Tesis de Doctorado

Funciones de Igusa-Todorov

Gustavo Mata

Orientadores: Dr. Marcelo Lanzilotta (UdelaR), Dra. Sonia Trepode (UNMDP)

Doctorado en Matemática
PEDECIBA - Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay

24 de abril de 2015

Índice general

Key words
Homological Algebra, Igusa-Todorov functions, Gorenstein algebras, Gorenstein modules, QCF coalgebras, semiperfect coalgebras.

Palabras clave
Álgebra Homológica, Funciones de Igusa-Todorov, álgebras Gorenstein, módulos Gorenstein, coálgebras QCF, coálgebras semiperfectas.

Resumen

En este trabajo desarrollamos nuevas herramientas del Álgebra Homológica, las llamadas funciones de Igusa-Todorov (que notaremos ϕ, ψ), y estudiamos la ϕ-dimensión y la ψ-dimensión de estructuras algebraicas en diversos contextos (álgebras de Artin, coálgebras semiperfectas, etc).

Después de un primer capítulo con los preliminares necesarios para la comprensión del resto de la tesis, nos dedicamos en el segundo capítulo a desarrollar resultados generales de las funciones de Igusa-Todorov, los cuales son el soporte de resultados en contextos particulares que aparecerán en los capítulos siguientes.

En el capítulo 3 introducimos el concepto de eslabón, que aparece lateralmente en algunos trabajos del área pero sin ser considerado como objeto central de estudio. Utilizando la caracterización para la función ϕ que aparece en [FLM] y otras herramientas veremos en este capítulo condiciones para que la dimensión finitista sea finita y sea estrictamente menor que la ϕ-dimensión dependiendo que los eslabones no sean todos simples.

En el capítulo 4 trabajamos con las funciones de Igusa-Todorov para las álgebras de radical cuadrado nulo. Si A es un álgebra de radical cuadrado nulo, probamos que $\phi \dim(A) \leq n$ y $\psi \dim(A) \leq 2n-3$, siendo $n = |K_0(A)|$. Además describimos completamente el carcaj de las álgebras con una cantidad fija de vértices cuando $\psi \dim(A) = 2n-3$ y también brindamos condiciones necesarias sobre el carcaj para que $\phi \dim(A) = n$. Vemos como aplicación de los resultados obtenidos que $\phi \dim(A) = \phi \dim(A^{op})$, para este tipo de álgebras.

Para un álgebra n-Gorenstein A, se prueba en el capítulo 5, $\phi \dim(A) = \psi \dim(A) = n$. Como consecuencia del resultado anterior tenemos las siguientes igualdades: $\phi \dim(A) = \phi \dim(A^{op})$, $\psi \dim(A) = \psi \dim(A^{op})$ y obtenemos aplicaciones interesantes de estos resultados a la familia de álgebras inclinadas de conglomerado y a la familia de álgebras gentiles.

De manera similar a la forma que lo hacemos para las álgebras de Artin, en el capítulo 6 introducimos la función de Igusa-Todorov (que notaremos φ) y la noción de φ-dimensión para las coálgebras semiperfectas. Para una coálgebra semiperfecta C probamos que la φ-dimensión caracteriza a las coálgebras quasi-co-Frobenius, esto es, C es qcF si y solamente si $\varphi \dim(C) = 0$.

Finalmente en el capítulo 7 trabajamos con la función ϕ en álgebras que son extensiones por escalares por un álgebra de caminos. Se verá, entre otras cosas, que la ϕ-dimensión aumenta al menos por 1 cuando realizamos la extensión.

Abstract

In this thesis we develope new tools in Homological Algebra, which we call Igusa-Todorov (ϕ and ψ) functions. We also study the ϕ-dimension and ψ-dimension in several contexts (Artin algebras, semiperfect coalgebras, etc).

After chapter 1, where we include preliminary data, we develope in the second chapter general results for the Igusa-Todorov functions. We include some new and some known results to give a complete prospect of the situation.

Through the third chapter we introduce the concept of a link module. Using the characterization for the ϕ function given in [FLM] and some other tools we give a condition of finiteness for $\operatorname{fin}\dim(A)$ and prove that if not all link modules are simple then $\operatorname{fin}\dim(A) < \phi\dim(A)$, foran Artin algebra A.

In chapter 4 we work with radical square zero algebras. If A is a radical square zero algebra, we prove that $\phi\dim(A) \leq n$ and $\psi\dim(A) \leq 2n-3$ with $n = |K_0(A)|$. For an algebra A with $\psi\dim(A) = 2n-3$ we describe completely its quiver. We also give some necessary conditions for a radical square algebra A have $\phi\dim(A) = n$. As an application of previous results we get that $\phi\dim(A) = \phi\dim(A^{op})$, for radical square zero algebras.

We proof, in chapter 5, that an n-Gorenstein algebra verifies $\phi\dim(A) = \psi\dim(A) = n$. Following the above result we obtain $\phi\dim(A) = \phi\dim(A^{op})$, $\psi\dim(A) = \psi\dim(A^{op})$ and get interesting applications to the families of Cluster tilted algebras and Gentle algebras.

In a similar way that is defined for Artin algebras, in chapter 6 we introduce the Igusa-Todorov function (φ) and the φ-dimension for semiperfect coalgebras. If C is a semiperfect coalgebra we prove that C is quasi-co-Frobenius if and only if $\varphi\dim(C) = 0$.

Finally, in chapter 7, we work with the ϕ function for scalar extension path algebras. We prove that if AQ is a scalar extension of $\Bbbk Q$ by a finite dimensional algebra A, then $\phi\dim(AQ) \geq \phi\dim A + 1$.

Introducción

Podemos considerar como comienzo del Álgebra Homológica, el trabajo “Uber die Theorie der algebraischen Formen” publicado por D. Hilbert en 1890. En este trabajo se introduce el concepto de sizigia de un módulo como lo conocemos actualmente, y se prueba el Teorema de las Sizigias que afirma lo siguiente referente a la dimensión global (ver la Definición 1.1.8):

Teorema (Hilbert) Si $\Bbbk$ es un cuerpo, entonces $\operatorname{gl}\dim(\Bbbk[X_1, \ldots, X_n]) = n$.

Luego de la introducción de la Teoría de Categorías por Eilenberg y Mac Lane en “General theory of natural equivalence” por el año 1945, el crecimiento del área ha sido acelerado y no se ha detenido desde entonces.

Una dirección que ha tomado el crecimiento del Álgebra Homológica, lo que motiva su estudio, es su interacción con otras áreas de la matemática. Podemos citar por ejemplo la interacción con la Geometría Algebraica. Un teorema conocido en este sentido es el Teorema de Auslander-Buchsbaum-Serre que detallamos a continuación:

Teorema (Auslander-Buchsbaum-Serre, 1956) Sea V una variedad algebraica afín sobre un cuerpo algebraicamente cerrado $\Bbbk$ con anillo de coordenadas $\Bbbk[V]$, entonces la dimensión global de $\Bbbk[V]$ es finita si y solamente si V es suave. En el caso que la dimensión global sea finita, se tiene además que: $\operatorname{gl}\dim(\Bbbk[V]) = \dim V$.

Otro ejemplo de interacción es el reciente trabajo de Manolescu (ver [M]), donde prueba que la conjetura de triangulación, formulada por Knesser en 1924 (toda variedad topológica de dimensión n es homeomorfa a un complejo simplicial), es falsa para variedades de dimensión mayor o igual a 4, a pesar de que para las dimensiones menores a 4 ya había sido probada. Para dicha prueba se valió de herramientas homológicas, más precisamente la Homología de Seiberg-Witten Floer.

A la hora de conocer propiedades homológicas de las álgebras, en algunos casos, donde la dimensión global no representa una herramienta muy fina (álgebras con dimensión global infinita), aparecen otras medidas homológicas: las dimensiones finitistas (fin dim y Fin dim). Se definen $\operatorname{fin}\dim(A) = \sup\{dp(M) : dp(M) < \infty \text{ con } M \in modA\}$ y $\operatorname{Fin}\dim(A) =$

$\sup\{dp(M) : dp(M) < \infty \text{ con } M \in ModA\}$. Estas dimensiones vienen acompañadas con las **conjeturas finitistas** mencionadas por primera vez por H. Bass en su trabajo "Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings" (1960) ([B]), que mencionamos a continuación.

Conjeturas (Bass)

1. Si A es un álgebra de Artin, entonces fin $\dim(A) =$ Fin $\dim(A)$.
2. Si A es un álgebra de Artin, entoces fin $\dim(A) < \infty$ (pequeña conjetura finitista).

En el caso de la primera conjetura, Bass da una prueba parcial en el citado trabajo.

Teorema (Bass, 1960) Si R es un anillo, son equivalentes:

1. Fin $\dim(A) = 0$.
2. R es perfecto a izquierda y fin $\dim(A) = 0$.

Finalmente, en el año 1992, B. Huisgen-Zimmermann encontró ejemplos de álgebras monomiales que no cumplen la primera conjetura ([Hui]). En el caso de la segunda conjetura, hasta la actualidad, solo se ha podido probar en múltiples casos parciales.

Dichas conjeturas, aparte del interés que representan por sí mismas, están relacionadas con otras conjeturas en Álgebra Homológica. Por ejemplo, de ser cierta la pequeña conjetura finitista, implicaría que también serían ciertas la **Conjetura de Simetría de Gorenstein** (si la dimensión inyectiva de ${}_AA$ es finita entonces la dimensión inyectiva de A_A también lo es, ver [AR1] y [AR2]) o la **Conjetura del Complemento de Inclinantes** (todo módulo casi inclinante tiene una cantidad finita de complementos inclinantes indescomponibles no isomorfos, ver [H]).

En el año 2005, fueron introducidas las funciones de Igusa-Todorov en "On finitistic global dimension conjecture for artin algebras" ([IT]), con el objetivo de probar la conjetura finitista. En este trabajo se concluye que para una gran familia de álgebras de Artin (Álgebras con rep dim ≤ 3) se verifica la conjetura finitista. Más recientemente, se vió en el trabajo [HuL], que estas funciones tienen la capacidad de caracterizar a las álgebras autoinyectivas, lo que generó un nuevo interés en la profundización de su estudio.

En esta tesis estudiamos las funciones ϕ y ψ de Igusa-Todorov en dos distintos contextos, como lo son las álgebras de Artin y las coálgebras Semiperfectas.

Comenzamos en el capítulo 1 dando los conceptos preliminares, algunos muy conocidos, para poder entender el trabajo.

En el capítulo 2 estudiamos las características de las funciones de Igusa-Todorov, de la ϕ-dimensión y la ψ-dimensión en álgebras de Artin en general. Aquí vemos las propiedades ya conocidas que aparecen en [IT], en [HuLM] y en [HuL], y algunas nuevas.

En [FLM] se introduce una forma equivalente para definir la función ϕ de Igusa-Todorov mediante los bifuntores Ext y Tor. Utilizando dicha equivalencia y otras herramientas, vemos en el capítulo 3, condiciones para que la fin dim sea finita y sea menor estricta a la ϕ-dimensión.

En el capítulo 4 trabajamos con las funciones de Igusa-Todorov para las álgebras de radical cuadrado nulo. Describimos la forma del carcaj de este tipo de álgebras para que la ϕ-dimensión y ψ-dimensión alcancen su máximo (una vez fijada la cantidad de vértices del carcaj). En el caso de la ϕ-dimensión se presentan condiciones necesarias para alcanzar dicho máximo y exhibimos un ejemplo de una familia infinita de álgebras donde se alcanza el mismo. Se ve también que las álgebras de radical cuadrado nulo representan un primer ejemplo donde coinciden la ϕ-dimensión a izquierda y a derecha. En el caso de la ψ-dimensión describimos completamente cuáles son los carcajes de las álgebras donde se alcanza el máximo.

Para las álgebras n-Gorenstein (con n mínimo), se ve en el capítulo 5, que la ϕ-dimensión y la ψ-dimensión coinciden y dan exactamente n. Como consecuencia del resultado anterior, tenemos que, al igual que en las álgebras de radical cuadrado nulo, en estas álgebras coinciden la ϕ-dimensión a izquierda y a derecha. Un ejemplo importante dentro de las álgebras 1-Gorenstein son las álgebras Inclinadas de Conglomerado, como consecuencia del resultado principal éstas tienen ϕ-dimensión igual a 0 (solamente el caso de las álgebras autoinyectivas) o 1. Otro ejemplo conocido de álgebras Gorenstein es el caso de las álgebras Gentiles, en estas se ve que la ϕ-dimensión depende de la longitud de paseos críticos que empiezan en una flecha gentil (ver apéndice).

De manera similar a la forma que lo hacemos para las álgebras de Artin, en el capítulo 6 definimos las funciones de Igusa-Todorov para las coálgebras semiperfectas. Allí también vemos que la ϕ-dimensión describe a las coálgebras quasi-co-Frobenius.

Finalmente en el capítulo 7 trabajamos con la función ϕ en álgebras que son extensiones por escalares por un álgebra de caminos. Se verá, entre otras cosas, que la ϕ-dimensión aumenta al menos por 1 cuando realizamos la extensión.

Capítulo 1

Preliminares

En este trabajo A siempre va a representar un anillo con unidad, en la mayoría de los casos un álgebra de Artin y C representará una coálgebra semiperfecta sobre un cuerpo $\Bbbk$.

NOTACIÓN 1.0.1. *Denotamos con:*

- $\mathrm{Mod}A$ *a la categoría de módulos a derecha sobre* A *y* $\mathrm{mod}A$ *la subcategoría plena de* $\mathrm{Mod}A$ *determinada por los módulos que son finitamente generados.*
- $\mathrm{Mod}A^{op}$ *a la categoría de módulos a izquierda sobre* A *y* $\mathrm{mod}A^{op}$ *la subcategoría plena de* $\mathrm{Mod}A^{op}$ *determinada por los módulos que son finitamente generados.*

1.1. Dimensiones Homológicas

DEFINICIÓN 1.1.1. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con cubrimientos proyectivos minimales. Definimos la* ***sizigia k-ésima*** *con $k \in \mathbb{N}$ de un objeto M (que notaremos $\Omega^k(M)$) al objeto que hace exacta la siguiente sucesión:*

$$0 \longrightarrow \Omega^k(M) \xrightarrow{i} P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

siendo la siguiente sucesión exacta una resolución proyectiva minimal:

$$\cdots P_k \xrightarrow{f_k} P_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

DEFINICIÓN 1.1.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con envolventes inyectivas minimales. Definimos la* ***sizigia $-k$-ésima*** *con $k \in \mathbb{N}$ de un objeto M (que notaremos $\Omega^{-k}(M)$) al objeto que hace exacta la siguiente sucesión:*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \longrightarrow I_{k-2} \xrightarrow{f_{k-1}} I_{k-1} \longrightarrow \Omega^{-k}(M) \longrightarrow 0$$

siendo la siguiente sucesión exacta una resolución inyectiva minimal:

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} I_0 \xrightarrow{f_1} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{k-2} \xrightarrow{f_{k-1}} I_{k-1} \xrightarrow{f_k} \cdots$$

DEFINICIÓN 1.1.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos. Definimos la* ***dimensión proyectiva*** *de un objeto M de $\mathcal{C}$ como el mínimo k tal que existe una resolución proyectiva:*

$$0 \longrightarrow P_k \longrightarrow P_{k-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

o en caso contrario decimos que la dimensión proyectiva es infinita.

DEFINICIÓN 1.1.4. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes inyectivos. Definimos la* ***dimensión inyectiva*** *de un objeto M de $\mathcal{C}$ como el mínimo k tal que existe una resolución inyectiva:*

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{k-1} \longrightarrow I_k \longrightarrow 0$$

o en caso contrario decimos que la dimensión inyectiva es infinita.

NOTACIÓN 1.1.5. *Denotaremos con dpM la dimensión proyectiva de M y con diM la dimensión inyectiva de M.*

Motivados en las definiciones anteriores tenemos los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1.1.6. *Ejemplos de categorías abelianas con suficientes proyectivos son:*

1. $\mathrm{Mod}A$, $\mathrm{Mod}A^{op}$
2. $\mathrm{mod}A$, $\mathrm{mod}A^{op}$

   por lo tanto se puede definir la dimensión proyectiva de sus objetos.

El siguiente resultado nos muestra que las sizigias no dependen de las resoluciones proyectivas.

LEMA 1.1.7. *(Schanuel)([R] Chapter 3.5)*

Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana. Consideremos las siguientes sucesiones exactas cortas en la categoría $\mathcal{C}$:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0 \qquad y \qquad 0 \longrightarrow K' \longrightarrow P' \longrightarrow M' \longrightarrow 0\,,$$

entonces $K \oplus P' \cong K' \oplus P$.

DEFINICIÓN 1.1.8. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría abeliana con suficientes proyectivos:*

1. *Definimos la dimensión global de $\mathcal{C}$ como:*

$$\text{gl dim}(\mathcal{C}) = sup\{dp(M) \textit{ tal que } M \textit{ está en } \mathrm{Ob}(\mathcal{C})\}$$

2. *Definimos la dimensión finitista de $\mathcal{C}$ como:*

$$\text{fin dim}(\mathcal{C}) = sup\{dp(M) \textit{ tal que } M \textit{ está en } \mathrm{Ob}(\mathcal{C}) \textit{ y } dp(M) < \infty\}$$

NOTACIÓN 1.1.9. *Si A es un anillo entonces denotamos con:*

- *Denotamos a la dimensión global a derecha de A con* $\text{gl dim}(A) = \text{gl dim}(\text{mod}(A))$
- *Denotamos a la dimensión finitista a derecha de A con* $\text{fin dim}(A) = \text{fin dim}(\text{mod}(A))$

1.1.1. Funtores derivados

Sean R un anillo, A y B dos R-álgebras y $F : \text{mod}A \to \text{mod}B$ un funtor covariante R-lineal. Para un módulo M, sea

$$\cdots P_k \xrightarrow{d_k} P_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M. Aplicando el funtor F al complejo de cadenas:

$$(P_M)_* = \ \cdots P_k \xrightarrow{d_k} P_{k-1} \xrightarrow{d_{k-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \longrightarrow 0 \ ,$$

obtenemos el siguiente complejo de cadenas:

$$F(P_M)_* = \ \cdots F(P_k) \xrightarrow{Fd_k} F(P_{k-1}) \xrightarrow{Fd_{k-1}} \cdots \longrightarrow F(P_1) \xrightarrow{Fd_1} F(P_0) \longrightarrow 0$$

Definimos el **n-ésimo funtor derivado a la izquierda** F_n^i, donde i indica a izquierda, para F en un módulo M como:

$$F_n^i(M) = H_n(F((P_M)_*)) = Ker(Fd_n)/Im(Fd_{n+1})$$

Dado ahora un mapa de A-módulos $f : M \to M'$, y dadas resoluciones proyectivas $(P_M)_*$ y $(P_{M'})_*$ de M y M' respectivamente, tenemos que existe el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas (ver [As] Chapitre IX.2):

$$\begin{tikzcd}
\cdots P_k \arrow[r, "d_k"] \arrow[d, "f_k"] & P_{k-1} \arrow[r, "d_{k-1}"] \arrow[d, "f_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & P_1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "f_1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\cdots P'_k \arrow[r, "d_k"] & P'_{k-1} \arrow[r, "d_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & P'_1 \arrow[r, "d_1"] & P'_0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

aplicando el funtor F al diagrama anterior tenemos el siguiente diagrama conmutativo donde las filas son complejos de cadenas:

$$\begin{tikzcd}
\cdots FP_k \arrow[r, "Fd_k"] \arrow[d, "Ff_k"] & FP_{k-1} \arrow[r, "Fd_{k-1}"] \arrow[d, "Ff_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & FP_1 \arrow[r, "Fd_1"] \arrow[d, "Ff_1"] & FP_0 \arrow[r] \arrow[d, "Ff_0"] & 0 \, . \\
\cdots FP'_k \arrow[r, "Fd_k"] & FP'_{k-1} \arrow[r, "Fd_{k-1}"] & \cdots \arrow[r] & FP'_1 \arrow[r, "Fd_1"] & FP'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definimos finalmente $F^i_n f : F^i_n(M) \to F^i_n(M')$ como el morfismo inducido por Ff_* en la homología: $F^i_n f(z_n + Im(Fd_{n+1})) = Ff_n(z_n) + Im(Fd'_{n+1})$ donde $z_n \in Ker(Fd_n)$.

Se define para $F : \text{mod}A \to \text{mod}B$ covariante R-lineal los funtores derivados a derecha, utilizando las resoluciones inyectivas en lugar de las proyectivas, y denotaremos con F^d_n al n-ésimo funtor derivado de F. Para $F : \text{mod}A \to \text{mod}B$ contravariante, definimos análogamente el n-ésimo funtor derivado y denotaremos con F^d_n.

OBSERVACIÓN 1.1.10. *([R] Chapter 6.2)*
La noción de funtor derivado no depende de las resoluciones proyectivas o inyectivas de los módulos y por lo tanto está bien definida.

TEOREMA 1.1.11. *([R] Chapter 6.2) Sea* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de A-módulos y $F : \text{mod}A \to \text{mod}B$ un funtor R-lineal covariante, entonces:*

1. *existe una sucesión exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow F^i_n(M') \longrightarrow F^i_n(M) \longrightarrow F^i_n(M'') \longrightarrow F^i_{n-1}(M') \longrightarrow \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow F^i_0(M') \longrightarrow F^i_0(M) \longrightarrow F^i_0(M'') \longrightarrow 0$$

con todos los morfismos funtoriales.

2. *existe una sucesión exacta larga:*

$$0 \longrightarrow F^d_0(M') \longrightarrow F^d_0(M) \longrightarrow F^d_0(M'') \ldots$$

$$\cdots \longrightarrow F^d_n(M') \longrightarrow F^d_n(M) \longrightarrow F^d_n(M'') \longrightarrow F^d_{n+1}(M') \longrightarrow \cdots$$

con todos los morfismos funtoriales.

TEOREMA 1.1.12. *([R] Chapter 6.2) Sea* $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de A-módulos y* $F : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}B$ *un funtor R-lineal contravariante, entonces existe una sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow F_0^d(M'') \longrightarrow F_0^d(M) \longrightarrow F_0^d(M') \dots$$

$$\cdots \longrightarrow F_n^d(M'') \longrightarrow F_n^d(M) \longrightarrow F_n^d(M') \longrightarrow F_{n+1}^d(M'') \longrightarrow \cdots$$

con los morfismos funtoriales.

Para el caso de los funtores derivados que utilizaremos en este trabajo tenemos las siguientes notaciones.

NOTACIÓN 1.1.13. *Denotaremos con:*

1. $E^n(M, \cdot)$ *al funtor derivado a derecha del funtor covariante* $\mathrm{Hom}_A(M, \cdot)$.
2. $E_n(\cdot, N)$ *al funtor derivado a derecha del funtor contravariante* $\mathrm{Hom}_A(\cdot, N)$.
3. $T^n(M, \cdot)$ *al funtor derivado a izquierda de funtor covariante* $M \otimes (\cdot)$.
4. $T_n(\cdot, N)$ *al funtor derivado a izquierda de funtor covariante* $(\cdot) \otimes N$.

LEMA 1.1.14. *([As] Chapitre IX.3 y Chapitre IX.4) Para todo A-módulo M tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales:*

1. $E^0(M, \cdot) \cong \mathrm{Hom}_A(M, \cdot)$.
2. $E_0(\cdot, N) \cong \mathrm{Hom}_A(\cdot, N)$.
3. $T^0(M, \cdot) \cong M \otimes (\cdot)$.
4. $T_0(\cdot, N) \cong (\cdot) \otimes N$.

TEOREMA 1.1.15. *([As] Chapitre IX.3 y Chapitre IX.4)*
Dados dos A-módulos M y N tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales para $n \geq 0$*:*

1. $E^n(M, N) \cong E_n(M, N)$.
2. $T^n(M, N) \cong T_n(M, N)$.

El teorema anterior justifica las siguientes notaciones.

NOTACIÓN 1.1.16. *Si A es un anillo y M y N son dos A-módulos denotamos con:*

1. $\mathrm{Ext}_A^n(M, N) = E^n(M, N) \cong E_n(M, N)$ *y*

2. $\mathrm{Tor}_n^A(M,N) = T^n(M,N) \cong T_n(M,N)$.

LEMA 1.1.17. ***(Lema de Décalage)****([As] Chapitre IX.3)*
Dados dos A-módulos M y N tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales:

1. $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_A^n(M,\Omega^{-1}(N)) \cong \ldots \cong \mathrm{Ext}_A^1(M,\Omega^{-n}(N))$.

2. $\mathrm{Ext}_A^{n+1}(M,N) \cong \mathrm{Ext}_A^n(\Omega(M),N) \cong \ldots \cong \mathrm{Ext}_A^1(\Omega^n(M),(N))$.

1.2. Resultados en anillos noetherianos

En esta sección formulamos los resultados en anillos noetherianos que utilizaremos más adelante. Comenzamos con una versión del lema de Fitting, cuya prueba agregamos a continuación para mayor claridad.

LEMA 1.2.1. *(Lema de Fitting)*
Sean M un módulo sobre un anillo noetheriano A, $f: M \to M$ un endomorfismo de M y X un submódulo de M finitamente generado, entonces:

1. *Hay un entero n tal que, para todo $m \geq n$, $f: f^m(X) \to f^{m+1}(X)$ es un isomorfismo. Sea $\eta_f(X)$ el mínimo valor de n.*
2. *Si Y es un submódulo de X entonces $\eta_f(Y) \leq \eta_f(X)$.*
3. *Si A es un álgebra de Artin y $X = M$ existe una descomposición $X = Y \oplus Z$ tal que $Z = Kerf^m$ e $Y = Imf^m$ para todo $m \geq \eta_f(X)$. Además, en dicha descomposición, el endomorfismo $f: Y \oplus Z \to Y \oplus Z$ puede ser visto como la siguiente matriz:*

$$\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix},$$

donde $f_{11}: Y \to Y$ es un isomorfismo y $f_{22}: Z \to Z$ es nilpotente.

Demostración:

1. Como f es sobreyectiva sobre su imagen, para todo $i \in \mathbb{N}$ tenemos una sucesión exacta corta:

$$\varepsilon_i \qquad 0 \longrightarrow U_i \longrightarrow X \xrightarrow{f^i} f^i(X) \longrightarrow 0\ ,$$

Dado $i \in \mathbb{N}$ podemos construir el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$
\begin{tikzcd}
\varepsilon_i & 0 \arrow[r] & U_i \arrow[r] \arrow[d, "u_i"] & X \arrow[r, "f^i"] \arrow[d, "1"] & f^i(X) \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
\varepsilon_{i+1} & 0 \arrow[r] & U_{i+1} \arrow[r] & X \arrow[r, "f^{i+1}"] & f^{i+1}(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

donde claramente los u_i son monomorfismos. Por lo anterior tenemos definida una sucesión de inclusiones $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_i \subseteq \ldots \subseteq X$ y como X es un módulo noetheriano existe un n tal que

$$U_n = U_{n+1} = \ldots = U_{n+k} = \ldots$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Para todo natural m mayor que n se tiene, usando los diagramas vistos arriba y el lema de los 5, que $f : f^m(X) \to f^{m+1}(X)$ es un isomorfismo.

2. Dado Y un submódulo de X claramente si $f : f^n(X) \to f^{n+1}(X)$ es un isomorfismo e Y es un submódulo de X entonces $f : f^n(Y) \to f^{n+1}(Y)$ también lo es.

3. Consideremos $m \geq \eta_f(X)$, probemos en este caso que $X = Imf^m \oplus Kerf^m$.

   <u>Afirmación:</u> $Imf^m \cap Kerf^m = \{0\}$.

   Supongamos que existe $x \in Imf^m \cap Kerf^m$ no nulo. Como $x \in Kerf^m$ se tiene que $f^m(x) = 0$. Por otro lado como $x \in Imf^m$ existe un elemento no nulo $y \in X$ tal que $f^m(y) = x$, por lo tanto $f^{2m}(y) \neq 0$ porque f restricto a Imf^m es un isomorfismo, pero $f^{2m}(y) = f^m(x) = 0$, lo que es absurdo. Finalmente deducimos que $Imf^m \cap Kerf^m = \{0\}$.

   <u>Afirmación:</u> Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Imf^m = Imf^{m+k}$ y $Kerf^m = Kerf^{m+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

   Como X es un módulo artiniano, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $Imf^m = Imf^{m+k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que existe $x \in Kerf^{m+1} - Kerf^m$ no nulo. Esto quiere decir que $f^m(x) \neq 0$ y $f^{m+1}(x) = 0$. El elemento $f^m(x)$ pertenece a Imf^m, y f restricta a Imf^m es un isomorfismo, por lo tanto $f(f^m(x)) \neq 0$ lo que es absurdo.
   <u>Afirmación</u> $X = Imf^m + Kerf^m$.

   Sea $x \in X$, por la afirmación anterior podemos consideremos $y \in X$ tal que $f^{2m}(y) = f^m(x)$. Como $f^m(x - f^m(y)) = f^m(x) - f^{2m}(y) = 0$ entonces $x - f^m(y) \in Kerf^m$, de lo que finalmente se deduce que $X = Imf^m + Kerf^m$.

Como $f(Imf^m) = Imf^{m+1} \subset Imf^m$ y $f(Kerf^m) \subset Kerf^m$ entonces claramente podemos ver a f como la matriz:

$$\begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & f_{22} \end{pmatrix}$$

siendo $f_{11} = f|_{Imf^m}$ y $f_{22} = f|_{Kerf^m}$, claramente f_{11} es un isomorfismo. Dado $x \in Kerf^m$ se tiene que $f_{22}^m(x) = 0$ por lo tanto f_{22} es nilpotente. $\square$

1.3. Resultados en álgebras de Artin

En los siguientes teoremas R denotará un anillo conmutativo con unidad. Dichos teoremas relacionan los funtores Ext y Tor.

TEOREMA 1.3.1. *([As] Chapitre IX.4) Sean A una R-álgebra noetheriana, B una R-álgebra, L_A un módulo finitamente generado, ${}_BM_A$ un bimódulo e ${}_BI$ un módulo inyectivo. Para todo $n \geq 0$ tenemos los siguientes isomorfismo funtoriales:*

$$\mathrm{Tor}_n^A(L, \mathrm{Hom}_B(M, I)) \to Hom_B(\mathrm{Ext}_A^n(L, M), I)$$

DEFINICIÓN 1.3.2. *A partir de ahora A indicará un álgebra de Artin.*

*Definimos el **radical** de un módulo M como la intersección de todos los submódulos maximales de M, y lo denotamos con $radM$. Inductivamente definimos $rad^n M = rad(rad^{n-1}M)$.*

TEOREMA 1.3.3. *([ARS] Chapter II.3)*

Toda R-álgebra de Artin A es un anillo con dualidad D_A, donde $D_A(M) = \mathrm{Hom}_R(M, I_R)$ e $I_R = I_0(\frac{R}{RadR})$, donde $I_0(\frac{R}{RadR})$ es la envolvente inyectiva del R-módulo $\frac{R}{RadR}$).

COROLARIO 1.3.4. *([As] Chapitre IX.4) Sean A una R-álgebra de Artin, L_A y M_A módulos finitamente generados. Para todo $n \geq 0$ tenemos los siguientes isomorfismos funtoriales:*

$$\mathrm{Tor}_n^A(L, D(M)) \to D(\mathrm{Ext}_A^n(L, M))$$

La noción dual al radical es la siguiente:

DEFINICIÓN 1.3.5. *Definimos el **zócalo** de un módulo M como la suma de todos los submódulos simples de M y lo denotamos $socM$. Inductivamente definimos $soc^i M$ de la siguiente forma: Si tenemos definido $soc^{i-1}M$ y consideramos $p_{i-1} : M \to \frac{M}{soc^{i-1}M}$ definimos $soc^i M = p_{i-1}^{-1}(soc\frac{M}{soc^{i-1}M})$.*

DEFINICIÓN 1.3.6. *Para un A-módulo finitamente generado consideramos la sucesión:*

$$M \supset radM \supset rad^2 M \ldots \supset rad^i M \ldots \supset rad^m M = 0.$$

Dicha sucesión es llamada ***sucesión radical*** *de M o* ***sucesión de Loewy descendente*** *de M. El mínimo m tal que $rad^m M = \{0\}$ se llama* ***longitud de la sucesión radical*** *y se denota con $lr(M)$.*

Dualmente tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1.3.7. *Para un A-módulo finitamente generado consideramos la sucesión:*

$$0 \subset socM \subset soc^2 M \ldots \subset soc^i M \ldots \subset soc^m M = M.$$

Dicha sucesión es llamada ***sucesión de zócalos*** *de M o* ***sucesión de Loewy ascendente*** *de M. El mínimo m tal que $soc^m M = M$ se llama* ***longitud de la sucesión de zócalos*** *y se denota con $lz(M)$.*

PROPOSICIÓN 1.3.8. *([ARS] Chapter II.5) Para todo A-módulo M se tiene que $lr(M) = lz(M)$.*

DEFINICIÓN 1.3.9. *La* ***longitud de Loewy*** *de un módulo M es el valor común de $lz(M)$ y $lr(M)$ y la denotaremos con $ll(M)$.*

1.3.1. Álgebras de caminos

Un **grafo orientado** o **carcaj** es una cuaterna $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ donde Q_0 (**vértices**) y Q_1 (**flechas**) son conjuntos y $s, t : Q_1 \to Q_0$ son funciones tales que s define el comienzo de una flecha y t su final. Denotaremos con $Q_{a,b}$ al conjunto de flechas de Q que comienzan en a y finalizan en b.

Un **camino** μ de largo $l \geq 1$ con comienzo a y final b en Q es una sucesión

$$\mu = (b|\alpha_l, \alpha_{l-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1|a),$$

donde $\alpha_k \in Q_1$ para todo $1 \leq k \leq l$, $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$, para todo $1 \leq k < l$ y $t(\alpha_l) = b$. Decimos que μ comienza en a y finaliza en b. Si un camino de largo $l \geq 1$ tiene el mismo comienzo y final entonces diremos que es un **ciclo**.

Para cada vértice a en Q_0 definimos e_a un camino de largo 0 llamado el **camino trivial** en a. Denotaremos con $(a||a)$ a dicho camino.

Diremos que el vértice a es un **pozo** (**fuente**) si para cada $\alpha \in Q_1$ $s(\alpha) \neq a$ $(t(\alpha) \neq a)$.

Se dirá que ν es un subcamino de μ si $\nu = (t(\alpha_k)|\alpha_k, \ldots, \alpha_i|s(\alpha_i))$ y $\mu = (b|\alpha_l, \ldots, \alpha_1|a)$ donde $1 \leq i \leq k \leq l$. Si ν es un subcamino de μ entonces lo notaremos $\nu \preceq \mu$. Si además

$\mu \neq \nu$ entonces lo notaremos $\nu \prec \mu$.

