



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



# Alternativas de proyecto e implementación de circuitos y de programas de reconstrucción tendientes a un tomógrafo por impedancia eléctrica para la presentación compacta del estado edemático de cortes torácicos en tiempo real

TESIS PRESENTADA A LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA POR

Eduardo Santos

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS  
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
MAGISTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.

DIRECTOR DE TESIS

Franco Simini..... Universidad de la República

TRIBUNAL

Roberto Markarián..... Universidad de la República  
Javier Hurtado..... Universidad de la República  
Federico Larroca..... Universidad de la República  
Pedro Bertemes-Filho (Revisor Externo) Universidade do Estado de  
Santa Catarina, SC, Brasil

DIRECTOR ACADÉMICO

Franco Simini..... Universidad de la República

Montevideo  
domingo 23 marzo, 2014

*Alternativas de proyecto e implementación de circuitos y de programas de reconstrucción tendientes a un tomógrafo por impedancia eléctrica para la presentación compacta del estado edemático de cortes torácicos en tiempo real*, Eduardo Santos.

ISSN 1688-2806

Esta tesis fue preparada en  $\text{\LaTeX}$  usando la clase iietesis (v1.1).

Contiene un total de 255 páginas.

Compilada el domingo 23 marzo, 2014.

<http://iie.fing.edu.uy/>

# Agradecimientos

Me gustaría dar mi mayor agradecimiento a mi director académico y de tesis Franco Simini por su apoyo, motivación y enseñanzas durante todo el desarrollo de mi maestría. Fue en gran parte gracias a su empuje en momentos de estancamiento que esta tesis ha llegado a su culminación.

También me gustaría agradecer a mis compañeros maestrandos del nib, Daniel Thevenet y Darío Santos, con quienes compartimos el director de tesis y mantuvimos conversaciones que sirvieron para descargar tensiones en momentos de estrés y seguir motivados todo el camino.

Estoy agradecido con mis compañeros docentes del nib, Daniel Geido, Jorge Lobo, José Pereira, Freddy Kugelmass y Rodolfo Grosso por sus consejos y apoyo durante el transcurso de esta maestría.

A María Pagés de la Escuela Universitaria de Tecnología Médica le agradezco su ayuda para obtener los registros fotográficos que aparecen en esta tesis.

Finalmente quiero agradecer a Roberto Markarián y Pablo Musé por su interés en el problema matemático y su paciencia para explicármelo de la mejor forma.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

*A mis padres y mi hermano.*

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

## Abreviaciones

EIT	Tomografía por impedancia eléctrica
ECT	Tomografía por capacitancia eléctrica
EMT	Tomografía electromagnética
LPA	Lesión pulmonar aguda
TC	Tomografía computada
FPGA	<i>Field programmable gate array</i>
DSP	Procesador de señales digitales
SVD	Descomposición en valores singulares
TV	Variación total
EIDORS	Electrical impedance and diffuse optical reconstruction software
UCL	University College of London
QSI	Quasi-static imaging
PSI	Parametric spectroscopy imaging
DAC	Convertor digital-analógico
ROM, PROM, EPROM	Memoria de solo lectura, ROM programable, PROM borrable
DDS	Sintetizador digital directo
OTA	Amplificador de transconductancia variable
NIC	Circuito convertor de impedancia negativo
GIC	Circuito convertor de impedancia generalizado
CMRR	Relación de rechazo al modo común
ADC	Convertor analógico-digital
SNR	Relación señal a ruido
PSD	Densidad espectral de potencia
VCO	Oscilador controlado por tensión
NCO	Oscilador numéricamente controlado
FFT	Transformada rápida de Fourier
PEEP	Presión positiva al final de la expiración
VCCS	Fuente de corriente controlada por tensión
DAQ	Tarjeta adquisidora de datos
CI	Circuito integrado
SK	Starter kit
PGA	Amplificador de ganancia programable
ECG	Electrocardiograma
PDE	Ecuación en derivadas parciales
FEM, FDM, BEM	Método de elementos finitos, de diferencias finitas y de elementos de borde, respectivamente
MC	Mínimos cuadrados
TSVD	Regularización mediante truncamiento de valores singulares
MAP, ML	Estimador de <i>maximum a posteriori</i> y máxima verosimilitud, respectivamente
PD-IPM	<i>Primal Dual-Interior Point Method</i>
PDF	Función densidad de probabilidad



# Símbolos y notación

$\Omega$	Región
$\partial\Omega$	Frontera de la región
$\sigma, \Sigma$	Conductividad, conjunto de conductividades ( $\Sigma = \{\sigma \in L^\infty \text{ tal que } \text{ess inf } \sigma > 0\}$ )
$\phi$	Potencial dentro de la región
$u, U$	Potencial en la frontera de la región, conjunto de potenciales
$g$	Densidad de corriente en la frontera de la región
$H^i$	Espacio de Sobolev de orden $i$
$\Lambda_\sigma$	Operador transconductancia
$L$	Número de electrodos en la frontera de la región
$I_l, V_l$	Corriente y voltaje por el electrodo $l$ respectivamente
$E_l, z_l$	Superficie e impedancia de contacto del electrodo $l$ respectivamente
$h, H$	Operador del problema directo, Operador lineal
$k, n$	Número de elementos y vértices en el modelo FEM respectivamente
$A^T$	Matriz transpuesta de $A$
$A^\dagger$	Inversa de Moore Penrose de la matriz $A$
$J$	Matriz Jacobiana
$\sigma_{MC}$	Solución de mínimos cuadrados
$\mathcal{N}(A)$	Núcleo de la matriz $A$
$\alpha$	Parámetro de regularización
$\sigma_\alpha$	Solución de regularizada
$\propto$	$a \propto b \equiv a = r \times b$
$\alpha^{(k+1)}$	Paso $k + 1$ de la iteración

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Resumen

La Tomografía por Impedancia Eléctrica es una técnica que permite estimar la distribución de conductividad dentro de un cuerpo en base a medidas en la superficie. Para alcanzar esta estimación se colocan electrodos en el cuerpo por los cuales se inyecta corriente y se miden diferencias de tensión.

Con estas tensiones se llega a la distribución de conductividad mediante lo que se llama reconstrucción. El resultado es un corte tomográfico en donde los diferentes valores de conductividad son representados mediante diferentes colores.

El núcleo de ingeniería biomédica de la Universidad de la República ha trabajado en esta técnica desde hace más de una década, llegando a un prototipo funcional denominado IMPETOM. Este prototipo fue muy valioso al momento de su culminación, pero para continuar con la línea de investigación era necesario realizar un rediseño.

El objetivo de esta tesis es el diseño de un prototipo funcional de tomógrafo que permita, en tiempo real, el seguimiento de las funciones pulmonares y de las lesiones pulmonares agudas. El diseño propuesto cuenta con 16 electrodos que se colocan en una hilera, utilizando una cinta con velcro, sobre el tórax del paciente. Se inyecta corriente a una frecuencia de entre  $20kHz$  y  $100kHz$  mediante el método de electrodos adyacentes. Se utiliza demodulación digital para obtener los valores de tensión y pasar el vector de medidas a la PC donde se encuentra el software que realiza la reconstrucción.

La reconstrucción de imágenes en la Tomografía por Impedancia Eléctrica es un problema inverso mal condicionado, por lo que pequeños errores y ruidos que se agreguen a las medidas provocan errores arbitrariamente grandes en la conductividad reconstruida. Para contrarrestar este mal condicionamiento nuestro diseño incluye la regularización del problema y el agregado de información a priori que garantiza que la reconstrucción esté dentro de un conjunto de soluciones esperadas.

Existen varios métodos de regularización, la mayoría de los cuales limitan las soluciones a distribuciones regulares, mientras que otros métodos permiten que haya discontinuidades y saltos en la conductividad. En esta tesis se analizan y comparan varios de estos métodos y se determina cuál es el más adecuado para utilizar en el nuevo prototipo. Para la comparación se utilizaron datos simulados y datos reales tomados con el primer prototipo de IMPETOM.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Tabla de contenidos

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Abreviaciones</b>	<b>V</b>
<b>Símbolos y notación</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Tomografía por impedancia eléctrica . . . . .	1
1.2. Aplicaciones clínicas . . . . .	1
1.3. Sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica . . . . .	4
1.4. Problema Matemático . . . . .	6
1.5. Historia de la Tomografía por Impedancia Eléctrica . . . . .	7
1.6. Historia de las técnicas de reconstrucción . . . . .	10
1.7. Historia de las aplicaciones clínicas . . . . .	11
1.8. Historia IMPETOM . . . . .	11
1.9. Finalidad de la tesis . . . . .	12
<b>2. Métodos para la recolección de datos</b>	<b>13</b>
2.1. Introducción . . . . .	13
2.2. Inyección de voltaje vs. inyección de corriente . . . . .	13
2.3. Número de electrodos . . . . .	14
2.4. Inyección de corriente . . . . .	14
2.5. Características nuevo IMPETOM . . . . .	19
<b>3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica</b>	<b>21</b>
3.1. Componentes de un sistema de Tomografía por Impedancia . . . . .	21
3.2. Generador de onda . . . . .	22
3.3. Fuente de corriente . . . . .	26
3.4. Amplificador diferencial . . . . .	36
3.5. Voltímetro síncrono . . . . .	38
3.6. Multiplexores . . . . .	40
3.7. Módulo de Control . . . . .	41

## Tabla de contenidos

<b>4. Comparación de sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica</b>	<b>43</b>
4.1. Introducción . . . . .	43
4.2. Proyectos de de Tomografía por Impedancia Eléctrica . . . . .	44
<b>5. Opciones de Hardware para IMPETOM</b>	<b>55</b>
5.1. Introducción . . . . .	55
5.2. Componentes discretos sin procesamiento digital . . . . .	55
5.3. Procesador de Señales Digitales . . . . .	56
5.4. Otras Consideraciones . . . . .	59
<b>6. Nuevo diseño para IMPETOM</b>	<b>65</b>
6.1. Diseño propuesto . . . . .	65
6.2. Etapas de la implementación del proyecto . . . . .	68
<b>7. Problema inverso y problema directo</b>	<b>73</b>
7.1. Manejo de problemas inversos . . . . .	73
7.2. Mal condicionamiento . . . . .	75
7.3. Descripción del problema de tomografía por impedancia eléctrica .	76
<b>8. Ecuaciones de la Tomografía por Impedancia</b>	<b>77</b>
8.1. Introducción . . . . .	77
8.2. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	77
8.3. Potencia disipada . . . . .	78
8.4. Modelo completo del electrodo . . . . .	80
<b>9. Problema Directo</b>	<b>81</b>
9.1. Planteo del problema directo . . . . .	81
9.2. Método de Elementos Finitos . . . . .	82
9.3. Formulación de Elementos Finitos . . . . .	83
9.4. Matriz Jacobiana . . . . .	85
9.5. Solución al Problema Directo . . . . .	86
<b>10. Problema inverso linealizado</b>	<b>89</b>
10.1. Introducción . . . . .	89
10.2. Imágenes diferenciales . . . . .	89
10.3. Regularización de problemas inversos mal condicionados . . . . .	90
10.4. Descomposición en valores singulares . . . . .	91
10.5. Solución al problema de Mínimos Cuadrados lineal . . . . .	92
10.6. Regularización . . . . .	94
<b>11. Métodos Iterativos</b>	<b>97</b>
11.1. Introducción . . . . .	97
11.2. Regularización por Variación Total . . . . .	97
11.3. Métodos no lineales . . . . .	99
<b>12. Modelo probabilístico</b>	<b>103</b>

<b>13. Comparación de métodos de reconstrucción</b>	<b>109</b>
13.1. Herramientas informáticas . . . . .	109
13.2. Métodos de regularización comparados . . . . .	111
13.3. Comparación . . . . .	112
<b>14. Conclusiones</b>	<b>127</b>
14.1. Introducción . . . . .	127
14.2. Discusión . . . . .	127
14.3. Trabajo futuro . . . . .	130
<b>A. Espacios de Sobolev</b>	<b>133</b>
A.1. Notación y preliminares . . . . .	133
A.2. Definiciones y propiedades básicas . . . . .	134
A.3. Espacios de Sobolev y Transformada de Fourier . . . . .	136
A.4. Ejemplo . . . . .	137
<b>B. Algoritmo de Chambolle</b>	<b>139</b>
<b>C. Reconstrucción de imánes mediante truncamiento de valores     singulares (TSVD)</b>	<b>143</b>
<b>D. Reconstrucción de imánes mediante regularización de Tijonov</b>	<b>151</b>
<b>E. Reconstrucción de imánes mediante NOSER</b>	<b>157</b>
<b>F. Reconstrucción de imánes mediante Variación Total (TV)</b>	<b>163</b>
<b>G. Reconstrucción de imánes mediante GREIT</b>	<b>173</b>
<b>H. Reconstrucción del banco de datos Montreal Data 1995</b>	<b>183</b>
<b>I. Publicación en CLABIO 2012 - First Latin American Conference     on Bioimpedance, Joinville, Brasil, Noviembre 2012</b>	<b>195</b>
<b>J. Publicación en BIBE 2013 - 13th IEEE International Conference     on BioInformatics and BioEngineering, Chania, Greece, Novem-     ber 2013</b>	<b>209</b>
<b>K. Publicación en IEEE Transactions on Medical Imaging</b>	<b>215</b>
<b>Referencias</b>	<b>217</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>228</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>230</b>

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.



# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Tomografía por impedancia eléctrica

La tomografía por impedancia eléctrica (EIT) es una técnica utilizada para mapear la distribución de la conductividad y permitividad dentro de una región en base a medidas realizadas en la frontera. Esto se realiza inyectando corriente alterna y midiendo diferencias de tensión en la frontera o viceversa, aplicando diferencias de potencial y midiendo las corrientes que salen de la región. El mapeo de la conductividad en la región se denomina reconstrucción. Las imágenes generadas por un equipo de EIT son cortes tomográficos que muestran mediante escalas de colores la variación de la distribución de la conductividad.

Otras técnicas de este tipo incluyen la electrical capacitance tomography (ECT) [127] [128] y electromagnetic tomography (EMT) [94] [55]. Ésta última, al igual que EIT, permite obtener un mapeo de la conductividad, esto a través de inducción magnética. En este método se utilizan bobinas para inducir corrientes en la región, y mediante electrodos se miden voltajes, también se puede medir el campo magnético sobre la superficie, en este caso no hay puntos de contacto [120]. Estas técnicas están menos desarrolladas que la EIT, aunque tienen ventajas, como que la distribución de corriente lograda es mejor que cuando se inyecta mediante electrodos, en la cual existen regiones con densidad de corriente muy alta, cerca de ellos. Entre las desventajas es que necesita frecuencias más altas, en el entorno de los mega Hertz, por lo que es más difícil de implementar.

En el orden de frecuencias que se manejan en EIT, decenas de kilo Hertz, no sólo las componentes magnéticas pueden despreciarse, sino que la parte imaginaria del voltaje medido es cientos de veces más pequeña que la parte real [98], por lo que, en general, los sistemas de EIT miden solamente la parte real, y reconstruyen la conductividad del objeto, y no su permitividad.

### 1.2. Aplicaciones clínicas

Las aplicaciones de esta técnica abarcan varias áreas, siendo las que más se destacan la imagenología médica, estudios de los suelos y procesos industriales.

## Capítulo 1. Introducción

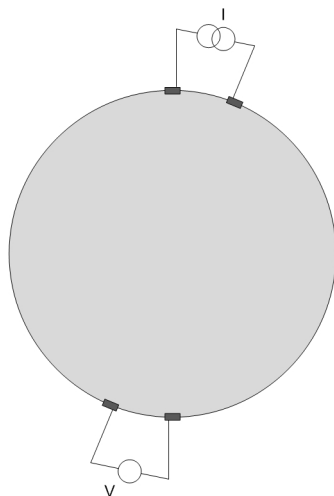


Figura 1.1: Sistema de recolección de datos para tomografía por impedancia eléctrica.

Dentro del área de las imágenes médicas, utilizando que diferentes órganos tienen diferentes conductividades, además de que estas varían con el tiempo durante los diferentes procesos fisiológicos [16], permite, por ejemplo, hacer un seguimiento de las funciones pulmonares o del corazón [16] [28] [108] [102] [70] [91] [59] [75] [63] [36] [117]], del cerebro [16] [64] [126] [123] [42] o ginecológicas [32]. Uno de los factores que más determina la conductividad de los órganos es el contenido de agua. En el caso del estudio de los suelos se ha utilizado ampliamente y esta técnica se encuentra bien desarrollada [83] [104], mientras que en procesos industriales se utiliza para realizar imágenes de la mezcla de fluidos [38] [85] y detección de fallas [45].

Una de las aplicaciones de EIT más investigadas es el seguimiento de función pulmonar regional, ya que ésta se pueden relacionar fácilmente a cambios en la conductividad de los tejidos. Boone, Barber y Brown en [15] indican que entre el momento de máxima inspiración y el de máxima expiración la conductividad de los pulmones varía entre un 190 % y un 240 % para una frecuencia de  $50\text{kHz}$ . En el caso de patologías, éstas presentan líquido en los pulmones o áreas poco ventiladas, las cuales se caracterizan por variaciones de conductividad muy marcadas respecto de la situación normal. Por lo que es relativamente fácil detectar estas zonas utilizando EIT.

El tejido pulmonar, que en situación normal está constituido de 80 % aire y 5 % fluido, tiene una conductividad típica relativamente baja, en el orden de entre  $0,05\Omega^{-1}\text{m}$  a  $0,1\Omega^{-1}\text{m}$ , por lo que un aumento de fluido en los pulmones provocará un ascenso notorio de la conductividad. Por ejemplo, en el caso de suero, que tiene una conductividad de  $1,7\Omega^{-1}\text{m}$  la conductividad debería aumentar bastante [58].

Dentro de las patologías se encuentra la lesión pulmonar aguda (LPA), la cual es una complicación común en pacientes en terapia intensiva. Ésta se da por confi-

## 1.2. Aplicaciones clínicas

Tabla 1.1: Valores típicos para la resistividad de los tejidos humanos ( $20kHz-100kHz$ ). Tomado del resumen sobre la técnica de EIT publicada por Boone, Barber y Brown en 1997 [15].

Tejido	Resistividad ( $\Omega m$ )
Hueso	17
Grasa	21-28
Hueso	17
Pulmón	7,3 - 24
Cerebro - materia gris	2,8
Cerebro - materia blanca	6,8
Músculo cardíaco - longitudinal	1,6-5,8
Músculo cardíaco - transversal	4,2-51
Músculo esquelético	1,3-1,5
Músculo esqueléticos	18-23
Hígado	3,5-5,5
Sangre	1,5
Plasma	0,66
Líquido cerebro espinal	0,65

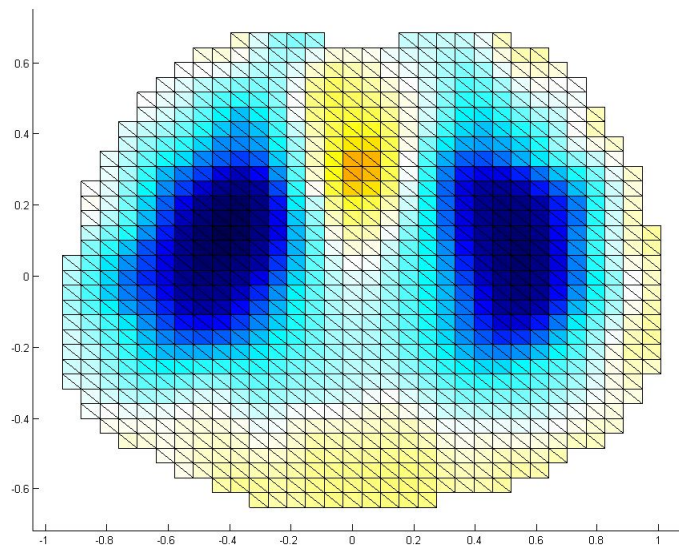


Figura 1.2: Tomografía por impedancia eléctrica para monitoreo de funciones pulmonares.

## Capítulo 1. Introducción

guraciones en los ventiladores que no se adaptan al los requisitos individuales de los pulmones, llevando a la lesión del tejido pulmonar [114]. Estas lesiones aumentan la permeabilidad vascular y alveolar generando la formación de edemas [48]. Los pulmones de un paciente con LPA presentan propiedades heterogéneas, resultando que los parámetros globales no reflejan la situación real de los pulmones, siendo insuficiente para una ventilación protectora adecuada [114] [37] [95].

Si bien la tomografía computada brinda imágenes que permiten distinguir estas diferentes zonas de los pulmones, no es una técnica adecuada para un seguimiento continuo de la enfermedad debido al peligro de exponer al paciente a radiaciones ionizantes durante mucho tiempo. En estos casos, la EIT es una herramienta más idónea por ser inocua para el paciente.

La EIT cuenta con ventajas y desventajas respecto de otros métodos de imágenes médicas utilizadas para fines similares como el seguimiento de la función pulmonar. Entre las ventajas están su bajo costo, debido a que es un sistema completamente electrónico, sin uso de grandes transductores. Es un método no invasivo e inocuo para el paciente, a diferencia de los métodos basados en rayos X. Además permite un monitoreo continuo de la enfermedad y su tratamiento, sin requerir traslados del paciente. La principal diferencia se encuentra en la baja resolución de las imágenes mostradas, debido al número limitado de medidas con las que se cuenta para reconstruir la imagen. Sin embargo, justamente al ser nuestro interés obtener una imagen con una “mancha” que nos de la tendencia sobre la evolución de la patología y su tratamiento, la resolución de los equipos de EIT es suficiente. Otro problema es que imagen reconstruida se ve notoriamente afectada por el movimiento de los electrodos, así como otros artefactos que se puedan introducir en las medidas.

### 1.3. Sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica

En un sistema de EIT para el seguimiento de las funciones pulmonares la inyección de corrientes al cuerpo y la medición de diferencias de tensión se realiza mediante electrodos que se colocan en el tórax del paciente, a la altura del esternón, de forma equi-espaciada, generalmente mediante la ayuda de una cinta o elástico que facilite la colocación. El equipo cuenta con el módulo que inyecta corriente, otro que mide tensiones, un módulo de control que coordina a los anteriores y comunica los datos a una computadora, la que a su vez se encarga de realizar la reconstrucción y desplegar la imagen con la distribución de la conductividad.

Si bien es posible realizar un sistema de EIT que aplique potenciales y mida corrientes, esto no es lo más frecuente, por razones de seguridad del paciente y el operador. Si se aplica una señal con una tensión constante, la corriente que ingresa al cuerpo depende de la impedancia de éste, por lo que no tenemos control sobre el valor. Si la impedancia es pequeña la corriente será alta, pudiendo producir lesiones en el paciente. Para mantener la corriente en valores aceptables y controlados, se utiliza el método de inyectar corrientes y medir diferencias de tensión.

La corriente que se inyecta es alterna debido a las desventajas de utilizar corriente continua, la que puede producir la polarización de las células y una altera-

### 1.3. Sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica

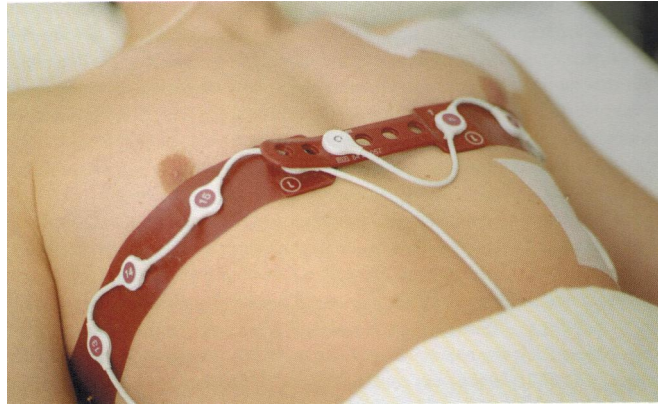


Figura 1.3: Colocación de electrodos en el tórax para Tomografía por impedancia eléctrica. Tomado de publicación sobre EIT de Drager Medical [114].



