



**dECON**

**Facultad de Ciencias Sociales**

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

## **Documentos de Trabajo**

**Una generalización del modelo de crecimiento de Solow. Nuevos supuestos, nuevas conclusiones.**

**Santiago Picasso González**

**Documento No. 10/21**

Octubre 2021

ISSN 0797-7484



**Ciencias Sociales**  
Universidad de la República  
URUGUAY



**dECON**  
Facultad de Ciencias Sociales

# Una generalización del modelo de crecimiento de Solow

Nuevos supuestos, nuevas conclusiones

Santiago Picasso González

Documento de trabajo basado en la tesis para la obtención del título de magíster en  
Economía. Tesis defendida y aprobada en noviembre de 2020  
Departamento de Economía - Facultad de Ciencias Sociales  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay

Agosto de 2021

## RESUMEN

Este trabajo desarrolla una reformulación del modelo de Solow (de ahora en adelante MS). La dinámica de la población de este modelo es exógena, con tasa de crecimiento de la población (de aquí en adelante TCP) constante. Se modifica este supuesto. En primer lugar se endogeniza la TCP, a través de la trayectoria del consumo. Este hecho estilizado se ilustra empíricamente. Bajo estas nuevas restricciones la TCP deja de ser constante con una evolución no monótona. En consecuencia, el modelo presenta soluciones distintas del modelo canónico. Pueden existir varios equilibrios y en particular una trampa de pobreza. Además, si ocurre que la población alcanza tasas negativas de crecimiento, se puede obtener un crecimiento económico endógeno al modelo, sin necesidad de suponer rendimientos marginales constantes o crecientes. Los efectos de un cambio exógeno de la tecnología o de la tasa de ahorro, se generalizan. Bajo ciertas restricciones se apartan de los resultados obtenidos en MS. Existe un umbral a partir del cual el progreso técnico o el aumento en el ahorro, no incrementa ni el stock del capital ni el producto en el corto plazo. Finalmente, se muestra que nada asegura convergencia entre países (ni absoluta, ni relativa). Los resultados sugieren que la dinámica de la población es un supuesto relevante para explicar porqué los países crecen de manera distinta y alcanzan productos per capita disímiles.

Palabras claves:

Teoría de crecimiento, población endógena, convergencia, Solow.

## ABSTRACT

This paper develops a reformulation of the Solow model (hereinafter MS). The population dynamics of this model is exogenous, with a constant population growth rate (hereinafter TCP). This assumption is modified. First, TCP is endogenized, through the consumption path. This stylized fact is illustrated empirically. Under these new restrictions, TCP ceases to be constant with a non-monotonic evolution. Consequently, the model presents solutions different from the canonical model. There may be several equilibria and in particular a poverty trap. Furthermore, if it happens that the population reaches negative growth rates, economic growth endogenous to the model can be obtained, without the need to assume constant or increasing marginal returns. The effects of an exogenous change in technology or in the savings rate are generalized. Under certain restrictions they deviate from the results obtained in MS. There is a threshold beyond which technical progress or an increase in saving does not increase either the capital stock or the product in the short term. Finally, it is shown that nothing ensures convergence between countries (neither absolute, nor relative). The results suggest that population dynamics is a relevant assumption to explain why countries grow differently and achieve dissimilar per capita products.

Keywords:

Theory growth, endogenous population, convergence, Solow.

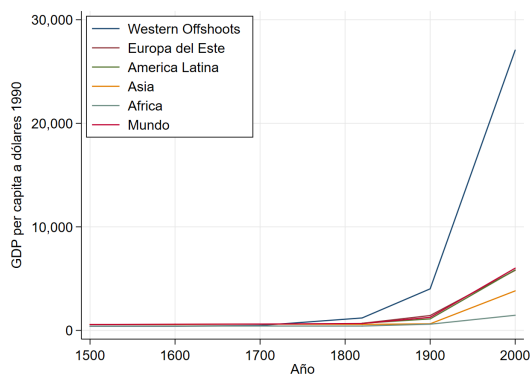
# 1. Introducción

La literatura del crecimiento económico se encarga de estudiar sus determinantes. A pesar de haber sido estudiado por más de cincuenta años, se trata de un fenómeno relativamente nuevo en la historia de la humanidad. En los últimos diez milenios, anteriores a la revolución industrial el proceso de crecimiento fue nulo o muy lento y cíclico (Becker et al., 1999). Sólo en los últimos doscientos años sucede un período de crecimiento exponencial (ver figura 1.1). El cual evolucionó de forma contemporánea con el crecimiento exponencial de la población (ver figura 1.2). Estas tendencias similares motivaron la idea de un vínculo estrecho entre ambas. Hace décadas Kuznets (1987) destacaba esta relación:

“Debido a estos impactos de las tendencias en la población y sus componentes en el crecimiento económico de las naciones, no se puede formular una teoría del crecimiento económico sin tenerlos en cuenta. El hecho de que estas tendencias de la población y sus determinantes inmediatos, a su vez, se vean afectados en muchos momentos por los procesos económicos, es una razón más para tratar de incorporarlos como elementos integrales en una teoría del crecimiento económico. Por desacreditadas que estén las “leyes” de la población propuestas por los economistas clásicos y por Marx, el enfoque general de incluir tales leyes en un análisis del crecimiento de las naciones o del capitalismo parece eminentemente sólido. La separación que se ha desarrollado desde sus días entre la teoría y el estudio demográficos y la teoría y el análisis económicos apenas puede mantenerse si se quiere desarrollar una teoría sustentable del crecimiento económico.”

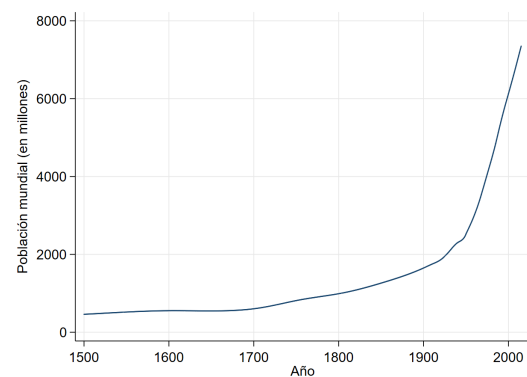
(Kuznets (1987): 6)

**Figura 1.1:** Evolución del GDP



Fuente: Madisson, 2003.

**Figura 1.2:** Evolución de la población mundial

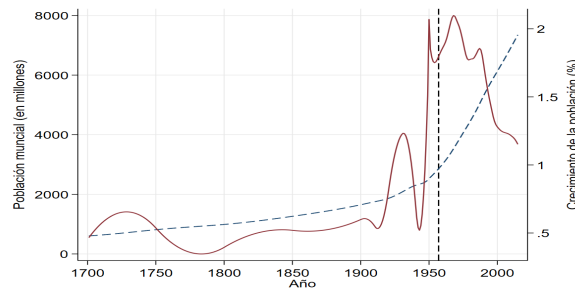


Fuente: One World in Data.

Con la aceleración del crecimiento de la población mundial ocurrido en el siglo XX, se alentó la idea del límite al crecimiento. Basado en la restricción derivada de recursos naturales finitos. Este es el contexto en que Solow escribió su famoso artículo sobre crecimiento económico (Solow, 1956). Este hecho se ilustra en el gráfico 1.3. En el siglo XXI, la

trayectoria de la población cambia. A partir de los 60, se revierte la tendencia y comienza a decrecer. Más aún, hay consenso entre demógrafos en que la población está tendiendo a estabilizarse, en consecuencia, la tasa de crecimiento de la población (TCP) parece tender a cero (ver gráfico 1.3). Cuando China e India culminen su transición demográfica, la población del planeta podría alcanzar una cota. Aún más, algunos autores han comenzado a cuestionar que pasaría si esta decrece (Jones, 2020).

**Figura 1.3:** Evolución de la población mundial y su tasa de crecimiento



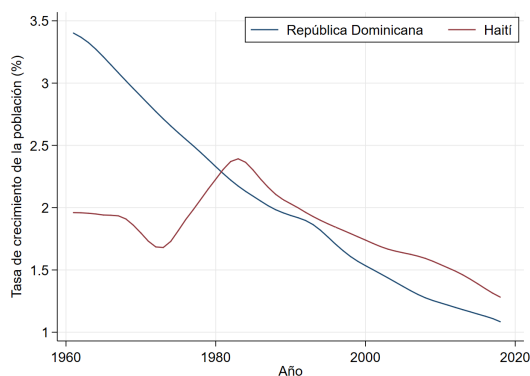
Fuente: One world in data.

La población mundial ha tenido varias fases de crecimiento, explicada por las variaciones en las tasas de natalidad y mortalidad. Cuando la natalidad descienda en todo el mundo, se esperaría una estabilización de la población. Según la demografía, de las proyecciones hasta el momento esta predicción presenta la mayor verosimilitud (Naciones Unidas, 2019). Dicho esto, las proyecciones brindadas por las Naciones Unidas no son concluyentes. Estas indican varios escenarios posibles en los cuales la población podría tener diversas dinámicas. Por un lado, podría ocurrir un escenario de TCP que tienda a cero. Por otro lado, podría existir un leve aumento de la TCP. Finalmente, un escenario en el cual la TCP sea negativa. Esto último implicaría pérdida de población en términos absolutos. En una dimensión puramente teórica esta dinámica si se reprodujera por un número elevado de generaciones implicaría el regreso a poblaciones pre siglo XX. Esta dinámica de la población tiene consecuencias en la literatura de crecimiento mencionada.

Una aplicación de la teoría del crecimiento económico, es analizar la convergencia que pueden existir entre países (Barro y Sala-i Martín, 1991) . ¿Por qué algunos países crecen más que otros? ¿Que países crecen más? ¿A que velocidad? Existen un conjunto de explicaciones no excluyentes. Probablemente sean endógenas a un modelo explicativo más complejo. Sin embargo, a los efectos de este trabajo, el foco estará en la población. El principal objetivo del trabajo es mostrar teóricamente la relevancia que tiene el supuesto que describe la dinámica de la población de una economía. Su modificación determinará (como se verá) nuevas conclusiones. El Modelo de Solow (MS de aquí en más), tan frecuentemente usado para en análisis de la convergencia y sus implicancias para el desarrollo depende de forma crítica del supuesto que se discute en este trabajo. Más aún, patrones distintos de trayectoria de la población alineados con la evidencia actual permiten arribar a con-

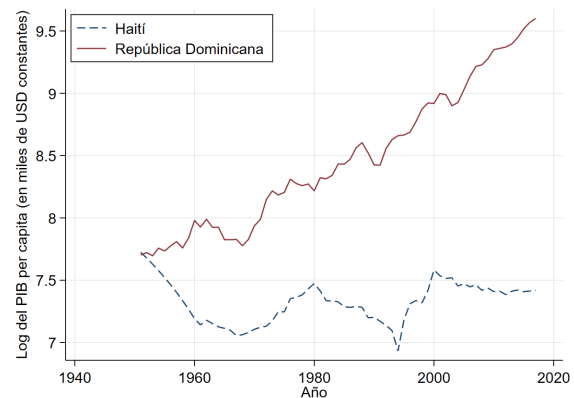
clusiones distintas.

Ahora bien, ¿que factores explican que economías similares entre si hayan tenido patrones tan divergentes de crecimiento?. ¿Por qué la convergencia condicional o incondicional no permite explicar algunos comportamientos de acumulación y crecimiento? Un ejemplo utilizado por De la Croix (2015) permite introducir de mejor manera el tema de la presente tesis. ¿Por qué países tan similares (Haití y República Dominicana utiliza el autor)<sup>1</sup> tuvieron un comportamiento divergente a pesar de compartir un conjunto de características históricas, culturales y geográficas? Las opciones de respuestas son varias: la historia, las condiciones iniciales diferentes que determinan una dependencia al pasado; las instituciones, entendidas como las reglas de juego las cuales determinan las relaciones y comportamientos entre individuos (North y Alt,1990) . Pero, ¿podría argumentarse que la dinámica de la población en dichos países pudiese haber tenido algún rol en dicha divergencia? Al observar los patrones de crecimiento de ambos países, se nota la brecha en el ingreso per capita, a pesar de comenzar en la década de 1940 con ingresos similares (ver figura 1.5). Una contracara de estos patrones de acumulación de riqueza, son su TCP. Una explicación de la figura 1.5, podría ser la evolución que se muestra en la figura 1.4. Este ejemplo es solo a los efectos de motivar la discusión e incorporar una nueva arista, a la explicación de la divergencia entre países. Los factores institucionales e históricos son insoslayables. Vale enfatizar que este trabajo no intenta sustituirlos, ni pasarlos por alto. El objetivo es complementar las explicaciones de este tipo.



**Figura 1.4:** Tasa de crecimiento de población (%)

Fuente: One world in data



**Figura 1.5:** PIB per capita en logaritmo (PPA a USD 2011).

Fuente: Elaboración propia en base a Penn World Table siguiendo a De la Croix (2015).

En concreto este trabajo tiene por objetivo estudiar como varían las conclusiones teóricas que se derivan de MS si se modifica el supuesto de evolución de la población. Se utilizará este modelo por varios motivos. En primer lugar, a pesar de ser un modelo

<sup>1</sup>Los considera por ser países con orígenes similares que habitan una misma isla, pero pueden existir ejemplos más felices ya que el autor no considera factores históricos e institucionales que influyeron en esta divergencia de la dinámica de acumulación de riqueza.

clásico en la literatura, aún sigue siendo citado en un conjunto amplio de trabajos. En segundo lugar, sigue siendo el principal modelo teórico enseñado en cursos típicos de macroeconomía y crecimiento económico tanto a nivel de grado como de posgrado (ver los manuales de [Sala-i Martin \(2000\)](#) o [Acemoglu et al. \(2004\)](#)). A pesar de sus debilidades, continúa funcionando como el marco teórico por excelencia. Ya sea para ser utilizado como estructura teórica para una investigación empírica o como marco para criticarlo y posicionarse en las antípodas a sus postulados y conclusiones. En este sentido, utilizar este modelo simple y clásico en la historia del pensamiento económico, permite obtener resultados que sean entendibles y de interés para un amplio espectro en el abanico de la investigación académica y de la docencia que aborda el tema.

El trabajo está organizado en esta introducción y cinco capítulos adicionales. En el capítulo 2 se muestra brevemente cuál fue la evolución y cuál es el estado de la literatura del crecimiento económico en general y se profundiza en la literatura que resignifica el MS y también en el supuesto de la población. Se profundiza en modelos teóricos que desarrollan nuevas derivaciones al MS, lo que algunos autores lo han dado a llamar Solovian models (ver [Cavusoglu y Tebaldi, 2006](#)). En el capítulo 3 se introduce y analiza el modelo reformulado. En el capítulo 4 se realiza un estudio de estática comparativa. En el capítulo 5 se muestran nuevos resultados que discuten la literatura de convergencia y se especifica un modelo que exhibe crecimiento sostenido endógeno sin necesidad de asumir rendimientos crecientes. Finalmente, en el capítulo 6 se concluye el trabajo resumiendo los principales resultados y planteando la agenda pendiente.



## 2. Literatura relacionada

La teoría de crecimiento económico tiene por objetivo comprender y explicar cuales son las interacciones entre fenómenos económicos, tecnológicos y sociales que determinan que las sociedades presenten una mejora en la cantidad y calidad de bienes producidos. ¿Por qué algunas economías crecen más que otras? ¿Por qué países que antes eran pobres ya no lo son? Son preguntas desafiantes que han movilizado a economistas y científicos en general buscando entender cual es “la maldita partícula” (Tórtola, 2018) que hace que el crecimiento suceda.

En los modelos teóricos de crecimiento económico más utilizados y citados en la literatura (Solow, 1956; Ramsey, 1928; Romer, 1990) no se repara en el supuesto de crecimiento exponencial de la población. En general se asume que esta crece a una tasa constante. Esto significa que el crecimiento de la población tendería al infinito al largo plazo lo que no se condice con la evidencia empírica. En efecto, la misma muestra como la TCP está en declive. De hecho, los pronósticos indicarían que la población mundial tendería a enlentecer su crecimiento hasta alcanzar una cota en el próximo siglo, e incluso algunos trabajos se cuestionan si la población mundial dejará de crecer. ¿Que consecuencias tiene esto en los resultados teóricos, que implicancias tiene incorporar este nuevo supuesto? ¿Cómo se puede modelizar este nuevo hecho estilizado proveniente del campo demográfico, disciplina habitualmente alejada del campo disciplinar económico?

Más importante para los objetivos de este trabajo es que la literatura económica del crecimiento considera a la población como una variable exógena al problema económico. En general se pregunta cual es el efecto en las variables endógenas como el capital y el producto, ante un cambio en la TCP. Sin embargo, no se cuestiona la relación bidireccional entre acumulación de capital que puede existir directa o indirectamente y la variación de la población. Si la población se utiliza como un proxy de la oferta laboral, su dinámica afectaría al mercado de trabajo y la relación entre acumulación de capital y mano de obra. Por lo tanto, parecería adecuado utilizar modelos en los cuales la dinámica poblacional dialogue con la dinámica de las variables económicas explicativas del modelo. En este sentido, la contribución de este trabajo es desarrollar un modelo teórico el cual se considera que la población depende del consumo per capita que a su vez depende del producto y este del capital. Por lo tanto la población es endógena al modelo a diferencia de la mayoría de los modelos que se enseñan en los libros de texto habituales (Barro y Sala-i Martin, 1991). Esto como veremos agrega complejidad, desemboca en nuevas soluciones de equilibrio y se derivan nuevas conclusiones, a partir de la modificación de un simple supuesto.

