

Tesis de Doctorado en Física



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



Gravedad axisimétrica en variables de  
Ashtekar

Esteban Mato  
Orientador: Dr. Rodolfo Gambini

Instituto de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República



# Gravedad axisimétrica en variables de Ashtekar

Estudiante: Esteban Mato

Orientador: Dr. Rodolfo Gambini

Tribunal:

Dr. Miguel Campiglia

Dr. Raúl Donángelo

Dr. Miguel Paternain

Dr. Jorge Pullin

Instituto de Física

Facultad de Ciencias

Universidad de la República

Abril 2021



## Resumen

En este trabajo formulamos la Relatividad General axisimétrica en términos de las variables de Ashtekar-Barbero, obteniendo los vínculos de la teoría y discutiendo sus condiciones de borde. Calculamos las ecuaciones de movimiento y mostramos que las geometrías de Kerr, Schwarzschild y Minkowski son solución de estas. Realizamos una cuantización canónica de la teoría reducida por simetría, definiendo el espacio cinemático, operadores geométricos sobre este, y construyendo el Hamiltoniano de Thiemann. Calculamos explícitamente la acción del Hamiltoniano actuando sobre un vértice cuativalente y concluimos el trabajo estudiando el Kernel del mismo. Presentamos a modo introductorio la reformulación de la Relatividad General en términos de las variables de Ashtekar, seguida de una introducción a la gravedad cuántica de lazos. Algunos temas básicos como teoría de grupos, fibrados, conexiones y dinámica de sistemas vinculados son cubiertos en los apéndices.

## Abstract

We formulate axisymmetric General Relativity in terms of real Ashtekar-Barbero variables, obtaining the constraints of the theory and analyzing their boundary conditions. We calculate the equations of motion and show, by choosing an appropriate Ansatz, that the Minkowski, Schwarzschild and Kerr geometries are admitted solutions. We perform a canonical quantization of the symmetry reduced theory, defining the kinematical space, geometric operators acting on it, and lastly implementing Thiemann's version of the Hamiltonian constraint. We calculate the action of the Hamiltonian operator on a four-valent vertex and then we conclude our work by studying its Kernel. We give an introduction to General Relativity in terms of Ashtekar-Barbero variables, followed by a short introduction to Loop Quantum Gravity. Some topics like group theory, bundle theory and dynamics of constrained systems are covered in the appendices.



## **Agradecimientos**

A mi familia agradezco el apoyo continuo e incondicional. Agradezco a Iván por recibirme en LSU y por su ayuda y guía con el curso de teoría de campos en espacios curvos. A Miguel le agradezco por su ayuda y buena voluntad para responder dudas sobre el curso de tópicos de gravedad. La primera parte de este trabajo no habría sido posible sin la colaboración de Javier, gracias a quien los cálculos de las ecuaciones de movimiento se pudieron realizar y presentar en una forma compacta. A Rodolfo le agradezco por la paciencia que me tuvo durante este proceso, por su apoyo durante el estudio de temas que fueron prácticamente un capricho mío (tensor de Mars-Simon por ejemplo), y por su orientación y dirección durante todo el trabajo.

Agradezco finalmente a la Comisión Académica de Posgrado por financiar este trabajo, y a los miembros del tribunal por sus correcciones y sugerencias.



# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Gravedad cuántica . . . . .	1
1.2	Formulación ADM de la Relatividad General . . . . .	3
1.3	Variabes de Ashtekar-Barbero . . . . .	3
1.4	Reducción por simetría . . . . .	4
1.5	Esquema del trabajo . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Relatividad General clásica</b>	<b>9</b>
2.1	Geometría semi Riemanniana . . . . .	9
2.1.1	Tensores . . . . .	9
2.1.2	Conexión de Levi-Civita . . . . .	11
2.1.3	Tensor de Riemann . . . . .	13
2.2	Formulación Lagrangeana de la Relatividad General . . . . .	15
2.2.1	Acción de Einstein-Hilbert . . . . .	15
2.2.2	Acción de Palatini . . . . .	15
2.3	Formulación Hamiltoniana . . . . .	20
2.3.1	Formulación ADM . . . . .	20
2.3.2	Formulación de Ashtekar-Barbero . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Simetría Axial</b>	<b>39</b>
3.1	Espacios estacionarios y axisimétricos . . . . .	39
3.1.1	Reducción por simetría en variables métricas . . . . .	39
3.1.2	Reducción por simetría en variables de Ashtekar . . . . .	44
3.2	Reducción por simetría de otras cantidades básicas . . . . .	49
3.3	Vínculos . . . . .	54
3.3.1	Vínculo de Gauss . . . . .	54
3.3.2	Vínculo de difeomorfismos . . . . .	55
3.3.3	Vínculo Hamiltoniano . . . . .	55
3.4	Ecuaciones de movimiento . . . . .	57
3.4.1	Vínculo de Gauss . . . . .	57
3.4.2	Vínculo de difeomorfismos . . . . .	57
3.4.3	Vínculo Hamiltoniano . . . . .	59
3.5	Términos de borde . . . . .	63
3.5.1	Vínculo de difeomorfismos . . . . .	63
3.5.2	Vínculo Hamiltoniano . . . . .	65
3.5.3	Vínculo de Gauss . . . . .	66
3.6	Álgebra de los vínculos . . . . .	66

<b>4</b>	<b>Gravedad cuántica de lazos</b>	<b>69</b>
4.1	Herramientas de teorías de gauge en redes . . . . .	70
4.1.1	Producto escalar . . . . .	70
4.1.2	Intertwiners . . . . .	71
4.2	El grupo $SU(2)$ . . . . .	72
4.2.1	Espinores e intertwiners . . . . .	72
4.3	Espacio cinemático $\mathcal{K}$ . . . . .	76
4.3.1	Funciones cilíndricas . . . . .	76
4.3.2	Producto escalar . . . . .	77
4.3.3	Base ortonormal de $\mathcal{K}$ . . . . .	77
4.3.4	Invariancias del producto escalar . . . . .	78
4.4	Estados invariantes gauge e invariantes bajo difeomorfismos . . .	79
4.4.1	Estados invariantes gauge. Espacio $\mathcal{K}_0$ . . . . .	79
4.4.2	Invariancia bajo difeomorfismos. Espacio $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ . . . . .	80
4.4.3	Nudos y estados de spin-nudos . . . . .	81
4.4.4	Simetría axial . . . . .	81
4.5	Operadores básicos . . . . .	83
4.5.1	Holonomías y Flujos . . . . .	83
4.5.2	Operador área . . . . .	85
4.5.3	Operador Volumen . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Hamiltoniano de Thiemann</b>	<b>101</b>
5.1	Teoría completa . . . . .	101
5.1.1	Hamiltoniano euclídeo . . . . .	101
5.1.2	Teoría reducida . . . . .	107
5.2	Hamiltoniano Lorentziano . . . . .	114
5.2.1	Teoría completa . . . . .	114
5.2.2	Teoría reducida . . . . .	115
5.3	Requerimientos para una triangulación adaptada a un grafo . . .	117
5.3.1	Consistencia cilíndrica . . . . .	118
5.3.2	Covariancia por difeomorfismos . . . . .	119
5.3.3	Inexistencia de anomalías . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Elementos de matriz del Hamiltoniano Euclídeo</b>	<b>127</b>
6.1	Elementos de matriz del Hamiltoniano Euclídeo . . . . .	127
6.1.1	Cálculo gráfico de recoupling en $SU(2)$ . . . . .	127
6.2	Cálculo de los elementos de matriz del Hamiltoniano Euclídeo . .	139
6.2.1	Teoría completa . . . . .	139
6.2.2	Teoría axisimétrica . . . . .	146
6.3	Kernel del Vínculo Hamiltoniano . . . . .	159
6.3.1	Teoría completa . . . . .	159
6.3.2	Teoría axisimétrica . . . . .	162
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>169</b>
<b>A</b>	<b>Soluciones particulares a las ecuaciones de movimiento</b>	<b>171</b>

<b>B</b>	<b>Elementos de matriz del operador <math>\hat{W}</math></b>	<b>175</b>
B.1	Vértice trivalente invariante gauge . . . . .	177
B.2	Vértice cuatrivalente . . . . .	178
B.3	Vértice cuatrivalente no invariante gauge en teoría axisimétrica . . . . .	180
<b>C</b>	<b>Elementos de teoría de grupos</b>	<b>185</b>
<b>D</b>	<b>Conexiones y fibrados</b>	<b>191</b>
D.1	Fibrados y conexiones . . . . .	191
D.2	Holonomías . . . . .	196
D.3	Curvatura . . . . .	199
<b>E</b>	<b>Sistemas vinculados</b>	<b>201</b>
E.1	Vínculos lagrangeanos . . . . .	202
E.2	Formulación hamiltoniana . . . . .	203
E.2.1	Vínculos primarios . . . . .	203
E.2.2	Hamiltoniano canónico . . . . .	204
E.2.3	Ecuaciones de Hamilton y vínculos . . . . .	205
E.2.4	Vínculos secundarios . . . . .	205
E.2.5	Hamiltoniano total . . . . .	206
E.2.6	Vínculos de primera y segunda clase . . . . .	206
E.2.7	Transformaciones de gauge . . . . .	207
E.2.8	Hamiltoniano extendido . . . . .	208
E.2.9	Vínculos de segunda clase . . . . .	208
E.2.10	Fijación de gauge . . . . .	209
E.3	Sistemas totalmente vinculados . . . . .	210
E.3.1	Hamiltoniano cero . . . . .	210
E.4	Cuantización canónica . . . . .	211
E.4.1	Cuantización de Dirac de los vínculos de primera clase . . . . .	213
	<b>Bibliografía</b>	<b>215</b>



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1 Gravedad cuántica

La Mecánica Cuántica (QM por sus siglas en inglés) y la Relatividad General (GR) son los dos pilares de la física moderna. QM describe los fenómenos microscópicos que involucran a las partículas fundamentales, dando origen a disciplinas como la física nuclear y la física de partículas. GR por su lado describe la dinámica del espacio tiempo y de los cuerpos sujetos al mismo. GR describe de forma exitosa fenómenos macroscópicos (en los cuales los efectos cuánticos pueden ser ignorados), dando lugar por ejemplo a la tecnología de GPS y a ramas de la física como la astrofísica relativista, la cosmología, y más recientemente, a la astronomía de ondas gravitacionales.

Unificando QM con la Relatividad Especial se lograron describir las interacciones electromagnéticas, débiles y fuertes en el lenguaje de la Teoría Cuántica de Campos (QFT), sin embargo, hasta el día de hoy no se han logrado unificar QM y GR.

Estas dos teorías fueron formuladas bajo hipótesis incompatibles entre sí: En QM se usa una variable temporal externa y se asume un espaciotiempo de fondo fijo, no dinámico. En GR por otro lado, el campo gravitatorio es la variable dinámica de la teoría y es suave y determinístico.

Aún no hay evidencias experimentales de fenómenos en los cuales tanto los efectos de la gravedad como los de la mecánica cuántica sean relevantes. Se espera que los efectos cuánticos de la gravedad comiencen a ser relevantes en la escala de la energía de Planck ( $\equiv 10^{19} GeV$ ), mientras que la energía máxima obtenida hasta la fecha en el LHC es aproximadamente quince órdenes de magnitud menor ( $1,3 \times 10^4 GeV$ ). Esto último no es en ninguna manera suficiente para considerar irrelevante la búsqueda de una teoría cuántica de la gravedad. Los efectos de la gravedad cuántica en el universo temprano podrían ser detectados en principio en satélites dedicados al estudio del fondo cósmico de microondas. Por otro lado, se han observado en la superficie de la tierra partículas astrofísicas con energías de hasta  $10^{13} GeV$ ; esto motiva la colocación de futuros detectores de partículas en la órbita de la tierra. Existe además la posibilidad de que algunos fenómenos astrofísicos sirvan como “amplificadores”, pudiendo hacer los efectos cuánticos de la gravedad visibles en un futuro cercano (ver por ejemplo [53] y [2]).

Desde el punto de vista teórico también existen razones para buscar una teoría cuántica de la gravedad. Tanto GR como QFT son teorías incompletas. Una serie de teoremas principalmente debidos a Hawking y Penrose (ver por ejemplo [58]) predicen la existencia de singularidades en GR: geodésicas inextensibles, esto es, que tienen un rango finito de parámetro afin (parámetro utilizado para describir el largo de una curva). Si un observador viaja sobre una de estas geodésicas, se encontrará en un tiempo propio finito con alguna patología tal que las leyes de GR fallan; GR no puede describir estas singularidades ni da las condiciones de borde para los campos físicos en las mismas.

Por otro lado, en QFT se cuenta con un espaciotiempo de Minkowski de fondo sobre el cual los campos se propagan. El campo electromagnético fue cuantizado exitosamente usando dos enfoques: El canónico y el covariante. En el enfoque canónico, se realiza una foliación  $3 + 1$  del espaciotiempo para poder definir un Hamiltoniano; el vector potencial y su momento conjugado, el campo eléctrico, son las variables básicas de la teoría; los estados físicos son funcionales invariantes de gauge del potencial vector. En el enfoque covariante, en cambio, se cuantizan los diferentes modos de Fourier del campo electromagnético sin recurrir a esta foliación del espaciotiempo, y los estados cuánticos son elementos del espacio de Fock de los fotones.

Mientras que para el campo electromagnético estos dos enfoques son equivalentes, para el campo gravitatorio la diferencia es profunda. Tener un espaciotiempo de fondo provee conos de luz, la noción de causalidad y sus isometrías permiten definir cantidades físicas como energía y momento. En GR, en cambio, no hay un espaciotiempo de fondo, sino que éste es la variable dinámica de la teoría. En este caso, para definir nociones tan básicas como conos de luz, causalidad, energía y momento, uno debe resolver primero la dinámica y luego construir el espaciotiempo. Esta última cuestión es aún más grave cuando tenemos en cuenta que en la teoría cuántica, incluso en mecánica no relativista, las partículas no tienen una trayectoria determinada sino una amplitud de probabilidad codificada en una función de onda. En gravedad cuántica entonces uno no tendría un espaciotiempo determinado sino una superposición de diferentes espaciotiempos con diferentes probabilidades.

El primer paso para intentar cuantizar la gravedad siguiendo un enfoque covariante consiste en separar a la métrica espaciotemporal  $g_{\mu\nu}$  en dos partes:  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ,  $\eta_{\mu\nu}$  es una métrica que sirve como fondo fijo en el cual se propagan los campos físicos (usualmente elegida como plana), mientras que  $h_{\mu\nu}$  es el campo dinámico a cuantizar que mide la desviación de la métrica del fondo elegido. Mientras que esta separación soluciona en principio el problema antes mencionado de no tener una métrica de fondo, se encuentran otros problemas, entre ellos, que la teoría resultante es no renormalizable (ver por ejemplo [6] y las referencias 6, 8 y 10 dentro del mismo artículo). El enfoque canónico, en el cual se basa la gravedad cuántica de lazos (LQG) tuvo su origen en los años sesenta con los trabajos de Dirac, Arnowitt, Deser y Misner entre otros se describirá en la próxima sección.

## 1.2 Formulación ADM de la Relatividad General

En el formalismo ADM (llamado así por sus autores Arnowitt, Deser y Misner) es una formulación Hamiltoniana de la Relatividad General. Dado un espacio-tiempo descrito por una variedad Lorentziana  $M$  (equipada con una métrica  $g$ ) esta es foliada en superficies espaciales  $\Sigma_t$ , parametrizadas por una coordenada temporal  $t$ . La métrica  $g$  induce en cada superficie  $\Sigma_t$  una métrica espacial  $q_{ab}(t, x^i)$  (donde  $\{x^i\}$  son coordenadas espaciales definidas en  $\Sigma_t$ ). La métrica espacial y sus momentos conjugados  $\pi^{ab}(t, x^i)$  son las variables canónicas de la teoría, por lo que en esta formulación Hamiltoniana, GR se puede interpretar como una teoría dinámica de geometrías tridimensionales. Realizando una transformada de Legendre al Lagrangeano de GR, se obtiene un Hamiltoniano que resulta ser una combinación lineal de vínculos, como es de esperar en una teoría generalmente covariante [43]. Estos vínculos son de primera clase en la terminología de Dirac; uno de ellos, llamado vínculo Hamiltoniano o vínculo escalar, genera evolución en la dirección perpendicular a  $\Sigma_t$  mientras que los demás generan difeomorfismos espaciales en las direcciones de las coordenadas  $x^i$  tangentes a  $\Sigma_t$ . Al intentar realizar una cuantización canónica (apéndice E) de la Relatividad General, uno se encuentra con serios problemas que impiden completar el programa; uno de ellos es el hecho de que el álgebra de los vínculos no es un álgebra de Lie genuina sino un álgebra abierta; esto impide usar métodos de promediado en el grupo para encontrar soluciones al vínculo Hamiltoniano. No tener un álgebra de Lie genuina además dificulta enormemente encontrar un orden de operadores tal que se cumpla la correspondencia entre los corchetes de Poisson de los vínculos y los conmutadores de los operadores asociados a los mismos. Otra de las dificultades se encuentra al seguir el procedimiento de cuantización de Dirac para sistemas vinculados (apéndice E); la ecuación resultante de exigir la invariancia de los estados físicos ante la acción del vínculo Hamiltoniano (conocida como ecuación de Wheeler-De Witt) es no lineal en las variables dinámicas y sumamente complicada de resolver incluso a nivel formal. Estos problemas entre otros hicieron que la cuantización canónica de GR estuviera estancada durante un tiempo. La situación cambió con la siguiente observación: La formulación Hamiltoniana de la Relatividad General se simplificaba significativamente si se escribía en términos de una conexión espacial en vez de la métrica espacial (De hecho, Einstein y Schrödinger ya habían reformulado GR en términos de conexiones en los años cincuenta, ver por ejemplo [5]).

## 1.3 Variables de Ashtekar-Barbero

A mediados de los años ochenta, Ashtekar reformuló GR en términos de una conexión de spin compleja autodual  $A_a^i$ , una 1-forma que toma valores en el álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$ . El uso de estas variables simplifica enormemente la teoría y en particular hace que los vínculos tomen una forma polinómica en función de las variables canónicas. Sin embargo, dado que la conexión es compleja, a la hora de cuantizar uno debería imponer “condiciones de realidad” (que resultan ser no polinomiales en las variables canónicas) para asegurar que el límite clásico sea GR. Otro dificultad que resulta de usar estas variables complejas es que el

grupo de Lie asociado a las mismas no es compacto, mientras que las técnicas de teoría de representación para grupos de gauge se han desarrollado únicamente para grupos compactos. Para resolver este problema, Barbero propuso el uso de una conexión real (llamada conexión de Ashtekar-Barbero), introduciendo un parámetro  $\beta$  que reemplazaba a los valores  $\pm i$  presentes en la expresión para la conexión autodual. Si bien esto trae como consecuencia que los vínculos vuelvan a ser no polinomiales en las variables canónicas, Thiemann introdujo ideas que permitieron abordar la cuantización de estos términos no polinomiales ([64]). La estructura y el espacio de fases de la Relatividad General reformulada en términos de la conexión son análogos a los de una teoría de Yang-Mills, esto permitió incorporar técnicas de cuantización exitosas a GR. Gambini y Trias introdujeron la llamada representación de lazos en teorías de Yang-Mills, en la cual los estados cuánticos son una función de los llamados loops de Wilson: trazas de holonomías de la conexión a lo largo de curvas cerradas en las variedades espaciales  $\Sigma_t$ . Más adelante, Rovelli y Smolin aplicaron estas ideas al caso gravitacional. Una característica importante de las variables de lazos es que (al menos para grupos de Lie compactos) capturan toda la información invariante de gauge de la conexión. La introducción de estas variables permitió avanzar con el programa de cuantización y obtener diversos resultados, como por ejemplo la obtención de soluciones formales al vínculo Hamiltoniano [40]. Muchos de estos resultados sin embargo eran meramente formales; el pasaje a la representación de lazos requiere una integración en un espacio de dimensión infinita y los procesos de integración eran insensibles a posibles divergencias; además, no se disponía de un espacio de Hilbert ni de una medida adecuada invariante por difeomorfismos. En un trabajo de Ashtekar e Isham [7] se logró definir un espacio cuántico de conexiones distribucionales  $\overline{\mathcal{A}}$  al que posteriormente Ashtekar y Lewandowski [8] dotaron de una medida  $\mu_0$  invariante por difeomorfismos y transformaciones de gauge, lo que permitió obtener el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_0 = L^2(\overline{\mathcal{A}}, d\mu_0)$  [12]. Usando ideas introducidas por Penrose, Rovelli y Smolin lograron obtener un espacio de Hilbert unitariamente equivalente a partir de la representación de lazos [57], obteniendo funcionales linealmente independientes de loops de Wilson a los que llamaron *Spin-networks* y en principio simplemente los definieron como ortogonales. Báez probó en un trabajo posterior que estos estados son efectivamente ortogonales con respecto a  $\mathcal{H}_0$  si están basados en grafos diferentes [15]. Sobre  $\mathcal{H}_0$  se pueden definir operadores que miden área y volumen cuyos espectros resultan ser discretos. En este espacio está basada la gravedad cuántica de lazos (LQG por sus siglas en inglés), una de las teorías candidatas a teoría cuántica de la Relatividad General.

## 1.4 Reducción por simetría

Las ecuaciones de Einstein son altamente no lineales, lo que dificulta enormemente el encontrar soluciones exactas. Esta complejidad hace que la búsqueda de soluciones en espacios con simetrías que simplifiquen las ecuaciones de movimiento sea fundamental para poder obtener resultados transparentes que permitan entender la física de la teoría. La cosmología, por ejemplo, es la rama de la Relatividad General que tiene por objeto de estudio el Universo entero. Observaciones tales como el alto grado de isotropía del fondo cósmico de microondas (CMB) indican que el Universo se puede describir de forma aproximada por

una métrica homogénea e isotrópica, estas son las soluciones de Friedmann-Roberson-Walker de las ecuaciones de Einstein. La cosmología permitió estudiar fenómenos como el Big-Bang, el corrimiento hacia el rojo o expansión del Universo y la Inflación del mismo.

Poco tiempo después de que Einstein formulara la Relatividad General en 1915, Karl Schwarzschild encontró una solución estática y esféricamente simétrica a las ecuaciones de movimiento en ausencia de materia. Más tarde, gracias al teorema de unicidad de Birkhoff se comprobó que la geometría de una región vacía afuera de cualquier fuente esféricamente simétrica no rotante (por ejemplo un planeta o una estrella) está descrita por la métrica de Schwarzschild. Después de un tiempo se comprendió que la métrica de Schwarzschild describe un agujero negro no rotante: Uno de los estados posibles del colapso de una estrella. La solución de Reissner-Nordström (descubierta entre los años 1916 y 1921) extiende el resultado de Schwarzschild para el caso de un agujero negro no rotante con carga eléctrica. Pero los objetos astrofísicos reales como planetas y estrellas rotan, por lo que es esperable que el agujero negro resultante de un colapso gravitatorio conserve aunque sea una porción de su momento angular inicial. Thirring y Lense obtuvieron en 1918 una métrica que describía, en la aproximación de campo débil, el exterior de un cuerpo estacionario con un cierto momento angular; sin embargo, ya se conocían en ese entonces situaciones en las cuales la aproximación de campo débil no era válida (por ejemplo, estrellas de neutrones); este problema no fue resuelto sino hasta el año 1963, en el que Roy Kerr descubrió la métrica que hoy lleva su nombre. Esta métrica es además la primera solución exacta de las ecuaciones de Einstein con simetría axial. En un trabajo posterior de Ernst [31] se obtuvo una familia de soluciones axisimétricas de las cuales la solución de Kerr es un caso particular.

El estudio de modelos reducidos por simetría en LQG comenzó con espacios homogéneos e isotrópicos, dando origen a la Cosmología Cuántica de Lazos (LQC) [13]. Posteriormente se estudiaron modelos esféricamente simétricos [35], obteniendo el espaciotiempo cuántico de un agujero negro de Schwarzschild. Este último estudio se extendió al caso de un agujero negro cargado eléctricamente [34]. En ambos casos el proceso de cuantización dio resultados físicos interesantes, como por ejemplo la eliminación de la singularidad presente en el espaciotiempo clásico. Es natural intentar extender este estudio a espacios con menos simetrías, como por ejemplo espacios con simetría axial. La literatura sobre el tema es escasa (existen algunos trabajos sobre horizontes aislados, entropía y momento angular, ver por ejemplo [19], [52], [18], [32], [1]. En [44] se estudió la cuantización de espacios con un solo vector de Killing espacial en términos de las variables de Ashtekar autoduales, encontrando soluciones al vínculo Hamiltoniano, considerando tanto la representación de conexión como la representación de lazos. En este trabajo vamos a estudiar espacios axisimétricos en términos de las variables de Ashtekar reales, su cuantización en términos de spin-networks y la dinámica Hamiltoniana resultante.

## 1.5 Esquema del trabajo

Con el objetivo de que esta tesis sea lo más autocontenida posible, incluimos un capítulo introductorio cuya principal fuente es mi tesis de maestría. En dicho capítulo damos un repaso de Relatividad General clásica, comenzando

con conceptos y definiciones básicos de geometría diferencial. Introducimos la formulación Lagrangeana de GR utilizando las variables métricas tradicionales, siguiendo con la formulación de Palatini, en la cual la métrica y la conexión se trata como variables independientes. La formulación de Palatini sirve como introducción a las variables de Ashtekar Barbero, las cuales son descritas posteriormente luego de haber dado un repaso de la formulación Hamiltoniana de GR. En el capítulo 3 realizamos la reducción por simetría [16] correspondiente a espacios con un vector de Killing espacial, obteniendo las variables canónicas reducidas, los nuevos vínculos, términos de borde asociados a los mismos y las ecuaciones de movimiento de la teoría, verificando además que el espaciotiempo de Kerr (utilizando un Ansatz apropiado) es solución de las mismas.

En la primer parte del capítulo 4 (cuya principal fuente es el libro de Rovelli) se construye el espacio cinemático de LQG. Las variables básicas de la teoría son holonomías de la conexión de Ashtekar-Barbero y los estados cuánticos son funciones de estas holonomías y se denominan funciones cilíndricas. Una base del espacio de Hilbert de las funciones cilíndricas está dada por los elementos de matriz de las representaciones irreducibles de las holonomías de la conexión (Teorema de Peter-Weyl). Recurriendo al concepto de intertwiners, se construyen estados invariantes bajo transformaciones de gauge llamados estados de *Redes de Spines*, a partir de los cuales se construyen estados que son además invariantes por difeomorfismos espaciales, llamados estados de *Spin-Nudos*. Se introducen luego los operadores geométricos correspondientes al área de una superficie y al volumen de una región espacial, cuyos espectros resultan estar discretizados, siendo este un resultado destacado de LQG: El espacio de LQG es discreto (lo cual era esperado en QG, ver por ejemplo [51]) y esto resulta ser una consecuencia de la teoría, no algo que se deba imponer externamente. El resto de este capítulo está dedicado a la especialización de los resultados anteriores al caso axisimétrico, observando las similitudes y diferencias con la teoría completa.

El capítulo 5 está dedicado al estudio del vínculo Hamiltoniano, el cual gobierna la dinámica de la teoría. En la primer parte del capítulo se construye la versión cuántica del operador Hamiltoniano introducida en [64] por Thiemann, quien introdujo una idea novedosa que permitió el tratamiento cuántico de los términos no polinomiales del vínculo. Luego se procede a realizar la construcción de un operador análogo correspondiente al modelo axisimétrico basándonos en el espacio cinemático obtenido en el capítulo anterior.

La primer parte del capítulo 6 está basada en un trabajo de Rovelli y De Pietri [24], en el cual se calcularon explícitamente los elementos de matriz del operador Hamiltoniano actuando en el estado no trivial más simple posible. Se realiza este cálculo en el caso axisimétrico, notando que su complejidad es mayor debido a la estructura del espacio cinemático. El capítulo concluye con un estudio del Kernel del operador Hamiltoniano, basándonos en [65].

Concluimos el trabajo en el capítulo 7, presentando las conclusiones del mismo y posibles trabajos a futuro.

El apéndice A contiene los resultados obtenidos de resolver las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General clásica axisimétricas usando un Ansatz adecuado para la solución de Kerr. El apéndice B contiene el cálculo de los elementos de matriz del operador Volumen definido en el capítulo 4 para el caso axisimétrico, resultados utilizados en el capítulo 6. Los apéndices C y D contienen un resumen de herramientas matemáticas utilizadas en la tesis, como

teoría de grupos y conexiones en fibrados. En el apéndice  $E$  se puede encontrar un resumen sobre sistemas Hamiltonianos vinculados así como el método de Dirac para la cuantización de los mismos. Estos tres últimos apéndices, al igual que el capítulo 2, están basados principalmente en mi tesis de maestría y sus contenidos se presuponen conocidos en la tesis.



## Capítulo 2

# Relatividad General clásica

En este capítulo se asumirá que el lector posee conocimientos básicos de geometría diferencial y de Relatividad General. En la primera sección haremos una revisión de conceptos básicos de geometría semi-Riemanniana a partir de los cuales introduciremos las formulaciones Lagrangeana y Hamiltoniana de la Relatividad General usando las variables métricas tradicionales. En la última sección reformularemos la teoría en término de las llamadas variables Ashtekar-Barbero, las cuales serán usadas en el resto de este trabajo.

### 2.1 Geometría semi Riemanniana

#### 2.1.1 Tensores

Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$ . Definimos el fibrado de tensores  $(r, s)$  como el producto tensorial:

$$TM \otimes \cdots \otimes TM \otimes T^*M \otimes \cdots \otimes T^*M \quad (2.1)$$

Siendo  $TM$  y  $T^*M$  los espacios tangente y co-tangente de  $M$  respectivamente. Llamamos tensor de orden  $(r, s)$  a una sección de este fibrado. Así, un tensor de orden  $(1, 0)$  corresponde a un campo vectorial en  $M$  (una sección del fibrado tangente), mientras que un tensor de orden  $(0, 1)$  corresponde a una 1-forma en  $M$ . Definimos los tensores de orden  $(0, 0)$  como funciones en  $M$ . En coordenadas locales, una base de un fibrado de tensores  $(r, s)$  está dada por:

$$\partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_n} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_s} \quad (2.2)$$

donde los índices  $\alpha_i, \beta_j$  toman valores desde 1 hasta  $n$ . Si tenemos entonces un tensor de orden  $(r, s)$ , podemos escribirlo como combinación lineal de la base:

$$X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \partial_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes \partial_{\alpha_n} \otimes dx^{\beta_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\beta_s} \quad (2.3)$$

donde las funciones

$$X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \quad (2.4)$$

se denominan componentes del tensor. Un tensor actúa sobre  $r$  1-formas  $\omega_1 \dots \omega_r$  y  $s$  campos vectoriales  $v_1 \dots v_s$  dando un número real como resultado:

$$X(\omega_1, \dots, \omega_r, v_1, \dots, v_s) = X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} \omega_{1\alpha_1} \dots \omega_{r\alpha_r} v_1^{\beta_1} \dots v_s^{\beta_s} \quad (2.5)$$

Siendo  $vi^{\beta_j}$  la componente  $j$  del vector  $v_i$  en la base  $\{\partial_{\alpha_i}\}$  mientras que  $\omega_{i\alpha_j}$  es la componente  $\alpha_j$  de la 1-forma  $\omega_i$ . Una métrica semi-Riemanniana  $g$  sobre una variedad  $M$  en particular puede ser vista como un tensor de orden  $(0, 2)$  ya que actúa sobre dos campos vectoriales dando como resultado un número real y es  $C^\infty(M)$ -lineal en cada argumento:

$$g(v + v', w) = g(v, w) + g(v', w) \quad (2.6)$$

$$g(v, w + w') = g(v, w) + g(v, w') \quad (2.7)$$

$$g(fv, w) = g(v, fw) = fg(v, w) \quad (2.8)$$

para  $v, v', w, w' \in Vect(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$ . En coordenadas locales, tenemos:

$$g = g_{\alpha\beta} dx^\alpha \otimes dx^\beta \quad (2.9)$$

donde  $g_{\alpha\beta} = g(\partial_\alpha, \partial_\beta)$ . En coordenadas esféricas  $(\phi, \theta)$  en la 2-esfera  $S^2$ , las componentes de la métrica estándar toman la siguiente forma:

$$g(\partial_\phi, \partial_\phi) = 1, \quad g(\partial_\theta, \partial_\theta) = \sin^2(\phi), \quad g(\partial_\theta, \partial_\phi) = 0 \quad (2.10)$$

Por lo que podemos expresar la métrica como:

$$d\phi \otimes d\phi + \sin^2\phi \, d\theta \otimes d\theta \quad (2.11)$$

O de forma abreviada:

$$d\phi^2 + \sin^2\phi \, d\theta^2 \quad (2.12)$$

Así como podemos tomar el producto tensorial de una sección de un fibrado  $E$  y una sección de otro fibrado  $E'$  para obtener una sección de  $E \otimes E'$ , también podemos tomar el producto tensorial de campos tensoriales. En particular, el producto tensorial de un tensor  $X$  de orden  $(r, s)$  y otro tensor  $Y$  de orden  $(r', s')$  da como resultado un tensor de orden  $(r + r', s + s')$   $X \otimes Y$ . Las componentes están dadas por:

$$(X \otimes Y)_{\beta_1 \dots \beta_{s+s'}}^{\alpha_1 \dots \alpha_{r+r'}} = X_{\beta_1 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \alpha_r} Y_{\beta_{s+1} \dots \beta_{s+s'}}^{\alpha_{r+1} \dots \alpha_{r+r'}} \quad (2.13)$$

Luego, si tenemos el tensor  $(r, s)$

$$X = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \omega_1 \otimes \dots \otimes \omega_s \quad (2.14)$$

podemos acoplar una 1-forma con un campo vectorial para obtener un tensor de orden  $(r - 1, s - 1)$ :

$$\omega_j(v_i)v_1 \otimes \dots \otimes \hat{v}_i \dots \otimes v_r \otimes \omega_1 \dots \otimes \hat{\omega}_j \dots \otimes \omega_s \quad (2.15)$$

donde el símbolo  $\hat{\phantom{x}}$  indica que estos factores no están presentes. En términos de componentes, se puede obtener el nuevo tensor contrayendo un supraíndice con un subíndice.

$$Y_{\beta_1 \dots \hat{\beta}_j \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \alpha_r} = X_{\beta_1 \dots \mu \dots \beta_s}^{\alpha_1 \dots \mu \dots \alpha_r} \quad (2.16)$$

Por ejemplo, el tensor de Riemann es un tensor de orden  $(1, 3)$  de componentes  $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ . Este tensor es la curvatura de la conexión de Levi-Civita, la cual introduciremos en la próxima sección. Contrayendo índices se obtiene un tensor de orden  $(0, 2)$  llamado tensor de Ricci.

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\mu\beta}^\mu \quad (2.17)$$

Podemos subir y bajar índices de tensores utilizando la métrica y su inversa, de componentes  $g_{\alpha\beta}, g^{\alpha\beta}$  respectivamente, que satisfacen:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha \quad (2.18)$$

Por ejemplo, a partir del tensor de Ricch podemos obtener un tensor  $(1, 1)$ :

$$R_\beta^\alpha = g^{\alpha\gamma} R_{\beta\gamma} \quad (2.19)$$

Luego, se pueden contraer ambos índices para obtener el escalar de Ricci:

$$R = R_\alpha^\alpha \quad (2.20)$$

### 2.1.2 Conexión de Levi-Civita

Una conexión en un fibrado vectorial define el concepto de transporte paralelo. Al estar el fibrado equipado con una conexión, esta permite transportar vectores desde una fibra hasta otra de forma paralela con respecto a dicha conexión (§ D.1). La conexión es especificada de forma equivalente por una derivada covariante, un endomorfismo en el espacio de las secciones del fibrado con el cual se puede diferenciar una sección en la dirección de algún campo vectorial en la variedad.

La métrica induce una conexión llamada *conexión de Levi-Civita*. Esta conexión tiene dos particularidades:

- Es compatible con la métrica: Un vector tangente no cambia su longitud al transportarlo paralelamente.
- Es libre de torsión: El vector tangente no rota al transportarlo paralelamente (ver [14] para una discusión más detallada sobre esta noción).

Sea  $M$  una variedad con una métrica semi-Riemanniana  $g$ . Sea  $D$  una conexión en el fibrado tangente  $TM$ . La conexión  $D$  permite tomar la derivada de un campo vectorial  $v$  (el cual es una sección del fibrado tangente) en la dirección de otro campo vectorial  $u$ , obteniendo un nuevo campo vectorial  $D_u v$ . Decimos que  $D$  es compatible con la métrica si para todo  $u, v, w \in Vect(M)$  se cumple

$$u g(v, w) = g(D_u v, w) + g(v, D_u w) \quad (2.21)$$

Luego, decimos que  $D$  es libre de torsión si para todo  $v, w \in Vect(M)$  tenemos:

$$[v, w] = D_v w - D_w v \quad (2.22)$$

Se puede verificar que para cada métrica  $g$  existe sólo una conexión que verifica estas dos condiciones. Esta es la conexión de Levi-Civita y es denotada por  $\nabla$ .

Supongamos que la conexión  $\nabla$  es compatible con la métrica y libre de torsión. Dadas las coordenadas locales  $\{x^\alpha\}$ , consideremos la base  $\{\partial_\mu\}$  y denotemos la derivada covariante en la dirección de uno de estos vectores por:

$$\nabla_\mu = \nabla_{\partial_\mu} \quad (2.23)$$

Dado que  $g$  es compatible con la métrica, tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha g_{\beta\gamma} &= \underbrace{g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma)}_a + \underbrace{g(\partial_\beta, \nabla_\alpha \partial_\gamma)}_b \\ \partial_\beta g_{\gamma\alpha} &= \underbrace{g(\nabla_\beta \partial_\gamma, \partial_\alpha)}_c + \underbrace{g(\partial_\gamma, \nabla_\beta \partial_\alpha)}_d \\ \partial_\gamma g_{\alpha\beta} &= \underbrace{g(\nabla_\gamma \partial_\alpha, \partial_\beta)}_e + \underbrace{g(\partial_\alpha, \nabla_\gamma \partial_\beta)}_f \end{aligned} \quad (2.24)$$

Los campos vectoriales de la base de coordenadas conmutan entre sí y la conexión es libre de torsión, por lo tanto:

$$\nabla_\alpha \partial_\beta - \nabla_\beta \partial_\alpha = [\partial_\beta, \partial_\alpha] = 0 \quad (2.25)$$

Entonces:  $\nabla_\alpha \partial_\beta = \nabla_\beta \partial_\alpha$ . Utilizando esto último y la simetría de la métrica tenemos que los términos  $b$  y  $e$  son iguales entre sí, así como los términos  $c$  y  $f$ . Entonces, sumando las dos primeras ecuaciones y restando la tercera, obtenemos:

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) + g(\partial_\gamma, \nabla_\beta \partial_\alpha) = 2g(\nabla_\alpha \partial_\beta, \partial_\gamma) \quad (2.26)$$

Dos campos vectoriales sólo pueden tener el mismo producto interno con todos los vectores de la base si son iguales, por lo que  $\nabla$  es único. La acción de una conexión  $D$  en un elemento  $e_j$  de una base de secciones de un fibrado vectorial  $E$  se puede expresar en términos del potencial vector  $A$  (§ D.1):

$$D_\alpha e_j = A_{\alpha j}^i e_i \quad (2.27)$$

De igual manera, definimos los *símbolos de Christoffel* como las componentes del potencial vector de la conexión de Levi-Civita.

$$\nabla_\alpha \partial_\beta = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \quad (2.28)$$

Entonces, la derivada covariante de un campo vectorial  $w$  en la dirección de  $v$  está dada por:

$$\nabla_v w = v^\alpha (\partial_\alpha w^\beta + \Gamma_{\alpha\gamma}^\beta w^\gamma) \partial_\beta \quad (2.29)$$

Reescribiendo la expresión (2.26):

$$\partial_\alpha g_{\beta\gamma} + \partial_\beta g_{\gamma\alpha} - \partial_\gamma g_{\alpha\beta} = 2g(\Gamma_{\alpha\beta}^\delta \partial_\delta, \partial_\gamma) = 2\Gamma_{\alpha\beta}^\delta g(\partial_\delta, \partial_\gamma) = 2g_{\delta\gamma} \Gamma_{\alpha\beta}^\delta \quad (2.30)$$

Contrayendo con la métrica inversa se obtiene la expresión para los símbolos de Christoffel:

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta} (\partial_\alpha g_{\beta\delta} + \partial_\beta g_{\delta\alpha} - \partial_\delta g_{\alpha\beta}) \quad (2.31)$$

Al tener la conexión de Levi-Civita en el fibrado tangente  $TM$ , podemos obtener una conexión análoga en los fibrados tensoriales de orden  $(r, s)$ . A esta conexión también la denominaremos  $\nabla$ . A modo ilustrativo, dado un tensor  $X$  de orden  $(2, 2)$ , su derivada covariante está dada por:

$$(\nabla_\mu X)_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} = \partial_\mu X_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} + \overbrace{\Gamma_{\mu\lambda}^\alpha X_{\gamma\delta}^{\lambda\beta} + \Gamma_{\mu\lambda}^\beta X_{\gamma\delta}^{\alpha\lambda}}^{\text{índices vectoriales}} - \underbrace{\Gamma_{\mu\gamma}^\lambda X_{\lambda\delta}^{\alpha\beta} - \Gamma_{\mu\delta}^\lambda X_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}}_{\text{índices covectoriales}} \quad (2.32)$$

La generalización a tensores de orden  $(r, s)$  es inmediata.

### 2.1.3 Tensor de Riemann

En Relatividad General, el espacio-tiempo es una variedad semi-Riemanniana, en particular, una variedad Lorentziana. Una variedad semi-Riemanniana tiene en su fibrado tangente una conexión compatible con la métrica y libre de torsión, la conexión de Levi-Civita que denotamos por  $\nabla$ . Definimos el tensor de curvatura de Riemann como la curvatura de esta conexión. Dados  $u, v, w \in \text{Vect}(M)$ , tenemos:

$$R(u, v)w = (\nabla_u \nabla_v - \nabla_v \nabla_u - \nabla_{[u, v]})w \quad (2.33)$$

En una base local de campos vectoriales  $\{e_\alpha\}$ , las componentes del tensor están dadas por:

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = R_{\beta\gamma\delta}^\alpha e_\alpha \quad (2.34)$$

Si elegimos una base de coordenadas, tenemos:

$$R(\partial_\beta, \partial_\gamma)\partial_\delta = (\nabla_\beta \nabla_\gamma - \nabla_\gamma \nabla_\beta)\partial_\delta \quad (2.35)$$

Utilizando la definición  $\nabla_\alpha \partial_\beta = \Gamma_{\beta\delta}^\gamma \partial_\gamma$ :

$$\begin{aligned} R(\partial_\beta, \partial_\gamma)\partial_\delta &= \nabla_\beta(\Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \partial_\sigma) - \nabla_\gamma(\Gamma_{\beta\delta}^\sigma \partial_\sigma) \\ &= (\partial_\beta \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) \partial_\sigma + \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \nabla_\beta \partial_\sigma - (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\sigma) \partial_\sigma - \Gamma_{\beta\gamma}^\sigma \nabla_\gamma \partial_\sigma \\ &= (\partial_\beta \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma) \partial_\sigma + \Gamma_{\gamma\delta}^\tau \Gamma_{\beta\sigma}^\tau \partial_\tau - (\partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\sigma) \partial_\sigma - \Gamma_{\beta\delta}^\sigma \Gamma_{\gamma\sigma}^\tau \partial_\tau \end{aligned} \quad (2.36)$$

Renombrando índices mudos, obtenemos las componentes del tensor de Riemann en la base de coordenadas:

$$R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = \partial_\beta \Gamma_{\gamma\delta}^\alpha - \partial_\gamma \Gamma_{\beta\delta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\delta}^\sigma \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha - \Gamma_{\beta\delta}^\sigma \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \quad (2.37)$$

En la sección anterior se introdujeron ya dos tensores obtenidos a partir del tensor de Riemann, el tensor de Ricci:

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\gamma\beta}^\gamma \quad (2.38)$$

Y el escalar de Ricci:

$$R = R_\alpha^\alpha \quad (2.39)$$

El tensor de Riemann tiene tres simetrías básicas:

1.  $R_{\beta\gamma\delta}^\lambda = -R_{\gamma\beta\delta}^\lambda$
2.  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\delta\beta\gamma\alpha}$
3.  $R_{[\beta\gamma\delta]}^\lambda = 0$

La primer relación es equivalente a

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta = -R(e_\gamma, e_\beta)e_\delta \quad (2.40)$$

siendo esto una consecuencia de  $R(v, w) = -R(w, v) \quad \forall v, w \in \text{Vect}(M)$ . La segunda relación es equivalente a

$$g(e_\alpha, R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta) = -g(e_\delta, R(e_\beta, e_\gamma)e_\alpha) \quad (2.41)$$

lo cual a su vez se puede expresar sin recurrir al uso de una base local

$$g(u, R(v, w)z) = -g(z, R(v, w)u) \quad \forall u, v, w, z \in \text{Vect}(M) \quad (2.42)$$

Por linealidad, basta probar la igualdad anterior para campos vectoriales asociados a una base de coordenadas. La conexión es compatible con la métrica, por lo tanto:

$$\begin{aligned} vw(g(u, z)) &= v(g(\nabla_w u, z) + g(u, \nabla_w z)) \\ &= g(\nabla_v \nabla_w u, z) + g(\nabla_w u, \nabla_v z) + g(\nabla_v u, \nabla_w z) + g(u, \nabla_v \nabla_w z) \end{aligned} \quad (2.43)$$

Intercambiando  $v$  por  $w$  se obtiene  $wv(g(u, z))$ . Restando ambas expresiones:

$$(vw - wv)(g(u, z)) = g([\nabla_v, \nabla_w]u, z) + g(u, [\nabla_v, \nabla_w]z) \quad (2.44)$$

Utilizando la definición del tensor de Riemann y el hecho de que los campos vectoriales de la base de coordenadas conmutan entre sí:

$$0 = g(R(v, w)u, z) + g(u, R(v, w)z) \quad (2.45)$$

Por lo tanto:

$$g(e_\alpha, R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta) = -g(e_\delta, R(e_\beta, e_\gamma)e_\alpha) \quad (2.46)$$

Utilizando las simetrías anteriores, la tercer propiedad se puede reescribir como

$$R_{\beta\gamma\delta}^\lambda + R_{\gamma\delta\beta}^\lambda + R_{\delta\beta\gamma}^\lambda = 0 \quad (2.47)$$

O equivalentemente:

$$R(e_\beta, e_\gamma)e_\delta + R(e_\gamma, e_\delta)e_\beta + R(e_\delta, e_\beta)e_\gamma = 0 \quad (2.48)$$

Trabajando con una base de vectores coordenadas y utilizando la definición del tensor de Riemann, el miembro izquierdo de la igualdad anterior se puede escribir:

$$\nabla_\beta \nabla_\gamma e_\delta - \nabla_\gamma \nabla_\beta e_\delta + \nabla_\gamma \nabla_\delta e_\beta - \nabla_\delta \nabla_\gamma e_\beta + \nabla_\delta \nabla_\beta e_\gamma - \nabla_\beta \nabla_\delta e_\gamma \quad (2.49)$$

Utilizando el hecho de que la métrica es libre de torsión, lo anterior es igual a:

$$\nabla_\beta [e_\gamma, e_\delta] + \nabla_\gamma [e_\delta, e_\beta] + \nabla_\delta [e_\beta, e_\gamma] = 0 \quad (2.50)$$

Es igual a cero ya que el bracket de Lie de dos vectores coordenadas se anula.

## 2.2 Formulación Lagrangeana de la Relatividad General

### 2.2.1 Acción de Einstein-Hilbert

Sea  $M$  una variedad orientable de dimensión cuatro con una métrica semi-Riemanniana  $g$ . La densidad lagrangeana que da lugar a las ecuaciones de Einstein está dada por

$$R \text{ vol} \quad (2.51)$$

donde  $R$  es el escalar de Ricci y  $\text{vol}$  es la 4-forma de volumen asociada a  $g$ . La acción es entonces:

$$S(g) = \int_M R \text{ vol} \quad (2.52)$$

En coordenadas locales:

$$S(g) = \int_M R \sqrt{|\det g|} d^4x \quad (2.53)$$

Variando la acción con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.54)$$

### 2.2.2 Acción de Palatini

En la formulación de la Relatividad General de la sección anterior la variable dinámica es la métrica. Una formulación alternativa fue introducida por Palatini; en ella, la métrica y la conexión son tratadas como variables independientes. Al variar la acción con respecto a la métrica se obtienen las ecuaciones de Einstein usuales, mientras que al variarla con respecto a la conexión se llega a que la conexión debe ser la de Levi-Civita. Existe otra formulación llamada *Acción de Palatini tetradica* en la cual las variables dinámicas son la *conexión espinorial* y la *tétrada*, las cuales introduciremos a continuación.

#### Tétradas

Sea  $M$  una variedad difeomorfa a  $\mathbb{R}^4$ .  $M$  puede ser vista como un subconjunto abierto del espacio tiempo. El fibrado tangente  $TM$  es obviamente trivial. Llamamos  $e$  a la trivialización de  $TM$ , esto es, al isomorfismo entre fibrados vectoriales

$$e : M \times \mathbb{R}^4 \rightarrow TM \quad (2.55)$$

que envía cada fibra  $\{p\} \times \mathbb{R}^4$  al correspondiente espacio tangente  $T_pM$ . A dicha trivialización la llamaremos *tétrada*. Podemos movernos entre un fibrado y otro utilizando la tétrada y su inversa, llamada *co-tétrada*:

$$e^{-1} : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^4 \quad (2.56)$$

Una sección de  $M \times \mathbb{R}^4$  es simplemente una función en  $M$  que toma valores en  $\mathbb{R}^4$ . La base canónica se estas secciones es:

$$\begin{aligned}\xi_0(p) &= (1, 0, 0, 0) \\ \xi_1(p) &= (0, 1, 0, 0) \\ \xi_2(p) &= (0, 0, 1, 0) \\ \xi_3(p) &= (0, 0, 0, 1)\end{aligned}\tag{2.57}$$

Una sección cualquiera puede ser escrita como

$$s = s^I \xi_I \tag{2.58}$$

donde  $s^I \in C^\infty(M)$ . A  $\mathbb{R}^4$  se lo denomina *espacio interno*. Aplicando  $e$  a la base de secciones del  $M \times \mathbb{R}^4$  obtenemos una base de campos vectoriales en  $M$ , así como al aplicar la co-tétrada a una base de campos vectoriales en  $M$  podemos obtener una base de secciones en  $M \times \mathbb{R}^4$ :

$$e(\xi_I) = e_I^\alpha \partial_\alpha \quad e^{-1}(\partial_\alpha) = e_\alpha^I \xi_I \tag{2.59}$$

siendo las componentes  $e_I^\alpha$  funciones en  $M$ . Es habitual llamar tétradas a estas componentes ya que son suficientes para determinar el mapa. La tétrada nos permite trabajar en el fibrado trivial  $M \times \mathbb{R}^4$  en vez de en el fibrado tangente  $TM$ . En este fibrado trivial tenemos un producto interno canónico: Dadas dos secciones  $s$  y  $s'$  en  $M \times \mathbb{R}^4$  definimos su producto interno como

$$\eta(s, s') = \eta_{IJ} s^I s'^J \tag{2.60}$$

donde  $\eta_{IJ}$  es la métrica interna:

$$\eta_{IJ} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.61}$$

Con la métrica interna y su inversa podemos subir y bajar índices internos, así como podemos subir y bajar índices espacio-temporales con la métrica  $g$ . Decimos que las tétradas son ortonormales si los campos vectoriales  $e_I = e(\xi_I)$  lo son:

$$g(e_I, e_J) = \eta_{IJ} \tag{2.62}$$

Entonces, si las tétradas son ortonormales, podemos encontrar una relación entre la métrica y las tétradas:

$$g(e_I^\alpha \partial_\alpha, e_J^\beta \partial_\beta) = e_I^\alpha e_J^\beta g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} \tag{2.63}$$

Por otro lado, si  $s$  y  $s'$  son secciones de  $M \times \mathbb{R}^4$ :

$$\begin{aligned}g(e(s), e(s')) &= g(e(s^I \xi_I), e(s^J \xi_J)) = s^I s^J g(e_I, e_J) \\ &= \eta_{IJ} s^I s^J = \eta(s^I \xi_I, s^J \xi_J) = \eta(s, s')\end{aligned}\tag{2.64}$$

Entonces, si  $e(s) = \partial_\alpha$  ( $\rightarrow s = e^{-1}(\partial_\alpha)$ ) y  $e(s') = \partial_\beta$  ( $\rightarrow s' = e^{-1}(\partial_\beta)$ ) tenemos:

$$g(\partial_\alpha, \partial_\beta) = \eta(e^{-1}\partial_\alpha, e^{-1}\partial_\beta) = e_\alpha^I e_\beta^J \eta(\xi_I, \xi_J) = e_\alpha^I e_\beta^J \eta_{IJ} \tag{2.65}$$

## 2.2. FORMULACIÓN LAGRANGEANA DE LA RELATIVIDAD GENERAL 17

Por lo tanto, la relación entre las componentes de la tetrada y la co-tetrada con la métrica:

$$\eta_{IJ} = g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta \quad g_{\alpha\beta} = \eta_{IJ} e_\alpha^I e_\beta^J \quad (2.66)$$

De las cuales se puede deducir:

$$\delta_J^I = e_\alpha^I e_J^\alpha \quad \delta_\alpha^\beta = e_\alpha^I e_I^\beta \quad (2.67)$$

### Conexión de Lorentz

La otra variable dinámica en la formulación tetrádica de Palatini es una conexión en el fibrado trivial  $M \times \mathbb{R}^4$ . Decimos que una conexión en este fibrado es una conexión de Lorentz si es compatible con la métrica de Minkowski:

$$v\eta(s, s') = \eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s') \quad (2.68)$$

Un caso particular es la conexión plana estándar, que denotamos por  $D^0$ :

$$D_v^0 s = v(s^I) \xi_I \quad (2.69)$$

Toda conexión  $D$  puede ser escrita como  $D = D^0 + A$ , donde  $A$ , el potencial vector es una 1-forma que toma valores en  $End(\mathbb{R}^4)$  (§ D.1):

$$D_v s = (v(s^J) + A_{\mu I}^J v^\mu s^I) \xi_J \quad (2.70)$$

Las componentes de la curvatura de  $D$  están dadas por:

$$F_{\alpha\beta}^{IJ} = \partial_\alpha A_\beta^{IJ} - \partial_\beta A_\alpha^{IJ} + A_{\alpha K}^I A_\beta^{KI} - A_{\beta K}^I A_\alpha^{KJ} \quad (2.71)$$

**Observación:** Si  $D$  es una conexión de Lorentz, entonces

$$v\eta(s, s') = v(s^I s'^J \eta_{IJ}) = v(s^I) s'^J \eta_{IJ} + s^I v(s'^J) \eta_{IJ} \quad (2.72)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \eta(D_v s, s') &= \eta(v(s^I) \xi_I + A_{\mu J}^I v^\mu s^J \xi_I, s'^K \xi_K) \\ &= v(s^I) s'^K \eta_{IK} + v^\mu s^J s'^K A_{\mu J}^I \eta_{IK} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \eta(s, D_v s') &= \eta(s^I \xi_I, v(s'^K) \xi_K + A_{\mu J}^K v^\mu s'^J \xi_K) \\ &= s^I v(s'^K) \eta_{IK} + v^\mu s^I s'^J A_{\mu J}^K \eta_{IK} \end{aligned} \quad (2.74)$$

Sumando ambos términos y renombrando índices mudos:

$$\eta(D_v s, s') + \eta(s, D_v s') = (v(s^I) s'^J + s^I v(s'^J)) \eta_{IJ} + v^\mu s_J s'_I (A_\mu^{IJ} + A_\mu^{JI}) \quad (2.75)$$

Vemos entonces que  $D$  es una conexión de Lorentz si  $A_\mu^{IJ} = -A_\mu^{JI}$ . Esto es equivalente a decir que  $A_\mu$  vive en el álgebra de Lie  $\mathfrak{so}(3, 1)$  [14]. De la expresión para la curvatura también se puede observar que se verifica:  $F_{\alpha\beta}^{IJ} = -F_{\beta\alpha}^{IJ}$ .

Utilizando la tetrada, podemos obtener, a partir de la conexión de Lorentz, una conexión en el fibrado tangente, definida por:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = e_\beta^I D_\alpha(\xi_I) \quad (2.76)$$

Usando la nomenclatura de [14], llamamos a  $\tilde{\nabla}$  *conexión imitación de Levi-Civita*. Definimos ahora los *símbolos imitación de Christoffel*:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \quad (2.77)$$

Se puede hallar una expresión para los mismos en función del potencial vector y las tétradas:

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma = e_\beta^I D_\alpha(\xi_I) = e_\beta^I A_{\alpha I}^J \xi_J = e_\beta^I A_{\alpha I}^J e_J^\gamma \partial_\gamma \quad (2.78)$$

Entonces, tenemos:

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = A_{\alpha I}^J e_\beta^I e_J^\gamma \quad (2.79)$$

Definimos el *tensor imitación de Riemann* como la curvatura de la conexión imitación de Levi-Civita [14].

$$\tilde{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^\delta e_J^\gamma \quad (2.80)$$

Definimos también el tensor imitación de Ricci:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^\gamma_{\alpha\gamma\beta} \quad (2.81)$$

Y el escalar imitación de Ricci:

$$\tilde{R} = \tilde{R}^\alpha_\alpha \quad (2.82)$$

### Acción

La acción de Palatini está dada por:

$$S(A, e) = \int_M \tilde{R} \text{ vol.} \quad (2.83)$$

donde el escalar imitación de Ricci corresponde a la conexión de Levi-Civita imitación, mientras que el escalar de Ricci que aparece en la acción de Einstein-Hilbert es el asociado a la conexión de Levi-Civita del fibrado tangente.

Utilizando la definición (2.80) y las igualdades (2.66) y (2.67):

$$\begin{aligned} \tilde{R}_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^\delta e_J^\gamma &\rightarrow \tilde{R}^\gamma_{\alpha\beta\delta} = \tilde{R}^\gamma_{\alpha\beta}{}^{\delta'} g_{\delta'\delta} = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^{\delta'} e_J^\gamma \eta_{KL} e_{\delta'}^K e_\delta^L \\ &= F_{\alpha\beta}^{IJ} e_J^\gamma e_\delta^L \eta_{IL} \end{aligned} \quad (2.84)$$

Entonces, el tensor imitación de Ricci:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = \tilde{R}^\gamma_{\alpha\gamma\beta} = F_{\alpha\gamma}^{IJ} e_J^\gamma e_\beta^L \eta_{IL} \quad (2.85)$$

Luego, de (2.66):

$$\tilde{R} = \tilde{R}^\alpha_\alpha = \tilde{R}_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} = F_{\alpha\gamma}^{IJ} e_J^\gamma e_\beta^L \eta_{IL} e_M^\alpha e_N^\beta \eta^{MN} \quad (2.86)$$

Utilizando (2.67) obtenemos:

$$\tilde{R} = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^\alpha e_J^\beta \quad (2.87)$$

## 2.2. FORMULACIÓN LAGRANGEANA DE LA RELATIVIDAD GENERAL 19

La acción de Palatini entonces se puede expresar:

$$S(A, e) = \int_M e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} \text{vol}. \quad (2.88)$$

Variando con respecto a la tétrada, tenemos, en primer lugar, la variación del elemento de volumen [14, 28]:

$$\delta \text{vol} = -\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\delta g^{\alpha\beta}) \text{vol}. \quad (2.89)$$

donde

$$\delta g^{\alpha\beta} = \delta(\eta^{IJ} e_I^\alpha e_J^\beta) = \eta^{IJ} ((\delta e_I^\alpha) e_J^\beta + e_I^\alpha (\delta e_J^\beta)) = 2\eta^{IJ} e_J^\beta \delta e_I^\alpha \quad (2.90)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta \text{vol} &= -\eta^{IJ} g_{\alpha\beta} e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) \text{vol} = -\eta^{IJ} e_\alpha^K e_\beta^L \eta_{KL} e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) \text{vol} \\ &= -\eta^{IJ} e_\alpha^K \delta_J^L \eta_{KL} (\delta e_I^\alpha) \text{vol} = -e_\alpha^I (\delta e_I^\alpha) \text{vol} \end{aligned} \quad (2.91)$$

Variando la acción con respecto a la tétrada:

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_M \left( (\delta e_I^\alpha) e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} + e_I^\alpha (\delta e_J^\beta) F_{\alpha\beta}^{IJ} - e_\gamma^K (\delta e_k^\gamma) e_I^\alpha e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} \right) \text{vol}. \\ &= 2 \int_M \left( e_J^\beta F_{\alpha\beta}^{IJ} - \frac{1}{2} e_\alpha^I e_L^\gamma e_L^\delta F_{\gamma\delta}^{KL} \right) (\delta e_I^\alpha) \text{vol}. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Utilizando (2.85) y (2.87):

$$\delta S = 2 \int_M \left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} \right) \eta^{IJ} e_J^\beta (\delta e_I^\alpha) \text{vol}. \quad (2.93)$$

Entonces,  $\delta S = 0$  cuando se cumple

$$\left( \tilde{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \tilde{R} g_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad (2.94)$$

Cuando  $\tilde{\nabla} = \nabla$ , esta es la ecuación de Einstein. Luego, si variamos con respecto a la conexión, tenemos

$$\delta S = \int_M (\delta \tilde{R}) \text{vol} = \int_M g^{\alpha\beta} (\delta \tilde{R}_{\alpha\beta}) \text{vol} \quad (2.95)$$

La variación del tensor de Ricci imitación [14]:

$$\tilde{R}_{\alpha\beta} = 2\tilde{\nabla}_{[\alpha} \tilde{\Gamma}_{\gamma]\beta}^\gamma \quad (2.96)$$

Si escribimos

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma \quad (2.97)$$

Tenemos

$$\tilde{\nabla}_\alpha \partial_\beta = \tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma + C_{\alpha\beta}^\gamma \partial_\gamma \quad (2.98)$$

Además, al ser  $\delta\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = 0$ , la variación:

$$\delta\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \delta C_{\alpha\beta}^{\gamma} \quad (2.99)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \delta\tilde{R}_{\alpha\beta} &= 2\tilde{\nabla}_{[\alpha}\delta C_{\gamma]\beta}^{\gamma} = \left[ \tilde{\nabla}_{\alpha}\delta C_{\gamma\beta}^{\gamma} - \tilde{\nabla}_{\gamma}\delta C_{\alpha\beta}^{\gamma} \right] = \left[ \nabla_{\alpha}\delta C_{\gamma\beta}^{\gamma} - \nabla_{\gamma}\delta C_{\alpha\beta}^{\gamma} \right] \\ &+ C_{\alpha\lambda}^{\gamma}\delta C_{\gamma\beta}^{\lambda} - C_{\alpha\gamma}^{\lambda}\delta C_{\lambda\beta}^{\gamma} - C_{\alpha\beta}^{\lambda}\delta C_{\gamma\lambda}^{\gamma} - C_{\gamma\lambda}^{\gamma}\delta C_{\alpha\beta}^{\lambda} + C_{\gamma\alpha}^{\lambda}\delta C_{\lambda\beta}^{\gamma} + C_{\gamma\beta}^{\lambda}\delta C_{\alpha\lambda}^{\gamma} \end{aligned} \quad (2.100)$$

Por lo tanto, la variación del tensor imitación de Ricci:

$$\begin{aligned} \delta\tilde{R} &= g^{\alpha\beta}\delta\tilde{R}_{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} \left( -C_{\gamma\eta}^{\gamma} - C_{\alpha\beta}^{\lambda}\delta C_{\gamma\lambda}^{\gamma} - C_{\gamma\lambda}^{\gamma}\delta C_{\alpha\beta}^{\lambda} + C_{\gamma\alpha}^{\lambda}\delta C_{\lambda\beta}^{\gamma} + C_{\gamma\beta}^{\lambda}\delta C_{\alpha\lambda}^{\gamma} \right) \\ &= \left( -C_{\gamma\eta}^{\gamma}\delta C_{\alpha}^{\eta\alpha} + C_{\eta\gamma}^{\alpha}\delta C_{\alpha}^{\eta\gamma} - C_{\alpha}^{\eta\alpha}\delta C_{\gamma\eta}^{\gamma} + C_{\gamma}^{\eta\alpha}\delta C_{\alpha\eta}^{\gamma} \right) \\ &= 2C_{\eta\gamma}^{\alpha}\delta C_{\alpha}^{\eta\gamma} - 2C_{\gamma\eta}^{\alpha}\delta C_{\alpha}^{\eta\gamma} \end{aligned} \quad (2.101)$$

Para que la variación sea nula, debe ser

$$C_{\eta\gamma}^{\alpha} = 0 \quad (2.102)$$

Lo que es equivalente a decir que  $\tilde{\nabla} = \nabla$ , esto es, la conexión debe ser la conexión de Levi-Civita, y por lo tanto (2.94) es la ecuación de Einstein en el vacío. La formulación tetrádica es por lo tanto completamente equivalente a la formulación de Einstein-Hilbert.

## 2.3 Formulación Hamiltoniana

### 2.3.1 Formulación ADM

Mientras que la formulación Lagrangeana es manifiestamente covariante, en la formulación Hamiltoniana es necesario tener una coordenada temporal y separar el espacio-tiempo en espacio y tiempo. El primer paso, entonces, consiste en especificar la coordenada temporal. Consideraremos el caso de una variedad Lorentziana  $M$  difeomorfa a  $\mathbb{R} \times S$ , donde  $S$  representa el espacio y  $t \in \mathbb{R}$  representa el tiempo. Con esto, estamos eligiendo una forma particular de dividir el espacio-tiempo en “instantes de tiempo”. Esta elección es arbitraria ya que el espacio-tiempo no viene pre-equipado con una coordenada tiempo y una familia de superficies espaciales en las cuales el mismo está foliado; hay muchas maneras de elegir un difeomorfismo

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times S \quad (2.103)$$

cada una de las cuales define una coordenada tiempo  $\tau$  distinta. Esta coordenada está dada por el pull-back de la coordenada tiempo en  $\mathbb{R} \times S$ :

$$\tau = \phi_* t \quad (2.104)$$

Decimos que una subvariedad  $\Sigma \in M$  es un instante de  $M$  si corresponde a una superficie de  $\tau$  constante para la coordenada temporal elegida. En esta formulación, las variables dinámicas son las componentes de la métrica restringida a las

superficies espaciales  $\Sigma$  (la cual denotaremos por  $q$ ) y sus momentos conjugados. Si  $n$  es un campo vectorial unitario tipo tiempo normal a  $\Sigma$ , las componentes de la métrica espacial están dadas por:

$$q_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + n_\alpha n_\beta \quad (2.105)$$

Observación 1: El proyector sobre la superficie  $\Sigma$  tiene componentes  $q_\alpha^\beta$ . Si se lo aplicamos a un vector  $v \in \text{Vect}(M)$ , sus nuevas componentes serán

$$q_\alpha^\beta v_\beta \quad (2.106)$$

Si tomamos el producto escalar de este vector con  $n$ :

$$n^\alpha q_\alpha^\beta v_\beta = n^\alpha (\delta_\alpha^\beta + n_\alpha n^\beta) v_\beta = (n^\beta - n^\beta) v_\beta = 0 \quad (2.107)$$

Observación 2: Dos elecciones de  $n$  son posibles ya que se puede invertir su signo. Estas dos direcciones corresponden a las direcciones “futuro” y “pasado”, pudiéndose asignar a cada dirección cualquiera de los dos signos de manera arbitraria. Elegimos entonces un sentido, y decimos que nuestro campo vectorial  $n$  apunta hacia el futuro.

### Curvatura extrínseca

La curvatura extrínseca  $K$  dice cómo se curva la superficie  $\Sigma$  con respecto a  $M$ ; más adelante se verá que la curvatura extrínseca está relacionada con la derivada temporal de la métrica espacial, por lo que el par  $(q, K)$  sirve como condición inicial para la métrica. Sea  $\Sigma$  una subvariedad tipo espacio representando un instante de tiempo. La métrica restringida a esta subvariedad es Riemanniana:

$$q(v, v) > 0 \quad (2.108)$$

para todo vector  $v \in T_p M$  no nulo. Además, tenemos:

$$g(n, n) = -1 \quad g(n, v) = 0 \quad \forall v \in T_p M \quad (2.109)$$

A un vector  $v \in T_p M$  lo podemos descomponer en sus componentes normal y tangencial a  $\Sigma$ :

$$v = -g(v, n)n + (v + g(v, n)n) \quad (2.110)$$

En particular, dados dos campos vectoriales  $u, v$  en  $\Sigma$ , podemos descomponer  $\nabla_u v$ :

$$\nabla_u v = -g(\nabla_u v, n)n + (\nabla_u v + g(\nabla_u v, n)n) \quad (2.111)$$

y definimos:

$$-g(\nabla_u v, n)n = K(u, v)n \quad (2.112)$$

donde  $K$  se denomina *curvatura extrínseca*. Esta mide la componente normal de un vector tangente a  $\Sigma$  al transportarlo utilizando la conexión de Levi-Civita de  $M$ , en la dirección de otro vector tangente  $u$ . En otras palabras, mide cuánto

se curva  $\Sigma$  con respecto a  $M$ . Se puede comprobar que  $K$  es un tensor (depende  $C^\infty(\Sigma)$ –linealmente en sus dos argumentos):

$$\begin{aligned} K(fu, v) &= -g(\nabla_{fu}v, n) = -g(f\nabla_uv, n) \\ &= -fg(\nabla_uv, n) = fK(u, v) \quad \forall f \in C^\infty(\Sigma) \end{aligned} \quad (2.113)$$

Por otro lado, para toda función  $f \in C^\infty(\Sigma)$ :

$$\begin{aligned} K(u, fv) &= -g(\nabla_u fv, n) = -g(u(f)v + f\nabla_uv, n) \\ &= -fg(\nabla_uv, n) = -fK(u, v) \end{aligned} \quad (2.114)$$

La curvatura extrínseca es además simétrica. Usando la linealidad, podemos ver que para que  $K(u, v) = u^i v^j K(\partial_i, \partial_j)$  sea igual a  $K(v, u)$ , basta probar  $K(\partial_i, \partial_j) = K(\partial_j, \partial_i)$ , lo cual puede probarse utilizando que la conexión  $\nabla$  es libre de torsión:

$$\begin{aligned} K(\partial_i, \partial_j) - K(\partial_j, \partial_i) &= -g(\nabla_i \partial_j, n) + g(\nabla_j \partial_i, n) \\ &= -g(\nabla_i \partial_j - \nabla_j \partial_i, n) \\ &= -g([\partial_i, \partial_j], n) = 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

Luego, definimos:

$$D_uv = \nabla_uv + g(\nabla_uv, n)n \quad (2.116)$$

Se puede verificar que  $D$  es la conexión de Levi-Civita en  $\Sigma$  asociada a la métrica  $q$ .

Primero, para  $u, v \in \text{Vect}(\Sigma)$  y  $f \in C^\infty(\Sigma)$ , tenemos:

$$\begin{aligned} D_u(fv) &= \nabla_u(fv) + g(n, \nabla_u(fv))n \\ &= u(f)v + f\nabla_uv + g(n, u(f)v + f\nabla_uv) \\ &= u(f)v + f\nabla_uv + u(f)g(n, v) + fg(n, \nabla_uv) \\ &= u(f)v + f(\nabla_uv + g(n, \nabla_uv)) = u(f)v + fD_uv \end{aligned} \quad (2.117)$$

Luego, dados  $u, v, w \in \text{Vect}(M)$ , usando que  $\nabla$  es compatible con la métrica:

$$\begin{aligned} ug(v, w) &= g(\nabla_uv, w) + g(v, \nabla_uw) \\ &= g(K(u, v)n + D_uv, w) + g(v, K(u, w)n, D_uw) \\ &= g(D_uv, w) + g(v, D_uw) \end{aligned} \quad (2.118)$$

Además:

$$\begin{aligned} D_uv - D_vu &= \nabla_uv - K(u, v)n - \nabla_vu + K(v, u)n \\ &= \nabla_uv - \nabla_vu = [u, v] \end{aligned} \quad (2.119)$$

También se puede verificar que  $D$  es lineal. Por lo tanto  $D$  es una conexión, es compatible con la métrica y es libre de torsión.

### Ecuaciones de Gauss-Codazzi

En las ecuaciones de Einstein

$$\left( R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} \right) = 0 \quad (2.120)$$

hay en realidad sólo 10 ecuaciones independientes; éstas nos dicen cómo evoluciona la métrica en el tiempo. En términos de las variables ADM, cómo varía la métrica espacial (y la curvatura extrínseca) al moverse entre las distintas superficies  $\Sigma$  de la foliación, las cuales representan cada una un instante distinto de tiempo. La manera de separar el espacio-tiempo no es única, por lo tanto no sabremos cómo evolucionarán las variables hasta que hayamos elegido una foliación. Tal elección se expresa en las funciones *lapse* y *shift* que se definirán a continuación. Al elegir un difeomorfismo

$$\phi : M \rightarrow \mathbb{R} \times S \quad (2.121)$$

esto nos da una coordenada tiempo  $\tau = \phi^*t$  en  $M$  y por lo tanto una forma particular de foliar el espacio con superficies espaciales. Además, si tomamos el pushforward por  $\phi^{-1}$  del vector  $\partial_t$  en  $\mathbb{R} \times S$ , tendremos un vector  $\partial_\tau$  en  $M$ , el cual apunta hacia el “futuro”, pero no es necesariamente ortogonal a las superficies  $\{\tau = s\}$ . Podemos descomponer este vector en sus partes normal y tangencial a  $\Sigma$ :

$$\partial_\tau = -g(\partial_\tau, n)n + (\partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n) \quad (2.122)$$

Definimos:

$$N = -g(\partial_\tau, n) \quad (2.123)$$

$$\vec{N} = \partial_\tau + g(\partial_\tau, n)n \quad (2.124)$$

A  $N$  se le denomina *lapse* y a  $\vec{N}$  *shift*. Veremos ahora que cuatro de las diez ecuaciones de Einstein son en realidad vínculos, siendo las restantes seis las ecuaciones de movimiento que describen cómo cambia la métrica espacial en el tiempo. Elegimos coordenadas locales  $x^0, x^1, x^2, x^3$  en un entorno de un punto  $p \in \Sigma$  tal que  $x^0 = \tau$ ,  $\partial_0 = \partial_\tau$  y los vectores  $\partial_1, \partial_2, \partial_3$  son tangentes a  $\Sigma$  en  $p$ . Las componentes del tensor de Riemann:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = \nabla_i \nabla_j \partial_k - \nabla_j \nabla_i \partial_k \quad (2.125)$$

Esto es igual a:

$$R_{ijk}^\alpha \partial_\alpha \quad (2.126)$$

donde los índices en letras griegas van desde 0 hasta 3, mientras que las letras romanas son índices espaciales y van desde 1 hasta 3.

Para calcular el primer término, se usará que  $\nabla_i \partial_j = K(i, j)n + {}^3\Gamma_{ij}^m \partial_m$  para campos vectoriales  $u, v$  en  $\Sigma$ , donde  ${}^3\Gamma_{ij}^m$  son las componentes de la conexión asociada a la derivada covariante espacial. Además, contrayendo la expresión

$$K_{ij} = g((\nabla_i n), \partial_j) = q_{mn} (\nabla_i n)^m \underbrace{(\partial_j)^n}_{\delta_j^n} = q_{mj} (\nabla_i n)^m \quad (2.127)$$

con  $q^{nj}$ :

$$q^{nj} K_{ij} = (\nabla_i n)^n \rightarrow (\nabla_i n)^j = K_i^j \rightarrow (\nabla_i n) = K_i^j \partial_j \quad (2.128)$$

Entonces, utilizando estos últimos resultados, el primer sumando en (2.125) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\nabla_i \nabla_j \partial_k &= \nabla_i (K_{jk} n + {}^3\Gamma_{jk}^m \partial_m) \\
&= \partial_i (K_{jk}) n + K_{jk} \nabla_i n + \partial_i \left( {}^3\Gamma_{jk}^m \right) \partial_m + {}^3\Gamma_{jk}^m \nabla_i \partial_m \\
&= \partial_i (K_{jk}) n + K_{jk} K_i^m \partial_m + \partial_i \left( {}^3\Gamma_{jk}^m \right) \partial_m + {}^3\Gamma_{jk}^m \left( K_{im} n + {}^3\Gamma_{im}^l \partial_l \right) \\
&= \left( \partial_i (K_{jk}) + {}^3\Gamma_{jk}^m K_{im} \right) n + K_{jk} K_i^m \partial_m + \left( \partial_i \left( {}^3\Gamma_{jk}^m \right) \right. \\
&\quad \left. + {}^3\Gamma_{jk}^l {}^3\Gamma_{il}^m \right) \partial_m \tag{2.129}
\end{aligned}$$

Para obtener el segundo sumando en (2.125) intercambiamos  $i \leftrightarrow j$ :

$$\begin{aligned}
R_{ijk}^\alpha \partial_\alpha &= \left( \partial_i K_{jk} - \partial_j K_{ik} + {}^3\Gamma_{jk}^m K_{im} - {}^3\Gamma_{ik}^m K_{jm} \right) n \\
&\quad + \left( K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m \right) \partial_m + \left( \partial_i {}^3\Gamma_{jk}^m - \partial_j {}^3\Gamma_{ik}^m + {}^3\Gamma_{jk}^l {}^3\Gamma_{il}^m - {}^3\Gamma_{ik}^l {}^3\Gamma_{jl}^m \right) \partial_m \tag{2.130}
\end{aligned}$$

Utilizando las definiciones de la derivada covariante y el tensor de Riemann, llegamos a las ecuaciones de Gauss-Codazzi:

$$R_{ijk}^\alpha \partial_\alpha = (D_i K_{jk} - D_j K_{ik}) n + ({}^3R_{ijk}^m + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) \partial_m \tag{2.131}$$

De donde obtenemos la expresión en componentes:

$$R_{ijk}^\alpha = (D_i K_{jk} - D_j K_{ik}) (n)^\alpha + ({}^3R_{ijk}^m + K_{jk} K_i^m - K_{ik} K_j^m) (\partial_m)^\alpha \tag{2.132}$$

Aplicando el proyector en  $\Sigma$  a todos los índices, y notando que el único efecto en el lado derecho de (2.132) es eliminar el primer sumando, obtenemos:

$${}^3R_{abc}^d = q_a^f q_b^g q_c^k q_j^d R_{f g k}^j - K_{ac} K_b^d + K_{bc} K_a^d \tag{2.133}$$

Además, tenemos:

$$\begin{aligned}
R_{abcd} q^a c q^b d &= R_{abcd} (g^{ac} + n^a n^c) (g^{bd} + n^b n^c) \\
&= R + 2R_{ac} n^a n^c = 2G_{ac} n^a n^c \tag{2.134}
\end{aligned}$$

Entonces, utilizando (2.133):

$$G_{ab} n^a n^b = \frac{1}{2} \{ {}^3R + (K_a^a)^2 - K_{ab} K^{ab} \} \tag{2.135}$$

De manera similar, se obtiene:

$$R_{cd} n^d q_b^c = D_a K_b^a - D_b K_a^a \tag{2.136}$$

De donde

$$G_{bc} q_a^b n^c = q_a^b R_{bc} n^c = D_b K_a^b - D_a K_b^b \tag{2.137}$$

Se puede verificar que tanto (2.135) como (2.137) no tienen derivadas segundas temporales y son por lo tanto vínculos de condiciones iniciales.

### Hamiltoniano

En la formulación Lagrangeana, la variable dinámica es la métrica inversa, cuyas componentes son:

$$g^{ab} = q^{ab} - n^a n^b \quad (2.138)$$

Utilizando (2.123) y (2.124) tenemos que:

$$n^a = \frac{1}{N} ((\partial_\tau)^a - N^a) \quad (2.139)$$

Entonces:

$$g^{ab} = q^{ab} - \frac{1}{N^2} ((\partial_\tau)^a - N^a) ((\partial_\tau)^b - N^b) \quad (2.140)$$

La información contenida en  $g^{ab}$  es equivalente a la contenida en  $(q_{ab}, N_a, N)$ . Para pasar a la fomulación Hamiltoniana es conveniente tomar como variables a la métrica espacial inversa, al lapso y al shift.

El escalar de Ricci puede ser escrito como:

$$R = 2 (G_{ab} n^a n^b - R_{ab} n^a n^b) \quad (2.141)$$

Utilizando (2.135) se obtiene el primero de los términos. Por otro lado, el segundo sumando resulta ser:

$$\begin{aligned} R_{ab} n^a n^b &= -n^a (\nabla_a \nabla_c - \nabla_c \nabla_a) n^c \\ &= (K_a^a)^2 - K_{ab} K^{ab} - \nabla_a (n^a \nabla_c n^c) + \nabla_c (n^a \nabla_a n^c) \end{aligned} \quad (2.142)$$

Donde se usó

$$K_{ab} = q_a^c \nabla_c n_b \quad (2.143)$$

igualdad que puede verificarse a partir de (2.127).

Entonces, el escalar de Ricci en términos de las nuevas variables:

$$R = [{}^3R + K_{ab} K^{ab} - (K_a^a)^2] \quad (2.144)$$

Por otro lado:

$$\sqrt{-g} = N \sqrt{q} \quad (2.145)$$

La densidad Lagrangeana entonces toma la forma:

$$\mathcal{L} = \sqrt{h} N [{}^3R + K_{ab} K^{ab} - (K_a^a)^2] \quad (2.146)$$

Para obtener el hamiltoniano es necesario tener los momentos conjugados a las variables dinámicas definidos por:

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} \quad (2.147)$$

La dependencia en  $\dot{q}_{ab}$  está en la curvatura extrínseca [69]:

$$\begin{aligned} K_{ab} &= q_a^c \nabla_c n_b = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n q_{ab} = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_{\frac{1}{N} (\partial_\tau - \vec{N})} q_{ab} \\ &= \frac{1}{2N} (\mathfrak{L}_{\partial_\tau} q_{ab} - \mathfrak{L}_{\vec{N}} q_{ab}) = \frac{1}{2N} (\dot{q}_{ab} - D_a N_b - D_b N_a) \end{aligned} \quad (2.148)$$

Volviendo a (2.146), obtenemos el momento conjugado de la métrica espacial:

$$\pi^{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_{ab}} = \sqrt{q} (K^{ab} - Kq^{ab}) \quad (2.149)$$

Mientras que los momentos conjugados del lapso y del shift se anulan:

$$\pi^N = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N} = 0 \quad (2.150)$$

$$\pi^{N^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial N^a} = 0 \quad (2.151)$$

Reconocemos a (2.150) y a (2.151) como vínculos primarios.

