{2}} - 1 \right) \right\}. \quad (4.16)$$

Todas las griegas para $x = 0$ (*at the money*) se muestran en el Cuadro 4.2 siguiendo la sección 4.3. Aquí tomamos $A = 500$, $N = 2^{20}$ y $A = 500$, $N = 2^{22}$, el error ℓ_∞ para $x \in [-0,7, 0,7]$ es en todas las griegas menor que 10^{-5} . En la Figura 4.1 se muestran las curvas en términos de $x = \ln(K/S_0) - rT$ para todas las griegas con la comparación del modelo de Black-Scholes con volatilidad igual a la volatilidad implícita para $x = 0$.

La función característica en este caso es (4.16). Para calcular sensibilidades respecto de μ_J , σ_J y λ sólo necesitamos derivar el exponente característico con respecto a esos parámetros:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi(-iz)}{\partial \mu_j} &= \lambda iz \left[e^{\mu_J + \sigma_J^2/2} - e^{-iz\mu_J - z^2 \sigma_J^2/2} \right], \\ \frac{\partial \Psi(-iz)}{\partial \sigma_j} &= \lambda \sigma_J \left[iz e^{\mu_J + \sigma_J^2/2} - z^2 e^{-iz\mu_J - z^2 \sigma_J^2/2} \right], \end{aligned}$$

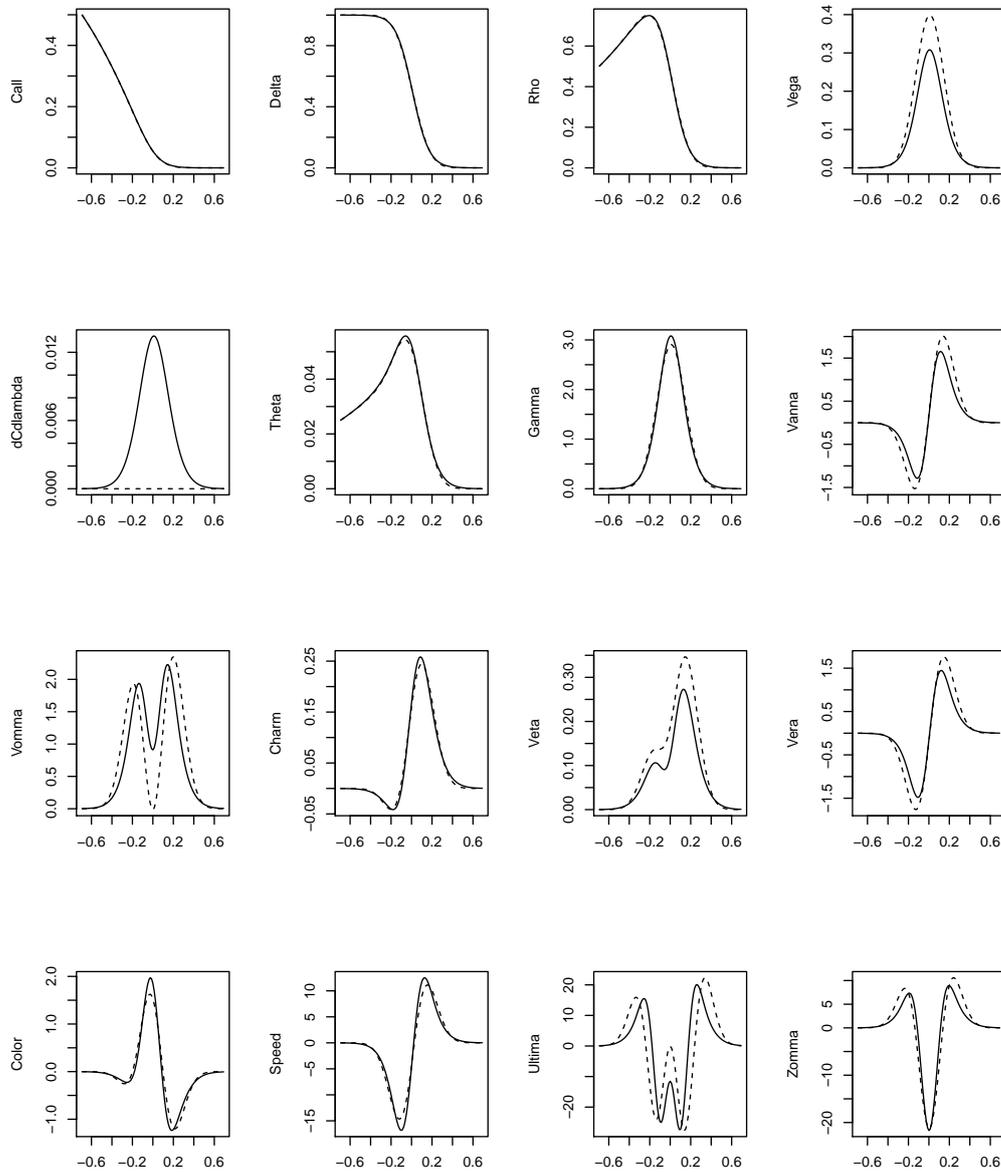


Figura 4.1: Griegas en términos de $x = \ln(K/S_0) - rT$ para el modelo de Merton con parámetros igual a los del Cuadro 4.2 (línea continua). Línea discontinua: Modelo Black-Scholes con volatilidad igual a la volatilidad implícita en $x = 0$ ($\sigma_{imp}(0) \approx 0,137$).

		$A = 500, N = 2^{20}$	$A = 500, N = 2^{21}$	error
Call	C	0.0547129	0.0547129	2.6e-08
Delta	$\partial_S C$	0.5273560	0.5273562	2.5e-07
Rho	$\partial_r C$	0.4726431	0.4726433	2.2e-07
Vega	$\partial_\sigma C$	0.3077754	0.3077755	1.5e-07
Theta	$\partial_\tau C$	0.0524286	0.0524286	2.5e-08
Gamma	$\partial_{SS}^2 C$	3.0777536	3.0777550	1.5e-06
Vanna	$\partial_{\sigma S}^2 C$	0.1538877	0.1538878	7.3e-08
Vomma	$\partial_{\sigma\sigma}^2 C$	0.9091776	0.9091780	4.3e-07
Charm	$\partial_{S\tau}^2 C$	0.1682859	0.1682860	8.1e-08
Veta	$\partial_{\sigma\tau}^2 C$	0.1222075	0.1222076	5.8e-08
Vera	$\partial_{\sigma r}^2 C$	-0.1538877	-0.1538878	7.3e-08
Color	$\partial_{SS\tau}^3 C$	1.8556786	1.8556795	8.8e-07
Speed	$\partial_{SSS}^3 C$	-4.6166303	-4.6166325	2.2e-06
Ultima	$\partial_{\sigma\sigma\sigma}^3 C$	-11.5390901	-11.5390956	5.5e-06
Zomma	$\partial_{SS\sigma}^3 C$	-21.6857596	-21.6857699	1.0e-05

Cuadro 4.2: Griegas en el modelo de Merton con: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $x = 0$, $T = 1$, $\sigma = 0,1$, $\mu_J = -0,005$, $\sigma_J = 0,1$, $\lambda = 1$.

$$\frac{\partial \Psi(-iz)}{\partial \lambda_j} = iz \left[e^{\mu_J + \sigma_J^2/2} - 1 \right] + e^{-iz\mu_J - z^2\sigma_J^2/2} - 1,$$

y para $\theta = \mu_J, \sigma_J, \lambda$,

$$\frac{\partial C_\theta(x)}{\partial \theta} = \tau S_t \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{\tau\Psi_\theta(-iz)}}{iz(1+iz)} \frac{\partial \Psi_\theta(-iz)}{\partial \theta} dz.$$

La derivada bajo el signo integral se justifica como antes.

Usando los mismos parámetros presentados en el Cuadro 4.2 obtenemos las sensibilidades para $x = 0$ dadas en el Cuadro 4.3.

	$A = 500, N = 2^{20}$	$A = 1000, N = 2^{22}$	error
μ_J -sens	0.006703850	0.006703855	4.7e-09
σ_J -sens	0.239001059	0.239001230	1.7e-07
λ -sens	0.013407701	0.013407711	9.6e-09

Cuadro 4.3: Sensibilidades para el modelo de Merton con: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $x = 0$, $T = 1$, $\sigma = 0,1$, $\mu_J = -0,005$, $\sigma_J = 0,1$, $\lambda = 1$.

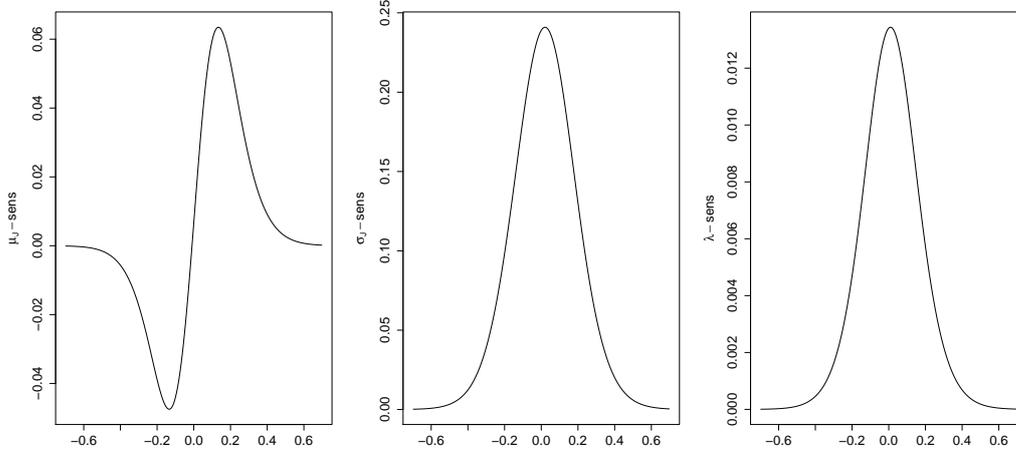


Figura 4.2: Sensibilidades en términos de $x = \ln(K/S_0) - rT$ para el modelo de Merton con parámetros igual a los de el Cuadro 4.3.

En la Figura 4.2 mostramos las griegas en términos de $x = \ln(K/S_0) - rT$.

En Kienitz [2008] se muestran algunos resultados para una opción Digital en el modelo de Merton, las cuales fueron obtenidas aplicando la aproximación por diferencias finitas al precio de la opción dado en Madan et al. [1998]. Ahora, deducimos Delta, Gamma y Vega para una opción Digital y luego comparamos los resultados.

La función de pago de una opción Digital es dada por:

$$\mathbf{1}_{\{S_\tau - K > 0\}} = \mathbf{1}_{\{X_\tau - x > 0\}}.$$

Usando la representación de Lewis, el valor para una opción Digital es:

$$D(x) = \mathbb{Q}(X_\tau > x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{i\nu + \mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{\tau\Psi(-iz)}}{iz} dz, \quad (4.17)$$

donde $x = \ln(K/S_t) - r\tau$. Luego

$$\frac{\partial D(x)}{\partial S_t} = \frac{1}{S_\tau} f_\tau(x), \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial^2 D(x)}{\partial S_t^2} = -\frac{1}{S_\tau^2} \left(f_\tau(x) + f'_\tau(x) \right), \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial D(x)}{\partial \sigma} = -\tau \sigma \left(f_\tau(x) + f'_\tau(x) \right). \quad (4.20)$$

Observemos que las formulas (4.17)-(4.20) son validas en general para una opción Digital de compra con $\int_{i\nu+\mathbb{R}} |ze^{\tau\Psi(-iz)}| dz < \infty$. En (4.20), la derivada bajo el signo integral es similar a (4.15).

Por lo tanto, nuestro resultado usando FFT es mostrado en el Cuadro 4.4. En Kienitz [2008] estos valores son (aproximaciones por diferencias finitas) : D= 0,531270, D-Delta= 0,016610, D-Gamma= $-2,800324 \times 10^{-4}$, D-Vega= $-0,560070$. Para obtener un precio de ejercicio dado definimos en FFT $\delta = 2\pi \frac{N-1}{NA}$.

	D-Call	D-Delta	D-Gamma	D-Vega
$N = 2^{20}$	0.531269863	0.016610445	-0.000280032	-0.560064360
$N = 2^{22}$	0.531270245	0.016610457	-0.000280032	-0.560064763
error	3.8e-07	1.2e-08	2.0e-10	4.0e-07

Cuadro 4.4: Opción digital y griegas en el modelo de Merton con: $\delta = 0,01$, $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 0,07$, $\sigma = 0,2$, $\mu_J = 0,05$, $\sigma_J = 0,15$ y $\lambda = 0,5$.

4.4.3. El modelo Variance Gamma

En esta sección comparamos algunos resultados encontrados en la literatura referentes a griegas bajo el modelo Variance Gamma. Por ejemplo, en Glasserman and Liu [2007] se muestran algunos resultados para este modelo con parámetros (ρ, ν, θ) donde la función característica es:

$$\mathbb{E}[e^{izX_T}] = \exp \left\{ \frac{T}{\nu} \left[iz \ln \left(1 - \theta\nu - \frac{\rho^2\nu}{2} \right) - \ln \left(1 - iz\theta\nu + \frac{z^2\rho^2\nu}{2} \right) \right] \right\}.$$

Para obtener un precio de ejercicio dado en FFT, definimos $\delta = 2\pi \frac{N-1}{NA}$. Luego, en el Cuadro 4.5 presentamos dos resultados para $N = 2^{20}$ y $N = 2^{22}$ con

$\delta = 0,01$. El error muestra la convergencia de la integral compleja. En Glasserman and Liu [2007] esos resultados se obtienen aplicando el método aproximado de diferencias finitas aplicado en el precio de la opción dado en Madan et al. [1998]: Call= 11,2669, Delta= 0,7282 y ρ -derivada = 23,0434 y en general con el método LRM (método de cociente de verosimilitudes), el error es mayor a 10^{-2} . mientras que en nuestro caso, con poco costo informático obtenemos un error menor a 10^{-5} en todos los casos.

	Call	Delta	Gamma	$\frac{\partial Call}{\partial \rho}$
$N = 2^{20}, \delta = 0,01$	11.26689113	0.72818427	0.01427437	23.04334371
$N = 2^{22}, \delta = 0,01$	11.26689919	0.72818479	0.01427438	23.04336021
err<	8.1e-06	5.2e-07	1.0e-08	1.6e-05

Cuadro 4.5: Griegas para el modelo Variance Gamma con: $(\rho, \nu, \theta) = (0,2, 1, -0,15)$, $r = 0,05$, $T = 1$, $S_0 = K = 100$ ($x = -0,05$).

4.5. Conclusiones

Las Griegas son un importante insumo para los formadores de precios (*market makers*) en en la gestión de riesgo. Una gran cantidad de opciones son dependientes de la trayectoria y no tienen una fórmula explícita. Sin embargo, para opciones europeas bajo modelos de Lévy tenemos la fórmula de Lewis, la cual nos permite obtener fórmulas cerradas para las griegas, muchas de las cuales son sólo dependientes de la densidad; otras requieren integración. En general, todas las griegas pueden ser aproximadas con alta precisión porque sólo requieren integración simple, similar a lo que sucede con el modelo de Black-Scholes.

Un gran número de artículos están dedicados a obtener griegas para funciones de pagos más complejas. Sin embargo, con el objetivo de estimar la precisión de esos métodos, ellos aproximas las griegas de opciones europeas por el método de diferencias finitas.

Para un precio de ejercicio fijo K , consideramos $x = \ln(K/S_t) - r\tau$, con $\tau = T - t$ el tiempo al vencimiento. Luego, las griegas para una opción de compra pueden calcularse a través de el Cuadro 4.6.

