



## RADIACIÓN DE HAWKING EN AGUJEROS NEGROS CUÁNTICOS

RODRIGO EYHERALDE

ORIENTADORES:

DR. RODOLFO GAMBINI

DR. MIGUEL CAMPIGLIA



Instituto de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

Rodrigo Eyheralde: *Radiación de Hawking en agujeros negros cuánticos*,  
Enero de 2021

RADIACIÓN DE HAWKING EN AGUJEROS NEGROS  
CUÁNTICOS

ESTUDIANTE:

---

Rodrigo Eyheralde

ORIENTADORES:

---

Dr. Rodolfo Gambini

---

Dr. Miguel Campiglia

TRIBUNAL:

DR. RAÚL DONANGELO  
DR. JORGE PULLIN  
DR. MARTÍN REIRIS  
DR. PABLO MORA

Instituto de Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República  
Enero de 2021



## ABSTRACT

---

We study Hawking radiation on the quantum space-time of a null shell collapsing to form a black-hole of mass  $\bar{M}$ . Following Hawking's original calculation we use the geometric optics approximation but we extend the result beyond the late time approximation in order to describe the beginning of the radiation process. The quantum space-time is constructed by superposing classical geometries associated with collapsing shells with uncertainty in their position and momentum. We find important departures from thermal radiation after a short time scale of order  $\bar{M} \ln(\bar{M})$ , known as the *scrambling time* in the literature. This points to a possible mechanism of retrieval of information as is expected to solve the black hole information paradox.

The important role of the fluctuation of the horizon in this correction to Hawking's calculation is an example of a non-trivial quantum gravity effect in a low curvature region.

## RESUMEN

---

Estudiamos la radiación de Hawking en el espacio-tiempo cuántico de un cascarón angosto de partículas sin masa que colapsa formando un agujero negro de masa  $\bar{M}$ . Siguiendo el cálculo original de Hawking usamos la aproximación de óptica geométrica pero extendemos el resultado más allá de la aproximación de tiempos largos para poder describir el inicio de la radiación. El espacio-tiempo cuántico se construye como una superposición de geometrías clásicas asociadas al colapso de cascarones con incertidumbre en sus posiciones y cantidades de movimiento. Encontramos desviaciones importantes respecto de la radiación térmica en una escala de tiempo corta del orden  $\bar{M} \ln(\bar{M})$ , conocida en la literatura como *tiempo de codificación o scrambling*. Esto apunta hacia un posible mecanismo para recuperar información como es esperado en la resolución de la paradoja de la pérdida de información.

El rol importante que juega la fluctuación del horizonte en esta corrección al cálculo de Hawking es un ejemplo de un efecto no trivial de gravedad cuántica en una región de baja curvatura.



## AGRADECIMIENTOS

---

Dentro del largo proceso que culmina con esta tesis hay una cantidad enorme de aportes que iré valorando más y mejor con el tiempo. Este es un primer intento.

Empiezo agradeciendo a mi familia y en especial a Lucía quien ha sido mi sostén material y emocional durante tanto tiempo, incluyendo estos años de trabajo en el doctorado.

También agradezco el apoyo emocional de todos los amigos que me alientan cada vez que me preguntan por la tesis y en especial a mis compañeros de oficina durante todo este proceso. Nicolás, Gonzalo, Sofía, Guzmán y Lucía me han visto disfrutar, frustrarme, protestar y volver a disfrutar (a veces varias veces en un mismo día).

A todos mis amigos y compañeros de estudio a lo largo de toda la formación en física les agradezco el tiempo de aprendizaje juntos. Son muchos y de todos aprendí algo así que no puedo nombrarlos a todos. Los represento en el grupo con quien compartí y disfruté algunos cursos del doctorado: Lucía, Marcela, Esteban, Florencia y Nahuel. La formación de posgrado tiene mucho de crecimiento personal, pero ese crecimiento tiene gusto a poco cuando no se comparte. Igualmente les agradezco a todos los docentes que he tenido a lo largo de los años. Mi *caja de herramientas* de la física tiene muchas etiquetas con sus nombres.

A la Comisión Académica de Posgrados (CAP), al Instituto de Física de Facultad de Ciencias (IFFC) y a la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII) les agradezco el apoyo material que ha sido fundamental para llegar a este punto. Al programa PEDECIBA y sus funcionarios les agradezco la implementación y mantenimiento de este programa de posgrados, tanto en sus aspectos académicos como administrativos. También agradezco a la Biblioteca de Facultad de Ciencias, a la librería Génesis y el arXive.org por ayudarme a acceder a innumerables publicaciones y libros de texto. A André Miede agradezco y felicito por la plantilla de Latex *Classicthesis*.

A todo el grupo de Teoría de Campos y Gravitación les agradezco el contexto generado para desarrollar y disfrutar este trabajo. En particular a Jorge y a Aureliano les agradezco las discusiones y los enormes aportes a distintos niveles en este trabajo.

Finalmente a mis co-tutores Rodolfo y Miguel les agradezco la infinita paciencia y todo lo que aprendí trabajando con ellos. Como mencioné anteriormente, con el correr del tiempo seguiré descubriendo y valorando más y más estos aportes.

Si alguna contribución a este trabajo no hubiere sido mencionada, considérese un olvido y perdónese.





# CONTENIDO

---

1	INTRODUCCIÓN	1
<b>I CIMIENTO DE LA TESIS</b>		
2	RADIACIÓN DE HAWKING	7
2.1	Resultado semi-clásico de Hawking . . . . .	7
2.2	Termodinámica de agujeros negros . . . . .	17
2.3	Evaporación y paradoja de la información . . . . .	20
3	CUANTIZACIÓN DE UN CASCARÓN COLAPSANTE CON SIMETRÍA ESFÉRICA	31
3.1	Espacio de fases clásico . . . . .	31
3.2	Teoría de campos en espacio-tiempo cuántico . . . . .	35
<b>II RESULTADOS</b>		
4	EXTENSIÓN DEL CÁLCULO DE HAWKING PARA TODO TIEMPO	39
4.1	Aproximación de óptica geométrica . . . . .	39
4.2	Coefficientes de Bogoliubov y matriz densidad . . . . .	45
5	ESPACIO-TIEMPO CUÁNTICO DE UN CASCARÓN	51
5.1	Operadores básicos para estudiar la radiación . . . . .	51
5.2	Régimen semiclásico y fijación del parámetro $M_0$ . . . . .	53
5.3	Operador asociado al coeficiente de Bogoliubov y su valor esperado . . . . .	54
5.4	Operador asociado a la matriz densidad y su valor esperado . . . . .	62
6	COMPARACIÓN CON EL MODELO CGHS	71
6.1	Modelo CGHS . . . . .	71
6.2	Cascarón nulo . . . . .	72
6.3	Radiación de Hawking . . . . .	72
6.4	Espacio de fases y observables de Dirac . . . . .	76
6.5	Radiación de Hawking en el espacio-tiempo cuántico . . . . .	78
7	ANÁLISIS Y CONCLUSIONES	81
7.1	Análisis de resultados . . . . .	81
7.2	Perspectivas . . . . .	83
<b>III APÉNDICES</b>		
A	VARIABLES DE ASHTEKAR	87
A.1	Formulación Lagrangiana. La acción de Einstein-Hilbert	87
A.2	Formulación ADM . . . . .	90
A.3	Variables de Ashtekar . . . . .	94
B	MÉTRICA DE VAIDYA	97
B.1	Agujero negro eterno: la métrica de Schwarzschild . . . . .	97
B.2	Formación de un agujero negro: modelo de cascarón delgado colapsante . . . . .	100

C	CÁLCULO ALTERNATIVO DE LA MATRIZ DENSIDAD	103
c.1	Coeficientes de Bogoliubov dependientes del tiempo .	103
D	CÁLCULOS VINCULADOS A COEFICIENTES DE BOGOLIUBOV DEL CASCARÓN CUÁNTICO	107
D.1	Valor esperado del coeficiente de Bogoliubov . . . . .	107
D.2	Integrales en $I^-$ que no contribuyen a $\langle \beta \rangle$ . . . . .	109
D.3	Valor esperado de la matriz densidad . . . . .	111
D.4	Estudio de la integral $\beta^{eff}$ . . . . .	113

## LISTA DE FIGURAS

---

Fig 2.1	Diagrama de Penrose-Carter de un cascarón colapsante. . . . .	8
Fig 2.2	Aproximación de óptica geométrica para la propagación de modos en el espacio-tiempo del cascarón. . . . .	15
Fig 2.3	Curva de evaporación de un agujero negro. . .	23
Fig 2.4	Diagrama de Penrose-Carter de un cascarón colapsante evaporante. . . . .	24
Fig 2.5	Curva de Page. . . . .	27
Fig 3.1	Superposición de diagramas de Penrose correspondiente al cascarón cuántico. . . . .	36
Fig 4.1	Potencial centrífugo de la ecuación de K-G. . .	40
Fig 4.2	Evolución de ondas planas en el espacio-tiempo del cascarón colapsante. . . . .	42
Fig 4.3	Validez de la aproximación de óptica geométrica (frecuencia mínima vs. tiempo.) . . . . .	44
Fig 4.4	Transitorio de la radiación de Hawking. . . . .	47
Fig 4.5	Correlaciones en el transitorio de la radiación de Hawking. . . . .	49
Fig 5.1	Integral logarítmica. . . . .	53
Fig 5.2	Corrección a la fase del coeficiente de Bogoliubov debido a fluctuaciones. . . . .	58
Fig 5.3	Ejemplo de función de onda del sector gravitatorio. . . . .	59
Fig 5.4	Rango de validez de radiación térmica según parámetros del modelo de agujero negro cuántico. . . . .	66
Fig 5.5	Rango de validez del cálculo de correcciones a la radiación térmica. . . . .	69
Fig 5.6	Coefficiente de Bogoliubov en espacio-tiempo clásico vs. cuántico. . . . .	70
Fig 6.1	Diagrama de Penrose-Carter de CGHS. . . . .	73
Fig 6.2	Diagrama de Penrose-Carter de CGHS-shell con emisión de radiación de Hawking. . . . .	76
Fig A.1	Foliación espacial de una región de espacio-tiempo. . . . .	91
Fig B.1	Extensión maximal de Schwarzschild. . . . .	98
Fig B.2	Diagrama de Minkowski compactificado. . . . .	99
Fig B.3	Espacio-tiempo de Vaidya. . . . .	102
Fig D.1	Aproximación para los coeficientes de Bogoliubov efectivos. . . . .	117

## ACRÓNIMOS

---

- ADM Arnowitt, Deser y Misner. Formulación de la Relatividad General como problema de datos iniciales.
- K-G Oskar Klein y Walter Gordon. En referencia a la ecuación que describe el campo escalar libre en teoría cuántica de campos y también al producto interno que se define en el espacio de soluciones de esta ecuación.
- CGHS Callan, Giddings, Harvey y Strominger. Modelo de gravedad 1+1 dimensional acoplada a un campo dilatónico.

## NOMENCLATURA

---

### CONSTANTES UNIVERSALES

- G Constante de gravitación universal.  $G = 6,67430(15) \times 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$
- c Velocidad de la luz en el vacío.  $c = 2,99792458 \times 10^8 \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
- $\hbar$  Constante de Planck (por radianes).  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h = 6,62607015 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$
- $k_B$  Constante de Boltzmann.  $k_B = 1,380649 \times 10^{-23} \text{J} \cdot \text{K}^{-1}$
- $M_P$  Masa de Planck.  $M_P = \sqrt{\hbar c/G} = 2,176434(24) \times 10^{-8} \text{kg}$
- $l_P$  Longitud de Planck.  $l_P = \sqrt{\hbar G/c^3} = 1,616255(21) \times 10^{-35} \text{m}$
- $t_P$  Tiempo de Planck.  $t_P = \sqrt{\hbar G/c^5} = 5,39125(06) \times 10^{-44} \text{s}$
- $E_P$  Energía de Planck.  $E_P = M_P c^2 = 1,95608(02) \times 10^9 \text{J}$
- $A_P$  Área de Planck.  $A_P = (l_P)^2 = 2,61228(06) \times 10^{-70} \text{m}^2$

### FUNCIONES MÁS USADAS

- ln Logaritmo natural.
- $\Theta$  Escalón de Heaviside.
- sinc Seno cardinal.  $\text{sinc}(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{\sin(t)}{t}$
- Si Integral senoidal.  $\text{Si}(x) = \int_0^x \text{sinc}(t) dt$
- Ci Integral cosenoidal. Usamos la rama principal de  $\text{Ci}(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt$
- Ei Integral exponencial.  $\text{Ei}(x) = \text{p.v.} \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ ,  $x \neq 0$
- li Integral logarítmica.  $\text{li}(x) = \text{Ei}[\ln(x)]$
- $\Gamma()$  Función gamma. Extensión analítica (E.a.) de  $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ ,  $\Re(a) > 0$
- $\Gamma(,)$  Gamma incompleta superior. E.a de  $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$ ,  $\Re(a) > 0, x \geq 0$
- $\psi^{(0)}$  Función digamma.  $\psi^{(0)}(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$

## TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

- $\mathcal{H}$  Espacio de Hilbert de una partícula. Se contruye directamente del espacio de fases clásico y el producto interno.
- $\mathcal{F}$  Espacio de Fock. Es el espacio de Hilbert de la teoría de campos y se construye a partir de copias de  $\mathcal{H}$ .
- (,) En general se refiere al producto interno de Klein-Gordon. Para enfatizar se agrega subíndice *K-G* en alguna instancia.
- $\alpha^\dagger$  Operador de construcción. Notación se aclara con subíndices o dependencia funcional.
- $\alpha$  Operador de aniquilación. Notación se aclara con subíndices o dependencia funcional.
- $\beta_{\omega\omega'}$  Coeficiente  $\beta$  de Bogoliubov. Determina si el vacío *in* tiene contenido de partículas visto desde la región *out*. Acepta los superíndices (\*).
- $\rho_{\omega_1\omega_2}$  Matriz densidad. Mide la correlación entre modos de frecuencia  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en la construcción *out*. Acepta los superíndices (\*).
- $N_{\omega}$  Diagonal de  $\rho_{\omega_1\omega_2}$ . Acepta los superíndices (\*).
- (\*)Superíndices:
- H *Hawking*. Modelo de radiación de tiempos largos de Hawking.
- CS *Classical Shell*. Cascarón clásico más allá de la aproximación tiempos largos.
- QS *Quantum Shell*. Cascarón cuántico más allá de la aproximación tiempos largos.
- eff *Effective*. Aparece en el cálculo del cascarón cuántico para integrales que cumplen el papel de la cantidad referida (por analogía).

## GEOMETRÍA Y RELATIVIDAD GENERAL

- $g$  o también  $g_{\mu\nu}$ . Métrica lorentziana del espacio-tiempo con signatura  $(-+++)$ .
- $\sqrt{-g}$  Densidad canónica.  $\sqrt{-g} = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|}$ .
- $R_{\mu\nu}$  Tensor de curvatura de Ricci.
- R Escalar de Ricci.
- $T_{\mu\nu}$  Tensor de energía-momento.

## ESTRUCTURA ASINTÓTICA

## Minkowski/Vaidya

- $I^+$  Infinito nulo futuro. Donde llegan los rayos de luz que no terminan en la singularidad.
- $I^-$  Infinito nulo pasado. De donde vienen todas las trayectorias tipo luz.
- $i_+$  Infinito temporal futuro. A donde van todas las trayectorias sub-lumínicas que no terminan en la singularidad.
- $i_-$  Infinito temporal pasado. De donde vienen todas las trayectorias sub-lumínicas.
- $i_0$  Infinito espacial. Donde van todas las trayectorias espaciales que no terminan en la singularidad.

## CGHS

- $I_{R,L}^\pm$  Infinito nulo futuro (+) y pasado (-), derecho (R) e izquierdo (L). Idem a Minkowski pero duplicado pues los rayos hacia derecha e izquierda terminan en regiones distintas.
- $i_{R,L}^\pm$  Infinito temporal futuro (+) y pasado (-), derecho (R) e izquierdo (L). Idem a Minkowski pero duplicado cuando las trayectorias hacia derecha e izquierda terminan en puntos distintos.
- $i_{R,L}^0$  Infinito espacial (+) y pasado (-), derecho (R) e izquierdo (L). Idem a Minkowski pero duplicado pues las trayectorias hacia derecha e izquierda terminan en puntos distintos.

## OTRA NOTACIONES EN ESPACIO-TIEMPOS USADOS

- $H^\pm$  Horizonte de eventos (futuro o pasado). Superficies que separa causalmente del exterior a las trayectorias dentro del agujero negro ya sea hacia el futuro (+) o hacia el pasado (-).
- $R_S$  Radio de Schwarzschild. Radio que define el horizonte de eventos en el caso de un agujero negro eterno con simetría esférica.
- $v_S$  Coordenada nula en  $I^-$  de un cascarón fino colapsante de partículas sin masa.
- $v_0$  Coordenada nula en  $I^-$  del último frente de luz que escapa del colapso de un cascarón fino de partículas sin masa.

## ESCALAS TEMPORALES: EVAPORACIÓN DE UN AGUJERO NEGRO

- $t_{\text{evap}}$  Tiempo de evaporación del agujero negro asumiendo emisión térmica constante en un proceso cuasi-estacionario.
- $t_{\text{Page}}$  Tiempo en el que la entropía de entrelazamiento comienza a disminuir. Aproximadamente el tiempo necesario para emitir la mitad de la masa total.
- $t_{\text{scra}}$  Tiempo de codificación o scrambling. Necesario para *termalizar* la nueva información que cae a un agujero negro.





## INTRODUCCIÓN

---

El estudio de los agujeros negros ha estado fuertemente ligado al desarrollo de la teoría general de la relatividad como descripción de la interacción gravitatoria. De hecho, una de las primeras soluciones exactas encontradas para las ecuaciones de Einstein (la solución de Schwarzschild) describe un agujero negro eterno. En el apéndice B realizamos una descripción de esta y otras soluciones que representan el colapso de un sistema físico para formar un agujero negro. Hoy tenemos observaciones directas que confirman la aplicación de estos modelos a fenómenos que se presentan en la naturaleza, incluyendo agujeros negros formados por el colapso de estrellas y los agujeros negros supermasivos en el centro de muchas galaxias (incluida la nuestra). Hasta el momento todas las observaciones concuerdan con la relatividad general [67], incluyendo la existencia de un horizonte que separa causalmente el interior del exterior. Estas observaciones demuestran cuan robusta es la relatividad general en un amplio rango de escalas energética y distancia. No obstante, la teoría también predice la presencia de una singularidad (región de intensidad infinita del campo gravitatorio) encerrada dentro del horizonte. Más allá del blindaje experimental (debido al horizonte) propuesto en 1969 por Penrose y bautizado como *hipótesis de censura cósmica* [64], esta predicción es considerada como un indicador de un límite de la teoría. El consenso es que deben aparecer efectos cuánticos por encima de ciertas escalas de curvatura (o por debajo de ciertas escalas de tamaño) análogos a los efectos cuánticos que corrigen la ley de Coulomb de interacción entre cargas a escalas menores a  $10^{-13}$  m [46], obligando a reemplazarla por la electrodinámica cuántica. En el caso de los agujeros negros, dado que el tamaño del horizonte es del orden  $R = \frac{2GM}{c^2}$  ( $M$  es la masa del objeto,  $c$  la velocidad de la luz y  $G$  la constante de Newton), se espera que la teoría clásica no funcione cuando este tamaño coincide con la longitud de Compton  $\lambda = \frac{h}{Mc}$  del objeto. Esta escala es conocida como escala Planck y corresponde a una masa  $M_P \approx 2,2 \times 10^{-8}$  kg. A diferencia del caso electromagnético, que cuenta con la electrodinámica cuántica como teoría microscópica, no existe una propuesta plenamente satisfactoria como teoría de gravedad cuántica para sustituir a la relatividad general en estas regiones extremas. Al intentar aplicar los mismo métodos de teoría cuántica de campos que llevaron a la cuantización exitosa de la interacción electromagnética y las fuerzas nucleares, aparecen importantes dificultades técnicas (no-renormalizabilidad) y conceptuales (invariancia bajo cambios de coordenadas).

En este trabajo nos enfocamos en otro fenómeno asociado a los agujeros negros que muestra con claridad el conflicto entre la relatividad general y la teoría cuántica de campos. En el capítulo 2 describimos en detalle el contexto y el cálculo que llevó a la propuesta de Hawking sobre la emisión de radiación por parte un sistema astronómico que colapsa formando un agujero negro. El cálculo realizado por Hawking considera campos de materia fuera de un agujero negro descritos por la teoría cuántica de campos sobre un espacio-tiempo regido por relatividad general. La conclusión es que el agujero negro emite radiación térmica con una temperatura proporcional a la gravedad superficial en el horizonte. Como discutimos en la sección 2.2 este resultado encaja perfectamente en una interpretación termodinámica de la dinámica de los agujeros negros que se desarrolló de forma contemporánea al resultado de Hawking.

Desde el punto de vista experimental esta *radiación de Hawking* no parece ser relevante pues la temperatura predicha es muy baja para agujeros negros de masas estelares (aproximadamente  $10^{-8}\text{K}$ ) y aún menor para los agujeros negros observados en la naturaleza. Sin embargo, la existencia de un mecanismo de radiación habilita a cuestionarnos ¿que pasaría si se diera el tiempo suficiente para la radiación de una porción apreciable de su masa? Es más, la gravedad superficial en el horizonte, y por tanto la temperatura de la radiación, aumenta tanto como disminuye la masa. Esto generaría una emisión acelerada de la radiación y hace pensar en la eventual evaporación del agujero negro en caso de que este fenómeno pudiera continuar indefinidamente. Este proceso de evaporación es el centro de una contradicción conocida como *paradoja de la información* que también discutimos en el capítulo 2. Las dos versiones de la paradoja que discutimos en dicho capítulo tienen en común la tensión entre la descripción del sistema mediante la relatividad general (incluyendo la descripción termodinámica) y los postulados de la mecánica cuántica sobre la evolución (unitaria) del sistema. Usualmente la contradicción es presentada en términos de la incompatibilidad entre la noción termodinámica de entropía del agujero negro y la entropía microscópica como sistema cuántico y por eso la referencia a la información. La opinión mayoritaria en la comunidad es que la gravedad cuántica debería resolver la contradicción, pero al día de hoy no existe un modelo completo de gravedad cuántica que describa el proceso de colapso y evaporación de un agujero negro. A esto se suma la ausencia de evidencia experimental que permita discernir entre las diversas propuestas para su resolución. A pesar de un intenso esfuerzo reciente, esta paradoja promete seguir siendo objeto de debate y un escenario natural para testear las propuestas de gravedad cuántica actuales y futuras.

En este contexto nuestro trabajo apuesta a revisar el cálculo de Hawking asumiendo la existencia de una descripción cuántica de la

gravedad. En el capítulo 3 (complementado por el apéndice A) discutimos cuáles son los aspectos generales de una teoría cuántica de la gravedad que nos interesa introducir en nuestro modelo. En particular nos interesa considerar el efecto de la fluctuación del horizonte en el cálculo de Hawking. Debe enfatizarse que no necesitamos elegir ningún esquema completo de cuantización pero sí asumir la existencia de alguno con la característica discutidas allí. Luego, en el capítulo 5 (acompañado por el apéndice D) aplicamos estas ideas a un sistema de colapso gravitatorio con simetría esférica y también lo comparamos con un sistema análogo en dos dimensiones en el capítulo 6.

Cabe mencionar que el cálculo de Hawking sobre el que estamos proponiendo modificaciones tiene un conjunto de aproximaciones. Algunas de ellas son mantenidas en nuestro trabajo, pero otras son necesariamente revisadas. En particular, en el capítulo 4 discutimos cómo extender el cálculo original para incluir el inicio de la radiación en un sistema colapsante dado por la métrica de Vaidya. Este régimen transitorio ha sido estudiado en la literatura, pero no en la manera explícita que presentamos aquí. En sus trabajos originales Hawking argumentó que este transitorio no es universal sino que depende de los detalles del colapso. En cambio la radiación de tiempos largos tiene el perfil térmico (universal) comentado anteriormente. Como contrapartida, las escalas naturales se pierden y este es un punto fundamental en nuestro trabajo pues una de las conclusiones principales es el surgimiento de una nueva escala de tiempo que no está presente si no se considera la fluctuación de la geometría. Esta escala de tiempo, conocida en la literatura como *tiempo de codificación o scrambling*, ha aparecido en numerosos trabajos relacionada con la termodinámica de agujeros negros. En la sección 2.3.4 discutimos dicha escala y las posibles conexiones con la paradoja de la información. En nuestro trabajo esta escala marca un alejamiento importante de la radiación térmica muy anterior al tiempo típico de evaporación. El efecto parece relevante para resolver la paradoja pero desafortunadamente, dado que nuestro modelo es una extensión de un cálculo semiclásico que describe solamente la radiación, no tenemos una imagen clara del proceso dinámico detrás de este efecto. Sólo contamos con su huella en la radiación resultante. Por otro lado, dificultades en el cálculo numérico nos impiden, por ahora, describir la dinámica de tiempos largos. Esperamos que la aplicación de estas ideas a otros modelos que presentan radiación de Hawking puede ayudar a entender el mecanismo. De especial interés son los trabajos comentados al final de la sección 2.3.3 donde se ha avanzado en la descripción cualitativa del efecto de la gravedad cuántica sobre el sistema gravitatorio, pero sin describir en detalle la dinámica de la radiación de Hawking.

Finalmente, en la sección 2.3.5 discutimos otra camino que recientemente ha despertado interés como solución a la paradoja de la información. Según esta propuesta el cálculo de Hawking estaría ig-

norando partículas de muy baja energía, remanentes del proceso de colapso gravitatorio y posterior evaporación, las cuales darían cuenta de la información en una infinidad de *cargas asintóticas*. La formalización de estas ideas para ser aplicadas a la formación y evaporación de un agujero negro aún está incompleta, pero sigue siendo interesante explorarlo, al menos porque resalta la relevancia de las propiedades asintóticas del campo gravitatorio a través de la simetría *BMS* y sus extensiones.

Parte I

CIMIENTO DE LA TESIS



## RADIACIÓN DE HAWKING

---

### 2.1 RESULTADO SEMI-CLÁSICO DE HAWKING

#### 2.1.1 *Modelo de sistema colapsante (cascarón nulo)*

Un modelo simple de espacio-tiempo que describe la formación de un agujero negro es el de una cascarón esférico fino compuesto por partículas de masa nula que colapsa a la velocidad de la luz. La métrica que lo describe es un caso particular de una solución de las ecuaciones de Einstein conocida como métrica de Vaidya (ver Apéndice B) cuya expresión en coordenadas entrantes de Eddington-Finkelstein es

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2M\theta(v - v_s)}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (2.1)$$

siendo  $\theta$  el escalón de Heaviside,  $r$  el radio de esferas concéntricas y  $v$  una coordenada nula que caracteriza rayos de luz entrantes hacia el origen ( $r = 0$ ). Los parámetros de este modelo son  $v_s$ , que representa la posición del cascarón, y  $M$ , que representa la masa (energía total) del mismo. En la expresión anterior hemos usado unidades naturales  $G = c = 1$ .

Esta métrica es esféricamente simétrica pero no tiene un agujero negro eterno sino que consiste en un cascarón esférico arbitrariamente grande que reduce su radio a la velocidad de la luz hasta atravesar su radio de Schwarzschild  $R_S = 2M$ . A partir de entonces el cascarón sigue su colapso hacia una singularidad ( $r = 0$ ) en una región aislada del exterior por un horizonte de eventos ( $H^+$ ).

Como discutimos en mayor detalle en el apéndice B, la región interior al cascarón ( $v < v_s$ ) es una esfera en el espacio-tiempo de Minkowski que se reduce con el tiempo mientras que la región exterior ( $v > v_s$ ) es un trozo del espacio-tiempo de Schwarzschild y posee una singularidad en  $r = 0$ . El diagrama de Penrose-Carter de este espacio-tiempo se presenta en la figura 2.1, incluyendo las regiones asintóticas  $I^-$  (infinito nulo pasado),  $I^+$  (infinito nulo futuro),  $i_-$  (infinito temporal pasado),  $i_+$  (infinito temporal futuro) e  $i_0$  (infinito espacial). Estas regiones asintóticas junto con  $H^+$  constituyen el borde de la región exterior del agujero negro. Es allí donde estudiaremos la radiación predicha por Hawking en 1974 [37].

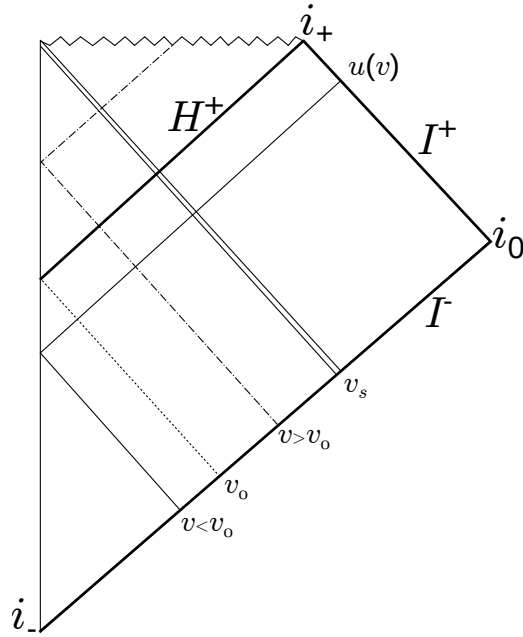


Figure 2.1: Diagrama de Penrose-Carter de un cascarón colapsante.  $v_s$  es la posición en  $I^-$  del cascarón. Los rayos de luz anteriores a  $v_0$  alcanzan  $I^+$ , los posteriores quedan atrapados en el agujero negro.

Antes de pasar al resultado de Hawking es importante identificar en  $I^-$  el *último rayo de luz*<sup>1</sup> cuya coordenada nula es

$$v = v_0 = v_s - 4M,$$

marcando una distinción entre dos regiones de  $I^-$ . Todos los rayos de luz que parten previamente de  $I^-$  ( $v < v_0$ ) logran llegar al centro de la esfera ( $r = 0$ ) antes de la formación del horizonte  $H^+$  y escapar a  $I^+$ . En cambio, los rayos posteriores ( $v > v_0$ ) no logran llegar al centro antes de la formación del horizonte y por tanto no logran escapar del agujero negro. El último rayo llega al centro de la esfera en el momento exacto de la formación del horizonte. En el caso de los rayos que escapan ( $v < v_0$ ) se puede calcular de forma exacta el punto en  $I^+$  al que llegan. En coordenadas salientes de Eddington-Finkelstein es

$$u(v) = v - 4M \ln \left( \frac{v_0 - v}{4M_0} \right), \quad (2.2)$$

donde  $M_0$  es un parámetro arbitrario que usualmente se elige igual a  $M$ .

<sup>1</sup> Usamos la expresión rayo de luz para describir frentes de luz esféricas: en el digrama de Penrose-Carter las líneas a  $45^\circ$  representan una esfera que se comprime a la velocidad de la luz (rayo de luz entrante) o se expande a la velocidad de la luz (rayo de luz saliente).



### 2.1.2 Cuantización del campo escalar

La radiación de Hawking incluye contribuciones de todos los campos cuánticos, pero la física de este fenómeno es capturada por el ejemplo más simple, el de un campo escalar sin masa. Este es el ejemplo elegido por Hawking en su trabajo inicial y es el mismo que utilizaremos en nuestro trabajo.

La cuantización canónica del campo escalar sobre espacio-tiempos globalmente hiperbólicos es un proceso estandar que se encuentra en los libros de texto [15, 62, 82]. Brevemente, consiste en definir un espacio de Hilbert ( $\mathcal{F}$ ) donde viven los estados del campo y un conjunto de operadores básicos de creación ( $a^\dagger$ ) y aniquilación ( $a$ ) sobre dicho espacio.

A partir de las soluciones complejas de la ecuación de Klein-Gordon (K-G), es decir de la ecuación de onda relativista del campo escalar,

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi = 0 \quad (2.3)$$

y del producto de K-G

$$(\Phi_1, \Phi_2) = -i \int_\Sigma (\Phi_1 \nabla_\mu \Phi_2^* - \Phi_2^* \nabla_\mu \Phi_1) d\Sigma^\mu \quad (2.4)$$

siendo  $\Sigma$  una hipersuperficie de Cauchy<sup>2</sup>, se construye un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}$  formado por soluciones de dicha ecuación. Un punto central en la construcción es que el producto K-G no es definido positivo para cualquier par de soluciones de la ecuación de K-G. La elección de un conjunto de dichas soluciones es una libertad asociada a la cuantización y coincide con la elección del estado de vacío de la teoría cuántica. Partiendo de  $\mathcal{H}$  (llamado espacio de Hilbert de una partícula) se construye el espacio de Hilbert de la teoría (espacio de Fock) como

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes^n \mathcal{H}), \quad (2.5)$$

donde el primer sumando ( $n = 0$ ) está generado por el estado de vacío que suele escribirse  $|0\rangle$ . De forma estandar se definen operadores de creación  $a^\dagger$  y aniquilación  $a$  que actúan sobre  $\mathcal{H}$  y cumplen

$$\begin{aligned} [a(\phi_1), a^\dagger(\phi_2)] &= \hbar (\phi_1, \phi_2) \\ [a(\phi_1), a(\phi_2)] &= 0 \\ [a^\dagger(\phi_1), a^\dagger(\phi_2)] &= 0 \\ a(\phi_1) |0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

En el caso del espacio-tiempo plano hay una elección privilegiada que consiste en considerar una coordenada de tiempo global  $t$  y un conjunto  $\{\phi_\omega\}_{\omega>0}$  de soluciones de la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_\omega(\vec{x}, t) = -i\omega \phi_\omega(\vec{x}, t) \quad (2.7)$$

<sup>2</sup> Este producto no depende de  $\Sigma$  para soluciones de la ecuación de K-G

como base de soluciones *de frecuencia positiva* por lo cual

$$(\phi_\omega, \phi_\omega) = 2\omega \int d^3\vec{x} |\phi_\omega(\vec{x}, t)|^2 > 0. \quad (2.8)$$

En esta base, cualquier solución real de la ecuación de K-G se escribe como un desarrollo de la forma

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int a(\omega) \phi_\omega(\vec{x}, t) + c.c.. \quad (2.9)$$

Típicamente se elige el conjunto de ondas planas

$$\phi_{\vec{k}}(\vec{x}, t) = \frac{e^{i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)}}{\sqrt{16\pi^3\omega}} \quad (2.10)$$

con  $\omega = \|\vec{k}\|$ , el cual está delta-normalizado por

$$(\phi_{\vec{k}}, \phi_{\vec{k}'}) = \delta(\vec{k} - \vec{k}'). \quad (2.11)$$

Asociados a estas ondas planas se definen operadores de creación ( $a_{\vec{k}}^\dagger$ ) y aniquilación ( $a_{\vec{k}}$ ) que cumplen

$$\begin{aligned} [a_{\vec{k}_1}, a_{\vec{k}_2}^\dagger] &= \hbar\delta(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \\ [a_{\vec{k}_1}, a_{\vec{k}_2}] &= 0 \\ [a_{\vec{k}_1}^\dagger, a_{\vec{k}_2}^\dagger] &= 0 \\ a_{\vec{k}}|0\rangle &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Finalmente, en base a estos operadores se construye el llamado operador de campo que reconstruye la ecuación (2.9) a nivel de operadores, es decir,

$$\Phi(\vec{x}, t) = \int d^3\vec{k} a_{\vec{k}} \phi_{\vec{k}}(\vec{x}, t) + a_{\vec{k}}^\dagger \phi_{\vec{k}}(\vec{x}, t)^* \quad (2.13)$$

y representa las excitaciones posibles del campo escalar.

### *Espacio-tiempo asintóticamente plano*

Cuando el espacio-tiempo no es plano pero tiene regiones asintóticas planas entonces existen construcciones privilegiadas asociadas a cada una de esas regiones. Cada construcción consiste en considerar como base de funciones de frecuencia positiva aquellas que coinciden con ondas planas de frecuencia positiva en esa región asintótica. Cuando dicha región está en el pasado lejano se le suele llamar *in* y cuando está en el futuro lejano se le suele llamar *out*, en analogía con la construcción *in-out* de la teoría cuántica de campos. Se habla entonces de un vacío *in* y de un vacío *out* ya que cada construcción tiene un estado de vacío diferente.

Una consecuencia fundamental de la existencia de múltiples vacíos es que observadores que se encuentran en diferentes regiones asintóticas pueden ver un contenido material diferente. Por ejemplo, si un observador en la región *in* ve el campo en el estado de vacío  $|0\rangle_{in}$  entonces un observador en la región *out* detectará que el sistema no está en el estado de vacío  $|0\rangle_{out}$  a menos que ambos estados coincidan. Dos ejemplos de este fenómeno son el efecto Unruh, que invitamos al lector a explorar [15] y la radiación de Hawking, que discutiremos en este trabajo.

### *Coefficientes de Bogoliubov*

En 1958 Nikolai Bogoliubov y John George Valatin desarrollaron independientemente un método de estudio de teorías de superfluidez, que llamamos transformaciones de Bogoliubov, el cual demostró ser útil en otras áreas de teoría cuántica de campos y es una herramienta fundamental en el tratamiento de Hawking sobre la radiación de Agujeros Negros.

Asumamos nuevamente que queremos describir al campo escalar libre en un espacio-tiempo con dos regiones asintóticas planas *in* y *out*. Asociadas a la construcción *in* hay un conjunto de soluciones de frecuencia positiva<sup>3</sup>  $\phi_{\omega'}^{in}$ , que se completa con sus complejas conjugadas  $(\phi_{\omega'}^{in})^*$  y asociadas a la construcción *out* hay un conjunto de soluciones de frecuencia positiva  $\phi_{\omega'}^{out}$  que también se completa con  $(\phi_{\omega'}^{out})^*$ . Dado que ambos conjuntos son bases de soluciones de la ecuación de onda, pueden escribirse unas en función de otras mediante

$$\phi_{\omega}^{out} = \int d\omega' \alpha_{\omega\omega'} \phi_{\omega'}^{in} + \beta_{\omega\omega'} (\phi_{\omega'}^{in})^* \quad (2.14)$$

con

$$\alpha_{\omega\omega'} = (\phi_{\omega}^{out}, \phi_{\omega'}^{in}) \quad (2.15)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -(\phi_{\omega}^{out}, \phi_{\omega'}^{in*}). \quad (2.16)$$

Cada una de estas construcciones tiene un vacío ( $|0\rangle_{in}$  y  $|0\rangle_{out}$  respectivamente) y operadores de creación y aniquilación  $a_{\omega'}^{in\dagger}$ ,  $a_{\omega'}^{in}$  y  $a_{\omega'}^{out\dagger}$ ,  $a_{\omega'}^{out}$  respectivamente. Asumiendo que ambas construcciones dan lugar a las mismas excitaciones del campo (mismo operador campo) entonces la identidad anterior implica

$$a_{\omega}^{out} = \int d\omega' \alpha_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^{in} - \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^{in\dagger}. \quad (2.17)$$

A esta relación se le llamada transformación de Bogoliubov y a los coeficientes, coeficientes de Bogoliubov. Nótese que el coeficiente  $\beta$  tiene un rol central en que los vacíos sean diferentes pues

$$a_{\omega}^{out} |0\rangle_{in} = - \int d\omega' \beta_{\omega\omega'}^* a_{\omega'}^{in\dagger} |0\rangle_{in} \quad (2.18)$$

<sup>3</sup> Estamos omitiendo otros índices además de  $\omega$ . Por ejemplo, en el caso de las ondas planas se omitiría la dirección de propagación  $\vec{k}/\omega$ .

no se anula a menos que  $\beta_{\omega\omega'} = 0$ . Por ejemplo, si queremos medir el valor esperado del número de partículas de frecuencia  $\omega$

$$N_{\omega}^{\text{out}} = \frac{1}{\hbar} a_{\omega}^{\text{out}\dagger} a_{\omega}^{\text{out}}, \quad (2.19)$$

visto por un observador en la región *out* para el campo en el vacío *in*, entonces obtenemos que

$${}_{\text{in}} \langle 0 | N_{\omega}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \int d\omega' |\beta_{\omega\omega'}|^2. \quad (2.20)$$

Esto muestra explícitamente que se observarán partículas si y sólo si el coeficiente  $\beta_{\omega\omega'}$  es no nulo para algún rango de frecuencias  $\omega'$ . Un observable más general es la función de correlación entre modos de diferente frecuencia

$$\rho_{\omega_1\omega_2}^{\text{out}} = \frac{1}{\hbar} a_{\omega_1}^{\text{out}\dagger} a_{\omega_2}^{\text{out}}. \quad (2.21)$$

Esta tiene un valor esperado en el vacío que también depende exclusivamente de los coeficientes  $\beta$  mediante

$${}_{\text{in}} \langle 0 | \rho_{\omega_1\omega_2}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \int d\omega' \beta_{\omega_1\omega'} \beta_{\omega_2\omega'}^*. \quad (2.22)$$

En el resto del trabajo nos enfocaremos en estudiar estos operadores y por tanto sólo presentaremos cálculos de los coeficientes  $\beta$ .

### 2.1.3 El cálculo de Hawking

En el espacio-tiempo de Vaydia descrito previamente y discutido en detalle en el apéndice B se pueden identificar regiones asintóticamente planas y por tanto vacíos asociados a dichas regiones. Se identifica una región *in* al acercarnos a la superficie de Cauchy  $I^- \cup i^-$  en el pasado lejano y una región *out* al alejarnos al futuro lejano en  $I^+ \cup i^+$ . Sin embargo esta última superficie no es una superficie de Cauchy y por tanto debe ser completada. Para describir el campo en el exterior del agujero negro es natural elegir  $I^+ \cup i^+ \cup H^+$ . Esto trae consigo el problema de que no existe una parametrización privilegiada de  $H^+$ , lo cual impide una definición no ambigua de un vacío *out*. Sin embargo, la estructura causal del espacio-tiempo hace que ninguna información que se registre en  $H^+$  llegue a los observadores fuera del agujero negro. En los hechos esto implica que cualquier elección de soluciones de frecuencia positiva en  $H^+$  sea irrelevante para los observadores en el futuro lejano, en tanto permanezcan fuera del agujero negro.

Para comenzar la cuantización del campo escalar libre en el espacio-tiempo del cascarón colapsante necesitamos bases de soluciones de frecuencia positiva de la ecuación de K-G en las regiones asintóticas. Comenzamos por el estudio genérico de dichas soluciones.