Denotaremos $\mathbb{P}(a,-)$ el conjunto de los caminos de Q que comienzan en a, $\mathbb{P}(-,b)$ el conjunto de los caminos que finalizan en b, $\mathbb{P}(a,b)$ el conjunto de caminos que comienzan en a y finalizan en b, $\mathbb{P}$ el conjunto de todos los caminos de Q y $\mathbb{P}^{\geq k}$ al subconjunto de $\mathbb{P}$ formado por los caminos de longitud mayor o igual a $k \in \mathbb{N}$.

Definimos $\Bbbk Q$ como el espacio vectorial con base todos los caminos de Q. Análogamente definimos $\Bbbk\mathbb{P}(a,-)$ como el espacio vectorial de base $\mathbb{P}(a,-)$, $\Bbbk\mathbb{P}(-,b)$ el espacio vectorial cuya base es $\mathbb{P}(-,b)$ y $\Bbbk\mathbb{P}(a,b)$ el espacio vectorial de base $\mathbb{P}(a,b)$.

Dados dos caminos $\mu = (b|\alpha_l,\ldots,\alpha_1|a)$ y $\nu = (d|\beta_k,\ldots,\beta_1|c)$ se define el camino $\nu\mu$ como:

$$\nu\mu = \begin{cases} (d|\beta_k,\ldots,\beta_1,\alpha_l,\ldots,\alpha_1|a), & \text{si } b=c; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $v \in Q_0$:

- decimos que $w \in Q_0$ es un **sucesor inmediato** de v si existe $\alpha \in Q_1$ que comienza en v y termina en w. Lo denotaremos $v \to w$. En este caso decimos que $v \in Q_0$ es un **antecesor inmediato** de w.

- decimos que $w \in Q_0$ es un **sucesor** de v si hay un camino en Q que comienza en v y termina en w. Lo denotaremos $v \rightsquigarrow w$. En este caso decimos que $v \in Q_0$ es un **antecesor** de w.

Definiendo el producto de ν y μ como el camino $\nu\mu$ y suponiendo que los conjuntos Q_0 y Q_1 son finitos tenemos que $\Bbbk Q$ tiene estructura de $\Bbbk$-álgebra. Esta álgebra recibe el nombre de **álgebra de caminos**.

Denotaremos con F el ideal generado por las flechas de Q, o sea $F = \langle \mathbb{P}^{\geq 1} \rangle$.

Si consideramos el álgebra $\Bbbk Q$, decimos que un ideal I es **admisible** si cumple que $F^n \subset I \subset F^2$ para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso el ideal se puede generar por elementos de la forma $x = \sum_i a_i\mu_i$ tales que $s(\mu_i) = a$ y $t(\mu_i) = b$ para todo i. Dichos elementos los llamaremos **relaciones**(ver [ASS] Chapter II.3.). Por más definiciones, propiedades y notaciones se refiere a [ASS] (Chapter II y Chapter III).

Denotaremos con $\mathrm{Rep}_{\Bbbk}(Q,I)$ a la categoría de representaciones sobre Q acotadas por el ideal I y $\mathrm{rep}_{\Bbbk}(Q,I)$ la subcategoría plena de representaciones sobre Q acotadas por el ideal I de dimensión finita (ver [ASS] Chapter II.1).

TEOREMA 1.3.10. *[ASS] Chapter II.3) Sea $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$, donde Q es un carcaj finito y conexo, e I un ideal admisible de $\Bbbk Q$. Entonces existe una equivalencia $\Bbbk$-lineal de categorías:*

$$F : \mathrm{Mod}A \to \mathrm{Rep}_{\Bbbk}(Q, \mathcal{I})$$

que se restringe a la equivalencia de categorías $F : \mathrm{mod}A \to \mathrm{rep}_{\Bbbk}(Q, I)$.

El siguiente resultado nos ayuda en el reconocimiento de ciertos módulos especiales:

PROPOSICIÓN 1.3.11. *([ASS] Chapter III.2) Sea $A = \frac{\Bbbk Q}{\mathcal{I}}$, entonces*

1. *Todo A-módulo simple es de la forma $(S(a)_b, T_\alpha)_{b\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ para algún $a \in Q_0$ donde:*

   - $S(a)_b = \begin{cases} 0, & si\ b \neq a, \\ \Bbbk, & si\ b = a\ ; \end{cases}$
   - $T_\alpha = 0$ *para todo* $\alpha \in Q_1$.

2. *Todo A-módulo proyectivo es de la forma $(P(a)_b, T_\alpha)_{b\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ para algún $a \in Q_0$ donde:*

   - $P(a)_b = \Bbbk\{\gamma + I\}_{\gamma\in\mathbb{P}(a,b)}$ *y*
   - $T_\alpha : P(a)_b \to P(a)_c$ *si* $s(\alpha) = b$ *y* $t(\alpha) = c$ *está definida por la multiplicación a izquierda por* α.

3. *Todo A-módulo inyectivo es de la forma $(I(a)_b, T_\alpha)_{b\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ para algún $a \in Q_0$ donde:*

   - $I(a)_b = \Bbbk\{\gamma + I\}_{\gamma\in\mathbb{P}(b,a)}$ *y*
   - $T_\alpha : I(a)_b \to I(a)_c$ *si* $s(\alpha) = b$ *y* $t(\alpha) = c$ *está definida por el dual de la multiplicación a derecha por* α.

1.3.2. Anillos de matrices triangulares

Dados los anillos s y T y M un $S - T$-bimódulo, construimos el **anillo de matrices triangulares** Λ al conjunto de matrices:

$$\left\{ \begin{pmatrix} s & m \\ 0 & t \end{pmatrix} : s \in S,\ m \in M \text{ y } t \in T \right\}$$

con las operaciones de adición y multiplicación naturales de las matrices. En el caso de que el anillo S sea un anillo de división decimos que λ es **la extensión por un punto de** T por el bimódulo ${}_SM_T$. Si además T es un álgebra de caminos con relaciones, con carcaj Q e ideal admisible I, un álgebra de caminos con relaciones Λ con carcaj Q' e ideal I' es la extensión por un punto de T, si:

- $Q'_0 = Q_0 \cup \{v\}$ siendo v un nuevo vértice,

- $Q'_1 = Q_1 \cup \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ siendo α_i para todo $i = 1, \ldots, k$ flechas que salen de v,

y además $I' = \langle I \cup \{\rho_1, \ldots, \rho_m\}\rangle$ donde ρ_i son relaciones que empiezan en v para todo $i = 1 \ldots m$. Para más definiciones y propiedades sobre anillos de matrices triangulares refeimos a [ARS] (Chapter III.2).

NOTACIÓN 1.3.12. *Dada un álgebra T denotaremos con $\mathcal{P}(T)$ al conjunto de proyectivos indescomponibles de T y con $\{P_1 \ldots P_k\}$ al conjunto de proyectivos indescomponibles de Λ que no son proyectivos sobre T.*

OBSERVACIÓN 1.3.13. *([ARS] Chapter III.2)*

Si T es un álgebra y $\Lambda = \left\{ \begin{pmatrix} s & m \\ 0 & t \end{pmatrix} : s \in S,\ m \in M\ y\ t \in T \right\}$ un anillo de matrices triangulares.

- *Es conocida la inclusión de categorías* $\mathrm{mod}T \subset \mathrm{mod}\Lambda$ *y* $\mathcal{P}(\Lambda) = \mathcal{P}(T) \cup \{P_1 \ldots P_k\}$.
- *Toda resolución proyectiva de un T-módulo también es una resolución proyectiva como Λ-módulo.*
- *En el caso que Λ sea la extensión por un punto de T, es claro que* $\Omega_\Lambda(\mathrm{mod}\Lambda) \subset \mathrm{mod}T$ *y que* $\Omega_T(\mathrm{mod}T) \subset \Omega_\Lambda(\mathrm{mod}\Lambda)$.

1.4. Coálgebras y comódulos

DEFINICIÓN 1.4.1. *Una $\Bbbk$-**coálgebra** es una terna (C, Δ, ε) donde C es un $\Bbbk$-espacio vectorial y $\Delta : C \to C \otimes C$, $\varepsilon : C \to \Bbbk$ son transformaciones $\Bbbk$-lineales llamadas comultiplicación y counidad respectivamente tales que:*

- $(\Delta \otimes 1_C)\Delta = (1_C \otimes \Delta)\Delta$ *(coasociatividad),*
- $m(1_C \otimes \varepsilon)\Delta = 1_C = n(\varepsilon \otimes 1_C)\Delta$,

donde $m : C \otimes \Bbbk \to C$ y $n : \Bbbk \otimes C \to C$ son los isomorfismos canónicos. Las dos condiciones anteriores pueden expresarse como la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta\otimes 1_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "1_C\otimes\Delta"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \\ C \otimes C \arrow[r, "1_C\otimes\varepsilon"'] & C \otimes \Bbbk \arrow[u, "m"'] \end{tikzcd} , \quad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "1_C"] \arrow[d, "\Delta"'] & C \\ C \otimes C \arrow[r, "\varepsilon\otimes 1_C"'] & \Bbbk \otimes C \arrow[u, "n"'] \end{tikzcd} .$$

DEFINICIÓN 1.4.2. *Sean $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ y $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ dos $\Bbbk$-coálgebras. Una transformación lineal $f : C \to D$ es un **morfismo** de $\Bbbk$-coálgebras si:*

- $\Delta_D f = (f \otimes f)\Delta_C$
- $\varepsilon_C = \varepsilon_D f$

Notar que las condiciones anteriores equivalen a la conmutatividad de los siguientes diagramas:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\ C \otimes C \arrow[r, "f\otimes f"'] & D \otimes D \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varepsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\ \Bbbk & \end{tikzcd}$$

Ahora veremos algunos ejemplos de coálgebras.

EJEMPLO 1.4.3. *Si $\Bbbk$ es un cuerpo entonces $(\Bbbk, \Delta, \varepsilon)$ es una coálgebra, siendo*

- $\Delta : \Bbbk \to \Bbbk \otimes \Bbbk$ *el isomorfismo canónico y*
- $\varepsilon : \Bbbk \to \Bbbk$ *la identidad en* $\Bbbk$.

EJEMPLO 1.4.4. *Sea $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ un carcaj. Definimos en $\Bbbk Q$ una estructura de coálgebra que llamamos **coálgebra de caminos**. Sean $\Delta : \Bbbk \to \Bbbk \otimes \Bbbk$ y $\varepsilon : \Bbbk \to \Bbbk$ dos transformaciones lineales definidas de la siguiente manera:*

1. Δ
   - $\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$ *para todo* $i \in Q_0$
   - $\Delta(\mu) = \sum_{\nu\nu'=\mu} \nu \otimes \nu'$ *con μ camino de largo $l \geq 1$*
2. ε
   - $\varepsilon(e_i) = 1$ *para todo* $i \in Q_0$
   - $\varepsilon(\mu) = 0$ *con μ camino de largo $l \geq 1$*

Para que la coálgebra caminos $\Bbbk Q$ sea semiperfecta es necesario y suficiente que para cada $v \in Q_0$ existan solo una cantidad finita de caminos que llegan a él.

DEFINICIÓN 1.4.5. *Sea (C, Δ, ε) una $\Bbbk$-coálgebra, un C-**comódulo a derecha (izquierda)** es un par (M, ρ) donde M es un espacio vectorial y $\rho : M \to M \otimes C$ ($\rho : M \to C \otimes M$) es una transformación lineal, tales que*

- $(\rho \otimes 1_C)\rho = (1_M \otimes \Delta)\rho \quad ((1_C \otimes \rho)\rho = (\Delta \otimes 1_M)\rho)$

- *$m(1_M \otimes \varepsilon)\rho = 1_M$ $(m(\varepsilon \otimes 1_M)\rho = 1_M)$ siendo $m : M \otimes \Bbbk \to M$ $(n : \Bbbk \otimes M \to M)$ el isomorfismo canónico.*

Las condiciones de comódulo a derecha se expresan mediante los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\rho"'] & M \otimes C \arrow[d, "1_M \otimes \Delta"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\rho \otimes 1_C"'] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "1_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "1_M \otimes \varepsilon"] \\ M & M \otimes \Bbbk \arrow[l, "m"'] \end{tikzcd}$$

DEFINICIÓN 1.4.6. *Decimos que una coálgebra es semiperfecta a izquierda (derecha) si todas las envolventes inyectivas de los comódulos simples a derecha (izquierda) son de dimensión finita.*

DEFINICIÓN 1.4.7. *Si (M, ρ_M) y (N, ρ_N) son dos C-comódulos a derecha (izquierda), decimos que $f : M \to N$ es un* ***morfismo*** *de C-comódulos a derecha (izquierda) si*

- $(f \otimes 1_C)\rho_M = \rho_N f$ $((1_C \otimes f)\rho_M = \rho_N f)$

La condición de morfismo de comódulo a derecha se expresa mediante el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes 1_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

Si existe $g : N \to M$ otro morfismo de C-comódulos a derecha tal que $fg = 1_N$ y $gf = 1_M$ decimos que f es un ***isomorfismo de comódulos a derecha (izquierda)*** *y que N y M son* ***isomorfos como comódulos a derecha (izquierda)*** *y lo denotamos $N \cong M$.*

NOTACIÓN 1.4.8. *Si C es una coálgebra denotamos con:*

- *$\mathcal{M}^C$ a la categoría de comódulos a derecha sobre C y $\mathcal{M}^C_f$ es la subcategoría plena determinada por los comódulos finitamente generados.*

- *${}^C\mathcal{M}$ a la categoría de comódulos a izquierda sobre C y ${}^C\mathcal{M}_f$ es la subcategoría plena determinada por los comódulos finitamente generados.*

EJEMPLO 1.4.9. *Ejemplos de categorias abelianas con suficientes inyectivos son:*

1. *$\mathcal{M}^C$, ${}^C\mathcal{M}$*

2. $\mathcal{M}_f^C$, ${}^C\mathcal{M}_f$

por lo tanto se puede definir la dimensión inyectiva de sus objetos.

TEOREMA 1.4.10. ***Teorema Fundamental de los Comódulos.*** *([Sw])*
Dado un C-comódulo a derecha (M, ρ), si $m \in M$ entonces existe un subcomódulo N de M con $\dim_k N < \infty$ y $m \in N$.

a partir del teorema anterior obtenemos los siguientes corolarios:

COROLARIO 1.4.11. *Si M es un C-comódulo a derecha simple entonces $\dim_{\Bbbk}(M) < \infty$*

COROLARIO 1.4.12. *Si M es un C-comódulo a derecha finitamente generado entonces $\dim_{\Bbbk}(M) < \infty$.*

1.5. Teorema de Krull-Schmidt

TEOREMA 1.5.1. *([As] Chapitre VII.6)*
Si M es un módulo Artiniano y Noetheriano, entonces M suma directa de indescomponibles y dicha descomposición es única a menos de isomorfismos.

Como consecuencia de las propiedades de las álgebras de Artin tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 1.5.2. *Si M es un módulo finitamente generado sobre un álgebra de Artin, entonces M es suma directa de indescomponibles y dicha descomposición es única a menos de isomorfismos.*

OBSERVACIÓN 1.5.3. *A partir de ahora siempre que digamos que $M = \oplus_{i=1}^k M_i^{l_i}$ es la descomposición en indescomponibles de M implicará que $M_i \ncong M_j$ si $i \neq j$.*

Una versión más general del Teorema 1.5.1 es la siguiente:

TEOREMA 1.5.4. *(Krull-Remak-Schmidt-Azumaya)([P] Chapter 4.8)*
Sean $\mathcal{C}$ una categoría de Grothendieck y A un objeto de $\mathcal{C}$. Consideremos las siguientes descomposiciones de el objeto A.

- $A = \oplus_{i \in I} A_i$ *con* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, A_i)$ *anillos locales, y*
- $A = \oplus_{j \in J} B_j$ *con* B_j *indescomponibles,*

entonces existe una biyección $\phi : I \to J$ tal que para cada i tenemos que $A_i \cong B_{\phi(i)}$

Para ver la definición de Categoría de Grothendieck, ver por ejemplo en [P] Chapter 4.7. Ejemplos de estas categorias son: La categoría de módulos (a izquierda) sobre un anillo A (Mod$A$) o la categoría de comódulos (a izquierda) sobre una coálgebra C ($\mathcal{M}^C$).

Capítulo 2

Funciones de Igusa-Todorov

Ahora veremos las propiedades principales de las funciones de Igusa-Todorov para álgebras de Artin. Denotaremos con A de ahora en más a dichas álgebras.

2.1. Funciones de Igusa-Todorov

En esta sección se encuentran las propiedades ya conocidas de las funciones de Igusa-Todorov. Exponemos algunas de las pruebas para beneficio del lector.

DEFINICIÓN 2.1.1. *Sea K_0 el grupo abeliano libre generado por los símbolos $|M|$ donde M es un representante a menos de isomorfismo de un A-módulo finitamente generado a derecha y las relaciones:*

1. *$[M] - [M'] - [M'']$ siempre que $M \cong M' \oplus M''$.*
2. *$[P]$ para cada P proyectivo.*

NOTACIÓN 2.1.2. *Denotaremos con:*

1. *$\overline{\Omega} : K_0 \to K_0$ al morfismo de grupos inducido por Ω ($\overline{\Omega}([M]) = [\Omega(M)]$). Dicho morfismo está bien definido, dado que las sizigias de los módulos están definidas a menos de proyectivos, por el Lema 1.1.7.*
2. *$K_i = \overline{\Omega}(K_{i-1}) = \ldots = \overline{\Omega}^i(K_0)$.*
3. *Si M es un A-módulo finitamente generado, entonces $\langle \mathrm{add} M \rangle$ denota al grupo libre generado por los sumandos indescomponibles de M que no son proyectivos.*

La siguiente observación es clara:

OBSERVACIÓN 2.1.3. *$\overline{\Omega}(K_i) \subset K_i$ para $i \in \mathbb{N}$.*

DEFINICIÓN 2.1.4. *Definimos la* ***función*** ϕ ***de Igusa-Todorov (a derecha) para*** $M \in \mathrm{mod}A$ *como:*

$$\phi_{der}(M) = \mathrm{mín}\left\{l : \overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^{l+s}\langle \mathrm{add}M\rangle} \textit{es un isomorfismo sobre la imagen para todo } s \in \mathbb{N}\right\}.$$

El mínimo de la Definición 2.1.4 existe debido a el Lema 1.2.1.

En caso de no haber confusión, denotaremos simplemente con ϕ a la función de Igusa-Todorov. Análogamente se define ϕ_{izq}.

OBSERVACIÓN 2.1.5. *Las siguientes observaciones son claras:*

1. *Como* $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^{k}\langle \mathrm{add}M\rangle}$ *es un isomorfismo sobre la imagen si y solamente si es inyectiva, entonces tenemos que:*

$$\phi(M) = \mathrm{mín}\left\{l : \overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^{l+s}\langle \mathrm{add}M\rangle} \textit{es un monomorfismo para todo } s \in \mathbb{N}\right\}.$$

2. *Si tenemos que* $\Omega(M) \in \mathrm{add}M$*, entonces* $\overline{\Omega}(\langle \mathrm{add}M\rangle) \subset \langle \mathrm{add}M\rangle$.

3. *Si tenemos que* $\Omega(M) \in \mathrm{add}M$*, entonces* $\overline{\Omega}^{l+m}\langle \mathrm{add}M\rangle$ *es subgrupo de* $\overline{\Omega}^{l}\langle \mathrm{add}M\rangle$ *para todo* $m \in \mathbb{N}$.

Las siguientes proposiciones se encuentran en [IT], en [HuLM] y en [HuL].

PROPOSICIÓN 2.1.6. *([IT])*
Sean M *y* $N \in \mathrm{mod}A$.

1. *Si* M *tiene dimensión proyectiva finita entonces* $\phi(M) = dp(M)$.
2. *Si* M *tiene dimensión proyectiva infinita y es indescomponible entonces* $\phi(M) = 0$.
3. $\phi(M) \leq \phi(M \oplus N)$.
4. $\phi(M^k) = \phi(M)$ *para cualquier* $k \in \mathbb{N}$.

Demostración:

1. Sea $M = \oplus_{i=1}^{t} M_i^{l_i}$ la descomposición en indescomponibles de M, por lo tanto el conjunto $\{[M_1], \ldots, [M_t]\}$ es una base de $\langle \mathrm{add}M\rangle$. Como $dpM = k$, para algún i_0 se tiene que $dpM_{i_0} = k$. Por lo tanto $\overline{\Omega}^{k-1}([M_{i_0}]) \neq 0$, lo que implica que $\overline{\Omega}^{k-1}(\langle \mathrm{add}M\rangle) \neq 0$. Además para todo $i = 1, \ldots, t$ se cumple $\overline{\Omega}^{k}([M_i]) = 0$, entonces $\overline{\Omega}^{k}(\langle \mathrm{add}M\rangle) = 0$, por lo que finalmente se obtiene $\phi(M) = k$.

2. Dado que M es un módulo indescomponible, se tiene que $rk\langle \text{add}M\rangle = 1$. Como ninguna sizigia de M es proyectiva, ya que $dpM = \infty$, esto implica que $rk\overline{\Omega}^k\langle(\text{add}M)\rangle = 1$, de lo que se deduce que $\phi(M) = 0$.

3. Es claro usando la parte 2) del Lema 1.2.1 ya que el grupo $\langle \text{add}M\rangle$ es un subgrupo de $\langle \text{add}(M \oplus N)\rangle$.

4. Es claro ya que $\langle \text{add}M^k\rangle = \langle \text{add}M\rangle$. □

PROPOSICIÓN 2.1.7. *([HuLM])*
Si $M \in \text{mod}A$, entonces $\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1$.

Demostración:

Como $\overline{\Omega}(\langle \text{add}M\rangle)$ es un subgrupo de $\langle \text{add}\Omega(M)\rangle$ entonces usando la parte 2) del Lema 1.2.1 se tiene que $\eta_{\overline{\Omega}}(\overline{\Omega}(\langle \text{add}M\rangle)) \leq \eta_{\overline{\Omega}}(\langle \text{add}\Omega(M)\rangle)$. Por otro lado se tiene que

$$\eta_{\overline{\Omega}}(\langle \text{add}M\rangle) = \begin{cases} \eta_{\overline{\Omega}}(\overline{\Omega}(\langle \text{add}M\rangle)) + 1 \\ \text{o} \\ \eta_{\overline{\Omega}}(\overline{\Omega}(\langle \text{add}M\rangle)) \end{cases}$$

de donde luego se obtiene lo deseado. □

DEFINICIÓN 2.1.8. *Definimos la* ***función ψ de Igusa-Todorov (a derecha) para*** *$M \in \text{mod}A$ como:*

$$\psi_{der}(M) = \phi_{der}(M) + \sup\left\{dp(N) : N \oplus N' = \Omega^{\phi_{der}(M)}(M) \ y \ dp(N) < \infty\right\}.$$

En caso de no haber confusión, denotaremos simplemente con ψ a la función de Igusa-Todorov. Análogamente se define ψ_{izq}.

PROPOSICIÓN 2.1.9. *([IT])*
Sean M y $N \in \text{mod}A$.

1. *Si M tiene dimensión proyectiva finita entonces $\psi(M) = dp(M)$.*

2. *$\psi(M) \leq \psi(M \oplus N)$.*

3. *$\psi(M^k) = \psi(M)$ para cualquier $k \in \mathbb{N}$.*

4. *Si N es un sumando directo de $\Omega^n(M)$ donde $n \leq \phi(M)$ y $dp(N) < \infty$, entonces $dp(N) + n \leq \psi(M)$.*

Demostración:
Las demostraciones de 1, 2 y 3 son similares a las vistas en la Proposición 2.1.6.

Veamos 4: Como N es un sumando directo de $\Omega^n(M)$ se tiene que $\Omega^{\phi(M)-n}(N)$ es un sumando directo de $\Omega^{\phi(M)}(M)$. Además como $dpN < \infty$ se tiene que $dp\Omega^{\phi(M)-n}(N) < \infty$. Por lo tanto directamente por la definición de $\psi(M)$ obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\phi(M) + dp\Omega^{\phi(M)-n}(N) \leq \psi(M)$$

y finalmente $\phi(N) + dp(N) - \phi(N) + n \leq \psi(M)$. $\square$

La demostración de la proposición que sigue es similar a la de la Proposición 2.1.7.

PROPOSICIÓN 2.1.10. *([HuLM])*
Si $M \in \text{mod}A$, entonces $\psi(M) \leq \psi(\Omega(M)) + 1$.

El siguiente teorema aparece originalmente en [IT], pero la demostración que vamos a incluir está basada en la prueba dada en [LMS], debido a que nos parece de mayor claridad.

TEOREMA 2.1.11. *([IT], [LMS])*
Sea $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ *una sucesión exacta corta de A-módulos con $dpM'' < \infty$, entonces*

$$dpM'' \leq \psi(M' \oplus M) + 1.$$

Demostración:

Sea $r = dpM''$. Como $dpM'' < \infty$ entonces $\overline{\Omega}^l([M']) = \overline{\Omega}^l([M])$ para algún $l \geq 0$. Sea $n = \text{mín}\{l : \overline{\Omega}^l([M']) = \overline{\Omega}^l([M])\}$ por lo tanto $n \leq dpM''$ y como $[M], [M'] \in \langle \text{add}(M \oplus M') \rangle$ tenemos que $n \leq \phi(M \oplus M')$. Las sizigias enésimas de nuestra sucesión exacta corta nos dan una nueva sucesión exacta corta de la siguiente forma:

$$0 \longrightarrow X \oplus P \xrightarrow{t} X \oplus Q \xrightarrow{g} \Omega^n(M'') \longrightarrow 0$$

donde P y Q son proyectivos y el mapa t está dado por la siguiente matriz

$$t = \begin{pmatrix} f & g_1 \\ g_2 & g_3 \end{pmatrix}.$$

Aplicando el Lema 1.2.1 a $f \in \text{End}(X)$, tenemos la siguiente descomposición del módulo $X = Y \oplus Z$ y sabemos que el mapa f tiene una representación matricial

$$f = \begin{pmatrix} f_{11} & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

donde el mapa α es nilpotente y el mapa f_{11} es un isomorfismo.

Dado $M \in \text{mod}A$, apliquemos el funtor $\text{Hom}(\cdot, M)$ a la sucesión exacta corta de las sizigias enésimas y obtengamos la sucesión exacta larga que sigue:

$$\text{Ext}^k(X,M) \xrightarrow{\gamma_k} \text{Ext}^k(X,M) \xrightarrow{\sigma_k} \text{Ext}^{k+1}(\Omega^n(M''),M)$$

$$\text{Ext}^{k+1}(\Omega^n(M''),M) \xrightarrow{\lambda_{k+1}} \text{Ext}^{k+1}(X,M) \xrightarrow{\gamma_{k+1}} \text{Ext}^{k+1}(X,M)$$

donde $\gamma_k = \begin{pmatrix} \delta_k & 0 \\ 0 & \beta_k \end{pmatrix}$, $\beta_k = \text{Ext}^k(\alpha, M)$, $\delta_k = \text{Ext}^k(f_{11}, M)$ y $\lambda_{k+1} = \text{Ext}^{k+1}(g, M)$. Observemos que β_k es nilpotente para todo k, ya que α lo es.

Afirmación: $dpZ < \infty$.

Como $\text{Ext}^j(\Omega^n(M''), M) = 0$ para todo $j > r-n$ tenemos que γ_k es un epimorfismo para $k > r-n-1$, por lo tanto β_k también es un epimorfismo para $k > r-n-1$ y como β_k es nilpotente entonces $\text{Ext}^k(Z, M) = 0$ para $k > r-n-1$ para todo $M \in \text{mod}A$. Por lo tanto la afirmación es cierta.

Afirmación: $dp\Omega^n(M'') \leq dpZ + 1$.

Asumamos que $\text{Ext}^{k+1}(\Omega^n(M''), M) \neq 0$. Por lo tanto tenemos que $\sigma_k \neq 0$ o $\lambda_{k+1} \neq 0$.

- Notemos que $\sigma_k \neq 0$ implica que γ_k no es un epimorfismo, y tampoco lo es β_k. Como consecuencia llegamos a que $\text{Ext}^k(Z, M) \neq 0$.
- Notemos que $\lambda_{k+1} \neq 0$ implica que γ_{k+1} no es un monomorfismo, y tampoco lo es β_{k+1}. Como consecuencia llegamos a que $\text{Ext}^{k+1}(Z, M) \neq 0$.

Por lo tanto se concluye que $\text{Ext}^{k+1}(\Omega^n(M''), M) \neq 0$ implica que $\text{Ext}^k(Z, M) \neq 0$ o $\text{Ext}^{k+1}(Z, M) \neq 0$. Por lo tanto la afirmación es válida.

Ahora usando el hecho de que Z es sumando directo de $\Omega^n(M \oplus M')$, que $dpZ < \infty$ y que $n \leq \phi(M \oplus M')$ por la Proposición 2.1.9 parte 4 tenemos que $dpZ + n \leq \psi(M \oplus M')$. Por lo que finalmente usando la última afirmación deducimos que $dp\Omega^n(M'') \leq \psi(M \oplus M') + 1$.
□

2.2. ϕ-dimensión y ψ-dimensión

DEFINICIÓN 2.2.1. *Definimos:*

1. *La **ϕ-dimensión** de un álgebra A como* $\phi \dim(A) = \sup\{\phi(M) : M \in \text{mod}A\}$.
2. *La **ψ-dimensión** de un álgebra A como* $\psi \dim(A) = \sup\{\psi(M) : M \in \text{mod}A\}$.

Estas nuevas dimensiones se relacionan de la siguiente manera con las dimensiones homológicas conocidas:

OBSERVACIÓN 2.2.2. *A partir de la definición tenemos las siguientes desigualdades entre dimensiones homológicas:*

$$\boxed{\text{fin dim}(A) \leq \phi \dim(A) \leq \psi \dim(A) \leq \text{gl dim}(A)}$$

EJEMPLO 2.2.3. *Consideremos nuevamente el álgebra $\frac{kQ}{J^2}$ donde el carcaj Q es de la siguiente forma:*

$$\begin{tikzcd} \dot{1} \arrow[r] & \dot{2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \dot{n-1} \arrow[r] & \dot{n} \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Como veremos en el Ejemplo 4.1.22, $\phi \dim(\frac{kQ}{J^2}) = n-1$ y no hay módulos con dimensión proyectiva finita que no sean proyectivos. Por lo tanto la primera desigualdad de 2.2.2 puede ser estricta.

Consideremos ahora A el álgebra de radical cuadrado nulo con el siguiente carcaj:

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n \end{tikzcd}$$

Como veremos en el Ejemplo 4.2.3 $\psi \dim A = 2n-3$ y $\phi \dim A = n-1$. Por lo tanto la segunda y la tercera desigualdades de 2.2.2 pueden ser estrictas.

Se dice que un anillo artiniano a derecha es autoinyectivo a derecha si R visto como R-módulo a derecha es inyectivo. El siguiente resultado de [HuL] caracteriza a dichos anillos.

TEOREMA 2.2.4. *([HuL]) Para un anillo artiniano R las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\phi \dim(R) = 0$.
2. $\psi \dim(R) = 0$.
3. *R es autoinyectivo a derecha.*

Como concecuencia del resultado anterior se deduce el siguiente corolario para álgebras de Artin:

COROLARIO 2.2.5. *([HuL]) Si A es un álgebra de Artin, A es autoinyectiva si y solamente si $\phi \dim(A) = 0$ si y solamente si $\psi \dim(A) = 0$.*

La siguiente proposición nos permite calcular la ϕ-dimensión de un álgebra.

PROPOSICIÓN 2.2.6. *Si A es un álgebra de Artin, entonces*

$$\phi \dim(A) = \text{mín}\{l : \overline{\Omega}|_{K_l} \textit{ es un monomorfismo}\}.$$

Demostración:

Si $\overline{\Omega}|_{K_i} : K_i \to K_{i+1}$ no es inyectiva, entonces tenemos $N_1, N_2 \in \text{mod}A$ tales que $[N_1]-[N_2] \in K_i$ es no nulo y $\overline{\Omega}([N_1] - [N_2]) = 0$. Sea $M \in \text{mod}A$ tal que $M_1, M_2 \in \text{add}M$ cumplen que $\overline{\Omega}^i([M_1] - [M_2]) = [N_1] - [N_2]$ (inclusive válido para $i = 0$). Esto implica que $\phi(M) \geq i + 1$ ya que $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^i(\langle \text{add}M\rangle)}$ no es un isomorfismo, por lo tanto $\phi \dim(A) \geq i + 1$. En particular se tiene que $\phi \dim(A) \geq \text{máx}\{l : \overline{\Omega}|_{K_l}$ no es inyectiva$\} + 1$.

Si se tiene que $\overline{\Omega}|_{K_h} : K_h \to K_{h+1}$ es inyectiva entonces $\overline{\Omega}|_{K_{h+j}} : K_{h+j} \to K_{h+j+1}$ es inyectiva para todo $j > 0$ (ver observación 2.1.3). De esto se deduce que $\phi \dim(A) \leq h$ y en particular $\phi \dim(A) \leq \text{mín}\{l : \overline{\Omega}|_{K_l}$ es inyectiva$\}$.

Finalmente como $\text{máx}\{l : \overline{\Omega}|_{K_l}$ no es inyectiva$\} + 1 = \text{mín}\{l : \overline{\Omega}|_{K_l}$ es inyectiva$\}$, se obtiene la tesis. □

2.3. Subgrupos invariantes por sizigias

En esta sección vamos a trabajar con módulos cuyos sumandos directos indescomponibles de sus sizigias también son sumandos directos del módulo original. Estos módulos nos permitirán calcular y aproximar, por ejemplo, los valores de la ϕ-dimensión y de la ψ-dimensión en las álgebras de radical cuadrado nulo y de las álgebras monomiales respectivamente.