Figura 1.4: Cinto para colocación de electrodos en el tórax desarrollado en el proyecto IMPE-TOM C [43].

## Capítulo 1. Introducción

ción en la medida, además de una acción electrolítica que puede causar úlceras [93]. Por otro lado, la sensibilidad a la corriente, así como el daño que puede causar en las personas, disminuye a medida que aumenta la frecuencia [93]. A frecuencias más altas es posible inyectar corrientes con amplitudes mayores sobre el cuerpo humano sin producirle daños ni que este las perciba. Pero si se continúa aumentando la frecuencia comienzan a entrar en juego las capacidades parásitas del cuerpo, así como también los campos magnéticos inducidos dejan de ser despreciables como lo muestra Simini en [106]. Por esto, las frecuencias elegidas para este tipo de sistemas va entre los  $10kHz$  a  $1MHz$ .

### 1.4. Problema Matemático

Dada la conductividad en una región y las corrientes inyectadas, la diferencia de tensión en la superficie queda determinada mediante leyes físicas [16], lo que se denomina operador directo. Para obtener la distribución de la conductividad en base a las medidas en la superficie se debe utilizar el operador inverso, y en la mayoría de los casos no es conocido [82].

Para la reconstrucción entonces se utiliza el método de mínimos cuadrados, utilizando el operador directo, donde mediante técnicas de optimización se llega a una distribución de conductividad cercana a lo esperable y que a su vez es coherente con las medidas realizadas.

Este es lo que se llama un problema mal condicionado, dado que pequeñas perturbaciones en las medidas generan errores muy grandes en la conductividad reconstruida.

Siendo este un problema mal condicionado, hay ciertas distribuciones de la conductividad que generan medidas de tensión muy pequeñas, lo que hace que sean tapadas por el ruido inherente a sistemas eléctricos, por lo que la reconstrucción en estos casos se vuelve muy difícil. Para tratar de evitar reconstrucciones que no correspondan a distribuciones reales se utiliza información *a-priori*, que ayuda a que la reconstrucción este dentro del espacio de distribuciones esperables. La forma de introducir esta información es a través de la *regularización* del problema. La mayoría de las técnicas de regularización buscan soluciones que no contengan saltos bruscos en los valores de la conductividad, aunque otras técnicas si permiten discontinuidades y variaciones grandes.

Cuanto más se acerque la información *a-priori* que tenemos a la distribución real que tratamos de reconstruir, mejores resultados obtendremos. Por ejemplo al tener estimaciones de los órganos y de las discontinuidades en la conductividad que se da en sus bordes. La incorporación de este tipo de información ha sido estudiada por Kolehmainen en su trabajo de 2001 [74] y Vauhkonen en su tesis de doctorado [116].

Las imágenes reconstruidas pueden mostrar dos características: la distribución del valor real de la conductividad (imágenes absolutas), o la distribución de la variación de la conductividad respecto de una referencia (imágenes dinámicas).

Las primeras permiten caracterizar los tejidos, y formar imágenes anatómicas, similares a las de otras técnicas, como la tomografía computada o resonancia

## 1.5. Historia de la Tomografía por Impedancia Eléctrica

magnética, mientras que las segundas generan imágenes funcionales, en donde se ve la variación de la conductividad a medida que pasa el tiempo.

Las reconstrucción de imágenes anatómicas requiere una precisión muy difícil de lograr, debido al ruido inherente de las medidas y de los artefactos que se introducen por los problemas geométricos o el movimiento de los electrodos. De todas formas, esta técnica nunca llegaría al nivel de una tomografía o resonancia ya por el hecho de lo limitada que es su resolución debido a lo expresado anteriormente.

Una de las desventajas de la EIT respecto a la tomografía por rayos X es que el método de reconstrucción es más difícil de resolver. Esto es debido a que en los métodos mediante rayos X, como la tomografía computada, los rayos se propagan en línea recta dentro del cuerpo, y la atenuación en cierto punto es independiente de la atenuación en ningún otro punto del cuerpo. Por lo que utilizando rayos colimados, es decir, paralelos entre si, que son emitidos desde un lado del cuerpo, y utilizando detectores del lado opuesto, se mida la atenuación total del rayo, y sabemos que ésta es sólo dependiente de la línea que atravesó el rayo. Luego se van rotando el emisor de rayos y los detectores alrededor de todo el cuerpo. Esto es muy eficiente y permite obtener un gran número de datos los cuales después se utilizan para la reconstrucción. Ésta se realiza utilizando transformadas de Radón, y dada la característica del problema, no son mal condicionadas. Por estos factores la resolución espacial de la tomografía computada sea muy buena [62], y mucho mejor que para el caso de EIT, donde la corriente se distribuye en todo el cuerpo y las tensiones medidas dependen de las características eléctricas en toda la región.

Otra dificultad respecto a la distribución de la corriente, es que ésta no sólo se distribuye en el plano donde se inyecta, sino que por todo el tórax, por lo que considerar que ésta está confinada sólo al plano en que se encuentran los electrodos es un error. Los algoritmos de reconstrucción deberían tomar en cuenta esto para obtener reconstrucciones más precisas. Una opción puede ser colocar otros electrodos en planos diferentes al de inyección como se realizó en el proyecto IMPETOM 48 del núcleo de ingeniería biomédica en 2007 [99].

## 1.5. Historia de la Tomografía por Impedancia Eléctrica

La tomografía por impedancia eléctrica para uso clínico es una técnica que se ha estado desarrollando en los últimos treinta años, si bien todavía no se ha impuesto como un método apto para diagnósticos. Los grupos de investigación que han aportado a la evolución de la técnica han sido muchos.

Para encontrar el primer equipo con el cual se obtuvieron reconstrucciones tomográficas debemos ir a la Universidad de Sheffield, a principios de la década del 80, donde los pioneros Barber y Brown desarrollaron el Sheffield Mark I [11] [22]. Este era un equipo de 16 electrodos que inyectaba una corriente de  $50kHz$ . Como algoritmo de reconstrucción utilizaba una variación de la retroproyección (*back-projection*) que se utiliza en la tomografía computada (TC). Sobre la TC hay que decir que es una técnica apenas diez años más antigua que la EIT, algo que parece curioso dada la expansión tan desigual de ambas. En 1985 [76] se mostraron las primeras reconstrucciones con el Sheffield Mark I, tratando de monitorear funciones

## Capítulo 1. Introducción



(a)



(b)

Figura 1.5: Sistema de EIT IMPETOM 48, utiliza 3 hileras de 16 electrodos para medir las corrientes que se escapan del plano de inyección. Arriba se muestra el gabinete conteniendo los canales de medida e inyección. Abajo el fantoma construido para las pruebas.



## 1.5. Historia de la Tomografía por Impedancia Eléctrica

pulmonares y gástricas, estas imágenes eran dinámicas, y se pudo comprobar la reducción de la conductividad del pulmón al momento de la máxima inspiración.

A partir de la segunda mitad de la década del 80 se da la expansión de los grupos de investigación del tema, abarcando tres áreas diferentes: el desarrollo de equipos, el entendimiento del problema matemático y las posibles aplicaciones de esta técnica.

En el desarrollo de equipos continúa el grupo de Barber y Brown en Sheffield, donde se produce el prototipo Sheffield mk2 [23] [107] en 1990, este modelo continúa utilizando 16 electrodos, inyectando una corriente de  $20kHz$  y es capaz de obtener datos para 25 imágenes por segundo. El avance de este equipo estaba en su demodulación digital. Nuevamente se obtuvieron imágenes dinámicas que reflejaban el cambio en conductividad. Este mismo grupo en 1994 presenta los resultados obtenidos con su tercer prototipo, el Sheffield mark 3 [21], con un cambio sustancial, ya que utilizaba una señal con varias frecuencias, entre  $9,6kHz$  y  $614kHz$ . Para la reconstrucción se utiliza un análisis de la variación de la conductividad con la frecuencia.

En paralelo a Sheffield comenzó a trabajar un grupo en el Rensselaer Polytechnic Institute, encabezados por Newell e Isaacson, donde se buscó una solución diferente, en base al método de corrientes óptimas [49] [50] introdujeron el concepto de “distinguibilidad”. Afirman que con este método se puede obtener la mayor diferencia en los voltajes medidos en el borde, dada una distribución de conductividad. En el año 1988 este grupo da a conocer dos prototipos basados en el método de corrientes óptimas, el ACT 1 y ACT 2 [90]. Estos dos equipos utilizaban 32 electrodos, pero mientras que el ACT 1 operaba a  $12kHz$ , el ACT 2 lo hacía a  $15kHz$ , estos sistemas, al ser más complejo, requerían 30 segundos para obtener las medidas necesarias para una reconstrucción.

En 1991 se desarrolla el tercer prototipo, ACT 3 [35], y en 1992 se publican los primeros resultados [76]. Este equipo, si bien seguía utilizando 32 electrodos, introduce muchos avances con respecto a los anteriores prototipos. La velocidad de adquisición aumentó a 7 juegos de datos por segundo, esto es debido a la capacidad de medir voltajes por los electrodos en donde se inyecta corriente y al uso de demodulación digital. Permite seleccionar entre tres frecuencias,  $7,5kHz$ ,  $15kHz$  y  $30kHz$ . Un sistema de auto calibración, a través de la aplicación de impedancias reales e imaginarias permite la cancelación de las impedancias parásitas. Con este equipo se reconstruyeron imágenes mapeando la conductividad absoluta, siendo los resultados no tan buenos comparados con los equipos que reconstruyen imágenes diferenciales.

Entre 1990 y 1992 se desarrolla el prototipo OXBACT 2 [76] en la Oxford Brookes University, un sistema de 32 electrodos para el método de corrientes adaptativas, con la particularidad de que utilizaba fuentes de voltaje y no de corriente. Contaba con un sistema de muestreo no uniforme para minimizar el ruido de cuantización. El hecho de contar con fuentes de voltaje, lo cual no permite controlar correctamente la corriente, previno de utilizar este equipo in vivo. Para el desarrollo de OXBACT 3 en 1996 [76] se cambia a fuentes de corriente y se aumenta a 64 electrodos. Se sigue utilizando el sistema de corrientes adaptativas.

## Capítulo 1. Introducción

A partir de comienzos de la década del 2000 y hasta ahora se ha realizado definitivamente la transición de los sistemas analógicos a los digitales, siendo las tecnologías más adoptadas las *Field Programmable Gate Array* (FPGA) [133] [132] [135] [131] [71] [47] y los procesadores de señales digitales (DSPs) [52] [57] [100] [61] [121] [119] [118]. Se destacan en estos años los desarrollos de la University College of London y de la Kyung Hee University de Corea del Sur, cuyos equipos UCL mk3.5 y KHU mk2.5, respectivamente, utilizan DSPs para el procesamiento de los datos. Estos equipos “modernos” permiten mejorar la velocidad de adquisición de datos, pero no mejoran los problemas inherentes de la EIT. esto quiere decir que permiten realizar equipos mejores a costo razonable y tamaños pequeños, pero no soluciona los problemas relativos, por ejemplo, al movimiento de los electrodos, o la baja resolución debido al limitado número de medidas tomadas. Para esto último es que se han desarrollado equipos con gran cantidad de electrodos [121]. A partir de 2000 comienza la construcción del primer prototipo en el núcleo de ingeniería biomédica, bajo el nombre IMPETOM, el cual es implementado mediante sistemas analógicos.

### 1.6. Historia de las técnicas de reconstrucción

En lo que se refiere a lo puramente matemático, no podemos empezar sin nombrar el trabajo de Calderón en 1980 [27] quien demostró la existencia y unicidad de la solución del problema inverso en ciertos sub espacios. Fundamental para el futuro desarrollo del estudio matemático del tema fue lo publicado por Murai en 1985 [89], el cual utiliza el método de elementos finitos y el análisis de la descomposición en valores singulares (SVD) de la matriz de reconstrucción, esto da pie a todos los métodos basados en regularización. En 1987 Yorkey y Webster [130] comparan varios métodos de reconstrucción, llegando a la conclusión de que el de Newton-Raphson es el mejor. También en 1987 comienza a trabajar en la parte matemática del problema un grupo en la Oxford Brookes University [20] donde Breckon Lionheart y Pidcok lideran la investigación con el propósito de aplicar EIT a la detección de hemorragias cerebrales en recién nacidos. En 1990 Breckon Lionheart presenta su tesis de doctorado [19] donde también utiliza un enfoque con SVD para demostrar el mal condicionamiento del problema. También en 1990 Newell e Isaacson presentan el algoritmo NOSER [31], que será ampliamente utilizada hasta estos días aunque en esa publicación las reconstrucciones realizadas eran de baja calidad.

En la década del 90 se lograron varios resultados relativos a la unicidad y existencia de la solución al problema. Nuevamente Isaacson, junto a Somersalo y Cheney en 1992 [110] probaron que la solución al problema directo existe y es única para el caso de dos dimensiones, utilizando el modelo del electrodo completo, que toma en cuenta las impedancias de contacto. En 1993 Isakov [67] por un lado y Sylvester y Uhlmann [115] por otro, probaron la existencia y unicidad para casos en tres dimensiones con bordes simples.

En 1997 Lionheart [98] investiga los resultados de unicidad par medios anisotrópicos y Vauhkonen [116] en su tesis de doctorado habla de la importancia de

## 1.7. Historia de las aplicaciones clínicas

la información *a priori* para la solución del problema, utilizando métodos probabilísticos y limitando los espacios donde se buscan las posibles distribuciones de conductividad.

El aumento del poder de procesamiento en los últimos años ha permitido evolucionar hacia la resolución del problema en tres dimensiones, una de las limitaciones más grandes en las primeras épocas [51] [98].

En el año 2000 comienza el estudio del problema de reconstrucción en el núcleo de ingeniería biomédica, donde se desarrolla el software IMPETOM I el cual utiliza los métodos de *backprojection* y Newton-Raphson.

Sobre principios de la década del 2000 y hasta el momento de publicación de esta tesis se destacan los trabajos de Borsic, Adler y Lionheart [101] [80] [79] [53] en la aplicación de diferentes métodos de reconstrucción y regularización, como Variación Total [18].

También se destaca el desarrollo de EIDORS (Electrical Impedance and Diffuse Optical Reconstruction Software) [6] por estos mismos autores a partir del 2001, una librería para Matlab y Octave para la resolución del problema directo e inverso en dos y tres dimensiones.

Sobre esta base de herramientas se basa el algoritmo de reconstrucción GREIT [3] optimizado para la reconstrucción de cortes tomográficos en sistemas de un anillo de 16 electodos.

## 1.7. Historia de las aplicaciones clínicas

La búsqueda de aplicaciones en el ámbito clínico ha sido variada. Holder, y su equipo en la University College of London ha explorado la posibilidad de analizar la actividad cerebral y detectar focos de epilepsia [64] [42], comenzando en 1987 y hasta la actualidad. También en la segunda mitad de la década del 80 se aplicó EIT para monitorear funciones gástricas, pulmonares, del corazón y la hipertermia [76] [58], pero la limitación de los equipos en sí hizo que los resultados no fueran buenos. Otra aplicación incluye la detección de cáncer de mama, ya que al tratarse de calcificaciones la conductividad es muy baja [131] [56]. También se han buscado aplicaciones en el área ginecológica [32], pero como se mencionó, el seguimiento de las funciones pulmonares es la aplicación más expandida, desde el comienzo y hasta el día de hoy.

En la actualidad hay varios grupos en universidades estudiando el tema y el número de publicaciones en el tema está creciendo [77], también han surgido unas pocas opciones comerciales [86] [114] [39] por lo que es predecible el arribo de esta técnica al uso clínico.

## 1.8. Historia IMPETOM

El núcleo de ingeniería biomédica de la Universidad de la República ha estudiado el problema y desarrollado soluciones desde el año 1996 [46] mediante proyectos de fin de grado. El primero fue IMPEMAT que consistió en un equipo para medir

## Capítulo 1. Introducción

la conductividad de un miembro. A partir de ahí se ha desarrollado IMPETOM (IMPEdance TOMography), un equipo de EIT para el seguimiento de las funciones y patologías pulmonares. Este equipo es de un anillo de 16 electrodos, inyecta corriente a una frecuencia de 50kHz, y reconstruye la imagen mediante dos métodos posibles, retroproyección y Gauss-Newton. Este desarrollo consistió en cuatro proyectos de estudiantes de grado: IMPETOM C [43] que desarrolló la circuitería para la inyección de corriente y medida de tensión, IMPETOM I [60] desarrolló un software para la reconstrucción de imágenes. Estos dos proyectos trabajaron en paralelo entre los años 2000 y 2002. El proyecto IMPETOM (2005) [54] siguió a los dos anteriores y estableció la comunicación entre ambos. En este punto se cuenta con el primer prototipo funcional de IMPETOM, con el que se pudieron realizar las primeras pruebas sobre fantasmas y voluntarios con resultados variados. El proyecto posterior a estos tres se denominó IMPETOM 48 (2007) [99] el cual utiliza tres hileras de 16 electrodos como método para tomar en cuenta la dispersión de la corriente en todo el tórax.

### 1.9. Finalidad de la tesis

El objetivo de esta tesis es el estudio del estado del arte de esta técnica, tanto en la parte de circuitería como de programas para la reconstrucción, de forma de restablecer y consolidar una línea de investigación en el NIB con la finalidad de poder llegar, en un futuro cercano, a un nuevo prototipo de tomógrafo apto para usarse en investigaciones clínicas. Se estudian las diferentes opciones para la circuitería, estableciendo un diseño que se adapta a los requerimientos del problema, tomando en cuenta el costo y dificultad de fabricación. Se comparan diferentes métodos de reconstrucción, utilizando bases de datos disponibles y las obtenidas con el primer prototipo de IMPETOM. De esta tesis se espera obtener un diseño completo para un nuevo prototipo funcional con características óptimas.

# Capítulo 2

## Métodos para la recolección de datos

### 2.1. Introducción

Para poder reconstruir una imagen de EIT es necesario contar con medidas de voltaje y corriente en la superficie, la forma de obtener estos datos no es única, existen varias alternativas, las cuales van a alterar la forma en que toma los datos el método de reconstrucción. A continuación se describen brevemente estas alternativas pensando siempre en un sistema para seguimiento de funciones pulmonares.

### 2.2. Inyección de voltaje vs. inyección de corriente

Como se mencionó anteriormente, un sistema de EIT puede inyectar corrientes y medir voltajes o imponer diferencias de potencial y medir corrientes. La primera opción es la más empleada en equipos para utilizar en el ámbito médico. Uno de los pocos equipos que utilizó la imposición de voltaje fue el OXBACT II [76]. La elección se basó en que, para asegurar que el valor de la corriente que se quería inyectar era efectivamente la que se estaba inyectando, la impedancia de salida del circuito debía ser muy alta, en el orden de los  $12M\Omega$ , y un error en la fase menor a  $1,27^\circ$  [76], lo cual era muy difícil de implementar en la época en que se diseñó el equipo. Los problemas de este tipo de sistemas son lo que luego llevaron a que el OXBACT II no pudiera ser utilizado para medidas in vivo. El equipo era adecuado para utilizar en fantomas, donde la impedancia de contacto de los electrodos es conocida y no es necesario limitar las corrientes inyectadas. Cuando el equipo se utiliza en pacientes, donde la impedancia de contacto no es conocida, y donde el valor de la corriente inyectada depende de la conductividad del cuerpo en estudio, es posible que esta corriente alcance valores dañinos para el paciente, por lo que este equipo no cumple con los requerimientos de precisión y seguridad.

En los equipos que se inyecta corriente, si bien la corriente va a variar dependiendo de la carga de la fuente, esta variación nunca va a ser tan grande como para incursionar en problemas de seguridad. Utilizando circuitos de medida de voltaje con alta impedancia de entrada la corriente que sale por los electrodos de medida

## Capítulo 2. Métodos para la recolección de datos

puede ser considerada nula, por lo que no hay un efecto debido a la impedancia de contacto de los electrodos.

### 2.3. Número de electrodos

La cantidad de electrodos que se coloca sobre el cuerpo va a influir en dos aspectos fundamentales: uno es el número de medidas que se podrán realizar, es decir, el número de datos con los que contaremos para la reconstrucción de la conductividad, y el otro es en el valor de los voltajes medidos.

Limitándonos a equipos para uso médico, el número de electrodos que se han utilizado varía de ocho a 128 [119] [121], con otros equipos de 16, 32 y 64 electrodos [108] [47] [56]. En el caso del seguimiento de funciones pulmonares, las cantidades más utilizadas son 16 y 32. Como dijimos, estos electrodos se colocan a la altura del esternón, rodeando el tórax, equidistantes. Existen equipos que en utilizan más de un anillo de electrodos, colocando ocho o 16 en cada uno [52], lo cual sirve para tomar en cuenta las corrientes que escapan del plano de inyección como se ve en la figura 2.1, o para lograr reconstrucciones en tres dimensiones. Cuantos más electrodos utilicemos, obtendremos más medidas de tensión para la reconstrucción de la imagen, lo que hace que la resolución espacial sea mayor. Sin embargo, cuando se aumenta la cantidad de electrodos, se introducen más fuentes de incertidumbre, ya que una de las mayores fuente de error en estos equipos se da por el movimiento y ruido que se puede dar en la interfaz piel-electrodo. Por otro lado, cuando se utiliza el método donde se mide la diferencia de tensión entre dos electrodos adyacentes (método de electrodos adyacentes), al estar los electrodos a menos distancia entre sí, estas diferencias de potencial serán menores, por lo que la incertidumbre de estas medidas crece.

En la actualidad, dada la capacidad computacional de los dispositivos, el modelado en tres dimensiones permite tomar en cuenta la dispersión de la corriente en otros planos sin necesidad de varios anillos de electrodos. El aumento de la resolución debido al mayor número de electrodos, para el caso del seguimiento de las funciones pulmonares, no representa una mejora significativa. Por otro lado, la disminución de la relación señal a ruido si va a causar dificultades en la reconstrucción.

Es por esto que en la actualidad los equipos se limitan a un anillo de 16 o 32 electrodos, incluidos los equipos comerciales como los de Draeger y Dixtal [114] [39].

### 2.4. Inyección de corriente

Como se mencionó en la introducción, existen dos escuelas diferentes para la inyección de corriente, aquella desarrollada por barber y brown [22], y la desarrollada por el Rensselaer y UCL [90] [64]. En la primera se utiliza una corriente constante inyectada por un par de electrodos, en la segunda un patrón de corrientes se inyecta por todos los electrodos al mismo tiempo. Este último método se denomina de corrientes óptimas o adaptativas.

## 2.4. Inyección de corriente

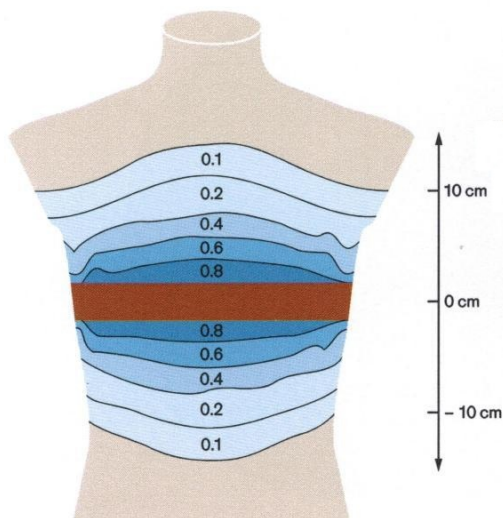


Figura 2.1: Contribución de la impedancia dependiendo de la distancia al plano donde se colocan los electrodos. Tomado de publicación publicitaria realizada por Draeger [114].

