



ANII



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Estudio de la convergencia del método iterativo en la resolución de la aproximación Rainbow para el propagador del quark en el modelo de Curci-Ferrari

Ignacio Castelli

Orientadores: Nicolás Wschebor y Marcela Peláez

Programa de Posgrado en Física
PEDECIBA
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Julio de 2021



ANII



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

Estudio de la convergencia del método iterativo en la resolución de la aproximación Rainbow para el propagador del quark en el modelo de Curci-Ferrari

Ignacio Castelli

Orientadores: Nicolás Wschebor y Marcela Peláez

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Física, PEDECIBA de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Directores:

Dr. Nicolás Wschebor

Dr. Marcela Peláez

Montevideo – Uruguay

Julio de 2021

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Miguel Campiglia

Dr. Lucía Duarte

Dr. Cecilia Mateu

Dr. Pablo Pais

Dr. Marcela Peláez

Montevideo – Uruguay

Julio de 2021

Agradecimientos

Este trabajo no hubiera sido posible sin la ayuda de mis tutores, Marcela Peláez y Nicolás Wschebor, a quienes les debo mucho de lo que he aprendido. Tampoco hubiera sido posible sin el apoyo de mi familia y mis amigos, en especial el de mi amigo Carlos Sánchez, con quien tuve el agrado de compartir muchas horas de estudio. A todos ellos les agradezco en estas palabras.

Agradezco a la ANII por su apoyo económico y a Facultad de Ingeniería por ofrecerme un acogedor lugar para estudiar.

RESUMEN

Estudiamos la ruptura espontánea de simetría quiral de la Cromodinámica Cuántica en el gauge de Landau. Utilizamos un modelo fenomenológico que consiste en agregarle masa a los gluones en el Lagrangiano de Faddeev-Popov. Como resultado principal obtenemos, bajo la aproximación rainbow, un método numérico eficiente que permite reproducir la ruptura espontánea de simetría quiral. Logramos una optimización de la velocidad computacional de hasta dos ordenes de magnitud respecto a los métodos estudiados previamente, lo que facilita el ajuste de parámetros del modelo bajo la aproximación rainbow.

Palabras claves:

CROMODINÁMICA-CUÁNTICA,
INTERACCIONES FUERTES, RUPTURA DE SIMETRÍA, SIMETRÍA
QUIRAL, TEORÍAS DE CAMPOS.

ABSTRACT

We study the spontaneous chiral symmetry breaking of Quantum Chromodynamics in the Landau gauge. We use a phenomenological model that consists of adding mass to the gluons in the Faddeev-Popov Lagrangian. As the main result we obtain, under the rainbow approximation, an efficient numerical method that allows to reproduce the spontaneous chiral symmetry breaking. We achieved an optimization of the computational speed of up to two orders of magnitude compared with the previously studied methods, which enables the adjustment of model parameters under the rainbow approximation.

Keywords:

QUANTUM CHROMODYNAMICS, STRONG INTERACTIONS,
SYMMETRY BREAKING, CHIRAL SYMMETRY, FIELD THEORIES.

Tabla de contenidos

1	Introducción	1
2	Fundamentos teóricos	4
2.1	Introducción al modelo fenomenológico de QCD	4
2.2	Comentarios sobre la simetría quiral para QCD con gluones ma- sivos	6
2.3	Reglas de Feynman	7
2.4	Aproximación Rainbow Improved para el propagador del quark .	11
2.4.1	Desarrollo para N_C grande	11
2.4.2	Diagramas a considerar en Rainbow Improved	16
2.5	Ecuación de recurrencia con cut-off para la el propagador del quark	18
2.6	Breve introducción al Método de Grupo de Renormalización de Gell-Mann y Low	21
2.7	Aplicación del grupo de renormalización para el cálculo del pro- pagador del quark en la aproximación Rainbow Improved	23
2.8	Constantes de acoplamiento de la interacción entre gluones y gluón-ghost	26
3	Metodología	29
3.1	Métodos de recurrencia para resolver sistemas de ecuaciones . . .	29
3.2	Modelo de juguete	31
3.3	Método para encontrar las soluciones al problema para las ecua- ciones con Grupo de Renormalización	32
4	Presentación de los datos, Análisis, Discusión	36
4.1	Estudio sin Grupo de Renormalización	36

4.2	Estudio con Grupo de Renormalización y prescripción a la escala $\mu_0 = 10\text{GeV}$	38
4.3	Estudio con Grupo de Renormalización y prescripción a la escala $\mu_0 = 1\text{GeV}$	41
5	Consideraciones finales	44
	Apéndices	46
	Apéndice A Cálculo del propagador bare del gluón	47
	Apéndice B Límite N_C grande, caso más general	50

Capítulo 1

Introducción

Las interacciones fuertes (IF) son un tipo de interacciones fundamentales de la física y son las responsables de mantener los núcleos de los átomos unidos. Las partículas que componen a los núcleos atómicos están compuestas, a su vez, por partículas más pequeñas que se denominan quarks y sus interacciones están dominadas por las IF. Las partículas mediadoras de este tipo de interacción se denominan gluones. Luego del gran éxito de las teorías cuánticas de campos para describir las interacciones electromagnéticas (mediante la Electrodinámica Cuántica (QED)), gran parte de la comunidad científica se abocó a la búsqueda de una teoría de este tipo para explicar las IF. Es por eso que uno de los resultados más importantes de la física del siglo XX fue el descubrimiento de una teoría cuántica de campos que reprodujera algunos de los aspectos peculiares de las IF. Esta teoría lleva el nombre de Cromodinámica Cuántica (Quantum Chromodynamics, QCD), que reproduce la libertad asintótica de las IF [1, 2] y permite entender la existencia de partículas que se encuentran en la naturaleza. A pesar del éxito para describir estos fenómenos, es difícil explicar varios de los aspectos de las IF a partir de QCD. Los problemas surgen cuando intentamos tratar la teoría perturbativamente a distancias comparables o mayores al radio del protón, denominadas escalas infrarrojas (IR) y es que, a estas escalas, los métodos usuales que se utilizan para calcular cantidades observables fallan. Uno de los posibles orígenes de este problema es la aparición de copias de Gribov [3, 4], que surgen debido a la repetición de términos equivalentes en los cálculos y cuya repetición no se sabe contar.

A falta de enfoques analíticos para tratar el régimen IR de QCD que se basen en primeros principios, han surgido varios enfoques, tanto numéricos como

semi-analíticos. Se han realizado simulaciones numéricas en el lattice en el espacio euclídeo (requerimiento para este tipo de enfoques) basadas en el método Monte Carlo para calcular cantidades observables. Los resultados muestran que mientras los ghosts (partículas ficticias de QCD) se comportan como no masivos en el IR, los gluones (partículas mediadoras de QCD) se comportan como partículas masivas en el IR [5]. Por otro lado, existen soluciones semi-analíticas basadas en métodos no perturbativos, como truncaciones en las ecuaciones de Schwinger y Dyson, [6, 7] (aunque no completamente justificadas) que ofrecen resultados similares a los del lattice [8, 9, 10].

Las observaciones del lattice impulsaron un nuevo enfoque perturbativo al problema del tratamiento de las IF en el IR, que nació en dos trabajos de Nicolás Wschebor y Matthieu Tissier en 2010 y 2011 [11, 12]. Este enfoque elude los problemas teóricos de tratar con las copias de Gribov, proponiendo una teoría efectiva donde los gluones son partículas masivas ya en el ultravioleta (UV). Esta teoría ya había sido trabajada en la literatura por Curci y Ferrari [13], pero descartada por presentar problemas con las pruebas usuales de unitaricidad [14] debido a que el lagrangiano no respeta la simetría BRST [15, 16].

En los trabajos iniciales de este nuevo enfoque, fueron reproducidos (a primer orden de la teoría de perturbaciones) algunos de los resultados del lattice para la teoría de Yang-Mills (QCD sin quarks) y luego QCD, [17, 18, 19], tomando como parámetros libres la masa del gluón, la masa de los quarks y la constante de acoplamiento en el UV. Los resultados alcanzados lograron describir de manera cualitativa y cuantitativa algunos de los del lattice. Sin embargo, no se lograron reproducir ni siquiera de manera cualitativa algunos otros (aún así, mejorando la calidad de los primeros). En trabajos recientes se estudió el siguiente orden de la teoría de perturbaciones en este modelo, solucionando alguno de estos problemas [20, 21]. Además, los resultados en el siguiente orden permitieron mejorar los ajustes que se habían obtenido en al primer orden perturbativo, lo que es un punto a favor del modelo.

Aún así, estos trabajos no permiten solucionar uno de los problemas más importantes, la peculiar característica de las IF de la generación de masa de los quarks en el IR. Esta generación de masa permite que, a partir de quarks livianos, se puedan componer partículas ligadas de masa mucho mayor. El fenómeno está relacionado con la ruptura espontánea de una simetría denominada quiral [22] y solo puede ser capturado al considerar un número infinito

de términos perturbativos, por lo que los cálculos en los trabajos mencionados fallan en describir la generación de masa. Debido a las características del modelo, es posible considerar una aproximación conocida como desarrollo en $1/N_C$, donde N_C está asociado con la simetría de gauge de la teoría. Cada orden de este desarrollo, permite descartar un número infinito de términos. Aún así, esto no es suficiente, debido a que no se saben sumar los términos que sobreviven. Debido a observaciones obtenidas en el lattice (simulaciones numéricas) el equipo de trabajo pudo obtener un esquema mejorado, que sí permite llegar a ecuaciones que se pueden tratar numéricamente [23, 24]. Esta aproximación recibe, en su primer orden, el nombre de aproximación Rainbow (ya que coincide con las ecuaciones Rainbow conocidas previamente [25, 26]) y la suma de sus términos reproduce la generación de masa en el IR. A partir de estos resultados se pueden ajustar los datos del lattice de la masa del quark, y lo que se conoce como función de vestido del quark. Mientras que con la aproximación Rainbow los ajustes para la masa del quark son muy buenos, la calidad de los ajustes a su función de vestido es mala. Esto puede mejorarse en trabajos futuros como se menciona en la sección 5. Otro problema mayor de la esta técnica es que los métodos numéricos utilizados en los trabajos son muy poco eficientes. La convergencia a las soluciones es muy lenta, lo que imposibilita poder ajustar de manera conjunta los datos de otras cantidades con las del lattice, y los datos de la masa del quark y su función de vestido utilizando la aproximación Rainbow.

El objetivo de este trabajo es encontrar un método numérico que permita encontrar estas soluciones de manera eficiente, de forma que la aproximación Rainbow pueda ser utilizada para el ajuste de los datos del lattice de manera de optimizar el error general del modelo. La importancia de la obtención de este método es que a partir de trabajos futuros puede mejorar la calidad de predicciones para experimentos en el lattice que permitan no solo testear la validez del modelo de Curci-Ferrari sino también hacer predicciones sobre cantidades directamente observables.

Capítulo 2

Fundamentos teóricos

2.1. Introducción al modelo fenomenológico de QCD

El método de De Witt-Faddeev-Popov nos permite cuantizar teorías de gauge fijando un gauge arbitrario [27]. Con este método podemos, a menos de un factor constante, escribir los elementos de matriz del tiempo ordenado de un producto de operadores $\{\hat{O}_1(x_1)\hat{O}_2(x_2)\dots\}$ que actúan en el espacio vectorial de Hilbert donde viven los campos de la teoría [28]. Esto se hace partir de una integral funcional de los campos ϕ de la teoría [29]:

$$\langle T\{\hat{O}_1\hat{O}_2\dots\}\rangle_V \propto \int [\mathcal{D}\phi(x)] O_1(x_1)O_2(x_2)\dots \exp[-S[\phi]]. \quad (2.1)$$

Donde S es una acción modificada de la teoría original que depende del gauge fijado y donde factores de la parte derecha de la ecuación que se cancelan al normalizar los valores esperados son omitidos. Los $O_1(x_1)O_2(x_2)\dots$ y ϕ 's en la parte derecha de esta relación son, respectivamente, los operadores y los campos escritos en la representación de posición (recordamos que los operadores son funciones de los campos y de sus derivadas y por eso deben ir dentro de las integrales funcionales). Por último, el factor “ i ” que usualmente acompaña a la acción en este tipo de integrales lo reemplazamos por un “-1” ya que vamos a trabajar en el espacio euclídeo ($x^0 \rightarrow ix^0$) y por lo tanto tenemos $i \int d^4x \mathcal{L}_M \rightarrow - \int d^4x \mathcal{L}_E$.

En este trabajo no vamos a trabajar con un Lagrangiano que pueda asociarse en principio a la ecuación (2.1) al fijar el gauge, sino con uno modificado.

Sin embargo, vamos a tomar para este Lagrangiano la ecuación (2.1) como válida. Dicho esto, a continuación vamos a llamar por comodidad a nuestro Lagrangiano asociado a S simplemente Lagrangiano \mathcal{L} .

Como es usual en el procedimiento de DW-F-P, se escribe primero el Lagrangiano de una teoría de gauge no abeliana tomando en cuenta el término que sirve para fijar el gauge y que depende de un parámetro ξ . La elección de la forma de este término va a depender de la elección del parámetro ξ y nos va a permitir fijar cualquier gauge lineal covariante. Estos incluyen como casos particulares $\xi = 1$ (gauge de Feynman) o $\xi \rightarrow 0$ (gauge de Landau) [29]. Por último, agregamos un término de masa al campo de gauge (este Lagrangiano constituye un caso particular del Lagrangiano de Curci-Ferrari [13]). Teniendo en cuenta todas estas consideraciones el Lagrangiano queda de la forma:

$$\mathcal{L} = \overbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^\alpha F_{\mu\nu}^\alpha + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i(\gamma_\mu D_\mu + M_i)\psi_i + \partial_\mu \bar{c}^\alpha (D_\mu c)^\alpha + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu^\alpha)^2 + \underbrace{\frac{m^2}{2}A_\mu^\alpha A_\mu^\alpha}_{\text{masa para el campo de gauge}}}_{\text{Lagrangiano DW-F-P en gauge lineal}}. \quad (2.2)$$

En nuestro trabajo vamos a usar el gauge de Landau, pero es conveniente mantener el factor ξ al calcular los propagadores bare y tomar el límite $\xi \rightarrow 0$ en su expresión final. Por otro lado, A_μ^α y ψ_i son el campo de gauge y de materia respectivamente y $F_{\mu\nu}^\alpha$ es el “tensor de fuerza”, escrito explícitamente en la ecuación (2.3) para una teoría de constantes de estructura $f^{\alpha\beta\gamma}$. La derivada covariante está definida para un campo ϕ cuya coordenadas ϕ_l transformen bajo el grupo de gauge con los generadores $(t^a)_l^m$ como:

$$(D_\mu \phi)_l \equiv \partial_\mu \phi_l - ig A_\mu^\alpha (t_\alpha)_l^m \phi_m.$$

Por último, los c^α y \bar{c}^α son campos (conocidos como ghosts) que aparecen típicamente al utilizar el método de De Witt-Faddeev-Popov [29] y convencionalmente los índices griegos $\{\alpha, \beta, \gamma, \dots\}$ corresponden a los objetos que transforman de gauge en la representación adjunta y los índices $\{\mu, \nu, \dots\}$ corresponden a los índices de espacio-tiempo.

Las ecuaciones escritas hasta ahora sirven para un grupo de gauge general, pero nosotros vamos a restringirnos a las simetrías de gauge que satisfagan el álgebra de Lie de $SU(3)$ en la representación fundamental [29]. Anotamos $f^{\alpha\beta\gamma}$ las constantes de estructura de dicha representación y λ^α sus generadores:

$$[\lambda^\beta, \lambda^\gamma] = if^{\alpha\beta\gamma} \lambda^\alpha.$$

En esta representación las $f^{\alpha\beta\gamma}$ son, entre otras cosas, completamente anti-simétricas en sus índices. Por definición, el tensor F se escribe entonces [29]:

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + gf^{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \quad (2.3)$$

Los campos de materia de esta teoría se les denomina “quarks” ψ_i y los campos de gauge A^α “gluones”.

2.2. Comentarios sobre la simetría quiral para QCD con gluones masivos

Uno de los aspectos que hacen a la teoría de QCD tan exitosa es que presenta la simetría quiral aproximada $SU(2) \times SU(2)$ (SQA) en los sabores de quarks ¹. El mecanismo de ruptura de la SQA de QCD a la simetría bajo su subgrupo de isospín (generado por las matrices de isospin t_i [30]) permite predecir la existencia de un triplete de partículas con masas pequeñas con determinados números cuánticos [29]. Este triplete de partículas se encuentra en la naturaleza y las partículas son conocidas como piones.