Observamos que, si la densidad de X_τ es conocida, entonces muchas de las

First order	
Delta	$\partial C_S(x) = \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x)$
Rho	$\partial C_r(x) = \tau S e^x \mathbb{Q}(X_\tau > x)$
Vega	$\partial C_\sigma(x) = S \tau \sigma e^x f_\tau(x)$
if $\Pi = \lambda \bar{\Pi}$	$\partial C_\lambda(x) = \tau \left[\int_{\mathbb{R}} \left(e^y C(x-y) - C(x) - S(e^y - 1) \tilde{\mathbb{Q}}(X_\tau > x) \right) \bar{\Pi}(dy) \right]$
Theta	$\partial C_\tau(x) = S \left[r e^x \mathbb{Q}(X_\tau > x) + \frac{\sigma^2}{2} e^x f_\tau(x) \right] + \frac{\lambda}{\tau} \partial C_\lambda(x)$
Second order	
Gamma	$\partial^2 C_{SS}(x) = S^{-1} e^x f_\tau(x)$
Vanna	$\partial^2 C_{\sigma S}(x) = -\tau \sigma e^x f'_\tau(x)$
Vomma	$\partial^2 C_{\sigma\sigma}(x) = S \tau e^x \left(f_\tau(x) + \tau \sigma^2 [f'_\tau(x) + f''_\tau(x)] \right)$
Charm	$\partial^2 C_{S\tau}(x) = \text{ver (4.9) y (4.10)}$
Veta	$\partial^2 C_{\sigma\tau}(x) = \text{ver (4.11) y (4.12)}$
Vera	$\partial^2 C_{\sigma r}(x) = -S \tau^2 \sigma e^x \left(f_\tau(x) + f'_\tau(x) \right)$
Third order	
Color	$\partial^3 C_{SS\tau}(x) = \text{ver (4.13) y (4.14)}$
Speed	$\partial^3 C_{SSS}(x) = -S^{-2} e^x \left(2f_\tau(x) + f'_\tau(x) \right)$
Ultima	$\partial^3 C_{\sigma\sigma\sigma}(x) = S \tau^2 \sigma e^x \left(3(f'_\tau(x) + f''_\tau(x)) + \tau \sigma^2 [f''_\tau(x) + 2f'''_\tau(x) + f_\tau^{iv}(x)] \right)$
Zomma	$\partial^3 C_{SS\sigma}(x) = -\tau \sigma S^{-1} e^x \left(f'_\tau(x) + f''_\tau(x) \right)$

Cuadro 4.6: Griegas bajo modelos de Lévy en términos de $x = \ln(K/S) - r\tau$.

griegas pueden obtenerse de forma exacta. Algunos ejemplos son: Normal Inverse Gaussian, Variance Gamma, Generalized Hyperbolic, Meixner y otros.

CAPÍTULO 5

VISUALIZACIÓN EN FINANZAS Y ASPECTOS NUMÉRICOS

En este capítulo describimos algunos de los aspectos de cálculo numéricos así como las principales líneas correspondientes a la visualización gráfica desarrollada a lo largo de la tesis. Los principales resultados encontrados en la tesis se iniciaron a través de una exploración gráfica, convirtiéndose en la principal herramienta y por ende entendemos de suma relevancia en el presente trabajo.

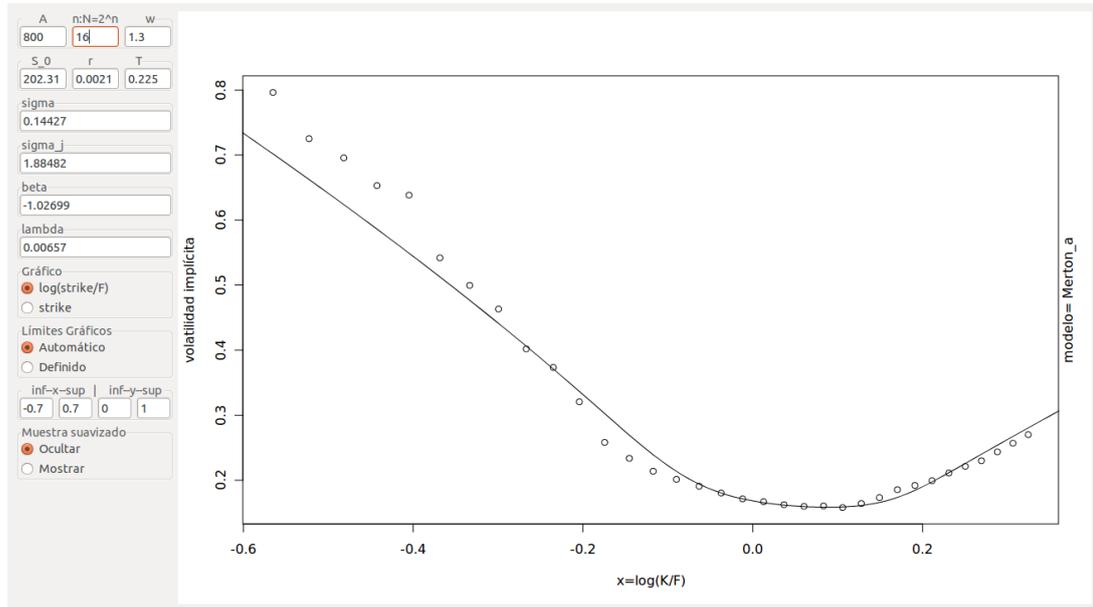


Figura 5.1: Visualización gráfica de volatilidad implícita y su calibración con el modelo asimétrico de Merton sobre datos de IBM, usando el paquete gWidget en R.

5.1. Visualización

En esta sección describimos los principales desarrollos visuales llevados adelante en la tesis. Es de gran importancia recordar que la volatilidad implícita para $\beta = -1/2$, resulta simétrica como función del logaritmo de la monetización (moneyness) $x = \log[K/(S_0 e^{rT})]$, resultado que fue obtenido en Fajardo and Mordecki [2006] y complementado a la simetría en términos de x y β en el capítulo 1. Debido a esto, resulta de suma utilidad hacer los gráficos en términos de x en lugar del precio de ejercicio, pudiendo explotar la simetría antes comentada.

Un elemento de gran utilidad al momento de visualizar resultados es el paquete *gWidgets*. Este paquete está desarrollado para el software R y permite la creación de ventanas gráficas interactivas, mediante las cuales podemos variar los parámetros de los modelos y visualizar en tiempo real el comportamiento de la volatilidad implícita.

En la Figura 5.1 se observa una de estas salidas cuando calibramos la volatilidad implícita de opciones de IBM usando el modelo asimétrico de Merton introducido en la sección 1.6.2.

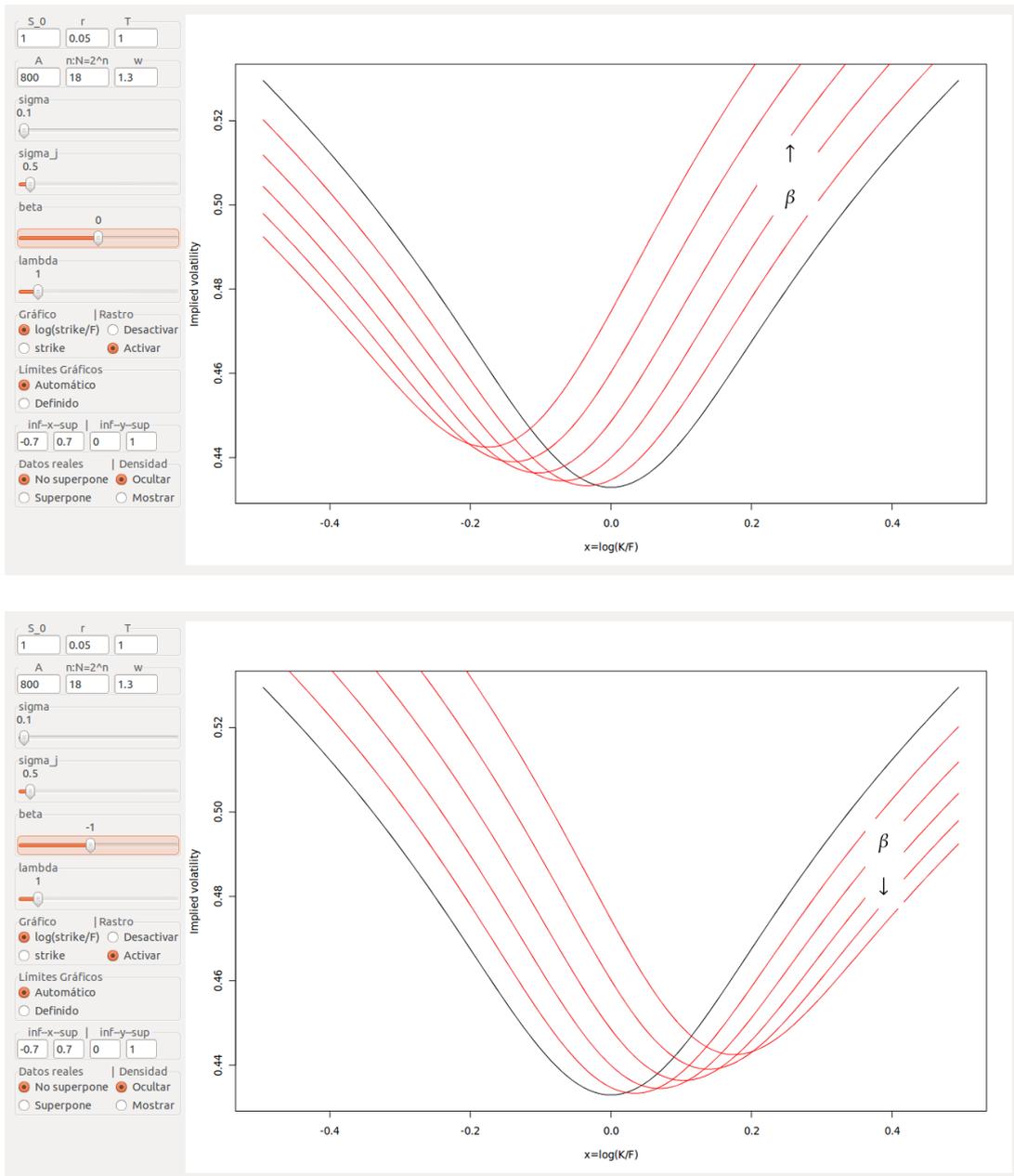


Figura 5.2: Visualización gráfica de volatilidad implícita bajo el modelo de asimétrico de Merton. Negro: $\beta = -0,5$, rojo: variación cuando β aumenta o disminuye.

A raíz de este tipo de gráficos nos planteamos estudiar la variabilidad de la volatilidad implícita ajustada en términos del parámetro de asimetría β . Cuando analizamos el comportamiento de la volatilidad implícita al variar β , como se muestra en la Figura 5.2, obtuvimos indicios para estudiar el comportamiento de monotonía para $x < 0$ y $\beta < -1/2$ o $x > 0$ y $\beta > -1/2$. No obstante, encontramos modelos patológicos como el modelo de Poisson a dos lados (ver sección 1.6.3) donde se observa que el comportamiento de monotonía no es válido en todas las regiones indicadas, ver Figura 5.3.

La observación de éstos gráficos nos permitió ajustar las hipótesis del Teorema 1.1, concluyendo que el comportamiento de monotonía sí se verifica en nuestro contexto pero en un entorno de $x = 0$ y $\beta = -1/2$.

Otra hipótesis que permitió ajustar la visualización fue la familia de modelos con la cuál trabajar, introduciendo los modelos asimétricos de Lévy definidos en la sección 1.2. En la Figura 5.4 mostramos la volatilidad implícita para el modelo asimétrico de Merton y la misma para el modelo de Merton. Con estos gráficos estudiamos los movimientos que provoca un cambio en el parámetro de asimetría sobre la volatilidad implícita en diferentes modelos, observando que la medida Π_0 no debía depender del parámetro de asimetría β , pues en el caso de dependencia como en el modelo de Merton, la variabilidad de ésta invalida el resultado que buscamos.

En la Figura 5.5 observamos la volatilidad implícita para modelo de difusión con Poisson a dos lados y el modelo Normal Inverse Gaussian en función de x y β . Aquí se observa la simetría (1.7), sin embargo, en el modelo de difusión con Poisson a dos lados se observa un comportamiento irregular de la volatilidad implícita dando lugar nuevamente a la no monotonía en términos de x y β como fue explicada en la sección 1.6.3.

Otros resultados nacieron por medio de la visualización, por ejemplo los relativos a la densidad de los modelos de Lévy asimétricos desarrollados en las Proposiciones 1.2, 1.3, 1.4 y 1.5 (ver sección 1.2) los cuales participan en diferente forma en el Teorema 1.1.

En la búsqueda por tratar de extender el marco de validez del Teorema 1.1 analizamos cierta subfamilia de modelos asimétricos, aquellos con densidad unimodal. La exploración gráfica indica que la volatilidad implícita es creciente con el parámetro de asimetría en el intervalo $(-1/2, +\infty)$ para valores de x positivos. A

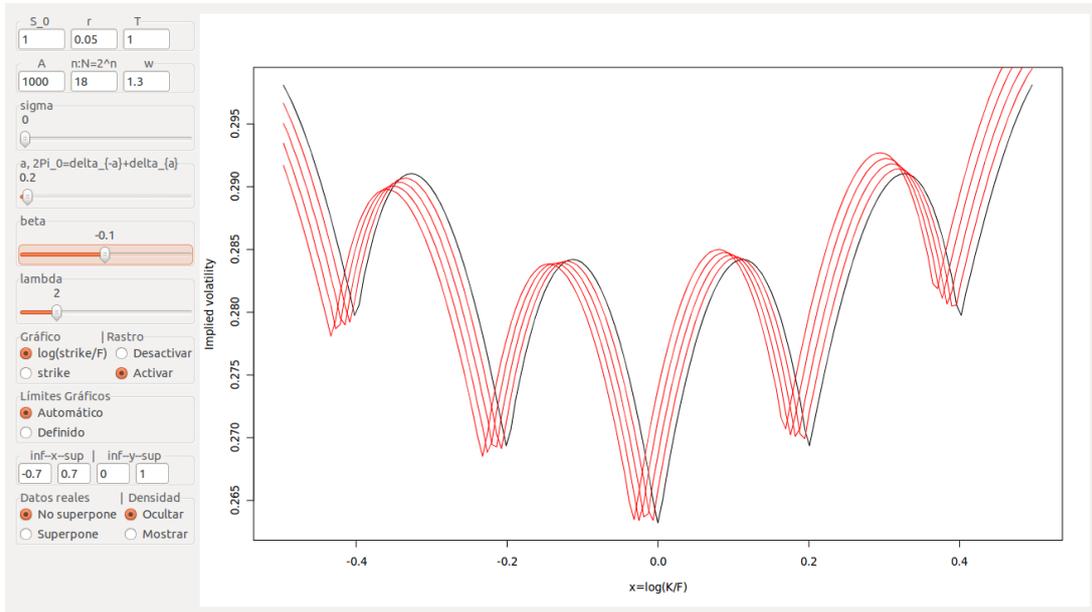


Figura 5.3: Visualización gráfica de volatilidad implícita bajo el modelo Poisson a dos lados. Negro: $\beta = -0,5$, rojo: variación cuando β aumenta.

partir de la bi-simetría (1.7), la ocurrencia del crecimiento anterior es equivalente a que la volatilidad implícita sea decreciente con β en el intervalo $(-\infty, -1/2)$ para valores de x negativos, tal cual se observa en la Figura 5.2.

Hemos transitado distintos caminos, desde el uso de la fórmula de Lewis para el precio de una opción de compra hasta la definición de dicha opción para modelos con densidad por medio de la Esperanza. La función de densidad no muestra un comportamiento monótono con respecto al parámetro de asimetría, sin embargo al integrar multiplicada por la función de interés $((e^y - e^x)^+ f_{X_t}(y; \beta))$ resulta verificar la monotonía antes descrita. Lamentablemente no hemos podido aún concluir en la veracidad de este resultado para los modelos asimétricos de Lévy con densidad unimodal, aunque todos los modelos utilizados indican que cumple, al menos gráficamente.

Hasta aquí hemos comentado algunos de los puntos importantes respecto a la visualización en finanzas. En la siguiente sección presentamos algunos elementos referentes a los métodos numéricos empleados.