Asumiendo que el campo se propaga en la métrica de Vaidya (fija) que es esféricamente simétrica es conveniente escribir las soluciones como una descomposición en armónicos esféricos. En coordenadas de Schwarzschild

$$\Phi(r, \theta, \phi, t) = \sum_{l,m} \frac{\varphi_l(r, t)}{r} Y_{l,m}(\theta, \phi) \quad (2.23)$$

donde  $\varphi_l(r, t)$  es solución de la ecuación

$$\left[ -4 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} - V_l(r, M(v)) \right] \varphi_l(r, t) = 0 \quad (2.24)$$

siendo  $u$  y  $v$  las coordenadas nulas (Eddington-Finkelstein) introducidas en el apéndice B. En esta expresión

$$V_l(r, M) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left[ \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (2.25)$$

con  $M(v) = 0$  dentro del cascarón ( $v < v_S$ ) y  $M(v) = M$  fuera este ( $v > v_S$ ). En estas coordenadas la ecuación representa una propagación sometida a un potencial centrífugo en la zona cercana a  $r = 2M$ . Dicho potencial cae a cero en las regiones asintóticas ( $r \rightarrow \infty$ ) y por tanto las soluciones de K-G se aproximan a las soluciones de

$$-4 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \varphi_l = 0, \quad (2.26)$$

que pueden escribirse como

$$\varphi_l = \varphi_l^{\text{out}}(u) + \varphi_l^{\text{in}}(v) \quad (2.27)$$

siendo  $\varphi_l^{\text{out}}$  y  $\varphi_l^{\text{in}}(v)$  funciones genéricas. Para cada una de estas familias de soluciones hay una elección natural de soluciones de frecuencia positiva (por descomposición en modos de Fourier). Eso da lugar a las construcción del vacío *in*, asociado a las soluciones  $\psi_{lm\omega}$  cuya forma asintótica en  $I^-$  está dada por

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ v = \text{cte.}}} \psi_{lm\omega'}(r, v, \theta, \phi) \cdot r = \frac{e^{-i\omega'v}}{4\pi\sqrt{\omega'}} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.28)$$

y al vacío *out* correspondiente a modos  $\chi_{lm\omega}$  con forma asintótica en  $I^+$  dada por

$$\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ u = \text{cte.}}} \chi_{lm\omega}(r, u, \theta, \phi) \cdot r = \frac{e^{-i\omega u}}{4\pi\sqrt{\omega}} Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (2.29)$$

Como se señaló anteriormente, la forma asintótica  $\chi$  no determina las soluciones de K-G unívocamente. Sin embargo, es posible separar el espacio de soluciones en dos familias disjuntas. Una familia tiene la forma asintótica  $\chi$  en  $r \rightarrow \infty, u = \text{cte.}$  y se anula en  $H^+$  ( $r = 2M$ ),

mientras que la otra es base de las soluciones que no se registran en  $I^+$  y tiene valor no cero en  $H^+$ . Los observables relevantes son independientes de la elección de modos de frecuencia positiva en  $H^+$  y por tanto sólo necesitamos asumir que tal elección fue hecha para definir el vacío *out*.

Una vez elegidos los modos *in* y *out* se puede pasar al cálculo de los coeficientes de Bogoliubov

$$\alpha_{\omega\omega'} = (\chi_{lm\omega}, \psi_{lm\omega'}),$$

$$\beta_{\omega\omega'} = -(\chi_{lm\omega}, \psi_{lm\omega'}^*).$$

donde el producto de K-G debe calcularse en una superficie de Cauchy.<sup>4</sup> La estrategia propuesta por Hawking [38] es utilizar la aproximación de óptica geométrica (ver esquema en la figura 2.2), que consiste en mapear los modos  $\chi_{lm\omega}$  hacia  $I^-$  como

$$\frac{e^{-i\omega u(v)}}{4\pi r\sqrt{\omega}} Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (2.30)$$

donde  $u(v)$  está determinado por el camino de los rayos de luz que salen de  $I^-$  a tiempo retardado  $v$  y llegan a  $I^+$  a tiempo avanzado  $u(v)$ , según la ecuación (B.12). Nótese que esta aproximación excluye la región con  $v > v_0$  pues los rayos de luz que salen de esta región no llegan a  $I^+$ . Por ahora asumiremos la validez de la misma y la discutiremos más adelante.

Ahora, los coeficientes de Bogoliubov pueden calcularse proyectando los modos *out* a  $I^-$  y sustituyendo la expresión para  $u(v)$ . Así obtenemos,

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv \exp\left(-i\omega \left[v - 4M \ln\left(\frac{v_0 - v}{4M_0}\right)\right] - i\omega'v\right). \quad (2.31)$$

Dado que los modos considerados no son normalizables, en general se obtiene divergencias en las integrales. Una opción alternativa es considerar paquetes de onda localizados en frecuencia y tiempo. Por ejemplo,

$$\chi_{lmn\omega_j} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{u_n \omega_i} \chi_{lm\omega}, \quad (2.32)$$

son una base de completa y numerable de paquetes centrados en el tiempo avanzado  $u_n = \frac{2\pi n}{\varepsilon}$ , y en la frecuencia  $\omega_j = (j + \frac{1}{2})\varepsilon$ . La elección del parámetro  $\varepsilon$  dependerá de la información que querramos

<sup>4</sup> Nótese que hemos omitido la dependencia en  $l$  y  $m$  de los coeficientes, adelantándonos a que en la aproximación de óptica geométrica los coeficientes son independientes de  $l$ ,  $m$  y diagonales en estos índices. Alternativamente, podemos pensar que estamos estudiando exclusivamente los modos esféricamente simétricos ( $l, m = 0$ ), para los cuales la aproximación es mejor.

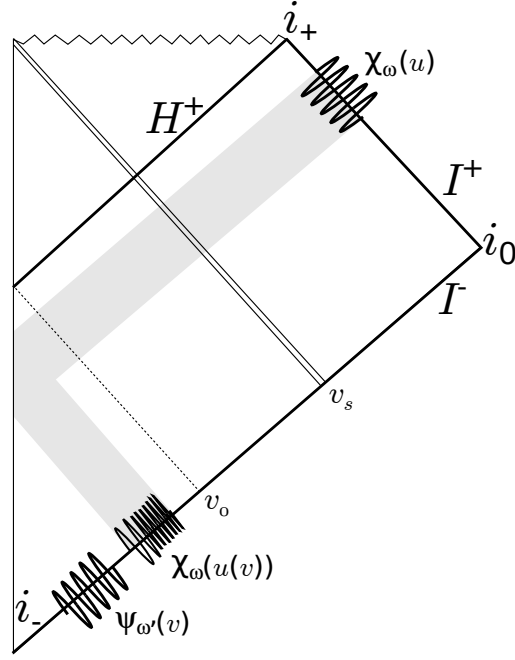


Figure 2.2: En el espacio-tiempo del cascarón colapsante, esquema de la proyección -bajo la aproximación de óptica geométrica- de los modos *out*  $\chi_{\omega}$  sobre la superficie  $I^{-}$  donde la base natural es de modos *in*  $\psi_{\omega'}$ .

obtener. En particular, si queremos obtener información detallada en el tiempo, deberemos elegir un parámetro  $\epsilon$  adecuadamente grande.

Esta nueva base es una combinación lineal de modos de ondas planas y entonces podemos seguir trabajando con las ondas planas e introducir los paquetes al final del cálculo para obtener cantidades finitas. Esta estrategia simplificará los cálculos.

Además de la aproximación de óptica geométrica, el cálculo original de Hawking asume que los rayos parten de  $I^{-}$  justo antes de la formación del horizonte y llegan a  $I^{+}$  a tiempos largos.<sup>5</sup> En ese caso, se considera la aproximación adicional

$$u(v) = v - 4M \ln \left( \frac{v_0 - v}{4M_0} \right) \approx v_0 - 4M \ln \left( \frac{v_0 - v}{4M_0} \right). \quad (2.33)$$

Definiendo la nueva variable de integración  $x \equiv \frac{v_0 - v}{4M_0}$  se obtiene

$$\beta_{\omega\omega'}^H = -\frac{4M_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dx e^{-i\omega[v_0 - 4M \ln(x)] - i\omega'(v_0 - 4M_0 x)} e^{-\epsilon x}, \quad (2.34)$$

donde el regulador  $\epsilon$  se agrega para que la integral sea absolutamente convergente, lo cual es necesario al estar usando una base de ondas

<sup>5</sup> La justificación es que esta aproximación de óptica geométrica es válida en ese caso para cualquier frecuencia.

planas. El superíndice H resalta que estamos en la aproximación de tiempos largos de Hawking. Usando la identidad

$$\int_0^{\infty} dx e^{a \ln(x)} e^{-bx} = e^{-(1+a) \ln(b)} \Gamma(1+a), \quad \text{Re}(b) > 0 \quad (2.35)$$

y la prescripción usual para el logaritmo de un número complejo, podemos tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  y obtener

$$\begin{aligned} \beta_{\omega\omega'}^H &= -\frac{i}{2\pi} \frac{e^{-i(\omega+\omega')v_0}}{\sqrt{\omega\omega'}} e^{-2\pi M\omega} \Gamma(1+4M\omega i) e^{-4M\omega i \ln(4M_0\omega')} \\ &= \sqrt{\frac{4M}{2\pi\omega'}} \frac{e^{-i(\omega+\omega')v_0} e^{i\phi(4M\omega)}}{\sqrt{\exp(8M\pi\omega) - 1}} e^{-4M\omega i \ln(4M_0\omega')}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

El último paso se logra identificando módulo y fase de la función gamma mediante las identidades

$$\Gamma(ix) = \sqrt{\frac{\pi}{x \sinh(\pi x)}} e^{i\phi(x)}, \quad \phi(x) = \text{Im} [\ln(\Gamma(ix))]. \quad (2.37)$$

A partir del coeficiente de Bogoliubov podemos calcular valores esperados de observables como la matriz densidad

$$\rho_{\omega_1, \omega_2}^H = {}_{\text{in}} \langle 0 | \rho_{\omega_1, \omega_2}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}}, \quad (2.38)$$

donde hemos agregado el superíndice H para indicar que se trata del cálculo original de Hawking. Entonces

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1, \omega_2}^H &= \int_0^{\infty} d\omega' \beta_{\omega_1, \omega'}^H (\beta_{\omega_2, \omega'}^H)^* = \frac{e^{-i(\omega_1 - \omega_2)v_0} e^{i[\phi(4M\omega_1) - \phi(4M\omega_2)]}}{\sqrt{[\exp(8M\pi\omega_1) - 1][\exp(8M\pi\omega_2) - 1]}} \times \\ &\times \frac{4M}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{1}{\omega'} e^{-i4M(\omega_1 - \omega_2) \ln(4M_0\omega')} = \left[ \begin{array}{l} y = 4M \ln(4M_0\omega') \\ dy = 4M \frac{d\omega'}{\omega'} \end{array} \right] = \\ &= \frac{e^{-i(\omega_1 - \omega_2)v_0} e^{i[\phi(4M\omega_1) - \phi(4M\omega_2)]}}{\sqrt{[\exp(8M\pi\omega_1) - 1][\exp(8M\pi\omega_2) - 1]}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-i(\omega_1 - \omega_2)y} \\ &= \frac{1}{e^{8M\omega_1\pi} - 1} \delta(\omega_1 - \omega_2). \end{aligned} \quad (2.39)$$

Esto significa que la radiación no presenta correlaciones entre frecuencias distintas y que el número de partículas (la diagonal de  $\rho$ ) tiene un perfil de radiación térmica de temperatura

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G M k_B}, \quad (2.40)$$

donde hemos reincorporado la dependencia en  $c$  y  $G$ . Al tratarse de ondas planas, el valor esperado del número de partículas total es infinito

$$N_{\omega}^H = {}_{\text{in}} \langle 0 | \rho_{\omega\omega}^{\text{out}} | 0 \rangle_{\text{in}} = \frac{1}{e^{8M\omega\pi} - 1} \delta(0) \quad (2.41)$$

pues estamos sumando la radiación emitida durante todo tiempo. En el apéndice C.1.1 presentamos un cálculo alternativo que no presenta



divergencias en los pasos intermedios al trabajar directamente con una base de paquetes de onda (2.32) centrados en el tiempo  $u_n = \frac{n\pi}{\varepsilon}$  y en frecuencia  $\omega_j = (j + \frac{1}{2})\varepsilon$ . De todos modos, podemos introducir los paquetes en este punto del cálculo, obteniendo las cantidades finitas

$$\rho_{\omega_j, \omega_k}^H(u_n) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} d\omega_1 d\omega_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)u_n} \rho_{\omega_1, \omega_2}^H = 0 \quad j \neq k \quad (2.42)$$

y

$$\begin{aligned} N_{\omega_j}^H(u_n) &= \rho_{\omega_j, \omega_j}^H(u_n) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega_1 d\omega_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)u_n} \rho_{\omega_1, \omega_2}^H \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} \frac{d\omega}{e^{8M\omega\pi} - 1} = \frac{1}{e^{8M\omega_j\pi} - 1} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.43)$$

donde  $O(\varepsilon)$  es una corrección pequeña si  $8\pi M\varepsilon \ll 1$  y  $\varepsilon \ll \omega_j$ . Este es el famoso resultado de Hawking, que conecta con la interpretación termodinámica de los agujeros negros como sistemas en equilibrio térmico que discutiremos a continuación. Nótese que la emisión de partículas resulta independiente del tiempo, pero esto es válido sólo para tiempos largos. En el capítulo 4 discutiremos el resultado cuando se abandona esta aproximación.

Si bien la frecuencia de referencia  $\varepsilon$  es arbitraria, a la luz del resultado obtenido, tenemos un criterio para fijar una cota superior. La radiación térmica tiene su pico de emisión en la frecuencia  $\omega_{\max}$  que cumple

$$8\pi M\omega_{\max} = \chi_0 \sim 2,82144 \quad (2.44)$$

de acuerdo a la ley de desplazamiento de Wien<sup>6</sup> y entonces  $\varepsilon$  debería ser menor a  $\omega_{\max}$  para tener una resolución que nos permita distinguir el comportamiento de bajas y altas frecuencias. Consideremos entonces

$$8\pi M\varepsilon = \frac{1}{k}, \quad k > 1. \quad (2.45)$$

En adelante fijaremos  $k$  de acuerdo a las necesidades del observable que querramos estudiar.

## 2.2 TERMODINÁMICA DE AGUJEROS NEGROS

Al inicio de la década de 1970 un conjunto de resultados sobre la mecánica de los agujeros negros en el contexto de la relatividad general mostró una sorprendente analogía con las leyes de la termodinámica.

<sup>6</sup> El resultado se obtiene maximizando la radiancia espectral, la cual es proporcional a  $\omega^3 [\exp(8\pi M\omega) - 1]^{-1}$

El resultado de Hawking sobre la radiación térmica fue una pieza clave de evidencia en este sentido como veremos a continuación, pero también es la raíz de una paradoja que nos persiste hasta el día de hoy y que discutiremos en la siguiente sección.

A inicios de la década mencionada se avanzaba fuertemente en la descripción de los agujeros negros en el marco de la relatividad general y al mismo tiempo surgían ejemplos de aparentes violaciones de las leyes de la termodinámica debidas a la interacción de materia ordinaria con agujeros negros. Entonces aparecieron propuestas de asignarle una nueva noción de entropía a estos sistemas. Bekenstein sugirió que el área ( $A$ ) del horizonte de eventos [13] era un candidato natural y aventuró, por argumentos dimensionales, que

$$S \propto k_B \frac{A}{A_P}, \quad (2.46)$$

donde  $A_P$  es el área de Planck. El teorema del área [36] era un resultado concreto que inspiraba esta idea. Asumiendo la conjetura de censura cósmica (ver detalles en la sección 12.1 de [81]) según la cual las singularidades asociadas a los agujeros negros están siempre ocultas del exterior por la presencia de un horizonte de eventos futuro ( $H^+$ ) y otras condiciones razonables sobre la energía (por ejemplo la condición débil) Hawking mostró que el área del horizonte de eventos nunca decrece

$$\delta A \geq 0. \quad (2.47)$$

Este resultado incluso tiene validez cuando se produce la colisión de dos agujeros negros. La enorme emisión de energía en forma de radiación gravitacional no impide que el área del agujero negro remanente sea mayor que la suma de las áreas de los agujeros negros originales. La interpretación de Bekenstein era que esto permitía una analogía con la segunda ley de la termodinámica si agregábamos esta nueva forma de entropía a la entropía usual de la materia circundante. De forma aislada se podría decir que esta es evidencia débil, pero trabajos posteriores [10, 14] extendieron la analogía al resto de las leyes de la termodinámica. Asociando el equilibrio termodinámico con las soluciones estacionarias de agujero negro se encuentra una analogía con la ley cero, donde la gravedad superficial en el horizonte cumple el rol de temperatura. Este tipo de soluciones de agujero negro poseen un campo de Killing [81]  $k^a$ , cuya norma es nula sobre la horizonte. La cantidad

$$\kappa \equiv -\frac{1}{2} \nabla_a k_b \nabla^a k^b \quad (2.48)$$

es la gravedad superficial sobre  $H^+$  y toma un valor constante para todos los observadores inerciales que pasan por dicha superficie. Nuevamente, ésta parece una analogía forzada y de hecho entra en conflicto

con la idea de que un agujero negro (como objeto termodinámico) debería tener una absorción perfecta frente a la materia circundante y por tanto su temperatura debería ser cero. Sin embargo existe un análogo para la primera ley que conecta las dos nociones anteriores.

Consideremos dos soluciones estacionarias de agujero negro con momento angular rodeadas de vacío (agujero negro de Kerr) cuyas masas son muy similares ( $M$  y  $M + \delta M$ ) al igual que sus momentos angulares ( $J$  y  $J + \delta J$ ). Estas soluciones se relacionan mediante

$$c^2 \delta M = \frac{c^2}{8\pi G} \kappa \delta A + \Omega_H \delta J \quad (2.49)$$

siendo  $\Omega_H$  la velocidad angular del horizonte. Dado que la energía del agujero negro (medida por un observador lejano) es  $E = Mc^2$  entonces esta ecuación diferencial es análoga a la forma diferencial de la primera ley para un proceso reversible

$$\delta E = T \delta S + \sum_i x_i \delta Y_i \quad (2.50)$$

donde  $Y_i$  y  $x_i$  son variables termodinámicas y sus conjugadas. El lado izquierdo puede generalizarse para otras soluciones de agujero negro, por ejemplo, agregando carga eléctrica y un entorno no-vacío [10]. El término que siempre está presente y permite la analogía es

$$T \delta S = \frac{c^2}{8\pi G} \kappa \delta A. \quad (2.51)$$

Hasta este punto la relación se mantiene en el terreno de la analogía. De hecho la expresión anterior no sirve para definir una temperatura a partir de  $\kappa$  y una entropía a partir de  $A$  de forma independiente. Es necesario incorporar más física y en particular la mecánica cuántica como intuyó Bekenstein. Es aquí donde entra el resultado de Hawking sobre la radiación térmica. En el caso del agujero negro con simetría esférica, la gravedad superficial es

$$\kappa = \frac{c^4}{4MG} \quad (2.52)$$

y por tanto la temperatura de la radiación térmica (de acuerdo a la fórmula 2.53) es

$$T = \frac{\hbar \kappa}{2\pi c k_B} \quad (2.53)$$

. Asumiendo que esta es la temperatura de equilibrio del agujero negro entonces la cantidad con unidades de entropía en la fórmula (2.51) es

$$S_{BH} = \frac{k_B}{4} \frac{A}{A_p}, \quad (2.54)$$

la cual es conocida como entropía de Bekenstein-Hawking. En definitiva, el resultado de Hawking permite darle significado a la gravedad superficial como temperatura y, a través de la analogía, justifica la expresión para la entropía de un agujero negro como una cantidad proporcional al área del horizonte (medida en unidades Planck). Desde entonces, la teoría de la información (y en particular de información cuántica) ha estado íntimamente ligada al estudio de los agujeros negros, siendo la paradoja de la información un asunto no resuelto que motiva intensos debates. Antes de discutir este punto es útil comentar en qué sentido  $S_{\text{BH}}$  se interpreta como entropía de agujero negro.

### 2.2.1 Entropía de von Neumann vs entropía termodinámica

Anteriormente argumentamos que la entropía de Bekenstein-Hawking se asigna a un agujero negro como sistema termodinámico. Sin embargo, sabemos que en los sistemas cuánticos existe una entropía asociada a los grados de libertad microscópicos y que se calcula en base a la matriz densidad  $\rho$  que representa al sistema mediante

$$S_{\text{vN}}(\rho) = -\text{Tr} [\rho \ln(\rho)]. \quad (2.55)$$

El subíndice vN indica que se trata de la entropía de von Neumann. En los sistemas cuánticos usuales la entropía termodinámica  $S_{\text{Termo}}$  es una versión de *grano grueso* de la expresión anterior. Es decir que se obtiene considerando el máximo de la entropía de von Neumann  $S_{\text{vN}}(\rho_i)$  para un conjunto de matrices densidad  $\rho_i$  correspondientes a los mismos valores de los observables macroscópicos (como energía y volumen). La definición implica inmediatamente la desigualdad

$$S_{\text{Termo}} \geq S_{\text{vN}}. \quad (2.56)$$

Asumamos que un agujero negro es un sistema cuántico descrito por una teoría de gravedad cuántica. Debido a que desconocemos dicha teoría no contamos con una expresión para la entropía de von Neumann. Sin embargo, sabemos que la entropía de Bekenstein-Hawking  $S_{\text{BH}}$  representa su entropía termodinámica y por tanto  $S_{\text{BH}}$  es una cota superior para  $S_{\text{vN}}$ . Como vemos, estos argumentos de teoría de la información nos permiten sacar conclusiones sin conocer el sistema cuántico subyacente y son muy comunes en la literatura. La paradoja que discutimos a continuación se apoya fuertemente en estas ideas.

## 2.3 EVAPORACIÓN Y PARADOJA DE LA INFORMACIÓN

La analogía termodinámica que acabamos de describir es uno de los mejores ejemplos de un fenómeno que requiere la conjunción de la mecánica cuántica y la gravedad. La presencia de la constante de Newton  $G$  y la constante de Planck  $\hbar$  en la expresión para la

temperatura es un claro indicativo de ello. El resultado semiclásico de Hawking (ubicado en el marco de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo) logra una predicción relevante sin entrar en el terreno de las teorías cuánticas de la gravedad e introduce un mecanismo de evaporación de los agujeros negros (como el propio Hawking discutió en su trabajo original) mediante radiación térmica. Tomados en conjunto dicho mecanismo y la expresión de Bekenstein para la entropía llevan a la conclusión de que el proceso de evaporación implica pérdida de información cuántica, entrando en conflicto con los postulados de la mecánica cuántica. Hay consenso en la comunidad que una teoría cuántica de la gravedad debería dar cuenta de estas contradicciones de forma natural. Hasta entonces es probable que siga siendo objeto de debate.

Vale la pena señalar que esta contradicción surge en un tiempo muy anterior a la evaporación total del agujero negro (tiempo de Page). La posibilidad de que desaparezca el agujero negro solo agudiza el problema. Esta segunda forma de la paradoja es objeto de mayores controversias dentro de la comunidad, con posturas que la catalogan como un grave problema que amerita replantearse postulados básicos de la mecánica cuántica o la relatividad general hasta posturas que niegan la existencia de una paradoja.

En este marco nuestro trabajo se centrará en discutir una posible consecuencia de la gravedad cuántica sobre el resultado de radiación térmica de Hawking que no ha sido considerado anteriormente en la literatura.

En el resto de la sección discutiremos las dos formas de la paradoja planteada. Sin ánimo de ser exhaustivos, comentaremos algunas propuestas de soluciones e introduciremos los tiempos característicos, los llamados *tiempo de Page*, *de evaporación* y *de codificación o scrambling*.

### 2.3.1 Resultado semiclásico de evaporación

Cuando se quiere estudiar el efecto de la radiación térmica en la evolución del agujero negro inmediatamente se entra en conflicto con la hipótesis básica de Hawking que permite el uso de métodos de teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo, pues la métrica no es fija. Sin embargo, considerando el caso de un agujero negro de masa  $M$  mucho mayor que la masa de Planck  $M_P$ , cuya temperatura de Hawking es muy baja, se puede asumir que la radiación térmica altera muy lentamente la masa y por tanto no cambia la geometría. La evolución es vista entonces como un proceso cuasi-estacionario.

Como una primera aproximación podemos considerar que la luminosidad de la radiación emitida está determinada por el perfil térmico dado por (2.43). De esta manera, la potencia emitida es

$$\dot{E} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty d\omega \frac{\hbar\omega}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1} = \frac{\pi (k_B T)^2}{12\hbar}. \quad (2.57)$$

Ahora, asumiendo que la fuente de la radiación es la energía contenida en el agujero negro, la conservación de la energía exige que  $\dot{E} = -\dot{M}c^2$ . Combinando ambos resultados con la expresión (2.53) para la temperatura de la radiación, tenemos una ecuación diferencial que da cuenta de la *back-reaction*

$$-\dot{M}c^2 = -\frac{\pi}{12\hbar} \left(\frac{\hbar\kappa}{2\pi c}\right)^2 = -\frac{\pi}{12\hbar} \left(\frac{\hbar}{2\pi c} \frac{c^4}{4MG}\right)^2.$$

En términos de la masa de Planck ( $M_P$ ) y el tiempo de Planck ( $t_P$ ) se simplifica a

$$\dot{M} = -\frac{1}{M^2} \frac{(M_P)^3}{t_P} \frac{1}{\alpha'}, \quad (2.58)$$

donde  $\alpha$  es la constante adimensionada que vale  $\alpha = 768\pi$ . Versiones más refinadas [28] dan otros valores a esta constante pero no cambian cualitativamente el resultado. Estos refinamientos incluyen considerar que la radiación no es de cuerpo negro sino de cuerpo gris o considerar radiación de campos más realistas que el escalar sin masa. Por ejemplo en [57] se considera la emisión por fotones, gravitones y neutrinos sin masa.

En cualquier caso, la ecuación diferencial tiene como solución

$$M(t) = M(0) \sqrt[3]{1 - \frac{t}{t_{\text{evap}}}} \quad (2.59)$$

siendo  $t$  el tiempo medido por un observador lejano,  $M(0)$  la masa inicial y

$$t_{\text{evap}} = \frac{\alpha}{3} t_P \left(\frac{M(0)}{M_P}\right)^3 \quad (2.60)$$

una escala de tiempo de evaporación. Para un agujero negro de masa solar este tiempo supera largamente la edad del universo, siendo del orden de  $10^{67}$  años. Corresponde aclarar que no hay motivos para confiar en la fórmula para la evaporación cuando  $M(t)$  llega a la escala Planck pero, como se ve en la figura 2.3, esto sucede en un tiempo muy próximo a  $t_{\text{evap}}$ , por lo cual el orden de magnitud sigue siendo confiable.

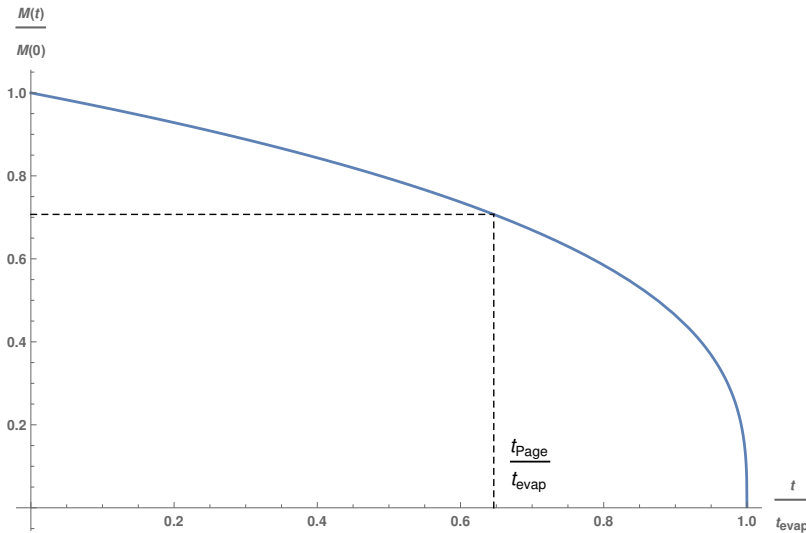


Figure 2.3: Evolución de la masa del agujero negro según modelo simple de evaporación por radiación de Hawking. Un agujero negro de escala estelar permanecerá lejos de la escala Planck hasta un tiempo muy cercano al tiempo de evaporación. Se marca el tiempo Page en que el área del agujero negro se reduce a la mitad.

### 2.3.2 Paradoja de la pérdida de información debido a la evaporación total

Si asumimos que el mecanismo de Hawking permite la evaporación total del agujero negro (más allá de que la escala temporal sea gigante para agujeros negros de masa estelar o mayores), entonces el diagrama de Penrose-Carter del espacio-tiempo cambia respecto de 2.1 y se sustituye por un esquema como el de la figura 2.4 donde el radio del horizonte de eventos futuro  $H^+$  crece hasta el radio de Schwarzschild en la etapa de formación, luego comienza a disminuir por efecto de la radiación térmica y finalmente desaparece junto con la singularidad en un tiempo del orden  $t_{\text{evap}}$  (para observadores lejanos). Para tiempos posteriores el diagrama se asemeja al del espacio-tiempo plano.

La paradoja se manifiesta cuando comparamos el estado cuántico del sistema previo a la formación del agujero negro y posterior a su evaporación, como advirtió el propio Hawking poco tiempo después de su resultado sobre radiación térmica [39].

Consideremos las superficies espaciales  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  de la figura 2.4 que representan respectivamente dos tiempos  $t_1$  y  $t_2$  en la evolución del sistema. Por simplicidad supongamos que en el tiempo  $t_1$  el sistema se encuentra en un estado puro cuya matriz densidad es  $\rho_1 = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ . Al formarse el agujero negro se activa el mecanismo de radiación térmica que permite su evaporación. A su vez este mecanismo genera entrelazamiento cuántico entre el interior y el exterior. Un observador lejano, que no tiene acceso al interior del horizonte, verá un estado térmico (no puro) dado por la matriz densidad  $\rho_{\text{termico}} = \text{Tr}_{\text{interior}}(\rho_1)$  donde la traza se toma con respecto a los estados en la región interior.

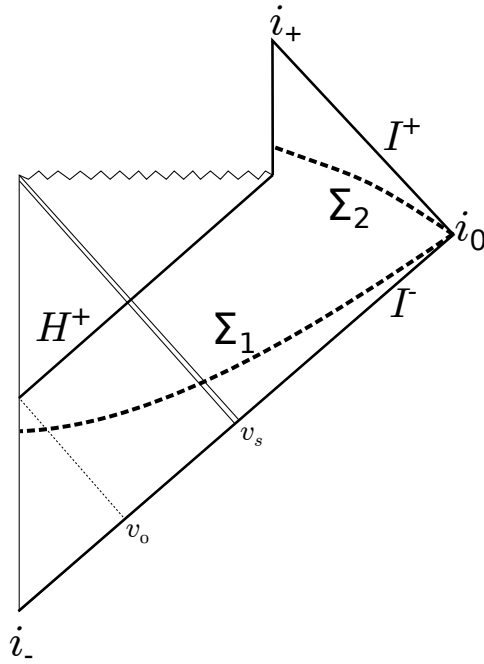


Figure 2.4: Diagrama de Penrose-Carter de un cascarón colapsante y su posterior evaporación por radiación térmica. La hiper-superficie  $\Sigma_1$  registra la información del sistema previo a la formación del agujero negro y la superficie  $\Sigma_2$  registra la información luego de la evaporación.

Este es el cálculo de Hawking que discutimos en la primera sección. Luego de un (largo) período de radiación térmica la evaporación reducirá el horizonte hasta desaparecer totalmente. Finalmente, un observador en tiempo  $t_2$  (sobre la superficie  $\Sigma_2$ ), seguirá viendo el estado térmico dado por  $\rho_{\text{térmico}}$ , pero eso será todo lo que exista. En definitiva, el sistema (aislado) habrá evolucionado en el tiempo desde un estado puro a uno térmico y esto de acuerdo a la mecánica cuántica es imposible si la evolución es unitaria. La información se habrá perdido en la singularidad.

Existen un sin número de enfoques sobre este problema. Uno de ellos, que destacamos por su simplicidad, es que la pérdida de información en este sentido no genera ningún tipo de paradoja pues el espacio-tiempo no es globalmente hiperbólico [80]. Esto significa que las hiper-superficies espaciales (como  $\Sigma_2$ ) posteriores a la evaporación no son superficies de Cauchy de todo el espacio-tiempo y por tanto no se puede reconstruir el pasado en base a datos de esas superficies. Este enfoque es compatible con la afirmación de que la teoría de gravedad cuántica que describa satisfactoriamente este proceso reemplazará la singularidad con alguna otra estructura que recibirá esa información perdida. Por ejemplo podría ser la formación de un "universo bebé" [40].



Varias objeciones se han planteado a este enfoque. Por ejemplo la posibilidad de la no conservación de la energía [9], que a su vez ha sido cuestionado [56, 80]. Otra objeción fuerte a esta posibilidad viene de la correspondencia AdS-CFT que establece una correlación entre un sistema gravitatorio en el espacio de Anti-de Sitter, el cual admite un proceso de creación de un agujero negro y su evaporación similar al descrito en esta sección, y una teoría de campos conforme en el borde de AdS. De esta manera, dado que la teoría en el borde es una teoría de campos que debe obedecer una evolución unitaria, la teoría gravitatoria correspondiente debería tener una evolución unitaria análoga [34, 51, 84].

Otro enfoque es la posibilidad de que la evaporación deje un remanente (estable o inestable) de escala Planck [31]. Esta opción se apoya en la idea de que la física de escala Planck puede ser radicalmente distinta, sin embargo entra en conflicto con la interpretación termodinámica de la entropía de Bekenstein-Hawking. Un agujero negro de ese tamaño no podría guardar la información completa del estado inicial del sistema colapsante pues esta puede ser, en principio, arbitrariamente grande.

En una línea similar existe la posibilidad de que la información sea liberada luego de que el agujero negro llega a la escala Planck en un último estallido. Sin embargo, este último estallido debe darse con una escasa cantidad de energía y por tanto el mecanismo de emisión debería ser un proceso radicalmente distinto a la radiación de Hawking, en un régimen dominado totalmente por la gravedad cuántica.

Otros enfoques toman posturas más radicales en cuanto a la modificación de las leyes de la física a escala macroscópica. Una de ellas es la posibilidad de que algún mecanismo impida la formación del agujero negro en primer lugar (*fuzzballs*), resolviendo la paradoja en su nacimiento [53]. Los efectos necesarios para frenar el colapso de un sistema con baja curvatura, donde sabemos que funciona la relatividad general, requieren efectos no locales muy importantes así como posibles violaciones a la conservación de energía y cantidad de movimiento.

Finalmente, una propuesta que ha despertado bastante interés, aunque no por ello es menos radical, es la idea de que existe una región muy próxima al horizonte del agujero negro donde las eventuales correlaciones entre interior y exterior son destruidas. Esta es la llamada hipótesis de *firewall* [4]. En este enfoque el exterior permanecería en un estado puro, modificando el perfil de la radiación que se observa desde lejos. La naturaleza radical de esta idea reside en que contradice el principio de equivalencia de la relatividad general. Desde el punto de vista de la gravedad clásica, en un ambiente de curvatura relativamente baja como el horizonte de un agujero negro macroscópico, un observador en caída libre no debería experimentar

efectos notables. Las violaciones de la causalidad son también problemáticas pues la formación del firewall debe darse junto al horizonte, que es una estructura global del espacio-tiempo.

La discusión anterior parte de asumir que el mecanismo de Hawking puede provocar la evaporación total del agujero negro (o al menos hasta llevarlo a la escala Planck). Esto habilita a desentenderse del problema asignando la responsabilidad de resolverlo a la física desconocida por debajo de la escala Planck. Sin embargo no es necesario llegar hasta esta escala para que se manifieste una paradoja. En la siguiente sub-sección discutiremos una segunda versión que se da en un régimen donde esperamos que funcione tanto la mecánica cuántica usual como la gravedad semiclásica.

Al final de la sección presentaremos una alternativa de resolución de esta paradoja que ha despertado interés reciente, donde las simetrías asintóticas del campo gravitatorio (simetría *BMS*) y las cargas asintóticas asociadas podrían dar cuenta de la información no registrada en la entropía de Bekenstein-Hawking.

### 2.3.3 *Tiempo de Page y la paradoja de la información*

En [58, 59] Page observó que el mecanismo de Hawking no puede dar cuenta del proceso de evaporación para tiempos muy largos ya que esto es incompatible con la interpretación de la fórmula de Bekenstein-Hawking como entropía termodinámica del agujero negro. De hecho esta incompatibilidad se manifiesta mucho antes de llegar a la escala Planck para un agujero negro macroscópico. Consideremos un sistema colapsante que forma un agujero negro (por ejemplo el cascarón nulo), con todos los campos materiales en un estado inicial puro (el vacío por ejemplo). Luego del colapso, al inicio de la radiación térmica, todo la entropía corresponde al estado cuántico del agujero negro y por tanto está acotada por la expresión de Bekenstein-Hawking. En paralelo surge el horizonte, que divide al sistema en dos (el interior y el exterior). Como ya mencionamos, la radiación de Hawking genera entrelazamiento entre el interior y el exterior y esto implica una entropía de entrelazamiento que crece a medida que se emite cada cuanto de radiación. También provoca que la masa del agujero negro disminuya y con ella el área del horizonte, que es proporcional a la entropía de Bekenstein-Hawking. Entonces, dado que la tasa de emisión de la radiación de Hawking es constante, llegará un tiempo finito en el cual la entropía de entrelazamiento del interior superará a su entropía de Bekenstein-Hawking. Esto constituye una contradicción pues la primera debería dar cuenta de una fracción de la entropía de von Neumann del agujero negro que, a su vez, está acotada por la primera como discutimos en la subsección 2.2.1. En [60] Page determinó que el tiempo en el cual ambas entropías se igualan, al que llamamos *tiempo de Page*, sucede cuando el agujero negro reduce su

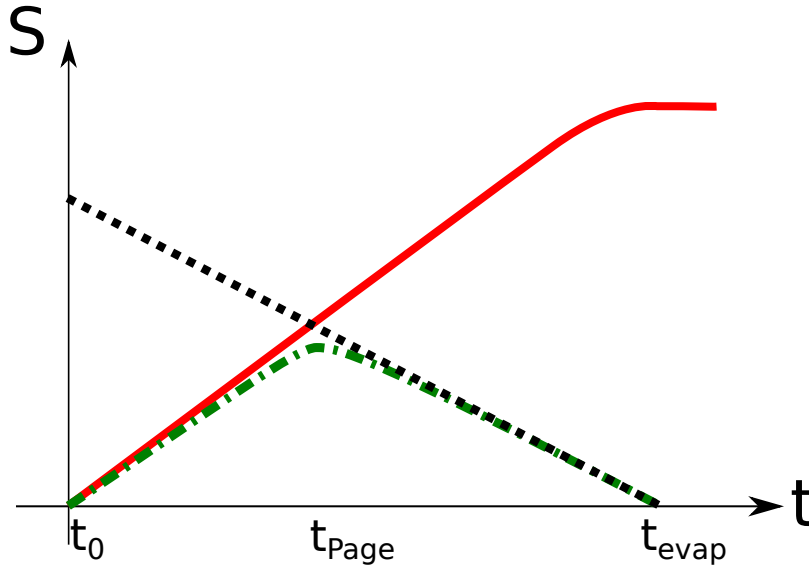


Figure 2.5: La radiación de Hawking comienza en  $t_0$  y genera entropía hasta la evaporación total (curva sólida roja). Al mismo tiempo el agujero negro comienza la evaporación y la entropía  $S_{\text{BH}}$  disminuye (curva punteada negra). La producción de entropía dentro del agujero negro debería seguir la curva verde de puntos y guiones y no la roja. La inconsistencia se manifiesta a partir de  $t_{\text{Page}}$ .

entropía aproximadamente a la mitad. Esto se muestra en el esquema 2.5 que se conoce como curva de Page. Usando el modelo sencillo de evaporación que lleva a la fórmula (2.59) se deduce que

$$t_{\text{Page}} \sim 0,65 t_{\text{evap}}. \quad (2.61)$$

Como se ve en el esquema de la figura 2.5 y también en la figura 2.3, el sistema gravitatorio clásico se encuentra muy lejos de la escala Planck y por tanto esta paradoja no puede ser resuelta por remanentes o estallidos finales. También es importante notar que los grados de libertad considerados incluyen posibles "universos bebé" u otros sustitutos para la singularidad en tanto esos grados de libertad estén reflejados en la entropía de Bekenstein-Hawking. No obstante, algunas propuestas de resolución de la paradoja de la evaporación total también son aplicables a esta segunda paradoja. Este es el caso de la hipótesis de firewall porque esta elimina el entrelazamiento entre el interior y exterior invalidando el argumento anterior, aunque recordemos que el costo es una modificación fuerte de la teoría de campos en la región cercana al horizonte.

Otras propuestas pueden encontrarse en el literatura, por ejemplo un resumen de opciones se encuentra en [52]. Dejamos una de ellas para ser discutida en la siguiente sección. Esta no requiere modificaciones a la física sobre el horizonte y es compatible con la termodinámica de

agujeros negros, sin embargo cuestiona un firme resultado sobre la evolución (clásica) de las soluciones de agujero negro.

Finalmente cabe mencionar que en una serie de trabajos recientes [1, 3, 63] que están resumidos en [2] se logra reproducir la curva de Page para un escenario de evaporación de agujero negro. En dichos trabajos se calcula la entropía de von Neumann del agujero negro mediante una extensión de la fórmula de Ryu-Takayanagi [70]. Asimismo se calcula la entropía de la radiación y se obtiene un resultado compatible con la curva de Page, libre de la paradoja de la información. Estos resultados son prometedores pero dejan varias interrogantes sin resolver. Principalmente no queda claro el mecanismo físico que cambia el perfil térmico de la radiación luego del tiempo Page. El hecho de que los cálculos se realicen en ejemplos de espacio-tiempos Euclideos tampoco ayudan a traducir estos resultados a los ejemplos de agujeros negros realistas.

#### 2.3.4 Tiempo de codificación o scrambling

En el contexto de la discusión de diferentes escalas temporales asociadas a la evaporación y a la paradoja de la información es interesante mencionar que existe una escala de tiempo corto asociado a la termalización de nueva información que cae a un agujero negro, es decir a la distribución de esta información entre sus grados de libertad internos. La misma ha aparecido en la literatura [42, 73] expresada como

$$t_{\text{scra}} \sim \frac{\hbar}{k_B T} \ln [S_{\text{BH}}], \quad (2.62)$$

donde  $T$  es la temperatura de Hawking y la entropía de Bekenstein-Hawking es medida en unidades Planck. Para un agujero negro del tipo considerado en nuestro trabajo

$$t_{\text{scra}} \sim \frac{R_S}{c} \ln \left[ \frac{R_S}{l_P} \right]$$

es del orden de 1ms para uno de masa solar ( $R_S \sim 3\text{km}$ ). Si bien dista mucho del tiempo de Page, ha aparecido reiteradamente en la literatura vinculada con la paradoja de la información. Originalmente se introdujo en relación a una de las propuestas para resolver la paradoja conocida como *complementaridad de agujeros negros* [77], análogo al principio de complementaridad de la mecánica cuántica pero aplicado a la medición de observables en el interior versus el exterior de los agujeros negros. Así mismo aparece en los trabajos mencionados en la subsección anterior que reproducen la curva de Page. En dicho contexto juega un rol en el cálculo de la entropía del interior del agujero negro. En el modelo de agujero negro cuántico de nuestro trabajo surge como una escala de tiempo importante en la cual la radiación de Hawking comienza a perder su carácter térmico.

La posible conexión entre estas instancias de aparición de  $t_{\text{scra}}$  aún no es clara.

### 2.3.5 *Simetrías asintóticas vs calvicie de los agujeros negros.*

En [41] se ha sugerido que una de las hipótesis que sustentan esta paradoja, el denominado *no hair theorem* puede estar errada. Este resultado establecido por Israel [44] para el problema con simetría esférica y luego extendido a soluciones más generales [22, 36, 45, 69] afirma que un sistema gravitatorio (clásico) que forma un agujero negro, llega a una solución estacionaria caracterizada sólo por su masa total  $M$ , su carga  $Q$  y su momento angular  $J$ . Esta idea se sintetiza en la frase atribuida a Wheeler *los agujeros negros no tiene pelo* y de allí la referencia repetida a la calvicie en la literatura. Esto implica que la entropía de Bekenstein-Hawking da cuenta de toda la entropía termodinámica del agujero negro una vez que llega al estado estacionario. En [41] se argumenta que el sistema gravitatorio admite una infinidad de cantidades conservadas debido a la simetría BMS [16, 71] o sus extensiones [11, 20], que lógicamente denominamos *pelo del agujero negro*. Desde un punto de vista de física de partículas estaría asociado a la emisión de partículas de muy baja energía que se denominan *partículas suaves*. En principio este reservorio de información podría dar cuenta de ambas versiones de la paradoja. Por un lado el sistema completo debe incluir estos grados de libertad, lo cual elimina la restricción de que la entropía de entrelazamiento esté limitada por la de Bekenstein-Hawking y por otro podría proporcionar un mecanismo para conservar la información completa del sistema original en caso de que la evaporación total fuera posible. La existencia de estas partículas suaves y la interpretación de las cargas conservadas es motivo de debate, especialmente en el contexto de espacio-tiempos con horizontes de eventos. Sin embargo, el avance en estas ideas en espacio-tiempos asintóticamente planos [21, 47, 75] genera expectativas en cuanto a su aplicación para entender esta paradoja.