El Lagrangiano presentado en la ecuación (2.2) puede pensarse como una teoría efectiva que intenta describir las IF [14]. Como fue explicado en la sección anterior, este Lagrangiano es, en el caso de la simetría de gauge $SU(3)$, similar al Lagrangiano de QCD al fijar el gauge de Landau. La única diferencia es el término de masa de los gluones. Debido a que la simetría quiral $SU(2) \times SU(2)$ está asociada con una transformación en los campos fermiónicos, la introducción de una masa para los gluones no afecta a la simetría quiral

¹Se puede pensar esta simetría del Lagrangiano como una simetría bajo las transformaciones de dos grupos $SU(2)$ que conmutan entre si, y cada una actuando en la parte izquierda y derecha respectivamente (por eso el nombre $SU(2) \times SU(2)$) [29].

aproximada que presenta QCD. Y por lo tanto, las predicciones asociadas a su ruptura espontánea se mantienen. Por completitud, mostramos una de las maneras de escribir las transformaciones quirales $SU(2) \times SU(2)$:

$$\begin{bmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{bmatrix} \rightarrow \exp \left(i\vec{\alpha} \cdot \vec{t} + i\gamma_5 \vec{\beta} \cdot \vec{t} \right) \begin{bmatrix} \psi_u \\ \psi_d \end{bmatrix}$$

Donde $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$ son vectores reales de 3 dimensiones y las \vec{t} es un vector cuyas componentes son las matrices t_i de isospin. Es fácil ver a partir de las propiedades de las matrices gamma que el Lagrangiano de la ecuación (2.2) presenta simetría quiral $SU(2) \times SU(2)$ si tenemos dos quarks (denominados up y down) de masa nula. En el caso real, la masa de los quarks up y down no es nula, pero es del orden de unos pocos MeV (lo que es muy pequeño comparado con la escala de las IF, del orden del GeV).

2.3. Reglas de Feynman

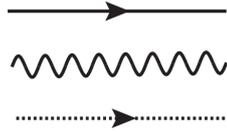
Las reglas de Feynman permiten asignar a cada uno de los términos del desarrollo en las constantes de acoplamiento de la ecuación (2.1) con: un diagrama (diagrama de Feynman) y un factor multiplicativo (que toma en cuenta el factor de simetría del diagrama [31]). De esta manera, obtener todos los términos del desarrollo en las constantes de acoplamiento se puede reducir a dibujar todos los diagramas de Feynman posibles, calcular las expresiones asociadas, y agregar el factor multiplicativo asociado. Por otro lado, las reglas van a depender de los operadores involucrados en (2.1).

Si bien obtenemos potencialmente todos los términos del desarrollo existen varios problemas. Uno de ellos es que obtenemos los términos en forma de integrales de funciones complicadas de tratar y que en muchos casos no convergen. Este problema puede en algunos casos resolverse utilizando el método de grupo de renormalización [29]. Por otro lado, incluso si pudiéramos calcular cada término del desarrollo de manera que sean finitos, no hay pruebas generales de la convergencia de la serie resultante. Este último hecho no ha impedido que, al considerar los primeros términos perturbativos en teorías de campos como QCD o QED, los resultados teóricos encuentren gran concordancia con los experimentales.

Aclaremos ahora que cuando hablemos de interacciones nos vamos a referir

a los términos del Lagrangiano que no son cuadráticos en los campos (por ejemplo, en este caso, el término $-ig\bar{\psi}_i\gamma_\mu A_\mu^\alpha(\lambda_\alpha)\psi_i$ es de interacción quark-gluón, ya que involucra a los campos ψ y los campos A). Vamos a mostrar los diagramas de Feynman asociados con los términos del desarrollo de la ecuación (2.1) con los operadores $\bar{\Psi}(x)\Psi(y)$ dividido por $\langle 1 \rangle_V$ (el equivalente en mecánica estadística a hallar el valor esperado de un observable). Esta cantidad es conocida como propagador vestido del quark, y va a jugar un rol central en este estudio.

Regla (1): Podemos dibujar tres tipos de líneas en los diagramas: las líneas suaves direccionadas (líneas de quarks), las líneas serpenteantes (líneas de gluones) y las punteadas direccionadas (líneas de ghost).

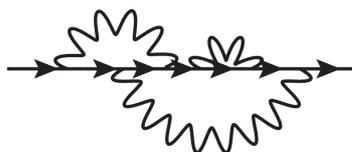


Regla (2): Existen cuatro tipos posibles de vértices:

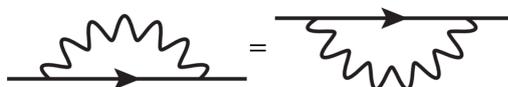
- En los que se unen dos líneas de quarks con una de un gluón, en donde las líneas de quarks que se unen en el vértice deben mantener la dirección antes y después del vértice.
- En los que se unen tres líneas de gluones.
- En los que se une una línea de gluón con dos líneas de ghost, en donde las líneas de ghosts que se unen en el vértice deben mantener la dirección antes y después del vértice.
- En los que se unen cuatro líneas de gluones.



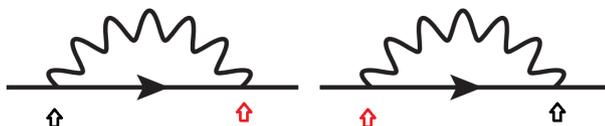
Regla (3): Los diagramas deben ser cerrados a menos de dos líneas de quarks al diagrama, llamadas líneas externas. Una debe ser entrante al diagrama y la otra saliente. Las líneas que no son externas se denominan líneas internas.



Regla (4): Dos diagramas de Feynman son equivalentes si podemos ir de uno a otro moviendo solamente líneas internas (sin generar cortes en las líneas ni nuevos vértices).



Regla (5): Los diagramas de Feynman equivalentes cuentan solo una vez, y su factor multiplicativo se calcula distinguiendo sus vértices y contando todas las formas de realizar el mismo dibujo pero intercambiando los vértices de posición.



La regla (3) en el caso general no impide que los diagramas sean desconectados. Sin embargo, en este caso no podemos tener diagramas desconectados, ya que los vértices tienen un número par de líneas de quarks y siempre que conectemos un subdiagrama a una sola línea externa nos queda un número impar de líneas internas sin conectar (en el mejor de los casos, solo una, y obtenemos un diagrama que contribuye al propagador del quark conectando esa línea una línea externa). Por otro lado, la regla (5) en un caso más general cuenta otras posibles permutaciones, pero en el caso particular analizado, la regla se reduce a la mencionada.

Como ya mencionamos, hay una relación uno a uno entre las clases de equivalencia de los posibles diagramas de Feynman definida por la Regla (4) y los términos que aparecen en el desarrollo en las constantes de acoplamiento de la ecuación (2.1). Para calcular los términos asociados es necesario definir

cantidades que se conocen como propagador bare de los gluones, propagador bare de los ghost y propagador bare de los quarks, también conocidas como funciones de correlación a dos puntos de la teoría gaussiana [31]. En este trabajo no necesitaremos el propagador bare del ghost, por lo que no damos detalles del mismo.

Nuestro propagador bare del gluón tiene la siguiente forma (ver Apéndice A):

$$G_{0,\mu\nu}^{\alpha\beta}(p) = \delta^{\alpha\beta} \left[\frac{P_{\mu\nu}^{\perp}(p)}{m^2 + p^2} + \frac{P_{\mu\nu}^{\parallel}(p)}{m^2 + \frac{1}{\xi}p^2} \right].$$

Donde $P_{\mu\nu}^{\perp}(p)$ y $P_{\mu\nu}^{\parallel}(p)$ son los proyectores ortogonal y co-lineal de p respectivamente. Como nosotros trabajamos en el gauge de Landau, debemos tomar el límite $\xi \rightarrow 0$. En ese caso el segundo término de la ecuación se hace cero y obtenemos el propagador del gluón para nuestra teoría:

$$G_{0,\mu\nu}^{\alpha\beta}(p) = \delta^{\alpha\beta} \frac{P_{\mu\nu}^{\perp}(p)}{m^2 + p^2}. \quad (2.4)$$

Para los quarks notamos que podemos identificar en la parte cuadrática en ψ_i de nuestro Lagrangiano con el Lagrangiano de Dirac en el espacio euclídeo. Donde las γ_i son las matrices de Dirac modificadas ($\gamma^0 \rightarrow -\gamma^0; \gamma^i \rightarrow -i\gamma^i$), por lo que $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}I_{4 \times 4}$. La forma de su propagador gaussiano es ampliamente conocida (ver por ejemplo [32]) y la escribimos a continuación (para cada uno de los “ i ” quarks):

$$S_{0,i}(p) = \frac{(i\not{p} + M_i)}{p^2 + M_i^2}. \quad (2.5)$$

En donde definimos $\not{p} \equiv \gamma_\mu p_\mu$. El último ingrediente que necesitamos es el vértice de interacción gluón-quark (lo único que vamos a precisar de los otros vértices es saber que son proporcionales a las constantes de acoplamiento), este vértice está dado por el término del Lagrangiano que involucra a los gluones y los quarks (el término de la derivada covariante de los ψ_i), también se conoce ampliamente y se escribe en el euclídeo:

$$V_\mu^\alpha = ig\gamma_\mu\lambda^\alpha. \quad (2.6)$$

2.4. Aproximación Rainbow Improved para el propagador del quark

Nuestro objetivo en esta sección será mostrar la aproximación que utilizamos en este trabajo para obtener el propagador vestido del quark. Estas aproximaciones se basan en dos suposiciones. La primera, que reemplazar el grupo de gauge de $SU(3)$ por $SU(N_C)$ y tomar el límite N_C grande es una buena aproximación para el caso físico $N_C = 3$. La segunda, que podemos hacer un desarrollo perturbativo en la constante de acoplamiento en el sector de gluones y ghosts (ver sección 2.8). Esta última suposición nos va a permitir más adelante descartar cierto tipo de diagramas de Feynman y caracteriza la parte “Improved” de la aproximación ¹.

2.4.1. Desarrollo para N_C grande

Describamos ahora la aproximación Rainbow, basada en un trabajo de t’Hooft[33], para el caso en que nuestra teoría tiene un solo quark “ ψ ” de masa bare M . Veremos más adelante que considerar otros quarks no va a afectar los cálculos realizados, ya que, a primer orden de la aproximación, en los diagramas de Feynman que consideramos aparece el propagador bare de un solo quark. Para hacer el cálculo más general consideraremos una teoría con simetría de gauge $SU(N_C)$ (N_C es el “número de colores”) en vez del caso particular $SU(3)$. La idea central de esta aproximación radica en que cuando consideramos loops de color en un diagrama de Feynman (ver diagrama de la Regla (4)) aparecen factores N_C en el término asociado. Para ver esto lo primero que debemos señalar es que cuando escribimos por ejemplo en el Lagrangiano (2.2) el término $\bar{\psi}M\psi$ (ya sin los índices “i” de los sabores quarks) estamos omitiendo el índice de la simetría de gauge. Explicitando este índice tenemos $\bar{\psi}^a M\psi^a$, donde sumamos en $a = \{1, 2, \dots, N_C\}$, y convencionalmente elegimos los índices $\{a, b, c\}$ como los índices asociados a la representación fundamental de la transformación de gauge. En ese sentido, el propagador bare del quark en la ecuación (2.5) se debe pensar como una matriz, cuyos elementos están dados por:

¹En el artículo original donde es introducida la aproximación [23], la aproximación “Improved”^o tiene una connotación ligeramente diferente, sin embargo, en este trabajo le damos este sentido.

$$S_0^{ab}(p) = \delta^{ab} \frac{i(\not{p} + M)}{p^2 + M^2}. \quad (2.7)$$

Para los campos de gauge existe otra asociación en este sentido que puede verse cuando escribimos por ejemplo la derivada covariante:

$$(D_\mu \psi)^a = \partial_\mu \psi^a - ig A_\mu^\alpha (\lambda^\alpha)^{ab} \psi^b.$$

Observamos que como hay $N_C^2 - 1$ generadores de las representaciones del grupo, entonces hay $N_C^2 - 1$ gluones (contracción de índice α). Si definimos la matriz A_μ de componentes $A_\mu^{ab} \equiv A_\mu^\alpha (\lambda^\alpha)^{ab}$ usando que en la representación fundamental $\text{tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$ obtenemos que:

$$A_\mu^{ab} A_\nu^{ba} = 2A_\mu^\alpha A_\nu^\alpha. \quad (2.8)$$

Podemos escribir la parte cuadrática del Lagrangiano (2.2) en función de las matrices A_μ tomando en cuenta que en el cálculo anterior solo juegan los índices de gauge y que los generadores son constantes del espacio-tiempo. Para el término lineal en A_μ^α del Lagrangiano la aparición de las matrices A_μ es evidente (ya que en la derivada covariante aparece A_μ^α contraído con λ^α) y para el término cúbico el análisis es similar al cuadrático. Si a cada componente independiente de la matriz A_μ^{ab} se le asigna un gluón (lo que está justificado por la reescritura del Lagrangiano), entonces volvemos a obtener que los gluones son $N_C^2 - 1$ debido a que la traza de los generadores de $SU(N_C)$ es nula [34]. Más adelante vamos a ver que si estamos considerando el límite N_C grande podemos pensar a $SU(N_C)$ como $U(N_C)$, entonces en este caso vamos a aproximar al número de gluones como si fueran N_C^2 en vez de $N_C^2 - 1$ y cada elemento de la matriz A_μ como independiente.

Podemos entonces reescribir el Lagrangiano en términos de las matrices A_μ , la pregunta que surge entonces es, ¿cómo se escribe ahora el propagador bare del gluón?. Teníamos en la ecuación (2.4) que G tiene índices $\alpha\beta$ de la representación adjunta, pero ahora vamos a tener que el propagador bare va a tener 4 índices latinos de la representación fundamental, es decir:

$$\overline{A_\mu^\alpha A_\nu^\beta} = G_{0,\mu\nu}^{\alpha\beta} \rightarrow G_{0,\mu\nu}^{ab,cd} = \overline{A_\mu^{ab} A_\nu^{cd}}.$$

Como los términos de simetría aparecen como factores en los propagaos

bare, podemos definir a partir de la ecuación (2.4):

$$G_{0,\mu\nu}(p) = \frac{P_{\mu\nu}^\perp(p)}{m^2 + p^2}. \quad (2.9)$$

Luego, esta parte no se va a modificar cuando realicemos el cambio de perspectiva para el gluón. Por lo tanto lo que va a ocurrir es un cambio en el factor original $\delta^{\alpha\beta}$ a uno que llamamos $d^{ab,cd}$:

$$\delta^{\alpha\beta} \rightarrow d^{ab,cd}. \quad (2.10)$$

De la forma de las matrices A_μ notamos que:

$$d^{ab,cd} = (\lambda^\alpha)^{ab} (\lambda^\alpha)^{cd}. \quad (2.11)$$

Se puede probar que la forma de d es la siguiente [34]:

$$d^{ab,cd} = \left(\delta^{ad} \delta^{bc} - \frac{\delta^{ab} \delta^{cd}}{N_C} \right), \quad (2.12)$$

Se puede ver fácilmente a partir de esta ecuación y de la restricción de la traza nula a los generadores del grupo de gauge que $d^{aa,cd} = d^{cd,aa} = 0$. Ya vimos que los gluones A_μ tienen traza nula, pero en el caso del álgebra $U(N)$ esa restricción no existe, y el segundo término en la ecuación (2.12) no aparece. En este sentido, podemos decir que cuando N_C es grande, $U(N_C) \approx SU(N_C)$.

Para justificar la aproximación Rainbow vamos a considerar N_C como grande, por lo que vamos a tener de la ecuación (2.12):

$$d^{ab,cd} = \delta^{ad} \delta^{bc}. \quad (2.13)$$

Lo que quiere decir, como habíamos anticipado, que cada elemento de matriz A_μ lo tomamos como independiente (recordar que: $A_\mu^{ab} A_\nu^{cd} \propto d^{ab,cd}$).

Finalmente obtenemos que el propagador del gluón se escribe (en este nuevo sentido y en la aproximación N_C grande):

$$G_{0,\mu\nu}^{ab,cd}(p) = \delta^{ad} \delta^{bc} \frac{P_{\mu\nu}^\perp(p)}{m^2 + p^2}. \quad (2.14)$$

El desarrollo que presentamos a continuación se encuentra explicado en detalle en el libro de Coleman [34]. Como va a ser central en nuestro trabajo, esbozamos las ideas principales del argumento. Para esto va a ser importante

destacar que este análisis solamente va a referir al factor de la simetría de gauge y lo único que vamos a tener en cuenta en lo siguiente es que: los factores de los términos del desarrollo perturbativo que no tienen índices de gauge se pueden calcular de manera independiente con las reglas de Feynman de la sección anterior y multiplicándoles al final lo que definimos como “factor de color”.