### Corrientes óptimas

El método de corrientes óptimas, junto al concepto de “distinguibilidad” fue introducido por Isaacson y otros [50], en la referencia se explica de forma clara en qué consiste. Básicamente lo que se busca es lograr que las diferencias de potencial medidas sean las mayores posibles respecto de las que se medirían en un cuerpo homogéneo, esto permite distinguir inhomogeneidades más pequeñas. Para realizar este método, Isaacson y otros inyectan corrientes por todos los electrodos simultáneamente, estas corrientes tienen un patrón trigonométrico, cuya amplitud depende de la posición y número del electrodo. Mediante un método iterativo se deduce cual es la corriente que genera esta mayor “distinguibilidad”, esta corriente depende de la distribución de conductividad, por lo que es diferente para cada caso.

Como se ve, para este sistema se inyectan corrientes simultáneamente por todos los electrodos de corriente, y se miden por todos lo de voltaje. La implementación de esto se puede realizar de dos formas, inyectando y midiendo por los mismos electrodos [90] [35], lo que introduce la incertidumbre de la caída de tensión en la interfaz electrodo-piel. La otra implementación utiliza electrodos diferentes para la inyección y para la medida [121], lo que duplica el número de electrodos del sistema con los problemas que esto trae aparejado.

Este método se ha utilizado para lograr imágenes absolutas o anatómicas, en lugar de imágenes diferenciales, pero los resultados no fueron los mejores [35].

Este método también requiere una circuitería más compleja que para el método de corrientes constantes, ya que se necesita una fuente para cada electrodo de corriente, además estas fuentes deben estar muy bien calibradas. La velocidad de adquisición es más baja debido al método iterativo necesario para encontrar la

## Capítulo 2. Métodos para la recolección de datos

corriente que genera la mayor “distinguibilidad”.

### Corrientes constantes

Cuando se utiliza el método de corrientes constantes se inyecta corriente utilizando solo dos electrodos. Una técnica que se ha utilizado en aplicaciones geofísicas, como la medida de la impedancia de los terrenos, es utilizar electrodos diferentes para la inyección de corriente y para la medida de tensión. Lo que se llama configuración tetrapolar, y es la más utilizada en los sistemas de corriente constante. Como se ha dicho, este método evita que la impedancia de contacto tenga influencia en la medida de tensión, si el circuito de medida tiene la suficiente impedancia de entrada. Todos los equipos que se basan en los primeros realizados en la Universidad de Sheffield utilizan el método tetrapolar.

Estos sistemas tienen una circuitería más simple que la de corrientes adaptativas, aunque requieren una fuente de corriente estable, cuya variación con la carga sea despreciable, de lo contrario se debe monitorear el valor de la corriente inyectada.

Dentro de la configuración tetrapolar hay varios métodos para la recolección de datos, el de electrodos adyacentes (figura 2.2a) utiliza dos electrodos adyacentes para la inyección de corriente y mide en el resto de los electrodos, también de a pares adyacentes.

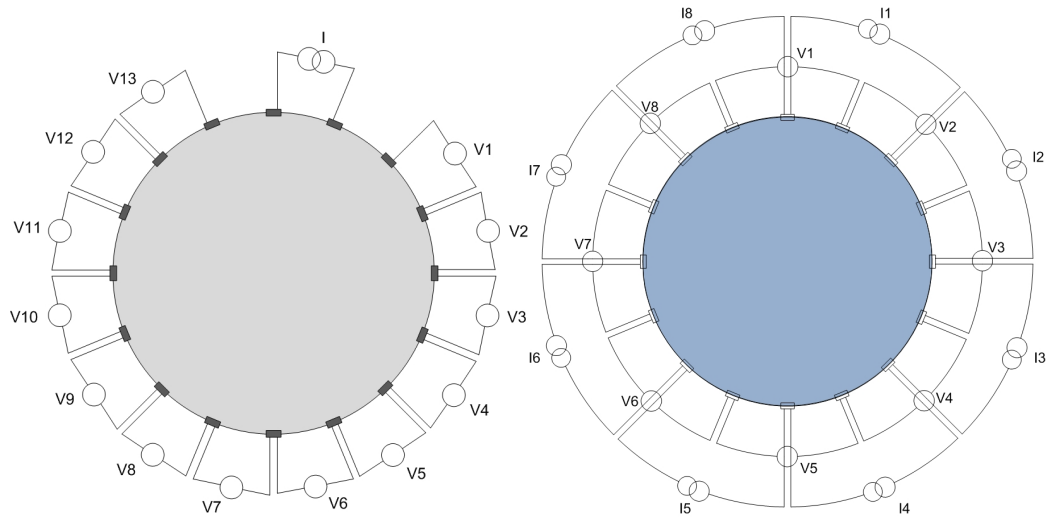
En el caso de un anillo, el método de electrodos adyacentes va rotando los electrodos por los que inyecta corriente, mientras mide diferencias de tensión en el resto como se muestra en la figura 2.3. Si el sistema tiene 16 electrodos, y se utilizan dos adyacentes para la inyección, nos quedarán catorce electrodos de los que podremos obtener 13 diferencias de tensión, luego se rota los electrodos por los que inyectamos, y obtenemos otras 13 medidas, así hasta dar toda la vuelta. Al final obtenemos  $16 \times 13 = 208$  medidas de tensión, y estas son las que se utilizan para la reconstrucción de la conductividad.

Otras configuraciones incluyen la polar [9] [76](figura 2.2c), entrelazados (figura 2.2b), donde se utiliza electrodos específicos para la inyección de corriente y otros específicos para la medida de tensión [43], y cuasi polar [126](figura 2.2d). Todas ellas con sus ventajas y desventajas respecto de la de electrodos adyacentes. De hecho, si bien la configuración adyacente es la más utilizada, esto es por herencia de los primeros equipos creados por Barber y Brown, pero en este caso, la mayor densidad de corriente se da en el borde, cerca de los electrodos que inyectan. En configuraciones polares y cuasi polares, la densidad de corriente en el centro del objeto es mayor, lo que genera una resolución espacial más homogénea. Sin embargo, con los métodos polares se pierde resolución [9], ya que el número de medidas es menor, (se miden solo doce voltajes por rotación). En términos de obtener medidas de tensión con valores más grandes, la configuración polar donde se mide diferencias de tensión en electrodos opuestos, es la que tiene esta característica.

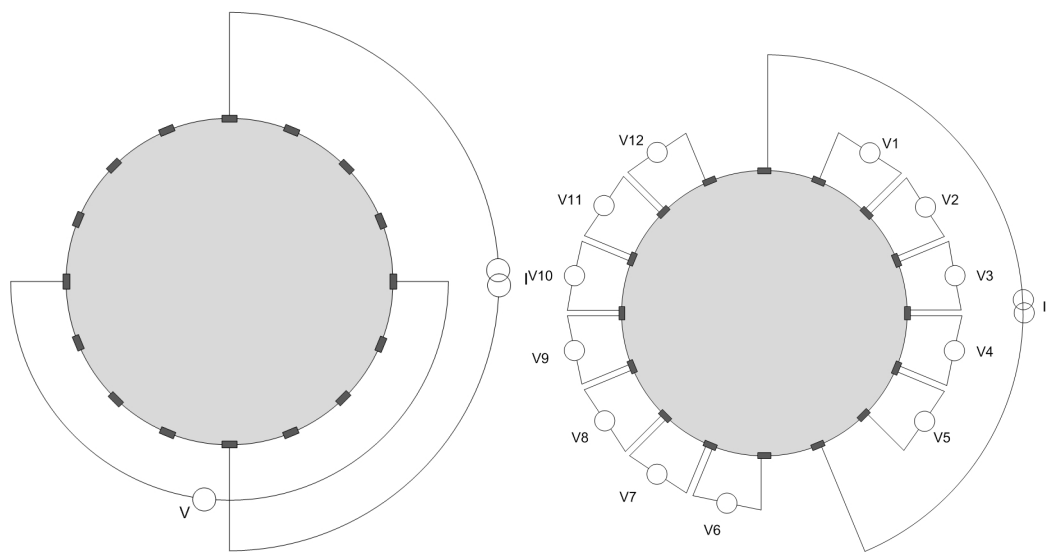
En los sistemas de corrientes constantes, es posible que esta corriente tenga una sola frecuencia (monofrecuencia) o sea la suma de señales de varias frecuencias (multifrecuencia).



## 2.4. Inyección de corriente



(a) Configuración de electrodos adyacente (b) Configuración de electrodos entrelazada



(c) Configuración de electrodos polar (d) Configuración de electrodos cuasi-polar

Figura 2.2: Diferentes configuraciones de electrodos para un sistema de EIT para seguimiento de funciones pulmonares

## Capítulo 2. Métodos para la recolección de datos

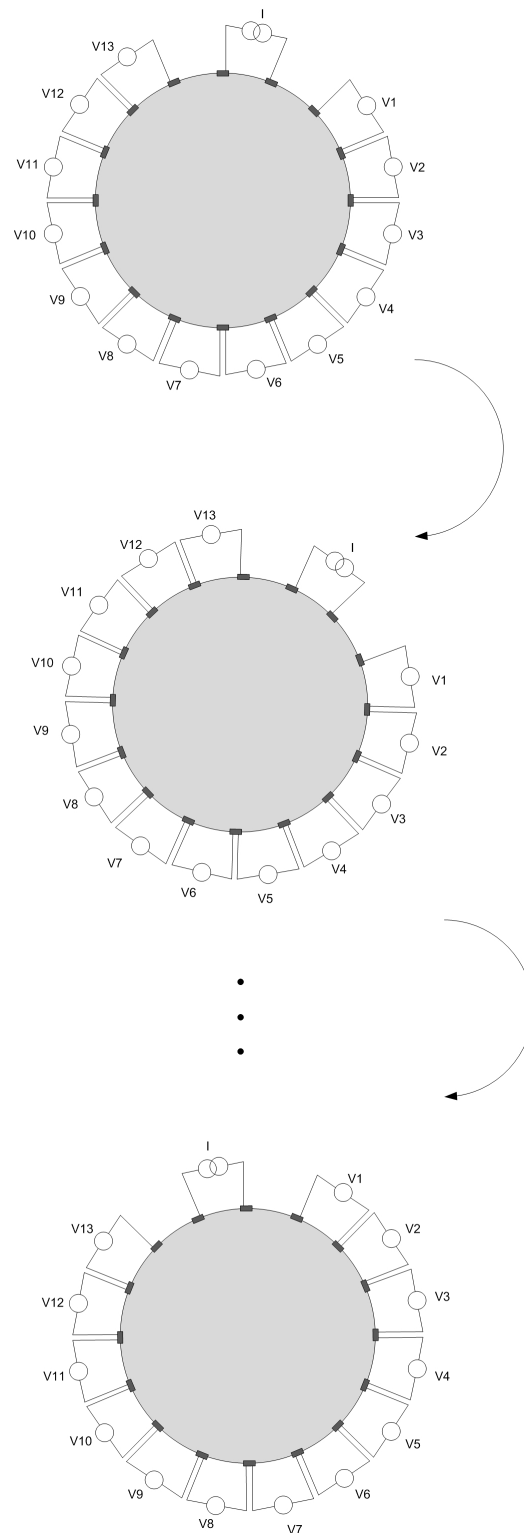


Figura 2.3: Método de electrodos adyacentes, rotación de los electrodos de inyección de corrientes, dando toda la vuelta al tórax para obtener las medidas.

### Multifrecuencia

Algunos equipos inyectan una corriente con componentes en varias frecuencias [92] [119] [121], esto puede tener varios objetivos: el primero es mapear la variación de la impedancia en función de la frecuencia, esto permitiría obtener imágenes anatómicas de los tejidos. Métodos de este estilo son el llamado quasi-static imaging (QSI) que justamente trata de mostrar estructuras, aunque la conductividad de estas no varíe en el tiempo. Otro método es el parametric spectroscopy imaging (PSI), que trata de obtener parámetros para modelar matemáticamente la variación de la impedancia con la frecuencia [124]. Otro puede ser realizar una variación del método de corrientes óptimas y determinar a qué frecuencia es que se obtienen las mayores diferencias de potencial.

Como estos sistemas hacen uso de las variaciones de la impedancia con la frecuencia, deben ser capaces de medir tanto la parte real como la imaginaria. Al tener que abarcar un rango amplio de frecuencias, la medición de la impedancia va a tener un error más grande a medida que se aumenta la frecuencia debido a las capacidades parásitas, que tendrán una impedancia mayor a mayor frecuencia.

Otra fuente de ruido importante en estos sistemas que deben aplicar frecuencias altas (en el orden de los Mhz), es el que introducen los multiplexores [43] debido a las capacidades a tierra a la entrada y salida, y la realimentación capacitiva entre entrada y salida de estos componentes. Para este tipo de equipos en lugar de utilizar una sola fuente y multiplexarla, lo más conveniente es construir tantas fuentes de corriente como cantidad de electrodos que se tenga.

Para el caso de sistemas monofrecuencia, si se elige una frecuencia relativamente baja (menor a  $100kHz$ ) el valor de las capacidades parásitas no va a influir en las medidas. Además por lo expresado en la sección 1.1, la impedancia va a ser casi puramente resistiva, por lo que es suficiente con medir solamente la parte real del voltaje.

Por supuesto que esta frecuencia no puede ser tan baja como para que comience a ser peligrosa para la persona.

## 2.5. Características nuevo IMPETOM

El objetivo de IMPETOM es lograr un equipo portátil, capaz de realizar el seguimiento tanto de funciones pulmonares como del tratamiento de lesiones como el edema de pulmón. Para este tipo de aplicaciones no se precisa una gran resolución, ya que no es necesario diferenciar pequeños objetos en el tórax, de todas formas, la EIT no es una técnica que se caracterice por la calidad y resolución de las imágenes.

La circuitería se debe hacer mucho más compleja para lograr mejoras pequeñas en la resolución espacial de la imagen. Es por esto que IMPETOM no busca maximizar la resolución espacial, sino lograr el mejor equipo posible dentro de una circuitería que no sea extremadamente compleja y grande.

Básicamente el nuevo IMPETOM tendrá las mismas características que el anterior.

## Capítulo 2. Métodos para la recolección de datos

Por lo expuesto anteriormente y lo que se encuentra en publicaciones, es razonable inclinarse por realizar un sistema que inyecte corrientes y mida voltajes.

El número de electrodos es un tema un poco más delicado, así como el número de anillos con electrodos que se utilizará. El anterior IMPETOM utilizaba 16 electrodos en un solo anillo, esto es lo mismo que varios otros equipos desarrollados por grupos de investigación, así como por el equipo comercial de Drager. 16 electrodos parece la mínima cantidad necesaria para obtener imágenes que permitan realizar las tareas que nosotros queremos. El aumento de electrodos, por ejemplo a 32 o 64 no mejora la calidad de la reconstrucción lo suficiente como para justificar el aumento en la circuitería.

El uso de varios anillos tampoco se justifica, ya que mediante el uso de modelos en tres dimensiones para la reconstrucción es posible tener en cuenta la dispersión de la corriente fuera del plano de inyección.

Básicamente por las mismas razones de simplicidad y eficiencia es que se define por el método de corrientes constantes, monofrecuencia.

El sistema debe ser flexible como para cambiar el patrón de inyección de corrientes, en principio será el método de electrodos adyacentes, por ser el más conocido, estudiado y aplicado, pero es interesante poder dejar previsto en el sistema la capacidad de variar este patrón, hacia uno ploar o cuasi polar.

Por lo que como se dijo antes, el sistema de recolección generará un vector de 208 medidas que se utilizará para la reconstrucción de la imagen.

Se resumen las características de IMPETOM:

- 16 electrodos
- Medida tetrapolar
- 1 anillo
- Monofrecuencia
- Patrón de electrodos adyacentes
- Medición de la parte real del voltaje

## Capítulo 3

# Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

### 3.1. Componentes de un sistema de Tomografía por Impedancia

En esta sección describimos los diferentes bloques que componen un equipo de EIT, pensando en las características de IMPETOM descritas anteriormente.

Un equipo de EIT va a tener los siguientes bloques:

- Generador de onda
- Fuente de corrientes
- Voltímetro síncrono
- Multiplexores
- Módulo de control

La figura 3.1 muestra los bloques de un tomógrafo EIT típico de corrientes constantes.

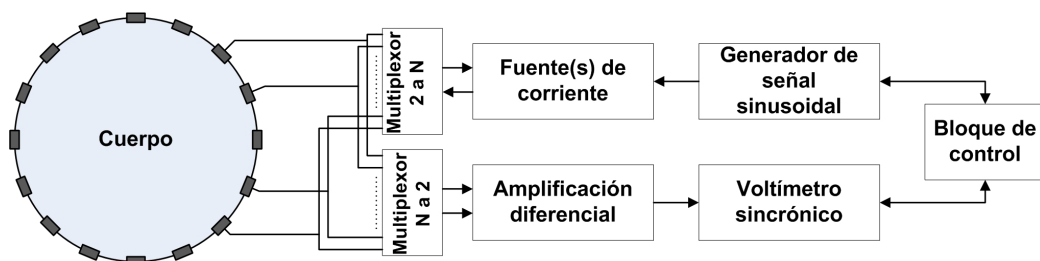


Figura 3.1: Estructura de bloques de un sistema de EIT básico con inyección de corriente diferencial. Cuenta con 16 electrodos fijados en la superficie del tórax.

### Capítulo 3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

El caso mostrado en la figura 3.1 es para un equipo que cuenta con menos fuentes de corriente que electrodos, por lo que es necesario multiplexar para ir rotando la inyección. Lo mismo es el caso con los canales de medida, por lo que cuando se comienza a inyectar corriente por un par de electrodos, ésta se debe mantener hasta que se complete la medida de voltaje en todos los otros pares. Este tiempo incluye el tiempo de multiplexación, lo que hace que sea un sistema de recolección de datos más lento que si contáramos con canales de medida en paralelo, donde nos evitamos la multiplexación y medimos al mismo tiempo en todos los electrodos. En el caso de la fuente de corriente, la multiplexación no afecta notablemente el tiempo de medida.

El generador de señal puede generar una sola senoide o varias a diferente frecuencias. Esta señal, la cual es de voltaje, alimenta la mencionada fuente que no es otra cosa que un conversor de voltaje a corriente. Esta fuente debe inyectar corriente por un electrodo e inyectar una corriente opuesta por otro, de forma de dar el camino de retorno.

La corriente se inyecta al cuerpo mediante electrodos, en la mayoría de los equipos probados en pacientes, estos son electrodos de Ag/AgCl como los utilizados en electrocardiograma, mientras que en las pruebas en fantasmas se pueden utilizar contactos metálicos directamente.

Para la medida de voltaje se utiliza una etapa de amplificación que puede ser diferencial o referenciada a tierra, esta etapa incluye un filtrado pasabajos para eliminar ruido blanco, y otros filtros específicos, como para eliminar el ruido de la red. Un filtro para eliminar la continua también puede ser utilizado.

El voltímetro sincrónico toma la señal de voltaje y la demodula para obtener el valor real y de ser el caso, el imaginario. Para lograr esto debe estar sincronizado con el generador de señal, de forma de que el momento de la medida sea el correcto.

El bloque de control es el encargado de coordinar esta sincronización, además de manejar los multiplexores y todos los tiempos del sistema. Se va a encargarse de guardar las medidas y pasarlas al sistema donde se encuentra el algoritmo de reconstrucción.

A continuación se analiza más en detalle los diferentes bloques.

## 3.2. Generador de onda

El generador de onda forma la señal de referencia sinusoidal de una o varias frecuencias que utiliza la fuente de corriente. Además da la señal de sincronismo que utiliza el demodulador.

Para medir la calidad de la señal se debe analizar la pureza espectral, esta deberá ser, en el caso de una señal sinusoidal, un pico en la frecuencia deseada, sin componentes en otras frecuencias.

Existen soluciones analógicas y digitales, entre las analógicas se encuentran los generadores de funciones como el integrado MAX038 (Maxim). Las más utilizadas en desarrollos recientes, como por ejemplo el circuito descrito por Saulnier en [105], son las soluciones digitales, con técnicas de sintetización digital. Estas soluciones

### 3.2. Generador de onda

consisten en alimentar un conversor digital-analógico (DAC) con muestras almacenadas en una memoria. Ésta puede ser una memoria programable de solo lectura (PROM) que tiene almacenada los valores de la sinusoidal o parte de ella.

La pureza espectral de la señal analógica va a estar dada por el DAC, el ruido en la fase será el que introduzca el reloj de referencia. El principal problema de este tipo de sistemas es que la frecuencia de la salida puede ser variada solo si se cambia la frecuencia del reloj o se reprograma la memoria, lo que lo vuelve poco flexible.

Otra forma es a través de un sintetizador digital directo (DDS) [24] [7]. Esta técnica también involucra una memoria ROM, pero el direccionamiento de esta memoria es mediante un acumulador de fase, al cual se le ingresa el incremento de fase deseado. Esto permite que mediante el control de estos incrementos de fase se pueda variar la frecuencia generada. Un esquema del funcionamiento de este tipo de circuito se muestra en la figura 3.2.

La clave está en el acumulador de fase, el cual se actualiza cada ciclo de reloj. Cada vez que se actualiza se le suma al número que tiene, el número guardado en el registro de fase (incremento de fase). La salida truncada del acumulador de fase se utiliza para direccionar una tabla con una función seno. Cada dirección en la tabla corresponde a un valor de fase de la onda entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ . La tabla contiene el valor de la amplitud de la onda para un ciclo. La tabla mapea la información de fase que le llega del acumulador a una amplitud, en código binario, que es ingresada en el DAC.

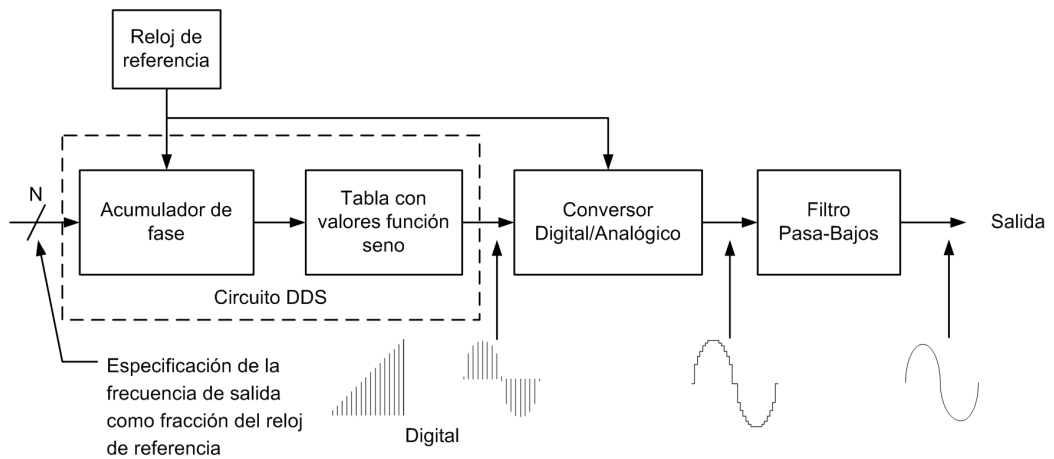


Figura 3.2: Esquema de funcionamiento para la generación de onda sinusoidal de un DDS (sintetizador digital directo).