PROPOSICIÓN 2.3.1. *Sea $M \in \text{mod}A$ tal que $\Omega(M) \in \text{add}M$, entonces*

$$\phi(M) = \text{mín}\left\{l : \overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^l\langle \text{add}M\rangle} \textit{ es un monomorfismo}\right\}.$$

Demostración:

Sopongamos que $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^l\langle \text{add}M\rangle}$ es inyectiva. Por la Observación 2.1.5 tenemos para todo $m \in \mathbb{N}$ que $\overline{\Omega}^{l+m}\langle \text{add}M\rangle$ es subgrupo de $\overline{\Omega}^l\langle \text{add}M\rangle$ entonces $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^{l+m}\langle \text{add}M\rangle}$ también es inyectiva para todo $m \in \mathbb{N}$. □

COROLARIO 2.3.2. *Sea $M \in \text{mod}A$ tal que $\Omega(M) \in \text{add}M$, entonces*

$$\phi(M) = \text{mín}\left\{l : rk(\overline{\Omega}^l|_{\langle \text{add}M\rangle}) = rk(\overline{\Omega}^{l+1}|_{\langle \text{add}M\rangle})\right\}$$

Demostración:

Es claro ya que $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^k\langle \mathrm{add}M\rangle}$ es inyectiva si y solo si $rk\left(\overline{\Omega}^k|_{\langle \mathrm{add}M\rangle}\right) = rk\left(\overline{\Omega}^{k+1}|_{\langle \mathrm{add}M\rangle}\right)$. $\square$

COROLARIO 2.3.3. *Sea $M \in \mathrm{mod}A$ tal que $\Omega(M) \in \mathrm{add}M$. Si $M = (\oplus_{i=1}^k M_i^{l_i}) \oplus (\oplus P_i^{h_i})$ es la descomposición en indescomponibles de M donde los P_i son los sumandos proyectivos, entonces $\phi(M) \leq k$.*

Demostración:

El rango del grupo abeliano $\langle \mathrm{add}M\rangle$ es k, por lo tanto si $\overline{\Omega}|_{\langle \mathrm{add}M\rangle}$ no es un isomorfismo entonces $\overline{\Omega}(\langle \mathrm{add}M\rangle)$ tiene rango menor o igual a $k-1$. Por inducción se obtiene el objetivo buscado. $\square$

COROLARIO 2.3.4. *Sea $M \in \mathrm{mod}A$ tal que $\Omega^l(M) \in \mathrm{add}N$ para algún $l \in \mathbb{N}$, siendo $N \in \mathrm{mod}A$ tal que $\Omega(N) \in \mathrm{add}N$ y $N = \oplus_{i=1}^k N_i$ es la descomposición en indescomponibles de N. Entonces si $l_0 = \min\{l : \Omega^l(M) \in \mathrm{add}N\}$ tenemos que*

$$\phi(M) \leq \phi(N) + l_0 \leq k + l_0.$$

Demostración:

Como $\Omega^{l_0}(M) \in \mathrm{add}N$, entonces $\overline{\Omega}^{l_0}\langle \mathrm{add}M\rangle \subset \langle \mathrm{add}N\rangle$. Aplicando $\overline{\Omega}^{\phi(N)}$ a la inclusión anterior se tiene que $\overline{\Omega}^{l_0+\phi(N)}\langle \mathrm{add}M\rangle \subset \overline{\Omega}^{\phi(N)}\langle \mathrm{add}N\rangle$. Como $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}}^{\phi(N)+m}\langle \mathrm{add}N\rangle$ es un monomorfismo para todo $m \in \mathbb{N}$, luego $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}}^{l_0+\phi(N)+m}\langle \mathrm{add}M\rangle$ también lo es para todo $m \in \mathbb{N}$. Así $\phi(M) \leq \phi(N) + l_0$. La otra desigualdad sigue del Corolario 2.3.3. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la hipótesis del Corolario 2.3.3 es necesaria para obtener el resultado. Si no pedimos que $\Omega(M) \in \mathrm{add}M$, el valor de $\phi(M)$ puede ser tan grande como se quiera.

EJEMPLO 2.3.5. *Consideremos el álgebra $\frac{kQ}{J^2}$ donde el carcaj Q es de la siguiente forma:*

$$\dot{1} \longrightarrow \dot{2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \dot{n-1} \longrightarrow \dot{n} \circlearrowleft$$

Claramente todo módulo es proyectivo o tiene dimensión proyectiva infinita. Ahora si consideramos el módulo $S_1 \oplus S_n$, tenemos que:

- $\Omega(S_i) = S_{i+1}$ *para* $i = 1, \ldots, n-1$
- $\Omega(S_n) = S_n$.

Luego, resulta claro que $\phi(S_1 \oplus S_n) = n-1$.

PROPOSICIÓN 2.3.6. *Sea $M \in \text{mod}A$ tal que $\Omega(M) \in \text{add}M$. Si $M = (\oplus_{i=1}^{k} M_i^{l_i}) \oplus (\oplus P_i^{h_i})$ es la descomposición en indescomponibles de M, donde los P_i son los sumandos proyectivos, entonces $\phi(M) = k$ implica que M tiene dimensión proyectiva finita (y por lo tanto $dpM = k$).*

Demostración:

<u>Afirmación:</u> El rango de $\overline{\Omega}^s(\langle \text{add}M \rangle) = k - s$ para $0 \leq s \leq k$.

El rango $rk(\langle \text{add}M \rangle) = k$, por lo tanto $rk(\overline{\Omega}^s(\langle \text{add}M \rangle)) \leq k - s$, ya que en caso contrario tendríamos que existe $0 \leq s_0 < s$ tal que $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^{s_0}(\langle \text{add}M \rangle)}$ es un isomorfismo sobre la imagen y por lo visto en la Proposición 2.3.1, $\phi(M) \leq s_0 < k$.

Por otro lado si $rk(\overline{\Omega}^s(\langle \text{add}M \rangle)) \geq rk(\overline{\Omega}^{s+1}(\langle \text{add}M \rangle)) + 2$ existe $s + 1 \leq s_0 < k$ tal que $\overline{\Omega}|_{\overline{\Omega}^{s_0}(\langle \text{add}M \rangle)}$ es un isomorfismo sobre la imagen y nuevamente usando la Proposición 2.3.1, $\phi(M) \leq s_0 < k$.

Finalmente como el rango de los grupos $\overline{\Omega}^s(\langle \text{add}M \rangle) = k - s$ para $0 \leq s \leq k$ se tiene que $\Omega^k(M)$ tiene que ser un A-módulo proyectivo, por lo que $dp(M) = k$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.7. *Sea $M \in \text{mod}A$ tal que $\Omega^n(M) \cong M$. Si $M = \oplus_{i=1}^{k} M_i$ es la descomposición en indescomponibles de M, donde $dpM_i > n$ para todo $i = 1, \ldots, k$, entonces $\phi(M) = 0$ y $dpM_i = \infty$ para todo $i = 1, \ldots, k$.*

Demostración:

Como $\Omega^n(M) \cong M$ se tiene que:

1. Si algún $\Omega^n(M_{i_0}) = 0$, entonces $dpM_i \leq n$ lo que es absurdo.
2. Si algún $\Omega^n(M_{i_0})$ no es indescomponible, entonces hay algún $1 \leq j_0 \leq k$ tal que $\Omega^n(M_{j_0}) = 0$, por lo tanto también es absurdo.

De esto se deduce que $\Omega^n(M_i) = M_{\sigma(i)}$, siendo $\sigma : \{1, \ldots, k\} \to \{1, \ldots, k\}$ una permutación. Por lo anterior se obtiene que $\overline{\Omega}^n|_{\langle \text{add}M \rangle} : \langle \text{add}M \rangle \to \langle \text{add}M \rangle$ es un isomorfismo, en consecuencia $\overline{\Omega}|_{\langle \text{add}M \rangle}$ también lo es. $\square$

PROPOSICIÓN 2.3.8. *Si $\overline{\Omega}^k|_{\langle \text{add}M \rangle} : \langle \text{add}M \rangle \to \langle \text{add}\Omega^k(M) \rangle$ es un epimorfismo y $rk(\langle \overline{\Omega}^k(\text{add}M) \rangle) < rk(\langle \overline{\Omega}^{k-1}(\text{add}M) \rangle)$ entonces*

$$\phi(M) = \phi(\Omega^k(M)) + k.$$

Demostración:

Como $\overline{\Omega}^k|_{\langle \text{add}M\rangle} : \langle \text{add}M\rangle \to \langle \text{add}\Omega^k(M)\rangle$ es un epimorfismo, entonces tenemos que $\overline{\Omega}^k(\text{add}M) = \langle \text{add}\Omega^k(M)\rangle$. Además como tenemos que $rk(\langle \overline{\Omega}^k(\langle \text{add}M\rangle)\rangle) < rk(\langle \overline{\Omega}^{k-1}(\text{add}M)\rangle)$ resulta que $\overline{\Omega}|_{\langle \overline{\Omega}^{k-1}(\text{add}M)\rangle} : \langle \overline{\Omega}^{k-1}(\text{add}M)\rangle \to \langle \overline{\Omega}^k(\text{add}M)\rangle$ no es un isomorfismo. Por lo anterior, dado $j \in \mathbb{N}$, es claro que $\overline{\Omega}|_{\langle \overline{\Omega}^{k+j}(\text{add}M)\rangle}$ es un isomorfismo si y solamente si $\overline{\Omega}|_{\langle \overline{\Omega}^{j}(\text{add}\Omega^k(M))\rangle}$ es un isomorfismo, de lo que se deduce que $\phi(M) = \phi(\Omega^k(M)) + k$. $\square$

Un caso particular de lo anterior es el siguiente corolario:

COROLARIO 2.3.9. *Sea $M = \oplus_{i=1}^t M_i^{l_i}$ la descomposición en indescomponibles de M. Supongamos que $\Omega^k(M_i)$ es indescomponible para todo $1 \le i \le t$ y que $rk(\langle \overline{\Omega}^k(\text{add}M)\rangle) < rk(\langle \overline{\Omega}^{k-1}(\text{add}M)\rangle)$. Entonces $\phi(M) = \phi(\Omega^k(M)) + k$.*

2.4. Módulos ϕ-testigos

El objetivo de esta sección es ver la cantidad mínima de sumandos no isomorfos que aparecen en los A-módulos M cuya $\phi(M) = \phi\dim(A)$.

DEFINICIÓN 2.4.1. *Sea A un álgebra con $\phi\dim(A) = l < \infty$. Decimos que el A-módulo M es:*

- *un **ϕ-testigo** si $\phi(M) = l$,*
- *un **ϕ-testigo minimal** si M es un ϕ-testigo y $rk\langle \text{add}M\rangle$ es mínimo.*

PROPOSICIÓN 2.4.2. *Dada un álgebra A, entonces* $\text{fin}\dim(A) = \phi\dim(A) < \infty$ *si y solamente si hay un A-módulo indescomponible M que es ϕ-testigo.*

Demostración:

Es claro ya que si M es un ϕ-testigo indescomponible, entonces $\phi(M) = dp(M) < \infty$, pues $dp(M) < \infty$. $\square$

Como vimos en el Ejemplo 2.3.5 la ϕ-dimensión de un álgebra y su dimensión finitista no siempre coinciden

DEFINICIÓN 2.4.3. *Dado un A-módulo M con descomposición en indescomponibles $M = \oplus_{i=1}^k M_i^{l_i}$ definimos el grafo $\Gamma(M)$ de la siguiente forma:*

- *$V(\Gamma(M)) = \{M_i\}_{i\in k}$.*
- *$\{M_i, M_j\} \in A(\Gamma(M))$ si $\phi(M_i \oplus M_j) \ge 1$.*

PROPOSICIÓN 2.4.4. *Las componentes conexas de $\Gamma(M)$ para cualquier A-módulo M son grafos completos.*

Demostración:

Supongamos que $M = \oplus_{i=1}^{k} M_i^{l_i}$ es la descomposición de M en indescomponibles, donde $k \geq 3$. Consideremos M_{i_1}, M_{i_2} y M_{i_3} que están en la misma componente conexa de $\Gamma(M)$ tales que $\{M_{i_1}, M_{i_2}\}$ y $\{M_{i_2}, M_{i_3}\}$ son aristas de $\Gamma(M)$. Como $\{M_{i_1}, M_{i_2}\}$ es una arista de $\Gamma(M)$ por definición tenemos que $\phi(M_{i_1} \oplus M_{i_2}) \geq 1$ por lo tanto, a partir de $k_0 \geq 1$ sabemos que el rango de $\overline{\Omega}^k \langle addM_{i_1} \oplus M_{i_2} \rangle \leq 1$ para todo $k \geq k_0$ por lo que tendríamos que $\overline{\Omega}^k[M_{i_1}] = \overline{\Omega}^k[M_{i_2}]$ para todo $k \geq k_0$. Análogamente también tendríamos que $\overline{\Omega}^k[M_{i_2}] = \overline{\Omega}^k[M_{i_3}]$ para todo $k \geq k_0' \geq 1$, juntando las dos afirmaciones se deduce que $\overline{\Omega}^k[M_{i_1}] = \overline{\Omega}^k[M_{i_3}]$ para todo $k \geq k_2$ para $k_2 \geq 1$ por lo que concluímos que $\phi(M_{i_1} \oplus M_{i_3}) \geq 1$ y finalmente tenemos que $\{M_{i_1}, M_{i_3}\}$ también es una arista de $\Gamma(M)$. $\square$

PROPOSICIÓN 2.4.5. *Sea $M \in \operatorname{mod} A$ tal que $\phi(M) = l$. Supongamos que $M = \oplus_{i=1}^{k} M_i^{l_i}$ es la descomposición en indescomponibles de M, entonces si $\Gamma(M)$ es un grafo conexo existe un sumando directo de M de la forma $M_{i_1} \oplus M_{i_2}$ tal que $\phi(M_{i_1} \oplus M_{i_2}) = l$.*

Demostración:

Supongamos que para todo módulo de la forma $M_i \oplus M_j$ tenemos que $\phi(M_i \oplus M_j) < l$. Sea l' =máx$\{\phi(M_i \oplus M_j)$ con $i \neq j\} < l$, por lo anterior se tiene que $rk(\overline{\Omega}^{l'} \langle \operatorname{add} M \rangle) \leq 1$. Como $\phi(M) = l > l'$ se cumple que $rk(\overline{\Omega}^{l} \langle \operatorname{add} M \rangle) = 0$. Esto implica que M sea un módulo de dimensión proyectiva finita y en particular $dp(M) = \phi(M) = l$.

Como sabemos que $dp(M) = \max\{dp(M_i)$ con $i = 1, \ldots, k\}$, finalmente tenemos para algún par (i, j) que $dp(M_i \oplus M_j) = \phi(M_i \oplus M_j) = l$ lo que es absurdo. $\square$

2.5. Valores de la función ϕ

LEMA 2.5.1. *Si $[M] \in K_1$ entonces para todo submódulo $M' \subseteq M$, $[M'] \in K_1$.*

Demostración:

Si $M \in K_1$ entonces existe un módulo N tal que $\Omega(N) = M$, o sea tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

donde P es un módulo proyectivo. Sea $M' \subseteq M$, como tenemos la composición de las inclusiones $M' \hookrightarrow M \hookrightarrow P$ podemos considerar la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow P \longrightarrow \frac{P}{M'} \longrightarrow 0$$

de lo que se deduce la tesis. □

COROLARIO 2.5.2. *Si $[M] \in K_1$ entonces si M' sumando directo de M, $[M']$ está en K_1.*

PROPOSICIÓN 2.5.3. *Si $\phi\dim(A) = l > 0$ entonces para todo módulo N tal que $\phi(N) = l$ se tiene que $\phi(\Omega(N)) = l - 1$.*

Demostración:

Sea N un módulo tal que $\phi(N) = l > 0$, entonces sabemos por la Proposición 2.1.7 que $\phi(\Omega(N)) \geq l - 1$.

Si suponemos que $\phi(\Omega(N)) > l-1$, entonces por ser $\phi\dim(A) = l$ la única opción posible es que $\phi(\Omega(N)) = l$. Sea $\oplus_i^s M_i^{k_i} = \Omega(N)$ la descomposición en sumandos indescomponibles. Como cada M_i está en K_1, por el Corolario 2.5.2, tenemos que existen módulos N_i tales que $\Omega(N_i) = M_i$. Observese que los módulos N_i pueden ser considerados indescomponibles, por lo tanto si consideramos el módulo $N' = \oplus_i^s N_i$ tendríamos que $\phi(N') = l + 1$ lo que es absurdo. □

2.6. Extensiones por un punto

En esta sección veremos qué relación hay entre la ϕ-dimensión de un álgebra A y la ϕ-dimensión de la extensión por un punto B.

PROPOSICIÓN 2.6.1. *Si $\phi\dim(A) = k$ entonces*

$$k \leq \phi\dim(B) \leq k + 1.$$

Demostración:

Sea M un A-módulo tal que $\phi_A(M) = k$, considerando a M como un B-módulo, se tiene también que comparten la misma resolución proyectiva como A-módulo o B-módulo, por lo tanto también tenemos que $\phi_B(M) = k$ (ver Observación 1.3.13). Por lo visto antes tenemos probada la desigualdad $k \leq \phi\dim(B)$.

Sea ahora N un B-módulo. Al considerar al B-módulo $\Omega(N) \in \text{mod}A$. Se tiene que $\phi_B(\Omega(N)) \leq k$ por lo visto en el párrafo anterior y por lo tanto $\phi_B(N) \leq k + 1$. Finalmente obtenemos la desigualdad $\phi\dim(B) \leq k + 1$. □

COROLARIO 2.6.2. *Si* $\phi\dim(A) = k$, *entonces* $\phi\dim(B) = k + 1$ *si y solamente si hay un* B*-módulo* M *tal que* $\phi_A(\Omega_B(M)) = k$.

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $M \in \mathrm{mod}B$ tal que $\phi_B(M) = k + 1$. Por lo visto en la Proposición 2.5.3 y en la demostración de la Proposición 2.6.1, se deduce que $\phi_A(\Omega(M)) = \phi_B(\Omega(M)) = k$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $M \in \mathrm{mod}B$ tal que $\phi_A(\Omega_B(M)) = k$ y sea $\Omega_B(M) = \oplus_{i=1}^{t} N_i^{l_i}$ la descomposición en indescomponibles de $\Omega_B(M)$ en $\mathrm{mod}B$ (que también lo es en $\mathrm{mod}A$). Por lo visto en el Corolario 2.5.2, tenemos que existen $M_i \in \mathrm{mod}B$ tales que $\Omega_B(M_i) = N_i$ de aquí que $\phi_B((\oplus_{i=1}^{t} M_i))) = k + 1$. $\square$

2.7. Igualdad entre ϕ y ψ

El objetivo de esta sección es ver en que condiciones las funciones ψ y ϕ coinciden.

PROPOSICIÓN 2.7.1. $\phi = \psi$ *si y solamente si para cada módulo indescomponible* M *con* $dp(M) = \infty$, $\Omega(M)$ *no tiene sumandos directos con dimensión proyectiva finita.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea M un módulo indescomponible con $dpM = \infty$ tal que $0 < dpN < \infty$ siendo $N \oplus N' = \Omega(M)$. Consideremos $M \oplus \overline{N}$, siendo $\overline{N}$ un módulo con $dp\overline{N} = 1$ (existe pues $dpN > 0$). Por esto tenemos que $\phi(M \oplus \overline{N}) = 1$ y $\psi(M \oplus \overline{N}) \geq \phi(M \oplus \overline{N}) + dp(N) = 1 + dp(N) > 1$ lo que es absurdo.

($\Leftarrow$) Sea $M \in \mathrm{mod}A$. Tenemos dos opciones:

1. $dpM < \infty$ o
2. $dpM = \infty$.

1. En este caso por las Proposiciones 2.1.6 y 2.1.9 parte 1) tenemos que $\phi(M) = \psi(M) = dp(M)$.
2. Descompongamos $M = M_1 \oplus M_2$ donde M_1 tiene todos los sumandos directos con dimensión proyectiva finita y M_2 tiene todos los sumandos directos con dimensión proyectiva infinita. Nuevamente por la Proposiciones 2.1.6 parte 3) tenemos que $\phi(M) \geq \phi(M_1) = dp(M_1)$. Por otro lado $\Omega^k(M_2)$ no tiene sumandos directos con dimensión proyectiva finita para ningún $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por la definición de la función ψ se deduce que $\phi(M) = \psi(M)$. $\square$

2.8. Álgebras monomiales

En esta sección veremos el primer ejemplo de álgebras cuya ϕ-dimensión es finita. Este es el caso de las álgebras monomiales.

DEFINICIÓN 2.8.1. *Decimos que un álgebra A es* ***monomial*** *si $A \cong \frac{\Bbbk Q}{I}$ donde I es un ideal admisible generado por caminos.*

NOTACIÓN 2.8.2. *Dado el carcaj Q, denotaremos con $\mathbb{P}^{\geq 1}$ a los caminos de longitud mayor o igual a 1.*

El siguiente teorema se encuentra en [Zi], donde la autora demuestra que la fin dim para las álgebras monomiales es finita.

TEOREMA 2.8.3. *([Zi]) Sea A un álgebra monomial de dimensión finita. Entonces todo módulo de K_t con $t \geq 2$ es suma directa de ideales de A generados por caminos de longitud mayor o igual a* 1.

COROLARIO 2.8.4. *Si A es un álgebra monomial entonces $\phi\dim(A) \leq \dim_k A - n + 2$, siendo n la cantidad de vértices de Q.*

Demostración:

Dado un A-módulo M, $\Omega(M)$ es un submódulo de un módulo proyectivo. Por el Teorema 2.8.3 tenemos que $\Omega^2(M)$ es suma directa de ideales de A generados por caminos no nulos de Q de longitud mayor o igual a 1. Llamemos $N = \oplus_{p \in \mathbb{P}^{\geq 1}} \langle p \rangle$. Claramente $rk(\langle \mathrm{add} N \rangle) = \dim_{\Bbbk}(A) - n$. Ya que $\Omega(N) \in \mathrm{add} N$ por el Teorema 2.8.3, aplicando la Proposición 2.3.3 a N tenemos que $\phi(N) \leq \dim_{\Bbbk}(A) - n$. Ahora como $\Omega^2(M)$ es sumando directo de N, tenemos que $\phi(\Omega^2(M)) \leq \phi(N) \leq \dim_{\Bbbk}(A) - n$. Finalmente por la Proposición 2.1.7 se deduce que $\phi(M) \leq \dim_{\Bbbk} A - n + 2$. $\square$

2.9. Ejemplos

A continuación ofrecemos un ejemplo de cálculo de la $\phi\dim$ para un álgebra monomial.

EJEMPLO 2.9.1. *Sea $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$ donde Q es un carcaj que tiene la siguiente forma*

$$\begin{tikzcd} \dot{1} \arrow[r, bend left, "\alpha"] & \dot{2} \arrow[l, bend left, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y el ideal $I = \langle \alpha\beta\alpha \rangle$.

Ya que los proyectivos indescomponibles son

$$P(1) = \begin{tikzcd} \dot{\Bbbk}^2 \arrow[r, bend left, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}"] & \dot{\Bbbk} \arrow[l, bend left, "\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}"] \end{tikzcd}$$

$$P(2) = \begin{tikzcd} \dot{\Bbbk}^2 \arrow[r, bend left, "\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}"] & \dot{\Bbbk}^2 \arrow[l, bend left, "\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}"] \end{tikzcd}$$

los módulos que están en K_1 tienen que tener longitud de Loewy menor o igual a 3. Por otra parte, por el Teorema 2.8.3, tenemos que $K_2 \subset \langle \mathrm{add} M \rangle$ donde

$$M = S_1 \oplus S_2 \oplus \begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} & & 2 \\ & 1 & \\ 2 & & \end{smallmatrix}.$$

Esta notación indica las series de composición del módulo en orden ascendente (1 indica al simple S_1 y 2 al simple S_2) y los determina univocamente, así por lo tanto:

- $\beta A = \begin{smallmatrix} & & 2 \\ & 1 & \\ 2 & & \end{smallmatrix}$,
- $\alpha A = \begin{smallmatrix} & 1 \\ 2 & \end{smallmatrix}$,
- $\beta\alpha A = \begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}$,

y como $\phi(M) = 2$ se tiene que $\phi \dim A \leq 4$.

Por otro lado $Soc(P_1) = Soc(P_2) = S_1$, lo que implica que $K_1 = \langle \{[S_1], [\begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}]\} \rangle$ debido a que estos son los únicos módulos indescomponibles de longitud de Loewy 2 con zócalo S_1, luego fácilmente se deduce que $K_2 = \langle [\begin{smallmatrix} & 2 \\ 1 & \end{smallmatrix}] \rangle$. Como consecuencia de lo último finalmente se tiene $\phi \dim A = 2$

El siguiente es un ejemplo de cálculo de la ϕ-dimensión en un álgebra que no es monomial.

EJEMPLO 2.9.2. *Consideremos el álgebra $\frac{\Bbbk Q}{I}$ donde Q es un carcaj de la forma:*

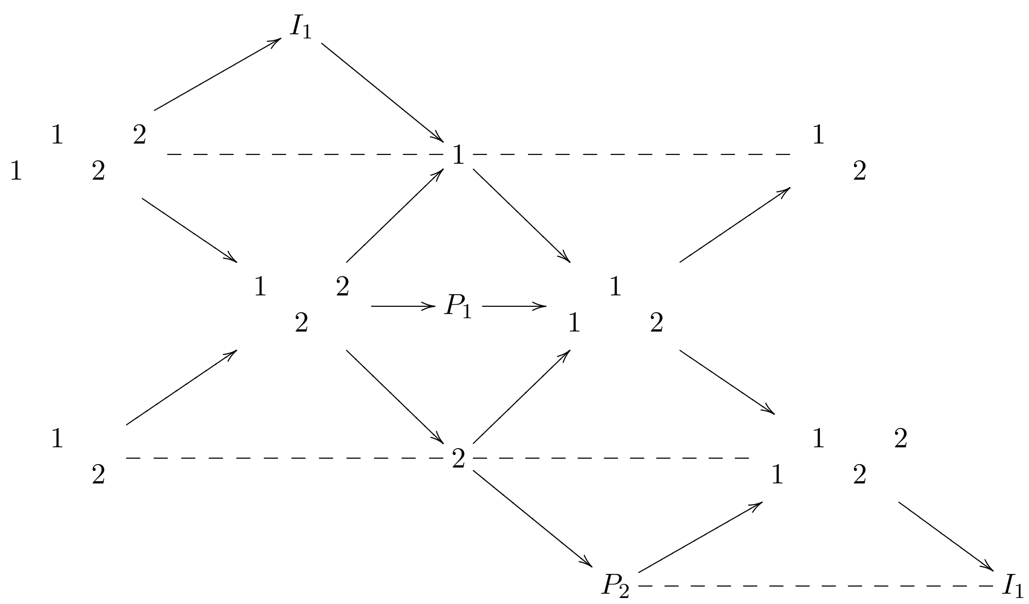
$$\begin{tikzcd} \dot{1} \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & \dot{2} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y el ideal I es generado por $\{\alpha^2, \beta^2, \gamma\alpha - \beta\gamma\}$.

Los proyectivos indescomponibles son de la forma:

- $P(1) = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$,
- $P(2) = \begin{smallmatrix} & 2 \\ 2 & \end{smallmatrix}$.

Su carcaj de Auslander-Reiten (ver [ARS] Chapter IV y [ASS] Chapter VII) tiene la siguiente forma:



Por lo tanto los únicos submódulos indescomponibles de módulos proyectivos son:

- $M_1 = 2$,
- $M_2 = \begin{smallmatrix} 1 & \\ & 2 \end{smallmatrix}$,
- $M_3 = \begin{smallmatrix} 1 & & 2 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$.

Como además tenemos las siguientes sucesiones exactas:

- $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow P_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$
- $0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow P_1 \oplus P_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow 0$

- $0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$

deducimos que $\phi\,\dim(A) = 1$ *debido a que* $K_1 = \langle\{M_1, M_2, M_3\}\rangle$, $\overline{\Omega}|_{K_1} = 1_{K_1}$, *y además* $\phi(S_1 \oplus M_3) = 1$.

Capítulo 3

Eslabones

En este capítulo se exhibirá una forma equivalente para definir la función ϕ de Igusa-Todorov. Como aplicación veremos que bajo ciertas condiciones la ϕ-dimensión es estrictamente mayor a la dimensión finitista.

3.1. Divisiones

NOTACIÓN 3.1.1. *Sea A una R álgebra de Artin. Denotaremos con $\mathcal{C}_A$ a la categoría abeliana de todos los funtores R-lineales $F : \mathrm{mod}A \to \mathrm{mod}R$.*

La siguiente definición se puede encontrar en ([FLM])

DEFINICIÓN 3.1.2. *Sea A un álgebra de Artin, d un entero positivo y M un A-módulo a derecha. Un par (X, Y) de elementos de $\mathrm{add}M$ es llamado una (r, E, d)-división de M si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $\mathrm{add}X \cap \mathrm{add}Y = \{0\}$.
- $\mathrm{Ext}^d_A(X, \cdot) \ncong \mathrm{Ext}^d_A(Y, \cdot)$ *en* $\mathcal{C}_A$.
- $\mathrm{Ext}^{d+1}_A(X, \cdot) \cong \mathrm{Ext}^{d+1}_A(Y, \cdot)$ *en* $\mathcal{C}_A$.

El siguiente teorema nos da una forma alternativa para poder calcular la ϕ-dimensión de un álgebra:

TEOREMA 3.1.3. *([FLM]) Sea A una R-álgebra de artin y $M \in \mathrm{mod}A$, entonces*

$$\phi(M) = \text{máx}\left\{\{d \in \mathbb{N}, \ \textit{hay una } (r, E, d)\textit{-división de } M\} \cup 0\right\}.$$

Análogamente podemos dar una definición similar a la Definición 3.1.2 utilizando el funtor Tor.

DEFINICIÓN 3.1.4. *Sea A un álgebra de Artin, d un entero positivo y $M \in \mathrm{mod}A$. Un par (X,Y) de elementos de $\mathrm{add}M$ es llamado una (r,T,d)-división de M si se satisfacen las siguientes condiciones:*

- $\mathrm{add}X \cap \mathrm{add}Y = \{0\}$.
- $\mathrm{Tor}_d^A(X,\cdot) \ncong \mathrm{Tor}_d^A(Y,\cdot)$ *en* $\mathcal{C}_A$.
- $\mathrm{Tor}_{d+1}^A(X,\cdot) \cong \mathrm{Tor}_{d+1}^A(Y,\cdot)$ *en* $\mathcal{C}_A$.

COROLARIO 3.1.5. *Sea A una R-álgebra de artin y M un A-módulo a derecha, entonces*

$$\phi(M) = \max\{\{d \in \mathbb{N},\ \textit{hay una } (r,T,d)\textit{-división de } M\} \cup 0\}.$$

Demostración:

Afirmación Si (X,Y) una (r,E,d)-división entonces (X,Y) es una (r,T,d)-división.

1. $\mathrm{Tor}_d^A(X,\cdot) \ncong Tor_d^A(Y,\cdot)$ en $\mathcal{C}_A$.

   Supongamos por absurdo que $\mathrm{Tor}_d^A(X,\cdot) \cong \mathrm{Tor}_d^A(Y,\cdot)$ en $\mathcal{C}_A$, usando la dualidad D_A tenemos $\mathrm{Tor}_d^A(X,D_A(\cdot)) \cong \mathrm{Tor}_d^A(Y,D_A(\cdot))$. Ahora por el Corolario 1.3.4 tenemos que $D_A(\mathrm{Ext}_A^d(X,(\cdot))) \cong D_A(\mathrm{Ext}_A^d(Y,(\cdot)))$ y utilizando nuevamente la dualidad D_A obtenemos:

   $$\mathrm{Ext}_A^d(X,(\cdot)) \cong D_A^2(\mathrm{Ext}_A^d(X,(\cdot))) \cong D_A^2(\mathrm{Ext}_A^d(Y,(\cdot))) \cong \mathrm{Ext}_A^d(Y,(\cdot)).$$

2. $\mathrm{Tor}_{d+1}^A(X,\cdot) \cong \mathrm{Tor}_{d+1}^A(Y,\cdot)$ en $\mathcal{C}_A$.

   Sabemos que $\mathrm{Ext}_A^{d+1}(X,(\cdot)) \cong \mathrm{Ext}_A^{d+1}(Y,(\cdot))$, aplicando la dualidad D_A tenemos que $D_A(\mathrm{Ext}_A^{d+1}(X,(\cdot))) \cong D_A(\mathrm{Ext}_A^{d+1}(Y,(\cdot)))$ y usando nuevamente el Corolario 1.3.4 obtenemos $\mathrm{Tor}_{d+1}^A(X,D_A(\cdot)) \cong \mathrm{Tor}_{d+1}^A(Y,D_A(\cdot))$. Utilizando la dualidad D_A finalmente se llega a:

   $$\mathrm{Tor}_{d+1}^A(X,\cdot) \cong \mathrm{Tor}_{d+1}^A(X,D_A^2(\cdot)) \cong \mathrm{Tor}_{d+1}^A(Y,D_A^2(\cdot)) \cong \mathrm{Tor}_{d+1}^A(Y,\cdot).$$

3.2. Eslabones

DEFINICIÓN 3.2.1. *Decimos que un módulo M con $dp(M) < \infty$ es un* ***eslabón*** *si para todo submódulo $0 \neq N \subsetneq M$ tenemos que $dp(N) = \infty$.*

OBSERVACIÓN 3.2.2. *Dada A un álgebra de artin.*

- *Si S es un A-módulo simple con $dp(S) < \infty$, entonces S es un eslabón.*

- *Todo eslabón es indescomponible.*

PROPOSICIÓN 3.2.3. *Dada un álgebra de artin A, si $d < \infty$ es una dimensión proyectiva posible (existe $M \in \operatorname{mod} A$ tal que $dp(M) = d$), existe algún eslabon con $dp(M) = d$. En particular existen A-módulos que son eslabones con $dpM = d$ siendo $d = \operatorname{fin}\dim(A)$.*
Demostración:

Sea M un módulo tal que $dpM = d$ y con longitud $l(M) = s$ mínima. Si M no es un eslabón, quiere decir que existe un submódulo $0 \neq N \subsetneq M$ con $dpN < \infty$. Por lo tanto tenemos una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

donde cada módulo tiene dimensión proyectiva finita, y además $dpM = \max\{dpN, dp\frac{M}{N}\}$. Como tenemos que $l(N) < s$ y $l(\frac{M}{N}) < s$, uno de los dos modulos tiene dimensión proyectiva igual a d y las longitudes son menores a s, tendríamos un submódulo de longitud menor y de dimensión proyectiva finita. $\square$

PROPOSICIÓN 3.2.4. *Si* $\operatorname{fin}\dim(A) > 0$ *y hay un eslabon M tal que*

1. *M no es simple y*
2. *$dp(M) = \operatorname{fin}\dim(A)$,*
   entonces $\operatorname{fin}\dim(A) < \phi\dim(A)$.