El Hamiltoniano entonces resulta ser [14, 69]:

$$\begin{aligned} H &= \pi^{ab} \dot{q}_{ab} - \mathcal{L} \\ &= \sqrt{q} \left\{ N \left[ -{}^3R + q^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} q^{-1} \pi^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - 2N_b [D_a (q^{-1/2} \pi^{ab})] + 2D_a (q^{-1/2} N_b \pi^{ab}) \right\} \end{aligned} \quad (2.152)$$

El último sumando en (2.152) es una divergencia y puede ser descartado. Hallamos los vínculos secundarios (a los cuales denotaremos por  $C$  y  $C_a$ ) calculando el corchete de Poisson de los vínculos primarios con el Hamiltoniano:

$$C = \{ \pi^N, H \} = \sqrt{q} \left[ -{}^3R + q^{-1} \pi^{ab} \pi_{ab} - \frac{1}{2} q^{-1} \pi^2 \right] \quad (2.153)$$

$$C_a = \{ \pi^{N^a}, H \} = -2[D^b (q^{-1/2} \pi_{ab})] \quad (2.154)$$

Se puede verificar que no hay vínculos terciarios. Utilizando (2.149) se puede ver que los vínculos secundarios son iguales a (2.135) y (2.137) y son por lo tanto los vínculos de condiciones iniciales. Las ecuaciones de movimiento están dadas por:

$$\dot{q}_{ab} = \frac{\partial H}{\partial \pi^{ab}} = 2q^{-1/2} N \left( \pi_{ab} - \frac{1}{2} q_{ab} \pi^c_c \right) + D_a N_b + D_b N_a \quad (2.155)$$

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^{ab} &= -\frac{\partial H}{\partial q_{ab}} = -Nq^{1/2} \left( {}^3R^{ab} - \frac{1}{2} Rq^{ab} \right) + \frac{1}{2} Nq^{-1/2} q^{ab} \left( \pi_{cd} \pi^{cd} - \frac{1}{2} \pi^2 \right) \\ &\quad - 2Nq^{-1/2} \left( \pi^{ac} \pi_{cb} - \frac{1}{2} \pi \pi^{ab} \right) + q^{1/2} (D^a D^b N - q^{ab} D^c D_c N) \\ &\quad + q^{1/2} D_c (q^{-1/2} N^c \pi^{ab}) - \pi^{ca} D_c N^b + \pi^{cb} D_c N^a \end{aligned} \quad (2.156)$$

Estas ecuaciones junto con los vínculos son completamente equivalentes a las ecuaciones de Einstein.

### Acción de los vínculos

La acción de los vínculos en las variables dinámicas puede ser hallada calculando los correspondientes corchetes de Poisson. Para ello introducimos los vínculos

suavizados:

$$C(N) = \int_{\Sigma} NCq^{1/2}d^3x \quad (2.157)$$

$$C(\vec{N}) = \int_{\Sigma} N^a C_a q^{1/2} d^3x \quad (2.158)$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \{q_{cd}(y), C(\vec{N})\} &= \left\{ q_{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a \left( -2[D^b(q^{-1/2}\pi_{ab})] \right) q^{1/2} d^3x \right\} \\ &= \left\{ q_{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a (-2D^b\pi_{ab}) d^3x \right\} \\ &= \left\{ q_{cd}(y), \int_{\Sigma} D_b N_a (2\pi^{ab}) d^3x \right\} \\ &= 2 \int_{\Sigma} D_b N_a(x) (\delta_c^a \delta_d^b + \delta_d^a \delta_c^b) \delta^3(x-y) d^3x \\ &= 2(D_c N_d(y) + D_d N_c(y)) \\ &= 2\mathfrak{L}_{\vec{N}} q_{cd}(y) \end{aligned} \quad (2.159)$$

Siendo  $\mathfrak{L}_{\vec{N}} q_{cd}$  la derivada de Lie de  $q_{cd}$  en la dirección de  $\vec{N}$ . Luego, la acción sobre los momentos conjugados:

$$\begin{aligned} \{\pi^{cd}(y), C(\vec{N})\} &= \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a \left( -2[D^b(q^{-1/2}\pi_{ab})] \right) q^{1/2} d^3x \right\} \\ &= \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} N^a (-2D^b\pi_{ab}) d^3x \right\} = \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} N_a (-2D_b\pi^{ab}) d^3x \right\} \\ &= \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} q_{aa'} N^{a'} (-2D_b\pi^{ab}) d^3x \right\} = \left\{ \pi^{cd}(y), \int_{\Sigma} 2q_{aa'} (D_b N^{a'}) \pi^{ab} d^3x \right\} \\ &= \int_{\Sigma} -2 (\delta_a^c \delta_{a'}^d + \delta_a^d \delta_{a'}^c) \delta^3(x-y) (D_b N^{a'}) \pi^{ab} d^3x \\ &= 2 \left( -(D_b N^d) \pi^{cb} + -(D_b N^c) \pi^{db} \right) = 2\mathfrak{L}_{N^a} \pi^{cd}(y) \end{aligned} \quad (2.160)$$

Reescalando el vínculo por un factor de 1/2, vemos que  $C(\vec{N})$  genera un difeomorfismo espacial en las variables dinámicas, por lo que se le denomina vínculo de difeomorfismos. De manera similar se pueden probar que cuando se cumplen las ecuaciones de movimiento, se tienen las siguientes igualdades:

$$\{q_{cd}(y), C(N)\} = \mathfrak{L}_{N\bar{n}} q_{cd}(y) \quad (2.161)$$

$$\{\pi^{cd}(y), C(N)\} = \mathfrak{L}_{N\bar{n}} \pi^{cd}(y) \quad (2.162)$$

Por lo que, en la superficie de vínculos,  $C(N)$  genera un difeomorfismo en una dirección normal a  $\Sigma$ . La acción de este vínculo entonces es la de una evolución temporal que corresponde a mover  $\Sigma$  en la dirección normal. Recordando que el Hamiltoniano es el que genera la evolución temporal, si calculamos el corchete de Poisson de una función de las variables dinámicas con el mismo:

$$\{f, H\} = \left\{ f, C(N) + C(\vec{N}) \right\} = \mathfrak{L}_{N\bar{n}} f + \mathfrak{L}_{\vec{N}} f = \mathfrak{L}_{\vec{t}} f \quad (2.163)$$

Podemos observar que la evolución temporal completa consta de dos partes, una evolución temporal normal a  $\Sigma$  y otra “evolución temporal” tangencial que es en realidad un difeomorfismo espacial en  $\Sigma$ . Esta última se debe a que en la foliación elegida, el vector temporal no es puramente normal a las superficies  $\Sigma$ . Si elegimos una foliación tal que el vector shift es nulo, en ese caso  $C(N)$  es igual al Hamiltoniano y genera la evolución temporal. A  $C(N)$  se lo denomina entonces vínculo Hamiltoniano.

### Álgebra de los vínculos

Calculando el corchete de Poisson entre los vínculos, se obtiene:

$$\{C(\vec{N}), C(\vec{N}')\} = C([\vec{N}, \vec{N}']) \quad (2.164)$$

$$\{C(\vec{N}), C(N)\} = C(\vec{N}(N)) \quad (2.165)$$

$$\{C(N), C(N')\} = C((N\partial^i N' - N'\partial^i N)\partial_i) \quad (2.166)$$

Lo primero que notamos es que los vínculos son de primera clase: El corchete de Poisson entre los vínculos da como resultado otro vínculo. Luego, se puede ver en (2.166) que el corchete de Poisson entre dos vínculos Hamiltonianos da como resultado un vínculo de difeomorfismos con un vector shift que depende de las variables dinámicas (pues  $\partial^i = q^{ij}\partial_j$ ). El álgebra que forman no es un álgebra de Lie.

## 2.3.2 Formulación de Ashtekar-Barbero

### Introducción

La formulación Hamiltoniana ADM de la relatividad general presenta serias dificultades a la hora de intentar cuantizar la teoría, las cuales hasta el día de hoy no han sido resueltas. Existe una formulación Hamiltoniana alternativa, la cual consiste en elegir otras variables distintas a las variables ADM, llamadas variables de Ashtekar. Esta elección simplifica notablemente la estructura de la teoría, permitiendo a uno llegar más lejos en el proceso de cuantización. Para introducir estas variables usaremos conceptos introducidos en el apéndice B y en § 2.2.2.

Llamaremos  $M$  a la variedad de dimensión 4 equipada con una métrica Lorentziana  $g$  que representa el espacio-tiempo. Sobre esta variedad hay un  $G$ -fibrado, y un mapa inyectivo  $e : M \times \mathbb{R}^4 \rightarrow T_p M$  que envía campos tensoriales en  $M$  a campos tensoriales en el espacio tangente  $T_p M$  (al cual llamaremos espacio interno) para todo punto  $p \in M$ . Si  $\{\xi_a\}$  es una base de secciones de  $M$ , al aplicarle el mapa  $e$  obtenemos una sección de  $T_p M$ , la cual podemos expresar como combinación lineal de una base de secciones de este espacio a la cual denotaremos por  $\{\partial_\mu\}$ :

$$e(\xi_a) = e_a^\mu \partial_\mu \quad (2.167)$$

Tanto a  $e$  como a sus componentes  $e_a^\mu$  se les denomina tétradas. Al mapa inverso  $e^{-1} : T_p M \rightarrow M \times \mathbb{R}^4$  o a sus componentes

$$e^{-1}(\partial_\mu) = e_\mu^a \xi_a \quad (2.168)$$

se les denomina equivalentemente co-tétradas. Las tétradas y co-tétradas satisfacen las siguientes relaciones con la métrica:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b \quad \eta_{ab} = g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu \quad (2.169)$$

$$e_\mu^a e_b^\mu = \delta_b^a \quad e_\mu^a e_a^\nu = \delta_\mu^\nu \quad (2.170)$$

donde  $\eta_{ab}$  son las componentes de la métrica de Minkowski. Los índices latinos corresponden al espacio interno y las letras griegas son índices espacio-temporales.

Observación: Toda la información de la métrica está contenida en las tétradas, pero el recíproco no es cierto. En  $g_{\mu\nu}$  hay 10 grados de libertad mientras que en  $e_\mu^a$  hay 16. Estos 6 grados de libertad extra en las tétradas corresponden al número de grados de libertad del grupo  $SO(3,1)$ , esto es, al número de parámetros independientes de una transformación de Lorentz en el espacio interno. Se puede ver que una transformación de Lorentz en el espacio interno deja invariante la expresión (2.169). El grupo  $SO(3,1)$  tiene una representación en el espacio interno dada simplemente por la representación fundamental.  $SO(3,1)$  es entonces un grupo de gauge y una transformación de Lorentz es a su vez una transformación de gauge.

En el apéndice B definimos el concepto de derivada covariante; un operador que permite derivar campos tensoriales en la dirección de algún vector del espacio tangente de una variedad. La derivada covariante puede ser especificada de forma equivalente por su correspondiente potencial vector, como se vio en el apéndice B. Luego, en § 2.1.2 introdujimos un tipo especial de conexión, la conexión de Levi-Civita, la cual actúa sobre los campos tensoriales en el espacio-tiempo. Un campo como  $e_a^\mu$  tiene por un lado un índice espacio-temporal y un índice interno, por lo que si le aplicamos el operador  $\nabla$  definido en la sección 2.1.2, obtendremos:

$$\nabla_\mu e_a^\nu = \partial_\mu e_a^\nu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu e_a^\rho \quad (2.171)$$

Definimos ahora una derivada covariante  $D$  que actúa también sobre el índice interno mediante una conexión espinorial  $\omega$ . Si  $T$  es un tensor que toma valores en el grupo de Lorentz, entonces tenemos

$$\begin{aligned} D_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} &= \partial_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu_1} T_{a_1 \dots a_m}^{\rho \dots \nu_n} + \dots - \omega_{a_1\mu}^b T_{b \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} - \dots \\ &= \nabla_\mu T_{a_1 \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} - \omega_{a_1\mu}^b T_{b \dots a_m}^{\nu_1 \dots \nu_n} \end{aligned} \quad (2.172)$$

donde  $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$  son las componentes de la conexión de Levi-Civita y  $\omega_{a\mu}^b$  las componentes de la conexión espinorial. Ambas conexiones actúan sobre los índices duales cambiando de signo el correspondiente sumando. Imponiendo la compatibilidad de la derivada covariante con la tétrada:

$$D_\mu e_\nu^a = 0 \quad (2.173)$$

obtenemos, desarrollando

$$\begin{aligned} D_\mu e_\nu^a &= \nabla_\mu e_\nu^a + \omega_{b\mu}^a e_\nu^b = 0 \\ \rightarrow e_{b'}^\nu \times (\nabla_\mu e_\nu^a) &= -\omega_{b\mu}^a e_\nu^b e_{b'}^\nu \\ \rightarrow \omega_{b\mu}^a &= -e_{b'}^\nu \nabla_\mu e_\nu^a \end{aligned} \quad (2.174)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu(\delta_b^a) = \nabla_\mu(e_\nu^a e_b^\nu) \\ &\rightarrow e_b^\nu \nabla_\mu e_\nu^a = -e_\nu^a \nabla_\mu e_b^\nu \end{aligned} \quad (2.175)$$

Entonces, (2.174) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\omega_{b\mu}^a = e_\nu^a \nabla_\mu e_b^\nu \quad (2.176)$$

Las tétradas junto con la conexión de Ashtekar-Barbero (que será introducida más adelante) son las variables fundamentales en esta formulación Hamiltoniana de la relatividad general.

Para construir la teoría canónica, separaremos el espacio-tiempo en espacio y tiempo de la misma manera que lo hicimos en 2.3.1. Suponemos que el espacio tiempo es una variedad globalmente hiperbólica. Podemos entonces encontrar un difeomorfismo

$$\phi : M \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R} \quad (2.177)$$

Donde  $\Sigma$  es una variedad tipo espacio y  $\mathbb{R}$  representa el tiempo. Llamamos  $q_{\mu\nu}$  a las componentes de la métrica inducida por  $g_{\mu\nu}$  en  $\Sigma$ , dadas por:

$$q_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \quad (2.178)$$

Llamamos además  $K_{\mu\nu}$  a las componentes de la curvatura extrínseca:

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n q_{\mu\nu} \quad (2.179)$$

Donde  $n$  es el vector unitario normal saliente a  $\Sigma$ .

Utilizando (2.169), escribimos:

$$q_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b + n_\mu n_\nu = -e_\mu^0 e_\nu^0 + \delta_{ij} e_\mu^i e_\nu^j + n_\mu n_\nu \quad (2.180)$$

donde los índices  $i$  y  $j$  van desde 1 hasta 3. La forma de la métrica en (2.180) sugiere una fijación de gauge simple para eliminar algunos grados de libertad. En el llamado gauge temporal, la componente  $e_\mu^0$  coincide con el vector normal, eliminando la componente del boost del grupo de Lorentz haciéndola coincidir con el vector normal. El grupo de simetrías de gauge queda reducido al grupo de las rotaciones espaciales. La métrica espacial adquiere la forma:

$$q_{\mu\nu} = \delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j \quad (2.181)$$

Tomando el pull-back en  $\Sigma$ :

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j \quad (2.182)$$

donde los índices  $\alpha$  y  $\beta$  van desde 1 hasta 3 y los índices  $i, j$  están relacionados con la simetría  $SO(3)$  (o equivalentemente,  $SU(2)$ ). Considerando el elemento de línea

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{\alpha\beta} (N^\alpha dt + dx^\alpha)(N^\beta dt + dx^\beta) \quad (2.183)$$

es posible identificar las componentes de las tétradas con las variables ADM:

$$e_\mu^a = \begin{pmatrix} N & N^\alpha e_\alpha^i \\ 0 & e_\alpha^i \end{pmatrix} \quad e_b^\nu = \begin{pmatrix} \frac{1}{N} & 0 \\ -\frac{N^\beta}{N} & e_j^\beta \end{pmatrix} \quad (2.184)$$

### Nuevas variables, simetría de gauge

En (2.182) se puede observar que la métrica espacial es invariante bajo transformaciones de gauge en el espacio interno, esto es, rotaciones  $SO(3)$ . La tétrada proyectada en  $\Sigma$  entonces tiene tres grados de libertad más que la métrica espacial. En consecuencia, deben haber tres vínculos de primera clase más que en la formulación ADM; a estos vínculos relacionados con la simetría de las transformaciones de gauge del grupo  $SO(3)$  se les denomina vínculo de Gauss. Para hallar este vínculo, primero definimos la siguiente 1-forma  $K_\alpha^i$  en  $\Sigma$ :

$$K_\alpha^i = X_a^i X_\alpha^\mu \omega_\mu^{a0} \quad (2.185)$$

donde  $X_\alpha^\mu$  son las componentes del proyector de  $M$  a  $\Sigma$ . De manera similar,  $X_a^i$  son las componentes del mapa inverso al que va desde el espacio interno cuadrimensional al tridimensional. Utilizando (2.176):

$$\begin{aligned} K_\alpha^i &= X_a^i X_\alpha^\mu e^{\nu a} (\nabla_\mu e_\nu^0) = X_a^i X_\alpha^\mu e^{\nu a} (\nabla_\mu n_\nu) \\ &= e_\nu^i X_\alpha^\mu (\nabla_\mu n^\nu) = X_\alpha^\mu X_\nu^\beta e_\beta^i (\nabla_\mu n^\nu) \end{aligned} \quad (2.186)$$

Así como las tétradas proyectadas en  $\Sigma$  (también llamadas tríadas) están relacionadas con la métrica espacial por (2.169), la 1-forma  $K_\alpha^i$  está relacionada con la curvatura extrínseca de la siguiente manera. Sea  $\mathcal{K}$  una 2-forma en  $\Sigma$  definida por:

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{ij} K_\alpha^i e_\beta^j \quad (2.187)$$

Esto es, la contracción de los índices internos de  $K$  y  $e$  utilizando la métrica euclideana. La curvatura extrínseca se encuentra dentro de esta 2-forma, más específicamente, la curvatura extrínseca es la parte simétrica de  $\mathcal{K}$ . Para ver esto, primero calculamos la componente  $\mathcal{K}_{\alpha\beta}$  utilizando (2.186):

$$\mathcal{K}_{\alpha\beta} = \delta_{ij} X_\alpha^\mu X_\nu^\gamma (\nabla_\mu n^\nu) e_\gamma^i e_\beta^j \quad (2.188)$$

Por otro lado, la curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned} K_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n q_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \mathfrak{L}_n (\delta_{ij} e_\alpha^i e_\beta^j) = \frac{1}{2} \delta_{ij} (e_\beta^j \mathfrak{L}_n e_\alpha^i + e_\alpha^i \mathfrak{L}_n e_\beta^j) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} (e_\beta^j e_\nu^i (\nabla_\alpha n^\nu) + e_\nu^j e_\alpha^i (\nabla_\beta n^\nu)) \\ &= \frac{1}{2} \delta_{ij} (e_\beta^j X_\nu^\gamma e_\gamma^i X_\alpha^\mu \nabla_\mu n^\nu + e_\alpha^i X_\nu^\gamma e_\gamma^j X_\alpha^\mu \nabla_\mu n^\nu) \end{aligned} \quad (2.189)$$

Comparando este resultado con (2.188), vemos que

$$K_{\alpha\beta} = \mathcal{K}_{(\alpha\beta)} \quad (2.190)$$

Entonces, la curvatura extrínseca está contenida en la parte simétrica de la 2-forma  $\mathcal{K}$ . Las tétradas a su vez contienen la información de la métrica espacial, como puede observarse en (2.169). Más adelante se reemplazará el par de variables ADM  $(q_{ab}, K_{ab})$  y se verá que la dinámica obtenida utilizando la 1-forma  $K_\alpha^i$  y las tétradas es equivalente a la obtenida con las variables ADM. Vamos a exigir ahora que  $\mathcal{K}_{ab}$  sea igual a la curvatura extrínseca, la cual es simétrica. Entonces, la parte antisimétrica de  $\mathcal{K}$  debe satisfacer el siguiente vínculo:

$$\mathcal{K}_{[\alpha\beta]} \approx 0 \quad (2.191)$$

Dicho de otra manera, definimos la 1-forma  $K_\alpha^i$  tal que satisface tanto (2.190) como el vínculo (2.191). En (2.191) se tienen tres vínculos ya que la matriz  $\mathcal{K}_{[\alpha\beta]}$  es antisimétrica. Estos tres vínculos son los que absorben los tres grados de libertad extras introducidos al elegir las tétradas como variables.

Definimos ahora las triadas densitizadas:

$$E_i^\alpha = ee_i^\alpha \quad (2.192)$$

Donde  $e = \det[e_\alpha^i] = (\det[e_i^\alpha])^{-1}$ . La relación entre las variables ADM y las variables  $(E_i^\alpha, K_\alpha^i)$ :

$$q_{\alpha\beta} = \delta_{ij}e_\alpha^i e_\beta^j = \delta_{ij}e^2 E_\alpha^i E_\beta^j = \delta_{ij}EE_\alpha^i E_\beta^j \quad (2.193)$$

Donde  $E = \det[E_i^\alpha] = \det[ee_i^\alpha] = e^3 \det[e_i^\alpha] = e^3 e^{-1} = e^2$ . Luego, utilizando (2.190) y que  $q = \det[E_i^\alpha]^3 \det[E_\alpha^i]^2 = \det[E_i^\alpha] = E$ :

$$\begin{aligned} \pi^{\alpha\beta} &= \sqrt{q} (K^{\alpha\beta} - Kq^{\alpha\beta}) = \sqrt{q} \left( K^{i(\alpha} e^{\beta)i} - q^{\alpha\beta} K^{i\gamma} e_{i\gamma} \right) \\ &= \sqrt{E} \left( \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{(K^{i\alpha} E_i^\beta + K^{i\beta} E_i^\alpha)}{2} - \frac{1}{E} \delta^{ij} E_i^\alpha E_j^\beta \sqrt{E} K^{i\gamma} E_{i\gamma} \right) \\ &= \frac{(K^{i\alpha} E_i^\beta + K^{i\beta} E_i^\alpha)}{2} - \delta^{ij} E_i^\alpha E_j^\beta K^{i\gamma} E_{i\gamma} \end{aligned} \quad (2.194)$$

Por otro lado, tenemos:

$$\begin{aligned} 2\delta_\delta^{(\alpha} E^{\beta)i} E_\gamma^j E_i^{[\gamma} K_j^{\delta]} &= 2 \frac{(\delta_\delta^\alpha E^{\beta i} + \delta_\delta^\beta E^{\alpha i})}{2} E_\gamma^j \frac{(E_i^\gamma K_j^\delta - E_i^\delta K_j^\gamma)}{2} \\ &= \frac{1}{2} (E^{\beta i} E_\gamma^j E_i^\gamma K_j^\alpha - E^{\beta i} E_\gamma^j E_i^\alpha K_j^\gamma \\ &\quad + E^{\alpha i} E_\gamma^j E_i^\gamma K_j^\beta - E^{\alpha i} E_\gamma^j E_i^\beta K_j^\gamma) \\ &= \frac{(K^{i\alpha} E_i^\beta + K^{i\beta} E_i^\alpha)}{2} - E_i^\alpha E^{\beta i} K^{j\gamma} E_{j\gamma} \end{aligned} \quad (2.195)$$

Comparando este resultado con (2.194) se puede observar que son iguales, entonces:

$$\pi^{\alpha\beta} = 2\delta_\delta^{(\alpha} E^{\beta)i} E_\gamma^j E_i^{[\gamma} K_j^{\delta]} \quad (2.196)$$

En términos de estas nuevas variables, el vínculo (2.191):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{ij} &= ee_i^\alpha e_j^\beta \mathcal{K}_{[\alpha\beta]} = ee_i^\alpha e_j^\beta K_{[\alpha}^k e_{\beta]k} = ee_i^\alpha e_j^\beta \frac{1}{2} (K_\alpha^k e_{\beta k} - K_\beta^k e_{\alpha k}) \\ &= e \left( \frac{1}{e} E_i^\alpha \right) \left( \frac{1}{e} E_j^\beta \right) \frac{1}{2} (K_{\alpha k} (eE_\beta^k) - K_{\beta k} (eE_\alpha^k)) \\ &= \frac{1}{2} E_i^\alpha E_j^\beta (E_\beta^k K_{\alpha k} - E_\alpha^k K_{\beta k}) = \frac{1}{2} (E_i^\alpha K_{\alpha j} - E_j^\beta K_{\beta k}) = K_{\alpha[i} E_{j]}^\alpha \approx 0 \end{aligned} \quad (2.197)$$

Sus índices espacio-temporales fueron transformados en índices internos utilizando las tétradas. Luego, el vínculo de difeomorfismos (2.154):

$$C_\alpha = -2D_\beta \pi_\alpha^\beta = -2D_\beta (K_\alpha^i E_i^\beta - \delta_\alpha^\beta K_j^\gamma E_\gamma^j) \quad (2.198)$$

donde se usó que  $\delta_\alpha^\beta = \delta_j^i e_\alpha^i e_j^\beta = \delta_j^i E_\alpha^i E_j^\beta = E_\alpha^i E_i^\beta$  y también la igualdad débil  $K_{[\alpha}^i e_{\beta]}^i \approx 0 \rightarrow K_{[\alpha}^i E_{\beta]}^i \approx 0 \rightarrow K_\alpha^i E_i^\beta \approx K_i^\beta E_\alpha^i$ . De forma similar se puede probar que el vínculo Hamiltoniano en términos de estas nuevas variables toma la forma:

$$C = \sqrt{E} E_i^\alpha E_j^\beta (K_\alpha^j K_\beta^i - K_\alpha^i K_\beta^j) - \frac{1}{\sqrt{E}} ({}^3R(E)) \quad (2.199)$$

Donde el escalar de Ricci tridimensional se considera una función de las tríadas densitizadas. Si equipamos el nuevo espacio de fases con la siguiente estructura:

$$\{E_\alpha^i(t, x), K_j^\beta(t, y)\} = \delta_j^i \delta_\alpha^\beta \delta(x - y) \quad (2.200)$$

$$\{E_\alpha^i(t, x), E_\beta^j(t, y)\} = \{K_i^\alpha(t, x), K_j^\beta(t, y)\} = 0 \quad (2.201)$$

entonces se puede probar que la dinámica descrita por las variables  $(E_\alpha^i, K_j^\beta)$  es equivalente a la descrita por las variables ADM. Primero, La versión suavizada del vínculo (2.197) se obtiene integrándolo contra una función suave. La denominaremos vínculo rotacional:

$$\mathcal{R}(\alpha) = \int \alpha^{ij} K_{\alpha i} E_j^\alpha d^3x \quad (2.202)$$

Donde  $\alpha^{ij}$  es una matriz antisimétrica arbitraria. Calculando el álgebra generada por estos vínculos:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{R}(\alpha), \mathcal{R}(\alpha')\} &= \left\{ \int \alpha^{ij} K_{\alpha i} E_j^\alpha d^3x, \int \alpha'^{kl} K_{\beta k} E_l^\beta d^3y \right\} \\ &= \int d^3x d^3y K_{\alpha i} \{E_j^\alpha, K_{\beta k}\} E_l^\beta \alpha'^{kl} + \int d^3x d^3y \alpha'^{ij} \{K_{\alpha i}, E_l^\beta\} E_j^\alpha K_{\beta k} \alpha'^{kl} \\ &= \int d^3x d^3y \alpha_j^i K_i^\alpha \{E_\alpha^j, K_k^\beta\} E_\beta^l \alpha_l^k + \int d^3x d^3y \alpha_j^i \{K_i^\alpha, E_\beta^l\} E_\alpha^j K_k^\beta \alpha_l^k \\ &= \int d^3x d^3y \alpha_j^i K_i^\alpha \delta_k^j \delta_\alpha^\beta \delta(x - y) E_\beta^l \alpha_l^k - \int d^3x d^3y \alpha_j^i \delta_i^l \delta_\beta^\alpha \delta(x - y) E_\alpha^j K_k^\beta \alpha_l^k \\ &= \int d^3x (\alpha \alpha')_l^i K_{\alpha i} E^{\alpha l} - \int d^3x (\alpha' \alpha)_i^k K_{\alpha k} E^{\alpha i} = \int d^3x [\alpha, \alpha']^{ij} K_{\alpha i} E_j^\alpha \\ &= \mathcal{R}([\alpha, \alpha']) \end{aligned} \quad (2.203)$$

Esta es el álgebra de las rotaciones espaciales  $SO(3)$ . El corchete de Poisson del vínculo rotacional con las variables ADM es cero pues estas últimas son manifiestamente invariantes bajo rotaciones. La métrica espacial, al ser función únicamente de las tríadas, satisface:

$$\{q_{\alpha\beta}(t, x), q_{\gamma\delta}(t, y)\} = 0 \quad (2.204)$$

Por otro lado, los momentos conjugados de la métrica espacial satisfacen [51]:

$$\begin{aligned} \{\pi^{\alpha\beta}(t, x), \pi^{\gamma\delta}(t, y)\} = & -\frac{\sqrt{q}}{8} [q^{\alpha\gamma}\mathcal{R}^{\beta\delta} + q^{\alpha\delta}\mathcal{R}^{\beta\gamma} + q^{\beta\gamma}\mathcal{R}^{\alpha\delta} \\ & + q^{\beta\delta}\mathcal{R}^{\alpha\gamma}] (t, x)\delta(x - y) \end{aligned} \quad (2.205)$$

Los corchetes anteriores se anulan cuando se satisface el vínculo rotacional. Luego, se puede ver que

$$\{\pi^{\alpha\beta}, q_{\gamma\delta}\} = \delta_{(\gamma}^{\alpha} \delta_{\delta)}^{\beta} \delta(x - y) \quad (2.206)$$

Las nuevas variables  $E_{\alpha}^i$  y  $K_i^{\alpha}$  son entonces equivalentes a las variables ADM cuando se satisface el vínculo rotacional.

### Variables de Ashtekar

Las transformaciones  $E_j^{\alpha} \rightarrow \frac{E_j^{\alpha}}{\beta}$  y  $K_{\alpha}^j \rightarrow \beta K_{\alpha}^j$  son canónicas ya que no alteran la estructura (2.200),(2.201). Al parámetro  $\beta$  se le llama parámetro de Barbero-Immirzi (BI) y es en general un número complejo, aunque nosotros lo consideraremos real. El vínculo rotacional también permanece invariante bajo este reescalado:

$$\mathcal{R}_k = \varepsilon_{kij}\mathcal{R}^{ij} = \varepsilon_{kij} (\beta K_{\alpha}^i) (\beta E^{\alpha j}) \approx 0 \quad (2.207)$$

Donde  $\beta K_{\alpha}^i = \beta K_{\alpha}^i$  y  $\beta E_j^{\alpha} = \frac{E_j^{\alpha}}{\beta}$ . Para obtener (2.207) se definió el vector  $\mathcal{R}_k$ , el cual contiene la misma información que  $\mathcal{R}_{ij}$  pues esta última es una matriz  $3 \times 3$  antisimétrica; luego se utilizó la propiedad de antisimetría del símbolo  $\varepsilon_{kij}$ , y posteriormente se utilizó (2.197).

Introducimos ahora la conexión asociada a la simetría  $SO(3)$ , cuyas componentes serán denotadas por  $\Gamma_{\alpha}^{ij}$ . La derivada covariante de un tensor con índices tanto espaciotemporales como internos se obtiene:

$$\begin{aligned} D_{\beta} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} = & \partial_{\beta} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{\beta \alpha_k}^{\gamma} T_{\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \gamma \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} \\ & + \sum_{l=1}^m \Gamma_{j\beta}^{i_l} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_{l-1} j i_{l+1} \dots i_m} = \nabla_{\beta} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_m} + \sum_{l=1}^m \Gamma_{j\beta}^{i_l} T_{\alpha_1 \dots \alpha_n}^{i_1 \dots i_{l-1} j i_{l+1} \dots i_m} \end{aligned} \quad (2.208)$$

De manera completamente análoga al caso cuadrimensional en (2.173), exigimos que esta derivada covariante sea compatible con las tétradas:

$$D_{\beta} e_{\alpha}^i = 0 \quad \rightarrow \quad \Gamma_{\alpha}^{ij} = e^{\beta i} \nabla_{\alpha} e_{\beta}^j \quad (2.209)$$

La curvatura es una 2-forma que se obtiene considerando el conmutador de dos derivadas covariantes actuando sobre un vector valuado en  $SO(3)$ :

$$R_{\alpha\beta j}^i = [D_{\alpha}, D_{\beta}] v^i \rightarrow R_{\alpha\beta}^{ij} = 2\partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]}^{ij} + \Gamma_{j[\alpha}^i \Gamma_{\beta]}^j \quad (2.210)$$

Utilizando (2.209) y que  $e = \sqrt{q} \rightarrow \nabla_{\alpha} e = 0$ , tenemos:

$$D_{\alpha} E_j^{\beta} = \nabla_{\alpha} (e e_j^{\beta}) - \Gamma_{\alpha j}^k e e_k^{\beta} = e D_{\alpha} e_j^{\beta} = 0 \quad (2.211)$$

Entonces:

$$D_\alpha E_j^\alpha = 0 \quad (2.212)$$

Además, utilizando el hecho de que  $\partial_\alpha E_j^\alpha = \partial_\alpha(ee_j^\alpha) = \nabla_\alpha E_j^\alpha$  [28], se obtiene:

$$D_\alpha E_j^\alpha = \partial_\alpha E_j^\alpha - \Gamma_{j\alpha}^k E_k^\beta = \partial_\alpha E_j^\alpha + \varepsilon_{jk}^l \Gamma_\alpha^k E_l^\alpha = 0 \quad (2.213)$$

Donde se definió:  $\Gamma_\alpha^k := -1/2\varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^{ij}$ . En función de las tríadas:

$$\begin{aligned} \Gamma_\alpha^i &= \frac{1}{2} \varepsilon_{j k}^i E^{\beta k} \left[ \partial_\beta E_\alpha^j - \partial_\alpha E_\beta^j + E^{\gamma j} E_{\alpha l} \partial_\beta E_\gamma^l \right] \\ &+ \frac{1}{4} \varepsilon_{j k}^i E^{\beta k} \left[ 2E_\alpha^j \frac{\partial_\beta (\det[E_\gamma^i])}{\det[E_\gamma^i]} - E_\beta^j \frac{\partial_\alpha (\det[E_\gamma^i])}{\det[E_\gamma^i]} \right] \end{aligned} \quad (2.214)$$

Podemos ver en (2.186) que  $\Gamma_\alpha^i$  no cambia al realizar la transformación  $E_j^\alpha \rightarrow {}^\beta E_j^\alpha = E_j^\alpha / \beta$ . Utilizando la igualdad fuerte (2.213) podemos modificar el vínculo rotacional:

$$\begin{aligned} G_k &= \partial_\alpha ({}^\beta E_k^\alpha) + \varepsilon_{ki}^j \Gamma_\alpha^i ({}^\beta E_j^\alpha) + \varepsilon_{ki}^j ({}^\beta K_\alpha^i) ({}^\beta E_j^\alpha) \\ &= \partial_\alpha ({}^\beta E_k^\alpha) + \varepsilon_{ki}^j ({}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i) ({}^\beta E_j^\alpha) \approx 0 \end{aligned} \quad (2.215)$$

Donde se definió la *conexión de Ashtekar-Barbero* como  ${}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i = \Gamma_\alpha^i + \beta K_\alpha^i$ . A  $G_k$  se le denomina vínculo de Gauss. Se puede probar que las variables  ${}^\beta E_i^\alpha$ ,  ${}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i$  forman un par canónico conjugado pues tienen la siguiente estructura de corchetes de Poisson:

$$\left\{ {}^\beta E_\alpha^i(t, x), {}^\beta \mathcal{A}_j^\beta(t, y) \right\} = \delta_j^i \delta_\alpha^\beta \delta(x, y) \quad (2.216)$$

$$\left\{ {}^\beta E_\alpha^i(t, x), {}^\beta E_\beta^j(t, y) \right\} = \left\{ {}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i(t, x), {}^\beta \mathcal{A}_j^\beta(t, y) \right\} = 0 \quad (2.217)$$

Las componentes de la curvatura de la conexión de Ashtekar-Barbero están dadas por:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k = 2\partial_{[\alpha} {}^\beta \mathcal{A}_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i {}^\beta \mathcal{A}_\beta^j \quad (2.218)$$

Las cuales satisfacen la siguiente relación

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k &= 2\partial_{[\alpha} {}^\beta \mathcal{A}_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta \mathcal{A}_\alpha^i {}^\beta \mathcal{A}_\beta^j \\ &= 2\partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]}^k + 2\partial_{[\alpha} {}^\beta K_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k \left( \Gamma_\alpha^i + {}^\beta K_\alpha^i \right) \left( \Gamma_\beta^j + {}^\beta K_\beta^j \right) \\ &= R_{\alpha\beta}^k + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta K_\alpha^i {}^\beta K_\beta^j + \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^i {}^\beta K_\beta^j + \varepsilon_{ij}^k {}^\beta K_\alpha^i \Gamma_\beta^j + 2\partial_{[\alpha} {}^\beta K_{\beta]}^k \end{aligned} \quad (2.219)$$

donde  $R_{\alpha\beta}^k = \partial_{[\alpha} \Gamma_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k \Gamma_\alpha^i \Gamma_\beta^j$ , y está relacionado con la curvatura (2.210) de la siguiente manera:

$$R_{\alpha\beta}^{ij} = \varepsilon_k^{ij} R_{\alpha\beta}^k \quad (2.220)$$

Esta relación puede verificarse fácilmente expresando  $\Gamma_\alpha^k$  en función de  $\Gamma_\alpha^{ij}$  y utilizando la identidad

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmn} &= \delta_{il} \delta_{jm} \delta_{kn} + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{kl} + \delta_{in} \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{il} \delta_{jn} \delta_{km} - \delta_{im} \delta_{jm} \delta_{kl} \\ &\quad - \delta_{im} \delta_{jl} \delta_{kn} \end{aligned} \quad (2.221)$$

Por otro lado, tenemos que

$$D_{[\alpha}{}^{\beta}K_{\beta]}^k = \partial_{[\alpha}{}^{\beta}K_{\beta]}^k + \left(-\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}K_{\gamma}^k + \Gamma_{\beta\alpha}^{\gamma}K_{\gamma}^k\right) + (\Gamma_{\alpha}^k K_{\beta}^l - \Gamma_{l\beta}^k K_{\alpha}^l) \quad (2.222)$$

El segundo sumando en (2.222) es cero ya que los símbolos de Christoffel son simétricos. Luego, tenemos:

$$\Gamma_{\alpha}^k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}^k \Gamma_{\alpha}^{ij} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk} \Gamma_{ij\alpha} \quad (2.223)$$

Contrayendo con  $\varepsilon_{kmn}$ :

$$\varepsilon_{kmn}\Gamma_{\alpha}^k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{kmn}\varepsilon^{kij}\Gamma_{ij\alpha} = -\frac{1}{2}(\delta_m^i\delta_n^j - \delta_m^j\delta_n^i)\Gamma_{ij\alpha} = \Gamma_{nm\alpha} \quad (2.224)$$

Entonces:

$$\varepsilon_{mkn}\Gamma_{\alpha}^k = \Gamma_{mn\alpha} \rightarrow \Gamma_{n\alpha}^m = \varepsilon_{kn}^m \Gamma_{\alpha}^k = \Gamma_{n\alpha}^m \quad (2.225)$$

Renombrando índices mudos y contrayendo índices internos con  $K_{\beta}^j$ :

$$\varepsilon_{ij}^k \Gamma_{\alpha}^i K_{\beta}^j = \Gamma_{j\alpha}^k K_{\beta}^j \quad (2.226)$$

Usando esta última igualdad, podemos reescribir (2.219) como:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k = R_{\alpha\beta}^k + 2D_{[\alpha}{}^{\beta}K_{\beta]}^k + \varepsilon_{ij}^k{}^{\beta}K_{\alpha}^i{}^{\beta}K_{\beta}^j \quad (2.227)$$

De (2.218), (2.219) y la identidad cíclica de Bianchi tridimensional [67]:

$$R_{\alpha\beta}^j E_j^{\beta} = 0 \quad (2.228)$$

se pueden hallar expresiones para los vínculos en función de las nuevas variables.

Primero, contrayendo (2.227) con  ${}^{\beta}E_k^{\beta}$ :

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k{}^{\beta}E_k^{\beta} = R_{\alpha\beta}^k{}^{\beta}E_j^{\beta} + 2D_{[\alpha}{}^{\beta}K_{\beta]}^k E_k^{\beta} + \varepsilon_{ij}^k{}^{\beta}K_{\alpha}^i{}^{\beta}K_{\beta}^j{}^{\beta}E_k^{\beta} \quad (2.229)$$

El primer sumando es cero por (2.228). Luego, el tercer sumando se puede reescribir utilizando (2.207) y la igualdad fuerte (2.213):

$$\varepsilon_{ij}^k{}^{\beta}K_{\alpha}^i{}^{\beta}K_{\beta}^j{}^{\beta}E_k^{\beta} = {}^{\beta}K_{\alpha}^i \mathcal{R}_i = {}^{\beta}K_{\alpha}^i G_i \quad (2.230)$$

Luego, comparando el segundo sumando al vínculo de difeomorfismos (2.198) (re-escalado por un factor de -2):

$$2D_{[\alpha}{}^{\beta}K_{\beta]}^k E_k^{\beta} = D_{\alpha}{}^{\beta}K_{\beta}^k E_k^{\beta} - D_{\beta}{}^{\beta}K_{\alpha}^k E_k^{\beta} = C_{\alpha} \quad (2.231)$$

Entonces, tenemos que:

$$\mathcal{F}_{\alpha\beta}^k E_k^{\beta} = C_{\alpha} + {}^{\beta}K_{\alpha}^i G_i \rightarrow C_{\alpha} = \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k E_k^{\beta} - {}^{\beta}K_{\alpha}^i G_i \quad (2.232)$$

De manera similar, se puede probar que el vínculo Hamiltoniano toma la siguiente forma en función de las nuevas variables [67]:

$$C = \frac{\beta^2}{(\det[E_{\alpha}^i])^{1/2}} {}^{\beta}E_i^{\alpha}{}^{\beta}E_j^{\gamma} \left[ \varepsilon_{ij}^k \mathcal{F}_{\alpha\gamma}^k - 2(\beta^2 + 1)K_{[\alpha}^i K_{\gamma]}^j \right] + \frac{\beta^2}{(\det[E_{\alpha}^i])^{1/2}} {}^{\beta}E_j^{\gamma} D_{\gamma} G^j \quad (2.233)$$

Los vínculos (2.215), (2.232) y (2.233) son completamente equivalentes a:

$$G_i = \mathcal{D}_\alpha E_i^\alpha := \partial_\alpha E_i^\alpha + \varepsilon_{ij}^{k\beta} \mathcal{A}_\alpha^j E_k^\alpha \approx 0 \quad (2.234)$$

$$C_\alpha = E_i^\beta \mathcal{F}_{\alpha\beta}^i \approx 0 \quad (2.235)$$

$$C = \frac{1}{(\det[E_\alpha^i])^{1/2}} E_i^\alpha E_j^\gamma \left[ \varepsilon_k^{ij} \mathcal{F}_{\alpha\gamma}^k - 2(\beta^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\gamma]}^j \right] \approx 0 \quad (2.236)$$

### Acción de los vínculos

En la sección (2.3.1) vimos que los vínculos (2.154) y (2.153) generan difeomorfismos espaciales y en la dirección normal a la foliación  $\Sigma$  respectivamente. Lo mismo ocurre con los vínculos (2.235) y (2.236): estos generan el mismo tipo de difeomorfismos en las nuevas variables  $E_i^\alpha$  y  $\mathcal{A}_\alpha^i$ . El vínculo de Gauss (2.234) por su parte genera rotaciones en el espacio interno, esto es, rotaciones correspondientes al grupo  $SO(3)$  (o equivalentemente  $SU(2)$ ).

Para calcular los corchetes de Poisson de los vínculos con las variables dinámicas, introducimos las versiones suavizadas de los vínculos. Primero, el vínculo de Gauss suavizado está dado por:

$$C_G(\Lambda) := \int_\Sigma d^3x \Lambda^i G_i \quad (2.237)$$

donde  $\Lambda$  es un campo suave en  $\Sigma$  valuado en  $\mathfrak{so}(3)$ . El vínculo de difeomorfismos:

$$C_{\text{Dif}}(\vec{N}) := \int_\Sigma d^3x \left( N^\alpha E_i^\beta \mathcal{F}_{\alpha\beta}^i - (N^\alpha A_\alpha^i) G_i \right) \quad (2.238)$$

Con  $\vec{N}$  un campo suave en  $\Sigma$ . En esta definición se sumó un término proporcional vínculo de Gauss para obtener el resultado deseado de forma explícita, eliminando una parte del vínculo proporcional al vínculo de Gauss, el cual genera rotaciones internas. Por último, el vínculo Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$C(N) := \int_\Sigma d^3x N \frac{1}{(\det[E_\alpha^i])^{1/2}} E_i^\alpha E_j^\beta \left[ \varepsilon_k^{ij} \mathcal{F}_{\alpha\beta}^k - 2(\beta^2 + 1) K_{[\alpha}^i K_{\beta]}^j \right] \quad (2.239)$$

Calculando los corchetes de Poisson de los vínculos con las variables dinámicas, obtenemos:

$$\{A_\alpha^i, C_G(\Lambda)\} = -\mathcal{D}_\alpha \Lambda^i \quad \{E_i^\alpha, C_G(\Lambda)\} = \varepsilon_{ij}^k \Lambda^j E_k^\alpha \quad (2.240)$$

El vínculo de Gauss genera entonces rotaciones en el espacio interno. Por otro lado, el vínculo (2.238):

$$\{A_\alpha^i, C_{\text{Dif}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} A_\alpha^i \quad \{E_i^\alpha, C_{\text{Dif}}(\vec{N})\} = \mathcal{L}_{\vec{N}} E_i^\alpha \quad (2.241)$$

genera difeomorfismos espaciales en las variables dinámicas en la dirección del vector  $\vec{N}$ . El vínculo Hamiltoniano, como es de esperar, genera la evolución temporal, esto es, un difeomorfismo en la dirección perpendicular a  $\Sigma$ :

$$\{A_\alpha^i, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn} A_\alpha^i \quad \{E_i^\alpha, C(N)\} \approx \mathcal{L}_{Nn} E_i^\alpha \quad (2.242)$$

Los símbolos de igualdad débil se deben a que los corchetes tienen otros sumandos que se anulan en la superficie de vínculos.

**Álgebra de los vínculos**

Calculando el corchete de Poisson entre los vínculos, obtenemos [11]:

$$\{C_G(\Lambda), C_G(\Lambda')\} = \{C_G([\Lambda, \Lambda'])\} \quad (2.243)$$

$$\{C_G(\Lambda), C_{Diff}(\vec{N})\} = -C_G(\mathcal{L}_{\vec{N}}\Lambda) \quad (2.244)$$

$$\{C_{Diff}(\vec{N}), C_{Diff}(\vec{N}')\} = C_{Diff}([\vec{N}, \vec{N}']) \quad (2.245)$$

$$\{C_G(\Lambda), C(N)\} = 0 \quad (2.246)$$

$$\{C_{Diff}(\vec{N}), C(M)\} = -C(\mathcal{L}_{\vec{N}}M) \quad (2.247)$$

$$\begin{aligned} \{C(N), C(M)\} &= -4 \left( C_{Diff}(\vec{S}) + C_G(S^\alpha A_\alpha^i) \right) \\ &\quad - 4 \left( 1 + \frac{1}{\beta^2} \right) C_G \left( \frac{[E_\alpha^i \partial^\alpha N, E_\beta^i \partial^\beta M]}{q} \right) \end{aligned} \quad (2.248)$$

Donde se definió el vector  $\vec{S}$ :

$$S^\alpha = (N\partial_\beta M - M\partial_\beta N) \frac{E_i^\beta E^{\alpha i}}{q} \quad (2.249)$$

En conclusión, la relatividad general se puede reformular como una teoría dinámica de conexiones con grupos de estructura compactos. El precio a pagar es introducir más grados de libertad, más vínculos y trabajar con una estructura de corchetes de Poisson más complicada.

## Capítulo 3

# Simetría Axial

### 3.1 Espacios estacionarios y axisimétricos

#### 3.1.1 Reducción por simetría en variables métricas

Un espaciotiempo es estacionario si tiene un vector de Killing  $T$  el cual es asintóticamente tipo tiempo. Por otro lado, si tiene un vector de Killing  $K$  tipo espacio cuyas órbitas son tangentes al círculo  $S^1$  entonces decimos que el espacio es también axisimétrico. Los espacios que queremos estudiar en este trabajo cumplen ambas condiciones, son estacionarios y axisimétricos. Recordar que si  $K$  y  $T$  son vectores de Killing, entonces se cumple

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} &= 0 \\ \mathcal{L}_T g_{\mu\nu} &= 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Siendo  $g_{\mu\nu}$  las componentes de la métrica. Para simplificar, vamos a considerar coordenadas adaptadas a los vectores de Killing, es decir, coordenadas  $t$  y  $\phi$  tales que  $T = \mu\partial_t$  y  $K = \lambda\partial_\phi$ , con  $\mu$  y  $\lambda$  constantes. Al ser  $\partial_t$  asintóticamente tipo tiempo, podemos foliar el espacio en hipersuperficies  $\Sigma$  caracterizadas por un valor de  $t$  constante (ver formulación ADM de la Relatividad General en el capítulo anterior). En cada una de estas hipersuperficies tridimensionales podemos considerar una superficie bidimensional ortogonal a las órbitas de  $K$ , sobre la cual definimos las coordenadas  $(x, y)$ . Estas coordenadas se pueden trasladar al resto de  $\Sigma$  a lo largo de las curvas integrales de  $\partial_\phi$  (ver por ejemplo el apéndice B de [69]). El espaciotiempo queda entonces descrito por las coordenadas  $(x, y, \phi, t)$ . En términos de estas coordenadas, las condiciones (3.1) toman una forma simple:

$$g_{\mu\nu,\phi} = 0, \quad g_{\mu\nu,t} = 0\tag{3.2}$$

Entonces, en un espacio estacionario y axisimétrico, usando estas coordenadas adaptadas, las componentes de la métrica no dependen de  $t$  ni de  $\phi$ . Vamos ahora a centrarnos en aquellos espacios que son invariantes bajo la inversión simultánea de  $t$  y  $\phi$ :  $t \rightarrow -t$ ,  $\phi \rightarrow -\phi$ . Si expresamos la métrica en términos del lapso  $N$ , del shift  $N^a$  y de la métrica espacial  $q_{ab}$  (con  $a, b = x, y, \phi$ ) definidos en el capítulo anterior:

$$dS^2 = (-N^2 + N_a N^a) dt^2 + N_a (dt da + da dt) + q_{ab} da db\tag{3.3}$$

se puede ver que la condición anterior implica

$$N_\alpha = 0, q_{\phi\alpha} = 0 \quad (3.4)$$

donde  $\alpha = x, y$ . Estas condiciones pueden parecer a simple vista una fijación de gauge estándar: Fijamos dos componentes de la métrica igual a cero y luego a partir de la conservación de la condición de gauge obtenemos los multiplicadores  $N_x$  y  $N_y$  (ver por ejemplo [43] o el apéndice E). Una fijación de gauge no debería tener ninguna consecuencia física, sin embargo, las condiciones (3.4) seleccionan, de entre todas las métricas que verifican (3.1), aquellas en las cuales la fuente de campo gravitatorio rota en torno al eje de simetría:

$$dS^2 = (-N^2 + N_\phi N^\phi) dt^2 + N_\phi (dt d\phi + d\phi dt) + q_{ab} da db \quad (3.5)$$

Para comprender por qué (3.5) representa un espacio en el cual la fuente rota en torno al eje de simetría y además cómo una aparente fijación de gauge puede imponer restricciones físicas es necesario entender la diferencia entre transformaciones de gauge propias e impropias. Vamos a presentar aquí un resumen del tema basándonos en [16].

Supongamos que tenemos un sistema con grados de libertad locales  $q(x), p(x)$ . Un vínculo de primera clase  $C[\lambda] = \int dx \lambda(x) C(x)$  genera transformaciones de gauge en las variables canónicas y en las funciones de estas:

$$\begin{aligned} \delta q(x) &= \{q(x), C[\lambda]\} = \frac{\delta C[\lambda]}{\delta p(x)} \\ \delta p(x) &= \{p(x), C[\lambda]\} = -\frac{\delta C[\lambda]}{\delta q(x)} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para que estas derivadas funcionales estén bien definidas, debemos poder escribir la variación de  $C[\lambda]$  de la siguiente manera:

$$\delta C[\lambda] = \int dx (A(x) \delta q(x) + B(x) \delta p(x)) \quad (3.7)$$

con  $A(x) = \delta C / \delta q(x), B(x) = \delta C / \delta p(x)$ . En general para llegar a esta forma es necesario realizar integraciones por partes, lo que puede dar como resultado términos de borde que no se anulen débilmente. En ese caso, para que (3.7) se cumpla es necesario agregar integrales de superficie (que denotaremos por  $\sigma[\lambda]$ ) a los vínculos que anulen estos términos de borde:

$$\tilde{C}[\lambda] = C[\lambda] + \sigma[\lambda] \quad (3.8)$$

Entonces, el vínculo  $\tilde{C}[\lambda]$  no se anula débilmente:  $\tilde{C}[\lambda] \approx \sigma[\lambda]$ . Las transformaciones de gauge generadas por este término de borde se denominan impropias y cambian el estado físico de un sistema; por el contrario, las transformaciones de gauge generadas por  $C[\lambda] \approx 0$  se denominan propias y no alteran el estado físico del sistema. Dado que el vínculo Hamiltoniano es invariante bajo transformaciones de gauge (incluso las impropias):

$$\{H[N], \sigma[\lambda]\} \approx 0 \quad (3.9)$$

tenemos que  $\sigma[\lambda]$  es una constante de movimiento correspondiente a la conservación no trivial de una cantidad física. Una transformación de gauge generada

por  $\sigma[\lambda]$  afecta el valor de esta cantidad, llevando el sistema a un estado no equivalente. En particular, en Relatividad General, los términos de borde de la acción están asociados a las transformaciones de Poincaré asintóticas. Si estos términos de borde son cero, entonces las transformaciones de Poincaré están congeladas en el infinito, las transformaciones de gauge generadas por los vínculos son propias y no alteran el estado físico del sistema; en caso contrario, estas son impropias y generan un cambio en las cantidades físicas conservadas. Por ejemplo, el término de borde del vínculo de difeomorfismos (que daremos explícitamente más adelante en este capítulo) está asociado al momento angular total del sistema; una transformación de gauge impropia generada por este lleva el mismo a un estado con un momento angular diferente. Después de fijar el gauge completamente no quedan vínculos en la teoría, no se pueden realizar ya transformaciones de gauge propias y los multiplicadores de Lagrange quedan determinados en función de las variables canónicas; sin embargo, las transformaciones de gauge impropias que preservan las condiciones de gauge aún son permisibles pues estas dependen únicamente de los valores asintóticos de los multiplicadores y las variables canónicas. Si no se realiza ninguna fijación de gauge, los valores asintóticos de los multiplicadores no fijan su valor en todo el espacio pues aún se tiene la libertad de las transformaciones de gauge propias, la cual no afecta el valor de los multiplicadores en el infinito; si, en cambio, el gauge está fijado, esta libertad no está presente por lo que la fijación de la parte asintótica de los multiplicadores determina completamente el valor de los mismos en todo el espacio. En particular si estos se anulan, entonces las transformaciones que generan son la identidad en todo el espacio. Teniendo en cuenta esto y volviendo a las condiciones (3.4):

$$N_\alpha = 0, q_{\phi\alpha} = 0 \quad (3.10)$$

Se puede observar que además de imponer las condiciones  $q_{\phi\alpha} = 0$ , fijan completamente el valor de los multiplicadores  $N_\alpha = 0$  en todo el espacio, por lo que las transformaciones de Poincaré asociadas a los vínculos de difeomorfismos en las direcciones de las coordenadas  $x$  y  $y$  son la identidad en todo el espacio. Las condiciones  $N_\alpha = 0$  además implican que los términos de borde de estos vínculos se anulan, o sea, el momento angular total del sistema está determinado únicamente por  $N_\phi$ : La fuente de campo gravitatorio rota en torno al eje de simetría.

Siguiendo adelante, vamos a reescribir la métrica (3.5) haciendo un cambio de variable siguiendo [31], y definiendo funciones  $f(\rho, z)$ ,  $\gamma(\rho, z)$  y  $\omega(\rho, z)$  (siendo  $\rho$  y  $z$  las coordenadas cilíndricas usuales) tales que:

$$ds^2 = f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2] - f(dt - \omega d\phi)^2 \quad (3.11)$$

esta se conoce como la forma de Papapetrou y su ventaja es que las ecuaciones de movimiento quedan particularmente simples. Las ecuaciones de movimiento para  $f$  y  $\omega$  toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f\nabla^2 f &= \nabla f \cdot \nabla f - \rho^{-2} f^4 \nabla\omega \cdot \nabla\omega \\ \nabla \cdot (\rho^{-2} f^2 \nabla\omega) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donde  $\nabla$  y  $\nabla \cdot$  son los operadores gradiente y divergencia tridimensionales. Por otro lado, si  $\hat{n}$  es un versor en la dirección de la coordenada  $\phi$  y  $\varphi$  es una función

independiente de esta coordenada, entonces

$$\nabla \cdot (\rho^{-1} \hat{n} \times \nabla \varphi) = 0 \quad (3.13)$$

La segunda de las ecuaciones en (3.12) se puede interpretar como la condición de integrabilidad para la existencia de un potencial  $\varphi$  tal que

$$\rho^{-1} f^2 \nabla \omega = \hat{n} \times \nabla \varphi \quad (3.14)$$

Tomando producto vectorial con  $\hat{n}$  en ambos lados:

$$f^{-2} \nabla \varphi = -\rho^{-1} \hat{n} \times \nabla \omega \quad (3.15)$$

Entonces, la segunda ecuación en (3.12) se puede escribir de la siguiente manera en términos del potencial  $\varphi$ :

$$\nabla \cdot (f^{-2} \nabla \varphi) = 0 \quad (3.16)$$

Mientras que la primera toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} f \nabla^2 f &= \nabla f \cdot \nabla f - \rho^{-2} f^4 \nabla \omega \cdot \nabla \omega = \nabla f \cdot \nabla f - (\hat{n} \times \nabla \varphi) \cdot (\hat{n} \nabla \varphi) \\ &= \nabla f \cdot \nabla f - \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \end{aligned} \quad (3.17)$$

Desarrollando la divergencia en (3.16) podemos obtener:

$$\nabla^2 \varphi = 2f^{-1} \nabla f \cdot \nabla \varphi \quad (3.18)$$

Si definimos la cantidad compleja  $\mathcal{E} := f + i\varphi$ , utilizando este último resultado tenemos:

$$\operatorname{Re} \mathcal{E} \nabla^2 \mathcal{E} = f(\nabla^2 f + i\nabla^2 \varphi) = f \nabla^2 f + i2\nabla f \cdot \nabla \varphi \quad (3.19)$$

Por otro lado,

$$\nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi + i2\nabla f \cdot \nabla \varphi \quad (3.20)$$

Usando estos resultados obtenemos la siguiente ecuación diferencial para  $\mathcal{E}$ :

$$(\operatorname{Re} \mathcal{E}) \nabla^2 \mathcal{E} = \nabla \mathcal{E} \cdot \nabla \mathcal{E} \quad (3.21)$$

Si ahora definimos  $\xi$  tal que

$$\mathcal{E} = \frac{\xi - 1}{\xi + 1} \quad (3.22)$$

la ecuación (3.21) toma la siguiente forma:

$$(\xi \xi^* - 1) \nabla^2 \xi = 2\xi^* \nabla \xi \cdot \nabla \xi \quad (3.23)$$

Luego, si introducimos un nuevo potencial  $\psi$  tal que

$$\xi = -e^{i\alpha} \coth \psi \quad (3.24)$$

la ecuación de movimiento se transforma en la ecuación de Laplace,

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad (3.25)$$

Si deseamos expresar, como en [31], la solución en coordenadas prolatas esferoidales  $\sigma, \tau$ :

$$\rho = l\sqrt{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)} \quad (3.26)$$

$$z = l\sqrt{\sigma\tau} \quad (3.27)$$

(siendo  $l$  es una unidad de longitud), la solución se puede expresar de la siguiente forma:

$$\psi = \sum_l \alpha_l Q_l(\sigma) P_l(\tau) \quad (3.28)$$

En el caso de  $l = 0$ , se tiene

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \right) \quad (3.29)$$

o equivalentemente

$$\xi = \sigma \quad (3.30)$$

Esta solución corresponde, de hecho, al espaciotiempo de Schwarzschild. Para visualizarlo mejor vamos a observar la forma de la componente de la métrica  $g_{\phi\phi} = f^{-1}\rho^2$ . Primero, tenemos que

$$\mathfrak{E} = \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1} \quad (3.31)$$

es puramente real por lo que  $\varphi = 0$  y además

$$f = \mathfrak{E} \quad (3.32)$$

Luego, recordando que

$$\rho^2 = l^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) \quad (3.33)$$

Entonces:

$$g_{\phi\phi} = f^{-1}\rho^2 = \frac{\sigma + 1}{\sigma - 1} l^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2) = l^2(\sigma^2 + 1)(1 - \tau^2) \quad (3.34)$$

Sabiendo que, en coordenadas esféricas tenemos

$$g_{\phi\phi} = r^2 \sin^2 \phi \quad (3.35)$$

y que el potencial depende únicamente de  $\sigma$ , podemos asociar esta a la coordenada radial por unidad de masa:  $\sigma = r/m - 1$ , mientras que  $\tau$  se puede asociar a la coordenada angular:  $\tau = \cos \phi$ . Teniendo  $f$ , las funciones  $\omega$  y  $\gamma$  se pueden determinar a partir de simples integraciones (la ecuación de movimiento para  $\gamma$  se puede encontrar por ejemplo en [17]), obteniendo finalmente la métrica de Schwarzschild. Luego, es posible probar que la ecuación diferencial (3.25) es simétrica ante el intercambio  $x \leftrightarrow y$ , por lo que  $\xi = y$  corresponde, nuevamente, a la solución de Schwarzschild (aunque esta vez  $y$  está asociada a la coordenada

radial mientras que  $x$  está asociada a la angular). Al ser la ecuación lineal, la suma de soluciones sigue siendo solución, por ejemplo:

$$\xi = \cos \lambda x + i \sin \lambda y \quad (3.36)$$

Esto no corresponde a un espacio con simetría esférica pues el potencial depende de ambas variables (y por lo tanto depende tanto de  $r$  como de  $\theta$ ). Resulta que esta solución es el espaciotiempo de Kerr, como puede comprobarse identificando  $\tan \lambda = a$ ,  $\sec \lambda = m$  y midiendo la distancia en unidades de  $(m^2 - a^2)^{1/2}$ , en ese caso tenemos

$$r = x(m^2 - a^2)^{1/2} + m, \quad \cos \theta = y \quad (3.37)$$

y la métrica:

$$ds^2 = \left[ (r^2 + a^2 \cos^2 \theta) \left( d\theta^2 + \frac{dr^2}{r^2 + a^2 - 2mr} \right) \right] + \left[ (r^2 + a^2) \sin^2 \theta d\phi^2 - dt^2 + \frac{2mr}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} (dt + a \sin^2 \theta d\phi)^2 \right] \quad (3.38)$$

Cabe destacar que la métrica de Kerr es tan solo una de las soluciones de (3.25), ecuación que corresponde a espacios estacionarios, axisimétricos y cuyas fuentes de campo gravitatorio giran en torno al eje de simetría. Mientras que en simetría esférica tenemos el teorema de Birkoff que nos asegura que la única solución en el vacío es la de Schwarzschild, en simetría axial tenemos el teorema de Robinson, el cual asegura la unicidad de Kerr en el vacío bajo las siguientes hipótesis: El espacio es estacionario y axisimétrico, asintóticamente plano, posee un horizonte de eventos y es no singular fuera del mismo.

### 3.1.2 Reducción por simetría en variables de Ashtekar

Queremos ahora describir un espacio estacionario y axisimétrico en términos de las variables de Ashtekar. Recordemos que en la teoría clásica foliamos el espacio en superficies tridimensionales y definimos una coordenada  $t$  tal que cada una de estas superficies corresponde a un valor de  $t$  constante. Si el espacio tiene un vector de Killing  $T$  (asintóticamente) tipo tiempo, vamos a elegir  $t$  tal que  $T = \partial_t$ , por lo que las variables canónicas son independientes de esta coordenada (esto impone además una relación entre la conexión y la tríada a través de la curvatura extrínseca, ver por ejemplo (3.185)). Luego, para imponer la simetría axial, al igual que en la subsección anterior, vamos a elegir una coordenada  $\phi$  tal que  $K = \lambda \partial_\phi$  (con  $\lambda$  constante), en ese caso tenemos:

$$\mathcal{L}_{\lambda \partial_\phi} A_a^i = 0 \quad (3.39)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda \partial_\phi} E_i^a = 0 \quad (3.40)$$

En nuestro sistema de coordenadas adaptadas estas condiciones toman una forma muy simple:

$$\mathcal{L}_{\partial_\phi} A_a^i = \lambda A_{a,\phi}^i = 0 \quad (3.41)$$

$$\mathcal{L}_{\lambda \partial_\phi} E_i^a = (\lambda E_i^a)_{,\phi} = \lambda E_{i,\phi}^a = 0 \quad (3.42)$$

O sea, la reducción por simetría bajo el vector  $\lambda\partial_\phi$  nos dice simplemente que las componentes de la tríada y de la conexión no dependen de la coordenada  $\phi$ . Esta fue la reducción utilizada en [44] para estudiar la cuantización de espaciotiempos axisimétricos y estacionarios en términos de variables de Ashtekar.

Hay una forma alternativa, menos restrictiva [16] de imponer la simetría axial. Recordar que por definición un vector  $K$  es de Killing si se cumple

$$\mathcal{L}_K g_{ab} = 0 \quad (3.43)$$

Expresando a la métrica en términos de la tríada:

$$\mathcal{L}_K \delta_{ij} E_a^i E_b^j = \delta_{ij} (\mathcal{L}_K E_a^i) E_b^j + \delta_{ij} E_a^i (\mathcal{L}_K E_b^j) \quad (3.44)$$

La condición  $\mathcal{L}_K E_i^a = 0$  nos asegura la invariancia deseada. Sin embargo, al usar variables de Ashtekar, podemos realizar una transformación de gauge en las variables canónicas sin afectar a la métrica (ni a ninguna otra cantidad invariante de gauge en general). Podemos permitirle entonces a  $\mathcal{L}_K E_a^i$  ser proporcional a una transformación de gauge de parámetro  $\vec{\lambda}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K \delta_{ij} E_a^i E_b^j &= \delta_{ij} (\mathcal{L}_K E_a^i) E_b^j + \delta_{ij} E_a^i (\mathcal{L}_K E_b^j) \\ &= \delta_{ij} \varepsilon^{ikl} \lambda^k E_a^l E_b^j + \delta_{ij} E_a^i \varepsilon^{jkl} \lambda^k E_b^l \\ &= \varepsilon^{ijk} \lambda^j E_a^k E_b^i + \varepsilon^{ijk} \lambda^j E_a^i E_b^k \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.45)$$

Vamos a imponer entonces, de acuerdo a lo sugerido en [16], que las derivadas de Lie a lo largo del vector de Killing de la conexión y de la tríada sean proporcionales a una transformación de gauge constante. El vector de Killing tiene la forma  $K = \lambda^i \partial_i$ , con  $\lambda^i = \delta_3^i \lambda$ , por lo que las ecuaciones (3.39) y (3.40) se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K A_a^i &= - \underbrace{\lambda_{,a}^i}_0 + \varepsilon_{ijk} \lambda^j A_a^k \\ &\rightarrow A_{\phi}^i \underbrace{\lambda_{,a}}_0 + \lambda A_{a,\phi}^i = \varepsilon_{i3k} \lambda A_a^k \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K E_i^a &= \varepsilon_{ijk} \lambda^j E_k^a \\ &\rightarrow \underbrace{(\lambda E_i^a)_{,\phi}}_{\lambda E_{i,\phi}^a} - E_i^b \underbrace{\delta_\phi^a}_{0} \lambda_{,b} = \varepsilon_{i3k} \lambda E_k^a \end{aligned} \quad (3.47)$$

Dado que  $\lambda$  es constante, ambas ecuaciones toman la misma forma:

$$\begin{aligned} A_{a,\phi}^i &= \varepsilon_{i3k} A_a^k & E_{i,\phi}^a &= \varepsilon_{i3k} E_k^a \\ \rightarrow A_{a,\phi}^1 &= -A_a^2 & \rightarrow E_{1,\phi}^a &= -E_2^a \\ A_{a,\phi}^2 &= A_a^1 & E_{2,\phi}^a &= E_1^a \\ A_{a,\phi}^3 &= 0 & E_{3,\phi}^a &= 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Estas ecuaciones tienen por solución:

$$A_a^1 = \cos \phi \mathbf{a}_a^1 - \sin \phi \mathbf{a}_a^2, \quad E_1^a = \cos \phi \mathbf{e}_1^a - \sin \phi \mathbf{e}_2^a \quad (3.49)$$

$$A_a^2 = \sin \phi \mathbf{a}_a^1 + \cos \phi \mathbf{a}_a^2, \quad E_2^a = \sin \phi \mathbf{e}_1^a + \cos \phi \mathbf{e}_2^a \quad (3.50)$$

$$A_a^3 = \mathbf{a}_a^3, \quad E_3^a = \mathbf{e}_3^a \quad (3.51)$$

Donde las variables  $\mathbf{a}_a^i, \mathbf{e}_i^a$  dependen únicamente de las coordenadas  $(x, y)$ . Estas variables son canónicamente conjugadas, como puede verificarse fácilmente escribiendo la forma simpléctica en términos de las mismas. Primero, vamos a calcular  $A_a^i E_i^b$  en términos de  $\mathbf{a}_a^i$  y  $\mathbf{e}_i^a$ :

$$\begin{aligned} A_a^i E_i^b &= A_a^1 E_1^b + A_a^2 E_2^b + A_a^3 E_3^b \\ &= (\cos^2 \phi \mathbf{a}_a^1 \mathbf{e}_1^b + \sin^2 \phi \mathbf{a}_a^2 \mathbf{e}_2^b - \sin \phi \cos \phi (\mathbf{a}_a^2 \mathbf{e}_1^b + \mathbf{a}_a^1 \mathbf{e}_2^b)) \\ &\quad + (\sin^2 \phi \mathbf{a}_a^1 \mathbf{e}_1^b + \cos^2 \phi \mathbf{a}_a^2 \mathbf{e}_2^b + \sin \phi \cos \phi (\mathbf{a}_a^2 \mathbf{e}_1^b + \mathbf{a}_a^1 \mathbf{e}_2^b)) \\ &\quad + \mathbf{a}_a^3 \mathbf{e}_3^b \\ &= \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \end{aligned} \quad (3.52)$$

La forma simpléctica reescrita en términos de estas nuevas variables toma la siguiente forma:

$$\Omega = \frac{1}{8\pi G\beta} \int dx dy d\phi \delta E_i^a \wedge \delta A_a^i = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \delta \mathbf{e}_i^a \wedge \delta \mathbf{a}_a^i \quad (3.53)$$

Entonces, tenemos que

$$\{\mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \mathbf{e}_j^b(\vec{x}')\} = 4G\beta \delta_j^i \delta_a^b \delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.54)$$

Donde se usó la notación  $\vec{x} = (x, y)$ .

Antes de continuar, vamos a comparar de forma cualitativa las dos formas de imponer la simetría axial, centrando nuestra atención en la conexión (para la tríada la discusión es exactamente igual). La primer forma, denominada simetría manifiesta, se basa en exigir que la derivada de Lie de las variables canónicas a lo largo de la dirección de Killing sea cero:

$$\mathcal{L}_{\lambda \partial_\phi} A_a^i = 0 \quad \rightarrow \quad A_{a,\phi}^i = 0 \quad (3.55)$$

Esta condición implica simplemente que las variables canónicas no dependen de la variable  $\phi$ . La segunda forma se basa en explotar la nueva simetría que tenemos en Relatividad General al usar variables de Ashtekar: La invariancia de gauge. Si la derivada de Lie de las variables canónicas en la dirección del vector de Killing es proporcional a una transformación de gauge constante, entonces todas las cantidades físicas (que son invariantes de gauge) permanecerán también invariantes. Esta forma menos restrictiva de imponer la simetría:

$$\mathcal{L}_{\lambda \partial_\phi} A_a^i = \varepsilon_{i3k} \lambda A_a^k \quad (3.56)$$

Nos da como resultado una teoría en la cual las variables canónicas sí dependen de la coordenada  $\phi$ , pero lo hacen de una forma muy sencilla:

$$\begin{aligned} A_a^1(x, y, \phi) &= \cos \phi \mathbf{a}_a^1(x, y) - \sin \phi \mathbf{a}_a^2(x, y) \\ A_a^2(x, y, \phi) &= \sin \phi \mathbf{a}_a^1(x, y) + \cos \phi \mathbf{a}_a^2(x, y) \\ A_a^3(x, y, \phi) &= \mathbf{a}_a^3(x, y) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Para poder interpretar mejor esto, vamos a representar gráficamente la dependencia de las variables  $A_a^i$  (para un  $\phi$  arbitrario pero fijo) con respecto a las nuevas variables  $\mathbf{a}_a^i$ , representando el espacio interno como un espacio vectorial tridimensional:

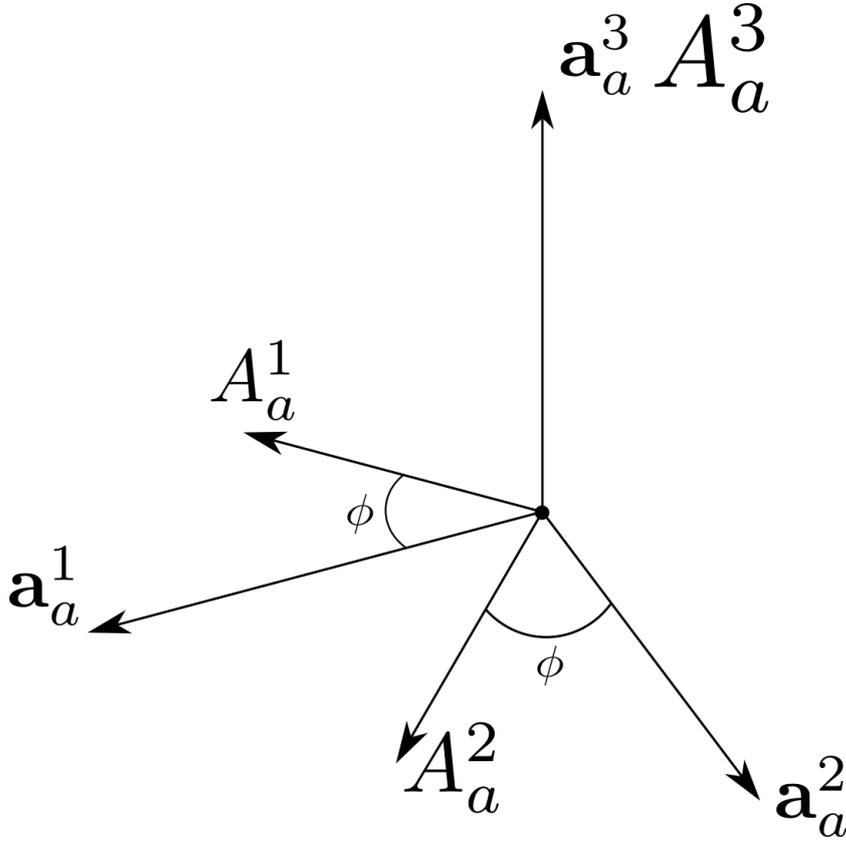


Figura 3.1: Variables canónicas originales representadas gráficamente en términos de las nuevas variables reducidas. En la figura se puede ver que el ángulo  $\phi$  es puro gauge.

Vemos entonces que para las variables canónicas que satisfacen la simetría impuesta, un difeomorfismo (finito) en la dirección de  $\phi$  no es otra cosa que una rotación (también finita) en el espacio interno con respecto a la dirección 3 del mismo; esto último es en realidad arbitrario ya que a la derivada de Lie le podríamos haber exigido que sea proporcional a una transformación de gauge infinitesimal con un parámetro  $\vec{\lambda}$  constante en cualquier dirección, sin embargo, por simplicidad y sin pérdida de generalidad, es mejor redefinir las direcciones internas de forma tal que el parámetro de la transformación de gauge tiene una única componente no nula. En resumen: Al tener una invariancia adicional usando variables de Ashtekar, podemos imponer una reducción por simetría menos restrictiva a las variables canónicas. ¿Qué ventajas tiene esto con respecto a la reducción por simetría manifiesta, usada por ejemplo en [44]?, la respuesta es simple: Ninguna. Toda la teoría se puede reescribir de manera tal que tome una forma completamente análoga al caso de simetría manifiesta por lo que estas reducciones son equivalentes y nos permiten recuperar todas las soluciones estacionarias y axisimétricas. Observando la figura 3.1, podemos ver que en la reducción a menos de una transformación de gauge, el ángulo  $\phi$  es puro gauge, mientras que si exigimos invariancia manifiesta, esto equivale a fijar ese gauge

en  $\phi = 0$ . Si bien la elección  $\phi = 0$  da como resultado una teoría más sencilla con vínculos más simples y completamente análogos a los de la teoría completa, durante el resto de este trabajo dejaremos el ángulo  $\phi$  libre, obteniendo términos extra en los vínculos que reflejan esta libertad de gauge. Esto será visto en más detalle más adelante en este capítulo, donde se estudiará el significado de estos términos extra y la relación entre los vínculos de difeomorfismos en la dirección  $\phi$  y de gauss en la dirección 3.

Cerramos esta subsección con un comentario sobre por qué el parámetro  $\lambda$  del vector de Killing espacial  $K = \lambda \partial_\phi$  debe ser constante. Uno podría suponer en principio que permitir a  $\lambda$  ser una función arbitraria  $\lambda(x, y)$  es menos restrictivo y más general, esta suposición sin embargo es incorrecta. En ese caso tendríamos:

$$\mathcal{L}_{\lambda(x,y)\partial_\phi} g_{ab} = 0 \quad (3.58)$$

para todo  $\lambda(x, y)$ . Desarrollando la derivada de Lie:

$$\lambda g_{ab,\phi} + \lambda_{,a} g_{\phi b} + \lambda_{,b} g_{a\phi} = 0 \quad \forall \lambda(x, y) \quad (3.59)$$

Esta última condición es, de hecho, demasiado restrictiva. Si (3.59) vale para todo  $\lambda(x, y)$ , entonces en particular vale para  $\lambda$  constante, por lo que primero obtenemos que las componentes de la métrica son independientes de  $\phi$ :  $g_{ab,\phi} = 0$ , entonces

$$\lambda_{,a} g_{\phi b} + \lambda_{,b} g_{a\phi} = 0 \quad \forall \lambda(x, y) \quad (3.60)$$

Tomando  $a = t, b \neq t$  obtenemos  $g_{\phi t} = 0$ , pues  $\lambda_{,t} = 0$ ; de hecho, podemos si ni siquiera suponer que  $\lambda = \lambda(x, y)$  y permitirle ser completamente arbitrario, la condición (3.59) debe ser cierta en particular para  $\lambda$  tal que  $\lambda_{,t} = 0$ , vamos entonces a restringirnos entonces sin pérdida de generalidad al caso  $\lambda = \lambda(x, y)$ . Luego, si  $a = \alpha$  y  $b = t, \phi$ , como  $\lambda_{,t} = \lambda_{,\phi} = 0$ , tenemos  $g_{\alpha\phi} = 0$ . Finalmente, si  $a = \alpha$  y  $b = \phi$ , (3.59) nos dice que  $g_{\phi\phi} = 0$ . Teniendo en cuenta estas condiciones, la métrica toma la siguiente forma:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & 0 \\ g_{xt} & g_{xx} & g_{xy} & 0 \\ g_{yt} & g_{yx} & g_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Entonces, en vez de exigir simetría en la dirección  $\phi$ , exigimos algo más fuerte: Esta dirección ni siquiera existe. Se puede llegar a la misma conclusión para la parte espacial de la métrica y la conexión trabajando en variables de Ashtekar:

$$A_\phi^i \lambda_{,a} + \lambda A_{a,\phi}^i = 0 \quad \forall \lambda(x, y) \quad (3.62)$$

Nuevamente, si esto vale para todo  $\lambda(x, y)$ , vale en particular para  $\lambda$  constante, entonces:  $A_{a,\phi}^i = 0$  por lo que la ecuación (3.62) implica  $A_\phi^i = 0$ . De manera análoga, si llamamos  $\tilde{e}_a^i$  a la tríada inversa no densitizada, la condición  $\mathcal{L}_K \tilde{e}_a^i = 0$  toma la misma forma que (3.62):

$$\tilde{e}_\phi^i \lambda_{,a} + \lambda \tilde{e}_{a,\phi}^i = 0 \quad \forall \lambda(x, y) \quad (3.63)$$

### 3.2. REDUCCIÓN POR SIMETRÍA DE OTRAS CANTIDADES BÁSICAS 49

Utilizando el mismo argumento se llega a  $\tilde{e}_{a,\phi}^i = 0$ ,  $\tilde{e}_\phi^i = 0$  de donde se deduce fácilmente que  $\mathbf{e}_{a,\phi}^i = 0$ ,  $\rightarrow \mathbf{e}_{i,\phi}^a = 0$  y  $\mathbf{e}_\phi^i = 0$  (lo cual además implica  $\mathbf{e}_i^a = 0$ ). Esta última condición implica  $g_{\phi a} = 0$ ,  $a = x, y, \phi$ . Este resultado no cambia incluso si permitimos que la derivada de Lie sea proporcional a una transformación de gauge de parámetro  $\lambda(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_K \tilde{e}_a^i &= \varepsilon_{i3k} \lambda \tilde{e}_a^k \\ \rightarrow \tilde{e}_\phi^i \lambda_{,a} + \lambda \tilde{e}_{a,\phi}^i &= \varepsilon_{i3k} \lambda \tilde{e}_a^k \quad \forall \lambda(x, y) \end{aligned} \quad (3.64)$$

Repetiendo el mismo argumento, si vale para todo  $\lambda$ , entonces vale en particular para  $\lambda$  constante, entonces tenemos:

$$\tilde{e}_{a,\phi}^i = \varepsilon_{i3k} \tilde{e}_a^k \quad (3.65)$$

por lo que

$$\tilde{e}_\phi^i = 0 \quad (3.66)$$

El caso de  $\mathbf{a}_a^i$  es diferente, pues al transformar como una conexión, hay un término extra en la transformación de gauge debido que ahora  $\lambda$  es arbitrario:

$$A_\phi^i \lambda_{,a} + \lambda A_{a,\phi}^i = -\delta_3^i \lambda_{,a} + \varepsilon_{i3k} \lambda A_a^k \quad \forall \lambda(x, y) \quad (3.67)$$

si consideramos un  $\lambda$  constante tenemos  $A_{a,\phi}^i = \varepsilon_{i3k} A_a^k$ , entonces:

$$A_\phi^i = -\delta_3^i \quad (3.68)$$

Más adelante veremos que al redefinir un multiplicador del vínculo de Gauss en función del shift en la dirección de  $\phi$  y al expresar los vínculos en función de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i := \mathbf{a}_a^i + \delta_a^\phi \delta_3^i$  (siendo  $\mathbf{a}_a^i$  la conexión reducida introducida anteriormente) los vínculos toman exactamente la misma forma que en la teoría completa, reemplazando  $A_a^i \rightarrow \tilde{\mathbf{a}}_a^i$ , entonces, si  $A_\phi^3 = \mathbf{a}_\phi^3 = -1$ , esto significa que  $\tilde{\mathbf{a}}_\phi^3 = 0$ , por lo que la restricción sobre la conexión:  $\tilde{\mathbf{a}}_\phi^i = 0$  es completamente análoga a  $A_\phi^i = 0$ .