Si el acumulador de fase tiene  $2^n$  valores, con  $n$  igual a 32, y el registro de fase tiene el valor 1, entonces el acumulador pasa por todas las  $2^{32}$  salidas posibles antes de comenzar nuevamente. La onda de salida va a tener una frecuencia igual a la frecuencia del reloj dividida  $2^{32}$ , si el valor en el registro es 2, entonces se recorre el acumulador al doble de velocidad, y la frecuencia de salida es el doble.

### Capítulo 3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

En los DDS actuales  $n$  va de 24 a 32, esto significa que hay  $2^n$  posibles fases,  $M$  es el valor que se incrementa el acumulador en cada ciclo de reloj, si la frecuencia del reloj es  $f_c$ , entonces la frecuencia de salida va a ser igual a:

$$f_o = M \times f_c / 2^n \quad (3.1)$$

Esta es la ecuación que se denomina de sintonización.

Esto significaría que la resolución del sistema es  $f_c/2^n$ . Para  $n = 32$ , la resolución es mayor que una parte en 4 mil millones. En realidad, no todos los bits del acumulador se pasan a la tabla, sino que son truncados. Generalmente se pasan los 13 o 15 bits más significativos, esto reduce el tamaño de la tabla sin afectar la resolución, esta truncación solo agrega un pequeño ruido.

La resolución del DAC es típicamente 2 a 4 bits menos que el ancho de palabra de la tabla. El DAC va a agregar ruido de cuantización siempre, aunque en sistemas con DACs de 15 bits, este ruido está por debajo de los  $90dB$  de la frecuencia de salida.

La programación del DDS se realiza mediante palabras de comando que se envían median protocolo serie.

Una limitación para la salida se da debido al criterio de Nyquist, que dice que la frecuencia del reloj, o de muestreo, debe ser al menos el doble que la de la salida. En la práctica, esta restricción limita la salida a  $1/3$  de la frecuencia de reloj aproximadamente.

Un filtro *antialiasing* tiene que ir después del DAC, para quitar las frecuencias imagen ( $f_c - f_o$ ).

La respuesta en amplitud del dac, antes del filtro, sigue una función  $\sin(x)/x$ , con ceros en la frecuencia del reloj y sus múltiplos, la ecuación es la siguiente:

$$A = \frac{\sin(\pi f_o / f_c)}{\pi f_o / f_c} \quad (3.2)$$

La caída es porque la salida del DAC no es una serie de impulsos sin ancho, sino que son pulsos rectangulares. La amplitud del  $\sin(x)/x$  cae  $3,92dB$  a la frecuencia de Nyquist ( $1/2$  de la frecuencia del DAC)

Se podría ajustar el filtro *antialiasing* para compensar por la caída debido al  $\sin(x)/x$ , para que la respuesta en frecuencia sea plana hasta la máxima frecuencia de salida del DAC (generalmente  $1/3$  de la velocidad de reloj)

Otros armónicos también van a aparecer y no van a poder quitarse mediante el filtro *antialiasing*, por ejemplo,  $(f_c - 2f_o)$  y  $(f_c - 3f_o)$ , otros más altos también caen dentro de la banda entre 0 y  $f_c/2$ .

Un problema es que se deben truncar los valores de direccionamiento de la ROM, lo que produce un corrimiento en la fase que produce espúreos en la señal resultante [7]. Para evitar este corrimiento se deben elegir incrementos de fases que resulten en valores posibles de entradas en la ROM. Otra forma de evitar este corrimiento sin tener que limitar las frecuencias que manejamos es utilizando *dithering*, de forma de colocar un factor aleatorio entre el error en la fase y la parte del ciclo de la onda donde se produce.



### 3.2. Generador de onda

Tomando en cuenta solo el error de cuantización que se da en el conversor digital-analógico, esta se puede expresar en función de diferentes factores:

$$v_{ec} = \frac{A}{2^b \sqrt{12} f_s} \quad (3.3)$$

donde  $A$  es la amplitud pico a pico de la señal,  $b$  es el número de bits de resolución del DAC, y  $f_s$  es la frecuencia de muestreo. Asumiendo que el error de cuantización es blanco la ecuación anterior es una densidad espectral. La figura 3.3 muestra el error en función de la frecuencia de muestreo y los bits de resolución del DAC, tanto aumentando el número de bits como la frecuencia de muestreo, se reduce el ruido.

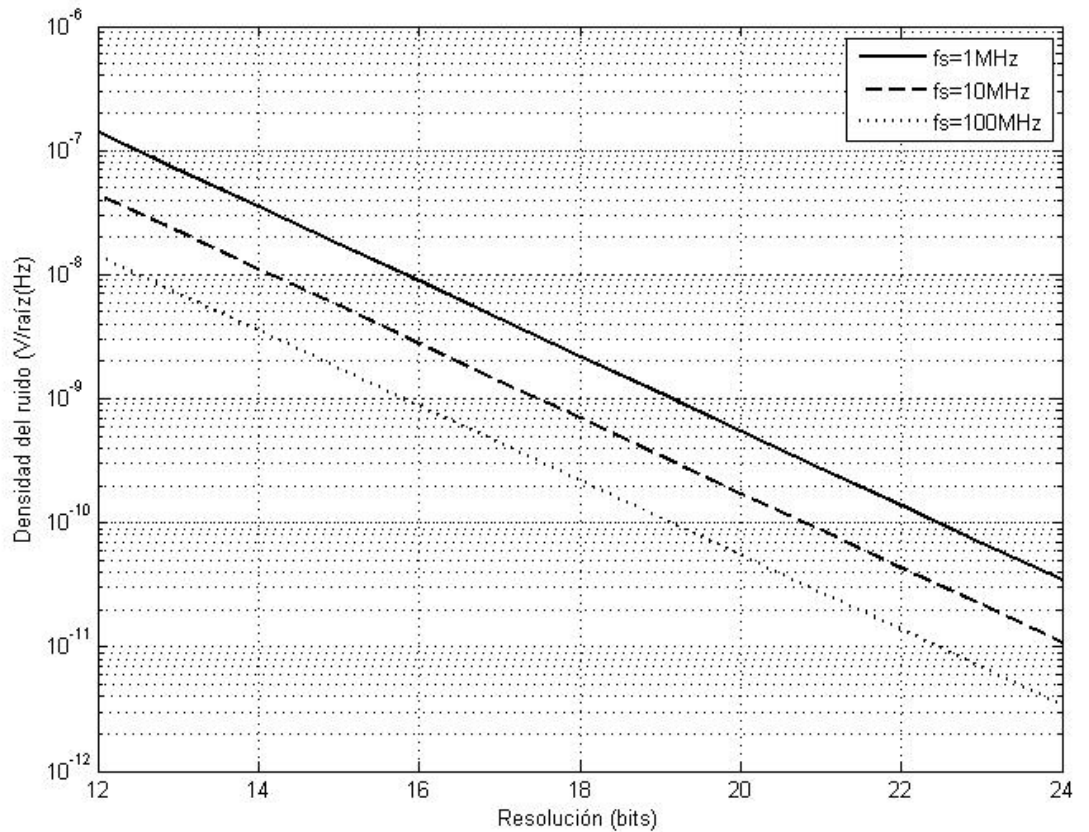


Figura 3.3: Densidad espectral del ruido en un DAC en función de la frecuencia de muestreo y los bits de resolución para un valor de  $A = 2$ .

Un valor típico para amplificadores de bajo ruido está en el rango de 1 a  $10\text{nV}/\sqrt{\text{Hz}}$

El rendimiento de este bloque es medido en términos de la pureza espectral y de su relación señal a ruido.

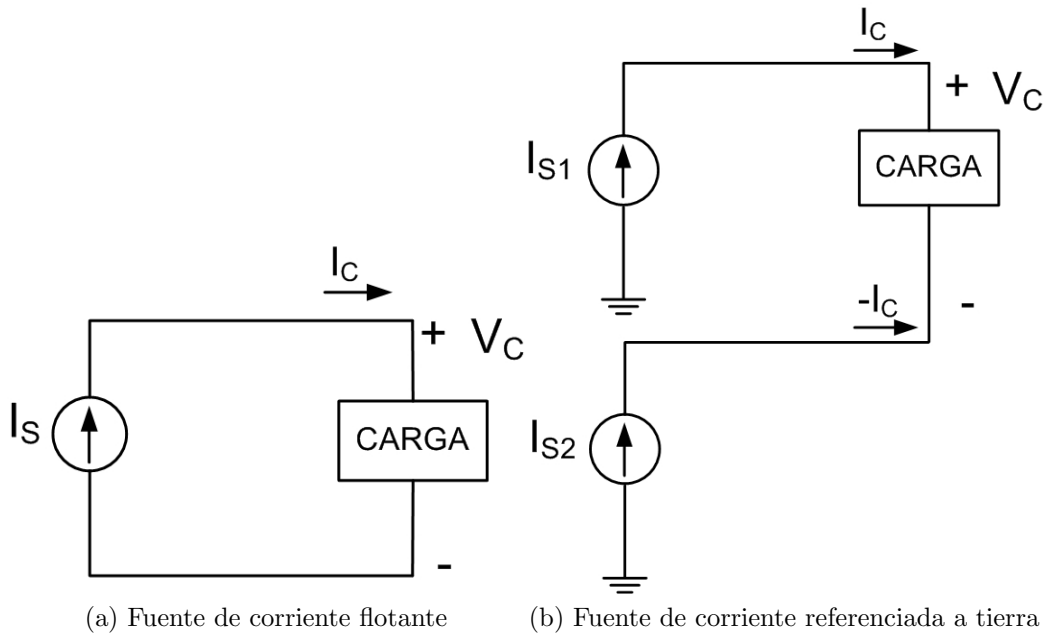


Figura 3.4: Fuentes de corriente flotantes y referenciadas a tierra

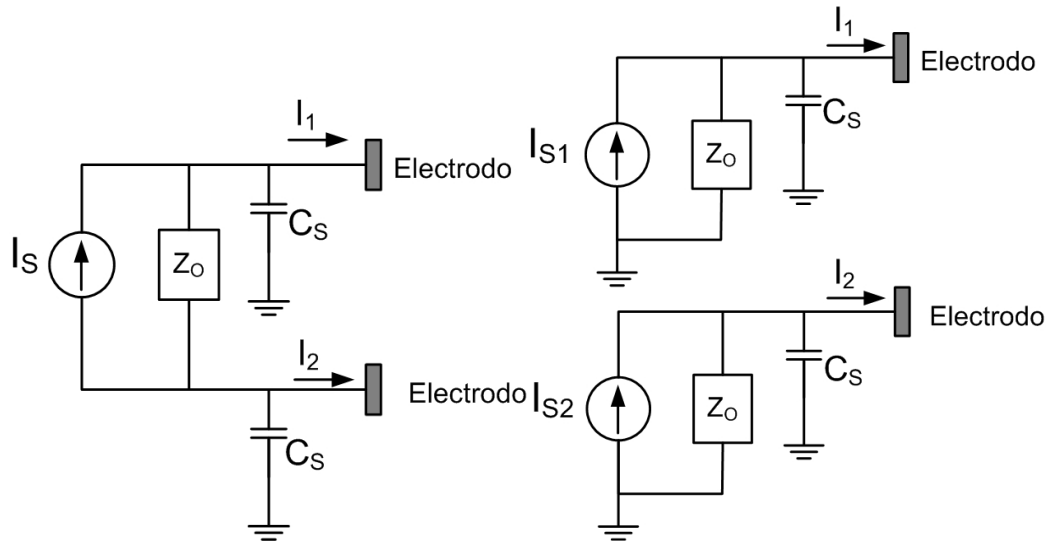
### 3.3. Fuente de corriente

La fuente de corriente toma la señal de voltaje del generador de onda y la convierte en señal de corriente que será inyectada en el cuerpo mediante electrodos. Se pueden utilizar fuentes con referencia de tierra 3.4b o fuentes flotantes 3.4a. Las primeras son ideales para equipos con múltiples fuentes, mientras que las segundas son más utilizadas en equipos con una sola fuente [105]. En este último caso, es necesario que la corriente que ingresa por un electrodo salga del cuerpo por otro, lo que se puede hacer con una fuente flotante, en donde la corriente pasa por el cuerpo sin tener una referencia a tierra. En el caso de utilizar fuentes de corriente con referencia de tierra, se deben utilizar dos fuentes que generen corrientes cuya suma sea cero.

El problema que más afecta el rendimiento de las fuentes de corriente es la impedancia de salida  $Z_o$  (figura 3.5). En una fuente ideal esta impedancia tendría un valor infinito, lo que permite que la corriente entregada a la carga sea efectivamente la que se está generando. En la realidad esta impedancia nunca es infinita, por lo que la corriente que se entrega a la carga no es exactamente la generada, y depende de la impedancia de la carga, por lo que es un factor de error que debe ser considerado al momento del diseño de la fuente.

A la impedancia de salida, que se puede modelar como una resistencia  $R_o$  y una capacidad  $C_o$  en paralelo, se debe sumar el efecto de las capacidades parásitas (figura 3.5) que van a tierra, estas también van a producir un error entre la corriente inyectada al cuerpo y la generada.

Otro problema producido por las capacidades parásitas es que van a hacer que



(a) Fuente de corriente flotante con no idealidades  
 (b) Fuente de corriente referenciada a tierra con no idealidades

Figura 3.5: Fuentes de corriente flotantes y referenciadas a tierra tomando en cuenta las no idealidades en la impedancia de salida

la corriente inyectada depende de la tensión entre el electrodo correspondiente y tierra, lo que puede hacer que las dos corrientes no sean iguales y opuestas, generando una especie de corriente de modo común que tiene el valor de la suma de las dos corrientes. Para conducir esta corriente a tierra se debe utilizar un electrodo extra.

Es deseable que la fuente entregue una corriente con cierta exactitud, esto es, que se mantenga limitada en una banda especificada para todo el rango de cargas posibles a las frecuencias de trabajo. Esto lleva a requerimientos para la impedancia de salida y el rango de voltajes donde la fuente debe funcionar adecuadamente.

Lo último significa que la fuente debe seguir funcionando adecuadamente para cuando la mayor corriente es inyectada en la mayor carga posible. En el caso de tejidos, las impedancias de carga se pueden decir que se encuentran en el rango entre  $100\Omega$  y  $1k\Omega$ , dependiendo de la frecuencia, por lo que para una corriente de pico inyectada de  $\sqrt{2} \times 5mA$ , la máxima tensión que debe manejar la fuente es de aproximadamente  $7V$ .

Para conocer los requerimientos que le debemos dar a la impedancia de salida, debemos saber en qué rango queremos limitar la corriente inyectada. Una buena opción es querer que la corriente se encuentre dentro de  $b$  bits de precisión, por lo que la variación debe ser menor al bit menos significativo, esto es  $1/2^b$ .

El error en la corriente va a ser la corriente que se va por la impedancia de salida,  $I_{Z_o}$ , esta es:

$$I_{Z_o} = \frac{Z_{lmax}}{Z_o + Z_{lmax}} I_s \quad (3.4)$$

### Capítulo 3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

Donde  $Z_{lmax}$  es la máxima carga y  $Z_o$  es la impedancia de salida de la fuente.

Para que  $I_L$  esté dentro del rango establecido, es decir que el error sea menor a  $1/2^b$  tenemos que:

$$\frac{Z_{lmax}}{Z_o + Z_{lmax}} < \frac{1}{2^b} \rightarrow Z_{lmax}2^b < Z_o + Z_{lmax} \rightarrow Z_o > Z_{lmax}(2^b - 1) \quad (3.5)$$

Por ejemplo, para un equipo que requiere 16 bits de precisión, y una carga máxima de  $1k\Omega$ , la impedancia de salida debe ser mayor a  $66M\Omega$ .

Si en lugar de verlo por el lado de la exactitud se ve por el lado de la precisión, algo que para equipos de EIT es razonable, debemos pedir que la variación de la corriente inyectada para la mínima y la máxima carga posible se mantenga dentro de un rango especificado. Para una carga máxima y mínima  $Z_{lmax}$  y  $Z_{lmin}$ , la precisión queda dada por:

$$I_{lmax} - I_{lmin} = \left( \frac{Z_o}{Z_o + Z_{lmin}} - \frac{Z_o}{Z_o + Z_{lmax}} \right) I_s \quad (3.6)$$

y la mínima impedancia de salida para obtener  $b$  bit de resolución queda dada por:

$$\frac{I_{lmax} - I_{lmin}}{I_s} \leq \frac{1}{2^b} \rightarrow \frac{Z_o}{Z_o + Z_{lmin}} - \frac{Z_o}{Z_o + Z_{lmax}} \leq \frac{1}{2^b}. \quad (3.7)$$

La figura 3.6 muestra los valores de debe alcanzar la impedancia de salida para lograr la resolución deseada, para el caso en que la impedancia varía entre  $100\Omega$  y  $1000\Omega$ , para resoluciones entre 12 y 24 bits.

Llegar a estos valores de impedancia de salida es muy difícil, una forma de no depender tanto de la precisión y exactitud es medir la corriente que se está inyectando mediante una resistencia en serie con la carga, ésta debe ser lo menor posible.

Una forma de reducir el efecto de las capacidades parásitas es mediante la utilización de un seguidor de voltaje hacia la malla del cable, como se verá más adelante. Otras técnicas tratan de cancelar esta capacidad mediante métodos activos o inductancias.

Una forma alternativa de evitar parte del efecto de estas capacidades es midiendo solamente la parte real de la carga, esto es particularmente efectivo si la carga es puramente resistiva o casi resistiva, como estamos asumiendo nosotros.

Si pensamos en el error relativo, como la parte real del voltaje es mucho mayor que la imaginaria, el error debido a las capacidades parásitas va a afectar mucho más a la parte imaginaria del voltaje que a la parte real.

Las soluciones propuestas para la fuente de corriente son variadas, mayoritariamente utilizando amplificadores operacionales, las que proporcionan buena impedancia de salida a las frecuencias que se trabaja en EIT. La fuente puede incluir la aislación galvánica para seguridad del paciente, también puede incluir una resistencia de sensado para medir la corriente que se está inyectando al cuerpo.

### 3.3. Fuente de corriente

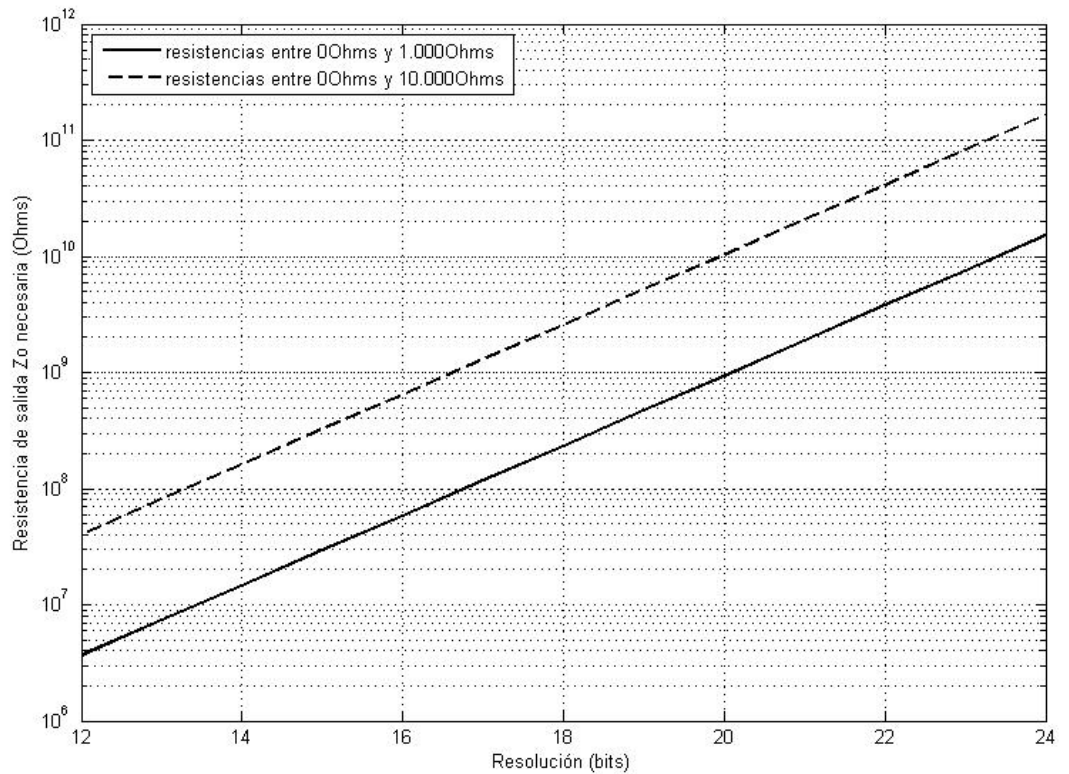


Figura 3.6: Impedancia de salida necesaria para lograr una resolución específica, dependiendo de la impedancia de carga.

#### Amplificador de transconductancia variable

Los amplificadores de transconductancia variables (OTAs) son circuitos integrados que permiten la conversión de voltaje a corriente. Los OTAs pueden ser utilizados en fuentes referenciadas a tierra. Estos circuitos utilizan un amplificador operacional que alimenta una resistencia fija, un espejo de corriente se utiliza para alimentar este operacional (figura 3.7). Si bien estos circuitos tienen la ventaja de ser simples y fácilmente configurables, la impedancia de salida no es tan alta como para asegurar un buen funcionamiento en el rango de cargas que va a manejar.

Bayford y otros [34] han estado trabajando en una fuente de corriente basadas en OTAs.

Una primera versión del circuito se ilustra en la figura 3.8, se utiliza una resistencia  $R_s$  para medir la corriente que va a la carga  $R_L$ , el voltaje por  $R_s$  se suma a la entrada  $V_{in}$  formando una realimentación negativa,  $r_o$  y  $c_o$  representan el modelo de la impedancia de salida, y  $G_m$  es la transconductancia.

Para baja frecuencia, la transferencia es:

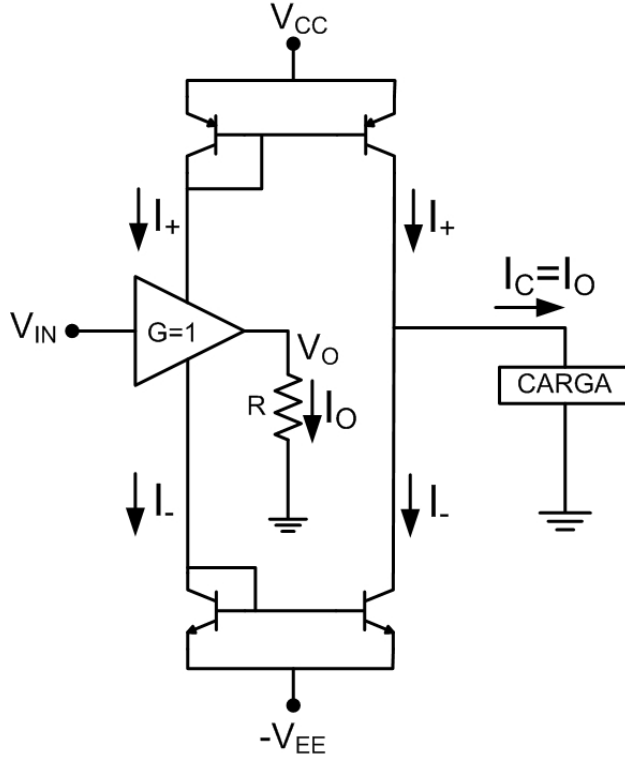


Figura 3.7: Fuente de corriente OTA.

$$\frac{I_L}{V_{in}} = \frac{G_m}{\frac{r_o + R_S + R_L}{r_o} + G_m R_S} \quad (3.8)$$

si  $r_o$  es mayor que  $R_S + R_L$ , y  $G_m R_S \gg 1$  entonces,  $I_L/V_m = 1/R_S$  y la resistencia de salida está dada por:

$$R_{out} = r_o + (G_m r_o + 1)R_S \quad (3.9)$$

Esto quiere decir que si se cumplen las dos condiciones mencionadas, la transconductancia se puede establecer mediante la resistencia  $R_S$ , independiente de la ganancia del OTA. Además la realimentación permite aumentar la resistencia de salida, siempre que el  $G_m$  sea grande. Dado esto, es posible llegar a resistencias de salida del orden de los  $M\Omega$ .

