Tesis de Maestría

Campos de vectores libres de cohomología

Por: Joaquín Brum
Orientador: Dr. Miguel Paternain

Maestría en Matemática
PEDECIBA
Universidad de la República
Uruguay

Resumen

En esta tesis daremos los fundamentos básicos del problema de la resolución de la ecuación cohomológica y nos focalizaremos en el problema inverso de conocer que campos de vectores están libres de cohomología. Mostraremos avances recientes hacia la prueba de la conjetura de Katok que dice que los campos de vectores libres de cohomología son C^∞ conjugados a campos de vectores Diofantinos en toros. Al final mostraremos que existe una conjugación diferenciable (en el sentido Chen-Iglesias) entre la dinámica de un campo sin cohomología y la dinámica lineal en un grupo abeliano.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En esta tesis de maestría estudiaremos el problema de la resolución de la ecuación cohomológica con énfasis en estudiar los campos de vectores C^∞ que son libre de cohomología, mostrando cuales son los avances que hay hacia una prueba de la caracterización que propone Katok. Katok en [7] conjetura que un campo de vectores C^∞ en una variedad cerrada y orientable es libre de cohomología si y solamente si es C^∞ conjugado a un campo de vectores constante con dirección Diofantina en un toro.
En el capítulo 1 daremos las definiciones, algunos ejemplos donde se conocen la obstrucciones para resolver la ecuación cohomológica y mostraremos como aparecen naturalmente las distribuciones invariantes, generalizando a las medidas invariantes, como obstrucciones para resolver la ecuación cohomológica en la categoria C^∞.

En el capítulo 2 mostraremos los ejemplos conocidos de campos libres de cohomología y probaremos propiedades generales de estos campos, como que su flujo generado preserva una forma de volumen invariante y es minimal. También probaremos un teorema debido a F.Hertz-J.Hertz [5] que muestra que si X es un campo libre de cohomología en una variedad cerrada y orientable M, entonces el flujo ϕ^X es semiconjugado a un flujo lineal diofantino en el toro $\mathbb{T}^{\beta_1}$ donde β_1 es el primer número de Betti de M y además la semiconjugación es un fibrado.

En el capítulo 3 daremos parte de la prueba de que la conjetura de Katok es cierta en dimensión 3. Esto lo hicieron Forni y Kocsard en forma independiente en [2] y [8], trabajos que seguiremos. La prueba se basa en discutir según el primer número de Betti de M y utilizar la semiconjugación construida en el capítulo 2. Nosotros trataremos los casos número de Betti igual a $1, 2$ y 3.

En el capítulo 4, probaremos que un flujo generado por un campo libre de cohomología admite una linealización contínua en un grupo abeliano no Hausdorff, trabajo realizado en forma conjunta entre Livio Flaminio y Miguel Paternain que seguiremos de [1] . En el capítulo 5 daremos las bases de la teoría de los espacios difeológicos, versiones abstractas de las variedades diferenciables. Finalmente en el capítulo 6 probaremos que en el contexto abstracto de los espacios difeológicos la linealización del capítulo 4 es diferenciable.

1.1. Definiciones

A no ser que se especifique lo contrario, M será un variedad diferenciable, que será de clase C^∞, al igual que todos los mapas que consideraremos. Estudiaremos acciones $\phi\colon G\times M \to M$, donde $G = \mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$.
Un cociclo sobre ϕ es un mapa $\psi\colon G \times M \to \mathbb{R}$ que verifica:
$\Psi(g_1 + g_2, p)= \Psi(g_2, \phi(g_1, p))+\Psi(g_1, p)$.

Diremos que un cociclo Ψ es un coborde, si existe $h\colon M \to \mathbb{R}$ de forma que $\Psi(g, p) = h(\phi(g, p)) - h(p)$.
Es directo de la definición que los cociclos vistos como funciones reales, son un espacio vectorial. Diremos que dos cociclos Ψ_1 y Ψ_2 son cohomólogos si el cociclo $\Psi_1 - \Psi_2$ es un coborde. Observar que el conjunto de cobordes es un subespacio vectorial del espacio de cociclos, al cociente del espacio de cociclos por el espacio de cobordes se le llama grupo de cohomología de ϕ.

Si tenemos un cociclo $\Psi\colon \mathbb{Z}\times M \to \mathbb{R}$ este queda determinado por su "función generadora" $\Psi(1, \cdot)$ ya que $\Psi(n, x) = \sum_{i=0}^{n-1} \Psi(1, \phi(i, p))$ para $n > 0$ y $\Psi(n, x) = -\sum_{i=n}^{-1} \Psi(1, \phi(i, x))$ para $n < 0$.
De manera recíproca, dada $h\colon M \to \mathbb{R}$ podemos definir un cociclo $\Psi\colon \mathbb{Z} \times M \to \mathbb{R}$ de forma que $\Psi(1, \cdot) = h$ de la siguiente manera: $\Psi(n, p) = \sum_{i=0}^{n-1} h(\phi(i, p))$ si $n \geq 1$, $\Psi(0, p) = 0$, y $\Psi(n, p) = -\sum_{i=n}^{-1} h(\phi(i, p))$ si $n \leq -1$.

Un cociclo Ψ sobre una acción ϕ de $\mathbb{R}$, queda determinado por $\Psi_t(0,\cdot)$ ya que $\Psi(t,x) = \int_0^t \Psi_t(s,x)ds$ y $\Psi_t(s,x) = \Psi_t(0,\phi(s,x))$. Reciprocamente dada $h\colon M \to \mathbb{R}$ podemos definir un cociclo Ψ de forma que $h = \Psi(0,\cdot)$ como $\Psi(t,x) = \int_0^t h(\phi(s,x))ds$

Estamos interesados en, dado un cociclo saber si es o no un coborde. Esto es, dada $\Psi\colon G \times M \to \mathbb{R}$ buscamos $u\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $\Psi(g,p) = u(\phi(g,p)) - u(p)$. Como los cociclos quedan definidos por sus funciones generadoras, alcanza con hallar $u\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $\Psi(1,\cdot) = u(\phi(1,\cdot)) - u$ para el caso $\mathbb{Z}$, y $\Psi_t(0,\cdot) = L_X u$ cuando $G = \mathbb{R}$. Hallar la función u antedicha será lo que llamaremos resolver la ecuación cohomológica. Al grupo de cohomología de ϕ se lo puede ver como el espacio de las obstrucciones para resolver la ecuación cohomológica.

Existe un diccionario entre los cociclos sobre ϕ y las extensiones de ϕ con traslaciones en $\mathbb{R}$ que nos permite pensar dinámicamente los cociclos.

Proposición 1.1.1. *Si $\phi\colon G \times M \to M$ es una acción y $h\colon G \times M \to \mathbb{R}$ es un cociclo sobre ϕ, entonces el mapa $\phi_h\colon G \times (M \times \mathbb{R}) \to (M \times \mathbb{R})$ definido como $\phi_h(g,(p,t)) = (\phi(g,p), t + h(g,p))$ es una acción. De forma análoga, si $\psi\colon G \times (M \times \mathbb{R}) \to (M \times \mathbb{R})$ es una acción de la forma $\psi(g,(p,t)) = (\phi(g,p), t + h(g,p))$, entonces $h\colon G \times M \to \mathbb{R}$ es un cociclo, además $\phi_h = \psi$.*

Demostración.Primero veamos que ϕ_h es una acción, esto es:
$\phi_h(g_2, \phi_h(g_1,(p,t))) = \phi_h(g_2, (\phi(g_1,p), t+h(g_1,p))) = (\phi(g_1+g_2,p), t+h(g_1,p)+h(g_2,\phi(g_1,p))) = (\phi(g_1+g_2,p), t+h(g_1+g_2,p)) = \phi_h(g_1+g_2,(p,t))$. La prueba de que $h\colon G \times M \to \mathbb{R}$ en la definición de ψ es un cociclo es directa de plantear que ψ es una acción.

$\square$

Dadas dos extensiones de ϕ por traslaciones ϕ_{h_1} y ϕ_{h_2}, diremos que son equivalentes, si existe $\psi\colon M \times \mathbb{R} \to M \times \mathbb{R}$ de la forma $\psi(p,t) = (p, t + h(p))$ que las conjuga. La siguiente proposición completa el diccionario.

Proposición 1.1.2. *Sea $\phi\colon G \times M \to M$ una acción y $h_1, h_2\colon G \times M \to \mathbb{R}$ dos cociclos sobre ϕ. Entonces h_1 es cohomologo a h_2 si y solamente si ϕ_{h_1} y ϕ_{h_2} son equivalentes. En particular, un cociclo h es un coborde si ϕ_h es conjugado a la extensión trivial.*

Demostración.Dada $h\colon M \to \mathbb{R}$, definiremos $\psi_h\colon (M \times \mathbb{R}) \to (M \times \mathbb{R})$ como $\psi_h(p,t) = (p, t + h(p))$ y $\overline{h}\colon G \times M \to \mathbb{R}$ como el coborde $\overline{h}(g,p) = h(\phi(g,p)) - h(p)$. Tomemos ahora $h\colon M \to \mathbb{R}$ y conjuguemos la acción ϕ_{h_1} por alguna ψ_h, esto nos da otra extensión por

traslaciones de ϕ que llamaremos $\overline{\phi_{h_1}}$ y está definida como:
$\overline{\phi_{h_1}}(g,(p,t)) = \psi_h^{-1} \circ \phi_{h_1}(g,(p,t+h(p))) = \psi_h^{-1} \circ (\phi(g,p), t+h(p)+h_1(g,p)) = (\phi(g,p), t+h_1(g,p) - (h(\phi(g,p)) - h(p)))$. Observar que por lo tanto $\overline{\phi_{h_1}} = \phi_{h_1-\overline{h}}$ de lo que podemos concluir que a extensiones equivalentes corresponden cociclos cohomologos.
Recíprocamente, dados dos cociclos cohomologos h_1, h_2, consideremos el coborde $\overline{h} = h_1 - h_2$, luego $h_2 = h_1 - \overline{h}$ por lo que si conjugamos ϕ_{h_1} con ψ_h obtenemos $\overline{\phi_{h_1}} = \phi_{h_1-\overline{h}} = \phi_{h_2}$ de lo que concluimos que a cociclos cohomologos corresponden extensiones equivalentes.
Finalmente, como los cobordes son exactamente los cociclos cohomologos al cociclo nulo, y la extensión del cociclo nulo es la extensión trivial, tenemos que los cobordes son aquellos cociclos cuya extensión es equivalente a la extensión trivial.

□

Hasta ahora todo se podría haber hecho en otras categorías, como por ejemplo: variedades C^r y acciones C^r, espacios topológicos compactos y acciones contínuas, espacios métricos y transformaciones bi-Lipschitz. También se puede estudiar cociclos con menos regularidad que las acciones, y cobordes con menos regularidad de los cociclos. Nosotros optamos por definir los objetos como aparecerán en la gran parte de la tesis y hacer las salvedades necesarias cuando no sea el caso.
Si el lector quiere ver estas definiciones en toda su generalidad puede hacerlo en [7].

1.2. Obstrucciones a la resolución de la ecuación cohomológica

Nos planteamos ahora el problema de describir cuales son las obstrucciones para resolver la ecuación cohomológica. Esto es, qué debe cumplir $\varphi\colon M \to \mathbb{R}$ para que exista $u\colon M \to \mathbb{R}$ de forma que $\varphi = u(\phi(1,\cdot)) - u(\cdot)$ en el caso discreto y $\varphi = L_X(u)$ en el caso contínuo.
Para intentar comprender el problema, empezaremos por considerar acciones en espacios con poca estructura.
Para empezar, sea X un conjunto y $\phi\colon \mathbb{Z} \times X \to X$ una acción. Llamemos f a $\phi(1,\cdot)$. Sea $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$, y supongamos que existe $u\colon X \to \mathbb{R}$ de forma que $\varphi = u \circ f - u$. Si tenemos $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(x) = x$, entonces $\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} u \circ f^{i+1}(x) - u \circ f^i(x) = 0$ lo que nos da la primera obstrucción para resolver la ecuación cohomológica, incluso buscando soluciones sin estructura alguna. Llamaremos a esta obstrucción la obstrucción de la órbita periódica, esto es: Para resolver la ecuación cohomológica es condición necesaria que si $x \in X$ es periódico de período n, entonces $\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x)) = 0$. Si no tenemos la obstrucción de la órbita periódica y queremos resolver la ecuación en el caso de acciones en conjuntos sin estructura, podemos tomar una sección A del espacio de órbitas (tomar un elemento de cada órbita), definir $u_{|A} \equiv 0$ y después extender f de forma que se cumpla la ecuación.

Consideremos ahora el caso en que X es un espacio topológico compacto y $\phi\colon \mathbb{Z}\times X \to X$ es una acción contínua. Notemos $C^0(X,\mathbb{R})$ al conjunto de las funciones reales contínuas de X. Llamemos nuevamente f a $\phi(1,\cdot)$. Estudiaremos la cohomología de cociclos contínuos, esto es: consideraremos cociclos $\psi\colon \mathbb{Z} \times X \to \mathbb{R}$ contínuos módulo cobordes contínuos. Luego, el problema luce idéntico, dada $\varphi \in C^0(X,\mathbb{R})$, hallar $u \in C^0(X,\mathbb{R})$ de forma que $\varphi = u \circ f - u$. Supongamos entonces que tenemos $\varphi = u \circ f - u$ con $u, \varphi \in C^0(X,\mathbb{R})$, luego $u(f^n(x)) - u(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$. Como u es contínua y X compacto, podemos considerar $\|u\|_\infty = max\{|u(x)| : x \in X\}$, y obtener $|\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))| = |u(f^n(x)) - u(x)| \leq 2\|u\|_\infty$. Llamaremos a esta obstrucción, la obstrucción de la suma orbital acotada.

Si $f\colon X \to X$ es un homeomorfismo y $\varphi \in C^0(X,\mathbb{R})$ definamos $S_n(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ f^i$. El siguiente teorema debido a Gostchalk-Hedlund prueba que la obstrucción de la suma orbital acotada es la única, en el caso de acciones minimales de $\mathbb{Z}$ en espacios topológicos compactos.

Teorema 1.2.1. *Sea X es un espacio topológico compacto y $f\colon X \to X$ un homeomorfismo minimal. $\varphi \in C^0(X,\mathbb{R})$ es un coborde si y solamente si existe $K > 0$ tal que $\| S_n(\varphi) \|_\infty < K$ para todo $n > 0$.*

DEMOSTRACIÓN.Consideremos $f_\varphi \colon X \times \mathbb{R} \to X \times \mathbb{R}$ el skew-product por traslaciones asociado al cociclo generado por φ. Tomemos ahora $(p,0) \in X \times \mathbb{R}$ y consideremos su ω-límite $\omega(p,0)$. Como $S_n(\varphi) < K$ para todo n, tenemos que las órbitas de f_φ están acotadas y por tanto $\omega(p,0)$ es un compacto invariante para f_φ.
Afirmación: $\mathfrak{C} = \omega(p,0) \cap \{p\} \times \mathbb{R}$ es un subgrupo. Para ver esto tomemos $(p,x),(p,y) \in \mathfrak{C}$. Sea $f_\varphi^{n_k}(p,0) \to (p,x)$, como f_φ conmuta con las traslaciones en las fibras, tenemos que $f_\varphi^{n_k}(p,y) \to (p,x+y) \in \omega(p,0)$ ya que $(p,y) \in \omega(p,0)$ que es compacto e invariante.
Luego, como $\omega(p,0)$ es compacto tenemos que $\mathfrak{C} = (p,0)$.
Veamos que de hecho, $\omega(p,0) \cap \{q\} \times \mathbb{R}$ consiste de un solo punto para todo $q \in X$. Supongamos por absurdo que tenemos $\{(q,x),(q,y)\} \subseteq \mathfrak{D} = \omega(p,0) \cap \{q\} \times \mathbb{R}$. Como f es minimal, existe $m_k \to \infty$ tal que $f^{m_k}(q) \to p$. Ahora, como $(q,x) \in \omega(p,0)$ que es compacto e invariante, $f_\varphi^{m_k}(q,x)$ acumula en $\omega(p,0) \cap \{p\} \times R$ y por tanto $f_\varphi^{m_k}(q,x) \to (p,0)$. Pero como f_φ conmuta con las traslaciones, tenemos que $f_\varphi^{m_k}(q,y) \to (p,y-x) \notin \omega(p,0)$. Como $\omega(p,0)$ es un compacto que se proyecta en forma biyectiva sobre X, es el gráfico de $\psi \in C^0(X,\mathbb{R})$. Finalmente tenemos que $\psi(f(x)) - \psi(x) = \varphi(x)$ como queríamos probar.

$\square$

Observación 1.2.1. El teorema es cierto para acciones contínuas y la prueba se adapta completamente.

Definición 1.2.1. Si Λ es un espacio métrico y $\alpha \in (0,1]$ diremos que $f \colon \Lambda \to \mathbb{R}$ es α-Holder si existe $K > 0$ de forma que $|f(x), f(y)| < Kd(x,y)^\alpha$ para todo par $x, y \in \Lambda$.

Observar que si f es un homeomorfismo bi-Lipschitz de un espacio métrico, entonces si u es α-Holder $u \circ f$ también lo es, por lo que podemos considerar la cohomología α-Holder de f.
Veamos a continuación un ejemplo en el que la obstrucción de la órbita periódica es la única para resolver la ecuación cohomológica con cociclos de regularidad Holder en piezas básicas localmente maximales de difeomorfismos.

Sea M una variedad Riemanniana, $f \colon M \to M$ un difeomorfismo y $\Lambda \subseteq M$ un conjunto hiperbólico topológicamente transitivo localmente maximal de f. Podemos considerar en M una métrica adaptada de forma que existe un $\delta > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que si $x, y \in \Lambda$ verifican $d(f^k(x), f^k(y)) < \delta$ para $k \in [-n, m]$, entonces $d(f^m(x), f^m(y)) > d(x,y)\lambda^{-m}$, o $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) > d(x,y)\lambda^{-n}$.