## 3.2 Reducción por simetría de otras cantidades básicas

En esta sección vamos a expresar algunas cantidades básicas en términos de las nuevas variables adaptadas a la simetría. La primera de ellas es el determinante de la tríada densitizada:

$$E := \det E = \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c \quad (3.69)$$

Es fácil verificar que es igual al determinante de la tríada  $\mathbf{e}_i^a$ , para esto simplemente hay que notar que

$$\begin{aligned} E_1^a E_2^b - E_2^a E_1^b &= (\cos \phi \mathbf{e}_1^a - \sin \phi \mathbf{e}_2^a)(\sin \phi \mathbf{e}_1^b + \cos \phi \mathbf{e}_2^b) \\ &\quad - (\sin \phi \mathbf{e}_1^a + \cos \phi \mathbf{e}_2^a)(\cos \phi \mathbf{e}_1^b - \sin \phi \mathbf{e}_2^b) \\ &= \mathbf{e}_1^a \mathbf{e}_2^b - \mathbf{e}_2^a \mathbf{e}_1^b \end{aligned} \quad (3.70)$$

Entonces:

$$E = \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c = \frac{1}{3!} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c = \det \mathbf{e} =: \mathbf{e} \quad (3.71)$$

Luego, las componentes de la tríada inversa están dadas por  $E_a^i = \frac{1}{2E} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} E_j^b E_k^c$ . Usando (3.70), tenemos:

$$E_a^3 = \frac{1}{2E} \varepsilon_{abc} (E_1^b E_2^c - E_2^b E_1^c) = \frac{1}{2E} \varepsilon_{abc} (\mathbf{e}_1^b \mathbf{e}_2^c - \mathbf{e}_2^b \mathbf{e}_1^c) = \frac{1}{2E} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{3jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \quad (3.72)$$

Luego,

$$\begin{aligned} E_a^1 &= \frac{1}{2E} \varepsilon_{abc} (E_2^b E_3^c - E_3^b E_2^c) \\ &= \frac{1}{2\mathbf{e}} \varepsilon_{abc} ((\sin \phi \mathbf{e}_1^b + \cos \phi \mathbf{e}_2^b) \mathbf{e}_3^c - \mathbf{e}_3^b (\sin \phi \mathbf{e}_1^c + \cos \phi \mathbf{e}_2^c)) \\ &= \frac{1}{2\mathbf{e}} \varepsilon_{abc} (\cos \phi (\mathbf{e}_2^b \mathbf{e}_3^c - \mathbf{e}_3^b \mathbf{e}_2^c) - \sin \phi (\mathbf{e}_3^b \mathbf{e}_1^c - \mathbf{e}_1^b \mathbf{e}_3^c)) \\ &= \cos \phi \left( \frac{1}{2\mathbf{e}} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{1jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \right) - \sin \phi \left( \frac{1}{2\mathbf{e}} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{2jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

Análogamente,

$$E_a^2 = \sin \phi \left( \frac{1}{2\mathbf{e}} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{1jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \right) + \cos \phi \left( \frac{1}{2\mathbf{e}} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{2jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \right) \quad (3.74)$$

Entonces, si definimos

$$\mathbf{e}_a^i := \frac{1}{2\mathbf{e}} \varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \quad (3.75)$$

Podemos escribir a  $E_a^i$  de una forma análoga a (3.49), (3.50) y (3.51):

$$E_a^1 = \cos \phi \mathbf{e}_a^1 - \sin \phi \mathbf{e}_a^2 \quad (3.76)$$

$$E_a^2 = \sin \phi \mathbf{e}_a^1 + \cos \phi \mathbf{e}_a^2 \quad (3.77)$$

$$E_a^3 = \mathbf{e}_a^3 \quad (3.78)$$

Dado que  $\mathbf{e}_a^i$  tiene una forma completamente análoga a la tríada inversa, es fácil verificar que cumple  $\mathbf{e}_a^i \mathbf{e}_i^b = \delta_a^b$ ,  $\mathbf{e}_a^i \mathbf{e}_j^a = \delta_j^i$ , o sea, es la inversa de la tríada  $\mathbf{e}_i^a$  adaptada a la simetría. También es sencillo verificar que la métrica se puede escribir de la siguiente manera:

$$q_{ab} = E E_a^i E_b^i = \mathbf{e} \mathbf{e}_a^i \mathbf{e}_b^i \quad (3.79)$$

La segunda igualdad se puede obtener notando que en (3.52) podemos sustituir  $\mathbf{a}_a^i$  y  $\mathbf{e}_i^a$  por cualquier vector  $X_i^a$  o 1-forma  $Y_a^i$  valuada en  $\mathfrak{su}(2)$  que tenga la forma (3.49), (3.50), (3.51), es decir, dados  $X_i^a$  y  $Y_a^i$  tales que

$$\begin{aligned} X_1^a &= \cos \phi \mathbf{x}_a^1 - \sin \phi \mathbf{x}_a^2 & Y_a^1 &= \cos \phi \mathbf{y}_a^1 - \sin \phi \mathbf{y}_a^2 \\ X_2^a &= \sin \phi \mathbf{x}_a^1 + \cos \phi \mathbf{x}_a^2 & Y_a^2 &= \sin \phi \mathbf{y}_a^1 + \cos \phi \mathbf{y}_a^2 \\ X_3^a &= \mathbf{x}_a^3 & Y_3^a &= \mathbf{y}_a^3 \end{aligned} \quad (3.80)$$

### 3.2. REDUCCIÓN POR SIMETRÍA DE OTRAS CANTIDADES BÁSICAS 51

Donde las variables  $\mathbf{x}_i^a, \mathbf{y}_a^i$  no dependen de  $\phi$ , se cumple que

$$\begin{aligned} X_1^a Y_b^1 + X_2^a Y_b^2 &= \mathbf{x}_1^a \mathbf{y}_b^1 + \mathbf{x}_2^a \mathbf{y}_b^2 \\ X_1^a Y_1^b + X_2^a Y_2^b &= \mathbf{x}_1^a \mathbf{y}_1^b + \mathbf{x}_2^a \mathbf{y}_2^b \\ X_a^1 Y_b^1 + X_a^2 Y_b^2 &= \mathbf{x}_a^1 \mathbf{y}_b^1 + \mathbf{x}_a^2 \mathbf{y}_b^2 \end{aligned} \quad (3.81)$$

Además, observando (3.70), (3.73) y (3.74) se puede verificar fácilmente que se cumple la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1jk} X_j^a Y_b^k &= \cos \phi \varepsilon_{1jk} \mathbf{x}_j^a \mathbf{y}_b^k - \sin \phi \varepsilon_{2jk} \mathbf{x}_j^a \mathbf{y}_b^k \\ \varepsilon_{2jk} X_j^a Y_b^k &= \sin \phi \varepsilon_{1jk} \mathbf{x}_j^a \mathbf{y}_b^k + \cos \phi \varepsilon_{2jk} \mathbf{x}_j^a \mathbf{y}_b^k \\ \varepsilon_{3jk} X_j^a Y_b^k &= \varepsilon_{3jk} \mathbf{x}_j^a \mathbf{y}_b^k \end{aligned} \quad (3.82)$$

Estas últimas igualdades son útiles para reescribir las componentes de la conexión de spin en términos de  $\mathbf{e}_j^a$ :

$$\Gamma_a^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} E_j^b (E_{a,b}^k - E_{b,a}^k + E_k^c E_a^l E_{c,b}^l + E_a^k E_c^l E_{l,b}^c) \quad (3.83)$$

El primer sumando:

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} E_j^b E_{a,b}^k \quad (3.84)$$

Se puede separar en  $b = x, y$  y  $b = \phi$ . Cuando  $b = x, y$ ,  $E_{a,\beta}^i$  sigue teniendo la forma (3.80) pues la derivada no afecta la dependencia en  $\phi$ . Entonces, si definimos  $\beta := x, y$ , podemos usar (3.82) para  $X_i^a = E_i^a$  y  $Y_a^i = E_{a,\beta}^i$ ;

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} E_j^\beta E_{a,\beta}^k = \cos \phi \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} \mathbf{e}_j^\beta \mathbf{e}_{a,\beta}^k \right) - \sin \phi \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{2jk} \mathbf{e}_j^\beta \mathbf{e}_{a,\beta}^k \right) \quad (3.85)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{2jk} E_j^\beta E_{a,\beta}^k = \sin \phi \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} \mathbf{e}_j^\beta \mathbf{e}_{a,\beta}^k \right) + \cos \phi \left( \frac{1}{2} \varepsilon_{2jk} \mathbf{e}_j^\beta \mathbf{e}_{a,\beta}^k \right) \quad (3.86)$$

$$\frac{1}{2} \varepsilon_{3jk} E_j^\beta E_{a,\beta}^k = \frac{1}{2} \varepsilon_{3jk} \mathbf{e}_j^\beta \mathbf{e}_{a,\beta}^k \quad (3.87)$$

Al caso  $b = \phi$  lo dejamos para más adelante. El segundo sumando:

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} E_j^b E_{b,a}^k \quad (3.88)$$

Cuando  $a = \alpha$  (siendo  $\alpha := x, y$ ) esto es simplemente

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} E_j^b E_{b,\alpha}^k = \cos \phi \left( -\frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_{b,\alpha}^k \right) - \sin \phi \left( -\frac{1}{2} \varepsilon_{2jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_{b,\alpha}^k \right) \quad (3.89)$$

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{2jk} E_j^b E_{b,\alpha}^k = \sin \phi \left( -\frac{1}{2} \varepsilon_{1jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_{b,\alpha}^k \right) + \cos \phi \left( -\frac{1}{2} \varepsilon_{2jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_{b,\alpha}^k \right) \quad (3.90)$$

$$-\frac{1}{2} \varepsilon_{3jk} E_j^b E_{b,\alpha}^k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{3jk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_{b,\alpha}^k \quad (3.91)$$

Luego, cuando  $a = \phi$ :

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}E_j^bE_k^k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{132}E_3^bE_{b,\phi}^2 = \frac{1}{2}E_3^bE_b^1 = 0 \quad (3.92)$$

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}E_j^bE_k^k = -\frac{1}{2}\varepsilon_{231}E_3^bE_{b,\phi}^1 = -\frac{1}{2}E_3^b(-E_b^2) = 0 \quad (3.93)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}E_j^bE_k^k &= -\frac{1}{2}\varepsilon_{312}E_1^bE_{b,\phi}^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_{321}E_2^bE_{b,\phi}^1 \\ &= -\frac{1}{2}E_1^bE_b^1 - \frac{1}{2}E_2^bE_b^2 = -1 \end{aligned} \quad (3.94)$$

El tercer sumando también se puede separar en los casos  $b = \beta$ ,  $b = \phi$ . Cuando  $b = \beta$ :

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}E_j^\beta E_k^c E_a^l E_{c,\beta}^l = \cos \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{c,\beta}^l \right) - \sin \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{c,\beta}^l \right) \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}E_j^\beta E_k^c E_a^l E_{c,\beta}^l = \sin \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{c,\beta}^l \right) + \cos \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{c,\beta}^l \right) \quad (3.96)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}E_j^\beta E_k^c E_a^l E_{c,\beta}^l = \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{c,\beta}^l \quad (3.97)$$

Vamos a dejar el caso  $b = \phi$  para el final al igual que con el término correspondiente a  $b = \phi$  en el primer sumando. El cuarto sumando:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}E_j^b E_k^c E_a^l E_{l,b}^c \quad (3.98)$$

para  $b = \beta$  toma la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}E_j^b E_k^c E_a^l E_{l,b}^c = \cos \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{l,\beta}^c \right) - \sin \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{l,\beta}^c \right) \quad (3.99)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}E_j^b E_k^c E_a^l E_{l,b}^c = \sin \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{l,\beta}^c \right) + \cos \phi \left( \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{l,\beta}^c \right) \quad (3.100)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}E_j^b E_k^c E_a^l E_{l,b}^c = \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}e_j^\beta e_k^c e_a^l e_{l,\beta}^c \quad (3.101)$$

Mientras que para  $b = \phi$  se anula, pues

$$E_c^l E_{l,\phi}^c = E_c^1 (E_{1,\phi}^c) + E_c^2 (E_{2,\phi}^c) = E_c^1 (-E_2^c) + E_c^2 (E_1^c) = 0 \quad (3.102)$$

Finalmente, los términos correspondientes a  $b = \phi$  en el primer y tercer sumando se anulan entre sí. Por un lado, el primer sumando:

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}E_j^\phi E_a^k = \frac{1}{2}\varepsilon_{132}E_3^\phi E_{a,\phi}^2 = -\frac{1}{2}E_3^\phi E_a^1 \quad (3.103)$$

$$\frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}E_j^\phi E_a^k = \frac{1}{2}\varepsilon_{231}E_3^\phi E_{a,\phi}^1 = -\frac{1}{2}E_3^\phi E_a^2 \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}E_j^\phi E_a^k &= \frac{1}{2}\varepsilon_{312}E_1^\phi E_{a,\phi}^2 + \frac{1}{2}\varepsilon_{321}E_2^\phi E_{a,\phi}^1 \\ &= \frac{1}{2} \left( E_1^\phi E_a^1 + E_2^\phi E_a^2 \right) \end{aligned} \quad (3.105)$$

### 3.2. REDUCCIÓN POR SIMETRÍA DE OTRAS CANTIDADES BÁSICAS 53

Por otro lado, el tercer sumando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}E_j^\phi E_k^c E_a^l E_{c,\phi}^l &= \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}E_j^\phi E_k^c (E_a^1(-E_c^2) + E_a^2 E_c^1) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{1jk}E_j^\phi (E_a^1(-\delta_k^2) + E_a^2 \delta_k^1) \\ &= \frac{1}{2}E_3^\phi E_a^1 \end{aligned} \quad (3.106)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}E_j^\phi E_k^c E_a^l E_{c,\phi}^l &= \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}E_j^\phi E_k^c (E_a^1(-E_c^2) + E_a^2 E_c^1) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{2jk}E_j^\phi (E_a^1(-\delta_k^2) + E_a^2 \delta_k^1) \\ &= \frac{1}{2}E_3^\phi E_a^2 \end{aligned} \quad (3.107)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}E_j^\phi E_k^c E_a^l E_{c,\phi}^l &= \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}E_j^\phi E_k^c (E_a^1(-E_c^2) + E_a^2 E_c^1) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{3jk}E_j^\phi (E_a^1(-\delta_k^2) + E_a^2 \delta_k^1) \\ &= \frac{1}{2}(-E_1^\phi E_a^1 - E_2^\phi E_a^2) \end{aligned} \quad (3.108)$$

Entonces, juntando todos estos resultados, podemos escribir:

$$\Gamma_a^1 = \cos \phi \gamma_a^1 - \sin \phi \gamma_a^2 \quad (3.109)$$

$$\Gamma_a^2 = \cos \phi \gamma_a^1 + \sin \phi \gamma_a^2 \quad (3.110)$$

$$\Gamma_a^3 = \gamma_a^3 \quad (3.111)$$

donde se definió

$$\gamma_a^i := \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\mathbf{e}_j^b (\mathbf{e}_{a,b}^k - \mathbf{e}_{b,a}^k + \mathbf{e}_k^c \mathbf{e}_a^l \mathbf{e}_{c,b}^l + \mathbf{e}_a^k \mathbf{e}_c^l \mathbf{e}_{l,b}^c) - \delta_3^i \delta_a^\phi \quad (3.112)$$

Con estas definiciones, podemos reescribir a la curvatura extrínseca  $K_a^i$  de la siguiente manera:

$$K_a^1 = \cos \phi \mathbf{k}_a^1 - \sin \phi \mathbf{k}_a^2 \quad (3.113)$$

$$K_a^2 = \cos \phi \mathbf{k}_a^1 + \sin \phi \mathbf{k}_a^2 \quad (3.114)$$

$$K_a^3 = \mathbf{k}_a^3 \quad (3.115)$$

Donde  $\beta \mathbf{k}_a^i := \mathbf{a}_a^i - \gamma_a^i$ , siendo  $\beta$  el parámetro de Immirzi.

Otra identidad que será útil más adelante es el corchete de la conexión con el determinante de la tríada:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \mathbf{e}(\vec{x}')\} &= \left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \frac{1}{3!}\varepsilon_{bcd}\varepsilon^{ijkl}\mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \mathbf{e}_l^d(\vec{x}') \right\} \\ &= 4G\beta\delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}') \frac{\varepsilon_{bcd}\varepsilon^{ijkl}}{3!} (\delta_a^b \delta_j^i \mathbf{e}_k^c \mathbf{e}_l^d + \mathbf{e}_j^b \delta_a^c \delta_k^i \mathbf{e}_l^d + \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \delta_a^d \delta_l^i) \\ &= 4G\beta\delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}') \frac{\varepsilon_{acd}\varepsilon^{ikl}}{3!} 3 \mathbf{e}_k^c \mathbf{e}_l^d \\ &= 4G\beta\delta^{(2)}(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{e} \mathbf{e}_a^i \end{aligned} \quad (3.116)$$

Luego, el corchete de la conexión con la tríada inversa se puede calcular fácilmente usando

$$\mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_b^k = \delta_j^k \quad (3.117)$$

Primero, tomamos corchete con la conexión en ambos lados, obteniendo:

$$\begin{aligned} -\mathbf{e}_j^b(\vec{x}') \{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \mathbf{e}_b^k(\vec{x}') \} &= \{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \mathbf{e}_j^b(\vec{x}') \} \mathbf{e}_b^k(\vec{x}') \\ \rightarrow -\mathbf{e}_j^b \{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \mathbf{e}_b^k(\vec{x}') \} &= 4G\beta \delta_a^b \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{x}') \mathbf{e}_b^k \end{aligned} \quad (3.118)$$

Contrayendo ambos lados con  $\mathbf{e}_c^j$ :

$$\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \mathbf{e}_c^k(\vec{x}') \} = -4G\beta \mathbf{e}_c^i \mathbf{e}_a^k \delta(\vec{x} - \vec{x}') \quad (3.119)$$

Finalmente, dado un tensor del espacio de fases de la forma  $T_i^a$  de densidad 1, podemos definir la siguiente integral:

$$\gamma(T) := \int dx dy T_i^a \gamma_a^i \quad (3.120)$$

Este tipo de término aparece por ejemplo en la porción Lorentziana del vínculo Hamiltoniano como veremos más adelante. El corchete de  $\gamma(T)$  con la conexión se puede obtener después de un cálculo extenso pero directo:

$$\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \gamma(T) \} = 4G\beta P_{ac}^{ijb} D_b T_j^c |_{\vec{x}} + \int dx' dy' \{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), T_j^b(\vec{x}') \} \gamma_b^j(\vec{x}') \quad (3.121)$$

Siendo

$$P_{ac}^{ijb} = \frac{1}{2} [ \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_c^l (\mathbf{e}_a^l \mathbf{e}_k^b + \mathbf{e}_l^b \mathbf{e}_a^k) + \epsilon_{ljk} \mathbf{e}_k^b (\mathbf{e}_c^i \mathbf{e}_a^l - \mathbf{e}_a^i \mathbf{e}_c^l) ] \quad (3.122)$$

y  ${}^e D_b$  es la derivada covariante compatible con  $\mathbf{e}_i^a$ , es decir,  ${}^e D_b \mathbf{e}_i^a = 0$ .

### 3.3 Vínculos

Vamos ahora a reescribir los vínculos en función de las variables reducidas por simetría.

#### 3.3.1 Vínculo de Gauss

En la teoría completa, el vínculo de Gauss tiene la siguiente forma:

$$G(\vec{\Lambda}) = \frac{1}{8\pi G\beta} \int d^3x \Lambda^i (\partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a) \quad (3.123)$$

Usando (3.81) y (3.82) podemos escribir:

$$\begin{aligned} \Lambda^i (\partial_a E_i^a + \epsilon_{ijk} A_a^j E_k^a) &= \Lambda^1 (\cos \phi (\partial_\alpha \mathbf{e}_1^\alpha + \epsilon_{1jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a) - \sin \phi (\partial_\alpha \mathbf{e}_2^\alpha + \epsilon_{2jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a)) \\ &+ \Lambda^2 (\sin \phi (\partial_\alpha \mathbf{e}_1^\alpha + \epsilon_{1jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a) + \cos \phi (\partial_\alpha \mathbf{e}_2^\alpha + \epsilon_{2jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a)) + \Lambda^3 (\partial_\alpha \mathbf{e}_3^\alpha + \epsilon_{3jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a) \\ \Lambda^1 (-\sin \phi \mathbf{e}_1^\phi - \cos \phi \mathbf{e}_2^\phi) &+ \Lambda^2 (\cos \phi \mathbf{e}_1^\phi - \sin \phi \mathbf{e}_2^\phi) + \Lambda^3 (\partial_\alpha \mathbf{e}_3^\alpha + \epsilon_{3jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a) \\ &= (\Lambda^1 \cos \phi + \Lambda^2 \sin \phi) (\partial_\alpha \mathbf{e}_1^\alpha + \epsilon_{1jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a - \mathbf{e}_2^\phi) \\ &+ (\Lambda^2 \cos \phi - \Lambda^1 \sin \phi) (\partial_\alpha \mathbf{e}_2^\alpha + \epsilon_{2jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a + \mathbf{e}_1^\phi) + \Lambda^3 (\partial_\alpha \mathbf{e}_3^\alpha + \epsilon_{3jk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a) \end{aligned} \quad (3.124)$$

Sabemos que  $\mathbf{a}_a^i$  y  $\mathbf{e}_i^a$  no dependen de  $\phi$  pero no realizamos ninguna suposición sobre los multiplicadores, entonces, podemos definir

$$\lambda^1 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\phi} d\phi (\Lambda^1 \cos \phi + \Lambda^2 \sin \phi) \quad (3.125)$$

$$\lambda^2 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi (\Lambda^2 \cos \phi - \Lambda^1 \sin \phi) \quad (3.126)$$

$$\lambda^3 := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \Lambda^3 \quad (3.127)$$

Con esto, el vínculo de Gauss toma la siguiente forma:

$$g(\vec{\lambda}) = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \lambda^i \left( \partial_a \mathbf{e}_i^a + \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a + \varepsilon_{ijk} \delta_3^j \delta_a^\phi \mathbf{e}_k^a \right) \quad (3.128)$$

Donde se usó que  $\partial_\alpha \mathbf{e}_i^\alpha = \partial_a \mathbf{e}_i^a$ .

### 3.3.2 Vínculo de difeomorfismos

En la teoría completa tenemos

$$D(\vec{N}) = \frac{1}{8\pi G\beta} \int d^3x N^a (E_i^b \partial_a A_b^i - \partial_b (E_i^b A_a^i)) \quad (3.129)$$

El primer sumando se puede separar en los casos  $a = \alpha$ ,  $a = \phi$ . Cuando  $a = \alpha$ , usando (3.81) tenemos

$$E_i^b \partial_\alpha A_b^i = \mathbf{e}_i^b \partial_\alpha \mathbf{a}_b^i \quad (3.130)$$

mientras que cuando  $a = \phi$ , usando (3.70):

$$\begin{aligned} E_i^b \partial_\phi A_b^i &= E_1^b \partial_\phi A_b^1 + E_2^b \partial_\phi A_b^2 = E_1^b (-A_b^2) + E_2^b (A_b^1) \\ &= -\mathbf{e}_1^b \mathbf{a}_b^2 + \mathbf{e}_2^b \mathbf{a}_b^1 \end{aligned} \quad (3.131)$$

El segundo sumando es más simple:

$$\partial_b (E_i^b A_a^i) = \partial_b (\mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i) \quad (3.132)$$

No estamos suponiendo nada sobre la dependencia de los multiplicadores por lo que vamos a redefinir  $N^a \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi N^a$ , entonces:

$$d(\vec{N}) = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^a \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \mathbf{a}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i) + \delta_a^\phi \delta_3^j \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \quad (3.133)$$

En el primer sumando se usó que  $N^\alpha \partial_\alpha \mathbf{a}_b^i = N^a \partial_a \mathbf{a}_b^i$ .

### 3.3.3 Vínculo Hamiltoniano

El vínculo Hamiltoniano en la teoría completa se puede escribir de la siguiente manera:

$$C(N) = H_E(N) + H_L(N) \quad (3.134)$$

Siendo

$$H_E(N) = - \int d^3x \frac{N}{\sqrt{E}} (A_{b,a}^i - A_{a,b}^i + \epsilon_{ilm} A_a^l A_b^m) \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b \quad (3.135)$$

$$H_L(N) = \int d^3x \frac{N}{\sqrt{E}} (1 + \beta^2) \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} E_j^a E_k^b K_a^l K_b^m \quad (3.136)$$

El primer sumando en (3.135) se puede separar en varios casos. Primero, cuando  $a = \alpha, b = \beta$ , usando (3.81) y (3.82):

$$(A_{\beta,\alpha}^i - A_{\alpha,\beta}^i) \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b = (\mathbf{a}_{\beta,\alpha}^i - \mathbf{a}_{\alpha,\beta}^i) \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^\alpha \mathbf{e}_k^\beta \quad (3.137)$$

Luego, si  $a = \alpha, b = \phi$ , tenemos por un lado:

$$A_{\phi,\alpha}^i \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b = \mathbf{a}_{\phi,\alpha}^i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \quad (3.138)$$

y por otro:

$$\begin{aligned} -A_{\alpha,\phi}^i \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b &= -\epsilon^{i3l} A_{\alpha}^l \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b = -A_{\alpha}^j (\delta_j^3 \delta_k^l - \delta_k^3 \delta_j^l) E_j^a E_k^b \\ &= -A_{\alpha}^j (E_3^a E_j^b - E_j^a E_3^b) = -\delta_b^\phi \delta_3^j \mathbf{a}_{\alpha}^j (\mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_i^b) \end{aligned} \quad (3.139)$$

El caso  $a = \phi, b = \beta$  es análogo:

$$-A_{\phi,\beta}^i \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b = -\mathbf{a}_{\alpha,\beta}^i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \quad (3.140)$$

Y por otro lado:

$$A_{\beta,\phi}^i \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b = -A_{\alpha,\phi}^i \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b \quad (3.141)$$

para pasar del miembro izquierdo de la igualdad al miembro derecho simplemente se renombraron índices. Este término es entonces igual a (3.139). Los restantes sumandos en (3.135) y (3.136) se pueden reescribir trivialmente usando (3.81) y (3.82):

$$\epsilon_{ilm} A_a^l A_b^m \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b = \epsilon_{ilm} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \quad (3.142)$$

$$\epsilon_{ilm} K_a^l K_b^m \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b = \epsilon_{ilm} \mathbf{k}_a^l \mathbf{k}_b^m \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \quad (3.143)$$

Entonces, el vínculo Hamiltoniano en términos de las variables adaptadas a la simetría se puede escribir de la siguiente manera:

$$c(N) = h_E(N) + h_L(N) \quad (3.144)$$

Siendo

$$h_E(N) = - \frac{1}{8G} \int dx dy \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \left[ (\mathbf{a}_{b,a}^i - \mathbf{a}_{a,b}^i + \epsilon_{ilm} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m) \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2\delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) \right] \quad (3.145)$$

$$h_L(N) = \frac{1}{8G} \int dx dy \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} (1 + \beta^2) \epsilon_{ilm} \epsilon_{ijk} \mathbf{k}_a^l \mathbf{k}_b^m \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \quad (3.146)$$

Donde el lapso fue redefinido de la siguiente manera:  $N \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi N$ .

### 3.4 Ecuaciones de movimiento

#### 3.4.1 Vínculo de Gauss

En esta sección mostraremos los resultados de los corchetes de las variables canónicas adaptadas a la simetría con los vínculos. Los términos de borde serán discutidos más adelante en el contexto de espacios asintóticamente planos. De momento vamos a asumir que tenemos condiciones de borde tales que todas las integrales de superficie que vienen de realizar las integrales por partes necesarias para llegar al resultado, se cancelan. Comenzamos por el vínculo de Gauss:

$$g(\vec{\lambda}) = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \lambda^i \left( \partial_a \mathbf{e}_i^a + \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a + \varepsilon_{ijk} \delta_3^j \delta_a^\phi \mathbf{e}_k^a \right) \quad (3.147)$$

Los primeros dos sumandos tienen la misma forma que en la teoría completa por lo que su corchete con las variables canónicas será completamente análogo. Luego, para el tercer sumando tenemos:

$$\left\{ \mathbf{a}_a^i, \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \lambda^j \varepsilon_{jkl} \delta_3^k \delta_b^\phi \mathbf{e}_l^b \right\} = \lambda^i \varepsilon_{jki} \delta_3^k \delta_a^\phi \quad (3.148)$$

$$\left\{ \mathbf{e}_i^a, \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \lambda^j \varepsilon_{jkl} \delta_3^k \delta_b^\phi \mathbf{e}_l^b \right\} = 0 \quad (3.149)$$

Entonces:

$$\left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), g(\vec{\lambda}) \right\} = \left( -\lambda^i_{,a} + \varepsilon_{ijk} \lambda^j \mathbf{a}_a^k + \varepsilon_{ijk} \lambda^j \delta_3^k \delta_a^\phi \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (3.150)$$

$$\left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), g(\vec{\lambda}) \right\} = \left( \varepsilon_{ijk} \lambda^j \mathbf{e}_k^a \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (3.151)$$

En (3.150), se puede observar que  $\mathbf{a}_a^i$  no transforma como una conexión bajo una transformación de gauge. Sin embargo, si definimos  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i := \mathbf{a}_a^i + \delta_3^i \delta_a^\phi$ , el vínculo de Gauss y su corchete con la conexión toman la siguiente forma:

$$g(\vec{\lambda}) = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \lambda^i \left( \partial_a \mathbf{e}_i^a + \varepsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{a}}_a^j \mathbf{e}_k^a \right) \quad (3.152)$$

$$\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_a^i(\vec{x}), g(\vec{\lambda}) \right\} = \left( -\lambda^i_{,a} + \varepsilon_{ijk} \lambda^j \tilde{\mathbf{a}}_a^k \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (3.153)$$

Entonces, la cantidad  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  sí transforma como una conexión.

#### 3.4.2 Vínculo de difeomorfismos

El vínculo de difeomorfismos:

$$d(\vec{N}) = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^a \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \mathbf{a}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i) + \delta_a^\phi \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \quad (3.154)$$

también se puede separar en una parte análoga a la teoría completa y el último sumando, cuyo corchete con las variables canónicas es:

$$\left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^c \delta_c^\phi \delta_3^j \varepsilon_{jkl} \mathbf{a}_b^k \mathbf{e}_l^b \right\} = \varepsilon_{ijk} N^c \delta_c^\phi \delta_3^j \mathbf{a}_a^k(\vec{x}) \quad (3.155)$$

$$\left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^c \delta_c^\phi \delta_3^j \varepsilon_{jkl} \mathbf{a}_b^k \mathbf{e}_l^b \right\} = -\varepsilon_{ijk} N^c \delta_c^\phi \delta_3^k \mathbf{e}_j^a(\vec{x}) \quad (3.156)$$

Por lo que

$$\left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), d(\vec{N}) \right\} = \left( (N^b \mathbf{e}_i^a)_{,b} - \mathbf{e}_i^b N_{,a}^a - \varepsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^k \mathbf{e}_j^a \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (3.157)$$

$$\left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), d(\vec{N}) \right\} = \left( \mathbf{a}_b^i N_{,a}^b + N^b \mathbf{a}_{a,b}^i + \varepsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^j \mathbf{a}_a^k \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (3.158)$$

A partir de estas dos últimas igualdades se puede ver que ocurre algo similar a lo que observado en la acción del vínculo de Gauss: Esta vez parece que bajo la acción de un difeomorfismo ni  $\mathbf{e}_i^a$  ni transforma como un campo vectorial de densidad 1 ni  $\mathbf{a}_a^i$  transforma como una conexión. En la subsección anterior vimos que  $\mathbf{a}_a^i$  tampoco transformaba como una conexión bajo una transformación de gauge pero  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  sí lo hacía. Podemos empezar por reescribir el vínculo de difeomorfismos en términos de esta conexión:

$$\begin{aligned} d(\vec{N}) &= \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^a \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \mathbf{a}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i) + \delta_a^\phi \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \\ &= \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^a \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \tilde{\mathbf{a}}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b (\tilde{\mathbf{a}}_a^i - \delta_3^i \delta_a^\phi)) + \delta_a^\phi \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{a}}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \\ &= \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \left[ N^a (\mathbf{e}_i^b \partial_a \tilde{\mathbf{a}}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \tilde{\mathbf{a}}_a^i)) + N^a \delta_a^\phi (\partial_b \mathbf{e}_3^b + \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{a}}_b^j \mathbf{e}_k^b) \right] \end{aligned} \quad (3.159)$$

En la primer igualdad, se sustituyó  $\mathbf{a}_a^i \rightarrow \tilde{\mathbf{a}}_a^i$  en el primer sumando pues  $\partial_a (\delta_b^\phi \delta_3^i) = 0$  mientras que en el tercero la sustitución es posible gracias al factor  $\varepsilon_{3jk}$ . El primer sumando en el último miembro de (3.159) es análogo al vínculo de difeomorfismos de la teoría completa, mientras que el segundo sumando se puede reconocer fácilmente como el vínculo de Gauss con parámetro  $(0, 0, N^\phi)$ . Si redefinimos el multiplicador  $\lambda^3 \rightarrow \lambda^3 + N^\phi$ , este último sumando en (3.159) queda “absorbido” en el vínculo de Gauss, por lo que el vínculo de difeomorfismos es ahora análogo al de la teoría completa. Además, tenemos que

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), d(\vec{N}) \right\} &= \left( \mathbf{a}_b^i N_{,a}^b + N^b \mathbf{a}_{a,b}^i + \varepsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^j \mathbf{a}_a^k \right) \Big|_{\vec{x}} \\ &= \left( (\tilde{\mathbf{a}}_b^i - \delta_3^i \delta_b^\phi) N_{,a}^b + N^b \tilde{\mathbf{a}}_{a,b}^i + \varepsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^j \tilde{\mathbf{a}}_a^k \right) \Big|_{\vec{x}} \\ &= \left[ (\tilde{\mathbf{a}}_b^i N_{,a}^b + N^b \tilde{\mathbf{a}}_{a,b}^i) + \left( -\partial_a (\delta_3^i N^\phi) + \varepsilon_{ijk} (N^\phi \delta_3^j) \tilde{\mathbf{a}}_a^k \right) \right] \Big|_{\vec{x}} \end{aligned} \quad (3.160)$$

El término dentro del primer paréntesis es la derivada de Lie de  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  en la dirección de  $\vec{N}$ . Luego, recordando que

$$\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_a^i(\vec{x}), g(\vec{\lambda}) \right\} = \left( -\lambda_{,a}^i + \varepsilon_{ijk} \lambda^j \tilde{\mathbf{a}}_a^k \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (3.161)$$

Es fácil notar que el término dentro del segundo paréntesis es

$$\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_a^i, g((0, 0, N^\phi)) \right\} \quad (3.162)$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), d(\vec{N}) \right\} &= \left( (N^b \mathbf{e}_i^a)_{,b} - \mathbf{e}_i^b N_{,a}^a - \varepsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^k \mathbf{e}_j^a \right) \Big|_{\vec{x}} \\ &= \left( (N^b \mathbf{e}_i^a)_{,b} - \mathbf{e}_i^b N_{,a}^a + \varepsilon_{ikj} (N^\phi \delta_3^k) \mathbf{e}_j^a \right) \Big|_{\vec{x}} \\ &= \left( (N^b \mathbf{e}_i^a)_{,b} - \mathbf{e}_i^b N_{,a}^a \right) \Big|_{\vec{x}} + \left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), g((0, 0, N^\phi)) \right\} \end{aligned} \quad (3.163)$$

Entonces, con la redefinición  $\lambda^3 \rightarrow \lambda^3 + N^\phi$ , la acción del vínculo de difeomorfismos sobre la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  y la tríada densitizada,  $\mathbf{e}_i^a$ , es una derivada de Lie, como en el caso de la teoría completa. La necesidad de realizar esta redefinición para llegar a este resultado es en realidad esperable dado cómo impusimos la simetría axial en las variables canónicas. Vamos a analizar únicamente el caso de la conexión (el caso de la tríada es análogo). Recordar que la condición de simetría fue impuesta exigiendo

$$\mathcal{L}_{\lambda^a \partial_a} A_a^i = \varepsilon_{ijk} \lambda^j A_a^k \quad (3.164)$$

Con  $\lambda^a = \delta_\phi^a \lambda$ , siendo  $\lambda$  constante. Esto implica:

$$\partial_\phi A_a^i = \varepsilon_{i3k} A_a^k \quad (3.165)$$

Por otro lado, la acción de  $D((0, 0, N^\phi))$  sobre  $A_a^i$  es la derivada de Lie de esta a lo largo de la dirección del vector  $N^\phi \partial_\phi$ :

$$\{A_a^i, D((0, 0, N^\phi))\} = \mathcal{L}_{N^\phi \partial_\phi} A_a^i = A_\phi^i \partial_a N^\phi + N^\phi \partial_\phi A_a^i \quad (3.166)$$

El segundo sumando en la derivada de Lie, la derivada direccional en  $\partial_\phi$ , por (3.165) es igual a una rotación de gauge. Aquí se puede observar que la condición (3.165) relaciona la derivada direccional de las variables canónicas en la dirección del vector de Killing a una rotación de gauge. Luego, al reescribir el vínculo en términos de  $\mathbf{a}_a^i$ , aparece un término proveniente de las derivadas en  $\phi$  de la conexión mientras que el resto del vínculo tiene la forma estándar:

$$\begin{aligned} D(\vec{N}) &= \frac{1}{4G\beta} \int d^3x N^a (E_i^b \partial_a A_b^i - \partial_b (E_i^b A_a^i)) \\ &= \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^a \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \mathbf{a}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i) + \delta_a^\phi \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \end{aligned} \quad (3.167)$$

Reescribiendo esto en términos de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$ :

$$\begin{aligned} d(\vec{N}) &= \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^a \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \tilde{\mathbf{a}}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b (\tilde{\mathbf{a}}_a^i - \delta_3^i \delta_a^\phi)) + \delta_a^\phi \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{a}}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \\ &= \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \left[ N^a (\mathbf{e}_i^b \partial_a \tilde{\mathbf{a}}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \tilde{\mathbf{a}}_a^i)) + N^a \delta_a^\phi (\partial_b \mathbf{e}_3^b + \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{a}}_b^j \mathbf{e}_k^b) \right] \end{aligned} \quad (3.168)$$

El primer sumando tiene la forma estándar mientras que el segundo se puede reconocer como  $g((0, 0, N^\phi))$ . En resumen: El vínculo de difeomorfismos tiene una parte proporcional al vínculo de Gauss. Su acción sobre  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  no es una derivada de Lie debido a este nuevo término originado a partir de las derivadas direccionales de la conexión en la dirección de  $\partial_\phi$ , las cuales son proporcionales a una transformación de gauge. Esto se soluciona expresando los vínculos en términos de  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i = \mathbf{a}_a^i + \delta_3^i \delta_a^\phi$  y redefiniendo  $\lambda^3 \rightarrow \lambda^3 + N^\phi$ .

### 3.4.3 Vínculo Hamiltoniano

El vínculo Hamiltoniano es análogo al de la teoría completa excepto por el término:

$$\frac{1}{8G} \int \frac{N}{\sqrt{e}} dx dy 2\delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) \quad (3.169)$$

Tomando corchete con las variables canónicas:

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \frac{1}{8G} \int \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} dx dy 2\delta_3^k \delta_c^\phi \left( \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^c \mathbf{e}_k^c - \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^c \mathbf{e}_k^b \right) \right\} \\ &= \frac{\beta}{2} \left[ \frac{2N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \left( \delta_3^k \delta_c^\phi \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_k^c + \delta_3^i \delta_a^\phi \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^b - \delta_3^k \delta_a^\phi \mathbf{a}_b^i \mathbf{e}_k^b - \delta_3^i \delta_c^\phi \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_j^c \right) \right] \Big|_{\vec{x}} \\ &+ \frac{\beta}{2} \left[ \left( -\frac{N}{2\mathbf{e}^{(3/2)}} \mathbf{e} \mathbf{e}_a^i \right) 2\delta_3^k \delta_c^\phi \left( \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^c \mathbf{e}_k^c - \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^c \mathbf{e}_k^b \right) \right] \Big|_{\vec{x}} \end{aligned} \quad (3.170)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), \frac{1}{8G} \int \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} dx dy 2\delta_3^k \delta_c^\phi \left( \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^c \mathbf{e}_k^c - \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^c \mathbf{e}_k^b \right) \right\} \\ &= \frac{\beta}{2} \left[ -\frac{2N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \delta_3^k \delta_c^\phi \left( \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_k^c - \mathbf{e}_i^c \mathbf{e}_k^a \right) \right] \Big|_{\vec{x}} \end{aligned} \quad (3.171)$$

Después de un cálculo extenso pero directo, se pueden obtener los corchetes de las variables canónicas con el resto del vínculo Hamiltoniano:

$$\left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), h_E(N) \right\} = -\frac{\beta}{2} \left[ 2 \left( \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^a \right)_b - 2 \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{mjk} \mathbf{a}_b^l \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b - 2 \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \delta_3^j \delta_b^\phi \left( \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a \right) \right] \Big|_{\vec{x}} \quad (3.172)$$

$$\left\{ \mathbf{e}_i^a(\vec{x}), h_L(N) \right\} = \frac{\beta}{2} \left( \frac{2}{\beta} (1 + \beta^2) \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \varepsilon_{ilm} \varepsilon_{jkm} \mathbf{k}_b^l \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^a \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (3.173)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), h_E(N) \right\} &= -\frac{\beta}{2} \left[ -\frac{N}{2} \mathbf{C}_E \mathbf{e}_a^i + 2 \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \varepsilon_{ijk} \mathbf{F}_{ab}^k \mathbf{e}_j^b \right. \\ &\quad \left. + \frac{2N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \left( \delta_3^j \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_j^b + \delta_3^i \delta_a^\phi \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^b - \delta_3^j \delta_a^\phi \mathbf{a}_b^i \mathbf{e}_j^b - \delta_3^i \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_j^b \right) \right] \Big|_{\vec{x}} \end{aligned} \quad (3.174)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), h_L(N) \right\} &= -\frac{\beta}{2} \left\{ -\frac{N}{2} \mathbf{C}_L \mathbf{e}_a^i - 2(1 + \beta^2) \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{lmk} \mathbf{k}_a^l \mathbf{k}_b^m \mathbf{e}_j^b \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\beta} (1 + \beta^2) \left( \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_a^m - \frac{1}{2} \varepsilon_{mjk} \mathbf{e}_a^i \right) \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \left[ {}^e D_b \left( \frac{N \mathbf{k}_c^m}{\sqrt{\mathbf{e}}} \right) - {}^e D_c \left( \frac{N \mathbf{k}_b^m}{\sqrt{\mathbf{e}}} \right) \right] \right\} \Big|_{\vec{x}} \end{aligned} \quad (3.175)$$

donde para acortar notación se definió

$$\mathbf{F}_{ab}^i = \mathbf{a}_{b,a}^i - \mathbf{a}_{a,b}^i + \varepsilon_{ilm} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m \quad (3.176)$$

$$\mathbf{C}_E = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} \left[ \mathbf{F}_{ab}^i \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2\delta_3^j \delta_b^\phi \left( \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a \right) \right] \quad (3.177)$$

$$\mathbf{C}_L = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} (1 + \beta^2) \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \mathbf{k}_a^l \mathbf{k}_b^m \quad (3.178)$$

Estos cálculos (especialmente (3.175)) fueron realizados con la ayuda del software *Mathematica*. Juntando todos estos resultados, podemos llegar a las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General en términos de las variables de Ashtekar:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{a}}_a^i &= \{ \mathbf{a}_a^i, h_T \} \\ \dot{\mathbf{e}}_i^a &= \{ \mathbf{e}_i^a, h_T \} \end{aligned} \quad (3.179)$$

Donde se definió el Hamiltoniano total como:

$$h_T = g(\vec{\lambda}) + d(\vec{N}) + h_E(N) + h_L(N) \quad (3.180)$$

Como se mencionó anteriormente, redefiniendo  $\lambda^3 \rightarrow \lambda^3 + N^\phi$  y expresando los vínculos en términos de  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i = \mathbf{a}_a^i + \delta_a^\phi \delta_3^i$ , estas ecuaciones tienen la misma forma que en la teoría completa, mientras que si deseamos obtener las ecuaciones que describen geometrías estacionarias y axisimétricas, tenemos que  $\dot{\mathbf{a}}_a^i = 0$ ,  $\dot{\mathbf{e}}_i^a = 0$  y  $\mathbf{a}_{a,\phi}^i = 0$ ,  $\mathbf{e}_{i,\phi}^a = 0$ . Como se vio anteriormente en la sección de reducción por simetría en variables métricas, un ejemplo importante de solución es la que corresponde al agujero negro de Kerr. Recordar también de la misma sección, que mientras que en simetría esférica tenemos el teorema de Birkoff, el cual nos asegura que en el vacío la única solución no trivial a las ecuaciones de Einstein es la del agujero negro de Schwarzschild, en simetría axial el agujero negro de Kerr es tan solo una solución dentro de todas las posibles. Encontrar condiciones en términos de las variables de Ashtekar que permitan distinguir a la solución de Kerr de las demás será el tema de un futuro trabajo. De momento nos hemos limitado a verificar, usando un Ansatz adecuado, que la geometría de Kerr es efectivamente solución de (3.179). El Ansatz utilizado fue el siguiente (en coordenadas esféricas  $r, \theta, \phi$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^r &= \sin \theta \sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + a^2 r r_s \sin^2 \theta} \\ \mathbf{e}_1^\theta &= \frac{\sin \theta \sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + a^2 r r_s \sin^2 \theta}}{\sqrt{a^2 + r^2 - r r_s}} \\ \mathbf{e}_2^\phi &= \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{a^2 + r^2 - r r_s} \end{aligned} \quad (3.181)$$

$$\begin{aligned} N &= \sqrt{\frac{(a^2 + r(r - r_s))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))}{2(a^2 + r^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2a^2 r r_s \sin^2 \theta)}} \\ N_\phi &= -\frac{r r_s a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad N_r = 0, \quad N_\theta = 0 \end{aligned} \quad (3.182)$$

Antes de continuar, vale la pena observar que en el Ansatz elegido, la tríada tiene una forma diagonal. La motivación para elegir esta forma fue (además de la simplicidad) que con esta forma diagonal la tríada inversa también lo es (como puede verificarse fácilmente), entonces:

$$\mathbf{e}_r^i \mathbf{e}_\phi^i = \mathbf{e}_\theta^i \mathbf{e}_\phi^i = 0 \quad \rightarrow \quad g_{r\phi} = g_{\theta\phi} = 0 \quad (3.183)$$

Recordar de 3.1.1 que estas condiciones junto con  $N_r = 0$  y  $N_\theta = 0$  no son una simple fijación de gauge sino que tienen una consecuencia física: Seleccionan aquellas soluciones en las cuales el momento angular total está alineado con el eje de simetría, de las cuales la geometría de Kerr forma parte. Si uno deseara seguir restringiendo las soluciones hasta que la geometría de Kerr sea la única posible, debería imponer condiciones similares a (3.4) (que fijen los valores asintóticos de los multiplicadores de Lagrange) cuyas consecuencias físicas sean tales que el espacio cumpla con todas las hipótesis del teorema de Robinson (esencialmente existencia de un horizonte de eventos y asintoticidad plana es lo que nos falta

a esta altura). Con nuestro Ansatz estas condiciones se cumplen trivialmente pues es fácil verificar que la métrica correspondiente no es otra que la de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist. Las componentes de la conexión de spin  $\gamma_a^i$  se obtienen a partir de la tríada mientras que las componentes  $\mathbf{a}_a^i$  las podemos obtener fácilmente a partir de la curvatura extrínseca en su forma triádica:

$$k_a^i = \delta^{ij} \frac{\mathbf{e}_j^b}{\sqrt{\mathbf{e}}} K_{ab} \quad (3.184)$$

Por otro lado, la curvatura extrínseca se obtiene de

$$K_{ab} = \frac{1}{2N} (-\dot{q}_{ab} + \nabla_a N_b + \nabla_b N_a) \quad (3.185)$$

(siendo  $q_{ab}$  la métrica espacial) y recordando que en nuestro espaciotiempo estacionario  $\dot{q}_{ab} = 0$ . Las expresiones para la conexión y para los multiplicadores del vínculo de Gauss son extensas y se pueden encontrar en el apéndice A. Partiendo de la solución anterior, es fácil verificar que en el límite  $a \rightarrow 0$  se recupera la solución de Schwarzschild:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^r &= r^2 \sin \theta \\ \mathbf{e}_1^\theta &= \frac{r \sin \theta}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \\ \mathbf{e}_2^\phi &= \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{r_s}{r}}} \end{aligned} \quad (3.186)$$

El lapso toma la forma usual

$$N = \sqrt{1 - \frac{r_s}{r}} \quad (3.187)$$

mientras que el shift se anula  $N^\phi = 0$ . En este caso además se tiene que  $K_{ab} = 0$ , por lo que la conexión está completamente determinada por la conexión de spin. Luego, los multiplicadores de Gauss toman una forma muy simple:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= 0 \\ \lambda^2 &= 0 \\ \lambda^3 &= -\beta \frac{r_s}{r^2} \end{aligned} \quad (3.188)$$

Finalmente, la solución de Minkowski se recupera tomando el límite  $r_s \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_3^r &= r^2 \sin \theta \\ \mathbf{e}_1^\theta &= r \sin \theta \\ \mathbf{e}_2^\phi &= r \end{aligned} \quad (3.189)$$

En este límite el lapso es igual a uno mientras que el resto de los multiplicadores se anulan.

## 3.5 Términos de borde

Hasta ahora hemos estado ignorando los términos de borde, haciendo un análisis puramente local de la teoría. Sin embargo, recordemos de 3.1.1, que para que la acción de los vínculos sobre las variables canónicas esté bien definida, es necesario realizar integraciones por partes, lo que da como resultado términos de borde. Estos términos de borde (que conmutan con el hamiltoniano) están asociados a cantidades físicas conservadas (ver por ejemplo el comentario en 3.1.1 o [16]). En esta sección vamos a partir del resultado de los términos de borde generales asociados a cada vínculo en la teoría completa, y veremos que en el caso axisimétrico estos toman una forma completamente análoga. Vamos a analizar cada vínculo y sus términos de borde por separado, calculando estos explícitamente para el caso del agujero negro de Kerr, usando el Ansatz de la sección anterior. Un análisis más detallado sobre los términos de borde en la acción de Relatividad General en términos de variables tanto ADM como variables de Ashtekar puede ser encontrado por ejemplo en [63] o en [25].

### 3.5.1 Vínculo de difeomorfismos

En variables ADM, el vínculo toma la siguiente forma:

$$D[\vec{N}] = -2 \int_{\Sigma} d^3x N^a \nabla_b P_a^b \quad (3.190)$$

siendo  $\nabla$  la derivada covariante compatible con la métrica  $g_{ab}$  y  $P^{ab}$  el momento conjugado de esta:

$$P^{ab} = -\frac{1}{16\pi G} \sqrt{q} (K^{ab} - q^{ab} K) \quad (3.191)$$

donde  $q_{ab}$  es la métrica espacial y la curvatura extrínseca está dada por (3.185). Tomando variaciones en el vínculo con respecto a las variables canónicas e integrando por partes nos da una contribución

$$2 \int_{\Sigma} d^3x \nabla_b (N_a \delta P^{ab}) \quad (3.192)$$

la cual debe ser cancelada por la siguiente integral de superficie:

$$\mathcal{P} = -2 \oint_{\delta\Sigma} dS^b N^a P_{ab} \quad (3.193)$$

Este término de borde depende no sólo de las variables canónicas sino que también depende de los multiplicadores de Lagrange. Nosotros vamos a limitarnos a calcular este término para una solución particular e interpretar su significado físico, por lo que  $N^\phi$  ya está determinado; sin embargo, en un caso más general, uno podría tomar variaciones con respecto al mismo y fijar su valor en el infinito, si esto se hace después de realizar una fijación de gauge tal que  $N^\phi$  queda determinado en función de las variables canónicas en el interior, entonces al fijarlo en el infinito, este queda completamente determinado (ver por ejemplo [16] y [45]). Asintóticamente, la métrica de Kerr tiene la siguiente forma:

$$dS^2 = - \left[ 1 - \frac{2m}{r} \right] dt^2 - \frac{2J \sin^2 \theta}{r} (dtd\phi + d\phi dt) + \left[ 1 + \frac{2m}{r} \right] dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.194)$$

siendo  $J = ma$ . Además,

$$dS^b = dSn^b = dS\delta_r^b \quad (3.195)$$

Calculando el término de borde (3.193) para esta métrica obtenemos:

$$\mathcal{P} = -2 \oint_{\delta\Sigma} dSN^\phi P_{\phi r} = -2 \oint_{\delta\Sigma} d\theta d\phi r^2 \sin\theta N^\phi \left( \frac{\sqrt{q}}{16\pi G} (K_{\phi r} - q_{\phi r} K) \right) \quad (3.196)$$

Siendo

$$\begin{aligned} q_{\phi r} &= 0 \\ \sqrt{q} &= r^{3/2} \sqrt{r + r_s} \sin\theta \\ N_\phi &= -\frac{2J \sin^2\theta}{r} \rightarrow N^\phi = -\frac{2J}{r^3} \\ K_{\phi r} &= \frac{3J \sin^2\theta}{\sqrt{r^3(r - r_s) + 4J^2 \sin^2\theta}} \\ K &= 0 \end{aligned} \quad (3.197)$$

Calculando la integral y conservando el orden dominante:

$$\mathcal{P} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{9\pi}{64G} \frac{J^2}{r} = 0 \quad (3.198)$$

Entonces, el shift  $N^\phi$  está asociado al momento angular total del agujero negro. El mismo cálculo se puede repetir en términos de las variables de Ashtekar, en función de las cuales el vínculo se escribe:

$$D(\vec{N}) = \frac{1}{8\pi G\beta} \int_{\Sigma} N^a (E_i^b \partial_a A_b^i - \partial_b (E_i^b A_a^i)) \quad (3.199)$$

El término de borde para espacios asintóticamente planos:

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi G\beta} \oint_{\delta\Sigma} N^a E_i^b A_a^i dS_b \quad (3.200)$$

Luego, en términos de las nuevas variables canónicas reducidas por simetría:

$$d(\vec{N}) = \frac{1}{4\pi G\beta} \int_{\sigma} N^a \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \mathbf{a}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i) + \delta_a^\phi \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \quad (3.201)$$

siendo  $\sigma$  la variedad bidimensional con topología  $\mathbb{R}^2$  descrita por las coordenadas  $(r, \theta)$ . El término de borde es análogo al de la teoría completa:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4G\beta} \oint_{\delta\sigma} N^a \mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i ds_b \quad (3.202)$$

Usando  $ds^b = dsn^b = ds\delta_r^b$  y que la única componente del shift que no se anula es  $N^\phi$ , la expresión anterior se puede escribir:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4G\beta} \oint_{\delta\sigma} N^\phi \mathbf{e}_3^r \mathbf{a}_\phi^3 q_{rr} r^2 \sin\theta d\theta \quad (3.203)$$

Recordar que con el Ansatz que adoptamos, tenemos en concreto

$$\begin{aligned}
N^\phi &= -\frac{2J}{r^3} \\
e_3^r &= r^2 \sin \theta \\
q_{rr} &= \frac{1}{1 + \frac{r_s}{r}} \\
\mathbf{a}_\phi^3 &= \cos \theta + \gamma \frac{3Jr \sin^2 \theta}{\sqrt{r(r+r_s)(r^3(r-r_s) + 4J^2 \sin^2 \theta)}}
\end{aligned} \tag{3.204}$$

El término correspondiente al primer sumando de  $\mathbf{a}_\phi^3$  en (3.203) se cancela al integrarlo pues es proporcional a  $\int_0^\pi \sin \theta \cos \theta d\theta = 0$ . El término correspondiente al segundo sumando da el mismo resultado que (3.198).

### 3.5.2 Vínculo Hamiltoniano

En variables ADM, el vínculo Hamiltoniano se escribe:

$$C[N] = \frac{1}{16\pi G} \int_\Sigma N \left( q^{-1/2} \left( P_{ab} P^{ab} - \frac{1}{2} P \right) - q^{1/2} R \right) \tag{3.205}$$

El término de borde que hay que adicionar al vínculo para que su acción sobre las variables canónicas esté bien definida es

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi G} \oint_{\delta\Sigma} dS_d N \sqrt{q} q^{ac} q^{bd} \bar{\nabla}_{[c} q_{b]a} \tag{3.206}$$

Siendo  $\bar{\nabla}$  la derivada covariante compatible con el orden cero de la expansión en  $1/r$  de la métrica en el infinito. (De hecho, hay otro término de borde asociado a los boosts en el infinito [63], pero en nuestro caso, debido a que nuestro espacio es estacionario y a nuestra elección de coordenadas adaptadas ese término no estará presente). Consideremos un sistema de coordenadas asintóticamente cartesiano  $\{x^a\}$  y escribamos la métrica en el infinito como  $q_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$ , siendo  $\eta_{ab}$  la métrica de Minkowski y  $h_{ab}$  una perturbación alrededor de la misma, expresando también el lapso como  $N = 1 + \mathcal{O}(1/r)$ , en el límite  $r \rightarrow \infty$ , la contribución dominante es

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{16\pi G} \oint_{\delta\Sigma} \left( \frac{\partial h_a^b}{\partial x^b} - \frac{\partial h_b^a}{\partial x^a} \right) dS^a = \frac{r_s}{2G} \tag{3.207}$$

En variables de Ashtekar, se puede probar que el término de borde toma la siguiente forma:

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{8\pi G\beta} \oint_{\delta\Sigma} dS_a \frac{N}{\sqrt{E}} (E_i^a \bar{D}_b E_i^b + E_i^b \bar{D}_b E_i^a) \tag{3.208}$$

Siendo  $\bar{D}$  la derivada covariante compatible con el orden cero de la tríada en el infinito. En la teoría reducida, el término de borde es análogo:

$$\mathfrak{e} = -\frac{1}{4G\beta} \oint_{\delta\sigma} ds_a \frac{N}{\sqrt{e}} (\mathbf{e}_i^a \bar{D}_b \mathbf{e}_i^b + \mathbf{e}_i^b \bar{D}_b \mathbf{e}_i^a) \tag{3.209}$$

Utilizando el Ansatz (3.181),(3.182), se puede verificar fácilmente que el resultado es  $r_s/2G$  al igual que en la teoría completa.

### 3.5.3 Vínculo de Gauss

El vínculo de Gauss en la teoría completa:

$$\frac{1}{16\pi G}G(\vec{\lambda}) = \frac{1}{8\pi G\beta} \int_{\Sigma} \lambda^i (\partial_a E_i^a + \varepsilon_{ijk} A_a^j E_k^a) \quad (3.210)$$

requiere del siguiente término de borde para que su acción sobre las variables canónicas esté bien definida:

$$\mathbb{Q} = \frac{1}{8\pi G\beta} \oint_{\delta\Sigma} dS_a (E_i^a - \bar{E}_i^a) \lambda^i, \quad (3.211)$$

En la teoría axisimétrica y en términos de las variables reducidas:

$$\frac{1}{8G}g(\vec{\lambda}) = \frac{1}{4G\beta} \int_{\sigma} \lambda^i (\partial_a \mathbf{e}_i^a + \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_k^a + \varepsilon_{ijk} \delta_3^j \delta_a^\phi \mathbf{e}_k^a). \quad (3.212)$$

El término de borde tiene la misma forma,

$$\mathfrak{q} = \frac{1}{4G\beta} \oint_{\delta\sigma} dS_a (\mathbf{e}_i^a - \bar{\mathbf{e}}_i^a) \lambda^i, \quad (3.213)$$

donde  $\bar{\mathbf{e}}_i^a$  es la tríada reducida en el infinito. Este último término es necesario pues de no introducirlo en la expresión anterior, el resultado de la integral es divergente. Al evaluar esta integral, obtenemos como resultado:

$$\mathfrak{q} = \frac{5\pi^2}{64G} \frac{J^2}{r_s} \quad (3.214)$$

Este resultado depende únicamente del momento angular y de la masa del agujero negro, por lo que no aparecen nuevos observables.

## 3.6 Álgebra de los vínculos

Para ver cómo se modifica el álgebra de los vínculos al reescribir estos en términos de las variables reducidas por simetría es conveniente, para evitar cálculos engorrosos innecesarios, volver a reescribirlos en términos de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i := \mathbf{a}_a^i + \delta_a^3 \delta_3^i$  en vez de  $\mathbf{a}_a^i$  y realizar además la redefinición  $\lambda^3 \rightarrow \lambda^3 + N^\phi$ . De las subsecciones anteriores tenemos:

$$g(\vec{\lambda}) = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy \lambda^i (\partial_a \mathbf{e}_i^a + \varepsilon_{ijk} \tilde{\mathbf{a}}_a^j \mathbf{e}_k^a) \quad (3.215)$$

$$d(\vec{N}) = \frac{1}{4G\beta} \int dx dy N^a (\mathbf{e}_i^b \partial_a \tilde{\mathbf{a}}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \tilde{\mathbf{a}}_a^i)) \quad (3.216)$$

Luego, teniendo en cuenta las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \tilde{\mathbf{a}}_a^l \tilde{\mathbf{a}}_b^m \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + \varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \delta_a^\phi \delta_3^l \mathbf{a}_b^m \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \\ &+ \varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \delta_b^\phi \delta_3^m \mathbf{a}_a^l \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \\ &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2\varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \delta_b^\phi \delta_3^m \mathbf{a}_a^l \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \\ &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2(\delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^j) \delta_b^\phi \delta_3^m \mathbf{a}_a^l \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \\ &= \varepsilon_{ilm} \varepsilon^{ijk} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2\delta_b^\phi \delta_3^j (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_i^b) \end{aligned} \quad (3.217)$$

$$\partial_b \mathbf{a}_a^i = \partial_b \tilde{\mathbf{a}}_a^i \quad (3.218)$$

Tenemos que

$$\begin{aligned} h_E(N) &= -\frac{1}{8G} \int dx dy \frac{N}{\sqrt{e}} \left[ (\mathbf{a}_{b,a}^i - \mathbf{a}_{a,b}^i + \epsilon_{ilm} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m) \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2\delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) \right] \\ &= -\frac{1}{8G} \int dx dy \frac{N}{\sqrt{e}} \left[ (\tilde{\mathbf{a}}_{b,a}^i - \tilde{\mathbf{a}}_{a,b}^i + \epsilon_{ilm} \tilde{\mathbf{a}}_a^l \tilde{\mathbf{a}}_b^m) \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \right] \end{aligned} \quad (3.219)$$

El Hamiltoniano Lorentziano por su parte ya es análogo al de la teoría completa, pues

$$\beta \mathbf{k}_a^i = \mathbf{a}_a^i - (\gamma_a^i - \delta_a^\phi \delta_3^i) = \tilde{\mathbf{a}}_a^i - \gamma_a^i \quad (3.220)$$

Con estas definiciones se pueden reescribir los vínculos de forma tal que tengan exactamente la misma forma que en la teoría completa. El álgebra de los vínculos se obtiene entonces inmediatamente:

$$\begin{aligned} \{g(\vec{\lambda}), g(\vec{\lambda}')\} &= g([\vec{\lambda}, \vec{\lambda}']) \\ \{g(\lambda), d(\vec{N})\} &= -g(\mathcal{L}_{\vec{N}} \vec{\lambda}) \\ \{d(\vec{N}), d(\vec{N}')\} &= d([\vec{N}, \vec{N}']) \\ \{g(\vec{\lambda}), c(N)\} &= 0 \\ \{d(\vec{N}), c(M)\} &= -C(\mathcal{L}_{\vec{N}} M) \\ \{c(N), c(M)\} &= -4 \left( d(\vec{S}) + g(S^a \tilde{\mathbf{a}}_a^i) \right. \\ &\quad \left. - 4 \left( 1 + \frac{1}{\beta^2} \right) g \left( \frac{[\mathbf{e}_a^i \partial^a N, \mathbf{e}_b^i \partial^b M]}{q} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.221)$$

Donde se definió el vector

$$S^a = (N \partial_b M - M \partial_b N) \frac{\mathbf{e}_i^b \mathbf{e}^{ai}}{q} \quad (3.222)$$



## Capítulo 4

# Gravedad cuántica de lazos

En este capítulo presentaremos una introducción a LQG, introduciendo conceptos y definiciones clave que nos permitirán dar el primer paso hacia la cuantización de la teoría reducida por simetría analizada en el capítulo anterior: obtener el espacio de estados cinemáticos.

Recordemos de mecánica cuántica elemental, cuando uno tiene un sistema con un número finito de grados de libertad  $(q^i, p_i)$  descrito por un hamiltoniano  $H_0(q^i, p_i)$   $i = 1, \dots, n$ . la teoría se cuantiza promoviendo cantidades  $q^i$  y  $p_i$  a operadores y reemplazando su corchete de Poisson clásico por  $-i/\hbar$  veces el conmutador de los operadores correspondientes:

$$\begin{aligned} q^i &\rightarrow \hat{q}^i \\ p_i &\rightarrow \hat{p}_i \\ \{ \ , \ } &\rightarrow -\frac{i}{\hbar} [ \ , \ ] \end{aligned} \tag{4.1}$$

Los estados del sistema están representados por vectores  $|\psi\rangle$  en el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbb{R}^n)$  y sus funciones de onda están dadas por  $\psi(q) = \langle q|\psi\rangle$ . El producto escalar entre dos estados  $\psi$  y  $\varphi$  se define como

$$\langle \psi|\varphi \rangle = \int dq^n \psi^*(q) \varphi(q) \tag{4.2}$$

Los operadores  $\hat{q}^i$  y  $\hat{p}_i$  actúan de forma multiplicativa y derivativa respectivamente en la representación  $|q\rangle$ :

$$\langle q|\hat{q}^i|\psi\rangle = q^i \psi(q) \tag{4.3}$$

$$\langle q|\hat{p}_i|\psi\rangle = -i \frac{\partial}{\partial q^i} \psi(q) \tag{4.4}$$

LQG es una propuesta de cuantización canónica de la Relatividad General reformulada en términos de las variables de Ashtekar. Recordar del capítulo 2, que en este caso las variables básicas de la teoría son la conexión  $A_a^i$  y sus momentos conjugados son las tríadas  $E_i^a$ . Como la teoría clásica es invariante bajo transformaciones de gauge y bajo difeomorfismos espaciales, es evidente que la prescripción dada anteriormente no es viable y debe ser modificada: Un estado  $\psi(A_a^i)$  no es invariante bajo ninguna de estas dos transformaciones. Este

problema no es exclusivo para Relatividad General sino que está presente en cualquier teoría de campos invariante por difeomorfismos y que esté definida en un fibrado principal con un grupo de gauge. La formulación Hamiltoniana de teorías de campos invariantes por difeomorfismos y su cuantización canónica en general pueden ser encontrados por ejemplo en el libro de Rovelli [55]. Vamos a centrarnos ahora en el resultado para la teoría de campos que nos interesa: Relatividad General reformulada en términos de las variables de Ashtekar. Nuestros estados son *funcionales* de la conexión  $\psi[A]$ . Las variables básicas de la teoría clásica son holonomías de la conexión: Un camino orientado  $\gamma$  en la variedad espacial  $\Sigma$  y la conexión  $A$  determinan un elemento del grupo  $SU(2)$ , la holonomía de  $A$  a lo largo de  $\gamma$ :

$$H[A, \gamma] = \mathcal{P} \exp \int_{\gamma} A \quad (4.5)$$

Comenzaremos este capítulo introduciendo conceptos de teorías de gauge en redes y luego veremos cómo en Relatividad General, usando las holonomías de la conexión como variables básicas de la teoría y usando las herramientas antes introducidas podemos obtener un espacio cinemático bien definido: Invariante bajo transformaciones de gauge, difeomorfismos espaciales, y con un producto escalar bien definido entre estados.

## 4.1 Herramientas de teorías de gauge en redes

### 4.1.1 Producto escalar

A continuación introduciremos la definición de producto escalar en el contexto de una teoría de gauge en una red ya que este es el producto escalar que usaremos más adelante para proceder con la cuantización de la formulación canónica de la relatividad general. Consideremos una red  $\Gamma$  en tres dimensiones con  $L$  aristas  $l$  y  $N$  nodos  $n$ . Para definir una teoría de Yang-Mills para un grupo compacto  $G$  en esta red, asociamos a cada arista  $l$  un elemento  $U_l$  del grupo. Consideremos el espacio de Hilbert  $\tilde{K}_{\Gamma} = L^2[G^L, dU_l]$ , donde  $G^L$  es el producto tensorial de  $L$  copias del grupo  $G$ , y  $dU_l = dU_1 \dots dU_l$  es la medida de Haar en  $G$ . Los estados cuánticos en  $\tilde{K}_{\Gamma}$  son funciones  $\Psi(U_l)$  de  $L$  elementos del grupo. El producto escalar entre dos estados se define como:

$$\langle \Psi | \Phi \rangle = \int dU_1 \dots dU_L \overline{\Psi(U_1, \dots, U_L)} \Phi(U_1, \dots, U_L) \quad (4.6)$$

Para encontrar una base del espacio  $\tilde{K}_{\Gamma}$ , podemos recurrir al teorema de Peter-Weyl, éste dice que una base ortonormal de  $L_2[G, dU]$  está dada por los estados  $|j, \beta, \alpha\rangle$  definidos por  $\langle U | j, \beta, \alpha \rangle = (R^j(U))_{\beta}^{\alpha}$ , esto es, los elementos de matriz de la representación unitaria irreducible de spin  $j$  del grupo  $G$ . Entonces, una base de  $\tilde{K}_{\Gamma}$  está dada por los estados:

$$|j_l, \beta_l, \alpha_l\rangle = |j_1, \dots, j_L, \beta_1, \dots, \beta_L, \alpha_1, \dots, \alpha_L\rangle \quad (4.7)$$

definidos por

$$\langle U | j_l, \beta_l, \alpha_l \rangle = \prod_l (R^{j_l}(U_l))_{\beta_l}^{\alpha_l} \quad (4.8)$$

Bajo una transformación de gauge, los elementos  $U_l$  transforman:

$$U_l \rightarrow \lambda_{l_i}^{-1} U_l \lambda_{l_f} \quad (4.9)$$

donde  $\lambda$  es el elemento del grupo de gauge, y  $l_i, l_f$  son los nodos en donde la arista  $l$  empieza y termina respectivamente. Entonces, los estados invariantes de gauge son los que satisfacen

$$\Psi(U_l) = \Psi(\lambda_{l_i}^{-1} U_l \lambda_{l_f}) \quad (4.10)$$

Estos estados forman un subespacio  $\tilde{K}_\Gamma^0$  de  $\tilde{K}_\Gamma$ . Para obtener una base de  $\tilde{K}_\Gamma^0$  definiremos a continuación el concepto de intertwiner.

### 4.1.2 Intertwiners

Consideremos  $N$  representaciones irreducibles  $j_1 \dots j_N$  del grupo  $G$ . Consideremos ahora el producto tensorial de sus espacios de Hilbert

$$\mathcal{H}_{j_1 \dots j_N} = \mathcal{H}_{j_1} \dots \mathcal{H}_{j_N} \quad (4.11)$$

Sea  $\mathcal{H}_{j_1 \dots j_N}^0$  el subespacio formado por vectores invariantes ante la acción del grupo. Sea  $k$  la dimensión de este espacio, esto es, la cantidad de veces que la representación trivial aparece en la descomposición. Llamamos *intertwiners* entre las representaciones  $j_1 \dots j_N$  a los elementos de la base de este espacio. Los intertwiners son entonces tensores con índices en cada una de las representaciones, los cuales son invariantes ante la acción del grupo  $G$  en todos sus índices:

$$R_{\beta_1}^{(j_1)\alpha_1}(U) \dots R_{\beta_N}^{(j_N)\alpha_N}(U) v^{\beta_1 \dots \beta_N} = v^{\alpha_1 \dots \alpha_N} \quad (4.12)$$

Además son ortogonales en el producto escalar de  $\mathcal{H}_{j_1 \dots j_N}^0$ :

$$\overline{v^{i\alpha_1 \dots \alpha_N}} v_{i'\alpha_1 \dots \alpha_N} = \delta_{i'}^i \quad (4.13)$$

Si un espacio  $\mathcal{H}_j$  tiene una representación  $j$ , decimos que su espacio dual  $\mathcal{H}_j^*$  tiene la representación dual  $j^*$ . Un intertwiner entre  $n$  representaciones duales  $j_1^* \dots j_n^*$  y  $m$  representaciones  $j_1 \dots j_m$  es un tensor invariante en el espacio  $(\otimes_{i=1,n} \mathcal{H}_{j_i}^*) \otimes (\otimes_{k=1,m} \mathcal{H}_k)$ . Asociamos a cada arista  $l$  una representación  $j_l$ , y a cada nodo  $n$  un intertwiner  $i_n$  en el producto tensorial de las representaciones asociadas a las aristas adyacentes al mismo. Al conjunto  $s = (\Gamma, j_l, i_n)$  se le denomina *red de espines*. Una red de espines define un estado  $|s\rangle$ :

$$\langle U_l | s \rangle = \Psi_s(U_l) = \prod_l R^{j_l}(U_l) \cdot \prod_n i_n \quad (4.14)$$

donde el punto indica contracción en todos los índices. Debido a las propiedades de los intertwiners, estos estados son invariantes de gauge, es decir, verifican (4.10). Estos estados forman una base en general sobrecompleta de  $\tilde{K}_\Gamma^0$ . Más adelante veremos que al imponer invariancia por difeomorfismos, los estados de spin-networks (que llamaremos estados de spin-nudos) pasan a formar una base discreta del espacio de Hilbert invariante por difeomorfismos.

## 4.2 El grupo $SU(2)$

### 4.2.1 Espinores e intertwiners

De particular interés para nosotros es el caso en el cual el grupo de gauge es  $SU(2)$ . Recordemos que  $SU(2)$  es el grupo de las matrices complejas unitarias de dimensión 2 con determinante 1. Denotamos los elementos de matriz de estas matrices por  $U^A_B$ , donde  $A$  y  $B$  toman los valores 0, 1. La representación fundamental de  $SU(2)$  está definida por su acción en  $\mathbb{C}^2$ , el espacio de los vectores complejos con dos componentes al que llamamos espinores y denotamos por

$$\psi^A = \begin{pmatrix} \psi^0 \\ \psi^1 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

Consideremos el espacio formado por espinores completamente simétricos con  $n$  índices. Este espacio transforma en sí mismo bajo la acción de  $SU(2)$  en todos sus índices, definiendo la siguiente representación :

$$\psi^{A_1 \dots A_n} \rightarrow U^{A_1}_{A'_1} \dots U^{A_n}_{A'_n} \psi^{A'_1 \dots A'_n} \quad (4.16)$$

A esta representación (la cual es irreducible y de dimensión  $n + 1$ ) se le llama representación de spin  $j$  (siendo  $j = n/2$ ). Todas las representaciones unitarias irreducibles tienen esta forma. Consideremos ahora el producto tensorial de dos representaciones irreducibles de spin  $1/2$ :

$$\psi^{AB} = (\psi \otimes \phi)^{AB} = \psi^A \phi^B \quad A, B = 0, 1 \quad (4.17)$$

Este producto se puede descomponer en sus partes simétrica y anti simétrica:

$$\psi^{AB} = \psi_0 \epsilon^{AB} + \psi_1^{AB} \quad (4.18)$$

Con

$$\epsilon^{AB} = \begin{cases} 0 & \text{si } A=B \\ \pm 1 & \text{si } A \neq B \end{cases} \quad (4.19)$$

y siendo  $\psi_0 = \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \psi^{AB}$  y  $\psi_1^{AB}$  simétrico en  $AB$ . Como el tensor  $\epsilon_{AB}$  es invariante, esta descomposición es única. El subespacio tridimensional formado por los espinores simétricos  $\psi_1^{AB}$  define una representación de spin 1 mientras que el subespacio unidimensional invariante bajo la acción del grupo define la representación de spin 0. Entonces, el producto tensorial de dos representaciones de spin  $1/2$  se puede escribir como la suma directa de una representación de spin 0 y una de spin 1:

$$1/2 \otimes 1/2 = 0 \oplus 1 \quad (4.20)$$

En general, si tomamos el producto tensorial de una representación de spin  $j_1$  con otra de spin  $j_2$ , obtenemos una representación con  $2(j_1 + j_2)$  índices, simétrica en los primeros  $2j_1$  y en los últimos  $2j_2$ . Para separar este producto en sus partes simétrica y antisimétrica, podemos empezar realizando esta separación en un par de índices arbitrarios :

$$\begin{aligned} (\psi \otimes \phi)^{A_1 \dots A_{2j_1} B_1 \dots B_{2j_2}} &= \frac{1}{2} (\psi \otimes \phi)^{A_1 \dots A'_i \dots A_{2j_1} B_1 \dots B'_j \dots B_{2j_2}} \epsilon_{A'_i B'_j} \epsilon^{A_i B_j} \\ &+ (\psi \otimes \phi)^{A_1 \dots (A_i | \dots A_{2j_1} B_1 \dots | B_j) \dots B_{2j_2}} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Donde la notación  $A_1 \dots (A_i | \dots A_{2j_1} B_1 \dots | B_j) \dots B_{2j_2}$  implica simetrización de los índices  $A_i$  y  $B_j$  únicamente. Podemos seguir separando pares de índices en sus partes simétricas y antisimétricas hasta que ya no sea posible contraer índices del primer grupo con los del segundo, esto es, cuando ya hayamos contraído  $k = 2j$  índices, siendo  $j = \min \{j_1, j_2\}$ . El sumando en el cual todos los índices están simetrizados define una representación de spin  $j_1 + j_2$ , mientras que el sumando en el cual  $k$  pares de índices están contraídos (el número máximo posible) y antisimetrizados con el tensor  $\epsilon^{AB}$  define una representación de spin  $|j_1 - j_2|$  ya que el resto de los índices están simetrizados (por pertenecer a uno de los dos grupos originales). Aquellos términos en los cuales  $n < k$  pares de índices están contraídos y antisimetrizados con el tensor  $\epsilon^{AB}$  mientras que el resto de los índices están simetrizados corresponden a una representación de spin  $j_1 + j_2 - n$ , siendo  $|j_1 - j_2| < j_1 + j_2 - n < (j_1 + j_2)$ . Entonces, el producto tensorial de dos representaciones de spines  $j_1$  y  $j_2$  se puede escribir como la suma directa de las representaciones  $|j_1 - j_2|, |j_1 - j_2| + 1, \dots, (j_1 + j_2)$ . Una representación  $j_3$  aparece en el producto tensorial de  $j_1$  y  $j_2$  sí y sólo si  $j_1 + j_2 + j_3 = N$ , siendo  $N$  un entero y además  $|j_1 - j_2| \leq j_3 \leq (j_1 + j_2)$ . Estas condiciones se conocen como las condiciones de Clebsh-Gordon. Si tenemos tres representaciones  $j_1, j_2$  y  $j_3$ , el producto tensorial de las tres contiene la representación trivial de spin 0 únicamente si una representación está en el producto tensorial de las otras dos, es decir, si  $j_1, j_2$  y  $j_3$  satisfacen las condiciones de Clebsh-Gordon. Para llegar a la representación trivial de spin 0 a partir de este producto tensorial, debemos contraer índices de las dos primeras representaciones usando el tensor invariante  $\epsilon_{AB}$  (como en (4.21)) hasta que la cantidad de índices libres coincida con la cantidad de índices de la tercer representación, de esta manera, contraemos los índices restantes, obteniendo un subespacio completamente invariante ante la acción de  $SU(2)$ , es decir, la representación trivial de spin 0. Gráficamente, esto se puede expresar exigiendo que existan tres enteros  $a, b$  y  $c$  tales que

$$2j_1 = a + c, \quad 2j_2 = a + b, \quad 2j_3 = b + c \quad (4.22)$$

Si representamos los índices de cada representación como una línea, y la contracción de índices de diferentes representaciones como la unión de dichas líneas, entonces las condiciones anteriores se pueden interpretar fácilmente mediante la siguiente figura, en la cual tomamos como ejemplo  $j_1 = 5/2, j_2 = 2, j_3 = 3/2$ :

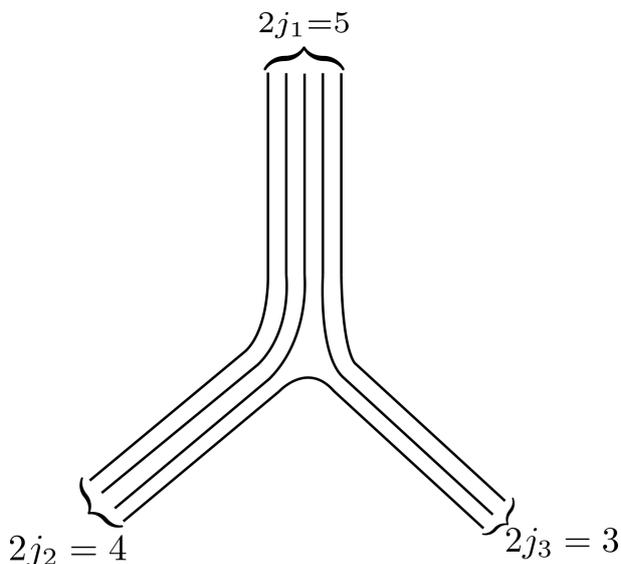


Figura 4.1: Condición de Clebsh-Gordon

Entonces, las condiciones (4.22) junto con la figura anterior nos permiten interpretar al número  $a$  como el número de índices contraídos entre las representaciones  $j_1$  y  $j_2$ , a  $b$  como el número de índices contraídos entre  $j_2$  y  $j_3$ , y a  $c$  como los índices contraídos entre  $j_1$  y  $j_3$ . En el caso particular mostrado en la figura,  $a = 3, b = 2$  y  $c = 1$ . Las condiciones de Clebsh-Gordon se pueden interpretar gráficamente como el requerimiento de que todas las líneas de diferentes representaciones se contraigan entre sí y no quede ninguna sin contraer.