En concreto, la literatura de crecimiento económico se clasifica en dos grandes tipos de modelos que explican su dinámica. La primera generación de modelos son aquellos considerados como exógenos dentro de los cuales se encuentran el propio modelo de Solow (1956), el de Swan (1956) y el desarrollado por Ramsey (1928). Estos modelos son considerados exógenos porque no permiten explicar el crecimiento económico en el largo plazo

a no ser por la ocurrencia de variaciones en un momento del tiempo de variables no explicadas por el propio modelo (variaciones exógenas). En MS habitualmente se argumenta que solo es posible crecer ante mejoras constantes en la tecnología a lo largo del tiempo. Por este mismo motivo se critica a esta familia de modelos ya que no explican realmente el crecimiento de las economías. Los rendimientos marginales decrecientes que operan en ellos hacen que exista un equilibrio en el cual la economía alcanza un estado estacionario, por lo que no son capaces de replicar (sin la incorporación del progreso técnico exógeno) el crecimiento sostenido de ciertas economías a lo largo del tiempo. Por ejemplo, Estados Unidos, ha crecido durante los últimos 100 años a una tasa promedio de dos por ciento anual (Jones, 2016: 5). Esto no queda recogido por este tipo de modelos. A medida que operan los rendimientos marginales decrecientes la tasa de crecimiento se va desintegrando. Un corolario de estos modelos es que existiría convergencia entre los ingresos de cada uno de los países, lo que implica que países con iguales características convergerían a un mismo estado estacionario donde los países más pobres crecerían, durante la transición, más rápido que sus pares más ricos.

A partir de esas críticas la teoría de crecimiento económico tuvo un período de estancamiento. Posteriormente, el artículo de [Romer \(1986\)](#) inaugura una nueva rama de la literatura del crecimiento económico, los tipos de modelos endógenos. En este tipo de modelos es posible explicar el crecimiento sin necesidad de un shock exógeno como ocurría en MS. En palabras de Romer:

A diferencia de los modelos basados en rendimientos decrecientes, las tasas de crecimiento pueden aumentar con el tiempo, los efectos de pequeñas perturbaciones se pueden amplificar por las acciones de agentes privados. Los países grandes siempre pueden crecer más rápido que los países pequeños. Se ofrece evidencia a largo plazo en apoyo de la relevancia empírica de estas posibilidades

(Romer, 1986: 1002)

Con estas nuevas especificaciones se logra reproducir la evidencia empírica de no convergencia entre economías, este modelo y los siguientes permiten tener patrones de crecimiento diferenciados por país, más allá de que compartan tasas de ahorro, depreciación y población iguales. El anterior modelo de Romer, junto con [Lucas \(1988\)](#), [Rebelo \(1991\)](#) y [Barro \(1991\)](#), añaden externalidades que genera la difusión del conocimiento entre productores y agregan capital humano que contrarrestan los rendimientos marginales decrecientes del capital. Sin embargo, estos modelos no incorporaban una teoría que explicara el progreso técnico. Posteriormente, la literatura de crecimiento endógeno utilizó modelos en los cuales se explicaba el crecimiento a través de la inversión en investigación y desarrollo y sus efectos derrame (Acemoglu, 2002; Romer, 1990; Aghion y Howitt, 1992; Hall y Jones, 1999; Grossman y Helpman, 1990). Parte de esta literatura, introduce la población sin

detenerse en la interacción que puede existir entre esta y el crecimiento económico. Tampoco se explicita por qué en algunos modelos la población es fija, o crece a tasa constante. Además, algunos modelos como por ejemplo Aghion y Howitt (1992) tienen el problema del efecto escala. Este tipo de modelos concluye que el crecimiento depende del tamaño de la población de una sociedad (asociado linealmente a la incorporación de tecnología). Un aumento de la población provocaría un aumento de investigadores y científicos (*ceteris paribus*) que provocaría un aumento en el crecimiento económico. Como bien hace notar Jones (1998) esta predicción es problemática porque significa que el crecimiento de la población debería llevar a acelerar el crecimiento del ingreso per cápita, lo cual no se corresponde con la evidencia (Jones, 1995b). Posteriormente, distintos autores especifican nuevos modelos dentro de esta literatura de difusión de ideas incorporando variaciones en la dinámica del cambio tecnológico, corrigiendo este efecto de escala (Acemoglu 2002; Romer, 1990; Aghion y Howitt, 1992; Hall y Jones, 1999; Grossman y Helpman, 1990). Todos estos trabajos, reparan en la población como un laboratorio de ideas pero no en la verosimilitud del supuesto de la dinámica de la población. Por ejemplo Segerstrom (1998), supone un crecimiento exponencial de la población. Adicionalmente, estos modelos analizan la dinámica del desarrollo tecnológico intertemporalmente como fuente fundamental que cataliza el crecimiento. Sin embargo, no prestan atención a la interacción del cambio tecnológico que repercute en la dinámica de la población, a través de los canales de disminución de la mortalidad y los métodos anticonceptivos que disminuyen la natalidad. En resumen, la población tiene un lugar relevante en estos modelos pero sin problematizar en los supuestos detrás de su dinámica. En este sentido, es que también cobra relevancia esta investigación. En la literatura principal del crecimiento la población ha sido tratada de manera laxa.

Considerando esta ausencia existente en la literatura de crecimiento económico es que emergen un conjunto de trabajos en los cuales se utilizan modelos con tasas de crecimiento de la población que replican la evidencia empírica. Por ejemplo en Accinelli y Brida (2005) se utiliza un modelo de Ramsey en el cual la dinámica de la población no tiende a infinito cuando  $t$  lo hace. Sino que se utiliza una ley de crecimiento de la población conocida como Von Bertalanffy. Esto permite que la población se estabilice cuando el tiempo se hace infinito. Guerrini (2006) utiliza una dinámica de crecimiento de la población logística y lo aplica a MS. Esta literatura continúa con un conjunto de trabajos cuyo patrón general es el de introducir este tipo de dinámicas a los modelos (Cai, 2012; Ferrara y Guerrini, 2008; Gori et al., 2018). Estos modelos son considerados como exógenos dentro de la subclasificación de artículos que introducen modificaciones al supuesto de dinámica de la población. Esta literatura mejora las especificaciones de los modelos teóricos tradicionales de la teoría de crecimiento antes revisados, ya que incluye dinámicas de la población sustentada por la evidencia empírica. Sin embargo, no recoge el vínculo que tiene la población con la acumulación de capital y otras variables como la tecnología. Por

este motivo surge una literatura complementaria y muy cercana a esta que incorporan a la población como una variable explicativa del modelo. Es decir se considera a esta como endógena. En esta línea de trabajos se incorporan los trabajos de Galor y Weil (2000) , Becker et al. (1960), Becker et al. (1990), así como trabajos de matemática aplicada como Zhang (2014).

Una literatura alternativa que es necesario mencionar, ha sido desarrollada por Galor (2005), la cual también considera a la población como endógena e intenta explicar la evolución del crecimiento económico a lo largo de la historia. Esta teoría conocida como la Teoría Unificada del Crecimiento, tiene por objetivo modelizar las diferentes etapas del crecimiento económico a lo largo de la historia de la humanidad. En primer lugar, el autor expone los hechos estilizados. Un periodo de miles de años con escaso crecimiento, donde la sociedad esta sumida en la trampa Malthusiana. El crecimiento permite una mejora en los estándares de vida que incrementa la población, lo que provoca que el ingreso per capita prácticamente permanezca incambiado. Posteriormente se ingresa en un período post malthusiano a partir de la revolución industrial, dónde la riqueza per capita comienza a elevarse a pesar de que en forma concomitante también comienza a incrementarse la población. Finalmente, el autor plantea una etapa de crecimiento económico sostenido dónde el cambio tecnológico más que compensa el aumento de la población. Esta teoría, el autor argumenta, que es superadora a las teorías tradicionales ya que estas últimas son fragmentos de la teoría total que explica el crecimiento económico. Por ejemplo, argumenta que

Los modelos de crecimiento neoclásico (con cambios tecnológicos endógenos o exógenos), por el contrario, son compatibles con el proceso de crecimiento de las economías desarrolladas durante el régimen de crecimiento moderno, pero no captan la evolución de las economías durante la época de Malthus, el origen del despegue de la época malthusiana al régimen post-malthusiano, y las fuentes de la transición demográfica y la aparición del régimen de crecimiento moderno.

(Galor,2005:221 )

En la misma línea, existe una literatura que aborda el tema. Hay trabajos que estudian la conexión entre fecundidad y crecimiento económico. El modelo Malthusiano planteaba una relación entre crecimiento económico y crecimiento poblacional. En el período en el cual estudiaba Malthus, en la revolución industrial incipiente, el autor constataba una restricción al crecimiento vinculada a la alimentación. Malthus argumentaba que la población crecía más rápido que los ingresos generados, por lo tanto, ese aumento de la población mayoritariamente agrícola se topaba con la restricción de un recurso acotado, finito, no reproducible como la tierra que reducía la proporción de alimentos per capita. Esto trae aparejado aumentos de mortalidad y caídas de natalidad hasta ajustarse en

el equilibrio inicial. En este contexto, las mejoras tecnológicas determinan aumentos de población, no así mejoras de bienestar (De la Croix, 2015). Con el desarrollo de la revolución industrial, la terca evidencia dejó en desuso este modelo debido a que ya no lograba explicar la nueva realidad que surgían a partir de los datos. Luego “los neoclásicos burlan esta contradicción enfocándose en la acumulación endógena de capital en lugar de en las decisiones de fecundidad” (Akcigit, 2017: 6). Los estudios de crecimiento y población continuaron con teorías macroeconómicas con fundamentos microeconómicos que intentaban explicar como los hogares toman las decisiones de tener hijos, en este sentido el aporte de Becker et al. (1960) es seminal. En el se estudia el trade-off entre calidad y cantidad a la hora de tener hijos y el costo de oportunidad que tiene educarlos. Luego se suceden, una serie de trabajos sobre teoría de crecimiento económico en los cuales se introduce las decisiones de fecundidad en los modelos (Barro y Becker, 1989) . En Becker et al. (1990) se introduce un modelo de familia dónde se hace endógena la decisión de tener hijos. El trabajo encuentra que en contextos de capital humano elevado el retorno de dicho capital con relación al retorno de tener hijos también lo es. En contraste, cuando existe poco stock de capital humano, el retorno relativo de tener hijos es mayor. Por este motivo, encuentran dos estados estacionarios uno con alto capital humano y pocos hijos, el otro con la situación contraria. A partir del modelo se concluye que las sociedades con escaso capital humano decidirán tener familias más numerosas con una menor inversión por niño, que aquellas con capital humano elevado (Akcigit, 2017).

Finalmente, se detalla los desarrollos teóricos referidos a la dinámica de la población en MS. Esta revisión se hizo a partir de una búsqueda exhaustiva.<sup>1</sup> Nuevamente, en esta revisión de trabajos que reformulan MS existen dos tipos de literatura: endógena y exógena. La literatura que reformula el supuesto de la población lo estudia principalmente otorgándole una forma funcional a la evolución de la población. Esta función depende exclusivamente del tiempo por lo tanto este tipo de modelos se consideran estrictamente exógenos en relación con la modelización de la población. Por otro lado, la literatura de población endógena hace depender a la población de características como por ejemplo el capital físico, capital humano u otra variable que convierte a la población en una variable conceptualmente endógena. Aquí se revisaron ambos tipos de literatura, pero teniendo en consideración que estén enmarcadas en el MS.

En Fanti y Manfredi (2003) el trabajo tiene por objetivo estudiar el efecto de incorporar una oferta de trabajo endógena al MS debido a la existencia de i) un retraso en el proceso de reclutamiento en la fuerza laboral, debido a la estructura de edad de la población y ii) de una relación malthusiana entre fecundidad y salario. En este caso los autores parten de MS continuo, pero en el cual incorpora una función de crecimiento poblacional

---

<sup>1</sup>Por un lado se utilizó el motor de búsqueda de Scopus, utilizando las palabras “Solow” y “population” entre el período 2008 y 2019. Además, se realizó una búsqueda con la palabra Solow en el buscador “<https://ideas.repec.org/>”. Se consideraron todos los artículos académicos con la palabra Solow que estuviesen contenidos en el abstract y que pudieran referirse a una modelización teórica.

la cual depende de la función de producción de la economía actual y pasada. De esta manera los autores argumentan que las decisiones de fecundidad dependen de las decisiones de fecundidad en generaciones anteriores. Por lo tanto, “la oferta de trabajadores en el mercado no puede aumentarse rápidamente cuando aumentan los salarios, ni disminuirse rápidamente cuando caen” (Fanti y Manfredi, 2003:103). En realidad, esto podría suceder mediante migración pero los autores no lo consideran. Con esta incorporación en el modelo, los autores logran replicar dos hechos que se sustentan empíricamente. El crecimiento equilibrado, pero con oscilaciones constantes en torno a su media. A su vez, en su modelo ponen en duda el supuesto de que la tasa de cambio de la oferta de trabajo sea una función del ingreso actual ( $t$ ). Sugieren que el cambio en la tasa de crecimiento de la oferta de trabajo debe considerar los cambios acumulativos de esta para que se reflejen efectivamente en un cambio en dicha oferta. Sin embargo, plantean que considerar una relación entre tasa de crecimiento e ingreso en el momento  $t$  también es útil para arribar a las mismas conclusiones. El término entre paréntesis de la ecuación 2.1 refleja este hecho, en el que la oferta de trabajo es endógena y dependiente de sumatorias de decisiones pasadas.

$$\dot{k} = sk^\alpha - \left( \int_{-\infty}^t n(k^\alpha(\tau)) G(t - \tau) d\tau \right) k \quad (2.1)$$

Dónde  $\tau$  representa retardos de la variable tiempo ( $t$ ),  $n$  es la TCP que es función del capital en el momento  $\tau$ . La función  $G$ , es una función kernel que se asume pertenece a las funciones de densidad Erlang. Esta función en el término de la ecuación tiene por objetivo considerar las tasas de crecimiento poblacionales pasadas además de la del momento  $t$ , pero con la particularidad de que tiene una memoria persistente. Esto significa que la tasa de crecimiento del momento  $t$ , tiene en cuenta no solo dicho momento sino un intervalo estrecho de momentos pasados. De esta forma, los autores argumentan representar de mejor manera la acumulación de la oferta laboral a lo largo del tiempo. El trabajo encuentra como al utilizar una oferta de trabajo endógena la solución del equilibrio original de Solow, puede presentar soluciones inestables. Las cuales incorporan oscilaciones persistentes a través de bifurcaciones<sup>1</sup>. En todo caso, los casos inestables diferentes al equilibrio de Solow, se encuentran para un valor de  $\alpha < 0.88$ . Los autores argumentan que el modelo logra replicar dos hechos económicos conocidos. Un camino estable de crecimiento, pero, a diferencia de Solow le agrega oscilaciones en torno a la senda de crecimiento. Además, en este caso, el ahorro es determinante del crecimiento al largo plazo. Cuando en Solow esto no era así.

En Stamova y Stamov (2012) , se retoma el modelo propuesto por Fanti y Manfredi (2003) pero argumentan que este no considera los posibles efectos de perturbaciones externas o internas al modelo que pueden ocurrir sobre la oferta de trabajo. Pueden existir

---

<sup>1</sup>“La teoría de la bifurcación se ocupa de las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales que dependen de un parámetro real cuando ese parámetro pasa por valores críticos en los que las soluciones exhiben un cambio cualitativo de carácter.” (Marsden et al., 1978)

variaciones repentinas, por ejemplo en tasas de nacimientos o catástrofes, que modifiquen la relación  $K/L$ . Por lo tanto, proponen modificar dicho modelo considerando perturbaciones impulsivas. Estas perturbaciones pueden hacer que el sistema estable se convierta en inestable y viceversa. Luego utiliza el método Lyapunov-Razumikhin para resolver el sistema y obtiene condiciones suficientes para la estabilidad del modelo.