Demostración:

Sea $M \in \operatorname{mod} A$ un eslabón con $dpM = \operatorname{fin}\dim(A) = d \geq 1$ que no es simple. Consideremos N un submódulo no trivial de M. Como M es un eslabón entonces $dp(N) = dp(\frac{M}{N}) = \infty$. A la sucesión exacta siguiente:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

le aplicamos el functor $\operatorname{Hom}(\cdot, X)$ con $X \in \operatorname{mod} A$ tal que $\operatorname{Ext}^d_A(M, X) \neq 0$. De esto obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$\operatorname{Ext}^d(M,X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^d(N,X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d+1}(\tfrac{M}{N},X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d+1}(M,X)$$

$$\operatorname{Ext}^{d+1}(M,X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d+1}(N,X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d+2}(\tfrac{M}{N},X) \longrightarrow \operatorname{Ext}^{d+2}(M,X)$$

Como $\operatorname{Ext}^{k+1}(\frac{M}{N}, X) \cong \operatorname{Ext}^k(\Omega(\frac{M}{N}), X)$ para todo $k \geq 1$ por el Lema 1.1.17, $\operatorname{Ext}^k(M,X) = 0$ si $k \geq d+1$ y $\operatorname{Ext}^d(M,X) \neq 0$ tenemos que $\operatorname{Ext}^d(N,X) \ncong \operatorname{Ext}^d(\Omega(\frac{M}{N}), X)$ y $\operatorname{Ext}^{d+1}(N,X) \cong \operatorname{Ext}^{d+1}(\Omega(\frac{M}{N}), X)$ con $X \in \operatorname{mod} A$ donde el isomorfismo es funtorial. Usando ahora el Teorema 3.1.3 se obtiene $\phi(N \oplus \Omega(\frac{M}{N})) \geq d+1$. $\square$

COROLARIO 3.2.5. *Si* fin $\dim(A) = \phi \dim(A) > 0$ *entonces todo eslabón con dimensión proyectiva maximal es simple.*

En forma complementaria a la Proposición 3.2.4 tenemos el siguiente resultado:

PROPOSICIÓN 3.2.6. *Si todo eslabón en* mod$A$ *es simple, entonces* fin $\dim(A) \leq t$ *siendo* $\{S_1, \ldots, S_t\}$ *el conjunto de todos los módulos que son eslabones.*

Demostración:

Afirmación: Si M es un A-módulo tal que $dpM < \infty$ entonces cada módulo simple en su serie de composición es un eslabón.

Hagamos la prueba por inducción en la longitud.

1. Claramente si la longitud es 1, M es simple y tiene dimensión proyectiva finita, por lo tanto es un eslabón.

2. Supongamos que el A-módulo M no es simple, entonces como no es un eslabón existe un submódulo $0 \neq N \subsetneqq M$ con $dpN < \infty$. Por lo que tenemos la sucesión exacta corta de módulos de dimensión proyectiva finita que sigue:

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

donde las longitudes de los A-módulos N y $\frac{M}{N}$ son menores estrictas a la longitud del A-módulo M. Si S es un simple que está en la serie de composición de N o $\frac{M}{N}$, por hipótesis inductiva, S es un eslabon. Por lo tanto como todo simple en la serie de composoción de M es parte de la serie de composicion de N o de la de $\frac{M}{N}$ se concluye la afirmación.

Como todo módulo de dimensión proyectiva finita tiene únicamente eslabones como simples de la serie de composición, se deduce que $dpM \leq \text{máx}\{dpS_1, \ldots dpS_t\}$. Ahora por la Proposición 3.2.3 tenemos que $\text{máx}\{dpS_1, \ldots dpS_t\} \leq t$, ya que solamente hay a lo sumo t posibles dimensiones proyectivas finitas, lo que completa la prueba.$\square$

Capítulo 4

Álgebras de radical cuadrado nulo

Las $\Bbbk$-álgebras A que consideraremos en este capítulo serán siempre de la forma $\frac{\Bbbk Q}{F^2}$, donde Q denota un carcaj conexo, $\Bbbk$ un cuerpo y F es el ideal generado por las flechas de Q. Además consideraremos $n = |Q_0|$.

Veremos en este capítulo condiciones necesarias en el carcaj para que las álgebras de radical cuadrado nulo alcancen su máxima ϕ-dimensión ($\phi\dim(A) = n$) y una familia infinita de álgebras que alcanzan dicho máximo. También describiremos completamente cuáles son las álgebras de radical cuadrado nulo que alcanzan ψ-dimensión máxima ($\psi\dim(A) = 2n-3$).

Parte de este capítulo conforma el trabajo [LMM].

NOTACIÓN 4.0.7. *Denotaremos con:*

- $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ *al conjunto de los módulos simples de* A.
- $\mathcal{S}_I$ *al conjunto de los módulos simples inyectivos.*
- $\mathcal{S}_P$ *al conjunto de los módulos simples proyectivos.*
- $\mathcal{S}_D = \mathcal{S} \setminus (\mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_P)$.

4.1. Función ϕ de Igusa-Todorov

DEFINICIÓN 4.1.1. *Dado Q un carcaj finito, llamamos* ***corazón*** *de Q al subcarcaj pleno de Q determinado por los vértices que aparecen en la intersección del soporte de $\Omega^n(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S)$ con el soporte de $\Omega^{-n}(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S)$. Lo denotaremos $C(Q)$.*

DEFINICIÓN 4.1.2. *Llamamos* ***miembro*** *de Q al subcarcaj pleno de Q determinado por los vértices que no están en el corazón y lo denotaremos $M(Q)$.*

EJEMPLO 4.1.3. *Sea Q el siguiente carcaj*

$$\begin{tikzcd}
 & & & \dot{4} \arrow[r] & \dot{6} \arrow[dr] & & & \\
\dot{1} \arrow[r] & \dot{2} \arrow[r] & \dot{3} \arrow[ur] & & & \dot{8} \arrow[r] \arrow[dl] & \dot{9} \arrow[r] & \dot{10} \\
 & & & \dot{5} \arrow[ul] & \dot{7} \arrow[l] & & &
\end{tikzcd}$$

entonces su miembro y su corazón son respectivamente:

- $M(Q) = \qquad \dot{1} \longrightarrow \dot{2} \qquad\qquad \dot{9} \longrightarrow \dot{10}$
- $C(Q) =$ $$\begin{tikzcd}
 & \dot{4} \arrow[r] & \dot{6} \arrow[dr] & \\
\dot{3} \arrow[ur] & & & \dot{8} \arrow[dl] \\
 & \dot{5} \arrow[ul] & \dot{7} \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

OBSERVACIÓN 4.1.4. *Dado S_v, el A-módulo simple asociado al vértice v, es claro que*

$$\Omega(S_v) = \bigoplus_{w:v\to w} S_w.$$

PROPOSICIÓN 4.1.5. *El carcaj Q tiene miembro si y solamente si A tiene un proyectivo simple o un inyectivo simple.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que A no tiene ni proyectivo simple ni inyectivo simple. Dicho carcaj Q asociado al álgebra A no puede tener ni pozos ni fuentes, por lo tanto para cada vértice v de Q hay flechas que salen de v y flechas que llegan a v. Como podemos construir caminos en $\Bbbk Q$ de longitud $n = |Q_0|$ llegando a todo vértice de Q y saliendo de cada vértice de Q_0 tendríamos que $C(Q) = Q$, lo que sería absurdo.

($\Leftarrow$) Supongamos que A tiene un simple inyectivo S_{i_0} (el caso de simple proyectivo es análogo). Como no hay flechas de Q que lleguen a él, tenemos que $\Omega(S_j)$ no tiene como sumando directo a S_{i_0} para todo $j \in Q_0$. Por lo tanto i_0 no está en el soporte de $\Omega^n(\oplus_{S\in\mathcal{S}} S)$.
$\square$

DEFINICIÓN 4.1.6. *Dado el carcaj Q, decimos que Q', subcarcaj pleno de Q, es un* ***subcorazón final*** *de Q si es minimal en la familia de las subcategorías de Q cerradas por sucesores.*

OBSERVACIÓN 4.1.7. *Sea Q un carcaj, entonces:*

1. *Q tiene un subcorazón final propio si y solamente si existe un subcarcaj propio pleno Q' tal que $\Omega(\oplus_{i\in Q'_0} S_i) \in \operatorname{add}(\oplus_{i\in Q'_0} S_i)$.*
2. *Si Q'_0 es un subcorazón final toda flecha que sale de Q'_0 llega a Q'_0.*

Demostración:

Es claro ya que Q' es una subcategoría propia de Q y es cerrada por sucesores. □

También tenemos la noción dual a 4.1.6

DEFINICIÓN 4.1.8. *Dado el carcaj Q, decimos que Q', subcarcaj pleno de Q, es un* ***subcorazón inicial*** *de Q si es minimal en la familia de las subcategorías de Q cerradas por antecesores.*

En el siguiente ejemplo tenemos que los vértices del corazón no necesariamente tienen que estar en ciclos y que pueden haber varios subcorazones finales en un carcaj:

EJEMPLO 4.1.9. *Sea Q el siguiente carcaj:*

$$\begin{tikzcd} & & \dot{0} & & \\ \dot{1} \arrow[loop left] \arrow[r] & \dot{2} \arrow[r] & \dot{3} \arrow[u] \arrow[r] & \dot{4} \arrow[r, bend left] & \dot{5} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Es claro que $C(Q) = Q$. Además los siguientes subcarcajes:

$$\dot{0} \qquad y \qquad \begin{tikzcd} \dot{4} \arrow[r, bend left] & \dot{5} \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

son subcorazones finales y

$$\begin{tikzcd} \dot{1} \arrow[loop left] \end{tikzcd}$$

es un subcorazon inicial.

El que sigue es un resultado conocido pero se incluye su demostración para conveniencia del lector.

LEMA 4.1.10. *Si el álgebra A tiene dimensión global finita, entonces vale que* $\mathrm{gl\,dim}(A) \leq n-1$.

Demostración:

Al tener A dimensión global finita, Q no puede tener ciclos orientados. Por lo tanto la longitud máxima de los caminos de Q es $n-1$. Como la dimensión proyectiva de cada simple S_i coincide con la longitud máxima de los caminos que salen de i, finalmente se deduce que $\mathrm{gl\,dim}(A) \leq n-1$. $\square$

El siguiente resultado muestra que $\mathrm{fin\,dim}(A) = 0$ es equivalente a que Q no tenga pozos, siempre que el álgebra no sea isomorfa al cuerpo de base, o sea si $\dim_{\Bbbk} A \geq 2$ (el álgebra no es trivial).

LEMA 4.1.11. *Supongamos que el álgebra A no es trivial. Entonces el carcaj Q no tiene pozos si y solamente si* $\mathrm{fin\,dim}(A) = 0$.

Demostración:

($\Leftarrow$) Si A tiene un pozo v, como A no puede tener una fuente en v, existe una flecha de un vértice $w \to v$ por lo que se puede construir la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow S_v \longrightarrow P_w \longrightarrow \frac{P_w}{S_v} \longrightarrow 0$$

donde $\frac{P_w}{S_v}$ resulta ser indescomponible pues $top(\frac{P_w}{S_v})$ es simple y no es proyectivo. Luego tenemos que $\Omega(\frac{P_w}{S_v}) = S_v$. Por lo tanto $dp(\frac{P_w}{S_v}) = 1$.

($\Rightarrow$) Si A no tiene pozos entonces para todo módulo simple S, $\Omega^k(S)$ es módulo que no es proyectivo. Por lo tanto $dp(S) = \infty$. Como para todo módulo M que no es proyectivo $\Omega(M)$ es un módulo semisimple distinto de 0, entonces $dp(M) = \infty$, por lo que $\mathrm{fin\,dim}(A) = 0$. $\square$

PROPOSICIÓN 4.1.12. *Vale que* $\phi\dim(A) \leq \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) + 1$.

Demostración:

Para cada $M \in \mathrm{mod}A$ tenemos por la Proposición 2.1.7 que $\phi(M) \leq \phi(\Omega(M)) + 1$. Además $\Omega(M) \in \mathrm{add}(\mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_I)$, por lo tanto por la Proposición 2.1.6 se obtiene $\phi\dim(A) \leq \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) + 1$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la desigualdad en la Proposición 4.1.12 puede ser estricta.

EJEMPLO 4.1.13. *Consideramos el carcaj:*

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

En este caso se tiene que $\phi\dim(A) = 0$ ya que A es autoinyectiva (ver Corolario 2.2.5).

PROPOSICIÓN 4.1.14. *Vale que $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) \leq n-1$.*

Demostración:

Como $\Omega(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) \in \mathrm{add}(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S)$, entonces usando el Corolario 2.3.3 obtenemos que $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) \leq n$. Si $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) = n$ por la Proposición 2.3.6 tenemos que $pd(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S)$ es finita y luego por Lema 4.1.10 $\mathrm{gl}\dim(A) \leq n-1$. Pero si el módulo $\oplus_{S\in\mathcal{S}}S$ tiene dimensión proyectiva finita implica que:

$$\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) = pd(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) = \mathrm{gl}\dim(A)$$

lo que es absurdo. □

COROLARIO 4.1.15. *Siempre vale que $\phi\dim(A) \leq n$.*

Demostración:

Se deduce de las Proposiciones 4.1.14 y 4.1.12. □

De este corolario surge el interés de saber cuales son las álgebras de radical cuadrado nulo con ϕ-dimensión exactamente igual a n.

4.1.1. Álgebras no autoinyectivas

Las funciones de Igusa-Todorov fueron estudiadas para las álgebras autoinyectivas en general en 2.2.5, por eso nos dedicaremos ahora a trabajar en el caso de las álgebras que no son autoinyecticas.

OBSERVACIÓN 4.1.16. *Sea M un módulo indescomponible no proyectivo tal que existe una sucesión exacta corta*

$$0 \longrightarrow T \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

con $P \to M$ un cubrimiento proyectivo, entonces ninguno de los sumandos de T puede ser un módulo inyectivo. En particular los módulos simples inyectivos no pueden ser sumandos directos de las sizigias de un módulo. Esta observación la usaremos reiteradamente en las demostraciones que siguen.

PROPOSICIÓN 4.1.17. *Si $S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_I$, existe M_S un A-módulo indescomponible tal que $\Omega(M_S) = S$.*

Demostración:

Si $S = S_{i_0}$ es un A-módulo simple, asociado al vértice i_0, que no es inyectivo, entonces existe i_1 un vértice que es predecesor inmediato de i_0. Consideremos P_{i_1} el A-módulo proyectivo indescomponible asociado al vértice i_1. Es claro que $S \subset Soc(P_{i_1})$, por lo tanto podemos construir la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow P_{i_1} \longrightarrow M_S \longrightarrow 0$$

de lo que se deduce que $\Omega(M_S) = S$. $\square$

También tenemos la proposición dual:

PROPOSICIÓN 4.1.18. *Si $S \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{S}_P$ entonces existe una sucesión exacta corta:*

$$0 \longrightarrow N_S \longrightarrow I_S \longrightarrow S \longrightarrow 0$$

con I_S inyectivo

Además de la cota para $\phi\dim(A)$ obtenida en la Proposición 4.1.12, la demostración en la siguiente proposición explicita un módulo que alcanza el valor de $\phi\dim(A)$.

PROPOSICIÓN 4.1.19. *Si A es un álgebra que no es autoinyectiva vale que:*

$$\phi\dim(A) = \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) + 1.$$

Demostración:

Consideremos los módulos indescomponibles M_S tales que $\Omega(M_S) = S$ para $S \in \mathcal{S}_D$ vistos en la Proposición 4.1.17. Si alguno de los M_S es un módulo que no es simple, se puede ver, por la Proposición 2.3.8 que $\phi((\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} M_S) \oplus (\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S)) = \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) + 1$. Si M_S es simple para todo $S \in \mathcal{S}_D$, como el álgebra A no es autoinyectiva, por el Corolario 8.1.4 existe un módulo S_0 simple proyectivo o simple inyectivo.

1. Si S_0 es inyectivo pero no es proyectivo tenemos dos opciones:

   a) Si S_0 no es uno de los módulos M_S anteriores, por la Proposición 2.3.8 $\phi((\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} M_S) \oplus S_0) = \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) + 1$.

   b) Si hay algún módulo $M_S = S_0$, entonces debe haber, por el Principio del Palomar, un módulo $S_1 \in \mathcal{S}_D$ que no es ninguno de los M_S. Nuevamente por la Proposición 2.3.8 $\phi((\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} M_S) \oplus S_1) = \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) + 1$.

2. Si S_0 es proyectivo pero no es inyectivo tenemos, por la Proposición 4.1.17, que existe M módulo indescomponible tal que $\Omega(M) = S_0$ (en particular M no es isomorfo a M_S para todo $S \in \mathcal{S}_D$) y por esto tenemos nuevamente por la Proposición 2.3.8 que $\phi((\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} M_S) \oplus M) = \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) + 1$.

La tesis se concluye utilizando la Proposición 4.1.12. □

En el caso que el álgebra no tenga miembro se obtiene lo siguiente:

COROLARIO 4.1.20. *Si el carcaj Q no tiene miembro y A no es autoinyectiva, entonces*

$$\phi \dim(A) = \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}} S) + 1.$$

Demostración:

Es consecuencia de las Proposiciones 4.1.19 y 4.1.5. □

Si la dimensión global de A es finita por la Proposición 4.1.10 sabemos que $\phi \dim A = \operatorname{gl}\dim(A) \leq n - 1$. En particular si $|\mathcal{S}_P \cup \mathcal{S}_I| = k > 1$, entonces es fácil probar que $\operatorname{gl}\dim(A) \leq n - k + 1$. Es por esto que nos interesamos en saber que álgebras A tienen $\phi \dim A = n$. Por lo expresado aquí serán necesariamente álgebras con dimensión global infinita.

PROPOSICIÓN 4.1.21. *Si A tiene dimensión global infinita, y Q tiene miembro, entonces*

$$\phi \dim(A) \leq |\mathcal{S}_D| < n.$$

Demostración:

Por la Proposición 4.1.5 tenemos que $|\mathcal{S}_P \cup \mathcal{S}_I| = k \geq 1$. Reordenando los simples podemos suponer que $\{[S_{k+1}], \ldots, [S_n]\}$ es una base de K_1, y por el Corolario 2.3.3 tenemos que $\phi(\oplus_{i=k+1}^n S_i) \leq n - k$. Como existe algún módulo simple de dimensión proyectiva infinita se obtiene que $\phi(\oplus_{i=k+1}^n S_i) \leq n - (k + 1)$, ya que en caso de que $\phi(\oplus_{i=k+1}^n S_i) = n - k$ tendríamos por la Proposición 2.3.6 que $dp(\oplus_{i=k+1}^n S_i) < \infty$ por la Proposición 2.3.6, por lo que que todos los módulos simples serían de dimensión proyectiva finita y por lo tanto $\operatorname{gl}\dim(A) < \infty$. Finalmente, por la Proposición 4.1.12, $\phi \dim(A) \leq n - k$. □

4.1.2. Álgebras con miembro

En esta sección nos dedicaremos a describir las álgebras con radical cuadrado nulo que tengan miembro.

Las álgebras A con miembro, tanto en el caso de que tengan dimensión global finita (Lema 4.1.10), como en el caso de dimensión global infinita (Proposición 4.1.21), verifican que $\phi \dim(A) \leq n - 1$, siendo n la cantidad de vértices en el carcaj asociado.

EJEMPLO 4.1.22. *Los siguientes son ejemplos de álgebras con miembro, donde Q tiene n vértices y $\phi\dim(A)$ es máxima entre las álgebras que tienen miembro ($\phi\dim(A) = n-1$). Consideremos:*

$$Q = \ 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n$$

$$Q' = \ 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n \circlearrowleft$$

siendo las álgebras de la primera familia de dimensión global finita, mientras que las álgebras de la segunda familia tienen dimensión global infinita.

DEFINICIÓN 4.1.23. *En Q_0 definimos la siguiente relación: $x \preceq y$ si existe un camino de Q que empieza en x y termina en y.*

OBSERVACIÓN 4.1.24. *$(Q_0, \preceq)$ es un conjunto preordenado, o sea que se verifican la propiedad reflexiva y la propiedad transitiva.*

EJEMPLO 4.1.25.

1. *Sea $C_2 = \ 1 \rightleftarrows 2$. Entonces $1 \preceq 2$ y $2 \preceq 1$, por lo tanto $(Q, \preceq)$ es un preorden que no es un orden.*

2. *Sea el carcaj Q:*

$$\begin{tikzcd} Q = \ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[dr] & 3 \arrow[r] & 4 \\ & & 5 \arrow[r] & 7 \end{tikzcd}$$

   por lo tanto $(Q, \preceq)$ es un conjunto ordenado, ya que no tiene ciclos, pero no es un conjunto totalmente ordenado.

OBSERVACIÓN 4.1.26.

1. *$(Q, \preceq)$ es un conjunto ordenado si y solamente si no tiene ciclos de longitud mayor o igual a 2.*

2. *$(M(Q), \preceq)$ es un conjunto ordenado.*

Demostración:

1. Es claro.

2. Esto se debe a que los vértices de $M(Q)$ no están en los ciclos de Q. $\square$

PROPOSICIÓN 4.1.27. *Sea A un álgebra con miembro y ϕ-dimensión máxima ($\phi\dim(A) = n-1$), entonces $(M(Q)_0, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado.*

Demostración:

Sean v_1, v_2 dos vértices del miembro, veamos que hay un camino de v_1 a v_2 si y solamente si no hay ningún camino de v_2 a v_1. Esto implica que $(M(Q)_0, \preceq)$ es un conjunto totalmente ordenado.

$(\Rightarrow)$ Si tenemos un camino de v_1 a v_2 y otro camino de v_2 a v_1 tenemos un ciclo que contiene a los vértices v_1 y v_2 por lo tanto tienen que estar en el corazón de Q, lo que es absurdo.

$(\Leftarrow)$

1. En caso de que la dimensión global de A sea finita, tenemos que el álgebra tiene un camino de longitud $n-1$, en caso contrario la $\phi\dim$ no sería máxima, por lo tanto el miembro está totalmente ordenado con ese camino.

2. En el caso de que la dimensión global sea infinita, el carcaj cumple que la suma de la cantidad de pozos más fuentes es 1 por la Proposición 4.1.21.

   Consideremos el caso en que el álgebra A no tiene módulos proyectivos simples y que el módulo inyectivo simple es S_{v_0}(el caso sin módulos inyectivos aplicar Teorema 4.1.63). Supongamos que existen vértices v_1 y v_2 en $M(Q)$ tales que no hay caminos entre ellos. Si la cantidad de vértices de $M(Q)$ es k, tenemos que el camino más largo dentro de $M(Q)$, que no empieza en v_0, tiene que tener longitud menor o igual a $k-3$ (en el caso de que hubiera un camino de longitud mayor o igual a $k-2$ todos los vértices de $M(Q)_0 - \{v\}$ estarían alineados). Esto implica que $\Omega^{k-2}(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S)$ es sumando directo de $\oplus_{w\in C(Q)} S_w$.

   Aplicando repetidas veces la Proposición 2.1.7 obtenemos la siguiente desigualdad:

   $$\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) \leq \phi(\Omega^{k-2}(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S)) + k - 2$$

   Usando la Proposición 4.1.14, considerando el álgebra Γ de radical cuadrado nulo determinada por el corazón $C(Q)$ ($\Gamma = \frac{\Bbbk C(Q)}{F^2}$) obtenemos que $\phi_\Gamma(\oplus_{w\in C(Q)} S_w) \leq n-k-1$. Usando la Observación 1.3.13, ya que A es un álgebra que es un anillo de matriz triangular de la forma

   $$A = \begin{pmatrix} S & M \\ 0 & \frac{\Bbbk C(Q)}{F^2} \end{pmatrix},$$

   tenemos que $\phi_A(\oplus_{w\in C(Q)} S_w) = \phi_\Gamma(\oplus_{w\in C(Q)} S_w)$. Luego llegamos a la expresión:

   $$\phi_\Gamma(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D} S) \leq n-k-1+k-2 = n-3.$$

Finalmente por la Proposición 4.1.19 tendríamos que $\phi\dim(A) = n-2$, siendo absurdo pues A tiene ϕ-dimensión máxima. $\square$

4.1.3. Álgebras sin miembro.

Recordar que las álgebras sin miembro son las que podrían alcanzar la ϕ-dimensión máxima ($\phi\dim(A) = n$ ver 4.1.15 y4.1.21), y de hecho algunas lo hacen, como muestra el Ejemplo 4.1.29.

En el caso de las álgebras A que no tienen miembro se tiene que $\mathfrak{M}_Q$, la matriz de adyacencia del grafo orientado Q y la matriz asociada a $\Omega|_{K_1}$ en $\{[S]\}_{S\in\mathcal{S}}$ base de K_1, son iguales. Desde esta subsección en adelante por este capítulo, nos vamos a referir con la multiplicidad algebraica y multiplicidad geométrica de A a la multiplicidad algebraica y la multiplicidad geométrica de la matriz de adyacencia $\mathfrak{M}_Q$ del carcaj Q.

La siguiente observación nos permitirá simplificar la forma de calcular la ϕ-dimensión:

OBSERVACIÓN 4.1.28. *Si consideramos la transformación $\mathbb{C}$-lineal*

$$\overline{\Omega}|_{\langle \mathrm{add} M\rangle} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C} : \mathbb{C}^{rk(\langle \mathrm{add} M\rangle)} \to \mathbb{C}^{rk(\langle \mathrm{add} M\rangle)}$$

tenemos que $rk\left(\overline{\Omega}|_{\langle \mathrm{add} M\rangle} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}\right) = rk\left(\overline{\Omega}|_{\langle \mathrm{add} M\rangle}\right)$.

En el siguiente ejemplo veremos una familia de álgebras $A(n) = \frac{\Bbbk Q(n)}{F^2}$ con $n = |Q(n)_0|$ tal que $\phi\dim(A(n))$ sea máxima ($\phi\dim(A(n)) = n$).

EJEMPLO 4.1.29. *Consideremos las matrices $\mathfrak{M}_n$ cuadradas $n \times n$ con coeficientes naturales de la siguiente forma (con $n \geq 2$):*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix}$$

Los vectores $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ del núcleo tienen que verificar las siguientes n ecuaciones:

- $x_1 + a_1 x_n = 0,$
- $\vdots$
- $x_{j-1} + x_j + a_j x_n = 0,$

- $\vdots$
- $x_{n-2} + x_{n-1} + a_{n-1}x_n = 0,$
- $x_{n-1} + a_n x_n = 0.$

Despejando tenemos:

- $x_j = (\sum_{i=1}^{j}(-1)^{j+i-1}a_i)x_n$ *para* $j = 1, 2 \ldots, n-2$
- $x_{n-1} = -a_n x_n$

En particular se concluye que la dimensión de $Ker(\mathfrak{M}_n) \leq 1$. *Obsérvese que las 2 primeras columnas de* $(\mathfrak{M}_n)^{n-2}$ *son:*

$$v_1 = \begin{pmatrix} C_0^{n-2} \\ C_1^{n-2} \\ C_2^{n-2} \\ \vdots \\ C_{n-3}^{n-2} \\ C_{n-2}^{n-2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ C_0^{n-2} \\ C_1^{n-2} \\ \vdots \\ C_{n-4}^{n-2} \\ C_{n-3}^{n-2} \\ C_{n-2}^{n-2} \end{pmatrix}$$

Impondremos que $Ker\mathfrak{M}_n \subset Im((\mathfrak{M}_n)^{n-2})$ *y para esto es necesario y suficiente que el núcleo sea construido a partir de un vector que sea una combinación lineal no trivial de los 2 vectores de anteriores* (v_1 *y* v_2). *Siendo* $C_0^{n-2} = C_{n-2}^{n-2} = 1$ *no hay otra opción más que los coeficientes* a_j *cumplan:*

- $a_2 = a_1(C_1^{n-2} + 1) - C_0^{n-2} = a_1 C_1^{n-1} - C_0^{n-1}$
- $\vdots$
- $a_j = a_1(C_{j-1}^{n-2} + C_{j-2}^{n-2}) - (C_{j-2}^{n-2} + C_{j-3}^{n-2}) = a_1 C_{j-1}^{n-1} - C_{j-2}^{n-1}$
- $\vdots$
- $a_n = a_1 - (n-2)$

Por lo tanto si tomamos a_1 *lo suficientemente grande, alcanza con* $a_1 \geq n-2$, *para que cada* a_j *con* $j = 2, \ldots, n$ *sea positivo, tenemos que* $\mathfrak{M}_n$ *es una matriz de adyacencia de un carcaj* Q, *tal que:*

1. No tiene miembro

2. $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) = n-1$

Finalmente como $n \geq 2$ *por la Proposición 4.1.19, obtenemos* $\phi\dim(A(n)) = n$.□

COROLARIO 4.1.30. *Para que un álgebra* A *tenga la* ϕ*-dimensión máxima,* Q *no puede tener miembro.*

Demostración:

Es claro usando la Proposición 4.1.21 y considerando la familia del Ejemplo 4.1.29. □

OBSERVACIÓN 4.1.31. *Obsérvese que en la matriz de adyacencia de un carcaj* Q *la traza indica la cantidad de lazos.*

Usando la Observación 4.1.28 obtenemos el siguiente resultado:

TEOREMA 4.1.32. *Sea* A *un álgebra sin miembro y con* $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ *con* $n \geq 2$*, entonces* $\phi\dim(A) = m+1$ *donde* m *es el tamaño del bloque de Jordan más grande asociado a* 0.

Demostración:

Sea $\{v_1, \dots v_m, v_{m+1} \dots, v_{m+k}, v_{m+k+1}, \dots, v_n\}$ una base de Jordan para la matriz de adyacencia $\mathfrak{M}_Q$ de A, donde los vectores $\{v_1 \dots v_{m+k}\}$ son los vectores que forman la base del subespacio propio asociado a 0. Ordenamos estos vectores de forma que $\{v_1 \dots v_m\}$ son los vectores asociados al bloque de Jordan de tamaño m y los vectores $\{v_{m+k+1}, \dots, v_n\}$ son vectores que forman una base de subespacios propios que están asociados a valores propios no nulos.

Como $\mathfrak{M}_Q^{m+l}(v_i) = 0$ para cada $l \geq 0$ y cada $1 \leq i \leq m+k$, entonces $Im\mathfrak{M}_Q^{m+l} = \langle\{v_{m+k+1}, \dots, v_n\}\rangle$ para cada $l \geq 0$. Además como $\mathfrak{M}_Q^{m-1}(v_1) = v_m$ y $\mathfrak{M}_Q$ es inyectiva si se restringe a $Im\mathfrak{M}_Q^{m+l}$ $\forall l \geq 1$, tenemos que $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}}S) = m$, lo que implica por la Proposición 4.1.20 que $\phi\dim(A) = m+1$.□

TEOREMA 4.1.33. *Sea* A *con* $Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$ *con* $n \geq 2$*, entonces* $\phi\dim(A) = n$ *si y solamente si* A *no tiene miembro y la forma de Jordan de la matriz de adyacencia de* Q*,* $\mathfrak{M}_Q$*, es de la forma:*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

donde λ es el número de lazos y no es cero.

Demostración:

($\Leftarrow$) Si la forma de Jordan de la matriz de adyacencia de Q es la indicada, entonces $\phi(\oplus_{i=1}^n S_i)) = n - 1$ y por el Corolario 4.1.20 $\phi\dim(A) = n$.

($\Rightarrow$) Es claro que 0 es valor propio de $\mathfrak{M}_Q$, pues en caso contrario tendríamos $\phi(\oplus_{i=1}^n S_i) = 0$ y por lo tanto $\phi\dim(A) \leq 1 < n$. También es claro que tiene que haber un valor propio (λ) no nulo, en caso contrario gl $\dim(A) < \infty$ y usando el Lema 4.1.10 obtendríamos $\phi\dim(A) =$ gl $\dim(A) < n$. Además no puede haber otro valor propio no nulo distinto de λ y la multiplicidad algebraica de λ tiene que ser 1 ya que de forma contraria, por el Teorema 4.1.32, tendríamos que $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}} S) < n - 1$.

Ahora sabemos que hay un bloque de Jordan de 1×1 asociado al valor propio λ y un bloque de Jordan asociado al valor propio 0. Si el bloque de Jordan asociado al valor propio 0 tuviera varios subloques, por el Teorema 4.1.32, tendríamos que la ϕ-dimensión no sería máxima. Por lo tanto la única opción es que la forma de Jordan de $\mathfrak{M}_Q$ sea:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \square$$

Buscamos, en lo que sigue, condiciones necesarias sobre el carcaj para que la ϕ-dimensión del álgebra sea máxima.

DEFINICIÓN 4.1.34. *Dado un carcaj Q, llamamos* ***grado de salida (llegada)*** *de un vértice v al número de flechas salientes (entrantes) de v. Decimos que Q es* ***regular a la salida (llegada)*** *si los grados de salida (entrada) son iguales para cada vértice de Q.*

La siguiente es una condición necesaria para alcanzar la ϕ-dimensión máxima en carcajes regulares a la salida:

PROPOSICIÓN 4.1.35. *Si Q no tiene miembro y es regular a la salida, entonces para que $\phi\dim(A)$ sea máxima el número de lazos debe ser igual al grado de salida.*

Demostración:

Sea μ el grado de salida de Q.

Es claro que el vector $(1, \ldots, 1)$ es un vector propio asociado al valor propio μ. En caso de no coincidir el número de lazos con el grado de salida tendríamos dos vectores propios asociados a dos valores propios distintos de 0. Esto es absurdo por el Teorema 4.1.33. $\square$

A continuación mostraremos que una condición necesaria es que no existan subcorazones finales propios o subcorazones iniciales propios.

PROPOSICIÓN 4.1.36. *Si el carcaj Q no tiene miembro y posee un subcorazón final propio o un subcorazón inicial propio entonces $\phi\dim(A) < n$.*

Demostración:

Consideremos el caso de que Q tenga un subcorazón final propio Q', el caso de que tenga un subcorazón inicial es análogo.

Supongamos que el subcorazón final Q', tiene $|Q'_0| = k$ y llamemos C al subcarcaj pleno formado por los vértices de $Q_0 \setminus Q'_0$. Se ve que la matriz de adyacencia $\mathfrak{M}_Q$ de Q es de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_C & 0 \\ A & \mathfrak{M}_{Q'} \end{pmatrix}$$

donde $\mathfrak{M}_{Q'}$ y $\mathfrak{M}_C$ son respectivamente las matrices de adyacencia de Q' y de C. Por lo tanto el polinomio característico $p_Q(x)$ de Q cumple $p_Q(x) = p_C(x)p_{Q'}(x)$ siendo $p_C(x)$ y $p_{Q'}(x)$ los polinomios característicos de C y Q' respectivamente.

Como no hay caminos desde Q' a C ya que Q' es un subcorazón final de Q, se tiene que $\mathfrak{M}_C^{n-k}$ es no nula pues Q es sin miembro esto implica que hay caminos tan largos como se quiera que llegan a un vértice dado. Por lo tanto p_C tiene una raíz no nula λ, en caso contrario $\mathfrak{M}_C$ sería nilpotente lo que es absurdo pues ya vimos que $\mathfrak{M}_C^{n-k}$ es una matriz no nula. Además $\mathfrak{M}_{Q'}^k$ tampoco es nula por lo que $p_{Q'}$ también tiene una raíz no nula μ. Finalmente tenemos que p_Q tiene dos raíces (si $\lambda \neq \mu$) no nulas o una raíz no nula con multiplicidad mayor o igual que 2 (si $\lambda = \mu$). Usando el Teorema 4.1.33 sabemos que $\phi\dim(A) < n$. $\square$

4.1.4. Carcajes fuertemente conexos

DEFINICIÓN 4.1.37. *Decimos que un carcaj Q es fuertemente conexo si para cada par de vértices v_1 y v_2 existe un camino que empieza en v_1 y termina en v_2.*

PROPOSICIÓN 4.1.38. *El carcaj Q es fuertemente conexo si y solamente si Q no tiene subcorazones finales (iniciales) propios.*

Demostración:

Si Q no es fuertemente conexo existen vértices v_1 y v_2 de Q tales que no existe ningún camino que comienza en v_2 y termina en v_1. Además se tiene que Q no tiene pozos, en caso contrario tiene un subcorazón final.