Este circuito tiene el problema de que al utilizar una resistencia para realimentar la corriente, esta genera una caída de tensión que desbalancea la tensión por la carga. El voltaje sobre la resistencia de carga es:

$$V_{R_L(arriba)} = V_{out(OTA)+} \quad (3.10)$$

y debajo

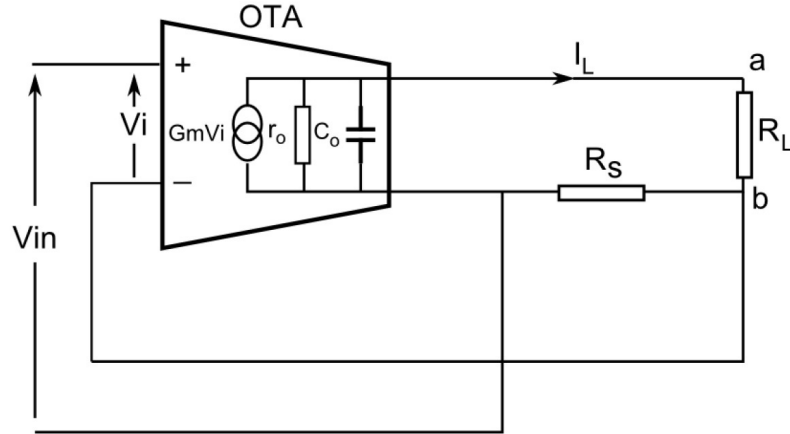


Figura 3.8: Fuente de corriente OTA propuesta por Bayford y otros. Tomado de [34].

$$V_{R_L(\text{abajo})} = V_{out(OTA)-} + I_L R_s \quad (3.11)$$

por lo que se crea un voltaje de modo común:

$$\frac{V_{R_L(\text{arriba})} + V_{R_L(\text{abajo})}}{2} = \frac{I_L R_s}{2} \quad (3.12)$$

por ejemplo, para una corriente de  $1\text{mA}$  y una  $R_s$  de  $1\text{k}\Omega$ , el voltaje de modo común va a ser de  $0,5\text{V}$ .

Además, la realimentación hace que sea necesario que la tensión de entrada sea flotante, lo que no es práctico a menos que se usen transformadores.

Como solución a estos problemas diseñaron un segundo circuito (figura 3.9), utilizan un par de OTAs balanceados, que funcionan en forma diferencial para minimizar los errores de modo común, y para evitar el uso de fuentes flotantes, los buffers de tensión pasan la tensión de la realimentación de flotante a referenciada a tierra.

### Fuente de corriente de Howland

Cuando se utilizan operacionales, existen muchas configuraciones posibles de fuentes de corrientes, algunas utilizan un operacional, mientras que otras utilizan más de uno. Las fuentes de Howland son ampliamente utilizadas (figura 3.10), en su versión más simple utiliza un solo operacional, y ofrece un buen rendimiento. En este caso, la impedancia de salida depende de las características del operacional y del apareamiento de las resistencias, en el caso en que el operacional sea ideal, y el apareamiento perfecto, la impedancia de salida sería infinita.

La fuente de corriente de Howland consiste en un amplificador funcionando como inversor (con  $R_1$  y  $R_2$ ) y una realimentación positiva.

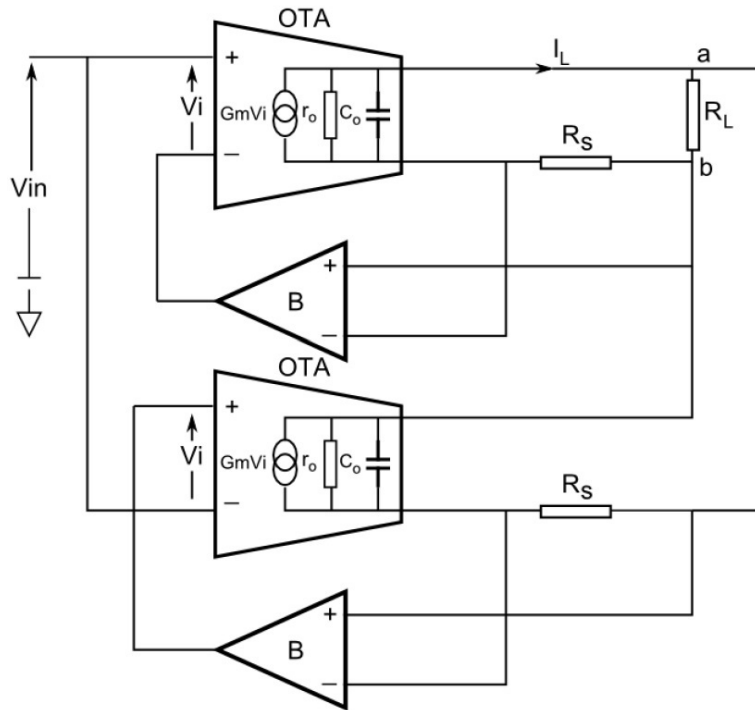


Figura 3.9: Segunda fuente de corriente OTA propuesta por Bayford y otros. Tomado de [34].

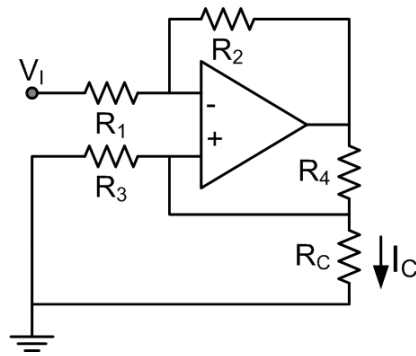


Figura 3.10: Fuente de corriente configuración tipo Howland.

Si consideramos que las resistencias cumplen con la siguiente relación:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} = k, \quad (3.13)$$

resolviendo el circuito tenemos que:

$$\frac{V_{in} - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_o}{R_2} \rightarrow V^-(1 + k) = V_{in} + V_o k \rightarrow V^- = \frac{V_{in} + V_o k}{1 + k}. \quad (3.14)$$



### 3.3. Fuente de corriente

Por otro lado  $V^- = V^+$ , por lo que

$$\frac{V^-}{R_3} + I_L = \frac{V_o - V^-}{R_4} \rightarrow R_3 I_L = kV_o - V^-(k+1), \quad (3.15)$$

sustituyendo  $V^-$  por 3.14 tenemos

$$R_3 I_L = kV_o - \frac{(V_{in} + kV_o)(1+k)}{1+k} \rightarrow I_L = \frac{V_{in}}{R_3} \quad (3.16)$$

Como vemos, si se da la relación  $R_4/R_3 = R_2/R_1$  la corriente por la carga  $I_L = -V_{in}/R_3$  no depende del valor de esta, esto significa que la impedancia de salida es infinito.

Esta fuente es muy simple y capaz de proporcionar una buena impedancia de salida. Variando una sola de las resistencias se puede lograr la condición expresada anteriormente, lo que daría una impedancia de salida infinita, pero dadas las no idealidades del operacional, siempre va a existir una capacidad a tierra.

Cuando se agrega una resistencia más en la realimentación positiva se logra un mayor control de los valores de las resistencias, disminuyendo el efecto que tiene en la impedancia de salida el apareamiento de las resistencias. Esta configuración se llama fuente de Howland modificada y es la que se representa en la figura 3.11.

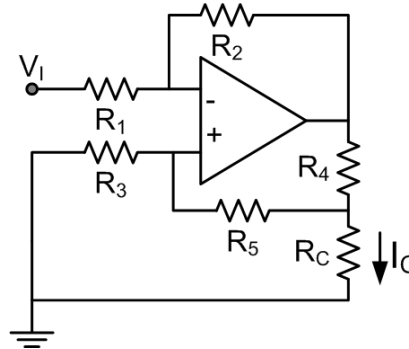


Figura 3.11: Fuente de corriente configuración tipo Howland modificada.

Para un amplificador ideal, la impedancia de salida es [66]:

$$R_{out} = \frac{R_1 R_4 (R_3 + R_5)}{R_2 R_3 - R_1 (R_5 + R_4)}, \quad (3.17)$$

por lo que la impedancia de salida depende del apareamiento de las resistencias. Una pequeña desviación ya reduce la resistencia de salida. Para obtener un buen rendimiento esta desviación debe ser menor al 0,1% [66]. Para una carga de  $1k\Omega$ , el desvío debe ser menor a 0,039% para obtener una resistencia de salida de  $64M\Omega$ . Incluso la desviación puede generar una resistencia de salida negativa [66]. Asumiendo que  $R_4$  es del orden de  $100\Omega$ , y  $R_5$  grande, del orden de  $k\Omega$ , y la ganancia del amplificador es grande, la corriente de salida es la que se inyecta en

### Capítulo 3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

la carga, la relación entre  $V_{in}$  y la corriente de salida  $I_{out}$  a través de la carga es [66]

$$I_{out} = \left( \frac{R_2}{R_1 R_4} \right) V_{in}. \quad (3.18)$$

Zhao [78] [134] también analizó la fuente de howland modificada, y proponen la modificación de incluir un seguidor en la realimentación positiva, como se muestra en la figura 3.12

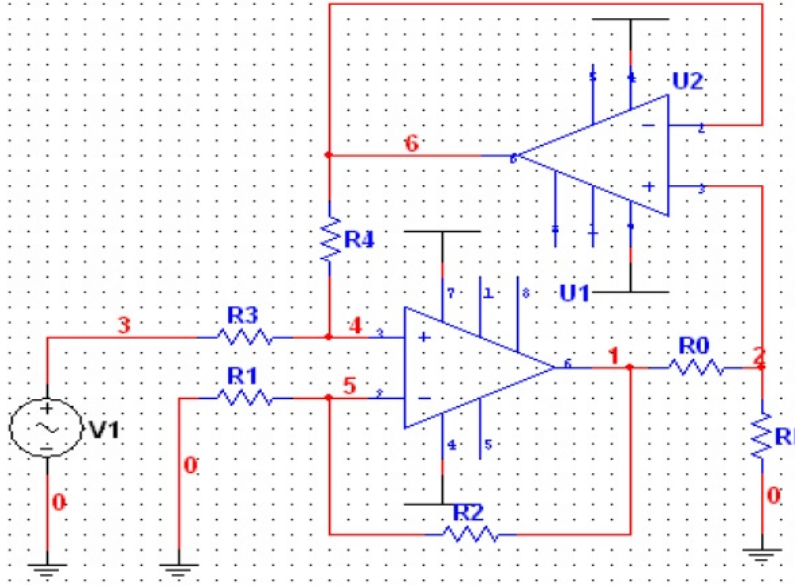


Figura 3.12: Modificación propuesta por Zhao y otros. a la configuración de Howland modificada. Tomado de [78].

La corriente de salida es:

$$I_L = \frac{V_i}{R_o} \quad (3.19)$$

si  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$ . Este circuito aumenta la resistencia de salida respecto de la fuente de Howland modificada. Según modelados, para frecuencias de  $100kHz$  y cargas de  $1k\Omega$ , la resistencia de salida de la fuente Howland con un operacional AD844 (Analog Devices) es para la fuente de Howland de  $18M\Omega$  y para este circuito  $30M\Omega$ .

Bertemes-Filho y otros han estudiado analíticamente la fuente de Howland modificada [14] [13], utilizando simulaciones en SPICE y comparando con el análisis circuital. Esto es importante porque los resultados que muestra avalan el proyectar la fuente tomando en cuenta las ecuaciones propias del circuito, debido a que las desviaciones respecto de las simulaciones en SPICE no son grandes para frecuencias menores a  $100kHz$ .

Ross y Saulnier [103] patentaron una versión de la fuente modificada de Howland que además incluye capacitancias para mejorar la estabilidad, y ajustes au-

### 3.3. Fuente de corriente

tomáticos mediante electrónica para aumentar la resistencia de salida y cancelar impedancias parásitas.

#### Compensación capacidades parásitas

Si buscamos compensar esta capacidad, podemos utilizar una capacidad negativa, esta puede ser creada mediante un circuito conversor de impedancia negativo (NIC) (figura 3.13).

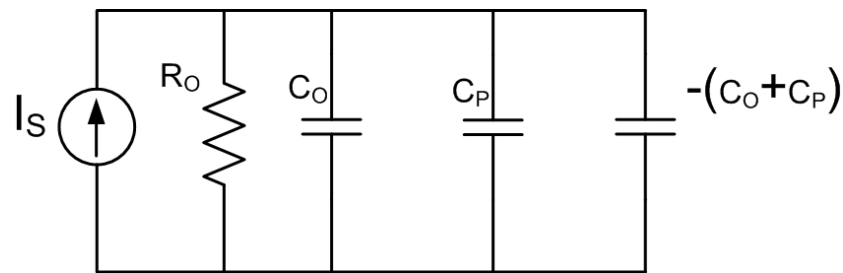


Figura 3.13: Esquema de circuito conversor de impedancia negativo para compensación de capacidades no deseadas

Otra forma de compensar es creando un circuito resonante LC agregando una inductancia en paralelo, esta inductancia se puede formar mediante un circuito conversor de impedancia generalizado (GIC) (figura 3.14).

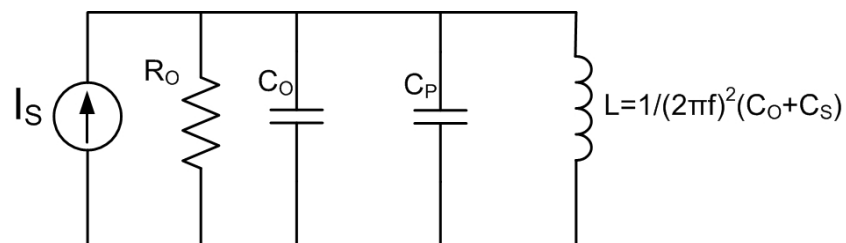


Figura 3.14: Esquema de circuito resonante LC para compensación de capacidades no deseadas

Si bien este circuito tiene buena estabilidad, la compensación se da solo a la frecuencia de resonancia, por lo que este circuito no puede utilizarse en sistemas que inyecten muchas frecuencias, en ese caso, la opción vista en primer lugar es más apropiada.

#### Cable

Exceptuando algunos equipos que colocan la electrónica muy cerca de los electrodos, la gran mayoría de los equipos de EIT utilizan cables relativamente largos para la conducción de la corriente. Si se utilizara un cable unipolar, este sería propenso al ruido, por lo que se utilizan cables coaxiales y triaxiales. En el caso

### Capítulo 3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

de cables coaxiales, si la malla se coloca a tierra, esto reduce el ruido que se introduce al sistema, pero se genera una impedancia parásita entre el conductor y la malla. Dado lo largo del cable, esta capacidad puede ser bastante alta, en el orden de  $40 - 100\text{pF}/\text{m}$  [105]. Además la capacidad va a variar si el cable se dobla y flexiona.

Una forma de reducir esta capacidad parásita es llevando el voltaje de la malla al mismo valor que tiene el conductor central, de esta forma no pasa corriente por la capacidad. Esto se puede realizar mediante un la colocación de un circuito seguidor de la forma que se ilustra en la figura 3.15. Si se utiliza un cable triaxial, la malla interna se utiliza con el seguidor, y la malla externa se conecta a tierra.

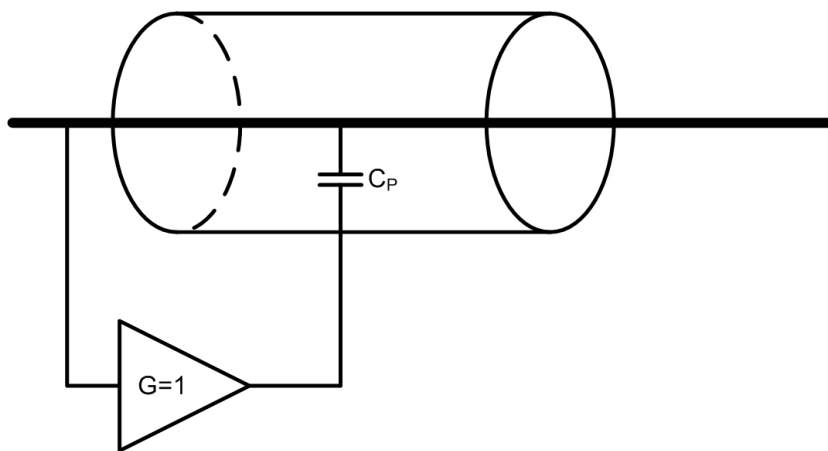


Figura 3.15: Reducción de efecto de capacidades parásitas mediante cable apantallado. Se utiliza un seguidor para que la malla tenga la misma tensión que el conductor.

## 3.4. Amplificador diferencial

Si bien aquí existe la posibilidad de utilizar medidas diferenciales o medidas respecto de tierra, la gran mayoría de los equipos con una sola fuente de corriente adoptan configuraciones diferenciales [105]. Una de las ventajas de medir voltajes diferenciales, es que las tensiones medidas serán más pequeñas que si se mide entre un electrodo y tierra, esto reduce el rango dinámico en que se mueven las medidas, lo que permite reducir el rango dinámico del conversor analógico-digital. En el caso de medida diferencial, generalmente se utiliza un amplificador de instrumentación que convierte esta señal diferencial en una con referencia de tierra.

El gran problema en la medida de tensión es la ganancia en modo común. Todos los amplificadores cuentan con una ganancia en modo común, y la salida del amplificador es la suma de la señal diferencial por la ganancia diferencial más la señal de modo común por la ganancia de modo común (figura 3.16). En el caso ideal la ganancia en modo común sería cero, por lo que la salida solo depende de la señal diferencial. En los operacionales reales, esta ganancia no es cero, y para

### 3.4. Amplificador diferencial

cuantificar el rendimiento de un operacional en este aspecto, se elabora la relación de rechazo al modo común  $CMRR = 20 \log_{10} \left( \frac{A_D}{|A_{CM}|} \right)$ . Para un operacional ideal el  $CMRR$  es infinito.

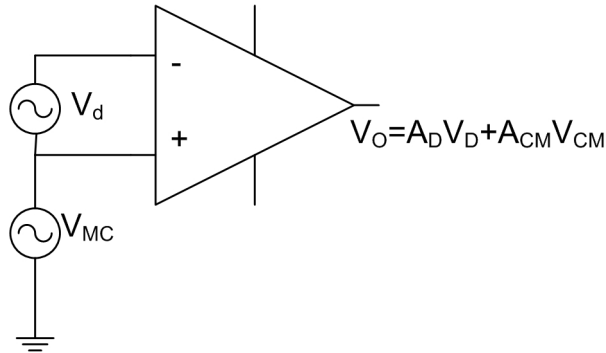


Figura 3.16: Amplificador operacional con ganancia de modo común.

En los amplificadores reales este valor va decreciendo con la frecuencia, comenzando en un rango entre  $100dB$  y  $120dB$  para frecuencia cero, y para frecuencias en el orden de  $1MHz$  este valor decae hasta el rango entre  $0dB$  y  $60dB$ .

Aparte de la propia característica del amplificador, factores externos también afectan el  $CMRR$ , como cuando hay un desbalance en las impedancias de las entradas al amplificador. Si un voltaje de modo común es aplicado a las entradas con resistencias desbalanceadas, se produce una señal diferencial a la entrada del amplificador que será multiplicada por la ganancia diferencial, independiente de cual sea la ganancia de modo común del amplificador. También si tenemos capacidades parásitas entre las entradas y tierra se produce el efecto de un aumento en la ganancia de modo común, pero como ya fue visto, este error se puede reducir si se mide solo la parte real del voltaje. Estas no idealidades se ilustran en la figura 3.17.

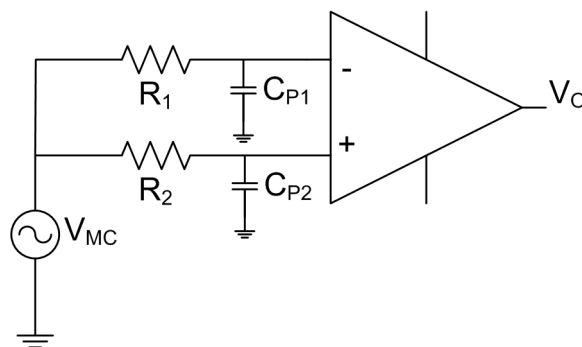


Figura 3.17: Amplificador operacional con capacidades parásitas y resistencias no apareadas a la entrada.

Para solventar esto hay que elegir los componentes y el punto de trabajo muy cuidadosamente, además de que existe la posibilidad de utilizar técnicas específi-

### Capítulo 3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

cas como por ejemplo el uso de un electrodo adicional colocado lejos de la zona donde se toma la medida. En este electrodo extra se aplica una tensión que minimiza el voltaje de modo común visto por los amplificadores de instrumentación (figura 3.18). Teóricamente esto no afecta la corriente inyectada ya que la fuente de corriente no es sensible al voltaje en el que se encuentra la carga, pero dada las condiciones reales de la fuente, esta variación en la tensión de la carga si va a afectar la corriente entregada, además de que este voltaje debe permanecer dentro de los valores donde la fuente funciona correctamente.

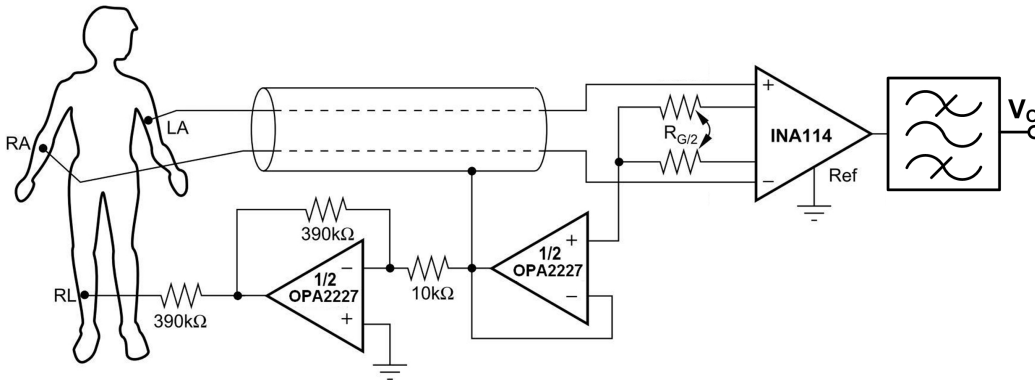


Figura 3.18: Ejemplo del uso de la realimentación del modo común para la reducción de su efecto utilizado en un circuito de electrocardiograma. Tomado de la hoja de datos del integrado INA 114 [26]

## 3.5. Voltímetro síncrono

Para reconstruir una imagen tomográfica es necesario tener medidas de voltaje sensibles a la fase, ya sea para medir la parte real y la imaginaria o tan solo la parte real. Para esto es necesario contar con un demodulador síncrono, sincronizado con la fuente de corriente mediante una señal coherente proveniente del generador de onda. Es posible realizar esta demodulación en forma analógica o digital, siendo esto último lo más utilizado recientemente [132] [57] [61] [125]. Mientras que contrario a la tendencia, Chen y otros diseñaron un demodulador analógico en 2011 [30].