Otro modelo que introduce rezagos de la variable del capital es el planteado en Guerri- ni y Sodini (2013) . Este trabajo utiliza el MS original, sin hacerle ninguna modificación en la especificación de la estructura en las formas funcionales que componen la dinámica. Notar que las dos ecuaciones (ver ecuaciones 2.2 y 2.3) representan la dinámica de acumulación del capital, las cuales solamente las diferencian un parámetro  $\tau$ . Este parámetro está reflejando el hecho de que el capital se hace productivo luego de cierto lapso de tiempo.

$$\dot{K}(t) = K(t - \tau)^\alpha L(t)^{1-\alpha} - \delta K(t) \quad (2.2)$$

$$\dot{K}(t) = K(t)^\alpha L(t)^{1-\alpha} - \delta K(t) \quad (2.3)$$

Con este simple cambio, rezagar en una fracción  $\tau$  de tiempo el efecto que tiene la inversión inicial, la dinámica del capital se convierte de la siguiente manera:

$$\dot{k} = s (L^{-1}L_d)^\alpha k_d^\alpha - \delta (L^{-1}L_d) k_d - \frac{\dot{L}}{L}k \quad (2.4)$$

En la ecuación 2.4 se usa la notación  $x_d$  para indicar que el estado de la variable  $x$  en el momento  $t - \tau$ . Lo llamativo y que se desea destacar es como la modificación en el momento del tiempo en que la inversión tiene efectos, cambia la dinámica del modelo introduciendo ciclos económicos, sin introducir mecanismo de retroalimentación ad-hoc. Esto es una diferencia con los modelos anteriormente descritos, ya que la existencia de múltiples equilibrios y dinámicas caóticas no emerge por el cambio en la dinámica de la TCP ( $n$ ), sino que surge de la propia dinámica. Como consecuencia de esto, la dinámica del capital en este modelo ya no es estable necesariamente sino que puede tener equilibrios estables y bifurcaciones según el valor de los parámetros  $n$ ,  $\alpha$  y  $\tau$ . Aquí nuevamente la población juega un rol relevante en la solución del modelo y no tiene una participación trivial, ni lineal en la solución.

En Cai (2012) se desarrolla un modelo teórico de crecimiento a la Solow pero enfocándose en la capacidad de carga de una población. Esta refiere al nivel máximo que puede soportar una población dado los recursos que tiene del ambiente para sobrevivir. El autor supone que la capacidad de carga de la población humana se ve afectada por el crecimiento económico. De esta manera obtiene un sistema dinámico de dos dimensiones, con un único equilibrio distinto de cero y la solución es asintóticamente estable y converge al equilibrio. Encontrando un crecimiento de la población que pasa de cero a positivo y

luego vuelve a ser cero. De esta manera se explica la transición demográfica a partir de la interacción entre el crecimiento de la economía y la capacidad de carga de la población.

En otros trabajos se puede observar como surge dinámicas que difieren del modelo tradicional, las cuales incorporan como endógena a la población. Esto se puede ver en Bucci y Guerrini (2009) , dónde los autores utilizan un MS con función de producción AK. En este modelo el supuesto de la evolución de la población difiere a la modelización tradicional. La variación de la población la modelizan como una ecuación Verhulst:  $\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n - bL_t$ ,  $b > 0$ . Cuya solución es:

$$L_t = \frac{nL_0e^{nt}}{n - bL_0 + bL_0e^{nt}} \quad (2.5)$$

El sistema presenta dos ecuaciones con dos variables endógenas el capital y la población. El resultado es un conjunto infinito de estados estacionarios si  $sA - \delta$  es igual a cero y sin estado estacionario en caso contrario.

En Ferrara y Guerrini (2008) los autores plantean un modelo en tiempo continuo, en el cual el cambio en el tiempo de la oferta laboral está determinado por una función logística para la TCP. Este trabajo encuentra un único equilibrio global en el modelo el cual es asintóticamente estable.

Con relación a la formulación discreta de los modelos de Solow, se encontraron un número relativamente menor de trabajos. En Brianzoni et al. (2009) se formula un modelo discreto, en el cual se incluye una dinámica de la población con forma logística, dónde la TCP es  $n$ . Esta entra de manera endógena al modelo a través del siguiente sistema:

$$T := \begin{cases} n' = \mu n(1 - n) \\ k' = \frac{1}{1+n} \left[ (1 - \delta)k + (k^\rho + 1)^{\frac{1-\rho}{\rho}} (s_w + s_r k^\rho) \right] \end{cases} \quad (2.6)$$

Las variables  $x'$  representan las variables en el momento  $t + 1$ . Además incorpora dos tipos de agentes (trabajadores y accionistas). La particularidad de este modelo son tres: las tasas de ahorros son constantes pero difieren en cada tipo, la función de producción es CES y bajo estas dos especificaciones se encuentran dinámicas complejas cuando las elasticidades entre los factores de producción son menor que uno.

En Fanti et al. (2013), se combina un modelo a la Solow con una dinámica endógena que incorpora la distribución etaria de la población. El modelo encuentra desde una hasta cinco sendas de crecimiento equilibrado. Obteniendo desde una trampa Malthusiana, hasta un crecimiento económico endógeno.

Este trabajo tampoco desconoce que existe una amplia literatura al respecto en la cual se explica por que países quedan atrapados en trampas de pobreza (Azariadis and Stachurski, 2005) o de ingresos medios (Eichengreen et al., 2013). En otros trabajos se



enfatisa la importancia de factores institucionales, como las olas democráticas que jugaron un papel en el crecimiento (Acemoglu et al., 2019). Esta investigación hace foco en la dinámica de la población. Claro está que esta última puede verse influida por todos estos factores anteriores, por lo tanto la causa última de esta explicación poblacional podría deberse a los factores anteriores. Por ejemplo, el baby boom de posguerra provocado por factores culturales (Mankiw y Weil, 1989) . La política China de un hijo por familia también es un claro ejemplo, esta medida a su vez fue tomada por factores económicos existiendo indudablemente un estrecho vínculo entre dinámica económica y población (Pan, 2014). También la dinámica de patrones culturales patriarcales que atraviesan y atraviesan a la sociedad, puede y podría influir en la dinámica de la población. Cambios culturales como la incorporación femenina al mercado laboral determina no solo efectos en la oferta de trabajo, sino que trae consecuencias en la postergación de las decisiones de tener hijos, haciendo que los nacimientos sean más tardíos y la cantidad de hijos nacidos por generación descienda (Jones (2016):28).

A partir de esta revisión de literatura realizada surge el interés en poner en relación la literatura principal de crecimiento económico, con los trabajos revisados de matemática aplicada. Estos últimos han hecho el esfuerzo de profundizar en la importancia de una buena especificación teórica del problema económico para explicar la dinámica del crecimiento económico. Este trabajo, se enmarca en la intersección de ambas literaturas, recoge la preocupación de hacer endógena la población, pero (aunque sin pérdida de rigurosidad) con un desarrollo menos intenso en derivaciones y demostraciones matemáticas lo que a su vez puede ser una ventaja para exponer los resultados de manera clara para un público amplio.

### 3. El modelo de Solow con tasa de crecimiento de la población endógena

En este capítulo<sup>1</sup> se discute como varían los resultados a los que se arriba en MS, si en lugar de utilizar el supuesto de crecimiento de la población exógeno y constante se opta por incorporarlo endógenamente. Además se adiciona una forma funcional que refleje la evolución medida empíricamente desde el período de posguerras. En los apartados siguientes se utilizará el modelo neoclásico de Solow (1956). Por un lado se escoge este modelo porque aún se sigue utilizando como marco teórico de investigaciones y de enseñanza económico. Por lo tanto, es útil para mostrar la relevancia de los supuestos en la teoría y las conclusiones a las que se llega en forma deductiva. Por otro, ha sido ampliamente utilizado y los hallazgos de este trabajo posibilitan ser difundidos e interpretados por una comunidad académica amplia. Finalmente, hay literatura que fundamenta que MS aún tiene vigencia en términos metodológicos y no ha sido sustituido en su totalidad por los modelos posteriores tradicionalmente llamados endógenos (Cavusoglu y Tebaldi, 2006).

En concreto en este apartado se desarrollará el modelo teórico en el cual se sustenta la investigación, dónde se busca estudiar los efectos que se suceden al considerar endógena a la población.

MS parte del supuesto de que la economía produce un único bien  $Y$ , que puede ser consumido o invertido indistintamente. En términos coloquiales, el modelo permite utilizar para consumo en un momento del tiempo las máquinas que no fueron utilizadas en momentos anteriores. Esta economía presenta una función de producción  $F(A, K, L)$ , dónde  $K$  es el stock de capital de la economía,  $L$  es la mano de obra y  $A$  es el estado de la tecnología o la productividad de factores que presenta la economía. En  $F$  se incorpora el progreso tecnológico en el sentido de Hicks. La función  $F$  exhibe las siguientes características:

$$Y(t) = A.F(K(t), L(t)) \quad (3.1)$$

$F$  además verifica las condiciones habituales:

1.  $\frac{\partial F(K,L)}{\partial K} > 0$  ,  $\frac{\partial F(K,L)}{\partial L} > 0$  ,  $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial K^2} < 0$  ,  $\frac{\partial^2 F(K,L)}{\partial L^2} < 0$ .

La función de producción es derivable en sus factores, con derivada parcial positiva. Es decir que un incremento de uno de los factores, aumenta la producción indefectiblemente. Pero, operan los rendimientos marginales decrecientes, por lo tanto la derivada segunda respecto al mismo factor es negativa.

Incrementar un factor sin incrementar el otro tiene efectos positivos en el ingreso pero a tasa decreciente. Al extremo significa que la incorporación de una máquina

---

<sup>1</sup>Parte de este capítulo y el siguiente fue publicado en el artículo Cayssials, G. Picasso, S. (2020). The Solow-Swan model with endogenous population growth. *Journal of Dynamics Games*, 7(3): 197-208. doi: 10.3934/jdg.2020014.

nueva por ejemplo para cosecha sin aumentar el número de operarios implicaría el mismo producto obtenido a pesar de la incorporación técnica. Igualmente con este supuesto siempre la incorporación de nuevo capital conlleva un incremento adicional, aunque sea infinitesimal, en la producción.

2.  $F(K, 0) = F(0, L) = 0; \forall K, L \in R$ . Económicamente significa que la función de producción necesita de ambos factores para producir. Por lo tanto, en ausencia de capital o trabajo no se obtiene producto.
3.  $F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L); \forall \lambda, K, L \in R$  Esta condición de rendimientos constantes a escala, implica que al aumentar los factores de producción en una misma proporción el producto aumenta en dicha proporción. Matemáticamente lo que permite cumplir esta condición económica es la propiedad de que la función sea homogénea de grado uno .
4.  $\lim_{K \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow 0} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = +\infty; \lim_{K \rightarrow +\infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = \lim_{L \rightarrow +\infty} \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} = 0$  Se cumplen las condiciones de Inada.

El capital se deprecia a una tasa constante  $\delta$ . Además, considerando el único bien de la economía el cual se puede utilizar para invertir, la ecuación de ingreso de la economía se puede representar de la siguiente manera:

$$Y(t) = AF(K(t), L(t)) = C(t) + \dot{K}(t) + \delta K(t), \delta \in (0, 1) \quad (3.2)$$

La tasa de ahorro de la economía se considera exógena y constante  $s$ . Por lo tanto, la acumulación de capital es representada de la siguiente forma:

$$\dot{K}(t) = sAF(K(t), L(t)) - \delta K(t) \quad (3.3)$$

$$\frac{\dot{K}(t)}{K(t)} = s \frac{Y(t)}{K(t)} - \delta = s \frac{Y(t)}{L(t)} \frac{L(t)}{K(t)} - \delta = s \frac{Af(k(t))}{k(t)} - \delta \quad (3.4)$$

$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$  es el ratio capital-trabajo y  $Af(k(t)) = \frac{AF(K(t), L(t))}{L(t)}$  es el producto per capita. La función de producción per capita cumple las siguientes propiedades:

1.  $f(0)=0$
2.  $f'(k) > 0 \forall k \in R^+$
3.  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f'(k) = 0,$
4.  $\lim_{k \rightarrow 0^+} f'(k) = +\infty$
5. y  $f''(k) < 0 \forall k \in R^+$

Luego, para poder analizar la evolución de la dinámica de la acumulación per capita se debe reformular la ecuación 3.4. Para eso se deriva  $k(t) = \frac{K(t)}{L(t)}$ :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\left(\frac{\dot{K}(t)}{L(t)}\right)}{\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)} = \frac{\frac{\dot{K}L - K\dot{L}}{L^2}}{\frac{K}{L}} = \frac{\dot{K} - K\frac{\dot{L}}{L}}{K} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \quad (3.5)$$

Sustituyendo  $\frac{\dot{K}}{K}$  en 3.4 y sabiendo que  $\frac{\dot{L}}{L}$  es igual a  $n$  se obtiene finalmente la dinámica del capital per capita;

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s \frac{Af(k(t))}{k(t)} - (\delta + n) \quad (3.6)$$

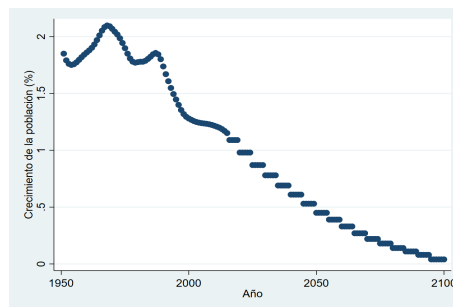
Esta ecuación 3.6 es la ya conocida ecuación diferencial que se deriva de MS. Dónde  $n$ , es un parámetro exógeno, por lo cual no depende de la variable endógena del modelo. Ahora, en el siguiente apartado se levantará esta restricción.

### 3.1. Dinámica de la población

Si se excluye la migración (o se considera la economía mundial), la evolución de la población básicamente se explica por la diferencia entre la tasa de natalidad y la tasa de mortalidad. Los dos indicadores claves para entender la evolución de la población son: La tasa de fertilidad total que “representa la cantidad de hijos que tendría una mujer si viviera hasta el final de sus años de fertilidad y tuviera hijos de acuerdo con las tasas de fertilidad actuales específicas por edad.” (Banco Mundial, 2018b). Asimismo el otro factor explicativo es la mortalidad, que usualmente se mide a través de la esperanza de vida al nacer la cual se define como “la cantidad promedio de años que un recién nacido viviría si fuera sujeto a tasas de mortalidad específicas por edad observadas en un año determinado” (Banco Mundial, 2018a).

Como fuera detallado antes, la evolución de la población no ha sido exponencial sino que la transición demográfica llevó a una desaceleración en el crecimiento de la población, y esta podría tender a cero. Esto queda reflejado en el gráfico 3.1, el cual muestra una evolución de la TCP mundial decreciente.

**Figura 3.1**

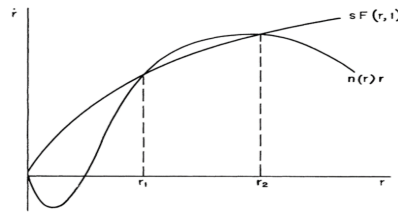


Fuente: Bongaarts (2009)

Más allá de esta evolución, el objetivo principal es introducir esta tasa  $n$  de manera endógena en MS. Para esto, como se fundamentó, se la debe hacer depender del capital

per capita de la economía. Por lo tanto se buscará una función que mapee el capital (o una transformación de este) con el crecimiento poblacional. Vale puntualizar que el desarrollo teórico de Solow (1956) no dejó este tema sin mencionar. Fue planteado como una posibilidad teórica<sup>1</sup> sin desarrollar analíticamente sus consecuencias, aunque sí Solow (1956) esboza una posible relación con el capital en un gráfico de su artículo (gráfico 3.2).

**Figura 3.2:** Variación de la población.



Fuente: Solow (1956)

Sin embargo, más allá del planteo teórico de dicha forma funcional, se debería justificar si empíricamente surge esta relación. Por lo tanto, en la especificación de este nuevo modelo, al que se le nombrará como modelo con población endógena (MPE), se utiliza una forma funcional que intente replicar la especificación de la figura 3.1 y 1.3. Exigiendo que a su vez sea endógena en el modelo. Par cumplir este propósito se hará depender al crecimiento de la población de una variable del modelo de tal forma que esta relación se sustente empíricamente. Una opción podría ser tomar el camino de Corchón (2016), dónde se utiliza una TCP lineal, dependiente del salario de forma Malthusiana. Sin embargo, en la presente tesis se opta por alejarnos de esa especificación en dos sentidos. Primero, se escoge una relación no lineal. Segundo, se hace depender al crecimiento de la población del consumo en lugar del salario. Para esto, se sigue el trabajo de Hansen y Prescott (2002) el cuál relaciona la TCP con el consumo per capita. Los autores consideran un modelo de generaciones solapadas dónde la población son hogares (le llaman  $N$ ). Estos hogares en el momento  $t$  crecen a una tasa con una forma funcional  $g$ , la cual depende del consumo de los hogares jóvenes en el período  $t$  (notado por  $c_{1t}$ ), según la siguiente ecuación 3.7.

$$N_{t+1} = g(c_{1t}) N_t \quad (3.7)$$

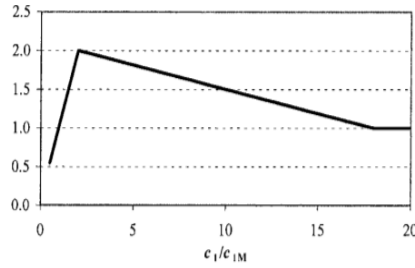
Dicha forma funcional, depende del consumo ya que representa el estándar de vida del hogar joven en el momento  $t$ . Según la calibración del modelo presentado por los autores, la forma funcional que encuentran de la función  $g(c_{1t})$ <sup>2</sup> es la presentada en el gráfico 3.3.