Consideremos V_2 el subconjunto de los vértices de Q, que son sucesores de v_2. Supongamos que $|V_2| = k$.

Se puede ver que V_2 cumple las siguientes propiedades:

- No hay caminos de V_2 al vértice v_1 (en caso contrario tendríamos un camino de v_2 a v_1).
- V_2 es cerrado por sucesores.
- El subcarcaj pleno generado por V_2 no tiene pozos, y como consecuencia existen vértices en V_2 que están en ciclos.

Sea V_2' el soporte de $\Omega^k(\oplus_{i \in V_2} S_i)$ y supongamos que $|V_2'| = k'$.

Afirmación: el carcaj pleno generado por V_2' contiene un subcorazón final de Q.

Es claro que cada vértice de V_2 que está en un ciclo está en V_2'. Además se puede ver que un vértice de V_2 está en V_2' si y solo si hay un camino desde un ciclo que está en V_2, ya que un camino de longitud k en un grafo con k vértices obligatoriamente pasa por un ciclo. Si consideramos $\Omega^{k'}(S_i)$ donde $i \in V_2'$ los simples que aparecen son los asociados a los vértices j a los que llega un camino de longitud k' desde i, por lo que es equivalente a que haya un camino desde un ciclo de V_2. Entonces el soporte de $\Omega^{k'}(\oplus_{i \in V_2'} S_i)$ es exactamente V_2' por lo que usando la Observación 4.1.7 tenemos que contiene un subcorazón final de Q. $\square$

El siguiente esquema resume las implicancias vistas hasta ahora con respecto a la maximalidad de la ϕ-dimensión:

$\phi \dim(\frac{\Bbbk Q}{F^2}) = n \Rightarrow Q$ no tiene subcorazones finales (iniciales) propios $\Leftrightarrow Q$ es fuertemente conexo $\Rightarrow Q = C(Q)$.

El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la Proposición 4.1.36 no es válido.

EJEMPLO 4.1.39. *Consideremos el siguiente carcaj:*

$$\begin{tikzcd}
 & \dot{1} \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\
\dot{4} \arrow[loop left] \arrow[ur] & & \dot{2} \arrow[loop right] \arrow[dl] \\
 & \dot{3} \arrow[loop right] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

Su matriz de adyacencia $\mathfrak{M}_Q$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que $\phi(S_1 \oplus S_2 \oplus S_3 \oplus S_4) = 1$ y por el Corolario 4.1.20 se tiene que $\phi\dim(A) = 2$.

OBSERVACIÓN 4.1.40. *Consideremos un álgebra A tal que $\phi\dim(A) = n$ con $|Q_0| = n$. Sean C_k^v el número de ciclos simples (no repiten aristas) de longitud k que pasan por el vértice v, $C_k = \sum_{v\in Q_0} C_k^v$ y $\mathfrak{M}_Q$ la matriz de adyacencia de Q. Entonces tenemos las siguientes ecuaciones:*

- $tr(\mathfrak{M}_Q) = C_1 = \sum_{v\in Q_0} C_1^v$
- $tr(\mathfrak{M}_Q^2) = \sum_{v\in Q_0} {C_1^v}^2 + 2C_2$
- $tr(\mathfrak{M}_Q^l) = \sum_{v\in Q_0} {C_1^v}^l + lC_l + H$ *donde H es un número natural no negativo.*

EJEMPLO 4.1.41. *Para el carcaj del Ejemplo 4.1.39*

$$\begin{tikzcd}
 & \dot{1} \arrow[loop above] \arrow[dr] & \\
\dot{4} \arrow[loop left] \arrow[ur] & & \dot{2} \arrow[loop right] \arrow[dl] \\
 & \dot{3} \arrow[loop right] \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

se ve que:

- $tr(\mathfrak{M}_Q) = 4$
- $tr(\mathfrak{M}_Q^2) = 4$
- $tr(\mathfrak{M}_Q^3) = 4$
- $tr(\mathfrak{M}_Q^4) = 8$

Usando la Observación 4.1.40 obtenemos el siguiente resultado:

COROLARIO 4.1.42. *Si $\phi\dim(A) = n$ con $|Q_0| = n \geq 2$ entonces A tiene lazos en más de un vértice.*
Demostración:

Supongamos que A tiene lazos solamente en el vértice v, entonces por la Observación 4.1.31, el Teorema 4.1.33 y la Observación 4.1.40 tenemos que:

$$C_1^2 = C_1^2 + 2C_2$$

y en general para cada $l \in \mathbb{N}$ se obtiene:

$$C_1^l = C_1^l + lC_l + H'$$

donde H' es un número no negativo. De las ecuaciones de arriba se deduce que $C_l = 0$ para cada $l \geq 2$, lo que es absurdo ya que Q es fuertemente conexo pues $\phi\dim(A) = n$ con $n \geq 2$ (Proposición 4.1.38). $\square$

4.1.5. Cocientes por particiones equitativas

Utilizaremos el concepto de partición equitativa (ver [GoR] Chapter 9,3) para obtener resultados respecto a la maximalidad de la ϕ-dimensión en las álgebras de radical cuadrado nulo.

DEFINICIÓN 4.1.43. *Dado un carcaj Q, decimos que una partición $\pi = \{C_1, \ldots, C_r\}$ de Q_0 es **equitativa** si el número de vértices de C_j que son sucesores inmediatos de cada vértice v de C_i es una constante b_{ij}.*

Dado un carcaj Q siempre definimos la **partición trivial** como $\pi = \{v\}_{v \in Q_0}$. Claramente la partición trivial es equitativa.

DEFINICIÓN 4.1.44. *Dado un carcaj Q y una partición equitativa $\pi = \{C_1, \dots, C_r\}$, podemos definir el **carcaj cociente** Q/π donde $(Q/\pi)_0 = \{C_1, \dots, C_r\}$ y la cantidad de flechas de C_i a C_j es b_{ij}.*

PROPOSICIÓN 4.1.45. *Sea Q un carcaj sin miembro, entonces dada una partición equitativa π se tiene que Q/π es un carcaj sin miembro.*

Demostración:

Un vértice v está en el corazón $C(Q)$ de un carcaj Q si y solamente si existe un camino de v a un ciclo y otro camino desde un ciclo a v.

Si tenemos un ciclo en Q, la clases de las flechas del mismo forman un ciclo en Q/π posiblemente de menor longitud. Si consideramos un vértice C_j en Q/π entonces para cada vértice perteneciente a C_j tiene un camino a un ciclo de Q y un camino de un ciclo a él, pues $C(Q) = Q$. Los caminos anteriores vistos en el cociente Q/π dan un camino de C_j a un ciclo de Q/π y un camino de un ciclo de Q/π a C_j respectivamente. $\square$

Definiremos el concepto de automorfismo de carcajes o grafos orientados:

DEFINICIÓN 4.1.46. *Sean $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ y $Q' = (Q'_0, Q'_1, s', t')$ dos carcajes. $\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1)$ con $\Gamma_i : Q_i \to Q'_i$ siendo $i = 0, 1$, es un **automorfismo de carcajes** si:*

- *Γ_0 es una biyección.*
- *Dada $\alpha \in Q_1$, se tiene que $s'(\Gamma_1(\alpha)) = \Gamma_0(s(\alpha))$ y $t'(\Gamma_1(\alpha)) = \Gamma_0(t(\alpha))$.*
- *la restricción $\Gamma_1 : Q_{a,b} \to Q'_{\Gamma_0(a),\Gamma_0(b)}$ es una biyección para todo par $\{a, b\} \in Q_0 \times Q_0$.*

OBSERVACIÓN 4.1.47. *Dado un automorfismo de carcajes, tenemos que sus órbitas forman una partición equitativa.*

DEFINICIÓN 4.1.48. *Dada una partición $\pi = \{C_1, \dots, C_r\}$ en un carcaj Q definimos la **matriz característica** P a la matriz con $|Q_0|$ filas y r columnas tales que las columna i-ésima de P tiene un 1 en la fila j si $v_j \in C_i$ o un 0 si $v_j \notin C_i$.*

OBSERVACIÓN 4.1.49. *Obsérvese que:*

- *$(P^tP)_{ii} = |C_i|$ para todo i,*
- *$(P^tP)_{ij} = 0$ si $i \neq j$,*
- *Como consecuencia de los items anteriores P^tP es una matriz invertible.*

A continuación mostramos, adaptandolos a nuestro contexto, resultados que aparecen el libro [GoR] utilizando las mismas técnicas de demostración. Transcribimos las pruebas para facilitar la lectura del trabajo.

LEMA 4.1.50. *Sean Q un carcaj sin miembro y π una partición equitativa de Q con matriz característica P. Si $\mathfrak{M}_Q$ y $\mathfrak{M}_{Q/\pi}$ son las matrices de adyacencia de Q y Q/π respectivamente, entonces $\mathfrak{M}_Q P = P\mathfrak{M}_{Q/\pi}$ y $\mathfrak{M}_{Q/\pi} = (P^tP)^{-1}P^t\mathfrak{M}_Q P$.*

Demostración:

Probemos que para cada vértice u de C_i se tiene que:

$$(\mathfrak{M}_Q P)_{uj} = (P\mathfrak{M}_{Q/\pi})_{uj}$$

La entrada $(\mathfrak{M}_Q P)_{uj} = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{M}_{Q_{uk}} P_{kj}$ indica la cantidad de sucesores inmediatos de u en C_j. Si u está en C_i entonces $(\mathfrak{M}_Q P)_{uj} = b_{ij}$.

La entrada uj de la matriz $P\mathfrak{M}_{Q/\pi}$ es $(P\mathfrak{M}_{Q/\pi})_{uj} = \sum_{k=1}^{r} P_{uk}\mathfrak{M}_{Q/\pi_{kj}}$. Como cada fila de P tiene solamente un 1 en P_{ui} ya que u pertenece a C_i y todas las demás coordenadas son nulas, tenemos que $(P\mathfrak{M}_{Q/\pi})_{uj} = b_{ij}$.

Como $\mathfrak{M}_Q P = P\mathfrak{M}_{Q/\pi}$, entonces $P^t\mathfrak{M}_Q P = P^tP\mathfrak{M}_{Q/\pi}$. Usando ahora la Observación 4.1.49 tenemos que P^tP es invertible y

$$(P^tP)^{-1}P^t\mathfrak{M}_Q P = \mathfrak{M}_{Q/\pi}.\square$$

LEMA 4.1.51. *Sea Q un carcaj con matriz de adyacencia $\mathfrak{M}_Q$ y sea π una partición de Q_0 con matriz característica P, entonces π es equitativa si y solamente si el espacio de columnas de P es invariante por $\mathfrak{M}_Q$.*

Demostración:

El espacio de columnas de P es invariante por $\mathfrak{M}_Q$ si y solamente si existe una matriz B tal que $\mathfrak{M}_Q P = PB$.

($\Rightarrow$) Por el Lema 4.1.50 tenemos que si π es una partición equitativa entonces la matriz de adyacencia de Q/π cumple lo buscado.

($\Leftarrow$) Si existe una matriz B que cumple $\mathfrak{M}_Q P = PB$ entonces si u es un vértice que está en C_i tenemos que AP_{uj} es la cantidad de sucesores inmediatos y es igual a $PB_{uj} = B_{ij}$.
$\square$

OBSERVACIÓN 4.1.52. *Si $AP = PB$ para cada polinomio f se tiene $f(A)P = Pf(B)$. Por lo tanto si $f(A) = 0$, esto implica que $f(B) = 0$ de lo que se deduce que el polinomio minimal de B divide al polinomio minimal de A.*

TEOREMA 4.1.53. *Sea π una partición equitativa del carcaj Q, $\mathfrak{M}_Q$ es la matriz de adyacencia de Q y $\mathfrak{M}_{Q/\pi}$ la matriz de adyacencia del carcaj Q/π. Entonces el polinomio característico de $\mathfrak{M}_{Q/\pi}$ divide al polinomio característico de $\mathfrak{M}_Q$.*

Demostración:

Sea P la matriz característica de π. Consideremos la matriz P' con n filas y $n-r$ columnas tal que las columnas de P y las columnas de P' forman una base de $\mathbb{C}^n$. Entonces hay matrices C y D tales que:

$$AP' = PC + P'D$$

de lo que se deduce usando el Lema 4.1.50 lo siguiente:

$$A(P\ P') = (P\ P')\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

Al ser $(P\ P')$ una matriz invertible tenemos que A y la matriz

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

son equivalentes por lo tanto $det(xI - B)$ divide a $det(xI - A)$. $\square$

Utilizando los resultados desarrollados hasta el momento en esta sección, obtenemos la siguiente relación entre la ϕ-dimensión de un álgebra y la ϕ-dimensión de un cociente del álgebra por una partición equitativa.

PROPOSICIÓN 4.1.54. *Sea A un álgebra sin miembro con carcaj Q. Si π es una partición equitativa de Q, entonces $\phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}) \leq mín\{m, \phi\dim(A)\}$, siendo m la cantidad de vértices de Q/π.*

Demostración:

Por la demostración del Teorema 4.1.53, tenemos que la matriz de adyacencia de Q es semejante a una matriz de la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M}_{Q/\pi} & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

donde $\mathfrak{M}_{Q/\pi}$ es la matriz de adyacencia de Q/π.

Sean $\{v_1, \dots, v_k\}$ un conjunto de vectores de $\mathbb{C}^m$ tal que $B(v_i) = v_{i+1}$ para $0 \leq i < k$ y $B(v_k) = 0$. Consideremos ahora los vectores de $\mathbb{C}^n$ $\{w_1, \dots, w_k\}$ donde en coordenadas $w_i = (v_i, 0)$. De esto último se deduce que hay un bloque de Jordan de A asociado a 0 de tamaño mayor o igual k, por lo tanto, utilizando el Teorema 4.1.32, tenemos que $\phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}) \leq \phi\dim(A)$. $\square$

OBSERVACIÓN 4.1.55. *En las mismas condiciones de la Proposición 4.1.54 también se puede probar que cada subespacio invariante asociado a cada bloque de Jordan de B es un subespacio de un único subespacio invariante asociado a un único bloque de Jordan de A.*

TEOREMA 4.1.56. *Sea A un álgebra sin miembro con Q su carcaj, entonces si π es una partición equitativa de Q con m elementos, tenemos que $m - \phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}) \leq n - \phi\dim(A)$.*
Demostración:

Sigue del Teorema 4.1.32 que $\phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}) = k + 1$ donde k es el tamaño del bloque elemental de Jordan más grande asociado al 0 de la matriz B. Por lo tanto como cada bloque de Jordan restante de B (al descartar uno de tamaño k) es de tamaño menor o igual a un bloque de A descartando el bloque elemental asociado al respectivo de B recién eliminado, se tiene $0 \leq m - \phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}) \leq n - \phi\dim(A)$. $\square$

COROLARIO 4.1.57. *Sea A un álgebra sin miembro con Q su carcaj, entonces $\phi\dim(A)$ es máxima si y solamente si $\phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2})$ es máxima para cada partición equitativa π de Q.*

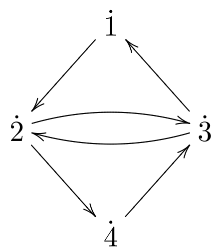
Demostración:

($\Rightarrow$) Consideremos una partición equitativa π usando el Teorema 4.1.56 tenemos que $0 \leq m - \phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}) \leq n - \phi\dim(A) = 0$ por lo tanto $\phi\dim(\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}) = 0$ y como Q/π tiene m vértices entonces $\phi\dim\frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2} = m$ es máxima.

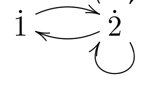
($\Leftarrow$) Es claro pues también se considera la partición trivial. $\square$

El siguiente ejemplo muestra cómo saber si un álgebra no tiene ϕ-dimensión máxima utilizando los resultados anteriores.

EJEMPLO 4.1.58. *Sea $A = \frac{\Bbbk Q}{F^2}$ donde el carcaj Q es de la forma:*



Consideremos la partición equitativa $\pi = \{\{1,4\}\{2,3\}\}$. El álgebra $A' = \frac{\Bbbk Q/\pi}{F^2}$ tiene asociado al siguiente carcaj:



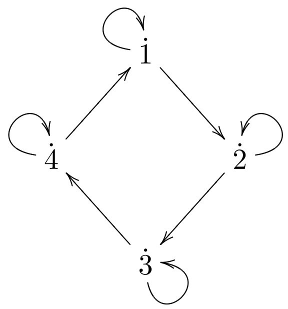
por lo que su matriz de adyacencia es de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y como es invertible tenemos que $\phi\dim(A') = 1$. *Como la* $\phi\dim(A')$ *no es máxima, la* $\phi\dim(A)$ *tampoco puede ser máxima.*

El siguiente ejemplo muestra que podemos tener un álgebra que no tiene ϕ-dimensión máxima; sin embargo todo álgebra obtenida por particiones equitativas, sin considerar la trivial, tiene ϕ-dimensión máxima.

EJEMPLO 4.1.59. *El álgebra dada por el carcaj:*



no tiene ϕ-dimensión máxima, sin embargo toda álgebra dada por particiones equitativas sí tienen ϕ-dimensión máxima.

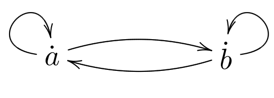
Demostración:

Sabemos, por el Ejemplo 4.1.39, que el álgebra tiene ϕ-dimensión 2.

Es claro que las únicas particiones equitativas posibles sin considerar la trivial son

- $\pi_1 = \{\{1,3\},\{2,4\}\}$.
- $\pi_2 = \{\{1,2,3,4\}\}$.

1. El carcaj Q/π_1 es de la forma:



   En este caso el álgebra tiene ϕ-dimensión 2.

2. El carcaj Q/π_2 es de la forma:

$$\begin{tikzcd} \dot{c} \arrow[loop above] \arrow[loop below] \end{tikzcd}$$

   En este caso el álgebra tiene ϕ-dimensión 1. $\square$

4.1.6. Otras ϕ-dimensiones posibles.

En la siguiente proposición vamos a mostrar que fijando la cantidad de vértices en n podemos encontrar álgebras cuya ϕ-dimensión abarca todos los números enteros entre 0 y n.

PROPOSICIÓN 4.1.60. *Para todo $0 \leq k \leq n$ existen álgebras $A(k)$ con $|Q_0| = n$ y $\phi\dim(A) = k$.*

Demostración:

- Si el grafo subyacente de Q es C_n y las flechas están orientadas en forma horaria (o antihoraria) se ve en [HuL] que $\phi\dim(A) = 0$.
- Tomando A un álgebra de la familia del Ejemplo 4.1.29 se ve que $\phi\dim(A) = n$.
- Finalmente para $0 < k < n$, podemos tomar el álgebra dada por el siguiente carcaj:

$$\begin{tikzcd} Q' = 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & k \arrow[loop right] \\ & & & k+1 \arrow[ur] & \\ & & & \vdots & \\ & & & n \arrow[uuur] & \end{tikzcd}$$

  Es claro que $\oplus_{\mathcal{S}_D} S = \oplus_{i=2}^{k} S_i$ y un cálculo directo muestra que $\phi(\oplus_{\mathcal{S}_D} S) = k - 1$. Finalmente usando la Proposición 4.1.19 concluimos que $\phi\dim(A) = k$.$\square$

TEOREMA 4.1.61. *Si A no tiene miembro entonces $\phi\dim(A) \leq 2$ si y solamente si la multiplicidad algebraica y geométrica de 0 coinciden, siendo*

- $\phi \dim(A) = 0$ *si y solamente si* A *es autoinyectiva (por lo tanto* 0 *no es valor propio).*
- $\phi \dim(A) = 1$ *si y solamente si* 0 *no es valor propio y* A *no es autoinyectiva.*
- $\phi \dim(A) = 2$ *si y solamente si* 0 *es valor propio.*

Demostración:
Podemos suponer que $n \geq 2$, ya que en el caso contrario el resultado es trivial.

Sabemos que $\mathfrak{M}_Q$ representa a la transformación lineal $\overline{\Omega}|_{K_1}$ vista en la base $\{S\}_{S\in\mathcal{S}}$. Si consideramos $\mathfrak{J}_Q$ la matriz de Jordan de $\mathfrak{M}_Q$, sabemos que el rango de $\mathfrak{J}_Q^k$ y $\mathfrak{M}_Q^k$ es el mismo para cualquier k.

($\Leftarrow$) Es claro que si la multiplicidad algebraica y geométrica de 0 coinciden, entonces $n - ma_Q(0) = rk(\mathfrak{J}_Q) = rk(\mathfrak{J}_Q^2) = \dots rk(\mathfrak{J}_Q^k)$ para $k \in \mathbb{N}$. Por lo tanto:

- $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}} S) = 0$ si $ma_Q(0) = 0$ ya que $\mathfrak{M}_Q$ es invertible,
- $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}} S) = 1$ si $ma_Q(0) > 0$ ya que $\overline{\Omega}|_{K_2}$ es invertible.

Por lo tanto como A no tiene miembro $\phi \dim(A) = 1 + \phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}} S)$, salvo que A sea autoinyectiva.

($\Rightarrow$) Si la multiplicidad algebraica es mayor a la geométrica, se tendrá que $rk(\mathfrak{J}_Q) > rk(\mathfrak{J}_Q^2)$ por lo que $\phi(\oplus_{S\in\mathcal{S}} S) > 1$ y por lo tanto $\phi \dim(A) > 2$. $\square$

En el caso de las álgebras de radical cuadrado nulo sabemos que la sizigia de todo módulo no proyectivo es suma directa de módulos simples. En particular si $\frac{\Bbbk Q}{F^2}$ no tiene miembro, los simples que forman parte de la sizigia son de dimensión proyectiva infinita, por lo tanto todo módulo no proyectivo tiene dimensión proyectiva infinita o sea que fin $\dim \frac{\Bbbk Q}{F^2} = 0$.

Como corolario del Teorema 4.1.61 podemos demostrar:

COROLARIO 4.1.62. *Dado un carcaj* Q*, si* $\mathfrak{M}_Q$ *es simétrica entonces* $\phi \dim(A) \leq 2$*. Además si* $|Q_0| \geq 3$ *entonces:*

- $\phi \dim(A) = 1$ *si* $det(\mathfrak{M}_Q) \neq 0$*,*
- $\phi \dim(A) = 2$ *si* $det(\mathfrak{M}_Q) = 0$*.*

Demostración:

Como $\mathfrak{M}_Q$ es simétrica, entonces $\mathfrak{M}_Q$ es diagonalizable y además Q no tiene miembro. Por lo tanto $ma_Q(0) = mg_Q(0)$ y usando el Teorema 4.1.61 tenemos que $\phi \dim(A) \leq 2$.

Si $|Q_0| \geq 3$, entonces A no puede ser autoinyectiva por la Observación 8.1.3, por lo que del Teorema 4.1.61 se deduce:

- $\phi\dim(A) = 1$ si $det(\mathfrak{M}_Q) \neq 0$,
- $\phi\dim(A) = 2$ si $det(\mathfrak{M}_Q) = 0$. $\square$

4.1.7. ϕ-dimensión a izquierda y a derecha

Es un resultado conocido de Auslander que la dimensión global a izquierda y la dimensión global a derecha coinciden en un anillo noetheriano (ver [Au]). Por otro lado no es difícil ver que la fin dim izquierda y a derecha no coinciden en general, un ejemplo es 4.2.5. Tiene sentido entonces preguntarse si para las álgebras de radical cuadrado nulo la ϕ-dimensión a izquierda y a derecha coinciden.

Recordemos las definiciones vistas en el Capítulo 2:

- $\phi\dim_{der}(A) = \sup\{\phi(M) \text{ tal que } M \in \operatorname{mod} A\}$.
- $\phi\dim_{izq}(A) = \phi\dim_{der}(A^{op})$.

TEOREMA 4.1.63. *Si $A = \frac{\Bbbk Q}{F^2}$, entonces $\phi\dim_{izq}(A) = \phi\dim_{der}(A)$.*

Demostración:

Sabemos por el Corolario 2.2.5 que son equivalentes:

- $\phi\dim_{der}(A) = 0$,
- A es autoinyectiva,
- A^{op} es autoinyectiva,
- $\phi\dim_{izq}(A) = 0$.

Supongamos entonces $\phi\dim_{der}(A) > 0$ (por lo tanto $\phi\dim_{izq}(A) > 0$). Entonces por la Proposición 4.1.19 tenemos que:

- $\phi\dim_{der}(A) = \phi_{der}(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D^{der}} S) + 1$
- $\phi\dim_{izq}(A) = \phi_{izq}(\oplus_{\overline{S} \in \mathcal{S}_D^{izq}} \overline{S}) + 1$

donde las notaciones $\mathcal{S}_D^{der}$ y $\overline{\mathcal{S}}_D^{izq}$ indican los simples a no proyectivos ni inyectivos derecha y a izquierda respectivamente.

Sean $\beta = \{[S]\}_{S \in \mathcal{S}_D^{der}}$ y $\beta' = \{[\overline{S}]\}_{\overline{S} \in \mathcal{S}_D^{izq}}$ las bases de $\langle add(\oplus_{S \in \mathcal{S}_D^{der}} S)\rangle$ y de $\langle add(\oplus_{\overline{S} \in \mathcal{S}_D^{izq}} S)$ respectivamente. Además consideremos las matrices:

- $\mathbb{M} = {}_{\beta}\left[\overline{\Omega}_{der}|_{\langle \mathrm{add}(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D^{der}} S)\rangle}\right]_{\beta}$,
- $\mathbb{N} = {}_{\beta'}\left[\overline{\Omega}_{izq}|_{\langle \mathrm{add}(\oplus_{\overline{S}\in\mathcal{S}_D^{izq}} \overline{S})\rangle}\right]_{\beta'}$.

Utilizando las matrices $\mathfrak{M}$ y $\mathfrak{N}$ es fácil ver que:

- $\phi_{der}(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D^{der}} S) = \text{mín}\{l \text{ tal que } rk(\mathfrak{N}^l) = rk(\mathfrak{N}^{l+1})\}$.
- $\phi_{izq}(\oplus_{\overline{S}\in\mathcal{S}_D^{izq}} \overline{S}) = \text{mín}\{l \text{ tal que } rk(\mathfrak{M}^l) = rk(\mathfrak{M}^{l+1})\}$,

Como $\mathfrak{M}^t = \mathfrak{N}$, tenemos $\phi_{der}(\oplus_{S\in\mathcal{S}_D^{der}} S) = \phi_{izq}(\oplus_{\overline{S}\in\mathcal{S}_D^{izq}} \overline{S})$ y por lo tanto se deduce que $\phi\mathrm{dim}_{der}(A) = \phi\mathrm{dim}_{der}(A)$.□

4.1.8. Módulos ϕ-testigos minimales

En esta sección veremos qué tipos de A-módulos ϕ-testigos minimales tenemos cuando el álgebra A tiene ϕ-dimensión máxima, esto quiere decir que si es de radical cuadrado nulo y $\phi\dim(A) = n$ o si A tiene miembro no vacío y $\phi\dim(A) = n-1$.

Recordemos las Definiciónes 2.4.1 y 2.4.3:
Sea A un álgebra con $\phi\dim(A) = l < \infty$. Decimos que el A-módulo M es:

- un **ϕ-testigo** si $\phi(M) = l$,
- un **ϕ-testigo minimal** si M es un ϕ-testigo y $rk\langle \mathrm{add}M\rangle$ es mínimo.

Dado un A-módulo M y su descomposición en indescomponibles $M = \oplus_{i=1}^{k} M_i^{l_i}$, entonces definimos el grafo $\Gamma(M)$ de la siguiente forma:

- $V(\Gamma(M)) = \{M_i\}_{i\in k}$.
- $\{M_i, M_j\} \in A(\Gamma(M))$ si y solamente si $\phi(M_i \oplus M_j) \geq 1$.

PROPOSICIÓN 4.1.64. *Si A es un álgebra de radical cuadrado nulo y $\phi\dim(A) = n$ o si A tiene miembro no vacío y $\phi\dim(A) = n-1$, entonces $\Gamma(\oplus_{S\in S_{\mathcal{D}}} S)$ es conexo.*

Demostración:

Si suponemos que $\Gamma(\oplus_{S\in S_{\mathcal{D}}} S)$ no es conexo, por la Definición 2.4.3 tenemos que existen $i, j \in 1, 2 \ldots, n$ tales que $\phi(S_i \oplus S_j) = 0$. Esto implica que $\{[\Omega^l(S_i)], [\Omega^l(S_j)]\}$ es un conjunto linealmente independiente para todo $l \in \mathbb{N}$. Por lo tanto $rk\overline{\Omega}^l(\langle \mathrm{add}(\oplus_{S\in S_{\mathcal{D}}} S)\rangle) \geq 2$. Sigue del Corolario 2.3.2 que la ϕ-dimensión de A no puede ser máxima, por lo tanto fue absurdo suponer que $\Gamma(\oplus_{S\in S_{\mathcal{D}}} S)$ no era un grafo conexo. □

COROLARIO 4.1.65. *Si A es un álgebra de radical cuadrado nulo con ϕ-dimension máxima ($\phi\dim(A) = n$) o si A tiene miembro no vacío y $\phi\dim(A) = n-1$, entonces hay un módulo $M = M_1 \oplus M_2$ con M_1 y M_2 indescomponibles tal que $\phi(M) = \phi\dim(A)$.*

Demostración:

Por el Lema 4.1.64 tenemos que $\Gamma(\oplus_{S\in S_{\mathcal{D}}} S)$ es un grafo conexo y usando la Proposición 2.4.5 tenemos que existe un módulo semisimple $S_{i_1} \oplus S_{i_2}$ tal que

- $\phi(S_{i_1} \oplus S_{i_2}) = n-1$ si $\phi\dim(A) = n$ o
- $\phi(S_{i_1} \oplus S_{i_2}) = n-2$ si $\phi\dim(A) = n-1$ y A tiene miembro.

Sea M_j con $j = 1, 2$ donde $\Omega(M_j) = S_{i_j}$ existe por la Proposición 4.1.17. Por lo tanto si consideramos $M = M_1 \oplus M_2$ tenemos que $\phi(M) = \phi\dim(A)$. $\square$

No todas las álgebras con ϕ-dimensión finita tienen un módulo testigo minimal de solamente dos sumandos. El siguiente ejemplo nos muestra un caso en esta situación:

EJEMPLO 4.1.66. *Consideremos el álgebra de radical cuadrado nulo que tiene por carcaj a:*

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r, bend left] & 4 \arrow[l, bend left] \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Esta álgebra es claramente sin miembro y por lo tanto K_1 tiene una base formada por las clases de los módulos simples $\{S_1, S_2, S_3, S_4\}$.

La transformación Ω la podemos ver en la base antes dicha de la siguiente forma:

- $\Omega(S_1) = S_1 \oplus S_2$,
- $\Omega(S_2) = S_3$,
- $\Omega(S_3) = S_4$ *y*
- $\Omega(S_4) = S_3 \oplus S_4$.

Por lo que fácilmente se puede ver que $rk(K_1) = 4 > 3 = rk(K_2) = rk(K_3)$, lo que implica que $\phi\dim(\frac{\Bbbk Q}{F^2}) = 2$. Si suponemos que $M = M_1 \oplus M_2$ es la descomposición en indescomponibles de un módulo ϕ-testigo, tenemos que $\{[\Omega(M_1)], [\Omega(M_2)]\}$ deberían ser linealmente independientes y $\{[\Omega^2(M_1)], [\Omega^2(M_2)]\}$ tendrían que ser colineales. Como $[S_2] + [S_3] - [S_4]$ es la base del núcleo de $\overline{\Omega}$ tenemos que:

- $S_2 \oplus S_3$ *es sumando directo de* $\Omega(M_1)$
- S_4 *es sumando directo de* $\Omega(M_2)$

Pero como S_2 es solamente submódulo del proyectivo P_1 y S_3 es submódulo de los proyectivos P_2 y P_4, haciendo un analisis tomando en cuenta la forma del carcaj Q, el módulo M_1 no puede ser indescomponible.

4.2. Función ψ de Igusa-Todorov

En esta sección nos dedicaremos a calcular la ψ-dimensión máxima para las álgebras de radical cuadrado nulo y daremos una descripción completa del carcaj que tienen dichas álgebras. Aunque sería natural suponer que la maximalidad de la ψ-dimensión se va a alcanzar en las álgebras donde la ϕ-dimensión es máxima, el siguiente resultado nos muestra que no es el caso.

PROPOSICIÓN 4.2.1. *Si $\phi\dim(A) = n$ entonces $\psi\dim(A) = n$.*

Demostración:

Por el Corolario 4.1.30, $\phi\dim(A) = n$ implica que Q no tiene miembro. Por lo tanto Q no tiene pozos, y utilizando el Lema 4.1.11 se tiene que no hay ningún módulo de dimensión proyectiva finita salvo los proyectivos, por lo tanto $\phi\dim(A) = \psi\dim(A)$. □

PROPOSICIÓN 4.2.2. *Si $0 < \phi\dim(A) \leq n-1$, entonces $\psi\dim(A) \leq n-1+d$ siendo d la longitud del camino más largo contenido en $M(Q)$ terminando en un pozo de Q.*

Demostración:

Dado N un módulo con dimensión proyectiva finita, cumple $dp(N) \leq d+1$. Además si N es simple y no es inyectivo se tiene $dp(N) \leq d$. Dado M con $\phi(M) \neq 0$, como el módulo $\Omega^{\phi(M)}(M)$ no tiene sumandos inyectivos simples, vale que $\psi(M) \leq \phi(M) + d$. □

El siguiente ejemplo muestra un álgebra donde la ψ-dimensión es máxima. Usando la proposición 4.2.2 $\psi\dim(A) \leq n-1+d$ y d a su vez es menor o igual a $n-2$ porque $M(Q)$ no contiene ciclos y $C(Q)$ es no vacío y por lo tanto tiene al menos un vértice (en caso contrario por el Lema 4.1.10 $\psi\dim(A) \leq n-1$). En resumen $\psi\dim(A) \leq 2n-3$.

EJEMPLO 4.2.3. *Sea A el álgebra de caminos de radical cuadrado nulo con el siguiente carcaj:*

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n \end{tikzcd}$$

Sabemos por la Proposición 4.1.17 que existe M tal que $\Omega(M) = \oplus_{i=1}^{n} S_i$, y que $\phi(M) = n-1$. Como además $\Omega(\oplus_{i=1}^{n} S_i) = \oplus_{i=1}^{n} S_i$, tenemos entonces que $\psi(M) = \phi(M) + dp(S_2) = n-1+n-2 = 2n-3$. Por lo tanto, por la proposición anterior, resulta que $\psi\dim(A) = 2n-3$.