Para realizar la demodulación de forma digital, es necesario el uso de un conversor digital-analógico (ADC), el cual convierte la señal de entrada en digital, y las muestras son multiplicadas por funciones seno o coseno de la misma frecuencia que la señal inyectada (figura 3.19). Luego las muestras son integradas durante un número de ciclos de la onda original como describe Saulnier en [105]. Este voltímetro es equivalente al filtro apareado o receptor de correlación que se utiliza en los sistemas de comunicación, y se puede probar que la relación señal a ruido (SNR) de la señal medida es óptima para una precisión dada del ADC y un período de integración, si el ruido en la señal luego del ADC es blanco [87].

### 3.5. Voltímetro síncrono

La integración también permite reducir la presencia de ruidos blancos que se suman a través de todo el sistema. Además, cuando multiplicamos dos señales sinusoidales de igual frecuencia el resultado es una señal de continua, cuya amplitud es dependiente de las amplitudes de las sinusoidales que multiplicamos, y una componente sinusoidal que tiene el doble de frecuencia de las originales. La integración sirve para eliminar esta componente del doble de la frecuencia, porque funciona como un filtro con una respuesta  $|\sin x/x|$  centrada en frecuencia  $0Hz$ , con ceros en frecuencias  $k/T$ , siendo  $T$  el período de integración y  $k$  es cualquier entero diferente de cero. Cuando  $T = N/f$ , donde  $f$  es la frecuencia de la señal, los ceros están en  $kf/N$ .

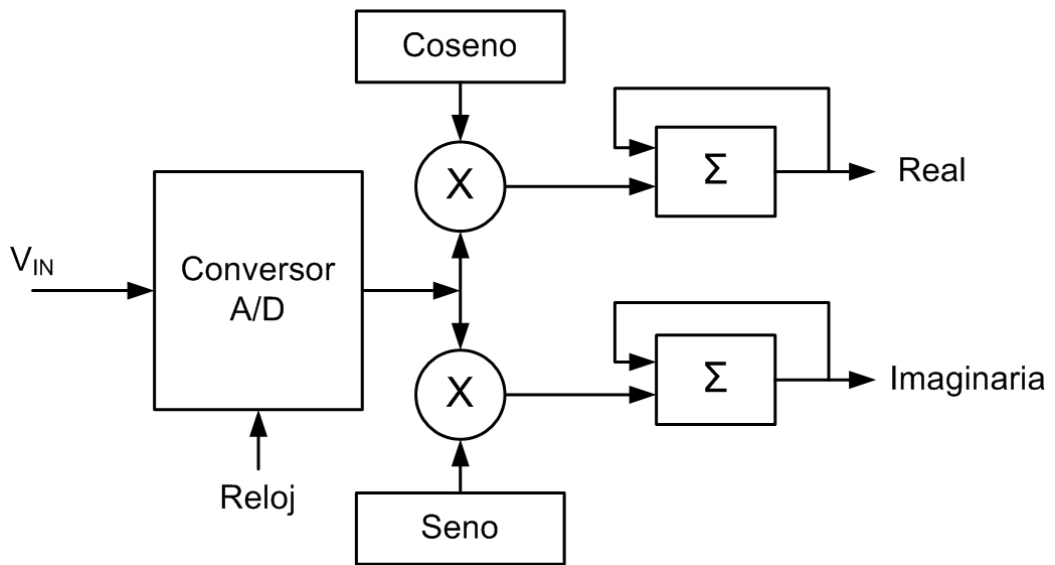


Figura 3.19: Demodulador digital.

#### Ruido de cuantización

El ruido de cuantización de un ADC generalmente se asume blanco con potencia

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12}, \quad (3.20)$$

donde  $\Delta$  es el tamaño de del paso de cuantización. Si se aumenta la resolución del ADC en un bit, se reduce el delta por un factor de dos, reduciendo la potencia del ruido por en un factor de cuatro.

Considerando el ruido como ruido blanco, la potencia está distribuida uniformemente en una banda de  $f_s Hz$ , siendo  $f_s$  la frecuencia de muestreo, y la densidad espectral de la potencia (PSD) del ruido es:

$$PSD = \frac{\Delta^2}{12f_s} \quad (3.21)$$

## Capítulo 3. Estructura de un equipo de Tomografía por Impedancia Eléctrica

Por lo que aumentando  $f_s$  para una resolución del ADC dada reduce el PSD del ruido de cuantización.

Para el voltímetro, si asumimos que la señal ya llega al conversor con un ruido blanco sumado, debido a varios factores, integrando en un número grande de ciclos de la señal va a mejorar el SNR de los voltajes medidos, donde el ruido es el que trae la señal analógica, más el ruido de cuantización del ADC.

Dado que estos ruidos los estamos asumiendo como blancos, se pueden considerar no correlacionados entre sí ni con la señal muestreada. En este caso, la integración de la señal resulta en una mejora del SNR por un factor que es igual al de muestras que se acumulan.

Se puede ver esto pensando que el ancho de banda del integrador es inversamente proporcional al período de integración. Si se integra sobre  $M$  muestras resulta en una reducción del ancho de banda en un factor de  $M$ , y eso lleva a una reducción de la potencia del ruido en un factor de  $M$ . Como nosotros queremos el componente de continua resultante de la multiplicación, reducir el ancho de banda no va a afectar la señal, por lo que el SNR se incrementa por un factor  $M$ .

Esto mismo se puede ver desde el punto de vista de la señal. Si aumentamos el número de valores que acumulamos, como la señal que queremos obtener es continua, vamos a estar acumulando el mismo valor. Por lo que el resultado será un incremento del valor que queremos por un factor  $M$ , esto implica un aumento de la potencia en un factor  $M^2$ . Como el ruido es no correlacionado, la suma se puede estimar que da un aumento del ruido original por un factor  $\sqrt{M}$ , y la potencia aumenta en un factor  $M$ , por lo que el SNR se incrementa en un factor  $M^2/M = M$ . Esto significa, por lo visto antes, que un aumento en el período de integración por 4 es equivalente a aumentar la resolución del ADC en un bit, por lo que la resolución del voltímetro no es determinada exclusivamente por la resolución del DAC, sino que también mediante el aumento del período de integración.

Para lograr que el ruido no esté correlacionado con la señal se debe ser cuidadoso a la hora del muestreo, éste no debe hacerse siempre en los mismos puntos del ciclo de la señal, lo que se puede hacer tomando un número de muestras no entero por ciclo, de tal forma que la fracción formada por la frecuencia de muestreo y la frecuencia de la señal se pueda ser reducida a una fracción de números primos entre sí.

Algo interesante es que se puede muestrear a una frecuencia menor a la del criterio de Nyquist, es decir, el doble de la frecuencia de la señal, siempre y cuando las señales de referencia sean muestreadas también a esta misma frecuencia. En este caso el resultado es como si fueran señales de menor frecuencia, lo cual permite utilizar frecuencias altas sin tener un muestreo a alta frecuencia.

### 3.6. Multiplexores

Los multiplexores son necesarios en sistemas con una sola fuente de corriente o con menos voltímetros que electrodos. Son utilizados para seleccionar los canales por donde se inyecta corriente y en donde se mide la diferencia de potencial. Los multiplexores tienen características no ideales que generan problemas importantes



### 3.7. Módulo de Control

en los equipos, como la resistencia de encendido, y sobre todo, las capacidades de entrada y salida, estas se ilustran en la figura 3.20.

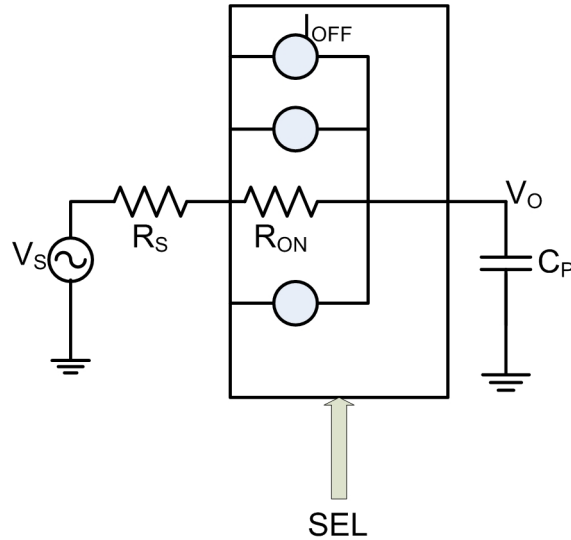


Figura 3.20: Esquema de multiplexor con no idealidades.

Las no idealidades de los multiplexores son factores inherentes a ellos, y la forma de evitarlos es no usando multiplexores, esto lleva a realizar tantos canales de medida y de inyección de corrientes como electrodos tenga el sistema.

### 3.7. Módulo de Control

El control es necesario para sincronizar todos los bloques, almacenar los datos medidos y pasarlos a una computadora que se encargará de realizar la reconstrucción de la imagen. Dependiendo de la complejidad que se le quiera atribuir a este bloque, las opciones son muy variadas, desde microcontroladores básicos [122] hasta procesadores digitales de señales (DSPs) de alto rendimiento [118] [65] [121] [57] si se quiere realizar un pre procesamiento de los datos más complejo.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Capítulo 4

## Comparación de sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica

### 4.1. Introducción

Dos objetivos de esta tesis son el estudiar el estado del arte en la construcción de sistemas de EIT y la comparación de estos sistemas con los desarrollados para IMPETOM. Con esto se busca determinar si un nuevo diseño es necesario para obtener un sistema con las características deseadas.

#### Método de la revisión bibliográfica

Buscamos la bibliografía sobre sistemas de EIT, excluyendo las publicaciones referidas a los algoritmos de reconstrucción. Por lo tanto el conjunto de publicaciones estudiadas se refiere a los circuitos propuestos por sus respectivos autores. Esta búsqueda se realizó a través del portal Timbó [1], utilizando el metabuscador de EBSCOHost y Google Scholar, que permiten buscar en varias bases simultáneamente, entre ellas IEEEExplorer, SpringerLink y MedLine. Las publicaciones seleccionadas debían contener una descripción de la circuitería utilizada, y ser posteriores al año 2004, debido a que en este año es que se concluyó el estudio previo de este método en el nib, y por lo tanto las publicaciones anteriores a esta fecha son analizadas en las documentaciones correspondientes a esos proyectos [43] [60] [54] [99].

La búsqueda arrojó ocho publicaciones que, junto con las opciones comerciales y las soluciones de IMPETOM, permiten comparar las tendencias de diseño y comparar rendimientos. Estos tomógrafos EIT, a los que se añaden las soluciones previas a 2004 reseñadas en IMPETOM, y los equipos comerciales desarrollados por Dixtal y Drager, son presentados en el parágrafo siguiente en orden de fecha de publicación.

## 4.2. Proyectos de de Tomografía por Impedancia Eléctrica

Ferreira, Rodríguez y Simini en 2002 proponen [43] una circuitería de equipo de tomografía por impedancia eléctrica con generación de la señal sinusoidal mediante el generador de funciones MAX038 (Maxim). La fuente de corriente incluye el operacional AD844 (Analog Devices), copiando la corriente con que se alimenta este operacional. Luego dos multiplexores MAX336 (Maxim) seleccionan los electrodos que conducirán la corriente. En la etapa de medida, 16 circuitos idénticos evitan el uso de un multiplexor. El INA114 (Burr Brown) funciona como amplificador de instrumentación y a la salida se encuentra un filtro pasabanda realizado con el chip MAX274 (Maxim). Luego un muestreador se implementa con el integrado LTC1043 (Linear Technologies). Un esquema se muestra en la figura 4.1 y una foto en la figura 4.2.

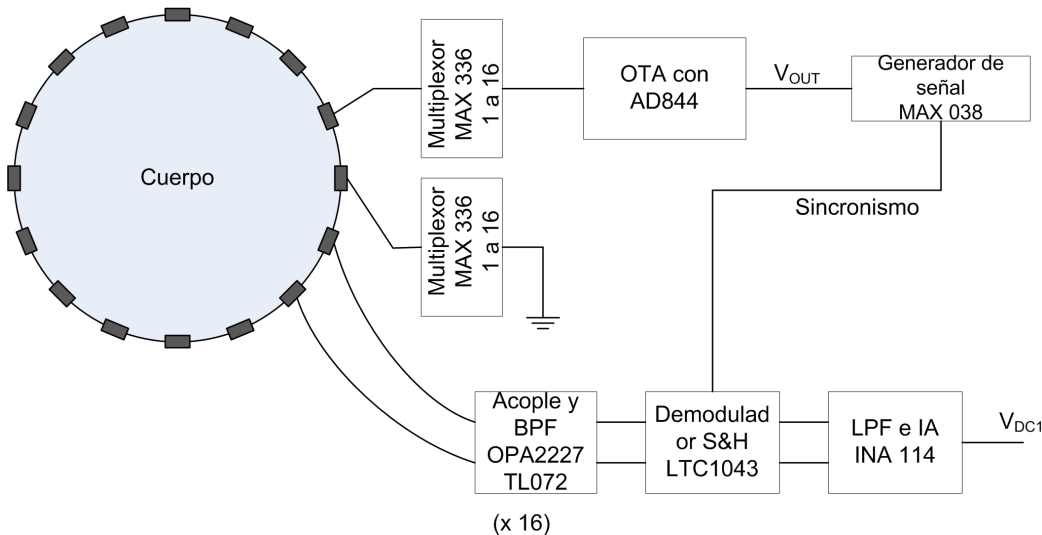


Figura 4.1: Esquema de componentes de la circuitería de IMPETOM C.

En el proyecto que integra este diseño en un nuevo prototipo, González, Liguori, y Simini en 2005 [54] desarrollan la etapa de control y de conversión analógica/digital mediante la placa de desarrollo PC-LPM-16PnP (National Instruments), que cuenta con 16 canales de entrada y conversores de 12bits de resolución. Un esquema con los bloques se muestra en la figura 4.3. Los resultados medidos por [43] muestran un SNR (relación señal a ruido) de  $40dB$ , CMRR en el orden de los  $50dB$  y una impedancia de salida en la fuente de corriente de  $560k\Omega$  a  $50kHz$ .

Wang, Liu y Wang en 2005 utilizan un DSP [118] para realizar el control y el preprocesamiento de los datos, además de utilizar la capacidad de procesamiento en paralelo para acelerar los tiempos de reconstrucción. El DSP utilizado es el TMS320F206 (Texas Instruments). Una fuente de corriente controlada por voltaje (VCCS) genera la señal que se inyecta por los electrodos. Para la medida de voltajes

## 4.2. Proyectos de de Tomografía por Impedancia Eléctrica

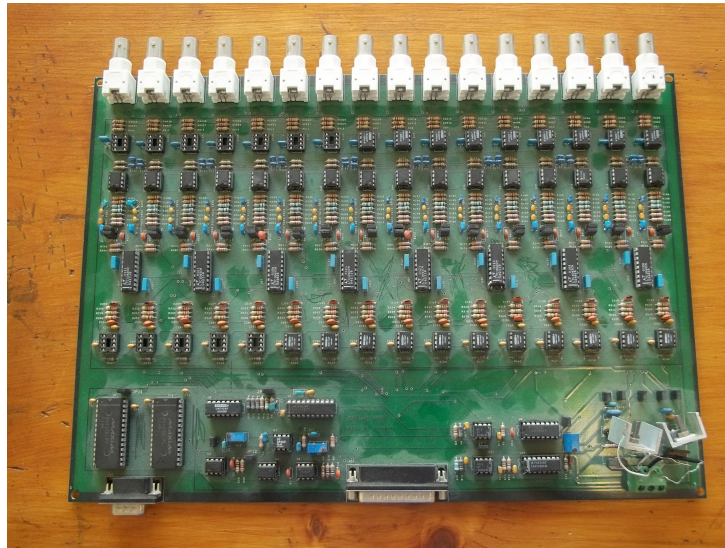


Figura 4.2: fotografía de la circuitería de IMPETOM C.

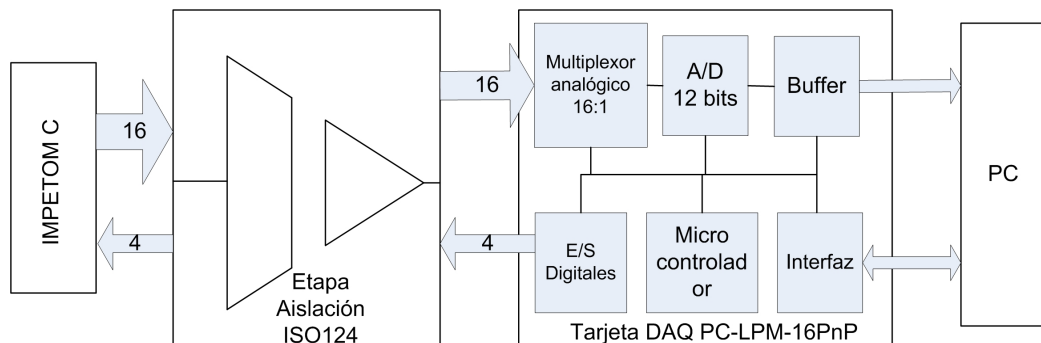


Figura 4.3: Esquema de bloques de la circuitería de IMPETOM.

utilizan un multiplicador realizado con el chip AD734 (Analog Devices). Luego hay un filtro pasa bajos realizado con el chip MAX275 (Maxim), y se usa finalmente el convertor AD1674 (Analog Devices). Un esquema de este equipo se ilustra en la figura 4.4. Los resultados están orientados a los tiempos de reconstrucción, llegando a una tasa de más de treinta imágenes por segundo.

Xu y otros en 2005 [122] construyen un equipo para mapeo de las características eléctricas del cerebro. El sistema cuenta con 16 electrodos para inyectar corriente y medir los voltajes. Un DDS es utilizado para generar la señal sinusoidal (AD7008 (Analog Devices)) de  $1mA$  y de una sola frecuencia  $50kHz$ . Los autores no dan información sobre la fuente de corriente. El procesador utilizado es el C8051F021 (Silicon Laboratories). Utilizan multiplexores para seleccionar los electrodos en donde se inyecta corriente, y donde se miden las diferencias de potencial (figura 4.5). Se hacen pruebas en tanque.

## Capítulo 4. Comparación de sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica

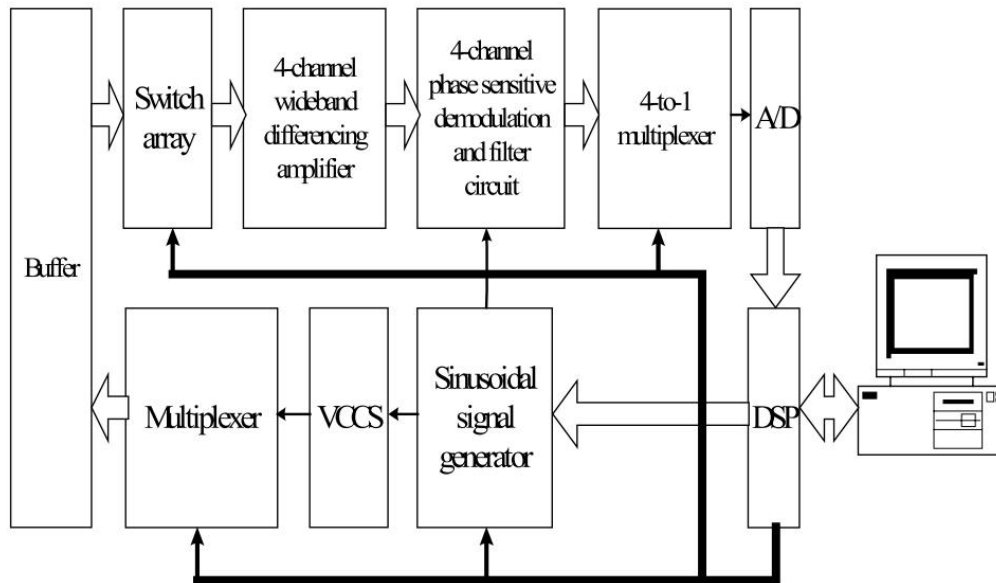


Figura 4.4: Esquema del equipo creado por Wang y otros. Tomado de [118].

Soleimani en 2006 [109] muestra un equipo de bajo costo para la reconstrucción en 2 dimensiones. La señal es generada por medio digital, utilizando una EPROM (27C258) para guardar una señal sinusoidal de  $23kHz$ . Un contador lee los datos de la EPROM y alimenta un DAC (DAC-0808 National Semiconductor). La distorsión armónica fue medida en 1,3%. Esta señal alimenta un buffer que a su vez está conectado al VCCS realizado con el operacional AD644 (Analog Devices). Para la medida del voltaje se utiliza un demodulador sincrónico debido a su capacidad para eliminar el ruido. Se utiliza el amplificador de instrumentación AD625 (Analog Devices) como etapa de entrada, antes de la tarjeta de adquisición.

Xu y colaboradores mejoran en 2007 la propuesta anterior creando un equipo [121] que utiliza 128 electrodos para realizar imágenes en tres dimensiones del tórax humano. Inyectan corrientes en modo de multifrecuencia utilizando el circuito integrado AD9852 (Analog Devices). El rango de las frecuencias va de  $1kHz$  a  $2MHz$ . El módulo de control es implementado con el chip TMS320F2812 (Texas Instruments). Como multiplexores utilizan el chip MAX306 (Maxim). Para la adquisición de datos utilizan a la entrada el integrado AD624 (Analog Devices) como pre-amplificador, luego un filtro de cuarto orden tipo Butterworth con el integrado MAX275 (Maxim). La señal de sincronismo es tomada del AD9852, y un demodulador sincrónico es implementado dentro del DSP. Un esquema de este equipo se muestra en la figura 4.6. Como conclusiones muestran imágenes reconstruidas, pero no dan datos de rendimiento del hardware, ni bajo forma de relación SNR ni de ninguna otra forma.

Bera y Nagaraju en 2009 desarrollan [12] un equipo para estudiar la calibra-

## 4.2. Proyectos de de Tomografía por Impedancia Eléctrica

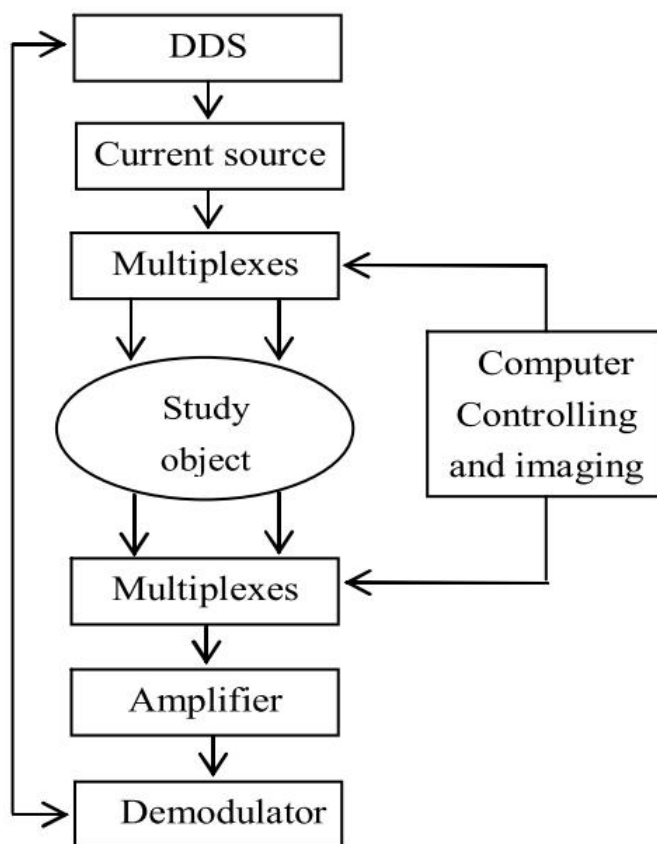


Figura 4.5: Esquema de bloques del equipo creado por Xu y otros. Tomado de [122].

ción. Para la inyección de corriente utilizan un VCO construido con el integrado MAX038 (Maxim), que alimenta un generador de corriente del tipo Howland modificado. Este módulo es realizado con dos operacionales AD811 (Analog Devices) para inyectar una corriente de  $1mA$  a  $50kHz$ . Para la medida de voltaje se utiliza una etapa de amplificación diferencial y un filtro. Luego se mide con un multímetro y un osciloscopio digital la señal de voltaje resultante. Además se utiliza un electrodo central para reducir el modo común de la señal. Los resultados muestran que el modo común es reducido a un máximo de  $67mV$ .