A partir de estas constataciones es que se introduce la crítica al supuesto de población constante de Solow y se incorpora una nueva especificación del supuesto de TCP ( $n$ ). Se

<sup>1</sup>“Crecimiento poblacional variable. En lugar de tratar la tasa relativa de aumento de la población como una constante, podemos convertirla más clásicamente en una variable endógena del sistema.” (Solow (1956), p.90)

<sup>2</sup>En realidad para ser precisos la función  $g$  es deflactada por una constante  $c_M$  (valor arbitrario para que el modelo sea consistente con la dinámica en la era Malthusiana pre revolución Industrial)

**Figura 3.3:** función g



Fuente: Extraído de Hansen y Prescott (2002).

escoge una relación no lineal representada por la función  $n(c(k(t)))$  la cual tiene la forma descrita en la ecuación 3.8.

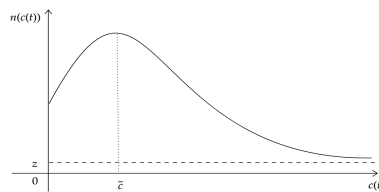
$$n(c(k(t))) = n[(1-s)Af(k)], \text{ con } n(c(k(t))) > 0 \quad (3.8)$$

donde  $n(\cdot)$  es una función continua, diferenciable que verifica las siguientes propiedades:

1.  $\exists c_0$  tal que  $n'(c) \geq 0, \forall c \leq c_0$
2.  $n'(c) < 0, \forall c > c_0$ .
3.  $\lim_{c \rightarrow +\infty} n(c) = 0$

Una ventaja de esta forma funcional es que el supuesto de Solow es un caso particular, ya que  $n(c)$  sería constante. Gráficamente la forma funcional de  $n$  queda representada como se muestra en la figura 3.4.

**Figura 3.4:** Relación entre  $n$  y  $c$



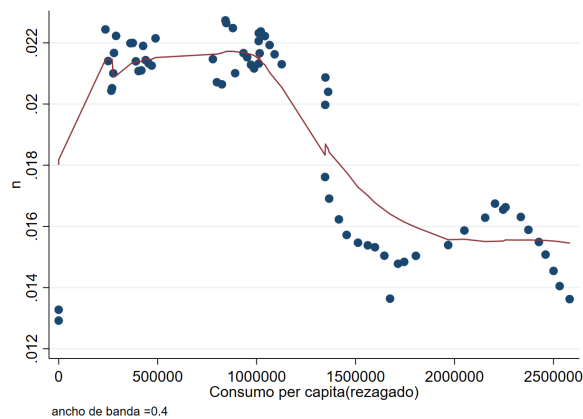
Como se puede notar, a diferencia de la ecuación 3.4 en MPE ya no considera la tasa  $n$  como exógena sino que depende del consumo que a su vez depende del capital. Con esta especificación la dinámica del modelo viene representada por la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$g_k = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s \frac{Af(k(t))}{k(t)} - [\delta + n((1-s)Af(k))] \quad (3.9)$$

Sin embargo, más allá de la especificación teórica en relación a  $n(c)$  que se postuló anteriormente, se requiere contrastar esta forma funcional con la evidencia empírica para

saber si se reproduce en forma adecuada dicha relación. Por lo tanto, para fundamentar dicha forma funcional se realizó el siguiente ejercicio empírico a nivel mundial: se vinculó la TCP con el consumo per capita y luego se incorporó un ajuste mediante medias móviles para mostrar la relación entre ambas variables, que es lo reflejado en el gráfico 3.5.

**Figura 3.5:** Relación entre  $n$  y  $c$ . Período 1950-2018



Fuente: Penn World Table 9.1.

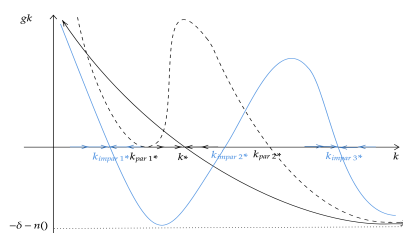
Al observar el vínculo entre TCP mundial y el consumo per capita en el período comprendido entre 1950 y 2018 (ver 3.5), se desprende esta relación no lineal. En primer lugar, interesa destacar que esta tasa de crecimiento no es constante, desechando la idea de tasa  $n$  exógena y fija. Aunque no solo eso, sino que dicha tasa presenta una relación similar a la forma teórica asignada (comparar con figura 3.4). Vinculando este hallazgo con lo planteado por Hansen y Prescott (2002), se podría hipotetizar que las zonas con un producto per capita bajo, fundamentalmente basada en acumulación vía producción de bienes primarios se asocia con una economía más próxima a una era Malthusiana y las economías ricas con un patrón de acumulación intensivo en conocimiento. Por lo que al considerar la población mundial se está teniendo en cuenta estos dos tipos de economía. Por este motivo la relación es similar a Hansen y Prescott (2002) que modelizaban el pasaje de la era preindustrial a la pos industrial. A su vez, esta relación podría estar reflejando que el aumento de la riqueza y del consumo, estimule mejoras tecnológicas que aumenten la población vía disminución de mortalidad. Como predice Becker et al. (1990), a medida que el retorno por el capital humano aumenta tener menos hijos permite invertir en su educación lo que disminuye la fecundidad. Asimismo, se podría argumentar que el aumento del consumo (y el cambio tecnológico) también sucede en nuevos bienes, como anticonceptivos, que permiten reducir el número de nacimientos. Este proceso trae aparejado un incremento en el consumo con un incremento de la población en un primer tramo, luego, la expansión del consumo lleva a fases de transición demográfica de baja natalidad y mortalidad que estabilizan la población concomitantemente al aumento de riqueza y consumo.

## 3.2. Estado estacionario, estabilidad y otras derivaciones

La incorporación del nuevo supuesto que atraviesa este trabajo, tiene una consecuencia fundamental. La no linealidad y la endogeneidad de la TCP determina que puedan existir un conjunto de equilibrios en la economía teórica formulada que se mostrará a continuación. Esto es una diferencia importante respecto a un conjunto de modelos en la teoría de crecimiento y en particular MS, recordar que la solución de este modelo es única (y estable).

En este caso es simple mostrar analíticamente que podría suceder con los estados estacionarios del modelo endógeno sugerido. Se podría alcanzar un equilibrio, dos equilibrios, tres equilibrios y hasta un número natural  $N$  mayor a tres si se relajara el supuesto que muestra la figura 3.4. Esto se muestra en el gráfico 3.6.

**Figura 3.6:** Ejemplificación de posibles equilibrios



Fuente: Elaboración propia

A continuación se expondrán los hallazgos que se desprenden de MPE.

**Proposición 1.** *El modelo tiene al menos un estado estacionario*

*Demostración.* Se estudia el límite de la función 3.9 para  $k$  tendiendo a cero y a infinito.

$$\lim_{k \rightarrow 0} g_k = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{sAf(k)}{k} - \delta - n[(1-s)Af(k)] = +\infty \quad (3.10)$$

El límite de  $n$  siempre da una constante debido a su forma funcional. Además,  $Af(k)$  y  $k$  son funciones continuas y sus derivadas son distintas de cero, cuya indeterminación es  $\frac{0}{0}$  en el límite. Por lo tanto, aplicando la regla de l'Hôpital se llega a que:

$$\lim_{k \rightarrow 0} g_k = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{sAf(k)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{sAf'(k)}{1} = +\infty$$

Esto implica que hay un  $k$  positivo, cercano a cero donde la función  $g$  toma un valor positivo. De igual manera, se llega al límite de la función cuando  $k$  tiende a infinito.

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} g_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{sAf(k)}{k} - \delta - n[(1-s)Af(k)] = -\delta - n[(1-s)Af(k)] \quad (3.11)$$



Como  $g_k$  es una suma de funciones que se supusieron continuas, entonces por el teorema de Bolzano, es posible afirmar que la función tendrá al menos un cero. Por lo tanto, existirá al menos un equilibrio.  $\square$

**Observación 1.** *A diferencia del modelo de Solow, MPE podría alcanzar múltiples equilibrios. Esto implica que existiría una trampa de pobreza y un estado de ingreso alto (ver fig.3.6).*

En la figura 3.6 se muestra las posibles formas funcionales que podría tener la dinámica del capital. Gráficamente (ver 3.6), se ejemplifica las posibles soluciones del modelo. El cual puede alcanzar entre uno y tres (dada la función de crecimiento de población elegida). En dicho gráfico se observa la evolución de la tasa de crecimiento del capital ( $g_k$ ), no el capital  $k(t)$ .

MPE con un equilibrio reflejaría un estado estacionario estable, similar a MS. Luego MPE podría presentar dos equilibrios, dónde la economía en el  $k_{par1}$  fuese inestable y llevara a desacumulación continua hasta cero y otro  $k_{par2}$  estable. En el caso de tres estados estacionarios, la dinámica particular de la población permite en este modelo tener equilibrios “buenos” y “malos”. Aquí aparecen trampas de pobreza pero también equilibrios con un nivel de riqueza relativamente alto. En ambos casos se alcanzan soluciones sin crecimiento endógeno. Estas, traen aparejadas consecuencias llamativas (que se mostrarán más adelante) en las derivaciones de los ejercicios de estática comparativa y en términos de convergencia y su velocidad.

La figura 3.6 es un simple análisis cualitativo. Para estudiar la estabilidad desde un punto de vista formal algebraicamente se utiliza la aproximación lineal del modelo en torno al estado estacionario.

La dinámica de el capital es:

$$g(k) = \frac{\dot{k}}{k} = \frac{sAf(k)}{k} - [\delta + n(c(k))] \quad (3.12)$$

Para obtener la solución al equilibrio y estudiar su estabilidad se utiliza la aproximación lineal en las proximidades al estado estacionario  $k^*$ . La aproximación para este caso sería  $g(k) = g(k^*) + g'(k^*)(k - k^*)$ . En el estado estacionario  $g(k^*)$  es igual a cero. Por lo que para especificar la ecuación que aproxima el crecimiento se debe obtener la tasa de crecimiento  $g(k)$  valuada en el capital de equilibrio. Es decir se debe obtener  $g'(k^*)$ , que es lo que se hará a continuación :

$$g'(k^*) = \frac{sAf'(k^*)k - sAf(k^*)}{k^{*2}} - n'(c(k^*))c'(k^*) = \frac{sAf'(k^*)}{k^*} - \frac{sAf(k^*)}{k^*} \cdot \frac{1}{k^*} - n(c'(k^*))c'(k^*) \quad (3.13)$$

$$g'(k^*) = \frac{sAf'(k^*)}{k^*} - \frac{sAf(k^*)}{k^*} \cdot \frac{1}{k^*} - n(c'(k^*))(1-s)Af'(k^*) \quad (3.14)$$

La aproximación lineal es la siguiente:

$$g(k) = \left[ \frac{sAf'(k^*)}{k^*} - \frac{sAf(k^*)}{k^*} \cdot \frac{1}{k^*} - n(c'(k^*))(1-s)Af'(k^*) \right] (k - k^*) \quad (3.15)$$

Notar que en la ecuación 3.15 el caso de MS es uno particular en el cual la TCP es constante, lo que es equivalente a decir que la derivada de  $n$  es cero. En este caso, la ecuación es la siguiente:

$$g(k) = \left[ \frac{sAf'(k^*)}{k^*} - \frac{sAf(k^*)}{k^*} \cdot \frac{1}{k^*} \right] (k - k^*) \quad (3.16)$$

Por lo que es simple demostrar que  $\frac{sAf'(k)}{k} - \frac{sAf(k)}{k} \cdot \frac{1}{k} < 0$  si solo si  $f'(k) < \frac{f(k)}{k}$ . Sin embargo, en MPE esta relación ya no necesariamente se cumple. Ahora, para que equilibrio sea estable la condición que se debe cumplir es la siguiente:

$$f'(k^*) \left[ 1 - \frac{(1-s)}{s} k^* n' \right] < \frac{f(k^*)}{k^*} \quad (3.17)$$

**Observación 2.** *Bajo una función de producción con rendimientos marginales decrecientes, es condición suficiente para encontrar un estado estacionario, que la TCP sea creciente en el equilibrio.*

Si se utiliza la función de producción habitual Cobb-Douglas la condición 3.17 en el caso de MS es la ya conocida:  $\alpha < 1$ . Para el caso del modelo revisado la condición a cumplir se generaliza a:  $\alpha \left[ 1 - \frac{(1-s)}{s} k^* n' \right] < 1$ . Esto, implica que se cumpla la siguiente condición:  $\frac{\alpha-1}{\alpha} < \frac{(1-s)}{s} k^* n'$ .

Por lo tanto, bajo el supuesto de rendimientos marginales decrecientes, tasas marginales crecientes aseguran equilibrios económicos, sin embargo TCP decrecientes podrían implicar situaciones inestables del sistema económico.

### 3.3. Ejemplo

Ahora se expondrá un ejemplo simulado para mostrar posibles soluciones de MPE. En primer lugar se elige una TCP  $n(c)$  que cumpla las propiedades teóricas antes expuestas :

$$z(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (3.18)$$

dónde se elige los parámetros de la normal que reflejen una curva plausible empíricamente. Para esto se seleccionan los siguientes parámetros  $\mu = 6$  y  $\sigma = 3$ , que además deben

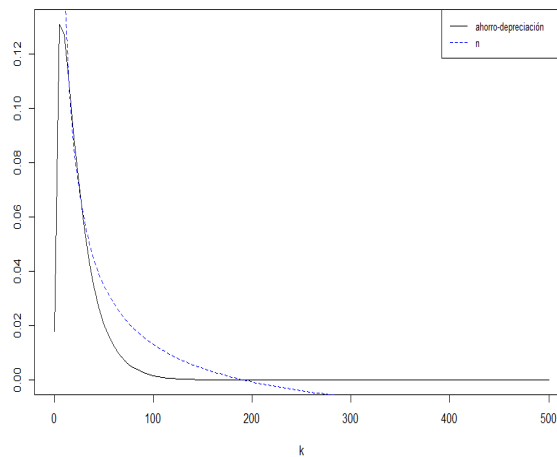
permitir obtener tres equilibrios. A su vez se escoge utilizar la función Cobb-Douglas habitual, con un coeficiente  $\alpha = 1/3$ . Por lo tanto se obtiene la siguiente dinámica del modelo:

$$g(k) = \frac{1}{1 + \frac{e^{-(c(k)-22)^2/(2*5^2)}}{5\sqrt{2\pi}}} * \left[ sAk^{\alpha-1} - \left( \delta + \frac{e^{-(c(k)-22)^2/(2*5^2)}}{5\sqrt{2\pi}} \right) \right] \quad (3.19)$$

Para la simulación se consideran los siguientes valores plausibles para los parámetros:  $A = 4$ ;  $s = 0.2$  y  $\delta = 0.03$ .

En la simulación (ver figura 3.7) existen tres  $k^*$ , los cuales toman los siguientes valores:  $k^* = 14.29$ ,  $k^* = 26.81$  y  $k^* = 192.16$ . Al considerar la función de producción Cobb-Douglas, se llega a los siguientes tres ingresos per capita de estado estacionarios:  $y^* = 9.70$ ,  $y^* = 11.97$  y  $y^* = 23.08$ . Esto implica que si existen dos economías con similares características una podría quedar atrapada en una trampa de pobreza y la otra en un estado alto de riqueza relativa. Al largo plazo una economía sería un 137% más rica que su par, a pesar de tener características estructurales iniciales similares. Esto último se puede entender mejor, si se supone que ambas economías comienzan con capitales iniciales similares en el entorno a  $k^*$  igual a 26.81 (equilibrio inestable). Luego ocurre un shock infinitesimal, exógeno, en el capital de ambas economías (pero en sentidos contrarios), que modifica sus dinámicas económicas. Entonces, por el simple hecho de suponer que la TCP depende del consumo de los individuos, la dinámica del modelo llevará a resultados muy diferentes de una economía respecto a su par, a pesar de partir de condiciones casi idénticas.

**Figura 3.7:** Múltiples equilibrios



**Proposición 2.** Si la TCP utilizada en el modelo de Solow ( $n_s$ ), es mayor que la TCP endógena  $n(k_{endo}^*)$ , entonces existe un capital de equilibrio mayor que el capital de Solow.

*Demostración.* En Solow el equilibrio es el siguiente:

$$\frac{sAf(k_s)}{k_s^*} - \delta - n_s = 0 \quad (3.20)$$

En el modelo endógeno:

$$\frac{sAf(k_{endo^*})}{k_{endo^*}} - \delta - n(c(k^*)) = 0 \quad (3.21)$$

Suponiendo el mismo equilibrio entonces:

$$sA \left[ \frac{f(k_s^*)}{k_s^*} - \frac{f(k^*)}{k^*} \right] = n_s - n(c(k^*)) \quad (3.22)$$

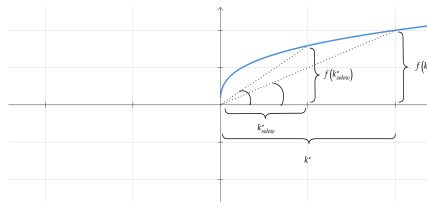
Si

$$n_s > n(k^*) \Rightarrow \frac{f(k_s^*)}{k_s^*} > \frac{f(k^*)}{k^*}$$

□

Por lo tanto la pendiente es mayor en el caso de Solow, lo que significa que el  $k_s^* < k^*$ . Se puede demostrar gráficamente la proposición (ver gráfica 3.8).