Un punto cuestionado sobre la existencia de estas cargas es la imposición de *condiciones de paridad* [68], o de *identificación antipodal* [76] que a primera vista parece artificial. La necesidad de estas condiciones aparece tanto en la descripción de campo gravitatorio como de otros campos en espacio-tiempos asintóticamente planos. De hecho el formalismo es muy similar y las dificultades técnicas también. En [18] discutimos que estas condiciones pueden entenderse como la forma natural de conectar la definición de estas cargas asintóticas desde la infinidad nula pasada ( $I^-$ ) con la infinidad nula futura, a través del infinito espacial ( $i_0$ ). Esto fue hecho en espacio-tiempo plano para el campo electromagnético, pero la misma construcción se extiende naturalmente [66, 79] al campo gravitatorio. Sin embargo, todo esto es aplicable a un espacio-tiempo con la estructura asintótica del

espacio-tiempo de Minkowski. En el caso de un espacio-tiempo con un horizonte de eventos la definición de estas cargas sigue siendo un problema abierto. Recientemente ha habido avances en esta dirección [29], pero su relación con la paradoja de la información sigue en el terreno de lo especulativo.

## CUANTIZACIÓN DE UN CASCARÓN COLAPSANTE CON SIMETRÍA ESFÉRICA

---

Los sistemas gravitatorios con simetría esférica han sido ampliamente estudiados en la literatura debido a que en ellos se reduce sensiblemente la complejidad de las ecuaciones de Einstein. De hecho, la solución de Schwarzschild que repasamos en el apéndice B fue la primera solución exacta (no trivial) encontrada para dichas ecuaciones y de su estudio surgieron importantes conceptos asociados con la física de los agujeros negros como los horizontes y las singularidades. El propio trabajo original de Hawking sobre la radiación térmica considera un colapso con simetría esférica para simplificar los cálculos, siendo la métrica de Vaidya (2.1) un ejemplo de ese tipo de colapso.

Es esperable que la simetría esférica simplifique también la descripción del sistema gravitatorio a nivel cuántico. Mostrar esta afirmación será el objeto de este capítulo, pero es importante plantear de antemano una debilidad de este enfoque. Una cosa es imponer la simetría esférica en las ecuaciones de Einstein para encontrar una solución (clásica) y otra es empezar con una teoría Lagrangiana (o Hamiltoniana) reducida por la simetría esférica y estudiar las soluciones que surjan de ella. Incluso si las soluciones clásicas son las mismas, no es evidente que las teorías cuánticas provenientes de ambos enfoques deban coincidir. En otras palabras, no es evidente que la reducción por simetría y la cuantización sean procedimientos que conmuten.

La cuantización del problema con simetría esférica puede considerarse como un paso intermedio en tanto carecemos de una teoría completa de la gravedad cuántica y es esperable que los resultados del mismo capturen parcialmente la física del problema. En la primera sección haremos una descripción (a nivel clásico) del enfoque Hamiltoniano conocido como *midi-superespacio* y luego discutiremos los aspectos cuánticos de estos modelos que tomaremos en consideración. Vale la pena aclarar que en nuestro trabajo sólo se utilizan características que no dependen del esquema particular de cuantización, lo cual nos da mayor confianza en que los resultados tienen validez por fuera de esta aproximación.

### 3.1 ESPACIO DE FASES CLÁSICO

En la década de 1960 Wheeler introdujo la idea de *superespacio* para describir la gravedad en términos del *espacio* de geometrías como datos iniciales sobre una superficie tridimensional. A su teoría se la denomina a veces como *geometrodinámica* [83]. Sin embargo, el enfoque

canónico [5] de Arnowitt, Deser y Misner (ADM) que repasamos en el apéndice A.2 ha sido más utilizado en la literatura, tanto por sus ventajas para resolver las ecuaciones de Einstein de forma numérica como por su aplicación a la gravedad cuántica en el contexto de la ecuación de Wheeler-DeWitt [55]. Ésta funciona como una ecuación de Schrödinger para la gravedad cuántica definida justamente sobre un *superespacio*, pero su utilidad es limitada pues sólo ha sido resuelta en casos excepcionales. DeWitt [23] encontró soluciones para modelos cosmológicos reduciendo el problema gravitatorio a un conjunto finito de grados de libertad, en lo que se conoce como aproximación de *mini-superespacio*. La simetría esférica tiene un efecto similar y Kuchar acuñó el término *midi-superespacio* para distinguirlo del anterior pues en este caso se describe la gravedad en término de un conjunto finito de funciones libres. Kuchar [49] logró una descripción satisfactoria de las soluciones estacionarias con simetría esférica, lo cual también fue logrado en término de variables de Ashtekar [48].

En esta sección discutiremos como aplicar este enfoque a la simetría esférica en el caso de una colapso de un cascarón nulo [19, 50]. Describiremos el espacio de fases (clásico) de un sistema gravitatorio acoplado a un nube angosta de partículas sin masa identificando los observables (de Dirac) relacionados con la dinámica del cascarón. Las consecuencias de la cuantización de este sistema en el cálculo de Hawking serán discutidas en la siguiente sección.

Para describir el espacio de fases de un cascarón colapsante tratamos la geometría y el cascarón como variables dinámicas. Esto se puede hacer mediante la acción

$$S = S_{\text{EH}} + S_{\text{shell}} + [\text{término de borde}] \quad (3.1)$$

donde el primer término es la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{g} R, \quad (3.2)$$

con  $d^4x \sqrt{g}$  el elemento de volumen,  $R$  la curvatura escalar y el segundo término es

$$S_{\text{shell}} = \lim_{m \rightarrow 0} \int d\tau \sqrt{-\dot{q}_a(\tau) \dot{q}^a(\tau)} \quad (3.3)$$

con  $q^\alpha(\tau)$  la trayectoria del cascarón en el espacio-tiempo, asumiendo que tiene una masa en reposo  $m$  y se considera el límite de masa nula para obtener un cascarón que se mueve a velocidad  $c$ . Aplicando el principio de mínima acción (ver apéndice A.1), la métrica de Vaidya (2.1) es una solución esféricamente simétrica que se obtiene realizando variaciones de la acción respecto de las variables geométricas y del cascarón. Este camino nos llevaría a considerar un espacio de fases infinito dimensional, dificultando el camino hasta la cuantización. De forma alternativa consideremos sólo aquellas métricas que



tiene la estructura asintótica de la solución de Vaidya, que incluye la infinidad nula  $i^\pm$ , la infinidad espacial  $i_0$  y las infinitudes temporales  $i_\pm$ . En esta región asintótica se pueden definir condiciones asintóticas para los campos de materia y para la métrica. En el caso de la métrica asumiremos que se trata de soluciones asintóticamente planas (como la de Vaidya). Estas consideraciones de aspecto formal son esenciales para arribar a un espacio de fases con una estructura simpléctica bien definida.

En este punto podemos imponer la simetría esférica, la cual no afecta la estructura asintótica. Al integrar las variables angulares el problema se transforma, de manera efectiva, en uno bidimensional como el que discutiremos en el capítulo 6.

En el apéndice A.2 repasamos la formulación ADM en general. En el caso de sistemas con simetría esférica dicha formulación se reduce a considerar las métricas de la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + \Lambda^2 (dr + N^r dt)^2 + R^2 d^2\Omega \quad (3.4)$$

siendo  $d^2\Omega$  el elemento de ángulo sólido,  $N$  el *lapso*,  $N^r$  el *shift*,  $\Lambda > 0$  y  $R > 0$  todas funciones de las coordenadas  $r$  y  $t$  de Schwarzschild.

La acción reducida por simetría esférica es

$$S_{\text{shell}} = - \lim_{m \rightarrow 0} \int dt \left[ \hat{N}^2 - \hat{\Lambda}^2 (\dot{\mathbf{r}}(t) + \hat{N}^r)^2 \right]^{1/2} \quad (3.5)$$

para el cascarón (*shell*), con  $\hat{N}$  y  $\hat{N}^r$  el *lapso* y *shift* evaluados en la trayectoria del cascarón  $\mathbf{r}(t)$ . Mientras que la acción de Einstein-Hilbert es

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{G} \int dt dr \left[ -N^{-1} \left\{ R \left[ \dot{\Lambda} - (\Lambda N^r)' \right] (\dot{R} - R' N^r) + \frac{1}{2} \Lambda (\dot{R} - R' N^r)^2 \right\} + N \left( \Lambda^{-2} R R' \Lambda' - \Lambda^{-1} R R'' - \frac{1}{2} \Lambda^{-1} (R')^2 + \frac{1}{2} \Lambda \right) \right]. \quad (3.6)$$

donde se usa la notación  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial t} = \dot{(\cdot)}$  y  $\frac{\partial(\cdot)}{\partial r} = (\cdot)'$ .

Ahora podemos pasar a una descripción Hamiltoniana sobre superficies de tiempo constante, donde las variables canónicas son  $\mathbf{r}$ ,  $\Lambda$ ,  $R$  y sus momentos conjugados  $\mathbf{p}$ ,  $P_\Lambda$  y  $P_R$  respectivamente. La misma debe ser acompañada de condiciones asintóticas adecuadas. Siguiendo [50] se imponen

$$\Lambda(t, r) = 1 + M_\pm(t) |r|^{-1} + O^\infty(|r|^{-1-\epsilon}) \quad (3.7)$$

$$R(t, r) = |r| + O^\infty(|r|^{-\epsilon}) \quad (3.8)$$

$$P_\Lambda(t, r) = O^\infty(|r|^{-\epsilon}) \quad (3.9)$$

$$P_R(t, r) = O^\infty(|r|^{-1-\epsilon}) \quad (3.10)$$

$$N(t, r) = N_\pm(t) + O^\infty(|r|^{-\epsilon}) \quad (3.11)$$

$$N^r(t, r) = O^\infty(|r|^{-\epsilon}), \quad (3.12)$$

donde  $0 < \varepsilon \leq 1$  y  $O^\infty$  significa que la cantidad tiende a cero como el argumento cuando  $r \rightarrow \pm\infty$ . Cabe señalar que estas condiciones habilitan la existencia de un agujero negro previo al colapso del cascarón cuya masa es  $M_- \equiv M_-(-\infty)$  y que la extensión de la variable  $r$  a valores negativos permite representar la infinidad nula al otro lado de la extensión maximal del agujero negro de Schwarzschild (zona III de la figura B.1). El espacio-tiempo sin agujero negro previo se puede recuperar posteriormente fijando la masa inicial a cero.

En vez de considerar las variables anteriores, siguiendo [19] utilizaremos variables de Ashtekar (ver apéndice A.3) adaptadas a simetría esférica para representar los grados de libertad gravitatorios. Los pares de variables canónicas pasan a ser  $E^\varphi, K_\varphi$  y  $E^r, K_r$ , definidas por

$$\Lambda = \frac{E^\varphi}{\sqrt{|E^r|}} \quad (3.13)$$

$$P_\Lambda = -\sqrt{|E^r|}K_\varphi \quad (3.14)$$

$$R = \sqrt{|E^r|} \quad (3.15)$$

$$P_R = -2\sqrt{|E^r|}K_r - \frac{E^\varphi K_\varphi}{\sqrt{|E^r|}}. \quad (3.16)$$

En términos de estas nuevas variables el Hamiltoniano total resulta

$$H = \int dr \left[ -\tilde{N}' \left( -\sqrt{|E^r|} (1 + K_\varphi^2) + \frac{[(E^r)']^2 \sqrt{|E^r|}}{4(E^\varphi)^2} + F(\mathbf{r})\mathbf{p}\Theta(\mathbf{r} - \mathbf{r}) + 2M_- \right) \right. \\ \left. + \tilde{N}^r [-(E^r)'K_r + E^\varphi K_\varphi' - \mathbf{p}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r})] - N_- M_- + \frac{N_+}{2} (F(\mathbf{r})\mathbf{p} + M_-) \right]$$

donde el *lapso* y el *shift* han sido re-escalados a

$$\tilde{N} = N \frac{E^\varphi}{(E^r)^2}$$

$$\tilde{N}^r = N^r + \frac{2NK_\varphi \sqrt{|E^r|}}{(E^r)'}$$

y se ha introducido la función

$$F(x) = \sqrt{|E^r|} \left( -\frac{(E^r)'}{(E^\varphi)^2} + \frac{2K_\varphi}{E^\varphi} \right) \Big|_{r=x}. \quad (3.17)$$

Nótese que el Hamiltoniano se escribe como una combinación de vínculos, donde las funciones *lapso* y *shift* juegan el papel de multiplicadores de Lagrange.

Habiendo llegado a la formulación Hamiltoniana, puede fijarse la masa inicial  $M_- = 0$  para reducir el problema a un cascarón colapsante sin agujero negro previo.

Utilizando  $F$  pueden definirse los observables

$$M = F(\mathbf{r})\mathbf{p}/2 \quad (3.18)$$

$$V = -\int_{\mathbf{r}}^{\infty} dy \left[ F^{-1}(y) - 1 - \frac{2M}{y} \right] + \tau + \left[ \mathbf{r} + 2M \ln \left( \frac{\mathbf{r}}{2M} \right) \right] \quad (3.19)$$

donde  $\tau = \int dt N_+$  es un tiempo propio para un observador en el infinito. La primera función coincide con la masa ADM del agujero negro formado por el colapso del cascarón (ver discusión al final de A.2) y la segunda es una coordenada tipo Eddington-Finkelstein en la infinidad nula. Calculando corchetes de Poisson se obtiene que ambas funciones conmutan con los vínculos, lo cual los identifica como observables de Dirac y también que el corchete de Poisson entre ellos es

$$\{M, V\} = 1. \quad (3.20)$$

Estudiando el espacio de fases en términos de variables ADM se obtienen resultados equivalentes [35, 50]. En la siguiente sección discutiremos consecuencias de este último resultado asumiendo la existencia de una teoría cuántica consistente que describa este sistema.

### 3.2 TEORÍA DE CAMPOS EN ESPACIO-TIEMPO CUÁNTICO

Es importante señalar que este trabajo no propone un esquema completo de cuantización, sino que rescata aspectos generales que serían esperables en cualquier propuesta de cuantización.

Como señalamos en la sección anterior, el espacio-tiempo del cascarón colapsante se trata como *midisuperespacio*. Esto significa que se considera el espacio de fases como una superposición de espacio-tiempos determinados por la posición en  $I^-$  y la energía total del cascarón como se muestra en la figura 3.1. Un punto clave es que las regiones asintóticas ( $I^+$  e  $I^-$ ) pueden considerarse comunes a todos los espacio-tiempos en la superposición. Por este motivo, la posición de todos los detectores que miden observables en las regiones asintóticas pueden ser etiquetados por la misma parametrización.

Desde el punto de vista mecánico cuántico asumimos que la función de onda del cascarón tiene fluctuaciones (en masa y posición en  $I^-$ ) y que estas inducen fluctuaciones en la geometría al interior de espacio-tiempo. Estas fluctuaciones pueden ser observadas por observadores inerciales en infinito. Esto nos permite considerar observables de interés para el estudio de la radiación de Hawking. Por ejemplo, podemos preguntarnos cuál es la probabilidad de detectar una partícula asociada a un campo de prueba en  $I^+$  dada que dicho campo estaba en el vacío en  $I^-$ . Para ello asumimos que hay una función de onda  $|\Psi\rangle$  asociada al sector gravitatorio además del estado  $|0\rangle_{\text{in}}$  del campo de prueba, de manera que el sistema completo se encuentra en el estado

$$|\Psi\rangle |0\rangle_{\text{in}}. \quad (3.21)$$

Así, los observables del campo de prueba como la cantidad  $N_{\omega}^{\text{out}}$  de partículas emitidas con frecuencia  $\omega$ , que dependen paramétricamente de la posición y energía total del cascarón [ver definición en (2.19)],

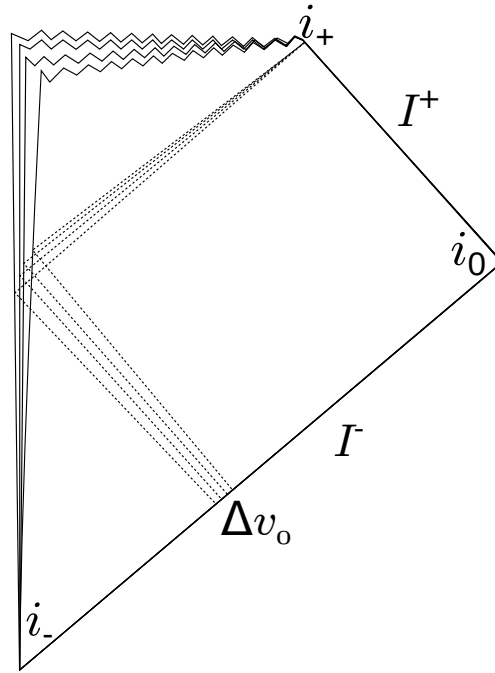


Figure 3.1: Esquema similar al diagrama de Penrose para la superposición de espacio-tiempos que representan al cascarón cuántico y las fluctuaciones que su posición  $\Delta v_0$  en  $I^-$  y su energía  $\Delta Mc^2$  inducen en la métrica. Se destaca que la región asintótica es la misma para todos los espacio-tiempos en la superposición.

pasan a ser operadores en ambos sectores del espacio de Hilbert al promover la masa y la posición del cascarón a operadores.

Este enfoque de cuantización del campo de prueba como primer paso y de cuantización del espacio-tiempo como segundo paso puede pensarse como una teoría cuántica de campos sobre espacio-tiempo cuántico, haciendo referencia a que es un paso más con respecto a la teoría cuántica de campos sobre espacio-tiempo curvo usada por Hawking para su cálculo de radiación. De hecho, al igual que en el modelo usado por Hawking, nuestros cálculos no toman en cuenta que la radiación genera un efecto (*back-reaction*) sobre la geometría. Este debe introducirse de manera semi-clásica mediante un balance de energía. Remarcamos entonces que el objetivo de este modelo no es describir el sistema cuántico completo sino extender el cálculo de Hawking para incluir fluctuaciones de la masa del agujero negro. En el capítulo 5 llevamos adelante dicha extensión y la comparación con el resultado clásico de Hawking.

Parte II

RESULTADOS



## EXTENSIÓN DEL CÁLCULO DE HAWKING PARA TODO TIEMPO

---

Los resultados presentados en este capítulo se basan principalmente en el trabajo [25]. Algunos cálculos han sido modificados y extendidos. La notación ha sufrido modificaciones menores.

### 4.1 APROXIMACIÓN DE ÓPTICA GEOMÉTRICA

En la sección 2.1.3 se reprodujo el resultado de Hawking asumiendo que las soluciones de la ecuación de K-G para el campo escalar (2.24) cuya forma asintótica en el futuro lejano es

$$\chi_{lm\omega}(r, u, \theta, \phi) = \frac{e^{-i\omega u}}{4\pi r \sqrt{\omega}} Y_{lm}(\theta, \phi)$$

y que se anulan en el horizonte, pueden rastrearse hacia el pasado como

$$\chi_{lm\omega}(r, u, \theta, \phi) = \frac{e^{-i\omega u(v)}}{4\pi r \sqrt{\omega}} Y_{lm}(\theta, \phi),$$

donde  $u(v)$  está dado por (B.12). Esto nos permitió obtener coeficientes de Bogoliubov no triviales comparando estos modos con las ondas planas del pasado lejano. En esta sección nos dedicaremos a estudiar esta aproximación, a la que nos referimos como aproximación de óptica geométrica. En ella se conjugan dos factores que nos permiten entender cuáles de nuestros resultados se pueden extender a modelos de colapso más general y también nos plantean límites para la validez de ciertos resultados.

#### 4.1.1 El potencial centrífugo

A lo largo de todo el trabajo se estudian campos materiales que cumplen la ecuación de K-G. Aquí la estudiaremos como una ecuación de onda con barreras de potencial en la región exterior al agujero negro del espacio-tiempo del cascarón. Para mayor claridad de los argumentos nos concentraremos en las soluciones esféricamente simétricas  $\varphi(r, t)$ , aunque los mismos son válidos de forma más general. Estas soluciones cumplen la ecuación

$$\left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \right] \varphi(r, t) = 0$$

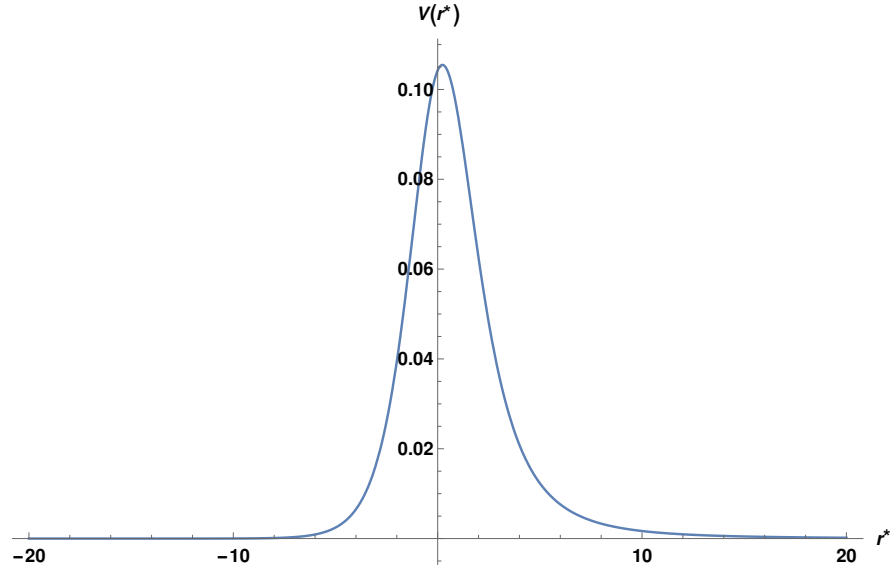


Figure 4.1: Gráfica del potencial  $V$  en función de la coordenada tortuga  $r^*$ .

dentro del cascarón (cuando  $v = ct - r < v_S$ ) y la ecuación

$$\left[ -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^{*2}} - \frac{V(r)}{(R_S)^2} \right] \varphi(r, t) = 0 \quad (4.1)$$

con

$$V(r) = \left( 1 - \frac{R_S}{r} \right) \left( \frac{R_S}{r} \right)^3$$

fuera del cascarón (cuando  $v = ct - r^* > v_S$ ). Aquí  $r^*$  es la coordenada *tortuga* definida en B.4. Vale la pena indicar que la forma de pegar las soluciones dentro y fuera del cascarón es identificando la coordenada radial  $r$  y la coordenada nula  $v$ , lo cual genera una diferencia en la coordenada temporal  $t$ . Como se ve explícitamente gracias a las coordenadas elegidas, dentro del cascarón las ondas se propagan libremente en el espacio-tiempo plano y fuera se propagan como en espacio-tiempo plano pero sometidas a una pared angosta de potencial  $V(r)$  que se muestra en la gráfica 4.1. El pico de esa pared de potencial se encuentra<sup>1</sup> en  $r = \frac{4R_S}{3}$  y por lo tanto una onda plana que ingrese a esta región saldrá con dos contribuciones, una onda transmitida y una reflejada con coeficientes de transmisión y reflexión dependientes de la frecuencia y de  $R_S$ . Nótese que la región de potencial alto no existe en el pasado lejano pues el cascarón no ha colapsado hasta ese radio. Por este motivo el coeficiente de reflexión debe ser despreciable para ondas que atraviesan el cascarón en tiempos tempranos.

<sup>1</sup> En el caso de ondas que no son esféricamente simétricas el máximo del potencial se ve desplazado pero permanece siempre por debajo de  $r = \frac{3R_S}{2}$  y el fenómeno es cualitativamente el mismo.



4.1.2 *Cuerpo negro vs. cuerpo gris*

Consideremos ahora un paquete de modos esféricamente simétricos  $\chi_\omega(r, u) \equiv \chi_{00\omega}(r, u)$  que llega a  $I^+$  alrededor de la coordenada  $u$ . Si proyectamos esta paquete hacia el pasado como se muestra en el esquema 4.2b, debido al potencial  $V(r)$  tendremos dos contribuciones. Una de ellas corresponde a los modos que llegan desde el interior del cascarón y tienen su origen en  $I^-$  con la forma asintótica

$$\chi_\omega^-(r, u) = \frac{e^{-i\omega u(v)} - 1}{4\pi r \sqrt{\omega}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (4.2)$$

Estos dan lugar a coeficientes de Bogoliubov no triviales que ya calculamos. La otra contribución es de modos que provienen del exterior del cascarón y se reflejan en la zona de alto potencial. En  $I^-$  toman la forma asintótica

$$\chi_\omega^+(r, u) = \frac{e^{-i\omega v} - 1}{4\pi r \sqrt{\omega}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (4.3)$$

De esta manera los modos  $\chi_\omega(r, u)$  se pueden escribir de la forma

$$\chi_\omega(r, u) = T(\omega)\chi_\omega^-(r, u) + R(\omega)\chi_\omega^+(r, u) \quad (4.4)$$

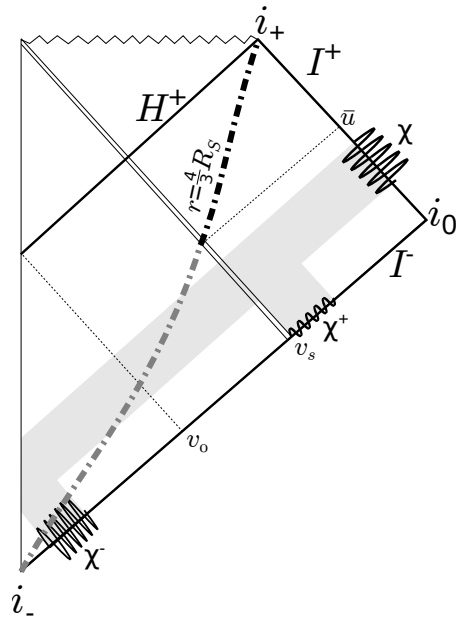
con  $T(\omega)$  y  $R(\omega)$  coeficientes de transmisión y reflexión respectivamente. Al calcular el coeficiente de Bogoliubov con respecto a ondas planas  $\psi_{00\omega'}$  en  $I^-$  se obtiene

$$\begin{aligned} \beta_{\omega\omega'} &= -(\chi_\omega, \psi_{00\omega'}^*) = -T(\omega) (\chi_\omega^-, \psi_{00\omega'}^*) - R(\omega) (\chi_\omega^+, \psi_{00\omega'}^*) = \\ &= -T(\omega) (\chi_\omega^-, \psi_{00\omega'}^*). \end{aligned}$$

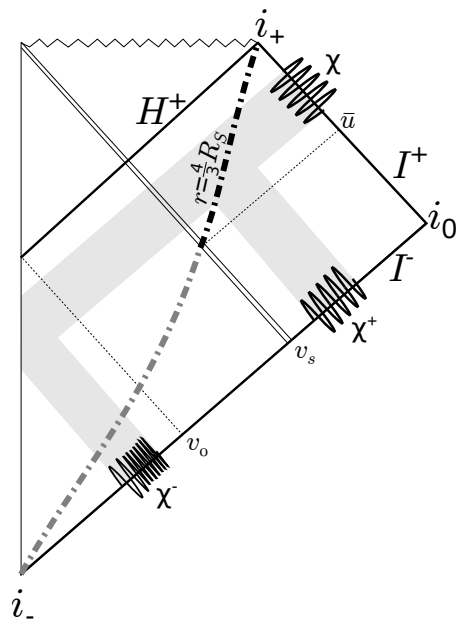
La contribución de los modos  $\chi^+$  es nula porque coinciden con los modos  $\psi$ . A partir de aquí se puede repetir todo el cálculo de Hawking y el número de partículas emitidas por unidad de tiempo resulta

$$N_\omega(u) = \frac{|T(\omega)|^2}{e^{8M\omega\pi} - 1}.$$

La corrección por efecto del potencial centrífugo es un coeficiente de emisión no trivial que transforma el cuerpo negro en cuerpo gris. La forma exacta de estos factores de emisión se puede aproximar [57] u obtener numéricamente [8, 24] y sus consecuencias se exploran en la literatura [28, 30]. Este efecto, que depende tanto de la frecuencia como del tiempo en  $I^+$ , fue ignorado en nuestro trabajo. En la literatura recién citada se habla de la *aproximación de cercanía al horizonte* porque el potencial centrífugo no es detectable en esta región. Considerando un sistema de coordenadas adaptado a la misma, pero con su rango extendido a las regiones lejanas, se logra el mismo efecto de omisión del potencial centrífugo sin cambiar la geometría asintótica (plana) del espacio-tiempo. De hecho esta aproximación se usa para vincular



(a)



(b)

Figure 4.2: Esquema de la proyección hacia  $I^-$  de los modos de onda plana  $\chi(u, r)$  en  $I^+$ . En (a) se distinguen paquetes previos a  $\bar{u}$ , con un coeficiente de reflexión pequeño dado que enfrentan un potencial centrífugo menor. En (b) se distinguen paquetes posteriores a  $\bar{u}$  que enfrentan el máximo del potencial centrífugo en  $r = \frac{4R_s}{3}$ .

modelos de colapso cuatridimensional con los bi-dimensionales que discutiremos en el capítulo 6. Para tener una idea cualitativa sobre la validez de esta omisión podemos volver a la ecuación de K-G (4.1). Considerando una solución de frecuencia  $\omega$  dada por  $\phi(r, t) = \phi(r^*) \exp(-i\omega t)$  entonces la misma se reduce a

$$\left[ \frac{d^2}{dr^{*2}} + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{V(r)}{(R_S)^2} \right] \phi(r^*) = 0. \quad (4.5)$$

Es claro que las frecuencias altas no son afectadas por el potencial y se desplazan de forma análoga a ondas libre en espacio-tiempo plano. La ecuación

$$\omega \frac{R_S}{c} = \max_r \sqrt{V(r)} \quad (4.6)$$

marca el límite inferior para considerar adecuada la aproximación de cuerpo negro sin incluir el factor de cuerpo gris. Considerando el máximo del potencial en 4.6, que se da en  $V\left(\frac{4R_S}{3}\right) \sim 0.1$ , se obtiene una frecuencia mínima

$$\omega \sim 1,44644\omega_{\max},$$

siendo  $\omega_{\max}$  la de máxima emisión térmica dada por 2.44. No obstante, este máximo del potencial no es experimentado por paquetes de onda previos al momento en que el cascarón atraviesa este radio, cuya coordenada nula en  $I^+$  es

$$\bar{u} = v_S - 2r^* \left( \frac{4R_S}{3} \right) \quad (4.7)$$

como se muestra en el figura 4.2a. En ese caso el máximo del potencial corresponde a su valor en la posición del cascarón. De la identidad

$$u = v_S - r^*(r)$$

se puede despejar  $r$  y de allí calcular la frecuencia  $\omega(u)$  que representa la menor frecuencia para la cual la omisión del factor de cuerpo gris es válida. La gráfica (4.3) muestra esta función.

La discusión anterior deja claro que el coeficiente de emisión puede considerarse igual a la unidad para frecuencias más grandes que la frecuencia de máxima emisión térmica o también para tiempos tempranos. Sin embargo esto introduce errores para frecuencias pequeñas en tiempos largos y este es el régimen de interés en el cálculo de Hawking. La consideración de este régimen tiene otra ventaja que no es aparente al elegir el colapso de un cascarón nulo, pero es importante para generalizar el cálculo de Hawking a otros escenarios de colapso, como discutiremos a continuación.

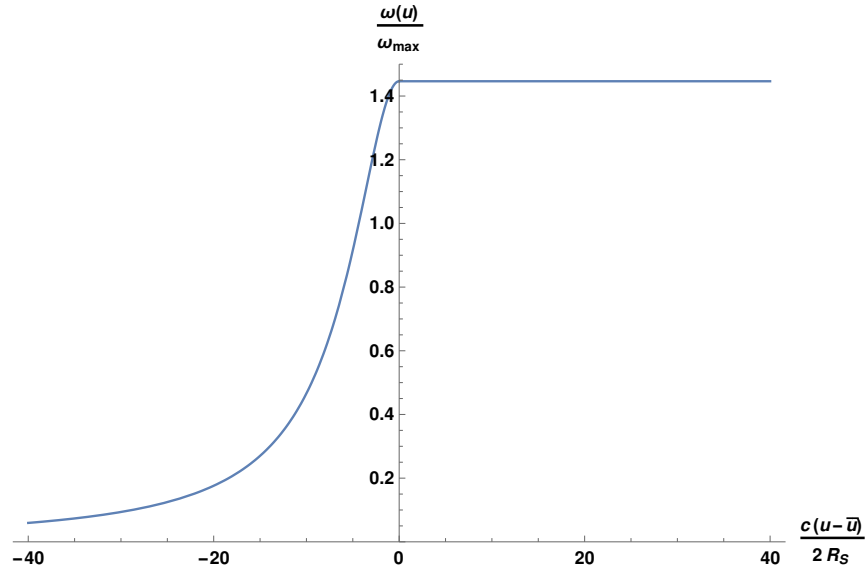


Figure 4.3: Gráfica de la frecuencia mínima  $\omega(u)$  para la cual es razonable despreciar el potencial centrífugo  $V(r)$ . La frecuencia se presenta en unidades de la frecuencia de máxima emisión térmica y el tiempo es medido en unidades de  $2\frac{R_s}{c}$  con respecto al tiempo  $\bar{u}$  en que el cascarón atraviesa el radio de máximo potencial.

#### 4.1.3 Propagación dentro del sistema colapsante

En el colapso del cascarón nulo el interior es una porción de espacio-tiempo plano y por tanto las ondas se mueven libremente (sin deformarse). Si en cambio se tratara de un sistema gravitatorio realista, como una estrella colapsante, entonces las ondas podrían ser afectadas significativamente en su pasaje por esa región. Este no es el caso para tiempos largos pues hay un efecto de corrimiento al azul (al proyectar hacia el pasado). Modos de frecuencia muy bajos que alcanzan  $I^+$  a tiempos tardíos corresponden a frecuencias muy altas al ser proyectadas hacia el pasado y al interior del sistema colapsante. Podemos extrapolar lo que sucede del resultado para el cascarón. Consideremos un modo

$$\chi_{\omega}^-(r, u) = \frac{e^{-i\omega u(v)}}{4\pi r \sqrt{\omega}} \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

de frecuencia  $\omega$ . Al entrar al cascarón los observadores inerciales miden una frecuencia

$$\tilde{\omega} = \omega \frac{du(v)}{dv}. \quad (4.8)$$

Para tiempos largos el corrimiento al azul de un paquete de frecuencia  $\omega$  es entonces del orden

$$\frac{\tilde{\omega}}{\omega} \propto \exp\left(\frac{cu}{2R_s}\right) \quad (4.9)$$

y por tanto los detalles del potencial dentro del sistema se vuelven más y más insignificantes a medida que aumenta  $u$  pues los paquetes se mueven como en el espacio-tiempo plano. La ventaja de nuestro sistema es que esta aproximación se cumple de forma exacta sin la necesidad de recurrir a tiempos largos. En la siguiente sección haremos uso de esa ventaja para extender el cálculo de Hawking a todo tiempo, pero seguiremos ignorando el coeficiente de emisión de cuerpo gris para comparar nuestros resultados directamente con el cálculo de la sección 2.1.3.

#### 4.2 COEFICIENTES DE BOGOLIUBOV Y MATRIZ DENSIDAD

En esta sección extenderemos el resultado de Hawking para incorporar el transitorio (desde la ausencia de radiación en el pasado lejano hacia la radiación térmica a tiempos largos). Consideraremos la aproximación de óptica geométrica aplicada a todo tiempo, asumiendo el error que esto implica para frecuencias bajas. Con dicha aproximación la forma de los coeficientes de Bogoliubov está dada por la expresión (2.31)

$$\beta_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{v_0} dv \exp\left(-i\omega \left[ v - 4M \ln\left(\frac{v_0 - v}{4M_0}\right) \right] - i\omega'v\right).$$

Con el cambio de variable  $x = \frac{v_0 - v}{4M_0}$ , la integral se transforma en

$$\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}} = -\frac{2M_0 e^{-i(\omega + \omega')v_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} dx e^{[-\epsilon + i4M_0(\omega' + \omega)]x} e^{i4M\omega \ln(x)}, \quad (4.10)$$

donde el superíndice CS indica que es el resultado clásico para el cascarón (*Classical Shell*) sin la aproximación de tiempos largos de Hawking. Al igual que en el cálculo de (2.36), el regulador  $\epsilon$  se introduce para la convergencia de la integral debido al uso de una base de ondas planas. Usando las fórmulas (2.35) y (2.37) el coeficiente de Bogoliubov resulta

$$\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}} = \sqrt{\frac{4M}{2\pi\omega'}} \frac{e^{-i(\omega + \omega')v_0} e^{i\phi(4M\omega)}}{\sqrt{\exp(8M\pi\omega) - 1}} \frac{\omega'}{\omega' + \omega} e^{-i4M\omega \ln(4M_0[\omega' + \omega])}. \quad (4.11)$$

Esta expresión coincide con la aproximación de Hawking cuando  $\omega' \gg \omega$ , pero se diferencia notablemente cuando  $\omega' \ll \omega$ . Las consecuencias de esa diferencia quedan claras al calcular la matriz densidad

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1, \omega_2}^{\text{CS}} &= \int_0^{\infty} d\omega' \beta_{\omega_1 \omega'}^{\text{CS}} \left( \beta_{\omega_2 \omega'}^{\text{CS}} \right)^* = \frac{e^{-i(\omega_1 - \omega_2)v_0} e^{i[\phi(4M\omega_1) - \phi(4M\omega_2)]}}{\sqrt{[\exp(8M\pi\omega_1) - 1] [\exp(8M\pi\omega_2) - 1]}} \times \\ &\times \frac{4M}{2\pi} \int_0^{\infty} d\omega' \frac{\omega' \exp(-i4M[\omega_1 \ln(4M_0[\omega_1 + \omega']) - \omega_2 \ln(4M_0[\omega_2 + \omega'])])}{(\omega_1 + \omega')(\omega_2 + \omega')}. \end{aligned}$$

(4.12)

Aplicando el cambio de variable

$$y(\omega') = 4M \frac{\omega_2 \ln(4M_0[\omega' + \omega_2]) - \omega_1 \ln(4M_0[\omega' + \omega_1])}{\omega_2 - \omega_1}, \quad (4.13)$$

resulta

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1, \omega_2}^{\text{CS}} &= \frac{e^{i\Delta\omega v_0} e^{i[\phi(4M\omega_1) - \phi(4M\omega_2)]}}{\sqrt{[\exp(8M\pi\omega_1) - 1][\exp(8M\pi\omega_2) - 1]}} \frac{1}{2\pi} \int_{y(0)}^{\infty} dy e^{i\Delta\omega y} \\ &= \frac{e^{i\Delta\omega v_0} e^{i[\phi(4M\omega_1) - \phi(4M\omega_2)]} e^{i\Delta\omega y(0)}}{\sqrt{[\exp(8M\pi\omega_1) - 1][\exp(8M\pi\omega_2) - 1]}} \frac{\delta(\Delta\omega) + \text{p.v.} \left( \frac{i}{\pi\Delta\omega} \right)}{2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

con  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . A diferencia de la aproximación de Hawking, esta matriz densidad no es una distribución diagonal y es menos intuitivo interpretar el significado de la contribución divergente. Nuevamente la solución es rehacer el cálculo recurriendo a una base de paquetes de onda (2.32) centrados en tiempo  $u_n = \frac{2\pi}{\varepsilon}n$  y frecuencia  $\omega_j = (j + \frac{1}{2})\varepsilon$ . En el apéndice C.1.1 realizamos dicho cálculo, pero con un poco de trabajo podemos realizar la introducción de los paquetes en este punto del cálculo. A partir de (4.14) se puede obtener el número de partículas emitidos ente  $u_n$  y  $u_{n+1}$  como

$$N_{\omega_j}^{\text{CS}}(u_n) = \rho_{\omega_j, \omega_j}^{\text{CS}}(u_n) = \frac{1}{\varepsilon} \int \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\Delta\omega u_n} \rho_{\omega_1, \omega_2}^{\text{CS}}.$$

Tratando cada sumando por separado, la contribución de la delta de Dirac es simplemente

$$\frac{1}{2\varepsilon} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} \frac{d\omega}{\exp(8M\omega\pi) - 1} = \frac{1}{2} \frac{1}{\exp(8M\omega_j\pi) - 1} + O(\varepsilon). \quad (4.15)$$

Mediante los cambios de variable  $t_1 = \frac{\omega_1 - \omega_j}{\varepsilon}$  y  $t_2 = \frac{\omega_2 - \omega_j}{\varepsilon}$  y expandiendo en  $\varepsilon$ , la otra contribución es

$$\frac{1}{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \frac{i}{2\pi} \int \int_{-1/2}^{1/2} dt_1 dt_2 \text{p.v.} \frac{e^{-i\alpha\Delta t}}{\Delta t} + O(\varepsilon) \quad (4.16)$$

con

$$\alpha = \varepsilon [u_n - v_0 - 4M + 4M\phi'(4M\omega_j) - 4M \ln(4M_0\omega_j)]$$

y siendo  $\phi'$  la derivada de la fase de la función gamma, que trataremos más adelante. Nótese que en el exponente de la exponencial compleja hemos mantenido el primer orden en  $\varepsilon$  ya que el tiempo se mide en unidades de  $2\pi/\varepsilon$ . La integral anterior puede resolverse de forma exacta resultando

$$N_{\omega_j}^{\text{CS}} = \frac{\theta(\alpha)}{e^{8M\omega_j\pi} - 1} + O(\varepsilon) \quad (4.17)$$

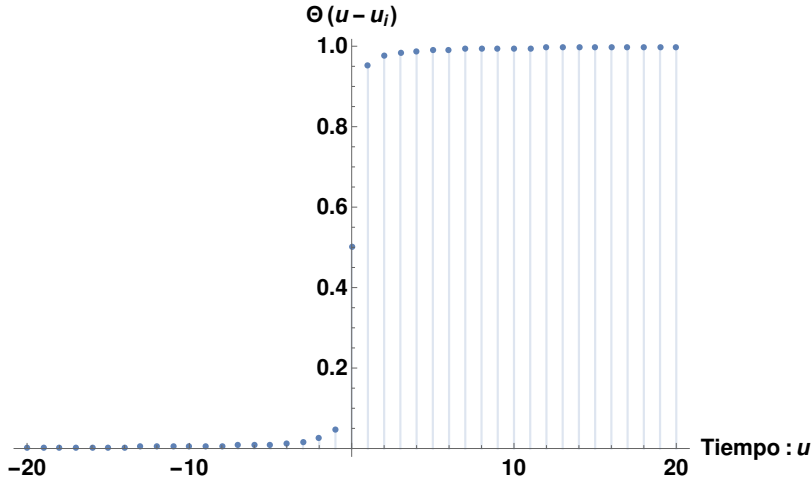


Figure 4.4: Escalón  $\theta$  en la emisión de radiación. El tiempo ( $u$ ) está medido en unidades de  $2\pi/\varepsilon$ .

con

$$\theta(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\alpha) - \frac{\alpha}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.18)$$

una función escalón suave como se muestra en la figura 4.4 y que involucra a la integral senoidal (Si) y al seno cardinal (sinc).