Por conveniencia realizamos la siguiente redefinición de los campos y las constantes de acoplamiento:

$$g \rightarrow \frac{g}{\sqrt{N_C}}, \quad (2.15)$$

$$A_\mu \rightarrow \sqrt{N_C} A_\mu, \quad (2.16)$$

$$\psi \rightarrow \sqrt{N_C} \psi. \quad (2.17)$$

Es fácil ver que cuando realizamos este cambio de normalización del Lagrangiano (la parte que nos va a interesar, que no incluye ghost) se modifica como:

$$\mathcal{L} \rightarrow N_C \mathcal{L}. \quad (2.18)$$

Este factor N_C va a resultar útil, y va a aparecer en el cálculo del ya mencionado factor de color: es sabido que las constantes que multiplican a los términos cuadráticos en el Lagrangiano aparecen dividiendo en el propagador y las constantes que multiplican los factores de las interacciones aparecen multiplicando en los vértices [29].

Ya vimos que el propagador bare de los gluones tiene asociado a primer orden en $1/N_C$ un factor de gauge $d^{ab,cd}$ (ecuación (2.13)) mientras que el propagador del quark un factor δ^{ab} (ecuación (2.7)). Para tomar en cuenta la modificación del Lagrangiano a cada uno de estos factores hay que multiplicarles un factor $1/N_C$. Por último por cada vértice vamos a tener un factor multiplicativo N_C asociado.

Si consideramos por ejemplo el diagrama de la Regla (4) de Feynman, donde entra un quark de color e y sale uno de color f , el factor de color va a estar dado por:

$$f_C = \sum_{a,b,c,d} \delta^{ea} \frac{d^{ab,cd}}{N_C} \frac{\delta^{bc}}{N_C} N_C^2 \delta^{df} = \delta^{ef} \sum_{b,c} \delta^{bc} \delta^{bc} = N_C \delta^{ef}. \quad (2.19)$$

Donde omitimos el factor N_C , que aparece en todos los términos del desarrollo

del propagador asociado a los quarks externos (ver la ecuación (2.17)) ya que nuestro objetivo va a ser encontrar los diagramas al orden superior en potencias de N_C . Dado este ejemplo, busquemos una manera general de clasificar los diagramas según la cantidad de factores N_C en el factor de color. Por un lado sabemos que podemos pensar a cada extremo de línea gluónica $\alpha = (a_1, a_2)$ con una pareja de índices que se conecta con los índices de su otro extremo $\beta = (b_1, b_2)$ ($A_\mu^{a_1 a_2} A_\nu^{b_2 b_1} \rightarrow \delta^{a_1 b_1} \delta^{a_2 b_2}$); y cada línea de quark tiene un índice de color en sus extremos también comunicados ($\bar{\psi}^a \psi^b \rightarrow \delta^{ab}$). Luego, siguiendo la idea de t'Hooft vamos a realizar la identificación de los diagramas de Feynman que se muestra en la figura 2.1.

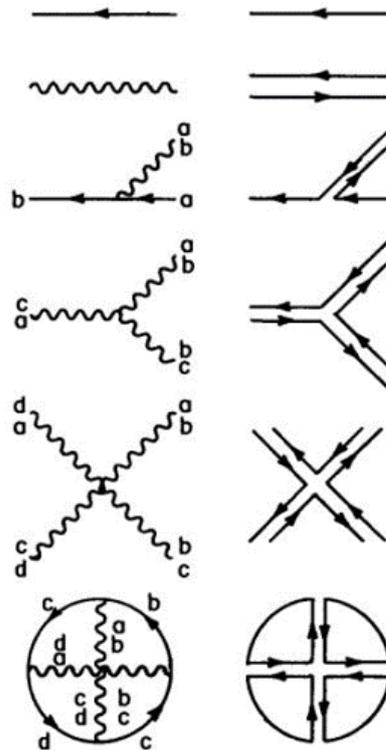


Figura 2.1: Regla de transformacion diagramas de Feynman. (Imagen tomada de [34]).

A cada línea de quarks se le sigue asignando la misma línea simple direccionada y a cada gluón dos líneas simples direccionadas una con dirección opuesta a la otra. Los vértices pasan a “despegarse”, de manera de que cada nueva línea gluónica simple esté conectada a una única línea simple. La direccionalidad de las líneas simples gluónicas va a estar dada de forma que se mantenga la direc-

cionalidad de las líneas iniciales. Es fácil convencerse que la figura resultante tiene la misma orientación en cada una de las caras (la orientación queda dada por la regla de la mano derecha).

Esta identificación permite seguir las líneas de color fácilmente, donde cada loop cerrado de color agrega un factor N_C . Veamos ahora un par de ejemplos y realicemos el conteo de factores N_C para diagramas del desarrollo del propagador del quark.

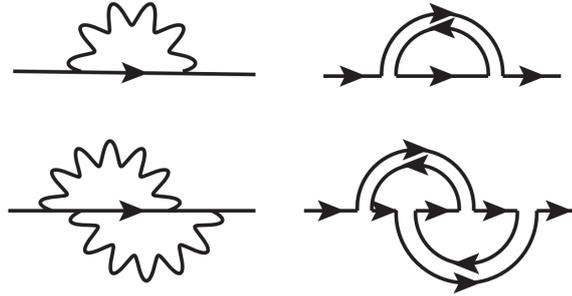


Figura 2.2: Ejemplos de asignación de nuevos diagramas para el conteo de factores N_C .

En la primera línea de la figura 2.2 vemos en la asignación solamente un loop, dos vértices y dos propagadores internos, por lo tanto tenemos un factor N_C elevado a la potencia $1 + 2 - 2 = 1$. En el ejemplo de la segunda línea de la figura vemos que no tenemos ningún loop, cuatro vértices y cinco líneas internas, esto nos da un factor N_C a la potencia $0 + 4 - 5 = -1$. Se puede probar (ver apéndice B) que el orden superior en N_C para el cálculo del propagador del quark se da para diagramas donde 1- solo se agregan gluones a una línea inicial de quarks y 2- al pasar todas las líneas gluónicas para uno de los semiplanos definidos por la línea de quark, los gluones solo se cortan en vértices de interacción (diagramas “planares”). Como el primer diagrama de la figura 2.2 es de este tipo, entonces el orden superior tiene un factor asociado de color N_C , y es el mismo orden que el del diagrama sin loops.

2.4.2. Diagramas a considerar en Rainbow Improved

Antes de comenzar con la justificación de la aproximación Rainbow Improved comentamos brevemente que, el hecho de que despreciemos la constante de acoplamiento de las interacciones entre gluones y entre gluones y ghosts (que llamamos g_g) respecto a la interacción entre gluones y quarks, va a estar

justificado por observaciones obtenidas de primeros principios a partir de simulaciones Monte Carlo. Estas observaciones están desarrolladas en la sección 2.8 y solo se pueden entender pensando en los conceptos del grupo de renormalización. Esto es porque, en principio, podemos ver que la ecuación (2.2) los acoplamientos posibles entre las partículas es el mismo (todos descritos por la constante g). Este comportamiento, para el cual los acoplamientos son iguales, solamente corresponde a la región UV, donde la teoría de perturbaciones usual en QCD es válida. En el IR, el acoplamiento quark-gluón es significativamente mayor a g_g dando, en ese sector, un parámetro de desarrollo de orden 1. Por ese motivo haremos un desarrollo en el sector de gauge pero no en el acoplamiento quark-gluón.

Consideremos los términos del desarrollo del propagador del quark de la figura 2.3. En el desarrollo N_C grande (c) queda descartado por ser no planar. Al despreciar las interacciones entre gluones y gluón-ghost, los diagramas (d), (g), (i) y (j) quedan descartados. El diagrama (e) queda descartado por tener otra línea de quark, por lo que no aparece en el primer orden del desarrollo en N_C . Finalmente, los únicos diagramas que vamos a tener en la aproximación Rainbow Improved para el propagador del quark son los que mostramos en la figura 2.4.

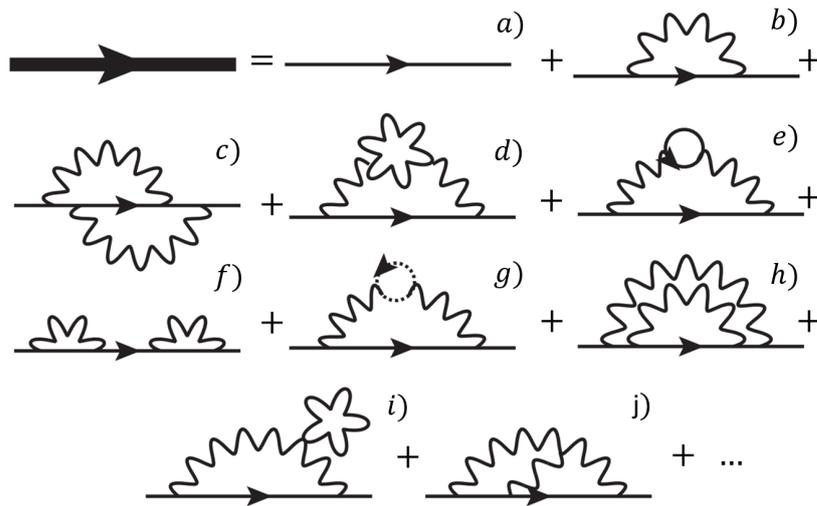


Figura 2.3: Todos los términos en el desarrollo perturbativo del propagador del quark con hasta dos loops.

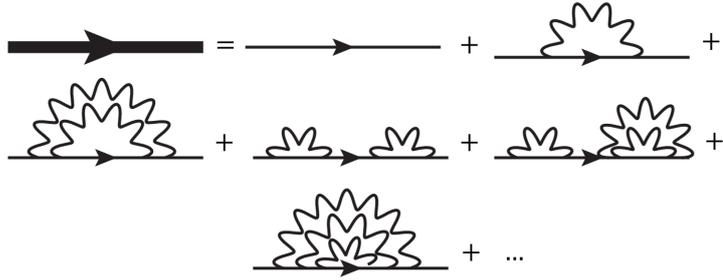


Figura 2.4: Algunos diagramas que aparecen en el cálculo del propagador del quark en la aproximación Rainbow Improved.

2.5. Ecuación de recurrencia con cut-off para la el propagador del quark

En la Sección 2.4 justificamos cuáles son los diagramas de Feynman que contribuyen en nuestra aproximación al cálculo del propagador vestido del quark o simplemente propagador del quark. Lo primero que vamos a observar es que el propagador del quark S solo puede depender de p , el 4-momento entrante del quark debido a que en cada vértice se conserva el 4-momento. Para mantener la invariancia de Lorentz (o, en este caso, la invariancia euclídea) la forma de $S(p)$ debe ser entonces:

$$S(p) = i\tilde{A}(p^2)\not{p} + \tilde{B}(p^2)I_4, \quad (2.20)$$

donde \tilde{A} y \tilde{B} son funciones en los reales y donde usamos que $\not{p}^2 = p^2$ y que los índices de Lorentz deben estar contraídos (los únicos objetos involucrados en el cálculo del propagador del quark con índices de Lorentz son p_μ y γ_μ). Lo siguiente es recordar que $S^{-1}(p)$ se puede escribir en términos de la acción efectiva $\Gamma[\phi]$ como $\Gamma^{(2)}(p)$ (la acción efectiva puede pensarse como el equivalente mecánico estadístico de la función de Gibbs, pensando la ecuación (2.1) como la función de partición Z). Siendo más precisos, en el caso que tenemos más de un sabor de quarks:

$$\Gamma_{ij}^{(2)}(p) \equiv \left. \frac{\delta\Gamma}{\delta\bar{\psi}_i\delta\psi_j} \right|_{\bar{\psi}=\psi=0}(p). \quad (2.21)$$

Es bien conocido que existen reglas de Feynman para el cálculo de $\Gamma^{(2)}(p)$, y estas reglas son las mismas que las reglas para el cálculo del propagador vestido, pero agregándoles una restricción más:

Regla $\Gamma^{(2)}(p)$: Solo consideramos los diagramas que no quedan desconectados si cortamos una única línea interna. Este tipo de diagramas son comúnmente conocidos como diagramas 1PI. Tampoco consideramos al propagador bare como diagrama 1PI.

Volvamos por un momento a la ecuación (2.20), de la misma manera que justificamos la forma de $S(p)$, justificamos la forma de $S^{-1}(p)$, entonces vamos a tener:

$$S^{-1}(p) = -iA(p^2)\not{p} + B(p^2) = \frac{-i\tilde{A}(p^2)\not{p} + \tilde{B}(p^2)I_4}{\tilde{A}(p^2)^2 p^2 + \tilde{B}(p^2)^2}. \quad (2.22)$$

Donde A y B son funciones reales y la última igualdad la obtenemos por cálculo directo al invertir la ecuación (2.20). La ecuación (2.22) puede ser escrita en forma diagramática como se muestra en la figura 2.5, donde ya tenemos en cuenta la aproximación Rainbow Improved, que mostramos en la sección anterior:

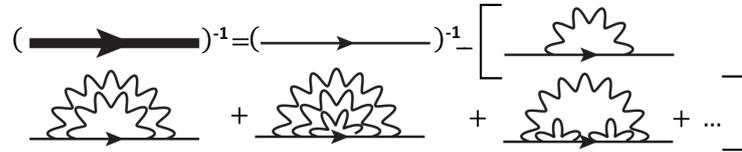


Figura 2.5: Diagramas Rainbow para el inverso del propagador del quark. Imagen de [23].

La parte entre paréntesis rectos de la figura 2.5 son los diagramas que contribuyen a $\Gamma^{(2)}$ (diagramas 1PI) en la aproximación mencionada, y el primer término de la parte derecha de la igualdad es el inverso del propagador bare, escrito en la ecuación (2.5). Cada término que se encuentra dentro del paréntesis recto tiene una línea gluónica que “encierra” al resto del diagrama a menos de las patas externas. Teniendo en cuenta este patrón y observando la figura 2.4 podremos reescribir la figura 2.5 como la figura 2.6.



Figura 2.6: Diagramas Rainbow del inverso del propagador del quark escrito de manera abreviada. Imagen tomada de [23].

La figura 2.6 resulta útil al considerar las ecuaciones (2.20) y (2.22), nos permite escribir, teniendo en cuenta las ecuaciones (2.4), (2.5) y (2.6), la siguiente ecuación:

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) + g^2 \int_q^\Lambda G_{0,\mu\nu}^{\alpha\beta}(q+p) \gamma_\mu \lambda^\alpha S(p) \gamma_\nu \lambda^\beta. \quad (2.23)$$

Invirtiendo la ecuación (2.7) y por definición tenemos respectivamente:

$$S_0^{-1}(p) = -i\not{p} + M, \quad (2.24)$$

$$\int_q^\Lambda \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{|q|<\Lambda} d^4q. \quad (2.25)$$

Donde el cut-off Λ en la ecuación (2.23) lo escribimos para asegurarnos que la integral sea finita. Considerando las ecuaciones (2.20), (2.22), y (2.23) obtenemos entonces las siguientes ecuaciones (obtenidas en [23]):

$$A(p^2) = 1 - g^2 C_F \int_q^\Lambda \tilde{A}(q^2) \frac{f(q,p)}{(p+q)^2 + m^2}, \quad (2.26)$$

$$B(p^2) = M + g^2 C_F \int_q^\Lambda \tilde{B}(q^2) \frac{3}{(p+q)^2 + m^2}, \quad (2.27)$$

donde definimos:

$$C_F \equiv \frac{N_C^2 - 1}{2N_C}. \quad (2.28)$$

$$f(q,p) \equiv \frac{2p^2q^2 + 3(p^2 + q^2)(p \cdot q) + 4(p \cdot q)^2}{p^2(p+q)^2}. \quad (2.29)$$

Las ecuaciones (2.26) y (2.27) son ecuaciones que dependen de una escala Λ y su significado físico puede ser entendido a partir del grupo de renormalización. Por el momento señalemos que es necesario que la escala de regularización ultravioleta Λ sea mucho mayor que las escalas típicas del fenómeno estudiado (en este caso m) por lo que es necesario que $\Lambda \gg m$ (para una explicación más detallada ver la sección 2.6). Por otro lado, si queremos estudiar la física en todo el espectro en el que vale la teoría de perturbaciones debemos utilizar el métodos de grupo de renormalización. Este método es ampliamente conocido en la literatura (ver por ejemplo [29]), sin embargo, daremos un breve resumen de sus ideas principales antes de aplicarlo a nuestro trabajo por completitud y para fijar notaciones.

2.6. Breve introducción al Método de Grupo de Renormalización de Gell-Mann y Low

Existen dos variantes del grupo de renormalización en teorías de campos, la de Gell-Mann y Low y la de Wilson ¹. Ambas llevan a los mismos resultados, sin embargo son a primera vista diferentes (en realidad, la aplicación del grupo de renormalización de Gell-Mann y Low está restringida para teorías renormalizables). En esta sección nos enfocamos a introducir la variante de Gell-Mann y Low, que es la que usamos en nuestro trabajo. Esta sección es además un resumen de algunos de los temas desarrollados en el capítulo 18 de un libro de S. Weinberg [29] y mantenemos su notación.