Si tenemos entonces el producto tensorial de tres representaciones de spines  $j_1, j_2$  y  $j_3$  los cuales verifican las condiciones de Clebsh-Gordon, esta se podrá escribir como la suma directa de las representaciones  $0, 1, \dots, j_1 + j_2 + j_3$ . La representación trivial de spin 0 es la única invariante bajo transformaciones de gauge; dado que se obtiene a partir de la antisimetrización total de los índices, la misma tendrá la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & \psi^{A_1 \dots A_{2j_1}} B_{1 \dots B_{2j_2}} C_{1 \dots C_{2j_3}} \\ & = \epsilon^{A_1 B_1} \dots \epsilon^{A_a B_a} \epsilon^{B_{a+1} C_1} \dots \epsilon^{B_{a+b} C_b} \epsilon^{A_{a+1} C_{b+1}} \dots \epsilon^{A_{a+c} C_{b+c}} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Esta cantidad es lo que se denomina un *intertwiner* entre las representaciones  $j_1, j_2$  y  $j_3$ . Es fácil ver que si contraemos el producto tensorial de estas tres representaciones con un tensor de la forma (4.23), únicamente sobrevivirá la componente de spin 0 (las representaciones de distintos spines son ortogonales entre sí) y por lo tanto el resultado será invariante bajo transformaciones de gauge. Entonces, sean  $\psi^{A_1}, \varphi^{A_2}$ , y  $\xi^{A_3}$  espinores en las representaciones  $j_1, j_2$  y  $j_3$  respectivamente, donde los índices  $A_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) toman los valores  $1, \dots, 2j_i + 1$ . Denotamos como  $i_{A_1 A_2 A_3}$  al intertwiner entre las representaciones anteriores. Entonces, tenemos que la cantidad

$$\psi^{A_1} \varphi^{A_2} \xi^{A_3} i_{A_1 A_2 A_3} \quad (4.24)$$

es invariante bajo la acción del grupo. Contraer este producto con el intertwiner puede ser visto como proyectar el mismo al subespacio de spin 0. Luego, si tene-

mos el producto tensorial de cuatro representaciones  $j_i, i = 1, \dots, 4$  tales que la representación trivial está incluida en su producto, podemos definir fácilmente el intertwiner entre estas cuatro representaciones a partir de intertwiners trivalentes:

$$i_{A_1 A_2 A_3 A_4} = i_{A_1 A_2 A} i_{A A_3 A_4}^A \quad (4.25)$$

Donde la suma en  $A$  se hace en todos los valores de spin que satisfacen la condición de Clebsh-Gordon entre  $j_1$  y  $j_2$  y simultáneamente entre  $j_3$  y  $j_4$ , gráficamente:

$$(4.26)$$

De manera análoga, intertwiners de valencia superior se pueden construir contrayendo intertwiners trivalentes. Entonces, en general, dado el producto tensorial de  $n$  representaciones con spines  $j_i, i = 1, \dots, n$ :

$$(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n)^{A_1 \dots A_n} \quad (4.27)$$

se puede escribir (siguiendo el procedimiento descrito en el párrafo antes de (4.21)) como la suma directa de diferentes representaciones de spin  $J_i$  (siendo  $\max\{J_i\} = j_1 + \dots + j_n$ ), si  $J_i = 0$  para algún  $i$ , se puede proyectar este resultado al subespacio correspondiente mediante la contracción:

$$(\psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n)^{A_1 \dots A_n} i_{A_1 \dots A_n}^n \quad (4.28)$$

Siendo  $i^n$  el intertwiner entre las representaciones  $j_1, \dots, j_n$ . La dimensión del espacio de este intertwiner depende, como se mencionó en la subsección anterior, de cuántas veces aparece la representación trivial en la descomposición del producto tensorial. Por ejemplo, si  $n = 4, j_1 = 1, j_2 = 1/2, j_3 = 5/2$  y  $j_4 = 2$ , el producto tensorial entre  $j_1$  y  $j_2$  está formado por la suma directa de las representaciones  $1/2$  y  $3/2$  mientras que el producto de  $j_3$  y  $j_4$  se puede descomponer en las representaciones  $1/2, 3/2, 5/2, 7/2$  y  $9/2$ . Las representaciones  $1/2$  y  $3/2$  están contenidas en ambas sumas, por lo que la representación trivial de spin 0 aparece dos veces en la descomposición del producto tensorial entre  $j_1, j_2, j_3$  y  $j_4$ . El intertwiner entre estas cuatro representaciones tendrá la siguiente forma:

$$i_{A_1 A_2 A_3 A_4} = i_{A_1 A_2 A'} i_{A_3 A_4}^{A'} + i_{A_1 A_2 A''} i_{A_3 A_4}^{A''} \quad (4.29)$$

Siendo  $i_{A_1 A_2 A'}$  el intertwiner entre las representaciones de spin  $j_1 = 1, j_2 = 1/2$  e  $i = 1/2$ , y  $i_{A_3 A_4}^{A'}$  el intertwiner entre  $j_3 = 5/2$  y  $j_4 = 2$  e  $i = 1/2$ . Análogamente, los intertwiners  $i_{A_1 A_2 A''}$  y  $i_{A_3 A_4}^{A''}$  corresponden al caso  $i = 3/2$ . En este caso, el espacio de los intertwiners tiene dimensión 2. Un cambio de base en este espacio

se puede conseguir, por ejemplo, acoplando las representaciones  $j_1$  con  $j_3$  y  $j_2$  con  $j_4$ . El producto tensorial de  $j_1$  y  $j_3$  contiene las representaciones  $3/2, 5/2$  y  $7/2$ , mientras que el de  $j_2$  y  $j_4$  contiene únicamente a las representaciones  $3/2$  y  $5/2$ . El intertwiner toma la siguiente forma:

$$i_{A_1 A_3 A_2 A_4} = i_{A_1 A_3 A'} i_{A_2 A_4}^{A'} + i_{A_1 A_3 A''} i_{A_2 A_4}^{A''} \quad (4.30)$$

donde ahora los intertwiners trivalentes del lado derecho de la igualdad corresponden a los casos  $i = 3/2$  e  $i = 5/2$ . La relación entre las diferentes bases puede ser expresada usando el teorema de recoupling (ver por ejemplo el apéndice A de [55]). Definiendo

$$\begin{aligned} v_{1/2} &:= i_{A_1 A_2 A'} i_{A_3 A_4}^{A'} \\ v_{3/2} &:= i_{A_1 A_2 A''} i_{A_3 A_4}^{A''} \\ w_{3/2} &:= i_{A_1 A_3 A'} i_{A_2 A_4}^{A'} \\ w_{5/2} &:= i_{A_1 A_3 A''} i_{A_2 A_4}^{A''} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Se tiene que

$$v_i = \sum_{j=3/2, 5/2} (2j+1) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j_3 & j_4 & i \end{pmatrix} w_j \quad (4.32)$$

donde  $i$  toma los valores  $1/2$  y  $3/2$ . La generalización a espacios de espinores de dimensiones superiores es inmediata.

### 4.3 Espacio cinemático $\mathcal{K}$

Construimos ahora el espacio cinemático de LQG, utilizando los resultados de la sección anterior.

#### 4.3.1 Funciones cilíndricas

Sea  $\mathcal{G}$  el espacio de las conexiones  $A$  definidas en la superficie  $\Sigma$ . Recordar que una conexión  $\mathfrak{su}(2)$  se escribe como

$$A = A_\alpha^i \tau_i dx^\alpha \quad (4.33)$$

donde  $\tau_i$  son los generadores del álgebra de Lie de  $\mathfrak{su}(2)$ :  $\tau_i = -\frac{i}{2}\sigma_i$  siendo  $\sigma_i$  las matrices de Pauli. Dado un camino  $\gamma$  en  $\Sigma$ , la conexión  $A$  determina un elemento del grupo  $SU(2)$ , la holonomía de  $A$  a lo largo del camino  $\gamma$ :

$$H(A, \gamma) = \mathcal{P} \exp \int_\gamma A \quad (4.34)$$

Una holonomía es a la vez un funcional de  $\mathcal{G}$ . Si consideramos una colección ordenada de caminos  $\Gamma$  en  $\Sigma$  formada por  $L$  caminos  $\gamma_1 \dots \gamma_L$  (a la cual llamaremos grafo de ahora en adelante) y una función suave  $f(U_1, \dots, U_L)$  de  $L$  elementos del grupo, entonces podemos definir un funcional de  $A$

$$\Psi_{\Gamma, f}[A] = f(H(A, \gamma_1), \dots, H(A, \gamma_L)) \quad (4.35)$$

Definimos el espacio  $S$  como el espacio de todos los funcionales  $\Psi_{\Gamma, f}[A]$  para todo  $\Gamma$  y para toda función suave  $f$ . Llamamos a estos funcionales *funciones cilíndricas*.

### 4.3.2 Producto escalar

Una función cilíndrica es una función de un cierto número de elementos del grupo. Para definir un producto escalar entre dos funciones cilíndricas podemos entonces utilizar (4.6). Si dos funcionales de  $A$ ,  $\Psi_{\Gamma,f}[A]$  y  $\Psi_{\Gamma,g}$  están definidos en el mismo grafo  $\Gamma$ , definimos su producto escalar:

$$\langle \Psi_{\Gamma,f} | \Psi_{\Gamma,g} \rangle = \int dU_1 \dots dU_L \overline{f(U_1, \dots, U_L)} g(U_1, \dots, U_L) \quad (4.36)$$

Donde se utilizó la notación  $U_l := H(A, \gamma_l)$  y  $dU_l$  es la medida de Haar. Si los funcionales están definidos en grafos diferentes  $\Gamma'$  y  $\Gamma''$ , entonces la definición anterior se puede extender fácilmente si consideramos la unión  $\Gamma$  de ambos grafos y definimos la función  $f$  en  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} f(U_1, \dots, U_{L'}, U_{L'+1}, \dots, U_{L'+L''}) &= f'(U_1, \dots, U_{L'}) \\ g(U_1, \dots, U_{L''}, U_{L''+1}, \dots, U_{L'+L''}) &= g''(U_1, \dots, U_{L''}) \end{aligned} \quad (4.37)$$

para toda función  $f'$  definida en  $\Gamma'$  y toda función  $g''$  definida en  $\Gamma''$ . Usando esto, el producto escalar (4.36) es válido para dos funcionales cualesquiera en  $S$ :

$$\langle \Psi_{\Gamma',f'} | \Psi_{\Gamma'',g''} \rangle \equiv \langle \Psi_{\Gamma,f} | \Psi_{\Gamma,g} \rangle \quad (4.38)$$

Finalmente, si los grafos  $\Gamma'$  y  $\Gamma''$  son diferentes y la condición (4.37) no se cumple, entonces  $\langle \Psi_{\Gamma',f'} | \Psi_{\Gamma'',g''} \rangle = 0$ . Definimos el espacio cinemático de gravedad cuántica  $\mathcal{K}$  como la completación de  $S$  en la norma definida por el producto escalar (4.36). Hay que notar que si bien el producto escalar (4.36) es similar al definido en (4.6), en este caso estamos trabajando con una teoría continua en la cual los estados no viven en una sola red  $\Gamma$ , sino en todas las posibles redes en  $\Sigma$ . Más adelante veremos que este producto escalar es invariante bajo difeomorfismos y transformaciones locales de Gauge, y es tal que los observables clásicos reales se transforman en operadores autoadjuntos al cuantizar. Estas condiciones son las que debe satisfacer el producto escalar para tener una teoría consistente que resulte de la cuantización canónica de la Relatividad General.

### 4.3.3 Base ortonormal de $\mathcal{K}$

Por el teorema de Peter-Weyl, tenemos que una base del espacio  $L^2(SU(2))$  está dada por los elementos de matriz de las representaciones irreducibles del grupo. Escribimos los elementos de matriz de la representación de spin  $j$  de  $SU(2)$  como:

$$H^j(A)_{\beta}^{\alpha} = \langle A | j, \alpha \beta \rangle \quad (4.39)$$

Sea  $\tilde{K}_{\Gamma} = L^2[SU(2)^L]$ , el espacio de las funciones cilíndricas integrables con soporte en el grafo  $\Gamma$ , denotamos a los elementos de su base ortonormal como:

$$|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle \equiv |\Gamma, j_1, \dots, j_L, \alpha_1, \dots, \alpha_L, \beta_1, \dots, \beta_L\rangle \quad (4.40)$$

Estos se obtienen tomando el producto tensorial de elementos del tipo (4.39):

$$\langle A | \Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l \rangle = H^{j_1}(A, \gamma_1)_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots H^{j_L}(A, \gamma_L)_{\beta_L}^{\alpha_L} \quad (4.41)$$

Si el grafo  $\Gamma$  está contenido en el grafo  $\Gamma'$ , entonces los elementos (4.41) aparecen en ambos espacios  $\tilde{K}_\Gamma$  y  $\tilde{K}_{\Gamma'}$ . Para deshacernos de esta redundancia, notemos que los elementos de  $\tilde{K}_\Gamma$  pertenecen a la representación trivial de los caminos que están en  $\Gamma'$  pero no en  $\Gamma$ . Por lo tanto, una base ortonormal de  $\mathcal{K}$  está dada por los elementos  $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$  donde los espines  $j$  nunca toman el valor cero. Para cada grafo  $\Gamma$  definimos el subespacio propio  $\mathcal{K}_\Gamma$  como el subconjunto de  $\tilde{K}_\Gamma$  generado por los estados (4.40) con  $j_l > 0$ . Los subespacios propios  $\mathcal{K}_\Gamma$  son ortogonales entre sí y generan  $\mathcal{K}$ :

$$\mathcal{K} \sim \bigoplus_{\Gamma} \mathcal{K}_\Gamma \quad (4.42)$$

El grafo  $\Gamma = \emptyset$  está incluido en la suma, su espacio de Hilbert correspondiente es unidimensional y está generado por el elemento identidad  $|\emptyset\rangle$ :  $\langle A|\emptyset\rangle = 1$

### 4.3.4 Invariancias del producto escalar

Como fue mencionado anteriormente, el producto escalar (4.36) cumple propiedades necesarias para tener una teoría cuántica consistente. En este apartado estudiaremos dos de ellas: La invariancia bajo transformaciones de gauge, y la invariancia bajo difeomorfismos espaciales.

*Transformaciones de gauge locales.* La conexión  $A$  transforma de la siguiente manera bajo transformaciones  $SU(2)$  locales  $\lambda : \Sigma \rightarrow SU(2)$  (Apéndice B):

$$A \rightarrow A_\lambda = \lambda A \lambda^{-1} + \lambda d\lambda^{-1} \quad (4.43)$$

Esta transformación induce una representación de las transformaciones de gauge locales  $\Psi(A) \rightarrow \Psi(A_{\lambda^{-1}})$  en  $\mathcal{K}$ . La holonomía por otro lado transforma de forma homogénea (Apéndice B):

$$H(A, \gamma) \rightarrow H(A_\lambda, \gamma) = \lambda(x_f^\gamma) H(A, \gamma) \lambda^{-1}(x_i^\gamma) \quad (4.44)$$

Donde  $x_i^\gamma, x_f^\gamma \in \Sigma$  son los puntos inicial y final del camino  $\gamma$ . Dado un par  $(\Gamma, f)$ , definimos

$$f_\lambda(U_1, \dots, U_L) = f(\lambda(x_f^{\gamma_1}) U_1 \lambda^{-1}(x_i^{\gamma_1}), \dots, \lambda(x_f^{\gamma_L}) U_L \lambda^{-1}(x_i^{\gamma_L})) \quad (4.45)$$

Entonces, la acción de una transformación de gauge local  $U_\lambda$  sobre los estados cuánticos es:

$$\Psi_{\Gamma, f}(A) \rightarrow [U_\lambda \Psi_{\Gamma, f}](A) = \Psi_{\Gamma, f_{\lambda^{-1}}}(A) \quad (4.46)$$

La medida de Haar es invariante bajo la acción derecha e izquierda del grupo, por lo que el producto escalar (4.36) también lo es.

*Difeomorfismos espaciales.* Bajo un difeomorfismo, la conexión transforma como una 1-forma

$$A \rightarrow \phi^* A \quad (4.47)$$

$S$  tiene una representación  $U_\phi$  del grupo de difeomorfismos definida por

$$U_\phi \Psi(A) = \Psi((\phi^*)^{-1} A) \quad (4.48)$$

La holonomía transforma entonces de la siguiente manera:

$$H(A, \gamma) \rightarrow H(\phi^* A, \gamma) = H(A, \phi^{-1} \gamma) \quad (4.49)$$

donde  $(\phi\gamma)(s) \equiv (\phi(\gamma(s)))$ . Entonces, una función cilíndrica  $\Psi_{\Gamma, f}[A]$  bajo un difeomorfismo se transforma en otra función cilíndrica  $\Psi_{\phi\Gamma, f}[A]$ . El producto escalar (4.36) no depende explícitamente del grafo por lo que es invariante bajo difeomorfismos espaciales.

## 4.4 Estados invariantes gauge e invariantes bajo difeomorfismos

En la sección anterior introdujimos el espacio cinemático  $\mathcal{K}$  el cual es la completación en la norma definida por (4.36) de  $S$ , el espacio de funcionales de onda arbitrarios de la conexión  $\Psi[A]$ . Los estados físicos deben ser invariantes ante la acción de todos los vínculos, esto es, deben ser invariantes gauge, invariantes bajo difeomorfismos, y deben ser solución al vínculo Hamiltoniano. Llamemos  $\mathcal{K}_0$  al espacio de estados invariantes gauge,  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  al espacio de estados invariantes gauge y además invariantes por difeomorfismos, y  $\mathcal{H}$  al espacio de soluciones del vínculo Hamiltoniano. En las próximas secciones construiremos los espacios  $\mathcal{K}_0$  y  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$ .

### 4.4.1 Estados invariantes gauge. Espacio $\mathcal{K}_0$

Para obtener una base del espacio  $\mathcal{K}_0$  podemos recurrir al concepto de redes de espines, introducido al comienzo del capítulo en el contexto de teorías de gauge en redes.

*Redes de espines.* Sea  $\Gamma$  un grafo en  $\Sigma$  formado por curvas  $\gamma$  a las que llamaremos aristas y denotamos por  $l$ . Llamamos nodos a las intersecciones de dichas curvas y las denotamos por  $n$ . Le llamamos  $m$  (*multiplicidad*) al número de aristas que empiezan y terminan en un nodo:  $m = m_{in} + m_{out}$ , siendo  $m_{in}$  el número de aristas que terminan en el nodo, y  $m_{out}$  el número de aristas que empiezan en él. Una vez elegido un orden y una orientación, asignamos a cada arista  $l$  una representación irreducible  $j_l$  del grupo. A cada nodo  $n$  le asignamos un intertwiner  $i_n$  entre las representaciones asociadas a las aristas adyacentes al nodo. A la terna  $(\Gamma, j_l, i_n)$  se la llama *red de espines en  $\Sigma$* . A la elección  $j_l$  y  $i_n$  se le llama color de las aristas y de los intertwiners respectivamente.

*Estados de redes de espines.* Sea  $S = (\Gamma, j_l, i_n)$  una red de espines con  $L$  aristas y  $N$  nodos. El estado  $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$  definido en (4.41) tiene  $L$  índices  $\alpha_l$  y  $L$  índices  $\beta_l$ . Los intertwiners tienen un conjunto de índices duales a estos, su contracción:

$$\begin{aligned} \Psi_S[A] = \langle A|S \rangle &\equiv \left( \otimes_l H^{j_l}(A, \gamma_l) \right) \cdot \left( \otimes_n i_n \right) \\ &= \langle A|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l \rangle \cdot \left( \otimes_n i_n \right) \end{aligned} \quad (4.50)$$

El índice  $\alpha_l$  de la arista  $l$  se contrae con el índice correspondiente del intertwiner en donde la arista empieza, mientras que el índice  $\beta_l$  se contrae con el del

intertwiner en donde termina. De (4.46) tenemos que bajo una transformación de gauge  $U_\lambda$  los estados  $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$  transforman:

$$U_\lambda |\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle = R_{\alpha'_1}^{j_1 \alpha_1}(\lambda^{-1}(x_{f_1})) R_{\beta_1}^{j_1 \beta'_1}(\lambda(x_{i_1})) \dots \\ R_{\alpha'_L}^{j_L \alpha_L}(\lambda^{-1}(x_{f_L})) R_{\beta_L}^{j_L \beta'_L}(\lambda(x_{i_L})) |\Gamma, j_l, \alpha'_L, \beta'_L\rangle \quad (4.51)$$

Teniendo en cuenta esto y la invariancia de los intertwiners bajo la acción del grupo (4.12), tenemos que los estados (4.50) son invariantes gauge. Dado que los estados  $|\Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l\rangle$  forman una base de  $\mathcal{K}$  y que su contracción con los intertwiners es invariante de gauge, los estados de redes de espines forman una base del espacio  $\mathcal{K}_0$ . El espacio  $S_0$  es el espacio de combinaciones lineales finitas de estados de redes de espines, el cual es denso en  $\mathcal{K}_0$ , mientras que  $S'_0$  es su dual.

#### 4.4.2 Invariancia bajo difeomorfismos. Espacio $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$

Un estado de red de espines no es invariante bajo difeomorfismos; la acción de un difeomorfismo modifica el grafo en el cual está basado el estado, ya sea moviendo el grafo o cambiando el orden o la orientación de sus aristas.

Teniendo esto en cuenta, es fácil notar que los estados invariantes por difeomorfismos no están en  $\mathcal{K}_0$  sino en  $S'_0$ , esto es, el espacio de los funcionales  $\Phi$  de los estados  $\Psi \in S_0$ .

Dado un difeomorfismo  $\phi$ , su acción sobre un elemento de  $S'_0$  está dada por

$$(U_\phi \Phi)(\Psi) \equiv \Phi(U_{\phi^{-1}} \Psi) \quad (4.52)$$

Siendo  $U_\phi$  la representación de  $\phi$  en  $S'_0$ . Entonces, un funcional  $\Phi$  invariante bajo difeomorfismos es aquel que cumple

$$\Phi(U_\phi \Psi) \equiv \Phi(\Psi) \quad (4.53)$$

Definimos ahora un mapa  $P_{\text{Diff}}$  que actúa en los funcionales  $\Psi[A]$  y da como resultado un funcional  $\Phi[\Psi]$ , su acción está definida por

$$(P_{\text{Diff}} \Psi)(\Psi') = \sum_{\Psi''=U_\phi \Psi} \langle \Psi'', \Psi' \rangle \quad (4.54)$$

donde la suma es sobre todos los estados  $\Psi''$  para los cuales existe un difeomorfismo  $\phi$  tal que  $\Psi'' = U_\phi \Psi$ . Esta suma es siempre finita, ya que los estados  $\Psi, \Psi'$  se pueden escribir como una combinación lineal finita de estados de redes de espines. Si un difeomorfismo sobre  $\Psi$  cambia el grafo, entonces lleva el estado a otro ortogonal a sí mismo, mientras que si cambia sólo su orientación y/o su orden, al ser estas operaciones discretas no hacen más que añadir una multiplicidad discreta a la suma. Los estados (4.54) forman el espacio de  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  de estados invariantes gauge e invariantes bajo difeomorfismos. El producto escalar en  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  está definido por

$$\langle P_{\text{Diff}} \Psi_S, P_{\text{Diff}} \Psi_{S'} \rangle_{\mathcal{K}_{\text{Diff}}} \equiv (P_{\text{Diff}} \Psi_S)(\Psi_{S'}) \quad (4.55)$$

### 4.4.3 Nudos y estados de spin-nudos

Llamamos *nudo* a una clase de equivalencia  $K$  bajo difeomorfismos de grafos  $\Gamma$  no orientados. Sean  $|S\rangle$  y  $|S'\rangle$  dos estados de redes de espines; su producto escalar en  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  es cero al menos que sus grafos estén relacionados por un difeomorfismo:

$$\langle S | P_{\text{Diff}} | S' \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \Gamma \neq \phi\Gamma' \\ \sum_k \langle S | g_k | S' \rangle & \text{si } \Gamma = \phi\Gamma' \end{cases} \quad (4.56)$$

donde denotamos por  $g_k$  a las operaciones discretas que no cambian el grafo. Entonces, dos estados son ortogonales a menos que estén “anudados” de la misma manera. Se puede entonces agrupar los elementos de una base de  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  en distintas clases  $K$ . Llamamos  $\mathcal{K}_K$  al subespacio de  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  generado por los estados de la base pertenecientes a la clase del nudo  $K$ :

$$\mathcal{K}_K = P_{\text{Diff}} K_\Gamma \quad (4.57)$$

para cualquier  $\Gamma \in K$ .

Los estados en  $\mathcal{K}_K$  se distinguen entre sí sólo por el color de sus aristas y de sus nodos y no son necesariamente ortonormales. Para obtener una base ortonormal entonces se debe realizar un proceso de ortonormalización a la forma cuadrática en (4.56). Denotamos por  $|s\rangle = |K, c\rangle$  a los estados resultantes de esa ortonormalización. Al índice discreto  $c$  se le llama *color del nudo*. A estos estados se les denomina *estados de spin-nudos*. Los nudos forman un conjunto discreto, por lo que el espacio  $\mathcal{K}_{\text{Diff}}$  admite una base ortonormal y es entonces separable. El “tamaño excesivo” del espacio de Hilbert cinemático  $\mathcal{K}$  en realidad no era más que gauge. Con esto concluimos la construcción del espacio cinemático cuántico.

### 4.4.4 Simetría axial

Si el espaciotiempo  $(M, g)$  es axisimétrico, las superficies espaciales  $\Sigma$  en las cuales foliamos la variedad  $M$  pueden ser a su vez foliadas en superficies bidimensionales  $\sigma$  (sobre las cuales definimos las coordenadas  $x, y$ ) perpendiculares al vector de Killing espacial. Recordar del capítulo anterior que en este caso, la conexión reducida por simetría toma la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{a}}_a^i = \tilde{\mathbf{a}}_a^i(x, y) \quad (4.58)$$

Para construir el espacio cinemático de la teoría reducida basta con considerar el espacio de las redes de spines basadas en holonomías de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  pues (4.58) no es más que un caso particular de la teoría completa. Dado que la conexión depende únicamente de las variables  $x, y$  y tiene tres componentes espaciales  $(x, y \text{ y } \phi)$ , para recuperar toda la información basta con tomar holonomías a lo largo de curvas contenidas en  $\sigma$  o perpendiculares a esta, sin necesidad de considerar caminos más generales [68]. Los estados de redes de spines toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Psi_S[A] = \langle A | S \rangle &\equiv \left( \otimes_l (H^{j_l}(A, \gamma_l)) \right) \cdot \left( \otimes_n i_n \right) \cdot \left( \otimes_l (H^{j_k}(A, \gamma_{\phi_k})) \right) \\ &= \langle A | \Gamma, j_l, \alpha_l, \beta_l, j_k, \alpha_k, \beta_k \rangle \cdot \left( \otimes_n i_n \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Los caminos  $\gamma_l$  están contenidos en la superficie  $\sigma$  mientras que los caminos  $\gamma_{\phi_l}$  son perpendiculares a la misma. Las holonomías a lo largo de  $\gamma_{\phi_k}$  toman una forma más simple por no depender la conexión de la variable  $\phi$ :

$$(H^{jk}(a, \gamma_{\phi_k})) = P \left( e^{\int d\phi \mathbf{a}_\phi^i(\tau_i)^{jk}} \right) = e^{2\pi n \mathbf{a}_\phi^i(\tau_i)^{jk}} \quad (4.60)$$

donde la conexión  $\mathbf{a}_a^i$  está evaluada en un punto  $(x, y)$  de la superficie  $\sigma$  y  $n$  es un número natural correspondiente al número de vueltas que la curva  $\gamma_\phi$  da alrededor del eje de simetría. Las holonomías (4.60) se denominan puntuales, pues bajo una transformación de gauge  $g$  transforman de la siguiente manera:

$$(H^{jk}(a, \gamma_{\phi_k})) \rightarrow U(g(x, y))(H^{jk}(a, \gamma_{\phi_k}))U^{-1}(g(x, y)) \quad (4.61)$$

Siendo  $U$  la representación del elemento del grupo  $g$ . La invariancia de gauge de estos estados está, al igual que en la teoría completa, garantizada por la contracción con los intertwiners. La imposición del vínculo de difeomorfismos, si bien es también análoga a la de la teoría completa, es un poco más sutil y requiere algo de discusión. Recordemos del capítulo anterior que el vínculo de difeomorfismos en términos de las variables reducidas  $\mathbf{a}_a^i, \mathbf{e}_i^a$  toma la siguiente forma:

$$d(\vec{N}) = \frac{2}{\beta} \int dx dy N^\alpha \left( \mathbf{e}_i^b \partial_a \mathbf{a}_b^i - \partial_b (\mathbf{e}_i^b \mathbf{a}_a^i) + \delta_a^\phi \delta_3^i \varepsilon_{ijk} \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_k^b \right) \quad (4.62)$$

Y su acción en  $\mathbf{a}_a^i$ :

$$\left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), d(\vec{N}) \right\} = \left( \mathbf{a}_b^i N_{,a}^b + N^b \mathbf{a}_{a,b}^i + \varepsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^j \mathbf{a}_a^k \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (4.63)$$

Si el shift tiene la forma  $N = N^\alpha \partial_\alpha$ , la acción anterior se reduce a

$$\left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), d(N^\alpha \partial_\alpha) \right\} = \left( \mathbf{a}_\alpha^i N_{,a}^\alpha + N^\alpha \mathbf{a}_{a,\alpha}^i \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (4.64)$$

Escrito en términos de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i = \mathbf{a}_a^i + \delta_a^\phi \delta_3^i$ :

$$\left\{ \tilde{\mathbf{a}}_a^i(\vec{x}), d(N^\alpha \partial_\alpha) \right\} = \left( \tilde{\mathbf{a}}_\alpha^i N_{,a}^\alpha + N^\alpha \tilde{\mathbf{a}}_{a,\alpha}^i \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (4.65)$$

El lado derecho de la expresión anterior se puede identificar como la derivada de Lie de  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  en la dirección de  $N^\alpha \partial_\alpha$ . Entonces, la acción del vínculo de difeomorfismos en una dirección perpendicular al vector de Killing sobre las variables reducidas es análoga a la acción sobre las variables originales. Al imponer estos vínculos sobre los estados de redes de espines, obtenemos que aquellos grafos que están anudados de la misma manera en la 2-superficie  $\sigma$ , (esto es, que pertenezcan a la misma clase de equivalencia bajo un difeomorfismo en  $\sigma$ ) son equivalentes entre sí. Considerando ahora un shift en la dirección perpendicular al plano  $N = N^\phi \partial_\phi$ , tenemos la siguiente acción del vínculo sobre  $\mathbf{a}_a^i$ :

$$\left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), d(N^\phi \partial_\phi) \right\} = \left( \mathbf{a}_\phi^i N_{,a}^\phi + N^\phi \underbrace{\mathbf{a}_{a,\phi}^i}_0 + \varepsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^j \mathbf{a}_a^k \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (4.66)$$

Esto no tiene la forma de una derivada de Lie; en principio parecería que la acción del vínculo  $d(0, 0, N^\phi)$  no es un difeomorfismo por lo que su imposición

sobre los estados de redes de spines no sería análoga al caso anterior. En el capítulo anterior se verificó que esto se debe a la forma en la cual se impuso la simetría axial sobre las variables canónicas. La condición

$$\mathcal{L}_{\lambda^a \partial_a} A_a^i = \varepsilon_{ijk} \lambda^j A_a^k \quad (4.67)$$

implica que el vínculo de difeomorfismos en la dirección transversal al plano tenga una parte proporcional al vínculo de Gauss en la dirección interna 3. Reescribiendo  $d(N^\phi \partial_\phi)$  en términos de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  y redefiniendo  $\lambda^3 \rightarrow \lambda^3 + N^\phi$  (siendo  $\lambda^3$  el multiplicador del vínculo  $g(0, 0, \lambda^3)$ ) se obtiene:

$$\left. \{ \tilde{\mathbf{a}}_a^i(\vec{x}), d(N^\phi \partial_\phi) \} = (\tilde{\mathbf{a}}_\phi^i N_{,a}^\phi + \underbrace{N^\phi \tilde{\mathbf{a}}_{a,\phi}^i}_0) \right|_{\vec{x}} \quad (4.68)$$

El lado derecho de la igualdad anterior es la derivada de Lie de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  a lo largo de  $N^\phi \partial_\phi$ . Entonces la acción del vínculo  $d(N^\phi \partial_\phi)$  es análoga al caso de la teoría completa: un difeomorfismo en la dirección del vector de Killing. Al imponer el vínculo, obtenemos que dos superficies bidimensionales conectadas por una deformación en esta dirección son equivalentes entre sí.

## 4.5 Operadores básicos

### 4.5.1 Holonomías y Flujos

Las dos variables básicas de la teoría son la conexión  $A_a^i$  y su momento conjugado, la tríada  $E_i^\alpha$ . Los estados cuánticos son funcionales de la conexión  $\Psi[A]$ . Siguiendo el procedimiento descrito en el apéndice E, definimos los operadores

$$\hat{A}_a^i \Psi[A] = A_a^i \Psi[A] \quad (4.69)$$

$$\hat{E}_i^\alpha \Psi[A] = -i\hbar 8\pi\gamma G \frac{\delta}{\delta A_a^i} \Psi[A] \quad (4.70)$$

Estos operadores no están bien definidos en el espacio  $\mathcal{K}$  pues el resultado de aplicar cualquiera de ellos al estado  $\Psi[A]$  no es invariante bajo transformaciones de gauge ni bajo difeomorfismos espaciales. Por esto, es necesario definir operadores que sean función de los operadores básicos (4.69)-(4.70) y que sí estén bien definidos en el espacio  $\mathcal{K}$ .

Una holonomía  $H^j(A, \gamma)$  (donde  $j$  es el spin de su representación) es un funcional de la conexión por lo que pertenece a  $\mathcal{K}$ , si la promovemos a un operador con acción multiplicativa sobre los estados  $\Psi[A]$ :

$$\hat{H}^j(\gamma) \Psi[A] = H^j(A, \gamma)[A] \Psi[A] \quad (4.71)$$

Esto sí está bien definido en  $\mathcal{K}$ . De hecho, cualquier función cilíndrica está bien definida como operador multiplicativo por ser estas funcionales de la conexión  $A$ .

Luego, definimos la cantidad  $E_i(S)$  como el flujo de la tríada a través de la 2-superficie  $S$ :

$$E_i(S) = \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 n_a E_i^a \quad (4.72)$$

siendo  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$  las coordenadas con las cuales parametrizamos la superficie  $S$  y  $n_a$  el vector normal a la misma:

$$n_a(\vec{\sigma}) = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^b(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^c(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \quad (4.73)$$

Si promovemos (4.72) a un operador, toma la siguiente forma

$$E_i(\mathcal{S}) = -i\hbar 8\pi G \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 n_\alpha(\vec{\sigma}) \frac{\delta}{\delta A_\alpha^i(x(\vec{\sigma}))} \quad (4.74)$$

La acción de la derivada funcional sobre una holonomía  $H^j(A, \gamma)$  está dada por [55, 67]

$$\frac{\delta}{\delta A_\alpha^i(x)} H^j(A, \gamma) = \int ds \dot{\gamma}(s) \delta^3(\gamma(s), x) [H^j(A, \gamma_1) \tau_i^{(j)} H^j(A, \gamma_2)] \quad (4.75)$$

donde  $\gamma(s)$  es una parametrización arbitraria de la curva  $\gamma$ , y el punto  $s$  la divide en  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , mientras que el  $j$  en  $\tau_i^{(j)}$  indica en qué representación se encuentran las matrices de Pauli.

Entonces, la acción de  $\hat{E}_i(S)$  sobre la holonomía  $H(A, \gamma)$  está dada por:

$$\begin{aligned} E_i(\mathcal{S}) H^j(A, \gamma) &= -i\hbar 8\pi G \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\gamma(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \frac{\delta}{\delta A_\gamma^i(\vec{x}(\vec{\sigma}))} H^{(j)}(A, \gamma) \\ &= -i\hbar 8\pi G \int_S \int_\gamma d\sigma^1 d\sigma^2 ds \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\gamma(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^\gamma}{\partial s} \delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}), \vec{x}(s)) \\ &\quad \times H^{(j)}(A, \gamma_1) \tau_i^{(j)} H^j(A, \gamma_2) \end{aligned} \quad (4.76)$$

donde se supuso que la curva  $\gamma$  intersecta a la superficie  $S$  en un solo punto  $P$ , el cual separa a  $\gamma$  en  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . Si consideramos el siguiente cambio de variable de  $(\sigma^1, \sigma^2, s)$  a  $(x^1, x^2, x^3)$ :

$$x^a(\sigma^1, \sigma^2, s) = x^a(\sigma^1, \sigma^2) + x^a(s) \quad (4.77)$$

cuyo jacobiano es precisamente

$$J = \frac{\partial(x^1, x^2, x^3)}{\partial(\sigma^1, \sigma^2, s)} = \epsilon_{abc} \frac{\partial x^a}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^b}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^c}{\partial s} \quad (4.78)$$

se puede verificar que (4.76) da como resultado:

$$E_i(\mathcal{S}) H^j(A, \gamma) = \pm i\hbar 8\pi G H^j(A, \gamma_1) \tau_i^{(j)} H^j(A, \gamma_2) \quad (4.79)$$

La acción del operador (4.74) es introducir la matriz  $\pm i\hbar 8\pi G \tau_i$  en el punto de intersección de la curva  $\gamma$  y la superficie  $S$ . Si hay varios puntos  $P$  de intersección, el resultado anterior se extiende a

$$E_i(\mathcal{S}) H^j(A, \gamma) = \sum_{P \in (S \cap \gamma)} \pm i\hbar 8\pi G H^j(A, \gamma_1^P) \tau_i^{(j)} H^j(A, \gamma_2^P) \quad (4.80)$$

A partir de este resultado se puede calcular fácilmente la acción de  $E_i(S)$  sobre estados de redes de spines. Este operador no sólo no es invariante gauge sino que además su transformación es complicada debido a la integral de superficie.

### 4.5.2 Operador área

El área de una 2-superficie  $S$  (descrita por las coordenadas  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$ ) se puede expresar en términos de la tríada de la siguiente manera:

$$A(S) = \int_S d^2\sigma E \quad (4.81)$$

Con  $E = \sqrt{n_\alpha E_i^\alpha n_\beta E_i^\beta}$ . Se puede construir el siguiente operador discreto asociado a esta cantidad clásica:

$$\hat{E}^2(S) = \sum_i E_i(S) E_i(S) \quad (4.82)$$

Siendo  $E_i(S)$  el operador cuya acción está dada por (4.80). Dado un estado de red de espines  $|S\rangle$  con un grafo  $\Gamma$ , supongamos que este intersecta con  $S$  únicamente en un punto  $P$ , contenido en una única arista  $\gamma^P$  la cual tiene spin  $j_P$  en  $\Gamma$ . El operador  $E_i(S)$  actuará únicamente en la holonomía a lo largo de esta arista de acuerdo a (4.80):

$$\hat{E}_i(S) H^{j_P}(A, \gamma^P) = \pm i\hbar 8\pi G H^{j_P}(A, \gamma_1^P) \tau_i H^{j_P}(A, \gamma_2^P) \quad (4.83)$$

Al actuar con el segundo operador  $\hat{E}_i(S)$ , este introduce otra matriz  $\tau_i$  entre  $H^{j_P}(A, \gamma_1^P)$  y  $H^{j_P}(A, \gamma_2^P)$ :

$$\begin{aligned} \sum_i E_i(S) E_i(S) H^{j_P}(A, \gamma^P) &= (i\hbar 8\pi G)^2 \sum_i \left( H^{j_P}(A, \gamma_1^P) \tau_i^{(j_P)} \tau_i^{(j_P)} H^{j_P}(A, \gamma_2^P) \right) \\ &= (8\pi G\hbar)^2 j_P(j_P + 1) H^{j_P}(A, \gamma_1^P) H^{j_P}(A, \gamma_2^P) \\ &= (8\pi G\hbar)^2 j_P(j_P + 1) H^{j_P}(A, \gamma^P) \end{aligned} \quad (4.84)$$

Donde se usó que  $-\sum_i \tau_i^{(j_P)} \tau_i^{(j_P)} = j_P(j_P + 1) \text{Id}$ , siendo  $j_P$  la representación de la holonomía  $H^{j_P}(A, \gamma^P)$  e  $\text{Id}$  la matriz identidad. Entonces:

$$\hat{E}^2(S) |S\rangle = (8\pi G\hbar)^2 j_P(j_P + 1) |S\rangle \quad (4.85)$$

Si  $\Gamma$  intersecta con  $S$  en más de un punto, al aplicar  $\hat{E}^2(S)$  sobre  $|S\rangle$  tendremos matrices  $\tau_i$  contraídas en diferentes puntos, por lo que el resultado no será ni siquiera invariante gauge. Para obtener un operador invariante de gauge, vamos a particionar la superficie  $S$  en  $N$  superficies  $S_n$ ,  $n = 1, \dots, N$  tales que  $\Gamma$  intersecta con cada una de ellas a lo sumo una vez. Con esto, definimos el operador

$$A(S) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_n \sqrt{E^2(S_n)} \quad (4.86)$$

Aplicando este operador a un estado  $|S\rangle$  de red de espines con grafo  $\Gamma$ :

$$A(S) |S\rangle = 8\pi G\hbar \sum_{P \in (S \cap \Gamma)} \sqrt{j_P(j_P + 1)} |S\rangle \quad (4.87)$$

Vemos entonces que el área de la superficie  $S$  se obtiene como la suma de las contribuciones de las aristas que intersectan con ella.

Una arista cuyo spin sea  $j$  y que intersecte con la superficie contribuye una cantidad de  $8\pi G\hbar\sqrt{j(j+1)}$  al área total de la misma. Notar que el valor más pequeño posible en (4.87) se da cuando una sola arista intersecta la superficie  $S$  y su valencia es  $1/2$ , en ese caso, el área de la superficie será

$$A_0 = 4\sqrt{3}\hbar\pi Gc^{-3} \sim 10^{-66}\text{cm}^2 \quad (4.88)$$

La cantidad  $A_0$  es una especie de cuanto de área. Ningun área puede ser medida que sea más pequeña que esta: El área está discretizada. Esto no fue impuesto a priori sino que es una consecuencia directa de la cuantización de la teoría.

### Simetría axial

Las superficies compatibles con la simetría axial son aquellas paralelas a la 2-superficie  $\sigma$  sobre la cual están definidas las variables canónicas, o aquellas que tienen la forma  $\gamma_\alpha \times \Phi$ , siendo  $\gamma_\alpha$  una curva contenida en  $\sigma$  y  $\Phi$  un intervalo en la recta real. Consideremos primero el caso en el cual la superficie  $S$  es de la forma  $\gamma_\alpha \times \Phi$ . Dada una holonomía en una representación  $j_P$  a lo largo de una curva  $\gamma_\alpha^P$  contenida en la 2-superficie  $\sigma$  tal que esta intersecta con  $S$  únicamente en un punto  $P$ , usando (4.84) tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_i E_i(S)E_i(S)H^{j_P}(A, \gamma_\alpha^P) &= (i\hbar 8\pi G)^2 \sum_i \left( H^{j_P}(A, \gamma_{\alpha_1}^P) \tau_i^{(j_P)} \tau_i^{(j_P)} H^{j_P}(A, \gamma_{\alpha_2}^P) \right) \\ &= (8\pi G\hbar)^2 j_P(j_P + 1) H^{j_P}(A, \gamma_{\alpha_1}^P) H^{j_P}(A, \gamma_{\alpha_2}^P) \\ &= (8\pi G\hbar)^2 j_P(j_P + 1) H^{j_P}(A, \gamma_\alpha^P) \end{aligned} \quad (4.89)$$

Por otro lado, si la superficie  $S$  es paralela a  $\sigma$ , sea  $H^{j_P}(A, \gamma_\phi^P)$  una holonomía puntual a lo largo de una órbita (no necesariamente cerrada) en la dirección del vector de Killing tal que intersecta con  $S$  un punto  $P$ , entonces:

$$\begin{aligned} E_i(S)H(A, \gamma_\phi^P) &= -i\hbar 8\pi G \int_S d\sigma^1 d\sigma^2 \epsilon_{\phi\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\gamma(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \frac{\delta}{\delta A_\phi^i(\vec{x}(\vec{\sigma}))} H(A, \gamma_\phi^P) \\ &= -i\hbar 8\pi G \int_S \int_\gamma d\sigma^1 d\sigma^2 ds \epsilon_{\phi\beta\gamma} \frac{\partial x^\beta(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^1} \frac{\partial x^\gamma(\vec{\sigma})}{\partial \sigma^2} \frac{\partial x^\phi}{\partial s} \delta^3(\vec{x}(\vec{\sigma}), \vec{x}(s)) \\ &\quad \times H(A, \gamma_{\phi_1}^P) \tau_i H(A, \gamma_{\phi_2}^P) \end{aligned} \quad (4.90)$$

Tanto la coordenada  $x^\phi$  como el parámetro  $s$  se pueden identificar con la coordenada  $\phi$  adaptada al vector de Killing. La integral en  $s$  entonces únicamente selecciona el valor de  $\phi$  en el cual  $\gamma_\phi^P$  intersecta con  $S$ . El resto de las cantidades no dependen de  $\phi$ . La integral en la 2-superficie  $\sigma$  se puede realizar de forma completamente análoga al caso de la teoría completa. Entonces, el resultado de aplicar  $E^2(S)$  a  $U(A, \gamma_\phi^P)$ :

$$\hat{E}^2(S)H(A, \gamma_\phi^P) = (8\pi G\hbar)^2 j_P(j_P + 1)H(A, \gamma_\phi^P) \quad (4.91)$$

Para ambos tipos de superficie, si un estado está basado en un grafo  $\Gamma$  que intersecta en más de un punto con  $S$ , el operador  $A(S)$  se construye de forma

idéntica al caso general: Entonces, dada una superficie  $S$  (ya sea esta paralela a  $\sigma$  o de la forma  $\gamma_\alpha \times \Phi$ ) y dado un estado  $|S\rangle$  basado en un grafo  $\Gamma$  que intersecta a  $S$  en más de un punto se tiene, análogamente a la teoría completa:

$$A(S) |S\rangle = 8\pi G\hbar \sum_{P \in (S \cup \Gamma)} \sqrt{j_p(j_p + 1)} |S\rangle \quad (4.92)$$

Siendo  $j_p$  el spin de la representación de la holonomía correspondiente a cada intersección de la superficie  $S$  con el grafo  $\Gamma$ .

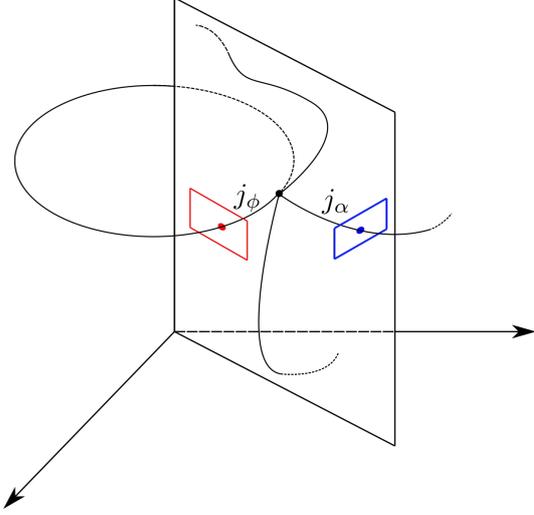


Figura 4.2: Tipos de superficies compatibles con la simetría axial. La superficie en rojo es transversal a las órbitas del vector de Killing mientras que la azul es del tipo  $\gamma_\alpha \times \Phi$  descrito al comienzo de la subsección.

### 4.5.3 Operador Volumen

Clásicamente, el volumen de una región espacial  $R$  se puede escribir en términos de la tríada densitizada:

$$V_R[E] = \int_{\mathcal{R}} d^3x \sqrt{\frac{1}{3!} |\varepsilon_{abc} \varepsilon^{ijk} E_i^a E_j^b E_k^c|} \quad (4.93)$$

Vamos a construir ahora, siguiendo [10], un operador  $\hat{V}_R[E]$  sobre el espacio de los estados de las redes de spines correspondiente a la cantidad clásica (4.93). El primer paso a seguir es introducir una regularización de este operador, considerando primero una expresión clásica aproximada para el volumen de  $R$ . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $R$  se puede cubrir con un solo sistema de coordenadas  $\{x^a\}$ . Consideremos ahora una región de  $\Sigma$  que contiene a  $R$  la cual puede ser cubierta por una familia de celdas cúbicas  $\mathcal{C}$  cuyas caras son paralelas a los planos de coordenadas. Dentro de cada celda consideremos una terna ordenada de 2-superficies orientadas  $S^a$ ,  $a = 1, 2, 3$  definidas por  $x^a = cte..$  Vamos ahora a particionar  $R$  con estas celdas cúbicas,

considerando, si alguno de los cubos no está contenido en  $R$ , solamente su intersección con esta. Dada una de estas particiones, definimos para cada cubo  $C \in \mathcal{C}$  la siguiente cantidad clásica:

$$q_C[E] := \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} E_i(S_a) E_j(S_b) E_k(S_c) \quad (4.94)$$

Si la arista de estos cubos es  $L_C$ , cuando  $L_C \rightarrow 0$ , el flujo  $E_i(S_a)$  tiende a  $L_C^2 E_i^a$ . Entonces, en el límite  $L_C \rightarrow 0$  la cantidad  $q_C[E]$  tiende a  $L_C^6$  veces el determinante de  $E_i^a$  evaluado en cualquier punto interno de la celda  $C$ . Dada entonces una partición de  $R$ , podemos construir, a partir de (4.94), una expresión aproximada para el volumen de  $R$ :

$$V_R^{\mathcal{C}}[E] := \sum_{C \in \mathcal{C}} \sqrt{|q_C[E]|} \quad (4.95)$$

Dado  $\varepsilon > 0$  tal que  $L_C < \varepsilon$  para todo  $C \in \mathcal{C}$ , tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} V_R^{\mathcal{C}}[E] = V_R[E] \quad (4.96)$$

Dado que la cantidad  $q_C$  se escribe únicamente en términos del flujo de la tríada densitizada a través de superficies bidimensionales, podemos promover esta cantidad a un operador en el espacio de las funciones cilíndricas:

$$\hat{q}_C[E] := \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} \varepsilon_{abc} \hat{E}_i(S_a) \hat{E}_j(S_b) \hat{E}_k(S_c) \quad (4.97)$$

Entonces, se puede construir un operador asociado al volumen de la región  $R$  particionando la misma con una familia  $\mathcal{C}$  de regiones cúbicas  $C$ :

$$\hat{V}_R^{\mathcal{C}}[E] := \sum_{C \in \mathcal{C}} \sqrt{|\hat{q}_C[E]|} \quad (4.98)$$

Los operadores  $\hat{E}_i(S_a)$  se pueden escribir en términos de operadores de momento angular  $J_{x,e}^i$  asociados a un punto  $x \in \Sigma$  y una arista  $e$  que tiene por uno de sus extremos a  $x$ ;  $i$  es un índice en  $\mathfrak{su}(2)$ . Dada una función cilíndrica de la forma  $\Psi_{\Gamma,f}[A] = f(H(A, \gamma_{e_1}), \dots, H(A, \gamma_e), \dots, H(A, \gamma_{e_n}))$ , la acción de  $J_{x,e}^i$  sobre la misma está dada por

$$J_{x,e}^i \Psi_{\Gamma,f}[A] = i X_e^i \Psi_{\Gamma,f}[A] \quad (4.99)$$

La acción de  $X^i$  está definida por

$$X_e^i \Psi_{\Gamma,f}[A] = \begin{cases} (H(A, \gamma) \tau_i)_B^A \frac{\partial f}{\partial (H(A, \gamma))_B^A} & \text{si } e \text{ es saliente a } x \\ -(\tau_i H(A, \gamma))_B^A \frac{\partial f}{\partial (H(A, \gamma))_B^A} & \text{si } e \text{ es entrante a } x \end{cases} \quad (4.100)$$

Luego, con una regularización adecuada, se puede probar que [9]

$$\hat{E}^i(S) = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} \sum_{[e]} \kappa_S([e]) J_{x,e}^i \quad (4.101)$$

La suma se hace en todos los puntos  $x$  de la superficie  $S$ , mientras que  $[e]$  denota las clases de equivalencia de las aristas que tienen por uno de sus extremos al

punto  $x$  y coinciden con  $e$  a menos de la orientación en un intervalo finito. El número  $\kappa_S([e])$  toma los siguientes valores:

$$\kappa_S([e]) = \begin{cases} 0, & \text{si } e \text{ es tangencial a } S \text{ o no interseca con la misma,} \\ +1, & \text{si } e \text{ tiene una única intersección con } S \text{ y está encima de la misma} \\ -1, & \text{si } e \text{ tiene una única intersección } S \text{ y está debajo de la misma} \end{cases} \quad (4.102)$$

Vamos a verificar esta igualdad en un caso simple. Dada una 2-superficie  $S$ , un punto  $P \in S$  y una arista  $\gamma$  tal que  $S \cap \gamma = P$ . Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  aristas tales que  $P$  es uno de sus extremos y además  $\gamma_1 \circ \gamma_2 = \gamma$ . Elegimos una orientación de  $S$  tal que  $\gamma_2$  está encima de la misma y  $\gamma_1$  está por debajo; por otro lado, la orientación de  $\gamma$  es tal que  $P$  es el extremo final de  $\gamma_1$  y el extremo inicial de  $\gamma_2$ . Consideremos la función  $f = (H(A, \gamma))_B^A$ , esto es, una componente de la holonomía a lo largo de  $\gamma$ . La función  $f$  se puede escribir de la siguiente manera:

$$f = (H(A, \gamma_2))_C^A (H(A, \gamma_1))_B^C \quad (4.103)$$

La acción de (4.101) sobre  $f$  está dada por:

$$\hat{E}^i(S)f = \frac{1}{2} \sum_{x \in S} \sum_{[e]} \kappa_S([e]) J_{x,e}^i f = \frac{1}{2} (J_{P,\gamma_2}^i - J_{P,\gamma_1}^i) f \quad (4.104)$$

Dado que  $\gamma$  es la única arista que interseca con  $S$ , en la segunda igualdad se usó que  $P$  es el único punto de  $S$  que contribuye a la suma en  $x$ . Luego, como la suma en  $e$  se hace en todas las aristas que tengan a  $P$  como un extremo, tendremos las contribuciones de  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ . La diferencia de signo entre ambos sumandos en el último paréntesis se debe a que dada las orientaciones de  $S$  y  $\gamma$  elegidas, el factor  $\kappa_S$  vale 1 para  $\gamma_2$  y  $-1$  para  $\gamma_1$ . Usando (4.99) y (4.100):

$$\begin{aligned} J_{P,\gamma_2}^i f &= i \left( (H(A, \gamma_2) \tau_i)_{C'}^{A'} \right) \frac{\partial}{\partial (H(A, \gamma_2))_{C'}^{A'}} \left[ (H(A, \gamma_2))_C^A (H(A, \gamma_1))_B^C \right] \\ &= (H(A, \gamma_2) \tau_i)_C^A (H(A, \gamma_1))_B^C \end{aligned} \quad (4.105)$$

$$\begin{aligned} J_{P,\gamma_1}^i f &= i \left( -\tau_i (H(A, \gamma_1))_{B'}^{C'} \right) \frac{\partial}{\partial (H(A, \gamma_2))_{B'}^{C'}} \left[ (H(A, \gamma_2))_C^A (H(A, \gamma_1))_B^C \right] \\ &= - (H(A, \gamma_2))_C^A (\tau_i H(A, \gamma_1))_B^C \end{aligned} \quad (4.106)$$

Introduciendo estos resultados en (4.104):

$$\hat{E}^i(S) (H(A, \gamma))_B^A = (H(A, \gamma_2))_C^A (\tau_i)_D^C (H(A, \gamma_1))_B^D \quad (4.107)$$

Entonces:

$$\hat{E}^i(S) H(A, \gamma) = H(A, \gamma_2) \tau_i H(A, \gamma_1) \quad (4.108)$$

resultado que coincide con (4.80). Reescribiendo (4.97) en términos de los operadores de momento angular:

$$\begin{aligned} \hat{q}_C &= \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \hat{E}^i(S_a) \hat{E}^j(S_b) \hat{E}^k(S_c) \\ &= \frac{1}{48} \epsilon_{ijk} \epsilon_{abc} \sum_{x_1 \in S_a} \sum_{x_2 \in S_b} \sum_{x_3 \in S_c} \sum_{[e_1], [e_2], [e_3]} \kappa^a([e_1]) \kappa^b([e_2]) \kappa^c([e_3]) J_{x_1, e_1}^i J_{x_2, e_2}^j J_{x_3, e_3}^k \end{aligned} \quad (4.109)$$

donde se definió  $\kappa^a([e]) := \kappa_{S^a}([e])$ . Usando las relaciones de conmutación

$$\left[ J_{x,e}^i, J_{x',e'}^j \right] = i\delta_{x,x'}\delta_{[e],[e']}\varepsilon_k^{ij} J_{x,e}^k \quad (4.110)$$

y el hecho de que los operadores de momento angular son auto adjuntos, se puede probar que  $\hat{q}_C$  es también un operador auto adjunto: Esencialmente, si  $[e_i] = [e_j]$ , entonces el sumando correspondiente en (4.109) es cero debido al factor  $\varepsilon_{abc}\kappa^a\kappa^b\kappa^c$ ; entonces, (4.109) está formado por suma de productos de operadores de momento angular correspondientes a aristas diferentes los cuales conmutan entre sí [10]. Podemos entonces tomar el valor absoluto y la raíz cuadrada de  $\hat{q}_C$  para construir un operador asociado al volumen aproximado de la región  $R$ :

$$\hat{V}_R^{\mathcal{C}} = \sum_{C \in \mathcal{C}} |\hat{q}_C|^{1/2} \quad (4.111)$$

Vamos a pedir ahora que la partición de  $R$  cumpla las siguientes condiciones adaptadas al grafo  $\Gamma$  de la función cilíndrica sobre la cual actúa:

- Cada vértice  $v$  está contenido en el interior de una celda  $C$  y es además la intersección de las tres superficies  $S^1, S^2$  y  $S^3$  correspondientes a dicha celda. Además, cada celda  $C$  contiene a lo sumo un vértice de  $\Gamma$ .
- Si una celda  $C$  no contiene ningún vértice, entonces la terna de superficies correspondientes a esta intersección a  $\Gamma$  en a lo sumo dos puntos.

Si la partición cumple estas condiciones, entonces se puede ver fácilmente que si una celda  $C$  no contiene ningún vértice, su contribución en (4.109) es nula debido al factor  $\varepsilon_{abc}$ . Luego, si la celda contiene un vértice  $v$ , es fácil ver en (4.109) que la única contribución a las sumas en  $x_1, x_2, x_3$  viene de  $v$  pues este es el único punto dentro de  $C$  el cual tiene al menos tres aristas adyacentes diferentes. Entonces, dada una función cilíndrica  $\Psi_{\Gamma,f}$  se tiene que

$$\hat{q}_C \Psi_{\Gamma,f} = \frac{1}{48} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{abc} \sum_{[I],[J],[K]} \kappa^a([e_I]) \kappa^b([e_J]) \kappa^c([e_K]) J_{v,e_I}^i J_{v,e_J}^j J_{v,e_K}^k \Psi_{\Gamma,f} \quad (4.112)$$

donde  $I, J$  y  $K$  denotan a las aristas que pasan por el vértice  $v$ . La acción de este operador depende de las superficies  $S^a$  únicamente a través de sus propiedades en el vértice  $v$ ; entonces, se mantiene invariante al refinar la partición y hacer tender la celda  $C$  a  $v$ . Además, si consideramos el espacio de funciones cilíndricas  $\text{Cyl}_{\Gamma'}$  basadas en un grafo  $\Gamma'$  tal que este difiere de  $\Gamma$  en a lo sumo vértices bivalentes, la acción de (4.109) sobre tales vértices es nula, por lo que el operador volumen definido sobre  $\text{Cyl}_{\Gamma'}$  coincide con aquel definido para  $\text{Cyl}_{\Gamma}$ .

### Operador volumen promediado

El operador (4.111) depende del sistema de coordenadas que elegimos a través del factor

$$\kappa([e_I], [e_J], [e_K]) := \varepsilon_{abc} \kappa^a([e_1]) \kappa^b([e_2]) \kappa^c([e_3]) \quad (4.113)$$

Para eliminar esta dependencia, se puede realizar un promediado como se describe en [10]. Lo primero que hay que notar, es que si bien en principio uno tiene libertad infinita en los sistemas de coordenadas que puede elegir, la dependencia de (4.111) del sistema de coordenadas se da únicamente a través del factor  $\kappa([e_I], [e_J], [e_K])$ , por lo que esta libertad resulta ser en realidad finita. Para simplificar vamos a centrarnos en una única celda  $C$  de una partición de la región  $R$  adaptada a un grafo  $\Gamma$ , considerando dos sistemas de coordenadas dentro de la misma como equivalentes si dan como resultado el mismo  $\kappa([e_I], [e_J], [e_K])$  para todas las ternas de aristas del grafo  $\Gamma$  que pasan por el vértice  $v \in \Gamma$ . Dadas dos clases de equivalencia y un sistema de coordenadas en una de ellas, se puede obtener a partir de este otro sistema de coordenadas perteneciente a la otra clase de equivalencia mediante la acción de un elemento del grupo  $GL(3)^+$  de transformaciones lineales que preservan la orientación. La componente diagonal de este grupo  $\text{diag } GL(3)^+$  únicamente reescala las coordenadas, por lo que para deshacerse de la dependencia de las coordenadas basta con promediar en el grupo  $GL(3)^+ / \text{diag } GL(3)^+$ . Los sistemas de coordenadas relevantes entonces se pueden identificar con un conjunto abierto  $\mathcal{S}$  del espacio  $S^2 \times S^2 \times S^2$ , descrito por seis coordenadas a las que llamaremos  $\theta^A$ ,  $A = 1, \dots, 6$ . Dada una partición adaptada de  $R$  formada por una familia de celdas cúbicas  $\mathcal{C}$ , dada  $C \in \mathcal{C}$  y un sistema de coordenadas  $\{x^a\}$  centrado en  $v \in \Gamma$ , se puede obtener a partir de este otro sistema  $\{x^a(\theta^A)\}$  mediante la acción de un elemento  $\theta^A \in \mathcal{S}$ . Con este nuevo sistema podemos construir otra partición adaptada a  $\Gamma$ . Sea  $C(\theta)$  la celda en esta nueva partición que contiene al vértice  $v$ , para cada  $\theta^A \in \mathcal{S}$  obtenemos un operador  $\hat{q}_C^\theta$  reemplazando  $C \rightarrow C(\theta)$  en (4.109). Dada una función de probabilidad normalizada  $\mu(\theta)$  tal que  $\int_{\mathcal{S}} d\theta^6 \mu(\theta) = 1$ , el promedio de  $\hat{q}_C^\theta$  de  $\hat{q}_C^\theta$  está dado por

$$\hat{q}_C^{\text{av}} \Psi_{\Gamma, f} = \int_{\mathcal{S}} d^6 \theta \mu(\theta) \hat{q}_C^\theta \Psi_{\Gamma, f} \quad (4.114)$$

$$= \frac{1}{48} \sum_{I, J, K} \kappa^{\text{av}}([e_I], [e_J], [e_K]) \epsilon_{ijk} J_{v, e_I}^i J_{v, e_J}^j J_{v, e_K}^k \Psi_{\Gamma, f} \quad (4.115)$$

siendo

$$\kappa^{\text{av}}([e_I], [e_J], [e_K]) = \int_{\mathcal{S}} d^6 \theta \mu(\theta) \kappa([e_I], [e_J], [e_K], \theta) \quad (4.116)$$

En [10] se prueba la existencia de una medida  $\mu(\theta)$  tal que el operador Volumen es invariante bajo difeomorfismos. Además, el requerimiento de invariancia bajo difeomorfismos determina  $\kappa^{\text{av}}$  (y por lo tanto el operador Volumen) a menos de una constante multiplicativa:

$$\kappa([e_I], [e_J], [e_K], \theta) = \kappa_{(\mu(\theta))} \epsilon(e_I, e_J, e_K) \quad (4.117)$$

para una constante  $\kappa_{(\mu(\theta))}$  dependiente de la medida.  $\epsilon(e_I, e_J, e_K)$  es la función orientación la cual vale cero si las direcciones tangentes a las aristas  $e_I, e_J$  y  $e_K$  son linealmente dependientes y vale  $\pm 1$  si son linealmente independientes y están orientados positiva o negativamente. Entonces:

$$\int_{\mathcal{S}} d^6 \theta \mu(\theta) \kappa([e_I], [e_J], [e_K], \theta) = \kappa_o \epsilon([e_1], [e_2], [e_3]) \quad (4.118)$$

Siendo  $\kappa_0$  una constante arbitraria. Con esto, podemos construir el operador Volumen promediado. Dada una región  $R \in \Sigma$ , definimos  $\hat{V}_R$ , el operador asociado al volumen de  $R$ , cuya acción en una función cilíndrica  $\Psi_{\Gamma,f}$  está dada por

$$\hat{V}_R \Psi_{\Gamma,f} = \kappa_0 \sum_v \sqrt{|\hat{q}_v|} \Psi_{\Gamma,f} \quad (4.119)$$

donde se definió

$$\hat{q}_v \Psi_{\Gamma,f} := \frac{1}{48} \epsilon_{ijk} \sum_{e,e',e''} \epsilon(e,e',e'') J_{v,e}^i J_{v,e'}^j J_{v,e''}^k \Psi_{\Gamma,f} \quad (4.120)$$

Finalmente, el operador volumen se puede escribir de forma “intrínseca”, sin hacer referencia a ningún grafo. Dada una región espacial  $R \in \Sigma$ , definimos

$$\hat{V}_R = \kappa_0 \sum_{x \in R} \sqrt{|\hat{q}_x|} \quad (4.121)$$

Con

$$\hat{q}_x = \frac{1}{48} \sum_{[e_1],[e_2],[e_3]} \epsilon_{ijk} \epsilon(e_1, e_2, e_3) J_{x,e_1}^i J_{x,e_2}^j J_{x,e_3}^k \quad (4.122)$$

La suma en  $[e_I]$ ,  $I = 1, 2, 3$  se hace en todas las clases de equivalencia de curvas que tienen a  $x$  como uno de sus extremos. Este operador es invariante de gauge y covariante bajo difeomorfismos, por lo que se puede restringir fácilmente al espacio  $\kappa_{\text{diff}}$ .

### Acción del operador Volumen

Es posible probar que  $\hat{V}_R$  tiene (al igual que el operador área) un espectro discreto sin importar la elección de la región  $R$ . Además es fácil verificar que dada una función  $f$  cilíndrica con respecto a un grafo  $\Gamma$ ,  $\hat{V}_R f$  sigue siendo una función cilíndrica on respecto al mismo grafo. Vamos a considerar por simplicidad un grafo  $\Gamma$  y un vértice  $v \in \Gamma$  tal que  $v$  es trivalente y es además el único vértice no coplanar en  $\Gamma$ . Consideremos ahora un estado de spin network  $S$ ; sean  $e_1, e_2$  y  $e_3$  las aristas adyacentes a  $v$  y sean  $j_1, j_2$  y  $j_3$  los spines de las holonomías a lo largo de los mismos, podemos escribir a  $S$  de la siguiente forma:

$$S = S^{B_1 B_2 B_3} \cdot (H(A, e_1))_{B_1}^{A_1} (H(A, e_2))_{B_2}^{A_2} (H(A, e_3))_{B_3}^{A_3} \cdot i_{A_1 A_2 A_3} \quad (4.123)$$

Siendo  $i_{A_1 A_2 A_3}$  el intertwiner entre las representaciones  $j_1, j_2$  y  $j_3$  mientras que  $S^{B_1 B_2 B_3}$  denota al resto de la spin-network. Aplicando el operador  $\epsilon_{ijk} J_{v,e_1}^i J_{v,e_2}^j J_{v,e_3}^k$  a este estado obtenemos

$$\begin{aligned} & \epsilon_{ijk} J_{v,e_1}^i J_{v,e_2}^j J_{v,e_3}^k S \\ &= S^{B_1 B_2 B_3} \cdot \epsilon_{ijk} (H(A, e_1)(\tau^i)^{j_1})_{B_1}^{A_1} (H(A, e_2)(\tau^j)^{j_2})_{B_2}^{A_2} (H(A, e_3)(\tau^k)^{j_3})_{B_3}^{A_3} \cdot i_{A_1 A_2 A_3} \\ &:= S^{B_1 B_2 B_3} \cdot (H(A, e_1))_{B_1}^{A_1} (H(A, e_2))_{B_2}^{A_2} (H(A, e_3))_{B_3}^{A_3} \cdot i'_{A_1 A_2 A_3} \end{aligned} \quad (4.124)$$

Donde se definió

$$i'_{A_1 A_2 A_3} = \varepsilon_{ijk} ((\tau^i)^{j_1})_{A_1}^{A'_1} ((\tau^j)^{j_2})_{A_2}^{A'_2} ((\tau^k)^{j_3})_{A_3}^{A'_3} i_{A'_1 A'_2 A'_3} \quad (4.125)$$

Esto se extiende fácilmente al caso general: Dada una spin network  $\Psi_S[A]$  de la forma (4.59):

$$\Psi_S[A] = \left( \otimes_l R^{j_l}(H[A, \gamma_l]) \right) \cdot \left( \otimes_n i_n \right) \cdot \left( \otimes_l R^{j_k}(H[A, \gamma_{\phi_k}]) \right) \quad (4.126)$$

Al aplicar el operador volumen, tenemos

$$\hat{V}_R \Psi_S[A] = \left( \otimes_l R^{j_l}(H[A, \gamma_l]) \right) \cdot \left( \otimes_n i'_n \right) \cdot \left( \otimes_l R^{j_k}(H[A, \gamma_{\phi_k}]) \right) \quad (4.127)$$

Entonces,  $\hat{V}_R$  actúa únicamente en los intertwiners de una spin network sin alterar el grafo  $\Gamma$ .

### Casos particulares

En esta sección vamos a estudiar la acción del operador Volumen sobre algunos vértices simples ya que utilizaremos estos cálculos en lo que sigue. Debido al factor  $\epsilon([e_1], [e_2], [e_3])$ , aquellos vértices cuyas aristas adyacentes sean coplanares son aniquilados por el operador volumen. Por otro lado, si  $v$  es un vértice invariante gauge, el vínculo de Gauss implica [10]:

$$\mathcal{G}_x^i = \sum_{I=1}^N J_{v, e_I}^i = 0 \quad (4.128)$$

Siendo  $e_I$  las aristas adyacentes al vértice. Si en particular el vértice es trivalente:

$$J_{v, e_3} = -J_{v, e_2} - J_{v, e_1} \quad (4.129)$$

Por lo tanto

$$\varepsilon_{ijk} J_{x, e_1}^i J_{x, e_2}^j J_{x, e_3}^k = -\varepsilon_{ijk} J_{x, e_1}^i J_{x, e_2}^j (J_{v, e_2}^k + J_{v, e_1}^k) = 0 \quad (4.130)$$

Entonces, los vértices trivalentes invariantes gauge son también aniquilados por el operador volumen. Luego, si el vértice es cuatrivalente:

$$J_{v, e_4} = -J_{v, e_3} - J_{v, e_2} - J_{v, e_1} \quad (4.131)$$

En ese caso:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{ijk} \epsilon([e_I], [e_J], [e_K]) J_{v, e_I}^i J_{v, e_J}^j J_{v, e_K}^k \\ &= \varepsilon_{ijk} (\epsilon(e_1, e_2, e_3) J_{x, e_1}^i J_{x, e_2}^j J_{x, e_3}^k + \epsilon(e_4, e_2, e_3) J_{x, e_4}^i J_{x, e_2}^j J_{x, e_3}^k \\ &+ \epsilon(e_1, e_4, e_3) J_{x, e_1}^i J_{x, e_4}^j J_{x, e_3}^k + \epsilon(e_1, e_2, e_4) J_{x, e_1}^i J_{x, e_2}^j J_{x, e_4}^k) \end{aligned} \quad (4.132)$$

Usando (4.131), se puede verificar que

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{ijk} \epsilon(e_I, e_J, e_K) J_{v, e_I}^i J_{v, e_J}^j J_{v, e_K}^k \\ &= \varepsilon_{ijk} \kappa(e_1, e_2, e_3, e_4) J_{x, e_1}^i J_{x, e_2}^j J_{x, e_3}^k \end{aligned} \quad (4.133)$$

Donde se definió

$$\kappa(e_1, e_2, e_3, e_4) = \epsilon(e_1, e_2, e_3) - \epsilon(e_1, e_2, e_4) - \epsilon(e_1, e_4, e_3) - \epsilon(e_4, e_2, e_3) \quad (4.134)$$

Entonces, la acción de  $\hat{V}_R$  sobre un vértice cuativalente es, a menos del factor geométrico  $\kappa(e_1, e_2, e_3, e_4)$ , igual a la acción sobre un vértice trivalente no invariante de gauge con aristas adyacentes  $e_1, e_2$  y  $e_3$ . El factor (4.134) depende únicamente de la orientación relativa de las direcciones tangentes de las aristas  $\dot{e}_I$ ,  $I = 1, 2, 3, 4$  en el vértice. Si las aristas son coplanares, entonces  $\kappa([e_1], [e_2], [e_3], [e_4]) = 0$ . En caso contrario, siempre se pueden encontrar coordenadas tales que  $\dot{e}_1 = (1, 0, 0)$ ,  $\dot{e}_2 = (0, 1, 0)$ ,  $\dot{e}_3 = (0, 0, 1)$  por lo que (4.134) queda determinado por el valor de  $\dot{e}_4$ . Se puede probar que todos los casos son difeomorfos a los siguientes valores:

$$\dot{e}_4 = (1, 1, 1), (-1, -1, -1), (1, 1, 0), (-1, -1, 0), \dot{e}_3, -\dot{e}_3 \quad (4.135)$$

Los valores de (4.134) son en cada caso:

$$\kappa([e_1], [e_2], [e_3], [e_4]) = -2, 4, -1, 3, 0, 2 \quad (4.136)$$

### Vértice trivalente no invariante gauge

En [24] se calculó explícitamente la acción del operador volumen en un vértice trivalente no invariante de gauge basándose en los resultados de [30]. Dado un estado de spin network  $\Psi_\Gamma$  basado en el grafo  $\Gamma$ , denotaremos por  $|v\rangle$  al estado asociado vértice  $v \in \Gamma$  trivalente no invariante gauge:

$$\langle A|v\rangle = H^{j_1}(A, e_1)_{B_1}^{A_1} H^{j_2}(A, e_2)_{B_2}^{A_2} H^{j_3}(A, e_3)_{B_3}^{A_3} \cdot i_{A_1 A_2 A_3} H^{j_4}(A, e_3)_{B_4}^{A_4} \quad (4.137)$$

Los índices  $B_1, B_2$  y  $B_3$  están contraídos con el resto de la spin network en el estado  $\Psi_\Gamma$ , mientras que los índices  $A_4$  y  $B_4$  son libres. Por simplicidad vamos a suponer que  $j_4 = 1/2$ . La acción del operador Volumen sobre  $|v\rangle$  está dada por

$$\begin{aligned} \hat{V}_R^2 |v\rangle &= \left| \frac{1}{96} \sum_{e_I, e_J, e_K} \epsilon(e_I, e_J, e_K) \hat{W}_{[v, IJK]} \right| |v\rangle \\ &= \left| \frac{1}{16} \hat{W}_{[v, 123]} \right| |v\rangle \end{aligned} \quad (4.138)$$

Para usar una notación similar a la utilizada en [24] se definió

$$\hat{W}_{v, IJK} := 2\varepsilon_{ijk} J_{v, e_I}^i J_{v, e_J}^j J_{v, e_K}^k \quad (4.139)$$

La acción de  $\hat{W}_{[123]}$  sobre un vértice trivalente no invariante de gauge genérico se calculó en [30]:

$$\hat{W}_{[v, 123]} |v_J\rangle = \sum_I W_J^I(p, q, r, s) |v_I\rangle \quad (4.140)$$

$p, q, r$  son las valencias de las representaciones de las aristas adyacentes al vértice y  $s$  la valencia del vértice. El supraíndice  $J$  denota la valencia del intertwiner en el vértice. Gráficamente esto se puede representar de la siguiente manera:

$$|v^J\rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & p & \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & \bullet \\ & \diagup & \diagdown \\ q & & r \\ & & s \end{array} \\ (4.141) \end{array}$$

Las líneas externas  $p, q$  y  $r$  representan holonomías de spines  $p/2, q/2$  y  $r/2$  respectivamente, mientras que la línea externa  $s$  indica que bajo una transformación de gauge,  $v$  transforma bajo la representación de spin  $s/2$ . El nodo entre las líneas de valencias  $p, q$  y  $J$  representa un intertwiner entre las mismas. Para un vértice de la forma (4.137), es claro que si identificamos  $p = 2j_1$  y  $q = 2j_2$ , entonces  $J = 2j_3, r = 2j_3 \pm 1$ , mientras que  $s = 1$ :

$$\langle A|v\rangle = \underbrace{H^{j_1}(A, e_1)_{B_1}^{A_1}}_p \underbrace{H^{j_2}(A, e_2)_{B_2}^{A_2}}_q \underbrace{\left( H^{j_3}(A, e_3)_{B_3}^{A_3} H^{1/2}(A, e_3)_{B_4}^{A_4} \right)}_{r \pm 1} \underbrace{i_{A_1 A_2 A_3}}_J \quad (4.142)$$

El producto  $\left( H^{j_3}(A, e_3)_{B_3}^{A_3} H^{j_4}(A, e_3)_{B_4}^{A_4} \right)$  se puede descomponer en holonomías a lo largo de  $e_3$  de spines  $j_3 \pm 1/2$  (o sea, valencias  $r \pm 1$ ); luego,  $i_{A_1 A_2 A_3}$  es un intertwiner entre las representaciones  $j_1, j_2$  y  $j_3$ :

$$\begin{aligned} H^{j_1}(A, e_1)_{B_1}^{A_1} &= \begin{array}{c} \diagdown \\ p \end{array} \\ H^{j_2}(A, e_2)_{B_2}^{A_2} &= \begin{array}{c} \diagup \\ q \end{array} \\ \left( H^{j_3}(A, e_3)_{B_3}^{A_3} H^{j_4}(A, e_3)_{B_4}^{A_4} \right) &= \begin{array}{c} \diagup \\ r \pm 1 \end{array} \\ i_{A_1 A_2 A_3} &= \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & p & \\ & \diagdown & \diagup \\ & \bullet & \bullet \\ & \diagup & \diagdown \\ q & & r \end{array} \end{array} \end{aligned} \quad (4.143)$$

Luego, al aplicar una transformación de gauge, el vértice transforma bajo la representación de spin  $1/2$ , pues  $H^{j_4}(A, e_3)_{B_4}^{A_4}$  no tiene sus índices contraídos con el intertwiner. Entonces, usando la definición (4.141), tenemos que  $J = r$  y  $s = 1$  para el vértice (4.137).