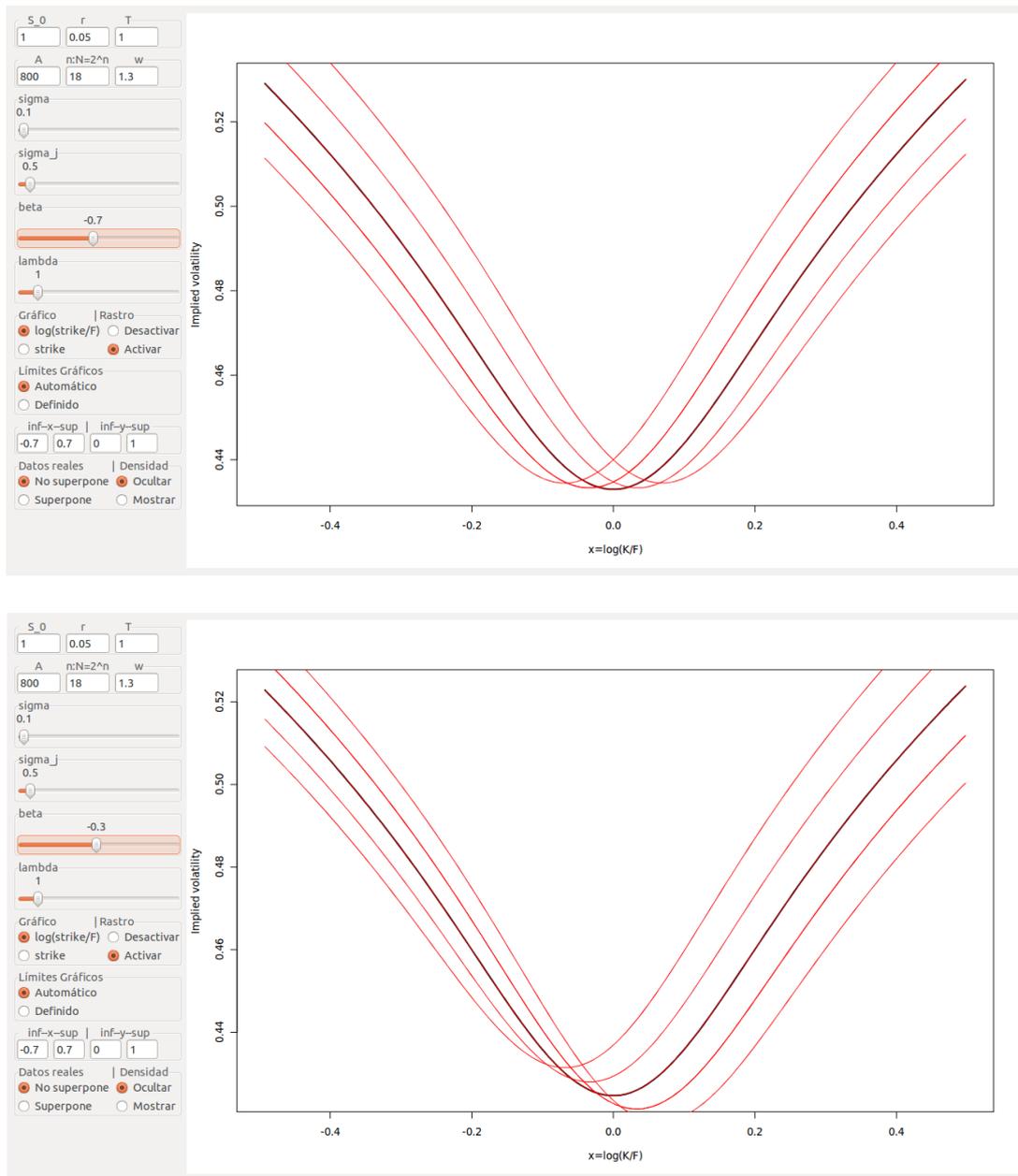


Figura 5.4: Visualización gráfica de volatilidad implícita bajo el modelo de asimétrico de Merton (arriba) y el modelo de Merton (abajo). Negro: $\beta = -0,5$, rojo $\beta = -0,3, -0,4, -0,6, -0,7$.

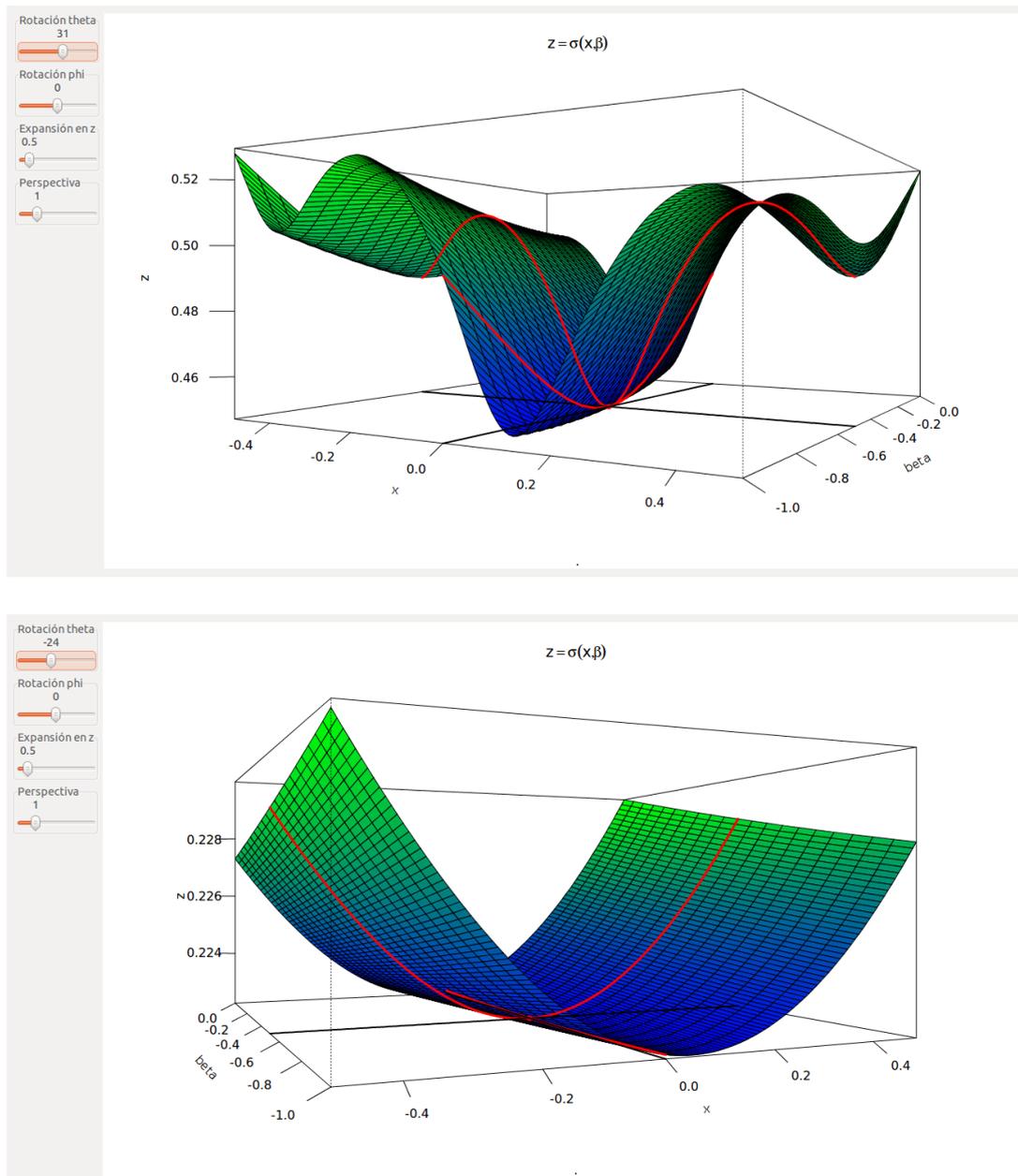


Figura 5.5: Visualización gráfica de volatilidad implícita como función de x y de β bajo el modelo de difusión con Poisson a dos lados (arriba) y el modelo Normal Inverse Gaussian (abajo). Los parámetros usados son, para el modelo de difusión con Poisson a dos lados: $\sigma = 0,05$, $a = 0,3$, $\lambda = 1$; para el modelo NIG: $\alpha = 20$, $\lambda = 1$. Otros valores: $T = 1$, $r = 0,05$.

5.2. Aspectos numéricos

5.2.1. Cálculo del precio de opciones

Para el cálculo de una opción de compra para modelos de Lévy uno puede basarse principalmente en dos métodos. El método de Carr y Madan (ver Carr and Madan [1999]) y el método de Lewis (ver Lewis [2001]) ambos métodos se encuentran también desarrollados en Cont and Tankov [2004]. En Eberlein et al. [2009] también encontramos la valuación de opciones mediante la transformada de Fourier. El método de Lewis es el método que utilizamos a lo largo de la tesis y es explicado en la sección 0.1, a continuación describimos rápidamente el método de Carr y Madan.

Consideremos un proceso de Lévy con terna característica (γ, σ, Π) bajo la medida riesgo neutral (3), tal que para algún $\alpha > 0$

$$\int_{|y|>1} e^{(1+\alpha)y} \Pi(dy) < \infty. \quad (5.1)$$

Queremos calcular el precio de la opción dado por

$$C(K) = e^{-rT} \mathbb{E}(S_0 e^{X_T+rT} - K)^+.$$

Cómo no podemos obtener la transformada de Fourier de la función de pagos para un rango de precios de ejercicios, la idea del método es sumar y restar una función conveniente de modo de superar ese obstáculo. Consideremos

$$z_T(k) = e^{-rT} \mathbb{E}(S_0 e^{X_T+rT} - e^k)^+ - (S_0 - e^{k-rT})^+, \quad (5.2)$$

y sea $\zeta_T(v) = \int_{\mathbb{R}} e^{izk} z_T(k) dk$ la transformada de Fourier de $z_T(k)$.

Consideremos por simplicidad $S_0 = 1$. Observando que

$$z_T(k) = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} (e^{rT+x} - e^k) (\mathbf{1}_{k < x+rT} - \mathbf{1}_{k < rT}) \rho_T(x) dx,$$

donde $\rho_T(x)$ es la densidad de probabilidad de X_T .

Luego, con algo de manipulación y la condición riesgo neutral se obtiene

$$\begin{aligned} \zeta_T(v) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{e^{ivrT}(1 - e^x)}{iv + 1} - \frac{e^{x+ivrT}}{iv(iv + 1)} + \frac{e^{(iv+1)x+ivrT}}{iv(iv + 1)} \right) \rho_T(x) dx \\ &= e^{ivrT} \frac{e^{T\Psi_T(v+1)} - 1}{iv(1 + iv)}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

La condición de martingala asegura que el numerador se anula para $v = 0$. Bajo la hipótesis (5.1), el numerador de (5.3) es una función analítica y la fracción tiene límite finito cuando $v \rightarrow 0$. Por lo tanto el precio de la opción de compra se calcula invirtiendo según Fourier, la función:

$$z_T(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ivk} \zeta_T(v) dv.$$

En la igualdad (5.2), el término $(S_0 - e^{k-rT})^+$ suele sustituirse por el valor del precio de la opción bajo el modelo de Black-Scholes para un valor de σ a determinar. Este cambio tiene como consecuencia una mayor velocidad de convergencia del término correspondiente al que aparece en (5.3).

Como se mencionó antes, a lo largo de la tesis usamos el método de Lewis en lugar del de Carr y Madan, la principal razón es que la fórmula de Lewis es aplicable a varias funciones de pagos mientras que la de Carr y Madan, en principio, sólo se aplica para funciones de pago correspondientes a opciones de compra o venta (ver discusión en la sección 4.1 o directamente en Lee [2004]). Otro de los motivos por el cual optamos por el método de Lewis está relacionado con la convergencia numérica. Si bien ambos métodos se calculan de manera eficiente, utilizando el método de Lewis obtuvimos una mejor aproximación en igual relación de tiempo.

Para el método que usemos, la aproximación numérica puede ser realizada de manera eficiente mediante la transformada rápida de Fourier (FFT), siempre que necesitemos calcular el precio de la opción para una grilla de puntos y no exclusivamente para un punto específico.

La aproximación mediante FFT fue introducida en la sección 4.4.1, aquí retomamos las generalidades y nos extendemos en la obtención de la aproximación.

Para calcular el precio de una opción de compra, en términos de $x = \log(K/S_0) - rT$ usamos la igualdad (11):

$$Call(x) = -\frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\Psi(-z)}}{z^2 - iz} dz.$$

En primera instancia obtenemos una aproximación para valores de x no negativos, luego, con una traslación de los datos obtenemos una aproximación sobre una grilla arbitraria de valores de x .

A continuación cortamos la integral entre $-A/2$ y $A/2$ y tomamos una partición uniforme de $[-A/2, A/2]$ de tamaño N :

$$\begin{aligned} Call(x) &= -\frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\Psi(-z)}}{z^2 - iz} dz \\ &\approx -\frac{e^x}{2\pi} \int_{iv-A/2}^{iv+A/2} e^{izx} \frac{e^{T\Psi(-z)}}{z^2 - iz} dz \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\approx -\frac{e^x}{2\pi} \frac{A}{N} \sum_{k=0}^{N-1} w_k e^{iz_k x} \frac{e^{T\Psi(-z_k)}}{z_k^2 - iz_k} \quad (5.5)$$

donde $z_k = iv - \frac{A}{2} + k \frac{A}{N-1}$ y w_k son pesos correspondientes al método de integración numérico, por ejemplo, para el método trapezoidal tomamos $w_0 = w_{N-1} = 1/2$ y $w_k = 1$ para $k = 1, \dots, N-2$.

Si tomamos $x_n = 2\pi n \frac{N-1}{NA}$ en (5.5), obtenemos la transformada discreta de Fourier sobre los valores $x_n = 2\pi n \frac{N-1}{NA}$. Dicha transformada discreta se calcula de forma eficiente usando el algoritmo FFT, para ello debemos considerar que la cantidad de sumandos en (5.5) sea una potencia de 2, es decir $N = 2^h$, además, la grilla sobre la cual obtenemos la aproximación se relaciona con la grilla de la partición original en (5.4) obteniendo una grilla uniforme con incrementos

$$\Delta = 2\pi \frac{N-1}{NA}. \quad (5.6)$$

Por último, trabajando en términos de x , es común requerir calcular los precios para valores de x negativos (*in the money*). Para ello podemos recurrir a una propiedad de la transformada de Fourier sobre la traslación:

$$Call(x-y) = -\frac{e^{x-y}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{iz(x-y)} \frac{e^{T\Psi(-z)}}{z^2 - iz} dz \quad (5.7)$$

$$= -\frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \tilde{f}(z, y) dz, \quad (5.8)$$

donde $\tilde{f}(z, y) = e^{-(1+iz)y} \frac{e^{T\Psi(-z)}}{z^2 - iz}$. Por lo tanto, ajustando la función a integrar, obtenemos los valores de la opción de compra para una grilla arbitraria de puntos.

Si en particular queremos obtener la aproximación para ciertos valores específicos usando este método, entonces debemos ajustar N y/o A de modo que

con el incremento Δ pasemos por dichos puntos, donde además debemos contemplar que N y A están en relación directa con nuestra aproximación al valor de la opción de compra, donde por ejemplo podemos exigir una tolerancia dada. Además debemos considerar también la traslación efectuada de modo de obtener el cálculo para valores de x negativos. Estos aspectos así como el análisis del error son tratados en Croce, F. et al. [2015].

5.2.2. Cálculo de la volatilidad implícita

Una vez obtenido el valor de la opción de compra, la volatilidad implícita es obtenida según lo mostrado en la sección 0.1. Recordemos rápidamente que obtuvimos que la volatilidad implícita es el único valor de la volatilidad en el modelo de Black-Scholes que iguala el precio en dicho modelo con el precio de mercado dado.

Por tratarse de una función implícita, no tenemos forma directa de calcularla y por lo tanto debemos obtenerla mediante algún algoritmo numérico. Los dos algoritmos ensayados en esta tesis son: el método de Newton y el método de bipartición.

Es conocido que el método de Newton es más eficiente que el de bipartición, no obstante ello, para el cálculo de la volatilidad implícita en diferentes situaciones, por ejemplo en modelos irregulares como el modelo de difusión con Poisson a dos lados introducido en la sección 1.6.3 o modelos usuales como Variance Gamma, o Normal Inverse Gaussian con parámetros un tanto extremos, resultó de notoria utilidad el método de bipartición. Esto se justifica porque el modelo de Newton depende de forma importante del parámetro inicial, mientras que el método de partición es más robusto en ese aspecto (aunque más lento también). En los trabajos de visualización trabajamos con el método de bipartición exigiendo un error entre el modelo de Black-Scholes y el precio de mercado menor a 10^{-8} .

5.2.3. Calibración

Un punto importante, principalmente en los capítulos 2 y 3, es la calibración, tanto de opciones de compra como de la volatilidad implícita.

En esta sección describimos rápidamente el método usado para calibrar los

datos obtenidos del mercado real, con algunos de los modelos de Lévy indicados a lo largo de la tesis.

Una vez que podemos obtener los precios de las opciones de compra y la correspondiente volatilidad implícita para un modelo dado, la calibración se convierte en un problema de optimización bien conocido. Sin embargo, al realizar la programación hay puntos específicos que merecen la atención.

La función de error

La primera decisión al momento de calibrar datos es definir la función de error. Aquí el principal problema corresponde específicamente a los datos obtenidos. Es común que las bases de datos de opciones vengan dadas para una grilla equidistante de precios de ejercicio, sin embargo, no todos los días todas las opciones son operadas en el mercado, con lo cual los valores para los precios de ejercicio que no fueron operados son estimados por algún algoritmo que depende de quién proporciona los datos.

Por esto, sólo los datos que presentan volumen operado positivo son los más influyentes para la calibración. El problema a continuación es seleccionar la función de error adecuada, considerando que el volumen operado es una parte importante y debe considerarse en los pesos para cada opción.

Teniendo presente lo comentado antes, el primer intento para calibrar es considerar como pesos para la función de error, directamente el volumen relativo operado respecto al operado en la jornada, esto es:

$$err_1 = \sum_{i=1}^n \frac{Vol(K_i)}{\sum_{i=1}^n Vol(K_i)} \left(\xi_{obs}(K_i) - \xi_{modelo}(K_i) \right)^2, \quad (5.9)$$

donde $Vol(i)$ es el volumen efectivamente operado, $\xi_{obs}(K_i)$ y $\xi_{modelo}(K_i)$ son los valores de la opción de compra (o volatilidad implícita) reales observados y ajustados según nuestro modelo respectivamente, por último K_i con $i = 1, \dots, n$, representa los precios de ejercicios disponibles en cada fecha.