**Figura 3.8:**  $k_s^* < k^*$



Fuente:Elaboración propia

Hasta aquí se caracterizó al MPE y se derivaron algunas consecuencias de asumir el nuevo supuesto. Se mostró que la modificación del supuesto que determina la trayectoria de la población no es trivial respecto a los resultados teóricos a los que se llega. El equilibrio ya no es necesariamente único. La estabilidad no está asegurada y la convergencia mucho menos. Países con características similares no deberían necesariamente, como aseguran los modelos neoclásicos que predicen convergencia, alcanzar estados de desarrollo similares. Economías con características semejantes podrían divergir. Unas alcanzarían estados de estancamiento con niveles de renta relativamente bajos (trampas de pobreza) y otras estados con alto  $y^*$ .

## 4. Análisis de estática comparativa

La nueva especificación de MS, arroja no solo nuevos resultados de equilibrio, sino que hay un rico análisis que se desprende del tradicional estudio de estática comparativa. Es aquí que interesa mostrar cuales serían los resultados de instrumentar un shock de las variables exógenas para entender cual es el efecto en el equilibrio.

En el modelo de crecimiento original (MS) las variables exógenas tienen un resultado lineal en la variable endógena. Incrementar el ahorro tendría un efecto positivo en el capital de equilibrio. Lo mismo sucede con la tecnología. Por otro lado, la depreciación y el crecimiento de la población tenían un efecto negativo en el capital per capita de equilibrio de la economía. Esto es simple de ver, al observar la ecuación 4.1 de equilibrio de MS con función de producción Cobb-Douglas.

$$k^* = \left[ \frac{sA}{(n + \delta)} \right]^{1/(1-\alpha)} \quad (4.1)$$

Dónde formalmente se pueden resumir los efectos de estática comparativa del modelo en los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k^*(A,s,\delta)}{\partial A} > 0, & \quad \frac{\partial k^*(A,s,\delta)}{\partial s} > 0, & \quad y \quad \frac{\partial k^*(A,s,\delta)}{\partial \delta} < 0; \\ \frac{\partial y^*(A,s,\delta)}{\partial A} > 0, & \quad \frac{\partial y^*(A,s,\delta)}{\partial s} > 0, & \quad y \quad \frac{\partial y^*(A,s,\delta)}{\partial \delta} < 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

El objetivo de las secciones siguientes es la derivación de los resultados de estática comparativa para el MPE. Se estudiará si existen efectos con relaciones biunívocas entre la modificación del valor de una variable exógena ( $z$ ) y la correspondiente variable endógena  $k$ , como ocurre en MS o si pueden existir relaciones no lineales que hagan que las conclusiones de cual es el efecto ya no sea trivial.

La estática comparativa consistirá en realizar el diferencial de la variable endógena respecto a la exógena (llamémosle  $z$ ):

$$\begin{aligned} dk^* &= \frac{\partial g_k}{\partial k} dk^* + \frac{\partial g_k}{\partial z} dz \\ 0 &= \frac{\partial g_k}{\partial k} dk^* + \frac{\partial g_k}{\partial z} dz \end{aligned}$$

El efecto de un cambio en la variable  $z$  en la variable endógena  $k$  estará medido por la siguiente ecuación:

$$\frac{dk^*}{dz} = - \frac{\frac{\partial g_k}{\partial z}}{\frac{\partial g_k}{\partial k}}$$

Además se sabe que los estados estacionarios estables se darán en los casos con pendiente negativa. Por lo tanto en la estática comparativa interesará observar sólo el signo del numerador para saber cualitativamente el efecto de la variable exógena en la endógena. Esto es lo que se hará en las secciones siguientes.

## 4.1. Efecto de una variación en la tecnología

**Proposición 3.** *A partir de un estado estacionario inicial, un aumento de la tecnología, no genera necesariamente un incremento del capital  $k^*$ . Dónde debe cumplirse la siguiente condición para que un aumento en la tecnología genere un incremento en el capital per capita de equilibrio:*

$$n'(c(k^*))(1-s)f(k^*) < \frac{sf(k^*)}{k^*} \quad (4.3)$$

*Demostración.*

$$dg_k = s \left[ \frac{Af'(k^*)k^* - Af(k^*)}{k^{*2}} \right] dk^* - n'[(1-s)Af(k^*)]Af'(k^*)(1-s)dk^* \quad (4.4)$$

$$+ \frac{sf(k^*)}{k^*} dA - n'[(1-s)Af(k^*)](1-s)f(k^*)dA = 0$$

$$\frac{dk^*}{dA} = \frac{n'[(1-s)Af(k^*)](1-s)f(k^*) - \frac{sf(k^*)}{k^*}}{\left\{ s \left[ \frac{Af'(k^*)k^* - Af(k^*)}{k^2} \right] - n'[(1-s)Af(k^*)]Af'(k^*)(1-s) \right\}} \quad (4.5)$$

El efecto de la estática comparativa depende del numerador ya que se supone que se encuentra en un equilibrio estable y cuando esto sucede el denominador es negativo. Solo queda analizar el numerador para saber el efecto del shock exógeno.

$$n'(c(k^*))(1-s)f(k^*) - \frac{sf(k^*)}{k^*} < 0 \quad (4.6)$$

$\Leftrightarrow$

$$n'(c(k^*))k^* < \frac{s}{(1-s)} \quad (4.7)$$

□

El resultado encontrado generaliza el resultado de MS original. Existe un umbral en el cual la incorporación del cambio técnico no genera un mayor crecimiento. Este resultado que parece contraintuitivo tiene una explicación económica y demográficamente consistente. El progreso técnico implica un corrimiento de la función de producción, dónde con igual dotación de factores productivos se puede alcanzar una mayor producción. Esto tiene como consecuencia una expansión de la curva de ahorro en MS. Lo que permitiría aumentar el capital per capita de la economía permitiendo un mayor crecimiento en el corto plazo. Sin embargo, ahora, con el MPE esta mejora del progreso técnico tiene otro efecto directo. Al aumentar  $A$  el consumo se expande y eso tiene repercusiones en la TCP. La expansión del consumo se puede interpretar como aumento en consumo no solo de bienes sino de servicios como educación y salud. Esto podría tener como consecuencia el aumento de la esperanza de vida y la disminución de la natalidad en las fases de

crecimiento de la TCP. Por lo tanto, el efecto del progreso técnico es positivo ya que expande las posibilidades de producción pero también expande el consumo lo que acelera el crecimiento de la población en la fase inicial de la transición demográfica. Por lo tanto, el efecto no es lineal y depende del umbral de la ecuación 4.6. En definitiva, se hace necesario un ahorro lo suficientemente alto que permita acumular un capital capaz de recomponer el depreciado, invertir y además recomponer el capital per capita a causa del crecimiento explosivo de la población. A su vez, este umbral solo aplica para la fase de crecimiento de la TCP, ya que cuando la TCP decrece esta relación siempre se cumple. Por lo tanto, el progreso técnico puede ser contraproducente solo en la fase de crecimiento de la TCP, luego el progreso técnico tiene los efectos que predice MS.

Además el resultado anterior contiene a MS como se muestra a continuación.

**Proposición 4.** *Cuando la TCP es exógena el resultado MPE es análogo al que arroja MS. MS es un caso particular.*

Como  $n$  es exógena su derivada es cero.

$$\frac{dk^*}{dA} = \frac{-\frac{sf(k^*)}{k^*}}{\left\{s \left[ \frac{Af'(k^*)k - Af(k^*)}{k^2} \right] \right\}} \quad (4.8)$$

Para mostrar que el efecto es el mismo, se puede utilizar la función Cobb-Douglas habitual o trabajar con la función implícita  $f(k)$ . Se sabe que  $f(k)$  cumple la condición de ser concava y derivable en el intervalo  $[0, k^*]$  por lo tanto se cumple la condición 4.9:

$$f(k) \leq f(k^*) + f'(k^*)(k - k^*) \quad (4.9)$$

Reordenando los términos se llega a la siguiente desigualdad:

$$f(k) + f'(k^*)(k^*) \leq f(k^*) - f'(k^*)k \quad (4.10)$$

Como  $f(k)$  es siempre mayor o igual a cero al igual que el capital y  $f'$  es positiva el resultado es el siguiente:

$$0 \leq f(k^*) - f'(k^*)k \quad (4.11)$$

Entonces,

$$f'(k^*)k - f(k^*) \leq 0 \quad (4.12)$$

Por lo tanto, se muestra que el denominador es negativo. El efecto de  $A$  en  $k^*$  es siempre positivo. Se cumple MS. Con el mismo razonamiento este resultado se puede extrapolar a los efectos de  $s$  y  $\delta$  que se expondrán en las secciones siguientes del capítulo.

## 4.2. Efecto de una variación en la depreciación

**Proposición 5.** *A partir de un estado estacionario, un aumento de la depreciación, genera una disminución del  $k^*$ .*

En este caso la derivación es trivial, ya que el denominador es el mismo que en los casos anteriores pero la derivada parcial  $\frac{\partial g_k}{\partial z}$  es -1. Por lo tanto, el resultado es el siguiente.

$$\frac{\partial g_k}{\partial \delta} = - \frac{-1}{s \left[ \frac{Af'(k^*)k - Af(k^*)}{k^{*2}} \right] - n'[(1-s)Af(k^*)]Af'(k^*)(1-s)}$$

Esto implica al igual que en el MS que el efecto de la depreciación en el capital en el equilibrio tiene un efecto negativo en el crecimiento del capital per capita.

## 4.3. Efecto de una variación en la tasa de ahorro

**Proposición 6.** *A partir de un estado estacionario inicial, un aumento de la tasa de ahorro, no genera necesariamente un incremento del capital  $k^*$ . Dónde debe cumplirse la siguiente condición para que un aumento en la tasa de ahorro genere un incremento en el capital per capita:  $\frac{1}{k^*} + n'((1-s)f(k^*)) > 0$*

*Demostración.*

$$\begin{aligned} dg_{k^*} &= s \left[ \frac{Af'(k^*)k - Af(k)}{k^{*2}} \right] dk^* - n'[(1-s)Af(k^*)]Af'(k)dk^*(1-s) \\ &+ \frac{Af(k^*)}{k^*} ds - n'(-Af(k^*))ds = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{-\frac{Af(k^*)}{k^*} + n'(-Af(k^*))}{\left\{ s \left[ \frac{Af'(k^*)k^* - Af(k^*)}{k^{*2}} \right] - n'[(1-s)Af(k^*)]Af'(k^*)(1-s) \right\}} \quad (4.14)$$

Simplificando la ecuación 4.14:

$$\frac{dk^*}{ds} = \frac{-Af(k^*) \left\{ \frac{1}{k^*} + n' \right\}}{\left\{ s \left[ \frac{Af'(k^*)k - Af(k^*)}{k^{*2}} \right] - n'[(1-s)Af(k^*)]Af'(k^*)(1-s) \right\}} \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el efecto de un aumento en la tasa de ahorro satisface el resultado original de Solow solamente si se cumple que  $\frac{1}{k^*} + n'[(1-s)Af(k^*)] > 0$ .  $\square$

En el tramo creciente de la curva de crecimiento de la población, el efecto de aumentar la tasa de ahorro es el habitual. Sin embargo en el tramo decreciente dependerá de la magnitud de la pendiente, del capital acumulado en el equilibrio y de las variables exógenas del modelo. La dinámica del modelo ahora presenta diferencias con MS. En este último aumentar el ahorro afectaba directamente a la acumulación del capital, lo cual repercutía en el crecimiento durante la transición al estado estacionario, en el nuevo capital per capita y producto de equilibrio, alcanzando un estado estacionario mayor. Con MPE, hay dos



canales por los cuales el ahorro tiene un papel en el crecimiento y el estado estacionario. En primer lugar el ahorro afecta al igual que en MS a la curva de ahorro es decir a  $Asf(k)$ . Pero el aumento del ahorro, afecta el consumo, que a su vez afecta a la población. Cuando la TCP es decreciente ( $n' < 0$ ) esto implica un descenso en el crecimiento de la población. En cierta medida el consumo, o la contracara que es el salario, determinaría un rendimiento marginal mayor de la mano de obra. Esto podría incentivar un aumento en la fecundidad (*ceteris paribus*). Este efecto “población” debe ser lo suficientemente fuerte para que el efecto en la tasa de ahorro compense este efecto negativo por aumento de la población, ya que este último tiene un efecto malthusiano debido a que el producto debe repartirse en más capitas.

En este caso el producto de equilibrio tiene un efecto proporcional a la variación del capital ya que el ingreso depende del capital y se ve afectado exógenamente por  $A$ :  $y^* = A.f(k^*)$ . Por lo tanto

$$dy^* = Af'(k^*)dk^* \quad (4.16)$$

Y operando se obtiene el efecto diferencial del ingreso cuando varia el ahorro:

$$\frac{dy^*}{ds} = Af'(k^*)\frac{dk^*}{ds} \quad (4.17)$$

Por lo tanto el efecto va a depender de  $\frac{dk^*}{ds}$ . Entonces, esto implica que un aumento del ahorro tiene como efecto un aumento del ingreso, esto sí es análogo a la conclusión que se desprende de MS.

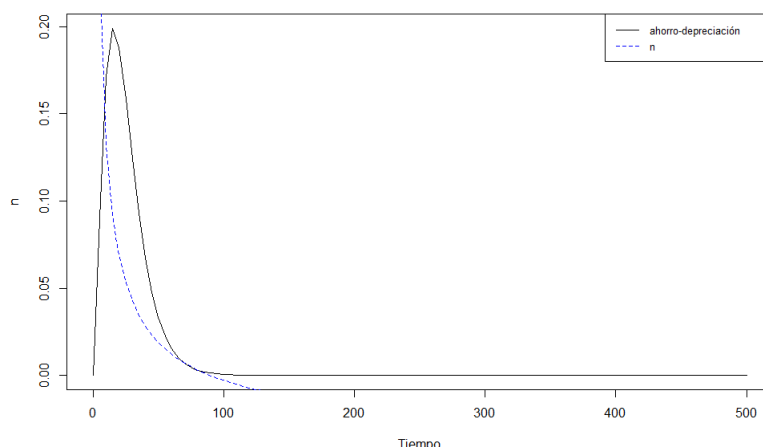
## 4.4. Simulación

En este apartado, el objetivo es mostrar un ejemplo en el cual se produzca lo predicho teóricamente en la estática comparativa. La simulación se centrará en el efecto que tiene la tecnología  $A$  en el modelo original y MPE. Se introduce una mejora tecnológica en el margen, o dicho de otra forma, una pequeña mejora tecnológica que asegure que dicho cambio no sea disruptivo. Es decir, que el modelo todavía funciona.

Para encontrar un ejemplo se iteró en un conjunto de valores para los distintos parámetros hasta encontrar un caso que replicara las predicciones teóricas. En primer lugar se buscaron soluciones del modelo que tuviesen tres equilibrios tal como se muestra en la figura 4.1. Los valores de los parámetros para calibrar el modelo son  $A=4$ ,  $\alpha = 1/3$ ,  $\delta = 4\%$ . Estos parámetros se buscan de manera intencional para que reflejen valores plausibles empíricamente. Además se parametrizó la función normal que mapea los valores de la TCP en el tiempo. Se buscó que tuviera la forma teórica especificada inicialmente, para eso se le dio una media igual a 8, y  $\sigma$  igual a 2.

Luego en los equilibrios estables (el primero y el tercero) se corroboró que estuviesen

**Figura 4.1:** Tres equilibrios simulados



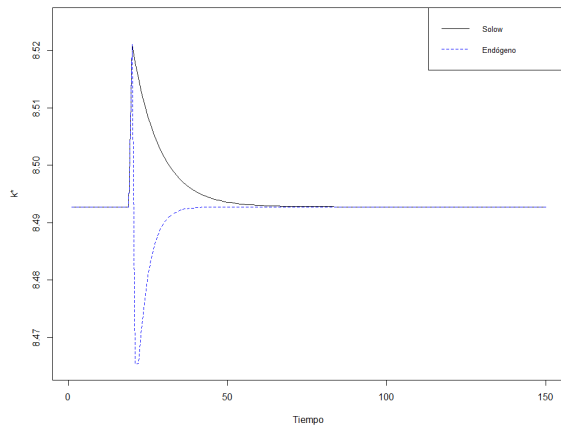
del lado del umbral “adecuado” para que refleje el caso contradictorio a Solow. Es decir se utilizó el hallazgo que se deriva de la proposición 3. Un aumento en  $A$  no se refleje en un aumento de  $k$  e  $y$  en torno al equilibrio. En este caso se optó por un aumento del 2%. Posteriormente se comparó los resultados gráficamente.

La simulación muestra un resultado contrario a la predicción de MS. En aquel, aumentar la tecnología determinaría un incremento en  $k^*$ . Utilizando palabras de [Acemoglu \(2008\)](#), este resultado que plantea Solow es *intuitivo*. Es decir que un cambio tecnológico determina una mejora en la utilización de factores productivos que determinan un incremento del  $k^*$  de la economía. Sin embargo, MPE cambia las conclusiones y las hacen *contraintuitivas*.