Para obtener los valores posibles de  $I$  en el lado derecho de (4.140), basta con analizar la acción del operador  $J_{v,e_3}^k$  sobre  $|v\rangle$ :

$$J_{v,e_3}^k \langle A|v\rangle = J_{v,e_3}^k H^{j_1}(A, e_1)_{B_1}^{A_1} H^{j_2}(A, e_2)_{B_2}^{A_2} \left( H^{j_3}(A, e_3)_{B_3}^{A_3} H^{\pm 1/2}(A, e_3)_{B_4}^{A_4} \right) \cdot i_{A_1 A_2 A_3} \quad (4.144)$$

El operador  $J_{v,e_3}^k$  actúa sobre el producto  $\left( H^{j_3}(A, e_3)_{B_3}^{A_3} H^{\pm 1/2}(A, e_3)_{B_4}^{A_4} \right) := H^{j_3 \pm 1/2}(A, e_3)_{B_3 B_4}^{A_3 A_4}$  de acuerdo a las definiciones (4.99), (4.100):

$$J_{v,e_3}^k H^{j_3 \pm 1/2}(A, e_3)_{B_3 B_4}^{A_3 A_4} = \left( H^{j_3 \pm 1/2}(A, e_3) (\tau^k)^{j_3 \pm 1/2} \right)_{B_3 B_4}^{A_3 A_4} \quad (4.145)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \hat{W}_{[v,123]} H^{j_1}(A, e_1)_{B_1}^{A_1} H^{j_2}(A, e_2)_{B_2}^{A_2} H^{j_3}(A, e_3)_{B_3}^{A_3} H^{j_4}(A, e_3)_{B_4}^{A_4} \cdot i_{A_1 A_2 A_3} \\ = H^{j_1}(A, e_1)_{B_1}^{A_1} H^{j_2}(A, e_2)_{B_2}^{A_2} \left( H^{j_3 \pm 1/2}(A, e_3) \right)_{B_3 B_4}^{A_3 C_4} \cdot (i')_{A_1 A_2 A_3 C_4}^{A_4} \end{aligned} \quad (4.146)$$

Donde se definió

$$(i')_{A_1 A_2 A_3 C_4}^{A_4} = 2\varepsilon_{ijk} ((\tau^i)^{j_1})_{A_1}^{A'_1} ((\tau^j)^{j_2})_{A_2}^{A'_2} ((\tau^i)^{j_3})_{A_3 C_4}^{A'_3 A_4} \cdot i_{A'_1 A'_2 A'_3} \quad (4.147)$$

Los índices  $A_3$  y  $C_4$  (los cuales por separado toman valores  $1, \dots, 2j_3$  y  $1, 2$  respectivamente) vienen del acoplamiento de  $H^{j_3}(A, e_3)$  y  $H^{1/2}(A, e_3)$ , por lo que podemos sustituirlos por un solo índice (al que llamaremos simplemente  $A_3$ ) que toma los valores  $1, \dots, 2j_3 \pm 1$ :

$$(i')_{A_1 A_2 A_3 C_4}^{A_4} \rightarrow (i')_{A_1 A_2 A_3}^{A_4} \quad A_3 = 1, \dots, 2j_3 \pm 1 \quad (4.148)$$

La cantidad  $(i')_{A_1 A_2 A_3}^{A_4}$  acopla representaciones de spines  $j_1, j_2, j_3 \pm 1/2$  y una representación de spin  $1/2$ . De forma análoga a (4.25), esto se puede representar gráficamente de la siguiente manera:

$$\begin{array}{c} p \quad r \pm 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ q \quad 1 \end{array} = \sum_I \begin{array}{c} p \quad r \pm 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \quad \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ q \quad 1 \end{array} \quad (4.149)$$

Los únicos valores posibles de  $I$  resultantes del acoplamiento de las líneas externas  $r \pm 1$  y  $1$  son  $r, r \pm 2$ . La matriz  $W_r^I$  es antisimétrica en  $I$  y  $J$  mientras que como vimos anteriormente,  $r = J$ , por lo que los únicos valores de  $I$  que contribuyen a la suma son entonces  $I = r \pm 2$ . Entonces, podemos reescribir (4.140) como

$$\hat{W}_{[v,123]} |v\rangle = W_r^{r \pm 2}(p, q, r \pm 1, 1) |v_{r \pm 2}\rangle \quad (4.150)$$

El valor absoluto de la matriz  $W_r^{r\pm 2}$  es proporcional a la identidad (es una matriz antisimétrica de dos dimensiones); entonces, el operador volumen actúa de forma diagonal sobre el vértice  $v$  de acuerdo a (4.138):

$$\hat{V}_R |v\rangle = \sqrt{\left| \frac{1}{16} \hat{W}_{[v,123]} \right|} |v\rangle = \frac{1}{4} \sqrt{w(p, q, r \pm 1, 1)} |v\rangle \quad (4.151)$$

Siendo

$$w(p, q, r \pm 1, 1) = \sqrt{|W_r^{r\pm 2}(p, q, r \pm 1, 1)|} \quad (4.152)$$

### Vértice cuativalente en espacio axisimétrico

Supongamos ahora que el espacio  $R$  tiene simetría axial. Sea  $|S\rangle$  un estado de spin network definido sobre un grafo  $\Gamma$  de la forma (4.59). De manera análoga a (4.137) definimos  $|v\rangle$ , un estado asociado a un vértice  $v \in \Gamma$  cuativalente. Sean  $e_1$  y  $e_2$ , aristas adyacentes al mismo contenidas en la superficie  $\sigma$ , perpendicular al vector de Killing espacial  $\partial_\phi$ , y sea  $e_3$  una curva cerrada tangente a una órbita de  $\partial_\phi$ . Si el vértice es invariante gauge, el estado  $|v\rangle$  tiene la siguiente forma:

$$\langle A|v\rangle = H^{j_1}(A, e_1)_{B_1}^{A_1} H^{j_2}(A, e_2)_{B_2}^{A_2} H^{j_3}(A, e_3)_{A_4}^{A_3} \cdot i_{A_1 A_2 A_3}^{A_4} \quad (4.153)$$

Este vértice tiene volumen nulo pues corresponde al caso  $\dot{e}_4 = \dot{e}_3$  en (4.135): Al ser  $e_3$  una curva cerrada, la cuarta arista adyacente al vértice es la misma  $e_3$ . Supongamos ahora que actuamos en  $|v\rangle$  con una holonomía en la representación fundamental a lo largo de  $\mu e_3$ , siendo  $|\mu| < 2\pi$ . La acción de  $\hat{q}_v$  sobre  $|v'\rangle := H^{1/2}(A, \mu e_3) |v\rangle$  tiene dos contribuciones:

$$\hat{q}_v |v'\rangle = \frac{\kappa_0}{8} \varepsilon_{ijk} (\epsilon([e_1], [e_2], [e_3]) J_{v,e_1}^i J_{v,e_2}^j J_{v,e_3}^k + \epsilon([e_1], [e_2], [e_4]) J_{v,e_1}^i J_{v,e_2}^j J_{v,e_4}^k) \quad (4.154)$$

Al igual que el caso invariante de gauge, tenemos que  $\epsilon([e_1], [e_2], [e_3]) = \epsilon([e_1], [e_2], [e_4])$ , pero al ser el vértice no invariante gauge, la relación (4.131) no se cumple por lo que el operador  $\hat{q}_v$  tiene una acción no trivial sobre  $|v'\rangle$ . En términos del operador  $\hat{W}_v$  definido en (4.139), tenemos

$$\begin{aligned} \hat{V}_R^2 |v'\rangle &= \left| \frac{1}{96} \sum_{e_I, e_J, e_K} \epsilon(e_I, e_J, e_K) \hat{W}_{[v, IJK]} \right| |v'\rangle \\ &= \left| \frac{1}{16} (\hat{W}_{[v, 123]} + \hat{W}_{[v, 124]}) \right| |v'\rangle \end{aligned} \quad (4.155)$$

La acción de los operadores  $\hat{W}_{[v, 123]}$  y  $\hat{W}_{[v, 124]}$  sobre  $|v'\rangle$  fue calculada explícitamente en el apéndice B, utilizando técnicas de recoupling introducidas en el capítulo 6. Los resultados son los siguientes:

$$\hat{W}_{[v, 124]} |v'^I\rangle = (W_J^I(p, q, r, r)) |v'^J\rangle \quad (4.156)$$

$$\hat{W}_{[v, 123]} |v'^I\rangle = (Z_{JK}^I(p, q, r, r \pm 1)) |v'_{JK}\rangle \quad (4.157)$$

Siendo  $|v'^I\rangle$  el vértice cuativalente no invariante gauge con una arista virtual de valencia  $I$ :

$$|v'^I\rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ q \end{array} \quad \begin{array}{c} r \\ | \\ \bullet \\ | \\ r \end{array} \quad \begin{array}{c} r \pm 1 \\ | \\ \bullet \\ | \\ 1 \end{array} \\ \hline I \quad r \end{array} \quad (4.158)$$

mientras que  $|v'^{JK}\rangle$  tiene dos aristas virtuales de valencias  $J$  y  $K$ :

$$|v'^{JK}\rangle = \begin{array}{c} \begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ q \end{array} \quad \begin{array}{c} r \\ | \\ \bullet \\ | \\ J \end{array} \quad \begin{array}{c} r \pm 1 \\ | \\ \bullet \\ | \\ K \end{array} \\ \hline J \quad K \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \end{array} \quad (4.159)$$

Luego, los coeficientes de las combinaciones lineales están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} W_J^I(p, q, r, r) &:= \sum_{k=q, q\pm 2} \left\{ \begin{array}{c} I \quad q \quad p \\ 2 \quad p \quad k \end{array} \right\} (\lambda_k^{2q}) \left\{ \begin{array}{c} r \quad I \quad r \\ 2 \quad r \quad J \end{array} \right\} (\lambda_J^{2I}) \left\{ \begin{array}{c} J \quad 2 \quad I \\ k \quad p \quad q \end{array} \right\} \text{Tet}[q, k, q, 2, 2, 2] \\ Z_{JK}^I(p, q, r, r \pm 1) &:= \sum_{k=q, q\pm 2} \left\{ \begin{array}{c} I \quad q \quad p \\ 2 \quad p \quad k \end{array} \right\} (\lambda_k^{2q}) \left\{ \begin{array}{c} 1 \quad r \quad r \pm 1 \\ 2 \quad r \pm 1 \quad K \end{array} \right\} (\lambda_K^{2r}) \\ &\quad \left\{ \begin{array}{c} K \quad 2 \quad r \\ I \quad r \quad J \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} J \quad 2 \quad I \\ k \quad p \quad q \end{array} \right\} \text{Tet}[q, k, q, 2, 2, 2] \end{aligned} \quad (4.160)$$

Donde  $\lambda_c^{ab} = (-1)^{(a+b-c)/2} (-1)^{(a'+b'-c')/2}$ , con  $x' = x(x+2)$  y

$$\text{Tet}[A, B, C, D, E, F] = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{E}} \sum_{m \leq S \leq M} \frac{(-1)^S (S+1)!}{\prod_i (S - a_i)! \prod_j (b_j - S)!} \quad (4.161)$$

Siendo

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{A + D + E}{2}, & b_1 &= \frac{B + D + E + F}{2} \\
a_2 &= \frac{B + C + E}{2}, & b_2 &= \frac{A + C + E + F}{2} \\
a_3 &= \frac{A + B + F}{2}, & b_3 &= \frac{A + B + C + D}{2} \\
a_4 &= \frac{C + D + F}{2} \\
m &= \max \{a_i\}, & M &= \min \{b_j\} \\
\mathcal{E} &= A!B!C!D!E!F!, & \mathcal{F} &= \prod_{ij} (b_j - a_i)!
\end{aligned} \tag{4.162}$$

### Caso general: Vértice de valencia $n$

Sea  $|v\rangle$  un vértice invariante de gauge de valencia  $n$  y sean  $e_1, \dots, e_n$  las aristas adyacentes al mismo las cuales tienen valencias  $P_1, \dots, P_n$  respectivamente. De manera análoga a (4.26), este vértice se puede representar gráficamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
& \begin{array}{c} P_3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_1 \end{array} \begin{array}{c} P_{n-2} \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_n \end{array} \\
& \begin{array}{c} P_2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_1 \end{array} \begin{array}{c} P_{n-1} \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_n \end{array} = \sum_{i_1, \dots, i_n} \begin{array}{c} P_2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_1 \end{array} \begin{array}{c} i_1 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_1 \end{array} \begin{array}{c} P_3 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_3 \end{array} \begin{array}{c} P_{n-2} \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_{n-1} \end{array} \begin{array}{c} P_n \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ P_n \end{array}
\end{aligned} \tag{4.163}$$

Usando una notación similar a la de (4.158) y (4.159):

$$|v\rangle = \sum_{i_1, \dots, i_n} |v^{i_1 \dots i_n}\rangle \tag{4.164}$$

La acción del operador  $\hat{W}_{IJK}$  sobre  $|v^{i_1 \dots i_n}\rangle$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$\hat{W}_{IJK} |v^{i_1 \dots i_n}\rangle = \sum_{k_1, \dots, k_n} \left( W_{IJK}^{(n)} \right)_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_n} |v^{k_1 \dots k_n}\rangle \tag{4.165}$$

Los elementos de matriz  $\left( W_{IJK}^{(n)} \right)_{k_1 \dots k_n}^{i_1 \dots i_n}$  fueron calculados en [30], donde además se probó que esta matriz es antisimétrica y diagonalizable con valores propios reales. El valor absoluto de estas matrices es también diagonalizable con valores propios reales positivos y su raíz cuadrada está bien definida. El operador volumen es entonces diagonalizable en la base de las spin networks.



## Capítulo 5

# Hamiltoniano de Thiemann

Los primeros intentos de construir un operador correspondiente al vínculo Hamiltoniano comenzaron en el marco del formalismo ADM. El vínculo tiene una dependencia complicada y no polinomial en las variables canónicas, lo que hacía parecer que completar el programa de cuantización fuera prácticamente imposible. El uso de las variables de Ashtekar reales permitió reformular la Relatividad General como una teoría de gauge de grupo  $SU(2)$  en la cual los vínculos toman una forma mucho más simple con respecto a las variables canónicas. Usando este formalismo, en el capítulo anterior definimos el espacio cinemático de estados y operadores asociados a los vínculos de Gauss y de difeomorfismos, hallando también el espacio de estados de soluciones a estos. El vínculo Hamiltoniano por su parte presenta una dificultad a la hora de intentar cuantizarlo, es una densidad escalar de peso 2 (para obtener una densidad escalar de peso 1 es necesario absorber un factor  $1/\sqrt{q}$  en el lapso). En general, un operador correspondiente a una densidad escalar de peso diferente de 1 debe ser renormalizado, esto a su vez introduce una escala de longitud lo cual no tiene sentido en una teoría invariante por difeomorfismos. En este capítulo construiremos el operador correspondiente al vínculo Hamiltoniano siguiendo [64], donde se logró solucionar este problema reescribiendo el factor  $1/\sqrt{q}$  en términos del operador volumen, obteniendo un operador Hamiltoniano bien definido libre de anomalías. Mostraremos esta construcción primero en el caso de la teoría completa y luego construiremos el operador correspondiente al vínculo Hamiltoniano de la teoría reducida por simetría.

### 5.1 Teoría completa

#### 5.1.1 Hamiltoniano euclídeo

En la teoría completa, la parte euclídea del vínculo Hamiltoniano está dada por

$$\begin{aligned} H_E(N) &= \int_{\Sigma} d^3x \frac{N}{\sqrt{E}} (A_{b,a}^i - A_{a,b}^i + \epsilon_{ilm} A_a^l A_b^m) \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b \\ &= \int_{\Sigma} d^3x \frac{N}{\sqrt{E}} F_{ab}^i \epsilon_{ijk} E_j^a E_k^b \end{aligned} \quad (5.1)$$

Para promover esta cantidad clásica a un operador es necesario escribir todas las cantidades en términos de operadores bien definidos en el espacio de

Hilbert (procedimiento usualmente denominado holonomización). La curvatura se puede obtener fácilmente a partir de una holonomía en un bucle infinitesimal, mientras que las componentes de la tríada se pueden obtener a partir de flujos en superficies infinitesimales. El factor  $1/\sqrt{E}$  sin embargo es no polinomial en las variables canónicas lo que complica enormemente esta tarea. Una forma de obtener un vínculo polinomial es absorber este factor en el lapso (esto es, redefinir el mismo). Sin embargo, como se mencionó anteriormente, el vínculo resultante es una densidad escalar de peso 2, por lo que habría que renormalizarlo, introduciendo así una escala y perdiendo la invariancia por difeomorfismos. En realidad, el factor  $1/\sqrt{E}$  es precisamente lo que permite que el vínculo se pueda holonomizar. Para ver esto, observemos la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
2\varepsilon^{abc} \{A_c^i, V\} &= 2\varepsilon^{abc} \left\{ A_c^i, \int d^3x \sqrt{E} \right\} = 2\varepsilon^{abc} \frac{1}{2} \int d^3x \frac{1}{\sqrt{E}} \{A_c^i, E\} \\
&= \varepsilon^{abc} \frac{1}{\sqrt{E}} \int d^3x \left\{ A_c^i, \frac{1}{3!} \varepsilon_{def} \varepsilon^{jkl} E_j^d E_k^e E_l^f \right\} \\
&= \varepsilon^{abc} \frac{\varepsilon_{def} \varepsilon^{jkl}}{3! \sqrt{E}} \int d^3x \left( \{A_c^i, E_j^d\} E_k^e E_l^f + E_j^d \{A_c^i, E_k^e\} E_l^f + E_j^d E_k^e \{A_c^i, E_l^f\} \right) \\
&= \varepsilon^{abc} \frac{\varepsilon_{def} \varepsilon^{jkl}}{3! \sqrt{E}} \left( \delta_j^i \delta_c^d E_k^e E_l^f + E_j^d \delta_c^e \delta_k^i E_l^f + E_i^a E_j^b \delta_c^f \delta_l^i \right)
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Es fácil ver que los tres sumandos dentro del paréntesis en el último miembro de la ecuación anterior dan la misma contribución debido a los factores  $\varepsilon_{abc}, \varepsilon^{ijk}$ , entonces:

$$\begin{aligned}
2\varepsilon^{abc} \{A_c^i, V\} &= \varepsilon^{abc} \frac{\varepsilon_{def} \varepsilon^{jkl}}{2\sqrt{E}} \delta_j^i \delta_c^d E_k^e E_l^f = (\delta_e^a \delta_c^b - \delta_f^a \delta_e^b) \frac{\varepsilon^{jkl}}{2\sqrt{E}} E_k^e E_l^f \\
&= \frac{\varepsilon^{ijk}}{\sqrt{E}} E_j^a E_k^b
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Usando este resultado podemos reescribir (5.1) como:

$$H_E(N) = 2 \int_{\Sigma} d^3x N \varepsilon^{abc} \text{tr} (F_{ab} \{A_c, V\}). \tag{5.4}$$

Esta cantidad sí se puede escribir en términos de operadores bien definidos en el espacio de Hilbert. A modo de motivación, consideremos una holonomía infinitesimal en la dirección de un vector  $u$  partiendo de un punto  $x$ . A primer orden tenemos:

$$h_u(x) := e^{\int A_a^i u^a \tau_i} \approx 1 + \varepsilon A_a^i(x) u^a \tau_i \tag{5.5}$$

Por otro lado,

$$\left\{ e^{\int A_c^i(x) u^c \tau_i}, V \right\} = e^{\int A_c^i(x) u^c \tau_i} \left\{ \int A_a^i \tau_i u^a, V \right\} \tag{5.6}$$

A primer orden en  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon \{A_u^i, V\} \tau_i \approx h_u^{-1} \{h_u, V\} \tag{5.7}$$

Luego, si tomamos una holonomía en un loop formado por los vectores  $\varepsilon_1 u$ ,  $\varepsilon_2 v - \varepsilon_1 u$  y  $-\varepsilon_2 v$ :

$$h_u h_{v-u} h_v^{-1} \approx \begin{pmatrix} 1 + A_a^i \left( x + \frac{\varepsilon_1}{2} u \right) \varepsilon_1 u^a \tau_i \\ \left( 1 - A_c^k \left( x + \frac{\varepsilon_2}{2} v \right) \varepsilon_2 v^c \tau_k \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + A_b^j \left( x + \frac{\varepsilon_1}{2} u + \frac{\varepsilon_2}{2} v \right) (\varepsilon_2 v^b - \varepsilon_1 u^b) \tau_j \\ \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Sustituyendo

$$\begin{aligned} A_a^i(x + \varepsilon u) &\approx A_a^i(x) + \varepsilon u^b \partial_b A_a^i(x) \\ A_a^i(x + \varepsilon v) &\approx A_a^i(x) + \varepsilon v^b \partial_b A_a^i(x) \end{aligned}$$

Y conservando hasta orden  $\varepsilon_1 \varepsilon_2$ :

$$\begin{aligned} h_u h_{v-u} h_v^{-1} &\approx 1 + \varepsilon_1 \times 0 + \varepsilon_2 \times 0 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( A_a^i A_b^j u^a v^b (\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i) + (u^b v^a (\partial_b A_a^i - \partial_a A_b^i)) \tau_i \right) \\ &= 1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( A_u^i A_v^j [\tau_i, \tau_j] + (\partial_u A_v^i - \partial_v A_u^i) \tau_i \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Multiplicando la matriz anterior por  $h_w^{-1} \{h_w, V\}$  en el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$h_{\alpha_{uv}} h_w^{-1} \{h_w, V\} \approx \left\{ 1 + \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( A_u^i A_v^j [\tau_i, \tau_j] + (\partial_u A_v^i - \partial_v A_u^i) \tau_i \right) \right\} \varepsilon \{A_w^k, V\} \tau_k \varepsilon$$

Tomando la traza y usando:

$$\begin{aligned} \tau_i &= -\frac{i}{2} \sigma_i \\ [\sigma_i, \sigma_j] &= 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k \rightarrow [\tau_i, \tau_j] = \varepsilon_{ijk} \tau_k \\ \text{tr}(\sigma_i) &= \text{tr}(\tau_i) = 0 \\ \text{tr}(\sigma_i \sigma_j) &= 2\delta_{ij} \rightarrow \text{tr}(\tau_i \tau_j) = -\frac{1}{2} \delta_{ij} \end{aligned}$$

se obtiene:

$$\text{tr} \left( h_{\alpha_{uv}} h_w^{-1} \{h_w, V\} \right) \approx \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \left( (\partial_u A_v^i - \partial_v A_u^i) + \varepsilon^{ijk} A_u^j A_v^k \right) \{A_w^i, V\}$$

Contrayendo con la densidad tensorial totalmente antisimétrica de Levi-Civita:

$$\varepsilon^{abc} \text{tr} \left( h_{\alpha_{ab}} h_c^{-1} \{h_c, V\} \right) \approx \varepsilon \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon^{abc} F_{ab}^i \{A_c^i, V\} \quad (5.10)$$

Entonces, tenemos que

$$\varepsilon^{abc} \text{tr} \left( h_{\alpha_{ab}} h_c^{-1} \{h_c, V\} \right) \rightarrow \int_S \varepsilon^{abc} F_{ab}^i \{A_c^i, V\} \quad (5.11)$$

en el límite  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$ . La integral se realiza en una región infinitesimal  $S = [0, \varepsilon] \times [0, \varepsilon_1] \times [0, \varepsilon_2]$ .

Debido a que el producto escalar definido en el espacio de las spin-networks es discreto (dos estados basados en grafos diferentes son ortogonales entre sí) debemos discretizar el vínculo lo que a su vez requiere una discretización de la variedad en donde está definido este. Vamos entonces a particionar la variedad  $\Sigma$  en tetraedros elementales  $\Delta$ , elegimos en cada uno de estos tetraedros uno de sus vértices y lo llamamos  $v(\Delta)$ . Sean  $s_i(\Delta)$ ,  $i = 1, 2, 3$  las tres aristas cuyos extremos finales son  $v$ , y sea  $\alpha_{ij} = s_i(\Delta) \circ a_{ij} \circ s_j^{-1}(\Delta)$  el loop basado en  $v(\Delta)$ ,

siendo  $\alpha_{ij}$  la arista que une los extremos de  $s_i$  y  $s_j$  que no coinciden con  $v(\Delta)$ . Definimos ahora la siguiente cantidad:

$$H_{\Delta}^E[N] := -\frac{2}{3}N_v \varepsilon^{ijk} \operatorname{tr} \left( h_{\alpha_{ij}(\Delta)} h_{s_k(\Delta)} \left\{ h_{s_k(\Delta)}^{-1}, V \right\} \right) \quad (5.12)$$

Observando (5.11), es fácil ver que si las aristas tienen largos  $\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2$  y hacemos estos tender a cero, esto tiende a  $2 \int_{\Delta} [N \operatorname{tr} (F \wedge \{A, V\})]$  al hacer tender el tetraedro  $\Delta$  a su base  $v(\Delta)$ . Si denotamos por  $T$  a la triangulación, entonces

$$H_T^E[N] = \sum_{\Delta \in T} H_{\Delta}^E[N] \quad (5.13)$$

tiene el límite correcto (5.4) al hacer tender los tetraedros a sus bases. Esta es la cantidad que vamos a promover a un operador que actúa en el espacio de spin-networks. Sustituyendo cada cantidad por su operador correspondiente y el corchete de Poisson por  $i\hbar$  veces el conmutador:

$$\begin{aligned} \hat{H}_T^E[N] &:= \sum_{\Delta \in T} \hat{H}_{\Delta}^E[N], \quad \hat{H}_{\Delta}^E[N] := -2 \frac{N(v(\Delta))}{3i\ell_p^2} \varepsilon^{ijk} \operatorname{tr} \left( h_{\alpha_{ij}(\Delta)} h_{s_k(\Delta)} \left[ h_{s_k(\Delta)}^{-1}, \hat{V} \right] \right) \\ &=: N_v \hat{H}_{\Delta}^E \end{aligned} \quad (5.14)$$

La triangulación  $T$  que vamos a elegir en este trabajo es una adaptada al grafo  $\gamma$  de la spin-network sobre el cual actúa  $\hat{H}^E$ : Las aristas  $s_i, s_j$  y  $s_k$  están contenidas en aristas pertenecientes a  $\gamma$ . En consecuencia, al aplicarle este operador a una función  $f$  cilíndrica con respecto a un grafo  $\gamma$ , tendremos contribuciones únicamente de los vértices de  $\gamma$  cuya valencia sea al menos tres y tal que las aristas adyacentes a los mismos no sean colineales. Para ver esto, es suficiente analizar el término  $\left[ h_{s_k(\Delta)}, \hat{V} \right] f$ . Consideremos primero el caso en el cual  $s_k(\Delta) \cap \gamma = \emptyset$ . Si la intersección es vacía, entonces la unión no tiene vértices extra:  $V(\gamma \cup s_k(\Delta)) = V(\gamma) \cup V(s_k(\Delta))$ . En ese caso:

$$\begin{aligned} \left[ h_{s_k(\Delta)}, \hat{V} \right] f &= \sum_{v \in V(\gamma)} h_{s_k(\Delta)} \hat{V}_v f - \sum_{v \in V(\gamma \cup s_k(\Delta))} \hat{V}_v h_{s_k(\Delta)} f \\ &= -f \sum_{v \in V(s_k(\Delta))} \hat{V}_v h_{s_k(\Delta)} = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

pues el grafo de  $s_k$  es simplemente una arista sin ningún vértice. Luego, si  $s_k(\Delta) \cap \gamma \neq \emptyset$  pero no contiene ningún vértice de  $\gamma$ , entonces las tangentes de todas las aristas adyacentes a esta intersección son coplanares (es la intersección de dos aristas, por lo que sólo hay dos direcciones independientes). En este caso tendremos

$$\left[ h_{s_k(\Delta)}, \hat{V} \right] f = \sum_{v \in V(\gamma)} h_{s_k(\Delta)} \hat{V}_v f - \sum_{v \in V(\gamma \cup s_k(\Delta))} \hat{V}_v h_{s_k(\Delta)} f \quad (5.16)$$

$$= - \sum_{v \in V(\gamma \cup s_k(\Delta)) - V(\gamma)} \hat{V}_v h_{s_k(\Delta)} f = 0 \quad (5.17)$$

pues los vértices de  $V(\gamma \cup s_k(\Delta)) - V(\gamma)$  tienen volumen nulo como vimos en el capítulo anterior.

La acción del Hamiltoniano sobre una función cilíndrica  $f$  con respecto a un grafo  $\gamma$  está entonces restringida a los vértices de  $\gamma$  que intersectan con los tetraedros de la partición  $T(\Delta)$  [64]:

$$\hat{H}_T^E[N]f = \sum_{\Delta \cap V(\gamma)} \hat{H}_\Delta^E[N]f = \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \sum_{v \in \Delta} \hat{H}_\Delta^E f =: \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \hat{H}_v^E f \quad (5.18)$$

Esta acción es además finita siempre y cuando el número de tetraedros que intersectan los vértices de  $\gamma$  se mantenga finito al tomar particiones cada vez más finas. Hay infinitas posibles particiones para elegir. Una prescripción posible es la siguiente: Dada una arista  $e_I \in \gamma$  con origen en  $v$  y saliente al mismo, elegimos como una arista de  $\Delta$  a un segmento  $s_I$  con un extremo en  $v$ , que está contenido en  $e_I$ , el otro de sus extremos no coincide con el extremo de  $e_I$  que no es  $v$ . Luego, dado un par no ordenado de aristas  $s_I$  y  $s_J$  de  $\Delta$ , sea  $a_{IJ}$  una curva que une los extremos de estas aristas distintos de  $v$ ;  $a_{IJ}$  no intersecta a  $\gamma$  en ningún otro punto. Esto se puede conseguir de manera invariante bajo difeomorfismos [64]; la prueba es extensa y bastante técnica por lo que el lector interesado en la misma debería consultar [64]. La idea principal de la prueba es la siguiente: Dadas las aristas  $s_I$  y  $s_J$ , al definir el arco que los une  $a_{IJ}$ , es posible que haya otra arista  $s_K$  de la partición que intersecte con el mismo, generándose otro vértice adicional tras la acción del Hamiltoniano. Este vértice extra no supondría ninguna complicación ya que tiene volumen nulo pues es la intersección de dos aristas y el Hamiltoniano no actúa sobre el mismo por la misma razón, sin embargo, es mejor evitarlo pues complicaría mucho el estudio de los elementos de matriz y del kernel del operador (como veremos más adelante), además de que es preferible que al actuar con el Hamiltoniano, todos los tetraedros de la partición sean tratados de igual forma (cosa que no ocurre si algunos arcos intersectan con una arista de la partición y otras no). La forma de evitar esto es usar la invariancia por difeomorfismos: Eligiendo un sistema de coordenadas  $(x, y, z)$  tales que  $s_I$  y  $s_J$  están en un plano  $(x, y, 0)$ , podemos tomar un difeomorfismo en la dirección de  $z$  tal que  $s_K$  sea “curvado” fuera del plano  $(x, y, 0)$  mientras que  $s_I$  y  $s_J$  se mantienen invariantes y por lo tanto el arco que los une también.

Para cualquier terna no ordenada de aristas  $e_I, e_J$  y  $e_K$  que intersectan en  $v$  y definen un tetraedro  $\Delta$  se pueden definir, también de forma invariante por difeomorfismos, siete tetraedros más (llamados imágenes espejo) que junto con  $\Delta$  saturan al vértice  $v$ . Sean  $s_I(\Delta), s_J(\Delta)$  y  $s_K(\Delta)$  segmentos de estas aristas con origen en  $v$  y  $a_{IJ}(\Delta)$  los arcos que los unen, estas cantidades forman un tetraedro obvio, para definir sus imágenes espejo definimos primero las parametrizaciones  $[0, 1] \rightarrow s_i(\Delta)(t)$  y  $[0, 1] \rightarrow a_{ij}(\Delta)(t)$  y a partir de las mismas sus “imágenes espejo”:

$$s_{\bar{i}}(\Delta)^a(t) := 2v^a - s_i(\Delta)^a(t) \quad (5.19)$$

$$a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)^a(t) := 2v^a - a_{ij}(\Delta)^a(t) \quad (5.20)$$

$$a_{\bar{i}j}(\Delta)(t) := a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)^a(t) - 2t[v - s_j(\Delta)(1)]^a \quad (5.21)$$

$$a_{i\bar{j}}(\Delta)(t) := a_{ij}(\Delta)^a(t) + 2t[v - s_j(\Delta)(1)]^a \quad (5.22)$$

Siendo  $v^a$  las coordenadas del vértice  $v$ . Podemos asumir que todos los objetos se encuentran en una región cubierta por una sola carta que contiene a  $v$ , lo

que se puede lograr fácilmente eligiendo las cantidades básicas  $s_I(\Delta), a_{IJ}(\Delta)$  lo suficientemente pequeñas. Como por definición  $s_i(\Delta)(0) = v, s_i(\Delta)(1) = a_{ij}(\Delta)(0), s_j(\Delta)(1) = a_{ij}(\Delta)(1)$ , entonces tenemos:

$$s_{\bar{i}}(\Delta)^a(0) = 2v^a - s_i(\Delta)^a(0) = 2v^a - v^a = v^a \quad (5.23)$$

$$s_{\bar{i}}(\Delta)^a(1) = 2v^a - s_i(\Delta)^a(1) = 2v^a - a_{ij}(\Delta)(0) \quad (5.24)$$

Por otro lado

$$a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)^a(0) = 2v^a - a_{ij}(\Delta)^a(0) = s_{\bar{i}}(\Delta)^a(1) \quad (5.25)$$

$$a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)^a(1) = 2v^a - a_{ij}(\Delta)^a(1) = 2v^a - s_j(\Delta)(1) = s_{\bar{j}}(\Delta)(1) \quad (5.26)$$

mientras que  $s_{\bar{j}}(\Delta)(0) = v$ . Vemos entonces que podemos formar un loop con  $s_{\bar{i}}(\Delta), a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)$  y  $s_{\bar{j}}(\Delta)$  (al que llamamos  $\alpha_{\bar{i}\bar{j}}$ ) y por lo tanto un tetraedro con  $s_k$  o  $s_{\bar{k}}$ . De manera similar se pueden verificar fácilmente las siguientes relaciones:

$$s_{\bar{i}}(\Delta)(1) = a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)(0), \quad a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)(1) = s_j(\Delta)(1) \quad (5.27)$$

$$s_{\bar{j}}(\Delta)(1) = a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)(1), \quad a_{\bar{i}\bar{j}}(\Delta)(0) = s_i(\Delta)(1) \quad (5.28)$$

Por lo que de manera análoga al caso anterior podemos formar los loops  $\alpha_{\bar{i}\bar{j}}$  y  $\alpha_{i\bar{j}}$ . En resumen, teniendo los loops  $\alpha_{\bar{i}\bar{j}}, \alpha_{\bar{i}\bar{j}}, \alpha_{i\bar{j}}$ , podemos formar seis tetraedros combinándolos con  $s_k$  y  $s_{\bar{k}}$ ; estos seis tetraedros junto con el  $\Delta$  original y el formado por  $\alpha_{ij}$  y  $s_{\bar{k}}$  saturan al vértice  $v$ . En esta construcción no hicimos referencia a ninguna métrica de fondo.

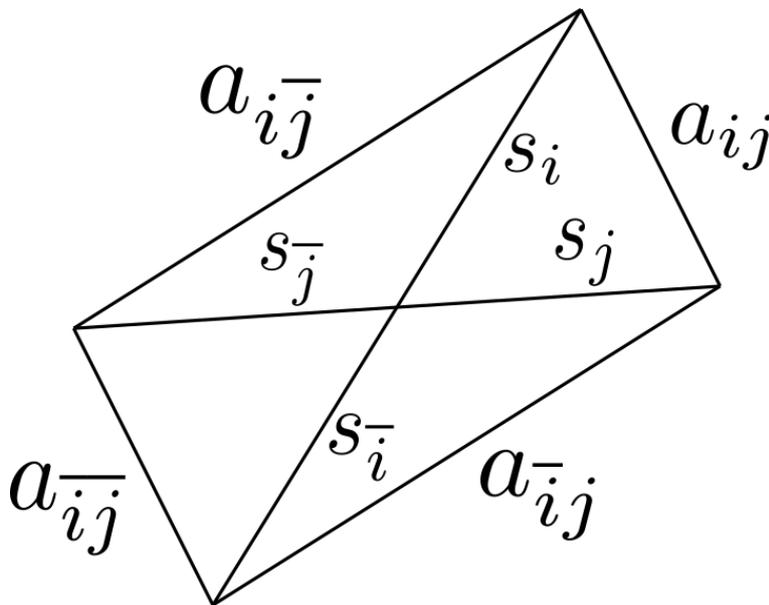


Figura 5.1: Las cantidades  $s_i, s_j$  y  $a_{ij}$ , junto con sus imágenes espejo forman junto a  $s_k$  y  $s_{\bar{k}}$  (no mostrados en la figura, perpendiculares al plano que definen  $s_i$  y  $s_j$ ) ocho tetraedros que saturan al vértice  $v$ .

Con esto podemos completar la regularización del operador. Dada una terna no ordenada de aristas  $e_I, e_J, e_K$  que llegan a un vértice  $v$ ,

definimos  $D(\Delta)$  como la región cerrada de  $\Sigma$  cubierta por los ocho tetraedros obtenidos a partir de estos que saturan  $v$  ( $\Delta$  y sus siete imágenes espejo). Esta región será diferente para las distintas ternas no ordenadas de aristas que definen distintos tetraedros  $\Delta$ ; a la unión de todas esas regiones la denotamos por  $D(v)$ , o sea  $D(v) := \cup_{v(\Delta)=v} D(\Delta)$ , esto es, la suma en todos los tetraedros formados a partir de ternas de aristas tales que uno de sus vértices es  $v$  y sus imágenes espejo. Finalmente, sean  $\bar{D}(\Delta) = D(v) - D(\Delta)$  y  $\bar{D} := \Sigma - \cup_{v \in \gamma} D(v)$ . Usando estas definiciones, separamos la variedad  $\Sigma$  en (5.4) de la siguiente manera:

$$\int_{\Sigma} = \int_{\Sigma - \cup_{v \in V(\gamma)} D(v)} + \sum_{v \in V(\gamma)} \int_{D(v)} \quad (5.29)$$

El dominio de integración del primer término no es otra cosa que  $\bar{D}$ . Al segundo dominio de integración lo podemos separar en  $D(\Delta)$  y  $\bar{D}(\Delta)$ , sumando para todos los  $\Delta$  posibles (es decir, para todas las ternas de aristas no ordenadas posibles) y dividiendo por la correspondiente multiplicidad. Ahora, tanto  $\bar{D}$  como  $\bar{D}(\Delta)$  no contienen ningún vértice por lo que en el caso cuántico no van a contribuir al resultado final. Teniendo en cuenta esto último y además que si un vértice tiene valencia  $n$  la cantidad de ternas no ordenadas posibles es  $E(v) = n(n-1)(n-2)/6$ , la contribución relevante para el caso cuántico de la integral en  $\Sigma$  será:

$$\sum_v \frac{1}{E(v)} \sum_{v(\Delta)=v} \sum_{\Delta' \in D(\Delta)} \int_{\Delta'} \quad (5.30)$$

La primera suma se hace en todos los vértices. La segunda en los tetraedros formados por todas las posibles ternas de aristas que llegan al vértice; la presencia del factor  $E(v)$  se debe a que al tomar el límite de los tetraedros tendiendo a su base  $v(\Delta)$ , todos los tetraedros  $\Delta$  formados por diferentes ternas darán la misma contribución (si bien se podría considerar la contribución de una sola terna y omitir el factor  $E(v)$ , queremos que nuestra elección de partición trate a todas las aristas por igual). La tercer suma se hace en el tetraedro  $\Delta$  y todas sus imágenes espejo. Esta última suma se puede sustituir por ocho veces la integral en el primer tetraedro en el límite en el que todos los tetraedros tienden a su punto base  $v(\Delta)$ . Entonces, usando la triangulación adaptada al grafo  $\gamma$  ya mencionada (a la que llamaremos  $T(\gamma)$ ) y recordando el límite clásico de (5.12) cuantizamos la expresión (5.13):

$$\hat{H}_T^E(\gamma)[N] = \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \frac{8}{E(v)} \sum_{v(\Delta)=v} \hat{H}_{\Delta}^E =: \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \hat{H}_v^E \quad (5.31)$$

### 5.1.2 Teoría reducida

Uno podría en principio usar el resultado de la teoría completa para una conexión y una triada axisimétricas:

$$\begin{aligned} A_a^1(x, y, \phi) &= \mathbf{a}_a^1(x, y) \cos \phi - \mathbf{a}_a^2(x, y) \sin \phi \\ A_a^2(x, y, \phi) &= \mathbf{a}_a^1(x, y) \sin \phi + \mathbf{a}_a^2(x, y) \cos \phi \\ A_a^3(x, y) &= \mathbf{a}_a^3(x, y) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Y análogamente

$$\begin{aligned} E_1^a(x, y, \phi) &= \mathbf{e}_1^a(x, y) \cos \phi - \mathbf{e}_2^a(x, y) \sin \phi \\ E_2^a(x, y, \phi) &= \mathbf{e}_1^a(x, y) \sin \phi + \mathbf{e}_2^a(x, y) \cos \phi \\ E_3^a(x, y) &= \mathbf{e}_3^a(x, y) \end{aligned} \quad (5.33)$$

donde  $(x, y)$  denotan coordenadas en la 2-superficie perpendicular al vector de Killing. La holonomización y construcción del hamiltoniano se pueden hacer de la misma forma que en la sección anterior pues esto no es más que un caso particular; sin embargo, queremos construir el hamiltoniano en términos de holonomías de la conexión reducida  $\mathbf{a}_a^i$  (más adelante veremos que en realidad debemos realizar la construcción en términos de  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i = \mathbf{a}_a^i + \delta_a^\phi \delta_3^i$ ). En términos de las variables reducidas, el hamiltoniano en el caso axisimétrico toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_E &= \frac{1}{8G} \int dx dy \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \left[ (\mathbf{a}_{b,a}^i - \mathbf{a}_{a,b}^i + \epsilon_{ilm} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m) \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2\delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) \right] \\ &= \frac{1}{8G} \int dx dy N 2 \left[ \epsilon^{abc} f_{ab}^i \{ \mathbf{a}_c^i, V \} + 2\delta_3^j \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^i \epsilon_{ijk} \epsilon^{abc} \{ \mathbf{a}_c^k, V \} \right] \end{aligned} \quad (5.34)$$

Donde en la segunda igualdad se usaron identidades análogas a (5.3):

$$2\epsilon^{abc} \{ \mathbf{a}_c^i, V \} = \frac{\epsilon^{ijk}}{\sqrt{\mathbf{e}}} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \quad (5.35)$$

Recordar que  $V = \int d^3x \sqrt{E} = \int d^3x \sqrt{\mathbf{e}}$ , por lo que es inmediato ver que (5.35) se cumple. El paralelismo con la teoría completa es evidente al comparar el primer sumando de cada lado, mientras que el segundo sumando se obtiene de forma similar:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} \delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) &= \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} \delta_3^j \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^i \epsilon_{ijk} \epsilon^{klm} \mathbf{e}_l^a \mathbf{e}_m^b \\ &= \delta_3^j \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^i \epsilon_{ijk} 2\epsilon^{abc} \{ \mathbf{a}_c^k, V \} \end{aligned} \quad (5.36)$$

Para mayor simplicidad y para mantener la mayor similitud posible con la teoría completa, se usaron unidades tales que  $4G\beta = 1$  y por lo tanto  $\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), \mathbf{e}_j^b(\vec{y}) \} = \delta_a^b \delta_j^i \delta(\vec{x} - \vec{y})$ . Queremos ahora holonomizar esto usando holonomías de la conexión reducida  $\mathbf{a}_a^i$  en vez de  $A_a^i$ . Al término

$$\epsilon^{abc} f_{ab}^i \{ \mathbf{a}_c^i, V \}$$

Lo podemos dividir en dos sumas:

- $a = \alpha, b = \beta, c = \phi$
- $a = \alpha, b = \phi, c = \beta$  (y  $a = \phi, b = \alpha, c = \beta$ )

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  denotan índices correspondientes a coordenadas en la 2-superficie. La primera parte se puede holonomizar exactamente igual que en la teoría completa. La única diferencia es que el término que tiene el corchete de Poisson con el volumen tendrá una holonomía puntual (cuyo largo de integración denotamos por  $\mu$ ):

$$h \epsilon^{uvw} \text{tr} (h_{\alpha_{uv}} h_{\mu w}^{-1} \{ h_{\mu w}, V \}) \approx \epsilon_1 \epsilon_2 \mu \epsilon^{\alpha\beta\phi} f_{\alpha\beta}^i \{ \mathbf{a}_\phi^i, V \} \quad (5.37)$$

Siendo  $w = \partial_\phi$  y  $\alpha_{uv}$  el loop formado por los vectores  $\varepsilon_1 \partial_\alpha$ ,  $\varepsilon_2 \partial_\beta$  (ambos contenidos en la 2-superficie perpendicular al vector de Killing) y el arco  $a_{uv}$  que los une. Entonces, análogamente a (5.11):

$$\varepsilon^{uvw} \operatorname{tr} (h_{\alpha uv} h_{\mu w}^{-1} \{h_{\mu w}, V\}) \rightarrow \int_{S \times [0, \mu]} \varepsilon^{\alpha\beta\phi} f_{\alpha\beta}^i \{ \mathbf{a}_\phi^i, V \} \quad (5.38)$$

La integral se hace en una región infinitesimal del tipo  $S \times [0, \mu]$ , siendo  $S = [0, \varepsilon_1] \times [0, \varepsilon_2]$  una región infinitesimal bidimensional contenida en la 2-superficie perpendicular al vector de Killing sobre la cual están definidas las variables canónicas.

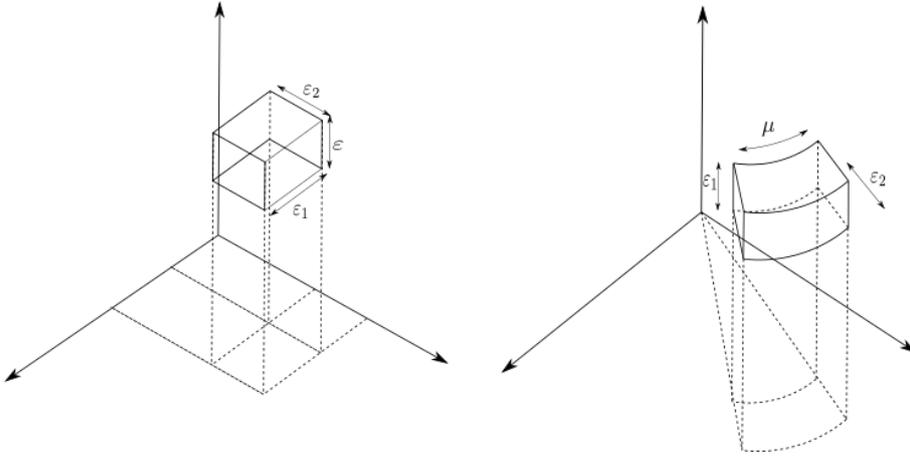


Figura 5.2: El límite de la expresión holonomizada del hamiltoniano da como resultado una integral en una región infinitesimal cúbica en la teoría completa (izquierda) mientras que en la teoría axisimétrica la región es un fragmento de un toro

Luego, el segundo sumando:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\phi} f_{\alpha\phi}^i \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \}$$

Se puede obtener tomando el límite  $\varepsilon_1, \mu \rightarrow 0$  en la siguiente expresión:

$$h_{\alpha uv} := h_{\mu v}^{-1}(x) h_{\varepsilon_1 u}^{-1}(x + \varepsilon_1 u) h_{\mu v}(x + \varepsilon_1 u) h_{\varepsilon_1 u}(x) \quad (5.39)$$

Siendo  $u = \partial_\alpha$  y  $v = \partial_\phi$ . Sin embargo, en el límite continuo no recuperamos el término extra que aparece en (5.34) y no tiene un análogo en la teoría completa. Podríamos en principio intentar buscar otro término construido a partir de holonomías que en el límite continuo nos de el término que buscamos; sin embargo, recordemos de la sección anterior que  $\mathbf{a}_a^i$  no transforma como una conexión bajo rotaciones internas ni bajo difeomorfismos, pero  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i = \mathbf{a}_a^i + \delta_a^\phi \delta_3^i$  sí lo hace. Si queremos tener holonomías genuinas, debemos usar esta conexión en

vez de  $\mathbf{a}_a^i$ . Sustituyendo  $\mathbf{a}_a^i \rightarrow \tilde{\mathbf{a}}_a^i$  en (5.39) y tomando el límite  $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ ,  $\mu \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} h_{\mu v}^{-1}(x)h_{\varepsilon u}^{-1}(x + \varepsilon u)h_{\mu v}(x + \varepsilon u)h_{\varepsilon u}(x) &\approx (1 - \mu\tilde{\mathbf{a}}_a(x)v^a)(1 - \varepsilon\tilde{\mathbf{a}}_a(x + \varepsilon u)u^a) \\ &\quad (1 + \mu\tilde{\mathbf{a}}_a(x + \varepsilon u)v^a)(1 + \varepsilon\tilde{\mathbf{a}}_a(x)u^a) \\ &= (1 - \mu\tilde{\mathbf{a}}_v(x))(1 - \varepsilon\tilde{\mathbf{a}}_u(x + \varepsilon u)) \\ &\quad (1 + \mu\tilde{\mathbf{a}}_v(x + \varepsilon u))(1 + \varepsilon\tilde{\mathbf{a}}_u(x)) \end{aligned}$$

Donde para abreviar definimos  $\tilde{\mathbf{a}}_a := \tilde{\mathbf{a}}_a^i \tau_i$ . Conservando hasta orden  $\varepsilon_1 \mu$ :

$$\begin{aligned} h_v^{-1}h_u^{-1}h_v h_u &\approx 1 + \varepsilon\mu \left( \partial_u \tilde{\mathbf{a}}_v^i + \tilde{\mathbf{a}}_v^j \tilde{\mathbf{a}}_u^k \varepsilon_{jki} \right) \tau_i \\ &\quad 1 + \varepsilon\mu \left( \partial_u \mathbf{a}_v^i + \left( \mathbf{a}_v^j + \delta_3^j \right) \mathbf{a}_u^k \varepsilon_{jki} \right) \tau_i \end{aligned}$$

Luego, tomando el límite  $\varepsilon_2 \rightarrow 0$  en la siguiente expresión:

$$h_{\varepsilon_2 w}^{-1} \{h_{\varepsilon w}, V\} \approx \varepsilon_2 \{ \mathbf{a}_w^i, V \} \tau_i$$

Siendo  $w = \partial_\beta$ . Procediendo análogamente a los casos anteriores (y sustituyendo  $v \rightarrow \phi$ ,  $u, w \rightarrow \alpha, \beta$ ):

$$\varepsilon^{\alpha\phi\beta} \operatorname{tr} \left( h_{\mu\phi}^{-1} h_{\varepsilon_1\alpha}^{-1} h_{\mu\phi} h_{\varepsilon_1\alpha} h_{\varepsilon_2\beta}^{-1} \{h_{\varepsilon_2\beta}, V\} \right) \approx \varepsilon_1 \varepsilon_2 \mu \varepsilon^{\alpha\phi\beta} \left( f_{\alpha\phi}^i \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} + \varepsilon_{3ji} \mathbf{a}_\alpha^j \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} \right),$$

O sea:

$$\varepsilon^{\alpha\phi\beta} \operatorname{tr} \left( h_{\mu\phi}^{-1} h_{\varepsilon_1\alpha}^{-1} h_{\mu\phi} h_{\varepsilon_1\alpha} h_{\varepsilon_2\beta}^{-1} \{h_{\varepsilon_2\beta}, V\} \right) \rightarrow \int_{S \times [0, \mu]} \varepsilon^{\alpha\phi\beta} \left( f_{\alpha\phi}^i \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} + \varepsilon_{3ji} \mathbf{a}_\alpha^j \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} \right). \quad (5.40)$$

Es fácil ver que si intercambiamos  $\alpha \leftrightarrow \phi$ :

$$\begin{aligned} &\int_{S \times [0, \mu]} \varepsilon^{\phi\alpha\beta} \left( f_{\phi\alpha}^i \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} - \varepsilon_{3ji} \mathbf{a}_\alpha^j \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} \right) \\ &= \int_{S \times [0, \mu]} \varepsilon^{\phi\alpha\beta} f_{\phi\alpha}^i \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} + \varepsilon^{\alpha\phi\beta} \varepsilon_{3ji} \mathbf{a}_\alpha^j \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \}. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Sumando esto a (5.40):

$$\begin{aligned} &\varepsilon^{\alpha\phi\beta} \operatorname{tr} \left( h_{\mu\phi}^{-1} h_{\varepsilon_1\alpha}^{-1} h_{\mu\phi} h_{\varepsilon_1\alpha} h_{\varepsilon_2\beta}^{-1} \{h_{\varepsilon_2\beta}, V\} \right) + (\alpha \leftrightarrow \phi) \\ &\rightarrow \int_{S \times [0, \mu]} \varepsilon^{\phi\alpha\beta} f_{\phi\alpha}^i \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \} + (\alpha \leftrightarrow \phi) + 2\varepsilon^{\alpha\phi\beta} \varepsilon_{3ji} \mathbf{a}_\alpha^j \{ \mathbf{a}_\beta^i, V \}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Al tomar las holonomías con respecto a  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  (que sí transforma como una conexión), obtenemos el resultado completo sin necesidad de introducir términos extra. Además, en (5.38) se puede sustituir  $\mathbf{a}_a^i \rightarrow \tilde{\mathbf{a}}_a^i$  y el resultado no cambia por lo que podemos realizar toda nuestra construcción a partir de la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}$ .

Siguiendo los pasos del procedimiento usado en la teoría completa, recordemos que el próximo paso a seguir es particionar la variedad  $\Sigma$  en tetraedros  $\Delta$ . En cada uno de estos tetraedros elegimos uno de sus vértices  $v$  y definimos a  $s_I, s_J$  y  $s_K$  como las aristas de  $\Delta$  que convergen al mismo. Luego, definimos como  $H_\Delta$  a la cantidad clásica correspondiente a la holonomización del hamiltoniano tal que las holonomías son tomadas a lo largo de las aristas  $e_I, e_J$  y  $e_K$  que coinciden

con  $s_I, s_J$  y  $s_K$  en un entorno de  $v$ . En el caso axisimétrico vamos a triangular la 2-superficie  $\Sigma^2$  perpendicular al vector de Killing en triángulos  $\Delta$ , los cuales podemos trasladar al resto del espacio a lo largo de las curvas integrales del vector de Killing  $\partial_\phi$ , particionando el espacio tridimensional en regiones de la forma  $\Delta \times [0, \mu]$ , siendo  $\Delta$  triángulos en los cuales particionamos  $\Sigma^2$  y  $\mu$  un número real. El espacio queda entonces particionado en toros triangulares.

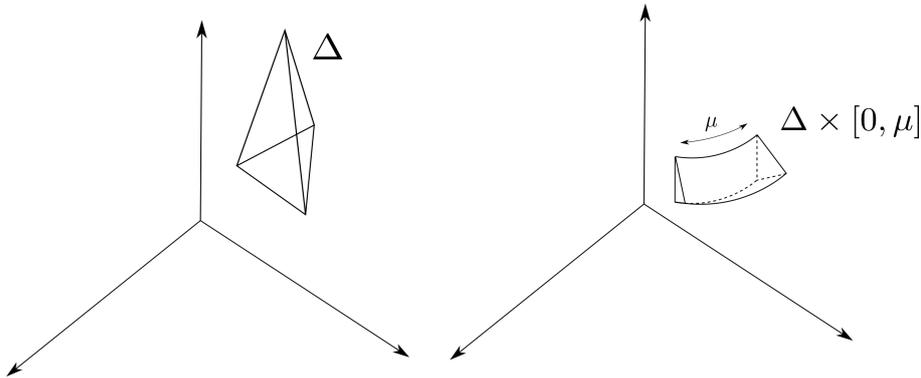


Figura 5.3: En la teoría completa, particionamos el espacio en tetraedros elementales (izquierda), mientras que en la teoría axisimétrica lo podemos particionar en toros triangulares elementales (derecha).

Sea  $\Delta$  uno de los triángulos en los cuales particionamos  $\Sigma^2$ , sean  $s_\alpha$  y  $s_\beta$  dos lados de  $\Delta$  de largos  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  respectivamente y sea  $s_\phi$  una arista de largo  $\mu$  que intersecta con  $s_\alpha$  y  $s_\beta$  en un punto al que llamaremos  $v$  y es además perpendicular a estos. Definimos ahora

$$H_\Delta^E := \frac{1}{8G}(H_\Delta^\alpha + H_\Delta^\phi) \quad (5.43)$$

Siendo

$$H_\Delta^\alpha(N) := \frac{1}{2\pi} 2 \frac{N(v)}{2} \varepsilon^{\alpha\beta\phi} \operatorname{tr} \left( h_{\alpha\alpha\beta(\Delta)} h_{s_\phi(\Delta)} \left[ h_{s_\phi(\Delta)}^{-1}, \hat{V} \right] \right), \quad (5.44)$$

$$H_\Delta^\phi := \frac{1}{2\pi} 2 \frac{N(v)}{2} \varepsilon^{\alpha\phi\beta} \operatorname{tr} \left( h_{s_\phi}^{-1} h_{s_\alpha}^{-1} h_{s_\phi} h_{s_\alpha} h_{s_\beta}^{-1} \left[ h_{s_\beta}, \hat{V} \right] \right) + (\alpha \leftrightarrow \phi). \quad (5.45)$$

Teniendo en cuenta los límites (5.38) y (5.42), tenemos que en el límite en el cual  $\Delta$  tiende a  $v$ :

$$\begin{aligned} H_\Delta^E &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{1}{8G} \frac{1}{2} \int_{S \times [0, \mu]} N 2 \left[ \varepsilon^{abc} f_{ab}^i \{ \mathbf{a}_c^i, V \} + 2\delta_3^j \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^i \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} \{ \mathbf{a}_c^k, V \} \right] \\ &\approx \frac{1}{8G} \frac{\mu}{2\pi} \int_\Delta N 2 \left[ \varepsilon^{abc} f_{ab}^i \{ \mathbf{a}_c^i, V \} + 2\delta_3^j \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^i \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} \{ \mathbf{a}_c^k, V \} \right] \end{aligned} \quad (5.46)$$

Si llamamos  $T$  a la triangulación y definimos

$$H_T^E = \sum_{\Delta \in T} H_\Delta^E \quad (5.47)$$

Haciendo tender los triángulos a sus correspondientes vértices y teniendo en cuenta los límites (5.38) y (5.40), es fácil ver que en el límite continuo esta cantidad es el hamiltoniano integrado en  $\Sigma^2 \times [0, \mu]$ . Recordemos ahora que para obtener el hamiltoniano axisimétrico, hicimos una integral en la dirección del vector de Killing en la cual hay homogeneidad y por lo tanto esto da como resultado un factor de  $2\pi$ , esta es la razón por la cual introdujimos los factores  $1/2\pi$  en las definiciones (5.44) y (5.45). El equivalente a realizar la integral en la dirección de Killing en este caso es realizar una suma en  $\Delta \times [0, \mu_i]$ , manteniendo el  $\Delta$  fijo y sumando para  $\mu_i$  tales que  $\sum_i \mu_i = 2\pi$ , si hacemos esto en (5.47), obtenemos:

$$h_T^E = \sum_{\Delta \in T} h_\Delta^E \quad (5.48)$$

Donde la  $h$  minúscula simboliza el hecho de que ya realizamos la integral en la dirección del vector de Killing. Esta es la cantidad que promovemos a operador en el espacio de Hilbert de las funciones cilíndricas:

$$\hat{h}_T^E[N] := \sum_{\Delta \in T} \hat{h}_\Delta^E[N] = \frac{1}{8G} \sum_{\Delta \in T} \left( \hat{h}_\Delta^\alpha[N] + \hat{h}_\Delta^\phi[N] \right) \quad (5.49)$$

Donde separamos la acción del hamiltoniano en dos sumandos:

$$\hat{h}_\Delta^\alpha[N] := -2 \frac{N(v(\Delta))}{2i\ell_p^2} \varepsilon^{\alpha\beta\phi} \operatorname{tr} \left( h_{\alpha\alpha\beta(\Delta)} h_{s_\phi(\Delta)} \left[ h_{s_\phi(\Delta)}^{-1}, \hat{V} \right] \right) \quad (5.50)$$

$$\hat{h}_\Delta^\phi[N] := -2 \frac{N(v(\Delta))}{2i\ell_p^2} \varepsilon^{\alpha\phi\beta} \operatorname{tr} \left( h_{s_\phi}^{-1} h_{s_\alpha}^{-1} h_{s_\phi} h_{s_\alpha} h_{s_\beta}^{-1} \left[ h_{s_\beta}, \hat{V} \right] \right) + (\alpha \leftrightarrow \phi) \quad (5.51)$$

Es importante notar que realizar la suma  $\sum_i \mu_i = 2\pi$  en (5.47) es equivalente a reemplazar las holonomías infinitesimales en la dirección del vector de Killing por el producto de holonomías  $\prod_i h_{\phi_i}$ . Donde cada  $\phi_i$  es un vector en la dirección del vector de Killing de largo  $\mu_i$  cuyo origen se encuentra en el punto final del vector  $\phi_{i-1}$ . Esto se puede verificar fácilmente tomando el límite  $\mu_i \rightarrow 0 \forall i$ . Dado que  $\prod_i h_{\phi_i} = h_{2\pi\partial_\phi}$  esto último implica que las holonomías en la dirección del vector de Killing en el vínculo Hamiltoniano se toman a lo largo de órbitas completas.

Es fácil ver que estos operadores actúan únicamente en los vértices del grafo de la función cilíndrica en la cual actúan. La prueba es idéntica al caso de la teoría completa en ambos casos: el análisis de los conmutadores de las holonomías con el volumen es suficiente para probarlo. Entonces:

$$\hat{h}_T^E[N]f = \sum_{\Delta \cap V(\gamma) \neq \emptyset} \hat{h}_\Delta^E[N]f = \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \sum_{v(\Delta)=v} \hat{h}_\Delta^E f =: \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \hat{h}_v^E f \quad (5.52)$$

Dado un grafo  $\gamma$ , al igual que en la teoría completa, adaptamos la partición  $T$  al mismo (y la renombramos a  $T(\gamma)$ ). Ahora las aristas de  $\gamma$  adyacentes a sus vértices coinciden con las de los triángulos de  $T(\gamma)$ .

La regularización es similar al caso anterior. Dado un triángulo  $\Delta$  de  $T$  llamemos  $D(\Delta)$  a la región de  $\Sigma^2$  cubierta por  $\Delta$  y sus imágenes espejo. Las imágenes espejo de un triángulo  $\Delta$  se definen exactamente igual que en la teoría completa, la diferencia es que ahora no formaremos tetraedros con esos triángulos y la arista perpendicular a la 2-superficie sino que esos cuatro triángulos ya son suficientes para saturar al vértice  $v$  (recordar que las integrales ahora son bidimensionales).

Consideremos ahora la unión  $D(v) = \cup_{v(\Delta)=v} D(\Delta)$ , esto es, la unión de las regiones cubiertas por cada triángulo basado en  $v$  correspondiente a cada par no ordenado  $e_I, e_J$  de aristas de la triangulación. Luego, sea  $\overline{D}(\Delta) := D(v) - D(\Delta)$  y  $\overline{D} := \Sigma - \cup_{v \in V(\gamma)} D(v)$ . Para cada región  $D(\Delta)$  consideramos la triangulación  $T(\gamma)$  adaptada al grafo, mientras que las otras regiones son trianguladas de manera arbitraria. A la integral sobre  $\Sigma^2$  en la teoría clásica la podemos escribir de la siguiente manera:

$$\int_{\Sigma^2} = \int_{\Sigma^2 - \cup_{v \in V(\gamma)} D(v)} + \sum_{v \in V(\gamma)} \int_{D(v)} \quad (5.53)$$

El dominio de integración del primer sumando es  $\overline{D}$ . Luego, a la integral en  $D(v)$  la podemos separar en  $D(\Delta)$  y  $\overline{D}(\Delta)$ , sumado en todos los pares no ordenados posibles y dividido por la multiplicidad correspondiente, en este caso:  $E(v) = n(v)(n(v) - 1)/2$ . Por otro lado, la integral en  $D(\Delta)$  se puede escribir como cuatro veces la integral en el triángulo de la partición, perdiendo así la dependencia en las imágenes espejo del mismo. Nuevamente, las integrales en  $\overline{D}$  y  $\overline{D}(\Delta)$  no contribuyen al resultado final después de cuantizar la expresión anterior. Teniendo todo esto en cuenta, podemos definir la acción del operador hamiltoniano sobre una función  $f$  cilíndrica con respecto a un grafo  $\gamma$ :

$$\hat{h}_{T(\gamma)}^E[N]f = \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \frac{4}{E(v)} \sum_{v(\Delta)=v} \left( \hat{h}_\Delta^\alpha + \hat{h}_\Delta^\phi \right) f =: \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \hat{h}_v^E f \quad (5.54)$$

## 5.2 Hamiltoniano Lorentziano

### 5.2.1 Teoría completa

En la teoría completa, el hamiltoniano Lorentziano clásico está dado por

$$H_L(N) = 2 \int d^3x N (1 + \beta^2) \frac{1}{\sqrt{E}} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} E_j^a E_k^b K_a^l K_b^m.$$

La curvatura extrínseca se puede expresar como

$$K_a^i = \frac{\delta K}{\delta E_a^i} = \{A_a^i, K\}$$

Siendo

$$K := \int_{\Sigma} d^3x \sqrt{\det(q)} K_{ab} q^{ab} = \int_{\Sigma} d^3x K_a^i E_i^a \quad (5.55)$$

Usando este resultado y la identidad

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \epsilon^{ijk} E_j^a E_k^b = 2 \epsilon^{abc} \{A_c^i, V\} \quad (5.56)$$

Podemos reescribir el hamiltoniano lorentziano como:

$$H_L(N) = 4 \int d^3x N (1 + \beta^2) \epsilon^{abc} \epsilon_{ijk} \{A_a^j, K\} \{A_b^k, K\} \{A_c^i, V\}$$

Además, tenemos que  $K$  se puede escribir en términos del volumen y del Hamiltoniano euclídeo [64] :

$$\beta K = - \left\{ \frac{V}{\beta}, \int_{\Sigma} d^3x H_E(x) \right\} = - \left\{ \frac{V}{\beta}, H_E(1) \right\}, \quad (5.57)$$

Siendo  $H_E$  la densidad Hamiltoniana euclídea. Sean  $u, v$  y  $w$  vectores arbitrarios en  $\Sigma$ , consideremos la siguiente cantidad:

$$\epsilon^{uvw} \text{tr} (h_{\varepsilon_1 u}^{-1} \{h_{\varepsilon_1 u}, K\} h_{\varepsilon_2 v}^{-1} \{h_{\varepsilon_2 v}, K\} h_{\varepsilon_3 w}^{-1} \{h_{\varepsilon_3 w}, V\}) \quad (5.58)$$

Es fácil ver que cuando  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \rightarrow 0$  se cumple

$$\begin{aligned} & \epsilon^{uvw} \text{tr} (h_{\varepsilon_1 u}^{-1} \{h_{\varepsilon_1 u}, K\} h_{\varepsilon_2 v}^{-1} \{h_{\varepsilon_2 v}, K\} h_{\varepsilon_3 w}^{-1} \{h_{\varepsilon_3 w}, V\}) \\ & \rightarrow \int_S \epsilon^{uvw} \epsilon_{ijk} \{A_u^i, K\} \{A_v^j, K\} \{A_w^k, V\} \end{aligned} \quad (5.59)$$

Donde el dominio de integración es la región infinitesimal  $S = [0, \varepsilon_1] \times [0, \varepsilon_2] \times [0, \varepsilon_3]$ . Al igual que en la sección anterior, antes de cuantizar el vínculo, vamos a considerar una partición  $T$  de  $\Sigma$  que consiste en tetraedros  $\Delta$ . Por cada tetraedro, seleccionamos uno de sus vértices  $v(\Delta)$  y llamamos  $e_I, e_J, e_K$  a las aristas adyacentes al mismo. Definimos ahora la siguiente cantidad:

$$H_{\Delta}^L(N) = \frac{4}{3} \sum_{\Delta \in T} N (1 + \beta^2) \varepsilon^{IJK} \text{tr} (h_{e_I}^{-1} \{h_{e_I}, K\} h_{e_J}^{-1} \{h_{e_J}, K\} h_{e_K}^{-1} \{h_{e_K}, V\})$$

Observando el resultado (5.59) es fácil ver que cada sumando en cada tetraedro tiende a  $2 \int_{\Delta} N \operatorname{tr}(\{A, K\} \wedge \{A, K\} \wedge \{A, V\})$  cuando hacemos tender  $\Delta$  a su vértice  $v$ , es decir, obtenemos el límite continuo correcto. Para cuantizar esta expresión adaptamos la partición a un grafo  $\gamma$ , regularizamos de forma análoga al caso del Hamiltoniano euclídeo y reemplazamos los corchetes de Poisson por  $i$  veces el conmutador. El operador resultante, al actuar sobre una función  $f$  cilíndrica con respecto a un grafo  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \hat{H}^L[N]f &= -\frac{2}{3(i\ell_p^2)^3} \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \frac{1}{E(v)} \sum_{v(\Delta)=v} \varepsilon^{IJK} \times \\ &\times \operatorname{tr} \left( h_{e_I(\Delta)} \left[ h_{e_I(\Delta)}^{-1}, K_v \right] h_{e_J(\Delta)} \left[ h_{e_J(\Delta)}^{-1}, K_v \right] h_{e_K(\Delta)} \left[ h_{e_K(\Delta)}^{-1}, V_v \right] \right) f \\ &=: \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{N_v}{E(v)} \sum_{v(\Delta)=v} \hat{H}_{\Delta}^L f =: \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{N_v}{E(v)} \hat{H}_v^L f \quad (5.60) \end{aligned}$$

Para probar que este operador actúa únicamente en vértices de  $\gamma$  con aristas no colineales del grafo podemos repetir el argumento de la sección anterior. Se puede probar además que los conmutadores de las holonomías con  $\hat{K}$  y  $\hat{V}$  son no nulos únicamente en el vértice correspondiente a cada sumando: Sea  $s$  un segmento de  $\gamma$  incidente en un vértice  $v$ . Sean  $g := [\hat{h}_s, \hat{K}]$  y  $h := [\hat{h}_s, V]$ . Tanto  $\hat{K}$  como  $\hat{V}$  se pueden escribir como la suma de operadores que actúan en un vértice de  $\gamma$ :  $\hat{K} = \sum_{v' \in V(\gamma)} \hat{K}_{v'}$ ,  $\hat{V} = \sum_{v' \in V(\gamma)} \hat{V}_{v'}$ . Sin embargo, si  $v' \neq v$ , es fácil ver que el conmutador con  $\hat{h}_s^{-1}$  es cero pues este último actúa únicamente en  $v$  por lo que su acción conmuta con la de otro operador que actúa en un vértice diferente. Luego, la función  $h' := \hat{h}_s [\hat{h}_s^{-1}, V] f$  es cilíndrica con respecto a  $\gamma \cup \Delta(\gamma)$ . Como para  $v \in \gamma$  y  $v' \in V(\gamma \cup \Delta(\gamma)) - V(\gamma)$  tenemos que  $[\hat{h}_s^{-1}, \hat{K}_{v'}] = 0$ , entonces  $\hat{h}_s [\hat{h}_s^{-1}, \hat{K}] h' = \hat{h}_s [\hat{h}_s^{-1}, \hat{K}_v] h'$ , obteniendo la acción (5.60).

### 5.2.2 Teoría reducida

Clásicamente, el Hamiltoniano lorentziano está dado por:

$$\begin{aligned} h^L(N) &= 2 \int d^3 x N (1 + \beta^2) \frac{1}{\sqrt{e}} \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b k_a^l k_b^m \\ &= 4 \int d^3 x N (1 + \beta^2) \varepsilon^{abc} \varepsilon_{ijk} \{\mathbf{a}_a^j, k\} \{\mathbf{a}_b^k, k\} \{\mathbf{a}_c^i, V\} \end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad se usó la identidad (5.3) (la cual es también válida para las variables reducidas). En la expresión anterior podemos sustituir  $\mathbf{a}_a^i$  por la conexión  $\tilde{\mathbf{a}}_a^i$  sin cambiar el resultado. La cantidad  $k$  se define análogamente a la teoría completa:

$$k := k_a^i \mathbf{e}_i^a \quad (5.61)$$

Luego, recordemos que  $\beta k_a^i = \mathbf{a}_a^i - \gamma_a^i$ . Con

$$\gamma_a^i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^b (\mathbf{e}_{a,b}^k - \mathbf{e}_{b,a}^k + \mathbf{e}_k^c \mathbf{e}_a^l \mathbf{e}_{c,b}^l + \mathbf{e}_a^k \mathbf{e}_c^l \mathbf{e}_{l,b}^c) - \delta_3^i \delta_a^\phi := \tilde{\gamma}_a^i - \delta_3^i \delta_a^\phi \quad (5.62)$$

Reescribiendo  $k_a^i$ :

$$\beta k_a^i = \mathbf{a}_a^i - \gamma_a^i = \mathbf{a}_a^i - \tilde{\gamma}_a^i + \delta_3^i \delta_a^\phi := \beta \tilde{k}_a^i + \delta_3^i \delta_a^\phi \quad (5.63)$$

Es fácil probar que una identidad análoga a (5.57) se cumple en el caso axisimétrico:

$$\beta k = - \left\{ \frac{V}{\beta}, \int_{\Sigma} d^3 x h^E(x) \right\} \quad (5.64)$$

Primero, con la definición (5.63), tenemos:

$$\beta k = \beta k_a^i \mathbf{e}_i^a = \beta \tilde{k}_a^i \mathbf{e}_i^a + \mathbf{e}_3^\phi. \quad (5.65)$$

Luego, recordar que al Hamiltoniano euclídeo axisimétrico lo podemos escribir como  $h^E = h^{E,\alpha} + h^{E,\phi}$ . Entonces:

$$- \left\{ \frac{V}{\beta}, \int_{\sigma} d^2 x h^E(x) \right\} = - \left\{ \frac{V}{\beta}, \int_{\sigma} d^2 x h^{E,\alpha}(x) \right\} - \left\{ \frac{V}{\beta}, \int_{\sigma} d^2 x h^{E,\phi}(x) \right\}. \quad (5.66)$$

Es inmediato ver que el primer sumando corresponde a  $\beta \tilde{k} := \beta \tilde{k}_a^i \mathbf{e}_i^a$  pues es análogo a la teoría completa. Para analizar el segundo sumando recordemos primero la expresión para  $h^{E,\phi}$

$$h^{E,\phi}[N] = \frac{1}{8G} \int d^2 x \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} 2\delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) \quad (5.67)$$

Contrayendo la versión reducida de (5.56):

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} \epsilon^{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b = 2\epsilon^{abc} \{ \mathbf{a}_c^i, V \}, \quad (5.68)$$

con  $\epsilon_{abd}$  y renombrando el índice libre tenemos:

$$\{ V, \mathbf{a}_a^i \} = -\frac{1}{2} \sqrt{\mathbf{e}} \mathbf{e}_a^i, \quad (5.69)$$

Entonces:

$$- \left\{ \frac{V}{\beta}, h_\phi[1] \right\} = \frac{1}{8G\beta} \mathbf{e}_a^i \delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) = \frac{1}{8G\beta} (3e_3^\phi - \mathbf{e}_i^\phi \delta_3^i) = \frac{1}{4G\beta} \mathbf{e}_3^\phi = \mathbf{e}_3^\phi \quad (5.70)$$

La regularización se hace de forma idéntica al caso del Hamiltoniano euclídeo. Particionamos la superficie  $\Sigma^2$  en triángulos  $\Delta$  y definimos:

$$h_\Delta^L(N) = \frac{4}{2} N(v(\Delta)) (1 + \beta^2) \epsilon^{ijk} \text{tr} \left( h_{s_i}^{-1} \{h_{s_i}, k\} h_{s_j}^{-1} \{h_{s_j}, k\} h_{s_k}^{-1} \{h_{s_k}, V\} \right), \quad (5.71)$$

Siendo dos de las aristas  $s_i, s_j, s_k$  lados de  $\Delta$  que intersectan en  $v(\Delta)$  y la tercera perpendicular a  $\Sigma^2$ . Cada uno de estos sumandos tiende a

$$4(1 + \beta^2) \int_{\Delta \times [0, \mu]} N \text{tr} (\{ \mathbf{a}, k \} \{ \mathbf{a}, k \} \{ \mathbf{a}, V \}) \quad (5.72)$$

### 5.3. REQUERIMIENTOS PARA UNA TRIANGULACIÓN ADAPTADA A UN GRAFO 117

cuando los triángulos tienden a sus bases (el largo de  $s_i, s_j, s_k$  tiende a cero) por lo que esta expresión tiene el límite continuo correcto. La discretización para el Hamiltoniano Lorentziano está dada por

$$h^L(N) = \sum_{\Delta \in T} h_{\Delta}^L(N). \quad (5.73)$$

Nuevamente, para cuantizar esta expresión adaptamos la partición  $T$  al grafo  $\gamma$  y reemplazamos corchetes de Poisson por conmutadores. El operador obtenido tiene la siguiente acción sobre una función  $f$  cilíndrica con respecto a un grafo  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \hat{h}^L(N)f &= -\frac{16}{2(i\ell_p^2)^3} \sum_{v \in V(\gamma)} N_v \frac{1}{E(v)} \sum_{v(\Delta)=v} \epsilon^{ijk} \times \\ &\quad \times \text{tr} \left( h_{s_i(\Delta)} \left[ h_{s_i(\Delta)}^{-1}, k_v \right] h_{s_j(\Delta)} \left[ h_{s_j(\Delta)}^{-1}, k_v \right] h_{s_k(\Delta)} \left[ h_{s_k(\Delta)}^{-1}, V_v \right] \right) f \\ &=: \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{N_v}{E(v)} \sum_{v(\Delta)=v} \hat{h}_{\Delta}^L f =: \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{N_v}{E(v)} \hat{h}_v^L f, \end{aligned} \quad (5.74)$$

La multiplicidad del vértice tiene en cuenta los diferentes pares no ordenados de aristas en el plano adyacentes al mismo:  $E(v) = n(v)(n(v) - 1)/2$ . La notación  $k_v$  y  $V_v$  indica que los operadores están evaluados en el vértice  $v$ . La prueba de que los operadores  $\hat{k}$  y  $\hat{V}$  actúan en el mismo vértice en todos los términos es idéntica al caso de la teoría completa, pues esto no es más que un caso particular.

### 5.3 Requerimientos para una triangulación adaptada a un grafo

Como en todo proceso de cuantización, existen posibles ambigüedades en el resultado. El Hamiltoniano depende de la triangulación y la invariancia por difeomorfismos no es suficiente para tener un resultado único. La elección de triangulación en [64] que fue adoptada también en este trabajo se realizó siguiendo los siguientes criterios:

- No trivialidad: Podríamos en principio elegir  $T(\gamma)$  tal que no interseque con  $\gamma$  en absoluto, esto sin embargo daría un resultado trivial y el operador Hamiltoniano debe reducir los grados de libertad.
- Eficiencia: La triangulación debería introducir la menor cantidad de estructuras extra posibles. Podríamos haber elegido que el Hamiltoniano agregue un tetraedro al grafo original tal que ninguno de sus lados coincida con el mismo, haciendo entonces más grande la estructura extra introducida.
- Naturaldad: La triangulación debería tratar a todas las aristas del grafo de igual forma. Es por esto que, al obtener la discretización del Hamiltoniano, realizamos una suma en todas las ternas posibles de aristas que llegan a cada vértice y dividimos por la correspondiente multiplicidad. Considerar solamente un tetraedro/triángulo sin dividir por  $E(v)$  es suficiente para recuperar el límite continuo, pero no trata a todas las aristas por igual.

- Kernel no vacío: Las soluciones a las ecuaciones de Einstein clásicas tienen una estructura muy rica por lo que un kernel vacío no correspondería a un espacio de fases clásico reducido. El kernel del Hamiltoniano se estudiará en el próximo capítulo.

Finalmente, hay tres requerimientos más los cuales vamos a estudiar en más detalle en las próximas secciones.

### 5.3.1 Consistencia cilíndrica

#### Hamiltoniano Euclídeo

Los operadores que definimos dependen de la partición  $T$ . En la prescripción elegida dicha partición está adaptada a un grafo por lo que si  $\gamma'$  es un grafo que contiene a otro  $\gamma$ , entonces las triangulaciones  $T(\gamma)$  y  $T(\gamma')$  serán en general diferentes entre sí. Vamos a analizar primero el caso de la teoría completa y luego veremos que en la teoría reducida el procedimiento es análogo. Si  $f$  es una función cilíndrica con respecto a  $\gamma$ , entonces vamos a exigir que  $\hat{H}_{T(\gamma')}f$  y  $\hat{H}_{T(\gamma)}f$  sean difeomorfos entre sí (no hace falta que sean iguales ya que sólo nos va a interesar evaluar estados invariantes por difeomorfismos). Esto se logra fácilmente introduciendo un operador de proyección  $\hat{p}_e$  asociado a una arista cuya acción sobre una función  $f$  cilíndrica con respecto a  $\gamma$  es dejarla invariante si  $\gamma \cap e \neq \emptyset$  y aniquilarla si  $\gamma \cap e = \emptyset$ .

Sea  $\Delta_e = \tau^i(h_e)\tau_i(h_e)$  el operador de Casimir asociado a una arista del grafo  $\gamma$  incidente en el vértice  $v$ . Definimos ahora un proyector en una arista  $e$  como  $\hat{p}_e := \theta(\hat{j}_e)$  siendo  $\hat{j}_e := \sqrt{1/4 + \Delta_e} - 1/2$ . Dado que el operador de Casimir toma los valores  $j(j+1)$ , entonces el espectro de  $\hat{j}_e$  es  $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ , mientras que  $\theta$  es una función suave en  $\mathbb{R}$  que vale cero para  $(-\infty, 1/8]$  y uno para  $[3/8, \infty)$ . El efecto de este operador sobre una función cilíndrica con respecto a un grafo  $\gamma$  es aniquilar la función si  $\gamma$  y la arista  $e$  no intersectan en un segmento finito incidente en el extremo final de  $e$  (pues en ese caso  $\Delta_e = 0 \rightarrow \hat{j}_e = 0$ ) y dejarla invariante de otra manera. Si  $\Delta$  es un tetraedro de la triangulación, podemos definir un proyector asociado al mismo:  $\hat{p} := \hat{p}_{s_1}\hat{p}_{s_2}\hat{p}_{s_3}$  y un proyector de vértice  $\hat{E}(v) := \sum_{v(\Delta)=v} \hat{p}_\Delta$ . Utilizamos ahora estos operadores de proyección para redefinir el operador hamiltoniano:

$$\hat{H}_\gamma^E[N] := \sum_{v \in V(\gamma)} 8N_v \sum_{v(\Delta)=v} \hat{H}_\Delta^E \frac{\hat{p}_\Delta}{E(v)}$$

Siendo  $E(v)$  el número de aristas que llegan al vértice. Un grafo  $\gamma \subset \gamma'$  se puede obtener de la siguiente manera: Quitar una arista  $e$  de  $\gamma'$ , y si uno de sus extremos (o ambos) pasa a ser divalente, formar una nueva arista con las aristas  $e_1$  y  $e_2^{-1}$  que llegan a él (esto es, quitar un vértice). Todos los términos de  $\hat{H}_\gamma^E$  actuando sobre una función  $f$  cilíndrica con respecto a  $\gamma$  que involucren a la arista removida serán cero. Si  $v$  es un vértice de  $\gamma'$  pero no de  $\gamma$ , entonces  $\hat{H}_{\gamma'}^E$  no actúa sobre el mismo: Debido al operador  $\hat{p}_e$ , la acción del Hamiltoniano será sobre un vértice divalente y por lo tanto su contribución nula. Si el vértice  $v$  es al menos trivalente en  $\gamma'$ , entonces  $\hat{H}_{\gamma'}^E$  tendrá contribuciones sólo de las aristas de  $\gamma$  y por lo tanto  $E(v)$  toma el valor correcto en  $\gamma$ . Finalmente, dada la prescripción invariante por difeomorfismos usada para definir la triangulación,

### 5.3. REQUERIMIENTOS PARA UNA TRIANGULACIÓN ADAPTADA A UN GRAFO 119

se tiene que  $\hat{H}_\gamma^E f$  y  $\hat{H}_{\gamma'}^E f$  están relacionados por un difeomorfismo.