El mayor problema que presenta esta función de error es que en muchos casos, el volumen operado para una precio de ejercicio específico presenta una magnitud de orden diferente con respecto a los otros valores, provocando que el algoritmo se

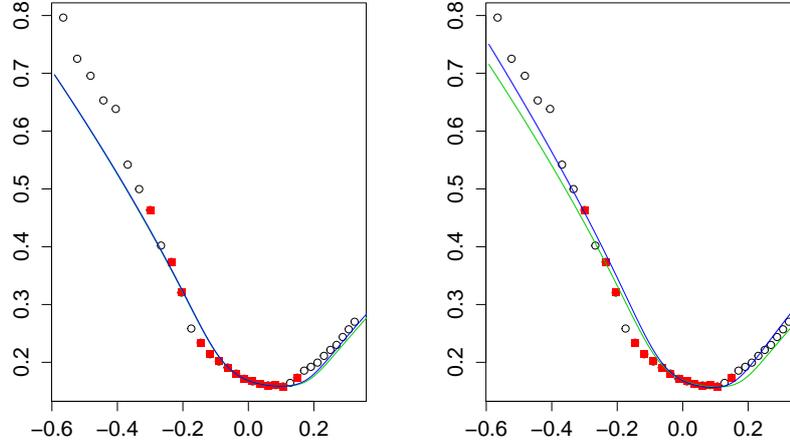


Figura 5.6: Volatilidad implícita de datos de IBM al 20 de julio de 2013, calibrados con el modelo asimétrico de Merton. Círculos: datos en la base. Cuadrados rojos: datos con volumen operado positivo. Izquierda: en la calibración sólo se consideran los datos con volumen positivo. Derecha: en la calibración se adiciona 1 al volumen operado para considerar todos los datos. Línea verde: calibración con función de error (5.9). Línea azul: calibración con función de error (5.10). Otros valores: $S_0 = 202,31$, $r = 0,035$, $T = 0,225$.

ocupe casi exclusivamente de ajustar este valor, olvidando al resto de los precios de ejercicio.

Consideramos que si bien es importante darle mayor peso a dicho precio de ejercicio al momento de calibrar, también debemos darle relativa importancia a los otros precios de ejercicios, aunque fueron operados con un volumen significativamente menor. Es por este motivo que optamos por trabajar con la siguiente función de error:

$$err = \sum_{i=1}^n \frac{\sqrt{Vol(K_i)}}{\sum_{i=1}^n \sqrt{Vol(K_i)}} \left(\xi_{obs}(K_i) - \xi_{modelo}(K_i) \right)^2, \quad (5.10)$$

que a diferencia de (5.9), considera los pesos proporcionales a la raíz cuadrada del volumen operado, dando mayor importancia a los precios de ejercicios con mayor volumen operado, pero tratando todos los datos operados en el mercado con un orden de magnitud similar.

Esta función de error permitió que los modelos se adapten más a los datos

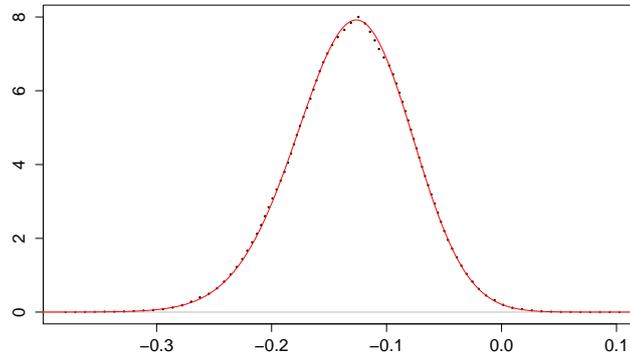


Figura 5.7: Estimación de densidad a través de 100.000 simulaciones de una variable aleatoria con distribución Normal Inverse Gaussian, con parámetros $\alpha = 150$, $\beta = -60$, $\lambda = .3$, $\mu = 0$ (línea discontinua). Línea roja, densidad real calculada mediante (5.11)

observados. En la Figura 5.6 mostramos la calibración obtenida cuando consideramos éstas dos funciones de error sobre datos de opciones de IBM. En una exploración visual no se obtienen mayores diferencias usando las funciones de error (5.9) y (5.10), sin embargo, cuando adicionamos 1 al volumen de todos los datos (con el objetivo de considerar todos los datos al momento de calibrar), las diferencias entre ambas funciones de error se hacen más notorias.

5.2.4. Simulación rápida de Procesos infinitamente divisibles.

Un elemento extra que se desprendió al momento de estudiar las coberturas, es la posibilidad de hacer la simulación de procesos de Lévy, incluso más en general, de procesos infinitamente divisibles, de forma más rápida que los usuales encontrados en la literatura (por ejemplo ver capítulo 6 en Cont and Tankov [2004]). Un método para la simulación rápida de incrementos de un proceso de Lévy se presenta en Boyarchenko [2012], el cual se basa en la descomposición de la parte de saltos del proceso en sus componentes positiva y negativa. En esta sección presentamos una vía de obtener simulaciones de procesos de Lévy, para procesos infinitamente divisibles, mediante la fórmula de Lewis. Por medio de dicha fórmula podemos encontrar una forma para calcular la función de distri-

bución de una variable aleatoria infinitamente divisible, la cual puede ser vista a través de una opción Digital.

Sea X_t un proceso infinitamente divisible con función característica $\varphi_t(z)$ definida sobre una franja paralela al eje real análogo a lo visto en 0.1. En términos de $x = \log(K/S_0) - rT$ tenemos:

$$\mathbb{Q}(X_t > x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{izx} \varphi_t(-iz)}{iz} dz,$$

donde $v > 0$, por lo tanto

$$F_t(x) = 1 + \frac{1}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} \frac{e^{izx} \varphi_t(-iz)}{iz} dz,$$

Una vez que obtenemos la función de distribución F_t de X_t , simulamos u_1, \dots, u_n de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1)$ y por tanto

$$x_i = \inf\{x : F_t(x) > u_i\}, \quad i = 1, \dots, n$$

son simulaciones *iid* de X_t .

Este método es realmente más rápido que hacer las simulaciones por caminos y nos permite simular procesos de Lévy complejos, sólo conociendo su exponente característico.

En la Figura 5.7 se obtiene la estimación de densidad a través de 100.000 simulación de una variable aleatoria con distribución Normal Inverse Gaussian, donde además se compara con la función de densidad, la cual en este modelo es conocida:

$$f(x; \alpha, \beta, \lambda, \mu) = \lambda \alpha e^{\beta(x-\mu) + \lambda \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \frac{K_1(\alpha \sqrt{\lambda^2 + (x-\mu)^2})}{\pi \sqrt{\lambda^2 + (x-\mu)^2}} \quad (5.11)$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $\alpha, \lambda > 0$, $|\beta| < \alpha$ y K_1 es la función de Bessel de tercer clase dada por:

$$K_1(w) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-1/2w(t+t^{-1})} dt.$$

5.3. Programación

En esta sección describimos las líneas generales usadas para la programación en el software R, para el cálculo del valor de la opción de compra según el método de Lewis descrito en la sección anterior.

La idea es crear una función con las variables requeridas de modo de hacer eficiente el cálculo en distintas situaciones. Para ello ahora exponemos el esquema de dicha función:

1. Especificamos una función, que llamamos *Call_Levy*, con las variables requeridas, donde hemos especificado algunos valores por defecto:

```
Call_Levy<-function(S_0=1+0*x,r=.05+0*x,T=1+0*x,sigma=.1+0*x,
parametros=c(0.1,-0.5,1)+0*x,A=800+0*x,N=2^18+0*x,
modelo="Merton_a",v=1.3+0*x,sal=.7+0*x,sali=-sal+0*x,x=0)
```

2. Definimos la función característica según el modelo elegido, observar que los parámetros introducidos en la función deben estar en correspondencia con el modelo elegido:

```
if(modelo=="modelo_elegido"){FuncCaract<-function(z)...}
```

3. Obtenemos la grilla y calculamos los valores usando FFT para la grilla especificada

```
z<-seq(-A/2,A/2,len=N)
tr=-sali
f<-exp(-(1i*z-v+1)*tr)*FuncCaract(-z-1i*v)/((1i*z-v)
*(1+1i*z-v))
n=(N-1)*(z+A/2)/A;f[1]=0.5*f[1];f[N]=0.5*f[N]
u=2*pi*n*(N-1)/(N*A)
CT=S_0*(1/(2*pi))*A/N*fft(f,inverse=T)
*exp(1i*A*u/2)*exp((1-v)*(u))
xT=u-tr;x=xT[xT>sali&xT<sal];CT=CT[xT>sali&xT<sal]
```

Observemos que con las variables “sal” y “sali” determinamos el rango de valores para los que deseamos la salida, evitando así sobrecargar la memoria

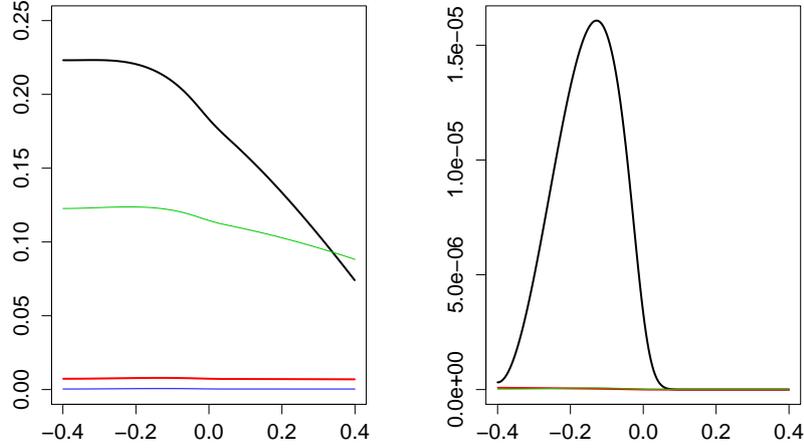


Figura 5.8: Error de aproximación del precio de la opción, según el método de Lewis con aproximación vía FFT, con el modelo de Black Scholes, usando $\Delta = 10^{-4}$ ($A = 2\pi(N - 1)/(N\Delta)$). Izquierda: negro $N = 2^{12}$, verde $N = 2^{14}$, rojo $N = 2^{16}$, azul $N = 2^{18}$. Derecha: negro $N = 2^{20}$, verde $N = 2^{22}$, rojo $N = 2^{24}$. Otros valores: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $T = 1/12$, $\sigma = 0,1$.

del PC. De esta forma, en el vector CT queda la aproximación de los valores de la opción de compra, según el método de Lewis, para los valores de $x = \log(K/S_0) + rT$ registrados en el vector “xT”.

Otra observación de utilidad es la introducción de la variable “tr”, la cual permite trasladar nuestro dominio en la transformada de Fourier para poder calcular el precio para valores no necesariamente positivos de x , esto se hace siguiendo (5.8).

En la Figura 5.8 mostramos el error cometido en términos de N cuando imponemos $\Delta = 0,001$ en (5.6) y usamos el modelo de Black-Scholes (7) (cuyo valor depende sólo de la función de distribución gaussiana, la cual asumimos de cálculo “casi” exacto).

En el cuadro 5.1 mostramos el error en $\ell_{[-0,4,0,4]}^\infty$, dado por

$$\ell_{[-0,4,0,4]}^\infty = \sup_{x \in [-0,4,0,4] \cap \mathcal{G}} |BS(x) - CL(x)|,$$

cuando variamos N y A . Aquí se observa para $\sigma = 0,1$, que por ejemplo, tomando

$N = 2^{18}$, para cualquier valor de A entre 200 y 1000, se obtiene un error aproximado de $1,2 \times 10^{-6}$. Observemos que para cada N el valor de A que minimiza el error es relativamente bajo, $A = 200$ para $N = 2^{12}, 2^{13}, 2^{14}$ y $A = 300$ para $N = 2^{15}, 2^{16}, \dots, 2^{21}$.

Es de utilidad hacer notar que para el caso $N = 2^{18}$, el cálculo del precio de la opción, para toda la grilla requerida, demora aproximadamente 0,22 segundos.

$N \setminus A$	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
2^{12}	33.81	7.44	7.74	7.89	10.00	13.01	17.74	26.48	43.31	73.83
2^{13}	33.90	3.66	3.86	3.90	3.93	4.16	4.93	5.87	6.96	8.21
2^{14}	33.94	1.89	1.93	1.95	1.96	1.97	1.98	1.98	2.21	2.49
2^{15}	33.96	1.01	0.96	0.97	0.98	0.99	0.99	0.99	0.99	0.99
2^{16}	33.98	0.57	0.48	0.49	0.49	0.49	0.49	0.50	0.50	0.50
2^{17}	33.98	0.43	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25	0.25
2^{18}	33.98	0.40	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12
2^{19}	33.99	0.39	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06
2^{20}	33.99	0.39	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03
2^{21}	33.99	0.40	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

Cuadro 5.1: Error $\ell_{[-0,4,0,4]}^\infty$ del precio de la opción, multiplicado por 10^5 , según el método de Lewis con aproximación vía FFT, con el modelo de Black-Scholes para los valores de N (filas) y A (columnas) mostrados en el cuadro . Otros valores: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $T = 1/12$, $\sigma = 0,1$. Resaltado se muestra el menor error por fila.

El cuadro 5.1 es complementado con la Figura 5.9, aquí observamos el error $\ell_{[-0,4,0,4]}^\infty$ para distintos valores de σ , resaltando el mínimo obtenido del error para cada valor de N en función de A . Es de notar que cuando la volatilidad crece, entonces, A decrece para cada N , cuando buscamos el menor error.

El análisis del error en modelos de Lévy, así como cotas para éste, han sido estudiadas en Lee [2004] y Croce, F. et al. [2015]. En el presente trabajo sólo hacemos una exploración refiriendo al lector interesado a dichos trabajos.

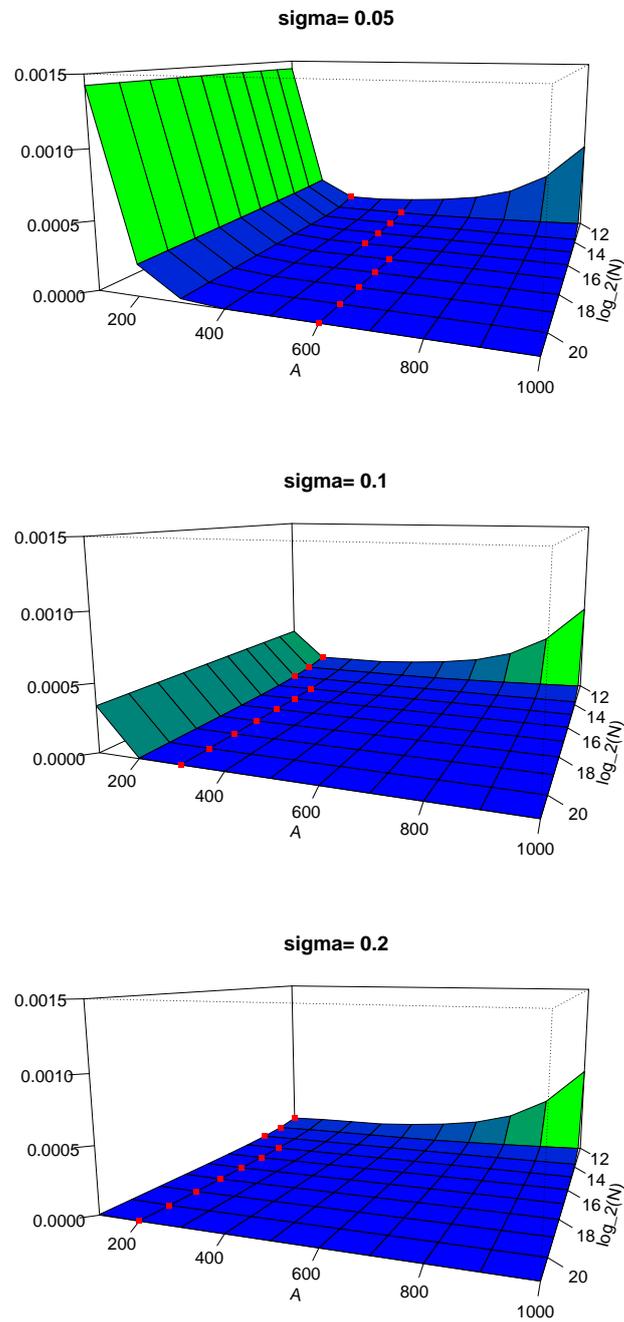


Figura 5.9: Datos según cuadro 5.1 para $\sigma = 0,05, 0,1, 0,2$. Puntos rojos indican el mínimo para cada N .

APÉNDICE A

MONOTONÍA DE LA VOLATILIDAD IMPLÍCITA EN FUNCIÓN DE LA MEDIDA DE LÉVY.