Hamidi, Jafari, Moosavi Nia y Soleimani en 2010 implementan [57] un demodulador sincrónico en un DSP (MS320C6713 Texas Instruments) que está montado en la placa de desarrollo TI AIC23 (TLV320AIC23 Texas Instruments). Esta placa cuenta con dos conversores análogo digital de 16bits y una tasa de muestreo de  $96kbps$ . Se muestra un esquema de este equipo en la figura 4.7. Con datos simulados, el sistema tuvo un error en la fase de  $0,12^\circ$  y una relación señal a ruido (SNR) de  $130dB$ . Utilizando un fantoma, los resultados fueron algo peores, pero siguen siendo significativamente buenos.

Gaggero y otros in 2012 [47] desarrollaron un sistema que trata de solucionar

## Capítulo 4. Comparación de sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica

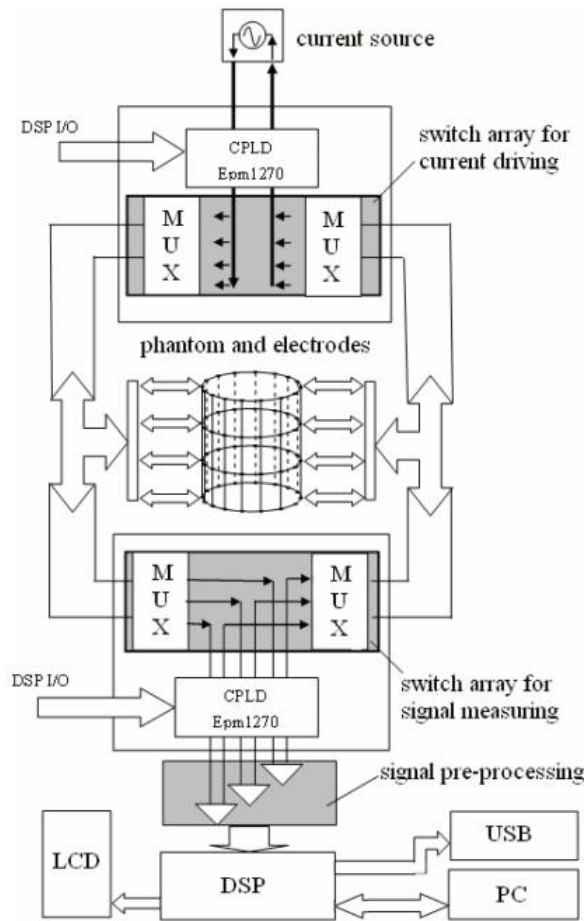


Figura 4.6: Esquema del equipo creado por Xu y otros en 2007. Tomado de [121].

dos problemas importantes que afectan la confianza y estabilidad de equipos de EIT, estos son: a) la EIT es muy sensible a la impedancia de contacto de los electrodos, que puede ser muy grande y variar con el tiempo debido al movimiento. b) La dificultad de colocar los electrodos de forma individual. Para resolver estos problemas implementaron un método de electrodos activos, el cual usa un seguidor de voltaje cercano a los electrodos físicamente. Esto estabiliza la impedancia de contacto, y usando métodos de multiplexación reduce las cables desde la cinta de electrodos al bloque central. En el bloque central del equipo se encuentra el generador de señales, la fuente de potencia, los circuitos para el manejo de los electrodos y la comunicación con la computadora. Para este bloque se utilizan dos tarjetas: una Altera Stratix II development (Altera) que integra los conversores ADC AD9433 (TI), el DAC DAC904 (TI) y una interfaz Ethernet. Una placa desarrollada especialmente para este equipo es responsable por las etapas analógicas, implementa la etapa diferencial y un filtro pasa altos mediante un amplificador AD8221 (Analog Devices) luego convierte la señal en un a diferencial y realiza un filtrado pasa bajos con el integrado THS4502 (TI). La señal sinusoidal es generada en la FPGA me-



## 4.2. Proyectos de de Tomografía por Impedancia Eléctrica

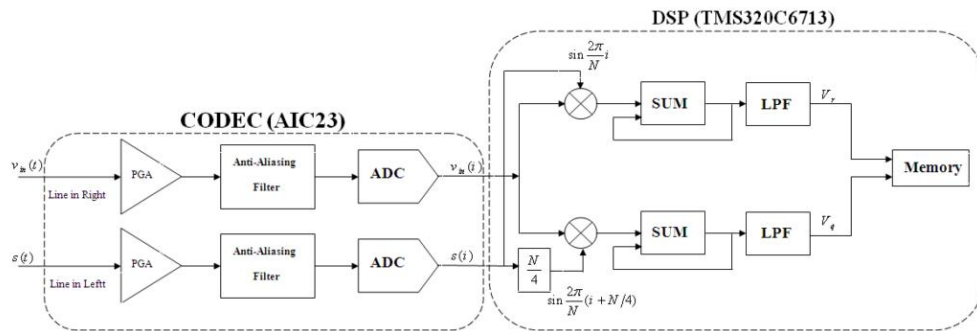


Figura 4.7: Esquema del equipo creado por Hamidi y otros. Tomado de [57].

diante un oscilador numéricamente controlado (NCO), y un circuito de Howland se utiliza como fuente de corriente. Un esquema con los bloques de este equipo se ilustra en la figura 4.8. Los resultados expuestos en la publicación dan la resistencia de salida de la fuente de corriente, y muestra que para frecuencias menores esta resistencia va a ser menor.

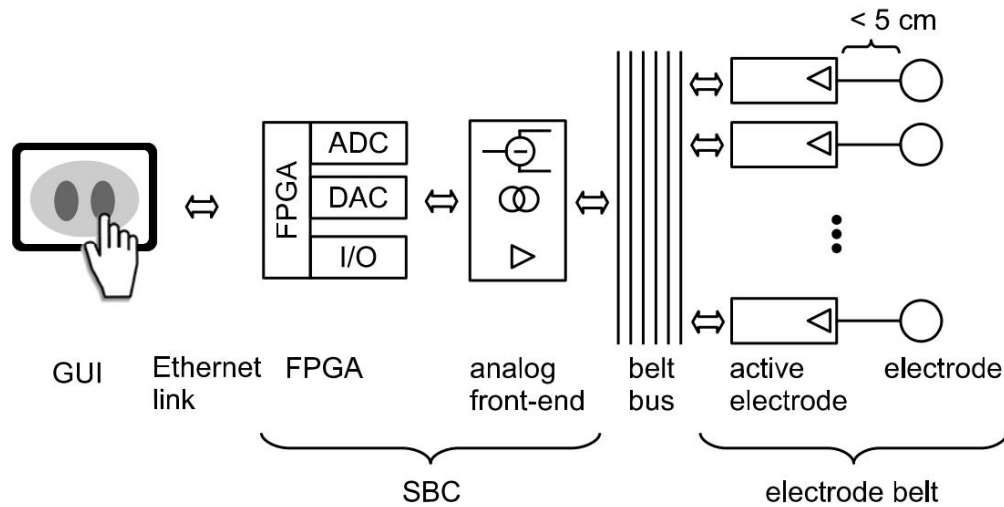


Figura 4.8: Esquema del equipo creado por Gagger y otros. [47].

Khan Borsic [71] diseñaron en 2013 un sistema de adquisición de datos, de 32 canales, el cual no cuenta con la fuente de corriente, sí con el generador de señal. El equipo está contenido en un chásis PXI (NI), la demodulación y el control se realiza en la FPGA FlexRIO 7952R (NI), en donde un módulo dedicado calcula la FFT de la señal para analizar su espectro. El equipo puede adquirir señales desde  $100\text{Hz}$  a  $12\text{MHz}$ . Cuenta con dos módulos ADC 5751 (NI) de 14 bits de

## Capítulo 4. Comparación de sistemas de Tomografía por Impedancia Eléctrica

resolución, capaces de muestrear en paralelo 16 canales a una tasa de  $50MS/s$ . La generación de señal se hace mediante la placa Sig Gen NI 5406 (NI), este es un generador de señales arbitrarias, capaz de generar señales de hasta  $40MHz$ . También en este módulo se genera la señal de sincronismo que le llega a la FPGA y da inicio al ciclo de medidas. Un módulo aparte, realizado con la placa NI 6674t (NI) se encarga de proporcionar el reloj y la coordinación de todo el sistema, este reloj es generado con un DDS interno de la placa. Otra placa modular (NI X-Series Card 6341 (NI)) es la encargada de controlar el analog front end, sus relés y la alimentación. El *analog front end* contiene los filtros, los PGAs, relés de potencia, los seguidores para el apantallamiento de los cables, multiplexores, etc. Esta placa se comunica con el módulo generador de señal, el módulo ADC y el módulo de sincronismo (figura 4.9). Los resultados muestran que el equipo es capaz de tomar 188frames/s con una señal de  $100kHz$  y promediando las medidas muestreando cuatro ciclos.

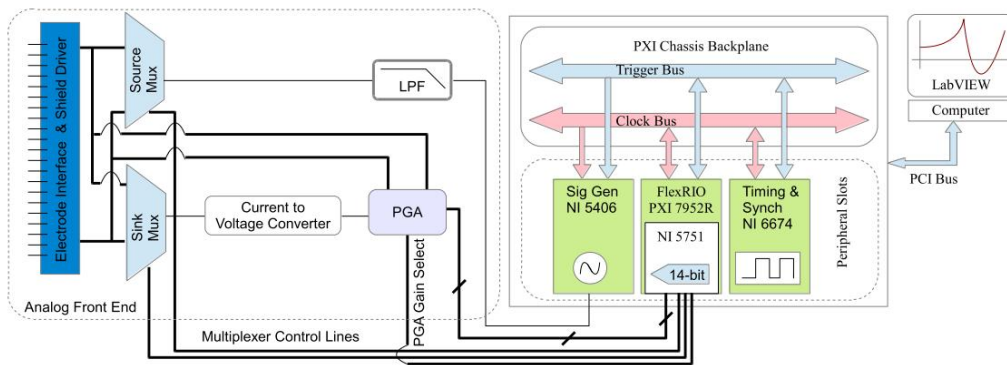


Figura 4.9: Esquema del equipo creado por Khan y otros. Tomado de [71].

DIXTAL Biomédica desarrolló un equipo comercial, denominado DX 1800 [39], el cual provee imágenes en tiempo real del tórax del paciente. Cuenta con dos módulos: el equipo DX 1800 en sí mismo, y un programa de monitoreo que se ejecuta en una computadora. El equipo DX 1800 es el que se encarga de la generación de corriente, medida de voltaje y procesamiento de los datos, este equipo cuenta con 32 electrodos a ser colocados en una fila alrededor del tórax del paciente. El programa se encarga de la interfaz con el usuario y de desplegar las imágenes reconstruidas. La conexión entre módulos se realiza a través de una conexión Ethernet. Debido a que es un equipo comercial no fue posible conocer como están implementados los diferentes bloques del equipo.

Draeger Medical comercializa el PulmoVista 500 para el seguimiento de funciones pulmonares de pacientes con lesiones pulmonares agudas y la asistencia de la gestión ventilatoria [114]. El cinto con el que viene provisto permite la fácil colocación de los 16 electrodos que componen el sistema, según lo que expresan, este cinto de 40mm de ancho aumenta la superficie de contacto de los electrodos disminuyendo los errores debido a las impedancia de contacto. El equipo utiliza el

## 4.2. Proyectos de de Tomografía por Impedancia Eléctrica



Figura 4.10: Esquema del equipo comercial creado por Dixtal. Tomado de [39].

método de electrodos adyacentes para la recolección de datos, y es capaz de generar hasta 50 imágenes de EIT por segundo. El equipo está compuesto de un solo módulo que incluye todo el procesamiento y la estación de visualización, siendo desplegado en la pantalla la imagen tomográfica del tórax y datos más propios de un monitor respiratorio, como el PEEP. No se especifican más datos sobre la circuitería del equipo, por lo que se indica como método de reconstrucción, se podría inferir que utiliza el método de corrientes constantes, monofrecuencia.



Figura 4.11: Esquema del equipo comercial creado por Draeger. Tomado de [114].

La tabla 4.1 presenta las características resumidas de los equipos reseñados más representativos, tomando las cifras publicadas y extrapolando información allí donde es posible.

Tabla 4.1: Características comparadas de circuitos para Tomografía de Impedancia Eléctrica..

	Sistema Sheff- field	IMPETOM C	Open acces	Sistema 128 electrodos	Electrodos activos	Sistema Dart- mouth Colle- ge EE.UU.
	England 2005 [108]	Uruguay 2002 [43]	Iran 2006 [109]	China 2007 [121]	Switzerland 2012 [47]	2013 [71]
Generación de señal	Look up table en ROM	Analógico con generador de funciones	EPROM 27C258, VCCS(AD644)	DDS AD9852 (Altera)	Altera Stra- tix II (NCO) DAC904	Sig Gen NI 5406
Fuente de co- rriente	Flotante con transforma- dor	AD844	Generador de corriente $5mA, 23kHz$		Howland mo- dificado	
Multiplexores	2 multiplexo- res 1 a 16 AD DG506	2 multiplexo- res 1 to 16	Multiplexores IC-4067	Multiplexores 16 MAX306		En el Analog Front End
Medida dife- rencial	Amplificador de instrumen- tación INA 110	Amplificador de instrumen- tación INA 114	Amplificador de instru- mentación AD625	Pre- amplificador AD624 con filtro pasa ba- jos de orden 4 MAX275	AD8221 + THS4502	ADC 5751
Demodulador	Voltímetro síncrono sen- sible a la fase	Muestreador LTC1043	Demodulación por pulso sín- cronizado	Demodulador sincrónico	Demodulador digital AD9433	En el Analog Front End
Procesamiento	Computador externo	IMPETOM I [60]	Tarjeta I/O AD- VANTECH PCL-812PG 16bits	High speed DSP TMS320 F2818	Altera Stratix II	FPGA Flex- RIO 7952R, NI 6674t, NI X-Series Card 6341

## 4.2. Proyectos de de Tomografía por Impedancia Eléctrica

### Resumen

Los equipos realizados en los últimos años coinciden mayoritariamente en el uso de algunos métodos, como DDS para la generación de la señal sinusoidal, una configuración de Howland simple o modificada para la fuente de corriente. En la etapa de medida, a la amplificación de instrumentación le sigue un convertor análogo digital de al menos 16bits de resolución y una demodulación sincrónica digital; para el control y preprocesamiento de los datos, los DSP y las FPGAs son las opciones más utilizadas por su velocidad. Además, cuantos menos multiplexores se utilicen, mejor rendimiento tendrá el equipo. Esta configuración parece dar la mejor relación entre el rendimiento y el costo.

La solución implementada en IMPETOM, debido al momento tecnológico en que fue desarrollado inicialmente, dista bastante de los diseños actuales, ejemplificado en las realizaciones más recientes. Un rediseño del equipo es necesario para lograr un prototipo funcional que logre medidas más precisas. El traslado al mundo digital parece el camino obvio a seguir, así como un aumento en los bits de resolución del equipo.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Capítulo 5

## Opciones de Hardware para IMPETOM

### 5.1. Introducción

Tres diferentes opciones aparecen como las más adecuadas para realizar el hardware de Impetom, una corresponde a un procesamiento de las señales completamente analógico, las otras dos utilizan un procesador de señales digitales. Estas son analizadas en base factores de costo, dificultad de armado, rendimiento y velocidad.

### 5.2. Componentes discretos sin procesamiento digital

Una opción es realizar el diseño mediante el uso de componentes discretos sin un procesamiento digital de la señal. Un diagrama de bloques para este tipo de solución se muestra en la figura 5.1, la cual incluye un microcontrolador básico (ej. Atmega168, Atmel, \$2,60) el cual se encarga del control y sincronización de los diferentes bloques. En este caso se realiza la demodulación de la señal mediante componentes discretos, aparte de filtrados y ajustes en la amplitud de la señal. De ser posible se utiliza conversores analógicos-digitales (conversores A/D o ADCs) para digitalizar la señales y enviarlas a la computadora para la reconstrucción de la imagen. Otra opción derivada de esta solución es la de utilizar una tarjeta adquisidora como se utilizó en el proyecto IMPETOM [54]. Estas tarjetas proveerían la conversión A/D y la comunicación con la computadora. Una condición imprescindible para mejorar el rendimiento del sistema respecto del desarrollado anteriormente es el de usar ADCs de al menos 16bits de resolución. Estas tarjetas adquisidoras (DAQs) cuentan con varios canales de entrada, siendo posible contar con un canal para cada par de electrodos, permitiendo las medir en paralelo, implicando también realizar 16 canales de entradas, como los realizados por IMPETOM C [43], incrementando el costo y la dificultad del diseño. Además, el que estas DAQs utilicen tantos canales de entrada las hace muy costosas, por ejemplo el adquisidor NI USB-6211 (National Instruments) tiene un costo mínimo de 970 dólares. El principal problema con esta solución es el de repetir los mismos errores cometidos en IMPETOM C, obteniendo un sistema donde los ruidos eléctricos y

## Capítulo 5. Opciones de Hardware para IMPETOM

las imperfecciones de los componentes discretos dominan las medidas obtenidas, haciendo imposible obtener una imagen razonable. La ventaja es el costo, la tabla 5.1 muestra el costo de los componentes más notables del sistema, el total mostrado no refleja realmente el costo que prodría tener esta solución, ya que no tiene en cuenta muchos componentes menores, como resistencias, capacitores, cristales, conectores, etc. lo que incrementa el costo final.

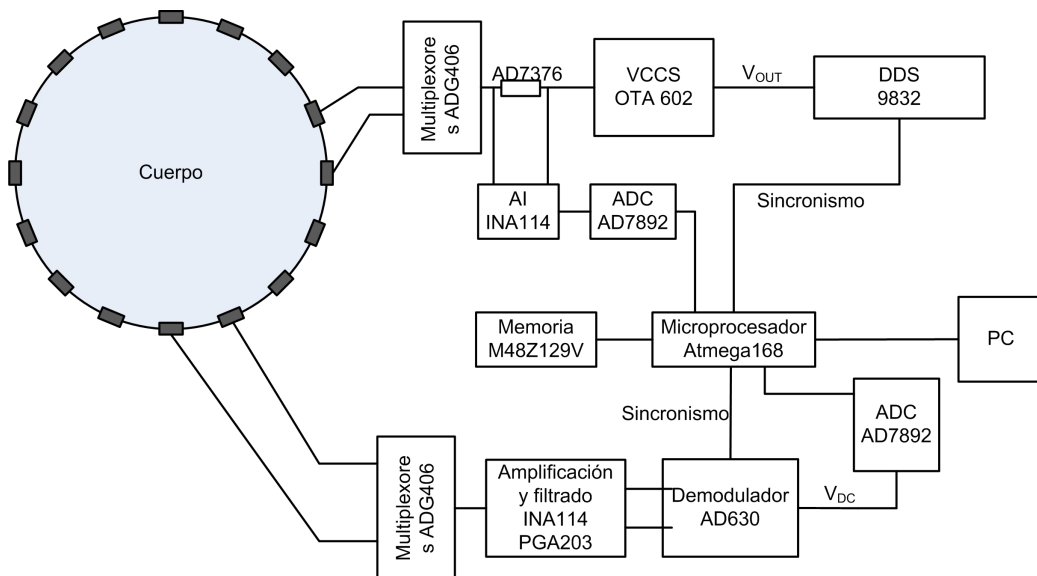


Figura 5.1: Diagrama de bloques de un sistema de EIT utilizando componentes discretos.

### 5.3. Procesador de Señales Digitales

Para minimizar el tratamiento de las señales en forma analógica, se deben pasar las señales lo antes posible por convertidores A/D y realizar la mayor cantidad de procesamiento en formato digital. Esto sería, luego de una primera y básica etapa de ganancia y filtrado, pasar las señales por el convertor A/D, estas señales son procesadas por un Procesador de Señales Digitales (DSP), tanto en la fase de filtrados como en la demodulación y obtención de amplitud y fase. Esta opción da una gran flexibilidad al sistema, permitiendo adaptarlo a diferentes usos, como el de medir tanto resistividad como permitividad, también se reduce de manera sensible los errores introducidos por el uso de componentes discretos, y la velocidad de procesamiento asegura que no se verá afectada la velocidad final del sistema para reconstruir las imágenes. Mediante el uso de un DSP, el sistema transmitiría a la computadora el vector de medidas ya pronto como para utilizarse en el método de reconstrucción.



### 5.3. Procesador de Señales Digitales

Tabla 5.1: Estimación de costos de componentes notables para opción de hardware mediante componentes discretos sin procesamiento digital.

Bloque	Tipo de diseño	Componente	Cantidad	Precio (p/u, dólares, digikey)
Generador de señal	DDS	AD9832	1	11
	Multiplicador DAC	DAC8811	2	13
VCCS	Amplificadores Operacionales	OPA602	2	10
Medición de corriente	Potenciómetro digital	AD7376	1	7
Multiplexores	Multiplexor en CI	ADG406	4	12
Amplificación y filtrado	Amplificadores diferenciales	INA114	4	12
	Amplificadores de ganancia programable	PGA203	2	17
Demodulación sincrónica	Componente discreto	AD630	2	20
Control e interface	Microcontrolador	Atmega168	1	3
	Memoria	M48Z129V	1	27
	ADC	AD7892	2	27
<b>Total</b>				<b>318</b>

#### Tarjetas de Evaluación

Dos caminos se pueden tomar para utilizar DSPs, el primero es la utilización de una Evaluation Board o Starter Kit, ejemplos de esto son el Starter Kit TMS320C6713 (TI, \$470) o el Evaluation System ADSP- BF533 EZ-Kit (Analog, \$490). Estos sistemas tienen por objetivo la evaluación o iniciación del ingeniero en el uso de cierto modelo de DSP y las herramientas desarrolladas, muchas veces con fines didácticos. No es el objetivo de estas tarjetas ser usadas dentro de productos comerciales. La ventaja de utilizar estas tarjetas es la de tener un sistema completo que contiene el DSP, memoria, demoduladores que incluyen los convertidores A/D y amplificadores de ganancia programable (PGAs), comunicación con la computadora, puertos para uso general, el circuito para programar el DSP; todo esto ya

## Capítulo 5. Opciones de Hardware para IMPETOM

probado y dispuesto de la forma más óptima pronto para obtener resultados desde el primer momento. En la figura 5.2 se ve el diagrama de bloques del sistema y se encierran los bloques que estarían implementados en la tarjeta de evaluación. La figura 5.3 muestra el diagrama de bloques de la tarjeta TMS320C6713 SDK. La desventaja es que al ser un conjunto de componentes fijos, algunos de ellos pueden no adaptarse al problema que se intenta resolver. De hecho, la mayoría de estas tarjetas, por lo menos las que se encuentran en un rango de precios entre \$300 y \$600, están diseñadas para trabajar con señales de audio. Entonces, los conversores A/D y los PGAs están dentro de un códec (AIC23 de TI en el TMS320C6713 [111]) específicamente diseñado para trabajar con audio. Esto no impide el uso de esta tarjeta para sistemas de EIT, hay sistemas implementados mediante tarjetas muy similares [100] [57] pero es necesario adaptarse a ciertas limitaciones. La más notoria es que este códec trabaja a frecuencias estándar utilizadas en el procesamiento de audio, siendo la frecuencia de muestreo más alta de  $96kSPS$  (muestras por segundo), por el teorema de Nyquist, esto limita nuestro sistema a trabajar a frecuencias menores de  $48kHz$ , aunque para obtener realmente buenos valores de SNR, la frecuencia de trabajo debe ser menor todavía, por debajo de los  $20kHz$ , aumentando el tiempo total requerido para la adquisición de las señales. Además, en cierta forma se subutiliza el DSP que está diseñado para trabajar a velocidades muy altas (el DSP dentro del TMS320C6713 tiene el mismo nombre y opera a  $225MHz$  y puede realizar 1350 millones de operaciones de punto flotante por segundo [112].) Otra desventaja es el costo, nuevamente, en la tabla 5.2 se presentan los costos de los componentes más notorios a utilizar, y un total estimado en donde hay que tener en cuenta las mismas observaciones que se realizaron para la tabla anterior, en este caso la diferencia entre este costo y el final es un poco menor respecto al caso de utilizar componentes discretos, ya que la tarjeta trae todos los componentes necesarios para que todo el sistema funcione correctamente.