El caso axisimétrico no es más que un caso particular de la teoría completa: El proyector de vértice se puede escribir como

$$\hat{p}_\Delta = \hat{p}_\alpha \hat{p}_\beta \hat{p}_\phi \quad (5.75)$$

Siendo  $\hat{p}_\alpha$  y  $\hat{p}_\beta$  proyectores sobre aristas en  $\Sigma^2$  y  $\hat{p}_\phi$  un proyector en la dirección perpendicular al mismo. El operador redefinido toma la siguiente forma:

$$\hat{h}_\gamma^E := \sum_{v \in V(\gamma)} 4N_v \sum_{v(\Delta)=v} \hat{h}_\Delta^E \frac{\hat{p}_\Delta}{E(v)}. \quad (5.76)$$

#### Hamiltoniano Lorentziano

El hamiltoniano lorentziano se forma a partir de los operadores volumen, Hamiltoniano euclídeo y holonomías a lo largo de aristas del grafo. Si el operador  $\hat{K}$  actúa después de un operador del tipo  $\hat{h}_s$  (siendo  $s$  un segmento del grafo) entonces uno tendría que adaptar la triangulación asociada con  $\hat{K}$  (la cual es la misma asociada a  $\hat{H}_E$ ) al grafo  $\gamma \cup s$ . Pero por un lado  $\hat{K}$  está definido consistentemente y además  $\gamma \cup s = \gamma$ , por lo que para que el hamiltoniano lorentziano esté definido consistentemente basta introducir nuevamente los proyectores  $\hat{p}_\Delta$  correspondientes al grafo original  $\gamma$ :

$$\hat{H}_\gamma^L := \sum_{v \in V(\gamma)} 8N_v \sum_{v(\Delta)=v} \hat{H}_\Delta^L \frac{\hat{p}_\Delta}{E(v)} \quad (5.77)$$

$$\hat{h}_\gamma^L := \sum_{v \in V(\gamma)} 4N_v \sum_{v(\Delta)=v} \hat{h}_\Delta^L \frac{\hat{p}_\Delta}{E(v)} \quad (5.78)$$

### 5.3.2 Covariancia por difeomorfismos

#### Hamiltoniano Euclídeo

Cuando busquemos soluciones del Hamiltoniano, vamos a considerar distribuciones  $\Psi$  en el espacio de las funciones cilíndricas tales que [12]:

$$\Psi[\hat{h}^E(N)f] = 0 \quad \forall N \quad \forall f \in \text{Cyl}^\infty(\mathcal{A}/\mathcal{G}). \quad (5.79)$$

Queremos que esta cantidad dependa únicamente de las propiedades invariantes por difeomorfismos de la triangulación, lo cual se puede conseguir si logramos que el operador Hamiltoniano sea covariante por difeomorfismos. Si  $f$  es cilíndrica con respecto al grafo  $\gamma$ , entonces  $\hat{h}^E f$  será una combinación lineal de funciones cilíndricas con respecto al grafo  $T(\gamma)$ , si  $f'$  es cilíndrica con respecto a  $\gamma'$ , estando  $\gamma'$  relacionado a  $\gamma$  por un difeomorfismo  $\gamma' = \phi(\gamma)$ , la cantidad  $\hat{h}^E f'$  será una combinación de funciones cilíndricas con respecto a  $T(\phi(\gamma))$ . Vamos a exigir que  $T(\gamma)$  y  $T(\phi(\gamma))$  sean difeomorfos entre sí. Primero, notemos que (5.79) se puede escribir como:

$$\Psi\left[\sum_v \hat{h}_v^E f\right] = \sum_v \Psi[\hat{h}_v^E f] = 0 \quad \forall \gamma \quad \forall f \in \text{Cyl}^\infty(\mathcal{A}/\mathcal{G}) \quad (5.80)$$

por lo que el requerimiento de covariancia por difeomorfismos puede formularse en términos del Hamiltoniano evaluado en cada vértice  $v$ . Es fácil ver que para

cada vértice  $v$ , cada triángulo  $\Delta$  (con  $v(\Delta) = v$ ) de la partición correspondiente se puede tratar por separado. Además, cada término  $\hat{h}_\Delta^E$  es la suma de  $\hat{h}_\Delta^{E,\alpha}$  y  $\hat{h}_\Delta^{E,\phi}$  que también pueden ser tratados por separado. Los proyectores ya están definidos de forma covariante por lo que nos vamos a centrar en el resto del operador.

Empecemos por  $\hat{h}^{E,\alpha}$ , este caso es análogo al de la teoría completa [67]. Si dos grafos  $\gamma$  y  $\gamma'$  están relacionados por un difeomorfismo  $\phi$ , entonces los triángulos  $\Delta(\phi(\gamma)), \phi(\Delta(\gamma))$  serán en general diferentes entre sí. Más específicamente, si  $s_1$  y  $s_2$  son segmentos de las aristas  $e_1 \in \gamma$  y  $e_2 \in \gamma$  ambos salientes a  $v$ , entonces el grafo  $T(\gamma)$  se forma agregándole a  $\gamma$  un arco  $a$  que une los extremos de  $s_1$  y  $s_2$  que no coinciden con  $v$ . Al actuar con  $\phi$  en  $T(\gamma)$ , las aristas  $s_i, e_i$  ( $i = 1, 2$ ) y  $a_{12}$  serán mapeados a  $s'_i, e'_i$  ( $i = 1, 2$ ) y  $a'_{12}$  respectivamente. Ahora consideremos el grafo  $\phi(\gamma)$ , para obtener  $T(\phi(\gamma))$  agregamos un arco  $\tilde{a}_{12}$  que une dos segmentos  $\tilde{s}_i \in e'_i$ ,  $i = 1, 2$ , los cuales no son necesariamente iguales a  $s'_i$ ,  $i = 1, 2$ . Entonces, los arcos  $a'_{12}$  y  $\tilde{a}'_{12}$  serán en general diferentes. Sin embargo, recordemos que los arcos dependen únicamente de la topología del vértice, y los grafos  $\gamma$  y  $\gamma'$  son difeomorfos. Lo que necesitamos es simplemente un difeomorfismo  $\phi'$  que deje  $\gamma'$  invariante mientras que  $\phi'(\Delta(\gamma')) = \phi(\Delta(\gamma))$ . Ese  $\phi'$  claramente existe y es el difeomorfismo que mueve los puntos del grafo dentro del mismo dejando su imagen invariante, pudiendo así mover los arcos a cualquier forma difeomorfa. Usando el  $\phi'$  correspondiente a cada  $\Delta$  en (5.80), podemos hacer que  $\hat{h}^{E,\alpha}$  sea covariante por difeomorfismos. Todo esto se puede resumir en la siguiente figura:

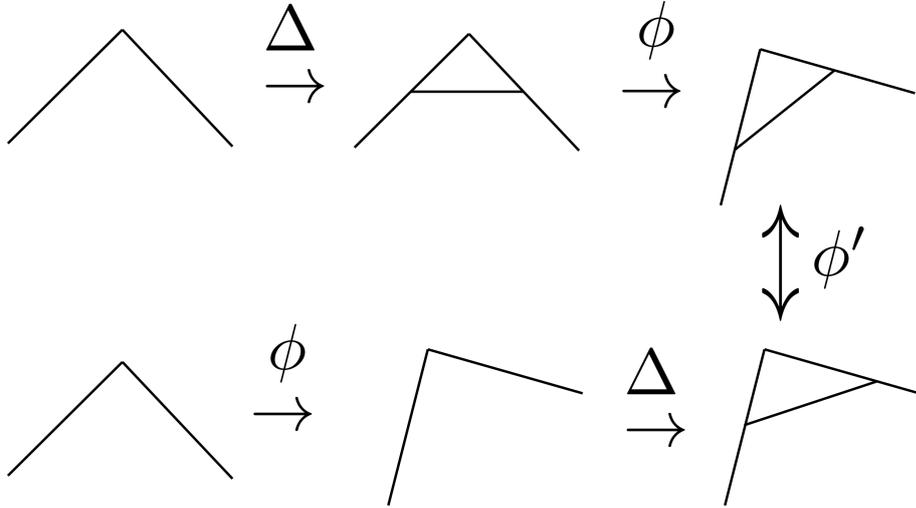


Figura 5.4: Explicación gráfica simple del párrafo anterior. La arista perpendicular se omitió por simplicidad. El difeomorfismo  $\phi'$  no cambia el grafo original sino que mueve sus puntos dentro del mismo, pudiendo entonces poner los triángulos en cualquier forma difeomorfa.

### 5.3. REQUERIMIENTOS PARA UNA TRIANGULACIÓN ADAPTADA A UN GRAFO121

El procedimiento que vamos a seguir para el término  $\hat{h}^{E,\phi}$  es muy similar. Primero notemos que éste involucra holonomías de las cuales solamente una se toma con respecto a una arista que no está en el grafo original  $\gamma$ . Aplicando  $\hat{h}_\Delta^{E,\phi}$  a la misma función de la parte anterior  $f_\gamma$  obtenemos una combinación lineal de funciones cilíndricas con respecto al grafo  $T(\gamma)$ , el cual difiere del grafo original por un segmento  $s_\phi$  perpendicular a la 2-superficie. Este nuevo segmento intersecta con  $\gamma$  en un cierto punto, el cual es el extremo final de un segmento  $s_\alpha \subset e$ , donde  $e \subset \gamma$  es una arista contenida en la 2-superficie y saliente a  $v(\Delta)$ . Actuando con un difeomorfismo  $\phi$  en el grafo  $T(\gamma)$  obtenemos  $\phi(T(\gamma))$ , mientras que  $s, s_\phi$  y  $e$  son mapeados a  $s', s'_\phi$  y  $e'$  respectivamente. Ahora consideremos la función  $f_{\phi(\gamma)}$ , al actuar sobre la misma con  $h_{\phi(\Delta)}^{E,\phi}$  obtendremos funciones cilíndricas con respecto a  $\Delta(\phi(\gamma))$ , que difiere de  $\phi(\Delta(\gamma))$  por una arista  $s''_\phi$  la cual es transversa a la 2-superficie e intersecta con  $\phi(\gamma)$  en el extremo final de  $s'' \subset e'$  que no coincide con el vértice. Ni  $s''$  ni  $s''_\phi$  son necesariamente iguales a  $s'$  y  $s'_\phi$  respectivamente, por lo que  $T(\phi(\gamma))$  y  $\phi(T(\gamma))$  serán en general diferentes. De manera similar al caso anterior, queremos encontrar un difeomorfismo  $\phi'$  tal que  $\phi'(\phi(\gamma)) = \phi(\gamma)$  y  $\phi'(\Delta(\phi(\gamma))) = \phi(\Delta(\gamma))$ . Este difeomorfismo claramente existe y su acción  $\phi'(\gamma)$  consiste en dejar la imagen del grafo invariante y mover sus puntos dentro del mismo de forma tal que la intersección  $s'' \cap s''_\phi$  se desplace dentro de  $e'$  hasta que coincida con  $s' \cap s'_\phi$ . Esto es todo lo que necesitamos para que  $\hat{h}^{E,\phi}$  sea covariante bajo difeomorfismos.

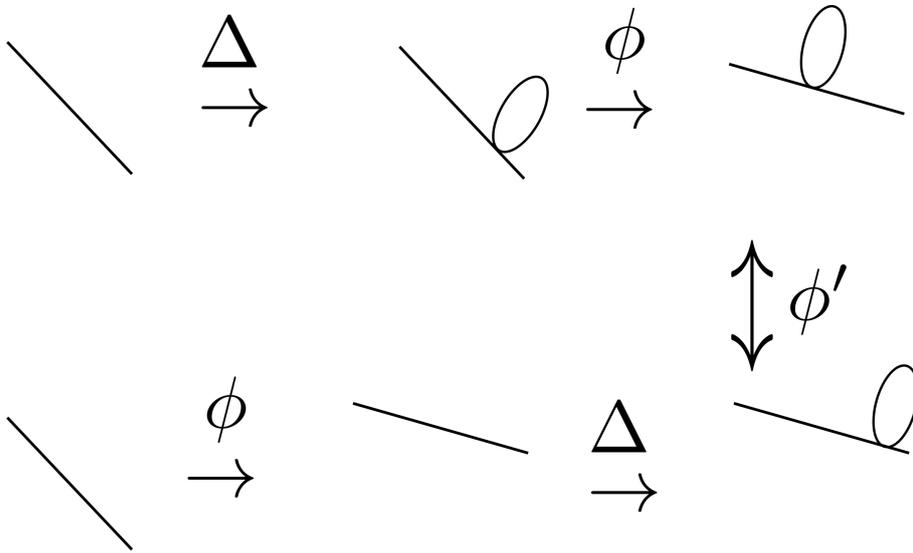


Figura 5.5: Explicación gráfica simple del párrafo anterior. La arista perpendicular se omitió por simplicidad. El difeomorfismo  $\phi'$  no cambia el grafo original sino que mueve sus puntos dentro del mismo

### Hamiltoniano Lorentziano

El Hamiltoniano Lorentziano está definido en términos de  $\hat{k}$  (el cual a su vez se define a partir del volumen y del Hamiltoniano Euclídeo) y holonomías a lo largo de aristas del grafo original, por lo que éste estará definido covariantemente sí y sólo si el Hamiltoniano Euclídeo lo está. Entonces, logrando que  $\hat{h}^E$  esté definido covariantemente, la covariancia de  $\hat{h}^L$  se obtiene como una consecuencia trivial.

### 5.3.3 Inexistencia de anomalías

El trabajo que hemos hecho hasta ahora nos permitió redefinir el operador Hamiltoniano de una forma cilíndricamente consistente y covariante bajo difeomorfismos. Sin embargo, aún hay una libertad asociada a nuestra elección de partición: El Hamiltoniano depende de una clase de equivalencia bajo difeomorfismos de la triangulación elegida. Debemos verificar ahora que nuestro operador está libre de anomalías, esto es, que el álgebra de los vínculos cierre, o de otra manera estaríamos reduciendo demasiado el número de grados de libertad: Si el álgebra no cierra, entonces tendremos más vínculos secundarios los cuales además de reducir aún más los grados de libertad, podrían dar lugar a vínculos terciarios, cuaternarios, etc. (ver apéndice E). Esto no correspondería a una cuantización de la teoría clásica. Entonces, siguiendo [67] y [66] vamos a exigir

$$\Psi \left[ \left[ \hat{h}(N), \hat{h}(M) \right] f \right] = 0. \quad (5.81)$$

Para cualquier distribución  $\Psi$  invariante bajo difeomorfismos y para cualquier función cilíndrica  $f$ . Por simplicidad vamos a tratar los términos Euclídeo y Lorentziano de forma separada y luego discutimos que esto es suficiente para verificar que el Hamiltoniano completo está libre de anomalías.

### Hamiltoniano Euclídeo

Verifiquemos primero que el Hamiltoniano Euclídeo de la teoría completa está libre de anomalías, es decir, que  $\psi \left( \left[ \hat{H}^E(M), \hat{H}^E(N) \right] f \right) = 0$  para toda función cilíndrica  $f$  y para toda distribución  $\psi$  invariante por difeomorfismos (más adelante veremos que la prueba para el caso axisimétrico es análoga). La idea es explotar el hecho de que el Hamiltoniano actúa trivialmente sobre vértices cuyas aristas sean coplanares. Para simplificar el argumento podemos realizar la siguiente observación: Consideramos de momento un grafo  $\gamma$  con un solo vértice  $v$  que supondremos bivalente por simplicidad (ignoramos el hecho de que el Hamiltoniano actúa trivialmente en dicho vértice, el mismo argumento es válido para valencias arbitrarias). Al actuar con  $\hat{H}^E(N)$  sobre este vértice, obtenemos una función que depende de un grafo  $\gamma'$  que contiene a  $\gamma$  y una arista  $e$  adicional cuyos extremos son dos nuevos vértices  $v_1$  y  $v_2$  no presentes en  $\gamma$ . Al actuar nuevamente con el Hamiltoniano  $\hat{H}^E(M)$ , esta vez tendremos la contribución de tres vértices, esquemáticamente:

$$\hat{H}^E(M)\hat{H}^E(N)f = \hat{H}^E(M)N_v\hat{H}_v^E f = \left( M_v\hat{H}_v^E + M_{v_1}\hat{H}_{v_1}^E + M_{v_2}\hat{H}_{v_2}^E \right) N_v\hat{H}_v^E f \quad (5.82)$$

### 5.3. REQUERIMIENTOS PARA UNA TRIANGULACIÓN ADAPTADA A UN GRAFO123

Intercambiando  $M$  con  $N$  y restando:

$$\begin{aligned}
 \left[ \hat{H}^E(M), \hat{H}^E(N) \right] &= \left( M_v \hat{H}_v^E + M_{v_1} \hat{H}_{v_1}^E + M_{v_2} \hat{H}_{v_2}^E \right) N_v \hat{H}_v^E f \\
 &\quad - \left( N_v \hat{H}_v^E + N_{v_1} \hat{H}_{v_1}^E + N_{v_2} \hat{H}_{v_2}^E \right) M_v \hat{H}_v^E f \\
 &= \left( (M_{v_1} N_v - N_{v_1} M_v) \hat{H}_{v_1}^E \hat{H}_v^E + (M_{v_2} N_v - N_{v_2} M_v) \hat{H}_{v_2}^E \hat{H}_v^E \right) f
 \end{aligned} \tag{5.83}$$

Esto no es cero incluso si  $[\hat{H}_v^E, \hat{H}_{v'}^E] = 0$  para  $v \neq v'$ . Sin embargo, dado que las aristas adyacentes a los vértices  $v_1$  y  $v_2$  son coplanares, el Hamiltoniano no actúa sobre los mismos. Teniendo en cuenta esto, pasamos a estudiar el caso general. Sea  $f$  una función cilíndrica con respecto a un grafo  $\gamma$  y sean  $\Delta(\gamma)$  los tetraedros que se añaden al mismo al actuar con  $\hat{H}^E(N)$ . La función  $\hat{H}^E(N)f$  dependerá del grafo  $\gamma \cup \Delta(\gamma)$ . Asumimos que todos los proyectores de tetraedro  $\hat{p}_\Delta$  son no nulos para  $f$ . Entonces  $\hat{E}_v f = E(v, \gamma) f = n(n-1)(n-2)/6 f$ , donde usamos en la primer igualdad que todas las aristas de  $\gamma$  contribuyen al conteo. Si actuamos a continuación con el Hamiltoniano evaluado en un vértice  $v' \neq v$ , tenemos primeramente que  $\hat{p}_\Delta \hat{H}_\Delta^E f = \hat{H}_\Delta^E f$ , pues  $\hat{H}_\Delta^E$  puede quitar segmentos de aristas de  $\gamma$  adyacentes a  $v$  únicamente, sin afectar a los otros vértices. Luego, tenemos  $\hat{E}_{v'} \hat{H}_\Delta^E f = E(v', \gamma) \hat{H}_\Delta^E f$ , es decir, el número de aristas que llegan a  $v'$  (y por lo tanto el número de combinaciones en ternas de los mismos) se mantiene invariante al actuar con el Hamiltoniano en un vértice diferente. Si en cambio  $v = v'$ , entonces es posible que alguna arista haya sido removida del grafo y por lo tanto su valencia cambie. Sea  $g$  uno de los términos que aparecen en la descomposición de  $\hat{H}_\Delta^E f$  en los cuales esto ocurre. En ese caso debemos escribir  $\hat{E}(v')g = E(v, \gamma, g)g$ . Teniendo esto en cuenta, escribimos

$$\begin{aligned}
 \hat{H}^E[M] \hat{H}^E[N] f &= \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{N_v}{E(v, \gamma)} \sum_{v(\Delta(\gamma))=v} \hat{H}^E[M] \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E f \\
 &= \sum_{v \in V(\gamma)} \frac{N_v}{E(v, \gamma)} \sum_{v(\Delta(\gamma))=v} \sum_{v' \in V(\gamma \cup \Delta(\gamma))} M_{v'} \sum_{v(\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma)))=v'} \hat{H}_{\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma))}^E \frac{1}{\hat{E}(v')} \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E f
 \end{aligned} \tag{5.84}$$

Intercambiando  $M$  por  $N$  y restando tenemos:

$$\begin{aligned}
 &\left[ \hat{H}^E[M], \hat{H}^E[N] \right] f \\
 &= \sum_{v, v' \in V(\gamma)} (M_{v'} N_v - M_v N_{v'}) \frac{1}{E(v, \gamma)} \sum_{v(\Delta(\gamma))=v, v(\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma)))=v'} \hat{H}_{\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma))}^E =_{v'} \frac{1}{\hat{E}_{v'}} \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E f \\
 &= \sum_{v, v' \in V(\gamma), v < v'} \frac{M_{v'} N_v - M_v N_{v'}}{E(v) E(v')} \times \\
 &\quad \times \sum_{v(\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma)))=v, v(\Delta'(\gamma))=v(\Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma)))=v'} \left[ \hat{H}_{\Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma))}^E \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E - \hat{H}_{\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma))}^E \hat{H}_{\Delta'(\gamma)}^E \right] f
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

Donde en el primer paso se tuvo en cuenta la observación del párrafo anterior: el Hamiltoniano no actúa en los vértices agregados al grafo por la acción de otro

vínculo Hamiltoniano. En el segundo paso, además de reordenar los vértices y tomar una suma ordenada en los mismos, se usó que el producto antisimetrizado de dos lapsos en el mismo vértice da cero, restringiendo la suma a vértices  $v \neq v'$ , pudiendo entonces reemplazar  $\hat{E}'_v$  por  $E(v', \gamma)$  (denotado por  $E(v')$ ). Basta ahora observar que

$$\psi \left[ \left( \hat{H}_{\Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma))}^E \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E - \hat{H}_{\Delta(\gamma \cup \Delta'(\gamma))}^E \hat{H}_{\Delta'(\gamma)}^E \right) f \right] = 0 \quad (5.86)$$

Se cumple para cada elección de  $v(\Delta(\gamma)) = v(\Delta(\gamma \cup \Delta'(\gamma))) = v, v(\Delta'(\gamma)) = v(\Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma))) = v'$ . La prueba se basa que los pares de tetraedros  $(\Delta(\gamma), \Delta(\gamma \cup \Delta'(\gamma)))$  así como  $(\Delta'(\gamma), \Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma)))$  son difeomorfos entre sí. Esto se deduce del hecho de que  $v \neq v'$  y por lo tanto existen entornos  $U$  de  $v$  y  $U'$  de  $v'$  tales que ambos contienen miembros del primer y segundo par de tetraedros. Sea  $\varphi \in \text{Diff } \Sigma$  tal que  $\gamma \cap U'$  es invariante pero  $\Delta(\gamma \cup \Delta'(\gamma)) = \varphi(\Delta(\gamma))$ . Así mismo, sea  $\varphi' \in \text{Diff } \Sigma$  tal que  $\gamma \cap U$  es invariante pero  $\Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma)) = \varphi'(\Delta'(\gamma))$ , entonces, usando invariancia por difeomorfismos:

$$\begin{aligned} & \psi \left[ \left( \hat{U}(\varphi') \hat{H}_{\Delta'(\gamma)}^E \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E - \hat{U}(\varphi) \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E \hat{H}_{\Delta'(\gamma)}^E \right) f \right] \\ &= \psi \left[ \left[ \hat{H}_{\Delta'(\gamma)}^E, \hat{H}_{\Delta(\gamma)}^E \right] f \right] = 0 \end{aligned} \quad (5.87)$$

El último conmutador en la ecuación anterior se anula dado que cada Hamiltoniano está actuando en un vértice distinto y por lo tanto no actúa en las holonomías a lo largo de las aristas incidentes en el otro vértice.

En el caso axisimétrico el Hamiltoniano Euclídeo se puede escribir como

$$\hat{h}^E = \hat{h}^{E,\alpha} + \hat{h}^{E,\phi} \quad (5.88)$$

Realizar el mismo análisis para  $\hat{h}^E$  es aparentemente mucho más engorroso:

$$\Psi \left[ \left[ \hat{h}^E(N), \hat{h}^E(M) \right] f \right] = \Psi \left[ \left[ \hat{h}^{E,\alpha}(N) + \hat{h}^{E,\phi}(N), \hat{h}^{E,\alpha}(M) + \hat{h}^{E,\phi}(M) \right] f \right]. \quad (5.89)$$

Vamos a centrarnos por ahora en uno solo de estos términos:

$$\Psi \left[ \left[ \hat{h}^{\hat{E},\alpha}(N), \hat{h}^{E,\alpha}(M) \right] f \right], \quad (5.90)$$

Este término es el más fácil de analizar pues es completamente análogo a

$$\Psi \left[ \left[ \hat{H}^E(N), \hat{H}^E(M) \right] f \right], \quad (5.91)$$

siendo  $\hat{H}^E$  el Hamiltoniano Euclídeo de la teoría completa, que acabamos de probar que está libre de anomalías. Se puede repetir exactamente el mismo procedimiento de la parte anterior, reemplazando  $\hat{H}^E \rightarrow \hat{h}^{E,\alpha}$  y tetraedros en el espacio por triángulos en la 2-superficie. Usando la misma notación que en

### 5.3. REQUERIMIENTOS PARA UNA TRIANGULACIÓN ADAPTADA A UN GRAFO 125

la parte anterior, al tomar el conmutador entre dos operadores  $\hat{h}^{E,\alpha}$  tenemos:

$$\begin{aligned}
& \left[ \hat{h}^{E,\alpha}(N), \hat{h}^{E,\alpha}(N) \right] f \\
&= \sum_{v,v' \in V(\gamma)} (M_{v'}N_v - M_vN_{v'}) \frac{1}{E(v,\gamma)} \sum_{v(\Delta(\gamma))=v, v(\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma)))=v'} \hat{h}_{\Delta(\gamma \cup \Delta(\gamma))=v'}^{E,\alpha} \frac{1}{\hat{E}(v')} \hat{h}_{\Delta(\gamma)}^{E,\alpha} f \\
&= \sum_{v,v' \in V(\gamma), v < v'} \frac{M_{v'}N_v - M_vN_{v'}}{E(v)E(v')} \times \\
&\quad \times \sum_{v(\Delta(\gamma \cup \Delta'(\gamma)))=v, v(\Delta'(\gamma))=v(\Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma)))=v'} \left[ \hat{h}_{\Delta'(\gamma \cup \Delta(\gamma))}^{E,\alpha} \hat{h}_{\Delta(\gamma)}^{E,\alpha} - \hat{h}_{\Delta(\gamma \cup \Delta'(\gamma))}^{E,\alpha} \hat{h}_{\Delta'(\gamma)}^{E,\alpha} \right] f
\end{aligned} \tag{5.92}$$

Un momento de reflexión es suficiente para darse cuenta de que el argumento usado para probar la ausencia de anomalías en este caso es válido para todos los términos que aparecen al desarrollar (5.90). Al tomar el conmutador, obtendremos una cantidad análoga a (5.92), con un conmutador del tipo

$$\hat{A}(\Delta'(\gamma')) \hat{B}(\Delta(\gamma)) - \hat{B}(\Delta(\gamma'')) \hat{A}(\Delta'(\gamma)) \tag{5.93}$$

Donde  $\hat{A}$  y  $\hat{B}$  pueden ser tanto  $\hat{h}^{E,\alpha}$  como  $\hat{h}^{E,\phi}$ . Los grafos  $\gamma'$  y  $\gamma''$  son el resultado de haber actuado con  $\hat{B}$  y  $\hat{A}$  respectivamente sobre el grafo original. En el primer sumando por ejemplo,  $\hat{A}$  actúa sobre un tetraedro  $\Delta'$  adyacente a un vértice  $v'$ , mientras que las diferencias de  $\gamma'$  con el grafo original  $\gamma$  son únicamente tetraedros adyacentes a  $v \neq v'$  (el vértice en el cual actuó  $\hat{B}$  primero), por lo que el operador  $\hat{A}$ , al estar actuando en otro vértice, será indiferente a estos tetraedros extra. Podemos entonces escribir  $\gamma' = \phi'(\gamma)$  (siendo  $\phi'$  un difeomorfismo) y por lo tanto  $\hat{A}(\Delta'(\gamma')) = \hat{U}(\phi') \hat{A}(\Delta'(\gamma))$ . Usando el mismo argumento, tenemos que  $\hat{B}(\Delta(\gamma'')) = \hat{U}(\phi) \hat{B}(\Delta(\gamma))$ , entonces, el término (5.93) se puede reescribir como

$$\hat{U}(\phi') \hat{A}(\Delta'(\gamma)) \hat{B}(\Delta(\gamma)) - \hat{U}(\phi) \hat{B}(\Delta(\gamma)) \hat{A}(\Delta'(\gamma)) \tag{5.94}$$

Al actuar con este operador en  $f$  y evaluar el resultado en una distribución  $\Psi$  invariante por difeomorfismos:

$$\begin{aligned}
& \Psi \left[ \left( \hat{U}(\phi') \hat{A}(\Delta'(\gamma)) \hat{B}(\Delta(\gamma)) - \hat{U}(\phi) \hat{B}(\Delta(\gamma)) \hat{A}(\Delta'(\gamma)) \right) f \right] \\
&= \Psi \left[ \left( \hat{A}(\Delta'(\gamma)) \hat{B}(\Delta(\gamma)) - \hat{B}(\Delta(\gamma)) \hat{A}(\Delta'(\gamma)) \right) f \right] = 0
\end{aligned} \tag{5.95}$$

Los operadores actúan en vértices diferentes por lo que conmutan. Este mismo argumento se puede usar para todos los términos de (5.89). Hemos entonces verificado que el Hamiltoniano Euclídeo está libre de anomalías.

#### Hamiltoniano Lorentziano

El argumento que dimos al final de la sección anterior para probar que el Hamiltoniano Euclídeo está libre de anomalías se puede aplicar de forma completamente análoga para el Hamiltoniano Lorentziano y por lo tanto para el Hamiltoniano total. Veamos el caso de la teoría completa como ejemplo, para la teoría axisimétrica el mismo argumento es válido. Ni  $\hat{H}^E$  ni  $\hat{H}^L$  actúan en los

vértices adicionales introducidos por actuar con ellos mismos sobre una función  $f$  cilíndrica con respecto a un grafo  $\gamma$ . El conmutador de dos Hamiltonianos sobre esta función toma la siguiente forma:

$$[\hat{H}[M], \hat{H}[N]]f = \sum_{v \neq v' \in V(\gamma)} \frac{M_v N_{v'} - M_{v'} N_v}{E(v)E(v')} \left[ \frac{1}{2} \left\{ [\hat{H}_v^L, \hat{H}_{v'}^L] + [\hat{H}_v^E, \hat{H}_{v'}^E] \right\} - [\hat{H}_v^L, \hat{H}_{v'}^E] \right] f \quad (5.96)$$

La suma se hace únicamente en los vértices del grafo original  $\gamma$  pues ninguno de los operadores actúa sobre los vértices nuevos introducidos. Para  $v = v'$ , el producto antisimetrizado de los lapsos se cancela (razón por la cual los factores  $E(v)$  y  $E(v')$  se pueden evaluar en el grafo original). Luego, para  $v \neq v'$ , el conmutador se anula al evaluarlo en un estado invariante por difeomorfismos. La idea para probar esto es esencialmente la misma que en el caso del Hamiltoniano euclídeo: Al actuar con el primero de los operadores  $\hat{H}^L$  o  $\hat{H}^E$  (evaluados en el vértice  $v$ ) sobre la función  $f$  el resultado es otra función cilíndrica que depende de un grafo más grande. En el caso del Hamiltoniano Euclídeo, este agrega únicamente dos vértices extraordinarios. El Hamiltoniano Lorentziano tiene una acción bastante más complicada por lo que el nuevo grafo será más grande aún y tendrá más vértices extras. En otro término del conmutador el operador evaluado en  $v'$  actúa primero sobre  $f$ , dando como resultado una función cilíndrica que depende de otro grafo más complicado pero diferente al del término anterior. Por esta razón, no es obvio a priori que el conmutador se anule. Sin embargo, todos estos nuevos vértices son extraordinarios, el segundo operador no actuará sobre ellos por lo que al grafo de la función  $\hat{H}^L f$  (o equivalentemente  $\hat{H}^E f$ ) lo podemos escribir como el grafo original  $\gamma$  a menos de un difeomorfismo. Al final, obtendremos términos de esta forma:

$$\left( \hat{U}(\phi) \hat{H}_v^{L/E} \hat{H}_{v'}^{L/E} - \hat{U}(\phi') \hat{H}_{v'}^{L/E} \hat{H}_v^{L/E} \right) f \quad v, v' \in V(\gamma) \quad (5.97)$$

Nos podemos deshacer de  $\hat{U}(\phi)$  y  $\hat{U}(\phi')$  evaluando este último término en una distribución invariante bajo difeomorfismos:

$$\Psi \left[ \left( \hat{H}_v^{L/E} \hat{H}_{v'}^{L/E} - \hat{H}_{v'}^{L/E} \hat{H}_v^{L/E} \right) f \right] = 0 \quad v, v' \in V(\gamma) \quad (5.98)$$

Debido a que los operadores actúan en diferentes vértices, no importa cuál actúa primero y por lo tanto conmutan. El mismo argumento se puede repetir para la teoría axisimétrica reemplazando  $\hat{H}^E \rightarrow \hat{h}^E$  y  $\hat{H}^L \rightarrow \hat{h}^L$ .

## Capítulo 6

# Elementos de matriz del Hamiltoniano Euclídeo

### 6.1 Elementos de matriz del Hamiltoniano Euclídeo

En gravedad cuántica no perturbativa la dinámica está gobernada por el operador asociado al vínculo Hamiltoniano. Durante un tiempo sólo se conocieron versiones formales o mal definidas del mismo, haciendo que los cálculos concretos fueran posibles únicamente bajo aproximaciones. Un trabajo comenzado por Jacobson y Smolin y continuado por varios autores (ver [24] y sus referencias) culminó en la definición de un operador bien definido matemáticamente. Este operador fue introducido por Thiemann en [64] y fue estudiado en el capítulo anterior, obteniendo también una forma adaptada a la teoría reducida por simetría. Esta construcción fue usada por ejemplo para buscar soluciones exactas a los vínculos de LQG [37] o en una formulación espaciotemporal de la Relatividad General cuántica en la cual los elementos de matriz del Hamiltoniano tienen un papel análogo al de los coeficientes de los vértices en los diagramas de Feynman. En un trabajo de De Pietri y Rovelli [24] se consiguió, trabajando en la base de spin-networks estudiada en el capítulo anterior, estudiar la acción de este operador sobre un vértice trivalente, calculando sus elementos de matriz de forma explícita y sencilla usando técnicas de recoupling de cálculo gráfico.

En este capítulo aplicaremos el método usado en [24] para estudiar la acción del Hamiltoniano de la teoría reducida por simetría sobre el vértice no trivial más simple posible, obteniendo explícitamente los elementos de matriz del operador.

#### 6.1.1 Cálculo gráfico de recoupling en $SU(2)$

##### Introducción

El cálculo gráfico de recoupling en  $SU(2)$  (también llamado cálculo binomial de Penrose) consiste en representar cualquier expresión tensorial en la cual hay contracción de índices de forma gráfica. Un tensor se representa como una “caja” de la cual sale una línea por cada índice, por ejemplo:



En este capítulo vamos a trabajar exclusivamente con productos de representaciones irreducibles del grupo  $SU(2)$ . La representación de color  $n$  se puede obtener como la simetrización del producto tensorial de  $n$  representaciones fundamentales  $U(g)_a^b$ , gráficamente:

$$U(g)_a^b = \begin{array}{c} b | \\ \boxed{g} \\ a | \end{array}$$

Figura 6.4: Representación fundamental de  $SU(2)$  expresada gráficamente,  $g$  es el elemento del grupo.

Para obtener una expresión gráfica sencilla para la representación de color  $n$ , vamos a introducir el simetrizador:

$$\Pi_n P_n = \frac{1}{n!} \sum_p (-1)^{|p|} P_n^{(p)} = \begin{array}{c} |n \\ \boxed{\phantom{g}} \\ | \end{array}$$

Figura 6.5: Simetrizador aplicado a  $n$  líneas paralelas.

En el primer miembro,  $P_n$  representan  $n$  líneas paralelas a las cuales les aplicamos el operador simetrizador  $\Pi_n$  normalizado. En el segundo miembro,  $P_n^{(p)}$  es una representación gráfica de una permutación  $p$  de las  $n$  líneas mientras que  $|p|$  es el orden de la permutación. Finalmente, el tercer término es la representación gráfica del simetrizador: la línea recta etiquetada por  $n$  representa  $n$  líneas paralelas que no intersecan, mientras que la “caja” representa el simetrizador. La presencia del factor  $(-1)^{|p|}$  se debe a que en el cálculo binomial de Penrose, a cada cruce de líneas se le asigna un signo negativo:

$$\delta_D^A \delta_C^B = - \begin{array}{c} A \quad B \\ \diagdown \quad / \\ C \quad D \end{array} = \begin{array}{c} A | \\ | \\ D | \\ | \\ C \end{array}$$

Figura 6.6: Al cruce de líneas se le asigna un signo negativo

De esta manera, en cada permutación el factor  $(-1)^{|p|}$  cancela el posible signo debido al cruce de líneas. Utilizando esta definición, podemos simetrizar todos los índices del producto tensorial de  $n$  representaciones fundamentales del grupo  $SU(2)$ , obteniendo así la representación de color  $n$ :

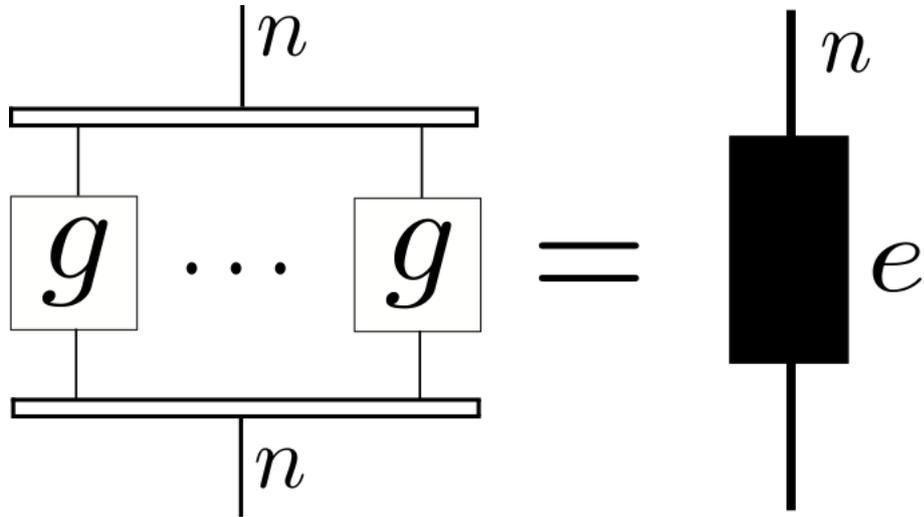


Figura 6.7: Expresión gráfica para la representación de color  $n$ , el miembro derecho de la igualdad es una definición usada para abreviar notación.

El simetrizador también se puede usar para expresar gráficamente la matriz de acoplamiento de tres representaciones irreducibles de  $SU(2)$  como se muestra a continuación:

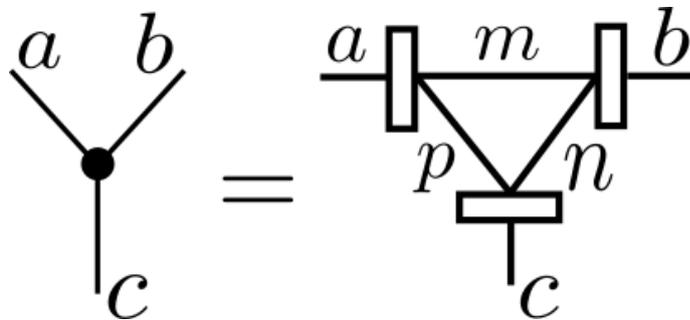


Figura 6.8: Expresión gráfica de la matriz de acoplamiento entre tres representaciones irreducibles de colores  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Los números  $m$ ,  $n$  y  $p$  son enteros positivos y deben cumplir las condiciones de admisibilidad.

En la figura anterior, los enteros positivos  $m$ ,  $n$  y  $p$  deben verificar las siguientes igualdades:  $m = (a+b-c)/2$ ,  $n = (b+c-a)/2$ ,  $p = (c+a-b)/2$ , estas son las condiciones de admisibilidad que vimos en el capítulo 4. Las matrices que representan el acoplamiento de  $n$  representaciones irreducibles de  $SU(2)$  se pueden expresar como el producto de coeficientes de Clebsch-Gordan, esto es, se puede realizar una descomposición trivalente [70]. El ejemplo más simple (y de hecho el único que vamos a necesitar en este trabajo) es el de un vértice de valencia cuatro.

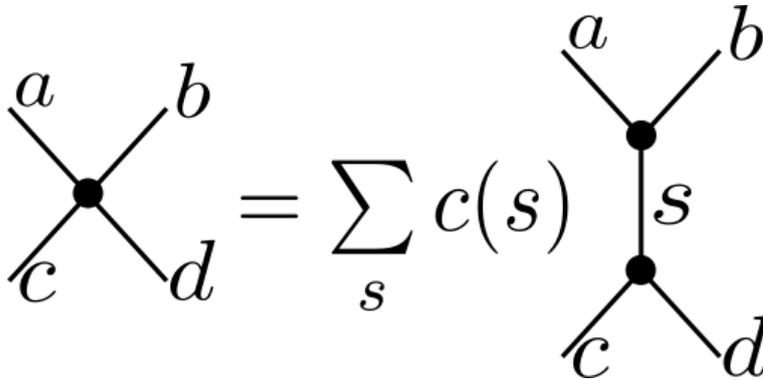


Figura 6.9: Descomposición trivalente de un vértice de valencia cuatro.

En la figura anterior, la suma se realiza en todos los  $s$  que verifican las condiciones de admisibilidad en ambos vértices trivalentes. Finalmente, este método gráfico tiene una característica importante asociada a la existencia de la “métrica”  $\varepsilon_{ab}$  (con la cual podemos subir y bajar índices a los elementos de  $SU(2)$ ): Es independiente de la orientación elegida de las aristas, como puede comprobarse fácilmente de la relación  $U(g^{-1})_A^B = \varepsilon_{AC}\varepsilon^{BD}U(g)_D^C$ , la cual gráficamente se representa:

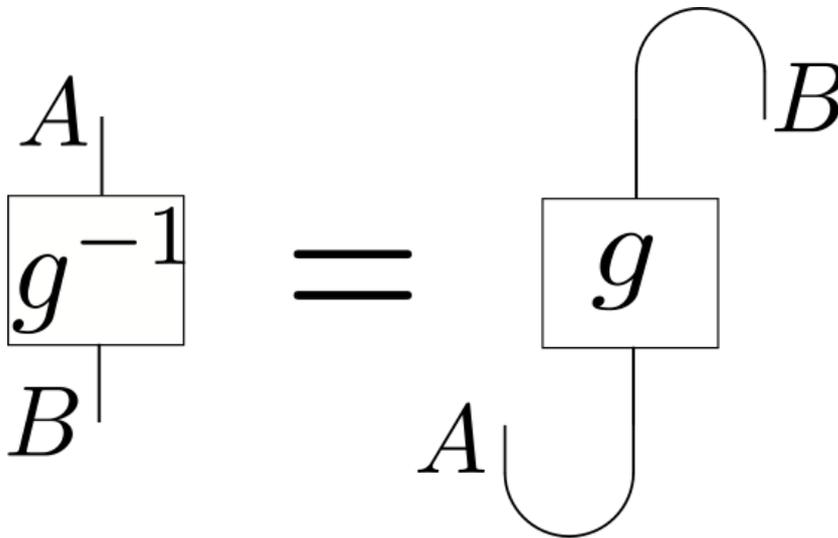


Figura 6.10: El cálculo binomial gráfico es independiente de la orientación de las aristas.

**Teoría de recoupling gráfica para los tensores  $\delta_A^B$  y  $\varepsilon_{AB}$**

En la subsección anterior vimos que los tensores  $\delta_A^B$  y  $\varepsilon_{AB}$  se representan como líneas rectas y curvas respectivamente (ver figura 6.2). La teoría de recoupling gráfica de estos tensores se puede obtener únicamente de las siguientes identi-

dades:

$$\begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array} + \begin{array}{|l} | \\ | \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = 0$$

$$\bigcirc \cup K = d K \tag{6.1}$$

La primer figura corresponde a la igualdad  $\varepsilon^{AB}\varepsilon_{CD} = \delta_C^A\delta_D^B - \delta_D^A\delta_C^B$ , mientras que en la segunda  $K$  es cualquier diagrama que no interseca con el loop añadido. En  $SU(2)$ , el caso que nos interesa a nosotros, tenemos que  $d = -2$ . Una de las consecuencias de esta identidad es que todos los diagramas cerrados que se puedan contraer a un punto se pueden expresar como un número. Al cálculo de este número se le suele denominar “evaluación cromática”. Las evaluaciones cromáticas más útiles son las siguientes:

- El simertizador

$$\Delta_n = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \\ \text{---} \end{array} = (-1)^n (n + 1) \tag{6.2}$$

- La red  $\theta$

$$\theta(a, b, c) = \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ c \end{array} = \frac{(-1)^{m+n+p} (m+n+p+1)! m! n! p!}{a! b! c!} \tag{6.3}$$

donde  $m = (a + b - c)/2$ ,  $n = (b + c - a)/2$ ,  $p = (c + a - b)/2$ .

- La red tetraédrica

$$\text{Tet} \begin{bmatrix} a & b & e \\ c & d & f \end{bmatrix} = \begin{array}{c} b & c \\ \diagdown & / \\ f \\ \diagup & \diagdown \\ a & d \end{array} e = \frac{I}{\varepsilon} \sum_{m \leq S \leq M} \frac{(-1)^S (S+1)!}{\prod_i (S-a_i)! \prod_j (b_j - S)!} \tag{6.4}$$

siendo

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A + D + E}{2} & b_1 &= \frac{B + D + E + F}{2} \\ a_2 &= \frac{B + C + E}{2} & b_2 &= \frac{A + C + E + F}{2} \\ a_3 &= \frac{A + B + F}{2} & b_3 &= \frac{A + B + C + D}{2} \\ a_4 &= \frac{C + D + F}{2} & m &= \max \{a_i\} \quad M = \min \{b_j\} \\ \varepsilon &= A! B! C! D! E! F! & I &= \prod_{ij} (b_j - a_i)! \end{aligned}$$

Finalmente, vamos a listar los resultados de la teoría de recoupling relevantes para nuestro trabajo. El primero y el más importante es el teorema de recoupling:

$$\begin{matrix} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{matrix} \quad \text{---} \quad \left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} \quad \text{---} \quad \begin{matrix} b & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \bullet \\ & / & \diagdown \\ a & & d \end{matrix} \quad \begin{matrix} i \\ | \\ i \end{matrix} \quad (6.5)$$

Los símbolos  $6 - j$  se pueden expresar en términos de evaluaciones cromáticas de la siguiente manera:

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & i \\ c & d & j \end{matrix} \right\} = \frac{\Delta_i^{\text{Tet}} \begin{bmatrix} a & b & i \\ c & d & j \end{bmatrix}}{\theta(a,d,i)\theta(b,c,i)} \quad (6.6)$$

Luego, si intercambiamos dos líneas en un vértice trivalente:

$$\begin{matrix} a & & b \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \\ & / & \diagdown \\ & & c \end{matrix} \quad \text{---} \quad \lambda_c^{ab} \quad \begin{matrix} a & & b \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \\ & / & \diagdown \\ & & c \end{matrix} \quad (6.7)$$

siendo  $\lambda_c^{ab} = (-1)^{(a+b-c)/2}(-1)^{(a'+b'-c')/2}$ , con  $x' = x(x+2)$ . Por otro lado tenemos las identidades

$$\begin{matrix} k \\ a \\ i \end{matrix} \quad \begin{matrix} c \\ | \\ \bar{c} \end{matrix} \quad d \quad \text{---} \quad \frac{\begin{matrix} k & & c \\ & \diagdown & / \\ & \bullet & \\ & / & \diagdown \\ i & & \bar{c} \end{matrix} \quad d}{\begin{matrix} k \\ a \\ i \end{matrix}} \quad \begin{matrix} k \\ a \\ i \end{matrix} \quad (6.8)$$

$$\begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ q \\ | \\ \text{---} \\ 2 \\ | \\ r \end{array} = \begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ q \\ | \\ r \end{array} + \begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ q \\ | \\ r \end{array} \quad (6.9)$$

y las evaluaciones cromáticas

$$b. \quad \begin{array}{c} t+1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ b \\ | \\ \text{---} \\ 2 \\ | \\ t-1 \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ b \\ | \\ a \end{array} = \frac{1+a+b-t}{2} \cdot \begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ t+1 \end{array} \quad (6.10)$$

$$\frac{\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ t+1 \end{array}}{\begin{array}{c} a \\ \text{---} \\ b \\ \text{---} \\ t-1 \end{array}} = - \frac{(3+a+b+t)(1+a+t-b)(1+b+t-a)}{4t(t+1)(1+a+b-t)} \quad (6.11)$$

$$(t+\varepsilon) \cdot \frac{\begin{array}{c} t+\varepsilon \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \\ | \\ \text{---} \\ 2 \\ | \\ t-\varepsilon \\ \diagdown \\ \text{---} \\ \diagup \\ 2 \\ | \\ t+\varepsilon \end{array}}{2} = -1 - \varepsilon \left[ \frac{t+1}{2} \right] \begin{array}{c} t+\varepsilon \\ \text{---} \\ t-\varepsilon \end{array} \quad (6.12)$$

donde  $\varepsilon = 0, \pm 1$ . Finalmente, tenemos

$$\begin{array}{c} p \\ | \\ 1 \end{array} = \sum_{\varepsilon=\pm 1} a_{\varepsilon}(p) \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ 1 \\ | \\ p+\varepsilon \\ \text{---} \\ 1 \\ | \\ p-1 \end{array} = \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ 1 \\ | \\ p+1 \\ \text{---} \\ 1 \\ | \\ p-1 \end{array} + \frac{\Delta_{p-1}}{\Delta_p} \begin{array}{c} p \\ \text{---} \\ 1 \\ | \\ p-1 \\ \text{---} \\ 1 \\ | \\ p-1 \end{array} \quad (6.13)$$

Estos resultados son suficientes para los cálculos que realizaremos en este trabajo.

### Teoría de recoupling gráfica para SU(2)

Como se mencionó al comienzo de la subsección anterior, toda la teoría de recoupling gráfica de los tensores  $\delta_A^B$  y  $\varepsilon_{AB}$  se puede obtener a partir de las identidades (6.1). Usando las identidades  $H[A, e]_a^b = H[A, e]_{a'}^{b'} \delta_a^{a'} \delta_{b'}^b$  y  $H[A, e]_a^b = H[A, e^{-1}]_{a'}^{b'} \varepsilon^{a'b} \varepsilon_{b'a}$  es fácil ver que la contracción de índices entre holonomías involucra contracciones entre los tensores  $\delta_a^b$  y  $\varepsilon_{ab}$ , por lo que podemos aplicar los resultados de la subsección anterior entre medio de las cajas, a las líneas y arcos que los unen:

$$\begin{aligned}
 H[A, e]_a^b &= H[A, e]_{a'}^{b'} \delta_a^{a'} \delta_{b'}^b \\
 \text{---} \boxed{\phantom{e}} \text{---} &= \text{---} \boxed{\phantom{e}} \text{---} \\
 e \quad n & \quad e \quad n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H[A, e]_a^b &= H[A, e^{-1}]_{a'}^{b'} \varepsilon^{a'b} \varepsilon_{b'a} \\
 \text{---} \boxed{\phantom{e}} \text{---} &= \text{---} \boxed{\phantom{e^{-1}}} \text{---} \\
 e \quad n & \quad e^{-1} \quad n
 \end{aligned}$$

(6.14)

Para aclarar esto vamos a empezar por verificar que existe una versión de las identidades (6.1) para holonomías representadas como en la figura 6.7. Consideremos primero cuatro caminos orientados  $e_1, e_2, e_3$  y  $e_4$ . El extremo final de  $e_1$  y  $e_3$  coinciden entre sí y con el extremo inicial de  $e_2$  y  $e_4$ . Ahora consideremos holonomías en la representación fundamental (que denotaremos por  $U$ ) a lo largo de  $e_1 \circ e_2$  y  $e_3 \circ e_4$ . El producto de estas se puede escribir como:

$$\begin{aligned}
 U[A, e_1 \circ e_2]_{a_1}^{a_2} U[A, e_3 \circ e_4]_{a_3}^{a_4} &= U[A, e_1]_{a_1}^b U[A, e_2]_b^{a_2} U[A, e_3]_{a_3}^c U[A, e_4]_c^{a_4} \\
 &= U[A, e_1]_{a_1}^{b'} U[A, e_2]_b^{a_2} (\delta_{b'}^b \delta_{c'}^c) U[A, e_3]_{a_3}^{c'} U[A, e_4]_c^{a_4} \\
 &= U[A, e_1]_{a_1}^{b'} U[A, e_2]_b^{a_2} (\varepsilon_{b'c'} \varepsilon^{bc} + \delta_{c'}^b \delta_{b'}^c) U[A, e_3]_{a_3}^{c'} U[A, e_4]_c^{a_4} \\
 &= \left( U[A, e_1]_{a_1}^{b'} \varepsilon_{b'c'} U[A, e_3]_{c'}^{a_3} \right) \left( U[A, e_2]_b^{a_2} \varepsilon^{bc} U[A, e_4]_c^{a_4} \right) \\
 &\quad \left( + U[A, e_1]_{a_1}^{b'} \delta_{b'}^c U[A, e_4]_c^{a_4} \right) \left( U[A, e_2]_b^{a_2} \delta_{c'}^b U[A, e_3]_{a_3}^{c'} \right)
 \end{aligned}$$

(6.15)

Gráficamente, la igualdad anterior se puede expresar de la siguiente manera:

(6.16)

Los extremos finales de  $e_1$  y  $e_3$  e iniciales de  $e_2$  y  $e_4$  fueron separados para mayor claridad pero son en realidad el mismo punto. Las líneas azules corresponden a los tensores  $\delta$  y  $\varepsilon$ . Esta es la primera de las identidades (6.1). Verificar la segunda identidad es suficiente para probar que todos los resultados de la teoría de recoupling son aplicables a las holonomías, sin embargo, observar este resultado parcial nos puede dar una primera idea intuitiva de por qué esto es cierto: Como se mencionó anteriormente y como se puede observar más claramente en (6.16), la contracción de índices entre holonomías es básicamente la contracción entre tensores  $\delta$  y  $\varepsilon$ . Siempre que tengamos holonomías contraídas entre sí podemos utilizar las identidades de recoupling para  $\delta$  y  $\varepsilon$  en los puntos de unión (esto es, reorganizar las líneas azules en (6.16)) obteniendo identidades gráficamente equivalentes para estas. Analizar la segunda identidad es un poco más sutil. Recordemos que esta identidad decía que un loop cerrado que no intersece con ningún diagrama se puede reemplazar por simplemente por  $-2$ , en efecto, un loop cerrado:

$$\bigcirc = (-i\varepsilon^{ab})\delta_a^c\delta_b^d(-i\varepsilon_{cd}) = -\varepsilon_{ab}\varepsilon^{ab} = -2$$

(6.17)

Sin embargo, una holonomía a lo largo de un loop cerrado no es en general igual a  $-2$ , si por ejemplo tenemos dos caminos  $e_1$  y  $e_2$  tales que  $\alpha := e_1 \circ (e_2)^{-1}$  es un loop cerrado, tenemos

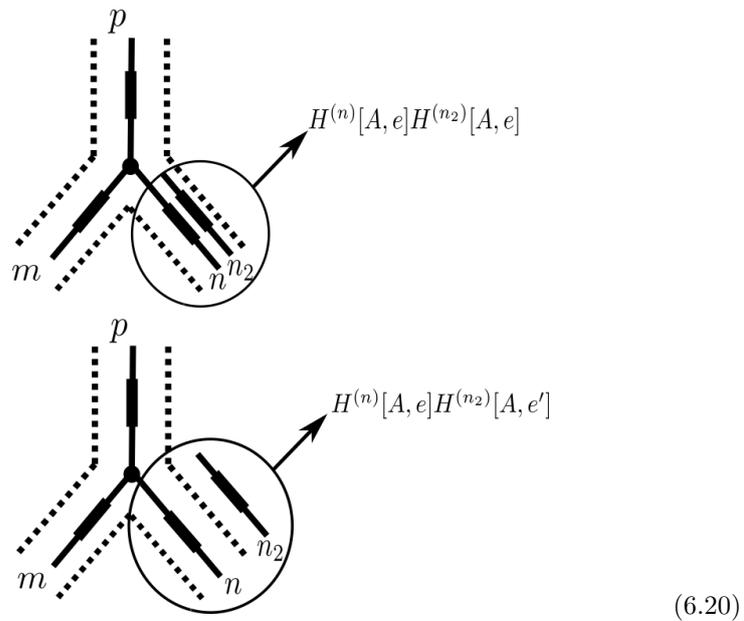
$$\begin{aligned} \bigcirc &= U[A, e_1]_a^c U[A, e_2]_b^d (-i\varepsilon^{ab})(-i\varepsilon_{cd}) \\ &= -U[A, e_1]_a^b U[A, e_2^{-1}]_b^a = -\text{tr}(U[A, \alpha]) \end{aligned}$$

(6.18)

Sin embargo, si  $e_1 = e_2$ , entonces

$$\bigcirc = -U[A, e_1]_a^b U[A, e_1^{-1}]_b^a = -\delta_a^a = -2 \tag{6.19}$$

Lo que podemos hacer entonces es definir una teoría de recoupling en el llamado *grafo extendido*. La idea de usar el grafo extendido es tener en cuenta la presencia de diferentes caminos en el espacio y poder diferenciarlos. Dado un grafo plano  $\gamma$  compuesto por diferentes caminos y holonomías a lo largo de los mismos (expresadas como productos de representaciones fundamentales), definimos el grafo extendido como  $\gamma \times [0, 1]$ . El intervalo  $[0, 1]$  usualmente se representa delimitado por líneas punteadas, por lo que el grafo entero estará “encerrado” por las mismas. La función de este intervalo es delimitar cada camino perteneciente al grafo, por lo que si por ejemplo agregamos una línea externa al grafo, paralela a uno de los caminos del mismo y dentro de estos limitadores, se trata del mismo camino:



Entonces, si a un cierto grafo le agregamos un loop cerrado, este se puede sustituir por  $-2$  únicamente si el loop está dentro del grafo extendido:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with loop } \alpha \text{ inside} = -2 \text{ Diagram without loop} \\
 & \text{Diagram with loop } \alpha \text{ outside} = -\text{tr}(U[A, \alpha]) \text{ Diagram without loop}
 \end{aligned}
 \tag{6.21}$$

Podemos entonces usar el cálculo gráfico de recoupling para holonomías siempre y cuando este esté en el grafo extendido. Vamos a concluir esta subsección con un ejemplo de “holonomización” de una de las identidades obtenidas hasta ahora, en concreto, vamos a verificar que la identidad (6.13) también se cumple para holonomías. Por simplicidad, vamos a considerar el producto de dos holonomías en la representación fundamental, la primera de ellas a lo largo de un camino  $e_1 \circ e_2 \circ e_3$ , y la otra a lo largo de  $e_2$ :

$$\begin{aligned}
 & U[A, e_1]_{a_0}^{a_1} (\delta_{a_1}^{a_2} U[A, e_2]_{a_2}^{a_3} \delta_{a_3}^{a_4}) U[A, e_3]_{a_4}^{a_5} \\
 & \quad \times (\delta_{b_1}^{b_2} U[A, e_2]_{b_2}^{b_3} \delta_{b_3}^{b_4})
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

Al producto de las cantidades entre paréntesis lo podemos escribir como la suma de su parte simétrica y antisimétrica:

$$\begin{aligned}
 & (\delta_{a_1}^{a_2} \delta_{b_1}^{b_2}) U[A, e_2]_{a_2}^{a_3} U[A, e_2]_{b_2}^{b_3} (\delta_{a_3}^{a_4} \delta_{b_3}^{b_4}) \\
 & = (\delta_{a_1}^{a_2} \delta_{b_1}^{b_2}) U[A, e_2]_{(a_2}^{(a_3} U[A, e_2]_{b_2)}^{b_3)} (\delta_{a_3}^{a_4} \delta_{b_3}^{b_4}) \\
 & + (\delta_{a_1}^{a_2} \delta_{b_1}^{b_2}) U[A, e_2]_{[a_2}^{[a_3} U[A, e_2]_{b_2]}^{b_3]} (\delta_{a_3}^{a_4} \delta_{b_3}^{b_4})
 \end{aligned}
 \tag{6.23}$$

El producto simetrizado de dos holonomías en la representación fundamental es una representación irreducible de spin 1, mientras que el producto antizimetrizado (que tiene una sola componente independiente) corresponde a la representación de spin 0. Luego, el producto de las deltas de Kronecker en el primer sumando se puede reconocer fácilmente como el intertwiner entre dos representaciones entrantes de spin 1/2 y una saliente de spin 1 (ver capítulo

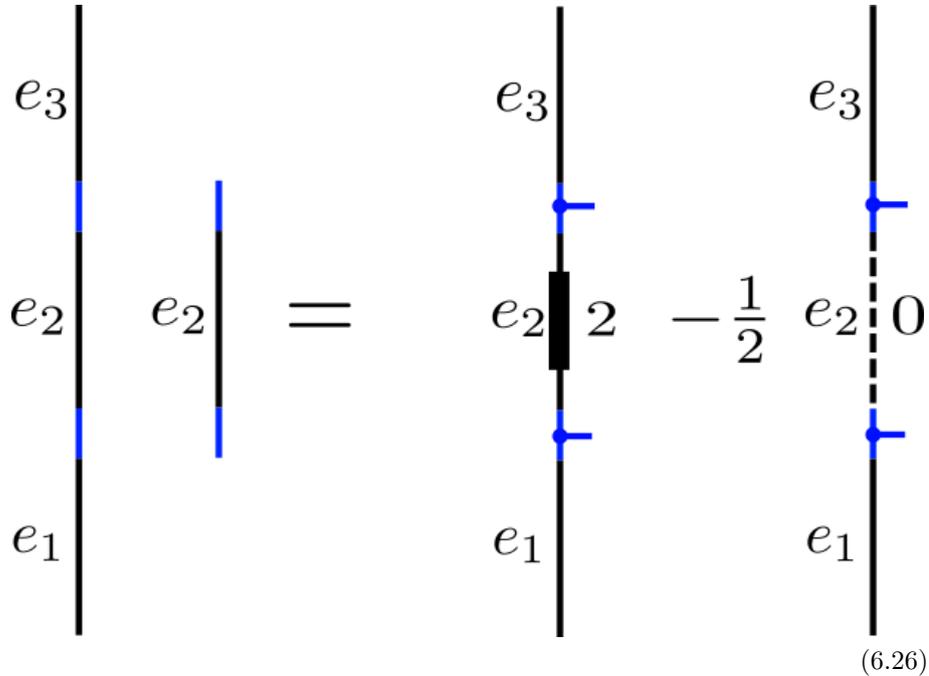
4). En el segundo sumando, dado que los índices de las holonomías están antisimetrizados, los productos de las deltas se pueden escribir como

$$\begin{aligned} 2\delta_{a_1}^{[a_2} \delta_{b_1}^{b_2]} &= \varepsilon_{a_1 b_1} \varepsilon^{a_2 b_2} \\ 2\delta_{a_3}^{[a_4} \delta_{b_3}^{b_4]} &= \varepsilon_{a_3 b_3} \varepsilon^{a_4 b_4} \end{aligned} \quad (6.24)$$

Donde  $\varepsilon_{a_1 b_1}$  (y  $\varepsilon^{a_4 b_4}$ ) es el intertwiner entre dos representaciones de spin 1/2 entrantes (salientes) y una de spin 0 saliente (entrante). Luego,

$$\varepsilon^{a_2 b_2} U[A, e_2]_{[a_2}^{[a_3} U[A, e_2]_{b_2]}^{b_3]} \varepsilon_{a_3 b_3} \quad (6.25)$$

es simplemente la representación de spin 0 dividida por  $-2$ : Tenemos primero el factor  $1/2$  que viene de la antisimetrización y luego el signo se debe a que  $a_2 \neq a_3$  y  $b_2 \neq b_3$  por lo que  $\varepsilon^{a_2 b_2} \varepsilon_{a_3 b_3} = -1$ . Gráficamente, esto se puede representar de la siguiente manera:



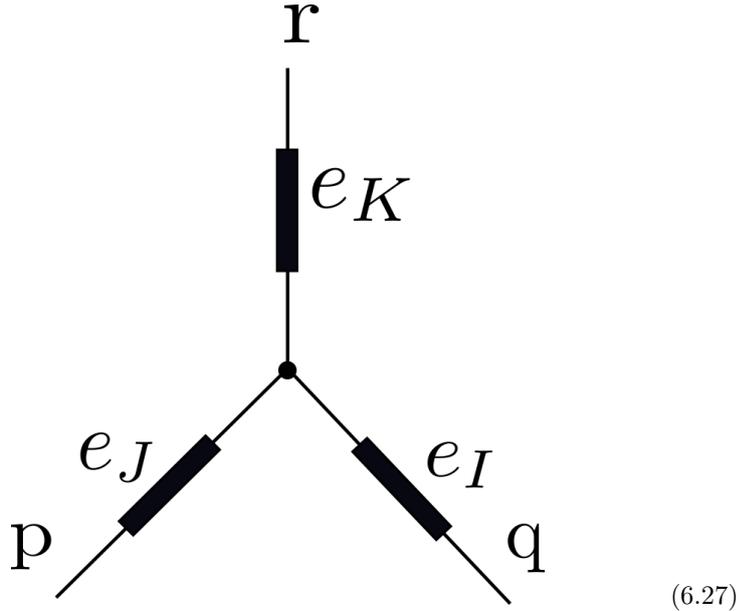
Nuevamente las líneas negras representan caminos mientras que las azules representan tensores  $\delta$  y  $\varepsilon$ . Teniendo en cuenta que  $\Delta_0/\Delta_1 = -1/2$ , se puede observar que este resultado es análogo a (6.13).

## 6.2 Cálculo de los elementos de matriz del Hamiltoniano Euclídeo

### 6.2.1 Teoría completa

Comenzaremos calculando los elementos de matriz del Hamiltoniano Euclídeo de la teoría completa. El vértice más simple posible sobre el cual el Hamiltoniano Euclídeo tiene una acción no trivial es uno trivalente, pues si bien el

operador volumen aniquila dicho vértice, el operador holonomía que actúa antes añade un segmento abierto al mismo, haciéndolo no invariante de gauge. Sea  $v$  un vértice trivalente de una spin network cuyas aristas adyacentes (que consideraremos entrantes) denotaremos por  $e_I, e_J, e_K$ . Consideremos holonomías a lo largo de cada uno de estos caminos en las representaciones de spin  $q/2, p/2$  y  $r/2$  respectivamente. :



A partir de ahora consideraremos las siguientes simplificaciones para los grafos:

- Las aristas ya fueron identificadas por lo que se omitirán de ahora en más las etiquetas  $e_I, e_J, e_K$ .
- Las cajas que indican la presencia de holonomías serán omitidas también, la etiqueta que indica el color de las mismas es suficiente para reconocerlas.
- Vamos también a omitir por una cuestión de espacio las líneas punteadas usadas para delimitar aristas en el grafo extendido. En las figuras quedará claro cuándo dos líneas corresponden al mismo camino.

Sobre este vértice, la acción del Hamiltoniano Euclídeo se reduce a:

$$\hat{H}_v^E = \left( -\frac{2}{3G} \right) N(v) \varepsilon^{ijk} \text{tr} \left( \hat{h}_{\alpha_{ij}} \hat{h}_{s_k} \left[ \hat{h}_{s_k}^{-1}, \hat{V} \right] \right) \quad (6.28)$$

Siendo  $s_i \subset e_i$  segmentos cuyos orígenes coinciden con el vértice  $v$  y  $\alpha_{ij}$  el loop cerrado definido como en el capítulo anterior. Antes de comenzar con el cálculo es necesario hacer una aclaración. Al promover una cantidad clásica a un operador, es necesario elegir un orden de los distintos factores que la forman. En nuestro caso deberíamos considerar todas las permutaciones posibles de los operadores  $\hat{V}, (\hat{h}_{\alpha_{ij}} - \hat{h}_{\alpha_{ji}}), \hat{h}_{s_k}$  y  $\hat{h}_{s_k}^{-1}$ . Sin embargo, son sólo dos permutaciones las que tienen una contribución no nula, aquellas en las cuales el

## 6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 141

operador volumen está entre medio de  $\hat{h}_{s_k}$  y  $\hat{h}_{s_k}^{-1}$ :

$$\left(\hat{h}_{\alpha_{ij}} - \hat{h}_{\alpha_{ji}}\right) \hat{h}_{s_k} \hat{V} \hat{h}_{s_k}^{-1} \quad (6.29)$$

$$\hat{h}_{s_k} \hat{V} \hat{h}_{s_k}^{-1} \left(\hat{h}_{\alpha_{ij}} - \hat{h}_{\alpha_{ji}}\right) \quad (6.30)$$

La razón es que en el operador Hamiltoniano tenemos una traza. La cantidad  $\hat{h}_{s_k} \hat{h}_{s_k}^{-1}$  es un operador en la representación de spin 0 asociado al vértice  $v$  mientras que  $\left(\hat{h}_{\alpha_{ij}} - \hat{h}_{\alpha_{ji}}\right)$  es un operador de spin 1 asociado al mismo vértice.

El operador  $\hat{V}$  no cambia el spin, por lo que al tomar la traza tendremos que hacerlo entre una representación de spin 0 y otra de orden 1, cuyo resultado es cero. Vamos a calcular ahora la acción del Hamiltoniano Euclídeo sobre el vértice (6.27) considerando el orden (6.29). En el Hamiltoniano (6.28) tenemos una suma en todas las permutaciones posibles de las aristas, sin pérdida de generalidad fijamos  $k = K$  (los cálculos para las demás permutaciones son idénticos). Primero debemos actuar con el operador  $\hat{h}_{s_K}^{-1}$ , usando (6.13) tenemos:

$$\hat{h}_{s_K}^{-1} \begin{array}{c} r \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q \end{array} = \sum_{\varepsilon=\pm 1} a_\varepsilon(r) \begin{array}{c} r \\ | \\ \frac{1}{|} \\ r + \varepsilon \\ | \\ \frac{1}{|} \\ r \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q \end{array} \quad (6.31)$$

Siendo  $a_1(r) = 1$  y  $a_{-1}(r) = -\frac{r}{r+1}$ . Sobre este resultado debemos calcular la acción del operador volumen. Recordemos que al aplicar  $\hat{h}_{s_K}^{-1}$  al vértice  $v$ , el resultado es no invariante de gauge:  $s_K$  tiene su origen en el vértice, la línea de color  $\varepsilon$  se dibuja separada del mismo para indicar que la holonomía no se contrae en el intertwiner del vértice sino que tiene un índice libre. La acción de  $\hat{V}$  sobre la expresión anterior se puede calcular usando el resultado de [24], notando que para este vértice el operador volumen actúa de forma diagonal:

$$\hat{V} \hat{h}_{s_K}^{-1} \begin{array}{c} r \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q \end{array} = \sum_{\varepsilon=\pm 1} a_\varepsilon(r) \sqrt{w(p, q, r + \varepsilon, 1)} \begin{array}{c} r \\ | \\ \frac{1}{|} \\ r + \varepsilon \\ | \\ \frac{1}{|} \\ r \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q \end{array} \quad (6.32)$$

El operador  $\hat{h}_{\alpha_{ij}} \hat{h}_{s_K}$  agregará el segmento  $s_K$ , unido a la línea de color 1 libre más alejada del vértice en uno de sus extremos, y en el otro extremo unido al

loop  $\alpha_{ij}$ , cuyo otro extremo queda unido a la línea de color 1 libre más cercana al vértice al tomar la traza:

$$\left( \hat{h}_{\alpha_{IJ}} \hat{h}_{s_K} - \hat{h}_{\alpha_{JI}} \hat{h}_{s_K} \right) \begin{array}{c} r \\ | \\ 1 \\ | \\ r + \varepsilon \\ | \\ r \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad \quad q \end{array} = \begin{array}{c} r \\ | \\ r + \varepsilon \\ | \\ r \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad \quad q \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 1 \\ \backslash \quad / \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} r \\ | \\ r + \varepsilon \\ | \\ r \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad \quad q \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowleft \\ 1 \\ \backslash \quad / \\ 1 \end{array} \tag{6.33}$$

Usando la definición del simetrizador de la subsección anterior, se puede ver fácilmente que:

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ | \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ 1 \quad 1 \end{array} = 2 \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \backslash \quad / \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ 1 \quad 1 \end{array} \tag{6.34}$$

Entonces, el resultado (6.33) se puede reescribir como:

$$2 \sum_{\tilde{\varepsilon}=\pm 1} \sum_{\bar{\varepsilon}=\pm 1} a_{\bar{\varepsilon}}(p) a_{\tilde{\varepsilon}}(q) \begin{array}{c} r \\ | \\ r + \varepsilon \\ | \\ r \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad \quad q \end{array} \begin{array}{c} 1 \\ \curvearrowright \\ 1 \\ \backslash \quad / \\ 1 \end{array} \begin{array}{c} p + \bar{\varepsilon} \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad \quad q \end{array} \begin{array}{c} q + \tilde{\varepsilon} \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad \quad q \end{array} \tag{6.35}$$

6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 143

Donde usamos (6.13) en las líneas de color  $p$  y  $q$ . Recordemos ahora de la subsección anterior la identidad (6.8); en particular tenemos

Diagrammatic identity (6.36):

The left side shows a diagram with three horizontal lines labeled  $r$ ,  $2$ , and  $r$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top and bottom lines. A curved line labeled  $r + \varepsilon$  connects the top and bottom lines on the right side.

The right side shows a diagram with three horizontal lines labeled  $r$ ,  $2$ , and  $r$ . A curved line labeled  $r + \varepsilon$  connects the top and bottom lines on the right side.

The middle part shows a sum of two diagrams:

- A square diagram with vertices at the top-left, top-right, bottom-left, and bottom-right. The top and bottom edges are labeled  $r$ . The left and right edges are labeled  $1$ . The horizontal edges are labeled  $2$ .
- A diagram with two horizontal lines labeled  $r$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top and bottom lines. A curved line labeled  $r$  connects the top and bottom lines on the right side.

(6.36)

Usando esta identidad en (6.35):

Diagrammatic identity (6.37):

The left side shows a diagram with a top vertex connected to three bottom vertices. The top edge is labeled  $r$ . The bottom edges are labeled  $p + \bar{\varepsilon}$ ,  $q$ , and  $q + \tilde{\varepsilon}$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top vertex to the middle bottom vertex. A curved line labeled  $r + \varepsilon$  connects the top vertex to the right bottom vertex. A curved line labeled  $1$  connects the top vertex to the left bottom vertex.

The right side shows a diagram with a top vertex connected to three bottom vertices. The top edge is labeled  $r$ . The bottom edges are labeled  $p + \bar{\varepsilon}$ ,  $q$ , and  $q + \tilde{\varepsilon}$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top vertex to the middle bottom vertex. A curved line labeled  $2$  connects the top vertex to the right bottom vertex.

The middle part shows a sum of two diagrams:

- A square diagram with vertices at the top-left, top-right, bottom-left, and bottom-right. The top and bottom edges are labeled  $r$ . The left and right edges are labeled  $1$ . The horizontal edges are labeled  $2$ .
- A diagram with two horizontal lines labeled  $r$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top and bottom lines. A curved line labeled  $r$  connects the top and bottom lines on the right side.

(6.37)

Luego, usando (6.9):

Diagrammatic identity (6.38):

The left side shows a diagram with a top vertex connected to three bottom vertices. The top edge is labeled  $r$ . The bottom edges are labeled  $p + \bar{\varepsilon}$ ,  $q$ , and  $q + \tilde{\varepsilon}$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top vertex to the middle bottom vertex. A curved line labeled  $2$  connects the top vertex to the right bottom vertex.

The right side shows a sum of two diagrams:

- A diagram with a top vertex connected to three bottom vertices. The top edge is labeled  $r$ . The bottom edges are labeled  $p + \bar{\varepsilon}$ ,  $q$ , and  $q + \tilde{\varepsilon}$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top vertex to the middle bottom vertex. A curved line labeled  $2$  connects the top vertex to the right bottom vertex.
- A diagram with a top vertex connected to three bottom vertices. The top edge is labeled  $r$ . The bottom edges are labeled  $p + \bar{\varepsilon}$ ,  $q$ , and  $q + \tilde{\varepsilon}$ . A vertical line with two segments labeled  $1$  and  $1$  connects the top vertex to the middle bottom vertex. A curved line labeled  $2$  connects the top vertex to the right bottom vertex.

(6.38)

En cada uno de los sumandos del miembro derecho de la última igualdad se puede usar nuevamente la identidad (6.8):

(6.39)

Finalmente, usando (6.8) una vez más:

(6.40)

Juntando todos estos resultados obtenemos:

$$\text{tr} \left( (\hat{h}_{\alpha_{IJ}} - \hat{h}_{\alpha_{JI}}) \hat{h}_{s_K} \hat{V} \hat{h}_{s_K}^{-1} \right) = \sum_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} = \pm 1} A(r, \varepsilon; p, \bar{\varepsilon}; q, \tilde{\varepsilon})$$

(6.41)

6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 145

Donde

$$A(r, \varepsilon; p, \bar{\varepsilon}; q, \tilde{\varepsilon}) = \frac{\ell^3}{2} \sqrt{w(p, q, r + \varepsilon, 1)} R_1(r, \varepsilon) R_2(p, \bar{\varepsilon}; q, \tilde{\varepsilon}; r) \quad (6.42)$$

Siendo las cantidades  $R_1(r, \varepsilon)$  y  $R_2(p, \bar{\varepsilon}; q, \tilde{\varepsilon}; r)$  (se usó una notación similar a la de [24] para facilitar la comparación):

$$R_1(r, \varepsilon) = a_\varepsilon(r) \cdot \frac{\begin{array}{c} \text{Diagram 1: A square with vertices } r \text{ (top-left), } r \text{ (bottom-left), } r + \varepsilon \text{ (top-right), } r + \varepsilon \text{ (bottom-right).} \\ \text{Diagonals are labeled } 2 \text{ (top-left to bottom-right) and } 1 \text{ (top-right to bottom-left).} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{Diagram 2: A circle with } r \text{ at the top and } r \text{ at the bottom, and } 2 \text{ in the center.} \end{array}} = \varepsilon \frac{r}{r+1}$$

$$R_2(p, \bar{\varepsilon}; q, \tilde{\varepsilon}; r) = a_{\bar{\varepsilon}}(p) a_{\tilde{\varepsilon}}(q) \left[ \frac{\begin{array}{c} \text{Diagram 3: A square with vertices } p \text{ (top-left), } p \text{ (bottom-left), } p + \bar{\varepsilon} \text{ (top-right), } p + \bar{\varepsilon} \text{ (bottom-right).} \\ \text{Diagonals are labeled } 2 \text{ (top-left to bottom-right) and } 1 \text{ (top-right to bottom-left).} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{Diagram 4: A circle with } 1 \text{ at the top, } p \text{ at the bottom, and } p + \bar{\varepsilon} \text{ in the center.} \end{array}} - \frac{\begin{array}{c} \text{Diagram 5: A square with vertices } q \text{ (top-left), } q \text{ (bottom-left), } q + \tilde{\varepsilon} \text{ (top-right), } q + \tilde{\varepsilon} \text{ (bottom-right).} \\ \text{Diagonals are labeled } 2 \text{ (top-left to bottom-right) and } 1 \text{ (top-right to bottom-left).} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{Diagram 6: A circle with } 1 \text{ at the top, } q \text{ at the bottom, and } q + \tilde{\varepsilon} \text{ in the center.} \end{array}} \right] \frac{\begin{array}{c} \text{Diagram 7: A square with vertices } p \text{ (top-left), } p + \bar{\varepsilon} \text{ (top-right), } q + \tilde{\varepsilon} \text{ (bottom-right), } p + \bar{\varepsilon} \text{ (bottom-left).} \\ \text{Diagonals are labeled } 1 \text{ (top-left to bottom-right) and } 1 \text{ (top-right to bottom-left).} \end{array}}{\begin{array}{c} \text{Diagram 8: A circle with } r \text{ at the top, } p + \bar{\varepsilon} \text{ at the bottom, and } q + \tilde{\varepsilon} \text{ in the center.} \end{array}}$$

(6.43)

Es fácil ver que al realizar la suma en (6.28) en los índices  $i, j, k$ , cada sumando se obtiene intercambiando  $p, q$  y  $r$  en (6.41). Entonces:

$$\hat{H}_v^E = -\frac{2i}{3\ell_P^2} \sum_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}, \tilde{\varepsilon} = \pm 1} \left[ A(r, \varepsilon; p, \bar{\varepsilon}; q, \tilde{\varepsilon}) \right. \\
 \left. + A(p, \varepsilon; q, \tilde{\varepsilon}; r, \bar{\varepsilon}) + A(q, \varepsilon; r, \bar{\varepsilon}; p, \tilde{\varepsilon}) \right] \quad (6.44)$$

El cálculo considerando el orden de los operadores (6.30) es muy similar y puede ser encontrado en [24]. El resultado tiene la misma forma de (6.44) con coeficientes distintos en cada sumando. En [24] también se realiza la siguiente observación: Si llamamos  $\hat{H}_v^{E_1}$  al operador hamiltoniano con el orden (6.29) y  $\hat{H}_v^{E_2}$  al operador con el orden (6.30), resulta que  $\hat{H}_v^{E_2} = (\hat{H}_v^{E_1})^\dagger$ . Entonces, se puede definir un operador Hamiltoniano simétrico dado por:

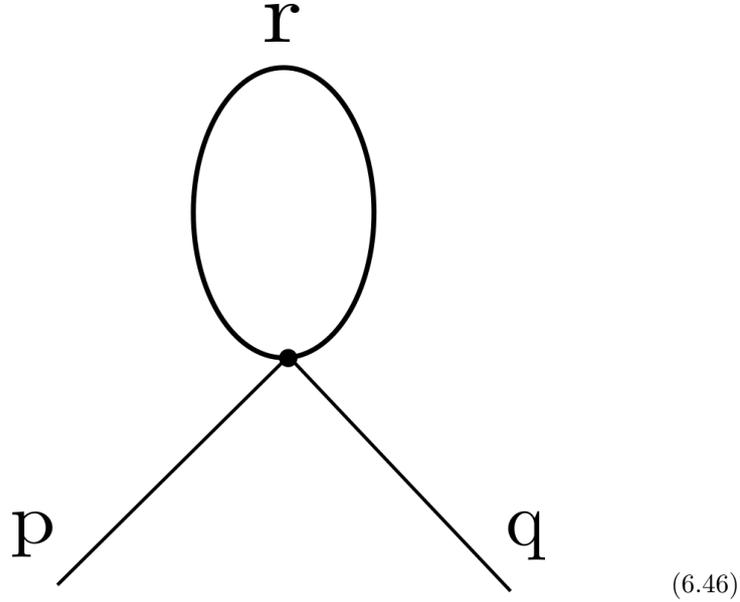
$$\hat{H}_{sim}^E = \frac{1}{2} (\hat{H}_v^{E_1} + \hat{H}_v^{E_2}) \quad (6.45)$$

### 6.2.2 Teoría axisimétrica

Vamos ahora a calcular la acción del Hamiltoniano Euclídeo axisimétrico sobre el vértice más simple posible. Lo primero a tener en cuenta es que el vértice más simple sobre el cual el Hamiltoniano Euclídeo axisimétrico tendrá una acción no trivial no es igual al del caso de la teoría completa. Lo que estamos buscando es un vértice  $v$  al menos trivalente cuyas aristas adyacentes sean linealmente independientes. En el caso axisimétrico, deberíamos tener dos aristas contenidas en la 2-superficie ortogonal a las órbitas del vector de Killing y necesariamente una arista en la dirección del mismo. Pero esta arista debe a su vez completar una vuelta por lo que el vértice tiene valencia cuatro. Sean  $e_\alpha$  y  $e_\beta$  aristas

## 6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 147

contenidas en la 2-superficie y  $e_\phi$  una arista perpendicular a esta; representamos gráficamente a  $v$  de la siguiente manera:



El óvalo representa la trayectoria cerrada perpendicular a la 2-superficie  $\Sigma$  mientras que  $p$ ,  $q$  y  $r$  son los colores de las representaciones de las holonomías asociadas a cada arista.