En esta sección dejamos por un instante el parámetro β y probamos un resultado general el cuál indica que la volatilidad implícita es creciente en términos de la medida de Lévy, esto es: si $\Pi_1(A) \geq \Pi_2(A)$ para todo A , entonces

$$\sigma_{imp,1}(K) \geq \sigma_{imp,2}(K).$$

En primer lugar mostraremos que la volatilidad implícita es creciente en términos de la intensidad de salto y también es creciente al agregarle una masa puntual a la medida de Lévy, bajo la restricción de conservar la propiedad de medida martingala.

Proposición A.1. *Sea $\{X_t, \mathbb{Q}\}$ un proceso de Lévy con terna característica (γ, σ, Π) , con $\mathbb{E}(e^{X_t}) = 1$. Consideremos un nuevo proceso de Lévy $\{X_t, \mathbb{Q}_{\ell,a}\}$ con terna $(\gamma_{\ell,a}, \sigma, \Pi_{\ell,a}(dy))$ donde $\Pi_{\ell,a}(dy) = \Pi(dy) + \ell\delta_a(dy)$ con $\ell > 0$ y $\mathbb{E}_{\ell,a}(e^{X_t}) = 1$. Luego*

1. *dado $\ell > 0$, si $a \geq 0$ entonces $\frac{\partial \text{Call}_{P_{\ell,a}}(x)}{\partial a} \geq 0$,*
2. *para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{\partial \text{Call}_{\mathbb{Q}_{\ell,a}}(x)}{\partial \ell} > 0$*

Demostración. Sean $\psi(z)$ y $\psi_{\ell,a}(z)$ los exponentes característicos de $\{X_t, \mathbb{Q}\}$ y $\{X_t, \mathbb{Q}_{\ell,a}\}$ respectivamente. Luego:

$$\psi_{\ell,a}(-z) = \psi(-z) + \ell[e^{-iza} - 1 + iz(e^a - 1)]$$

Observemos que para $a = 0$ y/o $\ell = 0$ ambos modelos coinciden. Además

$$\frac{\partial \psi_{\ell,a}(-z)}{\partial a} = iz\ell(e^a - e^{-iza}) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial \psi_{\ell,a}(-z)}{\partial \ell} = e^{-iza} - 1 + iz(e^a - 1) \quad (\text{A.2})$$

Usemos la fórmula de Lewis, sin pérdida de generalidad consideramos $S_0 = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} Call_{\ell,a}(x) &= \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{iz(1+iz)} dz; \\ \mathbb{E}_{\ell,a}(e^{X_T} 1_{\{X_T > x\}}) &= -\frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{1+iz} dz \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Call_{\ell,a}(x)}{\partial a} &= T \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{iz(1+iz)} \frac{\partial \psi_{\ell,a}(-iz)}{\partial a} dz \\ &= T\ell e^a \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{1+iz} - T\ell e^a \frac{e^{x-a}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{iz(x-a)} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{1+iz} dz \\ &= T\ell e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left(e^{X_T} (1_{\{X_T > x-a\}} - 1_{\{X_T > x\}}) \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \text{si } a > 0 & \quad \frac{\partial Call_{\ell,a}(x)}{\partial a} = T\ell e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left(e^{X_T} 1_{\{X_T \in (x-a, x)\}} \right) > 0 \\ \text{si } a < 0 & \quad \frac{\partial Call_{\ell,a}(x)}{\partial a} = -T\ell e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left(e^{X_T} 1_{\{X_T \in (x, x-a)\}} \right) < 0. \end{aligned}$$

Por otro lado, estudiamos la derivada respecto de ℓ ,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{Call}_{\ell,a}(x)}{\partial \ell} &= T \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{iz(1+iz)} \frac{\partial \psi_{\ell,a}(-iz)}{\partial \ell} dz \\
&= T e^a \frac{e^{x-a}}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{iz(x-a)} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{iz(1+iz)} - T \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{iz(1+iz)} dz \\
&\quad + (e^a - 1) \frac{e^x}{2\pi} \int_{iv+\mathbb{R}} e^{izx} \frac{e^{T\psi_{\ell,a}(-iz)}}{1+iz} dz \\
&= T \left[e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left(e^{X_T} - e^{x-a} \right)^+ - \mathbb{E}_{\ell,a} \left(e^{X_T} - e^x \right)^+ \right. \\
&\quad \left. - (e^a - 1) \mathbb{E}_{\ell,a} \left(e^{X_T} 1_{\{X_T > x\}} \right) \right] \\
&= T \left[e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left(e^{X_T} (1_{\{X_T > x-a\}} - 1_{\{X_T > x\}}) \right) \right. \\
&\quad \left. - e^x \mathbb{E}_{\ell,a} \left(1_{\{X_T > x-a\}} - 1_{\{X_T > x\}} \right) \right] \\
&= T e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left((e^{X_T} - e^{x-a}) (1_{\{X_T > x-a\}} - 1_{\{X_T > x\}}) \right)
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\text{si } a > 0 \quad & \frac{\partial \text{Call}_{\ell,a}(x)}{\partial \ell} = T e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left((e^{X_T} - e^{x-a}) 1_{\{X_T \in (x-a, x)\}} \right) > 0 \\
\text{si } a < 0 \quad & \frac{\partial \text{Call}_{\ell,a}(x)}{\partial \ell} = T e^a \mathbb{E}_{\ell,a} \left((e^{x-a} - e^{X_T}) 1_{\{X_T \in (x, x-a)\}} \right) > 0.
\end{aligned}$$

□

Observación A.1. A raíz de la Proposición A.1 tenemos

- De la igualdad $BS(x, \sigma_{imp}(x, \ell, a)) = \text{Call}_{\ell,a}(x)$, siendo $\partial_{\sigma} BS_c > 0$, tenemos que a mayor valor de $\text{Call}_{\ell,a}(x)$ obtenemos mayor valor de $\sigma_{imp}(x, \ell, a)$, para x y demás parámetros constantes. Por lo tanto, de la Proposición A.1 tenemos que $\text{Call}_{\ell,a}(x)$ y $\sigma_{imp}(x, \ell, a)$ son crecientes con ℓ y a .
- Dada cualquier medida no negativa ν , existen sucesiones $\{\ell_k > 0\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{a_k\}_{a \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\nu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \ell_k \delta_{a_k},$$

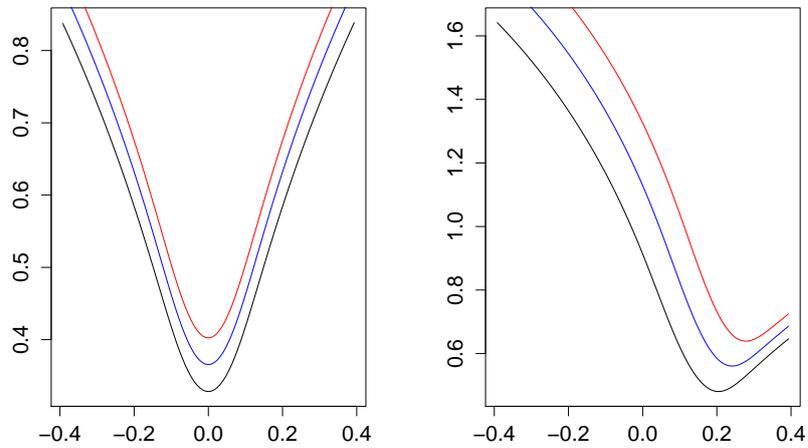


Figura A.1: Volatilidad implícita bajo el modelo asimétrico de Merton en función de λ . Izquierda: $\beta = -0,5$, derecha $\beta = (-3)$. Negro: $\lambda = 1$, azul: $\lambda = 1,3$, rojo $\lambda = 1,6$. Otros valores: $\sigma = 0,2$, $\sigma_j = 0,5$, $T = 1/12$, $r = 0,05$.

donde la convergencia es en sentido débil. Por lo tanto el precio de una opción de compra, y por ende la volatilidad implícita, son crecientes con la medida de Lévy.

En la Figura A.1 observamos en el crecimiento en términos del parámetro λ , para el modelo asimétrico de Merton, donde presentamos dos casos: simetría ($\beta = -0,5$) y asimetría put-call con $\beta = -3$.

APÉNDICE B

PROCESOS DE LÉVY

Un proceso estocástico es una familia $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ de variables aleatorias indexadas por el tiempo, el parámetro de tiempo t puede ser discreto o continuo, no obstante ello, a lo largo de la tesis siempre es continuo. Para cada realización ω , la trayectoria $X(\omega) : [0, T] \rightarrow X_t(\omega)$, define una función en el tiempo, llamada *trayectoria* del proceso. Tales procesos estocásticos pueden también ser vistos como *funciones aleatorias*: variables aleatorias que toman valores en espacios de funciones.

Para definir un proceso estocástico como funciones aleatorias necesitamos poder definir medidas sobre espacio de funciones. La elección más simple de espacio de funciones para un proceso estocástico con valores en \mathbb{R}^d , es el conjunto de todas las funciones $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, pero este espacio es demasiado grande pues contiene muchas funciones patológicas y no es fácil definir medidas en este espacio.

Los procesos estocásticos con trayectorias continuas se pueden construir como variables aleatorias definidas sobre el espacio de las funciones continuas $C([0, T], \mathbb{R}^d)$. La topología usual es definida por la norma supremo, la cual a su vez puede ser usada para definir la σ -álgebra de Borel, sobre la cual se pueden definir medidas. Sin embargo, en esta tesis trabajamos con procesos que no tienen trayectorias continuas, por lo tanto necesitamos un espacio de funciones que permite funciones discontinuas. La clase de funciones *cadlag* es una clase conveniente de funciones discontinuas.

Definición B.1 (Función *cadlag*). Una función $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ se dice *cadlag* si es continua por derecha con límite por izquierda en cada punto.

Si f es discontinua en t entonces el salto es $\Delta f(t) = f(t) - f(t^-)$.

Para cada $\varepsilon > 0$, el número de discontinuidades (saltos) en $[0, T]$ más grandes que ε es finito ($\#\{t : \Delta f(t) > \varepsilon\} < \infty$). Así una función *cadlag* tiene a lo sumo una cantidad finita de saltos más grandes que ε , y posiblemente infinitos, pero numerables, saltos menores que ε .

Es posible definir una topología y una noción de convergencia en el espacio de las funciones *cadlag*. Con esa topología y la correspondiente σ -álgebra de Borel, el espacio de funciones *cadlag* es conocido como el espacio de Skorokhod y anotado $D([0, T], \mathbb{R}^d)$ o simplemente $D([0, T])$. Una variable aleatoria con valores en $D([0, T])$ es llamado un proceso *cadlag*.

La interpretación del índice t como una variable de tiempo introduce un aspecto dinámico el cual necesita ser tomado en cuenta para definir la noción de información, causalidad y predictibilidad en el contexto de un modelo estocástico.

En un contexto dinámico, con el paso del tiempo, más información es progresivamente revelada al observador. El resultado es que muchas cantidades que son vistas como aleatorias en $t = 0$ pueden cambiar su estatus después de $t > 0$ si su valor es revelado por la información disponible en t . Debemos agregar algún componente dependiente del tiempo a la estructura de nuestro espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ para acomodar esta característica adicional.

Definición B.2 (Filtración). Una filtración o flujo de información sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ es una familia creciente de σ -álgebras $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ tal que si $0 \leq s \leq t$:

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}.$$

\mathcal{F}_t es interpretado como la información conocida al tiempo t , la cual crece con el tiempo. Naturalmente, si comenzamos con un conjunto de eventos \mathcal{F} , entonces $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$. Un espacio de probabilidad equipado con una filtración es llamado un *espacio de probabilidad filtrado*. Desde un punto de vista intuitivo, la probabilidad de ocurrencia de un evento aleatorio cambiará con el tiempo, cuanta más información sea revelada. Sin embargo, en lugar de cambiar la medida de probabilidad \mathbb{P} con el tiempo, mantenemos \mathbb{P} fija, y modelamos el impacto de la información condicionando sobre la información \mathcal{F}_t .

Un suceso $A \in \mathcal{F}_t$ es un evento de modo que dada la información \mathcal{F}_t al momento t , el observador puede decidir si A ha ocurrido o no. Un proceso cuyo valor al tiempo t es revelado por la información \mathcal{F}_t se dice *no anticipado*:

Definición B.3 (Proceso no anticipado o adaptado). *Un proceso estocástico $(X_t)_{t \in [0, T]}$ se dice no anticipado con respecto a la estructura de información $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ (o \mathcal{F}_t -adaptado), si para cada $t \in [0, T]$ el valor X_t es revelado al tiempo t : la variable aleatoria X_t es \mathcal{F}_t -medible.*

Definición B.4 (Historia de un proceso). *La historia de un proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es el flujo de información $(\mathcal{F}_t^X)_{t \in [0, T]}$ donde \mathcal{F}_t es la σ -álgebra generada por los valores pasados del proceso, completada por los conjuntos nulos:*

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s, s \in [0, t]) \bigvee \mathcal{N}.$$

Notemos que \mathcal{F}_t^X es completada con los conjuntos nulos; todos los conjuntos nulos son conocidos en \mathcal{F}_0 , esto implica que si cierta evolución de X entre 0 y T es considerada imposible, su imposibilidad ya era conocida en $t = 0$.

Consideramos ahora un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado con un flujo de información \mathcal{F}_t .

Definición B.5 (Martingala). *Un proceso $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ se dice una martingala si $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es no anticipada (adaptada a \mathcal{F}_t), $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ para todo $t \in [0, T]$ y*

$$\mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_t] = X_t \quad \forall s > t.$$

En otras palabras, la mejor predicción del futuro de una martingala es su valor presente.

Una consecuencia inmediata es que las martingalas tienen esperanza constante $E[X_t] = E[X_0]$.

Hasta aquí tenemos definido un proceso estocástico $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ por considerar cualquiera de los dos casos: como una función del tiempo con ω fijo, o como una función de ω con t fijo. Es natural considerar esos dos aspectos juntos considerando a $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ como una función sobre $[0, T] \times \Omega$. Esto requiere definir σ -álgebras y funciones medibles en este espacio.

Definición B.6 (Proceso opcional). *La σ -álgebra opcional es la sigma álgebra Σ generada sobre $[0, T] \times \Omega$ por todos los procesos cadlag adaptados (no anticipados). Un proceso $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ que es medible respecto de Σ es llamado proceso opcional.*

Con esta definición, cualquier proceso cadlag es opcional, pero las trayectorias de un proceso opcional no necesariamente son cadlag en general: proceso cadlag adaptados “generan” procesos opcionales del mismo modo que funciones continuas generan funciones medibles.

Definición B.7 (Procesos predecibles). *La σ -álgebra predecible es la σ -álgebra Σ' generada por todos los procesos adaptados continuos por izquierda sobre $[0, T] \times \Omega$. Un mapa $X : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ que es medible con respecto a Σ' es llamado un proceso predecible.*

A continuación definimos los procesos de Lévy. Una referencia general sobre estos procesos se encuentra en Jacod and Shiryaev [1987], Skorokhod [1991], Bertoin [1996], Sato [1999]. Para procesos de Lévy en Finanzas ver Boyarchenko and Levendorskiĭ [2002], Schoutens [2003] y Cont and Tankov [2004].

Definición B.8 (Procesos de Lévy). *Un proceso cadlag $\{X_t\}_{t \geq 0}$ sobre $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con valores en \mathbb{R}^d tal que $X_0 = 0$, es llamado un **Proceso de Lévy** si verifica:*

1. Incrementos independientes: *Para cada secuencia creciente de tiempos t_0, \dots, t_n , las variables aleatorias $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ son independientes.*
2. Incrementos estacionarios: *La ley de $X_{t+h} - X_t$ no depende de t .*
3. Continuidad estocástica: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{h \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X_{t+h} - X_t| \geq \varepsilon) = 0$

La tercera condición no implica que las trayectorias sean continuas: a modo de ejemplo, es verificada por el proceso de Poisson el cual tiene trayectorias constantes por tramos. Esto sirve sí para excluir procesos con saltos en tiempos fijos (no aleatorios), que pueden ser considerados como “efectos calendario”.

Definición B.9 (Distribución infinitamente divisible). *Una distribución de probabilidad F sobre \mathbb{R}^d se dice infinitamente divisible si para cualquier entero $n \geq 2$, existen n variables aleatorias, independientes e idénticamente distribuidas Y_1, \dots, Y_n tal que $Y_1 + \dots + Y_n$ tiene la distribución F .*

Si $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy, para cada $t > 0$ la distribución de X_t es infinitamente divisible. Esto pone una restricción sobre las posibles elecciones de distribuciones para X_t .