Definición 1.2.2. Una ϵ-pseudo órbita periódica para f es una sucesión $(x_0, ..., x_n)$ en M donde $x_0 = x_n$ que verifica $d(f(x_n), x_{n+1}) < \epsilon$, para $n = 0, ..., n-1$.

La propiedad del sombreado de pseudo órbitas que tienen los conjuntos hiperbólicos junto con la expansividad de los mismos dan la siguiente

Proposición 1.2.2. *Si Λ es un conjunto hiperbólico localmente maximal de un difeomorfismo f, existen $C, \epsilon_0 > 0$ tal que si $\epsilon < \epsilon_0$ y $x_n \subseteq \Lambda$ es una ϵ-pseudo órbita periódica, entonces existe $y \in \Lambda$ que verifica $f^n(y) = y$ y además $d(x_n, f^n(y)) < C\epsilon$*

Para el caso de una órbita que vuelve cerca tenemos el siguiente resultado más fino

Proposición 1.2.3. *Si Λ es un conjunto hiperbólico localmente maximal de un difeomorfismo f, existen $C, \epsilon > 0$ y $0 < \lambda < 1$ tal que si $x \in \Lambda$ verifica que $d(x, f^n(x)) < \epsilon$, entonces existe $y \in \Lambda$ que verifica $f^n(y) = y$ y además $d(f^k(x), f^k(y)) < C'\mu^{min(k,n-k)} d(x, f^n(x))$*

Demostración.Tomemos un $\delta > 0$ de forma que existe $0 < \lambda < 1$ tal que si $x, y \in \Lambda$ verifican $d(f^k(x), f^k(y)) < \delta$ para $k \in [-n, m]$, entonces $d(f^m(x), f^m(y)) > d(x,y)\lambda^{-m}$, o $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) > d(x,y)\lambda^{-n}$. Definamos ahora $\epsilon = \delta/C$ siendo C la constante de la proposición 1.2.2. Tomemos ahora $x \in \Lambda$ y $n > 0$ tal que $d(x, f^n(x)) < \epsilon_0$. La proposición 1.2.2 nos dice que existe $y \in \Lambda$ tal que $f^n(y) = y$ y además $d(f^k(x), f^k(y)) < Cd(x, f^n(x)) < C\epsilon_0 = \delta$ para $k \in \{0, ..., n\}$. Por la elección de la métrica adaptada tenemos que $d(f^i(x), f^i(y)) < d(x,y)\lambda^i$ o $d(f^i(x), f^i(y)) < d(f^n(x), f^n(y))\lambda^{n-i}$, por lo tanto $d(f^i(x), f^i(y)) < Cd(x, f^n(x))\lambda^{min\{i,n-i\}}$

□

Finalmente podemos probar el siguiente teorema debido a Livschitz

Teorema 1.2.4. *Sea Λ un conjunto hiperbólico topológicamente transitivo y localmente maximal de un difeomorfismo $f\colon M \to M$, y $\varphi\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ una función α-Holder. Entonces si $\sum_{i=0}^{Per(p)-1} \varphi(f^i(p)) = 0$ para todo $p \in \Lambda$ periódico existe $\psi\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ α-Holder tal que $\psi \circ f - \psi = \varphi$*

Demostración. Tomemos $x \in \Lambda$ órbita densa de f y definamos $h\colon O(x) \to \mathbb{R}$ como $h(f^n(x)) = \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i(x))$ para $n \in \mathbb{Z}^+$, $h(f^m(x)) = -\sum_{i=m}^{-1} \varphi(f^i(x))$ para $m \in \mathbb{Z}^-$ y $g(x) = 0$. Probaremos que h es α-Holder. Para esto, consideremos C, ϵ y λ como en la proposición 1.2.3. Tomemos ahora $f^m(x)$ y $f^n(x)$ con $d(f^m(x), f^n(x)) < \epsilon$. La proposición 1.2.3 nos da $y \in \Lambda$ tal que $f^{n-m}(y) = y$, y además $d(f^{m+k}(x), f^k(y)) < C\lambda^{min\{k,n-m-k\}} d(f^m(x), f^n(x))$. Sea $M > 0$ tal que $|\varphi(x) - \varphi(y)| < Md(x,y)^\alpha$. Luego

$|h(f^m(x)) - h(f^n(y))| = |\sum_{i=0}^{n-m-1} \varphi(f^{m+i}(x))| = |\sum_{i=0}^{n-m-1} \varphi(f^{m+i}(x)) - \varphi(f^i(y)) + \varphi(f^i(y))| \leq$ $|\sum_{i=0}^{n-m-1} \varphi(f^{m+i}(x)) - \varphi(f^i(y))| + |\sum_{i=0}^{n-m-1} \varphi(f^i(y))| \leq \sum_{i=0}^{n-m-1} |\varphi(f^{m+i}(x)) - \varphi(f^i(y))| \leq$ $\sum_{i=0}^{n-m-1} MC^\alpha \lambda^{\alpha min\{k,n-m-k\}} d(f^m(x), f^n(x))^\alpha \leq MC^\alpha \sum_{i=0}^{n-m-1} \lambda^{\alpha min\{k,n-m-k\}} d(f^m(x), f^n(x)) \leq$ $2MC^\alpha/(1-\lambda^\alpha) d(f^m(x), f^n(x))$.
Como h es α-Holder, es uniformemente contínua y por ende se extiende a Λ en forma contínua a $\psi\colon \Lambda \to \mathbb{R}$ que de hecho es α-Holder. Finalmente $\psi \circ f - \psi = \varphi$ ya que $\psi \circ f - \psi$ y φ son dos funciones contínuas que coinciden en un denso.

□

Sea X un espacio topológico compacto y $\phi\colon G \times X \to X$ una acción contínua de $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{R}$. Llamemos f a $\phi(1,\cdot)$ en el caso discreto. Observar que la obstrucción de la suma orbital acotada implica que los promedios de Birkhoff sobre las órbitas tienden a cero. Esto, junto con el teorema ergódico de Birkhoff nos da una nueva obstrucción que es la de la medida invariante. Esto es, dada $\phi \in C^0(X,\mathbb{R})$, si buscamos $u \in C^0(X,\mathbb{R})$ de forma que $u \circ f - u = \varphi$, o $u(\phi(t,x)) - u(x) = \int_0^t \varphi(\phi(s,x))ds$ en el caso contínuo, entonces $\int_X \varphi d\mu = 0$ para toda medida de probabildad de Borel invariante por ϕ.
Observar que la obstrucción de la órbita periódica es un caso particular de este tipo de obstrucciones.

Supongamos ahora que M es una variedad C^∞ y $X \in \chi(M)$ un campo de vectores C^∞. Sea ϕ^X el flujo generado por X y $\mathcal{M}$ las medidas de probabilidad de Borel invariantes por ϕ^X. Notemos L_X al operador derivada de Lie $L_X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ definido como $L_X(\phi) = X(\phi)$, observar que ImL_X es el conjunto de cobordes.

Consideremos la topología C^∞ en $C^\infty(M)$ y su espacio dual
$(C^\infty(M))^* = \{\psi\colon C^\infty(M) \to \mathbb{R} \text{ contínuas}\}$, que llamaremos espacio de distribuciones de M

Definiremos entonces las distribuciones invariantes, que generalizarán las medidas invariantes.

Definición 1.2.3. Dada $\psi \in (C^\infty(M))^*$ diremos que es ϕ^X-invariante si $\psi_{|ImL_X} \equiv 0$.

Proposición 1.2.5. *$\psi \in (C^\infty(M))^*$ es ϕ^X-invariante sii $\psi(f) = \psi(f \circ \phi_t^X)$ para toda $f \in C^\infty(M)$ y todo $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración.Tomemos entonces $\psi \in (C^\infty(M))^*$. Dada $f \in C^\infty(M)$, consideremos los mapas auxiliares $H_f\colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como $H_f(p,t) = f(\phi^X(t,p))$, y $G_f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido como $G_f(t) = \psi(H_f(\cdot,t))$.
$(G_f(t+\delta) - G_f(t))/\delta = \psi((f \circ \phi_{t+\delta}^X - \phi \circ \phi_t^X)/\delta)$.

Como $(f \circ \phi^X_{t+\delta} - \phi \circ \phi^X_t)/\delta \to_{\delta \to 0} L_X(f \circ \phi^X_t)$ en la topología C^∞ tenemos que $(G_f(t+\delta) - G_f(t))/\delta \to \psi(L_X(f \circ \phi^X_t))$. Por lo tanto $\psi(f) = \psi(f \circ \phi^X_t)$ para toda $f \in C^\infty(M)$ y todo $t \in \mathbb{R}$ sii G_f es constante para toda $f \in C^\infty(M)$ sii $\psi_{ImL_X} \equiv 0$.

□

Si notamos $C^0(M)^+$ al conjunto de funciones reales contínuas y positivas de M espacio, recordemos que el teorema de representación de Riesz nos permite ver a las medidas de Borel sobre M como $\mathfrak{B} = \{T \in C^0(M,\mathbb{R})^* : T_{|C^0(M)^+} \geq 0\}$.
Consideremos ahora la inclusión $i \colon C^\infty(M) \to C^0(M,\mathbb{R})$, i es contínua si consideramos las topologías C^∞ y C^0 respectivamente, por tanto podemos considerar el pull-back $i^*(\mathfrak{B}) \subseteq (C^\infty(M))^*$. i^* es inyectivo porque $C^\infty(M)$ es C^0-denso en $C^0(M)$. Luego podemos ver a las medidas de Borel como distribuciones de M mediante la identificación $\mu \mapsto \psi_\mu \colon C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ donde $\psi_\mu(\phi) = \int_M \phi d\mu$.
El siguiente corolario muestra que las medidas invariantes son aquellas que vistas como distribuciones son invariantes.

Corolario 1.2.6. *Si μ es una medida de probabilidad de Borel, entonces $\mu \in \mathcal{M}$ si y solamente si $\int_M L_X(\varphi) d\mu = 0$ para toda $\varphi \in C^\infty(M)$*

Observar que como las distribuciones son contínuas, una distribucion invariante debe anularse en $\overline{ImL_X}$ por lo que si ImL_X no es cerrado, las distribuciones no alcanzan para caracterizar a los cobordes. Por suerte tenemos la siguiente

Proposición 1.2.7. *Cuando ImL_X es cerrada para la topología C^∞, las distribuciones invariantes son todas las obstrucciones para resolver la ecuación cohomológica.*

Demostración.Supongamos que f no pertenece a ImL_X, definamos entonces el subespacio cerrado $S = ImL_X \oplus \mathbb{R}f$ y $\hat{T} \colon S \to \mathbb{R}$ tal que $\hat{T}_{|ImL_X} = 0$ y $\hat{T}(f) = 1$. Finalmente el teorema de Hahn-Banach permite extender este funcional a un elemento T de $C^\infty(M)^*$ que se anula en ImL_X (y por tanto es ϕ^X-invariante) y tal que $T(f) \neq 0$

□

En conclusión, las distribuciones invariantes detectan los cociclos que no son C^∞ aproximables por cobordes.

Capítulo 2

Campos libres de cohomología

Observar que si $f \in C^\infty(M)$ es la función constante $k \neq 0$, entonces f no es un coborde, si se quiere por la obstrucción de la suma orbital acotada.
Esto implica que $C^\infty(M)/L_X(C^\infty(M))$ tiene al menos dimensión uno.

Definición 2.0.4. Diremos que un campo $X \in \chi^\infty(M)$ es libre de cohomología si $C^\infty(M)/L_X(C^\infty(M)) \simeq \mathbb{R}$. Esto quiere decir que dada $f \in C^\infty(M)$, existe $c_f \in \mathbb{R}$ y $u \in C^\infty(M)$ tal que $L_X(u) = f - c_f$.

Lo primero que surge en función de lo visto en el capítulo anterior es que si X es un campo libre de cohomología, entonces es únicamente ergódico, más aún, es "distribucionalmente únicamente ergódico"(el espacio de distribuciones invariantes es de dimensión uno).

2.1. Ejemplos

En esta sección veremos los ejemplos conocidos de campos libre de cohomología. Estos son campos de vectores constantes del toro (invariantes por traslaciones) que además cumplen una propiedad aritmética, son Diofantinos.

Veamos entonces los ejemplos conocidos de campos libres de cohomología, para esto consideremos $M = \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, y $X_\alpha \in \chi^\infty(M)$ un campo constante $X_\alpha \equiv \alpha$, donde $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ y estamos considerando la trivialización $T\mathbb{T}^n = T^n \times \mathbb{R}^n$.
Veremos como luce el mapa $L_{X_\alpha} \colon C^\infty(\mathbb{T}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$ a nivel de series de Fourier. Para esto, antes recordemos lo siguiente.
$L^2(\mathbb{T}^n)$ tiene una base ortonormal dada por las funciones $\{e_{k_1,...,k_n} \colon (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}^n\}$ definidas como $e_{k_1,...,k_n}(a_1, ..., a_n) = \exp\left(2\pi i \langle (k_1, ..., k_n), (a_1, ..., a_n)\rangle\right)$, y dentro de $L^2(\mathbb{T}^n)$, f es de clase

C^∞ si y solamente si su serie de Fourier $\hat{f}\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ verifica que $\lim_{\|(k_1,...,k_n)\|\to\infty} \hat{f}(k_1,...,k_n)\|(k_1,...,k_n)\|^m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

Llamemos entonces $\mathfrak{S}$ al subespacio de aquellas series que representan funciones de clase C^∞ del toro $\mathbb{T}^n$.
Esto es $\mathfrak{S} = \{\hat{f}\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}\colon \lim_{\|(k_1,...,k_n)\|\to\infty} \hat{f}(k_1,...,k_n)\|(k_1,...,k_n)\|^m = 0, \forall m \in \mathbb{N}\}$,
y llamemos τ al mapa $\tau\colon C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathfrak{S}$ que a cada función de clase C^∞ le asocia su serie de Fourier. Continuando con la descripción del mapa L_{X_α} a nivel de series de Fourier, lo que precisamos es entonces un mapa $\hat{L_{X_\alpha}}\colon \mathfrak{S} \to \mathfrak{S}$ tal que $\tau \circ L_{X_\alpha} = \hat{L_{X_\alpha}} \circ \tau$.
Utilizando la fórmula de integración por partes tenemos que $\partial/\partial x_i e_{k_1,...,k_n} = (2\pi i)k_i e_{k_1,...,k_n}$, de lo que deducimos que $\hat{L_{X_\alpha}}(\{a_{k_1,...,k_n}\}) = \{2\pi i\langle\alpha,(k_1,...,k_n)\rangle a_{k_1,...,k_n}\}$.
Por lo tanto si $\{a_{k_1,...,k_n}\} \in Im\hat{L_{X_\alpha}}$ entonces $a_{k_1,...,k_n} = 0$ para todo $(k_1,...,k_n) \in \mathbb{Z}^n$ tal que $\langle\alpha,(k_1,...,k_n)\rangle = 0$. Esto es, si $f \in ImL_{X_\alpha}$ y $\langle\alpha,(k_1,...,k_n)\rangle = 0$ entonces $0 = \hat{f}(k_1,...,k_n) = \int_{\mathbb{T}^n} f\overline{e_{k_1,...,k_n}} dLeb$ lo que nos da que $Re(\hat{f}(k_1,...,k_n))$ e $Im(\hat{f}(k_1,...,k_n))$ son dos distribuciones reales invariantes. Cuando $(k_1,...,k_n) = (0,...,0)$ tenemos obviamente que $\langle\alpha,(0,...,0)\rangle = 0$, pero en este caso $Re(\hat{f}(0,...,0))$ es la distribucion construida a partir de la medida de Lebesgue e $Im(\hat{f}(0,...,0)) \equiv 0$.

Tenemos entonces que si $X_\alpha \in \chi(\mathbb{T}^n)$ es libre de cohomología, entonces $\langle\alpha,(k_1,...,k_n)\rangle \neq 0$ para todo $(k_1,...,k_n) \neq (0,...,0)$. A un vector como ese lo llamaremos totalmente irracional. Lo anterior también puede verse observando que si α no es totalmente irracional, entonces el flujo generado por X_α no es minimal, lo que permitiría construir otra distribución (en realidad medida) invariante por X_α además de la construida a partir de la medida de Lebesgue en el toro.
Supongamos entonces que tenemos un vector α totalmente irracional, y que $f, u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ verifican $L_X(u) = f$, entonces $\hat{u}(k_1,...,k_n) = \hat{f}(k_1,...,k_n)/(2\pi i\langle\alpha,(k_1,...,k_n)\rangle)$ para todo $(k_1,...,k_n) \neq (0,...,0)$.

Definición 2.1.1. Dado $\alpha \in \mathbb{R}^n$, diremos que es Diofantino si $\exists C, \alpha > 0$ de forma que $\langle\alpha,(k_1,...,k_n)\rangle \geq C/\parallel (k_1,...,k_n) \parallel^{-\alpha}$. A los vectores que no son diofantinos los llamaremos de Liouville.