Primero introducimos el conocido problema de los grandes logaritmos. Consideremos una cantidad Γ (por ejemplo una amplitud de scattering) que calculamos perturbativamente y que tiene dimensiones de $[Energia]^D$. Si x representa los ángulos involucrados en el cálculo de Γ , E la energía típica del proceso, g las constantes de acoplamiento adimensionadas renormalizadas a una escala dada y m las masas de la teoría tenemos, simplemente por análisis dimensional:

$$\Gamma(E, x, g_R, m) = E^D \Gamma(1, x, g_R, m/E). \quad (2.30)$$

En el límite $E \rightarrow \infty$ deberíamos tener que Γ se comporta asintóticamente con una ley de escala. Sin embargo, se encuentra en muchas teorías que aparecen factores $\ln(E/m)$. Esto solo se puede deber a la aparición de divergencias en $\Gamma(E, x, g_R, m)$ cuando $m \rightarrow 0$. Existen divergencias específicas al espacio Minkowskiano para masas tendiendo a cero que no vamos a considerar aquí. Las otras divergencias surgen cuando renormalizamos las constantes de acoplamiento para eliminar la dependencia del cut-off Λ . En este procedimiento se introducen términos $\ln(E/m)$. Una manera de eliminar este problema es considerar una constante de acoplamiento g_μ que dependa de la escala típica de energía μ a la que estemos trabajando en vez de tener g_R que calculamos a una escala fija de manera arbitraria. Esto lleva a que g_μ no dependa de m , al menos para $\mu \gg m$. El procedimiento es bien conocido: si queremos calcular Γ en la escala de energía $E \gg m$, lo hacemos de forma similar la que calculamos

¹Existe una tercera variante denominada GR de Callan-Symanzik, que se asemeja a la de Gell-Mann y Low.

g_R a partir de la teoría bare: a partir de g_R calculamos g_{μ_1} tal que μ_1/m no sea tan grande que el $|\ln(\mu/m)|$ arruine la teoría de perturbaciones. Inductivamente el $g_{\mu_{n+1}}$ se define a partir del g_{μ_n} de la misma forma que g_{μ_1} se define a partir de g_R cuidando ahora que μ_n/μ_{n+1} sea de orden 1. De esta manera obtenemos una ecuación para $g_{\mu'}$:

$$g_{\mu'} = G(g_{\mu}, \mu'/\mu, m/\mu). \quad (2.31)$$

Para obtener esta ecuación es usual usar desarrollos perturbativos sobre Γ , por lo que, en esos casos, el proceso tiene validez si $g_{\mu'}$ no se vuelve grande para $\mu < \mu'$. En dichos casos se suele decir que la constante de acoplamiento está “controlada”.

Trabajando estas ideas y tomando el límite $\mu \gg m$ se llega a la conocida ecuación de Callan-Symanzik:

$$\mu \frac{d}{d\mu} g_{\mu} = \beta(g_{\mu}), \quad (2.32)$$

donde la función β queda definida por:

$$\beta(g_{\mu}) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial z} G(g_{\mu}, z, m/\mu = 0) \right|_{z=1}. \quad (2.33)$$

Resumidamente obtenemos, en el caso en que la constante de acoplamiento dependiente de la escala (conocida como “constante de acoplamiento running”) esté controlada vamos a poder calcular la cantidad Γ a energías E utilizando a g_E como constante de acoplamiento del sistema:

$$\Gamma(E, x, g_E, m, \mu/E = 1). \quad (2.34)$$

En muchos casos es necesario utilizar el grupo de renormalización para calcular los elementos de matriz de operadores. Para eso, dado un operador \hat{O} definimos $N_{\mu}^{(\hat{O})}$ tal que:

$$\hat{O}_{\mu} = N_{\mu}^{(\hat{O})} \hat{O}, \quad (2.35)$$

y tal que las divergencias introducidas son canceladas al calcular los elementos de matriz del operador \hat{O}_{μ} . Finalmente, se puede obtener una ecuación diferencial para N_{μ} :

$$\mu \frac{d}{d\mu} N_\mu^{(\hat{O})} = \gamma^{(\hat{O})}(g_\mu) N_\mu^{(\hat{O})}, \quad (2.36)$$

donde $\gamma^{(\hat{O})}$ está definido de la siguiente manera:

$$\gamma^{(\hat{O})}(g_\mu) \equiv \left. \frac{\partial}{\partial z} G^{\hat{O}}(g_\mu, \mu'/\mu = z, m/\mu = 0) \right|_{z=1}. \quad (2.37)$$

Donde $G^{\hat{O}}$ se puede calcular a partir de los elementos de matriz del operador \hat{O} perturbativamente, teniendo en cuenta de nuevo que las constantes de acoplamiento sean pequeñas para el rango de μ en el que estemos trabajando.

Como dijimos, el grupo de renormalización puede verse como una aplicación repetitiva de la renormalización de las constantes de acoplamiento y los campos. El primer paso, g_R es la renormalización de la constante de acoplamiento renormalizada a una escala fija y la escala de renormalización asociada debe ser una donde valga teoría de perturbaciones inicialmente. Cada siguiente paso caracterizado por $\mu + d\mu$ es la renormalización a una escala de 4-momentos infinitesimalmente menor μ . Por otro lado, la renormalización puede pensarse como la realización de un cut-off en las integrales de momento. Por lo tanto, lo que nos dice el método de grupo de renormalización es que para calcular cantidades a una escala característica de energía E , debemos despreciar los grados de libertad mucho mayores a los asociados al proceso. Mencionamos además que el grupo de renormalización puede implementarse de manera que las masas de la teoría se tomen como constantes de acoplamiento y por lo tanto tener un running asociado para las distintas escalas (ver por ejemplo [29]). En nuestro trabajo utilizaremos este último enfoque.

2.7. Aplicación del grupo de renormalización para el cálculo del propagador del quark en la aproximación Rainbow Improved

En la sección anterior vimos una breve introducción al método del grupo de renormalización. Vamos a estar interesados en aplicar estas ideas para el cálculo del propagador del quark. Esto es debido a que se puede ver [23] que a escalas UV aparece el problema de los grandes logaritmos al calcular el propagador en la aproximación Rainbow-Improved. Definimos por lo tanto la

renormalización de los campos, las masas y la constante de acoplamiento g a una escala μ_0 :

$$\begin{cases} A_{\mu,R}^a = \sqrt{Z_A} A_\mu^a, & (2.38) \\ \psi_R = \sqrt{Z_\psi} \psi. & (2.39) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_R = Z_M M, & (2.40) \\ (m^2)_R = Z_{m^2} m^2, & (2.41) \\ g_R = Z_g g. & (2.42) \end{cases}$$

Con la prescripción de renormalización de que a la escala μ_0 el propagador tenga la forma del propagador bare:

$$S^{-1}(p = \mu_0, \mu_0) = -i\not{p}_0 + M(\mu_0). \quad (2.43)$$

Resaltamos que las constantes de renormalización dependen de la escala μ_0 y al aplicar grupo de renormalización sus evoluciones van a estar relacionadas con las funciones beta y gamma (ver ecuaciones (2.33) y (2.37)). Se pueden probar que a primer orden en la aproximación Rainbow Improved que Z_ψ es finito para todo el espectro de momentos [35] y que también se cumple la siguiente relación [23]:

$$\sqrt{Z_A} Z_\psi Z_g = 1. \quad (2.44)$$

Luego, usando la ecuación (2.36) obtenemos:

$$\mu \frac{d}{d\mu} \ln(Z_\psi) = \gamma_\psi. \quad (2.45)$$

Por la ecuación anterior y por las ecuaciones (2.35) y (2.39) obtenemos:

$$\gamma_\psi S^{-1} = \mu \frac{d}{d\mu} (S_B^{-1} Z_\psi) = \mu \frac{d}{d\mu} S^{-1} = \left(\mu \partial_\mu + \beta_{X_i} \partial_{X_i} \right) S^{-1},$$

donde S_B es el inverso del propagador a nivel bare, que no depende de la escala de momento del grupo de renormalización y los X_i representan las masas y la constante de acoplamiento. Reescribiendo la ecuación anterior llegamos a que:

$$0 = \left(\mu \partial_\mu + \beta_{X_i} \partial_{X_i} - \gamma_\psi \right) S^{-1}. \quad (2.46)$$

Se puede ver por cálculo directo que la solución para esta ecuación se escribe:

$$S^{-1}(p, \mu, X_i(\mu)) = z_\psi(\mu, \mu_0) S^{-1}(p, \mu_0, X_i(\mu_0)), \quad (2.47)$$

donde z_ψ es:

$$\ln z_\psi(\mu, \mu_0) \equiv \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_\psi(\mu'). \quad (2.48)$$

A partir de las ecuaciones (2.47) y (2.22) podemos obtener expresiones para la evolución del grupo de renormalización para A y B (evolucionan con z_ψ):

$$\begin{cases} A(p, \mu_0) = z_\psi^{-1}(p, \mu_0), & (2.49) \\ B(p, \mu_0) = z_\psi^{-1}(p, \mu_0) M(p). & (2.50) \end{cases}$$

Además, usando que Z_ψ es finito obtenemos, a partir de (2.45) y de (2.48), la relación entre el factor de la evolución del inverso del propagador S^{-1} (z_ψ) y del factor de renormalización del campo ψ ($\sqrt{Z_\psi}$):

$$z_\psi(p, \mu) = \frac{Z_\psi(p)}{Z_\psi(\mu)}. \quad (2.51)$$

Se puede probar que a primer orden de la aproximación Rainbow Improved [23] y de las ecuaciones obtenidas a partir del grupo de renormalización (2.49), (2.50) y (2.51) y las ecuaciones asociadas al propagador bare (2.26) y (2.27) que:

$$pM'(p) = \gamma_\psi(p)M(p) - 3g^2 C_F \int_q \frac{Z_\psi(p)}{Z_\psi(q)} \frac{M(q)}{q^2 + M^2(q)} \frac{2p^2 + 2p \cdot q}{((q+p)^2 + m^2(p))^2}, \quad (2.52)$$

$$\gamma_\psi(p) = g^2 C_F \int_q \frac{Z_\psi(p)/Z_\psi(q)}{q^2 + M^2(q)} \left(\frac{p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} f(q, p)}{(p+q)^2 + m^2(p)} - \frac{2(p^2 + p \cdot q) f(q, p)}{((q+p)^2 + m^2(p))^2} \right), \quad (2.53)$$

$$Z_\psi(p) = 1 + g^2(p) C_F \int_q \frac{Z_\psi(p)/Z_\psi(q)}{q^2 + M^2(q)} \frac{f(q, p)}{(p+q)^2 + m^2(p)}. \quad (2.54)$$

Donde fueron usados argumentos del estilo que se usó para derivar la ecuación de grupo de renormalización (2.46), es decir, las derivadas en 4-momentos de cantidades bare son cero e identidades como la de la ecuación (2.44):

$$Z_{(m^2)} = Z_\psi Z_g = 1. \quad (2.55)$$

Nuestros últimos ingredientes son la evolución de la constante de acoplamiento del vértice quark-gluón g y de la masa del gluón m . Para realizar este estudio deberíamos aplicar las ideas del método de grupo de renormalización de cantidades como el vértice quark-anti quark-gluón en la misma aproximación, estas ideas fueron implementadas recientemente [24]. Sin embargo, vamos a seguir un procedimiento mucho más sencillo, y que da resultados similares. Escribimos entonces un acoplamiento $g(p)$ que cuando p se encuentre en la región UV tenga la forma del acoplamiento de QCD y que a momentos bajos se congele:

$$g^2(\mu) = \frac{g_0^2}{1 + \beta_0 g_0^2 \ln\left(\frac{\mu^2 + x^2 m^2}{x^2 m^2}\right)}. \quad (2.56)$$

Donde g_0 es una “constante de acoplamiento” que regula la amplitud máxima de g , y x es un parámetro que fija la escala para la cual se congela $g(p)$ (en nuestro trabajo elegimos $x = 5$). El factor β_0 en el denominador está para recuperar la forma de $g^2(\mu)$ de QCD en el límite UV. Su valor está dado por la ecuación [29]:

$$\beta_0 = \frac{1}{16\pi^2}(11/3N_C - 2/3N_f). \quad (2.57)$$

Por otro lado, consideramos la masa del gluón $m(p)$ fija debido a que se ha estudiado que al orden 1-loop los datos que mejor ajustan al lattice reproducen una masa de gluón constante a lo largo del flujo de renormalización [36].

2.8. Constantes de acoplamiento de la interacción entre gluones y gluón-ghost

Esta sección se encuentra al final del marco teórico no por su falta de importancia, sino que porque necesitamos tener en cuenta conceptos del método de grupo de renormalización. Vamos a justificar la parte de la aproximación Rainbow Improved que descarta las interacciones entre gluones y la interacción gluón-ghost.

Como se explica en [14] el modelo para QCD que presentamos en la sección 2.1 puede pensarse como un modelo puramente fenomenológico, donde la masa

del gluón se introduce como un parámetro a fijar para obtener concordancia con los datos del lattice. Alternativamente puede pensarse como un modelo que podría deducirse de primeros principios encontrando algún método (hasta ahora desconocido) para fijar correctamente el gauge (problema de las copias de Gribov en el método de Fadeev Popov [3]). En cualquiera de los casos, al ser un modelo fenomenológico vamos a utilizar alguna información del estudio de QCD en el lattice (euclideo) para nuestro trabajo.

Como mencionamos en la sección 2.4 para poder justificar la aproximación Rainbow Improved utilizamos que la constante de acoplamiento de los vértices entre gluones y gluón-ghost eran pequeñas. Lo primero que recordamos es que se puede ver que en QCD el parámetro de desarrollo perturbativo en loops es en realidad $\lambda(q)$ que toma la forma [29]:

$$\lambda(q) = \frac{N_C g^2(q)}{16\pi^2} \equiv \frac{N_C \alpha_S(q)}{4\pi}. \quad (2.58)$$

Donde definimos $\alpha_S(q)$ la constante de acoplamiento de Taylor, que se define a partir del vértice gluón-ghost-anti ghost [37]. Como vimos en la sección 2.6 las constantes de acoplamiento dependen del 4-momento, y su running queda definido a partir de la forma de funciones calculadas a partir de la teoría bare. Por un lado la constante de acoplamiento de las interacciones entre gluones y la interacción ghost-gluón puede definirse a partir del vértice ghost-gluón en la teoría de Yang-Mills (YM) (QCD sin quarks). Mostramos en la figura 2.7 los resultados de la simulación del lattice para la constante de acoplamiento de Taylor asociada. En la figura podemos ver que en el UV y en el IR el acoplamiento se hace cero, mientras que para valores intermedios toma su valor máximo no mayor a 1.3. Si tenemos en cuenta que el verdadero parámetro de desarrollo en el desarrollo en loops es $\alpha_S N_C / (4\pi)$ obtenemos para $\lambda(q)$ valores máximos de alrededor de 0.3.

Por otro lado, la constante de acoplamiento del quark y el gluón se calcula a partir del vértice quark-gluón en QCD. En las simulaciones numéricas del lattice se obtienen valores máximos de esta constante de acoplamiento de hasta 2 o 3 veces mayores que para las interacciones entre gluones y ghost [39]. Es por eso que en la aproximación Rainbow Improved no podemos despreciar esta interacción.

Si bien en este trabajo despreciamos las constantes de acoplamiento de las interacciones de gluones y ghosts, se puede introducir estas interacciones

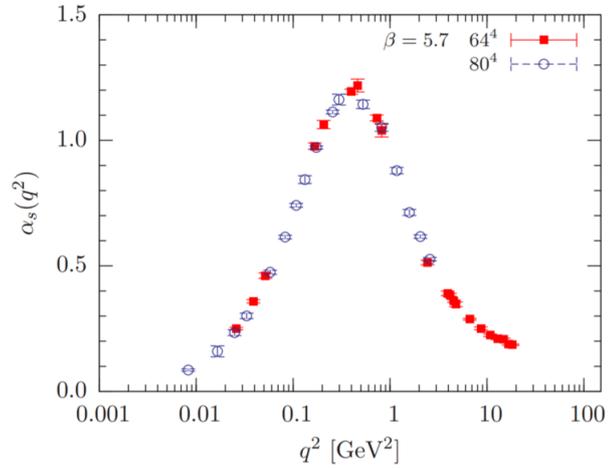


Figura 2.7: Constante de acoplamiento de Taylor para la constantes de acoplamiento de interacción gluón-gluón, gluón-gluón-gluón y gluón ghost (64^4 y 80^4 son los tamaños del lattice y β está definido a partir de la constante de acoplamiento renormalizada). Figura tomada de [38]

perturbativamente. Esta idea fue implementada en un trabajo reciente a primer orden en teoría de perturbaciones [24].