Proposición B.1 (Divisibilidad infinita y procesos de Lévy). *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy. Para cada t , X_t tiene una distribución infinitamente divisible. Recíprocamente, si F es una distribución infinitamente divisible entonces existe un proceso de Lévy (X_t) tal que la distribución de X_1 es dada por F .*

La función característica de X_t es

$$\varphi_t(z) := \varphi_{X_t}(z) = \mathbb{E}[e^{izX_t}], \quad \forall z \in \mathbb{R}^d.$$

Para $t > s$, escribiendo $X_{t+s} = X_s + (X_{t+s} - X_s)$ y usando que $(X_{t+s} - X_s)$ es independiente de X_s , obtenemos que la función $t \mapsto \varphi_t(z)$ es multiplicativa:

$$\begin{aligned} \varphi_{t+s}(z) := \varphi_{X_{t+s}}(z) &\stackrel{\text{indep}}{=} \varphi_{X_s}(z) \varphi_{X_{t+s}-X_s}(z) \\ &\stackrel{\text{id}}{=} \varphi_{X_s}(z) \varphi_{X_t}(z) = (\varphi_s \varphi_t)(z) \end{aligned}$$

La continuidad estocástica de $t \mapsto X_t$ implica en particular que $X_s \xrightarrow[s \rightarrow t]{\mathcal{L}} X_t$. Además, de la caracterización de la convergencia en ley, $\varphi_{X_s}(z) \xrightarrow[s \rightarrow t]{} \varphi_{X_t}(z)$, entonces $t \mapsto \varphi_t(z)$ es una función continua de t . Junto con la propiedad multiplicativa obtenemos que la función $t \mapsto \varphi_t(z)$ es una función exponencial:

Proposición B.2 (Función característica de un proceso de Lévy). *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy sobre \mathbb{R}^d . Existe una función continua $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, llamada el exponente característico de X , tal que:*

$$\mathbb{E}[e^{izX_t}] = e^{t\psi(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^d \tag{B.1}$$

Observación B.1. *Notemos que conocida la distribución de X_1 queda determinada entonces Ψ_1 , y por (B.1) queda determinada la función característica y con ella la distribución de X_t . El único grado de libertad para especificar un proceso de Lévy es conocer la distribución de X_t para un tiempo específico t (por ejemplo $t = 1$).*

Definición B.10 (Medida aleatoria de Poisson). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad, $E \subset \mathbb{R}^d$ y μ una medida positiva de Radon dada sobre (E, Λ) . Una medida de Poisson aleatoria sobre E con medida de intensidad μ es una medida aleatoria a valores enteros:

$$M : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathbb{N} \\ (\omega, A) \mapsto M(\omega, A),$$

tal que:

1. Para casi todo $\omega \in \Omega$, $M(\omega, \cdot)$ es una medida de Radon sobre E con valores enteros: para cada conjunto medible acotado $A \subset E$, $M(A) < \infty$ es una variable aleatoria tomando valores enteros.
2. Para cada conjunto medible $A \subset E$, $M(\cdot, A) = M(A)$ es una variable aleatoria de Poisson con parámetro $\mu(A)$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(M(A) = k) = e^{-\mu(A)} \frac{(\mu(A))^k}{k!}. \quad (\text{B.2})$$

3. Para conjuntos medibles disjuntos $A_1, \dots, A_n \in \Lambda$, las variables $M(A_1), \dots, M(A_n)$ son independientes.

Definición B.11 (Medida de Lévy). Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy sobre \mathbb{R}^d . La medida Π sobre \mathbb{R}^d definida por:

$$\Pi(A) = \mathbb{E}[\#\{t \in [0, 1] : \Delta X_t \neq 0, \Delta X_t \in A\}], \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (\text{B.3})$$

es llamada la medida de Lévy de $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$: $\Pi(A)$ es el número esperado, por unidad de tiempo, de los saltos cuyo tamaño pertenecen a A .

Dado un Proceso de Lévy X_t , $\Pi(A)$ es finita para cualquier compacto que no contenga al cero: si esto no fuese cierto, el proceso tendría un número infinito de saltos de tamaño no tendiendo a cero sobre $[0, T]$, lo que contradice la propiedad cadlag. Así Π define una medida sobre $\mathbb{R}^d - \{0\}$. Pero Π no es necesariamente una medida finita: La restricción anterior todavía permite acercarse a cero y $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ puede tener un número infinito de pequeños saltos sobre $[0, T]$. En este caso la suma de los saltos se convierte en una serie infinita y su convergencia impone alguna condición sobre la medida Π , bajo la cual obtenemos la descomposición de Lévy-Itô:

Teorema B.1 (Descomposición de Lévy-Itô). *Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy sobre \mathbb{R}^d y Π su medida de Lévy, dado por la definición B.11*

- Π es una medida de Radón sobre $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ y verifica:

$$\int_{|y| < 1} |y|^2 \Pi(dy) < \infty \quad \int_{|y| \geq 1} \Pi(dy) < \infty$$

- La medida de salto de $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, anotada por J_X , es una medida aleatoria de Poisson sobre $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ con medida de intensidad $\Pi(dx)dt$.
- Existe un vector γ y un movimiento browniano d -dimensional $(B_t)_{t \geq 0}$ con matriz de covarianzas A tal que:

$$X_t = \gamma t + B_t + X_t^\ell + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \tilde{X}_t^\varepsilon, \quad \text{donde} \quad (\text{B.4})$$

$$X_t^\ell = \int_{|y| \geq 1, s \in [0, t]} y J_X(ds \times dy) \quad y$$

$$\tilde{X}_t^\varepsilon = \int_{\varepsilon \leq |y| < 1, s \in [0, t]} y \{J_X(ds \times dy) - \Pi(dy)ds\} \equiv \int_{\varepsilon \leq |y| < 1, s \in [0, t]} y \tilde{J}_X(ds \times dy).$$

Los términos en (B.4) son independientes y la convergencia en el último término es casi segura y uniformemente en t sobre $[0, T]$.

La descomposición de Lévy-Itô implica que para cada proceso de Lévy existe un vector γ , una matriz definida positiva A y una medida positiva Π que determina su distribución. La terna (γ, A, Π) es llamada la *terna característica* o la *terna de Lévy* del proceso $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$.

Un resultado importante de la descomposición de Lévy-Itô es que cada proceso de Lévy es una combinación de un movimiento Browniano con drift y una suma, posiblemente infinita, de procesos de Poisson Compuesto independientes.

Teorema B.2 (Representación de Lévy-Khinchin). *Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy sobre \mathbb{R}^d con terna característica (γ, A, Π) , luego:*

$$\mathbb{E}[e^{z \cdot X_t}] = e^{t\Psi(z)}, \quad z \in i\mathbb{R}^d \quad (\text{B.5})$$

donde

$$\Psi(z) = \gamma \cdot z + \frac{1}{2} z \cdot A z + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{z \cdot y} - 1 - z \cdot h(y)) \Pi(dy)$$

y consideramos la función de truncación usual $h(y) = y \mathbf{1}_{\{|y| \leq 1\}}$.

Para procesos de Lévy con valores en \mathbb{R} , considerando $\sigma^2 = A$, la fórmula (B.5) toma la forma:

$$E[e^{zX_t}] = e^{t\Psi(z)}, \quad z \in i\mathbb{R}$$

$$\text{con } \Psi(z) = z\gamma + z^2\sigma^2/2 + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{zx} - 1 - zh(y))\Pi(dx).$$

Proposición B.3 (Procesos de Lévy de variación acotada). *Un proceso de Lévy es de variación acotada si y sólo si su terna característica satisface:*

$$A = 0 \quad y \quad \int_{|y| \leq 1} |y| \Pi(dy) < \infty \quad (\text{B.6})$$

Si $\{X_t\}_{t \geq 0}$ es un proceso de Lévy entonces para cualquier $t \geq 0$, la distribución de X_t es infinitamente divisible y tiene una función característica de la forma (B.5). Sin embargo, X_t no siempre tiene una densidad, si X_t es un proceso de Poisson Compuesto tenemos

$$P(X_t = 0) = e^{-\lambda t} > 0 \quad (\text{B.7})$$

entonces la distribución de probabilidad tiene un átomo en cero para todo t . Pero si $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ no es un proceso de Poisson Compuesto, entonces X_t tiene una distribución continua:

Proposición B.4 (Existencia de una densidad suave). *Sea X un proceso de Lévy a valores reales con terna de Lévy (γ, σ, Π) .*

- Si $\sigma > 0$ o $\Pi(\mathbb{R}) = \infty$ entonces X_t tiene función de distribución sobre \mathbb{R} .
- Si la medida de Lévy Π verifica

$$\exists \beta \in (0, 2), \quad \liminf_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon^{-\beta} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |y|^2 d\Pi(y) > 0 \quad (\text{B.8})$$

luego, para cada $t > 0$, X_t tiene una densidad $f_t(\cdot)$ tal que

$$f_t(\cdot) \in C^\infty(\mathbb{R}) \quad \forall n \geq 1, \quad \frac{d^n f_t}{dx^n} \Big|_{|x| \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \quad (\text{B.9})$$

Esta proposición es tomada en Cont and Tankov [2004] de Sato [1999], sin embargo en Cont y Tankov el primer punto afirma que si $\sigma > 0$ o $\Pi(\mathbb{R}) = \infty$ entonces X_t tiene función de densidad continua sobre \mathbb{R} . Por ende en este punto sugerimos la lectura de Sato [1999], secciones 27 y 28.

Proposición B.5 (Momentos exponenciales). *Sea $(X_t)_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy sobre \mathbb{R} con terna característica (γ, A, Π) y sea $u \in \mathbb{R}$. El momento exponencial $\mathbb{E}[e^{uX_t}]$ es finito para algún t o, equivalentemente, para todo $t > 0$ si y sólo si $\int_{|y| \geq 1} e^{uy} \nu(dy) < \infty$.*

La noción de martingala es crucial para la teoría de probabilidad y matemática financiera. Se pueden construir diferentes martingalas desde procesos de Lévy usando su propiedad de incrementos independientes.

Proposición B.6. *Sea $\{X_t\}_{t \geq 0}$ un proceso de Lévy sobre \mathbb{R} con terna característica (γ, σ, Π) . El proceso $\exp(X_t)$ es una martingala si y sólo si $\int_{|y| \geq 1} e^y \Pi(dx) < \infty$ y*

$$\gamma + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^{+\infty} (e^y - 1 - h(y)) \Pi(dy) = 0 \quad (\text{B.10})$$

B.1. Equivalencia de medidas

Recordemos que si \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ son medidas de probabilidad equivalentes, entonces existe una variable aleatoria positiva, llamada la densidad de $\tilde{\mathbb{P}}$ con respecto a \mathbb{P} y denotada $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}$ tal que para cualquier variable aleatoria Z :

$$E^{\tilde{\mathbb{P}}}[Z] = E^{\mathbb{P}} \left\{ Z \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \right\}.$$

Proposición B.7. *Sean $\{X_t, \mathbb{P}\}$ y $\{X_t, \tilde{\mathbb{P}}\}$ dos procesos de Lévy sobre \mathbb{R} con ternas características (γ, σ, Π) y $(\gamma, \tilde{\sigma}, \tilde{\Pi})$. Entonces $\mathbb{P}_{\mathcal{F}_t}$ y $\tilde{\mathbb{P}}_{\mathcal{F}_t}$ son equivalentes para todo t (o equivalentemente para algún $t > 0$) si y sólo si las tres siguientes condiciones son satisfechas:*

1. $\sigma = \tilde{\sigma}$.
2. Las medidas de Lévy son equivalentes con

$$\int_{-\infty}^{\infty} (e^{\phi(y)/2} - 1)^2 \Pi(dy) < \infty$$

donde $\phi(y) = \ln \left(\frac{d\tilde{\Pi}}{d\Pi} \right)$

3. Si $\sigma = 0$ entonces debemos además tener

$$\tilde{\gamma} - \gamma = \int_{-1}^1 x(\tilde{\Pi} - \Pi)(dx).$$

Cuando \mathbb{P} y $\tilde{\mathbb{P}}$ son equivalentes, la derivada de Radon-Nikodym es

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}|_{\mathcal{F}_t}} = e^{U_t}$$

donde

$$U_t = \eta X_t^c - \frac{\eta^2 \sigma^2 t}{2} - \eta \gamma t + \lim_{\varepsilon \searrow 0} \left(\sum_{\substack{s \leq t \\ |\Delta X_s| > \varepsilon}} \phi(\Delta X_s) - t \int_{|y| > \varepsilon} (e^{\phi(y)} - 1) \Pi(dy) \right).$$

Aquí (X_t^c) es la parte continua de (X_t) y η es tal que

$$\tilde{\gamma} - \gamma - \int_{-1}^1 x(\tilde{\Pi} - \Pi)(dx) = \sigma^2 \eta$$

si $\sigma > 0$ y cero si $\sigma = 0$.

U_t es un proceso de Lévy con terna característica (γ_U, a_U, Π_U) dada por:

$$\begin{aligned} a_U &= \sigma^2 \eta, \\ \Pi_U &= \Pi \phi^{-1}, \\ \gamma_U &= -\frac{1}{2} a_U \eta - \int_{-\infty}^{\infty} (e^y - 1 - y 1_{|y| \leq 1}) (\Pi \phi^{-1})(dy). \end{aligned}$$

Este resultado muestra una importante característica de los modelos con saltos comparado con modelos de difusión: tenemos una considerable libertad en cambiar la medida de Lévy, reteniendo la equivalencia de medida, pero, si un componente de difusión está presente nos limita la modificación del drift.

En general se puede cambiar con libertad la distribución de los saltos grandes, pero uno debe ser muy cuidadoso con la distribución de los saltos pequeños (que es determinado por el comportamiento de la medida de Lévy cerca de cero). Esta

es una buena propiedad ya que saltos grandes son los únicos que son importantes para el punto de vista de valuación de opciones: ellos afectan la cola de la distribución de retorno y precios de opciones en una vía importante.

Si en la Proposición B.7 tomamos en particular $Z_t = e^{\eta X_t - t\Psi_{X_t}(\eta)}$, entonces obtenemos la conocida *transformada de Esscher*.

APÉNDICE C

REGLAS DE PRECIOS Y MEDIDAS MARTINGALA

Como ya observamos en el Apéndice B, un proceso de Lévy $\{X_t\}_{t \in [0, T]}$ puede ser considerado como una variable aleatoria sobre el espacio $\Omega = D([0, T])$ de caminos discontinuos (cadlag), equipados con una σ -álgebra \mathcal{F} que indica que elementos son medibles, o en otras palabras, que supuestos pueden hacerse sobre esos caminos. La distribución de probabilidad de $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ define una medida de probabilidad \mathbb{P}_X sobre este espacio de caminos. Ahora consideramos otro proceso de Lévy $\{Y_t\}_{t \in [0, T]}$ y \mathbb{P}_Y su distribución sobre el espacio de caminos Ω .

Entendemos la equivalencia entre las medidas de probabilidad \mathbb{P}_X y \mathbb{P}_Y , en el sentido que ellas definen el mismo conjunto de posibles escenarios,

$$\mathbb{P}_X(A) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{P}_Y(A) = 1.$$

Si \mathbb{P}_X y \mathbb{P}_Y son equivalentes, entonces los modelos estocásticos $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ e $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ definen el mismo conjunto de evoluciones posibles. Enfatizamos el hecho que estamos trabajando bajo una medida específica anotando $\{X = \{X_t\}_{t \geq 0}, \mathbb{P}\}$.

Dada una medida de probabilidad \mathbb{P} sobre el espacio de caminos $\Omega = D([0, T])$, dada cualquier variable aleatoria (dependiente del camino) $Z > 0$ sobre Ω con $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z] = 1$, la nueva medida de probabilidad definida ajustando la probabilidad de cada camino $\omega \in \Omega$ por $Z(\omega)$:

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z, \text{ es decir, } \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z1_A],$$

es equivalente a \mathbb{P} . Si restringimos nuestra atención a eventos ocurridos entre 0 y t , entonces a cada camino entre 0 y t se le ajusta el peso por $Z_t(\omega) = \mathbb{E}[Z|\mathcal{F}_t]$:

$$\frac{d\mathbb{Q}_{\mathcal{F}_t}}{d\mathbb{P}_{\mathcal{F}_t}} = Z_t \quad \forall A \in \mathcal{F}_t, \quad \mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t 1_A] \quad (\text{C.1})$$

Por construcción, $\{Z_t\}$ es una martingala estrictamente positiva verificando $\mathbb{E}[Z] = 1$. Recíprocamente, cualquier martingala positiva $\{Z_t\}_{t \in [0, T]}$ con $\mathbb{E}[Z_t] = 1$ define una nueva medida sobre el espacio de caminos dado por (C.1). Aunque el proceso definido por \mathbb{P} y \mathbb{Q} comparten los mismos caminos, ellos pueden tener muy diferentes propiedades analíticas y estadísticas. Por ejemplo, si \mathbb{P} define un proceso de Lévy $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$, el proceso Y definido por \mathbb{Q} no necesariamente es un proceso de Lévy.