Esta expresión representa un escalón entre el pasado lejano donde no hay emisión y el futuro lejano (tiempos largos) donde la emisión coincide con la expresión de Hawking. El tiempo característico de inicio de la radiación es

$$u_i(\omega_j) = v_0 + 4M + 4M \ln(M_0/M) + 4M [\ln(4M\omega_j) - \phi'(4M\omega_j)] \quad (4.19)$$

y el transitorio se da en pocas unidades de tiempo  $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ . La expresión obtenida tiene una clara dependencia en la frecuencia, sin embargo esta dependencia desaparece cuando consideramos la resolución temporal  $2\pi/\varepsilon$  y la existencia de una frecuencia mínima  $\varepsilon/2$  para los paquetes de onda. Dado que  $\phi'(4M\omega_j) = \Re [\psi^{(0)}(i4M\omega_j)]$ , siendo  $\psi^{(0)}$  la función digamma cuyo comportamiento asintótico es conocido, entonces para frecuencias grandes el inicio de la emisión está acotado por

$$u_i(\infty) = v_s + 4M \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) \quad (4.20)$$

y para frecuencias pequeñas se comporta como

$$u_i(\omega_j \sim 0) = u_i(\infty) - 4M [-\ln(4M\omega_j) - \gamma] \quad (4.21)$$

siendo  $\gamma \sim 0,577$  la constante de Euler-Mascheroni. Tomando en cuenta la frecuencia mínima  $\varepsilon/2$  fijada por (2.45) y el paso de tiempo

entre paquetes  $2\pi/\varepsilon$ , entonces la diferencia entre ambos tiempos es menor que una unidad de tiempo, pues

$$\frac{u_i(\infty) - u_i(\varepsilon/2)}{2\pi/\varepsilon} = -\frac{2M\varepsilon}{\pi} [\ln(2M\varepsilon) + \gamma] = \frac{1}{k(2\pi)^2} [\ln(\pi k) - \gamma] < 1 \quad (4.22)$$

para  $k > 1$ . Como ya ha sido mencionado esta condición sobre  $k$  es necesaria para tener suficiente resolución en frecuencia. Vale la pena recordar que la aproximación de óptica geométrica no es buena para frecuencias bajas y por lo tanto es razonable desconfiar del resultado para  $u_i(\omega_j \sim 0)$ ; sin embargo, para frecuencia altas es una buena aproximación para todo tiempo y por tanto, el tiempo  $u_i(\infty)$  es una cota confiable para el inicio de la radiación térmica. Podemos así mismo compararlo con el tiempo  $\bar{u}$  definido en (4.7) que marca el tiempo para el cual la aproximación deja de ser buena para frecuencias bajas. Se obtiene que  $u_i(\infty)$  es ligeramente anterior a  $\bar{u}$  aunque la relación se invierte si se consideran modos que no son esféricamente simétricos. En definitiva, para tiempos anteriores a  $u_i(\infty)$  también podemos confiar en el resultado obtenido para frecuencias bajas, lo cual reafirma nuestra conclusión.

De forma análoga al cálculo del número de partículas, podemos determinar las correlaciones entre diferentes frecuencias  $\omega_j \neq \omega_k$  en función del tiempo. En este caso debemos calcular

$$\rho_{\omega_j, \omega_k}^{\text{CS}}(u_n) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} \int_{k\varepsilon}^{(k+1)\varepsilon} d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\Delta\omega u_n} \rho_{\omega_1, \omega_2}^{\text{CS}}.$$

Evidentemente, el término proporcional a la delta de Dirac que presenta (4.14) no contribuye en este caso y el término restante es

$$\frac{\frac{i}{2\pi} e^{-i[\omega_k - \omega_j](u_n - a_{jk})} \int \int_{-1/2}^{1/2} ds_1 ds_2 \frac{\exp[-i\varepsilon(u_n - b_{jk})\Delta s]}{\Delta s + k - j}}{\sqrt{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \sqrt{\exp(8M\pi\omega_k) - 1}} + O(\varepsilon) \quad (4.23)$$

con

$$\begin{aligned} a_{jk} &= v_0 - \frac{\phi(4M\omega_k) - \phi(4M\omega_j)}{\omega_k - \omega_j} + \frac{4M\omega_k \ln(4M\omega_j) - 4M\omega_j \ln(4M\omega_k)}{\omega_k - \omega_j} \\ b_{jk} &= \frac{u_i(\omega_j) + u_i(\omega_k)}{2}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde el cambio de variable es ahora  $s_1 = \frac{\omega_1 - \omega_j}{\varepsilon}$  y  $s_2 = \frac{\omega_2 - \omega_k}{\varepsilon}$ . Resolviendo la integral se obtiene finalmente

$$\rho_{\omega_j, \omega_k}^{\text{CS}}(u_n) = \frac{e^{-i[\omega_k - \omega_j](u_n - a_{jk})} F(u_n - b_{jk}, k - j)}{\sqrt{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \sqrt{\exp(8M\pi\omega_k) - 1}} + O(\varepsilon) \quad (4.25)$$



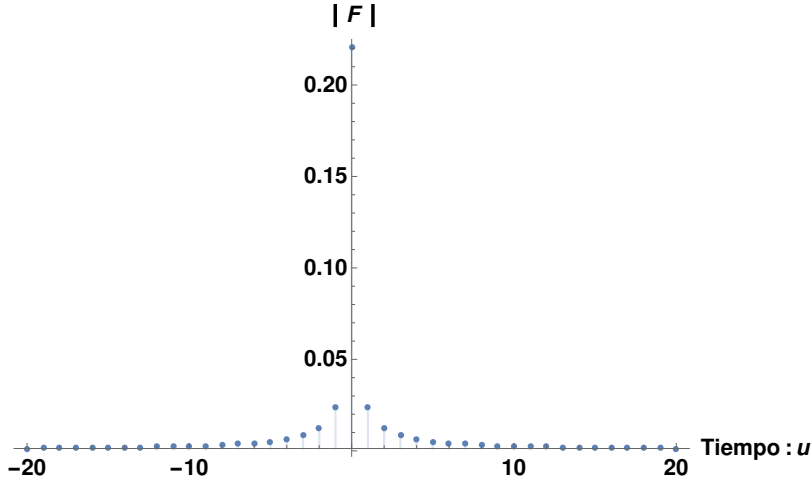


Figure 4.5: Amplitud de las correlaciones entre frecuencias  $\omega_j$  y  $\omega_k$  que distan  $\varepsilon$ . Para distancias mayores, el pico cae con  $(k-j)^{-1}$ . El tiempo ( $u$ ) está medido en unidades de  $2\pi/\varepsilon$ .

con  $F$  una función centrada en el origen, dada por

$$F(x, y) = -\frac{x \operatorname{sinc}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\pi} + \frac{e^{ixy}}{2\pi} [(y+1)\operatorname{Si}(xy+x) + (y-1)\operatorname{Si}(xy-x)] - 2y\operatorname{Si}(xy) \\ + \frac{ie^{ixy}}{2\pi} [(y+1)\operatorname{Ci}(xy+x) + (y-1)\operatorname{Ci}(xy-x) - 2y\operatorname{Ci}(xy)], \quad (4.26)$$

siendo  $\operatorname{Ci}$  la rama principal de la integral cosenoidal. La amplitud de  $F$  cae rápidamente como se muestra en la figura 4.5, lo cual confirma que las correlaciones aparecen durante el inicio de la radiación y desaparecen rápidamente una vez que comienza el régimen térmico. Así mismo, la amplitud de dichas correlaciones cae con el inverso de la distancia entre frecuencias  $\omega_k - \omega_j$  como se observa fácilmente acotando la integral (4.23).

Como último punto es interesante vincular la radiación observada con el movimiento del cascarón y la formación del agujero negro. Para ello, podemos seguir los rayos de luz que llegan a  $I^+$  en tiempo  $u_i$  atrás en el tiempo y hasta el cascarón (ver figura 4.6). Dichos rayos de luz salen del cascarón cuando  $v_S - u_i = 2r^*(r_i)$ . Considerando  $u_i = u_i(\infty)$  dado por (4.20) como el tiempo que marca el inicio de la radiación térmica, se puede despejar el radio  $r_i$  de la identidad anterior obteniendo

$$r_i \sim 2,56M = 1,28R_S.$$

Cabe recordar que la noción de partícula es asintótica, pero si pudiéramos identificar una región de la que proviene esa radiación, la misma debería ubicarse fuera del cascarón pues los efectos dinámicos que dan lugar a la radiación suceden fuera del mismo.<sup>2</sup> Este resultado es

<sup>2</sup> El interior del cascarón consiste en una región de espacio-tiempo plano con el campo escalar en el estado de vacío. Por lo tanto el tensor de energía-momento debe anularse. Todas las contribuciones no nulas provienen del cascarón y el exterior.

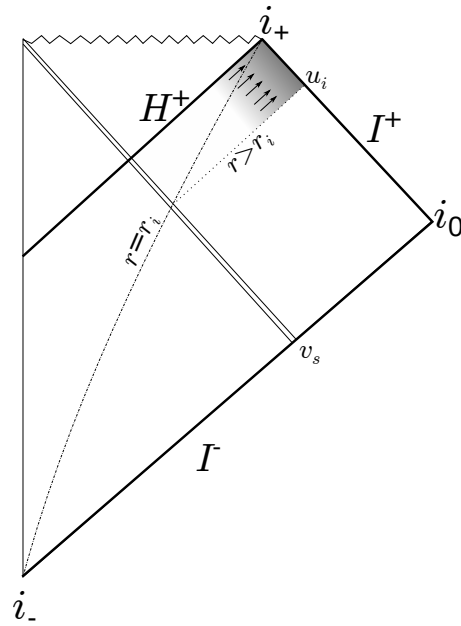


Figure 4.6: El régimen de radiación térmica (zona gris) comienza en  $u_i$ . El rayo correspondiente debe originarse en un radio  $r$  mayor a  $r_i$ , definiendo así una atmósfera en torno al agujero negro de donde proviene la radiación.

presentado en la literatura [32] como la existencia de una atmósfera alrededor del agujero negro, cuya profundidad es del orden del radio  $R_S$ , desde donde se observa salir la radiación.

Los resultados presentados en este capítulo incorporan contribuciones de los trabajos [25, 26]. Algunos errores menores en los cálculos de dichos trabajos fueron corregidos y la notación fue unificada. Varios cálculos del capítulo se remiten al apéndice D para facilitar la lectura.

### 5.1 OPERADORES BÁSICOS PARA ESTUDIAR LA RADIACIÓN

El análisis de espacio de fases reducido que reseñamos en el capítulo 3 muestra que los observables de Dirac  $v_s$  and  $M$  asociados a la cuantización del espacio-tiempo del cascarón son canónicos conjugados. Por lo tanto, los promoveremos a operadores cuánticos que satisfacen

$$\left[ \widehat{M}, \widehat{v}_s \right] = i\hbar \widehat{I}, \quad (5.1)$$

siendo  $\widehat{I}$  el operador identidad. En adelante será más conveniente usar el operador  $\widehat{v}_0 = \widehat{v}_s - 4\widehat{M}$  asociado al último rayo saliente que también es conjugado a  $\widehat{M}$ . Llamaremos  $\overline{M} \equiv \langle \widehat{M} \rangle$  y  $\overline{v}_0 \equiv \langle \widehat{v}_0 \rangle$  a los valores esperados del operador de masa y posición del último rayo saliente, respectivamente.

En términos de dichos operadores definimos el operador autoadjunto

$$\hat{u}(v, \widehat{v}_0, \widehat{M}) = v\widehat{I} - 2 \left[ \widehat{M} \ln \left( \frac{\widehat{v}_0 - v\widehat{I}}{4M_0} \right) + \ln \left( \frac{\widehat{v}_0 - v\widehat{I}}{4M_0} \right) \widehat{M} \right], \quad (5.2)$$

siendo  $v$  un parámetro real y  $M_0$  una escala arbitraria.<sup>1</sup> Este operador representa la variable  $u(v)$ . Dado un valor del parámetro  $v$ , el operador  $\hat{u}$  está bien definido en la base  $\{v_0\}_{v_0 \in \mathbb{R}}$  de autoestados de  $\widehat{v}_0$  sólo para autovalores  $v_0 > v$ , la cual es la región relevante para el cálculo de los coeficientes de Bogoliubov. Es conveniente, sin embargo, tener una extensión de  $\hat{u}$  al rango completo de  $v_0$  para poder trabajar con el espacio de Hilbert completo del cascarón. Debemos confirmar luego que los observables relevantes sean independientes de dicha extensión. Por ejemplo, definiendo la función

$$f_\sigma(x) = \ln [\max(x, \sigma)]$$

se puede construir el operador

$$\hat{u}_\sigma(v, \widehat{v}_0, \widehat{M}) = v\widehat{I} - 2 \left[ \widehat{M} f_\sigma \left( \frac{\widehat{v}_0 - v\widehat{I}}{4M_0} \right) + f_\sigma \left( \frac{\widehat{v}_0 - v\widehat{I}}{4M_0} \right) \widehat{M} \right], \quad (5.3)$$

<sup>1</sup> Notar que el rol de  $M_0$  es diferente que en la expresión clásica debido a que  $\widehat{M}$  es promovido a un operador. A nivel clásico simplemente cambia el origen de  $u$ , pero aquí modifica  $\hat{u}$  mediante un término proporcional al operador  $\widehat{M}$

que extiende  $\hat{u}$  a todo el rango del espacio de Hilbert. Para entender su significado físico recordemos que, para valores de  $v$  menores que  $v_0$ , los paquetes de onda escapan a  $I^+$  mientras que, para valores de  $v$  mayores que  $v_0$ , caen en el agujero negro. Esta extensión corresponde a considerar detectores de partículas que, o bien viven en  $I^+$  o en una trayectoria tipo tiempo a una distancia pequeña del horizonte. Como veremos, los coeficientes de Bogoliubov tendrán un límite  $\sigma \rightarrow 0$  bien definido.

Ahora buscamos los autoestados de  $\hat{u}_\sigma$ . Trabajando con las funciones de onda  $\psi(v_0) = \langle v_0 | \psi \rangle$ , el operador  $\hat{M}$  (conjugado a  $\hat{v}_0$ ) cumple la identidad

$$\langle v_0 | \hat{M} \psi \rangle = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial v_0}. \quad (5.4)$$

Luego, los autoestados de  $\hat{u}_\sigma$  están dados por la ecuación

$$\langle v_0 | \hat{u}_\sigma \psi_u \rangle = u \psi_u(v_0),$$

o sea,

$$v \psi_u - 2i\hbar \frac{\partial}{\partial v_0} \left[ f_\sigma \left( \frac{v_0 - v}{4M_0} \right) \psi_u \right] - 2i\hbar f_\sigma \left( \frac{v_0 - v}{4M_0} \right) \frac{\partial \psi_u}{\partial v_0} = u \psi_u. \quad (5.5)$$

Mediante el cambio de variable  $x = \frac{v_0 - v}{4M_0}$  y la función auxiliar

$$\phi_u(x) = \sqrt{|f_\sigma(x)|} \psi_u(4M_0x + v)$$

pasamos a la ecuación

$$\phi'_u = \frac{iM_0}{\hbar} \frac{u - v}{f_\sigma} \phi_u,$$

cuya solución general es

$$\phi_u(x) = \phi_0 \exp \left( \frac{iM_0}{\hbar} (u - v) \int_0^x \frac{ds}{f_\sigma(s)} \right).$$

Sustituyendo  $f_\sigma$  y volviendo a las variables originales

$$\psi_u(4M_0x + v) = \begin{cases} \frac{\psi_0^I}{\sqrt{|\ln(x)|}} \exp \left( \frac{iM_0}{\hbar} (u - v) \text{li}(x) \right), & x \geq \sigma, \\ \frac{\psi_0^{II}}{\sqrt{|\ln(\sigma)|}} \exp \left( \frac{iM_0}{\hbar} (u - v) \frac{x}{\ln(\sigma)} \right), & x < \sigma, \end{cases}$$

donde  $\phi_0, \psi_0^I$  y  $\psi_0^{II}$  son constantes complejas independientes y

$$\text{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln(t)} \quad (5.6)$$

es la integral logarítmica, que se grafica en la figura 5.1. La discon-

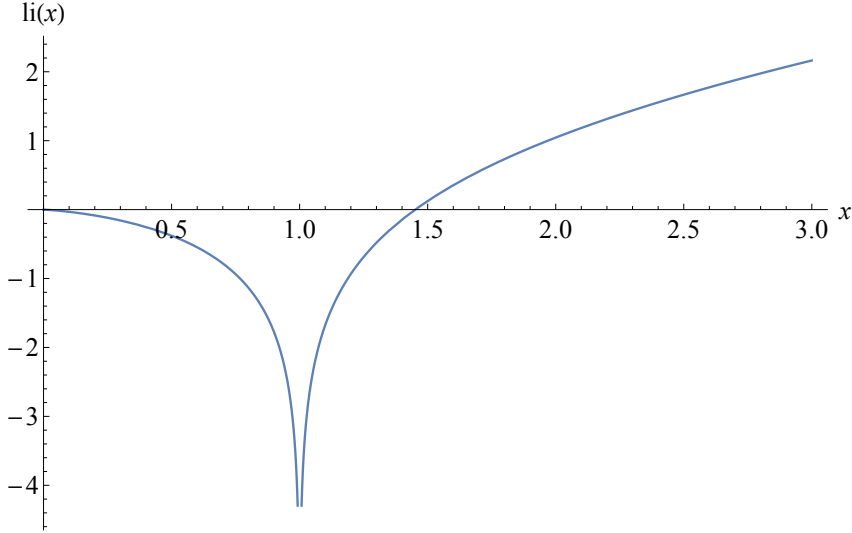


Figure 5.1: La función integral logarítmica.

tinuidad de  $\psi_u$  en  $x = 1$  introduce una degeneración en los autoestados de  $\hat{u}$ . Por cada autovalor podemos elegir dos autoestados independientes,

$$\psi_u^1(4M_0x + v) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{8\pi\hbar}|\ln(\sigma)|} \exp\left(\frac{iM_0}{\hbar}(u-v)\frac{x-\sigma}{\ln(\sigma)}\right), & x < \sigma \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi\hbar}|\ln(x)|} \exp\left(\frac{iM_0}{\hbar}(u-v)[\text{li}(x) - \text{li}(\sigma)]\right), & \sigma \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\psi_u^2(4M_0x + v) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{8\pi\hbar}|\ln(x)|} \exp\left(\frac{iM_0}{\hbar}(u-v)[\text{li}(x) - \text{li}(\sigma)]\right), & x > 1 \end{cases} \quad (5.7)$$

que hemos elegido ortonormales. Adoptaremos la notación  $|u, J\rangle_\sigma$  con  $J = 1, 2$  para estos estados.

## 5.2 RÉGIMEN SEMICLÁSICO Y FIJACIÓN DEL PARÁMETRO $M_0$ .

En adelante usaremos los observables introducidos previamente para construir otros observables asociados a la radiación de Hawking y los estudiaremos asumiendo que las fluctuaciones en la masa (energía total del cascarón en unidades de  $c = 1$ ) y posición del cascarón son pequeñas. Para ello asumiremos que el espacio-tiempo se encuentra en un estado  $|\Psi\rangle$ , cuya función de onda en la base de autoestados de  $\hat{v}_0$  en un paquete centrado en una masa  $\bar{M}$  y una posición  $\bar{v}_0$  de la forma

$$\Psi(v_0) \equiv \langle v_0 | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dM \varphi(M) \exp\left(-i\frac{M[v_0 - \bar{v}_0]}{\hbar}\right) \quad (5.8)$$

con  $\varphi(M)$  una función compleja centrada en  $\bar{M}$  que satisface

$$\int dM |\varphi(M)|^2 = 1.$$

Para fijar el carácter semicásico del espacio-tiempo asumiremos además que las fluctuaciones  $\Delta M$  y  $\Delta v_0$  son pequeñas (ambas de orden Planck) mientras que  $\bar{M} \gg M_P$ . Usaremos ejemplos concretos para  $\varphi$  sólo cuando el cálculo lo requiera.

Cabe señalar nuevamente que nuestro trabajo no incluye efectos de *back-reaction* y por tanto  $\Psi$  no se verá afectada por la inclusión de la radiación. Sin embargo, la introducción de un estado semi-clásico con valor esperado  $\bar{M}$  en la masa nos da un criterio de validez para la aproximación de despreciar la *back-reaction*. Nuestro cálculo sólo será confiable mientras la energía total radiada sea mucho menor que  $\bar{M}$ .

Adicionalmente, la inclusión de esta escala de masa clásica sirve otro propósito. Al definir el operador  $\hat{u}$  mediante (5.2) mencionamos que hay una escala libre  $M_0$ . Clásicamente sólo fija el cero de la coordenada nula  $u$ , pero en nuestro modelo su rol es más complejo y se hace necesario hacer una fijación de este parámetro para avanzar en los cálculos. Haciendo uso de esta nueva escala de masa clásica fijaremos

$$M_0 = \bar{M}, \quad (5.9)$$

pero mantendremos el nombre para ser transparentes en cuanto al rol de dicha escala es nuestro modelo.

### 5.3 OPERADOR ASOCIADO AL COEFICIENTE DE BOGOLIUBOV Y SU VALOR ESPERADO

Como discutimos previamente los coeficientes de Bogoliubov entre modos *in* y *out* se obtienen propagando hacia el pasado los modos *out* y luego proyectándolos sobre los modos *in* mediante el producto escalar de K-G. Esta propagación hacia el pasado depende de la superposición cuántica de espacio-tiempos y por tanto estos coeficientes se vuelven operadores cuánticos dependientes de  $\hat{M}$  y  $\hat{v}_0$ . En esta sección construiremos los coeficientes de Bogoliubov cuánticos y calcularemos sus valores esperados. Comenzamos con la expresión (2.31) y la promovemos a un operador bien definido mediante,

$$\hat{\beta}_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) e^{-i\omega\hat{u}_\sigma(v) - i\omega'v} \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}). \quad (5.10)$$

La restricción de la integral a valores positivos de  $v_0$  se logra con la función escalón  $\Theta$ , que está bien definida en la base de autoestados de  $\hat{v}_0$ . La doble presencia de esta función garantiza también buenas propiedades para  $\hat{\beta}_{\omega\omega'}^\dagger$ , ya que

$$\hat{\beta}_{\omega\omega'}^\dagger = \hat{\beta}_{-\omega, -\omega'}. \quad (5.11)$$

Intuitivamente, uno diría que el valor esperado de este operador debe reproducir el coeficiente de Bogoliubov en el espacio-tiempo clásico

del cascarón (con corrección proveniente de las fluctuaciones de  $M$  y  $v_0$ ). Para comprobarlo consideremos que el espacio-tiempo está representado por un estado  $\Psi$ . Podemos entonces calcular su valor esperado como,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} &\equiv \langle \Psi | \hat{\beta}_{\omega\omega'} | \Psi \rangle = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \langle \Psi | \int_{-\infty}^{+\infty} dv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_0 |v_0\rangle \langle v_0 | \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) \\ &\quad \times e^{-i\omega\hat{u}_\sigma(v) - i\omega'v} \sum_{J=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} du |u, J\rangle_{\sigma\sigma} \langle u, J | \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_0 |v'_0\rangle \langle v'_0 | \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) | \Psi \rangle, \end{aligned}$$

donde hemos introducido bases de autoestados de  $\hat{v}_0$  y  $\hat{u}$ . El cálculo detallado se realiza en el apéndice D.1 y arroja

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} &= -\frac{2M_0}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{|\ln(X_\omega(x))|}{|\ln(x)|}} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^\infty dv e^{-i[\omega+\omega']v} \Psi^*(4M_0x+v) \Psi(4M_0X_\omega(x)+v), \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$X_\omega(x) \equiv \text{li}^{-1}[\text{li}(x) - \delta_\omega], \quad (5.12)$$

$$\delta_\omega \equiv \frac{\hbar\omega}{M_0} \quad (5.13)$$

y se entiende que  $\text{li}^{-1}$  representa la inversa para la rama correspondiente de  $\text{li}(x)$  (para  $x < 1$  se usa una rama izquierda y para  $x > 1$  la rama derecha de la figura 5.1). Finalmente, considerando un estado del tipo definido en (5.8) e introduciendo la masa modificada

$$m_{\omega\omega'} \equiv M - \hbar(\omega + \omega') \quad (5.14)$$

se obtiene

$$\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} = \int dM \varphi(M)^* \varphi(m_{\omega\omega'}) \beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(m_{\omega\omega'}) \quad (5.15)$$

con

$$\begin{aligned} \beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(M) &\equiv -\frac{2M_0 e^{-i(\omega+\omega')v_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^\infty dx f_\omega(x) e^{i4M_0(\omega+\omega')x} e^{i4M\omega g_\omega(x)} \\ f_\omega(x) &\equiv \sqrt{\frac{|\ln(X_\omega(x))|}{|\ln(x)|}} \\ g_\omega(x) &\equiv \frac{x - X_\omega(x)}{\delta_\omega}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Esta expresión muestra explícitamente parecidos y diferencias con la expresión (4.10) para el cascarón clásico, las cuales discutiremos a continuación.

### 5.3.1 Comparación con el coeficiente de Bogoliubov para el cascarón clásico.

Comparando (5.15) con (4.10) vemos con claridad dos fuentes de diferencias. Por un lado la integral en la masa  $M$ , que proviene de la

fluctuación de la masa del agujero negro. Por otro lado, dentro de la integral (5.16) que define  $\beta^{\text{eff}}$  aparecen la masa modificada  $m_{\omega\omega'}$  y las funciones  $f_{\omega}(x)$  y  $g_{\omega}(x)$ , que dependen de  $\omega$  a través del parámetro adimensionado  $\delta_{\omega}$ . Para interpretar estas modificaciones respecto del cascarón clásico primero consideramos la fijación (5.9) del parámetro  $M_0$ . Entonces  $\delta_{\omega} = \frac{\hbar\omega}{M_0} = \frac{\hbar\omega}{\bar{M}}$  mide el cociente entre la energía de los cuantos y la masa total del agujero negro. Evidentemente, un modelo con *back-reaction* debería tener efectos muy fuertes sobre la geometría ante la emisión de un cuanto de radiación que cumpla  $\delta_{\omega} \sim 1$ , lo cual implica la emisión de toda la energía disponible en un sólo cuanto. Esto entra en contradicción con la hipótesis de que la métrica no se ve sustancialmente afectada por la emisión de radiación. Para no caer en esta inconsistencia impondremos que

$$\delta_{\omega} \ll 1 \quad (5.17)$$

asumiendo que no tenemos poder predictivo por fuera de dicho régimen. Si evaluamos  $\delta_{\omega}$  en la frecuencia de máxima emisión térmica, la cual cumple (2.44), entonces

$$\delta_{\omega_{\text{max}}} = \frac{\hbar\omega_{\text{max}}}{M_0} = \frac{\hbar\chi_0}{8\pi M_0 \bar{M}} \sim 0,11 \left( \frac{M_{\text{P}}}{\bar{M}} \right)^2. \quad (5.18)$$

Por lo tanto la condición (5.17) no impone restricciones para el estudio de las frecuencias de interés para la radiación térmica en el caso de agujeros negros macroscópicos ( $\bar{M} \gg M_{\text{P}}$ ). Nótese que en la cadena de igualdades anterior, además de la fijación de  $M_0$ , hemos reintroducido las contantes dimensionales  $G$  y  $c$  en el último paso.

Establecida la condición (5.17) podemos ver que  $f_{\omega}$  y  $g_{\omega}$  modifican la integral (5.16) en una región muy cercana a  $x = 0$ . Recordando que usamos el cambio de variable  $x = \frac{v_0 - v}{4M_0} = \frac{v_0 - v}{4\bar{M}}$ , vemos que la modificación se da en la región de  $I^-$  muy cercana al último rayo (en unidades de tiempo de  $4\bar{M}$ ), indicando a su vez que estas modificaciones provienen de la fluctuación del horizonte. Específicamente,

$$f_{\omega}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{|\ln(X_{\omega}(0))|}{|\ln(x)|}} \rightarrow 0$$

$$g_{\omega}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{-X_{\omega}(0)}{\delta_{\omega}}$$

mientras que en la región de  $x$  "grande" se recupera la expresión clásica pues

$$f_{\omega}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\rightarrow} 1$$

$$g_{\omega}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \ln(x).$$

El punto de transición entre ambas expresiones asintóticas se da alrededor de

$$x = X_{\omega}(0) = \text{li}^{-1}(-\delta_{\omega}) \quad (5.19)$$



para  $f_\omega$  y

$$x = \exp\left(\frac{-X_\omega(0)}{\delta_\omega}\right) \quad (5.20)$$

para  $g_\omega$ , aunque ambos puntos coinciden cuando  $\delta_\omega \ll 1$ . Para ver esto con claridad conviene expandir la región de  $x$  pequeño considerando la variable  $y = \ln(x)$ . En términos de esta variable los puntos de interés son

$$\bar{y}_\omega \equiv \ln(X_\omega(0)) = \text{Ei}^{-1}(-\delta_\omega), \quad (5.21)$$

e

$$\tilde{y}_\omega \equiv -\frac{\exp(\bar{y}_\omega)}{\delta_\omega}, \quad (5.22)$$

siendo  $\text{Ei}$  la función integral exponencial, que cumple

$$\text{Ei}(\ln(x)) = \text{li}(x).$$

La gráfica 5.2 muestra las funciones  $f_\omega(\exp(y))$  y  $g_\omega(\exp(y))$  comparadas con sus expresiones asintóticas.

### 5.3.2 Consecuencias de las modificaciones al coeficiente de Bogoliubov

De las dos modificaciones con respecto al resultado clásico (4.10) que indicamos en la subsección anterior, la más dramática sucede en la integral en la masa en (5.15) dado que el integrando aparece la masa modificada  $m_{\omega\omega'}$ . Consideremos como ejemplo que  $\varphi$  es un escalón angosto de ancho  $\Delta M$  en torno a  $\bar{M}$  de la forma (ver figura 5.3)

$$\varphi(M) = \sqrt{\frac{2}{\Delta M}} \cos\left(\frac{M - \bar{M}}{\Delta M} \pi\right) \Theta\left(\bar{M} - M + \frac{\Delta M}{2}\right) \Theta\left(M - \bar{M} + \frac{\Delta M}{2}\right). \quad (5.23)$$

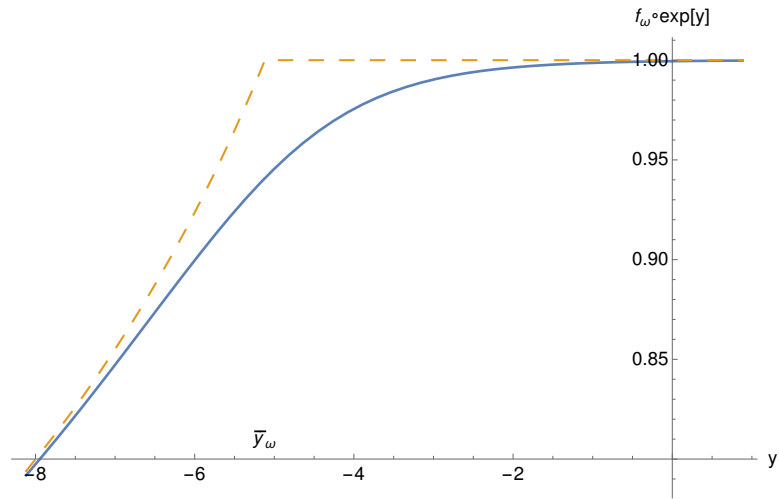
con  $\bar{M} \gg \Delta M \sim M_P$  y siendo  $\Theta$  la función de Heaviside. De esta manera tanto la fluctuación en la masa como en la posición del último rayo son de orden Planck. Entonces se obtiene que

$$\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} \sim \begin{cases} F\left[\frac{\hbar(\omega + \omega')}{\Delta M}\right] \beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(\bar{M}), & \hbar(\omega + \omega') < \Delta M \\ 0, & \hbar(\omega + \omega') \geq \Delta M \end{cases} \quad (5.24)$$

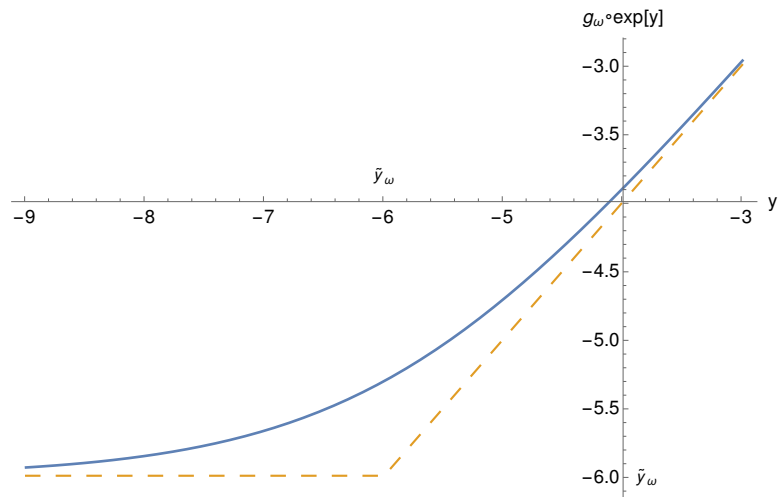
a menos de correcciones de orden  $\frac{\Delta M}{\bar{M}}$  y siendo

$$F[x] = \frac{1}{\pi} \sin(x\pi) + (1-x) \cos(x\pi).$$

En particular,  $\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} = 0$  para cualquier frecuencia  $\omega$  que cumpla  $\hbar\omega > \Delta M$ . Esta conclusión es válida cualitativamente para cualquier



(a)



(b)

Figure 5.2: Funciones  $f_\omega$  [gráfica (a)] y  $g_\omega$  [gráfica (b)] alrededor de los puntos donde cambian respecto de su comportamiento asintótico. La gráfica se realiza con  $\delta_\omega = 10^{-3}$  para resaltar el pasaje suave entre ambos regímenes. Las asíntotas de la derecha son las que aparecen en el coeficiente de Bogoliubov para el cascarón clásico.

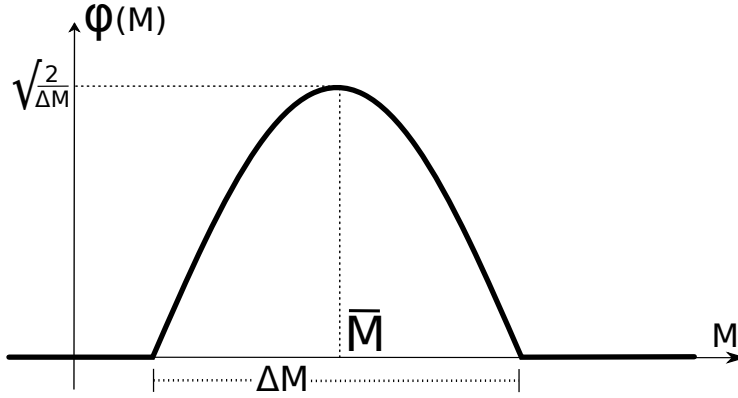


Figure 5.3: Ejemplo de función de onda para el estado del del sistema gravitatorio en la base de masa. Centrada en la masa clásica  $\bar{M}$  y de ancho  $\Delta M$  que asumimos de orden  $M_P$ .

función  $\varphi$  siempre que la desviación  $\Delta M$  sea pequeña frente a  $\bar{M}$ . Nótese que la condición  $\delta_\omega \ll 1$  se cumple automáticamente para las frecuencias en las cuales  $\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'}$ , no se anula ya que cumplen

$$\delta_\omega = \frac{\hbar\omega}{\bar{M}} \ll \frac{\hbar\omega}{\Delta M} < 1.$$

La expresión (5.24) nos permite sacar conclusiones sobre la radiación si asumimos que la matriz densidad se debe calcular como

$$\rho_{\omega_1\omega_2} = \int_0^\infty d\omega' \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega_1\omega'} [\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega_2\omega'}]^*. \quad (5.25)$$

Como conclusión general, y sin manejar un resultado analítico (o numérico) para  $\beta^{\text{eff}}$ , se puede concluir que el número total de partículas emitidas de una dada frecuencia es finito, a diferencia del resultado para el cascarón clásico. Usando la expresión anterior

$$\begin{aligned} N_\omega &= \rho_{\omega\omega} = \int_0^\infty d\omega' |\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'}|^2 \\ &= \int_0^{\frac{\Delta M}{\hbar} - \omega} d\omega' \left( \mathcal{F} \left[ \frac{\hbar(\omega + \omega')}{\Delta M} \right] \right)^2 |\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(\bar{M})|^2 < \infty. \end{aligned}$$

Para avanzar con mayor detalle sobre esta observación necesitamos una expresión para  $\beta^{\text{eff}}$ . Por fortuna, existe un amplio rango de frecuencias, que incluye a la de máxima emisión térmica  $\omega_{\text{max}}$ , en el cual es correcto reemplazar  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(\bar{M})$  por  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(\bar{M})^2$ . En trabajos previos nos referimos a este régimen como *límite clásico* [25] o *límite ingenuo*

<sup>2</sup> Nótese que hemos introducido explícitamente la dependencia de  $\beta^{\text{CS}}$  en la masa pues debemos distinguir entre diferentes parámetros que ofician de masa en la integral que lo define.

[26] pues es el límite que se obtiene si se considera  $\hbar \rightarrow 0$  dentro del integrando de  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}$ , es decir que

$$\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(m_{\omega\omega'}) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(\bar{M}). \quad (5.26)$$

En el apéndice D.4.3 probamos que  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(M) \sim \beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(M)$ , si se cumplen las condiciones (D.27). En este cálculo esas condiciones se reducen a

$$\delta_{\omega} \ll 1, \quad (5.27a)$$

$$4\bar{M}\omega |G_{\omega}(\bar{y}_{\omega}) - \bar{y}_{\omega}| \ll 1, \quad (5.27b)$$

$$\xi \equiv 4M_0(\omega' + \omega)e^{\bar{y}_{\omega}} \ll 1, \quad (5.27c)$$

$$8\pi\bar{M}\omega \lesssim 1. \quad (5.27d)$$

La ecuación (5.27a) es una hipótesis del problema y (5.27d) es equivalente a que la frecuencia  $\omega$  sea del orden o menor que la frecuencia de máxima emisión térmica  $\omega_{\text{max}}$ . En conjunto (5.27a) y (5.27d) garantizan (5.27b). Por último, la restricción extra

$$\hbar(\omega' + \omega) < \Delta M \sim M_{\text{P}},$$

que se debe cumplir para que  $\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'}$  no se anule, asegura (5.27c). La figura 5.4 muestra estas restricciones como una región en el espacio de parámetros  $\omega$  y  $\omega'$ . En definitiva, para frecuencias  $\omega \lesssim \omega_{\text{max}}$  podemos calcular

$$\begin{aligned} N_{\omega \lesssim \omega_{\text{max}}} &\sim \int_0^{\frac{\Delta M}{\hbar} - \omega} d\omega' \left( \mathbb{F} \left[ \frac{\hbar(\omega + \omega')}{\Delta M} \right] \right)^2 |\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(\bar{M})|^2 \\ &= \frac{4\bar{M}}{2\pi} \frac{1}{\exp(8\bar{M}\pi\omega) - 1} \int_0^{\frac{\Delta M}{\hbar} - \omega} \frac{d\omega'\omega'}{(\omega' + \omega)^2} \left( \mathbb{F} \left[ \frac{\hbar(\omega + \omega')}{\Delta M} \right] \right)^2 \\ &\sim \frac{1}{\exp(8\bar{M}\pi\omega) - 1} \frac{4\bar{M}}{2\pi} \ln \left( \frac{\Delta M}{\hbar\omega} \right). \end{aligned}$$

En el último paso hemos asumido además que  $\hbar\omega \ll \Delta M$  pues

$$\frac{\hbar\omega_{\text{max}}}{\Delta M} = \frac{x_0}{8\pi} \frac{\hbar}{\Delta M \bar{M}} \sim 0,11 \frac{M_{\text{P}}}{\bar{M}} \ll 1.$$

La cantidad de partículas calculada equivale a la emisión de radiación térmica por un intervalo de tiempo

$$\Delta T = 4\bar{M} \ln \left( \frac{\Delta M}{\hbar\omega} \right) \quad (5.28)$$

aunque el perfil predicho no es exactamente térmico debido al factor  $\mathbb{F}^2$  en la integral.

La afirmación anterior se puede comprobar introduciendo paquetes de onda definidos en tiempo y frecuencia como hicimos anteriormente.

Usando el resultado (C.5) se puede calcular el número de partículas emitidas entre  $u_n$  y  $u_{n+1}$  como

$$\begin{aligned} N_{\omega_j \lesssim \omega_{\max}}(u_n) &\sim \int_0^{\frac{\Delta M}{\hbar} - \omega_j} d\omega' \left( \mathbb{F} \left[ \frac{\hbar(\omega_j + \omega')}{\Delta M} \right] \right)^2 \left| \beta_{\omega_j, \omega'}^{\text{CS}}(\bar{M}) \right|^2 (u_n) = \\ &= \frac{1}{\exp(8\bar{M}\pi\omega_j) - 1} \int_0^{\frac{\Delta M}{\hbar} - \omega_j} \frac{d\omega' 2\bar{M}\varepsilon\omega'}{(\omega' + \omega_j)^2} \left( \mathbb{F} \left[ \frac{\hbar(\omega_j + \omega')}{\Delta M} \right] \right)^2 \frac{\text{sinc}^2[\tilde{\alpha}(\omega')/2]}{\pi} \end{aligned}$$

con

$$\tilde{\alpha}(\omega') = \varepsilon \left[ u_n - v_0 - 4\bar{M} \ln(4M_0[\omega' + \omega_j]) - \frac{4\bar{M}\omega_j}{\omega' + \omega_j} + 4\bar{M}\phi'(4\bar{M}\omega_j) \right].$$

Luego, con el cambio de variable  $t = 2\bar{M}\varepsilon \left( \ln [4M_0(\omega' + \omega_j)] + \frac{\omega_j}{\omega' + \omega_j} \right)$  se reduce a

$$N_{\omega_j \lesssim \omega_{\max}}(u_n) = \frac{1}{e^{8\bar{M}\pi\omega_j} - 1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt \text{sinc}^2[t_0 - t]}{\pi} \left( \mathbb{F} \left[ \frac{-\frac{\hbar\omega_j}{\Delta M}}{W\left(-\frac{4M_0\omega_j}{\exp(t/2\bar{M}\varepsilon)}\right)} \right] \right)^2$$

con  $t_0 = \varepsilon [u_n - v_0 + 4\bar{M}\phi'(4\bar{M}\omega_j)]/2$ ,  $t_1 = 2\bar{M}\varepsilon [\ln(4M_0\omega_j) + 1]$ ,  $t_2 = 2\bar{M}\varepsilon \left[ \ln(4\frac{M_0\Delta M}{\hbar}) + \frac{\hbar\omega_j}{\Delta M} \right]$  y siendo  $W$  la función de Lambert definida en el intervalo  $[-1/e, 0]$ . Esta integral se anula cuando el pico de la función sinc se encuentra fuera del intervalo de integración. Por lo tanto la emisión ocurre en un intervalo de tiempo

$$\Delta u_n = \frac{t_2 - t_1}{\varepsilon/2} \sim 4\bar{M} \ln \left( \frac{\Delta M}{\hbar\omega_j} \right)$$

como habíamos adelantado.

Todo el cálculo presentado en esta sección asume que el valor esperado del coeficiente de Bogoliubov es la cantidad correcta para el cálculo de la emisión de radiación. Sin embargo, en la próxima sección argumentaremos que este no es el caso. Es más, la escala de tiempo que acabamos de introducir no representa aquella en la cual la radiación térmica deja de ser emitida, sino una escala de tiempo más corta en la cual el valor esperado del producto de operadores  $\hat{\beta}$  se separa del producto de los valores esperados

$$\langle \hat{\beta} \rangle_{\omega_1\omega'} \langle \hat{\beta}^\dagger \rangle_{\omega_2\omega'} \neq \langle \hat{\beta}_{\omega_1\omega'} \hat{\beta}_{\omega_2\omega'}^\dagger \rangle,$$

siendo la segunda la expresión correcta para el cálculo de la matriz densidad.