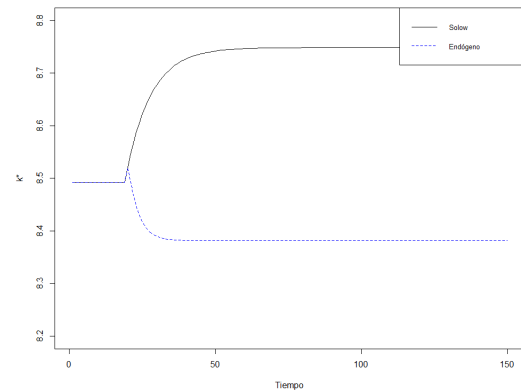
El shock tecnológico implica un salto en el producto al igual que en MS, debido a la mayor eficiencia con la que se produce. Pero esa mejora por haber incorporado tecnología tiene un efecto en el consumo. En consecuencia la TCP se acelera. De la condición 4 que se deriva del modelo, la tasa de ahorro de la economía debe ser mayor a la tasa de consumo ajustada por la velocidad a la que crece la población teniendo en cuenta el capital de la economía. Cuando el crecimiento de la población no varía la tasa de ahorro es fija así como la tasa de consumo. Este resultado no es llamativo, ni para la economía ni para otras disciplinas como la ecología. Las que estudian posibles equilibrios de la especie humana en la tierra. La tecnología puede permitir el crecimiento de la población con mayores estándares de vida, aunque esta tecnología no debe presentar externalidades negativas. El cambio tecnológico no asegura la prosperidad per se ([Weinberger et al., 2017](#)).

La mejora en el progreso técnico repercute en un efecto positivo en MS, pero negativo luego del shock en este modelo (ver 4.2). La diferencia entre cada uno de los capitales fuera del equilibrio es menor al 1%. Sin embargo, se puede suponer que al existir una mejora tecnológica, esta se mantenga (o sea mejorada) a lo largo del tiempo. En este caso

el aumento de  $A$  una vez que se sucede, no desaparece sino que se mantiene. Aquí el efecto de largo plazo se multiplica por cinco respecto al shock temporario. El capital percapita es 5% mayor en MS respecto a MPE. El modelo de Solow tradicional sobre estima el impacto del progreso técnico respecto a la consideración de la población como variable endógena.

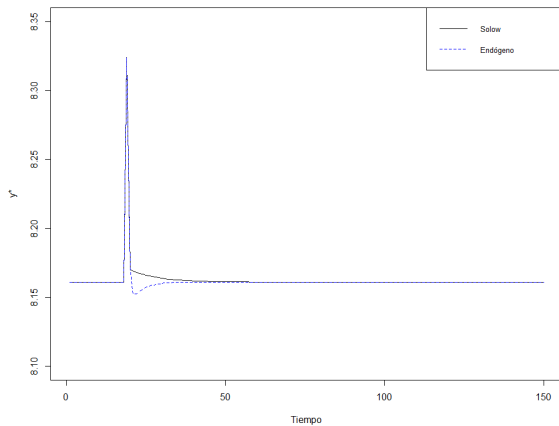


**Figura 4.2:** Efecto en el capital per capita ante un aumento temporario en  $A$

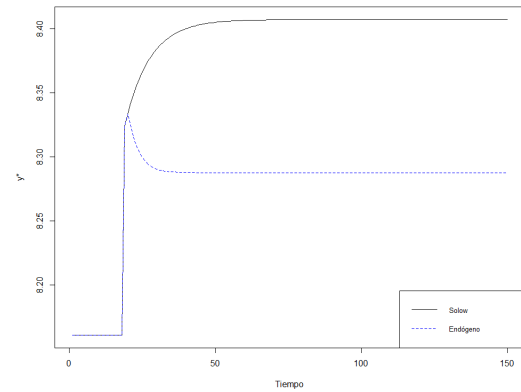


**Figura 4.3:** Efecto en el capital per capita ante un aumento permanente en  $A$

El correlato con el producto per capita es el siguiente. Una mejora del progreso técnico (temporal) tiene un salto ceteris paribus pero luego el efecto de corto plazo es negativo, hasta volver al equilibrio. Cuando el shock persiste se ve claramente como el regreso al nuevo estado estacionario ocurre en niveles distintos del producto per capita. En este caso,  $y^*$  alcanzará un resultado 1,5 % menor en MPE.



**Figura 4.4:** Efecto en el producto per capita ante un aumento en A



**Figura 4.5:** Efecto en el producto per capita ante un aumento en A (que se mantiene en el tiempo)

En síntesis, el resultado de esta simulación permite observar que el efecto del progreso técnico se ve magnificado en el modelo MS respecto a MPE. Bajo los parámetros elegidos de esta calibración, de forma plausible para que el modelo replique la evidencia empírica, se obtuvo que una incremento sostenido del progreso técnico (A) un 2 %, incrementa el producto de equilibrio en un 3.0 % en el modelo de Solow, mientras que en MPE el incremento es de tan solo 1.5 %. Por lo tanto el progreso técnico tiene un efecto marginal menor debido a la dinámica endógena en el sistema económico de la población.

## 5. ¿Velocidad de convergencia?

### 5.1. Velocidad de convergencia al Estado Estacionario

Aunque Solow en su trabajo no desarrolla explícitamente el concepto de velocidad de convergencia, existe una extensa literatura que comenzó los estudios de convergencia en la década de los años 90. A partir de los trabajos de [Sala-i Martin \(1996\)](#) y Barro y Sala-i Martin (1992), se buscó probar la existencia (o no) de la convergencia del producto per capita entre países, que surgía a partir del modelo teórico de Solow. Para esto se introdujo el concepto de velocidad de convergencia. Es una herramienta utilizada en investigaciones que intentan responder cuanto demorarían distintos países en alcanzar productos per capita similares. Dentro de esta línea de investigación, se han estudiado dos tipos de convergencia. Una incondicional, la cual busca comprobar empíricamente si todos los países convergen al largo plazo. Una condicional, que estudia si países con características similares tienden a un mismo estado estacionario. Vale recordar que según MS países con los mismos parámetros exógenos ( $\alpha$ ,  $\delta$  y  $s$ ) deberían converger a un mismo estado de equilibrio. Baumol y Baumol(1986) encuentran una correlación negativa entre crecimiento y pib inicial lo que indicaría que los países convergerían al largo plazo. Siguiendo esta literatura de estimar empíricamente la convergencia que sugiere el MS, [Mankiw et al. \(1992\)](#) proponen una estimación *cross section* y encuentran convergencia. Luego una literatura importante ha continuado estos ejercicios tratando de encontrar cual es el parámetro de convergencia. Algunos autores hablan de una tasa natural del 2%. [Abreu et al. \(2005\)](#) hace una revisión de 600 artículos y los resultados no son unánimes acerca del valor de dicha tasa. Por lo que la evidencia no es concluyente. Revisar la teoría, en este caso también parece un buen ejercicio. Para eso se utilizará el concepto de velocidad de convergencia a la luz de este nuevo modelo.

Siguiendo a [Sala-i Martin \(2000\)](#) la velocidad de convergencia  $\beta$  queda definida como se detalla en la ecuación 5.1 , dónde para la notación de este trabajo  $\gamma_k$  es equivalente a  $g_k$  :

$$\beta = -\frac{\partial \gamma_k}{\partial \log(k)} \quad (5.1)$$

El objetivo de este apartado es derivar la velocidad y poder comparar con MS por lo que además se le dará la forma funcional habitual Cobb-Douglas a la función de producción.

$$\Rightarrow \beta = -\frac{\partial \left( sAe^{\log k^{\alpha-1}} - (\delta + n(c(e^{\log k}))) \right)}{\partial \log(k)} \quad (5.2)$$

$$\beta = -sA(\alpha - 1)e^{(\alpha-1)\cdot \log k} + n'(c(e^{\log k}))c'(e^{\log k}) \quad (5.3)$$

$$\beta = -sA(\alpha - 1)e^{(\alpha-1)\log k} + n'(c(e^{\log k})))(1 - s)Ae^{\alpha \log k} \alpha \quad (5.4)$$

Para el caso de Solow la TCP se considera cero, sin pérdida de generalidad, por lo que la velocidad es la siguiente:

$$\beta_{solow} = -sAe^{(\alpha-1)\log k}(\alpha - 1) \quad (5.5)$$

Para el modelo con población endógena la especificación de la velocidad( $\beta_{endo}$ ) varía de la siguiente manera:

$$\beta_{endo} = \beta_{solow} + n'(c(e^{\log k})))(1 - s)Ae^{\alpha \log k} \alpha \quad (5.6)$$

$$\beta_{endo} = Ae^{\alpha \log k} [se^{-\log k}(1 - \alpha) + n'(c(e^{\log k})))(1 - s)\alpha] \quad (5.7)$$

Al comparar este resultado( $\beta_{endo}$ ) con Solow ( $\beta_{Solow}$ ) varias apreciaciones surgen del estudio de dicha velocidad. En primer lugar, como ya se observó, nada asegura que siempre se pueda alcanzar un estado estacionario estable. Además, ahora la velocidad de convergencia puede ser mayor o menor a la velocidad encontrada en la literatura. Esta dependerá de cuál es el equilibrio ya que este influirá en la TCP. La velocidad a la que crece la población en el equilibrio, asociada a la fase de la transición demográfica en la que se encuentre la economía será determinante en la correspondiente velocidad de convergencia. Ante los mismos parámetros, si el equilibrio es en una fase de crecimiento de la TCP se convergerá (en el caso de que exista convergencia) más rápido al estado estacionario que si se encuentra en una fase decreciente. En comparación con los estudios de velocidad de convergencia usuales que utilizan MS, aquí la velocidad queda determinada también por la tasa de ahorro de la economía. Este último hecho no sucedía en MS.

Asimismo, es interesante comparar la velocidad del modelo endógeno con el resultado que se desprende de MS el cual dice que aquella economía que se encuentre más cerca del estado estacionario tendrá una tasa de crecimiento económico menor. Para esto se puede observar la variación en la velocidad de convergencia. En la ecuación 5.8 se desprende que la velocidad de convergencia es decreciente. Es decir que el crecimiento es positivo (negativo) cuando se está en niveles por debajo (encima) del estado estacionario pero a tasa decreciente.

$$\beta'_{solow} = -sAe^{(\alpha-1)\log k}(\alpha - 1)^2 < 0 \quad (5.8)$$

**Proposición 7.** *La velocidad de convergencia en el caso del modelo con población endógena no tiene necesariamente una tendencia decreciente a medida que la economía se acerca al estado estacionario. Sino que esta velocidad podrá decrecer o crecer a través de la*

siguiente relación:

$$\beta'_{endo} = Ae^{\alpha \log k} [-(\alpha - 1)^2 se^{-\log k} + \alpha n'(c(e^{\log k}))(1 - s)A\alpha + n''(1 - s)^2 A\alpha^2 e^{\alpha \log k}] \quad (5.9)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \beta'_{endog} &= Ae^{\alpha \log k} \alpha [se^{-\log k}(1 - \alpha) + n'(c(e^{\log k}))(1 - s)A\alpha] \\ &\quad + Ae^{\alpha \log k} [-se^{-\log k}(1 - \alpha) + n''(c(e^{\log k}))(1 - s)Ae^{\alpha \log k} \alpha(1 - s)A\alpha] \end{aligned} \quad (5.10)$$

Agrupando términos:

$$\begin{aligned} \beta'_{endo} &= Ae^{\alpha \log k} [\alpha se^{-\log k}(1 - \alpha) \\ &\quad + \alpha n'(c(e^{\log k}))(1 - s)A\alpha - se^{-\log k}(1 - \alpha) + n''(c(e^{\log k}))(1 - s)^2 A^2 \alpha^2 e^{\alpha \log k}] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Entonces  $\beta'$  queda finalmente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \beta'_{endo} &= Ae^{\alpha \log k} [-(\alpha - 1)^2 se^{-\log k} + \alpha n'(c(e^{\log k}))(1 - s)A\alpha \\ &\quad + n''(c(e^{\log k}))(1 - s)^2 A^2 \alpha^2 e^{\alpha \log k}] \end{aligned} \quad (5.12)$$

El corolario de la condición 5.12, es que la condición suficiente que asegura velocidad de convergencia decreciente a medida de que nos acercamos al estado estacionario, es aquella en la cual la TCP decrece aceleradamente ( $n'' < 0$  y  $n' < 0$ )  $\square$

**Observación 3.** Como se mostró, en Solow la transición hacia el estado estacionario se daba con una velocidad de convergencia de forma monótonamente decreciente. Sin embargo al utilizar la velocidad de convergencia de MPE se aprecia (ver 5.12) que la velocidad de convergencia solo es decreciente cuando la TCP decrece aceleradamente. En el resto de los casos la velocidad de convergencia puede ser creciente o decreciente. Además dicha velocidad puede tener períodos positivos o negativos según los parámetros del modelo y su relación con la dinámica de la población. En consecuencia para el caso general de MPE los resultados son cuantitativamente y cualitativamente distintos a los arrojados por la teoría neoclásica tradicional, siendo MS un caso particular del modelo MPE.

A su vez, si se supone la existencia de un equilibrio tanto para MS como para MPE, la velocidad de convergencia en el estado estacionario son las siguientes.

En Solow es:

$$\beta_{solow} = (\delta + n)(1 - \alpha) \quad (5.13)$$

Sin embargo, ahora la velocidad de convergencia para el modelo con población endógena

es el siguiente:

$$\beta_{endo} = \beta_{solow} + n'(c(e^{\log k})) (1-s) \frac{(\delta+n)}{s} k^* \quad (5.14)$$

Es decir:

$$\beta_{endo} = (\delta+n) \left[ (1-\alpha) + n'(c(e^{\log k})) \frac{(1-s)}{s} k^* \right] \quad (5.15)$$

Cuando la TCP crece la velocidad de convergencia es mayor a la que se concluye del MS y por lo tanto, cuando la tasa de crecimiento es negativa la velocidad es menor a Solow. Este efecto tampoco es inocuo al capital de estado estacionario, ni a la tasa de ahorro. Este resultado es importante, ya que en MS la convergencia testada empíricamente a resultado ser más lenta de lo que predice el  $\beta_{solow}$ . Por lo tanto, con un escenario de decrecimiento en la TCP, la velocidad de convergencia encontrada en este modelo predice una velocidad entorno al estado estacionario más lenta aproximándose mejor a lo que predicen algunos resultados empíricos.

## 5.2. Ejemplo con TCP normal

Si se supone, como ya se fundamentó una tasa de crecimiento con una forma funcional normal de la siguiente forma:

$$n(x) = \frac{e^{-(c(\log k) - \mu)^2 / (2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (5.16)$$

La función normal de n es la siguiente:

$$n(x) = \frac{e^{-(e^{\alpha(1-s)} \log k - \mu)^2 / (2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (5.17)$$

Entonces la derivada de n es la siguiente:

$$n' = -n \frac{c - \mu}{\sigma} c' \quad (5.18)$$

Para simplificar se supone que  $\mu$  es igual a cero:

$$n'' = -n' \left[ \frac{c}{\sigma} c\alpha(1-s) \right] - n \left[ \frac{c}{\theta} c\alpha(1-s) \right]' \quad (5.19)$$

$$n'' = -n' \left[ c^2 \frac{\alpha(1-s)}{\sigma} \right] - n \left[ \frac{c^2}{\sigma} \alpha(1-s) \right]' \quad (5.20)$$

$$n'' = -n' \left[ c^2 \frac{\alpha(1-s)}{\sigma} \right] - n \left[ 2 \frac{c}{\sigma} c' \alpha(1-s) \right] \quad (5.21)$$



$$n'' = -n \frac{c}{\sigma} c' \left[ c^2 \frac{\alpha(1-s)}{\sigma} + 2\alpha(1-s) \right] \quad (5.22)$$

$$n'' = -n \frac{c^2 \alpha^2 (1-s)^2}{\sigma} \left[ \frac{c^2}{\sigma} + 2 \right] \quad (5.23)$$

$$n' = -n \frac{c^2}{\sigma} \alpha (1-s) \quad (5.24)$$

Sustituyendo 5.24 y 5.23 en 5.12 se obtiene:

$$\beta' = Ae^{\alpha \log k} \left\{ -(\alpha - 1)^2 s e^{-\log k} - \alpha n \frac{c^2}{\sigma} \alpha (1-s)(1-s) A \alpha \right. \\ \left. - n \frac{c^2 \alpha^2 (1-s)^2}{\sigma} \left[ \frac{c^2}{\sigma} + 2 \right] (1-s)^2 A^2 \alpha^2 e^{\alpha \log k} \right\} \quad (5.25)$$

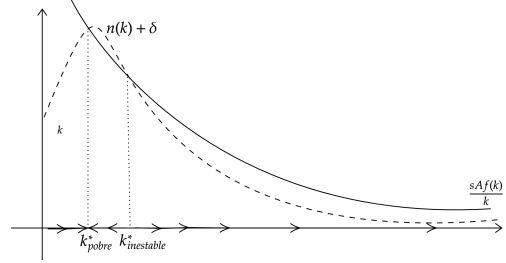
$$\beta' = Ae^{\alpha \log k} \left[ -(\alpha - 1)^2 s e^{-\log k} \right. \\ \left. - n \frac{c^2 \alpha^2 (1-s)^2}{\sigma} A \alpha \left( 1 + \left[ \frac{c^2 \alpha}{\sigma} + 2 \right] (1-s)^2 A^{\alpha \log k} \right) \right] \quad (5.26)$$

### 5.3. Modelo con dos equilibrios

En MPE con tres equilibrios, replica un aspecto que puede ser clave para entender porque algunos países permanecen en una trampa de pobreza debido a la TCP a la que se enfrentan. Sin embargo, no explica por que otros países no han sido atraídos a un nuevo equilibrio de  $k^*$  incambiado a lo largo del tiempo. Por el contrario, hay un grupo de países que han crecido de manera sostenida a lo largo del último siglo. Esto podría suponer que los modelos adecuados son aquellos en los cuales el crecimiento es sostenido. Es por esto que se plantea una variante en el modelo en la cual, ahora la curva de la tasa de crecimiento es de tal forma que la dinámica presenta solamente dos equilibrios. Para alcanzar dos equilibrios existen dos posibilidades. Una, es que ambas curvas sean tangentes para que se cumpla la condición de que el limite de  $g_k$  tiende a cero cuando  $k$  tiende a infinito. Pero en este caso el crecimiento sería siempre negativo. Otra, es que la tasa de depreciación del capital sea cero. Este supuesto restrictivo permitiría combatir la tendencia de rendimientos marginales decrecientes por fuera de la función de producción. De esta manera, el crecimiento puede ser persistente. Este es el caso que se muestra en la figura 5.1. Bajo este supuesto, la economía podría saltar el proceso de estancamiento, ya que este sería inestable, para así luego de superado ese equilibrio avanzar a un crecimiento sostenido tal como lo muestra la evidencia. Notar que en el caso de MS, cuando el crecimiento de la población era mayor a cero, esto nunca podría ocurrir. Sin embargo en este modelo, se

puede alcanzar crecimiento sostenido bajo el supuesto de que la tasa de depreciación del capital es cero o tiende a cero.