El siguiente teorema nos dice la forma exacta que debe tener el carcaj para que la ψ-dimensión sea máxima:

TEOREMA 4.2.4. *Si $n \geq 4$ entonces A tiene ψ-dimensión máxima ($\psi\dim(A) = 2n-3$) si y solamente si $M(Q)$ está totalmente ordenado, Q tiene un único pozo, $C(Q)$ tiene un único vértice y varios lazos, y el carcaj Q tiene la forma:*

$$C(Q) \rightrightarrows M(Q)$$

donde alguna de las flechas que salen de $C(Q)$ tiene que llegar a la fuente de $M(Q)$.

Demostración:

Para alcanzar la maximalidad de la ψ-dimensión se necesita que $\phi\dim(A) = n-1$ y que $M(Q) \neq \emptyset$ por lo visto en la Proposición 4.2.2 y el Ejemplo 4.2.3. Como $\phi\dim(A) = n-1$ y $M(Q) \neq \emptyset$ por la Proposición 4.1.27, concluimos que el miembro está totalmente ordenado.

Si $M(Q)$ no tiene un pozo de Q, entonces la dimensión proyectiva de cada módulo simple, y por lo tanto de cada módulo, no es finita. De ahí tendríamos nuevamente que $\psi\dim(A) = \phi\dim(A) = n-1$. Finalmente si no llega ninguna flecha a la fuente de $M(Q)$ entonces tendríamos que Q tiene un pozo y una fuente, y de ahí $\phi\dim(A) < n-1$ lo que sería absurdo.

Recíprocamente podemos calcular la ψ-dimensión de las álgebras de esa forma de manera análoga a como lo hicimos en el Ejemplo 4.2.3.$\square$

A diferencia de lo visto en el Teorema 4.1.63, la ψ-dimensión a izquierda o a derecha no siempre coinciden. Esto muestra el siguiente ejemplo:

EJEMPLO 4.2.5. *Consideremos a A el álgebra de radical cuadrado nulo con el siguiente carcaj:*

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left] \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n \end{tikzcd}$$

Como vimos en el Ejemplo 4.2.3 $\psi\dim A = 2n-3$.

Ahora para calcular la ψ-dimensión de A^{op} que también es un álgebra de radical cuadrado nulo, notemos que su carcaj es de la forma:

$$Q^{op} = \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

Dicha álgebra no tiene módulos de dimensión proyectiva finita a menos de los módulos proyectivos, por lo tanto $\psi\dim(A^{op}) = \phi\dim(A^{op}) < n$. La desigualdad se basa en la Proposición 4.1.21 ya que Q^{op} tiene miembro.

Capítulo 5

Álgebras Gorenstein

En este capítulo se exhibe la relación existente entre la ϕ-dimensión y la ψ-dimensión en las álgebras que son n-Gorenstein. Como consecuencia de la simetría que admiten. Para dichas álgebras se probará que la ϕ-dimensión a derecha e izquierda coinciden.

Usaremos la siguiente notación para simplificar la escritura:

NOTACIÓN 5.0.6. *Denotaremos con* $(\cdot)^*$ *al funtor* $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$*, o sea que*

- $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$ *para todo* A*-módulo* M *y*
- $f^* = \mathrm{Hom}_A(f, A)$ *para todo morfismo de* A*-módulos* f*.*

DEFINICIÓN 5.0.7. *Decimos que un* A*-módulo finitamente generado* G *es* ***Gorenstein proyectivo*** *si existe una sucesión exacta:*

$$\cdots \longrightarrow P_{-2} \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} P_2 \xrightarrow{p_2} \cdots$$

donde $G \cong Kerp_0$*,* P_i *es un módulo proyectivo para todo* $i \in \mathbb{Z}$ *y al aplicar el funtor* $Hom_A(\cdot, A)$ *obtenemos la siguiente sucesión exacta larga:*

$$\cdots \longrightarrow P_2{}^* \xrightarrow{p_2{}^*} P_1{}^* \xrightarrow{p_1{}^*} P_0{}^* \xrightarrow{p_0{}^*} P_{-1}{}^* \xrightarrow{p_{-1}{}^*} P_{-2}{}^* \xrightarrow{p_{-2}{}^*} \cdots$$

Las siguientes propiedades son conocidas:

OBSERVACIÓN 5.0.8. *Dada un álgebra* A *tenemos que:*

1. *La suma directa de módulos Gorenstein proyectivos también es un módulo Gorenstein proyectivo.*
2. *Todo sumando directo de un módulo Gorenstein proyectivo también es un módulo Gorenstein proyectivo (ver [Zh]).*

3. Todo módulo proyectivo tambien es Gorenstein proyectivo.

NOTACIÓN 5.0.9. *Dada un álgebra A, denotaremos con:*

- *$\mathcal{G}P_A$ a la subcategoría plena de los A-módulos finitamente generados que son Gorenstein proyectivos.*
- *$[\mathcal{G}P_A]$ al subgrupo de K_0 formado por los elementos $[G]$, donde G es un módulo de $\mathcal{G}P_A$.*

PROPOSICIÓN 5.0.10. *Dada un álgebra A tenemos que $[\mathcal{G}P_A] \subseteq \cap_{i=0}^{\infty} K_i$ y $\overline{\Omega}([\mathcal{G}P_A]) = [\mathcal{G}P_A]$.*

Demostración:

Dado un módulo Gorenstein proyectivo indescomponible G que no es proyectivo, cumple $G \cong Kerp_0$ donde p_0 es un morfismo en una sucesión exacta como sigue:

$$\cdots \longrightarrow P_{-2} \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} P_2 \xrightarrow{p_2} \cdots$$

con P_i proyectivo para todo $i \in \mathbb{Z}$

Es claro que $[G] = \overline{\Omega}([Kerp_1])$, donde el módulo $Kerp_1$ también es Gorenstein proyectivo. Es claro tambien que $\overline{\Omega}([G]) = [Kerp_{-1}]$ De lo último se tiene que $\overline{\Omega}([\mathcal{G}P_A]) = [\mathcal{G}P_A]$ y que $[\mathcal{G}P_A] \subseteq K_1$. Inductivamente se deduce que $[\mathcal{G}P_A] \subseteq \cap_{i=0}^{\infty} K_i$. $\square$

DEFINICIÓN 5.0.11. *Decimos que un álgebra es CM **finita** si hay una cantidad finita de A-módulos Gorenstein proyectivos indescomponibles salvo isomorfismos.*

El resultado que sigue es un caso particular del Corolario 5.0.28 pero ofrecemos una demostración por ser muy elemental.

PROPOSICIÓN 5.0.12. *Si A es un álgebra CM finita, entonces $\phi(G) = 0$ para todo módulo Gorenstein proyectivo.*

Demostración:

Por la Proposición 5.0.10 tenemos que $\Omega([\mathcal{G}P_A]) = [\mathcal{G}P_A]$. Como $[\mathcal{G}P_A]$ tiene rango finito y $\overline{\Omega}|_{[\mathcal{G}P_A]} : [\mathcal{G}P_A] \to [\mathcal{G}P_A]$ es sobreyectiva entonces tiene que ser un isomorfismo, de lo que se deduce que $\phi(\oplus_{[G]\in[\mathcal{G}P_A]} G) = 0$ y por lo tanto se deduce la tesis.$\square$

Surge de [AR1] la siguiente definición:

DEFINICIÓN 5.0.13. *Decimos que un álgebra de Artin A es n-**Gorenstein** si $di(A_A) \leq n$ y $di({}_AA) \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$. Decimos que un álgebra de Artin es un álgebra **Gorenstein** si el álgebra es n-Gorenstein para algún $n \in \mathbb{N}$*

En las álgebras de Artin son equivalentes la definición de álgebra n-Gorenstein y qué $di(A_A) \leq n$ y $dp(D(_A A)) \leq n$.

Para el siguiente resultado ver ([Zh]) y ([EJ]). Dicha proposición muestra que en las álgebras n-Gorenstein $K_n \subset [\mathcal{G}P_A]$.

PROPOSICIÓN 5.0.14. *Sea A un álgebra n-Gorenstein. Si tenemos una sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

donde los P_i son proyectivos entonces K es Gorenstein proyectivo.

Como consecuencia directa de las Proposiciones 5.0.10 y 5.0.14 se obtiene el siguiente corolario:

COROLARIO 5.0.15. *Si A es un álgebra n-Gorenstein entonces $[\mathcal{G}P_A] = K_n$.*

DEFINICIÓN 5.0.16. *Dada un álgebra de Artin A, definiremos con ${}^{\perp}A$ a la subcategoría plena de $modA$ que consiste en los A-módulos M tales que $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ para todo $i \geq 1$.*

PROPOSICIÓN 5.0.17. *Si A es un álgebra tal que $diA_A \leq n$, dada una sucesión exacta:*

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \longrightarrow 0$$

donde los P_i son A-módulos proyectivos entonces $K \in {}^{\perp}A$.

Demostración:

Usando el Lema de Décalage (Lema 1.1.17), tenemos que $\mathrm{Ext}^i_A(K, A) = \mathrm{Ext}^i_A(\Omega^n(M), A) \cong \mathrm{Ext}^{n+i}_A(M, A)$. Usando el hecho de que $diA \leq n$ se deduce que $\mathrm{Ext}^i_A(K, A) = 0$ para $i \in \mathbb{N}$. $\square$

PROPOSICIÓN 5.0.18. *$\mathcal{G}P_A$ es una subcategoría plena de ${}^{\perp}A$.*

Demostración:

Hay que probar que para todo módulo Gorenstein proyectivo G se tiene que $\mathrm{Ext}^i_A(G, A) = 0$ para todo $i \geq 1$. Para esto nos alcanza probar que $\mathrm{Ext}^1_A(G, A) = 0$ para todo módulo Gorenstein proyectivo.

Supongamos que la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \longrightarrow P_{-2} \xrightarrow{p_{-2}} P_{-1} \xrightarrow{p_{-1}} P_0 \xrightarrow{p_0} P_1 \xrightarrow{p_1} P_2 \xrightarrow{p_2} \cdots$$

verifica que $G \cong Kerp_0 \cong Imp_{-1}$ y que la siguiente sucesión es exacta

$$(*) \qquad \cdots \longrightarrow {P_2}^* \xrightarrow{{p_2}^*} {P_1}^* \xrightarrow{{p_1}^*} {P_0}^* \xrightarrow{{p_0}^*} {P_{-1}}^* \xrightarrow{{p_{-1}}^*} {P_{-2}}^* \xrightarrow{{p_{-2}}^*} \cdots$$

Como el funtor $\mathrm{Hom}_A(\cdot, A)$ es exacto a izquierda la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\mu} P_0 \longrightarrow G' \longrightarrow 0$$

se transforma en la sucesión exacta que sigue:

$$0 \longrightarrow G'^* \longrightarrow {P_0}^* \xrightarrow{\mu^*} G^*$$

Afirmación μ^* es un epimorfismo.

Sea $f : G \to A$ un morfismo de A-módulos. Por la definición de G p_{-1} se factoriza como sigue:

$$\begin{tikzcd} P_{-1} \arrow[rr, "p_{-1}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P_0 \\ & G \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

tenemos que $f\pi p_{-2} = 0$ y por lo tanto $f\pi$ está en la imagen de ${p_{-1}}^*$ por la exactitud de $(*)$, lo que significa que hay un mapa λ tal que $\lambda p_0 = f\pi$. Usando la factorización de p_{-1} tenemos que $\lambda\mu\pi = f\pi$, y como π es un epimorfismo, $\lambda\mu = f$ de lo que se deduce que μ^* es un epimorfismo. $\square$

Como corolario de la proposición anterior se obtiene el siguiente resultado conocido:

COROLARIO 5.0.19. *Si G es un A-módulo Gorenstein proyectivo, entonces $\mathrm{Ext}^i_A(G, L) = 0$ para todo módulo de dimensión proyectiva finita.*

Demostración:

Hagamos la prueba por inducción en la dimensión proyectiva de L.

Si L es un módulo proyectivo el resultado se deduce de la Proposición 5.0.18.

Supongamos ahora que para todo A-módulo M tal que $dpM < h$ se sabe que $\mathrm{Ext}^i_A(G, M) = 0$ para $i \geq 1$. Tenemos que probar que para cada A-módulo L con $dpL = h$ se cumple la tesis. Sea la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow P \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

donde P es un cubrimiento proyectivo del A-módulo L. Al aplicar el funtor $\mathrm{Hom}_A(G,\cdot)$ a la sucesión exacta corta de arriba se obtiene la siguiente sucesión exacta:

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(G,P) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(G,L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+1}(G,M) \longrightarrow \cdots$$

y como $\mathrm{Ext}^i_A(G,M) = \mathrm{Ext}^i_A(G,P) = 0$ para $i \geq 1$ pues $dpM = h-1$ y P es proyectivo, se tiene que $\mathrm{Ext}^i_A(G,L) = 0$ para $i \geq 1$. $\square$

Otro resultado conocido es el siguiente:

PROPOSICIÓN 5.0.20. *Los módulos Gorenstein proyectivos son módulos proyectivos o tienen dimensión proyectiva infinita.*

Demostración:

Supongamos que la dimensión proyectiva de un módulo Gorenstein proyectivo G es n donde $0 < n < \infty$. Supongamos que la siguiente es una resolución proyectiva minimal de G

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{p_n} P_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} G \longrightarrow 0$$

Como $n \geq 1$ y además tenemos que $\mathrm{Ext}^n_A(G,P_n) = 0$ por la Proposición 5.0.18, tenemos que el mapa inducido $\mathrm{Hom}_A(P_{n-1},P_n) \to \mathrm{Hom}_A(P_n,P_n)$ es sobreyectivo y por lo tanto implica que el mapa p_n se escinde, lo que es absurdo pues supusimos que n era la dimensión proyectiva de G.$\square$

OBSERVACIÓN 5.0.21. *Dada un álgebra A tenemos que ${}^{\perp}A$ es cerrada por extensiones y en particular es cerrada por sumas directas finitas de módulos. Por otro lado todo sumando directo de un módulo de ${}^{\perp}A$ está también en ${}^{\perp}A$.*

NOTACIÓN 5.0.22. *Denotaremos con $[{}^{\perp}A]$ al subgrupo de K_0 formado por los elementos $[M]$ donde M es un módulo de ${}^{\perp}A$.*

DEFINICIÓN 5.0.23. *Dada una subcategoría plena $\mathcal{C}$ de $\mathrm{mod}A$, definimos la categoría estable por proyectivos $\underline{\mathcal{C}}$ de la siguiente forma:*

- *Los objetos de $\underline{\mathcal{C}}$ son los mismos objetos de $\mathcal{C}$.*
- *Los morfismos $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(M,N) = \frac{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M,N)}{P(M,N)}$, donde $P(M,N)$ es la clase de morfismos entre M y N que factorizan por algún módulo proyectivo.*
- *La composición es la inducida de $\mathcal{C}$.*

El siguiente lema se encuentra en [FLM], por conveniencia del lector se ha agregado la prueba.

LEMA 5.0.24. *Sean A un álgebra de Artin y M, $N \in \mathrm{mod}A$, entonces son equivalentes:*

1. $M \oplus P_0(N) \cong N \oplus P_0(M)$ *en* $\text{mod}A$.

2. $M \cong N$ *en* $\underline{\text{mod}}A$.

3. $[M] = [N]$ *en* $K(A)$.

Demostración:

$(1 \Rightarrow 2)$ Es claro.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $M \cong N$ en $\underline{\text{mod}}A$. Entonces tenemos el siguiente diagrama en $\text{mod}A$

$$\begin{tikzcd} & & P_0(N) \arrow[dr, "\pi_N"] & \\ M \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "j_M"'] & N \arrow[ur, "j_N"] \arrow[r, "\beta"] & M \arrow[r, "\alpha"] & N \\ & P_0(M) \arrow[ur, "\pi_M"'] & & \end{tikzcd}$$

donde $1_M - \beta\alpha = \pi_M j_M$ y $1_N - \alpha\beta = \pi_N j_N$. Además, como tanto π_M y π_N son epimorfismos, existen morfismos $f_M : P_0(M) \to P_0(N)$ y $f_N : P_0(N) \to P_0(M)$ tales que satisfacen las igualdades $\pi_M f_N = \beta\pi_N$, $\pi_N f_M = \alpha\pi_M$. Por lo anterior tenemos el siguiente diagrama:

$$M \oplus P_0(M) \xrightarrow{F} N \oplus P_0(N) \xrightarrow{G} M \oplus P_0(N)$$

donde $F = \begin{pmatrix} \alpha & \pi_N \\ j_M & -f_N \end{pmatrix}$ y $G = \begin{pmatrix} \beta & \pi_M \\ j_N & -f_M \end{pmatrix}$

<u>Afirmación:</u> Las composiciones FG y GF son isomorfismos.

Sea $\mu = j_M\pi_M + f_N f_M \in \text{End}_A(P_0(M))$. Por las igualdades vistas antes tenemos que $FG = \begin{pmatrix} 1_N & 0 \\ j_M\beta - f_N j_N & \mu \end{pmatrix}$.

Como π_M es minimal a derecha, es suficiente probar que $\pi_M\mu = \pi_M$. Esto se debe a que $\pi_M\mu = \pi_M j_M\pi_M + \pi_M f_N f_M = \pi_M j_M \pi_M + \beta\pi_N f_M = \pi_M j_M\pi_M + \beta\alpha\pi_M = (\pi_M j_M + \beta\alpha)\pi_M = 1_M\pi_M = \pi_M$. Análogamente se prueba que GF es un isomorfismo.

$(2 \Leftrightarrow 3)$ Se concluye del hecho que los módulos proyectivos forman la clase de objetos nulos en $\underline{\text{mod}}A$. $\square$

El siguiente resultado se encuentra en [AB] en una versión más general y sin una demostración explícita. Para comodidad del lector decidimos agregar la siguiente prueba:

LEMA 5.0.25. $\Omega : \underline{{}^{\perp}A} \to \underline{{}^{\perp}A}$ *es un funtor fiel y pleno.*

Demostración:

Dado un módulo M en ${}^{\perp}A$ se sabe que la sizigia $\Omega(M)$ vista en $\underline{\mathrm{mod}}A$ es única a menos de isomorfismos, por lo tanto está bien definido Ω a nivel de objetos de $\underline{\mathrm{mod}}A$.

Dado un mapa $f : M \to N$, entonces existe un mapa $\Omega(f)$ tal que se verifica el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "\Omega(f)"] & P_M \arrow[r, "\pi_M"] \arrow[d, "p"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Omega(N) \arrow[r, "i_N"] & P_N \arrow[r, "\pi_N"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Supongamos que f se factoriza por un proyectivo P de la siguiente manera:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"] & & N \\
& P \arrow[ur, "j"] &
\end{tikzcd}$$

Como P es proyectivo existe un mapa $u : P \to P_N$ tal que $\pi_N u = j$ y por lo tanto se tiene que $\pi_N u h \pi_M = f\pi_M$ de lo que se deduce que $\pi_N p - \pi_N u h \pi_M = 0$ y por lo tanto existe $\alpha : P_M \to \Omega(N)$ tal que $i_N \alpha = p - uh\pi_M$. Como $i_N \alpha i_M = (p - uh\pi_M)i_M$ y $\pi_M i_M = 0$, se deduce que $i_N \alpha i_M = i_N \Omega(f)$ de la que obtenemos $\Omega(f) = \alpha i_M$, y finalmente el mapa $\Omega(f)$ es nulo en $\underline{\mathrm{mod}}A$. Con esto tenemos que $\Omega : \underline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A$ está bién definida.

Tenemos siguiente diagrama conmutativo con filas y columnas exactas:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M, \Omega(N)) \arrow[r, "(\cdot)\circ\pi_M"] \arrow[d, "i_N\circ(\cdot)"] & \mathrm{Hom}(P_M, \Omega(N)) \arrow[r, "(\cdot)\circ i_M"] \arrow[d, "i_N\circ(\cdot)"] & \mathrm{Hom}(\Omega(M), \Omega(N)) \arrow[r] \arrow[d, "i_N\circ(\cdot)"] & {} \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M, P_N) \arrow[r, "(\cdot)\circ\pi_M"] \arrow[d, "\pi_N\circ(\cdot)"] & \mathrm{Hom}(P_M, P_N) \arrow[r, "(\cdot)\circ i_M"] \arrow[d, "\pi_N\circ(\cdot)"] & \mathrm{Hom}(\Omega(M), P_N) \arrow[r] \arrow[d, "\pi_N\circ(\cdot)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}(M, N) \arrow[r, "(\cdot)\circ\pi_M"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(P_M, N) \arrow[r, "(\cdot)\circ i_M"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(\Omega(M), N) \arrow[r] \arrow[d] & {} \\
& \mathrm{Ext}^1(M, \Omega(N)) & 0 & \mathrm{Ext}^1(\Omega(M), \Omega(N)) &
\end{tikzcd}$$

a partir de él construiremos la inversa de la función $\Omega|_{\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)}$. Dado el morfismo de módulos $f \in \mathrm{Hom}_A(\Omega(M), \Omega(N))$ aplicamos $i_N \circ (\cdot)$ y tenemos que $i_N f \in \mathrm{Hom}_A(\Omega(M), P_N)$. Como $(\cdot) \circ i_M$ es un epimorfismo tenemos que existe $g \in \mathrm{Hom}_A(P_M, P_N)$ tal que $g i_M = i_N f$. Ahora aplicamos $\pi_N \circ (\cdot)$ a g y tenemos que $\pi_N g \in \mathrm{Hom}_A(P_M, N)$. Como el diagrama es conmutativo implica que $\pi_N g i_M = \pi_N i_N f = 0$, por lo tanto existe $h \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tal que $h\pi_M = \pi_N g$.

A partir de lo visto en el párrafo anterior definimos:

$$H : \underline{\mathrm{Hom}}_A(\Omega(M), \Omega(N)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N)$$

con $H(f) = h$.

<u>Afirmación:</u> H es una función.

Para ver que está bien definida hay que verificar que:

1. H no depende de la elección de g hecha antes.

2. Si el mapa f factoriza por un proyectivo entonces h también lo hace.

1. Podemos suponer que g_1 y g_2 son dos preimágenes distintas por $(\cdot)\circ i_M$ de $i_N f$ y h_1 y h_2 son los mapas respectivos tales que $h_i \pi_M = \pi_N g_i$ para $i = 1, 2$. Como $(g_1 - g_2) \circ i_M = 0$ esto implica que existe $x \in \mathrm{Hom}_A(M, P_N)$ tal que $g_1 - g_2 = x\pi_M$. Como el diagrama es conmutativo y el mapa $(\cdot) \circ \pi_M : \mathrm{Hom}_A(M, N) \to \mathrm{Hom}_A(P_M, N)$ es inyectivo, sabemos que $\pi_N(g_1 - g_2) = h_1 - h_2$, por lo tanto $h_1 - h_2$ factorizan por un proyectivo y definen la misma clase en $\underline{\mathrm{Hom}}(M, N)$.

2. Supongamos que el mapa f factoriza por un proyectivo. Por lo tanto existe $z \in \mathrm{Hom}_A(P_M, \Omega(N))$ tal que $z i_M = f$. Como el diagrama es conmutativo, el mapa $i_N z \in \mathrm{Hom}_A(P_M, P_N)$ verifica que $i_N z i_M = i_N f$. Finalmente como $\pi_N i_N z = 0$ y $(\cdot) \circ \pi_M$ es un monomorfismo, se tiene que h tiene que ser equivalente al mapa 0 en $\mathrm{Hom}_A(M, N)$.

<u>Afirmación:</u> $H : \underline{\mathrm{Hom}}_A(\Omega(M), \Omega(N)) \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N)$ es la inversa de $\Omega|_{\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)} : \underline{\mathrm{Hom}}_A(M, N) \to \underline{\mathrm{Hom}}_A(\Omega(M), \Omega(N))$.

Veamos que $H(\Omega(h)) - h$ factoriza por un proyectivo. Dado $h \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$ tenemos que $h\pi_M \in \mathrm{Hom}_A(P_M, N)$ y como $\pi_N \circ (\cdot)$ es sobreyectiva, entonces existe $g \in \mathrm{Hom}_A(P_M, P_N)$ tal que $\pi_N g = h\pi_M$. A g le aplicamos $(\cdot) \circ i_M$ y tenemos que $g i_M \in \mathrm{Hom}_A(\Omega(M), P_N)$ y más precisamente $g i_M \in Ker \pi_N \circ (\cdot)$. Por lo tanto existe $f \in \mathrm{Hom}_A(\Omega(M), \Omega(N))$ tal que $i_N f = g i_M$. Dicho f verifica que $f - \Omega h$ factoriza por un proyectivo. Ahora como H está definida como mapa entre $\mathrm{Hom}_A(\Omega(M), \Omega(N)) \to \mathrm{Hom}_A(M, N)$, por su construcción tenemos que $H(f)-h$ factoriza por un proyectivo por lo tanto $H\Omega = 1_{\underline{\mathrm{Hom}}_A(M,N)}$.

Análogamente se ve que $\Omega(H(f))-f$ factoriza por un proyectivo. $\square$

PROPOSICIÓN 5.0.26. *$\phi(M)=0$ para todo módulo de ${}^{\perp}A$.*

Demostración:

Probaremos que $\overline{\Omega}|_{[{}^{\perp}A]}$ es inyectiva, de lo que se deduce la tesis usando la Observación 2.1.5. Supongamos que $ker\overline{\Omega}|_{[{}^{\perp}A]} \neq 0$, quiere decir que hay elementos $[M_1]$ y $[M_2]$ en $[{}^{\perp}A]$ tales que $\overline{\Omega}([M_1]-[M_2])=0$, entonces $\overline{\Omega}([M_1])=\overline{\Omega}([M_2])$ que por definición implica que $[\Omega(M_1)]=[\Omega(M_1)]$ o equivalentemente por lo visto en el Lema 5.0.24 $\Omega(M_1)\cong\Omega(M_2)$ en $\underline{{}^{\perp}A}$.

Como $\Omega : \underline{{}^{\perp}A} \to \underline{{}^{\perp}A}$ es un funtor fiel y pleno, por el Lema 5.0.25, $M_1 \cong M_2$ en $\underline{{}^{\perp}A}$ o equivalentemente por el Lema 5.0.24 $[M_1]=[M_2]$.$\square$

Ofrecemos a continuación un ejemplo donde ${}^{\perp}A \subsetneqq \{M \in \mathrm{mod}A$ tales que $\phi(M)=0\}$.

EJEMPLO 5.0.27. *Sea el álgebra de caminos $\frac{\Bbbk Q}{R^2}$ donde el carcaj Q está dado de la siguiente forma:*

$$\begin{tikzcd} & \cdot 3 \arrow[r] & \cdot 4 \arrow[d] \\ \cdot 1 \arrow[r] & \cdot 2 \arrow[u] & \cdot 5 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Es claro que $\mathrm{Ext}^1(S_1,P_5)\neq 0$ ya que tenemos la sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow P_5 \longrightarrow I_2 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

pero como $dpS_1=\infty$ se tiene que $\phi(S_1)=0$ por lo que tenemos la siguiente inclusión estricta ${}^{\perp}A \subsetneq \{M \in \mathrm{mod}\frac{\Bbbk Q}{R^2}$ tales que $\phi(M)=0\}$.

COROLARIO 5.0.28. *$\phi(G)=0$ para todo módulo de $\mathcal{G}P_A$.*

Con la siguiente proposición obtenemos una nueva familia de álgebras con la ϕ-dimensión finita:

PROPOSICIÓN 5.0.29. *Si A es un álgebra tal que $diA \leq n$ entonces $\phi\dim(A)\leq n$.*

Demostración:

Por la proposición 5.0.17 y desigualdad de la Proposición 2.1.10 tenemos que todo módulo M verifica $\phi(M)\leq n+\phi(K)$ con $K \in^{\perp} A$. Usando ahora la Proposición 5.0.26 se deduce que $\phi(M)\leq n$. $\square$

Como consecuencia directa de la Proposición 5.0.29 tenemos el siguiente resultado para álgebras Gorenstein:

PROPOSICIÓN 5.0.30. *Si A es un álgebra n-Gorenstein entonces* $\phi\dim(A) \leq n$.

COROLARIO 5.0.31. *Si A es un álgebra n-Gorenstein entonces* $\operatorname{fin}\dim(A) \leq n$.

También resulta que la familia de álgebras Gorenstein tienen la ψ-dimensión finita:

PROPOSICIÓN 5.0.32. *Si A es un álgebra n-Gorenstein entonces* $\psi\dim(A) \leq n$.

Demostración:

Consideremos un A-módulo M con $\phi(M) = k \leq n$.

- Si $k = n$ tenemos que $\Omega^k(M)$ es un módulo Gorensten proyectivo por la Proposición 5.0.14, por lo que cada sumando directo de él es proyectivo o de dimensión proyectiva infinita. De esto se deduce que $\psi(M) = \phi(M) = k \leq n$.
- Si $k < n$, supongamos el A-módulo N es sumando directo de $\Omega^k(M)$, si consideramos la resolución proyectiva de N hasta el paso $n-k-1$. Esto nos da la siguiente sucesión exacta:

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow P_{n-1} \xrightarrow{p_{n-1}} \cdots \longrightarrow P_{k+1} \xrightarrow{p_{k+1}} P_k \xrightarrow{p_k} N \longrightarrow 0$$

  donde, como consecuencia de la proposición 5.0.14, el módulo K es Gorenstein proyectivo, por lo tanto N es de dimensión proyectiva infinita o la dimensión proyectiva de N es menor o igual a $n-k$. $\square$

LEMA 5.0.33. *Si A es un álgebra Gorenstein con $dpDA^{op} = r$ entonces $diA = r$.*

Demostración:

Supongamos que tenemos la siguiente resolución inyectiva de A como A-módulo:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \xrightarrow{p_{n-1}} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_{s-1} \xrightarrow{d_{s-1}} I_s \longrightarrow 0$$

donde $s > r$ y suponemos que sea mínima (observar que existe una resolución inyectiva finita por hipotesis). Consideremos $K_{s-1} = Ker(d_{s-1})$, con él podemos formar la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow K_{s-1} \longrightarrow I_{s-1} \xrightarrow{d_{s-1}} I_s \longrightarrow 0$$

Como $K_{s-1} \cong \Omega^{-s-1}(A)$, aplicando el Lema de Décalage (Lema 1.1.17) tenemos que $\operatorname{Ext}^1(DA^{op}, K_{s-1}) \cong \operatorname{Ext}^1(DA^{op}, \Omega^{-s-1}A) \cong \operatorname{Ext}^s(DA^{op}, A) = 0$, siendo la última igualdad debida a que $dpDA^{op} = r$. De esto se deduce que el mapa d_{s-1} escinde y por lo tanto la sucesión:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow I_0 \xrightarrow{p_{n-1}} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow K_{s-1} \longrightarrow 0$$

es una resolución inyectiva, lo que es absurdo por la minimalidad de s. Si ahora suponemos que $s < r$ dualmente se prueba que es absurdo de lo que se concluye la afirmación. □

COROLARIO 5.0.34. *Dada un álgebra Gorenstein A. Se tiene que*

$$\phi \dim A = \psi \dim A = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} : A \textit{ es n-Gorenstein}\} = \text{fin dim}(A)$$

Demostración:

Por las Proposiciones 5.0.30 y 5.0.32 tenemos que $\phi \dim A \leq m$ y que $\psi \dim A \leq m$. Ahora usando el Lema 5.0.33 deducimos que $\phi \dim A = \psi \dim A = m$. □

Como consecuencia para A un álgebra Gorenstein tenemos que:

$$\boxed{\phi \dim A = \psi \dim A = \phi \dim A^{op} = \psi \dim A^{op}}$$

EJEMPLO 5.0.35. *Consideremos la* $\mathbb{k}$*-álgebra* $\frac{KQ}{I}$ *donde:*

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

e $I = \langle \alpha^2, \beta^2, \gamma\alpha - \beta\gamma \rangle$.

Como $P(1) = I(2)$ *y* $di(P(2)) = 1$ *y* $dp(I(1)) = 1$ *concluimos que el álgebra* $\frac{\mathbb{k}Q}{I}$ *es* 1*-Gorenstein y que no es autoinyectiva, por lo tanto* $\phi' dim \frac{\mathbb{k}Q}{I} = \psi \dim \frac{\mathbb{k}Q}{I} = 1$.

5.1. Aplicaciones

Esta sección exponen ejemplos conocidos de álgebras Gorenstein.

5.1.1. Álgebras Gentiles

Un ejemplo importante de álgebras Gorenstein son las álgebras Gentiles. Para ver las definiciones y las demostraciones en detalles ir al Apéndice.

DEFINICIÓN 5.1.1. *Decimos que una* $\mathbb{k}$*-álgebra es* ***Biserial Especial*** *si es morita equivalente a un algebra* $\frac{\mathbb{k}Q}{I}$ *donde* I *es un ideal admisible que cumple las siguientes condiciones:*

- *En cada vértice empiezan a lo sumo dos flechas.*
- *En cada vértice terminan a lo sumo dos flechas.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\gamma \in Q_1$ tal que $\beta\gamma$ no está en I.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $\alpha\beta$ no está en I.*

DEFINICIÓN 5.1.2. *Dada A una $\Bbbk$-álgebra, decimos que es un **Álgebra Gentil** si es Biserial Especial y las siguientes condiciones se satisfacen:*

- *I está generado por caminos de longitud 2.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\gamma' \in Q_1$ tal que $\beta\gamma'$ está en I.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\alpha' \in Q_1$ tal que $\alpha'\beta$ está en I.*

TEOREMA 5.1.3. *([GR]) Sea $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$ un álgebra Gentil con $\eta(A)$ la longitud máxima de paseos críticos que empiezan en una flecha gentil, entonces*

- *$di_A(A) = \eta(A) = dp_A D(A)$ si $\eta(A) > 0$ y*
- *$di_A A = dp_A D(A) \leq 1$ si $\eta(A) = 0$.*

En particular A es $(\eta(A))$-Gorenstein.

COROLARIO 5.1.4. *Sea $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$ un álgebra Gentil con $\eta(A)$ la longitud máxima de paseos críticos que empiezan en una flecha gentil, entonces*

$$\phi \dim(A) = \psi \dim(A) = \eta(A).$$

Demostración:

Por las Proposiciones 5.0.30 y 5.0.32 sabemos que $\phi \dim(A) \leq \eta(A)$ y que $\psi \dim(A) \leq \eta(A)$ ya que por el teorema anterior el álgebra A es $\eta(A)$-Gorenstein, donde $\eta(A) = dp_A D(A)$. $\square$

5.1.2. Álgebras inclinadas de conglomerado

Un álgebra A es inclinada de conglomerado si $A \cong \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(T)$, donde $\mathcal{C}$ es una categoría de conglomerado de un álgebra hereditaria y T es un objeto inclinante sobre dicha categoría (ver [BMRRT]).