Proposición 2.1.1. *Sea $X_\alpha \in \chi(\mathbb{T}^n)$ un campo constante. Entonces X_α es libre de cohomología si y solamente si α es un vector diofantino.*

Demostración. Supongamos primero que α es diofantino y que tenemos $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Sea $c_f = \int_{\mathbb{T}^n} f dLeb$. Luego, $(\widehat{f - c_f})(0,...,0) = 0$. Ahora definamos $\hat{u}\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ como

$\hat{u}(0,...,0)=0$, y $\hat{u}(k_1,...,k_n)=\hat{f}(k_1,...,k_n)/(2\pi i<\alpha,(k_1,...,k_n)>)$ si $(k_1,...,k_n)\neq(0,...,0)$. Por ser α diofantino $(2\pi i\langle\alpha,(k_1,...,k_n)\rangle)^{-1}<K\|(k_1,...,k_n)\|^{\alpha}$ por lo que $\hat{u}$ sigue teniendo decrecimiento sub polinomial, por lo que $\hat{u}\in\mathfrak{S}$. Entonces $u=\tau^{-1}(\hat{u})\in C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ verifica $L_X(u)=f-c_f$.
Supongamos ahora que $\alpha\in\mathbb{R}^n$ es de Liouville. Si α no es totalmente irracional, se puede construir una medida invariante soportada en la clausura de una órbita no densa, por lo que no sería únicamente ergódico (ya que la medida de Lebesgue es invariante) y por tanto no sería libre de cohomología.
Por tanto supongamos que α es totalmente irracional. Construiremos $\phi\colon\mathbb{Z}^n\to\mathbb{C}$, $\phi\in\mathfrak{S}$ y $\phi(0,...,0)=0$, pero que su preimagen formal $\psi=\phi/2\pi i<\alpha,(k_1,...,k_n)>$ ni siquiera verifica que $\|\psi(k_1,...,k_n)\|\to 0$ cuando $\|(k_1,...,k_n)\|\to+\infty$.
Como α es Liouville existe $\{(k_1^i,...,k_n^i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ estrictamente creciente en norma y tal que $|<\alpha,(k_1^i,...,k_n^i)>|\leq\|(k_1^i,...,k_n^i)\|^{-i}$.
Luego $\phi\colon\mathbb{Z}^n\to\mathbb{C}$ definida como $\phi(k_1^i,...,k_n^i)=\|(k_1^i,...,k_n^i)\|^{-i}$ y $\phi(k_1,...,k_n)=0$ si $(k_1,...,k_n)\neq(k_1^i,...,k_n^i)$ $\forall i\in\mathbb{N}$, está claramente en $\mathfrak{S}$, pero $\psi=\phi/2\pi i<\alpha,(k_1,...,k_n)>$ verifica que $|\psi(k_1^i,...,k_n^i)|>1$ $\forall i\in\mathbb{N}$

$\square$

De ahora en más cuando hablemos de un campo Diofantino en $\mathbb{T}^n$ nos estaremos refiriendo a un campo constante Diofantino.

Observación 2.1.1. El conjunto de vectores Diofantinos de $\mathbb{R}^n$ es un conjunto de medida total, mientras que los vectores de Liouville son un conjunto residual.

En el caso Liouville, si bien el campo no es libre de cohomología, esto no se puede percibir a nivel de distribuciones debido a la siguiente

Proposición 2.1.2. *Si $X_\alpha\in\chi(\mathbb{T}^n)$ es un campo constante totalmente irracional, entonces la única distribución invariante por ϕ^X es el espacio de distribuciones generado por la medida de Lebesgue.*

DEMOSTRACIÓN. Dada $f\in C^{\infty}(\mathbb{T}^n)$ sea $S_m(f)=\sum_{\|(k_1,...,k_n)\|\leq m}\hat{f}(k_1,...,k_n)e_{k_1,...,k_n}$ su m-ésima suma de Fourier. Es un resultado clásico de la teoría de series de Fourier que $S_m(f)\to f$ en la topología C^{∞}, por tanto $\overline{ImL_{X_\alpha}}=\{f\in C^{\infty}(\mathbb{T}^n)\text{ tal que }\int_{\mathbb{T}^n}fdLeb=0\}=ker\psi$ si ψ es invariante.

$\square$

Katok conjeturó que si tenemos un campo de vectores libre de cohomología en una variedad cerrada y orientable, entonces $M\simeq\mathbb{T}^n$ y el campo X es C^{∞} conjugado a un campo constante

Diofantino.

Definición 2.1.2. Un difeomorfismo C^∞ f de una variedad diferenciable C^∞ N es libre de cohomología si $C^\infty(N)/Im\Delta f \simeq \mathbb{R}$ donde $\Delta f\colon C^\infty(\Sigma) \to C^\infty(\Sigma)$ es $\Delta f(h) = h \circ f - h$.

Veremos de aquí a poco una proposición que nos permitirá a traves de la suspensión, construir flujos libres de cohomología a partir de difeomorfismos libres de cohomología y viceversa, a traves de mapas de retorno de Poincaré.

Sea $X \in \chi(M)$ es un campo de vectores de clase C^∞ y $\Sigma \subseteq M$ una subvariedad compata de codimensión uno transversal a X. Diremos que Σ es una sección transversal de ϕ^X si $\Sigma \cap \mathfrak{O}(p) \neq \emptyset$ para todo $p \in M$.

En este caso, existe $\tau \in C^\infty(\Sigma, \mathbb{R}^+)$ que verifica $\phi^X(\tau(p), p) \in \Sigma$ para todo $p \in \Sigma$ y $\phi^X(s,p) \notin \Sigma$ para todo $s \in (0, \tau(p))$. En efecto, $\omega(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$ sino existirían órbitas que no cortan Σ. Luego, por el teorema del flujo tubular tenemos $\mathfrak{O}(p) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Al mapa $\mathfrak{P}\colon \Sigma \to \Sigma$ definido como $\mathfrak{P} = \phi^X(\tau(p), p)$ la llamaremos mapa de retorno de Poincaré.
Por tanto podemos definir el siguiente operador $L_{\mathfrak{P}}\colon C^\infty(M, \mathbb{R}) \to C^\infty(\Sigma, \mathbb{R})$ que a ψ le asocia $\psi_\Sigma\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ definido como $\psi_\Sigma(p) = \int_0^{\tau(p)} \psi(\phi^X(s,p))ds$.

La siguiente proposición relaciona la cohomología de X con la de $\mathfrak{P} \in C^\infty(\Sigma, \Sigma)$.

Proposición 2.1.3. *$\varphi \in C^\infty(M)$ es un coborde si y solamente si $\varphi_\Sigma \in C^\infty(\Sigma, \Sigma)$ lo es. Además ImL_X es cerrado sii el conjunto de cobordes de $\mathfrak{P}$ lo es, y X es libre de cohomología sii $\mathfrak{P}$ lo es.*

Demostración.Sea $\varphi \in C^\infty(M)$ un coborde, por tanto existe $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $L_X(\psi) = \varphi$. Sea ahora $\hat{\psi} = \psi_{|\Sigma}$. Si $x \in \Sigma$, tenemos que $\hat{\psi}(\mathfrak{P}(x)) - \hat{\psi}(x) = \int_0^{\tau(x)} \varphi(\phi^X(s,x))ds = \varphi_\Sigma(x)$ Recíprocamente, sea $\varphi_\Sigma = \hat{\psi}(\mathfrak{P}) - \hat{\psi}$ para $\hat{psi} \in C^\infty(\Sigma)$. Luego, si $p = \phi^X(t,x)$ definimos $\psi(p) = \hat{\psi}(x) + \int_0^t \varphi(\phi^X(s,x))ds$. ψ está bien definida debido a la igualdad $\varphi_\Sigma = \hat{\psi}(\mathfrak{P}) - \hat{\psi}$, es claramente C^∞ y ademas $L_X(\psi) = \varphi$.
$L_{\mathfrak{P}}$ es claramente un operador lineal contínuo para las topologías C^∞. Además acabamos de probar que $ImL_X = L_{\mathfrak{P}}^{-1}(Im\Delta\mathfrak{P})$, de donde concluimos que si $Im\Delta\mathfrak{P}$ es cerrada entonces ImL_X también. Por otro lado, no es difícil ver que $L_{\mathfrak{P}}$ es sobreyectivo. Como $C^\infty(M)/kerL_{\mathfrak{P}}$ es un espacio de Frechet, el teorema de la aplicación abierta nos dice que el pasaje al cociente $\overline{L_{\mathfrak{P}}}\colon C^\infty(M)/kerL_{\mathfrak{P}} \to C^\infty(\Sigma)$ es un homeomorfismo. Supongamos ahora que ImL_X es cerrado en $C^\infty(M)$, entonces $ImL_X/kerL_{\mathfrak{P}}$ es cerrado en $C^\infty(M)/kerL_{\mathfrak{P}}$. Esto junto con

que $Im\Delta\mathfrak{P} = \overline{L_{\mathfrak{P}}}(ImL_X/kerL_{\mathfrak{P}})$ nos da que$Im\Delta\mathfrak{P}$ es un cerrado. Finalmente, si ImL_X o $Im\Delta\mathfrak{P}$ es cerrado ambos son y $C^\infty(M)/ImL_X \simeq C^\infty(\Sigma)/Im\Delta\mathfrak{P}$ lo que prueba que si una de las dos dinámicas es libre de cohomología lo es la otra.

□

2.2. Minimalidad de ϕ^X

En esta sección probaremos que si X es un campo de vectores libre de cohomología, entonces ϕ^X preserva una forma de volúmen, lo que junto a su ergodicidad única nos da la minimalidad de ϕ^X.

Proposición 2.2.1. *Si M es una variedad cerrada y orientable, y $X \in \chi(M)$ un campo de vectores de clase C^∞. Si X es libre de cohomología, entonces existe ω forma de volúmen invariante por $\{\phi_t^X\}$.*

Demostración. Consideremos μ una forma de volúmen en M. Buscamos una función $h \in C^\infty(M)$ de forma que $L_X(\exp(h)\mu) \equiv 0$. Ahora, $L_X(exp(h)\mu) = L_X(h)\exp(h)\mu + \exp(h)L_X(\mu)$, pero como μ es una forma de volúmen, tenemos que $L_X(\mu) = g\mu$ para $g \in C^\infty(M)$. Por tanto tenemos $L_X(\exp(h)\mu) = (L_X(h) + g)\exp(h)\mu$. Como X es libre de cohomología, puedo tomar $h \in C^\infty(M)$ y $c_{-g} \in \mathbb{R}$ de forma que $L_X(h) = -g + c_{-g}$, lo que da $L_X(\exp(h)\mu) = c_{-g}\exp(h)\mu$.
Ahora, el el teorema de cambio de variable nos dice que $\int_M (\phi_t^X)^* \exp(h)\mu = \int_M exp(h)\mu$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por tanto, si definimos $\psi(t) = \int_M (\phi_t^X)^* \exp(h)\mu$ tenemos que $\psi'(0) = 0$ ahora, $\psi'(0) = \int_M L_X(\exp(h)\mu) = \int_M c_{-g}\mu = c_{-g}\int_M \mu$. Finalmente $c_{-g} = 0$ y $\exp(h)\mu$ es la forma de volúmen buscada.

□

Corolario 2.2.2. *Si X es un campo de vectores es libre de cohomología, entonces el flujo ϕ^X es minimal.*

Demostración.En efecto si tuvieramos una órbita no densa, esta soportaría una medida invariante distinta de la forma de volúmen invariante ya encontrada, lo que nos daría dos distribuciones invariantes distintas.

□

2.3. Semiconjugación de Rodriguez-Hertz

En esta sección probaremos un resultado debido a Federico y Jana Rodriguez Hertz [5], que nos da a su vez información topológica de M y dinámica de ϕ^X bajo la hipótesis de que $X \in \chi(M)$ es un campo libre de cohomología. La información dinámica es que ϕ^X es semiconjugado a un flujo lineal diofantino en un toro de dimensión el primer número de Betti de M, y la información topológica es que la semiconjugación es un fibrado. Este resultado es además pieza clave de la prueba de la conjetura de Katok en dimensión 3 [2], [8].

Sea M una variedad cerrada y orientable, y $x_0 \in M$. Notaremos $\hat{M}$ al cubrimiento universal de M, que lo pensaremos como $\hat{M} = \{\gamma\colon I \to M \text{de clase } C^1/\gamma(0) = x_0\}/\gamma_1 \sim \gamma_2$ si son homotópicas a extremos fijos.
Llamaremos ψ acción por transformaciones de cubriemento $\psi\colon \pi_1(M) \times \hat{M} \to \hat{M}$ definida como $\psi([\delta],[\gamma]) = [\gamma \star \delta^{-1}]$.
Consideremos $\pi\colon H_1(M,\mathbb{Z}) \to H_1(M,\mathbb{Z})/Tor(H_1(M,\mathbb{Z}))$ la proyección del primer grupo de homología de M en su factor abeliano libre.
También, dada $\omega \in \Lambda^1(M)$ una forma cerrada, definiremos el mapa $\hat{\omega}\colon \hat{M} \to \mathbb{R}$ como $\hat{\omega}([\gamma]) = \int_\gamma \omega$.
Necesitaremos hacer uso del siguiente

Lema 2.3.1. *Si $\beta_1 = dim(H^1(M,\mathbb{Z})/Tor(H^1(M,\mathbb{Z})))$ es el primer número de Betti de M, existe $f\colon M \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ mapa diferenciable tal que*
$f_\star\colon H_1(M,\mathbb{Z}) \to H_1(\mathbb{T}^{\beta_1},\mathbb{Z})$ es sobreyectivo.

Demostración.Por el teorema de Derham, existen $[\gamma_1],...,[\gamma_{\beta_1}]$ elementos de $H_1(M,\mathbb{Z})$ que verifican que $\{\pi([\gamma_1]),...,\pi([\gamma_{\beta_1}])\}$ es base de $H_1(M,\mathbb{Z})/Tor(H_1(M,\mathbb{Z}))$, y $\{\omega_1,...,\omega_{\beta_1}\}$ base de $H^1_{DR}(M)$ de forma que $\int_{\gamma_i}\omega_j = \delta_{ij}$.
Consideremos la acción $\phi\colon \pi_1(M,x_0) \times \mathbb{R}^{\beta_1} \to \mathbb{R}^{\beta_1}$ definida como $\phi([\delta],(x_1,...,x_{\beta_1})) = (x_1,...,x_{\beta_1}) + (\hat{\omega_1}([\delta^{-1}]),...,\hat{\omega_{\beta_1}}([\delta^{-1}]))$ Ahora, el mapa $h\colon \hat{M} \to \mathbb{R}^{\beta_1}$ definido como $h([\gamma]) = (\hat{\omega_1}([\gamma]),...,\hat{\omega_{\beta_1}}([\gamma]))$ es $\pi_1(M,x_0)$-equivariante por lo que induce una función $\overline{h}$ entre los cocientes.
Por otro lado, si $[\delta] \in \pi_1(M,x_0)$, $\hat{\omega_i}([\delta])$ solo depende de la clase de homología de $[\delta]$. Si escribimos ahora a nivel de homología $[\delta] = \sum n_j[\gamma_j] + \zeta$ donde $\zeta \in Tor(H_1(M,\mathbb{Z}))$ tenemos que $\hat{\omega_i}([\delta]) = \sum n_j\hat{\omega_i}([\gamma_j]) + \hat{\omega_i}(\zeta) = \sum n_j\hat{\omega_i}([\gamma_j]) = n_i$. Por tanto el cociente de $\mathbb{R}^{\beta_1}$ por la acción de $\pi_1(M,x_0)$ es el toro $\mathbb{T}^{\beta_1}$ y el mapa $\overline{h}$ es la función buscada.

$\square$

Definición 2.3.1. Sean $X \in \chi(M)$, $Y \in \chi(N)$ y $f\colon M \to N$ un mapa diferenciable. Diremos que $f_\star(X) = Y$ si $D_p f(X(p)) = Y(f(p))$ para todo $p \in M$.

Lema 2.3.2. *Sea $X \in \chi(M)$, $Y \in \chi(N)$ y $f\colon M \to N$ una fibración tal que $f_\star(X) = Y$. Entonces si X es libre de cohomología, también lo es Y.*

DEMOSTRACIÓN.Consideremos ω la forma de volúmen invariante por $\{\phi_t^X\}$ y, dado $p \in M$ notemos μ_{F_p} a la medida de probabilidad en $F_p = f^{-1}(f(p))$ obtenida de desintegrar ω respecto a las fibras de f. No es difícil de ver que μ_{F_p} proviene de una forma de volúmen y que $\phi_{t\ |F_p}^{X\star}(\mu_{F_p}) = \mu_{F_{\phi_t^X(p)}}$.
Ahora, dada $\psi \in C^\infty(N)$ consideremos $\hat{\psi} \in C^\infty(M)$ definida como $\psi \circ f$. Como X es libre de cohomología, existen $\hat{g} \in C^\infty(M)$ y $c_{\hat{\psi}}$ tal que $L_X(\hat{g}) = \hat{\psi} - c_{\hat{\psi}}$. Definamos ahora $g \in C^\infty(N)$ como $g(q) = \int_{F_p} \hat{g} d\mu_p$ siendo $f(p) = q$. Como ϕ_t^X preserva las medidas definidas en las fibras por desintegración tenemos que $L_Y(g)(q) = \int_{F_p} L_X(\hat{g}) d\mu_p = \int_{F_p} \hat{\psi} - c_{\hat{\psi}} = \mu_{F_p}(F_p)(\psi(q) - c_{\hat{\psi}})$ lo que nos da que $L_Y(g) = \psi - c_{\hat{\psi}}$ ya que las medidas μ_{F_p} provenientes de la desintegración son de probabilidad.

□

Teorema 2.3.3. *Sea $X \in \chi(M)$ es un campo libre de cohomología y β_1 el primer número de Betti de M. Entonces existe una fibración $p\colon M \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ y $Y \in \chi(\mathbb{T}^{\beta_1})$ campo constante diofantino tal que $p_\star(X) = Y$*

DEMOSTRACIÓN.Sea $f\colon M \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ un mapa sobreyectivo a nivel de homología como el constuido en el lema algo. Consideremos $Df(X)\colon M \to \mathbb{R}^{\beta_1}$. Como X es libre de cohomología existe $g\colon M \to \mathbb{R}^{\beta_1}$ tal que $Dg(X) = -Df(X) + (\alpha_1, ..., \alpha_{\beta_1})$. Sea $\pi\colon \mathbb{R}^{\beta_1} \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ la proyección cociente habitual y $h\colon M \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ definido como $h = f + (g \circ \pi)$.
Ahora $Dh(X) = Df(X) + D(g \circ \pi)(X) = Df(X) + Dg(X) = (\alpha_1, ..., \alpha_{\beta_1})$.
Como $\{\phi_t^X\}$ es minimal y $h_\star(X) = (\alpha_1, ..., \alpha_{\beta_1})$ tenemos que $h(M)$ es un subtoro lineal de $\mathbb{T}^{\beta_1}$, pero como h es sobreyectiva a nivel de homología por ser homotópica a f, $h(M) = T^{\beta_1}$.
Sea $\mathfrak{R} = \{x \in M \text{ tal que } D_x(h) \text{tiene rango} \beta_1\}$. $\mathfrak{R}$ es un abierto porque tener rango máximo es una condición abierta. Por otro lado $h \circ \phi_t^X = \phi_t^X \circ h$ por lo que el rango de Dxh es invariante en las órbitas de $\{\phi_t^X\}$. Por lo dicho anteriormente y la minimalidad de $\{\phi_t^X\}$, si $\mathfrak{R} \neq \emptyset$, entonces $\mathfrak{R} = M$. Esto último es cierto por el teorema de Sard y la sobreyectividad de h. Por todo lo anterior h es una fibración y por el lema 2.3.2, el campo constante $(\alpha_1, ..., \alpha_{\beta_1})$ es libre de cohomología, luego por la proposición 2.1.1 es un campo diofantino.