Capítulo 3

Metodología

En esta sección vamos a mostrar el método que utilizamos para calcular el propagador del quark en la aproximación Rainbow Improved. Luego, mostraremos la forma de implementar el método para 1- ecuaciones de juguete, 2- las ecuaciones utilizando grupo de renormalización con una prescripción a una escala $\mu = 10\text{GeV}$ y 3- las mismas ecuaciones pero con una prescripción a una escala $\mu = 1\text{GeV}$.

3.1. Métodos de recurrencia para resolver sistemas de ecuaciones

Recordamos que nuestro interés principal es resolver el sistema de ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.54) y lo vamos a hacer de forma numérica. Este sistema de ecuaciones se puede escribir de forma más general como el sistema de ecuaciones funcionales:

$$\left\{ \begin{array}{l} f^1(p) = F^1[\{f^i(q)\}], \\ f^2(p) = F^2[\{f^i(q)\}], \\ f^3(p) = F^3[\{f^i(q)\}], \\ f^4(p) = F^4[\{f^i(q)\}]. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^2(p) = F^2[\{f^i(q)\}], \\ f^3(p) = F^3[\{f^i(q)\}], \\ f^4(p) = F^4[\{f^i(q)\}]. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^3(p) = F^3[\{f^i(q)\}], \\ f^4(p) = F^4[\{f^i(q)\}]. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f^4(p) = F^4[\{f^i(q)\}]. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Donde el índice i recorre los valores $\{1, 2, 3, 4\}$ y una de las ecuaciones es la relación entre M y M' :

$$M(p) = M(p_0) + \int_{p_0}^p dq M'(q). \quad (3.5)$$

El resto las ecuaciones representan a las relaciones (2.52), (2.53) y (2.54), donde de las $\{f^j\}$ representan a las cantidades M' , γ_ψ y Z_ψ y las $\{F^j\}$ son funcionales que dependen de las funciones $\{f^j(q)\}$. Luego de reescribir las ecuaciones de esta forma, vamos resolver el sistema de ecuaciones estudiando la convergencia de los mapas definidos como:

$$f_{n+1}^j(p) \equiv F^j[\{f_n^i(q)\}]. \quad (3.6)$$

Donde elegimos las funciones f_0^j para ser funciones suaves de p . A diferencia de la ecuación para M , el resto de las ecuaciones funcionales son no locales, es decir, las funciones $\{f_n^j(q)\}$ deben estar definidas para un intervalo de 4-momentos p , en este caso, infinito. Por lo tanto, para calcular el paso $n + 1$ a partir del paso n vamos a necesitar en principio un número infinito de ecuaciones. Si las sucesiones convergen, quiere decir que el límite de la sucesiones $\{f_n^j\}$ son solución al sistema de ecuaciones $\{(3.1) - (3.4)\}$. Por la forma de este sistema de ecuaciones nos referimos a este enfoque de estudio como método de recurrencia.

Como ya mencionamos, vamos a considerar un enfoque numérico para resolver el problema, esto lo hacemos reduciendo el espectro continuo e infinito de momentos a un espectro discreto y acotado por una escala Λ , que llamamos red. La primera aproximación va a estar justificada si la solución que encontramos no varía demasiado entre cada paso de la red y la segunda si la forma en el infinito de las funciones f^j no contribuye demasiado en los funcionales F^j , por lo que podemos desprestigiar su peso. Por ejemplo, si encontramos que $Z_\psi(p) \approx 1$ y $M(p) \approx 0$ para $p > \Lambda$, como deberíamos tener en el UV en QCD (ver por ejemplo [18]), entonces se puede ver que las contribuciones en esta zona de las integrales en las ecuaciones (2.52), (2.53) y (2.54) son prácticamente cero. En nuestro caso tomamos como cota superior para el módulo del 4-momento de $\Lambda = 10\text{GeV}$ y un paso de la red dp de 0.1GeV . La última consideración que tomamos es que, para evitar divergencias espúreas al evaluar las ecuaciones para el módulo de 4-momento nulo, tomamos el inicio de la red en dp en vez de en 0 GeV .

Para poder hallar la convergencia de las ecuaciones (2.26) y (2.27) utilizamos el “método de recurrencia”. Puede surgir la pregunta: ¿ofrece el método de recurrencia una solución única el sistema de ecuaciones $\{(3.1) - (3.4)\}$ independiente a las condiciones iniciales $\{f_0^i(p)\}$?

Para simplificar el argumento consideremos el siguiente ejemplo: $f(x) + f(x)^2 = 0$, y buscamos por el método de recurrencia una solución para $f(x)$. Esto es, tenemos $f_n(x)$ que satisface: $f_n(x) = -f_{n-1}(x)^2$ y definiendo $f_0(x)$ buscamos una solución a la sucesión $f_n(x)$.

Una posibilidad es considerar la familia de funciones constantes $y(x) = y$ como condiciones iniciales. En este caso eso implica que el problema se reduce a encontrar el límite de la sucesión $y_n = -y_{n-1}^2$ dado y_0 . Resulta evidente que si $y_0 = 0$ o $y_0 = -1$ la sucesiones respectivas a cada condición inicial serán constantes. Es decir, encontramos dos posibles soluciones al problema $f(x) + f(x)^2 = 0$ dadas dos condiciones iniciales. Yendo más allá, como en este caso $f_n(x)$ depende únicamente del valor de f_{n-1} en x , entonces conocemos una familia infinita de soluciones a nuestro problema, aquellas que toman los valores 0 o -1 para los distintos valores de x . Si bien el ejemplo es trivial, debido en parte a que no hay relación entre los mapas $f_n(x)$ cuando cambiamos x , nos permite ver que podría existir más de una solución válida a nuestro problema, dependiendo de la familia de ecuaciones estudiadas.

3.2. Modelo de juguete

Como dijimos, antes de atacar el problema real de resolver el sistema de ecuaciones $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$, vamos a atacar un problema de “juguete”. Este problema va a ser el de resolver el sistema de ecuaciones (2.26) y (2.27) con el método presentado en la sección anterior. Así, vamos a tener los mapas:

$$\begin{cases} A_{n+1}(p^2) = 1 - g^2 C_F \int_q^\Lambda \tilde{A}_n(q^2) \frac{f(q,p)}{(p+q)^2 + m^2}, & (3.7) \\ B_{n+1}(p^2) = M + g^2 C_F \int_q^\Lambda \tilde{B}_n(q^2) \frac{3}{(p+q)^2 + m^2}. & (3.8) \end{cases}$$

Donde definimos \tilde{A}_n y \tilde{B}_n en función de A_n y B_n de la misma manera que definimos \tilde{A} y \tilde{B} en función de A y B (ver ecuación (2.22)). Para tratar las ecuaciones (3.7) y (3.8) observamos que los integrandos solo dependen del 4-momento q a través de su módulo (que vamos a notar también q) y del ángulo que forma respecto a p , que llamamos θ . Teniendo en cuenta la ecuación (2.22) y trabajando con coordenadas polares vamos a tener que ambas integrales son

de la forma:

$$4\pi \int_0^\Lambda \frac{dq}{(2\pi)^4} q^3 \frac{1}{p^2 + [B(p^2)/A(p^2)]^2} \int_0^\pi d\theta \sin^2(\theta) \frac{G(q, \cos(\theta))}{p^2 + q^2 + 2pq \cos(\theta) + m^2}. \quad (3.9)$$

Usando el cambio de variables $x = \cos(\theta)$ obtenemos:

$$2 \int_0^\Lambda \frac{dq}{(2\pi)^3} q^3 \frac{1}{p^2 + [B(p^2)/A(p^2)]^2} \int_{-1}^1 dx \sqrt{1-x^2} \frac{G(q, x)}{q^2 + p^2 + 2pqx + m^2}. \quad (3.10)$$

Las integrales en la variable x se pueden evaluar analíticamente (factorizando de $G(q, x)$ $1/A$ o $1/B$ en el caso que corresponda) y finalmente obtenemos dos ecuaciones para A_{n+1} y B_{n+1} . La forma de estas integrales no son particularmente reveladoras, por lo que omitimos escribirlas aquí ya que de todas formas no vamos a obtener soluciones analíticas para A y B , sino que numéricas. Las integrales a resolver son unidimensionales y usamos un método de integración numérica adaptativo.

Para terminar con la descripción del método para resolver el modelo juguete, mencionamos que los parámetros libres son la constante de acoplamiento bare de la interacción quark gluón g y las masas bare del quark y del gluón M y m respectivamente. Como vamos a estar interesados en estudiar el rompimiento de simetría quiral para masa bare del quark cercanas a cero, vamos a tomarla pequeña y vamos a estudiar el comportamiento de las soluciones al variar la constante de acoplamiento g . Mientras tanto, la masa bare del gluón la tomamos como parámetro fijo. Elegimos las condiciones iniciales en todos los casos como A_0 y B_0 constantes.

3.3. Método para encontrar las soluciones al problema para las ecuaciones con Grupo de Renormalización

Vamos a estudiar el método numérico para la resolución del sistema de ecuaciones $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$. La gran diferencia que vamos a encontrar con el estudio de las ecuaciones (2.26) y (2.27) estudiadas en la sección anterior es que ahora vamos a fijar una escala de renormalización. Es decir, a la escala,

que llamamos μ_0 , debemos imponer la prescripción dada por la ecuación (2.43). Viendo las ecuaciones (2.49), (2.50) y (2.51) observamos que vamos a tener el parámetro libre de la masa del quark a la escala μ_0 , que llamamos M_0 , y que debemos imponer la condición:

$$M(\mu_0) = M_0. \quad (3.11)$$

Como fue discutido en la sección 2.2, uno de los aspectos importantes que debe presentar una buena teoría para las IF es el rompimiento espontáneo de simetría quiral a bajas energías, pero con una simetría quiral aproximada a altas energías. Por lo tanto vamos a tratar el límite $M_0 \rightarrow 0$ en el caso que la escala μ_0 se encuentre en el límite UV. Como en el caso de las ecuaciones de juguete, vamos a tener además los parámetros libres m , la masa del gluón, y g , la constante de acoplamiento de la interacción quark-gluón. Por los mismos motivos que antes, mantenemos la masa del gluón fija, y el parámetro g lo variamos variando g_0 (ver ecuación (2.56)). Deberíamos encontrar, para un sector de constantes de acoplamiento g_0 , una fase no quiral en el IR (donde la simetría quiral aproximada del UV desaparece a bajas energías).

Lo primero que vamos a hacer entonces es tomar la escala $\mu_0 = \Lambda = 10 \text{ GeV}$, la escala a la cual realizamos el “cut-off”. A esta escala nos encontramos en la zona en la que vale teoría de perturbaciones en *QCD* [18], donde los cálculos indican que algunos quarks son poco masivos (los relacionados con la ruptura espontánea de simetría quiral), por lo que tiene sentido entonces usar masas pequeñas M_0 a esas escalas.

Como veremos en la sección de resultados o en trabajos previos (por ejemplo [23]) al trabajar a esas escalas de renormalización μ_0 superamos ampliamente la zona para la cual podemos despreciar la cola de las soluciones de $M(p)$ y $Z_\psi(p)$ en las integrales del sistema {(2.52), (2.53), (2.54)} (régimen para el cual vale $M(p) \approx 0$ y $Z_\psi(p) \approx 1$). Esto causa que la prescripción del grupo de renormalización al variar M_0 a esta escala no tenga tanto efecto en la convergencia de la sucesión $\{M_n, M'_n, Z_{\psi,n}, \gamma_{\psi,n}\}$, lo que hace que tengamos un flujo lento en la evolución de $M_n(p)$ y $Z_{\psi,n}(p)$. Aún así, podemos encontrar, a partir de los resultados de la convergencia de dicha sucesión (gran esfuerzo computacional mediante), valores para $M(p)$ consistentes con el desarrollo Rainbow Improved para distintas constantes de acoplamiento g y masas de quark a escala Λ , $M(\mu_0 = \Lambda) = M_0$.

Una de las preguntas que puede surgir es cuánto mejora la velocidad de la convergencia de dicho algoritmo si achicamos la escala de prescripción de grupo de renormalización. Definimos por comodidad $M_{\Lambda, g_0}(p)$ como los datos obtenidos para $M(p)$ para la prescripción de renormalización a la escala Λ a una constante de acoplamiento definida a partir de g_0 . Vamos a estudiar entonces la convergencia de las soluciones utilizando la prescripción $M(\mu_0 = 1\text{GeV}) = M_{\Lambda, g_0}(1\text{GeV})$.

Teniendo en cuenta que en el enfoque original del estudio de las sucesiones asociadas a $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$ la parte que contribuye más al cambio de $M_{n+1}(p)$ y $Z_{n+1, \psi}(p)$ es la de momentos más bajos, y con motivo de encontrar un enfoque de convergencia más rápida, redefinimos el esquema de las sucesiones de la ecuación (3.6):

$$f_{n+1, r+1}(p) \equiv \begin{cases} f_{n+1, r}(p) & \text{si } p \neq p_{r+1}, \\ F[\{f_{n+1, r}\}](p) & \text{si } p = p_{r+1}, \end{cases}$$

con

$$\{p_1 = 10 dp; p_2 = 9 dp; \dots; p_{10} = dp; p_{11} = 11 dp; \dots; p_{100} = 100 dp\}, \quad (3.12)$$

y

$$dp = 0.1\text{GeV},$$

donde $f_{n+1, 0} = f_n$ y definimos $f_{n+1} \equiv f_{n+1, 100}$. Cada una de las funciones $f_{n+1, r}$ debe verse como un paso intermedio para calcular f_{n+1} . Está claro que, para cuando f_n refiere a M vamos a tener $f_{n, r}(1\text{GeV}) = \text{cte}$. Mostramos el cambio de método en la figura 3.1. Como vemos en el segundo recuadro, correspondiente al nuevo método, vamos actualizando los valores de f_{n+1} primero desde 1GeV hasta 0.1GeV y luego desde 1.1GeV hasta 10GeV , ya que de esta forma la imposición de la prescripción del GR tiene más efecto sobre la “parte relevante” ecuaciones.

Destacamos que si logramos una convergencia rápida de los mapas para el sistema de ecuaciones $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$ al cambiar la escala de prescripción de grupo de renormalización, entonces vamos a poder encontrar una manera más eficiente para encontrar valores para los parámetros libres g y m que tengan un buen fit respecto a los datos del lattice al usar la aproximación

RI.

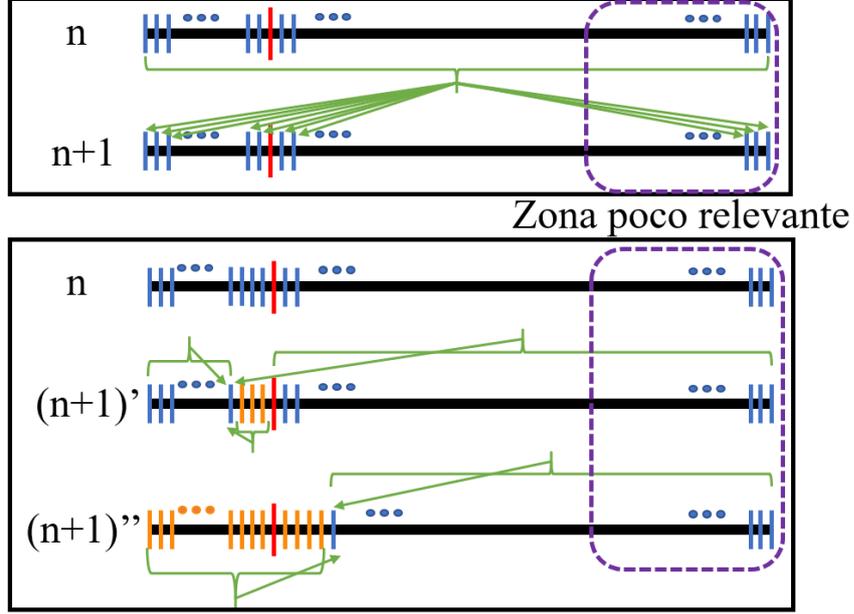


Figura 3.1: Las líneas verticales azules representan la discretización del momento. Las flechas verdes apuntan a los puntos a ser calculados del mapa $n+1$. Cada flecha parte de llaves verdes que marcan la dependencia del punto señalado. En el primer esquema (recuadro superior), cada punto del paso $(n+1)$ depende únicamente de los valores de los puntos del paso anterior, por este motivo la llave verde se mantiene fija señalando todos puntos del mapa en el paso n . En el segundo esquema (recuadro inferior), los puntos naranjas son puntos cuyos valores en el paso $n+1$ ya fueron calculados. Los pasos intermedios $(n+1)'$ y $(n+1)''$ señalan el cambio de p_r con $r < 9$ a p_r con $r > 9$ (ecuación (3.12)). El mapa $n+1$ queda definido cuando pintamos todos los puntos de naranja. Además, en violeta queda señalada la escala poco relevante a las integrales en el sistema de ecuaciones {(2.52), (2.53), (2.54)}.