Recordemos del capítulo anterior que el operador Hamiltoniano toma la siguiente forma:

$$\hat{h}^E = \hat{h}^{E,\alpha} + \hat{h}^{E,\phi} \quad (6.47)$$

La acción de cada uno de estos sumandos sobre el vértice (6.46) está dada por:

$$\hat{h}_v^{E,\alpha}(N) := -2 \frac{N(v)}{2i\ell_p^2} \epsilon^{ab\phi} \text{tr} \left( \hat{h}_{\alpha ab} \hat{h}_{s_\phi} \left[ \hat{h}_{s_\phi}^{-1}, \hat{V} \right] \right) \quad (6.48)$$

$$\hat{h}_v^{E,\phi}(N) := -2 \frac{N(v)}{2i\ell_p^2} \epsilon^{a\phi b} \text{tr} \left( \hat{h}_{s_\phi}^{-1} \hat{h}_{s_\alpha}^{-1} \hat{h}_{s_\phi} \hat{h}_{s_a} \hat{h}_{s_b}^{-1} \left[ \hat{h}_{s_b}, \hat{V} \right] \right) + (a \leftrightarrow \phi) \quad (6.49)$$

Los índices  $a, b$  toman los valores  $\alpha$  y  $\beta$ , además usamos la misma notación donde  $s_i \subset e_i$  es un segmento con base en  $v$  y saliente al mismo ( $e_\phi$  tiene un segmento entrante y otro saliente a  $v$ , elegimos  $s_\phi$  contenido en el segmento saliente).

### Cálculo de $\hat{h}_v^{E,\alpha}$

Vamos a empezar por calcular la acción de (6.48) sobre  $v$ . Al igual que en el caso de la teoría completa, deberíamos considerar distintas permutaciones de los operadores. Sin embargo, es fácil ver que este término, al ser análogo al Hamiltoniano de la teoría completa, también tendrá sólo dos permutaciones de operadores relevantes: aquellas en las cuales el operador volumen está entre medio de  $\hat{h}_{s_\phi}$  y  $\hat{h}_{s_k}^{-1}$ . En las demás permutaciones, tendremos nuevamente la

traza de un operador en la representación de spin 1 ( $\hat{h}_{\alpha ab}$ ) con otro en la representación de spin 0 ( $\hat{h}_{s\phi} \hat{h}_{s_k}^{-1}$ ), mientras que  $\hat{V}$  no cambia la representación. Las permutaciones relevantes son entonces:

$$\left(\hat{h}_{\alpha ab} - \hat{h}_{\alpha ba}\right) \hat{h}_{s\phi} \hat{V} \hat{h}_{s\phi}^{-1} \tag{6.50}$$

$$\hat{h}_{s\phi} \hat{V} \hat{h}_{s\phi}^{-1} \left(\hat{h}_{\alpha ab} - \hat{h}_{\alpha ba}\right) \tag{6.51}$$

Como en el caso anterior elegimos el orden (6.50). Primeramente tenemos la acción de  $\hat{h}_{s\phi}^{-1}$  sobre el vértice:

$$\hat{h}_{s\phi}^{-1} \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} = \sum_{\varepsilon=\pm 1} a_{\varepsilon}(r) \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} \tag{6.52}$$

La acción del volumen sobre este tipo de vértice fue estudiada en el capítulo de cinemática. A diferencia de la teoría completa, el operador volumen no actúa de forma diagonal sobre el vértice de la expresión anterior sino que modifica el intertwiner del mismo. La acción del volumen será denotada con los coeficientes  $v_i^{j,ki}$  definidos a continuación:

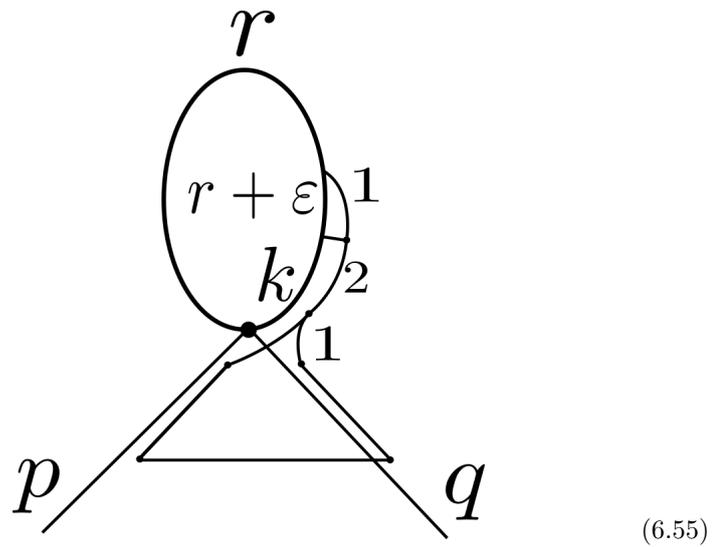
$$\hat{V} \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} = \hat{V} \sum_i \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} = \sum_{i,j,k} v_i^{j,k} \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} \tag{6.53}$$

Donde  $k$  toma los valores  $r, r \pm 2$  y  $j$  verifica las condiciones de Clebsch Gordon entre  $p$  y  $q$  y entre  $r$  y  $k$ . Luego,

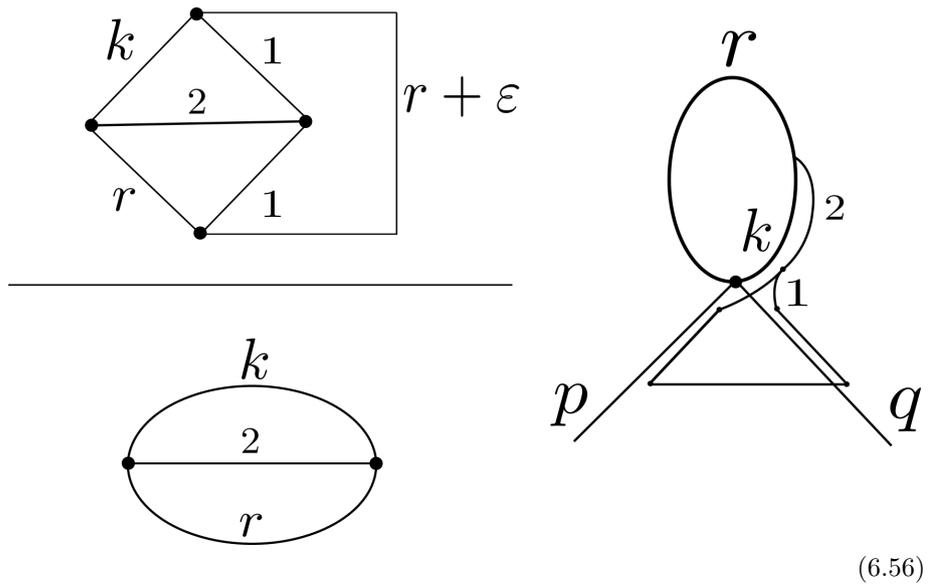
$$\left(\hat{h}_{ab} - \hat{h}_{ba}\right) \hat{h}_{s\phi} \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} = \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} - \begin{array}{c} r \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ p \quad q \end{array} \tag{6.54}$$

6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 149

Por simplicidad se omitió en la figura la línea de color  $j$ . Con la ayuda de (6.34), este último resultado se escribe como dos veces el siguiente grafo:



Y esto a su vez, usando (6.8), se puede escribir como:



Restaurando la línea de color  $j$  y usando (6.13), el grafo anterior toma la siguiente forma:

$$\sum_{\bar{\varepsilon}=\pm 1, \tilde{\varepsilon}=\pm 1} a_{\bar{\varepsilon}}(p) a_{\tilde{\varepsilon}}(q)$$

(6.57)

Usando el teorema de recoupling podemos mover la línea de color 2 hasta la línea de color  $j$ :

$$= \sum_{k_2} \left\{ \begin{matrix} j & r & k \\ r & 2 & k_2 \end{matrix} \right\}$$

(6.58)

Usando nuevamente recoupling:

$$= \sum_{k_3} \left\{ \begin{matrix} q & p & j \\ k_2 & 2 & k_3 \end{matrix} \right\}$$

(6.59)



donde se definió

$$a_{k_2}^\alpha(r, \varepsilon, p, \bar{\varepsilon}, q, \tilde{\varepsilon}) := \sum_{i,j,k} 2v_i^{j,k} a_\varepsilon(r) a_{\bar{\varepsilon}}(p) a_{\tilde{\varepsilon}}(q)$$

$$\sum_{k_3} \left\{ \begin{matrix} q & p & j \\ k_2 & 2 & k_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j & r & k \\ r & 2 & k_2 \end{matrix} \right\}$$

Se omitieron nuevamente las líneas virtuales, indicando el color de estas sobre el nodo. El cálculo de (6.51) teniendo en cuenta el otro orden relevante de los operadores se puede realizar de manera similar y el resultado es análogo al anterior.

### Cálculo de $\hat{h}_v^{E,\phi}$

El segundo sumando del Hamiltoniano Euclídeo:

$$\hat{h}_v^{E,\phi}(N) := -2 \frac{N(v)}{2i\ell_p^2} \epsilon^{a\phi b} \text{tr} \left( \hat{h}_{s_\phi}^{-1} \hat{h}_{s_\alpha}^{-1} \hat{h}_{s_\phi} \hat{h}_{s_a} \hat{h}_{s_b}^{-1} \left[ \hat{h}_{s_b}, \hat{V} \right] \right) + (a \leftrightarrow \phi) \quad (6.63)$$

tiene una forma diferente a la del término anterior, el cual es claramente análogo al Hamiltoniano Euclídeo de la teoría completa. Vamos ahora a calcular su acción sobre el vértice  $v$ . A diferencia del término anterior, el orden en el cual el operador volumen está ubicado a la izquierda:

$$\hat{V} \hat{h}_{s_b}^{-1} \hat{h}_{s_b} (\hat{h}_{s_\phi}^{-1} \hat{h}_{s_\alpha}^{-1} \hat{h}_{s_\phi} \hat{h}_{s_a} - (\alpha \leftrightarrow \phi)) \quad (6.64)$$

tiene un resultado no nulo. Luego, los otros dos órdenes de operadores relevantes son:

$$(\hat{h}_{s_\phi}^{-1} \hat{h}_{s_\alpha}^{-1} \hat{h}_{s_\phi} \hat{h}_{s_a} - (\alpha \leftrightarrow \phi)) \hat{h}_{s_b}^{-1} \hat{V} \hat{h}_{s_b} \quad (6.65)$$

$$\hat{h}_{s_b}^{-1} \hat{V} \hat{h}_{s_b} (\hat{h}_{s_\phi}^{-1} \hat{h}_{s_\alpha}^{-1} \hat{h}_{s_\phi} \hat{h}_{s_a} - (\alpha \leftrightarrow \phi)) \quad (6.66)$$

6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 153

Por simplicidad consideraremos únicamente el orden (6.65). Primero tenemos la acción de  $\hat{h}_{s_b}$ :

$$\hat{h}_{s_b} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q \end{array} = \sum_{\varepsilon=\pm 1} a_\varepsilon(q) \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} \quad (6.67)$$

El operador volumen, al actuar sobre el grafo anterior afecta los intertwiners del mismo de forma análoga al caso anterior:

$$\hat{V} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} = \hat{V} \sum_i \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ i \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} = \sum_{i,j,k} v_i^{j,k}(q, r, r, p, 1) \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ k \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} \quad (6.68)$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \left( \hat{h}_{s_\phi}^{-1} \hat{h}_{s_a}^{-1} \hat{h}_{s_\phi} \hat{h}_{s_a} - (\alpha \leftrightarrow \phi) \right) \hat{h}_{s_b}^{-1} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ k \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} = \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ k \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} - \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ k \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} \\ & = 2 \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ k \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} = 2 \frac{\begin{array}{c} q \\ \diamond \\ 2 \\ \diamond \\ k \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array}}{\begin{array}{c} q \\ \circlearrowleft \\ 2 \\ \circlearrowleft \\ k \end{array}} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ j \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ p \quad q + \varepsilon \end{array} \begin{array}{c} \mathcal{r} \\ \circlearrowleft \\ \bullet \\ | \\ k \\ \bullet \\ / \quad \backslash \\ q + \varepsilon \quad q \end{array} \quad (6.69) \end{aligned}$$

En la primer igualdad se usó:

$$\begin{array}{c} 1 \\ | \\ | \\ | \\ | \\ 1 \end{array} - \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \end{array} = 2 \begin{array}{c} 1 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ 1 \quad 1 \end{array} \quad (6.70)$$

mientras que en la segunda igualdad se usó (6.8). Usando el teorema de recoupling en el grafo del último miembro de (6.69) obtenemos:

$$\begin{array}{c} r \\ \text{loop} \\ \bullet \\ j \\ \bullet \\ k \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad q \end{array} = \lambda_k^{2q} \sum_{k_2} \left\{ \begin{array}{c} p \quad j \quad k \\ q \quad 2 \quad k_2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} r \\ \text{loop} \\ \bullet \\ j \\ \bullet \\ k_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad q \end{array} \quad (6.71)$$

Donde se usó

$$\begin{array}{c} j \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad q \end{array} = \lambda_k^{2q} \begin{array}{c} j \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad 2 \end{array} = \lambda_k^{2q} \sum_{k_2} \left\{ \begin{array}{c} p \quad j \quad k \\ q \quad 2 \quad k_2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} j \quad q \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ p \quad 2 \end{array} \quad (6.72)$$

6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 155

Luego, al grafo del lado derecho de (6.71) se lo puede reescribir usando (6.8):

$$\begin{aligned}
 & \text{Graph} = \sum_{\tilde{\varepsilon}} a_{\tilde{\varepsilon}}(p) \text{Graph} = \sum_{\tilde{\varepsilon}} a_{\tilde{\varepsilon}}(p) \frac{\text{Diagram}}{\text{Diagram}} \text{Graph} \\
 & \hspace{10em} (6.73)
 \end{aligned}$$

Juntando todos estos resultados y teniendo en cuenta que al intercambiar  $a \leftrightarrow b$  el cálculo es análogo y se obtiene intercambiando  $p \leftrightarrow q$ , llegamos a la acción de  $\hat{h}_v^{E,\phi}$  sobre el vértice  $v$ :

$$\hat{h}_v^{E,\phi} \sum_i \text{Graph} = -\frac{N_v}{i l_P^2} \sum_{\substack{j,k,k_2 \\ \varepsilon=\pm 1, \tilde{\varepsilon}=\pm 1}} \left( a_{j,k,k_2}^{\phi}(q, \varepsilon, p, \tilde{\varepsilon}, r) - a_{j,k,k_2}^{\phi}(p, \varepsilon, q, \tilde{\varepsilon}, r) \right) \text{Graph}$$

(6.74)

Donde se definió:

$$a_{j,k,k_2}^{\phi}(q, \varepsilon, p, \tilde{\varepsilon}, r) := 2a_{\varepsilon}(q)a_{\tilde{\varepsilon}}(p) \sum_i v_i^{j,k}(q, r, r, p, 1) \lambda_k^{2q}$$

(6.75)

El primer grafo en el miembro derecho de (6.74) se puede simplificar usando (6.13) y el teorema de recoupling; primero:

$$\text{Graph} = \sum_{\bar{\varepsilon}=\pm 1} a_{\bar{\varepsilon}}(r) \text{Graph}$$

(6.76)

Luego,

Diagrammatic equation (6.77):

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with loop } r, \text{ vertex } j, \text{ and legs } p, p+\tilde{\varepsilon}, q \\
 &= \sum_{\bar{\varepsilon}=\pm 1} a_{\bar{\varepsilon}}(r) \text{ Diagram with loop } r+\bar{\varepsilon}, \text{ vertex } j, \text{ and legs } p, p+\tilde{\varepsilon}, q \\
 &= \sum_{\substack{\bar{\varepsilon}=\pm 1 \\ j_2}} a_{\bar{\varepsilon}}(r) \left\{ \begin{matrix} j & r & r \\ r+\bar{\varepsilon} & 2 & j_2 \end{matrix} \right\} \text{ Diagram with loop } r+\bar{\varepsilon}, \text{ vertex } j_2, \text{ and legs } p, p+\tilde{\varepsilon}, q
 \end{aligned}
 \tag{6.77}$$

Usando nuevamente el teorema de recoupling y la identidad (6.7):

Diagrammatic equation (6.78):

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with loop } r+\bar{\varepsilon}, \text{ vertex } j_2, \text{ and legs } p, p+\tilde{\varepsilon}, q \\
 &= \sum_{k_3} \left\{ \begin{matrix} k_2 & q & j \\ j_2 & 2 & k_3 \end{matrix} \right\} \lambda_j^{qk_2} \lambda_{k_3}^{j_2q} \text{ Diagram with loop } r+\bar{\varepsilon}, \text{ vertex } j_2, \text{ and legs } p, p+\tilde{\varepsilon}, q
 \end{aligned}
 \tag{6.78}$$

Por otro lado, tenemos la siguiente identidad (la cual se puede obtener como un caso particular de (6.8) en el caso  $a = 0$ ):

Diagrammatic identity (6.79):

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram with loop } a, \text{ vertex } b, c, \text{ and legs } a, d \\
 &= \frac{\text{Diagram with loop } a, b, c}{\Delta_a} \delta_a^d \text{ Diagram with loop } a, \text{ vertex } a
 \end{aligned}
 \tag{6.79}$$

6.2. CÁLCULO DE LOS ELEMENTOS DE MATRIZ DEL HAMILTONIANO EUCLÍDEO 157

Con este resultado, el grafo de (6.78):

Diagrammatic equation (6.80):

$$\begin{aligned}
 & \text{Graph with loop } r, r+\bar{\varepsilon}, j_2, j_3, k_2, k_3, p+\tilde{\varepsilon}, p, q \\
 &= \delta_{k_3}^{p+\tilde{\varepsilon}} \frac{\text{Graph with loop } r, r+\bar{\varepsilon}, j_2, k_2, p+\tilde{\varepsilon}, p, q}{\Delta_{p+\tilde{\varepsilon}}} \\
 & \text{Graph with loop } r, r+\bar{\varepsilon}, j_2, p+\tilde{\varepsilon}, p, q \quad (6.80)
 \end{aligned}$$

Realizando un proceso similar, este último grafo se puede escribir de la siguiente manera:

Diagrammatic equation (6.81):

$$\begin{aligned}
 & \text{Graph with loop } r, r+\bar{\varepsilon}, j_2, j_3, k_4, p+\tilde{\varepsilon}, p, q \\
 &= \sum_{\substack{j_3, k_4 \\ \varepsilon' = \pm 1}} \frac{\text{Graph with loop } r+\bar{\varepsilon}, j_3, k_4, p+\tilde{\varepsilon}+\varepsilon', p+\tilde{\varepsilon}, p, q}{\Delta_{p+\tilde{\varepsilon}+\varepsilon'}} \delta_{p+\tilde{\varepsilon}+\varepsilon'}^{k_4} \\
 & \text{Graph with loop } r+\bar{\varepsilon}, j_3, p+\tilde{\varepsilon}+\varepsilon', p, q \quad (6.81)
 \end{aligned}$$

Juntando todos estos resultados tenemos finalmente:

Final diagrammatic equation (6.82):

$$\begin{aligned}
 \hat{h}_v^{E,\phi} \sum_i &= -\frac{N_v}{iU_P^2} \sum_{\substack{j,j_2,j_3 \\ k,k_2,k_3,k_4 \\ \varepsilon=\pm 1, \bar{\varepsilon}=\pm 1 \\ \bar{\varepsilon}'=\pm 1, \varepsilon'=\pm 1}} \left( \begin{aligned}
 & a_{j,k,k_2}^\phi(q, \varepsilon, p, \bar{\varepsilon}, r) \text{ Graph with loop } r, i, p, q \\
 & b_{j,j_2,k_2,k_3}^\phi(q, r, \bar{\varepsilon}, p+\bar{\varepsilon}) \text{ Graph with loop } r+\bar{\varepsilon}, i, p+\bar{\varepsilon}, q \\
 & c_{j_2,j_3,k_4}^\phi(r, r+\bar{\varepsilon}, p+\bar{\varepsilon}, q, \varepsilon') \text{ Graph with loop } r+\bar{\varepsilon}, i, q+\bar{\varepsilon}+\varepsilon', p
 \end{aligned} \right) \\
 & - \left( \begin{aligned}
 & a_{j,k,k_2}^\phi(q, \varepsilon, p, \bar{\varepsilon}, r) \text{ Graph with loop } r, i, p, q \\
 & b_{j,j_2,k_2,k_3}^\phi(q, r, \bar{\varepsilon}, p+\bar{\varepsilon}) \text{ Graph with loop } r+\bar{\varepsilon}, i, p+\bar{\varepsilon}, q \\
 & c_{j_2,j_3,k_4}^\phi(r, r+\bar{\varepsilon}, p+\bar{\varepsilon}, q, \varepsilon') \text{ Graph with loop } r+\bar{\varepsilon}, i, q+\bar{\varepsilon}+\varepsilon', p
 \end{aligned} \right) \quad (6.82)
 \end{aligned}$$



## 6.3 Kernel del Vínculo Hamiltoniano

### 6.3.1 Teoría completa

Finalizamos este capítulo hallando el Kernel de vínculo Hamiltoniano. En el capítulo de cinemática construimos el espacio  $\mathcal{K}_0$  (soluciones del vínculo de Gauss) recurriendo al uso de intertwiners e introduciendo los estados de spin-networks que denotaremos en esta sección por  $T_{\gamma, \vec{j}, \vec{c}}$ , siendo  $\gamma$  el grafo en el cual está basado el estado y los vectores  $\vec{j}$  y  $\vec{c}$  los colores de sus aristas y vértices. El espacio de las soluciones simultáneas al vínculo de Gauss y de difeomorfismos  $\mathcal{K}_{diff}$  se obtiene tomando el promediado de los estados de spin-networks en el grupo de difeomorfismos:

$$T_{[\gamma], \vec{j}, \vec{c}} := \sum_{\gamma' \in [\gamma]} T_{\gamma', \vec{j}, \vec{c}} \quad (6.84)$$

donde  $[\gamma]$  denota la órbita de  $\gamma$  bajo difeomorfismos espaciales. El promediado en el grupo de una función cilíndrica  $[f]$  se obtiene descomponiendo esta en estados de spin-network y promediando cada uno de ellos por separado. Queremos encontrar ahora  $\mathcal{K}_{phys}$ , el espacio de estados de soluciones del vínculo Hamiltoniano. En primera instancia deberíamos buscar los estados  $\Psi$  tales que

$$\hat{H}\Psi = 0 \quad (6.85)$$

es decir, estados que son aniquilados por la acción del vínculo Hamiltoniano. Los únicos estados que verifican esta condición son aquellos basados en un grafo tal que todas las tangentes de las aristas adyacentes a sus vértices son coplanares (en el caso de la teoría axisimétrica, esto corresponde a grafos carentes de aristas perpendiculares al vector de Killing). Estos estados no están en el rango del operador Hamiltoniano: Es imposible obtener un estado basado en uno de estos grafos a partir de la aplicación del Hamiltoniano a un estado de spin-network. Es por esta razón que el valor propio cero está en el espectro residual de  $\hat{H}$  y no en el espectro puntual. Como para un operador acotado  $\hat{O}$ , su espectro residual coincide con el espectro puntual de  $\hat{O}^\dagger$ , vamos a buscar soluciones en el dual del espacio de Hilbert de las funciones cilíndricas  $\mathcal{H}'$ , es decir, vamos a buscar distribuciones  $\Psi \in \mathcal{H}'$  tales que  $\Psi(\hat{H}f) = 0$  para todo  $f \in \mathcal{H}$ . El procedimiento a seguir se basa en la siguiente observación: Dado un estado  $\psi$  basado en un grafo  $\gamma$ , el resultado de la acción del vínculo Hamiltoniano Euclídeo sobre el mismo se puede escribir como una combinación lineal de estados de spin-network basados en grafos  $\gamma_I$  tales que  $\gamma_I - \gamma$  es un arco de spin  $j = 1/2$  (el cual fue denotado como  $\alpha_{ij}$  anteriormente). Basándonos en esta observación, introducimos las siguientes definiciones:

**Definición 1:** Dado un grafo  $\gamma$ , un vértice  $v \in \gamma$  es extraordinario si:

- Es trivalente.
- Es la intersección de dos curvas analíticas,  $v = c \cap c'$ , siendo el extremo de una sola de ellas.

**Definición 2:** Una arista  $e \in \gamma$  es extraordinaria si:

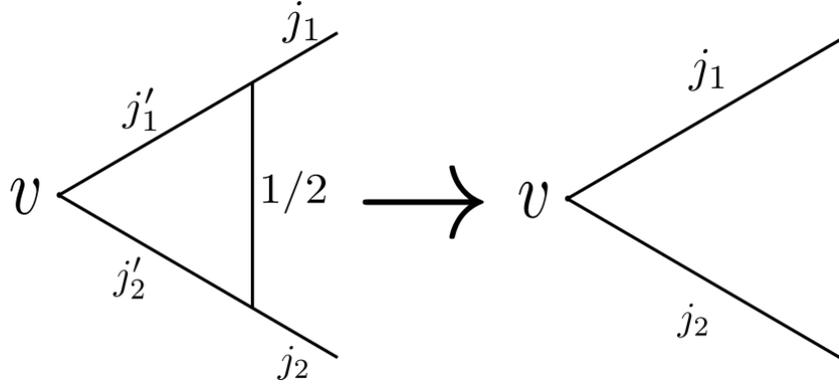
- Sus extremos  $v_1$  y  $v_2$  son vértices extraordinarios.
- Hay un vértice  $v \in \gamma$  al menos trivalente del grafo con al menos tres aristas no colineales adyacentes. Entre esas aristas hay dos,  $s_1$  y  $s_2$  linealmente independientes que conectan  $v$  con  $v_1$  y  $v_2$ . A  $v$  se lo llama vértice típico asociado a  $e$ .

Este último requerimiento implica que el vértice típico debe ser tal que el Hamiltoniano euclídeo tiene una acción no nula sobre el mismo. Recordemos que cuando  $\hat{H}^E$  actúa sobre un vértice  $v$  perteneciente a un grafo  $\gamma$ , el resultado de esta acción está basado en grafos que difieren de  $\gamma$ , de acuerdo a estas definiciones, en dos vértices extraordinarios y una arista extraordinaria  $e$  tal que  $v$  es el vértice típico del mismo. Esta segunda condición se puede interpretar entonces como exigir que el grafo  $\gamma$  al cual pertenece la arista extraordinaria pueda ser obtenido a partir de la acción del Hamiltoniano Euclídeo sobre un estado basado en  $\gamma - e$ , dado que si las tangentes de las aristas adyacentes a  $v$  son linealmente dependientes, la acción de  $\hat{H}^E$  será nula.

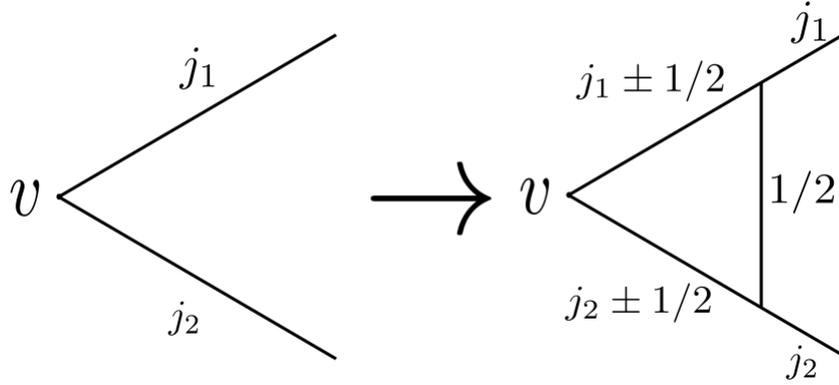
**Definición 3:** Una spin-net es un par  $w = (\gamma, \vec{j})$  que consiste en un grafo  $\gamma$  y una asignación de colores  $j_i > 0$  a las aristas del mismo tales que el espacio de intertwiners compatibles con el mismo es no vacío, esto es, que los colores de las aristas verifiquen las condiciones de Clebsch-Gordon. Un estado de spin-network basado en este grafo se dice compatible con la spin-net  $w$ .

**Definición 4:** El espacio  $W^n$  es el de las spin-nets que tienen precisamente  $n$  edges extraordinarios de valencia 1 (spin  $1/2$ ).  $W^0$  en particular es el espacio de las spin-nets cuyas aristas extraordinarias tienen todas un spin  $j > 1/2$ . Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, se puede interpretar al número  $n$  como el número de veces que tiene que actuar el Hamiltoniano Euclídeo sobre un grafo  $\gamma_0 \in W^0$  para obtener  $\gamma_n \in W^n$ .

**Definición 5:** Dada una spin net  $w_n = (\gamma_n, \vec{j}_n) \in W^n$ , existe un único  $w_0 = (\gamma_0, \vec{j}_0) \in W^0$  al que se denomina *fuentes* de  $w_n$  y se puede obtener a partir de este de la siguiente forma: Partiendo de  $\gamma_n$ , eliminar todas las aristas extraordinarias de spin  $1/2$ . A los segmentos del grafo que conectaban la arista extraordinaria con su vértice típico, cambiar su spin para que coincida con el del resto de la arista a la que pertenecen:



Repetiendo este procedimiento hasta que no queden aristas extraordinarias se obtiene  $\gamma_0$ . Por otro lado, una spin-net  $w_{n+1} \in W^{n+1}$  se puede obtener a partir de  $w_n \in W^n$  realizando los siguientes pasos: Añadir un edge extraordinario de spin  $1/2$ . A los segmentos que unen sus extremos con el vértice típico  $v$  (cuyos espines denotaremos por  $j_1$  y  $j_2$ ) cambiarles el spin en  $\pm 1/2$ .



Si alguna de estas cantidades  $j_1 \pm 1/2, j_2 \pm 1/2$  es cero, remover entonces el segmento correspondiente del grafo nuevo. Se conservan únicamente los resultados que respeten las reglas de recoupling: Si por ejemplo  $v$  es trivalente, y tanto  $j_1 - 1/2$  como  $j_2 - 1/2$  son cero, entonces  $v$  en el nuevo grafo tendría una única arista adyacente. Casos como este son descartados.

**Kernel del vínculo Hamiltoniano:** Vamos ahora a buscar las soluciones del vínculo Hamiltoniano. Sea  $\Psi \in \mathcal{H}'$ , para que esta sea una solución del vínculo del vínculo hamiltoniano debe verificar  $\Psi(\hat{H}(N)f) = 0$  para todo lapso  $N$  y para toda función cilíndrica  $f$ . Esto es equivalente a pedir  $\Psi(\hat{H}(N)T_{[\gamma], \vec{j}, \vec{e}}) = 0$  para todo lapso  $N$  y para todo estado de spin-network  $T_{[\gamma], \vec{j}, \vec{e}}$ . En [65] se probó que las soluciones son combinaciones lineales de estados  $\Psi$  de la siguiente forma:

- $\Psi = [\Phi]$ , donde  $\Phi$  es una combinación lineal de estados de spin-networks basados en spin-nets  $w_0 \in W_0$ .
- $\Psi = [\Phi]$ , donde  $\Phi$  es una combinación lineal de estados de spin-networks contruidos de spin-nets en  $\overline{W}_0$  que construiremos a continuación.

Es trivial verificar que los estados del primer tipo son solución: El Hamiltoniano agrega aristas extraordinarias, por lo que incluso si  $\Psi$  y  $\hat{H}T_{[\gamma],\vec{j},\vec{e}}$  tienen el mismo grafo, el color de las aristas diferirá y el producto escalar por lo tanto es cero.

Consideremos ahora las soluciones del tipo 2. Sea  $\Psi = \sum_T a_{[T]}^{(n)}([w_0])T$ . La

suma se hace en todas las spin-nets  $w \in W^{(n)}(w_0)$  con fuente  $w_0$  y luego en todos los estados de spin-networks  $T$  compatibles con estos  $w$ , a este espacio lo denotaremos por  $S^n(w_0)$ . Los coeficientes  $a$  dependen de la clase de equivalencia de los grafos de las spin-networks, del número  $n$  y de la fuente de las spin-nets. Al aplicar  $\hat{H}^E(N)$  a un estado  $T \in S^{n-1}(w_0)$ , obtenemos una combinación lineal de estados pertenecientes a  $S^n(w_0)$ , pues el Hamiltoniano euclídeo agrega precisamente una arista extraordinaria al grafo. Luego, para estudiar cómo modifica el vínculo Hamiltoniano Lorentziano al grafo  $\gamma$  de la función cilíndrica sobre la cual actúa, se puede observar que en su expresión aparece dos veces el operador  $\hat{K}$ , (el cual a su vez se define en términos del Hamiltoniano Euclídeo, ver ecuación (5.57)), mientras que el resto de los operadores presentes en la expresión no modifican  $\gamma$ . Por esta razón, al aplicar  $\hat{H}^L(N)$  a un estado  $T \in S^{n-2}(w_0)$ , el resultado es una combinación lineal de estados  $T' \in S^n(w_0)$  ya que este operador agrega dos aristas extraordinarias. Entonces, tenemos matrices  $m$  tales que:

$$\hat{H}^E(N)T = \sum_{v \in V(\gamma_0), T' \in S^n([w_0])} N_v m_{[T],[T']}^{(n)}([w_0], [v]) T' \text{ para } T \in S^{(n-1)}(w_0) \quad (6.86)$$

$$\hat{H}^L(N)T = \sum_{v \in V(\gamma_0), T' \in S^n(w_0)} N_v m_{[T],[T']}^{(n)}([w_0], [v]) T' \text{ para } T \in S^{(n-2)}(w_0) \quad (6.87)$$

Entonces,  $f$  será solución si

$$\sum_{T' \in S^n(w_0)} \bar{a}_{[T']}^{(n)}([w_0]) m_{[T],[T']}^{(n)}([w_0], [v]) = 0 \quad \forall T \in S^{(n-1)}(w_0) \cup S^{(n-2)}(w_0), v \in V(\gamma_0) \quad (6.88)$$

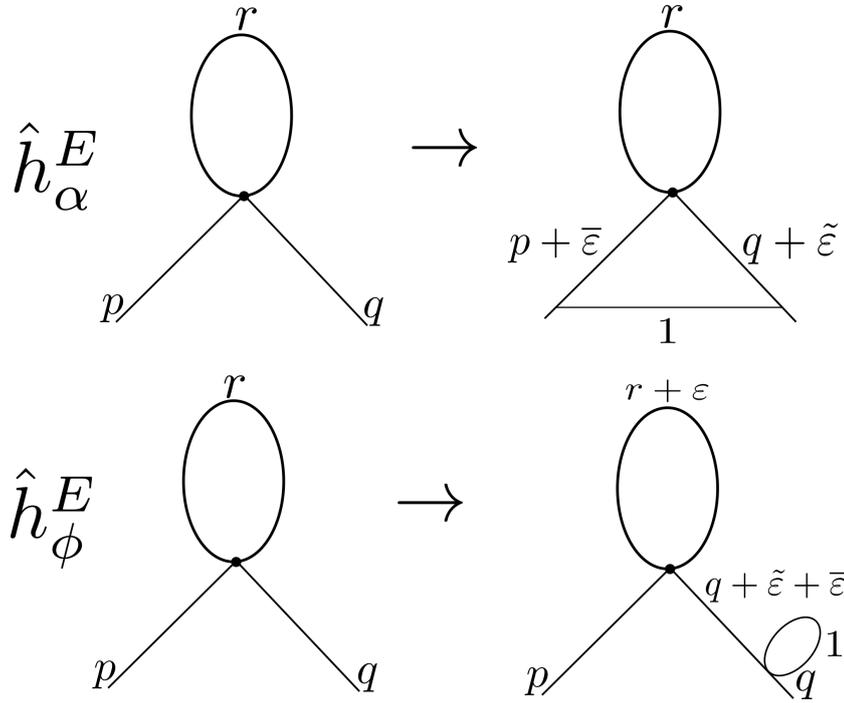
Los miembros de todos los  $S^n(w_0)$  para todo  $w_0$  son todos los estados de spin networks compatibles con cualquier  $w \in \bar{W}_0$ .

### 6.3.2 Teoría axisimétrica

En la teoría axisimétrica, el hamiltoniano euclídeo tiene la siguiente forma.

$$\hat{h}^E = \hat{h}_\alpha^E + \hat{h}_\phi^E \quad (6.89)$$

Donde  $\hat{h}^{E,\alpha}$  y  $\hat{h}^{E,\phi}$  están dados por (6.48) y (6.49). Como se vio en este capítulo, la acción del término  $\hat{h}^{E,\alpha}$  es análoga a la del vínculo  $\hat{H}^E$  de la teoría completa: al actuar con  $\hat{h}^{E,\alpha}$  sobre un estado de spin-network basado en un grafo  $\gamma$ , el resultado es una combinación lineal de estados cuyos grafos difieren en  $\gamma$  por una arista extraordinaria. Por otro lado, el resultado de actuar con  $\hat{h}^{E,\phi}$  sobre un estado basado en  $\gamma$  es una combinación lineal cuyos grafos correspondientes difieren de este en una arista cerrada a lo largo de la dirección del vector de Killing:



Esta arista no cumple la definición de arista extraordinaria dada al comienzo de la sección, por lo que para poder encontrar el kernel del vínculo Hamiltoniano empleando un método similar al caso de la teoría completa es necesario introducir nuevas definiciones.

**Definición 5:** Dado un grafo  $\gamma$ , decimos que un vértice  $v \in \gamma$  es extraordinario de tipo 2 si:

- Es cuatrivalente
- Es la intersección de una arista  $e_\alpha$  perpendicular al vector de Killing y otra arista  $e_\phi$  en la dirección del mismo.

**Definición 6:** Una arista  $e \in \gamma$  es extraordinaria de tipo 2 si:

- Está en la dirección del vector de Killing.
- Intersecta con el resto de  $\gamma$  en un vértice extraordinario de tipo 2.
- Existe un vértice  $v \in \gamma$  al menos cuatrivalente tal que las aristas adyacentes al mismo no son colineales. Una de estas aristas conecta  $v \in \gamma$  con el vértice extraordinario de tipo 2. A  $v$  se lo denomina vértice típico asociado a  $e$ .

De forma análoga a la teoría completa, esta última condición implica que el grafo  $\gamma$  se pueda obtener a partir de la acción de  $\hat{h}_\phi^E$  sobre un estado basado en  $\gamma - e$ .

**Definición 7:** El espacio  $W^{n,m}$  es el de las spin-nets que tienen precisamente  $n$  aristas extraordinarias de spin  $1/2$  y  $m$  aristas extraordinarias de tipo 2 también de spin  $1/2$ .  $W^{0,0}$  es el espacio de spin-nets basados en grafos cuyas aristas extraordinarias (de ambos tipos) tienen spin  $j > 1/2$ .

Dado  $w_{m,n} \in W^{n,m}$ , se pueden obtener a partir de este un elementos de  $W^{n+1,m}$  y  $W^{n-1,m}$  realizando el mismo procedimiento descrito para el caso de la teoría completa. Un elemento de  $W^{n,m+1}$  se puede obtener mediante un procedimiento similar:

- Agregar al grafo una arista de valencia  $1/2$  perpendicular a la 2-superficie  $\Sigma$  cuyos extremos coinciden con un punto  $v_0 \in e$ , siendo  $e \in \gamma$  una arista (a cuya valencia llamaremos  $q$ ) tal que uno de sus extremos es un vértice  $v$  al menos cuatrivalente y tal que las aristas adyacentes al mismo no son coplanares, esto es, deben haber por lo menos dos aristas adyacentes contenidas en la superficie  $\Sigma$  y una perpendicular a esta, cuya valencia denotaremos por  $r$ .
- Al segmento de  $e$  cuyos extremos son  $v$  y  $v_0$ , cambiar su valencia de  $q$  a  $q \pm 1/2 \pm 1/2$ .
- A la arista perpendicular a la 2-superficie cuyos extremos coinciden con  $v$  (debe haber una necesariamente) cambiarle la valencia de  $r$  a  $r \pm 1/2$ .
- Si alguno de estos nuevos valores es cero, sacar la arista correspondiente del grafo.
- Quedarse únicamente con los casos que respeten las reglas de recoupling. Si por ejemplo el vértice original  $v$  tiene dos aristas adyacentes contenidas en  $\Sigma$  y una perpendicular a esta, al remover por ejemplo esta última arista y una contenida en  $\Sigma$ ,  $v$  tendría sólo una arista adyacente en el nuevo grafo.

De manera similar, a partir de  $w_{n,m} \in W^{n,m}$  se puede obtener un elemento de  $W^{n,m-1}$  de la siguiente manera:

- Eliminar una arista extraordinaria  $e$  de tipo 2 del grafo.
- Modificar la valencia del segmento de arista que tiene por extremos al vértice típico  $v$  de la arista  $e$  y al vértice extraordinario  $v_0$  de tipo 2 asociado con esta, hacer que coincida con la valencia del resto de la arista.

Dada una spin net  $w_{n,m} \in W^{n,m}$ , aplicando el procedimiento anterior hasta que no queden aristas extraordinarias se puede obtener una spin net  $w_{0,0} \in W^{0,0}$ . Recíprocamente, partiendo de una spin net  $w_{0,0} \in W^{0,0}$ , se puede obtener otra  $w_{n,m} \in W^{n,m}$  actuando con los operadores  $h^{E,\alpha}$  y  $h^{E,\phi}$ . A diferencia de la teoría completa, la spin net  $w_{0,0}$  a partir de la cual se puede obtener  $w_{n,m}$  actuando con estos operadores no es única. Para ilustrar esto de forma simple, consideremos el siguiente caso: Dada una spin net  $w_{0,0} \in W^{0,0}$  basada en un grafo  $\gamma$ , sea  $v \in \gamma$  y  $e \in \gamma$  una arista adyacente al mismo. Dado un estado de spin-network compatible con  $w_{0,0}$ , se puede obtener otro compatible con una spin net  $w_{0,1} \in W^{0,1}$  mediante la acción de  $\hat{h}^{E,\phi}$  sobre  $v$ , la cual da como resultado una combinación lineal de estados que cuyos grafos correspondientes difieren del original en una arista  $e$  y un vértice  $v$  extraordinarios de tipo 2. La valencia del segmento que une el vértice extraordinario con el vértice típico  $v$  es modificada en  $\pm 1 \pm 1$ ; por otro lado, sea  $e_\phi$  la arista en la dirección del vector de Killing adyacente a  $v$  cuya valencia denotaremos por  $r$ ; la valencia de  $e_\phi$  en el nuevo grafo es  $r \pm 1$ . Sea  $w'_{0,0}$  una spin net que difiere únicamente de  $w_{0,0}$

en la valencia de  $e_\phi$ , siendo esta  $r \pm 2$ . Al aplicar el operador  $\hat{h}^{E,\phi}$  a un estado de spin-network compatible con  $w'_{0,0}$ , el resultado será una combinación lineal de estados en cuyos grafos la nueva valencia de  $e_\phi$  será  $r \pm 2 \pm 1$ ; dentro de los valores posibles se encuentran  $r \pm 1$ , mientras que el resto del grafo en cada uno de esos términos es igual a los que se obtienen en el caso anterior.

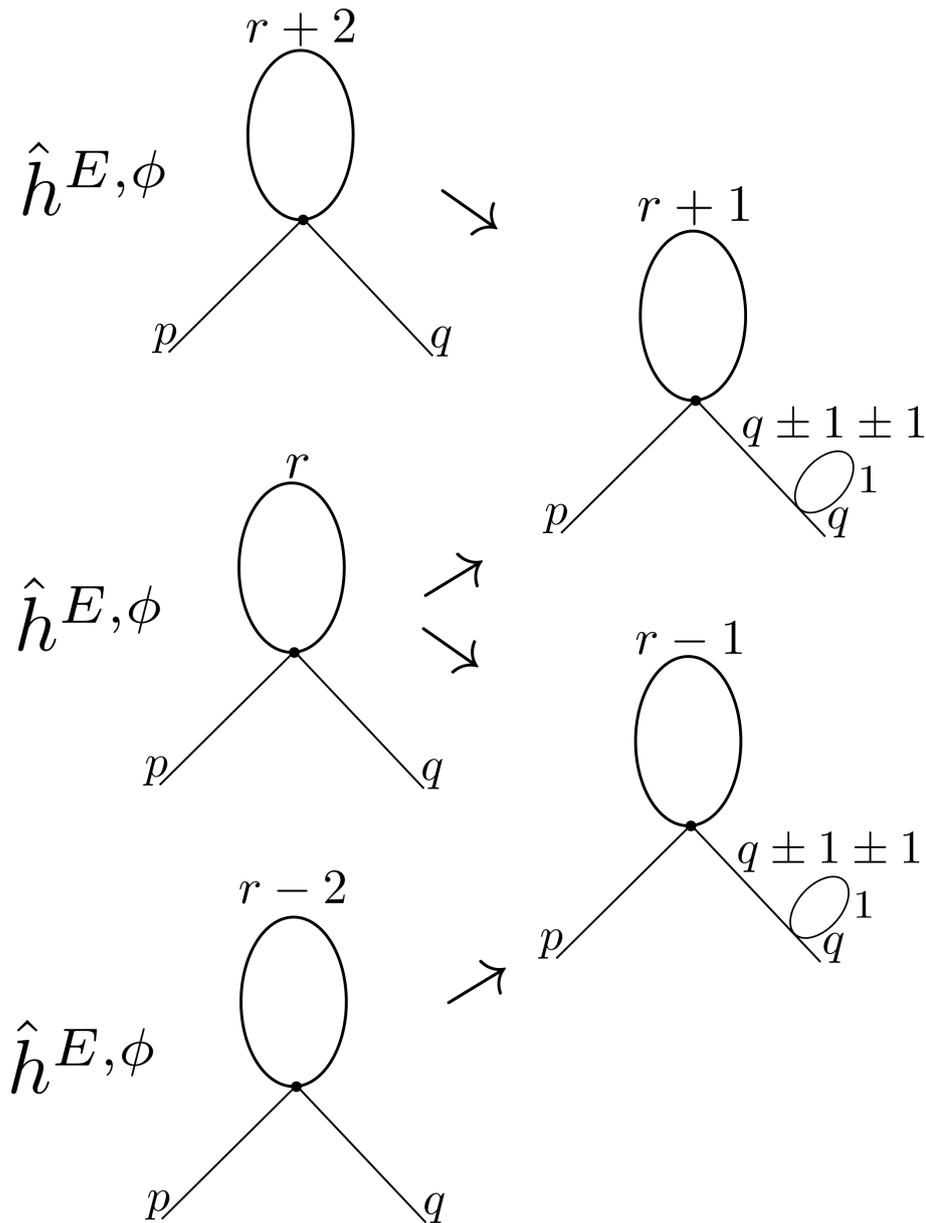


Figura 6.11: En la teoría axisimétrica no se puede definir de forma única la fuente de una spin net.

De forma más general, dada  $w^{n,m} \in W^{n,m}$ , existen estados de spin nets

$w_i^{n,0} \in W^{n,0}$  tales que mediante la aplicación de  $\hat{h}^{E,\phi}$  sobre un estado  $\psi \in S^{n,0}$  compatible con  $w_i^{n,0}$  podemos obtener estados  $\psi' \in S^{n,m}$  compatibles con  $w^{n,m}$ . Los grafos en los cuales están basados las spin nets  $w_i^{n,0}$  difieren entre sí únicamente en las valencias de las aristas en la dirección del vector de Killing adyacentes a sus vértices. Por esta razón, no es posible definir una única fuente para una spin net  $w^{n,m} \in W^{n,m}$ , sino que para caracterizarla completamente hay que dar también las valencias de las aristas perpendiculares a  $\Sigma$  adyacentes a cada uno de los vértices típicos.

**Definición 8:** Dada una spin-net  $w^{n,m} \in W^{n,m}$ , definimos una clase de equivalencia  $\tilde{w}^{0,0}(w^{n,m})$  asociada a la misma bajo la cual dos spin-nets  $w_1^{0,0}$  y  $w_2^{0,0}$  pertenecientes a  $W^{0,0}$  se consideran equivalentes si es posible obtener un estado de spin-network compatible con  $w^{n,m}$  a partir de la aplicación de  $\hat{h}^E$  sobre un estado compatible con  $w_1^{0,0}$  y además sobre otro compatible con  $w_2^{0,0}$ .

Al igual que en la teoría completa, la acción del Hamiltoniano Lorentziano sobre el grafo de la función cilíndrica sobre la cual actúa es equivalente a la aplicación consecutiva de dos vínculos hamiltonianos euclídeos (el resto de los operadores en su expresión no modifican el grafo). Si un estado de spin-network pertenece a  $S^{n,m}$  (los estados de spin-networks compatibles con las spin-nets de  $W^{n,m}$ ), entonces tenemos, esquemáticamente:

$$\hat{h}^L T \sim \hat{h}^E \hat{h}^E T = \hat{h}^E (T_1 + T_2) = T_{11} + T_{12} + T_{21} + T_{22} \quad (6.90)$$

Donde  $T_1 \in S^{n+1,m}$ ,  $T_2 \in S^{n,m+1}$  y  $T_{11} \in S^{n+2,m}$ ,  $T_{12}, T_{21} \in S^{n+1,m+1}$ ,  $T_{22} \in S^{n,m+2}$ .

**Kernel del Vínculo Hamiltoniano:** Sea  $\mathcal{H}$  el espacio de Hilbert de las funciones cilíndricas. Una distribución  $\Psi \in \mathcal{H}'$  está en el Kernel del vínculo Hamiltoniano si  $\Psi(\hat{h}[N](f))$  para todo lapso  $N$  y para toda función cilíndrica  $f$ , o equivalentemente, para todo estado de spin-network  $T_{[\gamma],\vec{j},\vec{e}}$ , siendo  $[\gamma]$  la clase de equivalencia de  $\gamma$  bajo difeomorfismos. Distinguimos dos tipos de soluciones:

- $\Psi = [\psi]$ , con  $\psi \in S^{0,0}$ , estados basados en spin nets  $w^{0,0} \in W^{0,0}$
- $\Psi = [\psi]$ , con  $\psi \in S^{n,m}$ , estados basados en spin nets  $w^{n,m} \in W^{n,m}$  que construiremos a continuación.

Sea  $\Psi = [\psi]$  la clase de equivalencia bajo difeomorfismos de  $\psi$ , siendo  $\psi = \sum_T a_{[T]}^{(n,m)}([w^{0,0}])T$ . La suma se hace en todas las spin-nets  $w \in W^{n,m}$ , en todos los estados de spin-networks  $T \in S^{n,m}$  compatibles con uno de estos spin-nets. Al actuar  $\hat{h}^E = \hat{h}_\alpha^E + \hat{h}_\phi^E$  sobre un estado  $T \in S^{n-1,m} \cup S^{n,m-1}$ , se obtiene una combinación lineal de estados de  $S^{n,m}$  (resultado de la acción de  $\hat{h}^{E,\alpha}$  sobre la componente  $S^{n-1,m}$  y la de  $\hat{h}^{E,\phi}$  sobre la componente  $S^{n,m-1}$ ) y otros estados perpendiculares (por ejemplo la acción de  $\hat{h}^{E,\alpha}$  sobre la componente en  $S^{n,m-1}$ , da como resultado un estado perteneciente al espacio  $S^{n+1,m-1}$ ). De manera similar, teniendo en cuenta (6.90), tenemos que  $\hat{h}^L$  actuando sobre un estado  $T \in S^{n-2,m} \cup S^{n-1,m-1} \cup S^{n,m-2}$  da como resultado una combinación lineal de estados en  $S^{n,m}$  junto con otros estados en espacios perpendiculares a este.

Entonces, tenemos matrices  $m$  tales que:

$$\hat{h}^E(N)T = \sum_{v \in V(\gamma_0)} \sum_{\substack{w^{0,0} \in \bar{w}^{0,0}(w^{n,m}) \\ T' \in S^{(n,m)}(w^{0,0})}} N_v m_{[T],[T']}^{(n,m)}([w^{0,0}], [v]) T' + (\perp) \quad (6.91)$$

para  $T \in S^{(n-1,m)}(w^{0,0}) \cup S^{(n,m-1)}(w^{0,0})$

$$\hat{h}^L(N)T = \sum_{v \in V(\gamma_0)} \sum_{\substack{w^{0,0} \in \bar{w}^{0,0}(w^{n,m}) \\ T' \in S^{(n,m)}(w^{0,0})}} N_v m_{[T],[T']}^{(n,m)}([w^{0,0}], [v]) T' + (\perp) \quad (6.92)$$

para  $T \in S^{(n-2,m)}(w^{0,0}) \cup S^{(n-1,m-1)}(w^{0,0}) \cup S^{(n,m-2)}(w^{0,0})$

Donde se usó la notación abreviada  $(\perp)$  para denotar a todos estados perpendiculares a aquellos pertenecientes a  $S^{n,m}(w_0)$ . Finalmente,  $\Psi$  será solución sólo si:

$$\sum_{\substack{v \in V(\gamma_0) \\ T' \in S^{(n,m)}(w^{0,0})}} \bar{a}_{[T']}^{(n,m)}([w^{0,0}]) m_{[T],[T']}^{(n,m)}([w^{0,0}], [v]) = 0 \quad (6.93)$$

$\forall T \in S^{(n-1,m)}(w^{0,0}) \cup S^{(n,m-1)}(w^{0,0}) \cup S^{(n-2,m)}(w^{0,0})$   
 $\cup S^{(n-1,m-1)}(w^{0,0}) \cup S^{(n,m-2)}(w^{0,0}), v \in V(\gamma_0)$



## Capítulo 7

# Conclusiones

Realizamos una reducción por simetría de la Relatividad General clásica reformulada en las variables de Ashtekar-Barbero reales, encontrando las conexiones y las tríadas adaptadas a la simetría. La teoría reducida resulta tener el mismo número de grados de libertad locales. Los vínculos y las ecuaciones de movimiento toman una forma análoga a los de la teoría completa. Verificamos, usando un Ansatz adecuado, que las soluciones de Kerr, Schwarzschild y Minkowski satisfacen dichas ecuaciones. Para cuantizar esta teoría consideramos primero funciones cilíndricas basadas en grafos resultantes de la unión de un grafo contenido en una 2-superficie  $\sigma$  perpendicular al vector de Killing espacial y trayectorias cerradas en la dirección del mismo. Para imponer la invariancia bajo transformaciones de gauge construimos estados de spin-networks recurriendo al uso de intertwiners. Los difeomorfismos espaciales en  $\sigma$  se imponen de forma análoga a la teoría completa realizando un promediado en el grupo, mientras que para imponer los difeomorfismos en la dirección del vector de Killing, basta con considerar dos 2-superficies perpendiculares al mismo como equivalentes si estas están relacionadas por una de estas transformaciones. Definimos la acción de operadores cinemáticos correspondientes al área de una superficie y al volumen de una región espacial. Con estos resultados procedimos a cuantizar el vínculo Hamiltoniano siguiendo la construcción de Thiemann, verificando la consistencia cilíndrica del operador resultante, su covariancia por difeomorfismos y la ausencia de anomalías. El operador Hamiltoniano en el caso axisimétrico se puede separar en dos partes: una de ellas actúa de forma análoga al operador obtenido por Thiemann, mientras que la otra no tiene un análogo en la teoría completa, lo cual está basado en el hecho de que las trayectorias permitidas en la teoría axisimétrica están contenidas en una 2-superficie perpendicular al vector de Killing o en la dirección del mismo. Los elementos de matriz del Hamiltoniano fueron calculados explícitamente usando técnicas de cálculo de recoupling gráficas, se consideró en particular la acción del operador sobre el vértice no trivial más simple posible, un vértice cuatrivalente. El cálculo es más complejo que en el caso de la teoría completa, en donde el vértice no trivial más simple posible es trivalente. Concluimos el trabajo estudiando el Kernel del vínculo Hamiltoniano, buscando soluciones al mismo en el dual del espacio de Hilbert. La teoría axisimétrica presenta un paralelismo notable con la teoría completa. La reducción por simetría no reduce la complejidad de la misma, de hecho la acción del vínculo Hamiltoniano es más compleja. Este

paralelismo parece sugerir que la inclusión de materia se puede implementar al igual que en la teoría completa sin introducir anomalías, mientras que en el caso esféricamente simétrico no hay aún una forma conocida de incluir materia sin alterar el álgebra de los vínculos [22], así como tampoco hay una forma conocida de implementar el Hamiltoniano de Thiemann. Un posible trabajo a futuro entonces es estudiar la inclusión de materia en Gravedad Cuántica en  $2 + 1$  dimensiones utilizando lo aprendido al trabajar en el caso de  $3 + 1$  dimensiones reducido por simetría.

Finalmente, durante el desarrollo de este trabajo surgió el interés en poder describir el agujero negro de Kerr en términos de las variables de Ashtekar. Se desean estudiar en particular dos posibilidades: Expresar las condiciones del teorema de Robinson en términos de condiciones para las variables canónicas. Por otro lado, según el teorema de Mars-Simon (ver por ejemplo [49] y [50]), dado un espaciotiempo, este corresponde al agujero negro de Kerr sí y sólo sí una cantidad geométrica llamada tensor de Mars-Simon se anula idénticamente. Igualar a cero el tensor de Mars-Simon correspondiente a un espacio axisimétrico genérico podría dar lugar a condiciones sobre las variables canónicas que permitan caracterizar el agujero negro de Kerr dentro del espacio de las métricas axisimétricas.

Es importante notar que mientras que la Relatividad General reducida por simetría axial tiene dos grados de libertad locales (al igual que la teoría completa), el agujero negro de Kerr tiene dos grados de libertad globales (masa y momento angular), por lo que para obtener el mismo a partir de un espacio axisimétrico genérico es posible que haya que recurrir a la descomposición modal de los vínculos de la teoría.

## Apéndice A

# Soluciones particulares a las ecuaciones de movimiento

Las ecuaciones Einstein en términos de las variables de Ashtekar reducidas por simetría se obtienen tomando el corchete de Poisson de las variables canónicas con el Hamiltoniano total:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_a^i(\vec{x}), h_T\} &= \left\{ \mathbf{e}_a^i(\vec{x}), g(\vec{\lambda}) + d(\vec{N}) + h_E(N) + h_L(N) \right\} \\ \{\mathbf{a}_a^i(\vec{x}), h_T\} &= \left\{ \mathbf{a}_a^i(\vec{x}), g(\vec{\lambda}) + d(\vec{N}) + h_E(N) + h_L(N) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Los corchetes de Poisson de las variables canónicas con los vínculos están dados por:

$$\{\mathbf{e}_i^a(\vec{x}), g(\vec{\lambda})\} = (\epsilon_{ijk}\lambda^j \mathbf{e}_k^a)|_{\vec{x}} \quad (\text{A.2})$$

$$\{\mathbf{a}_a^i(\vec{x}), g(\vec{\lambda})\} = (-\lambda_{,a}^i + \epsilon_{ijk}\lambda^j \mathbf{a}_a^k + \epsilon_{ijk}\lambda^j \delta_3^k \delta_a^\phi)|_{\vec{x}}. \quad (\text{A.3})$$

$$\{\mathbf{e}_i^a(\vec{x}), d(\vec{N})\} = \left( (N^b \mathbf{e}_i^a)_{,b} - \mathbf{e}_i^b N_{,b}^a - \epsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^k \mathbf{e}_j^a \right)|_{\vec{x}} \quad (\text{A.4})$$

$$\{\mathbf{a}_a^i(\vec{x}), d(\vec{N})\} = \left( \mathbf{a}_b^i N_{,a}^b + N^b \mathbf{a}_{a,b}^i + \epsilon_{ijk} N^d \delta_d^\phi \delta_3^j \mathbf{a}_a^k \right)|_{\vec{x}}. \quad (\text{A.5})$$

$$\{\mathbf{e}_i^a(\vec{x}), h_E(N)\} = -\frac{\beta}{2} \left[ 2 \left( \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^a \right)_{,b} - 2 \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \epsilon_{ilm} \epsilon_{mjk} \mathbf{a}_b^l \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b - 2 \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) \right] \Big|_{\vec{x}} \quad (\text{A.6})$$

$$\{\mathbf{e}_i^a(\vec{x}), h_L(N)\} = \frac{\beta}{2} \left( \frac{2}{\beta} (1 + \beta^2) \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \epsilon_{ilm} \epsilon_{jkm} \mathbf{k}_b^l \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^a \right) \Big|_{\vec{x}} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{a}_a^i(\vec{x}), h_E(N)\} = & -\frac{\beta}{2} \left[ -\frac{N}{2} \mathbf{C}_E \mathbf{e}_a^i + 2 \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \epsilon_{ijk} \mathbf{F}_{ab}^k \mathbf{e}_j^b \right. \\ & \left. + \frac{2N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \left( \delta_3^j \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_j^b + \delta_3^i \delta_a^\phi \mathbf{a}_b^j \mathbf{e}_j^b - \delta_3^j \delta_a^\phi \mathbf{a}_b^i \mathbf{e}_j^b - \delta_3^i \delta_b^\phi \mathbf{a}_a^j \mathbf{e}_j^b \right) \right] \Big|_{\vec{x}}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

$$\{\mathbf{a}_a^i(\vec{x}), h_L(N)\} = -\frac{\beta}{2} \left\{ -\frac{N}{2} \mathbf{C}_L \mathbf{e}_a^i - 2(1 + \beta^2) \frac{N}{\sqrt{\mathbf{e}}} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \mathbf{k}_a^l \mathbf{k}_b^m \mathbf{e}_j^b \right. \quad (\text{A.9})$$

$$\left. + \frac{1}{\beta} (1 + \beta^2) \left( \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_a^m - \frac{1}{2} \epsilon_{mjk} \mathbf{e}_a^i \right) \mathbf{e}_j^b \mathbf{e}_k^c \left[ {}^e D_b \left( \frac{N \mathbf{k}_c^m}{\sqrt{\mathbf{e}}} \right) - {}^e D_c \left( \frac{N \mathbf{k}_b^m}{\sqrt{\mathbf{e}}} \right) \right] \right\} \Big|_{\vec{x}}. \quad (\text{A.10})$$

Siendo

$$\mathbf{F}_{ab}^i = \mathbf{a}_{b,a}^i - \mathbf{a}_{a,b}^i + \epsilon_{ilm} \mathbf{a}_a^l \mathbf{a}_b^m. \quad (\text{A.11})$$

$$\mathbf{C}_E = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} \left[ \mathbf{F}_{ab}^i \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b + 2 \delta_3^j \delta_b^\phi (\mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^a \mathbf{e}_j^b - \mathbf{a}_a^i \mathbf{e}_i^b \mathbf{e}_j^a) \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{C}_L = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} (1 + \beta^2) \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} \mathbf{e}_j^a \mathbf{e}_k^b \mathbf{k}_a^l \mathbf{k}_b^m, \quad (\text{A.13})$$

Utilizando el software *Mathematica* se verificó que este sistema de ecuaciones admite a la solución de Kerr. En las coordenadas esféricas usuales  $(r, \theta, \phi)$ , el siguiente Ansatz para la tríada da como resultado la métrica de Kerr en las

coordenadas de Boyer-Lindquist:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1^r &= 0 \\
\mathbf{e}_2^r &= 0 \\
\mathbf{e}_3^r &= \sin \theta \sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + a^2 r r_s \sin^2 \theta}, \\
\mathbf{e}_1^\theta &= \frac{\sin \theta \sqrt{(r^2 + a^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta) + a^2 r r_s \sin^2 \theta}}{\sqrt{a^2 + r^2 - r r_s}}, \\
\mathbf{e}_2^\theta &= 0 \\
\mathbf{e}_3^\theta &= 0 \\
\mathbf{e}_1^\phi &= 0 \\
\mathbf{e}_2^\phi &= \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}{a^2 + r^2 - r r_s}, \\
\mathbf{e}_3^\phi &= 0
\end{aligned}$$

Siendo  $a = J/r_s$ , con  $J$  el momento angular total del agujero negro y  $r_s$  el radio de Schwarzschild. Las componentes de la conexión se puede obtener a partir de la conexión de spin y de la curvatura extrínseca:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_r^1 &= \frac{-2ar_s\beta(r^2 + a^2 \cos^2(\theta))(a^4 - 3a^2r^2 - 6r^4 + a^2(a - r)(a + r) \cos(2\theta)) \sin(\theta)}{(a^2 + r(r - r_s))^{1/2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))^2(a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))} \\
&\quad + \frac{a^2 \sin(2\theta)}{(a^2 + r(r - r_s))^{1/2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))}, \\
\mathbf{a}_r^2 &= 0, \\
\mathbf{a}_r^3 &= 0, \\
\mathbf{a}_\theta^1 &= \frac{r(a^2 + r(r - r_s))^{1/2}}{r^2 + a^2 \cos^2(\theta)} \\
&\quad - \frac{8a^3r(a^2 + r(r - r_s))^{1/2}r_s\beta \cos(\theta)(r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) \sin^2(\theta)}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))^2(a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))}, \\
\mathbf{a}_\theta^2 &= 0, \\
\mathbf{a}_\theta^3 &= 0, \\
\mathbf{a}_\phi^1 &= 0, \\
\mathbf{a}_\phi^2 &= \frac{(16r^5 + 4a^2r^2(4r - r_s) + a^4(6r + r_s) + 4a^2r(2a^2 + r(4r + r_s)) \cos(2\theta) + a^4(2r - r_s) \cos(4\theta)) \sin(\theta)}{8\sqrt{2}(r^2 + a^2 \cos^2(\theta))^2 \left( \frac{a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s)}{a^2 + r(r - r_s)} + a^2 \cos(2\theta) \right)^{1/2}} \\
&\quad + \frac{8a^3rr_s\beta \cos(\theta) \sin^3(\theta)((a^2 + r(r - r_s))((a^2 + r^2)(r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) + a^2rr_s \sin^2(\theta)))^{1/2}}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))^2(a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))}, \\
\mathbf{a}_\phi^3 &= \frac{2(a^2(a^2 + r(r - r_s))((5a^2 + 8r^2) \cos(3\theta) + a^2 \cos(5\theta)))}{2\sqrt{2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))^2(a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))^{1/2}} \\
&\quad + \frac{2(5a^6 + 8r^6 + 4a^2r^3(5r + r_s) + a^4r(17r + 3r_s)) \cos(\theta)}{2\sqrt{2}(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))^2(a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))^{1/2}} \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}ar_s\beta(-a^4 + 3a^2r^2 + 6r^4 + a^2(-a^2 + r^2) \cos(2\theta)) \sin^2(\theta)}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))^2(a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))^{1/2}}.
\end{aligned}$$

Resolviendo para los multiplicadores de Lagrange, obtenemos los siguientes resultados para el lapso y el shift:

$$N = \sqrt{\frac{(a^2 + r(r - r_s))(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))}{2(a^2 + r^2)(r^2 + a^2 \cos^2 \theta + 2a^2 r r_s \sin^2 \theta)}}, \quad (\text{A.14})$$

$$N_\phi = -\frac{r r_s a \sin^2 \theta}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad N_r = 0, \quad N_\theta = 0, \quad (\text{A.15})$$

Los multiplicadores de Lagrange del vínculo de Gauss:

$$\lambda^1 = 0,$$

$$\lambda^2 = \frac{\sqrt{2}a\sqrt{a^2 + r(r - r_s)}r_s(a^4 - 3a^2r^2 - 6r^4 + 4ar(a^2 + r^2)\beta \cos(\theta) + a^2(a^2 - r^2) \cos(2\theta)) \sin(\theta)}{((a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))(a^4 + 2r^4 + a^2r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta)))^{3/2}},$$

$$\begin{aligned} \lambda^3 = & \left( \frac{a^2 + r(r - r_s)}{(a^2 + r^2)(r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) + a^2 r r_s \sin^2(\theta)} \right)^{1/2} \left\{ \frac{(2r - r_s) \sin(\theta)}{(a^2 + r(r - r_s))^{1/2}} \right. \\ & + \frac{8a^3 r (a^2 + r(r - r_s))^{1/2} r_s (1 + \beta^2) \cos(\theta) \sin^3(\theta)}{\beta (a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))(a^4 + 2r^4 + a^2 r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))} \\ & - \left[ \frac{4(r^2 + a^2 \cos^2(\theta))((a^2 + r^2)(r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) + a^2 r r_s (\sin(\theta))^2)^{1/2}}{a^4 + 2r^4 + a^2 r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta)} \right. \\ & \left. \left( \frac{(16r^5 + 4a^2 r^2(4r - r_s) + a^4(6r + r_s) + 4a^2 r(2a^2 + r(4r + r_s)) \cos(2\theta) + a^4(2r - r_s) \cos(4\theta)) \sin(\theta)}{8\sqrt{2}(r^2 + a^2 \cos^2(\theta))^2 \left( \frac{a^4 + 2r^4 + a^2 r(3r + r_s)}{a^2 + r(r - r_s)} + a^2 \cos(2\theta) \right)^{1/2}} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{8a^3 r r_s \beta \cos(\theta) \sin^3(\theta) ((a^2 + r(r - r_s))((a^2 + r^2)(r^2 + a^2 \cos^2(\theta)) + a^2 r r_s \sin^2(\theta)))^{1/2}}{(a^2 + 2r^2 + a^2 \cos(2\theta))^2 (a^4 + 2r^4 + a^2 r(3r + r_s) + a^2(a^2 + r(r - r_s)) \cos(2\theta))} \right) \right\}. \end{aligned}$$

## Apéndice B

# Elementos de matriz del operador $\hat{W}$

En el capítulo de Cinemática obtuvimos la siguiente expresión para el operador Volumen de LQG asociado a una región espacial  $R$ :

$$\hat{V}_R = \kappa_0 \sum_{x \in R} \sqrt{|\hat{q}_x|} \quad (\text{B.1})$$

Siendo  $q_x$

$$\hat{q}_x = \frac{1}{48} \sum_{[e_I], [e_J], [e_K]} \varepsilon_{ijk} \epsilon(e_1, e_2, e_3) J_{x, e_I}^i J_{x, e_J}^j J_{x, e_K}^k \quad (\text{B.2})$$

Al aplicar este operador a una función cilíndrica  $f$  basada en un grafo  $\gamma$ , contribuirán a esta suma únicamente los vértices  $v \in \gamma$  al menos trivalentes y tales que sus aristas adyacentes no son coplanares:

$$\hat{V}_R f = \kappa_0 \sum_{v \in \gamma} \sqrt{|\hat{q}_v|} f \quad (\text{B.3})$$

Recordar del capítulo de Cinemática que la acción del operador  $J_{x,e}^i$  sobre una holonomía  $H(A, e)$  tal que  $x$  es el origen de  $e$  está dada por:

$$J_{x,e}^i H(A, e) = iX_e^i H(A, e) = iH(A, e)\tau^i \quad (\text{B.4})$$

Gráficamente, esto se puede expresar de la siguiente manera:

(B.5)

Luego, usando la identidad:

(B.6)

Se obtiene el siguiente resultado

(B.7)



### B.2 Vértice cuativalente

Si el vértice es cuativalente, se puede descomponer en términos de vértices trivalentes:

$$\begin{array}{c} q \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ p \end{array} \begin{array}{c} r \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ s \end{array} = \sum_i \begin{array}{c} q \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ p \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} r \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ s \end{array} \tag{B.12}$$

El operador de grasp modifica la valencia de la arista virtual:

$$\hat{W}_{[pqr]}^{(4)} \begin{array}{c} q \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ p \end{array} \begin{array}{c} r \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ s \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} = \sum_j \left( W_{[pqr]}^{(4)} \right)_i^j \begin{array}{c} q \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ p \end{array} \begin{array}{c} r \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ s \end{array} \begin{array}{c} j \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \tag{B.13}$$

Los elementos de matriz  $\left( W_{[pqr]}^{(4)} \right)_i^j$  se pueden calcular de forma gráfica usando la identidad (B.7), primero, tenemos que:

$$\begin{array}{c} q \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ p \end{array} \begin{array}{c} r \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ s \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} = \sum_{i_2} \left\{ \begin{array}{c} i \quad p \quad q \\ 2 \quad q \quad i_2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} q \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ p \end{array} \begin{array}{c} r \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ s \end{array} \begin{array}{c} i \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ q \end{array} \tag{B.14}$$

Donde se usó que

$$\begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i \end{array} \begin{array}{c} q \\ \text{---} \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ q \end{array} = \sum_{i_2} \left\{ \begin{array}{c} i \quad p \quad q \\ 2 \quad q \quad i_2 \end{array} \right\} \begin{array}{c} p \\ \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \\ i_2 \end{array} \begin{array}{c} 2 \\ \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \\ q \end{array} \tag{B.15}$$

Luego, usando nuevamente el teorema de recoupling:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram (left)} = \sum_j \left\{ \begin{matrix} s & i & r \\ 2 & 2 & j \end{matrix} \right\} \text{Diagram (right)} \\
 & \hspace{15em} \text{(B.16)}
 \end{aligned}$$

Procediendo de forma similar, tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \text{Diagram (left)} = \sum_{i_3} \left\{ \begin{matrix} i_2 & q & i \\ j & 2 & i_3 \end{matrix} \right\} \lambda_i^{2j} \text{Diagram (middle)} \\
 & = \sum_{i_3} \left\{ \begin{matrix} i_2 & q & i \\ j & 2 & i_3 \end{matrix} \right\} \lambda_i^{2j} \lambda_{i_2}^{i_3 2} \text{Diagram (bottom)} \\
 & = \sum_{i_3} \left\{ \begin{matrix} i_2 & q & i \\ j & 2 & i_3 \end{matrix} \right\} \lambda_i^{2j} \lambda_{i_2}^{i_3 2} \\
 & \quad \text{Tet}[i_3, i_2, p, 2, 2, 2] \\
 & \hspace{15em} \text{(B.17)}
 \end{aligned}$$

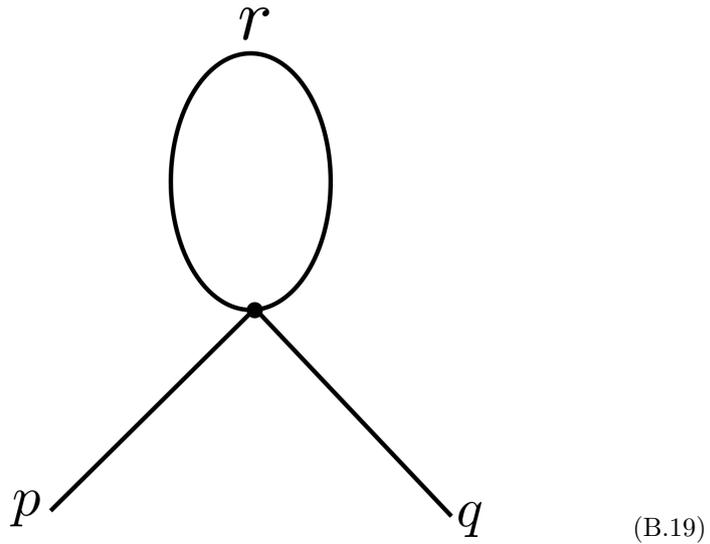
Juntando estos resultados, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \left( \hat{W}_{[pqr]}^{(4)} \right)_i^j &= \frac{pqr}{2} \sum_{i_2, i_3} \left\{ \begin{matrix} i_2 & q & i \\ j & 2 & i_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i & p & q \\ 2 & q & i_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} s & i & r \\ 2 & 2 & j \end{matrix} \right\} \\
 & \quad \lambda_i^{2j} \lambda_{i_2}^{i_3 2} \text{Tet}[i_3, i_2, p, 2, 2, 2] \\
 & \hspace{15em} \text{(B.18)}
 \end{aligned}$$

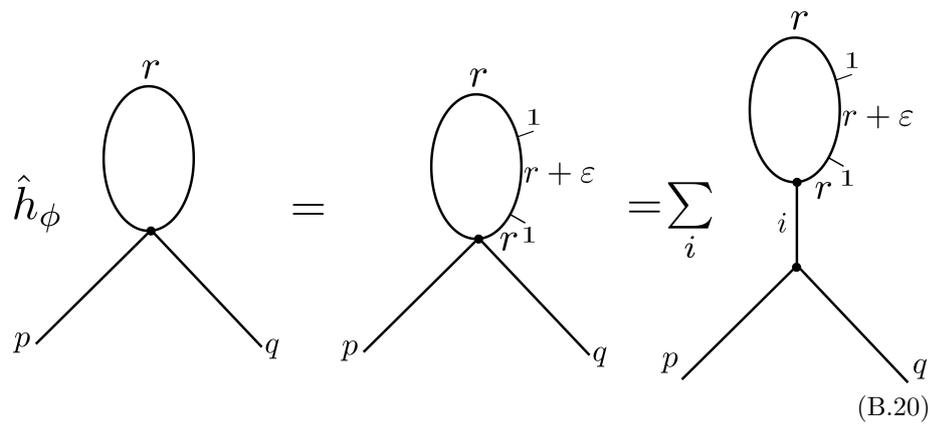
Los coeficientes  $\left( \hat{W}_{[pqs]}^{(4)} \right)_i^j$  se pueden hallar de forma completamente análoga (basta con intercambiar  $r \leftrightarrow s$  en el resultado anterior).

### B.3 Vértice cuativalente no invariante gauge en teoría axisimétrica

Dado un vértice cuativalente invariante gauge de la siguiente forma:



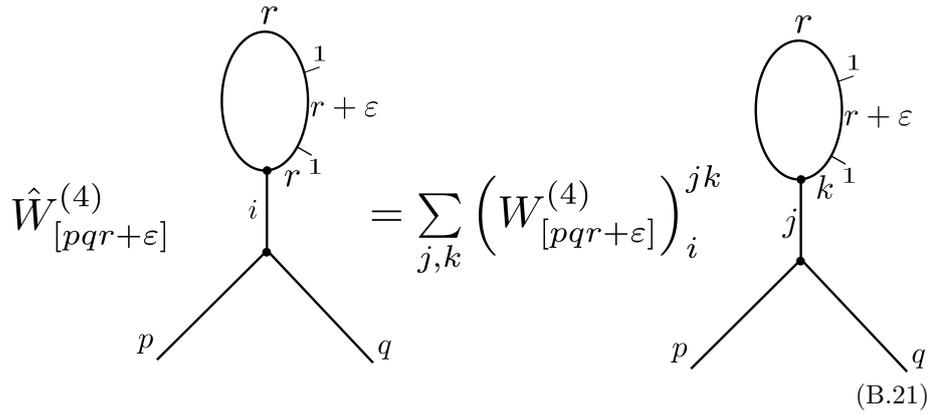
Al actuar sobre este con una holonomía en la dirección del vector de Killing (la cual denotaremos por  $\hat{h}_\phi$ , podemos representar el resultado (no invariante gauge) gráficamente usando la identidad (6.9) :



Al actuar con el operador Volumen sobre (B.20), tendremos únicamente la contribución de  $\hat{W}_{[pqr+\epsilon]}^{(4)}$ . La acción de este operador sobre (B.20) modifica valencias

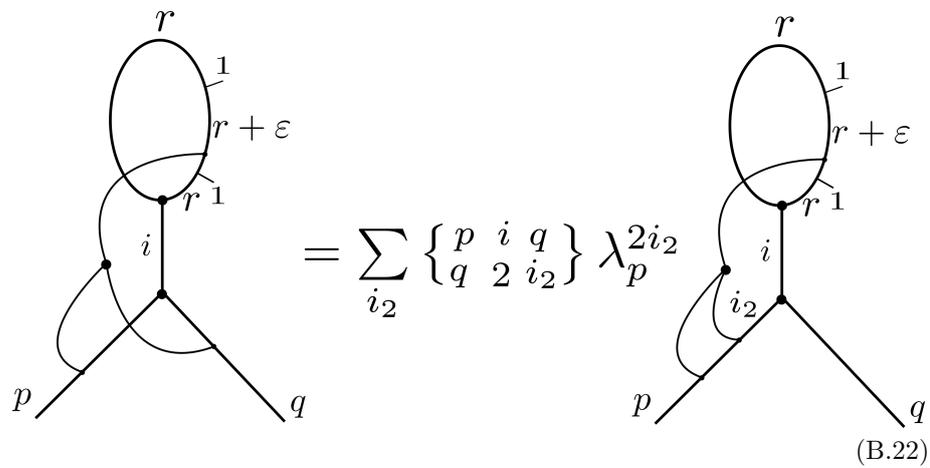
B.3. VÉRTICE CUATRIVALENTE NO INVARIANTE GAUGE EN TEORÍA AXISIMÉTRICA 181

de aristas virtuales adyacentes al vértice:

$$\hat{W}_{[pqr+\varepsilon]}^{(4)} = \sum_{j,k} \left( W_{[pqr+\varepsilon]}^{(4)} \right)_i^{jk}$$


(B.21)

Los coeficientes  $\left( W_{[pqr+\varepsilon]}^{(4)} \right)_i^{jk}$  se obtienen de forma análoga al caso anterior. Primero, tenemos

$$= \sum_{i_2} \left\{ \begin{matrix} p & i & q \\ q & 2 & i_2 \end{matrix} \right\} \lambda_p^{2i_2}$$


(B.22)

Luego, procediendo de forma similar:

$$\begin{aligned}
 &= \sum_k \left\{ \begin{matrix} 1 & r & r+\varepsilon \\ 2 & r+\varepsilon & k \end{matrix} \right\} \lambda_r^{2k} \\
 &= \sum_k \left\{ \begin{matrix} 1 & r & r+\varepsilon \\ 2 & r+\varepsilon & k \end{matrix} \right\} \lambda_r^{2k} \sum_j \left\{ \begin{matrix} i & r & r \\ k & 2 & j \end{matrix} \right\} \lambda_i^{2j} \\
 &= \sum_k \left\{ \begin{matrix} 1 & r & r+\varepsilon \\ 2 & r+\varepsilon & k \end{matrix} \right\} \lambda_r^{2k} \sum_j \left\{ \begin{matrix} i & r & r \\ k & 2 & j \end{matrix} \right\} \lambda_i^{2j} \sum_{i_3} \left\{ \begin{matrix} q & p & j \\ 2 & j & i_3 \end{matrix} \right\}
 \end{aligned}$$

(B.23)

Finalmente

$$= \text{Tet}[i_3, i_2, p, 2, 2, 2]$$

(B.24)

Juntando estos resultados, tenemos:

$$\left( W_{[pqr+\varepsilon]}^{(4)} \right)_i^{jk} = \sum_{i_2, i_3} \frac{pq(r+\varepsilon)}{2} \left\{ \begin{matrix} p & i & q \\ q & 2 & i_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} i & r & r \\ k & 2 & j \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} q & p & j \\ 2 & j & i_3 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 1 & r & r+\varepsilon \\ 2 & r+\varepsilon & k \end{matrix} \right\} \lambda_r^{2k} \lambda_p^{2i_2} \lambda_i^{2j} \\ \text{Tet}[i_3, i_2, p, 2, 2, 2]$$

(B.25)



## Apéndice C

# Elementos de teoría de grupos

En este apéndice se recopilan algunas definiciones y resultados básicos de teoría de grupos. La principal fuente del mismo es el libro de Baez y Muniain [14].