□

Corolario 2.3.4. *Si $X \in \chi(\mathbb{T}^n)$ es un campo libre de cohomología, entonces X es C^∞-conjugado a un campo constante diofantino.*

DEMOSTRACIÓN.Si tomamos el mapa f de la proposición anterior siendo $f = id$, la fibración h es un cubrimiento homotópico a la identidad, que resulta ser un difeomorfismo por tener grado de Brower uno. Por tanto h es la conjugación C^∞ buscada.

$\square$

Corolario 2.3.5. *La fibración $p\colon M \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ del teorema 2.3.3 tiene las fibras conexas.*

DEMOSTRACIÓN.Consideremos la relación de equivalencia $x \sim y$ si $p(x) = p(y)$ y además están en la misma componente conexa de la fibra que los contiene. Consideremos $p_\sim\colon M \to M/\!\sim$ la proyección cociente. Es fácil ver que $M/\!\sim$ es una variedad y que p se factoriza como $p = p' \circ P_\sim$ donde p' es un cubrimiento.
Tomemos $x_0 \in M$, $p_\sim(x_0) \in M_\sim$ y $x = p(x_0) \in \mathbb{T}^{\beta_1}$. El teorema 2.3.3 nos dice que $p_*(\Pi_1(M, x_0)) = \Pi_1(\mathbb{T}^{\beta_1}, x)$ (en realidad nos lo dice a nivel de homología, pero es sencillo ver que es lo mismo), pero como $p_*(\Pi_1(M, x_0)) \subseteq p'_*(\Pi_1(M/\!\sim, p_\sim(x_0)))$, p'_* es sobreyectivo y entonces p' es un homeomorfismo, probando que las fibras de p son conexas.

Capítulo 3

La conjetura de Katok en dim 3

Nos basaremos en [2] y [8], que probaron la conjetura de Katok en dimensión 3 de forma independiente.
En el teorema 2.3.3 probamos que si $X \in \chi(M)$ es un campo libre de cohomología, entonces ϕ^X es semiconjugado a un flujo lineal diofantino en un toro de dimensión β_1, primer número de Betti de M. Las pruebas de la conjetura de Katok en dimensión tres que existen, se basan en discutir según el primer número de Betti de M, que por lo dicho anteriormente solo puede tomar los valores $0, 1, 2$ y 3. Nosotros trataremos los casos $\beta_1 = 1, 2$ y 3.

Cuando $\beta_1 = 3$, el teorema 2.3.3 nos da una fibración de $p\colon M \to \mathbb{T}^3$ cuyas fibras son de dimensión cero, y el corolario 2.3.5 nos dice que las fibras son conexas. Entonces p es un difeomorfismo, y el mismo teorema 2.3.3 no dice que p conjuga X con un campo constante diofantino en $\mathbb{T}^{\beta_1}$.

3.1. $\beta_1 = 1$

Consideremos entonces el caso en que $\beta_1 = 1$. El teorema 2.3.3 nos da una fibración $p\colon M \to \mathbb{T}^1$ que semiconjuga ϕ^X con uin flujo no nulo en $\mathbb{T}^1$. De lo anterior, se desprende facilmente que $\phi^X : \mathbb{R} \times M \to M$ es la suspensión de un difeomorfismo $f\colon N \to N$ donde N es difeomorfo a las fibras de p.
N debe ser una superficie compacta y conexa por el corolario 2.3.5. Además podemos orientar N con la orientación preimagen ya que M y T^1 son orientables.
La clasificación de las superficies compactas nos dice que si N es una superficie compacta, conexa, orientable y sin borde, entonces es homeomorfa a la esfera S^2 o la esfera S^2 a la que

se le agregan g asas, superficie que llamaremos de género g y notaremos S_g para $g \geq 2$ y $\mathbb{T}^1$ para $g = 1$.
Descartemos primero las superficies de género distinto a uno. Nuestro N no puede ser la esfera S^2, ya que $Diff^+(S^2)$ tiene una única clase de isotopía, por lo que f debe ser isotópico a la identidad y por tanto tener un punto fijo, contradiciendo la minimalidad de ϕ^X. Para el caso $g \geq 2$, se prueba en [3] que si $f\colon S_g \to S_g$ es un difeomorfismo, entonces posee una órbita periódica, lo que nuevamente contradice la minimalidad de ϕ^X.

Solo nos queda entonces, el caso en que $N \simeq \mathbb{T}^2$. Discutiremos a qué clases de isotopía puede pertenecer f, para esto usaremos el teorema de Lefschetz.
Antes unas pocas definiciones algebraicas.
Si $\psi\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^n$ es un homomorfismo, definimos la traza de ψ como $tr(\psi) = \sum a_{ii}$. Como $tr(AB) = tr(BA)$ tenemos que la traza no depende de la base de $\mathbb{Z}^n$ escogida. Si G es un grupo abeliano y tenemos $\psi\colon G \to G$ un morfismo, podemos considerar $\overline{\psi}\colon G/TorG \to G/TorG$ y definir entonces $tr(\overline{\psi})$. Por lo anterior tiene sentido hablar directamente de la traza de ψ. Dado $\phi\colon M \to M$ un mapa contínuo podemos entonces definir $\tau(\phi)$ como $\sum(-1)^i tr(f_*\colon H_i(M) \to H_i(M))$. Una versión débil del teorema de Lefschetz es:

Teorema 3.1.1. *Si S es una variedad compacta y $g\colon S \to S$ es un mapa contínuo entonces, $\tau(f) \neq 0$ implica que g posee un punto fijo.*

Se puede encontrar una prueba del teorema de Lefschetz en [4].
Concentremonos nuevamente en el difeomorfismo $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. La siguiente proposición descartará el caso $\beta_1 = 1$.

Proposición 3.1.2. *Si un difeomorfismo $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ no tine puntos fijos entonces es isotópico a un difeomorfismo lineal de la forma $A\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ donde $A(a,b) = (a + n_0 b, b)$. Además la suspensión de f está soportada en una variedad con $\beta_1 \geq 2$.*

DEMOSTRACIÓN.En este caso $\tau(f) = 2 - tr(f_*\colon H_1(\mathbb{T}^2) \to H_1(\mathbb{T}^2))$. El polinomio característico de f_* es $\chi_{f_*}(\lambda) = \lambda^2 - tr(f_*)\lambda + 1$. Como f no tiene puntos fijos, $\tau(f)$ debe ser 0, entonces $tr(f_*) = 2$ y el único valor propio de f_* es 1. Por lo que tenemos que f_* es $SL(2,\mathbb{Z})$ conjugado a un automorfismo $A\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}^2$ de la forma $A(a,b) = (a + n_0 b, b)$.
Sabido es que la topología de la suspensión solo depende de la clase de isotopía del difeomorfismo, por lo que M es entonces homeomorfa a alguno de los espacios $M_{n_0} = \mathbb{T}^2 \times [0,1]/\sim_{n_0}$ siendo $\sim_{n_0}$ la relación $(Av, 0) \sim_{n_0} (v, 1)$, donde $A([x],[y]) = ([x + n_0 y],[y])$.
Observar que $\psi\colon \mathbb{T}^2 \times [0,1] \to \mathbb{T}^2$ definido como $\psi((\theta_1,\theta_2),t) = (\theta_2,[t])$ baja al cociente por $\sim_{n_0}$ para todo $n_0 \in \mathbb{Z}$ a un fibrado $\overline{\psi}\colon M_{n_0} \to \mathbb{T}^2$ con fibra S^1. Como el fibrado $\overline{\psi}$ tiene

fibra conexa, $\overline{\psi}_*$ (el morfismo inducido a nivel de π_1) es sobreyectivo, lo que nos da que $\pi_1(M_{n_0})/ker\overline{\psi}_* \simeq \mathbb{Z}^2$.
Pero como $\pi_1(M_{n_0})/ker\overline{\psi}_*$ es abeliano tenemos que $[\pi_1(M_{n_0}), \pi_1(M_{n_0})] \subseteq ker\overline{\psi}_*$ y entonces $\pi_1(M_{n_0})/ker\overline{\psi}_* = (\pi_1(M_{n_0})/[\pi_1(M_{n_0}), \pi_1(M_{n_0})])/(ker\overline{\psi}_*/[\pi_1(M_{n_0}), \pi_1(M_{n_0})]) \simeq \mathbb{Z}^2$ lo que implica que $\beta_1 \geq 2$ en contradicción con nuestra hipótesis de que $\beta_1 = 1$.

□

3.2. $\beta_1 = 2$

En este caso, el teorema 2.3.3 nos da una semiconjugación $p\colon M \to \mathbb{T}^2$, cuya fibra es $\mathbb{T}^1$, ya que por el corolario 2.3.5 la fibra es conexa.
Si uno compone la fibración p con la proyección en uno de los factores del toro $\mathbb{T}^2$ obtendrá una semiconjugación como la del caso $\beta_1 = 1$, solo que en este caso tenemos a nuestro favor una foliación dada por las fibras de p que será invariante para el difeomorfismo en $\mathbb{T}^2$ a suspender. Finalmente podremos linealizar el difeomorfismo en cuestión y fabricar distribuciones invariantes.
Si $q \in M$, notaremos F_q a $F_q = p^{-1}(p(q))$ la fibra de p por q. y T_qF_q al espacio tangente a F_q en q.

Proposición 3.2.1. *Existe $\psi\colon \mathbb{T}^1 \times M \to M$ acción libre cuyas órbirtas son las fibras de p, y que además $\psi(g, \cdot) \circ \phi_t^X = \phi_t^X \circ \psi(g, \cdot)$ para todo $g \in \mathbb{T}^1$ y $t \in \mathbb{R}$.*

Demostración.Como M y $\mathbb{T}^2$ son orientables, podemos dar la orientación preimagen a las fibras de p y construir $Y \in \chi(M)$ de forma que $0 \neq Y(q) \in T_qF_q$ para todo $q \in M$.
Como el subfibrado del tangente consistente de los tangentes a las fibras de p es invariante por ϕ^X, podemos escribir $L_X(Y)$ como gY con $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Consideremos entonces $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ y el campo de vectores $exp(h)Y$. Luego, $L_X(exp(h)Y) = L_X(h)exp(h)Y + exp(h)L_X(Y) = (L_X(h) + g)exp(h)Y$. Como X es libre de cohomología existe $c \in \mathbb{R}$ y $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ tal que $L_X(h) = -g + c$ por lo tanto $L_X(exp(h)Y) = cexp(h)Y$. Definamos ahora $Z \in \chi(M)$ como $Z = exp(h)Y$, Z verifica que $L_X(Z) = cZ$.
Consideremos ahora $V\colon [0, +\infty) \to TM$ definido como $V(t) = d_q\phi_t^X(Z(q))$. Como V está definido a lo largo de una órbita de ϕ^X, tiene sentido calcular $L_X(V) = L_X(k(t)Z) = k'(t)Z + k(t)L_X(Z) = k'(t)Z + k(t)cZ$. Por construcción, tenemos que $L_X(V) = 0$ y por tanto $k'(t) + ck(t) = 0$ y como $k(0) = 1$, $k(t) = exp(-ct)$. Esto nos da que $(\phi_t^X)_*(Z) = exp(-ct)Z$.
Consideremos ahora $T\colon M \to \mathbb{R}$ definida como $T(q) = min\{t \in \mathbb{R}^+ : \phi^Z(t, q) = q\}$, T está bien definida y es contínua. Como $(\phi_t^X)_*(Z) = exp(-ct)Z$ tenemos que $\phi^X(t, \phi^Z(s, q)) =$

$\phi^{exp(-ct)Y}(s, \phi^X(t,q))$ y por tanto, como $\phi^X(t,q) = \phi^X(t, \phi^Z(T(q),q)) = \phi^{exp(-ct)Z}(T(q), \phi^X(t,q))$ $T(\phi^X(t,q)) = exp(ct)T(q)$. Luego como T es contínua y no nula, c debe ser igual a 0, y T constante en las órbitas de ϕ^X, y por tanto constante en M. Además, esto nos da que $L_X(Y) = 0$ y por tanto que los flujos ϕ^X y ϕ^Z conmutan. Finalmente, como $T \equiv \alpha \in \mathbb{R}^+$, ϕ^Z baja a una acción de $\mathbb{R}/\alpha\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1$ $\psi\colon \mathbb{T}^1 \times M \to M$ que conmuta con ϕ^X.

□

Sea $X_v \in \chi(\mathbb{T}^2)$ el campo diofantino tal que $p_*(X) = X_v$, $\pi\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^1$ la proyección en la primer coordenada y $X_c \in \chi(\mathbb{T}^1)$ el campo constante tal que $\pi_*(X_v) = X_c$.
Consideremos ahora la fibración $p' = \pi \circ p\colon M \to \mathbb{T}^1$. Claramente p' es una semiconjugación. Fijemos ahora $\theta \in \mathbb{T}^1$ y consideremos $S = \pi^{-1}(\theta) \equiv \mathbb{T}^1$ y $N = p^{-1}(S) = (p')^{-1}(\theta) \equiv \mathbb{T}^2$. Definamos ahora el tiempo de retorno $T = min\{t \in \mathbb{R} : \phi^{X_c}(t,\theta) = \theta\}$. Podemos definir ahora los retornos de Poincaré $R\colon S \to S$ definido como $R(\theta) = \phi^{X_v}(T,\theta)$ y $f\colon N \to N$ definido como $f(q) = \phi^X(T,q)$. Como se observó en la sección $\beta_1 = 1$, N debe ser difeomorfa a un toro $\mathbb{T}^2$.

Proposición 3.2.2. *El difeomorfismo $f\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ es C^∞ conjugado a un mapa $\overline{f}\colon \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ definido como $\overline{f}(\theta_1,\theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + h(\theta_1))$ donde $\theta \to \theta + \alpha$ es una rotación libre de cohomología y $h \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$.*

Demostración.Notemos $\hat{p}$ a $\hat{p} = p_{|N}\colon N \to S$. Tomemos ahora $h\colon S \to \mathbb{T}^2$ una sección C^∞ del fibrado π y consideremos el difeomorfismo $F\colon S \times T^1 \to N$ definido como $F(\theta_1,\theta_2) = \psi(\theta_2, h(\theta_1))$ donde ψ es la acción de $\mathbb{T}^1$ en M construida en la proposición 3.2.1. En estas nuevas coordenadas f luce como $\overline{f} = F^{-1} \circ f \circ F$. Observar que la proyección en la primer coordenada de $S \times \mathbb{T}^1$, $\pi_1\colon S \times \mathbb{T}^1 \to S$ es $\pi_1 = \hat{p} \circ F$, por lo que $R \circ \pi_1 = R \circ \hat{p} \circ F = \hat{p} \circ f \circ F = \hat{p} \circ F \circ \overline{f} = \pi_1 \circ \overline{f}$ y $\overline{f}$ es un skew-product sobre $R\colon S \to S$. Además, si dotamos a S de la estructura de grupo que hereda de $\mathbb{T}^2$, $R\colon S \to S$, $R = \phi^{X_v}(T,\cdot)$ es una traslación que además es libre de cohomología por la proposición 2.1.3.
Como N es invariante para la acción ψ de la proposición 3.2.1 podemos considerar la restricción $\overline{\psi}\colon \mathbb{T}^1 \times N \to N$. Además $\overline{\psi}(g, f(q)) = f(\overline{\psi}(g,q))$.
Observemos además que la acción $\overline{\psi}$ luce después del cambio de coordenadas F como la traslación en la segunda coordenada de $S \times \mathbb{T}^1$, por lo que $\overline{f}$ tiene la forma $\overline{f}(\theta_1,\theta_2) = (R(\theta_1), \theta_2 + \phi(\theta_1))$ con $\phi \in C^\infty(S, \mathbb{T}^1)$. En otras palabras f es C^∞ conjugado a una extensión por rotaciones en $\mathbb{T}^1$ de una rotación libre de cohomología.

□

Veamos ahora que un mapa como el de la proposición anterior se puede linealizar con un cambio de coordenadas C^∞.

Proposición 3.2.3. *Sea un mapa* $f\colon \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ *de la forma* $f(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \phi(\theta_1))$ *donde* $\theta_1 \mapsto \theta_1 + \alpha$ *es una rotación libre de cohomología y* $\phi \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$*. Entonces existe un cambio de coordenadas* $A_u\colon \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ *de la forma* $A_u(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1, \theta_2 + u(\theta_1))$ *donde* $u \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{T}^1)$ *es homotópico a una constante, y tal que* $A_u^{-1} \circ f \circ A_u$ *es de la forma* $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + n\theta_1 + k)$ *con* $n \in \mathbb{Z}$ *y* $k \in \mathbb{R}$*.*

Demostración.Para esto consideremos un cambio de coordenadas genérico $A_u^{-1} \circ f \circ A_u$. Este mapa es $(\theta_1, \theta_2) \mapsto (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + \phi(\theta_1) - (u(\theta_1 + \alpha) - u(\theta_1)))$. Ahora, $\phi\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ se puede escribir como $\phi = nz + \phi_0$ con ϕ_0 homotópica a una constante.
Consideremos $pr\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}^1$ el cubrimiento universal de $\mathbb{T}^1$. Como ϕ_0 y u son homotópicos a una constante existen $\overline{\phi_0}, \overline{u}\colon \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ tales que $\phi_0 = pr \circ \overline{\phi_0}$ y $u = pr \circ \overline{u}$. Luego, $A_u^{-1} \circ f \circ A_u(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + n\theta_1 + pr(\overline{\phi_0} - (\overline{u}(\theta_1 + \alpha) - \overline{u}(\theta))))$
Como $\theta \mapsto \theta + \alpha$ es libre de cohomología, existe $\overline{h} \in C^\infty(\mathbb{T}^1, \mathbb{R})$ y $\overline{c_{\phi_0}} \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{h}(\theta_1 + \alpha) - \overline{h}(\theta_1) = \overline{\phi_0} - c_{\phi_0}$ luego $\overline{\phi_0} - (\overline{h}(\theta + \alpha) - \overline{h}(\theta)) = \overline{c_{\phi_0}}$ por lo que $A_h^{-1} \circ f \circ A_h(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + n\theta_1 + pr(\overline{\phi_0} - (\overline{h}(\theta_1 + \alpha) - \overline{h}(\theta_1)))) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + n\theta_1 + c_{\phi_0})$.