## 5.4 OPERADOR ASOCIADO A LA MATRIZ DENSIDAD Y SU VALOR ESPERADO

En la sección anterior asumimos que la forma de incorporar la naturaleza mecánico cuántica del espacio-tiempo en el cálculo de la radiación era mediante la sustitución

$$\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}} \rightarrow \langle \beta \rangle_{\omega\omega'} \equiv \langle \Psi | \hat{\beta}_{\omega\omega'} | \Psi \rangle$$

siendo  $|\Psi\rangle$  una superposición de espacio-tiempos como la discutida en la sección 5.2. Por lo tanto, para el estudio de la matriz densidad calculamos

$$\rho_{\omega_1\omega_2} = \int_0^\infty d\omega' \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega_1\omega'} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega_2\omega'}^*.$$

En esta sección argumentaremos que esta no es la forma adecuada de proceder en este modelo y obtendremos una expresión alternativa para la matriz densidad que también posee correcciones importantes a la radiación de Hawking, pero con consecuencias y escalas de tiempo diferentes a la obtenida en la sección anterior.

Para comenzar vayamos a la definición de la matriz densidad en términos de operadores de creación y aniquilación del campo escalar. Como vimos en la sección 2.1.2

$$\rho_{\omega_1\omega_2} \equiv \langle 0_{\text{in}} | \hat{a}_{\omega_1}^\dagger \hat{a}_{\omega_2} | 0_{\text{in}} \rangle.$$

Si ahora consideramos la cuantización del espacio-tiempo promoviendo  $M$  y  $v_0$  a operadores, entonces es razonable asumir que el observable que representa a la matriz densidad es el valor esperado del producto de operadores de creación y aniquilación sobre el estado completo  $|0_{\text{in}}\rangle |\Psi\rangle$ . Entonces, a partir de ahora consideraremos el cálculo de

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1\omega_2}^{\text{QS}} &\equiv \langle \hat{\rho}_{\omega_1\omega_2} \rangle \equiv \langle \Psi | \langle 0_{\text{in}} | \hat{a}_{\omega_1}^\dagger(\hat{M}, \hat{v}_0) \hat{a}_{\omega_2}(\hat{M}, \hat{v}_0) | 0_{\text{in}} \rangle | \Psi \rangle \\ &= \int_0^\infty d\omega' \langle \Psi | \hat{\beta}_{\omega_1\omega'} \hat{\beta}_{\omega_2\omega'}^\dagger | \Psi \rangle, \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde hemos incorporado en la notación la dependencia explícita que los operadores de creación y aniquilación tienen en  $M$  y  $v_0$  (antes como parámetros y ahora como operadores). El superíndice QS (por *Quantum Shell*) se introduce para diferenciar este caso de los anteriores CS (*Classical Shell*) y H (Hawking). De forma análoga al cálculo del

valor esperado de coeficientes de Bogoliubov comenzamos con la expresión

$$\begin{aligned}
 \rho_{\omega_1\omega_2}^{\text{QS}} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega'\omega'}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \langle \Psi | \int_{-\infty}^{+\infty} dv dv' \int_{-\infty}^{+\infty} dv_0 |v_0\rangle \langle v_0| \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) e^{-i\omega_1\hat{u}(v) - i\omega'v} \times \\
 &\times \sum_{J=1,2,-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du |u, J\rangle \langle u, J| \int_{-\infty}^{+\infty} dv'' |v''\rangle \langle v''| \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) \int_{-\infty}^{+\infty} dv''' |v'''\rangle \langle v'''\rangle \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) \times \\
 &\times \sum_{L=1,2,-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} du' |u', L\rangle \langle u', L| e^{i\omega_2\hat{u}'(v') + i\omega'v'} \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_0 |v'_0\rangle \langle v'_0| \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) |\Psi\rangle.
 \end{aligned} \tag{5.30}$$

En esta expresión hemos considerado bases de autoestados de  $\hat{v}_0$  y  $\hat{u}$  así como hemos omitido la dependencia de los autoestados de  $\hat{u}$  en el parámetro  $\sigma$  pues aplican los mismos argumentos que se usaron para tomar el límite  $\sigma \rightarrow 0$  en el apéndice D.2. Considerando una función de onda  $\Psi$  discutida en la sección 5.2, luego de un cálculo que presentamos en el apéndice D.3, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \rho_{\omega_1\omega_2}^{\text{QS}} &= \int dM \varphi^* \left( M - \frac{\Delta\omega\hbar}{2} \right) \varphi \left( M + \frac{\Delta\omega\hbar}{2} \right) \\
 &\times \int_0^{\infty} d\omega' \beta_{\omega_1\omega'}^{\text{eff}}(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'}) [\beta_{\omega_2\omega'}^{\text{eff}}(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'})]^*
 \end{aligned} \tag{5.31}$$

donde hemos usado la misma notación de la sección anterior y hemos introducido  $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$  y  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . La diferencia principal con (5.15) es que la integral en  $M$  no incluye una dependencia de  $\omega'$  en el argumento de  $\varphi$ . La corrección principal a la radiación de Hawking vendrá de los coeficientes  $\beta^{\text{eff}}$  como veremos a continuación.

#### 5.4.1 Comparación con el cascarón clásico

El cálculo de la sección anterior muestra explícitamente diferencias entre (4.12) y (5.31) correspondientes a las matrices densidad en los casos del cascarón clásico y cuántico respectivamente. Para comparar consideraremos el ejemplo (5.23) para la función de onda  $\varphi$  del espacio-tiempo en la base de masa. En ese caso (5.31) se convierte en

$$\rho_{\omega_1\omega_2}^{\text{QS}} = F \left[ \frac{\hbar\Delta\omega}{\Delta M} \right] \int_0^{\infty} d\omega' \beta_{\omega_1\omega'}^{\text{eff}}(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'}) [\beta_{\omega_2\omega'}^{\text{eff}}(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'})]^* + O\left(\frac{\Delta M}{\bar{M}}\right) \tag{5.32}$$

si  $|\hbar\Delta\omega| < \Delta M$  y  $\rho_{\omega_1\omega_2}^{\text{QS}} = 0$  en otro caso. Como argumento de los coeficientes efectivos introducimos

$$\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'} \equiv \bar{M} - \hbar(\omega' + \bar{\omega})$$

y hemos asumido la fijación de  $M_0 = \bar{M}$  y la condición  $\delta_\omega = \frac{\hbar\omega}{M_0} \ll 1$ , al igual que en secciones anteriores.

La expresión anterior se puede simplificar aún mas recordando que la unidad de medida de frecuencia (definida en 2.45) es

$$\varepsilon = \frac{1}{k8\pi\bar{M}'} \quad k > 1$$

y por lo tanto el argumento del prefactor resulta

$$\frac{\hbar\Delta\omega}{\Delta M} = \frac{n}{k8\pi} \frac{\hbar}{\Delta M \bar{M}} = \frac{n}{k8\pi} \left( \frac{M_p}{\bar{M}} \right)^2 \ll 1$$

siendo  $n$  el numero de unidades de frecuencia que distan  $\omega_1$  y  $\omega_2$  (un número de orden unidad). Luego  $F \left[ \frac{\hbar\Delta\omega}{\Delta M} \right] \sim 1$  y entonces, para pequeñas fluctuaciones de la masa (con respecto a la masa total), se obtiene que

$$\rho_{\omega_1\omega_2}^{QS} = \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega_1\omega',(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'})}^{eff} [\beta_{\omega_2\omega',(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'})}^{eff}]^*. \quad (5.33)$$

Esta es una expresión idéntica a la del cascarón clásico cambiando  $\beta^{CS}(\bar{M})$  por  $\beta^{eff}(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'})$ . En las secciones anteriores discutimos que las diferencias entre ambas funciones tiene su origen en la fluctuación del horizonte y además presentan la sustitución de la masa  $\bar{M}$  por la masa efectiva  $\bar{m}_{\omega\omega'}$ . A los efectos del cálculo esto implica que existe un rango de las frecuencias  $\omega$  y  $\omega'$  en las cuales ambos resultados son similares. Allí aparece radiación térmica por un tiempo acotado. Fuera de esta región los resultados se separan notablemente y no se aplica el resultado de Hawking. Nótese que, a diferencia de la sección anterior, aquí mostramos que existe radiación fuera del régimen térmico pero desafortunadamente no tenemos una expresión analítica ni control numérico para explorar todo el espectro de frecuencias. En la siguiente subsección estudiaremos el régimen de radiación térmica y luego iremos un poco más allá con aproximaciones numéricas.

#### 5.4.2 Régimen de radiación térmica

En la integral (5.33) podemos identificar una región acotada en  $\omega'$  y un rango de frecuencias  $\omega$  en la cual el coeficiente de Bogoliubov efectivo se comporta como el de la radiación térmica, es decir  $\beta_{\omega\omega',(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'})}^{eff} \sim \beta_{\omega\omega',(\bar{M})}^{CS}$ . Llamaremos  $\Delta$  a la cota en  $\omega'$  y discutiremos su valor. Según el resultado del apéndice D.4.3 las condiciones (D.27) dadas por

$$\begin{aligned} \delta_\omega &\ll 1 \\ 4|\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'}| \omega |G_\omega(\bar{y}_\omega) - \bar{y}_\omega| &\ll 1 \\ \xi \equiv 4M_0(\omega' + \omega)e^{\bar{y}_\omega} &\ll 1 \\ 8\pi\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'}\omega &\lesssim 1, \end{aligned} \quad (5.34)$$

aseguran que  $\beta_{\omega\omega',(\bar{m}_{\bar{\omega}\omega'})}^{eff} \sim \beta_{\omega\omega',(\bar{M})}^{CS}$ . Luego, para sustituir la masa efectiva por  $\bar{M}$ , se necesita la condición adicional

$$\hbar(\omega' + \bar{\omega}) \ll \bar{M}. \quad (5.35)$$



Agregando esta condición, el conjunto de restricciones (5.34) se reduce a

$$\begin{aligned}\xi &\equiv 4M_0(\omega' + \omega)e^{\bar{y}\omega} \ll 1 \\ \omega &\lesssim \omega_{\max} \\ \hbar(\omega' + \bar{\omega}) &\ll \bar{M}.\end{aligned}\quad (5.36)$$

Esto nos permite acotar la cantidad de partículas emitidas como radiación térmica mediante

$$N_{\omega}^{\text{térmico}} \leq \int_0^{\Delta} d\omega' |\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(\bar{M})|^2, \quad (5.37)$$

donde  $\Delta$  satura alguna de las desigualdades de (5.36), es decir,

$$\Delta = \min \left\{ \frac{\exp(-\bar{y}\omega)}{4M_0} - \omega, \frac{\bar{M}}{\hbar} - \omega \right\}. \quad (5.38)$$

Se entiende además que  $\omega = \bar{\omega} \lesssim \omega_{\max}$ . En la figura 5.4 se representa gráficamente la región de radiación térmica en el espacio de parámetros  $\delta_{\omega}$  y  $\delta_{\omega'+\omega}$ . El resultado del cálculo es

$$\begin{aligned}N_{\omega \lesssim \omega_{\max}}^{\text{térmico}} &\leq \frac{4\bar{M}}{2\pi} \frac{1}{\exp(8\bar{M}\pi\omega) - 1} \int_0^{\Delta} d\omega' \frac{\omega'}{(\omega' + \omega)^2} \\ &\sim \frac{1}{\exp(8\bar{M}\pi\omega) - 1} \frac{4\bar{M}}{2\pi} \ln \left( \frac{\Delta + \omega}{\omega} \right)\end{aligned}$$

y representa radiación térmica emitida durante un tiempo<sup>3</sup>

$$\Delta T = 4\bar{M} \ln \left( \frac{\Delta + \omega}{\omega} \right). \quad (5.39)$$

Cualquiera de las dos opciones para  $\Delta$  funciona como cota superior, pero es especialmente interesante considerar  $\Delta = \frac{\bar{M}}{\hbar} - \omega$  pues en ese caso

$$\Delta T < 4\bar{M} \ln \left( \frac{\bar{M}}{\hbar\omega} \right). \quad (5.40)$$

Comparando con (5.28) vemos que aparece una escala de tiempo independiente de la frecuencia

$$T = 4\bar{M} \ln \left( \frac{\bar{M}}{\hbar\omega} \right) - 4\bar{M} \ln \left( \frac{\hbar\omega}{\Delta M} \right) = 4\bar{M} \ln \left( \frac{\bar{M}}{\Delta M} \right) \quad (5.41)$$

que representa una cota para el intervalo de tiempo entre la aparición de fluctuaciones importantes en el operador de número de partículas emitidas y el fin de la emisión térmica. Si asumimos que  $\Delta M \sim M_P$ , como hemos hecho hasta ahora, esta escala de tiempo coincide con el *tiempo de scrambling* al que nos referimos en la sección 2.3.4. Aún

<sup>3</sup> Esta afirmación se prueba introduciendo paquetes de onda, de forma análoga a la sección anterior, según los cálculos del apéndice C.1.1

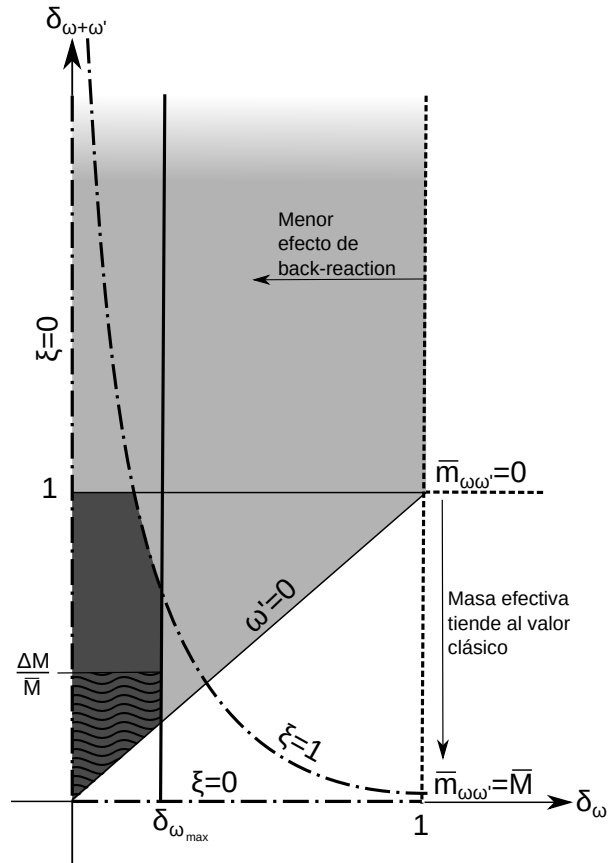


Figure 5.4: En términos de los parámetros adimensionales  $\delta_{\omega} = \frac{\hbar\omega}{\bar{M}}$  y  $\delta_{\omega+\omega'} = \frac{\hbar(\omega+\omega')}{\bar{M}}$  se presenta la región de validez del modelo en gris claro, la región de validez de la aproximación  $\beta^{\text{eff}}(\bar{m}_{\omega\omega'}) \sim \beta^{\text{CS}}(\bar{M})$  en gris oscuro y dentro de esta la región con  $\hbar(\omega'+\omega) < \Delta M$  con un patrón ondulado. La curva  $\xi = 1$ , la ubicación de  $\delta_{\omega_{\max}}$  y la ubicación de  $\Delta M/\bar{M}$  no se muestran a escala.

más, si nos movemos en el espectro finito de los paquetes de onda (2.32) entre una frecuencia mínima  $\varepsilon$  y  $\omega_{\max}$ , entonces todos los tiempos característicos que han aparecido en este modelo consisten en una pocas unidades de tiempo  $\bar{M} \ln \left( \frac{\bar{M}}{\bar{M}_p} \right)$ . Para tener una idea de orden de magnitud, este tiempo representa unos  $63\mu\text{s}$  para un agujero negro de masa solar o  $35\text{min}$  para Sagitario A\* -el agujero negro supermasivo en el centro de nuestra galaxia-.

### 5.4.3 Más allá de la radiación térmica

En la subsección anterior estudiamos el régimen térmico de la radiación correspondiente a la expresión (5.33) asumiendo fuertes restricciones en el rango de frecuencias  $\omega$  y  $\omega'$  para los coeficientes de Bogoliubov efectivos. En esta sección estudiaremos el apartamiento del régimen térmico al abandonar dichas restricciones. Para ello usaremos una combinación de resultados analíticos y numéricos.

Como discutimos brevemente en la sección 5.3.1 y detallamos en el apéndice D.4, el coeficiente de Bogoliubov efectivo  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}$  puede escribirse como una integral con dos regiones de integración claramente diferentes. Una región (+) donde la integral se asemeja a la del coeficiente de Bogoliubov del cascarón clásico  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}$ , y otra (-) donde difiere notablemente. Concretamente

$$\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(M) = -\frac{2M_0 e^{-i(\omega+\omega')\bar{v}_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} [I_-^{\text{eff}}(M) + I_+^{\text{eff}}(M)] \quad (5.42)$$

con

$$I_-^{\text{eff}}(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\bar{y}_\omega} dy e^{yY_\omega(y)} e^{[-\varepsilon + i4M_0(\omega+\omega')\exp(y)]} e^{i4M\omega G_\omega(y)},$$

$$I_+^{\text{eff}}(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{y}_\omega}^{\infty} dy e^{yY_\omega(y)} e^{[-\varepsilon + i4M_0(\omega+\omega')\exp(y)]} e^{i4M\omega G_\omega(y)}$$

y donde hemos definido

$$F_\omega(y) = \sqrt{\left| \frac{Y_\omega(y)}{y} \right|},$$

$$G_\omega(y) = \frac{\exp[y] - \exp[Y_\omega(y)]}{\delta_\omega},$$

$$Y_\omega(y) = \text{Ei}^{-1}(\text{Ei}(y) - \delta_\omega).$$

No tenemos un manejo analítico ni numérico completo de la integral (5.42) y por ello decidimos estudiarla en una región restringida del espacio de parámetros. En el apéndice D.4.2 mostramos que la condición

$$4|M|\omega|G_\omega(\bar{y}_\omega) - \bar{y}_\omega| \ll 1 \quad (5.43)$$

sumada a la hipótesis de que  $\delta_\omega = \frac{\hbar\omega}{M_0} \ll 1$  es suficiente para que valgan las aproximaciones

$$I_+^{eff}(M) = \frac{\Gamma[1 + i4M\omega, -i4M_0(\omega' + \omega)e^{\bar{y}_\omega}]}{-i4M_0(\omega' + \omega)} e^{-i4M\omega \ln[4M_0(\omega' + \omega)] - 2\pi M\omega}, \quad (5.44)$$

$$I_-^{eff}(M) \approx \int_{-\infty}^{\bar{y}_\omega} dy e^y \sqrt{\frac{|\bar{y}_\omega|}{|y|}} e^{i4M_0(\omega + \omega') \exp(y)} e^{i4M\omega \frac{\exp(y) - \exp[\bar{y}_\omega] - \bar{y}_\omega \text{Ei}(y)}{\delta_\omega}}. \quad (5.45)$$

La primera es una expresión explícita y la segunda es una integral que podemos calcular numéricamente con un bajo costo computacional. Estas expresiones nos permiten calcular los coeficientes de Bogoliubov efectivos

$$\beta_{\omega\omega'}^{eff}(\bar{m}_{\omega\omega'}) = -\frac{2M_0 e^{-i(\omega + \omega')\bar{v}_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} [I_-^{eff}(\bar{m}_{\omega\omega'}) + I_+^{eff}(\bar{m}_{\omega\omega'})]$$

en el rango de validez de (5.43), es decir cuando

$$|\bar{m}_{\omega\omega'}| \ll \frac{1}{4\omega |G_\omega(\bar{y}_\omega) - \bar{y}_\omega|}. \quad (5.46)$$

Esto aumenta el rango de acceso de nuestro cálculo como se ve comparando la figura 5.5 con la figura 5.4 que mostraba el rango de frecuencias para el régimen térmico.

Luego, el cuadrado del módulo de estos coeficientes interviene en el cálculo del número de partículas emitidas, como la diagonal de la expresión formal (5.33)

$$N_\omega = \rho_{\omega\omega}^{QS} = \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega\omega'}^{eff}(\bar{m}_{\omega\omega'})|^2. \quad (5.47)$$

Sin embargo esto requiere de sucesivas integraciones numéricas que implican un aumento del costo computacional. Teniendo en cuenta que estas aproximaciones no extienden notablemente el rango de  $\omega$  y  $\omega'$  alcanzado por el modelo, preferimos hacer un análisis cualitativo a partir del estudio de  $\beta_{\omega\omega'}^{eff}$ . La gráfica 5.6 muestra como ambas componentes (real e imaginaria) del coeficiente de Bogoliubov efectivo se distancian de la radiación térmica. Así mismo se observa cómo el módulo cuadrático (que representa la densidad de número de partículas emitidas) aumenta considerablemente en la región de validez de la aproximación. Al acercarnos al límite de validez se observa un oscilación fuerte en  $\|\beta^{eff}\|$  indicativa del error de la aproximación. Podemos entonces concluir que el régimen térmico es sucedido por una forma de radiación no térmica que, al menos inicialmente tiende a aumentar la intensidad radiada en todo el espectro de  $\omega$ . Las limitaciones de la aproximación no nos permiten extender estas conclusiones más allá de la región incluida los gráficos. Evidencia circunstancial proveniente de trabajos aún no concluidos indican que este aumento en la intensidad es transitorio.

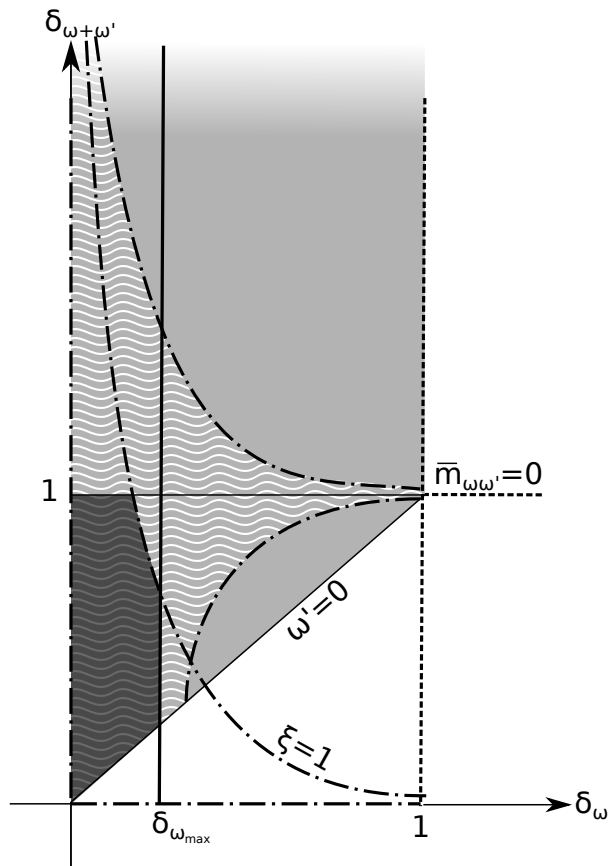
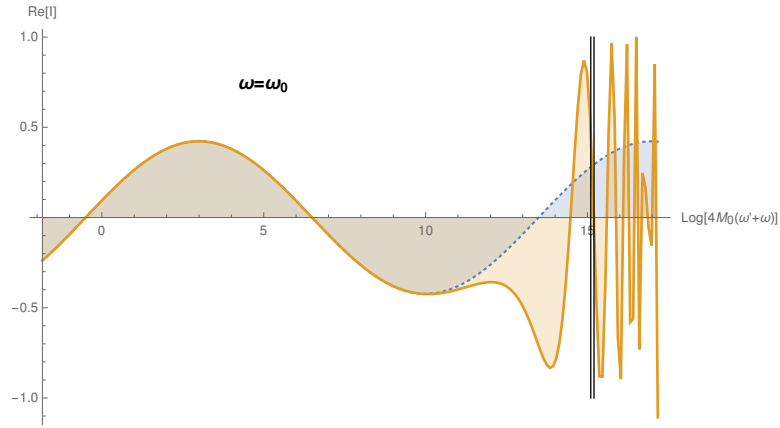
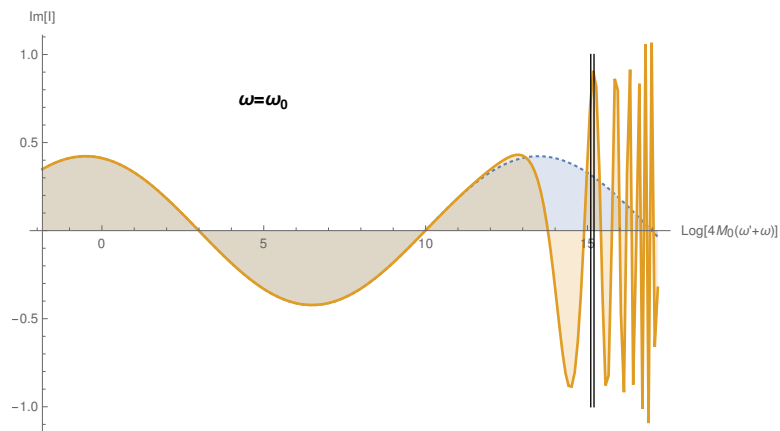


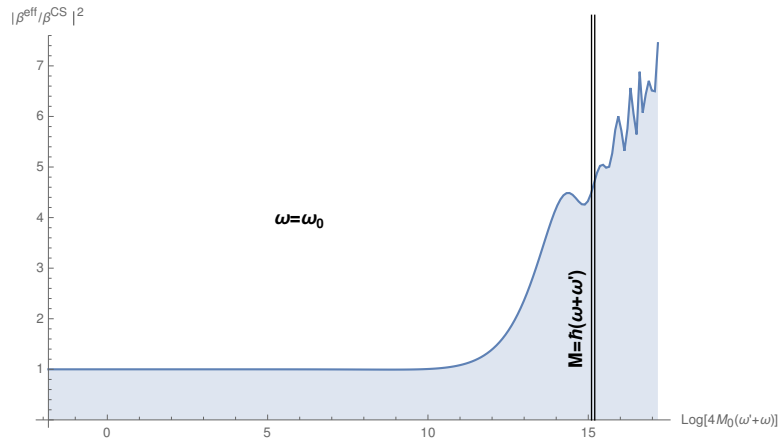
Figure 5.5: En términos de los parámetros adimensionales  $\delta_\omega$  y  $\delta_{\omega+\omega'}$  se presenta la región de validez del cálculo numérico del coeficiente de Bogoliubov efectivo (ondulado blanco) sobre la zona gris de validez de nuestro modelo. Para comparación se mantiene en gris oscuro el rango de validez del régimen térmico. Las fronteras de estas regiones no están a escala.



(a) Comparación de la parte real de  $I^{eff}$  (línea sólida) con  $I^{CS}$  (línea punteada).



(b) Comparación de la parte imaginaria de  $I^{eff}$  (línea sólida) con  $I^{CS}$  (línea punteada).



(c) Cociente de la densidad de número de partículas emitidas ( $|\beta|^2$ ) según la aproximación del modelo QS versus el caso clásico.

Figure 5.6: Comparación del coeficiente de Bogoliubov efectivo del modelo QS con el caso clásico (CS). La absisa es el parámetro que representa el tiempo en el modelo CS. En los tres casos se marca el tiempo en el cual  $\tilde{n}_{\omega\omega'} = 0$ . Se grafica para la frecuencia de máxima emisión térmica ( $\omega_0$ ) y una masa tal que  $\delta_\omega = 10^{-3}$ .

## COMPARACIÓN CON EL MODELO CGHS

En los capítulos anteriores se describió el proceso de colapso y emisión de radiación de Hawking en un espacio-tiempo cuatridimensional. Sin embargo toda la descripción se apoyó fuertemente en la reducción al caso de simetría esférica. Por lo tanto, el problema estudiado se redujo efectivamente a dos dimensiones. Esto nos hace considerar la posibilidad de estudiar directamente el problema gravitatorio en dos dimensiones. Inmediatamente se encuentra que la relatividad general no admite agujeros negros en el vacío en dos dimensiones, lo cual lleva a considerar modelos de gravedad acoplada a campos de materia. Uno de los modelos más estudiados de este tipo es el CGHS [17, 33, 72, 74, 78], que consiste en gravedad con constante cosmológica y acoplada a un campo escalar (*dilatón*). Es compatible con un colapso gravitatorio debido a un cascarón nulo con radiación de Hawking y, a diferencia del modelo cuatridimensional, permite el cálculo de la radiación de Hawking de forma exacta sin necesidad de recurrir a la aproximación de óptica geométrica. Estos modelos bidimensionales tienen otra gran ventaja que es la posibilidad de incluir la *back-reaction* de forma consistente mediante la ecuación de Einstein semiclásica<sup>1</sup>. En este capítulo, basado en el trabajo [27], se reproducen los mismos pasos de los capítulos anteriores para el modelo CGHS. La última sección, dedicada a la descripción del colapso y radiación del cascarón cuántico, es la parte novedosa y la que nos permite comparar con los resultados principales de los capítulos previos.

## 6.1 MODELO CGHS

El modelo CGHS puede describirse mediante la acción

$$S_{\text{CGHS}} = \frac{1}{2G} \int d^2x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R + 4\partial_a \phi \partial^a \phi + 4\lambda^2) \quad (6.1)$$

siendo  $d^2x \sqrt{-g}$  el elemento de volumen,  $R$  la curvatura escalar,  $\phi$  el campo dilatón y  $\lambda$  la constante cosmológica. Eligiendo coordenadas nulas

$$ds^2 = -e^{-2\rho} dx^+ dx^- \quad (6.2)$$

<sup>1</sup> La ecuación semiclásica reemplaza el tensor de energía momento de la ecuación de Einstein clásica por el valor esperado del operador correspondiente en la teoría cuántica de campos.

y mediante la fijación de gauge  $\rho = \phi$  se pueden hacer variaciones de la métrica y del campo para obtener las soluciones[27, 28]. Resulta

$$e^{-2\phi} = \frac{GM_0}{\lambda} - \lambda^2 x^+ x^-, \quad (6.3)$$

$$ds^2 = -\frac{dx^+ dx^-}{\frac{GM_0}{\lambda} - \lambda^2 x^+ x^-} \quad (6.4)$$

eligiendo el origen de ambas coordenadas de forma adecuada.

El caso  $M_0 = 0$  se conoce como vacío dilatónico y su diagrama de Penrose-Carter es similar al del espacio-tiempo de Minkowski como se muestra en la figura 6.1a. A diferencia del caso cuadrimensional, en dos dimensiones las regiones asintóticas se duplican y debemos distinguir la infinidad nula derecha (hacia la que viajan los rayos de luz de coordenada  $x^- = \text{cte.}$ ) y la izquierda (hacia la que viajan los rayos de luz de coordenada  $x^+ = \text{cte.}$ ). Se utiliza la notación  $I_R^+$  e  $I_L^+$  respectivamente. Lo mismo sucede con las infinidades nulas pasadas  $I_R^-$  e  $I_L^-$  y también con las infinidades espaciales  $i_R^0$  e  $i_L^0$ .

El caso  $M_0 \neq 0$  es una solución de agujero negro de masa  $M_0$  con una singularidad en

$$\lambda^3 x^+ x^- = GM_0$$

y horizontes pasado ( $H^-$ ) y futuro ( $H^+$ ) ubicados en  $x^\pm = 0$ . El diagrama de Penrose-Carter es similar a la extensión de Kruskal del agujero negro de Schwarzschild como se muestra en la figura 6.1b.

Para acercarnos más a la métrica de Vaidya, veamos como se puede incorporar un cascarón nulo a la dinámica de este espacio-tiempo.

## 6.2 CASCARÓN NULO

De forma análoga a la métrica de Vaidya, la solución anterior admite la sustitución de la constante  $\frac{GM_0}{\lambda}$  en (6.4) por

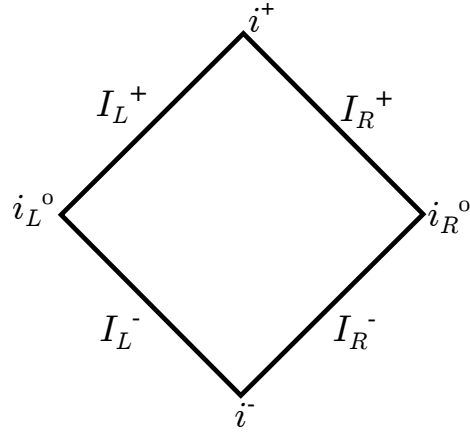
$$2Gp(x^+ - x_0) \Theta(x^+ - x_0) \quad (6.5)$$

siendo  $\Theta$  el escalón de Heaviside. Esta solución representa un cascarón nulo de momento  $p < 0$  y coordenada nula  $x^+ = x_0 = \text{cte}$  en  $I_R^-$ . El mismo divide al espacio-tiempo en dos regiones. En  $x^+ < x_0$  se tiene una porción de la solución de vacío dilatónico y en  $x^+ > x_0$  se forma un agujero negro de masa  $M = -p\lambda x_0$  con un horizonte futuro en  $x_H \equiv \frac{2Gp}{\lambda^2}$  como se muestra en la figura 6.1c.

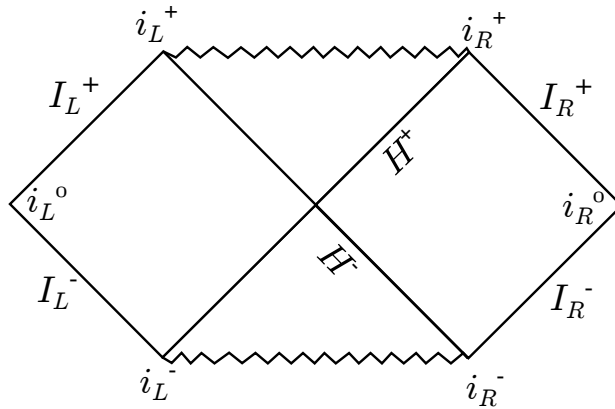
## 6.3 RADIACIÓN DE HAWKING

En analogía con el caso cuadrimensional, se puede estudiar la radiación de Hawking usando como ejemplo un campo escalar sin masa

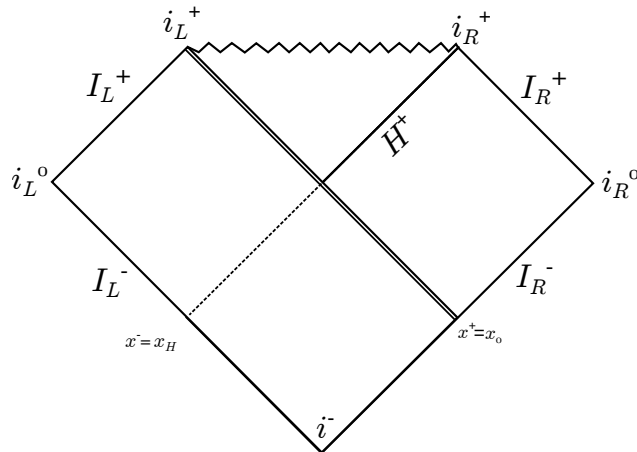




(a) Diagrama de Penrose-Carter de CGHS con  $M_0 = 0$



(b) Diagrama de Penrose-Carter de CGHS con  $M_0 \neq 0$



(c) Diagrama de Penrose-Carter de CGHS con  $M_0 = 0$  y un cascarón nulo.

Figure 6.1: Diagramas de Penrose-Carter de tres espacio-tiempos relacionados con el modelo CGHS. El tercero incluye un porción del primero (para  $x^+ < x_0$ ) y una porción del segundo (para  $x^+ > x_0$ ), representando el colapso de un cascarón nulo y la formación de un agujero negro.

$\eta$  que se propaga en el espacio-tiempo dinámico del cascarón. La ecuación de K-G en este caso es simplemente

$$\frac{\partial}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x^-} \eta = 0, \quad (6.6)$$

lo cual contrasta fuertemente con el caso cuadrimensional (2.24), donde aparece un potencial centrífugo y como consecuencia de ello la radiación de cuerpo negro se vuelve radiación de cuerpo gris. Es más, la simplicidad de la ecuación hace que la aproximación de óptica geométrica sea innecesaria para el cálculo de los coeficientes de Bogoliubov, permitiendo la resolución del problema para cualquier distribución de materia colapsante y para todo tiempo.

La solución general de la ecuación de K-G es

$$\eta(x^+, x^-) = \eta_L(x^+) + \eta_R(x^-) \quad (6.7)$$

donde  $\eta_L$  y  $\eta_R$  pueden ser elegidas libremente. En particular admiten una descomposición en ondas planas en las regiones asintóticas. Para ello es importante notar que las coordenadas nulas naturales en las regiones asintóticas  $I_R^\pm$  e  $I_L^\pm$  no son  $x^\pm$  sino aquellas coordenadas *Minkowskianas*  $\sigma$  que llevan la métrica a la forma asintótica

$$ds^2 \rightarrow -d\sigma^+ d\sigma^- \quad (6.8)$$

con rango  $(-\infty, +\infty)$ . La presencia del cascarón implica que las coordenadas  $\sigma$  deban definirse de manera distinta en las dos regiones separada por éste, que llamaremos  $\sigma_{in}$  y  $\sigma_{out}$  respectivamente. Se define

$$\pm \lambda x^\pm \equiv e^{\pm \lambda \sigma_{in}^\pm} \quad (6.9)$$

en la región *in* y

$$\begin{aligned} \lambda x^+ &\equiv e^{\lambda \sigma_{out}^+} \\ -\lambda (x^- - x_H) &\equiv e^{-\lambda \sigma_{out}^-} \end{aligned}$$

en la región *out* donde las coordenadas  $\sigma_{out}^\pm$  sólo cubren la región exterior al agujero negro, como se muestra en la figura 6.2.

Los modos de onda plana correspondientes a los vacíos  $|0\rangle_{in}$  y  $|0\rangle_{out}$  son

$$\begin{aligned} \eta_\omega^{in}(\sigma_{in}^-) &= f_\omega(\sigma_{in}^-) \quad \text{en } I_L^- \\ \psi_\omega^{in}(\sigma_{in}^+) &= f_\omega(\sigma_{in}^+) \quad \text{en } I_R^- \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \eta_\omega^{out}(\sigma_{out}^-) &= f_\omega(\sigma_{out}^-) \quad \text{en } I_L^+ \\ \psi_\omega^{out}(\sigma_{out}^+) &= f_\omega(\sigma_{out}^+) \quad \text{en } I_R^+ \end{aligned}$$

respectivamente con  $f_\omega(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega\sigma}$ . Nótese que, a diferencia del caso cuadrimensional, no es necesario plantear la forma de los modos como una condición asintótica pues los modos mantienen su forma funcional en término de coordenadas nulas. Dado que las coordenadas  $\sigma_{\text{out}}^+$  y  $\sigma_{\text{in}}^+$  son iguales, los modos  $\psi_\omega^{\text{in}}$  y  $\psi_\omega^{\text{out}}$  coinciden por lo cual su contribución a los coeficientes de Bogoliubov es trivial y no hay radiación de Hawking hacia la izquierda. En cambio,

$$\sigma_{\text{out}}^- = \frac{-1}{\lambda} \ln [\exp(-\lambda\sigma_{\text{in}}^-) - \exp(-\lambda\sigma_{\text{H}})] \quad (6.10)$$

donde

$$\sigma_{\text{H}} \equiv \frac{-1}{\lambda} \ln(-\lambda\kappa_{\text{H}}) \quad (6.11)$$

y por tanto los modos  $\eta_\omega$  dan lugar a un coeficiente de Bogoliubov

$$\beta_{\omega\nu} = - \left( \eta_\omega^{\text{out}}, [\eta_\nu^{\text{in}}]^* \right)_{\text{K-G}} \quad (6.12)$$

donde el subíndice K-G indica que se trata del producto de K-G para este caso. En [27] se obtiene la expresión

$$\beta_{\omega\nu} = \frac{-1}{2\pi\lambda} e^{-i(\omega+\nu)\sigma_{\text{H}}} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} B \left( -i\frac{\omega+\nu}{\lambda}, i\frac{\omega}{\lambda} \right) \quad (6.13)$$

donde  $B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$  es la función beta. Así mismo se puede calcular la matriz densidad (2.22), obteniéndose

$$\rho_{\omega_1, \omega_2} = \frac{\sqrt{\omega_1\omega_2}}{(2\pi\lambda)^2} e^{i(\omega_2-\omega_1)\sigma_{\text{H}}} \frac{\Gamma(i\frac{\omega_1}{\lambda}) \Gamma(-i\frac{\omega_2}{\lambda})}{\pi} \text{K}(\omega_1, \omega_2) \quad (6.14)$$

con

$$\text{K}(\omega_1, \omega_2) = \int_0^\infty \frac{d\nu}{\lambda} \sinh\left(\pi\frac{\nu}{\lambda}\right) \Gamma\left(-i\frac{\omega_1+\nu}{\lambda}\right) \Gamma\left(i\frac{\omega_2+\nu}{\lambda}\right). \quad (6.15)$$

Vale la pena remarcar que esta es una expresión exacta en el marco del cálculo de Hawking, es decir, despreciando la *back-reaction*.

La expresión anterior es una distribución divergente, lo cual es esperable porque la base de ondas planas considera la radiación emitida durante un tiempo infinito, pero puede considerarse una base discreta de paquetes de onda centrados en frecuencia  $\omega_j = (j + \frac{1}{2})\varepsilon$  y tiempo  $\sigma_{\text{out}}^+ = \sigma_n \equiv n\frac{2\pi}{\varepsilon}$  análogo a (2.32). El cálculo es análogo al de la sección 4.2 y en [27] se realiza para frecuencias altas. La densidad de partículas emitidas por unidad de tiempo resulta

$$N_{\omega_j}(\sigma_n) = \frac{\Theta(\sigma_n - \sigma_{\text{H}})}{e^{\frac{2\pi}{\lambda}\omega_j} - 1} + O(\varepsilon) \quad (6.16)$$

con la misma función escalón de (4.18). Este resultado es consistente con el resultado conocido de radiación térmica de temperatura

$$T = \frac{2\pi \hbar}{\lambda k_{\text{B}}} \quad (6.17)$$

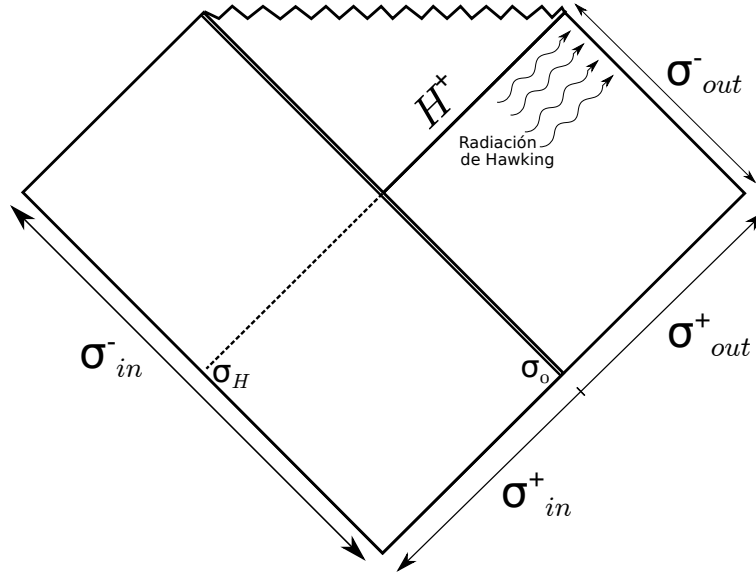


Figure 6.2: Diagrama de Penrose-Carter de CGHS-shell con emisión de radiación de Hawking, la cual se calcula usando coordenadas asintóticamente Minkowskianas  $\sigma_{in}^-$  y  $\sigma_{out}^+$ . El cascarón se ubica en  $\sigma_0 \equiv \frac{1}{\lambda} \ln(\lambda x_0)$  y el horizonte en  $\sigma_H$ .

que inicia en  $\sigma_n = \sigma_H$ . Esto es similar al caso del cascarón en cuatro dimensiones y la diferencia principal es que la temperatura de Hawking no depende de la masa. A su vez, el escalón que determina el inicio de la radiación es consistente con los cálculos del valor esperado del tensor de energía-momento usando la anomalía conforme [17, 28].