Por último, mencionamos la manera de implementar el mapa para $M(p)$ en función del mapa para $M'(p)$. Habíamos escrito la ecuación (3.5), en vez, podemos escribir la relación entre $M'(p)$ y $M(p)$ (ya que vamos a considerar una discretización del espacio de 4-momentos) a partir de la discretización de la derivada:

$$M'(p) = \frac{M(p+dp) - M(p)}{dp}. \quad (3.13)$$

De esta manera, sustituyendo M' en la ecuación (2.52), eliminamos una de las ecuaciones funcionales en el sistema $\{f^i\}$, quedándonos así 3 ecuaciones que definen los mapas para las funciones $\{M, Z_\psi, \gamma_\psi\}$.

Capítulo 4

Presentación de los datos, Análisis, Discusión

4.1. Estudio sin Grupo de Renormalización

En esta sección estudiamos computacionalmente el sistema de ecuaciones dado por $\{(2.26), (2.27)\}$ al: variar la constante de acoplamiento de la interacción quark-gluón g y la masa bare del quark M , y manteniendo m la masa bare del gluón fija. Para esto, estudiamos la convergencia de la sucesión de funciones $A_n(p)$ y $B_n(p)$ que evolucionan según las ecuaciones (3.7) y (3.8) y a partir de esto estudiamos la masa vestida del quark $M(p) \equiv B(p)/A(p)$ a 4-momento cero y M cero para diferentes constantes de acoplamiento g . Mostramos en la figura 4.1 los resultados de una de las iteraciones para A_n y B_n . Encontramos en este modelo, para esta configuración de constantes M y g que A tiende a 1 en el UV y que $B(p)$ tiende a cero lentamente en el UV. Esto es esperable ya que sabemos que la teoría de perturbaciones en el modelo de Curci-Ferrari funciona bastante bien sin utilizar grupo de renormalización [12] (aunque existen los problemas de los grandes logaritmos en el UV, por lo que la convergencia de B a cero en este régimen no es tan rápida como podría esperarse).

Vale notar que si $B_0(p) = 0$ y $M = 0$ entonces (2.27) se reduce a $B_n(p) = 0$ desacoplando el sistema de ecuaciones de manera trivial. Como fue mencionado en la sección 3.1, es posible encontrar más de una solución dado el sistema de ecuaciones $\{(2.26), (2.27)\}$ y la convergencia a cada una de las posibles soluciones va a depender de las condiciones iniciales $A_0(p)$ y $B_0(p)$. Estamos

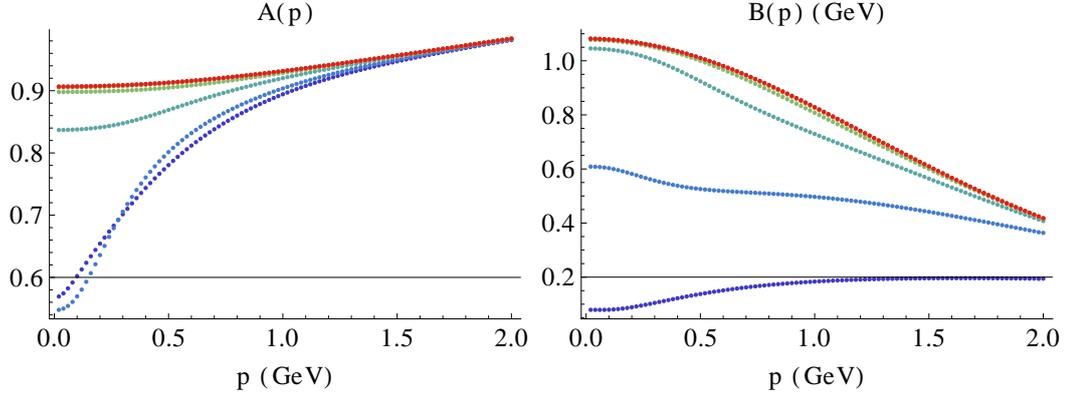


Figura 4.1: Convergencia de $A(p)$ y $B(p)$ para una constante de acoplamiento del quark $g = 6$ y una masa bare del quark $M = 0.02 GeV$. Los diferentes colores señalan los pasos de la convergencia del algoritmo (de azul a rojo).

interesados en conocer las soluciones a las ecuaciones (2.26) y (2.27) dado que $M = 0$. Si fijamos $M = 0$ corremos el riesgo de encontrar una solución que solo contemple el caso $B(p) = 0$ (ya que sería una posible solución). Con motivo de no correr el riesgo de perder otra solución no trivial consideramos las condiciones iniciales: $M = cte \neq 0$ y $A_0 = 1$ (propagador bare). Entonces, para calcular $B(p = 0; M = 0)$ en función de g consideramos, para los distintos g el límite de $B(p = 0; M = 0^+)$. De esa forma obtenemos los resultados de la gráfica de la figura 4.2

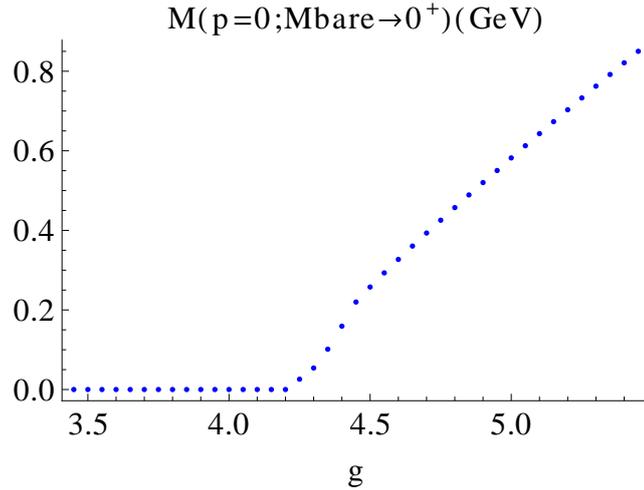


Figura 4.2: $M(p = 0; M = 0^+)$ en función de g .

En este gráfico mostramos $M(p = 0; M = 0^+)$ en función de g , y podemos observar un comportamiento su crítico para $g \approx 4$. Este comportamiento muestra que la solución $M(p) = 0$ pierde estabilidad para una constante de

acoplamiento crítica g_C . Existe un rango en la constante de acoplamiento g para la cual encontramos que la solución estable respeta la simetría quiral en el IR (fase simétrica) y para $g > g_C$ encontramos que se rompe la simetría quiral en el IR (fase rota).

Es interesante destacar que aunque los resultados obtenidos en el UV no son buenos cualitativamente, sí podemos ver que en el IR el modelo presenta el comportamiento esperado (existe una fase rota). Esto es lo esperado, ya que, como ya hemos mencionado, el grupo de renormalización sirve para regular el comportamiento de las cantidades para energías mucho mayores a las masas del sistema.

Por otro lado, podemos ver por la forma de $B(p)$ el cut-off a la escala $\Lambda = 2GeV$ de la ecuación no está bien justificado, debido a que $B(\Lambda)$ no es lo suficientemente chico como para poder desprestigiar el efecto de $B(p > \Lambda)$ en las integrales del sistema $\{(2.26), (2.27)\}$. Sin embargo, no pretendemos buscar escalas mayores debido a que como mencionamos en la sección 2.6, los cut-off pueden considerarse correctos para estudiar procesos a escalas de energía característica del proceso, si consideramos cut-off mayores, ganaríamos al tener menos de la función B para desprestigiar, pero perderíamos en tener una menor justificación del cut-off para obtener el comportamiento cualitativo a bajas escalas de energía.

4.2. Estudio con Grupo de Renormalización y prescripción a la escala $\mu_0 = 10GeV$

Ya vimos que al aplicar las ideas de grupo de renormalización a las ecuaciones (2.26) y (2.27) obtenemos el sistema de ecuaciones $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$. Realizamos ahora el estudio de estas ecuaciones al utilizar con una escala de prescripción del GR a la escala $\mu_0 = \Lambda = 10GeV$.

De igual forma que con las ecuaciones en las que no aplicamos el GR, observando la ecuación (2.52), vemos un desacople de las ecuaciones con la masa $M(p)$ si $M(p)=0$ inicialmente. Vamos a tener que siempre existe una solución donde la simetría quiral se mantiene a lo largo del espectro de 4-momentos. Considerando el mismo procedimiento que utilizamos para el caso “no renormalizado” y teniendo en cuenta que debemos fijar $M(p = \Lambda) = M_0$ obtenemos convergencias para $M(p)$ y $Z_\psi(p)$ del estilo del como las que se

muestra en la figura 4.2).

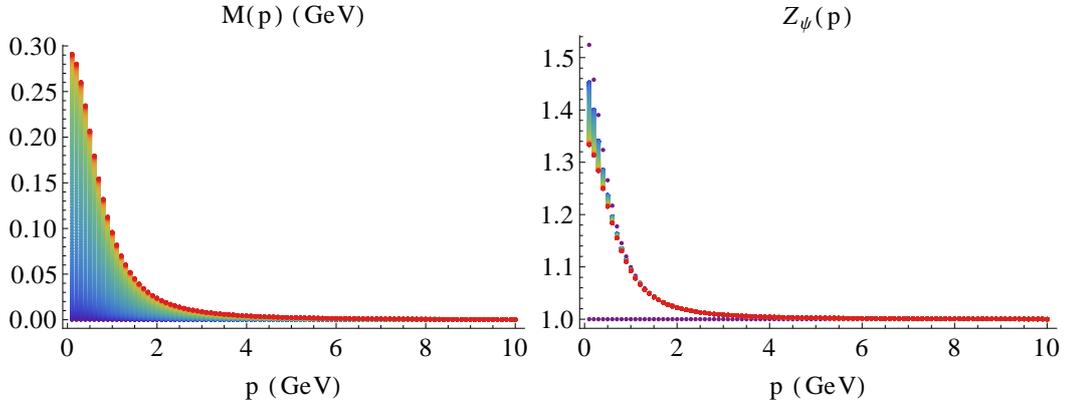


Figura 4.3: Convergencia de $M(p)$ y Z_ψ con $g_0 = 6.8$ y $M(\Lambda) = 0.0003 GeV$. Los diferentes colores señalan los pasos de la convergencia del algoritmo (de azul a rojo).

Vemos que para esta configuración de parámetros (g_0 y M_0) encontramos que existe una solución estable al sistema de ecuaciones en el que la simetría quiral aproximada del UV se rompe en el IR, obteniendo una masa a momento cero que no tiende a cero aún en el límite quiral. En el estudio se eligió una masa de los quarks extremadamente pequeña. Es decir, aún más pequeña que las masas físicas de los quarks livianos (que son del orden de unos pocos MeV). Por otro lado, encontramos que a escalas UV, $Z_\psi(p)$ y $M(p)$ hacen que el propagador vestido del quark tenga la forma del propagador bare, lo que indica que los parámetros perturbativos se vuelven muy pequeños y los términos dominantes son los de menor orden en constantes de acoplamiento (como es esperable en el modelo de C-F). Este comportamiento además valida el haber tomado el cut-off a la escala $\Lambda = 10 GeV$ (ver la sección 3).

Para calcular el límite $M(p = 0; M(\Lambda) \rightarrow 0^+)$ ¹ realizamos una extrapolación lineal teniendo en cuenta los resultados para $M(p = 0; M(\Lambda))$ con $M(\Lambda)$ cercanos a cero. Mostramos este procedimiento en la figura 4.4a, donde cada color diferente corresponde a un g_0 distinto. Vemos en general que cuanto mayor es la masa a la escala Λ , mayor es la masa a momento nulo pero sin embargo, existen constantes de acoplamiento para las cuales el límite $M(p = 0; M(\Lambda) \rightarrow 0^+)$ no es cero, y de hecho, crece con la constante de acoplamiento g_0 . Para ver este efecto, mostramos la figura 4.4b, donde tomamos la

¹Estrictamente hablando, el límite $M \rightarrow 0$ debe tomarse en la extrapolación de $M(\Lambda)$ para $\Lambda \rightarrow \infty$. Sin embargo, a los efectos prácticos $\Lambda = 10 GeV$ es muy grande y en ese punto los valores de las masas que corresponden al límite quiral son extremadamente pequeñas y, a los efectos de nuestro cálculo, pueden tomarse nulas.

extrapolación lineal al 4-momento cero como valor de $M(p = 0; M(\Lambda) = 0)$ y lo graficamos en función de g_0 . Encontramos como en el caso no renormalizado un comportamiento crítico, solo que ahora la constante de acoplamiento crítica g_C es mayor que para el primer caso (cuando no usamos GR). Entender dicha diferencia requeriría un estudio más detallado. Nuevamente vemos que para $g > g_C$ aparece una solución estable distinta a la trivial y que se caracteriza por mostrar una ruptura de simetría quiral en el IR. Como ya mencionamos, este comportamiento era esperable conociendo el comportamiento de las soluciones del caso renormalizado, ya que, el cut-off realizado en el estudio anterior nos permite ver el comportamiento de manera cualitativa para 4-momentos bajos.

Definimos la convergencia del proceso iterativo cuando la diferencia numérica entre un paso y el siguiente es menor a cierto margen de error (que elegimos $0.1 MeV$). Por último mostramos en la figura 4.5, el gráfico del número de pasos necesarios para alcanzar la convergencia (promedio de la convergencia para las distintas masas $M(p = \Lambda)$) a la solución en función de las distintas constantes de acoplamiento. Como es sabido, en las transiciones de fase de segundo orden, cerca del comportamiento crítico la longitud de correlación se vuelve infinita, es por eso que esperamos que las convergencias cerca de g_C sean más lentas (ya que el sistema necesita “tener en cuenta” un mayor espectro de grados de libertad (4-momentos)).

4.3. Estudio con Grupo de Renormalización y prescripción a la escala $\mu_0 = 1 GeV$.

En el siguiente trabajo buscamos las soluciones de las ecuaciones $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$ pero ahora con otra prescripción del grupo de renormalización. Más precisamente, en esta sección estudiamos el problema empleando una escala de renormalización distinta. Como fue explicado en la sección 3.3, para conocer el valor de $M(p = \mu_0 = 1 GeV) = M_0$ que sea compatible con la aproximación Rainbow con una constante de acoplamiento g dada y con una masa pequeña a escalas UV, usamos los datos obtenidos de la sección anterior. Es de particular interés conocer la convergencia de las sucesiones asociadas a $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$ definidas en la sección 3.3. Recordamos que para la escala de renormalización $\mu_0 = 1 GeV$ cambiamos la definición de las suce-

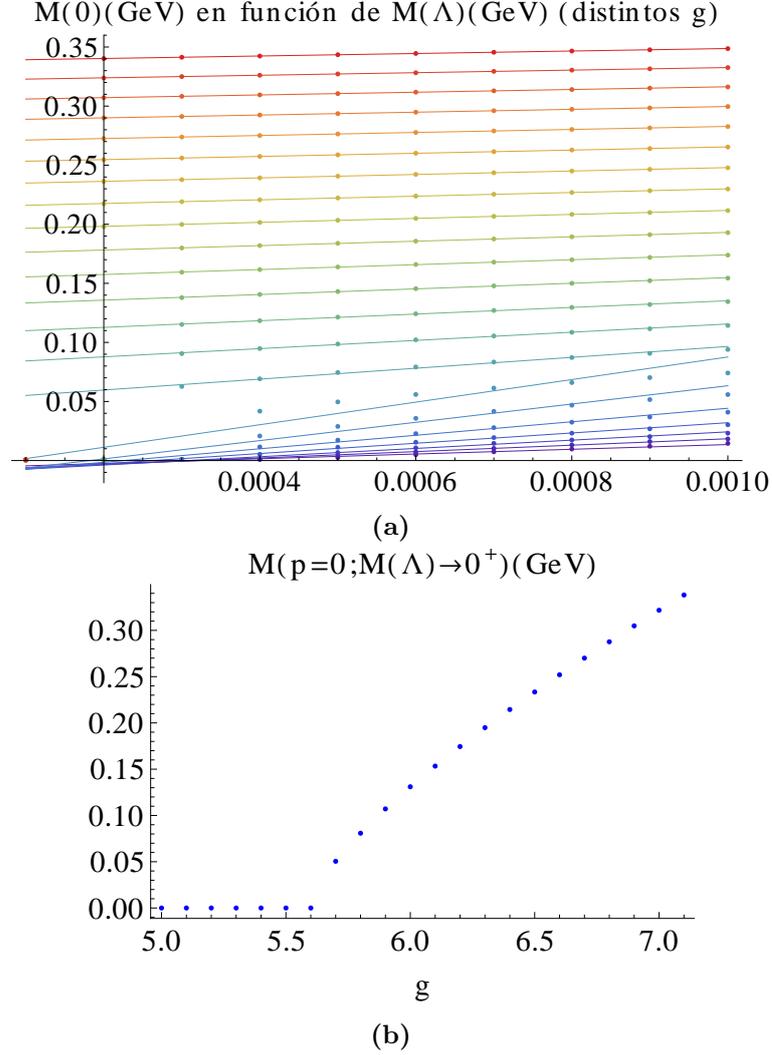


Figura 4.4: En la gráfica (a) mostramos la extrapolación que utilizamos para obtener $M(p=0; M(\Lambda) = 0^+)$ para las distintas constantes de acoplamiento y en (b) mostramos la gráfica de $M(p=0; M(\Lambda) = 0^+)$ en función de g_0 .

siones asociadas a $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$ para optimizar la convergencia a sus soluciones.