□

Retomando nuestro problema original, tenemos que nuestro flujo ϕ^X en M, es la suspensión de un difeomorfismo C^∞ conjugado a $\hat{f}\colon \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ definido como $\hat{f}(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + n\theta_1 + \beta)$ con $b \in \mathbb{Z}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Recordemos que la proposición 2.1.3 nos dice que $\hat{f}$ es libre de cohomología si y solamente si lo es ϕ^X. Además n de la fórmula de $\hat{f}$ debe ser distinto de 0 ya que sino $M \equiv \mathbb{T}^3$ en contradicción con nuestra hipótesis de que $\beta_1 = 2$. Construiremos distribuciones invariantes para esta familia de difeomorfismo lineales, descartando por tanto que $\beta_1 = 2$.

Proposición 3.2.4. *Si* $A\colon \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1$ *es un difeomorfismo de la forma* $A(\theta_1, \theta_2) = (\theta_1 + \alpha, \theta_2 + k\theta_1 + \beta)$ *con* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *y* $k \in \mathbb{Z}/\{0\}$*, entonces* A *tiene un conjunto infinito de distribuciones invariantes linealmente independientes.*

Demostración.
Sea $T\colon C^\infty(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1) \to L^2_* = \{\sigma\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{C} : lim_{\|(k_1,k_2)\|\to\infty}|\sigma(k_1,k_2)|\|(k_1,k_2)\|^p, \forall p \in \mathbb{N}\}$
la transformada de Fourier. Notaremos $\hat{\phi}(m,n)$ a $T(\phi)(m,n)$.
Para construir las distribuciones invariantes, tomaremos funcionales de la forma
$F_{(m,n)}\colon C^\infty(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1) \to \mathbb{C}$ con $n \neq 0$ donde $F_{(m,n)}(\phi) = \hat{\phi}(m,n)$, y los promediaremos por la acción de A^*, donde $A^*\colon C^\infty(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1) \to C^\infty(\mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1)$ es $A^*(\phi) = \phi \circ A$.
Esto es, dado $(m,n); n \neq 0$ consideraremos el $\overline{F_{(m,n)}}$ el límite débil de $S^p_{(m,n)} = \sum_{|l|<p} F_{(m,n)} \circ (A^*)^l$ cuando $p \to \infty$, el cual probaremos que existe.
La continuidad de $\overline{F_{(m,n)}}$ será entonces consecuencia del teorema de Banach-Steinhaus, que afirma que el límite debil de funcionales contínuos es contínuo si están definidos sobre un espacio de Frechet, como lo es $C^\infty(M)$.
Respecto a la invariancia de $\overline{F_{(m,n)}}$, esta será consecuencia de que $\overline{F_{(m,n)}}(\phi)$ solo depende de la órbita de ϕ por A^*.
Sea $e_{(a,b)}\colon \mathbb{T}^1 \times \mathbb{T}^1 \to \mathbb{C}$ definida como $e_{(a,b)}(\theta_1, \theta_2) = exp(2\pi i(a\theta_1 + b\theta_2))$. Empecemos entonces por calcular
$A^*(e_{(a,b)}) = exp(a\pi i(a(\theta_1 + \alpha) + b(\theta_2 + k\theta_1 + \beta))) = exp(a\pi i < (a,b), (\alpha, \beta) >)e_{(a+kb,b)}$.
Entonces $A^*(\sum \hat{\phi}(a,b)e_{(a,b)}) = \sum \hat{\phi}(a,b)A^*(e_{(a,b)}) = \sum \hat{\phi}(a,b)e_{(a,b)}(\alpha,\beta)e_{(a+kb,b)}$.
Luego $A^*(\phi) = \sum \hat{\phi}(a - kb, b)e_{(a-kb,b)}(\alpha, \beta)e_{(a,b)}$ y
$(A^*)^l(\phi) = \sum \hat{\phi}(a - lkb, b)(\prod_{j=1}^{l} e_{(a-jkb,b)}(\alpha, \beta))e_{(a,b)}$.
Por lo que $F_{(m,n)} \circ (A^*)^l(\phi) = \hat{\phi}(m - lkn, n)(\prod_{j=1}^{l} e_{m-jkn,n}(\alpha, \beta))$.
Ahora, $S^p_{(m,n)} = \sum_{|l|<p} \hat{\phi}(m - lkn, n)(\prod_{j=1}^{l} e_{(m-jkn,n)}(\alpha, \beta))$. La convergencia débil de $S^p_{(m,n)}$ quedará probada si tenemos que $\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\hat{\phi}(m - lkn, n)| < \infty$, lo que es cierto porque $kn \neq 0$ y $\hat{\phi} \in L^2_* \subseteq L^1$. Finalmente, observemos que si $n_1 \neq n_2$ entonces los coeficientes de Fourier que intervienen en la definición de $\overline{F}_{(0,n_1)}$ y $\overline{F}_{(0,n_2)}$, (es decir los elementos de la base dual a la de Fourier, que generan $\overline{F}_{(0,n_1)}$ y $\overline{F}_{(0,n_2)}$) son disjuntos dos a dos, por lo que
$\{\overline{F}_{(0,n)} : 0 \neq n \in \mathbb{Z}\}$ es una familia linealmente independiente de distribuciones invariantes.

□

Capítulo 4

Linealización en espacio de corrientes

En este capítulo seguiremos bien de cerca [1]. El objetivo de esta sección es probar que si $X \in \chi(M)$ es un campo libre de cohomología, podemos construir un grupo abeliano A y un flujo lineal en él de forma que existe un mapa continuo e inyectivo de M en A haciendo equivariante la acción generada por X con la acción lineal en A.
Es importante resaltar que la topología natural de A no lo hace un espacio de Hausdorff y que cuando se quiere corregir esto no se puede probar la inyectividad del mapa de encaje. Observar que si se tuviera que A es de Hausdorff, tendríamos por la minimalidad de ϕ^X que la imágen de M en A es la clausura de un subgrupo a un parámetro, y por ende un grupo abeliano. Uno de los problemas de Hilbert ya resueltos garantiza que un grupo topoloógico con topología de variedad admite estructura de grupo de Lie y por tanto M sería homeomorfo a un grupo de Lie abeliano y conexo es decir a un toro.
Moralmente, lo que hacen los autores en [] es levantar el flujo en M a un espacio de corrientes, linealizarlo en el espíritu de la semiconjugación de Hertz-Hertz y luego bajarlo. El espacio de corrientes $\tilde{\Gamma_x}$ (que en realidad es casi el espacio de curvas módulo pelos de M) jugará el papel de $\hat{M}$ (el espacio de curvas módulo homotopías) en la semiconjugación de Hertz-Hertz.

4.1. M como cociente de un espacio de corrientes

En esta sección construiremos el espacio de corrientes $\tilde{\Gamma_x}$ que fibrara sobre M y sobre el cual levantaremos el flujo ϕ^X para linealizarlo. Fijemos una métrica Riemanniana de ahora en más.
Consideraremos Γ, el conjunto de curvas a tiempo libre, C^∞ a trozos los cuales son segmentos de flujo o segmentos geodésicos transversales a X. Si $\gamma \in \Gamma$, $\gamma\colon [0,T] \to M$, notaremos $\alpha(\gamma)$ a $\gamma(0)$, $\omega(\gamma)$ a $\gamma(T)$ y $\overline{\gamma}$ a la curva recorrida en sentido inverso. Si $\nu\colon [0,S] \to M$ también está en

Γ y verifica $\alpha(\nu) = \omega(\gamma)$ definiremos la concatenación $\gamma\nu$ como el mapa $\gamma\nu\colon [0, S+T] \to M$ definido como siempre. Γ_x serán aquellas curvas que parten de x, Δ las cerradas, y Δ_x será $\Delta \cap \Gamma_x$. Por ahora no le daremos estructura extra a estos conjuntos.
Sea $\Omega^1(M) = \{\phi \in \Lambda^1(M)\}$ el espacio de uno-formas diferenciables de clase C^∞, espacio al que dotaremos de su topología C^∞ que lo hace un espacio de Frechet. A su espacio dual lo llamaremos espacio de uno-corrientes, lo notaremos $C^1(M)$ y lo dotaremos de su topología débil-*
También consideremos $\mathfrak{M} = \{\delta_x / x \in M\}$ el conjunto de las delta de Dirac soportadas en M, el cual puede considerarse dentro de $(C^\infty(M))^\star$ de la siguiente manera:
$C^\infty(M) \to C^0(M) \to \mathbb{R}$ donde la primer flecha es la inclusión y la segunda el funcional que nos da el teorema de Riesz.
El siguiente lema nos será de utilidad

Lema 4.1.1. *El mapa $\phi\colon M \to \mathfrak{M}$ que a cada $x \in M$ le asocia δ_x es un homeomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN.Para ver que es contínuo tenemos que tomar $f \in C^\infty(M)$ y $p_n \to p$, luego $\delta_{p_n}(f) = f(p_n) \to f(p)$ cuando $p_n \to p$. La inyectividad es inmediata y por tanto como M es compacto y $\mathfrak{M}$ es Hausdorff ϕ es un homeo.

$\square$

Proposición 4.1.2. *Dada $\gamma \in \Gamma_x$, el mapa $\tilde{\gamma}\colon \Omega^1(M) \to \mathbb{R}$ definido como $\tilde{\gamma}(\omega) = \int_\gamma \omega$ es contínuo si dotamos a $\Omega^1(M)$ de su topología C^0, en particular $\tilde{\gamma} \in C^1(M)$*

DEMOSTRACIÓN. Como $\gamma \in \Gamma_x$, $\exists\ 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = t_\gamma$, de forma que $\gamma_i = \gamma_{|[t_i, t_{i+1}]}$ es de clase C^∞ y podemos considerar $D\gamma_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to TM$ tal que $D\gamma_i(t) = \dot{\gamma}_i(t) \in TM$ también de clase C^∞ y $\Psi_i\colon \Omega^1(M) \to C^\infty([t_i, t_{i+1}], \mathbb{R})$ definido como $\Psi_i(\omega) = \omega \circ D\gamma_i$. Ahora, $\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Psi_i(\omega)(t)dt$, pero si ω varía C^0, también lo hace $\Psi_i(\omega)$ y su integral, por lo que $\tilde{\gamma}$ es contínua si dotamos a $\Omega^1(M)$ de su topología C^0. Como la topología de Frechet es más fina que la C^0, $\tilde{\gamma} \in C^1(M)$

$\square$

Al conjunto $\{\tilde{\gamma} : \gamma \in \Gamma\} \subseteq C^1(M)$ lo notaremos $\tilde{\Gamma}$, y análogamente consideraremos los conjuntos $\tilde{\Gamma_x}$, $\tilde{\Delta}$ y $\tilde{\Delta_x}$.
Si $d\colon C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ es la derivada exterior, definiremos su dual $d^\star = D\colon (\Omega^1(M))^\star \to (C^\infty(M))^\star$ como $D(\phi)(f) = \phi(df)$.

La siguiente proposición nos da una descripción algebraica de las corrientes en $\tilde{\Gamma_x}$ que provienen de curvas cerradas.

Proposición 4.1.3. $\tilde{\Delta} = \{\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma} : D\tilde{\gamma} = 0\} = \tilde{\Delta_x}$. *Además* $\tilde{\Gamma_x}$ *es invariante por traslaciones en* $\tilde{\Delta}$

Demostración.$D\tilde{\gamma}(f) = \tilde{\gamma}(df) = \int_\gamma df = f(\omega(\gamma)) - f(\alpha(\gamma))$ por tanto $D\tilde{\gamma} \equiv 0$ si y solamente si $\omega(\gamma) = \alpha(\gamma)$ si y solamente si $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Delta}$. Por otro lado si $\delta \in \tilde{\Delta}$, sea $\nu \in \Gamma_x$ tal que $\omega(\nu) = \alpha(\delta) = \omega(\delta)$, luego $\nu\delta\overline{\nu} \in \Gamma_x$ y $\nu\tilde{\delta}\overline{\nu} = \tilde{\delta}$, lo que prueba que $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta_x}$.
Ahora consideremos $\delta \in \Delta$ y $\gamma \in \Gamma_x$, por lo visto en el parrafo anterior, existe $\delta' \in \Delta_x$ tal que $\tilde{\delta} = \tilde{\delta'}$, por lo que $\tilde{\delta} + \tilde{\gamma} = \tilde{\delta'} + \tilde{\gamma} = (\tilde{\delta'\gamma}) \in \tilde{\Gamma_x}$. Luego $\tilde{\Gamma_x}$ es invariante por traslaciones en $\tilde{\Delta}$

□

La proposición anterior nos permite considerar el cociente de $\tilde{\Gamma}_x$ por traslaciones en $\tilde{\Delta}$

Teorema 4.1.4. $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ *es homeomorfo a* M.

Demostración.Consideremos el mapa lineal $T\colon C^1(M) \to (C^\infty(M))^\star$ definido como $T(\phi) = D\phi + \delta_x$. Es fácil ver que T es contínuo(Recordar que consideramos las topologías debil-* en los espacios duales). Ahora consideremos la restricción de T a $\tilde{\gamma_x}$.
En forma similar a la proposición anterior $T(\tilde{\gamma})(f) = \tilde{\gamma}(df) + \delta_x = (\delta_{\omega(\gamma)} - \delta_x) + \delta_x = \delta_{\omega(\gamma)}$.
Por tanto $\overline{T} = |\tilde{\Gamma_x}$ tiene como imágen $\mathfrak{M}$.
Por ahora tenemos que $\overline{T}\colon \tilde{\Gamma_x} \to \mathfrak{M}$ es un mapa contínuo y sobreyectivo.
Afirmación: $\overline{T}(\tilde{\gamma_1}) = \overline{T}(\tilde{\gamma_2})$ si y solamente si $\tilde{\gamma_1} - \tilde{\gamma_2} \in \tilde{\Delta}$.
En efecto si $\overline{T}(\tilde{\gamma_1}) = \overline{T}(\tilde{\gamma_2})$, $\delta_{\omega(\gamma_1)} = \delta_{\omega(\gamma_2)}$ por lo que $\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2)$ y tiene sentido la concatenación $\gamma_1\overline{\gamma_2} \in \Delta$ que nos muestra que $\tilde{\gamma_1\overline{\gamma_2}} = \tilde{\gamma_1} - \tilde{\gamma_2} \in \tilde{\Delta}$.
Recíprocamente, supongamos que $\tilde{\gamma_1} - \tilde{\gamma_2} \in \tilde{\Delta}$, esto es $\tilde{\overline{\gamma_2}\gamma_1} \in \tilde{\Delta}$ por tanto $D(\overline{\gamma_2}\gamma_1) = \delta\omega(\gamma_1) - \delta\omega(\gamma_2) \equiv 0$ lo que prueba que $\overline{T}(\tilde{\gamma_1}) = \overline{T}(\tilde{\gamma_2})$.
La propiedad universal del cociente nos da una biyección contínua de $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ en $\mathfrak{M}$ que es homeomorfo a M (ver 4.1.1). Para probar que la biyección es abierta alacanza con probar que $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ es compacto.

Lema 4.1.5. $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ *es un espacio topológico compacto.*

Demostración.Sea $\{U_1, ..., U_k\}$ un cubrimiento por discos compactos de M, de forma que existen $\epsilon_1, ..., \epsilon_k > 0$ y $p_1, ..., p_k \in M$ tales que $U_i = exp_{p_i}(\overline{B(0, \epsilon_i)})$. Consideremos ahora $\gamma_1, ..., \gamma_k \in \Gamma_x$ tales que $\omega(\gamma_i) = p_i$.
Sea ahora, $h_i\colon \overline{B(0, \epsilon_i)} \to \tilde{\Gamma_x}$ definido como $h_i(v) = \gamma_i \star g_v^i$ donde $g_v^i\colon [0, 1] \to M$ es $g_v^i(t) =$

$exp_{p_i}(tv)$. No es difícil ver que h_i es un mapa contínuo. Como $\{U_1, ..., U_k\}$ es un cubrimiento de M tenemos que $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta} = \cup_i Imh_i$ una unión finita de compactos, probando el lema.

$\square$

4.2. La linealización

Primero linealizaremos el flujo a nivel de corrientes. Esto es encontrartemos un mapa $\psi\colon \tilde{\Gamma_x} \to C^1(M)$ inyectivo y $v \in C^1(M)$ de forma que si $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma_x}$ y $\varphi_s^\gamma\colon [0,s] \to M$ es $\varphi_s^\gamma(t) = \phi(t, \omega(\gamma))$ entonces $\psi(\widetilde{\gamma\varphi_s^\gamma}) = \psi(\tilde{\gamma}) + sv$.

Proposición 4.2.1. *Si $X \in \chi(M)$ es un campo libre de cohomología, μ su única medida invariante y $C_0^\infty(M) = \{f \in C^\infty(M) : \int_M f d\mu = 0\}$ entonces el operador derivada de Lie $L_X\colon C_0^\infty \to C_0^\infty$ es un isomorfismo de espacios vectoriales y un homeomorfismo.*

Demostración.L_X es inyectivo ya que si $L_X(f) = 0$ entonces f debe ser una constante por la minimalidad del flujo $\{\phi_t^X\}$, y sobreyectivo porque X es libre de cohomología. Luego, como $C_0^\infty(M)$ es un espacio de Frechet, el teorema de la aplicación abierta implica que L_X es un homeomorfismo.