#### 6.4 ESPACIO DE FASES Y OBSERVABLES DE DIRAC

En el capítulo 3 estudiamos el espacio de fases del sistema gravitacional cuadrimensional forzando la simetría esférica y vimos que la posición del cascarón y de la masa del agujero negro resultan ser observables de Dirac conjugados. En esta sección veremos que el análisis para el sistema bidimensional es equivalente, sin necesidad de fijar artificialmente ciertos grados de libertad.

La acción que representa el cascarón colapsante en CGHS puede escribirse como  $S = S_{CGHS} + S_{shell}$  donde  $S_{CGHS}$  fue presentada anteriormente y

$$S_{shell} = \lim_{m \rightarrow 0} \int d\tau \sqrt{-\dot{q}_a(\tau) \dot{q}^a(\tau)} \quad (6.18)$$

considerando el límite de masa nula del cascarón cuya trayectoria en el espacio-tiempo es  $q^a(\tau)$ . La formulación Hamiltoniana con parametrización  $(t, x)$  del espacio-tiempo se puede estudiar en térmi-

nos de variables ADM, donde el elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q(dx + N^x dt)^2, \quad (6.19)$$

siendo  $N$  el *lapso* y  $N^x$  el *shift*. De forma análoga al capítulo 3, el cascarón se puede describir por su posición  $r(t)$  y su momento  $p$ , mientras que la acción de CGHS puede escribirse en término de variables de Ashtekar (polares)  $E^x$ ,  $E^\varphi$  y sus variables conjugadas  $U_x$  y  $K_\varphi$  (ver [27]). En este caso  $E^x = e^{-2\phi}$  y  $E^\varphi$  se elige de manera que  $ds^2 = (E^\varphi)^2 dx^2$  es el elemento de línea espacial. Nótese que, a diferencia del caso cuatridimensional, la variable  $E^x$  no es gravitacional sino que describe al campo dilatónico. También se definen el *lapso* y *shift* re-escalados

$$\bar{N} = N \frac{E^x E^\varphi}{(E^x)'} \quad (6.20)$$

$$\bar{N}^x = N^x + \frac{K_\varphi}{E^\varphi E^x} \bar{N} \quad (6.21)$$

y se usa la notación  $()' \equiv \partial_x()$ . Pasando a la formulación Hamiltoniana sobre superficies de  $t$  constante se obtiene el Hamiltoniano total

$$H(\bar{N}) = \frac{-1}{G} \int dx \bar{N}' [H_g(x) + G |p| F(x_0) \Theta(x^+ - x_0)] + \bar{N}^+ 2\lambda M \quad (6.22)$$

siendo  $H_g$  la densidad Hamiltoniana de la parte gravitacional

$$H_g(x) = \frac{1}{2} \frac{[(E^x)']^2}{(E^\varphi)^2 E^x} - 2E^x \lambda^2 - \frac{1}{2} \frac{(K_\varphi)^2}{E^x}, \quad (6.23)$$

con la función  $F$  dada por

$$F(x) = -\frac{K_\varphi}{E^\varphi E^x} + \frac{(E^x)'}{(E^\varphi)^2 E^x}, \quad (6.24)$$

y siendo  $M$  es la masa ADM (observada en el infinito espacial) y dada por

$$M = \frac{|p| F(x_0)}{2\lambda}. \quad (6.25)$$

Al evaluarla en la solución para el cascarón resulta  $M = -p\lambda x_0$ . Justamente  $M$  es uno de los observables de Dirac asociados al cascarón pues su corchete de Poisson con el Hamiltoniano es nulo. El otro observable de Dirac asociado al cascarón es

$$V = - \int_{x_0}^{+\infty} dy \frac{2\lambda}{F(y)}, \quad (6.26)$$

el cual no sólo conmuta con el Hamiltoniano sino que también es el conjugado de  $M$

$$\{M, V\} = 1. \quad (6.27)$$

Esté último observable está asociado a la posición del cascarón en coordenadas de tipo Eddington-Finkelstein en  $I_{\mathcal{R}}^-$ . De esta manera se obtiene una situación análoga a la del modelo cuatridimensional. Sin embargo en este caso hemos descrito el espacio de fases completo, sin reducciones de ningún tipo.

### 6.5 RADIACIÓN DE HAWKING EN EL ESPACIO-TIEMPO CUÁNTICO

De acuerdo al análisis anterior y de forma análoga al caso cuatridimensional proponemos que la cuantización del espacio-tiempo considere  $\hat{M}$  y  $\hat{V}$  como observables conjugados que cumplen

$$[\hat{M}, \hat{V}] = i\hbar. \quad (6.28)$$

Promoviendo los coeficientes de Bogoliubov a operadores a partir de (6.13)

$$\hat{\beta}_{\omega\nu} = \frac{-1}{2\pi\lambda} \exp(-i(\omega + \nu)\hat{\sigma}_H) \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} B\left(-i\frac{\omega + \nu}{\lambda}, i\frac{\omega}{\lambda}\right) \quad (6.29)$$

con  $\hat{\sigma}_H$  el operador asociado a

$$\sigma_H = \frac{-1}{\lambda} \ln(-\lambda x_H) = \frac{-1}{\lambda} \ln\left(-\frac{2Gp}{\lambda}\right). \quad (6.30)$$

De esta manera el operador asociado al coeficiente de Bogoliubov depende exclusivamente del operador  $\hat{p}$ . Tomando en cuenta la relación de  $p$  con  $M$  y  $V$  dada por

$$p = -Me^{-\lambda V}. \quad (6.31)$$

podemos definir el operador autoadjunto

$$\hat{p}^2 = \left(e^{-\frac{\lambda\hat{V}}{2}} \hat{M} e^{-\frac{\lambda\hat{V}}{2}}\right)^2. \quad (6.32)$$

Finalmente podemos comparar la expresión para el operador asociado al coeficiente de Bogoliubov con (5.10), donde la modificación sustancial del resultado de radiación térmica se debía a la dependencia no trivial en los operadores  $\hat{M}$  y  $\hat{v}$ . En cambio en el modelo CGHS dicha dependencia se da exclusivamente a través del operador  $\hat{p}$ . De esta manera, eligiendo una base  $\{|p\rangle\}_{p<0}$  de autoestados de  $\hat{p}$  vemos que el valor esperado de  $\hat{\beta}$  en un estado cualquiera  $|\Psi\rangle$  es

$$\langle\Psi|\hat{\beta}_{\omega\nu}|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^0 dp \psi(p) \langle p|\hat{\beta}_{\omega\nu}|p\rangle = \int_{-\infty}^0 dp \psi(p) \beta_{\omega\nu}(p) \quad (6.33)$$

donde la dependencia de  $\beta_{\omega\nu}$  en  $p$  se marca de forma explícita. El razonamiento anterior funciona para cualquier observable a ser construido en base a coeficientes de Bogoliubov. Por lo tanto, el efecto de la naturaleza cuántica de  $M$  y  $V$  se reduce a una superposición de

radiación debida a agujeros negros de distinta masa. Recordemos que además la temperatura de Hawking sólo depende del parámetro  $\lambda$  con lo cual este resultado sugiere que el efecto considerado no ayuda a recuperar información sobre el estado inicial del cascarón observando la radiación de Hawking en el infinito.

En [27] argumentamos que podrían considerarse mediciones complementarias para extraer la información sobre el estado inicial. Estas mediciones deberían realizarse sobre la radiación pero más cerca del agujero negro. Formalmente este tipo de propuesta es objetable porque los observables asociados a la radiación sólo están bien definidos en la región asintótica. Sin embargo observamos que el cambio de variable

$$\begin{aligned} x_{\text{bulk}}^- &= x^- - \chi_H \left[ 1 - \frac{\chi_0}{x^+} \right] & , x^+ > \chi_0 \\ x_{\text{bulk}}^- &= x^- & , x^+ < \chi_0 \end{aligned}$$

interpola entre las regiones *in* y *out* exterior al agujero negro, de manera que las coordenadas  $\sigma^\pm$  definidas por

$$\lambda x^+ = e^{\lambda \sigma^+} \quad (6.34)$$

$$-\lambda x_{\text{bulk}}^- = e^{-\lambda \sigma^-} \quad (6.35)$$

determinan un marco de referencia inercial en torno a cualquier superficie  $x^+ = \text{cte.}$ . Usando esta idea puede obtenerse una noción privilegiada de vacío en cada superficie de  $x^+ = \text{cte.}$  habilitando la medición no ambigua de radiación en el *bulk*. Futuros trabajos darán cuenta de los avances en esta línea y su vinculación con el resultado para gravedad en cuatro dimensiones.





## 7.1 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Hemos estudiado el colapso gravitatorio de un sistema con simetría esférica que forma un agujero negro y emite radiación. Lo hemos implementado siguiendo el cálculo de Hawking pero superando algunas de sus aproximaciones. En primer lugar aprovechamos la simplicidad de modelo de colapso (un cascarón esférico delgado de partículas sin masa) para describir el inicio de la radiación. Este resultado, que se mantiene en el contexto de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo, es importante porque define una referencia para medir otras escalas de tiempo que describen el proceso de evaporación. Ya sea el tiempo de evaporación, el tiempo de Page o las nuevas escalas que aparecen al incorporar las fluctuaciones de la geometría en el modelo. En particular obtuvimos que el número de partículas medido por observadores en  $I^+$  entre el tiempo  $u$  y  $u + \frac{2\pi}{\epsilon}$  para frecuencias entre  $\omega - \frac{\epsilon}{2}$  y  $\omega + \frac{\epsilon}{2}$  es

$$N_{\omega}^{\text{CS}}(u) = \frac{\Theta[u - u_i]}{e^{8M\omega\pi} - 1} + O(\epsilon) \quad (7.1)$$

donde  $\Theta$  es un escalón suave y  $u_i$  (el inicio de la radiación) es del orden

$$u_i \approx v_s + 4M \ln \left( \frac{M_0}{M} \right) \quad (7.2)$$

con  $v_s$  la coordenada nula del cascarón,  $M$  su masa y  $M_0$  una constante arbitraria que suele fijarse igual a la masa  $M$  por ser la escala natural con estas dimensiones.

Por otro lado sabemos que el cascarón, como objeto cuántico, no tiene ni posición  $v_s$  ni masa  $M$  definidas, sino que estos son observables con fluctuaciones. En concordancia con esto, estudiamos el espacio de fases (clásico) de espacio-tiempos que describen un colapso con simetría esférica como *midi-superespacio*, lo cual ha sido discutido en la literatura desde diferentes enfoques. Al menos en este caso altamente simétrico, es claro que ambos parámetros ( $v_s$  y  $M$ ) son observables (de Dirac) conjugados. Por lo tanto, es esperable que cualquier teoría cuántica de la gravedad que describa este sistema incluya los observables  $\hat{M}$  y  $\hat{v}_s$  relacionados por

$$[\hat{M}, \hat{v}_s] = i\hbar.$$

Usando esto como premisa introducimos una segunda modificación al cálculo de Hawking. Promovimos los parámetros  $M$  y  $v_s$  a oper-

adores conjugados al nivel de los coeficientes de Bogoliubov que son sustituidos por operadores

$$\beta_{\omega\omega'}(M, v_s) \rightarrow \hat{\beta}_{\omega\omega'}(\hat{M}, \hat{v}_s). \quad (7.3)$$

Esto implica la extensión del espacio de Hilbert del sistema a uno que incluye los grados de libertad del sector gravitatorio. Sin pretender estudiar en detalle este nuevo espacio de Hilbert, nos preguntamos cómo se ve impactada la radiación de Hawking por el sólo hecho de suceder en una superposición de espacio-tiempos en vez de en un espacio-tiempo "clásico". En particular nos enfocamos en  $N_\omega$ , el flujo de partículas por unidad de frecuencia medido por observadores lejanos, y encontramos que se ve fuertemente impactado por las fluctuaciones. Dado que, en el caso de un espacio-tiempo clásico, se relaciona con el coeficiente de Bogoliubov  $\beta_{\omega\omega'}$  mediante

$$N_\omega = \int_0^\infty \beta_{\omega\omega'} \beta_{\omega\omega'}^* d\omega' \quad (7.4)$$

entonces calculamos

$$\int_0^\infty \langle \hat{\beta}_{\omega\omega'} \rangle \langle \hat{\beta}_{\omega\omega'}^\dagger \rangle d\omega' \quad (7.5)$$

y

$$\int_0^\infty \langle \hat{\beta}_{\omega\omega'} \hat{\beta}_{\omega\omega'}^\dagger \rangle d\omega'. \quad (7.6)$$

donde el valor esperado se considera en un estado cuántico del sistema centrado en la una masa clásica  $\bar{M}$  y con una fluctuación  $\Delta M$ . Ambas expresiones se estudian con una combinación de resultados analíticos y numéricos para frecuencias del orden (o menores) que la de máxima emisión térmica. Inicialmente coinciden entre sí y con el resultados de emisión térmica, pero en tiempos cortos comienzan a diverger. La primera expresión, que no es la forma adecuada de calcular  $N_\omega$ , define una escala de tiempo

$$T_{\text{fluct}} = 4\bar{M} \ln \left( \frac{\Delta M}{\hbar\omega} \right), \quad (7.7)$$

medida desde el inicio de la radiación térmica. A partir de entonces dicha integral se anula. Argumentamos que la segunda expresión sí representa el flujo de partículas y encontramos que presenta una escala

$$T_{\text{termica}} = 4\bar{M} \ln \left( \frac{\bar{M}}{\hbar\omega} \right) \quad (7.8)$$

a partir de la cual el resultado se aleja de la radiación térmica. En conjunto, ambos resultados muestran que en una escala de tiempo muy corta las fluctuaciones de los observables se vuelven relevantes.

Si bien el cálculo es válido para un rango restringido de frecuencias, aparece también la escala

$$\Delta T = T_{\text{termica}} - T_{\text{fluct}} = 4\bar{M} \ln \left( \frac{\bar{M}}{\Delta M} \right) \quad (7.9)$$

que es independiente de la frecuencia y representa el tiempo entre que aparecen las fluctuaciones y que la emisión de partículas comienza a diferir de la radiación térmica. Asumiendo que  $\Delta M$  es de escala Planck entonces se llega a identificar  $\Delta T$  con el tiempo de *scrambling* discutido en la sección 2.3.4. Los cálculos muestran que el alejamiento de la radiación térmica sucede con un aumento del flujo de radiación emitida. Sin embargo, las aproximaciones utilizadas impiden extender el resultado más allá de esta escala de tiempos cortos. Mejoras en el cálculo numérico que aún están en progreso sugieren que este aumento es un proceso transitorio.

Algunas de las aproximaciones necesarias para el estudio del sistema cuadridimensional son evitadas pasando a sistemas en dos dimensiones. En particular, no se necesita la aproximación de óptica geométrica (clave para obtener la expresión de los coeficientes de Bogoliubov) y tampoco la reducción del espacio de fases por simetría esférica, cuya función es reducir el sistema a uno bidimensional de manera efectiva. Comparando con el modelo CGHS de gravedad bidimensional acoplada a un inflatón, se reproducen algunos de los resultados anteriores. Se obtiene una expresión análoga para el inicio de la radiación y a nivel del espacio de fases del sistema gravitatorio se encuentran observables de Dirac conjugados asociados a la masa y la coordenada nula del cascarón en  $I^-$ . Sin embargo, los coeficientes de Bogoliubov dependen de una combinación específica de estos observables de manera que los efectos de las fluctuaciones se reducen a una superposición de radiación de agujeros negros de diferente masa.

En el sentido opuesto, la restricción a la simetría esférica relativiza algunos de los resultados obtenidos para el sistema cuadridimensional. Por un lado sólo observamos modos de radiación que respetan la simetría esférica y por tanto podríamos estar ignorando alejamientos de la radiación térmica que se observan en modos con momento angular. Aún más importante es el hecho de que los efectos cuánticos observados sobre las radiación de Hawking se corresponden con fluctuaciones de la geometría que no son locales en un espacio-tiempo cuadridimensional. Es razonable entonces que el efecto de estas fluctuaciones sobre la radiación térmica sea demasiado extremo. Seguramente las fluctuaciones asociadas a las variables angulares puedan dar cuenta de un alejamiento del régimen térmico más gradual.

## 7.2 PERSPECTIVAS

Hemos incluido un efecto de gravedad cuántica que puede modificar considerablemente el resultado de radiación térmica. Dado que el

origen del efecto es muy general es razonable esperar efectos similares en teorías bidimensionales y cuadridimensionales.

En cuanto a la teoría cuadridimensional esperamos mejorar los resultados numéricos para describir no sólo el apartamiento del régimen térmico en tiempos cortos sino también el régimen de tiempos largos que sustituye al resultado de Hawking. Esto podría generar una imagen más completa de los mecanismos que llevan a este apartamiento. También sería de interés aplicar nuestro cálculo a otros ejemplos de espacio-tiempos tipo Vaidya donde la evaporación del agujero negro es parte de la dinámica gravitatoria y por tanto no es necesario introducirla *a mano*. Potencialmente nos permitiría describir el proceso final de evaporación y no sólo el proceso cuasi-estacionario inicial como hasta ahora.

En referencia a teorías bidimensionales, si bien no obtuvimos un resultado análogo para el número de partículas emitido en CGHS, es posible explorar otros observables que pudieran dar cuenta del apartamiento del régimen térmico. Así mismo, recientemente ha crecido el interés por sistemas como la gravedad Jackiw-Teitelboim y la modificación de CGHS conocido como modelo RST (Russo-Susskind-Thorlacius). En ambos casos se ha desarrollado un método para el cálculo de la entropía microscópica de un agujero negro que emite radiación de Hawking considerando efectos de gravedad cuántica. La forma de salir del modelo del espacio-tiempo clásico, bautizado *truco de las réplicas*, es considerar una geometría compuesta por un conjunto de copias de la geometría clásica con la posibilidad de que una topología no trivial donde las diferentes copias están conectadas por agujeros de gusano. Combinando esto con una expresión para la entropía microscópica (fórmula de Ryu-Takayanagi) se obtiene una expresión para la entropía que no presenta la paradoja de la información. No obstante, el cálculo no es transparente en cuanto a la dinámica de la radiación medida por observadores lejanos. La aplicación de nuestro modelo a estos sistemas puede ser de interés, especialmente teniendo en cuenta que la escala de tiempo de *scrambling* también aparece como un tiempo característico de formación de las *islas* en el interior del agujero negro. Esta es, a su vez, una dinámica central en el cálculo de entropía.

Finalmente, mantenemos el interés en seguir explorando otras avenidas relacionadas con la paradoja de la información. Trabajos recientes sostienen la idea de que el estudio de las cargas asintóticas puede extenderse a espacio-tiempos con horizontes de eventos. La formalización de estas ideas sería fundamental para evaluar su aplicación a la radiación de Hawking.

Parte III

APÉNDICES



## VARIABLES DE ASHTEKAR

---

En este apéndice repasaremos la formulación Hamiltoniana de la gravedad, la cual incluye la descripción del espacio de fases presentado en los capítulos 3 y 6. Comenzando por la formulación Lagrangiana discutiremos la formulación ADM, que es el estándar para la descripción 3+1 (espacio y tiempo) de la gravedad. Finalmente pasaremos a las variables de Ashtekar. Esta es una formulación alternativa que se utiliza en los capítulos mencionados y es usada, por ejemplo, en gravedad cuántica de lazos.

### A.1 FORMULACIÓN LAGRANGIANA. LA ACCIÓN DE EINSTEIN-HILBERT

La formulación Hamiltoniana de la gravedad se construye a partir de una formulación Lagrangiana y es ilustrativo hacer una breve descripción de este punto de partida.

Consideremos un espacio-tiempo  $\mathcal{M}$  con una métrica  $g$  y un conjunto de campos de materia  $\phi$ . La acción es la funcional

$$S[g, \phi] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{M}} \mathcal{L}[\phi, \partial_\alpha \phi, g_{\alpha\beta}] \sqrt{-g} d^4x + \int_{\partial\mathcal{M}} \square, \quad (\text{A.1})$$

donde  $\sqrt{-g} d^4x$  es el elemento de volumen,  $R$  es el escalar de curvatura y la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  es una función de los campos, sus derivadas y la métrica. Nótese que se deja sin especificar un término de borde que ignoraremos en un principio.

Las ecuaciones de los campos de materia y las ecuaciones de Einstein se obtienen como extremos de la acción con respecto a variaciones  $\delta\phi$  de los campos y  $\delta g_{\mu\nu}$  de la métrica respectivamente. Esquemáticamente

$$\delta S[\phi, g] = \frac{\delta S}{\delta\phi} \delta\phi + \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \quad (\text{A.2})$$

donde  $\frac{\delta S}{\delta\phi}$  y  $\frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}$  son derivadas funcionales y se cumple  $\delta S[\bar{\phi}, \bar{g}] = 0$  cuando  $\bar{\phi}, \bar{g}$  son soluciones de las ecuaciones de campo. En el caso de las variaciones de los campos de materia se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta S &= \int_{\mathcal{M}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha \phi} \delta \partial_\alpha \phi \right] \sqrt{-g} d^4x + \int_{\partial\mathcal{M}} \square = \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\alpha \phi} \right) \right] \delta\phi \sqrt{-g} d^4x \end{aligned}$$

, donde se ha integrado por partes y eliminado el término de borde usando condiciones adecuadas sobre las variaciones en el borde. Inmediatamente se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_a \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_a \phi} \right) = 0$$

como condición para que  $\delta S = 0$ . La variación con respecto a la métrica es análoga y arroja

$$\delta S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{M}} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \frac{1}{2} \mathcal{L} g_{\mu\nu} \right] \delta g^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x,$$

dando lugar a la ecuación de Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

siendo  $T_{\mu\nu} = -2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + \mathcal{L} g_{\mu\nu}$  el tensor de stress-energía para el campo de materia. El primer término proviene de la acción de Einstein Hilbert

$$S_{\text{EH}} = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} R \sqrt{-g} d^4x \quad (\text{A.3})$$

y el segundo de la acción de los campos de materia, que depende de la métrica a través de la densidad Lagrangiana  $\mathcal{L}$  y del elemento de volumen. Al igual que antes, los términos de borde se cancelan con condiciones adecuadas sobre las variaciones en el borde. Este punto será discutido al tratar la formulación Hamiltoniana de la teoría.

#### A.1.1 La acción de Palatini

Uno de los aspectos incómodos de la acción de Einstein-Hilbert como funcional de la métrica es que es de segundo orden en sus derivadas. Palatini [61] hizo una formulación alternativa del principio variacional donde se asumen que la acción es una funcional de primer orden respecto de nuevas variables. Estas son la tétrada y una conexión de Lorentz. Presentamos brevemente esta formulación alternativa porque provee el marco más natural para introducir luego las variables de Ashtekar, en vez de hacerlo directamente en la formulación Hamiltoniana. La tétrada es una base ortogonal  $\{e_I^\alpha\}_{I=1,\dots,4}$  de vectores elegidos para que la métrica del espacio-tiempo se vea como la del espacio-tiempo plano en dicha base, es decir,

$$\eta_{IJ} = g_{\alpha\beta} e_I^\alpha e_J^\beta$$

donde  $\eta_{IJ}$  es la métrica de Minkowski. De manera más abstracta se lo puede pensar como objeto sobre  $\mathcal{M} \times \mathbb{R}^n$  y, haciendo uso de ambas métricas ( $g$  y  $\eta$ ), se puede definir la co-tétrada  $e_\alpha^I$  que cumple

$$\delta_I^J = e_I^\alpha e_{\alpha'}^J, \quad \delta_\mu^\nu = e_I^\nu e_\mu^I.$$



Anteriormente, al presentar la acción de Einstein-Hilbert asumimos que la curvatura (y en particular el escalar  $R$ ) está definida usando la noción de transporte paralelo dado por la conexión de Levi-Civita  $\nabla$ , siendo esta la única noción de transporte paralelo compatible con la métrica ( $\nabla g = 0$ ) y sin torsión ( $\nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$  para  $X$  e  $Y$  campos vectoriales). La acción de Palatini se define en un contexto más general, donde no se asume una noción preferida de transporte paralelo y la conexión de Levi-Civita se obtiene como consecuencia de las ecuaciones de movimiento. La variable elegida es el potencial  $A_{\mu}^{IJ}$ , antisimétrico en  $I$  y  $J$ , que define una conexión de Lorentz con respecto al espacio interno. Explícitamente puede introducirse mediante la derivada covariante definida por

$$D_{\mu} V^I = \partial_{\mu} V^I + A_{\mu}^I V^J \quad (\text{A.4})$$

siendo  $V^J$  un campo vectorial en el espacio interno. A partir de la conexión se define una curvatura en el espacio interno

$$F_{\alpha\beta}^{IJ} = \partial_{\alpha} A_{\beta}^{IJ} - \partial_{\beta} A_{\alpha}^{IJ} + A_{\alpha\kappa}^I A_{\beta}^{KJ} - A_{\beta\kappa}^I A_{\alpha}^{KJ}.$$

. Luego, la relación

$$\tilde{\Gamma}_{\alpha\beta}^{\delta} = A_{\alpha I}^J e_{\beta}^I e_J^{\delta} \quad (\text{A.5})$$

define una conexión en el espacio-tiempo, siendo  $\tilde{\Gamma}$  análogo a los símbolos de Christoffel. Así mismo

$$\tilde{R}_{\alpha\beta}^{\delta\gamma} = F_{\alpha\beta}^{IJ} e_I^{\delta} e_J^{\gamma}$$

es una curvatura en el espacio-tiempo, con el tensor  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$  análogo al de Ricci y el escalar

$$\tilde{R} = e_I^{\alpha} e_J^{\beta} F_{\alpha\beta}^{IJ}$$

definidos de forma análoga. La acción de Palatini es

$$S_P[e, A] = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \tilde{R} \sqrt{-g} d^4 x \quad (\text{A.6})$$

que depende de la tétrada a través de  $\tilde{R}$  y del elemento de volumen. La dependencia en el potencial  $A$  se da por medio de  $\tilde{R}$  y sólo aparecen primeras derivadas en el espacio-tiempo.

Al realizar variaciones de esta acción respecto de la tétrada se obtiene la ecuación de Einstein para la curvatura  $\tilde{R}_{\alpha\beta}$  y las variaciones respecto del potencial  $A$  implican que la curvatura es compatible con la tétrada, lo cual se traduce en que los elementos de (A.5) coinciden con los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita. Así se recuperan las mismas ecuaciones de movimiento de la acción de Einstein-Hilbert.

## A.2 FORMULACIÓN ADM

La formulación Hamiltoniana es una formulación de datos iniciales, donde las soluciones de las ecuaciones de campo son representadas por sus condiciones sobre una superficie de tiempo inicial. Estos datos iniciales (libres) se identifican con el espacio de fases. Esta descripción requiere una separación del espacio-tiempo en espacio y tiempo (3+1) lo cual no es natural en una teoría relativista. En el caso de la gravedad el problema se agrava pues no es evidente cómo identificar los datos iniciales libres, debiendo recurrirse a una descripción Hamiltoniana con vínculos, como describiremos más adelante.

A.2.1 *Lapso y Shift*

En primer lugar consideremos una región  $\mathcal{V}$  de un espacio-tiempo que acepta una foliación en superficies espaciales ( $\Sigma_t$ ) de tiempo constante, cuyo borde está compuesto por una región temporal ( $\mathcal{B}$ ) y las superficies espaciales  $\Sigma_{t_0}$  y  $\Sigma_{t_f}$  como se muestra en la figura A.1. Supongamos que esta región acepta un sistema de coordenadas genérico  $x^\alpha$  y también el sistema  $(t, y^a)$  donde  $y^a$  son coordenadas comunes a todas las superficies de tiempo constante  $\Sigma_t$ . Las curvas de  $y^a = \text{cte}$  atraviesan las superficies de tiempo constante y el campo vectorial

$$t^\alpha = \left. \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right|_{y^a = \text{cte.}}$$

es tangente a dichas curvas. Introduciendo la base  $\{e_a^\alpha\}_{a=1,2,3}$  de vectores tangentes a  $\Sigma_t$  dados por

$$e_a^\alpha = \left. \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right|_{t = \text{cte.}}$$

y el versor  $n^\alpha$  normal (hacia el futuro) dado por

$$n_\alpha e_a^\alpha = 0 \quad a = 1, 2, 3, \quad (\text{A.7})$$

se pueden definir las funciones *lapso*  $N$  y *shift*  $N^a$  que permiten escribir el campo vectorial  $t^\alpha$  como

$$t^\alpha = N n^\alpha + N^a e_a^\alpha. \quad (\text{A.8})$$

Luego, el intervalo invariante en coordenadas  $(t, y^a)$  toma la forma

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ab} (dy^a + N^a dt)(dy^b + N^b dt), \quad (\text{A.9})$$

donde  $h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$  es la métrica inducida en la superficie de tiempo constante. De esta manera la métrica queda expresada exclusivamente en términos de  $h_{ab}$ ,  $N$  y  $N^a$ .

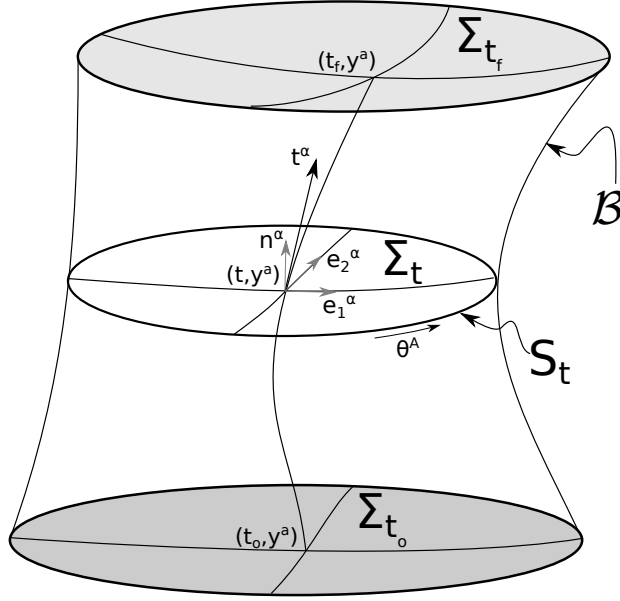


Figure A.1: Espacio-tiempo que admite una foliación espacial  $\{\Sigma_t\}_{t \in (t_0, t_f)}$  con coordenadas  $(t, y^a)$  y con borde tipo tiempo  $\mathcal{B} = S_t \times (t_0, t_f)$  con coordenadas  $(t, \theta^A)$ . El *shift* ( $N^\alpha$ ) y el *lapse* ( $N$ ) son las componentes del vector tangente a las curvas  $y = \text{cte.}$  en la base de vectores tangentes ( $e_a^\alpha$ ) y normal ( $n^\alpha$ ) a las superficies  $\Sigma_t$  respectivamente.

### A.2.2 Descripción del borde

Al presentar la formulación ADM discutiremos los términos de borde de la acción que hemos ignorado hasta ahora y por tanto es necesario describir las cantidades geométricas asociadas al borde.

En primer lugar, dado que las superficies  $\Sigma_t$  están incrustadas en  $\mathcal{V}$  se define una curvatura extrínseca

$$K_{ab} = n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (\text{A.10})$$

donde la notación ";" representa la derivada covariante. Nótese que en la superficie  $\Sigma_{t_0}$  el campo normal saliente es el opuesto al  $n^\alpha$  definido previamente.

El borde restante es  $\mathcal{B}$  y podemos utilizar la foliación del interior para describirlo. Observando que las superficies  $\Sigma_t$  tienen su propio borde  $S_t$  en la intersección con  $\mathcal{B}$  podemos utilizar el conjunto de superficies  $\{S_t\}_{t \in (t_0, t_f)}$  como una foliación de  $\mathcal{B}$ . Llamemos  $(t, \theta^A)$  a un sistema de coordenadas en  $\mathcal{B}$  siendo  $\theta^A$  coordenadas comunes a las superficies  $S_t$ . El conjunto

$$e_A^\alpha = e_a^\alpha \frac{\partial y^a}{\partial \theta^A}$$

es una base de vectores tangentes a  $\Sigma_t$  y  $S_t$ . Luego es posible completarla con un versor  $r^\alpha$  normal a  $S_t$  que cumpla

$$\begin{aligned} r_\alpha n^\alpha &= 0 \\ r_\alpha e_A^\alpha &= 0, \quad A = 1, 2. \end{aligned}$$

Automaticamente,  $\{e_A^\alpha\}_{A=1,2}$  junto con  $n_\alpha$  forman una base de vectores tangentes en  $\mathcal{B}$ . De esta manera se obtienen las métricas inducidas  $\gamma^{ij}$  en  $\mathcal{B}$  y  $\sigma^{AB}$  en  $S_t$  tales que

$$\begin{aligned} ds_{S_t}^2 &= \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B \\ ds_{\mathcal{B}}^2 &= -N^2 dt^2 + ds_{S_t}^2 \end{aligned}$$

, así como las curvaturas extrínsecas

$$k_{AB} = r_{\alpha;\beta} e_A^\alpha e_B^\beta$$

de  $S_t$  como superficie incrustada en  $\Sigma_t$  y

$$\mathcal{K}_{ij} = r_{\alpha;\beta} e_i^\alpha e_j^\beta$$

de  $\mathcal{B}$  incrustado en  $\mathcal{V}$ , siendo  $\{e_i^\alpha\}_{i=1,2,3}$  el conjunto formado por los vectores  $e_A^\alpha$  y el vector normal  $\left. \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right|_{\theta^A = \text{cte.}}$ .

### A.2.3 El Hamiltoniano ADM

Para obtener la acción gravitatoria total se suma a la acción de Einstein-Hilbert (A.3) el término de borde

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} 2\epsilon K \sqrt{h} d^3y + S_0$$

siendo  $K$  la curvatura extrínseca,  $\epsilon \sqrt{h} d^3y$  el elemento de volumen orientado en el borde y  $S_0$  un término constante que puede ser agregado por conveniencia.

En términos de variables ADM la acción del sector gravitatorio se puede escribir (ver detalle del cálculo en [65]) como

$$S_G = \frac{1}{16\pi G} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{\Sigma_t} ({}^3R + K^{ab} K_{ab} - K^2) N \sqrt{h} d^3y + 2 \oint_{S_t} [k - k_0] N \sqrt{\sigma} d^2\theta \right\} \quad (\text{A.11})$$

siendo  ${}^3R$  el escalar de Ricci para la métrica  $h_{ab}$  en  $\Sigma_t$ ,  $K$  la traza de la curvatura extrínseca  $K_{ab}$ ,  $k$  la traza de la curvatura extrínseca  $k_{AB}$  de  $S_t$ . El término  $k_0$  representa la constante  $S_0$  y se agrega para que la acción se mantenga finita si  $\mathcal{V}$  se extiende a una región no acotada del espacio-tiempo.

La forma (A.11) de la acción permite pasar a una formulación Hamiltoniana para las coordenadas  $h_{ab}$ ,  $N$ ,  $N^a$  y sus momentos conjugados. Para definir dichos momentos se utilizan, como paso intermedio, las velocidades generalizadas  $\dot{h}_{ab}$ ,  $\dot{N}$  y  $\dot{N}^a$  definidas como las derivadas de Lie de estas cantidades a lo largo del campo  $t^\alpha$ . Luego, el momento conjugado  $p^{ab}$  asociado a la métrica  $h_{ab}$  es

$$p^{ab} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_G) \quad (\text{A.12})$$

siendo  $\mathcal{L}_G$  la densidad Lagrangiana dada por

$$16\pi G \sqrt{-g} \mathcal{L}_G = ({}^3R + K^{ab} K_{ab} - K^2) N \sqrt{h}.$$

Los momentos conjugados para  $N$  y  $N^a$  no se definen pues la acción no depende de sus velocidades generalizadas, lo cual muestra que ambos son multiplicadores de Lagrange. El cálculo explícito de (A.12) arroja

$$p^{ab} = \frac{\sqrt{h}}{16\pi G} (K^{ab} - K h^{ab}) \quad (\text{A.13})$$

de donde se puede despejar

$$K^{ab} = \frac{16\pi G}{\sqrt{h}} \left( p^{ab} - \frac{1}{2} p h^{ab} \right) \quad (\text{A.14})$$

siendo  $p = h_{ab} p^{ab}$ . Luego se define la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H}_G = p^{ab} \dot{h}_{ab} - \sqrt{-g} \mathcal{L}_G$$

que, junto con el término de borde, da lugar al Hamiltoniano

$$H_G = \frac{-1}{16\pi G} \left[ \int_{\Sigma_t} NC + N^a C_a + 2 \oint_{S_t} [N(k - k_0) - N_a (K^{ab} - K h^{ab} r_b)] \sqrt{\sigma} \right].$$

En esta expresión se introducen

$$C \equiv {}^3R + K^2 - K^{ab} K_{ab} \quad (\text{A.15})$$

$$C_a \equiv (K_a^b - K \delta_a^b)_{;b} \quad (\text{A.16})$$

donde ";" es la derivada covariante respecto de  $h^{ab}$  y  $r^b$  son las componentes del vector normal a  $S_t$  en la base de vectores tangentes de  $\Sigma_t$ .

Considerando variaciones  $\delta N$  y  $\delta N^a$  que se anulen en el borde se obtienen las ecuaciones de vínculo

$$C \approx 0 \quad \text{y} \quad C^a \approx 0 \quad (\text{A.17})$$

que se conocen como *vínculo Hamiltoniano* y *vínculo de difeomorfismos* respectivamente. Por otro lado las ecuaciones de movimiento se obtiene

considerando variaciones  $\delta h^{ab}$  (que se anulen en el borde) y  $\delta p^{ab}$ . Mediante un cálculo intrincado (ver [65]) se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\dot{h}_{ab} &= 2NK_{ab} + \mathcal{L}_N h_{ab} \\ \dot{K}_{ab} &= N_{;ab} - N(R_{ab} + KK_{ab} - 2K_a^c K_{bc}) + \mathcal{L}_N K_{ab}\end{aligned}$$

donde  $\mathcal{L}_N$  representa la derivada de Lie respecto del *shift*  $N^a$ . Por último vale la pena examinar el Hamiltoniano evaluado sobre las soluciones. Debido a las ecuaciones de vínculo el Hamiltoniano se anula en el interior de  $\Sigma_t$  y sólo sobrevive el término de borde

$$H_G^{\text{on-shell}} = -\frac{1}{8\pi G} \oint_{S_t} [N(k - k_0) - N_a (K^{ab} - Kh^{ab} r_b)] \sqrt{\sigma} d^2\theta.$$

. Si  $\mathcal{V}$  es una región compacta este término no es relevante pues  $k_0$  puede ajustarse para que  $H_G$  se anule pero si representa un espacio-tiempo no acotado entonces la integral es divergente y  $k_0$  debe introducirse para regularizar esta integral. En el caso de un espacio-tiempo asintóticamente plano  $k_0$  se fija como el valor de  $k$  asumiendo que la superficie  $S_t$  está incrustada en espacio-tiempo plano. Esto garantiza un término de borde finito, pero no necesariamente cero. De hecho, dado que el valor de *lapse* y *shift* se pueden elegir libremente en el borde, diferentes elecciones dan lugar a distintos observables para observadores lejanos. Por ejemplo, fijando  $N = 1$  y  $N^a = 0$  en el borde y considerando el límite  $S_t \rightarrow \infty$  a tiempo constante, se obtiene que  $H_G^{\text{on-shell}}$  representa la masa total vista por observadores inerciales lejanos. En cambio  $N = 0$  y  $N^a = \frac{\partial y^a}{\partial \phi}$  representan el momento angular total según el ángulo  $\phi$  visto por observadores inerciales lejanos.

### A.3 VARIABLES DE ASHTEKAR

La cuantización de la gravedad siguiendo el esquema de Dirac de cuantización de sistemas vinculados [43] encuentra grandes inconvenientes en términos de variables ADM. Esto se debe tanto a la dependencia no polinómica de los vínculos (A.15) y (A.16) con las variables ADM así como en su álgebra con respecto a los corchetes de Poisson.

Con el objetivo de mejorar estos aspectos Ashtekar [6] introdujo una versión alternativa de la formulación Hamiltoniana que ha sido el punto de partida para el enfoque de cuantización conocido como *gravedad cuántica de lazos*. Como explicación del lenguaje y la notación usada en los capítulos 3 y 6 presentamos brevemente esta formulación.

Al discutir la acción de Palatini vimos que es posible sustituir la dependencia funcional en la métrica por la tétrada y una conexión. La formulación de Ashtekar hace lo mismo con respecto a ADM utilizando la proyección de la tétrada y la conexión sobre la superficie  $\Sigma_t$  de tiempo constante. La tríada (o tétrada proyectada)  $\{e_a^i\}_{i=1,2,3}$

es la base ortonormal de vectores en la cual la métrica inducida  $h_{ab}$  se expresa como la métrica euclidiana usual, es decir,

$$h_{ab} = \delta_{ij} e_a^i e_b^j \quad (\text{A.18})$$

. La proyección  $K_a^i$  de la conexión se vincula con la curvatura extrínseca  $K_{ab}$  de  $\Sigma_t$  mediante el tensor

$$\tilde{K}_{ab} = \delta_{ij} K_a^i e_b^j \quad (\text{A.19})$$

, cuya parte simétrica es la curvatura extrínseca de modo que  $\tilde{K}_{(ab)} = K_{ab}$ , debiéndose agregar como vínculo la exigencia de que la parte antisimétrica se anule. Es útil sustituir la tríada por la *tríada densitizada*

$$E_a^j = \sqrt{h} e_a^j \quad (\text{A.20})$$

. Las variables de Ashtekar se constuyen con estos elementos. Para llegar a ellas primero se introduce el parámetro  $\beta$  de Barbero-Immirzi observando que la transformación

$$E_a^j \rightarrow \frac{E_a^j}{\beta}, \quad E_a^j \rightarrow \beta K_a^j \quad (\text{A.21})$$

es canónica. Finalmente, se sustituye la proyección de la conexión  $K$  por una nueva conexión (llamada de Ashtekar-Barbero) que es dependiente del parámetro  $\beta$  y se define como

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \beta K_a^i, \quad (\text{A.22})$$

donde  $\Gamma_a^k = -\frac{\epsilon_{ij}^k}{2} \Gamma_a^{ij}$  y  $\Gamma_a^{ij} = e^{bi} \nabla_a e_b^j$  son las componentes de la conexión compatible con la tríada.

En términos de estas variables (ver cálculo en [54]) los vínculos (A.15 y A.16) se reducen a

$$C = \frac{E_i^a E_j^b}{\sqrt{\det[E_a^i]}} \left[ \epsilon_{ij}^k \mathcal{F}_{ab}^k - 2(\beta^2 + 1) K_{[a}^i K_{b]}^j \right] \approx 0 \quad (\text{A.23})$$

$$C_a = E_i^b \mathcal{F}_{ab}^i \approx 0 \quad (\text{A.24})$$

siendo  $\mathcal{F}$  la curvatura asociada a la conexión de Ashtekar-Barbero

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^k = 2\partial_{[\mu} A_{\nu]}^k + \epsilon_{ij}^k A_\mu^i A_\nu^j. \quad (\text{A.25})$$

. También se agrega el vínculo *de Gauss*

$$G_i = \partial_a E_i^a + \epsilon_{ij}^k A_a^j E_k^a \approx 0 \quad (\text{A.26})$$

que surge a raíz de la exigencia de la simetría de  $\tilde{K}_{ab}$ . Originalmente la construcción de Ashtekar fue planteada para  $\beta = -i$  lo cual simplifica el vínculo Hamiltoniano (que se vuelve polinómico en las variables de Ashtekar) y también la estructura de álgebra de vínculos (ver [7]). Sin embargo no es imprescindible y la elección de un valor real es importante para no lidiar con variables métricas complejas. En los capítulos 3 y 6 se utiliza  $\beta = 1$ .