En [KR] se prueba que las álgebras inclinadas de conglomerado son 1-Gorenstein, como consecuencia de ello tenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 5.1.5. *Si A es un álgebra inclinada de conglomerado que no es autoinyectiva, entonces $\phi\dim(A) = \psi\dim(A) = 1$*

La clase de álgebras de conglomerado está incluida extrictamente en la clase de álgebras con ϕ-dimensión y ψ-dimensión iguales a 1.

EJEMPLO 5.1.6. *Consideremos nuevamente el álgebra $\frac{\Bbbk Q}{I}$, donde Q es un carcaj de la forma:*

$$\begin{tikzcd} \dot{1} \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & \dot{2} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

y el ideal I es generado por $\{\alpha^2, \beta^2, \gamma\alpha - \beta\gamma\}$.

Como vimos en 2.9.2, $\phi\dim(\frac{\Bbbk Q}{I}) = \psi\dim(\frac{\Bbbk Q}{I}) = 1$, pero $\frac{\Bbbk Q}{I}$ no es un álgebra inclinada de conglomerado.

Capítulo 6

Funciones de Igusa-Todorov para Coálgebras

El primer objetivo de este capítulo es la definición de las funciones de Igusa-Todorov para la categoria de modulos finitamente generados en coálgebras semiperfectas. El segundo objetivo es describir mediante la utilización de la función φ de Igusa-Todorov a las coálgebras quasi-co-Frobenius.

En lo que sigue C indicará una coálgebra sobre un cuerpo $\Bbbk$ y se denotará con $\mathcal{M}^C$ y ${}^C\mathcal{M}$ las categorías de comódulos sobre C a derecha y a izquierda respectivamente y con $\mathcal{M}_f^C$ y ${}^C\mathcal{M}_f$ sus respectivas subcategorías de comódulos de dimensión finita.

Otra aspecto a remarcar es que tanto $\mathcal{M}^C$, ${}^C\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_f^C$ y ${}^C\mathcal{M}_f$ son categorías de Grothendieck por lo tanto verifican el Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya (Teorema 1.5.4).

Este capítulo conforma el trabajo [HLM].

DEFINICIÓN 6.0.7. *Sea C una coálgebra semiperfecta. Definimos $K(C)$ como el grupo abeliano libre generado por todos los símbolos $[M]$ con $M \in \mathcal{M}_f^C$ bajo las relaciones:*

1. $[A] = [B] + [C]$ *si* $A \cong B \oplus C$,
2. $[I]$ *si* I *es inyectivo.*

A $K(C)$ lo podemos ver como el grupo abeliano generado por las clases de isomorfismo de los comódulos finitamente generados indescomponibles que no son inyectivos, esto es debido a que la categoría de comódulos vale el Teorema de Krull-Remak-Schmidt-Azumaya. De hecho este conjunto da una base para $K(C)$.

Notar que si C es semiperfecta a izquierda, la envolvente inyectiva de un comódulo de dimensión finita es también de dimensión finita. El operador cosizigia Ω^{-1}, por lo antes dicho, aplicado en comódulos de dimensión finita da comódulos de dimensión finita. El operador Ω^{-1} induce un morfismo de grupos $\overline{\Omega}^{-1} : K(C) \to K(C)$.

NOTACIÓN 6.0.8. *Si M es un C-comódulo de dimensión finita, entonces $\langle \mathrm{add} M \rangle$ denota al grupo libre generado por los sumandos indescomponibles que no son inyectivos de M.*

DEFINICIÓN 6.0.9. *Definimos la **función φ de Igusa-Todorov (a derecha) para** $M \in \mathcal{M}_f^C$ como:*

$$\varphi_{der}(M) = \min \left\{ l : \overline{\Omega}^{-1}|_{\overline{\Omega}^{-(l+s)}\langle \mathrm{add} M\rangle} \textit{es un isomorfismo para todo } s \in \mathbb{N} \right\}.$$

Análogamente se define φ_{izq}. Denotaremos simplemente con φ a la función de Igusa-Todorov pues el contexto evitará confusión.

DEFINICIÓN 6.0.10. *Para una coálgebra C definimos:*

$$\varphi \dim({}^C\mathcal{M}_f) = \sup \left\{ \varphi(M) \textit{ con } M \in {}^C\mathcal{M}_f \right\} (\textit{para } C \textit{semiperfecta a derecha}),$$

$$\varphi \dim(\mathcal{M}_f^C) = \sup \left\{ \varphi(M) \textit{ con } M \in \mathcal{M}_f^C \right\} (\textit{para } C \textit{semiperfecta a izquierda}).$$

El siguiente ejemplo muestra que $\varphi \dim({}^C\mathcal{M}_f)$ y $\varphi \dim(\mathcal{M}_f^C)$ no coinciden en general:

EJEMPLO 6.0.11. *Consideremos el carcaj*

$$Q = \cdots \longrightarrow \overset{4}{\cdot} \longrightarrow \overset{3}{\cdot} \longrightarrow \overset{2}{\cdot} \longrightarrow \overset{1}{\cdot} \longrightarrow \overset{0}{\cdot}$$

y sea C la coálgebra cuyos elementos son las combinaciones lineales de los caminos de $\Bbbk Q$ de longitud menor o igual a 1. Cada comódulo $M \in {}^C\mathcal{M}_f$ se puede ver como representación sobre $\Bbbk Q$ $(M_i, T_i)_{i \in \mathbb{N}}$, donde $T_i : M_{i+1} \to M_i$ es tal que $T_i.T_{i+1} = 0$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Se puede ver que estos comódulos se pueden descomponer como sumas directas de las siguientes representaciones (ver [S]):

- $\cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Bbbk \xrightarrow{1_\Bbbk} \Bbbk \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$
- $\cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \Bbbk \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0$

donde las primeras representaciones son comódulos inyectivos y las representaciones de la segunda fila corresponden a comódulos simples. Como $\varphi(M \oplus I) = \varphi(M)$, cuando I es un comódulo inyectivo, para probar que $\varphi(M) = 0$, para cada M in ${}^C\mathcal{M}_f$, es suficiente probarlo para comódulos cosemisimples.

Si consideramos:

$$M = \cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} V_k \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} V_1 \xrightarrow{0} V_0 \ ,$$

aplicando luego Ω^{-1} *a* M *obtenemos la siguiente representación:*

$$\Omega^{-1}(M) = \cdots \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} V_k \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} V_1 \xrightarrow{0} V_0 \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto los rangos $\langle \Omega^{-1}(M) \rangle$ *y* $\langle M \rangle$ *son iguales, y entonces, por inducción (ya que* $\Omega^{-1}(M)$ *es cosemisimple), los rangos de* $\langle \Omega^{-n}(M) \rangle$ *y* $\langle M \rangle$ *son iguales. Entonces* $\varphi(M) = 0$ *para cada comódulo cosemisimple de* ${}^C\mathcal{M}_f$*, y por lo tanto* $\varphi \dim({}^C\mathcal{M}_f) = 0$.

Por otro lado, los C*-comódulos a derecha pueden ser vistos como las representaciones sobre* Q' $(M_i, T_i)_{i \in \mathbb{N}}$ *donde* $T_i : M_i \to M_{i+1}$ *es tal que* $T_{i+1}.T_i = 0$*, para todo* $i \in \mathbb{N}$ *donde*

$$Q' = \cdots \longleftarrow \overset{4}{\cdot} \longleftarrow \overset{3}{\cdot} \longleftarrow \overset{2}{\cdot} \longleftarrow \overset{1}{\cdot} \longleftarrow \overset{0}{\cdot}$$

Los C*-comódulos a derecha:*

$$M_n = \cdots \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} \mathbb{k} \xleftarrow{0} \cdots \xleftarrow{0} 0 \xleftarrow{0} 0$$

(donde el espacio vectorial $\mathbb{k}$ *está en el lugar* n*), tiene dimensión inyectiva* n*, por lo que* $\varphi(M_n) = n$ *y finalmente* $\varphi \dim(\mathcal{M}_f^C) = \infty$*. En particular* $\varphi \dim({}^C\mathcal{M}_f) \neq \varphi \dim(\mathcal{M}_f^C)$.

NOTACIÓN 6.0.12. *A partir de ahora denotaremos con* $\varphi \dim(C)$ *a* $\varphi \dim(\mathcal{M}_f^C)$

DEFINICIÓN 6.0.13. *Se dice que una coálgebra* C *es:*

- ***quasi-co-Frobenius a izquierda (qcF a izquierda)****, si cada* C*-comódulo inyectivo a derecha es un comódulo proyectivo.*
- ***quasi-co-Frobenius a derecha (qcF a derecha)****, si* C^{op} *es qcF a izquierda.*

6.1. Coálgebras quasi-co-Frobenius a izquierda.

En esta sección probaremos que una coálgebra C es quasi-co-Frobenius a izquierda si y solamente si C es semiperfecta a izquierda y $\varphi \dim(C) = 0$. Los próximos lemas son necesarios para demostrar dicho resultado.

LEMA 6.1.1. *Sea* C *una coálgebra semiperfecta a izquierda con* $\varphi \dim(C) = 0$*. Para cada comódulo a derecha simple* S*, donde* $Top(E(S))$ *está definido y es también simple.*

Demostración:

Como $E(S)$ es de dimensión finita, también lo es $Top(E(S))$ (y por lo tanto está definido). Probemos que es simple.

Supongamos que hay dos C-comódulos a derecha simples S_1, S_2 tales que $S_1 \oplus S_2$ es un sumando directo de $Top(E(S))$, y consideremos las siguientes sucesiones exactas:

$$\sigma_1 : \qquad 0 \longrightarrow K_1 \longrightarrow E(S) \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0$$

$$\sigma_2 : \qquad 0 \longrightarrow K_2 \longrightarrow E(S) \longrightarrow S_2 \longrightarrow 0$$

$$\sigma_3 : \qquad 0 \longrightarrow K_3 \longrightarrow E(S) \longrightarrow S_1 \bigoplus S_2 \longrightarrow 0$$

Notemos que $E(S)$ tiene zócalo simple, y que K_i es un comódulo indescomponible (pues su zócalo es simple) que no es inyectivo, para $i \in \{1,2,3\}$. Además, K_i es no nulo, para $i \in \{1,2,3\}$, ya que S_1 y S_2 son no nulos. También, es claro que $K_i \ncong K_3$, para $i \in \{1,2\}$. Por lo tanto tenemos que $rk\langle\{[K_1],[K_2],[K_3]\}\rangle \geq 2$. Notemos también que $E(S)$ es la envolvente inyectiva de K_i, para $i \in \{1,2,3\}$. Esto implica que $S_1 = \Omega^{-1}(K_1)$ y $S_2 = \Omega^{-1}(K_2)$.

Si $S_1 \cong S_2$, entonces $rk\langle\{[S_1],[S_2],[S_1 \bigoplus S_2]\}\rangle = 1$, lo que implica $\varphi(K_1 \bigoplus K_2 \bigoplus K_3) \geq 1$, contradiciendo $\varphi \dim(C) = 0$. En caso contrario, tenemos que $rk\langle\{[S_1],[S_2],[S_1 \bigoplus S_2]\}\rangle = 2$. Por otro lado $K_1 \ncong K_2$, resulta que $rk\langle\{[K_1],[K_2],[K_3]\}\rangle = 3$, lo que es nuevamente una contradicción.□

El siguiente es un resultado técnico que necesitaremos en la prueba del Teorema 6.1.8:

LEMA 6.1.2. *Sea $f : \bigoplus_{i\in I} U_i \to V$ un epimorfismo de C-comódulos a derecha, V con $top(V)$ simple. Entonces para algún $i \in I$, $f_i : U_i \to V$ definida al restringir f a U_i es sobreyectiva.*

Demostración:
Como el top de V es simple, tiene un único subcomódulo maximal M. Si, para todo $i \in I$, tenemos que f_i no es sobreyectiva, entonces $Im(f_i) \subseteq M$, por lo tanto $Im(f) = \sum_{i\in I} Im(f_i) \subseteq M$, contradiciendo que f es sobreyectiva.□

6.1.1. Comódulos f-proyectivos.

DEFINICIÓN 6.1.3. *Decimos que un comódulo de dimensión finita a derecha (izquierda) sobre C es **f-proyectivo** si es proyectivo en la categoría $\mathcal{M}_f^C$ (${}^C\mathcal{M}_f$).*

Es claro que un comódulo proyectivo de dimensión finita es un f-proyectivo. El Corolario 6.1.7 prueba que en el caso de las coálgebras semiperfectas es cierto el recíproco. Comencemos probando un resultado general en esta dirección.

PROPOSICIÓN 6.1.4. *Sean X, M C-comódulos a derecha, donde X es de dimensión finita. Si $\mathrm{Ext}^1_C(X,M) \neq 0$, entonces hay un subcomódulo $\tilde{M} \subseteq M$ con zócalo finito tal que $\mathrm{Ext}^1_C(X,\tilde{M}) \neq 0$.*

Demostración:

Como $\mathrm{Ext}^1_C(X,M) \neq 0$, existe una sucesión exacta corta que no escinde

$$\delta_1 : \qquad 0 \longrightarrow M \longrightarrow U \longrightarrow X \longrightarrow 0\ .$$

Consideramos la sucesión exacta corta a continuación:

$$\epsilon : \qquad 0 \longrightarrow M \xrightarrow{\mu} E(M) = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda \xrightarrow{\rho} K \longrightarrow 0\ ,$$

donde $(E(M),\mu)$ es la envolvente inyectiva de M y E_λ es indescomponible para todo $\lambda \in \Lambda$ y aplicamos el funtor $\mathrm{Hom}_C(X,-)$ a dicha sucesión exacta. A partir de lo hecho obtenemos la sucesión exacta larga:

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(X,M) \to \mathrm{Hom}_C(X,E(M)) \stackrel{\rho^*}{\to} \mathrm{Hom}_C(X,K) \to \mathrm{Ext}^1_C(X,M) \to 0$$

Como $0 \neq \delta_1 \in \mathrm{Ext}^1_C(X,M)$, se deduce que ρ^* no es sobreyectiva, o sea hay un morfismo $f : X \to K$ tal que $f \notin Im(\rho^*)$.

Como X es un comódulo de dimensión finita, $Im(f) \subseteq K$ también lo es, por lo tanto hay un conjunto finito $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ tal que $Im(f) \subseteq \rho(\oplus_{\lambda\in\Lambda_0} E_\lambda)$. Consideremos $\tilde{K} = \rho(\oplus_{\lambda\in\Lambda_0} E_\lambda)$ y $\tilde{\rho} : \oplus_{\lambda\in\Lambda_0} E_\lambda \to \tilde{K}$ la restricción de ρ. Notemos que $Im(f) \subseteq \tilde{K}$.

Consideremos $\tilde{f} : X \to \tilde{K}$ y $\iota : \tilde{K} \to K$ tales que $\iota\tilde{f} = f$. Observemos que no existe ningún $g \in \mathrm{Hom}_C(X, \oplus_{\lambda\in\Lambda_0} E_\lambda)$ tal que $\tilde{f} = \tilde{\rho} g$, en caso contrario tendríamos $f = \iota\tilde{\rho} g = \rho\iota_0 g$, donde $\iota_0 : \oplus_{\lambda\in\Lambda_0} E_\lambda \to \oplus_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda = E(M)$ es la inclusión.

Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\varrho & 0 \arrow[r] & \tilde{M} \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & \bigoplus_{\lambda\in\Lambda_0} E_\lambda \arrow[r, "\tilde{\rho}"] \arrow[d, "\iota_0"] & \tilde{K} \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & 0\ , \\
\epsilon : & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & E(M) \arrow[r, "\rho"] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{M}$ es el núcleo de $\tilde{\rho}$ y ν es la restricción de ι_0 a $\tilde{M}$. Como cada E_λ tiene zócalo simple y Λ_0 es un conjunto finito, tenemos que $\tilde{M}$ también tiene zócalo finito. Aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_C(X,\ \_)$ a ϱ, obtenemos la siguiente sucesión exacta:

$$0 \to \mathrm{Hom}_C(X, \tilde{M}) \to \mathrm{Hom}_C(X, \bigoplus_{\lambda \in \Lambda_0} E_\lambda) \xrightarrow{\tilde{\rho}^*} \mathrm{Hom}_C(X, \tilde{K}) \to \mathrm{Ext}^1_C(X, \tilde{M}) \to 0$$

Como $\tilde{f} \notin \mathrm{Im}(\tilde{\rho}^*)$, deducimos que $\tilde{\rho}^*$ no es sobreyectiva, por lo tanto $\mathrm{Ext}^1_C(X, \tilde{M}) \neq 0$.$\square$

DEFINICIÓN 6.1.5. *Decimos que $C_0 \subseteq C_1 \subseteq \cdots \subseteq C_m \subseteq \cdots \subseteq C$ es la serie corradical de la coálgebra C si:*

- *C_0 es el corradical de C (la suma de todas las subcoálgebras simples de C)*
- *$C_m = \Delta^{-1}(C \otimes C_{m-1} + C_0 \otimes C)$ para $m \geq 1$.*

COROLARIO 6.1.6. *Si C es una coálgebra con serie corradical finita y X es un comódulo a derecha de dimensión finita que no es proyectivo, entonces hay un comódulo a derecha simple S tal que* $\mathrm{Ext}^1_C(X, S) \neq 0$.

Demostración:

Si X no es un comódulo proyectivo, existe un comódulo M tal que $\mathrm{Ext}^1_C(X, M) \neq 0$. Como C tiene serie de corradical finita, existe la siguiente serie de Loewy para M: $0 = M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_n = M$.

Ahora, por inducción, es claro que, si $\mathrm{Ext}^1_C(X, M) \neq 0$, entonces para algún $1 \leq i \leq n$, $\mathrm{Ext}^1_C(X, M_i/M_{i-1}) \neq 0$ (notar que M_i/M_{i-1} es cosemisimple).

Usando la Proposición 6.1.4, obtenemos un subcomódulo de zócalo finito $U \hookrightarrow M_i/M_{i-1}$ tal que $\mathrm{Ext}^1_C(X, U) \neq 0$. Como M_i/M_{i-1} es cosemisimple y U tiene zócalo finito, entonces U es una suma finita de comódulos simples a derecha. También por inducción, es fácil probar que debe existir un comódulo simple S tal que $\mathrm{Ext}^1_C(X, S) \neq 0$.$\square$

COROLARIO 6.1.7. *Sea C una coálgebra semiperfecta a izquierda. Entonces cada f-proyectivo $X \in \mathcal{M}^C_f$ es proyectivo.*

Demostración:

Supongamos que X no es proyectivo. Entonces, por la Proposición 6.1.4, hay un comódulo $\tilde{M}$ con zócalo finito tal que $\mathrm{Ext}^1(X, \tilde{M}) \neq 0$. Como C es semiperfecta a izquierda, $\tilde{M}$ es de dimensión finita (su envolvente inyectiva es $\oplus_S E(S)$, donde los comódulos S están en el zócalo de $\tilde{M}$, que es de dimensión finita), con lo que llegamos a un absurdo.$\square$

6.1.2. Resultado principal.

TEOREMA 6.1.8. *Una coálgebra C es qcF a izquierda si y solamente si C es semiperfecta a izquierda y $\varphi\dim(C) = 0$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que C es qcF a izquierda. Es sabido que las coálgebras qcF a izquierda son también semiperfectas a izquierda (ver [DNRa], Chapter 3, Corollary 3.3.6). Para probar que $\varphi\dim(C) = 0$, primero notemos que como C es cqF a izquierda cada C-comódulo inyectivo a derecha es proyectivo, por lo que el morfismo de grupos $\Omega^{-1} : K(C) \to K(C)$ es inyectivo. De hecho la envolvente inyectiva de todo C-comódulo de dimensión finita a derecha que no es inyectivo, es un cubrimiento proyectivo de $\Omega^{-1}(M)$. Por lo tanto $\Omega \circ \Omega^{-1} = id_{K(C)}$, lo que implica que Ω^{-1} preserva los rangos de los grupos y como consecuencia $\varphi(M) = 0$ para todo C-comódulo a derecha de dimensión finita M.

($\Leftarrow$) Supongamos ahora que C es semiperfecta izquierda y que $\varphi(M) = 0$ para todo C-comódulo a derecha de dimensión finita M. Probaremos que cada C-comódulo inyectivo a derecha es proyectivo. Notemos primero, que es suficiente probarlo para envolventes inyectivas de comódulos simples.

Sea E la envolvente inyectiva de un C-comódulo simple S. Supongamos que E no es proyectivo y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\sigma_1 : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & U \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 , \\
\sigma_2 : & 0 \arrow[r] & E(X) \arrow[r] & E' \arrow[r] & E \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde

- σ_1 es una sucesión exacta corta que no escinde (existe pues E no es proyectivo), con
  - X de dimensión finita (ver Corolario 6.1.7),
  - U indescomponible (notar que U es de dimensión finita, pues X y E son de dimensión finita, y como $top(E)$ es simple, por el Lema 6.1.1 podemos considerar que U es indescomponible por el Lema 6.1.2).
- $(E(X), \iota)$ es la envolvente inyectiva de X y $\sigma_2 = \iota.\sigma_1$ es el pushout.

Notemos que E' es inyectivo, ya que $E(X)$ y E lo son, y que X no es inyectivo, pues $\sigma_1 \neq 0$. Además, si consideramos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
\sigma_1 : & 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & U \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\sigma_2 : & 0 \arrow[r] & E(X) \arrow[r] \arrow[d] & E' \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[r] & 0 \\
 & & \Omega^{-1}(X) \arrow[d] & \Omega^{-1}(U) \bigoplus E'' \arrow[d] & & \\
 & & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

tenemos por el Lema de la Serpiente que $\Omega^{-1}(X) \cong \Omega^{-1}(U) \bigoplus E''$. Luego $[\Omega^{-1}(X)] = [\Omega^{-1}(U) \bigoplus E''] = [\Omega^{-1}(U)] + [E''] = [\Omega^{-1}(U)]$. Como $E \neq 0$, entonces ningún sumando directo de X es isomorfo a U. Por lo tanto $\text{rk}\Omega^{-1}\langle X \oplus U\rangle \leq \text{rk}\langle X \oplus U\rangle - 1$ y entonces $\varphi \dim(\mathcal{M}^C_f) \geq 1$, lo que es absurdo y se tiene que E es un C-comódulo proyectivo.□

6.2. Algunas Aplicaciones.

La caracterización de las coálgebras *qcF* dada por el Teorema 6.1.8 nos permite probar algunos resultados conocidos, usando las herramientas dadas por la función de Igusa-Todorov.

PROPOSICIÓN 6.2.1. *Si C es una coálgebra qcF a izquierda, entonces:*

1. *Todo C-comódulo a derecha inyectivo indescomponible tiene top simple.*
2. *Todo C-comódulo a derecha proyectivo indescomponible tiene zócalo simple.*

Demostración:

1. Es una consecuencia directa del Lema 6.1.1, luego aplicar Teorema 6.1.8.
2. Es sabido que cada C-comódulo a izquierda proyectivo indescomponible P es de dimensión finita (ver [GN]) y que P^* es un C-comódulo a derecha inyectivo indescomponible (ver por ejemplo [DNRa], Chapter 2). Ahora notemos que $Top(P^*) = (SocP)^*$ y como $Top(P^*)$ es simple y entonces de dimensión finita, $Soc(P)$ es también simple.

PROPOSICIÓN 6.2.2. *Sea C una coálgebra qcF a izquierda. Sea $\mathcal{S}_r$ un conjunto de representantes de las clases de ismorfismo de los C-comódulos simples a derecha. La función*

$$\nu_r : \mathcal{S}_r \to \mathcal{S}_r,\ \nu_r(S) = Top(E(S))$$

está bien definida y es inyectiva.

Demostración:

Por el Teorema 6.1.8, sabemos que C es semiperfecta a izquierda y que $\varphi\dim(C) = 0$. Por el Lema 6.1.1 podemos definir ν_r. Ahora probaremos que ν_r es inyectiva. Supongamos que no lo es. Entonces, hay dos C-comódulos simples no isomorfos S_1 y S_2 tales que $T_1 = Top(E(S_1))$ y $T_2 = Top(E(S_2))$ son isomorfos. Asi que tenemos las siguientes sucesiones exactas:

$$\sigma_1 : \qquad 0 \longrightarrow J_1 \longrightarrow E(S_1) \longrightarrow T_1 \longrightarrow 0\ ,$$

$$\sigma_2 : \qquad 0 \longrightarrow J_2 \longrightarrow E(S_2) \longrightarrow T_2 \longrightarrow 0$$

con $soc(J_1) = S_1$ y $soc(J_2) = S_2$. Ahora, J_1 and J_2 son indescomponibles que no son inyectivos, pues tienen zócalo simple y σ_1, σ_2 son no nulos.

Como $T_1 \cong T_2$ y $\varphi\dim(C) = 0$, tenemos que $J_1 \cong J_2$ y por lo tanto sus zócalos son isomorfos: $S_1 \cong S_2$, contradicción que nos lleva al resultado.$\square$

La función ν_r se origina en el contexto de categorías de módulos con una cantidad finita de módulos simples no isomorfos, donde es biyectiva, y es llamada la permutación de Nakayama (ver [Kh]).

Notemos que cada coálgebra cosemisimple C verifica $\varphi\dim({}^C\mathcal{M}_f) = \varphi\dim(\mathcal{M}_f^C) = 0$ donde cada comódulo (a izquierda o derecha) es inyectivo. La siguiente proposición es para el caso de que la coálgebra no sea cosemisimple.

PROPOSICIÓN 6.2.3. *Sea C una coálgebra qcF a izquierda. Si C es indescomponible y no es simple, entonces no hay C-comódulos simples inyectivos.*

Demostración:

Sea S un C-comódulo a derecha simple inyectivo. Como C no es simple, hay algún C-comódulo simple a derecha $T \ncong S$ con $Ext^1_C(S,T) \neq 0$, en caso contrario tendríamos $C = E(S) = S$ (ver [Ch], Section 3.3).

Sea σ una sucesión exacta corta que no se escinde de T a S y consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \sigma : & 0 \arrow[r] & T \arrow[r] \arrow[d, equal] & M \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 0 \\ & 0 \arrow[r] & T \arrow[r] & E(T) \arrow[r] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como σ no es nula, tenemos que f es no nula y entonces inyectiva, ya que S es simple. Además, como $E(T)$ tiene top simple por la Proposición 6.2.1, tenemos que X es indescomponible. Por lo tanto, $S \cong X$, ya que S es inyectivo. Concluimos que la dimensión inyectiva de T es 1, contradiciendo el hecho de que $\varphi \dim(C) = 0$.$\square$

COROLARIO 6.2.4. *Si C es una coálgebra qcF a izquierda y a derecha, entonces ν_r es biyectiva.*

Demostración:
Como C es *qcF* a izquierda y a derecha, tenemos que $\nu_r : S_r \to S_r$ y $\nu_l : S_l \to S_l$ son inyectivas. Ahora definimos:

$$\mu_r : S_r \to S_r, \quad \mu_r(S) = soc(P(S)),$$

donde $P(S)$ es el cubrimiento proyectivo de S. Notemos que como C es semiperfecta a derecha $\mathcal{M}_f^C$ tiene suficientes proyectivos.

Por el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Soc}(P(S)) \arrow[r, "\iota"] \arrow[d] & E(\mathrm{Soc}(P(S))) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}(\iota) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(\pi) \arrow[r] & P(S) \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es claro que ν_r y μ_r son inversas.$\square$

Es sabido que una coálgebra es *qcF* a izquierda (derecha) si y solamente si es semiperfecta a izquierda (derecha) y la coálgebra genera a la categoría de los comódulos a derecha (izquierda) (ver [NTV], Theorem 3.1). A partir del Teorema 6.1.8, este resultado se puede reescribir de la siguiente forma:

COROLARIO 6.2.5. *Sea C una coálgebra semiperfecta a izquierda. La coálgebra C genera a la categoría de los C-comódulos a derecha si y solamente si $\varphi \dim(C) = 0$.*

Capítulo 7

Extensiones de escalares

En este capítulo veremos qué resulta de las dimensiones homológicas que venimos tratando en este trabajo, cuando se hacen extensiones por escalares por ciertas álgebras especiales. A denotará a una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita y Q siempre será un carcaj finito sin ciclos orientados.

7.1. Extensiones de escalares

DEFINICIÓN 7.1.1. *Dados A una $\Bbbk$-álgebra de dimensión finita y Q un carcaj finito sin ciclos orientados, definimos la categoría de AQ-representaciones ($Rep_A(Q)$) de la siguiente forma:*

- *Los objetos de $Rep_A(Q)$ son funtores $X : Q \to \mathrm{Mod}A$, donde para cada $v \in Q_0$ $X(v)$ es un A-módulo y para cada flecha $\alpha : v_1 \to v_2$, $X(\alpha) : X(v_1) \to X(v_2)$ es un morfismo de A-módulos.*
- *Los morfismos η entre dos representaciones X e Y de $Rep_A(Q)$ son transformaciones naturales. O sea para cada $v \in Q_0$ tenemos $\eta_v : X(v) \to Y(v)$ morfismo de A-módulos tales que para cada flecha $\alpha : v_1 \to v_2$ se cumple que $Y(\alpha) \circ \eta_{v_1} = \eta_{v_2} \circ X(\alpha)$.*

NOTACIÓN 7.1.2. *Denotaremos con AQ al álgebra de caminos de carcaj Q con coeficientes sobre A, $A \otimes_{\Bbbk} \Bbbk Q$.*

OBSERVACIÓN 7.1.3. *Tenemos una equivalencia de categorías entre la categoría $Rep_A(Q)$ y los módulos del álgebra de caminos AQ de carcaj Q sobre el álgebra A.*

NOTACIÓN 7.1.4. *Dados una $\Bbbk$-álgebra A de dimensión finita y un carcaj Q, si consideramos un A-módulo M y un vértice v de Q, denotaremos con M^v al AQ-módulo tal que:*

- *$M^v(v) = M$, $M^v(w) = 0$ si $w \neq v$ y*

- $M^v(\alpha) = 0$ *para toda flecha de* Q_1.

NOTACIÓN 7.1.5. *Dada una* $\Bbbk$*-álgebra* A *de dimensión finita y un carcaj* Q*, si consideramos un morfismo inyectivo de* A*-módulos* $i : M \hookrightarrow P$ *con* P *un* A*-módulo proyectivo y un vértice* v *de* Q *denotaremos con* MP^v *al* AQ*-módulo tal que:*

- $MP^v(w) = \begin{cases} M, & \textit{si } w = v; \\ \oplus_\lambda P_\lambda, & \textit{donde } P_\lambda = P \textit{ y } \lambda \textit{ varía en la familia de los caminos entre } v \textit{ y } w; \\ 0, & \textit{si no hay ningún camino entre } v \textit{ y } w. \end{cases}$

- $MP^v(\alpha) = \begin{cases} i_\alpha, & \textit{la inclusión de } M \subseteq P_\alpha \subseteq \oplus_\lambda P_\lambda \textit{ si } \alpha \textit{ comienza en } v; \\ f_\alpha, & \textit{si } \alpha : w_1 \to w_2 \textit{ con } w_1 \neq v \textit{ y con } \mathbb{P}(v, w_1) \neq \emptyset; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$

  siendo $f_\alpha = \sum_{\lambda \in \mathbb{P}(v,w_1)} MP^v(w_1) \overset{\pi_\lambda}{\to} P_\lambda \overset{1_P}{\to} P_{\alpha\lambda} \subseteq MP^v(w_2)$.

NOTACIÓN 7.1.6. *Denotaremos con:*

- P^v*, si* P *es un* A*-módulo proyectivo, al* AQ *módulo:*
  - $P^v(w) = \begin{cases} P, & \textit{si } w = v; \\ \oplus_\lambda P_\lambda, & \textit{donde } P_\lambda = P \textit{ y } \lambda \textit{ varía en la familia de los caminos entre } v \textit{ y } w; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$
  - $P^v(\alpha) = \begin{cases} f_\alpha, & \textit{si } \alpha : w_1 \to w_2 \textit{ con } \mathbb{P}(v, w_1) \neq \emptyset; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$

    siendo $f_\alpha = \sum_{\lambda \in \mathbb{P}(v,w_1)} P^v(w_1) \overset{\pi_\lambda}{\to} P_\lambda \overset{1_P}{\to} P_{\alpha\lambda} \subseteq P^v(w_2)$.

- I^v *Si* I *es un* A*-módulo inyectivo al* AQ *módulo:*
  - $I^v(w) = \begin{cases} I, & \textit{si } w = v; \\ \oplus_\lambda I_\lambda, & \textit{donde } I_\lambda = I \textit{ y } \lambda \textit{ varía en la familia de los caminos entre } w \textit{ y } v; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$
  - $I^v(\alpha) = \begin{cases} f_\alpha, & \textit{si } \alpha : w_1 \to w_2 \textit{ con } \mathbb{P}(w_2, v) \neq \emptyset; \\ 0, & \textit{en otro caso.} \end{cases}$

    siendo $f_\alpha = \sum_{\lambda \in \mathbb{P}(w_2,v)} I^v(w_1) \overset{\pi_\lambda}{\to} I_{\lambda\alpha} \overset{1_I}{\to} I_\lambda \subseteq I^v(w_2)$.

En [EE] se encuentra el siguiente teorema en una versión más general:

TEOREMA 7.1.7. *Sean* Q *un quiver finito sin ciclos y* A *una* $\Bbbk$*-álgebra de dimensión finita. Una representación de* AQ P *es proyectiva si y solamente si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Para cada* $v \in V$*, el módulo* $P(v)$ *es proyectivo.*

2. *Para cada vértice* $v \in V$*, el morfismo* $\oplus_{t(\alpha)=v} P(s(\alpha)) \to P(v)$ *(donde la coordenada* $P(s(\alpha)) \to P(v)$ *es* $P(\alpha)$*) es un monomorfismo que escinde.*

La versión dual al teorema anterior es:

TEOREMA 7.1.8. *Sean* Q *quiver finito sin ciclos y* A *una* $\Bbbk$*-álgebra de dimensión finita. Una representación sobre* AQ I *es inyectiva, si y solamente si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Para cada* $v \in V$*, el módulo* $I(v)$ *es inyectivo.*

2. *Para cada vértice* $v \in V$*, el morfismo* $I(v) \to \oplus_{s(\alpha)=v} I(t(\alpha))$ *(donde la coordenada* $I(v) \to I(t(\alpha))$ *es* $I(\alpha)$*) es un epimorfismo que escinde.*

OBSERVACIÓN 7.1.9. *A partir del Teorema 7.1.7 se puede demostrar que los proyectivos e inyectivos indescomponibles de* AQ *son todos de la forma* P^v *e* I^v *respectivamente donde* P *es un* A*-módulo proyectivo indescomponible,* I *es un* A*-módulo inyectivo indescomponible y* $v \in Q_0$*.*

PROPOSICIÓN 7.1.10. *Sea* A *una* $\Bbbk$*-álgebra y* Q *un carcaj finito y sin ciclos. Sean* M *un* A*-módulo y* v *un vértice de* Q_0*, entonces tenemos los siguientes resultados:*

1. *Si* v *es un pozo entonces* $\Omega^k_{AQ}(M^v) = (\Omega^k_A(M))^v$*.*

2. *Si* v *no es un pozo entonces* $\Omega^k_{AQ}(M^v) = (\Omega^k_A(M) P_{k-1})^v$*, siendo la siguiente una resolución proyectiva de* M*:*

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Demostración:

1. Es claro.

2. Consideremos $(\Omega_{AQ} M) P^v_0$, que según la Definición 7.1.5 es de la forma:

$$(\Omega_{AQ} M) P^v_0(w) = \begin{cases} \Omega_A M, & \text{si } w = v; \\ \oplus_\lambda P_\lambda, & \text{donde } P_\lambda = P_0 \text{ y } \lambda \text{ varía en la familia de los caminos entre } v \text{ y } w; \\ 0, & \text{si no hay ningún camino entre } v \text{ y } w. \end{cases}$$

Sea α una flecha que comienza en el vértice v. El siguiente diagrama conmutativo representa localmente la sizigia de M^v en dicha flecha α:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega(M) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "i"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 . \\ 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ahora si α es una flecha que no comienza en v, pero es parte de un camino que comienza en v, es claro que el siguiente es un diagrama conmutativo con filas exactas (isomorfismos):

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_0 \arrow[r, "1"] & P_0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

de lo que resulta que $\Omega_{AQ}(M^v) = (\Omega_A M)P_0^v$.