Cuando $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ e $Y = \{Y_t\}_{t \geq 0}$ son ambos procesos de Lévy, la equivalencia de sus medidas da relaciones entre sus parámetros. Dos procesos estocásticos pueden definir medidas equivalentes sobre escenarios mientras que tienen diferentes propiedades estadísticas.

Los cambios de medida equivalentes juegan un importante rol en la teoría de arbitraje de precios. Dos conceptos importantes para nosotros son la ausencia de arbitraje, la cual impone limitaciones en como los instrumentos ponen un precio en un mercado; y la noción de riesgo neutral, que representa el precio de cualquier instrumento en un mercado libre de arbitraje como su pago esperado descontado bajo una apropiada medida de probabilidad llamada de “riego-neutral”. Esos dos conceptos son expresados en términos matemáticos usando la noción de cambio de medida.

Consideremos un mercado cuya posible evolución entre 0 y T son descritas por un espacio de escenarios (Ω, \mathcal{F}) : \mathcal{F} contiene todas las declaraciones que pueden ser hechas sobre el comportamiento de los precios entre 0 y T . Los activos subyacentes pueden ser descritos por un proceso no anticipado (cadlag):

$$S : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d+1} \\ (t, \omega) \mapsto (S_t^0(\omega), S_t^1(\omega), \dots, S_t^d(\omega)) \quad (\text{C.2})$$

donde $S_t^i(\omega)$ representa el valor de un activo i al tiempo t en el escenario ω y

$S_t^0(\omega)$ es un numerario. Un ejemplo típico de numerario es una cuenta corriente con tasa de interés r : $S_t^0 = \exp(rt)$. El descuento es hecho usando el numerario S_t^0 : para cualquier portafolio con valor V_t , el valor descontado es definido por:

$$\tilde{V}_t = \frac{V_t}{S_t^0}$$

y $B(t, T) = S_t^0/S_T^0$ es llamado el factor de descuento. En el caso en que el numerario es $S_t^0 = \exp(rt)$, el factor de descuento es simplemente dado por $B(t, T) = \exp[-r(T - t)]$. Anotamos con $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ la información generada por la historia del activo hasta t . \mathcal{F}_0 no contiene información y $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$ es la historia de todos los activos hasta T . Un reclamo contingente con vencimiento T puede ser representado especificando su pago final $H(\omega)$ en cada escenario: como H es revelado en T , entonces es una función \mathcal{F}_T medible $H : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. En la práctica, uno no considera todos los reclamos contingentes pero son posibles varias elecciones de subclases de pagos con ciertas propiedades. Anotamos al conjunto de reclamos contingentes de interés con \mathcal{H} . Por supuesto, los activos subyacentes pueden ser vistos como reclamos contingentes particulares cuyo pago es dado por el valor final S_T^i : por lo tanto es natural asumir $S_T^i \in \mathcal{H}$. Otros ejemplos son opciones de compra y de venta europeas: $H = (K - S_T^i)^+$, $H = (K - S_T^i)^-$ y opciones dependientes de los caminos, donde H puede depender sobre todo del recorrido del subyacente $H(\omega) = h(S_t(\omega), t \in [0, T])$.

Un problema central en este contexto es el problema de valuación: ¿cómo atribuimos una noción de “valor” a cada reclamo contingente $H \in \mathcal{H}$? Una regla de precios (también llamado operador de valuación) es un procedimiento que atribuye a cada reclamo contingente $H \in \mathcal{H}$ un valor $\Pi_t(H)$ en cada punto del tiempo.

Consideremos ahora los siguientes supuestos:

- $\Pi_t(H)$ es un proceso no anticipado,
- un reclamo con un pago positivo debe tener un valor positivo:

$$\forall \omega \in \Omega, H(\omega) \geq 0 \Rightarrow \forall t \in [0, T], \Pi_t(H) \geq 0. \quad (\text{C.3})$$

- el valor de un portafolio es dado por la suma (quizá infinita) de los valores de sus componentes:

$$\Pi_t(\sum H_j) = \sum \Pi_t(H_j). \quad (\text{C.4})$$

Admitiendo los supuestos anteriores se obtiene:

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[H | \mathcal{F}_t]. \quad (\text{C.5})$$

Por lo tanto tenemos que cualquier fijación de precios Π_t , lineal, consistente con el tiempo y verificando alguna propiedad de continuidad es dada por una esperanza condicional descontada con respecto a alguna medida \mathbb{Q} .

Asumamos ahora que, además de los escenarios de mercado Ω, \mathcal{F} y el flujo de información \mathcal{F}_t , conocemos algo sobre la probabilidad de ocurrencia de esos escenarios, representado por una medida de probabilidad \mathbb{P} . \mathbb{P} representa aquí cualquiera de las dos probabilidades “objetivo”, de escenarios futuros o la vista subjetiva de un inversor. ¿Qué límites adicionales, una regla de precios dada por (C.5), debe verificar para que sea compatible con esta vista estadística de la evolución futura del mercado?

Un requisito fundamental para una regla de precios es que ésta no genere oportunidad de arbitraje. Una oportunidad de arbitraje es una estrategia auto financiada ϕ que puede conducir a una ganancia final positiva, sin ninguna probabilidad de pérdida intermedia:

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0, T], V_t(\phi) \geq 0) = 1, \quad \mathbb{P}(V_T(\phi) > V_0(\phi)) \neq 0.$$

Una consecuencia de ausencia de arbitraje es la *ley de un sólo precio*: dos estrategias auto financiadas con el mismo pago final deben tener el mismo valor en todos los tiempos, en otro caso la diferencia puede generar un arbitraje.

Consideremos ahora un mercado donde los precios son dados por una regla de precios como en (C.5) representada por alguna medida de probabilidad \mathbb{Q} . Considere un evento A tal que $\mathbb{P}(A) = 0$ y una opción que paga al titular 1 (unidad del corriente) si el evento A ocurre. Como el evento A es considerado imposible, esta opción es sin valor para el inversor. Pero la regla de precio definida para \mathbb{Q} atribuye a esta opción un valor en $t = 0$ igual a:

$$\Pi_0(1_A) = e^{-rT} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[1_A] = e^{-rT} \mathbb{Q}(A).$$

Entonces la regla de precios \mathbb{Q} es coherente con la visión del inversor sólo si $\mathbb{Q}(A) = 0$. Recíprocamente, si $\mathbb{Q}(A) = 0$ entonces la opción con pago $1_A \geq 0$ es considerada sin valor; si $\mathbb{P}(A) \neq 0$ entonces adquiriendo esta opción (gratis) conducirá a un arbitraje. Entonces, la compatibilidad de la regla de precios \mathbb{Q} con el modelo estocástico \mathbb{P} implica que \mathbb{Q} y \mathbb{P} sean equivalentes: ellas definen el mismo conjunto de eventos posibles:

$$\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} : \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0. \quad (\text{C.6})$$

Consideremos ahora un activo S^i cotizado a precio S_t^i . Este activo puede ser tenido hasta T , generando un pago final S_T^i o ser vendido por S_t^i : la resultante suma invertida a la tasa de interés r generará una riqueza terminal de $e^{r(T-t)}S_t^i$. Esas dos estrategias “compra y mantengo” son auto financiadas y tiene el mismo pago final entonces ellas deben tener el mismo pago al tiempo t :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[S_T^i | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{r(T-t)}S_t^i | \mathcal{F}_t] = e^{r(T-t)}S_t^i. \quad (\text{C.7})$$

Dividiendo por $S_T^0 = e^{rT}$ obtenemos:

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{S_T^i}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \right] = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \text{ esto es } \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\hat{S}_T^i | \mathcal{F}_t] = \hat{S}_t^i \quad (\text{C.8})$$

Por lo tanto la ausencia de arbitraje implica que el valor descontado $\hat{S}_t^i = e^{-rt}S_t^i$ del activo negociado es una martingala con respecto a la medida de probabilidad \mathbb{Q} . Una medida de probabilidad que verifique (C.6) y (C.8) es llamada una *medida martingala equivalente*. Hemos mostrado que cualquier regla de precios libre de arbitraje es dada por una medida martingala equivalente.

Recíprocamente, es fácil ver que cualquier medida martingala equivalente \mathbb{Q} define una regla de precios libre de arbitraje vía (C.5).

Aquí tenemos una correspondencia uno a uno entre reglas de precio libre de arbitraje y medidas martingalas equivalentes:

existe una regla de precios libre de arbitraje sobre $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$
 \Updownarrow
 existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ sobre los escenarios de mercado tal
 que el precio de un activo negociado es martingala.

Proposición C.1 (Fijación de precios según riesgo neutral). *En un mercado descrito por una medida de probabilidad \mathbb{P} sobre los escenarios, cualquier regla de precios lineal y libre de arbitraje Π puede ser representada como*

$$\Pi_t(H) = e^{-r(T-t)} E^{\mathbb{Q}}[H|\mathcal{F}_t], \quad (\text{C.9})$$

donde \mathbb{Q} es una medida martingala equivalente: la medida de probabilidad sobre los escenarios de mercado tal que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \sim \mathbb{Q} : \quad & \forall A \in \mathcal{F} \quad \mathbb{Q}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = 0 \\ & \text{y} \quad \forall i = 1 \dots d, \quad E^{\mathbb{Q}}[\hat{S}_T^i | \mathcal{F}_t] = \hat{S}_t^i. \end{aligned}$$

Desde ahora, asumimos que hay una regla de precios libre de arbitraje/ medida martingala equivalente, lo cual no es obvio en un modelo dado. Los argumentos de arriba muestran que si una medida martingala equivalente existe, entonces el mercado es libre de arbitraje. El resultado recíproco es más difícil de mostrar, algunas veces es llamado “Teorema fundamental de fijación de precios de activos”:

Proposición C.2 (Teorema fundamental de fijación de precios de activos). *El modelo de mercado definido por $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ y los precios de activo $(S_t)_{t \in [0, T]}$ es libre de arbitraje si y sólo si existe una medida de probabilidad $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tal que el activo descontado $(\hat{S})_{t \in [0, T]}$ es martingala con respecto a \mathbb{Q} .*

Proposición C.3 (Ausencia de arbitraje en modelos de Lévy). *Sea $\{X, \mathbb{P}\}$ un proceso de Lévy. Si las trayectorias de $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ no son crecientes c.s. ni decrecientes c.s., entonces el modelo exp-Lévy dado por $S_t = e^{rt+X_t}$ es libre de arbitraje: existe una medida de probabilidad \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} tal que $(e^{-rt}S_t)_{t \in [0, T]}$ es una \mathbb{Q} -martingala, donde r es la tasa de interés.*

En otras palabras, el modelo exponencial-Lévy es libre de arbitraje en los siguientes casos (no excluyentes):

- X tiene componente gaussiano no nulo: $\sigma > 0$.
- X tiene variación infinita $\int_{-1}^1 |x| \Pi(dx) = \infty$.
- X tiene saltos positivos y negativos.
- X tiene saltos positivos y drift negativo o saltos negativos y drift positivo.

Además de la idea de ausencia de arbitraje, otro concepto importante originado en el modelo de Black Scholes es el concepto de cobertura perfecta: una estrategia auto financiada (ϕ_t^0, ϕ_t) se dice de *cobertura perfecta* (o una replicación) para un reclamo contingente H si

$$H = V_0 + \int_0^T \phi_t dS_t + \int_0^T \phi_t^0 dS_t^0 \quad \mathbb{P} - c.s. \quad (\text{C.10})$$

Por ausencia de arbitraje, si existe una estrategia de replicación, entonces V_0 es única, pues dos replicaciones con diferente capital inicial dan lugar a un posible arbitraje.

Un mercado se dice *completo* si cualquier reclamo contingente admite un portafolio replicado: para cualquier $H \in \mathcal{H}$ existe una estrategia auto financiada (ϕ_t^0, ϕ_t) tal que se cumple (C.10) con probabilidad 1 bajo \mathbb{P} .

Proposición C.4 (Segundo Teorema fundamental de fijación de precios de activos.). *Un mercado definido por los activos $(S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)_{t \in [0, T]}$, descrito como un proceso estocástico sobre $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$ es completo si y sólo si hay una única medida martingala \mathbb{Q} equivalente a \mathbb{P} .*

Este teorema establece la equivalencia entre la noción financiera de mercado completo- la posibilidad de una cobertura perfecta para cualquier reclamo contingente- y la unicidad de una medida martingala equivalente, la cual es una propiedad matemática del modelo estocástico subyacente. El teorema se cumple como se ha indicado antes en modelos de tiempo discreto. En modelos de tiempo continuo uno tiene que definir cuidadosamente el conjunto de estrategias admisibles, reclamo contingente y la noción de “medida martingala”. Desafortunadamente en el caso donde S tiene saltos no acotados, el cual es el caso de la mayoría de los modelos Lévy exponenciales, una formulación rigurosa es bastante difícil y requiere el uso de la noción de “ σ - martingala”. Cherny y Shiryaev presentan un ejemplo, aunque no muy realista, de un modelo completo para el cual no existe una medida martingala. No haremos uso de esas sutilezas en lo siguiente, esto sugiere la siguiente “equivalencia”, que debe entenderse en sentido amplio:

Mercados completos:

cualquier reclamo contingente $H \in \mathcal{H}$ puede ser representado como el valor final de una estrategia auto financiada: $H = E[H] + \int_0^T \phi_t dS_t$

\Updownarrow

hay unicidad de la medida martingala equivalente:
existe una única medida de probabilidad $\mathbb{Q} \sim \mathbb{P}$ tal que los activos descontados son \mathbb{Q} -martingalas.

Mientras la mayoría de los modelos estocásticos usados en valuación de opciones son libre de arbitraje, sólo unos pocos de esos modelos son completos: modelos de volatilidad estocástica y modelos Lévy exponenciales, caen en la categoría de modelos incompletos.

¿La completación del mercado es una propiedad deseable en un modelo de valuación de opciones?. Desafortunadamente, cobertura perfecta no existe en la práctica. Entonces si un modelo afirma que la opción puede ser perfectamente cubierta, es probable que dé una visión distorsionada del carácter aleatorio de las operaciones con opciones, desestimando el riesgo inherente al firmar una opción.

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Gráficos de densidad (izquierda), precio de una opción de compra (centro) y volatilidad implícita (derecha) bajo el modelo Normal Inverse Gaussian (arriba) y el modelo de Merton (abajo). Para el modelo Normal Inverse Gaussian tomamos: en negro $\alpha = 70$, $\beta = -7$, $\lambda = 1$, en rojo $\alpha = 70$, $\beta = -10$, $\lambda = 1$. Para el modelo de Merton tomamos: $\sigma = 0,1$, $\sigma_J = 0,1$, $\mu_J = -0,07$, $\lambda = 0,5$, en rojo $\sigma = 0,1$, $\sigma_J = 0,1$, $\mu_J = -0,1$, $\lambda = 0,5$. Otros parámetros: $T = 1$, $r = 0,05$, $S_0 = 1000$ 20
 - 1.1. Volatilidad implícita en función de $x = \log(K/S_0) - rT$, para una opción de IBM al 12 de enero de 2011 con vencimiento 12 de febrero de 2011. 30
 - 1.2. Volatilidad implícita para el modelo Variance Gamma como función de x y β . Otros parámetros son: $\alpha = 5$, $\lambda = 1$, $T = 1$, $r = 0,05$ 35
 - 1.3. Volatilidad implícita del modelo Variance Gamma en términos de $x = \log(K/S_0) - rT$. Línea punteada $\beta = -0,5$. Línea continua: Arriba a la izquierda $\beta = -1,5$, arriba a la derecha $\beta = -1$, abajo a la izquierda $\beta = 0$, abajo a la derecha $\beta = 0,5$. Otros parámetros son: $\alpha = 4$, $\delta = 2$, $T = 1$, $r = 0,05$ 49
-

1.4.	Volatilidad implícita bajo el modelo asimétrico de Merton con: $T = 1$, $r = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $\lambda = 2$, $\sigma_J = 0,2$. Línea continua $\beta = -0,5$, Línea punteada: $\beta = -0,6$, línea discontinua: $\beta = -0,4$.	51
1.5.	Volatilidad implícita bajo proceso de difusión con Poisson a dos lados: $\sigma = 0,01$, $a = 0,5$ y $\lambda = 2$. Línea continua: $\beta = -0,5$, línea discontinua: $\beta = -0,4$.	53
1.6.	Volatilidad implícita bajo proceso de difusión con Poisson a dos lados: $\sigma = 0,01$, $a = 0,1$, $\lambda = 2$, $T = 1$ y $r = 0,05$. Línea continua: $\beta = -0,5$, línea punteada: $\beta = 1$ y línea discontinua: $\beta = 3$.	53
2.1.	Volatilidad implícita bajo el modelo asimétrico de Merton calibra- do para datos de IBM al 20 de julio de 2013 con vencimiento 10 de octubre de 2013. Puntos: datos reales, línea continua: modelo	66
2.2.	Varianza del precio de una opción de compra sobre los datos co- rrespondientes a la figura 2.1, en función de los días desde t_0 igual al 20 de julio de 2013 y el precio de ejercicio.	66
2.3.	Portafolios neutralizados para una opción de compra. Izquierda: opción emitida el 13 de marzo de 2006 ; derecha: opción emitida el 24 de abril de 2006, sobre SP&500. Azul: portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral. Rojo: portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral. Punto circular: valor de la opción emitida y del portafolio al día de emisión. Línea vertical: nuevo precio del activo luego de tres días.	72
2.4.	Estimación de densidad de ganancias y pérdidas según los portafolios, para una opción de compra con precio de ejercicio correspon- diente a $x = 0$ (arriba), $x = -0,01$ (medio), $x = 0,01$ (abajo); so- bre SP&500 del 2006. Línea azul: portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, línea roja: portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral, línea negra: portafolio sin cubrir. Tiempo para re-evaluado luego de neutralizado el portafolio: izquierda 1 días, centro 3 días, derecha 7 días.	73
2.5.	Evolución de la variación relativa de los parámetros del modelo NIG para datos de SP&500 del año 2006. Arriba: variación de α ; centro: variación de β ; abajo: variación de λ .	79