## MÉTRICA DE VAIDYA

---

### B.1 AGUJERO NEGRO ETERNO: LA MÉTRICA DE SCHWARZSCHILD

Como es bien conocido, el espacio-tiempo que rodea a un objeto de masa  $M$  esféricamente simétrico puede representarse con la métrica Schwarzschild

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.1})$$

con  $G$  la constante de Newton,  $c$  la velocidad de la luz, siendo  $t$  una coordenada de tiempo y  $r^2 d\Omega^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin(\theta)^2 d\phi$  el elemento de área de una esfera de radio  $r$ . Esta métrica es una solución de vacío ( $T_{\mu\nu} = 0$ ) de las ecuaciones de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

donde  $R_{\mu\nu}$  el tensor de curvatura de Ricci,  $R$  la curvatura escalar y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento. De hecho, para esta métrica tanto  $R_{\mu\nu}$  como  $R$  son cero. Nótese que la expresión (B.1) es adecuada para describir el exterior de un objeto masivo si su radio es mayor que su radio de Schwarzschild

$$R_S \equiv \frac{2GM}{c^2}, \quad (\text{B.3})$$

lo cual es cierto para casi cualquier objeto masivo en la naturaleza. Sin embargo, si el radio del objeto es igual o menor a  $R_S$  entonces las coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$  son inadecuadas, pero la métrica puede extenderse usando otras coordenadas. Por ejemplo se pueden utilizar coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes  $(v, r, \theta, \phi)$  donde  $v = ct + r^*$  es una coordenada nula con

$$r^* = r + R_S \ln \left( \frac{r - R_S}{R_0} \right), \quad (\text{B.4})$$

la llamada coordenada *tortuga*, que está definida a menos de una constante arbitraria  $R_0$ . En estas coordenadas se obtiene

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2, \quad (\text{B.5})$$

lo cual permite extender la métrica de Schwarzschild hacia una región  $r < R_S$  desconectada causalmente (hacia el futuro) del exterior ( $r > R_S$ )

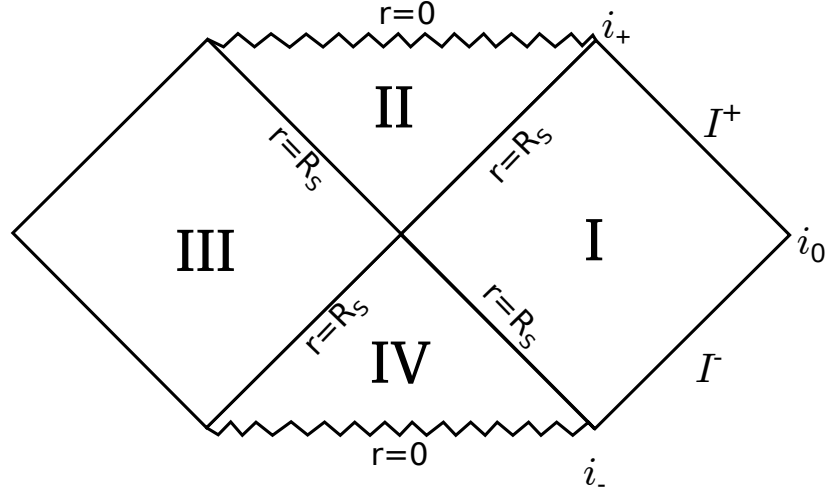


Figure B.1: Diagrama conforme (de Penrose-Carter) de la extensión maximal del espacio de Schwarzschild. Las coordenadas de Schwarzschild abarcan sólo la región (I), denominada zona exterior; las de Eddington-Finkelstein entrantes abarcan además la región (II), el interior del agujero negro; en cambio, las de Eddington-Finkelstein salientes abarcan las zonas (I) y (IV), denominada agujero blanco. Finalmente la zona (III) es una segunda zona exterior y es necesario introducir otras coordenadas para incorporarla a la descripción. Las coordenadas de Kruskal son un ejemplo, cuyo reescalo a un rango finito da lugar a este diagrama.

y separada por un horizonte de eventos en  $r = R_S$ . Esta región interior presenta además una singularidad en la curvatura en  $r = 0$ . De forma análoga, las coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes  $(u, r, \theta, \phi)$  con  $u = ct - r^*$  arrojan

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.6})$$

y permiten extender la métrica a una región  $r < R_S$  desconectada causalmente del exterior hacia el pasado, también con una singularidad en  $r = 0$ . La extensión maximal de esta métrica es conocida como extensión de Kruskal y su diagrama conforme (o diagrama de Penrose-Carter) se presenta en la figura (B.1). La región exterior (I) es la solución de Schwarzschild y las regiones (II) y (IV) son las extensiones obtenidas mediante coordenadas de Eddington-Finkelstein (entrantes y salientes respectivamente). Nótese que la región exterior (I) tiene como borde el horizonte  $r = R_S$  (que encierra al agujero negro) y las regiones asintóticas infinitas. El infinito temporal futuro ( $i_+$ ) se alcanza siguiendo las trayectorias de los objetos masivos que permanecen fuera del agujero negro, el infinito nulo futuro ( $I^+$ ) se alcanza continuando todas las trayectorias de rayos de luz que permanecen

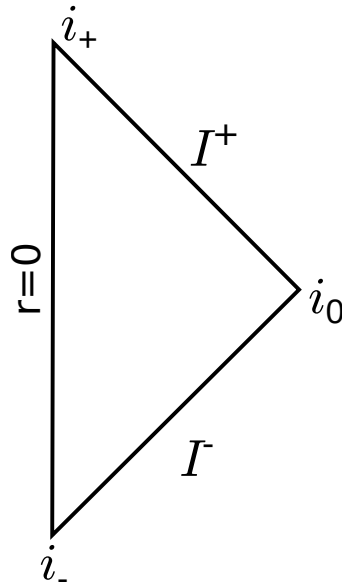


Figure B.2: Diagrama de Penrose-Carter del espacio-tiempo de Minkowski compactificado. Cada punto es una esfera, las líneas a  $45^\circ$  son direcciones tipo luz y las regiones asintóticas son las típicas de un espacio-tiempo asintóticamente plano.  $I^+$ : infinito nulo futuro.  $I^-$ : infinito nulo pasado.  $i^+$ : infinito temporal futuro.  $i^-$ : infinito temporal pasado.  $i^0$ : infinito espacial.

fuera del agujero negro, por ejemplo las trayectorias de  $u = \text{cte.}$ , el infinito espacial ( $i_0$ ) es donde están los objetos infinitamente lejos de  $r = 0$  en el espacio a tiempo fijo y los infinitos pasados son análogos pero siguiendo trayectorias hacia el pasado.

Las regiones asintóticas anteriormente descritas son las mismas que presenta el espacio-tiempo de Minkowski (ver figura B.2) y de hecho este se obtiene como un caso particular en el cual  $M = 0$ , de manera que  $R_S = 0$  y desaparece tanto la singularidad como las regiones (II),(III) y (IV). En este caso límite, las coordenadas de Schwarzschild se reducen a las coordenadas esféricas y las coordenadas de Eddington-Finkelstein a las coordenadas nulas  $v = ct - r$  y  $u = ct + r$ , de manera que cualquiera de los conjuntos mencionados cubren todo el espacio de Minkowski. Finalmente es importante notar que la métrica que hemos descrito es una solución estática de las ecuaciones de Einstein y por lo tanto implica que el agujero negro que describe es eterno. Esto lo convierte en un modelo poco adecuado para describir una situación dinámica en la cual un proceso de colapso gravitatorio (por ejemplo el colapso de una estrella) puede dar lugar a un objeto denso que se comprima por debajo de su radio de Schwarzschild, formando un agujero negro. Hoy sabemos que este es un proceso habitual y el origen de la mayoría de los agujeros que se observan en la naturaleza. En la siguiente sección discutiremos una extensión muy simple de la métrica B.1 que incorpora esta característica dinámica.

## B.2 FORMACIÓN DE UN AGUJERO NEGRO: MODELO DE CASCARÓN DELGADO COLAPSANTE

En 1942 P.C.Vaidya estudió las métricas dadas por los elementos de línea

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{R(v)}{r} \right) du^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.7})$$

y

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{R(u)}{r} \right) du^2 - 2dudr + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.8})$$

en coordenadas nulas entrantes y salientes respectivamente. Ambas son soluciones de las ecuaciones de Einstein (B.2), pero con un contenido de materia dado por

$$T_{\mu\nu} = \frac{dM(v)}{dv} \frac{c^2}{4\pi r^2} \delta_{\mu\nu} \delta_{vv}$$

y

$$T_{\mu\nu} = - \frac{dM(v)}{dv} \frac{c^2}{4\pi r^2} \delta_{\mu u} \delta_{\nu u}$$

donde  $M = \frac{c^2}{2G} R$ . Esto representa una nube de materia que colapsa radialmente a la velocidad de la luz o que escapa radialmente hacia el infinito en el segundo caso.

Como caso particular de esta familia de métricas se encuentra la de un cascarón esférico delgado que colapsa para formar un agujero negro dado por

$$M(v) = M\theta(v - v_S) \quad (\text{B.9})$$

siendo  $Mc^2$  un parámetro constante y positivo que representa la energía total del cascarón y que coincidirá con la masa del agujero negro. Por otro lado  $\theta(v - v_S)$  es un escalón ubicado en la posición  $v_S$  en  $I^-$  de donde parte el cascarón. Este modelo requiere una interpretación distribucional de las ecuaciones de Einstein pues el tensor de energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = \delta(v - v_S) \frac{Mc^2}{4\pi r^2} \delta_{\mu\nu} \delta_{vv}. \quad (\text{B.10})$$

Además se requiere introducir condiciones de pegado [12] en la hipersuperficie parametrizada por  $v = v_S$  ya que la métrica es discontinua. Alternativamente se puede pensar como un límite de un cascarón muy delgado suavizando el escalón.

A diferencia del modelo de Schwarzschild, las coordenadas nulas describen todo el espacio-tiempo. Tampoco hay un agujero negro eterno sino que se inicia con un cascarón esférico arbitrariamente

grande que reduce su radio a la velocidad de la luz hasta atravesar su radio de Schwarzschild. A partir de entonces el cascarón sigue su colapso hacia una singularidad ( $r = 0$ ) en una región aislada del exterior por un horizonte de eventos ( $H^+$ ). Dicho horizonte es una esfera que crece desde  $r = 0$  hasta llegar a un radio  $R_S$  en el momento en que es atravesado por el cascarón entrante; a partir de entonces mantiene dicho radio.

Podemos identificar una región interior al cascarón caracterizada por  $v < v_s$  y una región exterior con  $v > v_s$ . La región interior es una esfera en el espacio-tiempo de Minkowski que se reduce con el tiempo y desaparece cuando se forma la singularidad. La región exterior al cascarón es un trozo de las regiones (I) y (II) del espacio-tiempo de Schwarzschild y posee una singularidad en  $r = 0$ . El diagrama de Penrose-Carter de este espacio-tiempo se presenta en la figura (2.1) y consiste en el pegado de las regiones exterior e interior como se muestra en la figura (B.3). De hecho en el exterior las coordenadas coinciden con las de Eddington-Finkelstein y en el interior con las coordenadas nulas habituales del espacio-tiempo plano. Nuevamente, las regiones asintóticas son las mismas que las del espacio-tiempo plano.

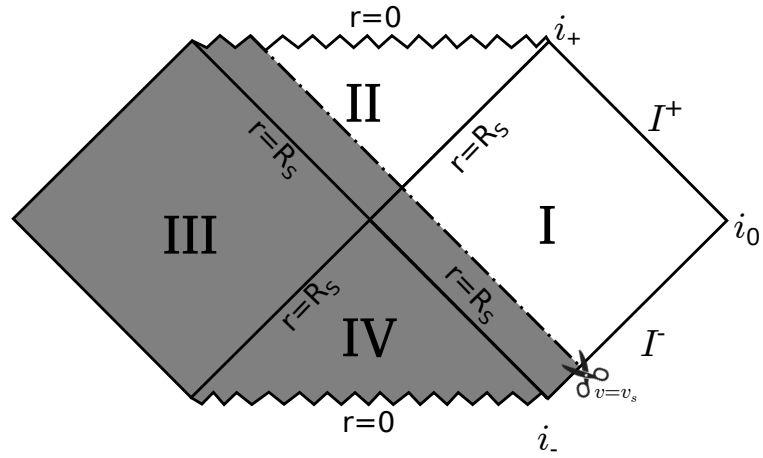
Además de la ubicación del cascarón en  $I^-$ , que marca el punto de pegado de ambas regiones, esta métrica introduce otra separación natural en el infinito pasado relacionada con la formación del horizonte  $H^+$ . Dentro de los rayos de luz que viene del pasado lejano podemos identificar la familia de los rayos entrantes anteriores al cascarón, que logran llegar al centro de la esfera ( $r = 0$ ) antes de la formación del horizonte  $H^+$  y por lo tanto pueden escapar al infinito. La otra familia es la de los rayos que no logran llegar al centro antes de la formación del horizonte y por tanto no logran escapar de agujero negro. En el medio existe el *último rayo* (de coordenada  $v_0$  en  $I^-$ ) que se mueve radialmente hacia adentro y que llega al centro de la esfera en el momento exacto de la formación del horizonte. La posición de este último rayo en  $I^-$  depende de la posición del cascarón y de la masa del agujero negro de acuerdo a

$$v_s = v_0 + 4M \quad (\text{B.11})$$

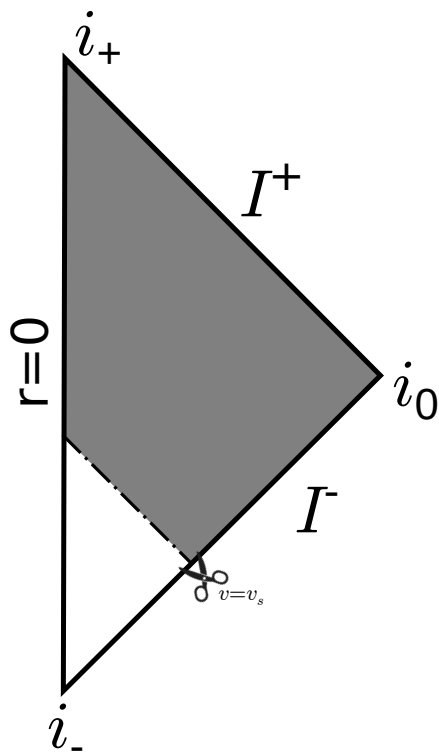
Todos los rayos nulos radiales entrantes ( $v < v_s$ ) que logran escapar llegan al infinito nulo futuro en un punto identificado con la coordenada nula saliente

$$u(v) = v - 4M \ln \left( \frac{v_0 - v}{4M_0} \right), \quad (\text{B.12})$$

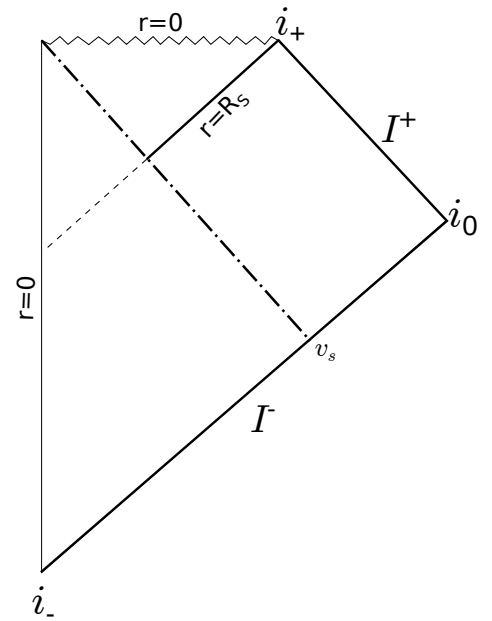
donde  $M_0$  es un parámetro arbitrario que usualmente se elige igual a  $M$ . La simplicidad de la relación (B.12) es una de las razones por las cuales se utiliza este modelo para estudiar procesos dinámicos de formación de agujeros negros, en particular en el trabajo de Hawking [38].



(a)



(b)



(c)

Figure B.3: Espacio de Vaidya (c) se obtiene como unión de un trozo del espacio-tiempo de Kruskal y el de Minkowski. En (a) y (b) se remueven las zonas grises. El cascarón es donde sucede el pegado de las zonas restantes (blanco).

## CÁLCULO ALTERNATIVO DE LA MATRIZ DENSIDAD

### C.1 COEFICIENTES DE BOGOLIUBOV DEPENDIENTES DEL TIEMPO

Durante todo el trabajo se definieron coeficientes de Bogoliubov asociados a una base de ondas planas ( $\chi_{lm\omega}$ ) en  $I^+$  para el campo escalar con el que describimos la radiación de Hawking. La desventaja de esta base es que no presenta explícitamente una noción de evolución en el tiempo, impidiendo ver directamente la dinámica. Además se obtienen divergencias en los cálculos de observables tales como el número de partículas. En el caso de la aproximación de tiempos largos de Hawking este es sólo un problema formal que se resuelve interpretando debidamente las divergencias. Sin embargo, para describir el transitorio en el caso de un cascarón clásico o para estudiar la radiación que aparece en el modelo de cascarón cuántico se necesita una descripción de la dependencia en el tiempo. Para ello, se puede utilizar una base discreta de combinaciones lineales de ondas planas definida en (2.32) y dada por

$$\chi_{lmn\omega_j} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{u_n \omega i} \chi_{lm\omega}. \quad (\text{C.1})$$

Este conjunto de funciones son una base completa y numerable de paquetes centrados en el tiempo avanzado  $u_n = \frac{2\pi n}{\varepsilon}$ , y en la frecuencia  $\omega_j = (j + \frac{1}{2}) \varepsilon$ . Mediante la base anterior, se puede pasar del coeficiente de Bogoliubov

$$\beta_{\omega\omega'} = -(\chi_{lm\omega}, \psi_{lm\omega'}^*) \quad (\text{C.2})$$

a uno dependiente del tiempo<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \beta_{\omega_j\omega'}(u_n) &= -(\chi_{lmn\omega_j}, \psi_{lm\omega'}^*) = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon}} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega e^{u_n \omega i} (\chi_{lm\omega}, \psi_{lm\omega'}^*). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

A partir de este coeficiente se pueden calcular los observables relacionados con la radiación como función del tiempo retardado  $u_n$ . A continuación presentaremos el cálculo de  $|\beta_{\omega_j\omega'}(u_n)|^2$  pues juegan un rol central en la emisión de partículas.

<sup>1</sup> En ambas expresiones hemos omitido la dependencia en  $l$  y  $m$  pues es trivial en el caso de interés.

C.1.1 Cálculo de  $|\beta|^2$ 

Comenzando con el coeficiente de Bogoliubov en el cálculo de Hawking (2.36), dado por

$$\beta_{\omega\omega'}^H = \sqrt{\frac{4M}{2\pi\omega'}} \frac{e^{-i(\omega+\omega')v_0} e^{i\phi(4M\omega)}}{\sqrt{\exp(8M\pi\omega) - 1}} e^{-i4M\omega \ln(4M_0\omega')},$$

con  $\phi$  la fase de la función gamma definida en (2.37), podemos calcular  $|\beta_{\omega_j\omega'}^H|^2$  en una base discreta de paquetes de onda como

$$\begin{aligned} |\beta_{\omega_j\omega'}^H|^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \int \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\Delta\omega u_n} \beta_{\omega_1\omega'}^H [\beta_{\omega_2\omega'}^H]^* = \\ &= \frac{4M}{2\pi\omega'} \int \int_{\omega_j - \frac{\varepsilon}{2}}^{\omega_j + \frac{\varepsilon}{2}} d\omega_1 d\omega_2 \frac{e^{-i\Delta\omega [u_n - v_0 - 4M \ln(4M_0\omega')]} e^{i[\phi(4M\omega_1) - \phi(4M\omega_2)]}}{\varepsilon \sqrt{\exp(8M\pi\omega_1) - 1} \sqrt{\exp(8M\pi\omega_2) - 1}} \end{aligned}$$

donde  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ . Con el cambio de variable  $s_1 = \frac{\Delta\omega}{\varepsilon}$  y  $s_2 = \frac{\omega_1 + \omega_2 - \omega_j}{2\varepsilon}$  y suponiendo que  $8\pi M\varepsilon \ll 1$  y  $\varepsilon \ll \omega_j$  se puede expandir en  $\varepsilon$  y obtener

$$\begin{aligned} |\beta_{\omega_j\omega'}^H|^2 &= \frac{1}{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \frac{4M\varepsilon}{2\pi\omega'} \int_{-1}^1 ds_1 (1 - |s_1|) \exp(-is_1\alpha) + O(\varepsilon) \\ &= \frac{\text{sinc}^2[\alpha(\omega')/2]}{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \frac{4M\varepsilon}{2\pi\omega'} + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

donde  $\alpha(\omega') = \varepsilon [u_n - v_0 - 4M \ln(4M_0\omega') + 4M\phi'(4M\omega_j)]$  y sinc es la función integral senoidal. Nótese que hemos mantenido el orden  $\varepsilon$  en la exponencial compleja pues el tiempo se mide en unidades de  $2\pi/\varepsilon$ . Naturalmente la expresión anterior depende explícitamente del tiempo, pero si la usamos para calcular el número de partículas emitidas entre  $u_n$  y  $u_{n+1}$  se obtiene que

$$\begin{aligned} N_\omega(u_n) &= \int_0^\infty d\omega' |\beta_{\omega_j\omega'}^H|^2 = \left[ \begin{array}{l} t = \alpha(u_n)/2 \\ dt = 2M\varepsilon \frac{d\omega'}{\omega'} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\text{sinc}^2(t)}{\pi} + O(\varepsilon) \\ &= \frac{1}{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Esta es una cantidad finita e independiente del tiempo, como se espera para la radiación térmica. El mismo cálculo puede realizarse para el caso en que se considera el inicio de la radiación. Comenzando con la ecuación (4.11), es decir,

$$\beta_{\omega\omega'}^{CS} = \sqrt{\frac{4M}{2\pi\omega'}} \frac{e^{-i(\omega+\omega')v_0} e^{i\phi(4M\omega)}}{\sqrt{\exp(8M\pi\omega) - 1}} \frac{\omega'}{\omega' + \omega} e^{-i4M\omega \ln(4M_0[\omega' + \omega])},$$



(C.4)

podemos proceder de forma análoga al caso anterior, primero calculando

$$\begin{aligned} \left| \beta_{\omega_j \omega'}^{CS} \right|^2 &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{j\varepsilon}^{(j+1)\varepsilon} d\omega_1 d\omega_2 e^{-i\Delta\omega u_n} \beta_{\omega_1 \omega'}^{CS} \left[ \beta_{\omega_2 \omega'}^{CS} \right]^* = \\ &= \frac{4M\omega'}{2\pi} \int_{\omega_j - \frac{\varepsilon}{2}}^{\omega_j + \frac{\varepsilon}{2}} \frac{d\omega_1 d\omega_2}{(\omega' + \omega_1)(\omega' + \omega_2)} \frac{e^{-i\Delta\omega[u_n - v_0] + i[\phi(4M\omega_1) - \phi(4M\omega_2)]}}{\varepsilon \sqrt{\exp(8M\pi\omega_1) - 1} \sqrt{\exp(8M\pi\omega_2) - 1}} \\ &\times e^{-i4M\omega_1 \ln(4M_0[\omega' + \omega_1]) + i4M\omega_2 \ln(4M_0[\omega' + \omega_2])}. \end{aligned}$$

El mismo cambio de variable y la expansión en  $\varepsilon$  arrojan el resultado

$$\left| \beta_{\omega_j \omega'}^{CS} \right|^2 = \frac{\text{sinc}^2[\tilde{\alpha}(\omega')/2]}{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \frac{4M\varepsilon\omega'}{2\pi(\omega' + \omega_j)^2} + O(\varepsilon), \quad (\text{C.5})$$

con

$$\tilde{\alpha}(\omega') = \varepsilon \left[ u_n - v_0 - 4M \ln(4M_0[\omega' + \omega_j]) - \frac{4M\omega_j}{\omega' + \omega_j} + 4M\phi'(4M\omega_j) \right]. \quad (\text{C.6})$$

La expresión obtenida se reduce a la del resultado de Hawking cuando  $\omega' \gg \omega_j$  y esto corresponde a tiempos largos, como podemos ver calculando el número de partículas por unidad de tiempo

$$\begin{aligned} N_\omega(u_n) &= \int_0^\infty d\omega' \left| \beta_{\omega_j \omega'}^{CS} \right|^2 = \left[ \begin{array}{l} t = \tilde{\alpha}(\omega')/2 \\ dt = 2M\varepsilon \frac{d\omega' \omega'}{(\omega' + \omega_j)^2} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{\exp(8M\pi\omega_j) - 1} \frac{1}{\pi} \int_{\tilde{\alpha}(0)/2}^{+\infty} dt \text{sinc}^2(t) + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Este resultado coincide con el que obtuvimos en la sección 4.2 y muestra con mayor claridad cómo aparece el escalón en la emisión debido a las diferencias de los coeficientes de Bogoliubov para  $\omega' \lesssim \omega_j$ . También establecen una correspondencia entre tiempos largos y  $\omega'$  grande. Específicamente  $4M \ln[4M_0(\omega' + \omega_j)]$  indica el avance del tiempo.



## CÁLCULOS VINCULADOS A COEFICIENTES DE BOGOLIUBOV DEL CASCARÓN CUÁNTICO

En las secciones [D.1](#), [D.2](#) y [D.3](#) de este apéndice reproducimos, por completitud, algunos cálculos que fueron realizados originalmente en el trabajo [25]. En el resto del apéndice presentaremos y profundizaremos cálculos que parecieron en [26].

### D.1 VALOR ESPERADO DEL COEFICIENTE DE BOGOLIUBOV

En primer lugar calcularemos el valor esperado del operador asociado al coeficiente de Bogoliubov  $\hat{\beta}_{\omega\omega'}$ . Partiendo de la expresión (5.10)

$$\hat{\beta}_{\omega\omega'} = -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) e^{-i\omega\hat{u}_\sigma(v) - i\omega'v} \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) \quad (\text{D.1})$$

y asumiendo que el espacio-tiempo está en un estado  $\Psi$  como el discutido en la sección 5.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} &= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \langle \Psi | \iint_{-\infty}^{+\infty} dv dv_0 |v_0\rangle \langle v_0 | \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) e^{-i\omega\hat{u}_\sigma(v) - i\omega'v} \\ &\quad \times \sum_{J=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} du |u, J\rangle_{\sigma\sigma} \langle u, J | \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_0 |v'_0\rangle \langle v'_0 | \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) | \Psi \rangle, \end{aligned}$$

donde hemos introducido bases de autoestados de  $\hat{v}_0$  y  $\hat{u}$ . Operando,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} &= -\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dv dv_0 dv'_0 du \Psi^*(v_0) \Psi(v'_0) \\ &\quad \times \theta(v_0 - v) \theta(v'_0 - v) e^{-i\omega u - i\omega'v} \sum_{J=1,2} \psi_{u,J}(v_0) \psi_{u,J}^*(v'_0) \end{aligned}$$

y cambiando a las variables  $x_1 = \frac{v_0 - v}{4M_0}$  y  $x_2 = \frac{v'_0 - v}{4M_0}$  obtenemos

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} &= -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^{+\infty} dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \times \\ &\quad \times \Psi(4M_0x_2 + v) \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-i\omega u} \sum_{J=1,2} \psi_u^J(4M_0x_1 + v) \left[ \psi_u^J(4M_0x_2 + v) \right]^*. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

La definición de los autoestados  $\psi_u^I$  reduce la integral  $\int_0^\infty \int_0^\infty dx_1 dx_2$  a

$$\int_0^\sigma \int_0^\sigma dx_1 dx_2 + \int_0^\sigma \int_\sigma^1 dx_1 dx_2 + \int_\sigma^1 \int_0^\sigma dx_1 dx_2 + \int_\sigma^1 \int_\sigma^1 dx_1 dx_2 + \int_1^\infty \int_1^\infty dx_1 dx_2. \quad (D.3)$$

En la siguiente sección probaremos que las primeras tres integrales no contribuyen en el límite  $\sigma \rightarrow 0$ . Por lo tanto, el cálculo se reduce a

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega \omega'} &= -\frac{(4M_0)^2}{2\pi 8\pi \hbar} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \left( \int_\sigma^1 dx_1 dx_2 + \int_1^{+\infty} dx_1 dx_2 \right) \times \\ &\times \Psi^*(4M_0x_1 + v) \Psi(4M_0x_2 + v) \int_{-\infty}^{+\infty} du \frac{e^{-i\omega u} \exp\left(\frac{iM_0}{\hbar}(u-v)[\text{li}(x_1) - \text{li}(x_2)]\right)}{\sqrt{|\ln(x_2)| |\ln(x_1)|}}. \end{aligned}$$

Calculando la integral en  $u$  obtenemos,

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega \omega'} &= -\frac{(4M_0)^2}{2\pi 8\pi \hbar} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \left( \int_\sigma^1 dx_1 dx_2 + \int_1^{+\infty} dx_1 dx_2 \right) \times \\ &\times \Psi^*(4M_0x_1 + v) \Psi(4M_0x_2 + v) \frac{2\pi \delta\left(\omega - \frac{M_0}{\hbar} [\text{li}(x_1) - \text{li}(x_2)]\right)}{\sqrt{|\ln(x_2)| |\ln(x_1)|}} e^{-i\omega v}. \end{aligned}$$

Dado que  $\text{li}$  es invertible en  $(0, 1)$  y en  $(1, +\infty)$  podemos integrar en  $x_2$  para obtener

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega \omega'} &= -\frac{2M_0}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \left( \int_0^1 dx_1 + \int_1^\infty dx_1 \right) \times \\ &\times \Psi^*(4M_0x_1 + v) \Psi(4M_0X_\omega(x_1) + v) \sqrt{\frac{|\ln(X_\omega(x_1))|}{|\ln(x_1)|}} e^{-i\omega v}, \end{aligned}$$

donde hemos definido

$$X_\omega(x) \equiv \text{li}^{-1}[\text{li}(x) - \delta_\omega] \quad (D.4)$$

$$\delta_\omega \equiv \frac{\hbar\omega}{M_0} \quad (D.5)$$

y hemos usado que  $\partial_t \text{li}(t) = \frac{1}{\ln(t)}$ . Renombrando la variable de integración  $x_1$  como  $x$  y reordenando se obtiene

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega \omega'} &= -\frac{2M_0}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{|\ln(X_\omega(x))|}{|\ln(x)|}} \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i[\omega + \omega']v} \Psi^*(4M_0x + v) \Psi(4M_0X_\omega(x) + v), \end{aligned}$$

donde se entiende que  $\text{li}^{-1}$  se define de forma diferente para  $x < 1$  y para  $x \geq 1$ . Resta probar que el resultado anterior es independiente de la elección en la extensión del operador  $\hat{u}$  a todo el rango de autovalores de  $v_0$ , lo cual haremos en la siguiente sección.

D.2 INTEGRALES EN  $I^-$  QUE NO CONTRIBUYEN A  $\langle \beta \rangle$ 

En la sección anterior quedó pendiente la prueba de que algunas integrales en  $I^-$  no contribuyen al valor esperado del coeficiente de Bogoliubov, en especial aquellas que dependen de la extensión de  $\hat{u}$  a todo el rango autovalores de  $v_0$ . Partiendo de la expresión genérica

$$\begin{aligned} \langle \hat{\beta} \rangle_{\omega\omega'} = & -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^{\sigma} dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\ & \times \Psi(4M_0x_2 + v) \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-i\omega u} \sum_{I=1,2} \psi_u^I(x_1) \psi_u^{I*}(x_2) \end{aligned}$$

y de la expresión (5.7) para los autoestados de  $\psi_u^I(x)$ , mostremos que las integrales,

$$\int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} dx_1 dx_2 + \int_0^{\sigma} \int_{\sigma}^1 dx_1 dx_2 + \int_{\sigma}^1 \int_0^{\sigma} dx_1 dx_2 \quad (D.6)$$

no contribuyen en el límite  $\sigma \rightarrow 0$ .

1. La integral  $\int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} dx_1 dx_2$  es

$$\begin{aligned} & -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^{\sigma} dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\ & \times \Psi(4M_0x_2 + v) \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-i\omega u} \frac{\exp\left(\frac{iM_0}{\hbar}(u-v)\frac{x_1-x_2}{\ln(\sigma)}\right)}{8\pi\hbar|\ln(\sigma)|} \\ & = -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^{\sigma} dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\ & \times \Psi(4M_0x_2 + v) \frac{1}{4\hbar|\ln(\sigma)|} \delta\left(\frac{M_0}{\hbar}\frac{x_1-x_2}{\ln(\sigma)} - \omega\right) e^{-i\omega v} \\ & = -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^{\sigma} dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\ & \times \Psi(4M_0x_2 + v) \frac{1}{4M_0} \delta\left(x_1 - x_2 - \frac{\omega\hbar\ln(\sigma)}{M_0}\right) e^{-i\omega v}. \end{aligned}$$

Esta se anula porque se puede elegir  $\sigma$  suficientemente pequeño, de manera que el argumento de la delta de Dirac se anule siempre.

2. La integral  $\int_0^\sigma \int_\sigma^1 dx_1 dx_2$  es

$$\begin{aligned}
& -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^\sigma \int_\sigma^1 dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\
& \times \Psi(4M_0x_2 + v) \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{-i\omega u} \frac{\exp\left(\frac{iM_0}{\hbar}(u-v) \left[\frac{x_1}{\ln(\sigma)} - \text{li}(x_2)\right]\right)}{8\pi\hbar\sqrt{|\ln(x_2)||\ln(\sigma)|}} \\
& = -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^\sigma \int_\sigma^1 dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\
& \times \Psi(4M_0x_2 + v) \frac{\delta\left(\frac{M_0}{\hbar} \frac{x_1 - \sigma}{\ln(\sigma)} - \frac{M_0}{\hbar} [\text{li}(x_2) - \text{li}(\sigma)] - \omega\right)}{4\hbar\sqrt{|\ln(x_2)||\ln(\sigma)|}} e^{-i\omega v} \\
& = -\frac{(4M_0)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^\sigma \int_\sigma^1 dx_1 dx_2 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\
& \times \Psi(4M_0x_2 + v) \frac{\delta\left(\frac{x_1 - \sigma}{\ln(\sigma)} - \text{li}(x_2) + \text{li}(\sigma) - \frac{\omega\hbar}{M_0}\right)}{4M_0\sqrt{|\ln(x_2)||\ln(\sigma)|}} e^{-i\omega v} \\
& = -\frac{4M_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i\omega'v} \int_0^\sigma dx_1 \Psi^*(4M_0x_1 + v) \\
& \times \Psi(4M_0x_2(x_1) + v) \sqrt{\frac{|\ln(x_2(x_1))|}{|\ln(\sigma)|}} e^{-i\omega v}
\end{aligned}$$

con

$$x_2(x_1) = \text{li}^{-1}\left(\frac{x_1 - \sigma}{\ln(\sigma)} + \text{li}(\sigma) - \frac{\omega\hbar}{M_0}\right).$$

En el integrando,  $\sqrt{\frac{|\ln(x_2(x_1))|}{|\ln(\sigma)|}}$  está acotada por 1 y  $\Psi$  es un paquete de onda que podemos considerar acotado en todo el rango de su variable. Por lo tanto la integral  $\int_0^\sigma dx_1$  tiende a cero cuando  $\sigma \rightarrow 0$ .

3. La integral  $\int_\sigma^1 \int_0^\sigma dx_1 dx_2$  arroja el mismo resultado que  $\int_0^\sigma \int_\sigma^1 dx_1 dx_2$  pues la única diferencia entre ellas es el cambio de  $x_1$  por  $x_2$ .

## D.3 VALOR ESPERADO DE LA MATRIZ DENSIDAD

A partir de la ecuación (5.10) para el operador asociado al coeficiente de Bogoliubov y (5.29) para la matriz densidad se obtiene la expresión general

$$\begin{aligned}
 \rho_{\omega_1\omega_2}^{QS} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega'}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \langle \Psi | \int_{-\infty}^{+\infty} dv dv' \int_{-\infty}^{+\infty} dv_0 |v_0\rangle \langle v_0| \\
 &\quad \times \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) e^{-i\omega_1\hat{u}(v) - i\omega'v} \sum_{J=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} du |u, J\rangle \langle u, J| \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dv'' |v''\rangle \langle v''| \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) \int_{-\infty}^{+\infty} dv''' |v'''\rangle \langle v'''\rangle \\
 &\quad \times \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) \sum_{L=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} du' |u', L\rangle \langle u', L| e^{i\omega_2\hat{u}'(v') + i\omega'v'} \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} dv'_0 |v'_0\rangle \langle v'_0| \Theta(\hat{v}_0 - v\hat{I}) |\Psi\rangle.
 \end{aligned}$$

Introduciendo bases de  $\hat{v}_0$  y  $\hat{u}$ , donde la dependencia en el parámetro  $\sigma \rightarrow 0$  del operador  $\hat{u}$  es eliminada por un cálculo idéntico al de la sección anterior y que no repetiremos. Inmediatamente

$$\begin{aligned}
 \rho_{\omega_1\omega_2}^{QS} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{\omega'}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dv dv' dv_0 dv'_0 dv'' dv''' \\
 &\quad \times \Theta(v_0 - v) \Theta(v'' - v) \Theta(v''' - v') \Theta(v'_0 - v') \delta(v'' - v''') \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} du du' e^{-i\omega_1 u - i\omega' v} \sum_{J=1,2} \psi_{u,J}(v_0) \psi_{u,J}^*(v'_0) e^{i\omega_2 u' + i\omega' v'} \\
 &\quad \times \sum_{L=1,2} \psi_{u',L}(v''') \psi_{u',L}^*(v'_0) \Psi^*(v_0) \Psi(v'_0).
 \end{aligned}$$

Los cambios de variable  $x_1 = \frac{v_0 - v}{4M_0}$ ,  $x_2 = \frac{v'_0 - v}{4M_0}$ ,  $x_3 = \frac{v''' - v'}{4M_0}$  y  $x_4 = \frac{v'_0 - v'}{4M_0}$  conducen a

$$\begin{aligned}
 \rho_{\omega_1\omega_2}^{QS} &= \frac{(4M_0)^4}{(2\pi)^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega' \omega'}{\sqrt{\omega_1\omega_2}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv dv' \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \delta(4M_0[x_2 - x_3] + v - v') \\
 &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} du du' e^{-i\omega_1 u - i\omega' v} \sum_{J=1,2} \psi_{u,J}(x_1) \psi_{u,J}^*(x_2) e^{i\omega_2 u' + i\omega' v'} \\
 &\quad \times \sum_{L=1,2} \psi_{u',L}(x_3) \psi_{u',L}^*(x_4) \Psi^*(4M_0 x_1 + v) \Psi(4M_0 x_4 + v').
 \end{aligned}$$

Ahora, usando las expresiones (5.7) para los autoestados de  $\hat{u}$ ,

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1 \omega_2}^{QS} &= \frac{(4M_0)^4}{(16\pi^2 \hbar)^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega' \omega'}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} dv dv' \iint_0^{+\infty} dx_1 dx_2 \iint_0^{+\infty} dx_3 dx_4 \\ &\quad \times \delta(4M_0 [x_2 - x_3] + v - v') \iint_{-\infty}^{+\infty} du du' e^{-i\omega_1 u - i\omega' v} e^{i\omega_2 u' + i\omega' v'} \\ &\quad \times \frac{\exp\left(\frac{iM_0}{\hbar} (u - v) [\text{li}(x_1) - \text{li}(x_2)]\right) \exp\left(\frac{iM_0}{\hbar} (u' - v') [\text{li}(x_3) - \text{li}(x_4)]\right)}{\sqrt{|\ln(x_1)| |\ln(x_2)| |\ln(x_3)| |\ln(x_4)|}} \\ &\quad \times \Psi^*(4M_0 x_1 + v) \Psi(4M_0 x_4 + v'). \end{aligned}$$

Integrando en  $u$  y  $u'$  pasamos a

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1 \omega_2}^{QS} &= \frac{(4M_0)^4}{(8\pi \hbar)^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega' \omega'}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} dv dv' \iint_0^{+\infty} dx_1 dx_2 \iint_0^{+\infty} dx_3 dx_4 \\ &\quad \times \delta(4M_0 [x_2 - x_3] + v - v') e^{-i[\omega' + \omega_1]v} e^{i[\omega' + \omega_2]v'} \\ &\quad \times \frac{\delta\left(\omega_1 - \frac{M_0}{\hbar} [\text{li}(x_1) - \text{li}(x_2)]\right) \delta\left(\omega_2 + \frac{M_0}{\hbar} [\text{li}(x_3) - \text{li}(x_4)]\right)}{\sqrt{|\ln(x_1)| |\ln(x_2)| |\ln(x_3)| |\ln(x_4)|}} \\ &\quad \times \Psi^*(4M_0 x_1 + v) \Psi(4M_0 x_4 + v'). \end{aligned}$$

Dado que  $\text{li}$  es invertible en  $(0, 1)$  y en  $(1, +\infty)$ , podemos integrar en  $x_2$  y  $x_3$  para obtener

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1 \omega_2}^{QS} &= \frac{(2M_0)^2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega' \omega'}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \iint_{-\infty}^{+\infty} dv dv' \iint_0^{+\infty} dx_1 dx_4 \\ &\quad \times \delta(4M_0 [X_{\omega_1}(x_1) - X_{\omega_2}(x_4)] + v - v') e^{-i[\omega' + \omega_1]v} e^{i[\omega' + \omega_2]v'} \\ &\quad \times \sqrt{\frac{|\ln(X_{\omega_1}(x_1))| |\ln(X_{\omega_2}(x_4))|}{|\ln(x_1)| |\ln(x_4)|}} \Psi^*(4M_0 x_1 + v) \Psi(4M_0 x_4 + v'), \end{aligned}$$

donde hemos usado la misma notación de secciones anteriores para  $X_\omega$  y también que  $\partial_t \text{li}(t) = \frac{1}{\ln(t)}$ . Redefiniendo  $x = x_1$ ,  $x' = x_4$  e integrando en  $v'$

$$\begin{aligned} \rho_{\omega_1 \omega_2}^{QS} &= \frac{(2M_0)^2}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{d\omega' \omega'}{\sqrt{\omega_1 \omega_2}} \iint_0^{+\infty} dx dx' e^{-i4M_0 [\omega' + \omega_2] X_{\omega_2}(x')} \\ &\quad \times e^{i4M_0 [\omega' + \omega_2] X_{\omega_1}(x)} \sqrt{\frac{|\ln(X_{\omega_1}(x))| |\ln(X_{\omega_2}(x'))|}{|\ln(x)| |\ln(x')|}} \int_{-\infty}^{+\infty} dv e^{-i[\omega_1 - \omega_2]v} \\ &\quad \times \Psi^*(4M_0 x + v) \Psi(4M_0 [x' + X_{\omega_1}(x) - X_{\omega_2}(x')] + v). \end{aligned}$$



Finalmente, utilizando una función de onda de la forma (5.8) se llega a la expresión final

$$\rho_{\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2}^{\text{QS}} = \int dM \varphi^* \left( M - \frac{\Delta\omega \hbar}{2} \right) \varphi \left( M + \frac{\Delta\omega \hbar}{2} \right) \\ \times \int_0^\infty d\omega' \beta_{\omega_1 \omega'}^{\text{eff}}(m_{\bar{\omega} \omega'}) [\beta_{\omega_2 \omega'}^{\text{eff}}(m_{\bar{\omega} \omega'})]^*$$

con  $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ ,  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ,  $m_{\omega \omega'} = M - \hbar(\omega + \omega')$  y la función  $\beta^{\text{eff}}$  definida en (5.16).