Volvamos al caso en que α es una flecha que comienza en v. Supongamos ahora por hipótesis inductiva que $\Omega^k(M^v) = (\Omega^k(M)P_{k-1})^v$. De esto obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas, el cual representa localmente al AQ-módulo $\Omega^k_{AQ}(M^v)$ en dicha flecha α:

$$(*) \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "i_k"] \arrow[d, "i'_k"] & P_k \arrow[r, "f_k"] \arrow[d, "j_k"] & \Omega^k M \arrow[r] \arrow[d, "i'_{k-1}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_k \arrow[r, "j'_k"] & P_k \oplus P_{k-1} \arrow[r, "(i'_{k-1}\circ f_k, 1)"] & P_{k-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde j_k es de la forma $(1_{P_k}, 0)$. Así deducimos que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} \Omega^{k+1}(M) \arrow[r, "1"] \arrow[d, "i'_k"] & \Omega^{k+1}(M) \arrow[d, "i_k"] \\ P_k \arrow[r, "h_k"] & P_k \end{tikzcd}$$

donde h_k es la primera coordenada del mapa j'_k. Como la segunda coordenada del epimorfismo de la segunda fila del diagrama $(*)$ es la identidad entonces esto implica que h_k sea un monomorfismo y por lo tanto las filas del diagrama anterior son isomorfismos.

Si suponemos ahora que α es una flecha que no comienza en v, pero es parte de un camino que sale de v tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & P_k \arrow[r, "j'_k"] \arrow[d, "1"] & P_k \oplus P_{k-1} \arrow[r, "(i'_{k-1}\circ f_k, 1)"] \arrow[d, "1"] & P_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & P_k \arrow[r, "j'_k"] & P_k \oplus P_{k-1} \arrow[r, "(i'_{k-1}\circ f_k, 1)"] & P_{k-1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

que son los bloques que componen la representación local de la sizigia a cada nivel, y obtenemos lo esperado. □

OBSERVACIÓN 7.1.11. *Dado los A-módulos M, N, P y P' donde P y P' son proyectivos y los mapas $i : M \to P$ y $i' : N \to P'$ son inclusiones, entonces $MP^v \cong NP'^v$ si y solamente si existe el siguiente diagrama conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i"] & N \arrow[d, "i'"] \\ P \arrow[r, "\cong"] & P' \end{tikzcd}$$

PROPOSICIÓN 7.1.12. *Sea A una $\mathbb{k}$-álgebra y Q un carcaj finito y sin ciclos. Sean M un A-módulo y v un vértice de Q_0, entonces tenemos los siguientes resultados:*

1. *Si v es un pozo $\phi(M^v) = \phi(M)$.*
2. *Si v no es un pozo $\phi(M^v) = \phi(M) + 1$.*

Demostración:

1. Es claro por la forma de las sizigias vista en la primera parte de la Proposición 7.1.10.
2. Sea M un A-módulo tal que $\phi(M) = k$ y $M = \oplus_{i\in I} M_i^{l_i}$ es la descomposición en indescomponibles de M.

   Sea $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^k([M_i]) = 0$ tal que $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^{k-1}([M_i]) \neq 0$. Si probamos que lo anterior implica que $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^{k+1}([M^v{}_i]) = 0$ y que $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^k([M^v{}_i]) \neq 0$ de esto se tiene que $\phi(M^v) \geq \phi(M) + 1$.

   <u>Afirmación:</u> Si tenemos que $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^k([M_i]) = 0$ y $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^{k-1}([M_i]) \neq 0$ entonces $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^{k+1}([M^v{}_i]) = 0$ y $\sum_{i\in I} \alpha_i \Omega^k([M^v{}_i]) \neq 0$.

   Si suponemos que $\sum \alpha_i \Omega^k([M_i]) = 0$, esto implica que existen proyectivos P_1 y P_2 tales que $\oplus_{i\in I_1} \Omega^k(M_i)^{\beta_i} \oplus P_1 = \oplus_{i\in I_2} \Omega^k(M_i)^{\beta_i} \oplus P_2$, donde la unión $I = I_1 \cup I_2$ es disjunta, los coeficientes $\beta_i = |\alpha_i|$ para todo $i \in I$. Entonces surge el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas y columnas que son isomorfismos:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \oplus_{i\in I_1} \Omega^{k+1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P_1' \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, dashed, "\simeq"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \oplus_{i\in I_1} \Omega^k(M_i)^{\beta_i} \oplus P_1 \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \oplus_{i\in I_2} \Omega^{k+1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P_2' \arrow[r, "\iota"] & P' \arrow[r] & \oplus_{i\in I_2} \Omega^k(M_i)^{\beta_i} \oplus P_2 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Usando la Observación 7.1.11 dado el cuadrado conmutativo de la izquierda del diagrama anterior, tenemos que $(\oplus_{i\in I_1}\Omega^{k+1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P'_1)P_1^v \cong (\oplus_{i\in I_2}\Omega^{k+1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P'_2)P_2^v$. Por otro lado tenemos las siguientes igualdades:

- $[(\oplus_{i\in I_1}\Omega^{k+1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P'_1)P_1^v] = \sum_{i\in I_1}\beta_i[(\Omega^{k+1}(M_i)(P_k^i)^v)]$
- $[(\oplus_{i\in I_2}\Omega^{k+1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P'_2)P_2^v] = \sum_{i\in I_2}\beta_i[(\Omega^{k+1}(M_i)(P_k^i)^v)]$

por lo tanto $\sum \alpha_i\Omega^{k+1}([M^v{}_i]) = 0$.

Si ahora suponemos que $\sum \alpha_i\Omega^{k}([M^v{}_i]) = 0$, esto implica que, por la Observación 7.1.11, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas y columnas que son isomorfismos:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \oplus_{i\in I_1}\Omega^k(M_i)^{\beta_i} \oplus P_1 \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\simeq"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \oplus_{i\in I_1}\Omega^{k-1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P'_1 \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \oplus_{i\in I_2}\Omega^k(M_i)^{\beta_i} \oplus P_2 \arrow[r, "\iota"] & P' \arrow[r] & \oplus_{i\in I_2}\Omega^{k-1}(M_i)^{\beta_i} \oplus P'_2 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

de donde tendríamos la relación $\sum \alpha_i\Omega^{k-1}([M_i]) = 0$, lo que es absurdo. Finalmente deducimos la tesis. □

Como consecuencia de los resultados antes vistos tenemos el siguiente teorema:

TEOREMA 7.1.13. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra y Q un carcaj sin ciclos, entonces*

$$\phi \dim AQ \geq \phi \dim A + 1$$

Demostración:

Se deduce de la Proposición 7.1.12. □

7.2. Álgebras Gorenstein

En esta sección veremos que para las álgebras Gorenstein, la desigualdad vista en el Teorema 7.1.13 se transforma en una igualdad. Para comenzar veremos el siguiente lema técnico.

LEMA 7.2.1. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra y Q un carcaj finito y sin ciclos. Si v es un vértice de Q_0, tenemos los siguientes resultados:*

1. *Si v es una fuente entonces $di_{AQ}(P^v) = di_A P$.*
2. *Si v no es una fuente entonces $di_{AQ}(P^v) = di_A P + 1$.*

3. *Si v es un pozo entonces $dp_{AQ}(I^v) = dp_A I$.*

4. *Si v es un pozo entonces $dp_{AQ}(I^v) = dp_A I + 1$.*

Demostración:

Las afirmaciones se deducen haciendo cuentas similares a las vistas en las Proposiciones 7.1.10 y 7.1.12. □

Como consecuencia del último corolario se deducen los siguientes resultados:

COROLARIO 7.2.2. *Si A es una $\Bbbk$-álgebra y Q un carcaj finito con al menos dos vértices y sin ciclos, entonces si A es n-Gorenstein entonces AQ es $n+1$-Gorenstein.*

COROLARIO 7.2.3. *Sea A una $\Bbbk$-álgebra y Q un carcaj finito con al menos dos vértices y sin ciclos, entonces si $di_A(A) < \infty$,*

$$\phi \dim AQ = di_A AQ + 1.$$

Demostración:

Por el Corolario 7.2.1 tenemos que $di_{AQ}AQ = di_A A + 1 < \infty$. Ahora usando la Proposición 5.0.29 tenemos que $\phi \dim AQ = di_A AQ + 1$. □

EJEMPLO 7.2.4. *Consideremos la $\Bbbk$-álgebra $\frac{\Bbbk Q}{I}$, donde el carcaj es de la forma:*

$$Q = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha_1"] \arrow[r, "\gamma_1"] \arrow[d, "\delta_1"'] & 2 \arrow[loop right, "\beta_1"] \arrow[d, "\delta_2"] \\ 1' \arrow[loop left, "\alpha_2"] \arrow[r, "\gamma_2"] & 2' \arrow[loop right, "\beta_2"] \end{tikzcd}$$

y el ideal $I = \langle \alpha_i^2, \beta_i^2, \gamma_i\alpha_i - \beta_i\gamma_i \delta_2\gamma_1 - \gamma_2\delta_1$ con $i = 1, 2\rangle$. Utilizando las herramientas dadas en [L] se prueba que el álgebra $\frac{\Bbbk Q}{I}$ es de la forma AQ', siendo $A = \frac{\Bbbk\Gamma}{I'}$ donde Γ tiene la forma que mostramos a continuación:

$$\Gamma = \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, "\gamma"] & 2 \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

el ideal $I' = \langle \alpha^2, \beta^2, \gamma\alpha - \beta\gamma \rangle$*, y además el carcaj* Q' *es de la forma:*

$$Q' = \dot{1} \longrightarrow \dot{2}$$

Por lo visto en el Ejemplo 5.0.35 tenemos que A *es* 1*-Gorenstein, por lo tanto*

$$\phi \dim(\frac{\Bbbk Q}{I}) = 2.$$

Capítulo 8

Apéndice

8.1. Álgebras de Nakayama

En esta subsección veremos que las álgebras de radical cuadrado nulo son álgebras de Nakayama si y solamente si son autoinyectivas.

NOTACIÓN 8.1.1. *Denotaremos* $\mathcal{M} = \{M_S : \Omega(M_S) = S \text{ con } S \in \mathcal{S}_D\}$.

DEFINICIÓN 8.1.2. *Decimos que un álgebra A es un* ***álgebra de Nakayama*** *si cada módulo proyectivo indescomponible y cada módulo inyectivo indescomponible es uniserial (tienen una única serie de composición).*

OBSERVACIÓN 8.1.3. *Las álgebras autoinyectivas con radical cuadrado nulo son de hecho álgebras de Nakayama con radical cuadrado nulo.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Si A es autoinyectiva, P_i el proyectivo indescomponible asociado al vértice i, es también el I_j el inyectivo indescomponible asociado al vértice j. Como el álgebra es de radical cuadrado nulo sabemos que los proyectivos indescomponibles tienen longitud de Loewy 2, por lo tanto la dimensión de los P_i es exactamente 2 tienen el top y el zócalo simples y como consecuencia tienen una única serie de composición, o sea el álgebra es de Nakayama.

($\Leftarrow$) Si A es un álgebra de Nakayama, sabemos que para cada proyectivo indescomponible y cada inyectivo indescomponible tenemos una única serie de composición. Ahora como además el álgebra es de radical cuadrado nulo, dichos módulos tienen longitudes de Loewy 2, dimensión exactamente 2, y además zócalo y top simples. Por lo tanto cada módulo proyectivo es inyectivo, o sea el álgebra es autoinyectiva.$\square$

COROLARIO 8.1.4. *Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_D$ y M_S es simple para todo $S \in \mathcal{S}_D$ entonces A es de nakayama (y en particular es autoinyectiva).*

Demostración:

Dada la siguiente sucesión exacta corta:

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow P_{M_S} \longrightarrow M_S \longrightarrow 0$$

tenemos que $l(P_{M_S}) = \dim_{\Bbbk} P_{M_S} = 2$, por lo tanto podemos ver que P_{M_S} tiene $TopP_{M_S} = M_S$ y $SocP_{M_S} = S$. Por lo tanto cada P_{M_S} es uniserial.

La restricción $\Omega|_{\{M_S\}_{S\in\mathcal{S}_D}} : \{M_S\}_{S\in\mathcal{S}_D} \to \{S\}_{S\in\mathcal{S}_D}$ resulta sobreyectiva y en consecuencia biyectiva. De esto resulta que los P_{M_S} constituyen todos los módulos proyectivos indescomponibles. Análogamente podemos probar que los inyectivos indescomponibles son también uniseriales, de lo que se deduce que A es un álgebra autoinyectiva. $\square$

8.2. Álgebras Gentiles

Esta sección está basada en el artículo [GR]. Aquí daremos una prueba que muestra que las álgebras Gentiles son Gorenstein.

DEFINICIÓN 8.2.1. *Decimos que una $\Bbbk$-álgebra es **Biserial Especial** si es morita equivalente a un álgebra $\frac{\Bbbk Q}{I}$ donde I es un ideal admisible que cumple las siguientes condiciones:*

- *En cada vértice empiezan a lo sumo dos flechas.*
- *En cada vértice terminan a lo sumo dos flechas.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\gamma \in Q_1$ tal que $\beta\gamma$ no está en I.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $\alpha\beta$ no está en I.*

DEFINICIÓN 8.2.2. *Dada A una $\Bbbk$-álgebra, decimos que es un **Álgebra Gentil** si es Biserial Especial y las siguientes condiciones se satisfacen:*

- *I está generado por caminos de longitud 2.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\gamma' \in Q_1$ tal que $\beta\gamma'$ está en I.*
- *Para cada flecha $\beta \in Q_1$ hay a lo sumo una flecha $\alpha' \in Q_1$ tal que $\alpha'\beta$ está en I.*

OBSERVACIÓN 8.2.3. *Si el álgebra A es Gentil entonces A^{op} también lo es.*

El siguiente lema nos permite reconocer a las álgebras Gentiles:

LEMA 8.2.4. *Sea $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$, donde I está generado por caminos de longitud 2. Entonces son equivalentes:*

1. A es un álgebra Gentil.

2. Existen dos funciones $\sigma, \tau : Q_1 \to \{-1, 1\}$ con las siguientes propiedades:

- *Si $s(\alpha) = s(\beta)$ y $\sigma(\alpha) = \sigma(\beta)$ entonces $\alpha = \beta$.*
- *Si $t(\alpha) = t(\beta)$ y $\tau(\alpha) = \tau(\beta)$ entonces $\alpha = \beta$.*
- *Si $t(\alpha) = s(\beta)$, entonces $\tau(\alpha) = \sigma(\beta)$ si y solamente si $\beta\alpha \in I$.*

Demostración:

($1 \Rightarrow 2$) Consideremos $v \in Q_0$. Como a lo sumo dos flechas comienzan en v, podemos definir $\sigma(\beta_1) = 1$ a una de éstas y $\sigma(\beta_2) = -1$ si hubiera otra. Ahora podemos definir τ para las flechas que terminan en v. Si no hubiera flechas que comienzan en v definimos τ de manera similar a σ, en el caso contrario supongamos que β es una flecha que comienza en v. Definimos entonces:

$$\tau(\alpha) = \begin{cases} \sigma(\beta), & \text{si } \beta\alpha \in I \\ -\sigma(\beta), & \text{en el caso contrario.} \end{cases}$$

para cada flecha α que termina en v. Claramente de esta forma se verifican las tres propiedades pedidas para las funciones σ y τ.

($2 \Rightarrow 1$) Por las primeras dos condiciones de las funciones σ y τ es claro que el carcaj puede tener a lo sumo dos flechas que comienzan y dos flechas que terminan en cada vértice. Dada $\beta \in Q_1$ si hubiera dos flechas α_1 y α_2 tales que $\beta\alpha_1 \in I$ y $\beta\alpha_2 \in I$ se tendría, por la tercera condición para las funciones σ y τ, que $\tau(\alpha_1) = \tau(\alpha_2)$ usando la segunda condición se llega a un absurdo. Las otras condiciones a verificar son análogas. $\square$

OBSERVACIÓN 8.2.5. *Dada un álgebra Gentil A con carcaj Q, donde tenemos definidas las funciones s, t, τ y σ podemos definir en Q^{op} las funciones s', t', τ', σ' de la siguiente forma:*

1. $s'(\alpha^{op}) = t(\alpha)$
2. $t'(\alpha^{op}) = s(\alpha)$
3. $\sigma'(\alpha^{op}) = \tau(\alpha)$
4. $\tau'(\alpha^{op}) = \sigma(\alpha)$

DEFINICIÓN 8.2.6. *Definimos $Q_1^{-1} = \{\alpha^{-1}$ tales que $\alpha \in Q_1\}$*

OBSERVACIÓN 8.2.7. *Podemos extender las funciones s, t, τ y σ de la siguiente manera:*

- $s(\alpha^{-1}) = t(\alpha)$

- $t(\alpha^{-1}) = s(\alpha)$
- $\sigma(\alpha^{-1}) = \tau(\alpha)$
- $\tau(\alpha^{-1}) = \sigma(\alpha)$

DEFINICIÓN 8.2.8. *Un **paseo** de longitud n en Q es una sucesión $\mathfrak{w} = w_n \cdots w_1$ de elementos de $Q_1 \cup Q_1^{-1}$ con $t(w_i) = s(w_{i+1})$ donde $1 \leq i < n$.*

DEFINICIÓN 8.2.9. *Un paseo $\mathfrak{w} = w_n \cdots w_1$ decimos que es:*

- ***Dirigido*** *si $w_i \in Q_1$ para todo $1 \leq i \leq n$.*
- ***Inverso*** *si $w_i^{-1} \in Q_1$ para todo $1 \leq i \leq n$.*

OBSERVACIÓN 8.2.10. *Podemos extender las funciones s, σ, t, τ al conjunto de los paseos de la siguiente forma: Dado $\mathfrak{w} = w_n \cdots w_1$ un paseo, definimos:*

- $s(\mathfrak{w}) = s(w_1)$
- $t(\mathfrak{w}) = t(w_n)$
- $\sigma(\mathfrak{w}) = \sigma(w_1)$
- $\tau(\mathfrak{w}) = \tau(w_n)$

DEFINICIÓN 8.2.11. *Una **palabra** es un paseo $\mathfrak{w} = w_n \cdots w_1$ donde $\tau(w_i) = -\sigma(w_{i+1})$ para $i = 1 \dots n-1$. Dado el vértice v definimos la **palabra trivial** (1_v) y su inversa formal (1_v^{-1}) de forma que: $s(1_v^\epsilon) = v = t(1_v^\epsilon)$ y $\sigma(1_v^\epsilon) = \epsilon = -\tau(1_v^\epsilon)$ para $\epsilon \in \{-1, 1\}$.*

Se asume que tanto 1_v como 1_v^{-1} tienen longitud 0.

OBSERVACIÓN 8.2.12. *Si $\mathfrak{v}$ y $\mathfrak{w}$ son dos palabras con $t(\mathfrak{v}) = s(\mathfrak{w})$ y $\tau(\mathfrak{v}) = -\sigma(\mathfrak{w})$ entonces la concatenación $\mathfrak{w}\mathfrak{v}$ es también una palabra. En el caso que $1_v^\epsilon\mathfrak{v}$ $(\mathfrak{v}1_v^\epsilon)$ sea una palabra denotamos $1_v^\epsilon\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$ $(\mathfrak{v}1_v^\epsilon = \mathfrak{v})$.*

NOTACIÓN 8.2.13. *Dados $(v, \epsilon) \in Q_0 \times \{-1, 1\}$, denotaremos con:*

- $\mathfrak{i}(1_v^\epsilon)$ *a la única palabra dirigida $\mathfrak{w}$ de longitud maximal, tal que $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}1_v^\epsilon$.*
- $\mathfrak{p}(1_v^\epsilon)$ *a la única palabra dirigida $\mathfrak{v}$ de longitud maximal, tal que $\mathfrak{v} = 1_v^\epsilon\mathfrak{v}$.*
- $\mathfrak{i}_v = \mathfrak{i}(1_v)^{-1}\mathfrak{i}(1_v^{-1})$.
- $\mathfrak{p}_v = \mathfrak{p}(1_v^{-1})\mathfrak{p}(1_v)^{-1}$.

DEFINICIÓN 8.2.14. *Dada una palabra $\mathfrak{w} = w_n \cdots w_1$, definimos $M(\mathfrak{w}) \in \operatorname{mod}\frac{\Bbbk Q}{I}$ de la siguiente forma:*

- $M(\mathfrak{w})_v = \begin{cases} \Bbbk, & si\ v = t(w_i)\ o\ v = s(w_1); \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$

- $M(\mathfrak{w})_\alpha = \begin{cases} 1_\Bbbk, & si\ \alpha = w_i \\ 0, & en\ otro\ caso. \end{cases}$

OBSERVACIÓN 8.2.15. *Los módulos asociados a las palabras $\mathfrak{p}_v$ y $\mathfrak{i}_v$ son los siguientes:*

1. *$M(\mathfrak{p}_v) = P_v$ es el proyectivo indescomponible asociado al vértice v.*

2. *$M(\mathfrak{i}_v) = I_v$ es el inyectivo indescomponible asociado al vértice v.*

DEFINICIÓN 8.2.16. *Decimos que $\beta \in Q_1$ es una flecha gentil si no hay paseos dirigidos de la forma $\beta\alpha$ tales que $\tau(\alpha) = \sigma(\beta)$.*

DEFINICIÓN 8.2.17. *Decimos que un paseo dirigido $\mathfrak{w} = w_n \cdots w_1$ es **crítico** si $\tau(w_i) = \sigma(w_{i+1})$ para todo $1 \leq i < n$.*

OBSERVACIÓN 8.2.18. *Para todo paseo crítico $\mathfrak{w} = w_n \cdots w_1$ existen a lo sumo:*

- *una flecha w_0 tal que $w_n \cdots w_1 w_0$ es un paseo crítico y*

- *una flecha w_{n+1} tal que $w_{n+1} w_n \cdots w_1$ es un paseo crítico.*

LEMA 8.2.19. *Para un álgebra Gentil $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$ existe una cota $\eta(A) \leq |Q_1|$ para la longitud máxima de los paseos críticos que comienzan en una flecha gentil.*

Demostración:

Supongamos que $w_{n+1} \cdots w_1$ es crítico con w_1 una flecha gentil, $w_1, \ldots, w_n$ diferentes dos a dos y existe $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $w_{i_0} = w_{n+1}$ para $i \leq n$. Como w_1 es gentil se tiene que $i_0 \neq 1$, por lo tanto tenemos que $w_i w_{i_0 - 1} \in I$ y $w_{i_0} w_n \in I$ lo que es absurdo. $\square$

PROPOSICIÓN 8.2.20. *Si A es un álgebra Gentil con $\eta(A)$ la longitud máxima de los paseos críticos que empiezan en una flecha gentil, entonces $\eta(A^{op}) = \eta(A)$.*

Demostración:

Supongamos que $\eta(A) = n$ y consideremos $w_n \cdots w_1$ un paseo crítico que empieza en una flecha gentil con longitud máxima. Claramente considerando en el álgebra A^{op} al paseo $w_n \cdots w_1$, tenemos que es crítico.

Si suponemos w_1 que no es gentil en A^{op}, quiere decir que hay un camino dirigido $w_1\alpha$ en Q^{op} tal que $\tau(\alpha) = \sigma(w_1)$. Esto implica que en el álgebra A hay un camino $\alpha^{op} {w_1}^{op}$ tal que $\sigma(\alpha^{op}) = \tau({w_1}^{op})$, lo que es absurdo pues $w_n \cdots w_1$ es un paseo crítico que empieza en una flecha gentil con longitud máxima. $\square$

NOTACIÓN 8.2.21. *Para una palabra* $\mathfrak{w}$ *consideramos los conjuntos:*

- $R(\mathfrak{w}) = \{\alpha \in Q_1$ *tales que* $w\alpha^{-1}$ *es una palabra*$\}$.
- $L(\mathfrak{w}) = \{\beta \in Q_1$ *tales que* βw *es una palabra*$\}$

OBSERVACIÓN 8.2.22. *Los conjuntos* $R(\mathfrak{w})$ *y* $L(\mathfrak{w})$ *tienen a lo sumo un elemento.*

LEMA 8.2.23. *Para un álgebra Gentil* $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$ *las flechas en* $L(\mathfrak{i}_v) \cup R(\mathfrak{i}_v)$ *son gentiles.*
Demostración:

Supongamos que $R(\mathfrak{i}_v) = \{\beta\}$. Si β no fuera gentil existiría una flecha α con $t(\alpha) = s(\beta)$ y $\tau(\alpha) = \sigma(\beta)$. Como $\mathfrak{i}(1_v^{-1})\beta^{-1}$ es una palabra, entonces $\mathfrak{i}(1_v^{-1})\alpha$ sería una palabra dirigida, lo que es absurdo. $\square$

NOTACIÓN 8.2.24. *Para una flecha* $\alpha = 1_v^{\epsilon}\alpha$ *denotamos con* $\mathfrak{p}(\alpha)$ *a la única palabra dirigida maximal con* $\mathfrak{p}(1_v^{\epsilon}) = \alpha\mathfrak{p}(\alpha)$.

La siguiente proposición calcula las sizigias de módulos inyectivos, lo que nos permitirá ver que estas álgebras son álgebras de Gorensten.

PROPOSICIÓN 8.2.25. *Sea* $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$ *un álgebra Gentil.*

1. *Sea* $M(\mathfrak{i}_v)$ *un* A*-módulo inyectivo indescomponible, entonces:*

$$\Omega^1(M(i_v)) = P \oplus (\oplus_{\alpha \in L(i_v) \cup R(i_v)} M(\mathfrak{p}(\alpha)))$$

   donde $P = 0$ *si* $M(i_v)$ *es uniserial y* $P = M(\mathfrak{p}_v)$.

2. *Si* $w_n \cdots w_1$ *es un paseo crítico maximal que comienza en una flecha gentil* w_1, *entonces* $\Omega^1(M(\mathfrak{p}(w_j)) = M(\mathfrak{p}(w_{j+1}))$ *para* $1 \leq j < n$ *y* $M(\mathfrak{p}(w_n))$ *es proyectivo.*

TEOREMA 8.2.26. *Sea* $A = \frac{\Bbbk Q}{I}$ *un álgebra Gentil con* $\eta(A)$ *la longitud máxima de paseos críticos que empiezan en una flecha gentil, entonces* $di_A(A) = \eta(A) = dp_A D(A)$ *si* $\eta(A) > 0$ *y* $di_A A = dp_A D(A) \leq 1$ *si* $\eta(A) = 0$. *En particular* A *es* $(\eta(A))$*-Gorenstein.*

Demostración:

Por la Proposición 8.2.25 tenemos que $dpD(A) \leq \eta(A) + \delta_{0,\eta(A)}$.

Supongamos que $\eta(A) = n > 0$ y que $w_n \cdots w_1$ es un camino crítico con w_1 gentil de longitud máxima. Si existe alguna flecha β tal que $\beta \neq w_1$ con $s(\beta) = s(w_1)$ se ve que $dpM(i_{s(\beta)}) \geq n$ ya que $\Omega(M_{i(t(\beta))}) = M(\mathfrak{p}(w_1)) \oplus M(\mathfrak{p}(\alpha))$ para otra flecha gentil α. Como claramente $dpM(\mathfrak{p}(w_1)) = n-1$ se obtiene lo esperado. En el caso de que no exista otra flecha además de w_1 que empiece en $s(w_1)$, tenemos que $\Omega(M(i_{s(w_1)})) = M(\mathfrak{p}(w_1)) \oplus M(\mathfrak{p}(\alpha))$ y se concluye lo mismo.

Como A^{op} es gentil también con $\eta(A^{op}) = \eta(A)$ se tiene que $diA = \eta(A)$.$\square$

Bibliografía

[As] I. Assem, *Algèbres et modules*, Les Presses de l'Université d'Ottawa, Ontario, Canada (1997).

[ASS] I. Assem, D. Simson,A. Skowroński, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebra 1: Techniques of Representation Theory*, LMSST **65**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (2006).

[AR1] M. Auslander, I. Reiten, *Applications of contravariantly finite subcategories*, Adv. Math., **86**, pp. 111-152 (1991).

[AR2] M. Auslander, I. Riten, *Cohen-Macaulay and Gorenstein artin algebras*, Progress in Math. **95**, Birkh auser Verlag Basel, pp. 221245 (1991).

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalø *Representation Theory of Artin Algebras*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **36** Cambridge University Press (1997).

[Au] M. Auslander, *On the dimension of modules and algebras. III. Global dimension.*, Nagoya Mathematical Journal vol. **9**, pp. 67-77 (1955).

[AB] M. Auslander, M. Bridger, *Stable module theory*, Memoirs Amer. Math. Soc. **94**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1969).

[B] H. Bass, *Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings*, Trans. Amer. Math. Soc. **95**, pp. 466-488 (1960).

[BMRRT] A. B. Buan, R. Marsh, M. Reineke, I. Reiten, G. Todorov, *Tilting theory and cluster combinatorics*, Adv. Math. **204** pp. 572-618 (2006).

[Ch] W. Chin, *A brief introduction to coalgebra representation theory*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, **237**, pp 109-131, Dekker, New York (2004).

[DNRa] S. Dăscălescu, C. Năstăsescu, S. Raianu, *Hopf algebras. An Introduction*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, **235**, Dekker, New York (2001).

[EE] E. E. Enochs, S. Estrada, *Projective representations of quivers*, Comm. Algebra. **33**(10), pp. 3467-3478 (2005).

[EJ] E. E. Enochs, O. M. G. Jenda, *Relative homological algebra*, De Gruyter Exp. Math. **30**. Walter De Gruyter Co., New York, (2000).

[EO] S. Estrada, S. Özdemir, *Finitistic Dimension Conjectures for representations of quivers* Turk. J. Math., **37**, pp. 585-591 (2013).

[FLM] S. Fernandes, M. Lanzilotta, O. Mendoza *The Phi-dimension: A new homological measure*, Algebras and Representation Theory **17** (5), (2014).

[GR] Ch. Geiß, I. Reiten, *Gentle Algebras are Gorenstein*, Fields Inst. Commun., **45**, Amer. Math. Soc., pp. 129133 (2005).

[GoR] Ch. Godsil, G. Royley *Algebraic Graph Theory*, Graduate text in mathematics, Springer, New York (2001).

[GN] J. Gómez-Torrecillas, C. Nastascescu, *Quasi-co-Frobenius coalgebras*, Journal of Algebra, **174**, pp. 909-923 (1995).

[H] D. Happel, *Selforthogonal Modules.* Abelian Groups and Modules. Math. Appl. **343**, pp. 257276 (1995).

[HLM] M. Haim, M. Lanzilotta, G. Mata, *Igusa-Todorov functions for comodules*, sometido http://arxiv.org/abs/1106.4285

[HuL] F. Huard, M. Lanzilotta, *Self-injective right artinian rings and Igusa-Todorov functions*, Algebras and Representation Theory, **16** (3), pp. 765-770 (2012).

[HuLM] F. Huard, M. Lanzilotta, O. Mendoza, *An approach to the finitistic dimension conjecture*, Journal of Algebra, **319** (9), pp. 3916-3934 (2008).

[HZ] D. Happel, D. Zacharia, *Algebras of finite global dimension*, Algebras, quivers and representations, Abel Symp., **8**, Springer, Heidelberg, 16-02 pp. 95113 (2013).

[Hui] B. Huisgen-Zimmermann, *Homological domino effects and the first finitistic dimension conjecture* Invent. Math. **108**, pp. 369-383 (1992).

[IT] K. Igusa, G. Todorov, *On finitistic global dimension conjecture for artin algebras*, Representations of algebras and related topics, pp. 201204, Fields Inst. Commun., **45**, American Mathematical Society, Providence, RI, (2005).

[KR] B. Keller, I. Reiten *Cluster-Tilted algebras are Gorenstein and stably Calabi-Yau*, Advances in Mathematics, **211**(1), pp. 123-151 (2007).

[Kh] D. Khurana *Semiperfect rings and Nakayama permutations*, Glasgow Mathematical Journal, **44**, pp. 301-309 (2002).

[L] Z. Leszczynski, *On the representation type of tensor product algebras*, Fundamenta Mathematicae. **144**(2), pp. 143-161 (1994).

[LMM] M. Lanzilotta, E. Marcos, G. Mata *Igusa-Todorov functions for radical square zero algebras* preprint

[LMS] M. Lanzilotta, O. Mendoza, C. Saenz *Relative Igusa-Todorov functions for abelian length categories* preprint.

[M] C. Manolescu, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the Triangulation Conjecture*, preprint http://arxiv.org/abs/1303.2354

[NTV] C. Năstăsescu, B. Torrecillas, F. Van Oystaeyen, *When is a Coalgebra a Generator?*, Algebras and Representation Theory, **11** (2), pp. 179-190 (2007).

[P] B. Pareigis, *Categories and Functors*, Academic Press, vol **39** (1970).

[R] J. Rotman, *An Introduction to Homological algebra*, Academic Press, vol **85** (1979).

[S] D. Simson, *Coalgebras, comodules, Pseudocompact algebras and tame comodule type*, Colloquium Mathematicum, **90**(1), pp. 101-150 (2001).

[Sw] M. E. Sweedler, *Hopf Algebras*, Benjamin, New York (1969)

[Zh] Pu Zhang, *A brief introduction to Gorenstein projective modules*, Notas http://www.math.uni-bielefeld.de/ sek/sem/abs/zhangpu4.pdf

[Zi] B. Zimmermann, *Predicting syzygies over monomial relations algebras*, Manuscripta Mathematica, **70**(1), pp. 157-182 (1991).