Observamos en la figura 4.4a que para el régimen $g_0 > g_C$ no podemos recuperar una solución no trivial ($M(p) \neq 0$) para valores de $M(\mu) < M_\Lambda(\mu; M_\Lambda(\Lambda) \rightarrow 0^+)$. Esto es porque, dado g_0 , $M_\Lambda(p = 1\text{GeV}; M_\Lambda(\Lambda))$ toma su valor mínimo cuando $M_\Lambda(\Lambda) \rightarrow 0^+$. Este es uno de los motivos por los cuales, para tener una prescripción de GR a 1GeV compatible con $M_\Lambda(\Lambda) > 0$, debemos utilizar los datos obtenidos en la sección anterior.

En la figura 4.6 podemos ver un ejemplo del comportamiento comparativo de la convergencia usando las diferentes prescripciones. En el caso de la pres-

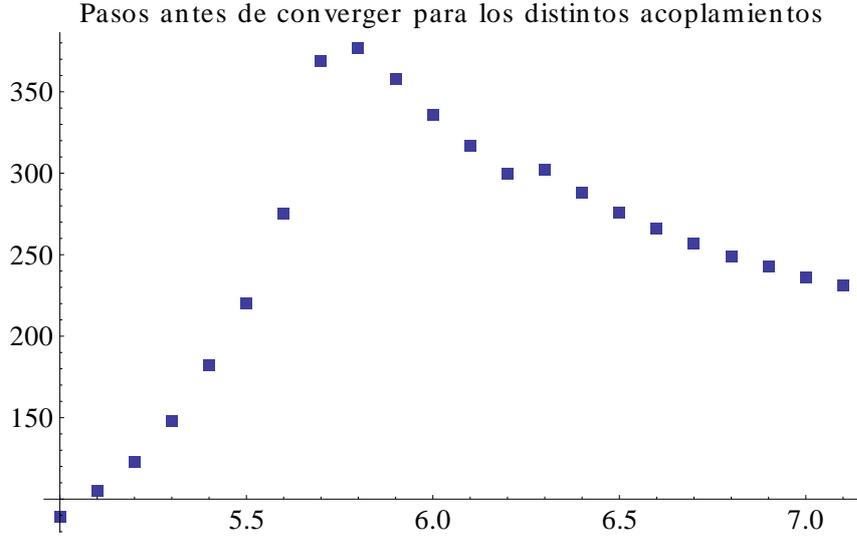


Figura 4.5: Número de pasos antes de que converja el algoritmo iterativo (el máximo tomado para el número de pasos para las distintas masas) en función de la constante de acoplamiento g_0 .

cripción en $\mu_0 = 1\text{GeV}$ la convergencia es dos órdenes de magnitud más rápida que para la prescripción en $\mu_0 = 10\text{GeV}$. Esto puede explicarse teniendo en cuenta que los procesos que nos interesan son a bajas escalas de energía (ruptura de simetría quiral en el IR), y la renormalización a escala menor tiene más efecto en los procesos a bajas energías (ver la sección 2.6).

Las consideraciones hechas acerca de la forma de las soluciones al sistema de ecuaciones $\{(2.52), (2.53), (2.54)\}$ ya fueron realizadas en la sección anterior, el análisis es exactamente el mismo. Sin embargo, concluimos esta sección recordando que una de las implicancias más importantes de estos resultados es que podemos tener un esquema numérico que permite tener en cuenta un número infinito de diagramas de Feynman (aproximación Rainbow Improved) cuya convergencia es mucho más rápida que en el esquema utilizando la escala de prescripción a 10GeV . Estos resultados pueden ser de gran utilidad si lo que buscamos es obtener un modelo cuyos parámetros libres (acoplamiento de la interacción gluón-ghost, masa del quark a escala de prescripción μ_0 y masa del gluón) estén ajustados a partir de una optimización entre los resultados del propagador del quark del lattice y los resultados de la aproximación Rainbow Improved.

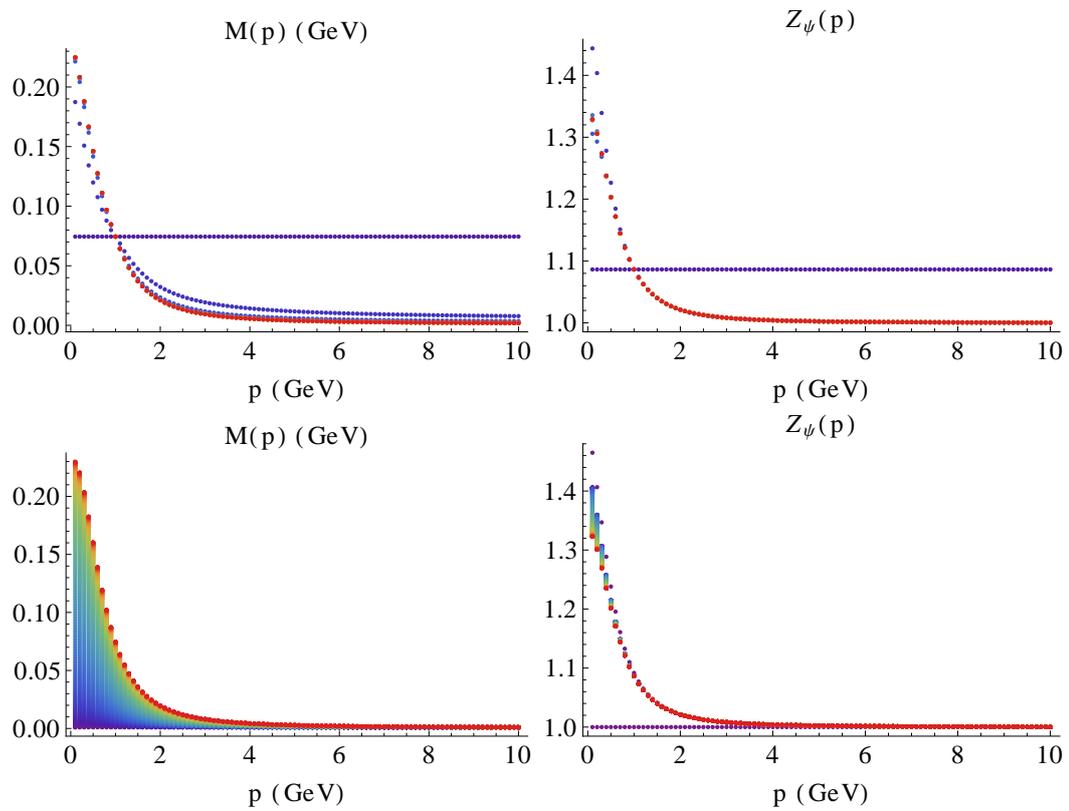


Figura 4.6: Convergencia $g_0 = 6.4$, las primeras dos imagenes son para $M(p; \mu)$ y $Z_\psi(p; \mu)$ tales que $M(\mu; \mu) = M(\mu; \Lambda)$ con la prescripción $M(\Lambda; \Lambda) = 0.001 GeV$ y las dos segundas imagenes $M(p; \Lambda)$ y $Z_\psi(p; \Lambda)$ tales que $M(\Lambda) = 0.001 GeV$. Los diferentes colores señalan los pasos de la convergencia del algoritmo (de azul a rojo).

Capítulo 5

Consideraciones finales

Damos en esta sección un resumen de los resultados obtenidos, discutimos sus implicancias y proyectamos extensiones posibles del trabajo a futuro.

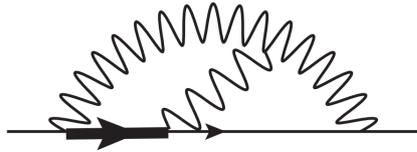
El modelo de Curci-Ferrari es un modelo que permite reproducir los resultados de las simulaciones numéricas con gran precisión (ver por ejemplo [12, 21]). Uno de los resultados que logra predecir es la ruptura espontánea de simetría quiral a escalas infrarrojas. Este resultado solo se puede obtener al considerar un número infinito de diagramas de Feynman [14], y una forma de considerar infinitos diagramas de una manera justificada es con la aproximación Rainbow Improved descrita en esta tesis.

Como mostramos en la figura 4.2, la solución obtenida para la masa del quark refleja esta ruptura de simetría: la masa es casi nula en el UV y adquiere masas finitas en el IR. Sin embargo, nuestro objetivo principal era obtener un método numérico que nos permitiera conseguir la forma del propagador del quark (y así la masa running del quark y su constante de renormalización) en la aproximación Rainbow Improved de manera más eficiente a la que se había encontrado en los trabajos previos.

Como se observa en la figura 4.5, en el régimen de ruptura de simetría quiral en el IR, el primer método (que ya había sido implementado en trabajos anteriores) ofrece una convergencia a las soluciones muy lenta. Esto hace que el ajuste de parámetros, como las constantes de acoplamiento bare, respecto a los resultados del lattice (que sean consistentes con la aproximación Rainbow Improved) sea muy poco eficiente numéricamente. En la figura 4.6, se pueden observar los resultados del nuevo método (ver sección 3), que nos permiten reproducir los resultados del método anterior con solamente 3 iteraciones, res-

pecto a los 232 iteraciones necesarias para la convergencia del método anterior.

No obstante, aún existen maneras de mejorar los resultados obtenidos. Uno de los problemas que presenta la aproximación Rainbow Improved es la falla al describir el comportamiento del factor de renormalización Z_ψ [25]. Esta falla aparece también al considerar el primer orden de teoría de perturbaciones (TP) al calcular el propagador del quark [12]. La causa al problema está asociada a no considerar diagramas que incluyan la interacción entre gluones y gluón-ghost (el primer orden de la TP falla porque solo incluye la interacción quark-gluón). En un trabajo reciente [21] fue realizado el cálculo al siguiente orden en TP del propagador del quark y se obtuvieron mejoras sustanciales para describir la función Z_ψ . Debido a que con una cantidad finita de diagramas los resultados mejoran bastante cualitativamente, el siguiente paso es buscar una continuación de la aproximación RI que contenga este tipo de interacciones. Por ejemplo, considerar el siguiente diagrama:



Para ver una lista más exhaustiva de posibles diagramas a agregar ver [24].

Bibliografía

- [1] H. D. Politzer. “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?” En: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973). Ed. por J. C. Taylor, pp. 1346-1349. DOI: [10.1103/PhysRevLett.30.1346](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1346).
- [2] D. J. Gross F. Wilczek. “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories”. En: *Phys. Rev. Lett.* 30 (1973). Ed. por J. C. Taylor, pp. 1343-1346. DOI: [10.1103/PhysRevLett.30.1343](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.30.1343).
- [3] V. N. Gribov. “Quantization of non-Abelian gauge theories”. En: *Nuclear Physics B* 139.1-2 (1978), pp. 1-19.
- [4] I. M. Singer. “Some Remarks on the Gribov Ambiguity”. En: *Commun. Math. Phys.* 60 (1978), pp. 7-12. DOI: [10.1007/BF01609471](https://doi.org/10.1007/BF01609471).
- [5] I. L. Bogolubsky et al. “Lattice gluodynamics computation of Landau-gauge Green’s functions in the deep infrared”. En: *Physics Letters B* 676.1-3 (junio de 2009), pp. 69-73. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/j.physletb.2009.04.076](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2009.04.076). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2009.04.076>.
- [6] J. S. Schwinger. “On the Green’s functions of quantized fields. 1.” En: *Proc. Nat. Acad. Sci.* 37 (1951), pp. 52-455. DOI: [10.1073/pnas.37.7.452](https://doi.org/10.1073/pnas.37.7.452).
- [7] F. J. Dyson. “The S matrix in quantum electrodynamics”. En: *Phys. Rev.* 75 (1949), pp. 1736-1755. DOI: [10.1103/PhysRev.75.1736](https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.1736).
- [8] C. S. Fischer, A. MaasJ. M. Pawłowski. “On the infrared behavior of Landau gauge Yang–Mills theory”. En: *Annals of Physics* 324.11 (noviembre de 2009), pp. 2408-2437. ISSN: 0003-4916. DOI: [10.1016/j.aop.2009.07.009](https://doi.org/10.1016/j.aop.2009.07.009). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.aop.2009.07.009>.

- [9] A. K. Cyrol et al. “Landau gauge Yang-Mills correlation functions”. En: *Physical Review D* 94.5 (septiembre de 2016). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.94.054005](https://doi.org/10.1103/physrevd.94.054005). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.054005>.
- [10] D. Atkinson J. Bloch. “QCD in the infrared with exact angular integrations”. En: *Mod. Phys. Lett. A* 13 (1998), pp. 1055-1062. DOI: [10.1142/S0217732398001121](https://doi.org/10.1142/S0217732398001121). arXiv: [hep-ph/9802239](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9802239).
- [11] M. Tissier N. Wschebor. “Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory”. En: *Physical Review D* 82.10 (noviembre de 2010). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/physrevd.82.101701](https://doi.org/10.1103/physrevd.82.101701). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.82.101701>.
- [12] M. Tissier N. Wschebor. “Infrared safe perturbative approach to Yang-Mills correlators”. En: *Physical Review D* 84.4 (agosto de 2011). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/physrevd.84.045018](https://doi.org/10.1103/physrevd.84.045018). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.84.045018>.
- [13] G. Curci R. Ferrari. “On a Class of Lagrangian Models for Massive and Massless Yang-Mills Fields”. En: *Nuovo Cim. A* 32 (1976), pp. 151-168. DOI: [10.1007/BF02729999](https://doi.org/10.1007/BF02729999).
- [14] M. Peláez et al. *A window on infrared QCD with small expansion parameters*. 2021. arXiv: [2106.04526](https://arxiv.org/abs/2106.04526) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/2106.04526)].
- [15] C. Becchi A. Rouet R. Stora. “Renormalization of the Abelian Higgs-Kibble Model”. En: *Commun. Math. Phys.* 42 (1975), pp. 127-162. DOI: [10.1007/BF01614158](https://doi.org/10.1007/BF01614158).
- [16] C. Becchi A. Rouet R. Stora. “Renormalization of Gauge Theories”. En: *Annals Phys.* 98 (1976), pp. 287-321. DOI: [10.1016/0003-4916\(76\)90156-1](https://doi.org/10.1016/0003-4916(76)90156-1).
- [17] M. Peláez M. Tissier N. Wschebor. “Three-point correlation functions in Yang-Mills theory”. En: *Physical Review D* 88.12 (diciembre de 2013). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/physrevd.88.125003](https://doi.org/10.1103/physrevd.88.125003). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.88.125003>.
- [18] M. Peláez M. Tissier N. Wschebor. “Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge”. En: *Physical Review D* 90.6 (septiembre de 2014). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/physrevd.90.065031](https://doi.org/10.1103/physrevd.90.065031). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.90.065031>.