#### D.4 ESTUDIO DE LA INTEGRAL $\beta^{\text{eff}}$

En la sección anterior y en varios de los cálculos del capítulo 5 aparece la integral  $\beta_{\omega \omega'}^{\text{eff}}(M)$  definida en (5.16) por

$$\beta_{\omega \omega'}^{\text{eff}}(M) = -\frac{2M_0 e^{-i(\omega + \omega')\bar{v}_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} dx f_\omega(x) e^{[-\epsilon + i4M_0(\omega + \omega')]x} e^{i4M\omega g_\omega(x)} \quad (\text{D.7})$$

con

$$f_\omega(x) = \sqrt{\frac{|\ln(X_\omega(x))|}{|\ln(x)|}} \\ g_\omega(x) = \frac{x - X_\omega(x)}{\delta_\omega},$$

que dependen de  $\delta_\omega = \frac{\hbar\omega}{M_0}$  a través de la función

$$X_\omega(x) = \text{li}^{-1}(\text{li}(x) - \delta_\omega).$$

En la expresión anterior hemos incorporado el regulador  $\epsilon$  para la convergencia absoluta de la integral (al igual que hicimos para el coeficiente de Bogoliubov). La forma de  $\beta^{\text{eff}}$  es muy similar al coeficiente de Bogoliubov  $\beta^{\text{CS}}$  escrito en la forma (4.10), es decir,

$$\beta_{\omega \omega'}^{\text{CS}}(M) = -\frac{2M_0 e^{-i(\omega + \omega')\bar{v}_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} dx e^{[-\epsilon + i4M_0(\omega' + \omega)]x} e^{i4M\omega \ln(x)} \quad (\text{D.8})$$

y de hecho, de forma ingenua se observa que en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ , ambas expresiones coinciden pues

$$f_\omega(x) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} 1 \\ g_\omega(x) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} \ln(x).$$

Sin embargo, la dependencia de la integral en  $\hbar$  no es analítica y por lo tanto no es posible hacer una simple expansión en potencias

de  $\hbar$  para estudiar las diferencias entre ambas. Comparando dichas integrales puede verse que las diferencias dependen de las frecuencias  $\omega$  (a través de  $\delta_\omega$ ) y también de la masa  $M$  que entra como parámetro de la integral. La razón para marcar esta segunda dependencia es que el producto  $M \times g_\omega$  aparece en la fase del integrando de (5.16) y por tanto un valor grande de  $M$  puede causar que la integral sea muy sensible a la diferencia entre  $g_\omega(x)$  y su valor clásico  $\ln(x)$ . En esta sección desarrollaremos aproximaciones para  $\beta^{\text{eff}}$  restringidas a alguna región de los parámetros  $\omega$  y  $M$ . En todos los casos asumiremos la fijación de  $M_0 = \bar{M}$  y la condición  $\delta_\omega = \frac{\hbar\omega}{M_0} \ll 1$ .

#### D.4.1 Las dos regiones de integración (cerca y lejos del horizonte)

Como se comentó en la sección 5.3.1, el valor  $x = X_\omega(0)$  de la variable de integración divide la integral de  $\beta^{\text{eff}}$  en dos regiones según el comportamiento de  $f_\omega$  y  $g_\omega$ . En una región el integrando es muy similar al de  $\beta^{\text{CS}}$  y la asociamos con la región lejana al horizonte. En la otra (la región cercana al horizonte) difiere notablemente. Dado que la primera región es muy pequeña conviene realizar el análisis escribiendo la integral en términos de la nueva variable

$$y = \ln(x)$$

, de manera que el punto en cuestión es

$$\bar{y}_\omega \equiv \ln(X_\omega(0)) = \ln(\text{li}^{-1}(-\delta_\omega)) = \text{Ei}^{-1}(-\delta_\omega)$$

siendo  $\text{Ei}$  la función integral exponencial. En términos de esta nueva variable podemos reescribir

$$\begin{aligned} \beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(M) &= -\frac{2M_0 e^{-i(\omega+\omega')\bar{v}_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} [I_-^{\text{eff}}(M) + I_+^{\text{eff}}(M)] \\ \beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(M) &= -\frac{2M_0 e^{-i(\omega+\omega')\bar{v}_0}}{\pi} \sqrt{\frac{\omega'}{\omega}} [I_-^{\text{CS}}(M) + I_+^{\text{CS}}(M)] \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

con

$$\begin{aligned} I_-^{\text{eff}}(M) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\bar{y}_\omega} dy e^y F_\omega(y) e^{[-\epsilon + i4M_0(\omega+\omega')] \exp(y)} e^{i4M\omega G_\omega(y)} \\ I_+^{\text{eff}}(M) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{y}_\omega}^{+\infty} dy e^y F_\omega(y) e^{[-\epsilon + i4M_0(\omega+\omega')] \exp(y)} e^{i4M\omega G_\omega(y)} \\ I_-^{\text{CS}}(M) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\bar{y}_\omega} dy e^y e^{[-\epsilon + i4M_0(\omega+\omega')] \exp(y)} e^{i4M\omega y} \\ I_+^{\text{CS}}(M) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\bar{y}_\omega}^{+\infty} dy e^y e^{[-\epsilon + i4M_0(\omega+\omega')] \exp(y)} e^{i4M\omega y} \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

y donde hemos definido

$$\begin{aligned} F_\omega(y) &\equiv f_\omega \circ \exp(y) \\ G_\omega(y) &\equiv g_\omega \circ \exp(y). \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Los comportamientos asintóticos (que se muestran gráficamente en la figura 5.2) son

$$F_{\omega}(y) \underset{y \ll \tilde{y}_{\omega}}{\sim} \sqrt{\frac{|\tilde{y}_{\omega}|}{|y|}}$$

$$G_{\omega}(y) \underset{y \ll \tilde{y}_{\omega}}{\rightarrow} \frac{-\exp(\tilde{y}_{\omega})}{\delta_{\omega}}$$

para la zona donde las integrales  $I^{\text{eff}}$  e  $I^{\text{CS}}$  difieren notablemente y

$$F_{\omega}(y) \underset{y \gg \tilde{y}_{\omega}}{\sim} 1$$

$$G_{\omega}(y) \underset{y \gg \tilde{y}_{\omega}}{\sim} y$$

para la zona donde coinciden. Antes de pasar a calcular aproximaciones para  $\beta^{\text{eff}}$  vale la pena señalar que contamos con expresiones analíticas para las dos contribuciones a  $\beta^{\text{CS}}$ . Haciendo los cambios de variable  $t = \mp(y - \tilde{y}_{\omega})$  y usando las identidades

$$\Gamma(a, z) = z^a \int_0^{+\infty} \exp(at - ze^t) dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (\text{D.12a})$$

$$\gamma(a, z) = z^a \int_0^{+\infty} \exp(-at - ze^{-t}) dt, \quad \text{Re}(a) > 0 \quad (\text{D.12b})$$

$$\Gamma(a) = \gamma(a, z) + \Gamma(a, z) = \Gamma(a, 0) \quad (\text{D.12c})$$

para las funciones gamma incompletas (superior e inferior) se obtiene

$$I_{-}^{\text{CS}}(M) = \frac{\gamma[1 + i4M\omega, -i4M_0(\omega' + \omega)e^{\tilde{y}_{\omega}}]}{-i4M_0(\omega' + \omega)} e^{-i4M\omega \ln[4M_0(\omega' + \omega)] - 2\pi M\omega} \quad (\text{D.13})$$

$$I_{+}^{\text{CS}}(M) = \frac{\Gamma[1 + i4M\omega, -i4M_0(\omega' + \omega)e^{\tilde{y}_{\omega}}]}{-i4M_0(\omega' + \omega)} e^{-i4M\omega \ln[4M_0(\omega' + \omega)] - 2\pi M\omega}. \quad (\text{D.14})$$

Estas expresiones son útiles para comparar con las respectivas contribuciones a  $\beta^{\text{eff}}$ , lo cual haremos en breve. Por ahora, solo señalaremos que el límite  $\hbar \rightarrow 0$  corresponde a  $\tilde{y}_{\omega} \rightarrow -\infty$  lo cual anula el segundo argumento de las funciones gamma. Esto a su vez implica que  $I_{-}^{\text{CS}} \rightarrow 0$  y  $I_{+}^{\text{CS}} \rightarrow I^{\text{CS}}$ , lo cual constituye una pista importante para identificar el régimen donde nuestro modelo coincide con el cascarón clásico.

#### D.4.2 Aproximación para el coeficiente de Bogoliubov efectivo

Habiendo identificado las dos regiones de integración es posible considerar aproximaciones para las funciones  $F_{\omega}(y)$  y  $G_{\omega}(y)$  en cada una. Comencemos definiendo la función auxiliar

$$Y_{\omega}(y) \equiv \ln[X_{\omega}(\exp(y))] = \text{Ei}^{-1}(\text{Ei}(y) - \delta_{\omega}). \quad (\text{D.15})$$

En la región  $y > \bar{y}_\omega$  tenemos que  $|Ei(y)| > \delta_\omega$  y por lo tanto es posible aproximar

$$\exp [Y_\omega(y > \bar{y}_\omega)] \approx \exp[y] - y\delta_\omega \quad (D.16)$$

$$\sqrt{\frac{|Y_\omega(y > \bar{y}_\omega)|}{|y|}} \approx 1 \quad (D.17)$$

como primer orden de la expansión en  $\delta_\omega$ . Esto nos lleva a considerar las aproximaciones para  $F_\omega$  y  $G_\omega$

$$F_\omega(y) \approx 1$$

$$G_\omega \approx y.$$

, es decir que estamos aproximando

$$I_+^{eff}(M) \approx I_+^{CS}(M). \quad (D.18)$$

Por otro lado, en la región  $y < \bar{y}_\omega$  se cumple que  $|Ei(y)| > \delta_\omega$  y podemos aproximar

$$\exp [Y_\omega(y < \bar{y}_\omega)] \approx \exp[\bar{y}_\omega] + \bar{y}_\omega Ei(y) \quad (D.19)$$

$$\sqrt{\frac{|Y_\omega(y < \bar{y}_\omega)|}{|y|}} \approx \sqrt{\frac{|\bar{y}_\omega|}{|y|}} \quad (D.20)$$

como primer orden de la expansión en  $Ei(y)$ . En esta región entonces

$$F_\omega \approx \sqrt{\frac{|\bar{y}_\omega|}{|y|}}$$

$$G_\omega(y) \approx \frac{\exp(y) - \exp[\bar{y}_\omega] - \bar{y}_\omega Ei(y)}{\delta_\omega}.$$

La aproximación para  $F_\omega$  coincide con la expresión asintótica en cada región. Para  $G_\omega$  es una nueva aproximación (ver figura D.1) que es continua en  $y = \bar{y}_\omega$ . El resultado para la integral es

$$I_-^{eff}(M) \approx \int_{-\infty}^{\bar{y}_\omega} dy e^y \sqrt{\frac{|\bar{y}_\omega|}{|y|}} e^{i4M_0(\omega + \omega')} \exp(y) e^{i4M\omega \frac{\exp(y) - \exp[\bar{y}_\omega] - \bar{y}_\omega Ei(y)}{\delta_\omega}}. \quad (D.21)$$

Si bien no conocemos una expresión analítica para esta integral, el costo computacional de calcularla numéricamente es bajo.

Ambas aproximaciones (D.18) y (D.21) asumen que el error en el cálculo de la integral es pequeño. Una condición suficiente para que ello sea cierto es que los errores (absolutos y relativos) en el módulo y la fase del integrando sean pequeños en todo el intervalo de integración. Debido a la forma de las funciones  $F_\omega$  y  $G_\omega$  esto se logra

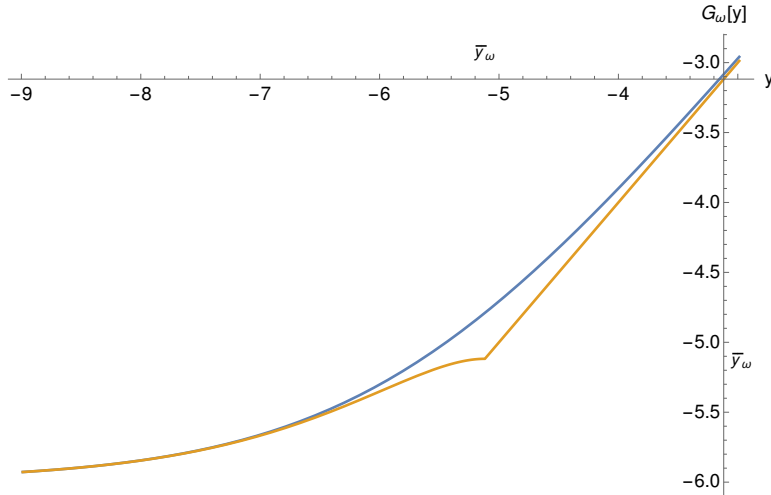


Figure D.1: Función  $G_\omega(y)$  y su aproximación en la dos regiones en torno a  $y = \bar{y}_\omega$ . La gráfica se realiza con  $\delta_\omega = 10^{-3}$  para resaltar la diferencia entre la función y su aproximación.

imponiendo que los errores sean pequeños en el borde de integración  $y = \bar{y}_\omega$ , es decir,

$$1 - F_\omega(\bar{y}_\omega) \ll 1 \quad (\text{D.22a})$$

$$\frac{G_\omega(\bar{y}_\omega) - \bar{y}_\omega}{\bar{y}_\omega} \ll 1 \quad (\text{D.22b})$$

$$4|M|\omega|G_\omega(\bar{y}_\omega) - \bar{y}_\omega| \ll 1, \quad (\text{D.22c})$$

Para que se cumplan (D.22a) y (D.22b) es suficiente que  $\delta_\omega \ll 1$ , que es una de de las hipótesis iniciales de nuestro modelo. El cumplimiento de (D.22c) depende de la escala de masa  $M$  que entra en la integral como parámetro.

#### D.4.3 Validez del límite clásico $\beta^{\text{eff}} \approx \beta^{\text{CS}}$

En la subsección anterior obtuvimos condiciones para aproximar  $\beta^{\text{eff}}$ . En esta subsección obtendremos condiciones aún más fuertes que permiten aproximar  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(M)$  por  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(M)$ . Esta es la región de validez del límite clásico  $\hbar \rightarrow 0$ .

Como comentamos al final de la subsección D.4.1, la pista para encontrar la región de interés se obtiene estudiando primero los pesos relativos de las integrales  $I_{\pm}^{\text{CS}}$  en  $\beta^{\text{CS}}$ . Estudiando las expresiones (D.13) y (D.14) se observa que

$$\xi \equiv 4M_0(\omega' + \omega)e^{\bar{y}_\omega} \quad (\text{D.23})$$

controla sus pesos relativos. En particular, cuando  $\xi \rightarrow 0$  decrece  $I_{-}^{\text{CS}}$  con relación a  $I_{+}^{\text{CS}}$ . Asumiendo la condición

$$\xi \equiv 4M_0(\omega' + \omega)e^{\bar{y}_\omega} \ll 1 \quad (\text{D.24})$$

podemos obtener una expresión explícita para el peso relativo de ambas integrales haciendo uso de la expansión

$$\Gamma(a, z) = \Gamma(a) \left( 1 - z^a e^{-z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(a+k+1)} \right).$$

A primer orden en  $\xi$ , se obtiene que

$$\frac{I_{-}^{\text{CS}}(M)}{I_{+}^{\text{CS}}(M)} = -i\xi \exp(i\xi + i4M\omega \ln(\xi)) \frac{e^{2\pi M\omega}}{\Gamma(2 + i4M\omega)} + O(\xi^2) \quad (\text{D.25})$$

. Vale señalar que este peso relativo depende además de  $M\omega$ , pues para  $M\omega \ll 1$

$$\left| \frac{I_{-}^{\text{CS}}(M)}{I_{+}^{\text{CS}}(M)} \right| \sim \xi + O(\xi^2)$$

y esto sigue siendo cierto en tanto

$$8\pi M\omega \lesssim 1. \quad (\text{D.26})$$

En cambio, para  $M\omega \gg 1$

$$\left| \frac{I_{-}^{\text{CS}}(M)}{I_{+}^{\text{CS}}(M)} \right| \sim \xi \frac{e^{4\pi M\omega}}{\sqrt{2\pi}(4M\omega)^{3/2}} + O(\xi^2).$$

Por lo tanto, las condiciones (D.24) y (D.26) indican cuando  $I_{+}^{\text{CS}}$  es una buena aproximación de la integral completa  $I_{-}^{\text{CS}} + I_{+}^{\text{CS}}$ . Ahora, dado que las mayores modificaciones de  $\beta^{\text{eff}}$  respecto de  $\beta^{\text{CS}}$  corresponden a  $I_{-}^{\text{eff}}$ , es razonable suponer que las condiciones (D.24) y (D.26) son necesarias para delimitar el régimen de pequeñas perturbaciones respecto del cascarón clásico, en donde  $\beta^{\text{eff}} \approx \beta^{\text{CS}}$ . En la sección anterior probamos que las condiciones (D.22a), (D.22b) y (D.22c) garantizan que  $I_{+}^{\text{eff}} \approx I_{+}^{\text{CS}}$ . Probaremos ahora que las condiciones (D.24) y (D.26) aseguran que  $\frac{I_{-}^{\text{eff}}}{I_{+}^{\text{eff}}} \ll 1$ . Luego, ambos resultados juntos garantizan que  $\beta^{\text{eff}} \approx \beta^{\text{CS}}$ . Probemos entonces que

$$\frac{I_{-}^{\text{eff}}}{I_{+}^{\text{eff}}} \ll 1.$$

A diferencia de  $I_{-}^{\text{CS}}$  no tenemos una forma analítica para  $I_{-}^{\text{eff}}$ , sin embargo contamos con una cota superior pues

$$|I_{-}^{\text{eff}}| \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\bar{y}\omega} dy e^{y} |F_{\omega}(y)| e^{[-\epsilon \exp(y)]} \leq \int_{-\infty}^{\bar{y}\omega} dy e^{y} = \exp(\bar{y}\omega).$$

Nótese que esta cota es igualmente válida para la integral original como para la aproximación presentada en la subsección anterior. Asumiendo las condiciones (D.26) y (D.24) podemos decir que

$$\left| \frac{I_{-}^{\text{eff}}(M)}{I_{+}^{\text{eff}}(M)} \right| \sim \left| \frac{I_{-}^{\text{eff}}(M)}{I_{+}^{\text{CS}}(M)} \right| < \frac{\xi e^{2\pi M\omega}}{|\Gamma[1 + i4M\omega, -i\xi]|} \sim \frac{\xi e^{2\pi M\omega}}{|\Gamma[1 + i4M\omega]|}$$

, la cual es una expresión muy similiar a (D.25) y aplican las mismas consideraciones que en dicho caso. En resumen, el conjunto de condiciones

$$\begin{aligned}
 \delta_\omega &\ll 1 \\
 4|M|\omega|G_\omega(\bar{y}_\omega) - \bar{y}_\omega| &\ll 1 \\
 4M_0(\omega' + \omega)e^{\bar{y}_\omega} &\ll 1 \\
 8\pi M\omega &\lesssim 1
 \end{aligned} \tag{D.27}$$

aseguran que  $\beta_{\omega\omega'}^{\text{eff}}(M) \sim \beta_{\omega\omega'}^{\text{CS}}(M)$ .





## BIBLIOGRAFÍA

---

- [1] A. Almheiri, N. Engelhardt, D. Marolf, and H. Maxfield. “The entropy of bulk quantum fields and the entanglement wedge of an evaporating black hole.” In: *JHEP* 12 (2019), p. 063. DOI: [10.1007/JHEP12\(2019\)063](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2019)063). arXiv: [1905.08762 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1905.08762).
- [2] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian, and A. Tajdini. “The entropy of Hawking radiation.” In: (June 2020). arXiv: [2006.06872 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/2006.06872).
- [3] A. Almheiri, R. Mahajan, J. Maldacena, and Y. Zhao. “The Page curve of Hawking radiation from semiclassical geometry.” In: *JHEP* 03 (2020), p. 149. DOI: [10.1007/JHEP03\(2020\)149](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2020)149). arXiv: [1908.10996 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1908.10996).
- [4] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, and J. Sully. “Black Holes: Complementarity or Firewalls?” In: *JHEP* 02 (2013), p. 062. DOI: [10.1007/JHEP02\(2013\)062](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2013)062). arXiv: [1207.3123 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1207.3123).
- [5] R.L. Arnowitt, S. Deser, and C.W. Misner. “Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity.” In: *Phys. Rev.* 116 (1959), pp. 1322–1330. DOI: [10.1103/PhysRev.116.1322](https://doi.org/10.1103/PhysRev.116.1322).
- [6] A. Ashtekar. “New Variables for Classical and Quantum Gravity.” In: *Phys. Rev. Lett.* 57 (1986), pp. 2244–2247. DOI: [10.1103/PhysRevLett.57.2244](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.2244).
- [7] J. Baez and J.P. Muniain. *Gauge fields, knots and gravity*. July 1995. ISBN: 978-981-02-2034-1. DOI: [10.1142/2324](https://doi.org/10.1142/2324).
- [8] R. Balbinot, A. Fabbri, V.P. Frolov, P. Nicolini, P. Sutton, and A. Zelnikov. “Vacuum polarization in the Schwarzschild space-time and dimensional reduction.” In: *Phys. Rev. D* 63 (2001), p. 084029. DOI: [10.1103/PhysRevD.63.084029](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.63.084029). arXiv: [hep-th/0012048](https://arxiv.org/abs/hep-th/0012048).
- [9] T. Banks, L. Susskind, and M.E. Peskin. “Difficulties for the Evolution of Pure States Into Mixed States.” In: *Nucl. Phys. B* 244 (1984), pp. 125–134. DOI: [10.1016/0550-3213\(84\)90184-6](https://doi.org/10.1016/0550-3213(84)90184-6).
- [10] J.M. Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking. “The Four laws of black hole mechanics.” In: *Commun. Math. Phys.* 31 (1973), pp. 161–170. DOI: [10.1007/BF01645742](https://doi.org/10.1007/BF01645742).
- [11] G. Barnich and C. Troessaert. “Symmetries of asymptotically flat 4 dimensional spacetimes at null infinity revisited.” In: *Phys. Rev. Lett.* 105 (2010), p. 111103. DOI: [10.1103/PhysRevLett.105.111103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.105.111103). arXiv: [0909.2617 \[gr-qc\]](https://arxiv.org/abs/0909.2617).
- [12] C. Barrabes and W. Israel. “Thin shells in general relativity and cosmology: The Lightlike limit.” In: *Phys. Rev. D* 43 (1991), pp. 1129–1142. DOI: [10.1103/PhysRevD.43.1129](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.43.1129).

- [13] J.D. Bekenstein. “Black holes and the second law.” In: *Lett. Nuovo Cim.* 4 (1972), pp. 737–740. DOI: [10.1007/BF02757029](https://doi.org/10.1007/BF02757029).
- [14] J.D. Bekenstein. “Black holes and entropy.” In: *Phys. Rev. D* 7 (1973), pp. 2333–2346. DOI: [10.1103/PhysRevD.7.2333](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.7.2333).
- [15] N.D. Birrell and P.C.W. Davies. *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge, UK: Cambridge Univ. Press, Feb. 1984. ISBN: 978-0-521-27858-4. DOI: [10.1017/CB09780511622632](https://doi.org/10.1017/CB09780511622632).
- [16] H. Bondi, M.G.J. van der Burg, and A.W.K. Metzner. “Gravitational waves in general relativity. 7. Waves from axisymmetric isolated systems.” In: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 269 (1962), pp. 21–52. DOI: [10.1098/rspa.1962.0161](https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0161).
- [17] C.G. Callan, S.B. Giddings, J.A. Harvey, and A. Strominger. “Evanescent black holes.” In: *Phys. Rev. D* 45.4 (1992), p. 1005. DOI: [10.1103/PhysRevD.45.R1005](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.45.R1005). arXiv: [hep-th/9111056](https://arxiv.org/abs/hep-th/9111056).
- [18] M. Campiglia and R. Eyheralde. “Asymptotic U(1) charges at spatial infinity.” In: *JHEP* 11 (2017), p. 168. DOI: [10.1007/JHEP11\(2017\)168](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2017)168). arXiv: [1703.07884](https://arxiv.org/abs/1703.07884) [hep-th].
- [19] M. Campiglia, R. Gambini, J. Olmedo, and J. Pullin. “Quantum self-gravitating collapsing matter in a quantum geometry.” In: *Class. Quant. Grav.* 33.18 (2016), 18LT01. DOI: [10.1088/0264-9381/33/18/18LT01](https://doi.org/10.1088/0264-9381/33/18/18LT01). arXiv: [1601.05688](https://arxiv.org/abs/1601.05688) [gr-qc].
- [20] M. Campiglia and A. Laddha. “Asymptotic symmetries and subleading soft graviton theorem.” In: *Phys. Rev. D* 90.12 (2014), p. 124028. DOI: [10.1103/PhysRevD.90.124028](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.90.124028). arXiv: [1408.2228](https://arxiv.org/abs/1408.2228) [hep-th].
- [21] M. Campiglia and A. Laddha. “Asymptotic symmetries of QED and Weinberg’s soft photon theorem.” In: *JHEP* 07 (2015), p. 115. DOI: [10.1007/JHEP07\(2015\)115](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2015)115). arXiv: [1505.05346](https://arxiv.org/abs/1505.05346) [hep-th].
- [22] B. Carter. “Axisymmetric Black Hole Has Only Two Degrees of Freedom.” In: *Phys. Rev. Lett.* 26 (1971), pp. 331–333. DOI: [10.1103/PhysRevLett.26.331](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.26.331).
- [23] B.S. DeWitt. “Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory.” In: *Phys. Rev.* 160 (1967). Ed. by Li-Zhi Fang and R. Ruffini, pp. 1113–1148. DOI: [10.1103/PhysRev.160.1113](https://doi.org/10.1103/PhysRev.160.1113).
- [24] T. Elster. “Vacuum polarization near a Black Hole creating particles.” In: *Phys. Lett. A* 94 (1983), pp. 205–209. DOI: [10.1016/0375-9601\(83\)90449-8](https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90449-8).
- [25] R. Eyheralde, M. Campiglia, R. Gambini, and J. Pullin. “Quantum fluctuating geometries and the information paradox.” In: *Class. Quant. Grav.* 34.23 (2017), p. 235015. DOI: [10.1088/1361-6382/aa8e30](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aa8e30). arXiv: [1705.05722](https://arxiv.org/abs/1705.05722) [gr-qc].

- [26] R. Eyheralde, R. Gambini, and J. Pullin. “Quantum fluctuating geometries and the information paradox II.” In: *Class. Quant. Grav.* 37.6 (2020), p. 065001. DOI: [10.1088/1361-6382/ab6e89](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab6e89). arXiv: [1908.04270](https://arxiv.org/abs/1908.04270) [gr-qc].
- [27] R. Eyheralde, R. Gambini, and A. Skirzewski. “Quantum fluctuating CGHS geometries and the information paradox.” In: *Class. Quant. Grav.* 36 (2019), p. 065007. DOI: [10.1088/1361-6382/ab0240](https://doi.org/10.1088/1361-6382/ab0240). arXiv: [1806.07796](https://arxiv.org/abs/1806.07796) [gr-qc].
- [28] A. Fabbri and J. Navarro-Salas. *Modeling black hole evaporation*. Aug. 2005. ISBN: 978-1-86094-527-4. DOI: [10.1142/p378](https://doi.org/10.1142/p378).
- [29] K. Fernandes, D. Ghosh, and A. Virmani. “Horizon Hair from Inversion Symmetry.” In: (Aug. 2020). arXiv: [2008.04365](https://arxiv.org/abs/2008.04365) [hep-th].
- [30] V.P. Frolov and I.D. Novikov, eds. *Black hole physics: Basic concepts and new developments*. Vol. 96. 1998. DOI: [10.1007/978-94-011-5139-9](https://doi.org/10.1007/978-94-011-5139-9).
- [31] S.B. Giddings. “Constraints on black hole remnants.” In: *Phys. Rev. D* 49 (1994), pp. 947–957. DOI: [10.1103/PhysRevD.49.947](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.49.947). arXiv: [hep-th/9304027](https://arxiv.org/abs/hep-th/9304027).
- [32] S.B. Giddings. “Hawking radiation, the Stefan–Boltzmann law, and unitarization.” In: *Phys. Lett. B* 754 (2016), pp. 39–42. DOI: [10.1016/j.physletb.2015.12.076](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.12.076). arXiv: [1511.08221](https://arxiv.org/abs/1511.08221) [hep-th].
- [33] S.B. Giddings and W.M. Nelson. “Quantum emission from two-dimensional black holes.” In: *Phys. Rev. D* 46 (1992), pp. 2486–2496. DOI: [10.1103/PhysRevD.46.2486](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.46.2486). arXiv: [hep-th/9204072](https://arxiv.org/abs/hep-th/9204072).
- [34] S.S. Gubser, I.R. Klebanov, and A. M. Polyakov. “Gauge theory correlators from noncritical string theory.” In: *Phys. Lett. B* 428 (1998), pp. 105–114. DOI: [10.1016/S0370-2693\(98\)00377-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00377-3). arXiv: [hep-th/9802109](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802109).
- [35] P. Hajicek. “Quantum theory of gravitational collapse: (Lecture notes on quantum conchology).” In: *Lect. Notes Phys.* 631 (2003). Ed. by Domenico J.W. Giulini, Claus Kiefer, and Claus Lammerzahn, pp. 255–299. DOI: [10.1007/978-3-540-45230-0\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-540-45230-0_6). arXiv: [gr-qc/0204049](https://arxiv.org/abs/gr-qc/0204049).
- [36] S.W. Hawking. “Black holes in general relativity.” In: *Commun. Math. Phys.* 25 (1972), pp. 152–166. DOI: [10.1007/BF01877517](https://doi.org/10.1007/BF01877517).
- [37] S.W. Hawking. “Black hole explosions.” In: *Nature* 248 (1974), pp. 30–31. DOI: [10.1038/248030a0](https://doi.org/10.1038/248030a0).
- [38] S.W. Hawking. “Particle Creation by Black Holes.” In: *Commun. Math. Phys.* 43 (1975). Ed. by G.W. Gibbons and S.W. Hawking. [Erratum: *Commun.Math.Phys.* 46, 206 (1976)], pp. 199–220. DOI: [10.1007/BF02345020](https://doi.org/10.1007/BF02345020).

- [39] S.W. Hawking. “Breakdown of Predictability in Gravitational Collapse.” In: *Phys. Rev. D* 14 (1976), pp. 2460–2473. DOI: [10.1103/PhysRevD.14.2460](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.14.2460).
- [40] S.W. Hawking. “Wormholes in Space-Time.” In: *Phys. Rev. D* 37 (1988). Ed. by G.W. Gibbons and S.W. Hawking, pp. 904–910. DOI: [10.1103/PhysRevD.37.904](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.37.904).
- [41] S.W. Hawking, M.J. Perry, and A. Strominger. “Soft Hair on Black Holes.” In: *Phys. Rev. Lett.* 116.23 (2016), p. 231301. DOI: [10.1103/PhysRevLett.116.231301](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.116.231301). arXiv: [1601.00921](https://arxiv.org/abs/1601.00921) [hep-th].
- [42] P. Hayden and J. Preskill. “Black holes as mirrors: Quantum information in random subsystems.” In: *JHEP* 09 (2007), p. 120. DOI: [10.1088/1126-6708/2007/09/120](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/09/120). arXiv: [0708.4025](https://arxiv.org/abs/0708.4025) [hep-th].
- [43] M. Henneaux and C. Teitelboim. *Quantization of gauge systems*. 1992. ISBN: 978-0-691-03769-1. DOI: [10.2307/j.ctv10crg0r](https://doi.org/10.2307/j.ctv10crg0r).
- [44] W. Israel. “Event horizons in static vacuum space-times.” In: *Phys. Rev.* 164 (1967), pp. 1776–1779. DOI: [10.1103/PhysRev.164.1776](https://doi.org/10.1103/PhysRev.164.1776).
- [45] W. Israel. “Event horizons in static electrovac space-times.” In: *Commun. Math. Phys.* 8 (1968), pp. 245–260. DOI: [10.1007/BF01645859](https://doi.org/10.1007/BF01645859).
- [46] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998. ISBN: 978-0-471-30932-1. DOI: [10.1002/3527600434.eap109](https://doi.org/10.1002/3527600434.eap109).
- [47] D. Kapec, M. Pate, and A. Strominger. “New Symmetries of QED.” In: *Adv. Theor. Math. Phys.* 21 (2017), pp. 1769–1785. DOI: [10.4310/ATMP.2017.v21.n7.a7](https://doi.org/10.4310/ATMP.2017.v21.n7.a7). arXiv: [1506.02906](https://arxiv.org/abs/1506.02906) [hep-th].
- [48] H.A. Kastrup and T. Thiemann. “Spherically symmetric gravity as a completely integrable system.” In: *Nucl. Phys. B* 425 (1994), pp. 665–686. DOI: [10.1016/0550-3213\(94\)90293-3](https://doi.org/10.1016/0550-3213(94)90293-3). arXiv: [gr-qc/9401032](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9401032).
- [49] K.V. Kuchar. “Geometrodynamics of Schwarzschild black holes.” In: *Phys. Rev. D* 50 (1994), pp. 3961–3981. DOI: [10.1103/PhysRevD.50.3961](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.50.3961). arXiv: [gr-qc/9403003](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9403003).
- [50] J. Louko, B.F. Whiting, and J.L. Friedman. “Hamiltonian space-time dynamics with a spherical null dust shell.” In: *Phys. Rev. D* 57 (1998), pp. 2279–2298. DOI: [10.1103/PhysRevD.57.2279](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.57.2279). arXiv: [gr-qc/9708012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9708012).
- [51] J.M. Maldacena. “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity.” In: *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999), pp. 1113–1133. DOI: [10.1023/A:1026654312961](https://doi.org/10.1023/A:1026654312961). arXiv: [hep-th/9711200](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200).
- [52] D. Marolf. “The Black Hole information problem: past, present, and future.” In: *Rept. Prog. Phys.* 80.9 (2017), p. 092001. DOI: [10.1088/1361-6633/aa77cc](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa77cc). arXiv: [1703.02143](https://arxiv.org/abs/1703.02143) [gr-qc].

- [53] S.D. Mathur. “The Fuzzball proposal for black holes: An Elementary review.” In: *Fortsch. Phys.* 53 (2005). Ed. by E. Kiritsis, pp. 793–827. DOI: [10.1002/prop.200410203](https://doi.org/10.1002/prop.200410203). arXiv: [hep-th/0502050](https://arxiv.org/abs/hep-th/0502050).
- [54] E. Mato. “Cuantización de un agujero negro de Reissner-Nordstrom.” MA thesis. Montevideo, UY: Universidad de la República (Uruguay). Facultad de Ciencias, 2015. URL: <https://hdl.handle.net/20.500.12008/6429>.
- [55] *Battelle rencontres - 1967 lectures in mathematics and physics: Seattle, WA, USA, 16 - 31 July 1967*. New York, NY: W. A. Benjamin, 1968.
- [56] H. Nikolic. “Violation of unitarity by Hawking radiation does not violate energy-momentum conservation.” In: *JCAP* 04 (2015), p. 002. DOI: [10.1088/1475-7516/2015/04/002](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2015/04/002). arXiv: [1502.04324](https://arxiv.org/abs/1502.04324) [hep-th].
- [57] D.N. Page. “Particle Emission Rates from a Black Hole: Massless Particles from an Uncharged, Nonrotating Hole.” In: *Phys. Rev. D* 13 (1976), pp. 198–206. DOI: [10.1103/PhysRevD.13.198](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.13.198).
- [58] D.N. Page. “Average entropy of a subsystem.” In: *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), pp. 1291–1294. DOI: [10.1103/PhysRevLett.71.1291](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1291). arXiv: [gr-qc/9305007](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9305007).
- [59] D.N. Page. “Information in black hole radiation.” In: *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), pp. 3743–3746. DOI: [10.1103/PhysRevLett.71.3743](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.3743). arXiv: [hep-th/9306083](https://arxiv.org/abs/hep-th/9306083).
- [60] D.N. Page. “Time Dependence of Hawking Radiation Entropy.” In: *JCAP* 09 (2013), p. 028. DOI: [10.1088/1475-7516/2013/09/028](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2013/09/028). arXiv: [1301.4995](https://arxiv.org/abs/1301.4995) [hep-th].
- [61] A. Palatini. “Deduzione invariante delle equazioni gravitazionali dal principio di Hamilton.” In: *Rend. Circ. Mat. Palermo* 43 (Jan. 1919), pp. 203–212. DOI: [10.1007/BF03014670](https://doi.org/10.1007/BF03014670).
- [62] L.E. Parker and D. Toms. *Quantum Field Theory in Curved Spacetime: Quantized Field and Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, Aug. 2009. ISBN: 978-0-521-87787-9. DOI: [10.1017/CB09780511813924](https://doi.org/10.1017/CB09780511813924).
- [63] G. Penington. “Entanglement Wedge Reconstruction and the Information Paradox.” In: *JHEP* 09 (2020), p. 002. DOI: [10.1007/JHEP09\(2020\)002](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2020)002). arXiv: [1905.08255](https://arxiv.org/abs/1905.08255) [hep-th].
- [64] R. Penrose. “Gravitational collapse: The role of general relativity.” In: *Riv. Nuovo Cim.* 1 (1969), pp. 252–276. DOI: [10.1023/A:1016578408204](https://doi.org/10.1023/A:1016578408204).
- [65] E. Poisson. *A Relativist’s Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, Dec. 2009. DOI: [10.1017/CB09780511606601](https://doi.org/10.1017/CB09780511606601).

- [66] K. Prabhu. “Conservation of asymptotic charges from past to future null infinity: Supermomentum in general relativity.” In: *JHEP* 03 (2019), p. 148. DOI: [10.1007/JHEP03\(2019\)148](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2019)148). arXiv: [1902.08200](https://arxiv.org/abs/1902.08200) [gr-qc].
- [67] D. Psaltis et al. “Gravitational Test Beyond the First Post-Newtonian Order with the Shadow of the M87 Black Hole.” In: *Phys. Rev. Lett.* 125.14 (2020), p. 141104. DOI: [10.1103/PhysRevLett.125.141104](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.125.141104). arXiv: [2010.01055](https://arxiv.org/abs/2010.01055) [gr-qc].
- [68] T. Regge and C. Teitelboim. “Role of Surface Integrals in the Hamiltonian Formulation of General Relativity.” In: *Annals Phys.* 88 (1974), p. 286. DOI: [10.1016/0003-4916\(74\)90404-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(74)90404-7).
- [69] D.C. Robinson. “Uniqueness of the Kerr black hole.” In: *Phys. Rev. Lett.* 34 (1975), pp. 905–906. DOI: [10.1103/PhysRevLett.34.905](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.34.905).
- [70] S. Ryu and T. Takayanagi. “Holographic derivation of entanglement entropy from AdS/CFT.” In: *Phys. Rev. Lett.* 96 (2006), p. 181602. DOI: [10.1103/PhysRevLett.96.181602](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.96.181602). arXiv: [hep-th/0603001](https://arxiv.org/abs/hep-th/0603001).
- [71] R.K. Sachs. “Gravitational waves in general relativity. 8. Waves in asymptotically flat space-times.” In: *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 270 (1962), pp. 103–126. DOI: [10.1098/rspa.1962.0206](https://doi.org/10.1098/rspa.1962.0206).
- [72] K. Schoutens, H.L. Verlinde, and E.P. Verlinde. “Quantum black hole evaporation.” In: *Phys. Rev. D* 48 (1993), pp. 2670–2685. DOI: [10.1103/PhysRevD.48.2670](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.2670). arXiv: [hep-th/9304128](https://arxiv.org/abs/hep-th/9304128).
- [73] Y. Sekino and L. Susskind. “Fast Scramblers.” In: *JHEP* 10 (2008), p. 065. DOI: [10.1088/1126-6708/2008/10/065](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2008/10/065). arXiv: [0808.2096](https://arxiv.org/abs/0808.2096) [hep-th].
- [74] A. Strominger. “Les Houches lectures on black holes.” In: *NATO Advanced Study Institute: Les Houches Summer School, Session 62: Fluctuating Geometries in Statistical Mechanics and Field Theory*. Aug. 1994. arXiv: [hep-th/9501071](https://arxiv.org/abs/hep-th/9501071).
- [75] A. Strominger. “Asymptotic Symmetries of Yang-Mills Theory.” In: *JHEP* 07 (2014), p. 151. DOI: [10.1007/JHEP07\(2014\)151](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2014)151). arXiv: [1308.0589](https://arxiv.org/abs/1308.0589) [hep-th].
- [76] A. Strominger. “On BMS Invariance of Gravitational Scattering.” In: *JHEP* 07 (2014), p. 152. DOI: [10.1007/JHEP07\(2014\)152](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2014)152). arXiv: [1312.2229](https://arxiv.org/abs/1312.2229) [hep-th].
- [77] L. Susskind, L. Thorlacius, and J. Uglum. “The Stretched horizon and black hole complementarity.” In: *Phys. Rev. D* 48 (1993), pp. 3743–3761. DOI: [10.1103/PhysRevD.48.3743](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.48.3743). arXiv: [hep-th/9306069](https://arxiv.org/abs/hep-th/9306069).

- [78] L. Thorlacius. “Black hole evolution.” In: *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* 41 (1995), pp. 245–275. DOI: [10.1016/0920-5632\(95\)00435-C](https://doi.org/10.1016/0920-5632(95)00435-C). arXiv: [hep-th/9411020](https://arxiv.org/abs/hep-th/9411020).
- [79] C. Troessaert. “The BMS<sub>4</sub> algebra at spatial infinity.” In: *Class. Quant. Grav.* 35.7 (2018), p. 074003. DOI: [10.1088/1361-6382/aaae22](https://doi.org/10.1088/1361-6382/aaae22). arXiv: [1704.06223](https://arxiv.org/abs/1704.06223) [hep-th].
- [80] W.G. Unruh and R.M. Wald. “Information Loss.” In: *Rept. Prog. Phys.* 80.9 (2017), p. 092002. DOI: [10.1088/1361-6633/aa778e](https://doi.org/10.1088/1361-6633/aa778e). arXiv: [1703.02140](https://arxiv.org/abs/1703.02140) [hep-th].
- [81] R.M. Wald. *General Relativity*. Chicago, USA: Chicago Univ. Pr., 1984. ISBN: 978-0-226-87033-5. DOI: [10.7208/chicago/9780226870373.001.0001](https://doi.org/10.7208/chicago/9780226870373.001.0001).
- [82] R.M. Wald. *Quantum Field Theory in Curved Space-Time and Black Hole Thermodynamics*. Chicago Lectures in Physics. Chicago, IL: University of Chicago Press, Oct. 1995. ISBN: 978-0-226-87027-4. URL: <https://press.uchicago.edu/ucp/books/book/chicago/Q/bo3684008.html>.
- [83] J.A. Wheeler. *Geometrodynamics*. New York, NY: Academic Press, 1962. URL: <https://cds.cern.ch/record/108489>.
- [84] E. Witten. “Anti-de Sitter space and holography.” In: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), pp. 253–291. DOI: [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2](https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2). arXiv: [hep-th/9802150](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802150).