Definimos un grupo  $G$  como un conjunto equipado con una operación binaria  $\cdot : G \times G \rightarrow G$  (llamada usualmente *producto*), una operación  $^{-1} : G \rightarrow G$ , llamada inversa, y un elemento  $1 \in G$  llamando identidad, tal que  $\forall g, h, k \in G$  se cumple:

1.  $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$
2.  $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$
3.  $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$

Un subgrupo de  $G$  es un subconjunto que contiene la identidad y es cerrado bajo producto e inversa.

Algunos ejemplos de grupos son los siguientes:

1.  $GL(n, \mathbb{R})$  : Matrices reales  $n \times n$  invertibles.
2.  $GL(n, \mathbb{C})$  : Matrices complejas  $n \times n$  invertibles.
3.  $SL(n, \mathbb{R})$  : Matrices reales  $n \times n$  invertibles de determinante 1.
4.  $SL(n, \mathbb{C})$  : Matrices complejas  $n \times n$  invertibles de determinante 1.
5.  $O(p, q)$ : Matrices reales  $n \times n$  que preservan el producto interno entre dos vectores en un espacio real equipado con una métrica  $g$  con signatura  $(p, q)$ , con  $p$  y  $q$  enteros no negativos tales que  $p+q = n$ . Es decir, si  $T \in O(p, q)$ , entonces  $g(Tv, Tw) = g(v, w) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^n$ . Si  $p = n$ , llamamos al grupo simplemente  $O(n)$
6.  $SO(p, q)$ : Matrices de  $O(p, q)$  con determinante 1. Si  $p = n$ , análogamente al caso anterior llamamos al grupo  $SO(n)$ . Obs:  $SO(3, 1)$  es el grupo de matrices de determinante 1 que preservan el producto interno en el espacio de Minkowski (Grupo de Lorentz).

7.  $U(n)$ : Matrices complejas unitarias de  $n \times n$ . Preservan el producto interno usual en  $\mathbb{C}^n : \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{v}^i w^i$ .

8.  $SU(n)$ : Matrices de  $U(n)$  con determinante 1.

**Homeomorfismos.** Dados dos grupos  $G$  y  $H$ , decimos que una función  $\rho : G \rightarrow H$  es un *homeomorfismo* si

$$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G \quad (\text{C.1})$$

Esta definición implica

$$\begin{aligned} \rho(1) &= 1 \\ \rho(g^{-1}) &= \rho(g)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Lo cual puede verificarse fácilmente. Primero, en todo grupo el elemento identidad es único. Si suponemos que hay dos elementos  $e$  y  $k$  en el grupo con la propiedad del elemento identidad, tenemos:

$$e = ek = k \quad (\text{C.3})$$

Entonces, usando la definición de homeomorfismo entre grupos:

$$\rho(g) \rho(1) = \rho(g1) = \rho(g) \quad (\text{C.4})$$

Verificando la primer igualdad. Luego, para cada elemento del grupo hay sólo un elemento del grupo con la propiedad de la inversa. Si suponemos que  $g \in G$  tiene dos inversos  $g^{-1}$ ,  $\tilde{g}^{-1}$  en  $G$ , entonces:

$$gg^{-1} = g\tilde{g}^{-1} \xrightarrow{\times g^{-1}} g^{-1} = \tilde{g}^{-1} \quad (\text{C.5})$$

Entonces:

$$1 = \rho(gg^{-1}) = \rho(g)\rho(g^{-1}) \quad (\text{C.6})$$

Con lo que se verifica la segunda de las igualdades.

**Isomorfismo.** Un isomorfismo entre grupos es un homeomorfismo inyectivo y sobreyectivo.

Ejemplo: El grupo  $U(1) = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$  actúa sobre las matrices  $1 \times 1$  complejas, esto es, sobre los números complejos. Un elemento  $e^{i\theta}$  actúa sobre un número complejo rotándolo un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario. La acción consecutiva de dos elementos de este grupo verifica:  $e^{i\theta}e^{i\phi} = e^{i(\theta+\phi)}$ . Por otro lado, un elemento del grupo  $SO(2)$ :

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

Actúa en un vector de  $\mathbb{R}^2$  rotándolo un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario. La acción consecutiva de dos elementos de este grupo:  $M(\theta)M(\phi) = M(\theta + \phi)$ . Se puede verificar fácilmente que:

$$\rho(e^{i\theta}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Es un isomorfismo entre  $U(1)$  y  $SO(2)$ .

**Representaciones.** Decimos que un grupo  $G$  actúa en un espacio vectorial  $V$  si hay un mapa  $\rho$  de  $G$  a las transformaciones lineales  $GL(V)$  de  $V$  tal que:

$$\rho(g_1 g_2)v = \rho(g_1)\rho(g_2)v \quad \forall v \in V, \forall g_1, g_2 \in G \quad (\text{C.9})$$

Decimos en este caso que  $\rho$  es una **representación** de  $G$  en  $V$ .

**Subespacio invariante.** Un subespacio  $V'$  de un espacio vectorial  $V$  es invariante si  $v \in V'$  entonces  $\rho(g)v \in V' \quad \forall g \in G$

**Representación irreducible.** Si una representación  $\rho$  tiene como espacios invariantes únicamente al vector nulo y al espacio vectorial, entonces decimos que  $\rho$  es irreducible.

**Representaciones equivalentes.** Si tenemos dos representaciones de un grupo en dos espacios vectoriales:

$$\rho : G \rightarrow GL(V) \quad \rho' : G \rightarrow GL(V') \quad (\text{C.10})$$

Decimos que las representaciones son equivalentes si hay un mapa lineal  $T : V \rightarrow V'$  tal que:

$$\rho'(g)T = T\rho(g) \quad (\text{C.11})$$

**Suma directa de representaciones.** Si tenemos dos representaciones de un grupo  $G : \rho : G \rightarrow GL(V), \rho' : G \rightarrow GL(V')$  Definimos  $\rho \oplus \rho'$  como la representación en  $G$  en el espacio  $V \oplus V'$  dada por:

$$(\rho \oplus \rho')(g)(v, v') = (\rho(g)v, \rho'(g)v') \quad \forall v \in V, v' \in V' \quad (\text{C.12})$$

**Producto tensorial de representaciones.** Sean  $\rho$  y  $\rho'$  representaciones en  $V$  y  $V'$  respectivamente. Definimos el producto tensorial de dichas representaciones  $\rho \otimes \rho'$  como la representación de  $G$  en el espacio  $V \otimes V'$  dada por:

$$(\rho \otimes \rho')(g)(v \otimes v') = \rho(g)v \otimes \rho'(g)v' \quad (\text{C.13})$$

**Grupo de Lie.** Decimos que un grupo  $G$  es un *grupo de Lie* si es una variedad, y las operaciones producto e inversa son mapas suaves. **Observación:** Los grupos matriciales definidos anteriormente son subvariedades del espacio de las matrices  $n \times n$  (reales o complejas según corresponda). Usando las fórmulas explícitas se puede ver además que las operaciones producto e inversa son suaves. Los grupos matriciales anteriormente mencionados son entonces grupos de Lie. Ya vimos el caso particular del grupo  $U(1)$  :

$$U(1) = \{e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}$$

Este grupo es equivalente al círculo unidad en el plano complejo. Veamos ahora en detalle el caso del grupo  $SU(2)$ . Este grupo está formado por las matrices complejas unitarias  $2 \times 2$  con determinante 1:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \quad (\text{C.14})$$

Los elementos de  $SU(2)$  se pueden escribir como combinación lineal de las siguientes matrices:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.15})$$

O equivalentemente:

$$\mathbb{I}, \quad I = -i\sigma_1, \quad J = -i\sigma_2, \quad K = -i\sigma_3 \quad (\text{C.16})$$

Al álgebra:

$$\mathbb{H} = \{a + bI + cJ + dK : a, b, c, d \in \mathbb{R}\} \quad (\text{C.17})$$

Se la denomina *cuaterniones*. La relación entre los cuaterniones y  $SU(2)$  es la siguiente:

$$SU(2) = \{a + bI + cJ + dK : a, b, c, d \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\} \quad (\text{C.18})$$

En otras palabras, el grupo  $SU(2)$  corresponde a la esfera  $S^3$  en los cuaterniones.

**Representación de  $SU(2)$ .** Para cada número semientero  $j$ , el grupo  $SU(2)$  tiene una representación de dimensión  $2j + 1$  a la cual se la denomina representación de spin  $j$ . Definimos la representación de spin  $j$  de  $SU(2)$  a la cual llamaremos  $U_j$  de la siguiente manera: Sea  $\mathcal{H}_j$  el espacio de los polinomios de  $\mathbb{C}^2$  homogéneos de grado  $2j$ , es decir, una combinación lineal de polinomios del tipo:

$$f(x, y) = x^p y^q \quad x, y \in \mathbb{C}, \quad p + q = 2j$$

Observación:  $\mathcal{H}_j$  tiene dimensión  $2j + 1$ . Dado un elemento  $g \in SU(2)$ , sea  $U_j(g)$  la transformación lineal de  $\mathcal{H}_j$  dada por:

$$(U_j(g)f)(v) = f(g^{-1}v)$$

Puede verificarse que esta se trata de una representación:  $U_j(1)$  es la identidad, y además, para  $g, h \in SU(2)$  tenemos

$$\begin{aligned} (U_j(g)U_j(h)f)(v) &= (U_j(h)f)(g^{-1}v) = f(h^{-1}g^{-1}v) = f((gh)^{-1}v) \\ &= (U_j(gh)f)(v) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

**Álgebras de Lie.** Sea  $G$  un grupo de Lie. Definimos el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  como el espacio tangente de  $G$  en el elemento identidad. Ejemplo: Sea  $\gamma$  un camino en  $SO(3)$  tal que  $\gamma(t)$  corresponde a una rotación antihoraria de ángulo  $t$  alrededor del eje  $z$ :

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.20})$$

Entonces, el vector tangente a  $\gamma$  en el elemento identidad:

$$\gamma'(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.21})$$

Podemos recuperar el elemento del grupo a partir de este elemento del álgebra de Lie de la siguiente manera:

$$\exp(t\gamma'(0)) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.22})$$

De forma más general, se puede probar que para todo grupo de Lie  $G$  hay un mapa suave llamado *mapa exponencial*:

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G \quad (\text{C.23})$$

Unívocamente determinado por las siguientes propiedades:

- $\exp(0)$  es el elemento identidad de  $G$
- $\exp(sx)\exp(tx) = \exp((s+t)x) \quad \forall x \in \mathfrak{g}, s, t \in \mathbb{R}$
- $\left. \frac{d}{dt} \exp(tx) \right|_{t=0} = x$

Podemos definir un álgebra de Lie de manera más abstracta como un espacio vectorial  $\mathfrak{g}$  equipado con un mapa  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  llamado *bracket de Lie* que verifica las siguientes propiedades:

- $[v, w] = -[w, v] \quad \forall v, w \in \mathfrak{g}$
- $[u, \alpha v + \beta w] = \alpha[u, v] + \beta[u, w] \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}$  y escalares  $\alpha, \beta$ .
- Identidad de Jacobi:  $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0 \quad \forall u, v, w \in \mathfrak{g}$ .

**Homeomorfismos entre álgebras de Lie.** Decimos que  $f$  es un homeomorfismo entre dos álgebras de Lie  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$  si es un mapa lineal que verifica:

$$f([v, w]) = [f(v), f(w)] \quad \forall v, w \in \mathfrak{g} \quad (\text{C.24})$$

Si  $f$  es biyectiva decimos que es un isomorfismo entre  $\mathfrak{g}$  y  $\mathfrak{h}$ .



# Apéndice D

## Conexiones y fibrados

En este apéndice se reúnen definiciones y resultados básicos sobre fibrados, conexiones y curvatura. La principal fuente de este apartado es el libro de Baez y Muniain [14].

### D.1 Fibrados y conexiones

**Fibrados.** Un fibrado es una estructura que consiste en una variedad  $E$ , una variedad  $M$  y un mapa sobreyectivo  $\pi : E \rightarrow M$ . A la variedad  $E$  se la denomina *espacio total*, a la variedad  $M$  *espacio base*, y al mapa  $\pi$  *proyección*.

Para cada punto  $p \in M$ , el espacio

$$E_p = \{q \in E : \pi(q) = p\}$$

se lo denomina *fibra de  $q$  sobre  $p$* .

El espacio total se puede escribir como la unión de todas las fibras:

$$E = \bigcup_{p \in M} E_p$$

Por ejemplo, el espacio tangente de una variedad  $M$ , denotado por  $TM$  se puede escribir como:

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

La proyección  $\pi : TM \rightarrow M$  envía cada vector tangente  $v \in T_p M$  al punto  $p \in M$ . La fibra sobre el punto  $p \in M$  es entonces el espacio tangente  $T_p M$ . Se puede verificar que  $TM$  es efectivamente una variedad. Tanto  $M$  como  $T_p M$  son una variedad de dimensión  $n$ , por lo que localmente,  $TM$  “se parece” a  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Se pueden definir mapas para  $TM$  de la siguiente manera. Si  $\{U_\alpha\}$  es una cobertura para  $M$  y  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  un atlas, definimos:

$$V_\alpha = \{v \in TM : \pi(v) \in U_\alpha\}$$

Definimos entonces los mapas:  $\psi : V_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  de la siguiente manera:

$$\psi(v) = (\varphi_\alpha(\pi(v)), (\varphi_\alpha)_* v) \tag{D.1}$$

Con esta definición se verifican todas las propiedades que debe cumplir un atlas.

**Fibrados triviales.** Dadas dos variedades  $M$  y  $F$ , definimos un *fibrado trivial* sobre  $M$  con fibra estándar  $F$  al fibrado sobre  $M$  con espacio total  $E = M \times F$ . El mapa de proyección está dado por

$$\pi(p, f) = p \quad \forall (p, f) \in M \times F \quad (\text{D.2})$$

La fibra sobre un punto  $p \in M$  es

$$E_p = \{p\} \times F \quad (\text{D.3})$$

**Morfismos entre fibrados.** Supongamos que tenemos dos fibrados  $\pi : E \rightarrow M$ ,  $\pi' : E' \rightarrow M'$ , definimos un *morfismo* entre estos fibrados como un par de mapas  $\psi : E \rightarrow E'$ ,  $\phi : M \rightarrow M'$  tal que  $\psi$  mapea cada fibra  $E_p$  en  $E'_{\phi(p)}$ . Si tanto  $\psi$  como  $\phi$  son difeomorfismos, decimos que este morfismo es un *isomorfismo*.

**Restricción de un fibrado.** Dado un fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  y una subvariedad  $S \subseteq M$ , definimos la restricción de  $\pi$  a  $S$ :

$$E|_S = \{q \in E : \pi(q) \in S\} \quad (\text{D.4})$$

**Fibrados localmente triviales.** Decimos que el fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  es *localmente trivial* con fibra estándar  $F$  si para cada punto  $p \in M$  existe un entorno  $U$  de  $p$  y un isomorfismo

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times F \quad (\text{D.5})$$

enviando cada fibra  $E_p$  a  $\{p\} \times F$ . A  $\phi$  se lo denomina una *trivialización local*.

**Fibrados vectoriales.** Un fibrado vectorial real de dimensión  $n$  es un fibrado localmente trivial  $\pi : E \rightarrow M$  tal que cada fibra  $E_p$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Además, para cada punto  $p \in M$  hay un entorno  $U$  de  $p$  y una trivialización local

$$\phi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^n \quad (\text{D.6})$$

que mapea cada fibra  $E_q$  a  $\{q\} \times \mathbb{R}^n$  linealmente; por ejemplo, el fibrado tangente  $TM$  es el fibrado vectorial cuyo espacio total es la unión de todos los espacios tangentes de una variedad  $M$ :  $TM = \cup_{p \in M} T_p M$ . Se define el fibrado cotangente de manera análoga:  $T^*M = \cup_{p \in M} T_p^* M$ .

Un morfismo entre dos fibrados vectoriales  $\pi : E \rightarrow M$ ,  $\pi' : E' \rightarrow M'$  se define de forma análoga a como se define un morfismo entre fibrados en general, con la condición adicional de que la restricción del morfismo  $\psi : E \rightarrow E'$  a la fibra  $E_p$  sea lineal.

**Secciones.** Decimos que  $s$  es una sección de un fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  si es una función  $s : M \rightarrow E$  tal que para cada punto  $p \in M$  se tiene que

$$s(p) \in E_p \quad (\text{D.7})$$

Al conjunto de las secciones de  $E$  se le llama  $\Gamma(E)$ ; por ejemplo: Un campo vectorial en una variedad es una sección de su fibrado tangente.

Observación: Si  $E = M \times F$  es un fibrado trivial con fibra estándar  $F$  y tenemos una sección  $s : M \rightarrow E$ , entonces existe una función  $f : M \rightarrow F$  tal que

$$s(p) = (p, f(p)) \in E_p$$

Si por otro lado tenemos una función  $f : M \rightarrow F$ , la expresión anterior define una sección.

Dado un fibrado  $E$  sobre  $M$  y dadas  $s, s'$  secciones en  $E$ , definimos las secciones:

$$(s + s')(p) = s(p) + s'(p) \quad p \in M \quad (\text{D.8})$$

$$(fs)(p) = f(p)s(p) \quad p \in M \quad f \in C^\infty(M) \quad (\text{D.9})$$

Decimos que las secciones  $e_1, \dots, e_n$  son una base de  $\Gamma(E)$  si cualquier sección  $s \in \Gamma(E)$  se puede escribir como combinación lineal de las mismas.

$$s = s^i e_i \quad s^i \in C^\infty(M) \quad (\text{D.10})$$

Una base de secciones determina un isomorfismo entre fibrados vectoriales  $\psi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$ :

$$\psi(p, v) = v^i e_i(p) \quad p \in M, \quad v \in \mathbb{R}^n \quad (\text{D.11})$$

De manera recíproca, si tenemos un isomorfismo  $\psi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow E$  podemos usarlo para obtener una base de  $\Gamma(E)$  a partir de una base de  $\Gamma(M \times \mathbb{R}^n)$ .

**G-Fibrados.** Sea  $M$  una variedad de dimensión  $n$  y  $\{U_\alpha\}$  un conjunto de abiertos que cubren  $M$ . Sea  $V$  un espacio vectorial y  $\rho$  una representación de un grupo  $G$  en  $V$ . Formaremos un fibrado a partir de la unión de los fibrados triviales  $U_\alpha \times V$ :

$$\bigcup_\alpha U_\alpha \times V \quad (\text{D.12})$$

Sea  $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$  una función de transición. Identificamos dos puntos  $(p, v) \in U_\alpha \times V$  y  $(p, v') \in U_\beta \times V$  si

$$v = \rho(g_{\alpha\beta}(p))v' \quad (\text{D.13})$$

O de forma abreviada:

$$v = g_{\alpha\beta}(p)v' \quad (\text{D.14})$$

Observación: Las funciones de transición deben verificar ciertas condiciones de consistencia. Al punto  $(p, v) \in U_\alpha \times V$  debemos identificarlo con  $(p, g_{\alpha\alpha}v) \in U_\alpha \times V$ , por lo que la función de transformación debe cumplir:  $g_{\alpha\alpha} = 1$  en  $U_\alpha$ . Si un punto de la variedad pertenece a la intersección de tres cartas:  $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ , entonces se puede ver que debe cumplirse  $g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$  en  $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$ . Se puede además obtener una generalización análoga de esta condición para cuando el punto pertenece a la intersección de un número arbitrario de cartas.

Podemos ahora formar el fibrado  $\pi : E \rightarrow M$ . Denotaremos como  $[p, v]_\alpha$  al punto del espacio total  $E$  correspondiente a  $(p, v) \in U_\alpha \times V$ . Definimos la proyección  $\pi : E \rightarrow M$  como

$$\pi[p, v]_\alpha = p \quad (\text{D.15})$$

La fibra  $E_p$  es el conjunto de todos los puntos de la forma  $[p, v]_\alpha$ . Definiendo la función  $\varphi_\alpha : E \rightarrow U_\alpha \times V$  tal que  $\varphi_\alpha([p, v]_\alpha) = (p, v)$  y utilizando las condiciones de consistencia, se puede verificar que este es un fibrado vectorial. A este tipo de fibrados los denominamos *G-fibrados* (también conocidos como fibrados principales). Al grupo  $G$  se lo denomina *grupo de gauge*.

**Transformaciones de gauge.** Las fibras de un  $G$ -fibrado son un espacio vectorial de dimensión  $n$ . Decimos que una transformación lineal  $T : E_p \rightarrow E_p$  vive en  $G$  si es de la forma  $\rho(g)$ , es decir:

$$[p, v]_\alpha \rightarrow [p, gv]_\alpha \quad (\text{D.16})$$

Para algún  $g \in G$ . Esta definición no depende de la carta elegida. Recordemos que identificamos:

$$[p, v]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \quad (\text{D.17})$$

Entonces, podemos identificar también:

$$[p, gv]_\alpha = [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \quad (\text{D.18})$$

Por lo que  $T$  tiene la siguiente acción en  $U_\alpha \cap U_\beta$ :

$$[p, g_{\beta\alpha}v]_\beta \rightarrow [p, g_{\beta\alpha}gv]_\beta \quad (\text{D.19})$$

En otras palabras:

$$[p, v']_\beta \rightarrow [p, g'v']_\beta \quad (\text{D.20})$$

Donde llamamos  $v' = g_{\beta\alpha}v$  y  $g' = g_{\beta\alpha}gg_{\beta\alpha}^{-1}$ .

A una transformación lineal  $T : E_p \rightarrow E_p$  que vive en  $G$  y varía suavemente con el punto  $p \in M$  se le llama *transformación de gauge*.

**Endomorfismos.** Dado un espacio vectorial  $V$ , llamamos *endomorfismos* (denotados por  $\text{End}(V)$ ) al conjunto de las transformaciones lineales de  $V$  en sí mismo. Se puede verificar que  $\text{End}(V)$  es un espacio vectorial y además un álgebra si definimos:

$$(\alpha T)(v) = \alpha T(v) \quad (\text{D.21})$$

$$(S + T)(v) = S(v) + T(v) \quad (\text{D.22})$$

$$(S \circ T)(v) = S(T(v)) \quad (\text{D.23})$$

Para un escalar  $\alpha$  y  $S, T \in \text{End}(V)$ ,  $v \in V$ . Ejemplo:  $\text{End}(\mathbb{R}^n)$  es el espacio de las matrices reales  $n \times n$ .

Se puede verificar que  $\text{End}(V)$  es isomorfo a  $V \otimes V^*$ . Tomando el elemento  $v \otimes f \in V \otimes V^*$ , le asignamos la función dada por:

$$x \rightarrow f(x)v \quad \forall x \in V \quad (\text{D.24})$$

En términos de bases, el isomorfismo está dado por:

$$e^i \otimes e_j \rightarrow e_j^i \quad (\text{D.25})$$

Entonces, dado un fibrado  $E$  sobre una variedad  $M$  podemos definir el *fibrado de endomorfismos* como el fibrado correspondiente a  $\text{End}(E)$ , o equivalentemente  $E \otimes E^*$ . Una sección  $T$  de este fibrado define un mapa de  $E$  en sí mismo, enviando  $v \in E_p$  a  $T(p)v \in E_p$ . Una sección  $T$  de  $\text{End}(E)$  actúa en una sección  $s$  de  $E$  de la siguiente manera:

$$(Ts)(p) = T(p)s(p) \quad \forall p \in M$$

También se puede verificar que  $T : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  es  $C^\infty(M)$  – lineal:

$$T(fs) = fT(s)$$

Si  $T(p)$  vive en  $G \forall p \in M$  decimos que  $T$  es una transformación de gauge. El conjunto de las transformaciones de gauge es un grupo, con el producto y la inversa definidos por:

$$(gh)(p) = g(p)h(p) \quad (\text{D.26})$$

$$g^{-1}(p) = g(p)^{-1} \quad (\text{D.27})$$

En teoría de campos gauge, los campos son secciones de  $G$ -fibrados, y las leyes de la física son ecuaciones diferenciales tales que si una sección  $s$  es solución, también lo es  $gs$  para cualquier  $g \in G$ .

**Conexiones.** Sea  $E$  un fibrado sobre una variedad  $M$ . Una conexión  $D$  asigna a cada campo vectorial  $v$  en  $M$  una función  $D_v : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$  que satisface las siguientes propiedades:

$$D_v(\alpha s) = \alpha D_v s \quad (\text{D.28})$$

$$D_v(s + t) = D_v s + D_v t \quad (\text{D.29})$$

$$D_v(fs) = v(f)s + fD_v s \quad (\text{D.30})$$

$$D_{v+w}s = D_v s + D_w s \quad (\text{D.31})$$

$$D_f v s = fD_v s \quad (\text{D.32})$$

para todo  $v, w \in \text{Vect}(M)$ ,  $s, t \in \Gamma(E)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ ,  $\alpha$  escalar. Llamamos a  $D_v s$  *derivada covariante de  $s$  en la dirección de  $v$*

Si tenemos una base  $\{\partial_\mu\}$  de  $\text{Vect}(M)$  y una base de secciones  $\{e_j\}$ , podemos expresar  $D_\mu e_j$  como una combinación lineal de secciones:

$$D_\mu e_j = A_{\mu j}^i e_i$$

Las funciones  $A_{\mu j}^i$  se denominan componentes del *vector potencial*. La derivada covariante de una sección  $s$  de un fibrado  $E$  sobre una variedad  $U$  en la dirección de un campo vectorial  $v$  se puede expresar en función del potencial vector:

$$D_v s = D_{v^\mu \partial_\mu} s = v^\mu D_\mu s = v^\mu D_\mu (s^i e_i) \quad (\text{D.33})$$

$$= v^\mu \left( (\partial_\mu s^i) e_i + A_{\mu i}^j s^i e_j \right) = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i \quad (\text{D.34})$$

El vector potencial es una 1-forma en  $U$  que toma valores en  $\text{End}(E)$ , esto es, una sección del fibrado

$$\text{End} \left( E \Big|_U \right) \otimes T^*U \quad (\text{D.35})$$

En términos de coordenadas:

$$A = A_{\mu i}^j e_j \otimes e^i \otimes dx^\mu \quad (\text{D.36})$$

A cualquier conexión  $D$  se la puede escribir como  $D = D_0 + A$ , siendo  $D_0$  la conexión:

$$D_v^0 s = v(s^j) e_j$$

Entonces:

$$D_v s = v^\mu (\partial_\mu s^i + A_{\mu j}^i s^j) e_i = (v(s^i) + A_{\mu j}^i v^\mu s^j) e_i \quad (\text{D.37})$$

$$= D_v^0 s + A(v) s \quad (\text{D.38})$$

Decimos que  $D$  es una  $G$ -conexión si en coordenadas locales, las componentes  $A_\mu \in \text{End}(E)$  viven en el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  del grupo  $G$  del  $G$ -fibrado.

Así como se le puede aplicar una transformación de Gauge a una sección de un  $G$ -fibrado, también se le puede aplicar a una  $G$ -conexión. Sea  $D$  una  $G$ -conexión en  $E$  y  $g$  una transformación de Gauge. La conexión transformada está dada por:

$$D'_v(s) = g D_v(g^{-1} s) \quad (\text{D.39})$$

Utilizando esta expresión se pueden obtener las componentes transformadas del potencial vector. Recordemos que  $g$  es una forma abreviada de referirse a la representación del elemento  $g$  del grupo  $G$  en el espacio vectorial correspondiente a la fibra de  $E$  sobre el cual actúa:

$$g \rightarrow \rho(g)_k^j e_j \otimes e^k \in \text{End}(E) \quad (\text{D.40})$$

Entonces:

$$\begin{aligned} D'_\mu(s) &= g \left( D_\mu^0 \left( \rho(g^{-1})_k^j s^k e_j \right) \right) + g A_\mu(g^{-1} s) \\ &= D_\mu^0(s) + g \left[ \left( \partial_\mu \rho(g^{-1})_k^j \right) s^k e_j \right] + g A_\mu(g^{-1} s) \\ &= D_\mu^0(s) + g \left[ \left( \partial_\mu \rho(g^{-1})_k^j \right) e^k \otimes e_j \right] (s^l e_l) + g A_\mu(g^{-1} s) \\ &= D_\mu^0(s) + g (\partial_\mu g^{-1})(s) + (g A_\mu g^{-1})(s) \\ &= D_\mu^0(s) + A'_\mu(s) \end{aligned} \quad (\text{D.41})$$

Con:

$$A'_\mu = g (\partial_\mu g^{-1}) + g A_\mu g^{-1} \quad (\text{D.42})$$

## D.2 Holonomías

**Transporte paralelo.** Sea  $E$  un fibrado vectorial sobre  $M$  equipado con una conexión  $D$  y sean  $p, q \in M$ . Sea  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  un camino diferenciable que va desde  $p$  hasta  $q$ . Sea  $u(t)$ , un vector en la fibra de  $E$  sobre  $\gamma(t)$ . En una trivialización local  $E|_U \cong U \otimes V$ , podemos pensar en las secciones  $s$  de  $E$  como

funciones valuadas en  $V$ . Decimos que  $u(t)$  es *transportado paralelamente* en la dirección de  $\gamma(t)$  si:

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0 \quad \forall t \quad (\text{D.43})$$

Entonces:

$$\frac{d}{dt}u(t) + A(\gamma'(t))u(t) = 0 \quad (\text{D.44})$$

$$\frac{d}{dt}u(t) = -A(\gamma'(t))u(t) \quad (\text{D.45})$$

La solución entonces satisface:

$$u(t) = u - \int_0^t A(\gamma'(t_1))u(t_1)dt_1 \quad (\text{D.46})$$

Sustituyendo esta expresión en sí misma, podemos obtener de forma recursiva:

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( (-1)^n \int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_1 \dots dt_n \right) u \quad (\text{D.47})$$

Se puede probar que esta suma converge a la solución.

La integral:

$$\int_{t \geq t_1 \geq \dots \geq t_n \geq 0} A(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{D.48})$$

se puede reescribir si definimos el producto ordenado:

$$PA(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) \quad (\text{D.49})$$

Entonces, la integral anterior es igual a:

$$\frac{1}{n!} \int_{t_i \in [0, t]} PA(\gamma'(t_1)) \dots A(\gamma'(t_n)) dt_1 \dots dt_n \quad (\text{D.50})$$

O de forma abreviada:

$$\frac{1}{n!} P \left( \int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right)^n \quad (\text{D.51})$$

Si definimos la exponencial ordenada:

$$Pe^{-\int_0^t A(\gamma'(s)) ds} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} P \left( \int_0^t A(\gamma'(s)) ds \right)^n \quad (\text{D.52})$$

Tenemos:

$$u(t) = Pe^{-\int_0^t A(\gamma'(s)) ds} u \quad (\text{D.53})$$

**Holonomía.** Sea  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  un camino diferenciable entre  $p$  y  $q$  en la variedad  $M$ , sobre la cual hay un fibrado  $E$  con conexión  $D$ . Dado  $u \in E_p$ , denotamos por  $H(\gamma, D)u$  al resultado de transportar el vector  $u$  paralelamente hasta  $q$  a través del camino  $\gamma$ . Al mapa lineal

$$H(\gamma, D) : E_p \rightarrow E_q \quad (\text{D.54})$$

se le llama *holonomía* a lo largo del camino  $\gamma$ .

*Propiedades:*

- Sea  $\alpha : [0, T] \rightarrow M$  un camino diferenciable, y sea  $f : [0, S] \rightarrow [0, T]$  una función suave con  $f(0), f(S) = T$ . Sea  $\beta$  el camino reparametrizado dado por  $\beta(t) = \alpha(f(t))$ . Se puede probar que para cualquier conexión  $D$  en el fibrado  $\pi : E \rightarrow M$  se cumple  $H(\alpha, D) = H(\beta, D)$ .
- Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos caminos componibles en la variedad  $M$ , entonces se tiene que

$$H(\beta\alpha, D) = H(\beta, D)H(\alpha, D) \quad (\text{D.55})$$

- Dado un camino  $\gamma : [0, T] \rightarrow M$  de  $p$  a  $q$ , el camino inverso  $\gamma^{-1}$  de  $q$  a  $p$  está dado por:

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(T - t) \quad (\text{D.56})$$

Entonces, se puede probar que:

$$H(\gamma^{-1}, D) = H(\gamma, D)^{-1} \quad (\text{D.57})$$

- Para cualquier punto  $p$ , se puede definir el camino  $1_p : [0, 1] \rightarrow M$  dado por

$$1_p(t) = p \quad (\text{D.58})$$

que cumple las siguientes propiedades:

$$H(1_q\gamma, D) = H(\gamma, D) \quad (\text{D.59})$$

$$H(\gamma 1_p, D) = H(\gamma, D) \quad (\text{D.60})$$

$$H(1_p, D) = 1 \quad (\text{D.61})$$

**Transformaciones de gauge.** Sea  $E$  un  $G$ -fibrado sobre  $M$  y  $\gamma$  un camino diferenciable en  $M$ . Supongamos que  $u(t) \in E_{\gamma(t)}$  satisface la ecuación de transporte paralelo

$$D_{\gamma'(t)}u(t) = 0 \quad (\text{D.62})$$

Si  $A$  es el potencial vector de  $D$ , entonces se cumple:

$$\frac{d}{dt}u(t) = -\gamma'^\mu(t)A_\mu(\gamma(t))u(t) \quad (\text{D.63})$$

donde se utilizaron coordenadas de una trivialización local. Aplicando una transformación de gauge a  $u(t)$ , obtenemos otro vector  $w(t) = g(\gamma(t))u(t)$ , el cual podemos diferenciar para obtener:

$$\frac{d}{dt}w(t) = \left( \frac{d}{dt}g(\gamma(t)) \right) u(t) + g(\gamma(t)) \frac{d}{dt}u(t) \quad (\text{D.64})$$

En función de coordenadas locales:

$$\gamma'^\nu(t)(\partial_\nu g)u(t) - g\gamma'^\mu(t)A_\mu u(t) = \gamma'^\mu(t)(\partial_\mu g)g^{-1}w(t) - \gamma'^\mu(t)gA_\mu g^{-1}w(t) \quad (\text{D.65})$$

Sustituyendo:

$$(\partial_\mu g)g^{-1} = -g\partial_\mu g^{-1} \quad (\text{D.66})$$

se obtiene:

$$\frac{d}{dt}w(t) = -\gamma'\mu(t)A'_\mu w(t) \quad (\text{D.67})$$

con:

$$A'_\mu = gA_\mu g^{-1} + g\partial_\mu g^{-1} \quad (\text{D.68})$$

El vector  $w(t)$  satisface entonces la ecuación de transporte paralelo

$$D'_{\gamma'(t)}w(t) = 0 \quad (\text{D.69})$$

donde  $D'$  es el resultado de aplicarle la transformación de gauge  $g$  a  $D$ .

La holonomía  $H(\gamma, D)$  es el mapa lineal que envía  $u(0)$  a  $u(T)$ , mientras que  $H(\gamma, D')$  envía  $w(0) = g(\gamma(0))u(0)$  a  $w(T) = g(\gamma(T))w(0)$ , por lo tanto, tenemos que bajo una transformación de gauge:

$$H(\gamma, D') = g(\gamma(T))H(\gamma, D)g(\gamma(0))^{-1} \quad (\text{D.70})$$

### D.3 Curvatura

Sea  $E$  un fibrado vectorial sobre  $M$  con una conexión  $D$ . Dados dos campos vectoriales  $v, w$  en  $M$ , definimos la curvatura  $F(v, w)$  de  $D$  como el operador en  $\Gamma E$  dado por:

$$F(v, w)s = D_v D_w s - D_w D_v s - D_{[v, w]}s \quad (\text{D.71})$$

*Propiedades:*

- Antisimetría

$$F(v, w) = -F(w, v) \quad (\text{D.72})$$

- Linealidad

$$F(fv, w) = fF(v, w) \quad (\text{D.73})$$

$$F(v, fw) = fF(v, w) \quad \forall f \in C^\infty(M) \quad (\text{D.74})$$

$$F(v, w)(fs) = fF(v, w)(s) \quad (\text{D.75})$$

Si  $\{x^\mu\}$  son coordenadas locales en un conjunto abierto  $U \subset M$ , definimos  $F_{\mu\nu}$  como la sección de  $\text{End}(E)$  dada por:

$$F_{\mu\nu} = F(\partial_\mu, \partial_\nu) \quad (\text{D.76})$$

Aplicándolo a un elemento de una base de secciones:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}e_i &= D_\mu D_\nu e_i - D_\nu D_\mu e_i \\ &= D_\mu (A_{\nu i}^j e_j) - D_\nu (A_{\mu i}^j e_j) \\ &= \left( (\partial_\mu A_{\nu i}^j) + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - (\partial_\nu A_{\mu i}^j) - A_{\nu j}^k A_{\mu i}^k \right) e_j \end{aligned} \quad (\text{D.77})$$

Dado que las secciones  $e_j \otimes e^i$  forman una base local de las secciones de  $\text{End}(E)$ , podemos escribir:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^j e_j \otimes e^i \quad (\text{D.78})$$

Las componentes  $F_{\mu\nu}^j$  están dadas entonces por:

$$F_{\mu\nu}^j = \partial_\mu A_{\nu i}^j - \partial_\nu A_{\mu i}^j + A_{\mu k}^j A_{\nu i}^k - A_{\nu k}^j A_{\mu i}^k \quad (\text{D.79})$$

## Apéndice E

# Sistemas vinculados

En una teoría de gauge, el sistema físico en cuestión (llamado sistema gauge) es descrito por más variables que el número de grados de libertad físicos independientes. Estas teorías están además caracterizadas por la existencia de transformaciones que no afectan a las cantidades con significado físico real, tales transformaciones se denominan *transformaciones de gauge*. Un ejemplo de teoría de gauge es el electromagnetismo; éste está descrito por el potencial vector electromagnético  $A(t, \vec{x}) = (\phi, \vec{A})$  el cual tiene cuatro componentes, siendo cada una de ellas una función del tiempo  $t$  y la posición  $\vec{x}$ . Sin embargo, no todos los grados de libertad son físicos. Recordemos que los campos eléctrico y magnético se obtienen a partir de  $A$  mediante las siguientes igualdades

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad (\text{E.1})$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (\text{E.2})$$

Podemos observar que las siguientes transformaciones

$$\phi \rightarrow \phi + f(t) \quad (\text{E.3})$$

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\lambda(\vec{x}) \quad (\text{E.4})$$

dejan tanto el campo eléctrico como el campo magnético invariantes. Las transformaciones (E.3)-(E.4) dejan las cantidades físicas observables invariantes por lo que son transformaciones de gauge. Otro ejemplo de una teoría de gauge es la relatividad general, en la cual hay grados de libertad no físicos correspondientes a la libertad gauge presente en los difeomorfismos espaciales y transformaciones de gauge internas.

Un sistema de gauge puede ser pensado como uno en el que las variables están especificadas con respecto a un cierto marco de referencia, el cual puede ser elegido arbitrariamente a cualquier tiempo. Un cambio en este marco de referencia es una transformación que no afecta a las variables físicas, una transformación de gauge. Ya que este marco de referencia puede ser cambiado en todo tiempo, es esperable que dadas condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento no determinen completamente la evolución del sistema, sino que la solución general contendrá funciones arbitrarias del tiempo, consecuencia de la libertad de gauge. Más adelante veremos que la presencia de funciones arbitrarias en la solución

general de las ecuaciones de movimiento implica que las variables canónicas no son independientes sino que existen vínculos entre ellas. Comenzamos el apéndice analizando la acción de un sistema de gauge y definiendo el conjunto de vínculos primarios del mismo.

## E.1 Vínculos lagrangeanos

Dado un sistema con  $N$  grados de libertad, las ecuaciones de movimiento clásicas son aquellas que hacen que la acción

$$S_L = \int_{t_1}^{t_2} L(q^n, \dot{q}^n) dt \quad (\text{E.5})$$

sea estacionaria ante variaciones arbitrarias  $\delta q^n(t)$  de las variables  $q^n$  tales que  $\delta q^n(t_1) = \delta q^n(t_2) = 0$ . Para que (E.5) sea estacionaria, deben cumplirse las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad n = 1, \dots, N. \quad (\text{E.6})$$

Desarrollando la derivada temporal utilizando regla de la cadena:

$$\ddot{q}^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} = \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^{n'} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{n'} \dot{q}^n} \quad (\text{E.7})$$

De (E.7), podemos en principio despejar las aceleraciones:

$$\ddot{q}^m = \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \right)^{-1} \left( \frac{\partial L}{\partial q^n} - \dot{q}^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n \dot{q}^{n'}} \right) \quad (\text{E.8})$$

Para esto es necesario que la matriz

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \quad (\text{E.9})$$

sea invertible. Por otro lado, si

$$\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} \right) = 0 \quad (\text{E.10})$$

las aceleraciones no están unívocamente determinadas por las coordenadas y las velocidades. Una misma condición inicial puede entonces dar lugar a distintas evoluciones temporales. Sea  $R$ , el rango de la matriz  $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^m}$  (por lo tanto  $R < N$ ), entonces existen  $M = N - R$  vectores propios nulos  $Y_m^{n'}$   $m = 1, \dots, M$   $i = 1, \dots, N$  tales que:

$$Y_m^{n'} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^{n'}} = 0 \quad (\text{E.11})$$

Definimos

$$\phi_m(q^n, \dot{q}^n) := Y_m^n \frac{\partial L}{\partial q^n} = 0 \quad (\text{E.12})$$

A las  $k$  funciones independientes  $\phi_k$  (con  $k \leq M$ ) se las denomina vínculos lagrangeanos. Vemos entonces que al no estar las soluciones de las ecuaciones de movimiento completamente determinadas por las condiciones iniciales, los grados de libertad no son independientes sino que existen relaciones entre ellos: las igualdades  $\phi_k = 0$ . Si bien es posible continuar el análisis de los sistemas de gauge desde el punto de vista lagrangeano, en este trabajo estamos interesados en la formulación hamiltoniana, la cual presentaremos a continuación.

## E.2 Formulación hamiltoniana

### E.2.1 Vínculos primarios

Recordemos que para realizar la transformación de Legendre que nos lleva del lagrangeano al hamiltoniano, definimos el momento canónico conjugado de la variable  $q^n$  como

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} \quad (\text{E.13})$$

Se puede ver entonces que la condición de no invertibilidad de la matriz hessiana (E.10), se traduce en la formulación hamiltoniana como la no invertibilidad de los momentos conjugados en función de las velocidades, el mapa  $(q^n, \dot{q}^m) \rightarrow (q^n, p_m)$  no es inyectivo. Para obtener un mapa inyectivo entre estos espacios es necesario incluir parámetros adicionales, como se verá más adelante en esta sección. Los momentos conjugados entonces no son independientes sino que cumplen ciertas relaciones (vínculos)

$$\phi_m(q^n, p_n) = 0 \quad m = 1, \dots, M. \quad (\text{E.14})$$

Cuando los momentos conjugados son expresados en función de las posiciones y las velocidades mediante (E.13), las relaciones (E.14) se transforman en identidades. A las relaciones (E.14) se las denomina *vínculos primarios*. Las ecuaciones de movimiento no son utilizadas para obtener los vínculos primarios y estos no imponen ninguna restricción en las coordenadas  $(q^n, \dot{q}^n)$ . A la superficie del espacio de fases en la que se cumplen las relaciones (E.14) se la denomina superficie de vínculos primarios, la misma tiene una dimensión  $2N - M'$ , siendo  $M'$  el número de vínculos independientes. Dadas ciertas condiciones de regularidad ([43] pág. 7), se puede probar que se cumplen las siguientes propiedades

- Si  $F$  es una función en el espacio de fases que se anula en la superficie de vínculos ( $F \approx 0$ ), entonces

$$F = f^m \phi_m \quad (\text{E.15})$$

para algunas funciones  $f^m$ .

- Si  $\lambda_n \delta q^n + \mu^n \delta p_n = 0$  para variaciones arbitrarias  $\delta q^n, \delta p_n$  se cumple

$$\lambda_n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \quad (\text{E.16})$$

$$\mu^n = u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{E.17})$$

para algunas funciones  $u^m$ .

## E.2.2 Hamiltoniano canónico

El hamiltoniano canónico se obtiene a partir del lagrangeano  $L$  mediante una transformación de Legendre:

$$H = p_n \dot{q}^n - L \quad (\text{E.18})$$

$H$  es una función de las posiciones y las velocidades si usamos las definiciones (E.13), pero gracias a la propiedad de la transformada de Legendre, depende de las velocidades únicamente a través de los momentos conjugados  $p(q, \dot{q})$ , por lo que el hamiltoniano es una función de las coordenadas y de sus momentos conjugados. Para ver esto, tomamos variaciones en (E.18):

$$\begin{aligned} \delta H &= \delta p_n \dot{q}^n + p_n \delta \dot{q}^n - \delta L \\ &= \delta p_n \dot{q}^n + p_n \delta \dot{q}^n - \delta \dot{q}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n} - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} \\ &= \dot{q}^n \delta p_n - \frac{\partial L}{\partial q^n} \delta q^n \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

Donde se usó la definición (E.13).

Sin embargo, el hamiltoniano no está unívocamente determinado como función de las coordenadas y sus momentos, pues estos últimos no son independientes entre sí sino que verifican ciertas igualdades llamadas vínculos (ver sección anterior). Por lo tanto, las variaciones  $\delta p_n$  no son todas independientes sino que deben verificar los vínculos  $\phi_m \approx 0$ . El hamiltoniano canónico está entonces bien definido sólo en la superficie de vínculos primarios, y puede ser extendido arbitrariamente fuera de la misma. El formalismo no debería cambiar bajo transformaciones del tipo  $H \rightarrow H + c^m \phi_m$ . Utilizando la ecuación (E.19), tenemos:

$$\begin{aligned} \delta H &= \dot{q}^n \delta p_n - \delta q^n \frac{\partial L}{\partial q^n} = \frac{\partial H}{\partial q^n} \delta q^n + \frac{\partial H}{\partial p_n} \delta p_n \\ \rightarrow \left( \frac{\partial H}{\partial q^n} + \frac{\partial L}{\partial q^n} \right) \delta q^n + \left( \frac{\partial H}{\partial p_n} - \dot{q}^n \right) \delta p_n &= 0 \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

Utilizando la segunda de las propiedades vistas en la página 203, tenemos que

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{E.21})$$

$$\frac{\partial L}{\partial q^n} = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \quad (\text{E.22})$$

Si los vínculos son independientes, la primera de estas relaciones permite expresar, en principio, los parámetros  $u$  como funciones de las coordenadas y los momentos conjugados, resolviendo las ecuaciones

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n}(q, \dot{q}) + u^m(q, \dot{q}) \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}(q, p(q, \dot{q})) \quad (\text{E.23})$$

Si los vínculos son independientes (lo cual se asumirá por el resto del apéndice), los vectores  $\frac{\partial \phi_m}{\partial p_n}$  también lo son, por lo que dos conjuntos distintos de parámetros  $u^m$  no pueden dar las mismas velocidades en (E.21). Estos parámetros son

precisamente los que necesitamos para hacer que el mapa entre el espacio  $(q^n, \dot{q}^n)$  y la superficie de vínculos primarios sea invertible. Si definimos la transformada de Legendre desde el espacio  $(q^n, \dot{q}^n)$  al espacio  $(q^n, p_n, u^m)$  de la superficie de vínculos de la siguiente manera

$$q^n = \bar{q}^n \quad (\text{E.24})$$

$$p_n = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^n}(q, \dot{q}) \quad (\text{E.25})$$

$$u^m = u^m(q, \dot{q}) \quad (\text{E.26})$$

entonces vemos que la transformación es invertible, pues tenemos también

$$q^n = \bar{q}^n \quad (\text{E.27})$$

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{E.28})$$

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad (\text{E.29})$$

### E.2.3 Ecuaciones de Hamilton y vínculos

Las relaciones (E.24)-(E.29) permiten reescribir las ecuaciones de movimiento (E.6) en su forma hamiltoniana equivalente

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_n} \quad (\text{E.30})$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^n} \quad (\text{E.31})$$

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad (\text{E.32})$$

Estas ecuaciones pueden ser obtenidas a partir de tomar variaciones en la acción del sistema:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\dot{q}^n p_n - H - u^m \phi_m) = 0 \quad (\text{E.33})$$

para variaciones arbitrarias  $\delta q^n, \delta p_n, \delta u^m$ . Las variables extras que tuvimos que introducir para que la transformada de Legendre sea invertible son multiplicadores de Lagrange, mientras que sus variaciones dan lugar a los vínculos primarios. La derivada temporal de una función  $F(q, p)$  se escribe como

$$\dot{F} = [F, H] + u^m [F, \phi_m] \quad (\text{E.34})$$

### E.2.4 Vínculos secundarios

Además de imponer los vínculos primarios  $\phi_m$  a las variables canónicas, uno debe también exigir que estos vínculos se conserven en el tiempo. Utilizando (E.34), esto último se escribe como

$$\dot{\phi}_m \approx 0 \rightarrow \dot{\phi}_m = [\phi_m, H] + u^{m'} [\phi_m, \phi_{m'}] \approx 0 \quad (\text{E.35})$$

Las condiciones de consistencia (E.35) pueden imponer alguna restricción en los  $u$ , o bien ser no involucrarlos y ser una relación únicamente entre coordenadas

y momentos; si estas relaciones son independientes de los vínculos primarios se tratan de nuevos vínculos, denominados vínculos secundarios. Uno debe además imponer la conservación de estos vínculos secundarios utilizando el mismo algoritmo de consistencia que se utilizó para imponer la conservación de los vínculos primarios, obteniendo posiblemente vínculos terciarios. Imponiendo la conservación de los vínculos terciarios se pueden obtener vínculos cuaternarios, y así sucesivamente. A los vínculos secundarios, terciarios, cuaternarios, etc. usualmente se los llama simplemente vínculos secundarios. Al terminar de imponer las condiciones de consistencia uno terminará con  $M + K$  vínculos, siendo  $K$  el número de vínculos secundarios.

### E.2.5 Hamiltoniano total

Al imponer la conservación de los vínculos se obtienen, además de vínculos nuevos, restricciones en los multiplicadores de Lagrange:

$$[\phi_j, H] + u^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0 \quad (\text{E.36})$$

La solución más general a (E.36) se puede escribir como

$$u^m = U^m + V^m \quad (\text{E.37})$$

siendo  $U^m$  una solución particular a (E.36), y  $V^m$  la solución general a la ecuación homogénea

$$V^m [\phi_j, \phi_m] \approx 0 \quad (\text{E.38})$$

la cual se puede escribir como suma de soluciones linealmente independientes

$$V^m = v^a V_a^m \quad a = 1, \dots, A. \quad (\text{E.39})$$

donde los coeficientes  $v^a$  son totalmente arbitrarios (se asumirá que el rango de la matriz es constante en la superficie de vínculos). Definimos ahora el Hamiltoniano total como

$$H_T = H + u^m \phi_m \quad (\text{E.40})$$

Utilizando (E.37) y (E.39), el Hamiltoniano total se puede reescribir como

$$H_T = H + U^m \phi_m + v^a V_a^m \phi_m = H' + v^a \phi_a \quad (\text{E.41})$$

donde se definieron  $H' = H + U^m \phi_m$ ,  $\phi_a = V_a^m \phi_m$ . En términos del Hamiltoniano total, la evolución temporal (E.34) toma la forma

$$\dot{F} = [F, H_T] \quad (\text{E.42})$$

### E.2.6 Vínculos de primera y segunda clase

La distinción entre vínculos primarios y secundarios resulta ser de poca importancia. Una distinción mucho más importante es la de vínculos de primera y segunda clase. Decimos que un vínculo es de primera clase, y lo denotamos por  $\gamma$ , si su corchete de Poisson con el resto de los vínculos se anula débilmente.

$$[\gamma, \phi_j] \approx 0 \quad \forall j \quad (\text{E.43})$$

Por otro lado, un vínculo de segunda clase (que será denotado por  $\chi$ ) es aquel cuyo corchete de Poisson con al menos uno de los otros vínculos no se anula débilmente. Se pueden definir funciones en general de primera y segunda clase utilizando la misma definición. Observando (E.36) y (E.38), se puede notar que  $H'$  y los vínculos  $\phi_a$  definidos como  $\phi_a = V_a^m \phi_m$  son de primera clase. Además, cualquier vínculo de primera clase se puede escribir como combinación lineal de los  $\phi_a$ , pues estos son la solución más general a (E.38). Entonces, el hamiltoniano total  $H_T$  se puede escribir como la suma del hamiltoniano de primera clase  $H'$  y una combinación lineal de los vínculos de primera clase primarios  $\phi_a$ .

### E.2.7 Transformaciones de gauge

La presencia de las funciones arbitrarias del tiempo  $v^a$  en el hamiltoniano total introduce una ambigüedad en la evolución de las variables canónicas. Dos elecciones diferentes de las funciones  $v^a$  darán como resultado una evolución temporal distinta. Dadas las condiciones iniciales, las ecuaciones de movimiento deben determinar completamente la evolución de los estados físicos. La ambigüedad introducida por las funciones  $v^a$  entonces no puede ser físicamente relevante. Supongamos que conocemos el estado de una variable dinámica  $F$  en el tiempo  $t$ , y queremos evaluarla en un tiempo  $t + \delta t$ , con  $\delta t$  infinitesimal. El estado de  $F$  en  $t + \delta t$  dependerá de la elección de las funciones  $v^a$  que hayamos hecho. La diferencia de los valores de  $F$  en  $t + \delta t$  correspondientes a dos elecciones diferentes  $v^a$  y  $\tilde{v}^a$  está dada por:

$$\begin{aligned} \delta F &= ([F, H'] + v^a [F, \phi_a] - [F, H'] - \tilde{v}^a [F, \phi_a]) \delta t \\ &= \delta v^a [F, \phi_a] \end{aligned} \quad (\text{E.44})$$

con  $\delta v^a = (v^a - \tilde{v}^a) \delta t$ . Los vínculos primarios de primera clase generan transformaciones que no afectan el estado físico, a las cuales llamamos *transformaciones de gauge*. Se puede probar que tanto el corchete de Poisson de dos de estos vínculos así como entre uno de ellos y el hamiltoniano de primera clase también generan una transformación de gauge ([43] pág. 17). No existe ninguna razón para pensar que al tomar los corchetes de Poisson anteriores, el resultado contenga únicamente vínculos primarios, por lo que es esperable que vínculos secundarios de primera clase también generen transformaciones de gauge. Este es precisamente lo que dice la conjetura de Dirac, que todos los vínculos de primera clase (primarios y secundarios) generan transformaciones de gauge. Si bien no puede ser probada, existen buenas razones para pensar que todos los vínculos de primera clase generan transformaciones de gauge, siendo la observación anterior una de ellas. La conjetura es válida en prácticamente todas las aplicaciones físicas conocidas por lo que se suele considerar válida. Para más detalles, ver [43].

### E.2.8 Hamiltoniano extendido

Definimos el hamiltoniano extendido añadiendo al hamiltoniano total los vínculos de primera clase secundarios:

$$H_E = H' + u^a \gamma_a \quad (\text{E.45})$$

Donde ahora  $\gamma_a$  incluye a todos los vínculos de primera clase. La evolución temporal generada por el hamiltoniano extendido tiene en cuenta toda la libertad gauge, ya que incluye todos los vínculos de primera clase mientras que el hamiltoniano total tiene en cuenta sólo los primarios.

### E.2.9 Vínculos de segunda clase

A diferencia de los vínculos de primera clase, los de segunda clase no generan ninguna transformación de gauge. ¿Cómo deberían ser tratados? El siguiente ejemplo simple es bastante ilustrativo del caso general. Supongamos que tenemos un sistema con  $N$  grados de libertad descrito por las coordenadas  $q^1, \dots, q^n$  y los siguientes vínculos

$$q^1 \approx 0 \quad (\text{E.46})$$

$$p_1 \approx 0 \quad (\text{E.47})$$

los cuales son de segunda clase pues  $[q^1, p_1] = 1$ . En este caso es bastante claro cómo tratar los vínculos; éstos nos dicen que el grado de libertad  $q^1$  es totalmente irrelevante y puede ser descartado junto con su momento, modificando así el corchete de Poisson:

$$[F, G]^* = \sum_{n=2}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q^n} \frac{\partial G}{\partial p_n} - \frac{\partial F}{\partial p_n} \frac{\partial G}{\partial q^n} \right) \quad (\text{E.48})$$

El corchete (E.48) de una función cualquiera con ambos vínculos es idénticamente cero, por lo que estos se pueden imponer como igualdades fuertes.

#### Corchete de Dirac

La generalización de (E.48) para un conjunto cualquiera de vínculos de segunda clase se denomina corchete de Dirac.

Sea  $C$  la matriz cuyas componentes  $C_{\alpha\beta}$  están dadas por  $[\chi_\alpha, \chi_\beta]$ . Se puede verificar que el determinante de  $C$  es distinto de cero [43], y por lo tanto la misma es invertible:

$$C_{\alpha\gamma} C^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta \quad (\text{E.49})$$

El corchete de Dirac se define como

$$[F, G]^* = [F, G] - [F, \chi_\alpha] C^{\alpha\beta} [\chi_\beta, G] \quad (\text{E.50})$$

Se puede verificar que cumple las siguientes propiedades

- $[F, G] = -[G, F]^*$
- $[F, GR]^* = [F, G]^* R + G [F, R]^*$

- $[\chi_\alpha, F]^* = 0$  para cualquier función  $F$ .
- $[F, G]^* \approx [F, G]$  para  $G$  primera clase y  $F$  arbitraria.
- $[R, [F, G]^*]^* \approx [R, [F, G]]$  para  $F$  y  $G$  primera clase y  $R$  arbitraria.
- $[[F, G]^*, R]^* + [[R, F]^*, G]^* + [[G, R]^*, F]^* = 0$

De la tercera de estas propiedades tenemos que los vínculos de segunda clase se pueden imponer como igualdades fuertes; por otro lado, de la cuarta propiedad tenemos que el corchete de Dirac genera la evolución temporal correcta, pues al ser el hamiltoniano extendido de primera clase, se cumple

$$\dot{F} \approx [F, H_E] \approx [F, H_E]^* \quad (\text{E.51})$$

Además, el efecto de una transformación de gauge puede ser evaluado con el corchete de Dirac:

$$[F, \gamma_a] \approx [F, \gamma_a]^* \quad \text{para cualquier } F \quad (\text{E.52})$$

Entonces, el tratamiento de los vínculos de segunda clase consiste en reemplazar el corchete de Poisson por el corchete de Dirac, e imponer estos vínculos como igualdades fuertes.

### E.2.10 Fijación de gauge

La presencia de vínculos de primera clase implica que hay una cierta libertad de gauge en el sistema, por lo que distintos valores de las variables canónicas pueden corresponder al mismo estado físico. Uno puede querer eliminar esa ambigüedad para que haya una correspondencia uno a uno entre los valores de las variables canónicas y los estados físicos; esto se consigue imponiendo relaciones (condiciones de gauge canónicas) entre las variables canónicas que notaremos por  $C_b(q, p) \approx 0$  las cuales deben cumplir las siguientes propiedades:

- Ser accesibles: Dado un conjunto cualquiera de variables canónicas, debe existir una transformación de gauge que mapee dicho conjunto en uno que verifique las condiciones de gauge.
- Fijar el gauge completamente. Dado un conjunto de condiciones de gauge, no debe existir ninguna otra transformación además de la identidad que preserve estas condiciones. Entonces, las ecuaciones

$$\delta u^a [C_b(q, p), \gamma_a] \approx 0 \quad (\text{E.53})$$

deben implicar  $\delta u^a = 0$ . Esto quiere decir que la matriz  $[C_b(q, p), \gamma_a]$  es invertible, por lo que las condiciones de gauge  $C_b$  forman junto con los vínculos  $\gamma_a$  un conjunto de vínculos de segunda clase.

El número de condiciones necesarias para fijar gauge completamente es igual al número de vínculos de primera clase independientes. Una vez fijamos el gauge, no quedan vínculos de primera clase y por lo tanto no queda ninguna libertad gauge en el sistema. Uno puede también fijar el gauge parcialmente, imponiendo un número de condiciones menor al número de vínculos de primera clase independientes, conservando aún cierta libertad en el sistema.

### E.3 Sistemas totalmente vinculados

Usualmente se describe la evolución de un sistema dando las variables dinámicas en función del tiempo. El tiempo tiene un significado físico directo y no es una variable dinámica. Existe una formulación diferente en la cual el tiempo es tratado como una variable canónica más. La evolución de todas las variables es descrita en función de un parámetro externo el cual no tiene ningún significado físico. La teoría es invariante bajo reparametrizaciones de este parámetro; el sistema se dice entonces que es generalmente covariante. En el caso de Relatividad General, el sistema ya es generalmente covariante. En general, si en un sistema el tiempo no es una variable canónica, este puede ser parametrizado, obteniendo como resultado un sistema generalmente covariante. Esto último siempre puede ser hecho, aunque no se ha tenido mucho éxito intentando “deparametrizar” teorías que inicialmente son generalmente covariantes.

#### E.3.1 Hamiltoniano cero

Consideremos un sistema con variables canónicas  $q^i, p_i$  descrito por la siguiente acción:

$$S[q^i(t), p_i(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \left( p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0 \right) dt \quad (\text{E.54})$$

donde se asumió por simplicidad que no hay ningún vínculo. Si introducimos ahora la variable canónica  $t \equiv q^0$  y su momento conjugado  $p_0$ , reemplazamos la acción (E.54) por

$$S[q^0(\tau), q^i(\tau), p_0(\tau), p_i(\tau), u^0(\tau)] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[ p_0 \frac{dq^0}{d\tau} + p_i \frac{dq^i}{d\tau} - u^0 (p_0 + H_0) \right] d\tau \quad (\text{E.55})$$

La evolución obtenida por extremizar (E.55) es equivalente a la obtenida de (E.54). Las ecuaciones obtenidas al variar (E.55) con respecto a  $u^0$  y  $p_0$  son respectivamente:

$$\gamma_0 \equiv p_0 + H_0 = 0 \quad (\text{E.56})$$

$$\dot{t} - u^0 = 0 \quad (\text{E.57})$$

Utilizando estas relaciones es posible reducir la acción, sustituyendo:

$$P_0 \rightarrow -H_0 \quad (\text{E.58})$$

$$u_0 \rightarrow \dot{t} \quad (\text{E.59})$$

obteniendo:

$$\begin{aligned} S[q^0(\tau), q^i(\tau), p_i(\tau), u^0(\tau)] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( p_i \frac{dq^i}{d\tau} - H_0 \dot{t} \right) d\tau \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left( p_i \frac{dq^i}{dt} - H_0 \right) dt \end{aligned} \quad (\text{E.60})$$

La acción (E.55) contiene un par más de variables canónicas, pero también tiene un vínculo más:  $\gamma_0 \approx 0$ , el cual al ser el único, es de primera clase. El

número de grados de libertad es por lo tanto el mismo. Es importante notar que en la acción (E.55) no hay hamiltoniano de primera clase  $H'$ ; el hamiltoniano extendido contiene tan sólo un vínculo. Si existen más vínculos, el hamiltoniano extendido es la suma de todos ellos:

$$H_E = u^a \gamma_a + u^\alpha \chi_\alpha \quad (\text{E.61})$$

donde el vínculo  $\gamma_0$  está incluido en (E.61). Vemos entonces que la evolución del sistema es el desarrollo de una transformación de gauge.

¿Es el hamiltoniano de un sistema generalmente covariante necesariamente cero? Esta discusión puede ser encontrada en [43] pág. 105. En ella se llega a la conclusión de que si las variables canónicas transforman como escalares bajo una reparametrización, entonces el hamiltoniano de un sistema generalmente covariante debe ser débilmente cero. Si observamos la acción (E.55), podemos notar que si hubiera un hamiltoniano de primera clase  $H'(q^i, p_i)$ , el mismo no transformaría como una densidad escalar por lo que dicho término no puede estar presente. El hamiltoniano extendido entonces es una suma de vínculos; por esta razón, a estos sistemas se les llama también sistemas totalmente vinculados.

Una de las ventajas de incorporar al tiempo como variable canónica, además de dar lugar a un tratamiento más simétrico de las variables, es que en los problemas en los que hay una dependencia explícita del tiempo, las ecuaciones que expresan la conservación en el tiempo de los vínculos involucran derivadas explícitas con respecto al mismo, las cuales no son formuladas en términos de los corchetes de Poisson. Esta dificultad es eliminada cuando uno incluye al tiempo como variable canónica y trabaja en el espacio de fases extendido. Un vínculo se dice que es de primera clase si se anula su corchete de Poisson con todos los demás vínculos, incluyendo a  $\gamma_0$ .

La relatividad general es el ejemplo más importante de un sistema totalmente vinculado. En el capítulo 2 vimos que el hamiltoniano en relatividad general es una suma de vínculos. Esto es por supuesto esperable, ya que en relatividad general no existe la noción de tiempo absoluto, sino que el tiempo y el espacio son tratados de forma totalmente simétrica.

## E.4 Cuantización canónica

La cuantización canónica es un procedimiento para cuantizar una teoría clásica en el que se intenta preservar lo mejor posible la estructura formal de la teoría, como los corchetes de Poisson y las simetrías de la misma. Recordemos que si tenemos un sistema clásico descrito por los pares de coordenadas canónicas  $q^n, p_n$  y el hamiltoniano  $H$ , las ecuaciones de movimiento están dadas por

$$\dot{q}^n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad (\text{E.62})$$

$$\dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q^n} \quad (\text{E.63})$$

En términos del corchete de Poisson:

$$\dot{q}^n = \{q^n, H\} \quad (\text{E.64})$$

$$\dot{p}_n = \{p_n, H\} \quad (\text{E.65})$$

y en general, si  $f$  es un observable, su evolución temporal está dada por

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial q^n} \dot{q}^n + \frac{\partial f}{\partial p_n} \dot{p}_n = \frac{\partial f}{\partial q^n} \frac{\partial H}{\partial p_n} - \frac{\partial f}{\partial p_n} \frac{\partial H}{\partial q^n} = \{f, H\} \quad (\text{E.66})$$

Para cuantizar la teoría, se reemplazan los observables que son función de las variables canónicas por operadores autoadjuntos en el espacio de Hilbert correspondiente; por ejemplo, si estamos cuantizando un partícula libre que vive en  $\mathbb{R}^n$ , el espacio de Hilbert es el de las funciones 2-integrables en  $\mathbb{R}^n$ , denotado por  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Dicho reemplazo debe ser tal que se cumpla la siguiente correspondencia entre los corchetes de Poisson entre las cantidades clásicas y los conmutadores de los operadores cuánticos:

$$\{f, g\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{g}] \quad (\text{E.67})$$

En general es imposible asignar un operador a todos los observables tal que (E.67) se cumpla, por lo que esta condición no debe considerarse una regla sino un ideal a seguir. Una vez se asignaron operadores a los observables, la evolución de dichos operadores está dada por

$$\hat{f}(t) = U \hat{f} U^\dagger \quad (\text{E.68})$$

Donde  $U$  es el operador evolución temporal. (E.68) no es más que el operador  $\hat{f}$  en la representación de Heisenberg. Cuando  $H$  es independiente del tiempo, el operador evolución:

$$U = e^{iHt} \quad (\text{E.69})$$

Por lo que (E.68) toma la forma:

$$\hat{f}(t) = e^{iHt} \hat{f} e^{-iHt} \quad (\text{E.70})$$

Luego, si derivamos (E.70) con respecto al tiempo, obtenemos, en analogía con el caso clásico:

$$\frac{d\hat{f}}{dt}(t) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{f}, \hat{H}] \quad (\text{E.71})$$

Un caso simple e ilustrativo es el de la ya mencionada partícula libre que vive en  $\mathbb{R}^n$ . Para simplificar aún más supongamos que  $n = 1$ , o sea, que la partícula se mueve en una única dimensión. Las variables fundamentales son la posición  $q$  y el momento  $p$ . El corchete de Poisson entre estas:

$$\{q, p\} = 1 \quad (\text{E.72})$$

Y además:

$$\{q, q\} = 0 \quad \{p, p\} = 0 \quad (\text{E.73})$$

El espacio de Hilbert es  $L^2(\mathbb{R})$ , y los operadores posición y momento están definidos por:

$$\langle q | \hat{q} | \psi \rangle = q \langle q | \psi \rangle = q\psi(q) \quad (\text{E.74})$$

$$\langle q | \hat{p} | \psi \rangle = -i\hbar \partial_q \langle q | \psi \rangle = -i\hbar \partial_q \psi(q) \quad (\text{E.75})$$

Las relaciones de conmutación entre estos operadores:

$$[\hat{q}, \hat{p}] = -i\hbar \mathbb{I} \quad (\text{E.76})$$

Luego,

$$[\hat{q}, \hat{q}] = [\hat{p}, \hat{p}] = 0 \quad (\text{E.77})$$

El hamiltoniano clásico:

$$H = \frac{p^2}{2m} \quad (\text{E.78})$$

siendo  $m$  la masa de la partícula. El operador hamiltoniano es entonces:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (\text{E.79})$$

Este operador es el que determina la dinámica de la teoría.

#### E.4.1 Cuantización de Dirac de los vínculos de primera clase

La situación es más complicada si hay vínculos en la teoría. Existen varias maneras de tratar a los vínculos para incorporarlos en la cuantización. En esta subsección describimos la que es de interés para este trabajo, la cuantización de Dirac. Este método es válido para vínculos de primera clase únicamente, por lo que de ahora en más asumiremos que no hay vínculos de segunda clase, o que estos fueron eliminados, ya sea imponiéndolos como igualdades fuertes y reemplazando el corchete de Poisson por el de Dirac, o agrandando el espacio de fases de manera tal que todos los vínculos resultantes sean de primera clase ([43]). Mientras que en otros métodos de cuantización los vínculos de primera clase son eliminados mediante la fijación de gauge, en el método de Dirac se conservan todos los vínculos a nivel clásico. Todas las variables dinámicas son promovidas a operadores en el espacio de Hilbert correspondiente. Al no haber realizado ninguna fijación de gauge, se acarrea información no física al cuantizar. Esta información no física es eliminada imponiendo condiciones que seleccionan los “estados físicos”. Estas condiciones deben seleccionar aquellos estados que sean invariantes gauge. Se puede comprobar que el corchete de Poisson verifica todas las propiedades de un corchete de Lie por lo que se puede definir un álgebra de Lie con las funciones del espacio de fases y el corchete de Poisson como operación de multiplicación. Un elemento del grupo de Lie se obtiene exponenciando los elementos del álgebra de Lie, por lo que una transformación de gauge en los estados tiene la forma

$$|\psi\rangle \rightarrow e^{i\varepsilon^a \hat{G}_a} |\psi\rangle \quad (\text{E.80})$$

siendo  $\varepsilon_a$  parámetros infinitesimales y  $\hat{G}_a$  los operadores correspondientes a los vínculos de primera clase.

En (E.80) se puede observar que para que un estado sea invariante ante una transformación de gauge, debe cumplir

$$\hat{G}_a |\psi\rangle = 0 \quad (\text{E.81})$$

para todos los operadores  $\hat{G}_a$ . La condición (E.81) es lineal, por lo que cualquier combinación lineal de estados físicos seguirá siendo física. Por ejemplo, si nuestro espacio de fases consta de  $n$  pares de variables canónicas conjugadas  $q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n$  y tenemos sólo un vínculo  $p_1 \approx 0$ , la condición (E.81) para este sistema en la representación de Schrödinger es la siguiente:

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial q^1} |\psi\rangle = 0 \quad (\text{E.82})$$

Esto nos dice que el vínculo  $p_1 \approx 0$  tiene como consecuencia que los estados físicos no dependen de la variable  $q^1$ .

# Bibliografía

- [1] Jibril Ben Achour, Karim Noui, and Alejandro Perez. Analytic continuation of the rotating black hole state counting, 2016.
- [2] G. Amelino-Camelia, John Ellis, N. E. Mavromatos, D. V. Nanopoulos, and Subir Sarkar. Tests of quantum gravity from observations of  $\gamma$ -ray bursts. *Nature*, 393(6687):763–765, Jun 1998.
- [3] Richard L. Arnowitt, Stanley Deser, and Charles W. Misner. The Dynamics of general relativity. *Gen.Rel.Grav.*, 40:1997–2027, 2008.
- [4] Abhay Ashtekar. New variables for classical and quantum gravity. *Phys. Rev. Lett.*, 57:2244–2247, Nov 1986.
- [5] Abhay Ashtekar. Quantum mechanics of geometry. 1 1999.
- [6] Abhay Ashtekar. Introduction to loop quantum gravity and cosmology. *Lecture Notes in Physics*, page 31–56, 2013.
- [7] Abhay Ashtekar and C.J. Isham. Representations of the holonomy algebras of gravity and nonAbelian gauge theories. *Class.Quant.Grav.*, 9:1433–1468, 1992.
- [8] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Representation theory of analytic holonomy  $C^*$  algebras. 11 1993.
- [9] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Quantum theory of geometry: I. area operators. *Classical and Quantum Gravity*, 14(1A):A55–A81, Jan 1997.
- [10] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Quantum theory of geometry ii: Volume operators, 1997.
- [11] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: A Status report. *Class.Quant.Grav.*, 21:R53, 2004.
- [12] Abhay Ashtekar, Jerzy Lewandowski, Donald Marolf, José Mourão, and Thomas Thiemann. Quantization of diffeomorphism invariant theories of connections with local degrees of freedom. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6456–6493, Nov 1995.
- [13] Abhay Ashtekar and Parampreet Singh. Loop quantum cosmology: a status report. *Classical and Quantum Gravity*, 28(21):213001, Sep 2011.

- [14] John Baez and Javier Muniain. *Gauge Fields, Knots and Gravity*. World Scientific, 1994.
- [15] John C. Baez. Spin networks in nonperturbative quantum gravity. In *The Interface of Knots and Physics*, pages 167–203, 4 1995.
- [16] R. Benguria, P. Cordero, and C. Teitelboim. Aspects of the Hamiltonian Dynamics of Interacting Gravitational Gauge and Higgs Fields with Applications to Spherical Symmetry. *Nucl. Phys. B*, 122:61–99, 1977.
- [17] Roberto Bergamini and Stefano Viaggiu. A novel derivation for kerr metric in papapetrou gauge. *Classical and Quantum Gravity*, 21(19):4567–4573, Sep 2004.
- [18] Eugenio Bianchi. Black hole entropy, loop gravity, and polymer physics. *Classical and Quantum Gravity*, 28(11):114006, May 2011.
- [19] Martin Bojowald. Angular momentum in loop quantum gravity. 8 2000.
- [20] Martin Bojowald. Spherically symmetric quantum geometry: States and basic operators. *Class.Quant.Grav.*, 21:3733–3753, 2004.
- [21] Martin Bojowald. *Canonical Gravity and Applications*. Cambridge University Press, 2011.
- [22] Martin Bojowald, Suddhasattwa Brahma, and Juan D. Reyes. Covariance in models of loop quantum gravity: Spherical symmetry. *Physical Review D*, 92(4), Aug 2015.
- [23] Martin Bojowald and Rafal Swiderski. Spherically symmetric quantum geometry: Hamiltonian constraint. *Class.Quant.Grav.*, 23:2129–2154, 2006.
- [24] Roumen Borissov, Roberto De Pietri, and Carlo Rovelli. Matrix elements of thiemann’s hamiltonian constraint in loop quantum gravity. *Classical and Quantum Gravity*, 14(10):2793–2823, Oct 1997.
- [25] Miguel Campiglia. Note on the phase space of asymptotically flat gravity in ashtekar–barbero variables. *Classical and Quantum Gravity*, 32(14):145011, Jul 2015.
- [26] Miguel Campiglia, Rodolfo Gambini, and Jorge Pullin. Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces. *Class.Quant.Grav.*, 24:3649–3672, 2007.
- [27] Miguel Campiglia, Rodolfo Gambini, and Jorge Pullin. Loop quantization of spherically symmetric midi-superspaces : The Interior problem. *AIP Conf.Proc.*, 977:52–63, 2008.
- [28] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry*. Addison-Wesley, 2004.
- [29] Dah-Wei Chiou, Wei-Tou Ni, and Alf Tang. Loop quantization of spherically symmetric midisuperspaces and loop quantum geometry of the maximally extended Schwarzschild spacetime. 2012.

- [30] Roberto De Pietri and Carlo Rovelli. Geometry eigenvalues and the scalar product from recoupling theory in loop quantum gravity. *Physical Review D*, 54(4):2664–2690, Aug 1996.
- [31] Frederick J. Ernst. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. *Phys. Rev.*, 167:1175–1179, 1968.
- [32] Ernesto Frodden, Alejandro Perez, Daniele Pranzetti, and Christian Roeken. Modelling black holes with angular momentum in loop quantum gravity, 2012.
- [33] Rodolfo Gambini, Esteban Mato, Javier Olmedo, and Jorge Pullin. Classical axisymmetric gravity in real ashtekar variables. *Classical and Quantum Gravity*, 36(12):125009, May 2019.
- [34] Rodolfo Gambini, Esteban Mato, and Jorge Pullin. Quantum spacetime of a charged black hole. *Phys.Rev.*, D91(8):084006, 2015.
- [35] Rodolfo Gambini, Javier Olmedo, and Jorge Pullin. Quantum black holes in Loop Quantum Gravity. *Class.Quant.Grav.*, 31:095009, 2014.
- [36] Rodolfo Gambini and Rafael A. Porto. Relational time in generally covariant quantum systems: Four models. *Phys.Rev.*, D63:105014, 2001.
- [37] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. A Rigorous solution of the quantum Einstein equations. *Phys. Rev. D*, 54:5935–5938, 1996.
- [38] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. Loop quantization of the Schwarzschild black hole. *Phys.Rev.Lett.*, 110(21):211301, 2013.
- [39] Rodolfo Gambini and Jorge Pullin. Hawking radiation from a spherical loop quantum gravity black hole. *Class.Quant.Grav.*, 31:115003, 2014.
- [40] Rodolfo Gambini, Jorge Pullin, and Abhay Ashtekar. *Loops, Knots, Gauge Theories and Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1996.
- [41] Gambini, R. and Trias, A. Geometrical origin of gauge theories. *Phys. Rev. D*, 23:553–555, 1981.
- [42] S.W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 1975.
- [43] Marc Henneaux and Claudio Teitelboim. *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1992.
- [44] Viqar Husain and Jorge Pullin. Quantum Theory of Space-times With One Killing Field. *Mod. Phys. Lett. A*, 5:733, 1990.
- [45] Karel V. Kuchar. Geometrodynamics of Schwarzschild black holes. *Phys.Rev.*, D50:3961–3981, 1994.
- [46] Eugene Lerman. Notes on lie groups, 2012.

- [47] Jorma Louko and Bernard F. Whiting. Hamiltonian thermodynamics of the Schwarzschild black hole. *Phys.Rev.*, D51:5583–5599, 1995.
- [48] Jorma Louko and Stephen N. Winters-Hilt. Hamiltonian thermodynamics of the Reissner-Nordstrom anti-de Sitter black hole. *Phys.Rev.*, D54:2647–2663, 1996.
- [49] Marc Mars. A spacetime characterization of the kerr metric. *Classical and Quantum Gravity*, 16(7):2507–2523, Jan 1999.
- [50] Marc Mars. Uniqueness properties of the kerr metric. *Classical and Quantum Gravity*, 17(16):3353–3373, Aug 2000.
- [51] Simone Mercuri. Introduction to Loop Quantum Gravity. *PoS*, ISFTG:016, 2009.
- [52] Alejandro Perez and Daniele Pranzetti. Static isolated horizons:  $Su(2)$  invariant phase space, quantization, and black hole entropy. *Entropy*, 13(4):744–777, Mar 2011.
- [53] T. Piran. Gamma-ray bursts as probes for quantum gravity. *Lecture Notes in Physics*, page 351–362.
- [54] Eric Poisson and W. Israel. Internal structure of black holes. *Phys.Rev.*, D41:1796–1809, 1990.
- [55] Carlo Rovelli. *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2004.
- [56] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Loop space representation of quantum general relativity. *Nuclear Physics B*, 331(1):80 – 152, 1990.
- [57] Carlo Rovelli and Lee Smolin. Spin networks and quantum gravity. *Physical Review D*, 52(10):5743–5759, Nov 1995.
- [58] José M M Senovilla and David Garfinkle. The 1965 penrose singularity theorem. *Classical and Quantum Gravity*, 32(12):124008, Jun 2015.
- [59] O. Cristinel Stoica. On singular semi-riemannian manifolds. *ArXiv e-prints*, 2011.
- [60] O. Cristinel Stoica. Analytic Reissner-Nordstrom Singularity. *Phys.Scripta*, 85:055004, 2012.
- [61] O. Cristinel Stoica. Schwarzschild’s Singularity is Semi-Regularizable. *Eur.Phys.J.Plus*, 127:83, 2012.
- [62] Mojatba Taslimatehrami. Singularity avoidance of schwarzschild and reissner-nordström black holes in loop quantum gravity. Master’s thesis, 2012.
- [63] T Thiemann. Generalized boundary conditions for general relativity for the asymptotically flat case in terms of ashtekar’s variables. *Classical and Quantum Gravity*, 12(1):181–198, Jan 1995.

- [64] T Thiemann. Quantum spin dynamics (qsd). *Classical and Quantum Gravity*, 15(4):839–873, Apr 1998.
- [65] T Thiemann. Quantum spin dynamics (qsd): Ii. the kernel of the wheeler - dewitt constraint operator. *Classical and Quantum Gravity*, 15(4):875–905, Apr 1998.
- [66] T Thiemann. Quantum spin dynamics (qsd): Iii. quantum constraint algebra and physical scalar product in quantum general relativity. *Classical and Quantum Gravity*, 15(5):1207–1247, May 1998.
- [67] Thomas Thiemann. *Modern Canonical Quantum General Relativity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, 2007.
- [68] Antonio Trias. El grupo de ciclos en teorías de calibre, 1983.
- [69] Robert M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1989.
- [70] A. P. Yutsis, I. B. Levinson, and V. V. Vanagas. *Mathematical apparatus of the theory of angular momentum*. 1962.