- [19] M. Peláez, M. Tissier, N. Wschebor. “Quark-gluon vertex from the Landau gauge Curci-Ferrari model”. En: *Physical Review D* 92.4 (agosto de 2015). ISSN: 1550-2368. DOI: [10.1103/physrevd.92.045012](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.92.045012). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.92.045012>.
- [20] N. Barrios et al. “Ghost-antighost-gluon vertex from the Curci-Ferrari model: Two-loop corrections”. En: *Physical Review D* 102.11 (diciembre de 2020). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.102.114016](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.102.114016). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.102.114016>.
- [21] N. Barrios et al. *Precision QCD propagators with dynamical quarks from the Curci-Ferrari model*. 2021. arXiv: [2103.16218](https://arxiv.org/abs/2103.16218) [[hep-th](https://arxiv.org/abs/2103.16218)].
- [22] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg. “Broken Symmetries”. En: *Phys. Rev.* 127 (3 agosto de 1962), pp. 965-970. DOI: [10.1103/PhysRev.127.965](https://doi.org/10.1103/PhysRev.127.965). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.127.965>.
- [23] M. Peláez et al. “Small parameters in infrared quantum chromodynamics”. En: *Physical Review D* 96.11 (diciembre de 2017). ISSN: 2470-0029. DOI: [10.1103/physrevd.96.114011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.114011). URL: <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.96.114011>.
- [24] M. Peláez et al. “Spontaneous chiral symmetry breaking in the massive Landau gauge: realistic running coupling”. En: *Phys. Rev. D* 103.9 (2021), p. 094035. DOI: [10.1103/PhysRevD.103.094035](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.103.094035). arXiv: [2010.13689](https://arxiv.org/abs/2010.13689) [[hep-ph](https://arxiv.org/abs/2010.13689)].
- [25] E. E. Salpeter, H. A. Bethe. “A Relativistic Equation for Bound-State Problems”. En: *Phys. Rev.* 84 (6 diciembre de 1951), pp. 1232-1242. DOI: [10.1103/PhysRev.84.1232](https://doi.org/10.1103/PhysRev.84.1232). URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.84.1232>.
- [26] C. D. Roberts, A. G. Williams. “Dyson-Schwinger equations and their application to hadronic physics”. En: *Progress in Particle and Nuclear Physics* 33 (enero de 1994), pp. 477-575. ISSN: 0146-6410. DOI: [10.1016/0146-6410\(94\)90049-3](https://doi.org/10.1016/0146-6410(94)90049-3). URL: [http://dx.doi.org/10.1016/0146-6410\(94\)90049-3](http://dx.doi.org/10.1016/0146-6410(94)90049-3).
- [27] L. D. Faddeev, V.N. Popov. “Feynman diagrams for the Yang-Mills field”. En: *Physics Letters B* 25.1 (1967), pp. 29-30. ISSN: 0370-2693. DOI: [https://doi.org/10.1016/0370-2693\(67\)90067-6](https://doi.org/10.1016/0370-2693(67)90067-6). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370269367900676>.

- [28] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 1. Cambridge University Press, 1995. DOI: [10.1017/CBO9781139644167](https://doi.org/10.1017/CBO9781139644167).
- [29] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Vol. 2. Cambridge university press, 1995.
- [30] F. Halzen A. D. Martin. *Quarks and leptons: an introductory course in modern participle physics*. 1984. ISBN: 978-0-471-88741-6.
- [31] M. L. Bellac G. Barton. *Quantum and Statistical Field Theory*. Clarendon Press, 1991.
- [32] M. E. Peskin D. V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Reading, USA: Addison-Wesley, 1995. ISBN: 978-0-201-50397-5.
- [33] G. t'Hooft. "A planar diagram theory for strong interactions". En: *Nuclear Physics B* 72.3 (1974), pp. 461-473. ISSN: 0550-3213. DOI: [https://doi.org/10.1016/0550-3213\(74\)90154-0](https://doi.org/10.1016/0550-3213(74)90154-0). URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321374901540>.
- [34] S. Coleman. *Aspects of symmetry: selected Erice lectures*. Cambridge University Press, 1988.
- [35] J. A. Gracey. "Three loop MS renormalization of the Curci–Ferrari model and the dimension two BRST invariant composite operator in QCD". En: *Physics Letters B* 552.1-2 (enero de 2003), pp. 101-110. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/S0370-2693\(02\)03077-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)03077-0). URL: [http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)03077-0](http://dx.doi.org/10.1016/S0370-2693(02)03077-0).
- [36] U. Reinosa et al. "How nonperturbative is the infrared regime of Landau gauge Yang-Mills correlators?" En: *Phys. Rev. D* 96.1 (2017), p. 014005. DOI: [10.1103/PhysRevD.96.014005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.96.014005). arXiv: [1703.04041 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1703.04041).
- [37] J. C. Taylor. "Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field". En: *Nucl. Phys. B* 33 (1971), pp. 436-444. DOI: [10.1016/0550-3213\(71\)90297-5](https://doi.org/10.1016/0550-3213(71)90297-5).
- [38] I. L. Bogolubsky et al. "Lattice gluodynamics computation of Landau-gauge Green's functions in the deep infrared". En: *Physics Letters B* 676.1-3 (junio de 2009), pp. 69-73. ISSN: 0370-2693. DOI: [10.1016/j.physletb.2009.04.076](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2009.04.076). URL: <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2009.04.076>.

- [39] J. Skullerud A. Kizilersü. “Quark-gluon vertex from lattice QCD”.
En: *Journal of High Energy Physics* 2002.09 (septiembre de 2002),
pp. 013-013. ISSN: 1029-8479. DOI: [10.1088/1126-6708/2002/09/013](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2002/09/013).
URL: <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2002/09/013>.

APÉNDICES

Apéndice A

Cálculo del propagador bare del gluón

Como es usual al utilizar el método de integrales de caminos de Feynman [28] (para un Lagrangiano con una parte cuadrática en los campos), calculamos el propagador bare del gluón considerando la parte cuadrática en A^α en la acción (2.1) usando el Lagrangiano en (2.2).

$$\begin{aligned} I[A] &= - \int d^4x \left\{ \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu^\alpha(x) - \partial_\nu A_\mu^\alpha(x)) (\partial_\mu A_\nu^\alpha(x) - \partial_\nu A_\mu^\alpha(x)) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^\alpha)^2 + \frac{m^2}{2} A_\mu^\alpha(x) A_\mu^\alpha(x) \right\} \\ &= \frac{-1}{2} \int d^4x \left\{ \partial_\mu A_\nu^\alpha(x) \partial_\mu A_\nu^\alpha(x) - \partial_\mu A_\nu^\alpha(x) \partial_\nu A_\mu^\alpha(x) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\xi} (\partial_\mu A_\mu^\alpha)^2 + m^2 A_\mu^\alpha(x) A_\mu^\alpha(x) \right\} \\ &= \frac{-1}{2} \int d^4x d^4y \delta^{(4)}(x-y) \left[-A_\nu^\alpha(y) [\partial_\mu \partial_\mu A_\nu^\alpha(x)] + A_\nu^\alpha(y) [\partial_\mu \partial_\nu A_\mu^\alpha(x)] - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\xi} A_\nu^\alpha(y) [\partial_\nu \partial_\mu A_\mu^\alpha(x)] + m^2 A_\mu^\alpha(y) A_\mu^\alpha(x) \right] \end{aligned}$$

$$I[A] = \int d^4x d^4y \frac{-1}{2} A_\rho^\alpha(x) A_\lambda^\beta(y) \left[\delta^{\alpha\beta} (-\delta_{\rho\lambda} \partial_\mu \partial_\mu \delta^{(4)}(x-y) + \partial_\rho \partial_\lambda \delta^{(4)}(x-y) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) + m^2 \delta_{\rho\lambda} \delta^{(4)}(x-y) \right]. \quad (\text{A.1})$$

En el último paso usamos que las derivadas parciales son siempre en la variable x . Recordamos que el término que nos interesa es el que acompaña al factor $\frac{-1}{2} A_\rho^\alpha(x) A_\lambda^\beta(y)$ en la integral (parte gaussiana de los gluones de la integral de la ecuación (2.1)). A este factor se le llama kernel, se denota D , e invertirlo nos permite hallar el propagador gaussiano. Para hacer esto consideramos su transformada de Fourier, que hallamos fácilmente escribiendo la delta de Dirac en la ecuación anterior en términos de integrales de 4-momentos:

$$D_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ip_\rho(x_\rho - y_\rho)} \delta^{\alpha\beta} \left[\delta_{\mu\nu} (p^2 + m^2) - p_\mu p_\nu \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \right]. \quad (\text{A.2})$$

Donde definimos $p^2 \equiv p_\mu p_\mu$. Vamos a invertir el kernel invirtiendo su transformada y nos va a ser útil definir los proyectores ortogonal y lineal del 4-vector de componentes p_μ :

$$P_{\mu\nu}^\perp(p) \equiv \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}, \quad (\text{A.3})$$

$$P_{\mu\nu}^\parallel(p) \equiv \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}. \quad (\text{A.4})$$

Es fácil ver que son ambos proyectores y que $P^\perp(p)P^\parallel(p) = 0$. Escribimos ahora:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\mu\nu}^{\alpha\beta}(p) &= \delta^{\alpha\beta} \left[\left(P_{\mu\nu}^\perp(p) + P_{\mu\nu}^\parallel(p) \right) (p^2 + m^2) - p^2 P_{\mu\nu}^\parallel(p) \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \right] = \\ &= \delta^{\alpha\beta} \left[(m^2 + p^2) P_{\mu\nu}^\perp(p) + \left(m^2 + \frac{1}{\xi} p^2\right) P_{\mu\nu}^\parallel(p) \right]. \end{aligned}$$

Entonces podemos obtener (usando las ecuaciones (A.3) y (A.4)):

$$\begin{aligned}\bar{D}_{\mu\rho}^{\alpha\beta}(p)P_{\rho\nu}^{\perp}(p) &= \delta^{\alpha\beta}P_{\mu\nu}^{\perp}(p)(m^2 + p^2) \\ \bar{D}_{\mu\rho}^{\alpha\beta}(p)P_{\rho\nu}^{\parallel}(p) &= \delta^{\alpha\beta}P_{\mu\nu}^{\parallel}(p)\left(m^2 + \frac{1}{\xi}p^2\right).\end{aligned}$$

De lo que finalmente llegamos a que (usando el hecho de que $P_{\mu\nu}^{\perp}(p) + P_{\mu\nu}^{\parallel}(p) = \delta_{\mu\nu}$) la forma del propagador gaussiano del gluón en el espacio de 4-momentos es la siguiente:

$$G_{0,\mu\nu}^{\alpha\beta}(p) = \delta^{\alpha\beta} \left[\frac{P_{\mu\nu}^{\perp}(p)}{m^2 + p^2} + \frac{P_{\mu\nu}^{\parallel}(p)}{m^2 + \frac{1}{\xi}p^2} \right].$$

Apéndice B

Límite N_C grande, caso más general

Siguiendo la idea de t’Hooft [33] vamos a realizar la identificación de los diagramas de Feynman de vacío como la que se muestra en la figura 2.1.

La asignación de las reglas de Feynman mostrada en la figura 2.1 y discutida en la sección 2.4 permite realizar una identificación con superficies de dos dimensiones, eso es, unimos cada línea doble y cada loop de color es una cara del polígono resultante. Observando el polígono, por cada cara tenemos un factor N_C (loop de color), por cada borde un $1/N_C$ (un propagador) y por cada vértice (vértice de interacción) un factor N_C . En resumidas cuentas el factor N_C para un diagrama asociado a un polígono de C caras, B bordes y V vértices es:

$$N_C^\chi \equiv N_C^{C+V-B}. \quad (\text{B.1})$$

Donde reconocemos a χ la característica de Euler. Por otro lado, como cada cara del polígono es orientada, podemos asociarle una superficie orientada: por ejemplo una esfera, un toro, un disco, pero no una botella de Klein (ver figura B.1).

Se puede probar que (para una idea de la prueba ver [34]), si definimos para estas últimas superficies M el número de “manijas” (o asas), y A el número de “agujeros” entonces

$$\chi = 2 - 2M - A. \quad (\text{B.2})$$

Este resultado nos dice dos cosas importantes, la primera, es que el orden

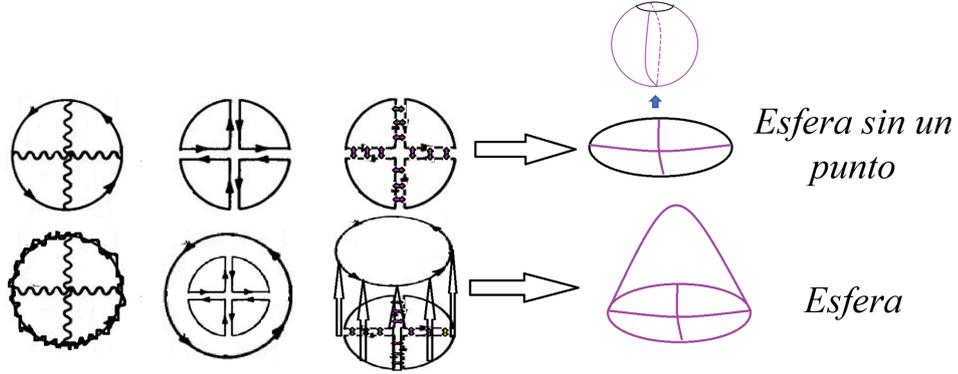


Figura B.1: Cómo pasar de diagramas de vacío a superficies orientadas en el caso de un disco y en el caso de una esfera.

superior del desarrollo está dado para los diagramas que son esferas (no manijas ni agujeros). La segunda que este orden superior tiene asociado un factor N_C^2 . Surgen ahora las siguientes dos preguntas: 1-¿Cómo podemos identificar las esferas viendo los diagramas de Feynman?. 2- ¿Cómo podemos asociar este razonamiento al desarrollo en N_C del propagador del quark (elemento central de nuestro estudio)?.

La pregunta 1 se resuelve fácilmente mirando el ejemplo de la figura B.1. En la segunda línea de esta figura damos un ejemplo de un diagrama de vacío que se transforma en una esfera. Vemos entonces, que para tener una esfera debemos tener una “superficie exterior”. La única manera de obtener esta superficie es teniendo un gluón que sea el borde del diagrama. Por otro lado, en una esfera, no podemos distinguir cuál cara es la de “arriba”. Es decir, la Regla (4) de Feynman nos debería permitir hacer que cada uno de los loops internos se transforme en el loop de gluones externo. Esto solo se puede obtener si todos los loops son de gluones y si el diagrama es planar, lo que permite identificar una parte interna al loop donde no hayan líneas y otra externa donde se encuentren todas las líneas del diagrama. Un diagrama planar es aquel que puede dibujarse (Regla (4)) de tal manera que los propagadores se corten solo en vértices de interacción (ver figura B.3).

El siguiente orden en el desarrollo viene dado por las esferas con un agujero ($A = 1$ y $M = 0$), por el argumento anterior, las esferas con un solo agujero son equivalentes a diagramas planares con un loop externo de quark. Estos diagramas de vacío son por las ecuaciones (B.2) y (B.1) de orden N_C .

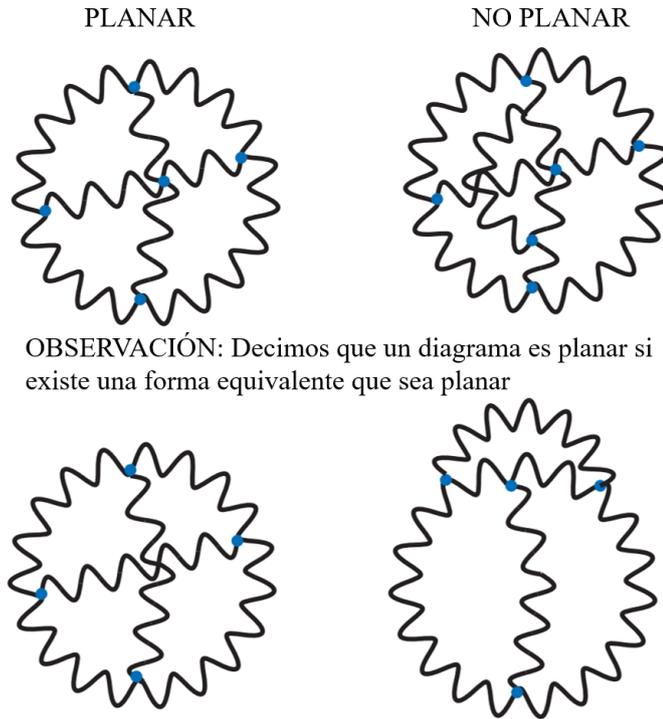


Figura B.2: Ejemplo diagramas planares y no planares. Abajo dos diagramas equivalentes por la Regla (4), mostrando que es planar.

Hasta ahora nos hemos encargado de la pregunta 1. Ahora nos encargaremos de la pregunta 2. Podemos responderla fácilmente notando que, si queremos obtener el orden superior en un desarrollo en N_C para el propagador del quark, basta con tomar los diagramas de vacío que son equivalentes al disco y cortar en un punto la línea de quark exterior (ver figura B.3). Al cortar la línea del quark perdemos un loop de color, pero perdemos una línea interna por dos externas, por lo que el orden en N_C se mantiene.

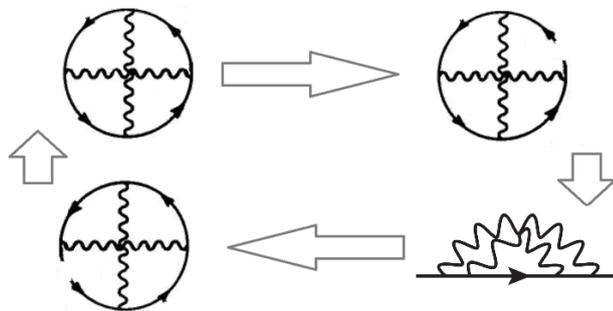


Figura B.3: Primer orden en N_C para el propagador del quark incluyendo solo gluones.