$\square$

Tomemos $\omega \in \Omega^1(M)$, y consideremos $\omega(X) \in C^\infty(M)$, luego como X es libre de cohomología existen $c_\omega = \int_M \omega(X) d\mu$ y $h_\omega \in C^\infty(M)$ tales que $\omega(X) - c_\omega = L_X(h_\omega) = dh_\omega(X)$. Si consideramos las topologías C^∞ en $\Omega^1(M)$ y $C^\infty(M)$ las asignaciones $\omega \mapsto \omega(X)$, $\omega \mapsto c_\omega$, $\omega - c_\omega \mapsto h_\omega$ y la derivada exterior $d\colon C^\infty(M) \to \Omega^1(M)$ son contínuas por lo que tenemos finalmente que el mapa $\omega \mapsto dh_\omega$ es contínuo.

Finalmente podemos definir $L\colon C^1(M) \to C^1(M)$ como $L(T)(\omega) = T(\omega - dh_\omega)$. Observar que L es contínuo para las topologías debil-*. El mapa de linealización en espacio de corrientes será Ł$_x\colon \tilde{\Gamma_x} \to C^1(M)$ sera $L_x = L_{|\tilde{\Gamma_x}}$. Para probar la inyectividad de L_x debemos entender más sobre el mapa $\Gamma \to C^1(M)$ que a γ asocia $\tilde{\gamma}$.

Definición 4.2.1. Dados dos conjuntos de curvas $\{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ y $\{\beta_1, ..., \beta_m\}$ diremos que son C-equivalentes si $\sum \tilde{\gamma_i} = \sum \tilde{\beta_j}$

Definición 4.2.2. Si $\mathfrak{A} = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\} \subseteq \Gamma$ diremos que $\{\nu_1^1, ..., \nu_{n_1}^1, ..., \nu_1^m, ..., \nu_{n_m}^m\}$ es una buena partición de $\mathfrak{A}$ si $\gamma_i = \nu_1^i ... \nu_{n_i}^i$ para todo $i \in \{1, ..., m\}$ y además dados $(i,j) \neq (k,l)$, se tiene una de las tres opciones: $Im(\nu_j^i)$ y $Im(\nu_l^k)$ son transversales, $\nu_j^i = \nu_l^k$ o $\nu_j^i = \overline{\nu_l^k}$. Si $\mathfrak{A}$ admite una buena partición donde se dan solo las primeras dos opciones, diremos que $\mathfrak{A}$ admite una buena partición sin cancelaciones.

A continuación definiremos una operación que permite simplificar conjuntos de curvas pero de manera que sigan siendo C-equivalentes. Para esto, diremos que una curva $\gamma \in \Gamma$ tiene un arco r retractable si $\gamma = arbr^{-1}c$, y que dos curvas γ_1 y γ_2 tienen un arco r retractable si $\gamma_1 = arb$ y $\gamma_2 = cr^{-1}d$.
Si $\gamma = arbr^{-1}c$ diremos que el resultado de escindir la curva retractable r de γ es $\{ad, b\}$, observar que en este caso b es cerrada y que ad lo es si y solamente si γ lo es.
Cuando tenemos $\gamma_1 = arb$ y $\gamma_2 = cr^{-1}d$, diremos que el resultado de escindir r es
$\{ad, bc\}$ si ninguna de ellas es cerrada
$\{cbad\}$ si γ_1 es cerrada
$\{adcb\}$ si γ_2 es cerrada y γ_1 no.
Observar que la escición de un arco retractable preserva la clase de C-equivalencia y que si tenemos $\mathfrak{A} \subseteq \Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_m\}$ y aplicamos una escición obtenemos un nuevo conjunto C-equivalente y admitiendo una buena partición de cardinal estrictamente menor al de $\mathfrak{A}$.
También es cierto que si partimos de un conjunto con una o ninguna curva cerrada, los procesos de escición daran conjuntos con una o ninguna curva cerrada respectivamete. Luego tenemos la siguiente

Proposición 4.2.2. *Si $\gamma \in \Gamma$, existe $\mathfrak{A} \subseteq \Gamma$ C-equivalente a γ que admite una buena partición sin cancelaciones. Además si γ es cerrada, $\mathfrak{A}$ consiste de curvas cerradas y si γ no es cerrada $\mathfrak{A}$ tiene una única curva no cerrada.*

Finalmente podemos probar

Proposición 4.2.3. *L_x es inyectivo*

DEMOSTRACIÓN.Supongamos que tenemos $\tilde{\gamma_1} \neq \tilde{\gamma_2}$ y que $\psi(\tilde{\gamma_1}) = \psi(\tilde{\gamma_2})$. Luego $L(\overline{\gamma_1}\gamma_2) = 0$.
Supongamos primero que $\omega(\gamma_1) \neq \omega(\gamma_2)$.
$\overline{\gamma_1}\gamma_2$ es C-equivalente a un conjunto de curvas $\mathfrak{C} = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ que admite una buena partición $\mathfrak{P} = \{\nu_1^1, ..., \nu_{n_1}^1, ..., \nu_1^m, ..., \nu_{n_m}^m\}$ sin cancelaciones. Veamos ahora que existe $\omega \in \Omega^1(M)$ tal que $L(\overline{\gamma_1}\gamma_2)(\omega) \neq 0$ llegando a una contradicción. Para esto supongamos primero que existe $\nu_l^k \in \mathfrak{P}$ transversal al flujo. Tomemos W abierto de M tal que $W \cap (\cup Im(\nu_j^i)) = W \cap Im(\nu_l^k)$. Ahora construyamos ω de forma que esté soportada en W, $\omega(X) \equiv 0$ y $\tilde{\nu_l^k}(\omega) > 0$. Luego $L(\overline{\gamma_1}\gamma_2)(\omega) = L(\sum \tilde{\nu_j^i})(\omega) = \sum L(\tilde{\nu_j^i})(\omega) = \sum \tilde{\nu_j^i}(\omega - dh_\omega) = \sum \tilde{\nu_j^i}(\omega) > 0$.
ya que la buena partición $\mathfrak{P}$ no tiene cancelaciones.

En el caso en que todos los elementos de la partición $\mathfrak{P}$ son segmentos de flujo, tenemos que $\mathfrak{C}$ tiene un único elemento ya que si tuviese más de uno implicaría por la proposición 4.2.2 que $\{\phi_t^X\}$ tiene órbitas periódicas contradiciendo la minimalidad del flujo. Luego $\overline{\gamma_1}\gamma_2$ es C-equivalente a una curva $\varphi\colon [0,T] \to M$ definida como $\varphi(t) = \phi(t,x)$. Construyamos ahora $\omega \in \Omega^1(M)$ de forma que $\omega(X) \equiv 1$. Luego $L(\overline{\gamma_1}\gamma_2)(\omega) = L(\tilde{\varphi})(\omega) = \tilde{\varphi}(\omega - dh_\omega) = \tilde{\varphi}(\omega) = T > 0$.
Finalmente si $\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2)$ tenemos que $\overline{\gamma_1}\gamma_2 \in \Delta$ luego $0 = L(\widetilde{\overline{\gamma_1}\gamma_2}) = \overline{\gamma_1}\gamma_2$ lo que es contradictorio con que $\tilde{\gamma_1} \neq \tilde{\gamma_2}$.

$\square$

Como estábamos buscando, estamos ahora en condiciones de linealizar el flujo a nivel de corrientes.

Proposición 4.2.4. *$L_x\colon \tilde{\Gamma}_x \to C^1(M)$ es contínua e inyectiva y existe $v \in C^1(M)$ tal que si $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}_x$ y $\varphi_t^\gamma\colon [0,T] \to M$ es $\varphi_t^\gamma(s) = \phi^X(\omega(\gamma), s)$ entonces $L_x(\widetilde{\gamma\varphi_t^\gamma}) = L_x(\tilde{\gamma}) + tv$*

Demostración.Sea $\gamma \in \Gamma$ y $\varphi_t^\gamma\colon [0,t] \to M$ definida como $\varphi_t^\gamma(s) = \phi^X(\omega(\gamma), s)$. Ahora, $L_x(\widetilde{\gamma\varphi_t^\gamma})(\omega) = \int_{\gamma\varphi_t^\gamma}(\omega - dh_\omega) = \int_\gamma(\omega - dh_\omega) + \int_{\varphi_t^\gamma}(\omega - dh_\omega) = \psi(\tilde{\gamma}) + tc_\omega$. (Recordar que $\omega - dh_\omega(X) = c_\omega = \int_M \omega(X))$
Luego, $L_x(\widetilde{\gamma\varphi_t^\gamma}) = L_x(\tilde{\gamma}) + tv$ donde $v\colon \Omega^1(M) \to \mathbb{R}$ es $v(\omega) = \int_M \omega(X)d\mu = c_\omega$

$\square$

Observar que $L_x|\tilde{\Delta} = Id$ y por tanto, por la proposición 4.2.3, tenemos que L_x baja a un mapa $\overline{L_x}\colon \tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta} \to C^1(M)/\tilde{\Delta}$ inyectivo y contínuo, definido como $\overline{L_x}([\tilde{\gamma}]) = [L_x(\tilde{\gamma})]$.
Recordemos ahora que $\tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta}$ es homeomorfo a M, y observemos que el flujo ϕ^X lucen en $\tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta}$ como $\tilde{\phi^X}\colon \mathbb{R} \times \tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta} \to \tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta}$ siendo $\tilde{\phi^X}(t, [\tilde{\gamma}]) = [\widetilde{\gamma\varphi_t^\gamma}]$ donde $\varphi_t^\gamma\colon [0,t] \to M$ es $\varphi_t^\gamma(s) = \phi^X(s, \omega(\gamma))$. La siguiente proposición muestra que $\overline{L_x}$ puede considerarse una linealización.

Proposición 4.2.5. $\overline{L_x}(\tilde{\phi^X}(t, [\tilde{\gamma}])) = \overline{L_x}([\gamma]) + [tv]$

Demostración.$\overline{L_x}(\tilde{\phi^X}(t, [\tilde{\gamma}])) = \overline{L_x}([\widetilde{\gamma\varphi_t^\gamma}]) = [L_x(\widetilde{\gamma\phi_t^\gamma})] = [L_x(\tilde{\gamma}) + tv] = \overline{L_x}([\tilde{\gamma}]) + [tv]$

$\square$

Como hacíamos notar al comienzo del capítulo, $C^1(M)/\tilde{\Delta}$ no es un espacio topológico de Hausdorff. Si tuviesemos que el mapa $L_x\colon \tilde{\Gamma_x} \to L_x(\tilde{\Gamma_x})$ es un homeomorfismo (faltaría probar que es abierto) tendríamos que $\tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta}$ es homeomorfo a $L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}$.
Consideremos la proyección $p\colon C^1(M)/\tilde{\Delta} \to C^1(M)/\overline{\tilde{\Delta}}$ tal que $T+\tilde{\Delta} \mapsto T+\overline{\tilde{\Delta}}$. p es contínua, y si C es un subespacio de Hausdorff de $C^1(M)/\tilde{\Delta}$ entonces $p_{|C}$ es inyectivo ya que un grupo actúa por traslaciones en forma minimal sobre su clausura. Por lo tanto, otra cosa buena

sería probar que $L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}$ es de Hausdorff, ya que en ese caso podriamos componer la linealización con p y obtener una linealización (inyectiva) en un espacio de Hausdorff.

Capítulo 5

Espacios Difeológicos

En este capítulo seguiremos el libro de Iglesias [6]. Daremos las definiciones y construcciones básicas de la teoría de espacios difeológicos, versiones abstractas de las variedades diferenciales, contexto en el que podremos linealizar diferenciablemente nuestro flujo ϕ^X.

5.1. Definiciones

Llamaremos dominios a los elementos del conjunto $Dom = \{U \subseteq \mathbb{R}^n / U \text{abierto}, n \in \mathbb{N}\}$.
Si X es un conjunto, el conjunto de parametrizaciones de X es
$Param(X) = \{P : U \to X / U \in Dom, P \text{ función}\}$
Una estructura de espacio difeológico (o difeología) en un conjunto X es un subconjunto $\mathcal{D} \subseteq Param(X)$ que llamaremos difeología, y a cuyos elementos llamaremos plots, satisfaciendo los siguientes axiomas:

1. $\mathcal{D}$ contiene a las parametrizaciones constantes. Es decir, dado $x \in X$ y $U \in Dom$ si $P : U \to X$ es $P(u) = x, \forall u \in U$, entonces $P \in \mathcal{D}$
2. Si $U \in Dom$, $P : U \to X$ verifica que para todo $u \in U$ existe V entorno abierto de u en U tal que $P_{|V} \in Param(X)$, entonces $P \in \mathcal{D}$. O lo que es lo mismo la propiedad de ser plot esta dada localmente.
3. Si $U, V \in Dom$, $P : U \to X$, y $\phi \in C^\infty(V, U)$, entonces $P \in \mathcal{D}$ implica $P \circ \phi \in \mathcal{D}$

Llamaremos espacio difeológico al par $(X, \mathcal{D})$. Si $(X, \mathcal{D})$ y $(Y, \mathcal{E})$ son espacios difelógicos, diremos que un mapa $f : X \to Y$ es diferenciable si $P \in \mathcal{E}$ implica $P \circ f \in \mathcal{D}$. Si además f es biyectiva y su inversa es diferenciable, diremos que es un difeomorfismo.

5.2. Ejemplos

Si X es un conjunto, Difeologías$(X)\subseteq \mathcal{P}(Param(X))$ está parcialmente ordenado, con el órden que hereda de $(\mathcal{P}(Param(X)),\subseteq)$. (Difeologías$(X)$,$\subseteq$) es un latice completo, es decir un conjunto parcialmente ordenado tal que cualquier subconjunto tiene ínfimos y supremos. Si $\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}\subseteq$ Difeologías(X), entonces $inf\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha \in \Lambda\} = \cap_{\alpha\in\Lambda}\mathcal{D}_\alpha$ que es sencillo chequear que es una difeología. El supremo de una familia de difeologías $sup\{\mathcal{D}_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es $inf\{\mathcal{E} : \mathcal{D}_\alpha \subseteq \mathcal{E}, \forall\alpha \in \Lambda\}$.

Como ejemplos extremales tenemos:

1. Llamaremos difeologías salvaje de X a $sup\{$Difeologías$(X)\}$. Observar que si $(Y,\mathcal{E})$ es otro espacio difeológico, $f\colon Y \to X$ es un mapa cualquiera y $P \in \mathcal{E}$ entonces $f \circ P \in Param(X)$. Luego culaquier mapa $f\colon Y \to X$ es un mapa diferenciables, por esto podemos pensar en la difeología salvaje como un análogo difeológico de la topología indiscreta ($\tau = \{X, \emptyset\}$).

2. Llamaremos difeología fina de X a $\mathcal{F} = inf\{$Difeologías$(X)\}$.
   Afirmación: Si $P\colon U \to X$, $P \in \mathcal{F} \Leftrightarrow$ dado $u \in U$, $\exists V \subseteq U$ entorno abierto de u tal que $P_{|v}$ es constante (es decir P es localmente constante).
   Demostración. Por los axiomas 1 y 2 de espacio difeológico los mapas localmente constantes deben pertenecer a toda difeología de X, además se $P\colon U \to X$ es localmente constante y $\Phi \in C^\infty(V,U)$, entonces $P \circ \Phi$ también lo es. Esto prueba que la familia de mapas localmente constantes es $\mathcal{F}$.

   $\square$

   Observar que en este caso si $(Y,\mathcal{E})$ es otro espacio difeológico, $f\colon X \to Y$ un mapa cualquiera y $P \in \mathcal{F}$ entonces $f \circ P$ es localmente constante y por tanto $f \circ P \in \mathcal{E}$ (recordar que los mapas localmente constantes pertenecen a todas las difeologías). Esto permite pensar en la difeología fina como un análogo difeológico de la topología discreta.

Si M^n es una variedad diferenciable, y $(U_\alpha,\phi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, con $\phi_\alpha\colon V_\alpha(\subseteq \mathbb{R}^n) \to U_\alpha(\subseteq M)$ su atlas, $C^\infty(U,M)$ se puede definir como $\{f\colon U \to M/\overline{(\phi_\alpha^{-1}\circ f)}\colon f^{-1}(U_\alpha) \to V_\alpha \in C^\infty(f^{-1}(U_\alpha),V_\alpha), \forall\alpha \in \Lambda\}$. Definiremos la difeología natural asociada a M como $\mathcal{M} = \bigcup_{U\in Dom} C^\infty(U,M)$. Veremos a continuación que $\mathcal{M}$ puede definirse utilizando el concepto de difeología generada, el cual pasamos a definir.

Si X es un conjunto, y $\mathcal{P} \subseteq Param(X)$ es una familia de parametrizaciones, la difeología generada por $\mathcal{P}$ es $< \mathcal{P} >= \{\bigcap \mathcal{D}/\mathcal{D} \in \text{Difeologías}(X), \text{y } \mathcal{P} \subseteq \mathcal{D}\}$

Proposición 5.2.1. *Si $\mathcal{P} \subseteq Param(X)$ cumple que $\bigcup\{Im(P), P \in \mathcal{P}\} = X$, entonces $Q \in< \mathcal{P} >$ si, dado $u \in U$, existen V entorno abierto de u en U, $P(: W \to X) \in \mathcal{P}$ y $\phi \in C^\infty(V, W)$ tales que $Q_{|V} = P \circ \phi$. Es decir, los plots de la difeología generada por $\mathcal{P}$ son aquellas parametrizaciones que se factorizan localmente con elementos de $\mathcal{P}$.*

Demostración. por el axioma 3, si $Q = P \circ \phi$ donde $P(: U \to X) \in \mathcal{P}$ y $\phi \in C^\infty(V, U)$, entonces $Q \in< \mathcal{P} >$. Por el axioma 2, si Q cumple lo anterior para un cubrimiento abierto de su dominio, también $Q \in \mathcal{P}$. Finalmente, el conjunto de parametrizaciones de esta forma está definido en forma local por lo que verifica el axioma 2, es invariantes por precomponer con mapas C^∞ entre dominios por lo que verifica el axioma 3 y $\bigcup\{Im(P), P \in \mathcal{P}\} = X$, lo que junto con el axioma 3, nos da que verifica el axioma 1.