3.1. Asimetría estadística como función de β con saltos uniformes sobre $[-1, 1]$: $\Pi_0(dy) = \mathbf{1}_{ y <1}dy$	90
3.2. Arriba: Volatilidad implícita para una opción de compra de S&P500 al 30 de agosto de 2006. Días al vencimiento $T_1 = 17$, $T_2 = 52$, $T_3 = 80$, $T_4 = 108$, $T_5 = 199$ y $T_6 = 290$. Abajo: curva $\beta(t)$ para un proceso aditivo con modelo base NIG, calibrada para la volatilidad implícita de arriba.	98
3.3. Curva $\beta(t)$ media para datos S&P500 correspondientes a todos los miércoles de 2006 calibrados con un proceso aditivo con base NIG.	99
4.1. Griegas en términos de $x = \ln(K/S_0) - rT$ para el modelo de Merton con parámetros igual a los del Cuadro 4.2 (línea continua). Línea discontinua: Modelo Black-Scholes con volatilidad igual a la volatilidad implícita en $x = 0$ ($\sigma_{imp}(0) \approx 0,137$).	125
4.2. Sensibilidades en términos de $x = \ln(K/S_0) - rT$ para el modelo de Merton con parámetros igual a los de el Cuadro 4.3.	127
5.1. Visualización gráfica de volatilidad implícita y su calibración con el modelo asimétrico de Merton sobre datos de IBM, usando el paquete gWidget en R.	134
5.2. Visualización gráfica de volatilidad implícita bajo el modelo de asimétrico de Merton. Negro: $\beta = -0,5$, rojo: variación cuando β aumenta o disminuye.	135
5.3. Visualización gráfica de volatilidad implícita bajo el modelo Poisson a dos lados. Negro: $\beta = -0,5$, rojo: variación cuando β aumenta.	137
5.4. Visualización gráfica de volatilidad implícita bajo el modelo de asimétrico de Merton (arriba) y el modelo de Merton (abajo). Negro: $\beta = -0,5$, rojo $\beta = -0,3, -0,4, -0,6, -0,7$	138

- 5.5. Visualización gráfica de volatilidad implícita como función de x y de β bajo el modelo de difusión con Poisson a dos lados (arriba) y el modelo Normal Inverse Gaussian (abajo). Los parámetros usados son, para el modelo de difusión con Poisson a dos lados: $\sigma = 0,05$, $a = 0,3$, $\lambda = 1$; para el modelo NIG: $\alpha = 20$, $\lambda = 1$. Otros valores: $T = 1$, $r = 0,05$ 139
- 5.6. Volatilidad implícita de datos de IBM al 20 de julio de 2013, calibrados con el modelo asimétrico de Merton. Círculos: datos en la base. Cuadrados rojos: datos con volumen operado positivo. Izquierda: en la calibración sólo se consideran los datos con volumen positivo. Derecha: en la calibración se adiciona 1 al volumen operado para considerar todos los datos. Línea verde: calibración con función de error (5.9). Línea azul: calibración con función de error (5.10). Otros valores: $S_0 = 202,31$, $r = 0,035$, $T = 0,225$ 145
- 5.7. Estimación de densidad a través de 100.000 simulaciones de una variable aleatoria con distribución Normal Inverse Gaussian, con parámetros $\alpha = 150$, $\beta = -60$, $\lambda = ,3$, $\mu = 0$ (línea discontinua). Línea roja, densidad real calculada mediante (5.11) 146
- 5.8. Error de aproximación del precio de la opción, según el método de Lewis con aproximación vía FFT, con el modelo de Black Scholes, usando $\Delta = 10^{-4}$ ($A = 2\pi(N - 1)/(N\Delta)$). Izquierda: negro $N = 2^{12}$, verde $N = 2^{14}$, rojo $N = 2^{16}$, azul $N = 2^{18}$. Derecha: negro $N = 2^{20}$, verde $N = 2^{22}$, rojo $N = 2^{24}$. Otros valores: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $T = 1/12$, $\sigma = 0,1$ 149
- 5.9. Datos según cuadro 5.1 para $\sigma = 0,05, 0,1, 0,2$. Puntos rojos indican el mínimo para cada N 151
- A.1. Volatilidad implícita bajo el modelo asimétrico de Merton en función de λ . Izquierda: $\beta = -0,5$, derecha $\beta = (-3)$. Negro: $\lambda = 1$, azul: $\lambda = 1,3$, rojo $\lambda = 1,6$. Otros valores: $\sigma = 0,2$, $\sigma_j = 0,5$, $T = 1/12$, $r = 0,05$ 156

ÍNDICE DE CUADROS

- 2.1. Media y varianza de Ganancias y pérdidas, para portafolios en base a una opción de compra con precio de ejercicio correspondiente a $x = 0$ (arriba), $x = -0,01$ (centro) y $x = 0,01$ (abajo); luego de 1 día de construido el portafolio (izquierda), 3 días (centro), 7 días (derecha); sobre SP&500 del 2006. 75
- 2.2. Variación relativa en porcentaje (+ aumento, - disminución) del riesgo del portafolio $\Delta\mathcal{B}$ -neutral respecto del portafolio $\Delta\Gamma$ -neutral, medida respecto de la varianza, para portafolios en base a una opción de compra con precio de ejercicio correspondiente a $x = 0$ (arriba), $x = -0,01$ (centro) y $x = 0,01$ (abajo); luego de 1 día de construido el portafolio (izquierda), 3 días (centro), 7 días (derecha); sobre SP&500 del 2006. 76
- 2.3. Desviación estándar de la evolución relativa de los parámetros del modelo NIG al re-calibrar luego de uno (izquierda), tres (centro) y siete (derecha) días, sobre SP&500 del 2006. 80
- 3.1. Parámetros para el proceso aditivo con modelo base NIG, en función del tiempo, cuando se calibra una opción de compra de SP&500 al 30 de agosto de 2006 con vencimientos en días $T_1 = 17$, $T_2 = 52$, $T_3 = 80$, $T_4 = 108$, $T_5 = 199$ y $T_6 = 290$ 97
-

- 4.1. Error ℓ_∞ en el modelo Black-Scholes vía la representación de Lewis y la Transformada rápida de Fourier usando : $S_t = 1$, $r = 0,05$, $T = 1$, $\sigma = 0,1$, $A = 300$ y $N = 2^{22}$ 124
- 4.2. Griegas en el modelo de Merton con: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $x = 0$, $T = 1$, $\sigma = 0,1$, $\mu_J = -0,005$, $\sigma_J = 0,1$, $\lambda = 1$ 126
- 4.3. Sensibilidades para el modelo de Merton con: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $x = 0$, $T = 1$, $\sigma = 0,1$, $\mu_J = -0,005$, $\sigma_J = 0,1$, $\lambda = 1$ 126
- 4.4. Opción digital y griegas en el modelo de Merton con: $\delta = 0,01$, $S_0 = 100$, $K = 100$, $T = 1$, $r = 0,07$, $\sigma = 0,2$, $\mu_J = 0,05$, $\sigma_J = 0,15$ y $\lambda = 0,5$ 128
- 4.5. Griegas para el modelo Variance Gamma con: $(\rho, \nu, \theta) = (0,2, 1, -0,15)$, $r = 0,05$, $T = 1$, $S_0 = K = 100$ ($x = -0,05$). 129
- 4.6. Griegas bajo modelos de Lévy en términos de $x = \ln(K/S) - r\tau$ 130
- 5.1. Error $\ell_{[-0,4,0,4]}^\infty$ del precio de la opción, multiplicado por 10^5 , según el método de Lewis con aproximación vía FFT, con el modelo de Black-Scholes para los valores de N (filas) y A (columnas) mostrados en el cuadro . Otros valores: $S_0 = 1$, $r = 0,05$, $T = 1/12$, $\sigma = 0,1$. Resaltado se muestra el menor error por fila. 150

BIBLIOGRAFÍA

- L. Andersen and J. Andreasen. Jump-Diffusion Processes: Volatility Smile Fitting and Numerical Methods for Option Pricing. *Review of Derivatives Research*, 4:231–262, 2000. URL <http://www.springerlink.com/content/g130r7687p0101m4/fulltext.pdf>.
- D. Bates. The skewness premium: Option Pricing under Asymmetric Processes. *Advances in Futures and Options Research*, 9():51–82, 1997.
- J. Bertoin. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, Cambridge, edition, 1996.
- F. Black and M. Scholes. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81():637–659, 1973.
- M. Boyarchenko. Fast Simulation ov Lévy processes. Working Paper, 2012.
- M. Boyarchenko and S. Levendorskiĭ. Prices and sensitivities of barrier and first-touch digital options in Lévy-driven models. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 12(08):1125–1170, 2009. doi: 10.1142/S0219024909005610. URL <http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0219024909005610>.
- S. Boyarchenko and S. Levendorskiĭ. *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*. World Scientific, River Edge, NJ, edition, 2002.
- P. Carr and R. Lee. Put Call Symmetry: Extensions and Applications. *Math. Finance.*, 19(4):523–560, 2009.
-

- P. Carr and D. Madan. Option valuation using the fast Fourier transform. *Journal of Computational Finance*, 1999.
- P. Carr and L. Wu. Finite Moment Log Stable Process and Option Pricing. *Journal of Finance*, 58(2):753–777, 2003.
- P. Carr, H. Geman, Dilip B. Madan, and M. Yor. The Fine Structure of Asset Returns: An Empirical Investigation. *The Journal of Business*, 75(2):305–333, Apr. 2002a. ISSN 00219398. URL <http://www.jstor.org/stable/10.1086/338705>.
- P. Carr, H. Geman, D. Madan, and M. Yor. The Fine Structure of Assets Returns: An Empirical Investigation. *Journal of Business*, 75(2):305–332, 2002b.
- N. Chen and P. Glasserman. Malliavin Greeks without Malliavin calculus. *Stochastic Processes and their Applications*, 117(11):1689–1723, Nov. 2007. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/B6V1B-4NWWWK6-2/1/01d688f30fb8cb8094354db2ad4b9495>.
- R. Cont and P. Tankov. *Financial Modelling with Jump Processes*. Chapman & Hall /CRC Financial Mathematics Series, , edition, 2004.
- J. Cox and S. Ross. The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3:145–166, 1976.
- Crocce, F. , J. Happola, J. Kiessling, and R. Tempone. Error Analysis in Fourier Methods for Option Pricing. Working Paper, 2015.
- F. De Olivera and E. Mordecki. Computing Greeks for Lévy Models: The Fourier Transform Approach. *Trends in Mathematical Economics*, 2015a. URL <http://arxiv.org/pdf/1407.1343.pdf>.
- F. De Olivera and E. Mordecki. Smirkness Visualization in Lévy Models. Working paper, 2015b.
- F. De Olivera, E. Mordecki, and J. Fajardo. Smirkness Hedging. Working paper, 2015a.
- F. De Olivera, E. Mordecki, and J. Fajardo. Impied Volatility Smirk in Lévy Markets. Working paper, 2015b. URL http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2544108.

- B. Dupire. Pricing with a Smile. *Risk Magazine*, pages 18–20, 1994.
- E. Eberlein and K. Prause. The generalized hyperbolic model: Financial derivatives and risk measures. In *Geman, Helyette (ed.) et al., Mathematical Finance - Bachelier Congress 2000. Selected papers from the 1st world congress of the Bachelier Finance Society, Paris, France, June 29 - July 1, 2000.*, pages 245–267. Berlin: Springer. Springer Finance., 2002.
- E. Eberlein, K. Glau, and A. Papapantoleon. Analysis of Fourier transform valuation formulas and applications. *ArXiv e-prints*, Sept. 2008.
- E. Eberlein, K. Glau, and A. Papapantoleon. Analysis of Fourier transform valuation formulas and applications. *Applied Mathematical Finance 2010, Vol. 17, No. 3, 211-240*, Sept. 2009. doi: 10.1080/13504860903326669. URL <http://arxiv.org/abs/0809.3405v4>; <http://arxiv.org/pdf/0809.3405v4>.
- J. Fajardo and E. Mordecki. Symmetry and Duality in Lévy Markets. *Quantitative Finance*, 6(3):219–227, 2006.
- J. Fajardo and E. Mordecki. Skewness Premium with Lévy Processes. *Quantitative Finance*, 14:1619–1626, 2014.
- W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.
- J. Figueroa-López and S. Ólafsson. Short-time asymptotics for the implied volatility skew under a stochastic volatility model with Lévy jumps. *ArXiv e-prints*, Feb. 2015.
- G. Folland. *Real analysis: modern techniques and their applications.* Pure and applied mathematics. Wiley, 1999. ISBN 9780471317166. URL <http://books.google.com.uy/books?id=uPkYAQAIAAJ>.
- S. Foresi and L. Wu. Crash-O-Phobia: A Domestic Fear or A Worldwide Concern? *Journal of Derivatives*, 13(2), 2005.
- S. Gerhold and I. C. Gülüm. The Small-Maturity Implied Volatility Slope for Lévy Models. Preprint, available at <http://arxiv.org/abs/1310.3061>, 2014.
- P. Glasserman and Z. Liu. Sensitivity Estimates from Characteristic Functions. In *Proceedings of the 39th Conference on Winter Simulation: 40 Years! The Best is Yet to Come*, WSC '07, pages 932–940, Piscataway, NJ, USA, 2007.

- IEEE Press. ISBN 1-4244-1306-0. URL <http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1351542.1351707>.
- P. Glasserman and Z. Liu. Estimating Greeks in Simulating Lévy-Driven Models, 2008.
- J. Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ [u.a.], 6. ed., pearson internat. ed edition, 2006. ISBN 978-0-13-197705-1. URL http://gso.gbv.de/DB=2.1/CMD?ACT=SRCHA&SRT=YOP&IKT=1016&TRM=ppn+563580607&sourceid=fbw_bibsonomy.
- J. Hull and A. White. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, ():281–300, 1987.
- J. Jacod and A. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin, Heidelberg, edition, 1987.
- J. Jacod and A. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2nd. edition, 2003.
- M. Jeannin and M. Pistorius. A transform approach to compute prices and Greeks of barrier options driven by a class of Lévy processes. *Quantitative Finance*, 10(6):629–644, 2010.
- J. Kallsen and A. N. Shiryaev. The Cumulant Process and Esscher’s Change of Measure. *Finance and Stochastics*, 6():397–428, 2002.
- J. Kienitz. A Note on Monte Carlo Greeks for Jump Diffusions and other Lévy models. Working paper., 2008.
- R. W. Lee. Option Pricing by Transform Methods: Extensions, Unification, and Error Control. *Journal of Computational Finance*, 2004.
- A. L. Lewis. A simple option formula for general jump-diffusion and other exponential Lévy processes. Working paper. Envision Financial Systems and OptionCity.net Newport Beach, California, USA. Available at <http://www.optioncity.net>, 2001.
- D. Madan, P. Carr, and E. Chang. The Variance Gamma Process and Option Pricing. *European Finance Review*, 2():79–105, 1998.
- R. Merton. Option Pricing when the Underlying Stock Returns are Discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3():125–144, 1976.

-
- K.-i. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK., edition, 1999.
- W. Schoutens. *Lévy Processes in Finance: Pricing Financial Derivatives*. Wiley, New York, edition, 2003.
- A. N. Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance: Facts, Models, Theory*. World Scientific, Singapore, edition, 1999.
- A. N. Shiryaev, Y. M. Kabanov, D. O. Kramkov, and A. V. Melnikov. On the pricing of options of European and American types, II. Continuous time. *Theory of Probability and its Applications*, 39(1):61–102, 1994.
- A. V. Skorokhod. *Random Processes with Independent Increments*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, edition, 1991.
- A. Takahashi and A. Yamazaki. Efficient Static Replication of European Options under Exponential Lévy Models. CARF Working Paper, 2008.
- P. Tankov. Financial modeling with Lévy processes. Lecture notes, 2010.