**Figura 5.1:** Dos equilibrios: estable e inestable



**Lema 4.** Si la dinámica del capital es tal que existen dos estados posibles de equilibrio (uno estable y otro inestable), la economía presentará una tasa de crecimiento siempre positiva  $\forall k$  tal que se cumpla:  $-n'(c(k_{inestable}^*)) \cdot c'(k_{inestable}^*) > - \left[ \frac{sAf(k_{inestable}^*)}{k_{inestable}^*} \right]'$

*Demostración.* La solución es trivial si se utiliza el análisis gráfico (ver 5.1). La pendiente de la curva de ahorro  $(\frac{sAf(A,k)}{k})$  debe ser mayor a la pendiente de la curva de depreciación  $(n'(k_{inestable}^*) \cdot c'(k_{inestable}^*))$ . Por lo tanto, esto implica que por estar en el tramo decreciente de ambas curvas el umbral a partir del cual existe un crecimiento constante y acotado es a partir de:

$$-n'(k_{inestable}^*) \cdot c'(k_{inestable}^*) > -As \frac{f'(k_{inestable}^*) \cdot k - f(k_{inestable}^*)}{k_{inestable}^{*2}}$$

Como el consumo se puede reescribir en función de la producción de la economía la expresión se reexpresa de la siguiente forma:  $-n'(k_{inestable}^*) \cdot (1-s)A \cdot f'(k_{inestable}^*) >$

$$-As \frac{f'(k_{inestable}^*) \cdot k - f(k_{inestable}^*)}{k_{inestable}^{*2}}$$

$$-n'(k_{inestable}^*) > -\frac{s}{1-s} \frac{f'(k_{inestable}^*) \cdot k - f(k_{inestable}^*)}{f'(k_{inestable}^*) \cdot k_{inestable}^*}$$

A partir de este punto  $g_k$  es siempre positivo.  $\square$

Para el caso particular en el que se representa el sistema económico utilizando una función normal para mapear la relación entre el consumo y la TCP y la función tradicional Cobb-Douglas el  $k$  de equilibrio a partir del cual se genera un crecimiento positivo siempre es la siguiente.

**Lema 5.** Si la dinámica del capital es tal que existen dos estados posibles de equilibrio (uno estable y otro inestable con crecimiento positivo), la economía presentará una tasa de crecimiento siempre positiva  $\forall k$  si se cumple la siguiente condición:

$$n(k) > \frac{s}{(1-s)} \frac{\sigma^2}{(c(k)-\mu)} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{1}{k^*} \quad (5.27)$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
 -n'(c(k_{inestable}^*)) &> -\left[\frac{sAf(k_{inestable}^*)}{k_{inestable}^*}\right]' = -Ask_{inestable}^{\alpha-1} \\
 n(k) &= \frac{e^{-(c(k)-\mu)^2/(2\sigma^2)}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \\
 n'(k) &= -\frac{(c(k)-\mu)}{\sigma^2} * c(k)' * n(k)
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Entonces

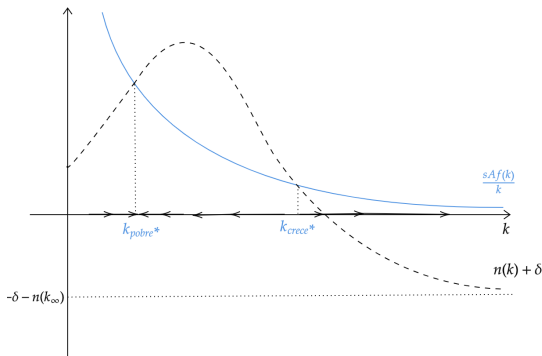
$$\frac{(c(k)-\mu)}{\sigma^2} * \alpha(1-s)Ak_{inestable}^{\alpha-1} * n(k) > -Ask_{inestable}^{\alpha-2}(\alpha-1) \tag{5.29}$$

$$\frac{c(k)-\mu}{\sigma^2} * \alpha * (1-s) * n(k) > -s(\alpha-1)k_{inestable}^{-1} \tag{5.30}$$

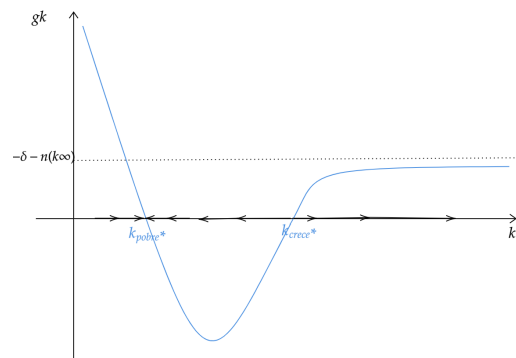
$$n(k) > \frac{s}{(1-s)} \frac{\sigma^2}{(c(k)-\mu)} \frac{(1-\alpha)}{\alpha} \frac{1}{k^*} \tag{5.31}$$

□

Por otro parte, al considerar que el crecimiento de la población en lugar de tender a cero como se especificó en los supuestos del capítulo 3, tuviese una forma similar pero con tendencia a un valor negativo. Si además ese valor al que converge tendencialmente fuese mayor (en valor absoluto) que la depreciación del capital. Entonces, el límite de  $g_k$  sería positivo (ver 3.11). Cuyo coroloraio sería una economía que podría crecer en términos per capita endógenamente (ver gráficamente 5.2 y 5.3). Aquí hay una limitante. Esto puede suceder pero no al largo plazo porque la población tendería a cero. En el límite, el resultado de un crecimiento económico con despoblamiento parecería no interesar para un análisis que se sustente empíricamente. Sin embargo, interesa fijar la idea que el decrecimiento de la población a partir de cierto umbral permitiría tener tasas de crecimiento elevadas, aunque con la alerta de que la población debería incorporar una nueva dinámica para que sea sostenible.



**Figura 5.2:** Dinámica de curva de ahorro y población. Dos equilibrios.



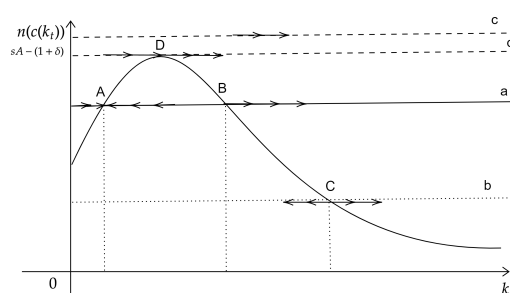
**Figura 5.3:** Dinámica de  $g_k$ . Dos equilibrios.

## 5.4. Un modelo con tecnología Ak

El modelo de crecimiento presentado en esta investigación tiene una dualidad, es un modelo endógenamente exógeno. Esto juego de palabras busca destacar la debilidad del modelo. Se sitúa en la literatura de los modelo endógenos de crecimiento. Pero, a pesar de modificar un supuesto para mejorar la modelización cae en la inconsistencia de no explicar lo que estudia la teoría, el crecimiento. Sin embargo, como es usual la incorporación de una función de producción Ak modifica los resultados. Al introducir una función de producción del tipo Ak, los resultados marginales ya no operan por lo que debería aparecer un crecimiento que se explica dentro (endo) del modelo.

Veamos gráficamente que sucede con este cambio.

**Figura 5.4:** Modelo Ak



$$\begin{aligned} \dot{k} &= sAk - (n + \delta)k \\ \frac{\dot{k}}{k} &= sA - (n + \delta) \end{aligned} \tag{5.32}$$

En estado estacionario :  $\dot{k} = 0 \Rightarrow n = sA - \delta$

Es fácil de mostrar que ahora el modelo si se incorpora en la literatura del crecimiento endógeno.

La economía podría estar en un estadio b el cual arrojaría dos casos, uno de crecimiento indefinido y otro de decrecimiento indefinido. Del punto C a la izquierda la economía tiende a la extinción ya que la población descende en todo momento. De la curva C a la derecha tiende a una senda indefinida de crecimiento.

La recta  $a$  cruza con la curva de crecimiento de población en dos puntos A y B. El primer punto, tiene un equilibrio estable bajo. Luego el punto B es un equilibrio inestable. A partir de la intersección de las dos curvas se puede observar como la brecha entre  $sAk - \delta$  y la curva de población se magnifica a lo largo del tiempo. La diferencia refleja el crecimiento del capital lo que en definitiva implica el crecimiento de la economía. Nuevamente utilizar una curva  $Ak$  permite incorporar el crecimiento dentro del modelo.

Finalmente cuando la curva  $a$  que representa  $sAk - \delta$  es mayor o igual al máximo de la curva de crecimiento de la población se está en una senda de crecimiento sostenido.

Este caso lo representa en el gráfico la recta punteada *c*. Estos hallazgos, junto con los expuestos en el apartado anterior de este capítulo (ver apartado 5.3) permitieron mostrar como bajo este nuevo supuesto de población endógena, son posibles caminos de crecimiento económico endógeno partiendo de un modelo neoclásico de crecimiento exógeno.

## 6. Consideraciones finales

Esta tesis propone y desarrolla un cambio de los supuestos básicos del MS: TCP constante y exógena. Se endogeniza la dinámica de la población a través de un mecanismo que la asocia a la evolución del consumo. De esta forma se logra generalizar el MS, siendo este un caso particular cuando TCP es constante.

Las consecuencias que surgen de este cambio son varias. En el capítulo 3 se derivan las condiciones bajo las cuales el equilibrio no es necesariamente único. La existencia de equilibrios múltiples estacionarios se cumple cuando la tasa de crecimiento del capital decrece. Cuando ocurre esta situación la economía converge al estado estacionario. En caso contrario hay equilibrios inestables.

En este marco, existen consecuencias relevantes para el estudio de la convergencia. Puede ocurrir que una economía alcance un estado estacionario bajo (trampa de pobreza) o alto, en función de la condición inicial del capital. Se encontró una diferencia de 137% en el ingreso  $y$  entre dos economías idénticas por el hecho de incorporar una dinámica endógena de la población. El corolario es que no necesariamente se observará convergencia. Dos economías con estructuras idénticas inicialmente podrían verse ubicadas, en el largo plazo, en dos estadios diferentes del desarrollo económico. Una en una trampa de pobreza y otra en un estado de alta riqueza (relativa). Esto fundamentado por la interacción de la dinámica de acumulación del capital físico y la población. El MPE además de mostrar la posibilidad de divergencia entre países también muestra que en el caso en que exista convergencia, esta no tiene por qué decrecer a medida que la economía llega al estado estacionario. Tampoco depende exclusivamente de parámetros exógenos. El capital de estado estacionario es determinante de dicha velocidad. Finalmente, un hecho interesante que se desprende del MPE es que la velocidad de convergencia puede ser mayor o menor a lo que predice MS. Esto reconcilia la evidencia empírica con la teoría ya que para TCP decreciente refleja tasas de velocidad de convergencia menores a MS. Lo que indicaría valores más próximos a los encontrados con mayor frecuencia en la literatura sobre el tema. Aún más, la velocidad de convergencia obtenida a través de la ecuación 5.15 permite una heterogeneidad de valores que dependen de la variación de la TCP. Lo que permite explicar la heterogeneidad de valores empíricos (positivos y negativos) encontrados en una extensa evidencia (Abreu et al., 2005).

Además, se incorporaron variantes a MPE. De esta forma se logró replicar el hecho estilizado de crecimiento económico de las economías actuales. Un hallazgo adicional es que al utilizar el MPE no es necesario incorporar rendimientos constantes o crecientes a escala para obtener un crecimiento económico sostenido, solo se debe cumplir que 3.11 sea positivo. Esto se logra de dos formas. Con una TCP negativa y mayor en valor absoluto a  $\delta$ . En el caso de que TCP sea positiva esto se puede lograr con la condición necesaria de que  $\delta$  tienda a cero en el largo plazo (se debería levantar el supuesto de  $\delta$  constante). Esto se asegura con el postulado del lema 4.

La estática comparativa en MPE arroja resultados que generalizan los hallazgos de MS. Cuando se estudia el efecto en el capital y el producto frente a shocks exógenos de la tasa de ahorro y el progreso técnico, los efectos no son triviales y dependen de la variación en la TCP. Uno de los principales hallazgos del MPE es que los shocks exógenos del ahorro y el cambio técnico no implican necesariamente un aumento del capital, ni del ingreso. Incluso en el corto plazo puede decrecer el ingreso, lo cual se muestra a través de simulaciones que comparan ambos modelos. Además, se muestra que en el caso de shocks persistentes las diferencias entre el estado estacionario de MS y MPE son aún mayores (5%). En este sentido, el MPE contradice las derivaciones de MS. Las limitantes de MS eran reconocidas por el propio Solow ya tenía presente que su modelo distaba de representar correctamente el crecimiento económico. Refiriéndose a su propio modelo decía “si ese modelo tiene algunas implicaciones que son claramente falsas empíricamente, entonces se diría que es mejor cambiar la teoría” (Solow, 1992). Sin embargo la interpretación adecuada de estos resultados diferentes a partir de ciertos umbrales, es que MPE muestra resultados más generales que MS. El resumen de los hallazgos que se desprenden en este trabajo se pueden ver en la tabla 6.1. Los resultados no lineales responden a que los cambios tecnológicos o en la tasa de ahorro no solo afectan a la curva de ahorro, sino que ahora al variar el consumo tiene efectos en la TCP. El resultado es intuitivo si se lo vincula con la relación entre consumo y transición demográfica. A medida que aumenta el consumo (fases iniciales de la transición demográfica) hay un efecto positivo en la disminución de la mortalidad. Lo que repercute en un crecimiento acelerado de la población. Por lo tanto, ante una mejora tecnológica, la población crece rápidamente en el tramo  $n'(k^*) > 0$ , por lo que el ahorro debe ser lo suficientemente alto para que exista un proceso endógeno de crecimiento, en caso contrario no habrá un incremento en el crecimiento. El efecto en  $k$  y  $y$  por un incremento de  $s$  arroja un resultado espejo a la variación de  $A$ . Para que el efecto de un incremento de la tasa de ahorro sea positivo en  $k^*$  y  $y$ , se debe estar enlenteciendo el crecimiento de la población con un nivel de  $k^*$  muy bajo.

**Tabla 6.1:** Resumen de efectos

	$\Delta s$	$\Delta A$	$\Delta \delta$
Si $n'(k^*) > 0$	$\uparrow k^*$ $\uparrow y^*$	Depende	$\downarrow k^*$ $\downarrow y^*$
Si $n'(k^*) < 0$	Depende	$\uparrow k^*$ $\uparrow y^*$	$\downarrow k^*$ $\downarrow y^*$

Este trabajo presenta un conjunto de limitaciones, que a su vez dejan una agenda pendiente para continuar en esta línea de investigación.

En primer lugar, el modelo es de un único bien como era de uso convencional en la teoría de crecimiento. En este sentido, no considera factores económicos estructurales.

En segundo lugar, el MPE considera pleno empleo (o desempleo constante) por lo que hay una relación directa entre la evolución del desempleo, la población y la oferta laboral efectivamente empleada. Podría suceder que el desempleo se incremente conforme se incrementa la población. El efecto del crecimiento de la población en este caso podría ser estéril.