□

Proposición 5.2.2. *Si M^n es una varidad diferenciable y $(U_\alpha, \phi_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ su atlas, entonces su difeología natural $\mathcal{M}$ es igual a $< \{\phi_\alpha : \alpha \in \Lambda\} >$, la difeología generada por su atlas.*

Demostración. Si $f \in C^\infty(U, M)$ y $u \in U$, $\exists U_\alpha / \, f(u) \in U_\alpha$, por tanto $f_{|f^{-1}(U_\alpha)} \colon f^{-1}(U_\alpha) \to M$ se puede escribir como $\phi_\alpha \circ (\phi_\alpha^{-1} \circ f)$ con $\phi_\alpha^{-1} \circ f \in C^\infty(f^{-1}(U_\alpha), V_\alpha)$ por tanto $f \in< \{\phi_\alpha : \alpha \in \Lambda\} >$. Por otro lado si $P \colon U \to M$, $P \in< \{\phi_\alpha : \alpha \in \Lambda\} >$, dado $u \in U$, $\exists V$ entorno abierto de u en U, $\phi_\alpha \colon V_\alpha \to M$ y $\psi \in C^\infty(U, V_\alpha)$ de forma que $P_{|V} = \phi_\alpha \circ \psi$, luego $\phi_\alpha^{-1} \circ P_{|V} = \psi \in C^\infty(V, V_\alpha) \Rightarrow P \in C^\infty(U, M)$

□

El ejemplo que motivó la introducción de los espacios difeológicos es el de la difeología funcional. Si $(X, \mathcal{D})$ y $(Y, \mathcal{E})$ son espaicos difeológicos , el espacio de mapas diferenciables entre ellos $C^\infty(X, Y)$, tiene una estructura natural de espacio difeológico $\mathcal{G}$ a la que llamaremos difeología funcional. Diremos que $P \colon U \to C^\infty(X, Y)$ está en $\mathcal{G}$ si dado $Q \colon V \to X$, $Q \in \mathcal{D}$, el mapa $P.Q \colon U \times V \to Y$ definido como $P.Q(u, v) = P(u)(Q(v))$ está en $\mathcal{E}$.

5.3. Difeologías inducidas, cociente y producto

Supongamos que $(X,\mathcal{D})$ es un espacio difeológico y $A \subseteq X$ es un subconjunto, entonces A tiene una difeología $\mathcal{E}$ natural asociada que llamaremos difeología inducida por $\mathcal{D}$ en A(o heredada por A). Esta es $\mathcal{E} = \{P \in \mathcal{D} : Im(P) \subseteq A\}$.

Si $(X,\mathcal{D})$ es un espacio difeoloógico, $\sim \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia y $\pi\colon X \to X/\sim$ su proyección cociente, definimos la difeología cociente de $X/\sim$ como la difeología más pequeña tal que la proyececcción π es un mapa diferenciable. Es decir la difeología cociente $\mathcal{D}_\sim$ en $X/\sim$ es $< \{\pi \circ P : P \in \mathcal{D}\} >$. Como se vio anteriormente, esto permite caracterizar a los plots de la difeología cociente como aquellos que se factorizan localmente con plots de X es decir. Dada $P\colon U \to X/\sim$, $P \in \mathcal{D}_\sim$ sii dado $u \in U, \exists V$ entorno abierto de u en U y $Q\colon V \to X$, $Q \in \mathcal{D}$ tal que $P_{|V} = \pi \circ Q$.

Proposición 5.3.1. *Sean $(X,\mathcal{D})$, $(Y,\mathcal{E})$ espacios difeológicos y $f\colon X \to Y$ un mapa suave. Luego, si $\sim_1 \subseteq X \times X$ y $\sim_2 \subseteq Y \times Y$ son relaciones de equivalencia tales que $x_1 \sim_1 x_2 \Rightarrow f(x_1) \sim_2 f(x_2)$, entonces $\overline{f}\colon X/\sim_1 \to Y/\sim_2$ definido como $\overline{f}([x]) = [f(x)]$ es un mapa suave si consideramos en $X/\sim_1$ e $Y/\sim_2$ las difeologías cociente $\mathcal{D}_\sim$ y $\mathcal{E}_\sim$ respectivamente.*

Demostración.Sean $\pi_1\colon X \to X/\sim_1$ y $\pi_2\colon Y \to Y/\sim_2$ las proyecciones cociente. Tomemos entonces $P \in \mathcal{D}_\sim$, $P\colon U \to X/\sim_1$, debemos chequear que $\overline{f} \circ P \in \mathcal{E}_\sim$. Por definición de difeología cociente, existe $\{V_\alpha\}$ cubrimiento abierto de U y $Q_\alpha\colon V_\alpha \to X$, $Q_\alpha \in \mathcal{D}$ de forma que $\pi_1 \circ Q_\alpha = P_{|V_\alpha}$. Luego $\overline{f} \circ P_{|V_\alpha} \overline{f} \circ \pi_1 \circ Q_\alpha = \pi_2 \circ f \circ Q_\alpha \in \mathcal{E}_\sim$ ya que f es suave. Luego, como $\overline{f} \circ P_{V_\alpha} \in \mathcal{E}_\sim$ y $\{V_\alpha\}$ es un cubrimiento de U, tenemos lo buscado.

□

Sean $(X_\alpha, \mathcal{D}_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ una familia de espacios difeológicos, $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ su producto cartesiano y $\{\pi_\alpha\colon \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha \to X_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ las respectivas proyecciones. La difeología producto $\mathcal{F}$ en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ es $\mathcal{F} = sup\{\mathcal{D} \in$ Difeologías$(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha)/\pi_\alpha$ es diferenciable $\forall \alpha \in \Lambda\}$

Proposición 5.3.2. *Si $P\colon U \to \prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$, $P \in \mathcal{F}$ si y solo si $(\pi_\alpha \circ P) \in \mathcal{D}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Lambda$. En particular las proyecciones son diferenciables.*

Demostración.
Sea $\mathcal{F}$'$\subseteq Param(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha) = \{P \in Param(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha)/(\pi_\alpha \circ P) \in \mathcal{D}_\alpha, \forall \alpha \in \Lambda\}$ No es defícil chequear que $\mathcal{F}$' verifica los axiomas de espacio deifeológico, por lo que $\mathcal{F}$'$\in \{\mathcal{D} \in$ Difeologías$(\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha)/\pi_\alpha$ es diferenciable $\forall \alpha \in \Lambda\}$. Más aún, $\mathcal{F}$' contiene a cualquier difeología en $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ que haga diferenciable a las proyecciones, por tanto $\mathcal{F}$'$= \mathcal{F}$

□

5.4. D-topologías

Si X es un conjunto notemos Topologías(X) al conjunto de las topologías en X y consideremos el orden parcial heredado de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. Al igual que en el caso de las difeologías (Topologías(X),$\subseteq$) es un latice completo.
Si $(X, \mathcal{D})$ es un espacio difeológico diremos que su D-topología asociada es $\tau_{\mathcal{D}} = sup\{\sigma \in$ Topologías$(X)/P^{-1}(A)$ es abierto $\forall P \in \mathcal{D}, A \in \sigma\}$

Proposición 5.4.1. *Sea $(X, \mathcal{D})$ un espacio difeológico y $\tau_{\mathcal{D}}$ su D-topología asociada. Entonces $A \in \tau_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow P^{-1}(A)$ es abierto $\forall P \in \mathcal{D}$. En particular los plots de $\mathcal{D}$ son contínuos para $\tau_{\mathcal{D}}$*

Demostración. En efecto, consideremos $\sigma = \{A \subseteq X/P^{-1}(A)$es abierto $\forall P \in \mathcal{D}\}$. Por cálculos conjuntistas clásicos, σ es una topología. Por otro lado, cualquier topología que haga contínuos a los plots está incluida en σ, por tanto $\sigma = \tau_{\mathcal{D}}$

□

Proposición 5.4.2. *Si $(X, \mathcal{D})$ y $(Y, \mathcal{E})$ son dos espacios difeológicos y $f\colon X \to Y$ es un mapa diferenciable, entoces es contínuo para las D-topologías respectivas.*

Demostración. Tomemos $U \in \tau_{\mathcal{E}}$, para ver que $f^{-1}(U) \in \tau_{\mathcal{D}}$, tomemos $P \in \mathcal{D}$, $P^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ P)^{-1}(U)$, como f es diferenciable $f \circ P \in \mathcal{E}$ por lo que $(f \circ P)^{-1}(U)$ es abierto.

□

Proposición 5.4.3. *Ses $(X, \mathcal{D})$ un espacio difeológico y $\sim \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia. Entonces la topología cociente de $\tau_{\mathcal{D}}$ en $X/\sim$ es igual a la D-topología $\tau_{\mathcal{D}_\sim}$ asociada a la difeología cociente $\mathcal{D}_\sim$ en $X/\sim$.*

Demostración. Tomemos $A \in \tau_\sim$ y $P\colon V \to X/\sim$, $P \in \mathcal{D}_\sim$, como vimos, $\exists V_\alpha$ cubrimiento por abiertos de V de forma que $P_{|V_\alpha}\colon V_\alpha \to X/\sim$ se factoriza como $P_{|V_\alpha} = \pi \circ \phi$ donde $\phi\colon V_\alpha \to X$ está en $\mathcal{D}$. Como $A \in \tau_\sim$, $\pi^{-1}(A)$ está en $\tau_{\mathcal{D}}$, por tanto $\phi^{-1}(\pi^{-1}(A)) = P^{-1}_{|V_\alpha}(A)$ es un abierto de V_α. Ahora, $P^{-1}(A) = \cup_\alpha P^{-1}_{|V_\alpha}(A)$ y por tanto es abierto, por lo que $A \in \tau_{\mathcal{D}_\sim}$.
Recíprocamente, tomemos $A \in \tau_{\mathcal{D}_\sim}$ y $P \in \mathcal{D}$, como $\pi \circ P \in \mathcal{D}_\sim$, $(\pi \circ P)^{-1}(A) = P^{-1}(\pi^{-1}(A))$ es abierto, lo que implica que $\pi^{-1}(A) \in \tau_{\mathcal{D}}$ por lo que $A \in \tau_\sim$

□

Una observación importante es que la D-topología asociada a la difeología inducida de un subconjunto no siempre es igual a la topología heredada de la D-topología del ambiente.

Como ejemplo tomemos el intervalo con su difeología natural y un conjunto de cantor incluido en él. La difeología inducida es la discreta, y por tanto su D-topología asociada la discreta, que es distinta de la heredada del intervalo.

Capítulo 6

La linealización diferenciable

En este capítulo daremos estructura de espacio diofeológico a el espacio de curvas Γ_x, su correspondiente en el espacio de corrientes $\tilde{\Gamma_x}$ y a el espacio total de corrientes $C^1(M)$.
Para estas difeologías, los mapas $\psi\colon \Gamma_x \to C^1(M)$, $L_x\colon \tilde{\Gamma_x} \to C^1(M)$ y la linealización $\overline{L_x}\colon \tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta}$ serán suaves. Además los espacios Δ/Γ_x y $\tilde{\Gamma}_x/\tilde{\Delta}$ serán difeomorfos a M con su difeología generada por las parametrizaciones.
Finalmente, la estructura difeológica permitirá imitar la prueba del teorema de Hertz-Hertz y encontrar $q\colon L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta} \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ semiconjugación con un flujo diofantino. Esto último dice en particular que la linealización funciona correctamente en los casos conocidos.

Durante toda esta sección M será una variedad diferenciable compacta y conexa, y $X \in \chi(M)$ un campo de vectores libre de cohomología.

Usaremos una definición un poco diferente de Γ_x, resultado de cocientar el espacio de curvas que utilizabamos anteriormente por la relación de equivalencia módulo pelos que definiremos dentro más adelante.
Notaremos $\hat{\Gamma_x}$ al espacio de curvas continuas a tiempo libre, y que se pueden escribir como concatenación de finitos trozos, los cuales pueden ser arcos de geodésica o arcos del flujo ϕ^X.
Definiremos $t\colon \hat{\Gamma_x} \to M$ que a $\gamma\colon [0,T] \to M$ le asocia $t(\gamma) = t_\gamma = T$.

Definiremos ahora una difeología $\hat{\mathcal{D}}$ en $\hat{\Gamma_x}$.

Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un abierto, y $P\colon U \to \hat{\Gamma_x}$, $P \in \hat{\mathcal{D}}$ si dado $u \in U$, $\exists V$ entorno abierto de $u \in U$, y $0 = \phi_0 < ... < \phi_n\colon V \to \mathbb{R}$ de clase C^∞ (que llamaremos funciones de quiebre) de forma que $\phi_n(u) = t_{P(u)}$ para todo $u \in V$, y si definimos los conjuntos $A_i = \{(x,t) \in V \times \mathbb{R} : \phi_i(x) \leq t \leq \phi_{i+1}(x)\}$ entonces $\overline{P}\colon \cup A_i \to M$ definida como $\overline{P}(v,t) = P(v)(t)$ es contínua y $\overline{P}_{|A_i}$ es de clase C^∞. El único punto que podría ser dudoso respecto a que $\hat{\mathcal{D}}$ es una difeología, es que fuese cerrado por precomposición por mapas C^∞

entre dominios.
Para chequear esto, tomemos entonces $Q \in \hat{\mathcal{D}}$ y $f \in C^\infty(W,U)$. Elijamos $V \subseteq U$ de forma que existe $\phi_0 < ... < \phi_n \in C^\infty(V,\mathbb{R})$ como antes. Luego, las funciones de quiebre de $Q \circ f_{|f^{-1}(V)}$ son $\phi_0 \circ f, ..., \phi_n \circ f \in C^\infty(W,\mathbb{R})$, y si definimos $B_i = \{(x,t) : x \in f^{-1}(V), \phi_i \circ f(x) \leq t \leq \phi_{i+1} \circ f\}$, entonces $\overline{P \circ f} \colon \cup B_i \to M$ definido como $\overline{P \circ f}(x,t) = P \circ f(x)(t) = P(f(x),t)$ es claramente contínuo y C^∞ si lo restringimos a los B_i.

Si $\gamma \in \hat{\Gamma_x}$ es $\gamma = ar\overline{r}b$, diremos que r es un pelo de γ, y que $\gamma' = ab$ es el resultado de escindir el pelo r de γ.
Consideraremos la relación de equivalencia $\equiv \subseteq \hat{\Gamma_x} \times \hat{\Gamma_x}$ como $\gamma \equiv \delta$ si existe una sucesiona en $\hat{\Gamma_x}$, $\gamma = \gamma_1, ..., \gamma_n = \delta$ de forma que γ_{i+1} es el resultado de escindir un pelo de γ_i o viceversa. Cuando dos curvas en $\hat{\Gamma_x}$ son equivalentes bajo esta relación, diremos que son equivalente módulo pelos. Notaremos Γ_x, al cociente $\hat{\Gamma_x}/\equiv$, y usaremos $\mathcal{D}$ para referirnos al cociente por $\equiv$ de la difeología $\hat{\mathcal{D}}$. Sea $\pi_\equiv \colon \hat{\Gamma_x} \to \Gamma_x$ la proyección cociente.

Sea ahora $\mathcal{R}$ una relación de equivalencia en Γ_x, siendo $\gamma_1 \sim \gamma_2$ sii $\gamma_1 = \delta\gamma_2$ con $\delta \in \Delta$, donde $\Delta = \{\gamma \in \Gamma_x; \gamma(t_\gamma) = x\}$.

Observación 6.0.1. Si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_x$ entonces $\gamma_1 = \delta\gamma_2$ sii $\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2)$. Para ver esto, tomemos $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_x$ con $\omega(\gamma_1) = \omega(\gamma_2)$, entonces $\gamma_1 = \gamma_1(\overline{\gamma_2}\gamma_2) = (\gamma_1\overline{\gamma_2})\gamma_2 = \delta\gamma_2$ con $\delta \in \Delta$. El directo es aún más trivial.
Por tanto, el cociente $\Gamma_x/\mathcal{R}$ que notaremos con razón Δ/Γ_x está en correspondencia uno a uno con los puntos de M.

Notaremos $\pi_\mathcal{R} \colon \Gamma_x \to \Delta/\Gamma_x$ a la proyección cociente.

Proposición 6.0.4. *El espacio difeológico Δ/Γ_x con su difeología cociente $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ es difeomorfo a M con su difeología natural generada por las parametrizaciones.*

Demostración. Sea $\phi \colon \Gamma_x \to M$ definido como $\phi(\gamma) = \omega(\gamma)$ (Recordar que $\omega(\gamma)$ es el punto final de γ y observar que éste esta bien definido en $\tilde{\Gamma_x}/\equiv$).
Para ver que ϕ es suave, tomemos un plot $P \colon U \to \Gamma_x$ y $V \subseteq U$ de forma que $P_{|V} = \pi_\equiv \circ Q$ con $Q \in \hat{\mathcal{D}}$.
Luego $\phi \circ P_{|V} = \phi \circ \pi_\equiv \circ Q$, pero $\phi \circ \pi_\equiv \circ Q(u) = Q(u)(t_{Q(u)}) \in C^\infty(V,M)$. Por tanto, por la proposición 5.3.1 y la observación 6.0.1, $\overline{\phi} \colon \Delta/\Gamma_x \to M$ definido como $\overline{\phi}([\gamma]) = \phi(\gamma)$, es una biyección suave.
Nos resta probar la suavidad de $\overline{\phi}^{-1}$. Primero observemos que $P \colon U \to \Delta/\Gamma_x$ está en $\mathcal{D}_\mathcal{R}$ sii localmente se factoriza como $\pi_\mathcal{R} \circ \pi_\equiv \circ R$ donde R es un plot de $\hat{\Gamma_x}$. Tomemos entonces

$Q\colon U \to M$ un plot de M y veamos que $\overline{\phi}^{-1} \circ Q$ localmente admite ésta factorización. Sea $u \in U$ y $y = Q(u)$. Construyamos un levantamiento local de $\overline{\phi}^{-1} \circ Q$ a $\hat{\Gamma_x}$ alrededor de u. Para esto, tomemos $\epsilon > 0$ de forma que $exp_y\colon B_\epsilon(0) \to M$ es un difeomorfismo sobre su imágen, $V = Q^{-1}(exp_y(B_\epsilon(0)))$ y $\gamma \in \hat{\Gamma_x}$ tal que $\gamma\colon [0,1] \to M$ y $\gamma(1) = y$. Luego podemos definir el levantamiento $R\colon V \to \hat{\Gamma_x}$ como $R(v)(t) = \gamma(t)$ si $t \in [0,1]$ y $R(v)(t) = exp_y(texp_y^{-1}Q(v))$ si $t \in [1,2]$. $R \in \hat{\mathcal{D}}$ claramente y $\pi_{\mathcal{R}} \circ \pi_{\equiv} \circ R = \overline{\phi}^{-1} \circ Q_{|V}$.