En tercer lugar, otra debilidad del modelo se debe a que la TCP se vuelca como oferta laboral instantáneamente. Se debería explorar en este u otros modelos, otras variantes. Por ejemplo, incorporando rezagos temporales y memoria al acumular la población a la oferta laboral. Esta última consideración abre una prolífica agenda futura, dónde se podrían modificar un conjunto de modelos actuales que consideran a la población dentro de sus supuestos.

En cuarto lugar, el MPE no se calibra ni se contrasta empíricamente. Se propone para futuras investigaciones estudiar si la similitud entre países (considerando las variables del modelo para medirla) en un momento  $t$  inicial, desemboca en divergencia en productos per capita al final del período con el objetivo de someter a prueba la ocurrencia de la trampa de pobreza encontrada teóricamente en el MPE. A su vez, la relación empírica entre crecimiento de la población y consumo fue mostrada pero no testeada mediante técnicas econométricas actualmente aceptadas.

Finalmente, el análisis de la dinámica de la población en el trabajo fue con una perspectiva global, considerando tangencialmente la vinculación entre los distintos tipos de crecimiento económico y de la población por regiones o países. Aquí también se podría avanzar en testear este tipo de vínculos. También queda pendiente responder si la dinámica de la población en un momento del tiempo pudo haber incidido en el crecimiento económico de largo plazo de un grupo de países. La misma perspectiva global, tiene la ventaja de que permite soslayar la migración en el modelo pero cuando se derivan conclusiones respecto a países no incluirla es una debilidad importante. Teniendo en cuenta estas consideraciones, el modelo deja un conjunto de aristas para ser exploradas teórica y empíricamente.

En síntesis, se muestra una nueva forma de abordar uno de los modelos más importantes de la literatura económica. Se mostró como la modificación de un supuesto, tiene relevancia y puede derivar en resultados muy diferentes a los originales. La idea de efectos directos y lineales para todos los casos en que varían los factores exógenos de una economía se desestiman, ya que las relaciones ahora son no lineales. Estos resultados son novedosos para este tipo de modelos. Sin embargo, la literatura de modelos endógenos a podido incorporar dinámicas que reproducen de mejor manera el crecimiento de las economías modernas. Por este motivo, este trabajo es solo una plataforma para la agenda futura antes mencionada.



## Referencias bibliográficas

- M. Abreu, H. L. F. de Groot, and R. J. G. M. Florax. A Meta-Analysis of  $\beta$ -Convergence: the Legendary 2%. *Journal of Economic Surveys*, 19(3):389–420, jul 2005. ISSN 09500804. doi: 10.1111/j.0950-0804.2005.00253.x. URL <http://doi.wiley.com/10.1111/j.0950-0804.2005.00253.x>.
- E. Accinelli and J. G. Brida. Re-formulation of the Solow economic growth model whit the Richards population growth law. *GE, Growth, Math methods*, 8 2005.
- D. Acemoglu. Technical Change, Inequality, and the Labor Market. *Journal of Economic Literature*, 40(1):7–72, 3 2002. ISSN 0022-0515. doi: 10.1257/0022051026976.
- D. Acemoglu. *Introduction to modern economic growth*. Princeton University Press, 12 2008. ISBN 9780691132921. doi: 10.1111/j.1475-4932.2011.00816.x.
- D. Acemoglu, S. Johnson, and J. a. Robinson. Institutions as the Fundamental Casue of Long-Run Grwoth. *Handbook of Economic Growth*, pages 1–111, 2004. doi: 10.3386/w10481.
- D. Acemoglu, S. Naidu, P. Restrepo, and J. A. Robinson. Democracy does cause growth. *Journal of Political Economy*, 127(1):47–100, 2 2019. ISSN 1537534X. doi: 10.1086/700936.
- P. Aghion and P. Howirtt. A Model of Growth Through Creative Destruction. *Econometrica*, 60(2):323–351, 1992. doi: 10.3386/w3223. URL <http://nrs.harvard.edu/urn-3:HUL.InstRepos:12490578>.
- U. Akcigit. Economic Growth: The Past, the Present, and the Future \*. Technical report, 2017.
- C. Azariadis and J. Stachurski. *Handbook of Economic Growth*, volume 1, chapter Poverty Traps, pages 295–384. 2005. ISBN 9780444520418. doi: 10.1016/S1574-0684(05)01005-1.
- Banco Mundial. Esperanza de vida al nacer, total (años). *Obtenido de BANCO MUNDIAL— DATOS: <https://datos.bancomundial.org/indicador/SP.DYN.LE00.IN>*, 2018a.
- Banco Mundial. Tasa de fertilidad, total (nacimientos por cada mujer). *Recuperado de <https://datos.bancomundial.org/indicador/sp.dyn.tfrt.in>*, 2018b.
- R. Barro and X. Sala-i Martin. *Economic Growth: An Economic Growth on corruption: Quantitative Analysis on Economic and Social Determinant*. MIT Press, 1991. ISBN 9780262025539.

- R. J. Barro. Economic Growth in a Cross Section of Countries. *The Quarterly Journal of Economics*, 106(2):407, may 1991. ISSN 00335533. doi: 10.2307/2937943. URL <https://academic.oup.com/qje/article-lookup/doi/10.2307/2937943>.
- R. J. Barro and G. S. Becker. Fertility Choice in a Model of Economic Growth. *Econometrica*, 57(2):481–501, 1989.
- R. J. Barro and X. Sala-i Martin. Convergence. *Journal of Political Economy*, 100:223–251, 1992. doi: 10.2307/2138606. URL <https://www.jstor.org/stable/2138606>.
- W. Baumol and W. Baumol. Productivity Growth, Convergence, and Welfare: What the Long-run Data Show. *American Economic Review*, 76(5):1072–85, 1986. doi: 10.2307/1816469. URL <https://www.jstor.org/stable/1816469>.
- G. S. Becker, J. S. Duesenberry, and B. Okun. An Economic Analysis of Fertility. Technical report, 1960.
- G. S. Becker, K. M. Murphy, R. F. Tamura, G. Becker, K. Murphy, and R. Tamura. Human Capital, Fertility, and Economic Growth. *Journal of Political Economy*, 98(5): 12–37, 1990.
- G. S. Becker, E. L. Glaeser, and K. M. Murphy. Population and economic growth. *American Economic Review*, 89(2):145–149, 1999.
- J. Bongaarts. Human population growth and the demographic transition. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 364(1532):2985–2990, 10 2009. ISSN 14712970. doi: 10.1098/rstb.2009.0137.
- S. Brianzoni, C. Mammana, and E. Michetti. Nonlinear dynamics in a business-cycle model with logistic population growth. *Chaos, Solitons & Fractals*, 40(2):717–730, 2009. ISSN 09600779. doi: 10.1016/j.chaos.2007.08.041. URL <http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0960077907006303>.
- A. Bucci and L. Guerrini. Transitional dynamics in the solow-swan growth model with AK technology and logistic population change. *B.E. Journal of Macroeconomics*, 9(1), 2009. ISSN 19351690. doi: 10.2202/1935-1690.1954.
- D. Cai. An economic growth model with endogenous carrying capacity and demographic transition. *Mathematical and Computer Modelling*, 55(3-4):432–441, 2 2012. ISSN 08957177. doi: 10.1016/j.mcm.2011.08.022.
- N. Cavusoglu and E. Tebaldi. Evaluating growth theories and their empirical support: An assessment of the convergence hypothesis. *Journal of Economic Methodology*, 13 (1):49–75, 3 2006. ISSN 1350178X. doi: 10.1080/13501780600566396.

- L. C. Corchón. A Malthus-Swan-Solow model of economic growth. *Journal of Dynamics and Games*, 3(3):225–230, 7 2016. ISSN 2164-6066. doi: 10.3934/jdg.2016012. URL <http://aimsciences.org//article/id/a9601aa2-1f04-45ed-92a1-945fa3e45ecc>.
- D. De la Croix. Economic Growth. Technical report, 2015. URL <https://perso.uclouvain.be/david.delacroix/pdf/economic-growth-web.pdf>.
- B. Eichengreen, D. Park, and K. Shin. Growth Slowdowns Redux: New Evidence on the Middle-Income Trap. Technical report, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA, 1 2013. URL <http://www.nber.org/papers/w18673.pdf>.
- L. Fanti and P. Manfredi. The Solow’s Model With Endogenous Population: A Neoclassical Growth Cycle Model. *Journal of Economic Development*, 28(2):103–115, 2003. ISSN 0254-8372.
- L. Fanti, M. Iannelli, and P. Manfredi. Neoclassical growth with endogenous age distribution. Poverty vs low-fertility traps as steady states of demographic transitions. *Journal of Population Economics*, 26(4):1457–1484, 10 2013. ISSN 09331433. doi: 10.1007/s00148-012-0446-4.
- M. Ferrara and L. Guerrini. The neoclassical model of Solow and Swan with logistic population growth. *Proceedings of the 2nd International Conference of IMBIC on “Mathematical Sciences for Advancement of Science and Technology (MSAST)*, pages 119–127, 2008. URL [https://www.researchgate.net/publication/228962671\\_The\\_neoclassical\\_model\\_of\\_Sol](https://www.researchgate.net/publication/228962671_The_neoclassical_model_of_Sol).
- O. Galor. *Handbook of Economic Growth*, volume 1, chapter 4. From Stagnation to Growth: Unified Growth Theory, pages 171–293. 2005. ISBN 9780444520418. doi: 10.1016/S1574-0684(05)01004-X.
- O. Galor and D. N. Weil. Population, Technology, and Growth: From Malthusian Stagnation to the Demographic Transition and Beyond. *American economic review*, 90(4): 806–828, 2000. ISSN 0002-8282. doi: 10.1257/aer.90.4.806. URL <http://pubs.aeaweb.org/doi/10.1257/aer.90.4.806>.
- L. Gori, L. Guerrini, and M. Sodini. Time delays, population, and economic development. 28(5):55909, 2018. ISSN 1054-1500, 1089-7682. doi: 10.1063/1.5024397. URL <http://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5024397>.
- G. Grossman and E. Helpman. Trade, Knowledge Spillovers, and Growth. Technical report, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA, 10 1990. URL <http://www.nber.org/papers/w3485.pdf>.

- L. Guerrini. The Solow-Swan model with a bounded population growth rate. *Journal of Mathematical Economics*, 42(1):14–21, 2 2006. ISSN 03044068. doi: 10.1016/j.jmateco.2005.05.001.
- L. Guerrini and M. Sodini. Dynamic Properties of the Solow Model with Increasing or Decreasing Population and Time-to-Build Technology. *Abstract and Applied Analysis*, 2013:280925, 2013. ISSN 1085-3375. doi: 10.1155/2013/280925. URL <https://doi.org/10.1155/2013/280925>.
- R. E. Hall and C. I. Jones. Why do Some Countries Produce So Much More Output Per Worker than Others? *The Quarterly Journal of Economics*, 114(1):83–116, 2 1999. ISSN 0033-5533. doi: 10.1162/003355399555954. URL <https://academic.oup.com/qje/article-lookup/doi/10.1162/003355399555954>.
- G. D. Hansen and E. C. Prescott. Malthus to Solow. *The American Economic Review*, (1997):1205–1217, 2002.
- C. Jones. The Facts of Economic Growth. In Elsevier B.V., editor, *Handbook of Macroeconomics*, chapter 1, pages 3–69. 2016. doi: 10.1016/bs.hesmac.2016.03.002. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1574004816000033>.
- C. Jones. The End of Economic Growth? Unintended Consequences of a Declining Population. Technical report, National Bureau of Economic Research, Cambridge, MA, 1 2020. URL <http://www.nber.org/papers/w26651.pdf>.
- C. I. Jones. R & D-based models of economic growth. *Journal of Political Economy*, 103 (4):759–784, 1995a. ISSN 00223808. doi: 10.1086/262002.
- C. I. Jones. Time Series Tests of Endogenous Growth Models. *The Quarterly Journal of Economics*, 110(2):495–525, 5 1995b. ISSN 0033-5533. doi: 10.2307/2118448. URL <https://www.jstor.org/stable/2118448>.
- C. I. Jones. Growth: With or Without Scale Effects? Technical report, 1998. URL <http://www.stanford.edu/~chadj>.
- S. S. Kortum. Research, Patenting, and Technological Change. *Econometrica*, 65(6): 1389, 11 1997. ISSN 00129682. doi: 10.2307/2171741. URL <https://www.jstor.org/stable/2171741>.
- S. Kuznets. Population, Income and Capital. In *Economic Progress*, pages 3–20. Palgrave Macmillan UK, 1987. doi: 10.1007/978-1-349-08440-1. URL [https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-349-08440-1\\_1](https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-1-349-08440-1_1).

- R. E. Lucas. On the mechanics of economic development. *Journal of Monetary Economics*, 22(1):3–42, jul 1988. ISSN 03043932. doi: 10.1016/0304-3932(88)90168-7. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0304393288901687>.
- N. Mankiw and D. N. Weil. The baby boom, the baby bust, and the housing market. *Regional Science and Urban Economics*, 19(2):235–258, 5 1989. ISSN 01660462. doi: 10.1016/0166-0462(89)90005-7. URL <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0166046289900057>.
- N. G. Mankiw, D. Romer, and D. N. Weil. A Contribution to the Empirics of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 107(2):407–437, may 1992. ISSN 0033-5533. doi: 10.2307/2118477.
- J. E. Marsden, M. McCracken, P. R. Sethna, and G. R. Sell. The Hopf Bifurcation and Its Applications. *Journal of Applied Mechanics*, 45(1):234–235, 03 1978. ISSN 0021-8936. doi: 10.1115/1.3424264. URL <https://doi.org/10.1115/1.3424264>.
- D. d. P. Naciones Unidas, Departamento de Asuntos Económicos y Sociales. World Population Prospects 2019 Highlights. Technical report, 2019.
- D. C. North and J. Alt. Institutions, Institutional Change, and Economic Performance, 1990. URL <https://papers.ssrn.com/abstract=1496212>.
- L.-T. Pan. La planificación familiar en China: La política de un solo hijo por familia. *Estudios de Asia y Africa*, 49(1 (153)):173–192, 8 2014. ISSN 01850164. URL <http://www.jstor.org/stable/24368081>.
- F. P. Ramsey. A Mathematical Theory of Saving. Technical Report 152, 1928.
- S. Rebelo. Long-Run Policy Analysis and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 99(3):500–521, 1991. ISSN 00223808, 1537534X. URL <http://www.jstor.org/stable/2937740>.
- P. M. Romer. Increasing Returns and Long-Run Growth. *Journal of Political Economy*, 94(5):1002–1037, oct 1986. ISSN 0022-3808. doi: 10.1086/261420. URL <https://www.journals.uchicago.edu/doi/10.1086/261420>.
- P. M. Romer. Endogenous Technological Change. *Journal of Political Economy*, 98(5, Part 2):S71–S102, 10 1990. ISSN 0022-3808. doi: 10.1086/261725.
- X. Sala-i Martin. The Classical Approach to Convergence Analysis. *The Economic Journal*, 106(437):1019, jul 1996. ISSN 00130133. doi: 10.2307/2235375. URL <https://academic.oup.com/ej/article/106/437/1019-1036/5159124>.
- X. Sala-i Martin. *Apuntes de crecimiento económico*. Antoni Bosch Editor, 2000.

- P. S. Segerstrom. Endogenous Growth Without Scale Effects. *American Economic Review*, 88(5):1290–1310, 12 1998. ISSN 00028282. doi: 10.2307/116872. URL <https://www.jstor.org/stable/116872>.
- R. M. Solow. A Contribution to the Theory of Economic Growth. *The Quarterly Journal of Economics*, 70(1):65, 2 1956. ISSN 00335533. doi: 10.2307/1884513.
- R. M. Solow. Siena lectures on endogenous growth theory. *Universita degli studi di Siena*, 6, 9 1992.
- I. M. Stamova and A. G. Stamov. Impulsive control on the asymptotic stability of the solutions of a Solow model with endogenous labor growth. *Journal of the Franklin Institute*, 349(8):2704–2716, 10 2012. ISSN 00160032. doi: 10.1016/j.jfranklin.2012.07.001.
- T. W. Swan. Economic growth and capital accumulation. *Economic Record*, 32(2):334–361, 1956. ISSN 14754932. doi: 10.1111/j.1475-4932.1956.tb00434.x.
- M. Tórtola. Bosón de Higgs: ¿Qué es la ‘partícula de Dios’? *El País*, 2018. URL [https://elpais.com/elpais/2018/07/20/ciencia/1532077822\\_153937.html](https://elpais.com/elpais/2018/07/20/ciencia/1532077822_153937.html). [Acceso 28-08-2020].
- V. P. Weinberger, C. Quiñinao, and P. A. Marquet. Innovation and the growth of human population. *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, 372(1735):20160415, 12 2017. ISSN 0962-8436. doi: 10.1098/rstb.2016.0415. URL <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rstb.2016.0415>.
- W.-B. Zhang. Population Change with Endogenous Birth and Mortality Rates, Wealth Accumulation, and Renewable Resource Change. *International Journal of Economic Sciences*, 2014(3):103–129, 2014.