□

Ahora definiremos una difeología $\mathcal{C}$ en $C^1(M)$. Dada $\omega \in \Omega^1(M)$, definimos
$ev_\omega\colon C^1(M) \to \mathbb{R}$ como $ev_\omega(\phi) = \phi(\omega)$.
Sea $\mathcal{C}$ la difeología más grande en $C^1(M)$ que hace que los mapas $\{ev_\omega : \omega \in \Omega^1(M)\}$ sean mapas diferenciables, $\mathcal{C}$ no es más que la difeología en $\mathcal{C}^1(M)$ inducida por la difeología producto en $\mathbb{R}^{\Omega^1(M)}$ mediante la inclución $i\colon \mathcal{C}^1(M) \to \mathbb{R}^{\Omega^1(M)}$

Definamos $\hat{\psi}\colon \hat{\Gamma_x} \to C^1(M)$ como $\hat{\psi}(\gamma)(\omega) = \int_\gamma \omega$. Es claro que dos curvas equivalentes módulo pelos son C-equivalentes por lo que $\hat{\psi}$ baja al cociente $\psi\colon \Gamma_x \to C^1(M)$.

Proposición 6.0.5. *El mapa ψ es un mapa suave si dotamos a Γ_x y $C^1(M)$ de las difeologías $\mathcal{D}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente.*

Demostración. Para ver esto alcanza con probar que $\hat{\psi}\colon \hat{\Gamma_x} \to C^1(M)$ es suave, ya que la suavidad de ψ se obtiene de aplicar la proposición 5.3.1. Para probar la suavidad de $\hat{\psi}$ debemos chequear que si $\omega \in \Omega^1(M)$ y $P\colon U(\subseteq \mathbb{R}^n) \to \hat{\Gamma_x}$ está en $\mathcal{D}$ entonces $ev_\omega \circ P \in C^\infty(U, \mathbb{R})$. Como $P \in \hat{\mathcal{D}}$, dado $u \in U$ $\exists V$ entorno abierto de u, y $0 = \phi_0 < ... < \phi_n\colon V \to \mathbb{R}$ funciones de quiebre, de forma que si consideramos los conjuntos $T_i = \{(x,t) \in V \times \mathbb{R} : \phi_i(x) \le t \le \phi_{i+1}(x)\}$, entonces $\overline{P}^i = \overline{P}_{|T_i}$ es de clase C^∞, para $i = 1, ..., n$.
Como $ev_\omega \circ P$ no depende de las parametrizaciones de las curvas en $\hat{\Gamma_x}$ y las funciones de quiebre son C^∞, podemos considerar una reparametrización global de las curvas en $P(V)$ y suponer que las funciones de quiebre son constante y que $\phi_n = 1$. Digamos $\phi_i \equiv t_i$. Luego podemos definir $\overline{P}_t^i\colon V \times [t_i, t_{i+1}] \to TM$

$$\begin{aligned} \overline{P}_t^i\colon V \times [t_i, t_{i+1}] &\to TM \\ (v,t) &\mapsto \overline{P}_t^i(v,t) = \partial\overline{P}/\partial t(v,t) \end{aligned},$$

que además es C^∞. Si ahora identificamos $\Omega^1(M)$ con los mapas de $C^\infty(TM)$ lineales sobre las fibras, tenemos:

$$ev_\omega \circ P(v) = \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{t_1}^{t_{i+1}} \omega(\overline{P}_t^i(v,t))dt$$

Por tanto la proposición queda probada con ayuda del siguiente lema de cálculo.

Lema 6.0.6. *Si $V \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f\colon V \times I \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞, entonces $Sf\colon V \to \mathbb{R}$ tal que $v \mapsto \int_I f(v,t)dt$ es de clase C^∞ y además $\partial^{i_1+\ldots+i_n} Sf/\partial x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = S(\partial^{i_1+\ldots+i_n} f/\partial x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n})$*

Demostración. lo probaremos por inducción en $\mathbb{N}^n$, supongamos que $\partial^{i_1+\ldots+i_n} Sf/\partial x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = S(\partial^{i_1+\ldots+i_n} f/\partial x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n})$ para todo multi-índice $I = (i_1, ..., i_n)$ con $|I| = i_1 + ... + i_n \leq n$. Si $J = (j_1, ..., j_n)$ con $|J| = n+1$, podemos suponer que $J = (j_1, ..., j_n - 1) + (0, ..., 1)$, luego $\partial(Sf)/\partial x_J = \partial(\partial^{j_1+\ldots+j_n-1} Sf/\partial x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n-1})\partial/x_n$ lo cual por hipótesis inductiva es igual a $\partial(S(\partial^{j_1+\ldots+j_n-1} f/\partial x_1^{j_1} \ldots x_n^{j_n-1}))/\partial x_n$ siendo esto último igual a $S(\partial f/\partial x_J)$ por un teorema elemental de cálculo.

$\square$

A $\tilde{\Gamma_x} \subseteq C^1(M)$ le daremos la difeología $\mathcal{E}$ inducida de $C^1(M)$, asi que si $P\colon U \to \tilde{\Gamma_x}$, $P \in \mathcal{E}$ sii $ev_\omega \circ P \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ para toda $\omega \in \Omega^1(M)$. Veamos entonces que el mapa de la linealización a nivel de curvas es suave.

Proposición 6.0.7. *El mapa $L_x\colon \tilde{\Gamma_x} \to C^1(M)$ de la proposición 4.2.4 es suaves si consideramos las difeologías $\mathcal{E}$ y $\mathcal{C}$ respectivamente.*

Demostración.L_x es la restricción a $\tilde{\Gamma_x}$ de un mapa $L\colon C^1(M) \to C^1(M)$, por tanto, como $\tilde{\Gamma_x}$ hereda la difeología de $C^1(M)$ será suficiente con probar la suavidad de L para obtener la de L_x. Sea entonces $P\colon U \to C^1(M)$, para ver que L es suave, debemos chequear que $L \circ P \in \mathcal{C}$.
$L \circ P \in \mathcal{C}$ sii $ev_\omega \circ L \circ P \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ para toda $\omega \in \Omega^1(M)$. Ahora, $ev_\omega \circ L \circ P = ev_{\omega - dh_\omega} \circ P \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ya que $P \in \mathcal{C}$

$\square$

Consideremos ahora la proyección $\pi\colon C^1(M) \to C^1(M)/\tilde{\Delta}$ resultante de cocientar por el subgrupo $\tilde{\Delta}$.
Análogamente a lo visto en el capítulo 4, $\tilde{\Gamma_x}$ es invariante por traslaciones $\tilde{\Delta}$ y por tanto podemos definir la proyección $\pi'\colon \tilde{\Gamma_x} \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ resultado de cocientar por la acción del grupo $\tilde{\Delta}$. Observemos que si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_x$ verifican $\gamma_1 \sim_{\mathcal{R}} \gamma_2$, entonces $\pi'(\psi(\gamma_1)) = \pi'(\psi(\gamma_2))$, y que $L_{x|\tilde{\Delta}} \equiv Id$.
Luego, si notamos $\mathcal{C}_\sim$ y $\mathcal{E}_\sim$ a las difeologías cocientes en $C^1(M)/\tilde{\Delta}$ y $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ respectivamente, tenemos:

Proposición 6.0.8. *Los mapas $\psi\colon \Gamma_x \to \tilde{\Gamma_x}$ y $L_x\colon \tilde{\Gamma_x} \to C^1(M)$ bajan a mapas suaves $\overline{\psi}\colon \Delta/\Gamma_x \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ y $\overline{L_x}\colon \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta} \to C^1(M)/\tilde{\Delta}$ si consideramos en Δ/Γ_x, $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ y $C^1(M)/\tilde{\Delta}$ las difeologías $\mathcal{D}_{\mathcal{R}}$, $\mathcal{E}_\sim$ y $\mathcal{C}_\sim$ respectivamente.*

Demostración.Aplicar directamente la proposición 5.3.1.

□

Respecto a las distintas identificaciones de M, tenemos hasta ahora el difeomorfismo $\overline{\phi}\colon \Delta/\Gamma_x \to M$, el mapa suave $\overline{\psi}\colon \Delta/\Gamma_x \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$, y el mapa suave $\overline{\psi}\circ\overline{\phi^{-1}}\colon M \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$. Para completar el círculo y probar que todos los mapas son difeomorfismos alcanza con la siguiente proposición

Proposición 6.0.9. *El mapa de* $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta} \to M$ *tal que* $[\tilde{\gamma}] \mapsto \omega(\gamma)$ *es suave.*

Demostración.Sea $\mathfrak{W}\colon M \to \mathbb{R}^k$ un encaje de Whitney de M que verifica $\mathfrak{W}(x) = (0, ..., 0)$. En coordenadas diremos $\mathfrak{W} = (f_1, ..., f_k)$. Luego, si $y \in M$ y $\gamma \in \Gamma_x$ verifica $\omega(\gamma) = y$, tenemos $\mathfrak{W}(y) = (f_1(y), ..., f_k(y)) = (\int_\gamma df_1, ..., \int_\gamma df_k) = (\tilde{\gamma}(df_1), ..., \tilde{\gamma}(df_k))$. El mapa $h\colon \tilde{\Gamma_x} \to M$ definido como $h(\tilde{\gamma}) = \mathfrak{W}^{-1}(\tilde{\gamma}(df_1), ..., \tilde{\gamma}(df_k))$ es por tanto un mapa suave que asocia $\tilde{\gamma} \to \omega(\gamma)$. Finalmente, como las formas $df_1, ..., df_k$ son exactas, el mapa h baja a el mapa suave $\overline{h}\colon \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta} \to M$ tal que $\overline{h}([\gamma]) = \omega(\gamma)$.

□

Notaremos al flujo en $M' = L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}$, $\phi^L \colon \mathbb{R} \times M' \to M'$. Es decir $\phi^L(t, [T]) = [T + tv]$. Como $\tilde{\Delta}$ no es un cerrado de la topología débil-* en $C^1(M)$, $C^1(M)/\tilde{\Delta}$ no es un espacio topológico de Hausdorff y por tanto $L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}$ tampoco tiene porque ser de Hausdorff. Por lo dicho anteriormente $\overline{L_x}$ no tiene porque ser un homeomorfismo, pero sí podemos recuperar la semiconjugación de F. y J. Rodriguez Hertz.

Proposición 6.0.10. *Si β_1 es el primer número de Betti de M, existe $q \colon M' \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ contínuo y sobreyectivo que semiconjuga ϕ^L con una acción ϕ^Y en $\mathbb{T}^{\beta_1}$ generada por un campo de vectores diofantino.*

Demostración.Sean $\omega_1, ..., \omega_{\beta_1}$ 1-formas cerradas de M, tales que sus clases de cohomología $[\omega_1], ..., [\omega_{\beta_1}]$ son base de $H^1_{DR}(M)$. Sea $W =< \omega_1, ..., \omega_{\beta_1} >$ el subesapcio generado por estas 1-formas. Consideremos entonces el mapa suave $q' \colon C^1(M) \to W^*$ definido como $q'(T) = T_{|W}$ (obviamente consideramos la difeología producto en W^*). q' semiconjuga el flujo lineal en $C^1(M)$ generado por v (ϕ^v)con el flujo lineal en $W^\star$ generado por $v_{|W}$ ($\phi^{v_{|W}}$).

El teorema de DeRham nos dice que la imágen por q' de $\tilde{\Delta}$, es un látice L de W^*, $q'(\tilde{\Delta}) = L$, por tanto por el teorema 5.3.1 el mapa $q'_{|L_x(\tilde{\Gamma_x})} \colon L_x(\tilde{\Gamma_x}) \to W^\star$ baja a un mapa suave $q \colon M'(= L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}) \to W^*/L \cong \mathbb{T}^{\beta_1}$ si consideramos en $L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}$ la difeología $\mathcal{D}_L$ cociente de la heredada en $L_x(\tilde{\Gamma_x})$ de la difeología producto en $C^1(M)$.

Si restringimos el flujo ϕ^v a $L_x(\tilde{\Gamma_x})$, éste baja a ϕ^L en M', asi como $\phi^{v_{|W}}$ baja a un flujo lineal en $W^*/L \cong \mathbb{T}^{\beta_1}$ que llamaremos ϕ^Y. Claramente q es equivariante para las acciones ϕ^L y ϕ^Y.

Consideremos la difeología $\mathcal{E}_\sim$ en $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ definida en este capítulo, y consideremos el mapa $I \colon M \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ que a $p \in M$ asocia $I(p) = [\tilde{\gamma_p}]$ donde $\gamma_p \in \Gamma_x$ verifica $\omega(\gamma_p) = p$. En este capítulo probamos que I es un difeomorfismo, por lo que la difeología $\mathcal{E}_\sim$ en $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ le da estructura de variedad diferenciable.
Recordemos que si llevamos el flujo ϕ^X en M a $\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ a través de la identificación I obtenemos un flujo $\tilde{\phi^X} \colon \mathbb{R} \times \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta} \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ tal que $\tilde{\phi^X}(t, [\tilde{\gamma}]) = [\gamma \tilde{\varphi_t^\gamma}]$ donde $\varphi_t^\gamma \colon [0, t] \to M$ es $\varphi_t^\gamma(s) = \phi^X(s, \omega(\gamma))$.
$\tilde{\phi^X}(t, p) = I(\phi^X(t, I^{-1}(p)))$ por lo que $\tilde{\phi^X}$ es un flujo suave (diferenciable para la estructura diferencial obtenida de la difeología).
El mapa $\overline{L_x} \colon \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta} \to L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}$ es suave si consideramos en $L_x(\tilde{\Gamma_x})/\tilde{\Delta}$ la difeología $\mathcal{D}_L$, por lo tanto el mapa $\mathcal{P} = q \circ \overline{L_x} \colon \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta} \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ es un mapa suave y por ende diferenciable para las estructuras diferenciales obtenidas de las difeologías. Además $\mathcal{P}$ es una semiconjugación entre $\tilde{\phi^X}$ y ϕ^Y que es un flujo lineal.

Estamos entonces en las condiciones del teorema 2.3.3 por lo que si probamos que $\mathcal{P}$ es sobreyectivo en homología tendremos que $\mathcal{P}$ es sobreyectivo (y por ende q) y que ϕ^Y es un flujo diofantino.

$\mathcal{P}$ es sobreyectivo en homología:
Para esto tomemos $h \in H_1(\mathbb{T}^{\beta_1}, \mathbb{Z})$, h puede representarse como $h = [\gamma]$, donde $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ se levanta a $\overline{\gamma}\colon [0,1] \to W^*$ con $\overline{\gamma}(0) = 0$ y $\overline{\gamma}(1) = l \in L$.
$q'(\tilde{\Delta}) = L$ por tanto existe $\delta\colon [0,1] \to M$ tal que $\delta(0) = \delta(1) = x$ y tal que $q'(\tilde{\delta}) = l$.
Consideremos ahora $\mathcal{P} \circ I \circ \sigma\colon [0,1] \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ y veamos que se levanta a $c\colon [0,1] \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ tal que $c(0) = 0$ y $c(1) = l$, lo que probaría que $h \in \mathcal{P}_*()H_1(\tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}, \mathbb{Z})$ ya que $I \circ \sigma\colon [0,1] \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ es una curva contínua y cerrada.
Observar que $I \circ \delta = \pi \circ \nu$ donde $\pi\colon \tilde{\Gamma_x} \to \tilde{\Gamma_x}/\tilde{\Delta}$ es la proyección cociente y $\nu\colon [0,1] \to \tilde{\Gamma_x}$ es $\nu(t) = \tilde{\varphi(t)}$ siendo $\varphi(t)\colon [0,1] \to M$ es $\varphi(t)(s) = \delta(ts)$.
Luego $\mathcal{P} \circ I \circ \delta = \pi' \circ q' \circ L_x \circ \nu$ donde $\pi'\colon W^* \to \mathbb{T}^{\beta_1}$ es la proyección cociente (y el mapa de cubriemiento universal). Observar que esta curva se levanta a la curva $c = q' \circ L_x \circ \nu$ que vale $c(0) = 0 \in W^*$, y $c(1) = q'(L_x(\nu(1))) = q'(L_x(\tilde{\delta})) = q'(\tilde{\delta}) = l$.

$\square$

Bibliografía

[1] L. Flaminio and M. Paternain. Linearization of cohomology-free vector fields.

[2] G. Forni. On the greenfield - wallach and katok conjectures in dimension three. *Geometric and Probabilistic Structure in Dynamics, Contemp.Math.*, 469:197–213, 2008.

[3] F.B. Fuller. The existence of periodic points. *Ann. of Math.*, pages 229–230, 1953.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology.* Cambridge university press, 2002.

[5] J. Rodriguez Hertz and F. Rodriguez Hertz. Cohomology free systems and the first betti number. *Continuous and discrete Dynam. Systems*, 15:193–196, 2006.

[6] P. Iglesias-Zemmour. *Diffeology.* http://math.huji.ac.il/ piz/documents/Diffeology.pdf, 2010.

[7] A. B. Katok. Cocycles, cohomology and combinatorial constructions in ergodic theory. *Proc. Sympos. Pure Math*, 69, 2001.

[8] A. Kocsard. *Toward the clasification of cohomology free vector fields.* PhD thesis, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2007.