### Componentes discretos con procesamiento digital

Otra opción para trabajar con DSPs, superando el problema visto de trabajar con Starter kits, es el de armar todo el sistema con los componentes que más se adaptan a nuestro problema, esto es, principalmente, el uso de DACs con una mayor frecuencia de muestreo, como por ejemplo el AD7892 (Analog, \$27) que cuenta con 18bits de resolución y la capacidad de obtener hasta  $1MSPS$ , lo cual permitiría al sistema trabajar teóricamente hasta una frecuencia de  $500kHz$ . Otra ventaja es que se obtiene un sistema más adaptado a nuestro problema a un costo menor que con el uso de un Starter Kit. Un problema con esta solución es que es difícil lograr un sistema realmente compatible y que trabaje de forma armónica, ya que en estos tipos de componentes los detalles como velocidad de reloj, tipo de comunicación, voltajes de alimentación, etc. son fundamentales para que el sistema ensamblado funcione correctamente. Otro problema, no menor, es la construcción de la placa del sistema, ya que la mayoría de los componentes son para montaje superficial, y los componentes como el DSP, la memoria y los ADC tienen muchas patas, lo que hace muy difícil el armado de la placa mediante el uso de un soldador

## 5.4. Otras Consideraciones

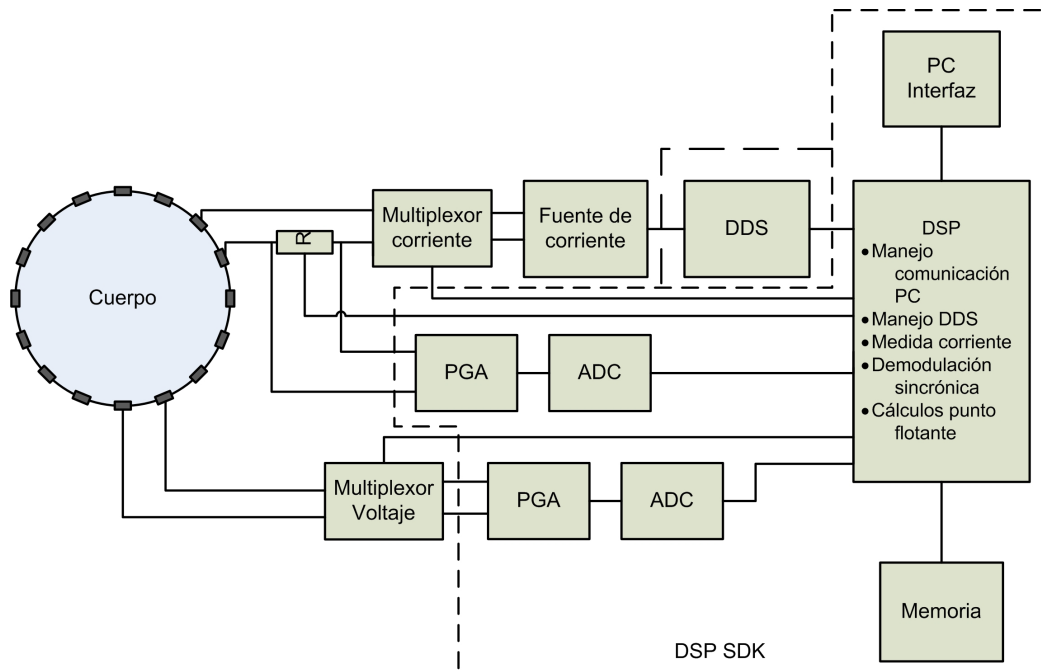


Figura 5.2: Diagrama de bloques de un sistema de EIT con procesamiento digital, con la posibilidad de utilizar una tarjeta de evaluación.

normal. La tabla 5.3 nuevamente hace referencia a los costos de los componentes, teniendo en cuenta las mismas consideraciones realizadas anteriormente, se ve que el costo de esta opción es similar al de la primera.

## 5.4. Otras Consideraciones

Para este sistema se piensa realizar dos cambios significativos respecto de los sistemas implementados anteriormente en IMPETOM. Primero, la medición de la corriente que se inyecta. Las desviaciones en la corriente inyectada es una de las fuentes de error más importante para el sistema, debido a las imperfecciones de los componentes y la aparición de capacidades parásitas, lo cual hace que la impedancia de salida de la fuente no sea infinita. Por lo tanto, considerar que el valor de la corriente no varía con la carga en el método de reconstrucción es una fuente de error importante. Para evitar esto se puede medir la corriente que se inyecta de forma de utilizar el valor correcto, otra ventaja de esta medición es la de utilizar esta señal como la referencia para realizar la demodulación sincrónica. Para realizar esta medida lo ideal es utilizar un potenciómetro digital, el cual es controlado por el bloque de control y asegura que la señal obtenida aproveche al máximo el rango del convertor A/D. El otro cambio es en principio realizar un solo canal de medida y utilizar un multiplexor para obtener todas las medidas necesarias. Este cambio tiene las desventajas de aumentar el tiempo de adquisición

Capítulo 5. Opciones de Hardware para IMPETOM

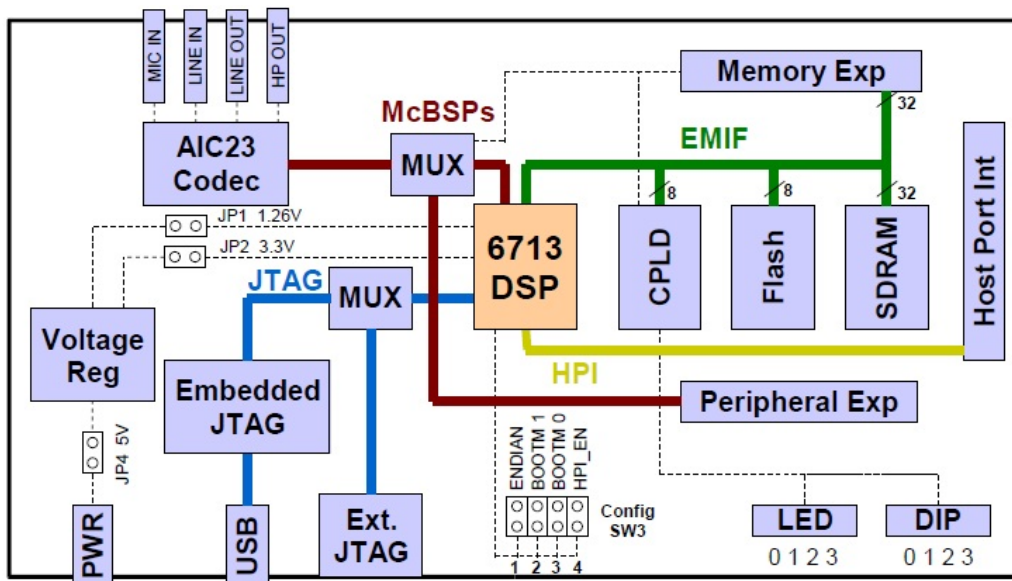


Figura 5.3: Diagrama de bloques de la tarjeta TMS320C6713 SDK. Tomado de [111]

respecto al uso de canales en paralelo, además de que los multiplexores son fuente de ruido y errores. La razón para este cambio es la complejidad y costo de realizar 16 canales de medidas, además de que se debe contar con un sistema capaz de manejar estas señales en paralelo. Una opción, utilizada en el proyecto IMPETOM, es la de una DAQ, lo cual eleva el costo del sistema mucho más. Si la opción elegida es el uso de un Starter Kit, este tiene 2 canales de entrada, considerando que un canal se va a utilizar para medir la corriente inyectada, quedaría un canal de entrada para medir la tensión, por lo que en principio parece más razonable comenzar con un solo canal de medición y luego ver si es necesario expandirlo a más.

## 5.4. Otras Consideraciones

Tabla 5.2: Estimación de costos de componentes notables para opción de hardware mediante componentes tarjetas de evaluación.

Bloque	Tipo de diseño	Componente	Cantidad	Precio (p/u, dólares, digikey)
Generador de señal	DDS	AD9832	1	11
	Multiplicador DAC	DAC8811	2	13
VCCS	Amplificadores Operacionales	OPA602	2	10
Medición de corriente	Potenciómetro digital	AD7376	1	7
Multiplexores	Multiplexor en CI	ADG406	4	12
Amplificación y filtrado	Codec en DSP SK	TMS320C6713	1	470
Demodulación sincrónica	DSP en DSP SK	TMS320C6x	1	0
Control e interface	DSP en DSP SK	TMS320C6x	1	0
			<b>Total</b>	<b>582</b>

## Capítulo 5. Opciones de Hardware para IMPETOM

Tabla 5.3: Estimación de costos de componentes notables para opción de hardware mediante componentes discretos con procesamiento digital.

Bloque	Tipo de diseño	Componente	Cantidad	Precio (p/u, dólares, digikey)
Generador de señal	DDS	AD9832	1	11
	Multiplicador DAC	DAC8811	2	13
VCCS	Amplificadores Operacionales	OPA602	2	10
Medición de corriente	Potenciómetro digital	AD7376	1	7
Multiplexores	Multiplexor en CI	ADG406	4	12
Amplificación y filtrado	Amplificadores diferenciales	INA114	4	12
	Amplificadores de ganancia programable	PGA203	2	17
Demodulación sincrónica	DSP	TMS320C6713B	1	45
Control e interface	DSP	TMS320C6713B	1	0
	Memoria	M48Z129V	1	27
	ADC	AD7892	2	27
			<b>Total</b>	<b>320</b>

## 5.4. Otras Consideraciones

Tabla 5.4: Ventajas y desventajas de las opciones analizadas

Opción	Ventajas	Desventajas
Componentes discretos sin DSP	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Costo</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Ruidos eléctricos</li> <li>■ Imperfecciones en los componentes</li> </ul>
Tarjeta de evaluación	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Sistema completo</li> <li>■ Armado de forma óptima</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Sin flexibilidad para elegir componentes</li> <li>■ Costo</li> </ul>
Componentes discretos con DSP	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Sistema adaptado a nuestro problema</li> <li>■ Costo menor a un Starter Kit</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>■ Difícil que todos los componentes trabajen de forma armónica</li> <li>■ Difícil construcción y armado de la placa</li> </ul>

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.



## Capítulo 6

# Nuevo diseño para IMPETOM

### 6.1. Diseño propuesto

El desarrollo de la circuitería para un sistema de EIT que sea capaz de satisfacer los requerimientos planteados anteriormente es de una complejidad que escapó el alcance de esta tesis. En el comienzo era el objetivo lograr un prototipo que pudiera utilizarse en fantasmas y voluntarios sanos, utilizando desarrollos nuevos, pero sobre todo basándonos en la circuitería ya desarrollada para los proyectos anteriores de IMPETOM. Si bien parecía una salida posible para obtener un prototipo funcional en el tiempo dentro de esta maestría, al estudiar el problema y tener en cuenta el estado del arte de este tipo de sistemas se llegó a la conclusión que no era conveniente utilizar el mismo encare para la solución que se había utilizado en el prototipo anterior. Además, los circuitos de IMPETOM, que ya cuentan con casi diez años, tenían piezas faltantes, y reportes en la documentación de IMPETOM 48 [99], el último proyecto que intentó utilizar la circuitería de IMPETOM C en 2008, ya daba cuenta de que el circuito tenía fallas que eran difíciles de detectar. Si bien fue un prototipo muy valioso académicamente y un muy buen trabajo por parte de los estudiantes que lo llevaron a cabo, el diseño no es el óptimo para un sistema de este tipo, menos en la actualidad, por lo que, como se mencionó anteriormente, sería obtener un circuito que repitiera los mismos errores que el anterior. Una opción para utilizar parte de la circuitería es tomar solamente el *front end*, esto serían los amplificadores y filtros, los cuales están realizados con operacionales como el INA114 (TI) y el OPA 2227 (TI) que son amplificadores y operacionales de alto rendimiento, y que aún el día de hoy serían buenas elecciones para el desarrollo del sistema. Tomar las señales de salida de estas etapas e ingresarlas a conversores analógico-digitales, mediante multiplexores, o con suficientes conversores como para poder medir todos los canales en paralelo. Esto funcionaría para aprovechar algo del sistema anterior, pero la etapa de entrada no es la más difícil de realizar, y tomar esas señales requeriría una solución para nada elegante.

Ante esto es que se decide comenzar un desarrollo nuevo, tratando de obtener un sistema que esté a la altura de los estándares actuales del diseño de este tipo de equipos.

## Capítulo 6. Nuevo diseño para IMPETOM

El equipo mantiene las características que se manejan hasta ahora, esas características fueron bien elegidas y permiten realizar un sistema capaz de monitorear las funciones pulmonares. Por lo que la nueva versión de IMPETOM va a seguir contando con 16 electrodos que se colocan en un solo anillo a la altura del esternón.

Se utilizará el patrón de electrodos adyacentes para la toma de datos, mediante una sola fuente de corriente, esta será de una sola frecuencia, la cual se determinará en base a la capacidad de muestreo de los convertidores analógicos-digitales. Por lo que la salida del equipo serán las 208 medidas correspondientes a la medida de trece diferencias de potencial para cada par de electrodos por los que se inyecta corriente, para las dieciséis diferentes posiciones por las que se realiza la inyección.

El bloque central será la placa OMAP-L137 EVM de Spectrum Digital, la cual cuenta con el procesador OMAP-L137 que a su vez está compuesto del DSP C6747 y el microprocesador ARM926EJ-S. Cuenta con 64Mbytes de SDRAM y el códec de audio TVL320AIC3106, que es capaz de tomar muestras a  $96kHz$ , con un ADC de 24 bits de resolución.

La elección del uso de una Evaluation Board se basa en lo visto anteriormente, dada la dificultad de utilizar una placa diseñada exclusivamente para este sistema, debido al montaje de los componentes y la armonización del sistema. Mediante las Evaluation Boards se adquiere un sistema pronto para utilizarse desde el primer momento, donde la relación calidad precio parece ser la mejor.

Este modelo se creyó más conveniente debido a su precio y alto poder de procesamiento, pensando en un futuro en implementar el algoritmo de reconstrucción dentro del DSP.

Otras Evaluation Boards cuentan con decodificadores de video, los cuales tienen una capacidad de muestreo mayor, pero los convertidores son de 11 bits, lo que no los hace suficiente para nuestro sistema.

La placa ya fue adquirida y se realizaron pruebas de funcionamiento de los componentes.

Para la generación de señal se utilizará el DDS AD9832, que cuenta con un convertidor digital-analógico de 10 bits, y puede funcionar con un reloj de hasta 25 MHz, se programa mediante una comunicación serie, esta fue elegida por su relación calidad precio. Ya se adquirieron y se montó uno en una placa para su prueba.

Se utilizará una fuente de corriente con la configuración Howland modificada, se inyectarán corrientes flotantes. No está determinado el operacional a utilizar, pero el OPA 602 parece una buena opción.

Además se utilizará un potenciómetro para medir la corriente inyectada, de forma de utilizar este dato en el algoritmo de reconstrucción, si bien como se mencionó, no es tan importante tener un valor de corriente exacto, sino que la variación esté dentro de valores aceptables para todo el rango posible de cargas. Esta medida se puede utilizar no solo como para medir la corriente de forma de utilizar ese valor en el algoritmo de reconstrucción, también se puede utilizar para la calibración y autocorrección de la fuente. El potenciómetro AD7376 parece adecuado.

Para la etapa de medición, se medirán las tensiones en forma diferencial, por

## 6.1. Diseño propuesto

lo que se debe contar con una primera con un amplificador de instrumentación, basado en el operacional INA114 por ejemplo, junto con un filtro pasabajos para eliminar el ruido de alta frecuencia y un filtro de continua.

En un principio se utiliza un solo canal de medida, por lo que antes se debe multiplexar esta entrada, para seleccionar los diferentes electrodos de los que se mide.

La etapa de digitalización en un principio se puede realizar mediante el códec interno de la Evaluation Board, este es un códec de audio, por lo que está optimizado para esto y si bien tiene 24 bits de resolución, puede haber otros problemas. En vista del resultado de esta implementación, es posible mejorar esta etapa utilizando un ADC externos, de mejor precisión, sin necesidad de que tengan 24 bits de resolución, con 16 bits ya es suficiente para obtener buenos resultados.

Uno de los problemas mencionados del uso de un canal de entrada es el aumento del tiempo de adquisición de datos. En este caso tenemos una frecuencia de muestreo de  $96kHz$ . Debido al teorema de muestreo de Nyquist, la corriente inyectada debe ser de un máximo de  $48kHz$ , pero para tener un margen mayor la frecuencia debe estar en el orden de los  $20kHz$ . Para obtener un número de muestras decentes deberíamos muestrear cada diferencia de potencial durante ocho períodos, es decir que vamos a muestrear durante  $1/20kHz \times 8 = 0,0004s$ . El tiempo de transición del multiplexor ADG406 es de  $150ns$  máximo, por lo que no influye en estos tiempos. Por cada par de electrodos donde por los que se inyecta corriente debemos medir 13 diferencias de potencial, lo que lleva a que el tiempo de tomar estas diferencias es de  $0,0004s \times 13 = 0,0052s$ . Al ir rotando los electrodos de corriente tenemos que repetir estas 13 medidas 16 veces, por lo que el tiempo total de medida de tensiones es  $0,0052s \times 16 = 0,0822s$ . El tiempo de reconstrucción de la imagen está en el orden de  $0,01s$  si se utilizan métodos lineales de un solo paso como los que se verán más adelante. Considerando también otros tiempos, podríamos estimar el tiempo de reconstrucción en  $0,1s$  lo que daría una tasa de imágenes de  $1/0,1s = 10$  imágenes por segundo.

Esto quiere decir que utilizar un canal de medida de tensión, si bien enlentece el proceso de recolección de datos, permite obtener una tasa de imágenes más que razonable para la aplicación que buscamos nosotros.

Obviamente el desarrollo anterior es un estimado, y en la realidad esta tasa será menor. De todas formas, para el seguimiento a largo plazo que buscamos nosotros, una tasa de hasta una imagen por segundo es más que suficiente, por lo que podemos decir que utilizando un solo canal de entrada estamos cumpliendo este requerimiento e incluso podemos aumentar el tiempo de muestreo hasta casi diez veces, de forma de aumentar relación señal a ruido como se indica en la sección 3.5.

En función de los resultados obtenidos, también puede verse que un solo canal de entrada no es lo conveniente, debido al ruido introducido por el multiplexor u otros inconvenientes. En este caso se deben implementar más canales de entrada, 16 en lo posible, junto con 16 ADCs, que pueden estar agrupados en pocos integrados, por ejemplo el AD7689 (AD) que cuenta con ocho canales de entrada.

Este *front end* con varios canales de entrada también se puede implementar con

## Capítulo 6. Nuevo diseño para IMPETOM

Evaluation Boards, debido a las ventajas ya mencionadas para el caso del DSP. La Circuit Evaluation Board CN0254 utiliza el integrado AD7689. Ésta ya cuenta con amplificación y aislación entre la entrada y el circuito.

Luego de digitalizar las señales se pasa al procesamiento puramente utilizando el DSP y la memoria. Aquí se realiza la demodulación sincrónica. De ser necesario se pueden implementar filtros digitales, para eliminar el ruido de  $50Hz$  por ejemplo, aunque se debe tener en cuenta el retardo que producen estos filtros, ya que la demodulación se basa en la sincronización de la señal de entrada con la de referencia. La figura 6.1 ilustra el nuevo diseño para IMPETOM.

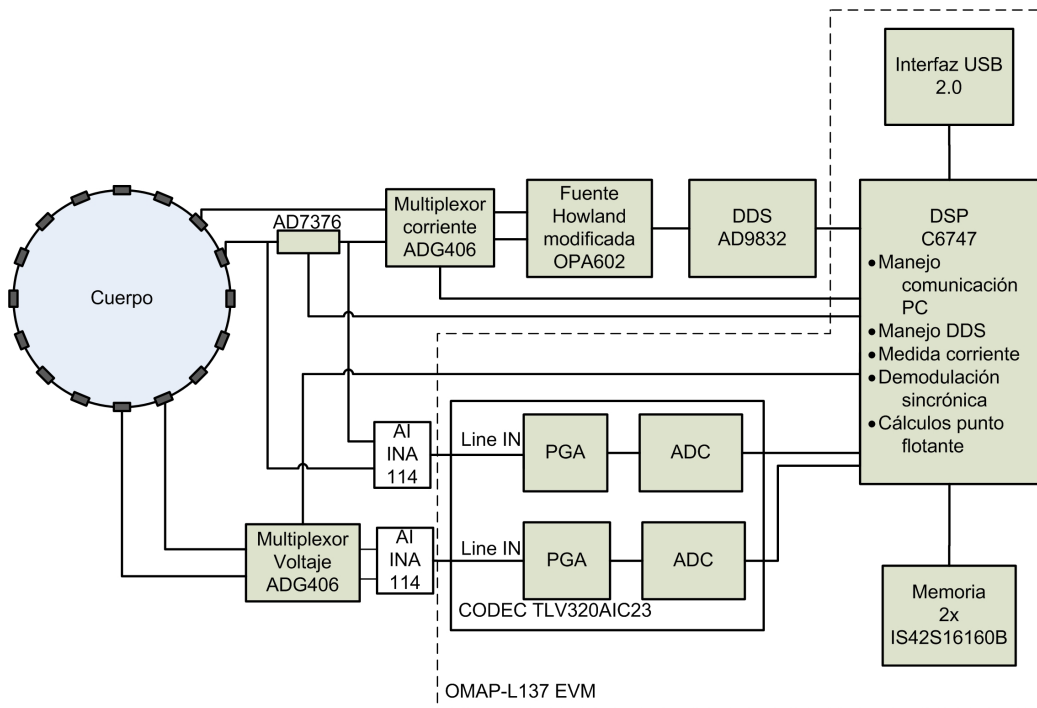


Figura 6.1: Nuevo diseño propuesto para IMEPTOM.

Si bien, por razones de tiempo y dificultad no quedó dentro del alcance de esta tesis el armado de una circuitería completa de EIT, sí es de interés del NIB contar con este prototipo en el futuro, en base a proyectos de fin de carrera de estudiantes o investigaciones propias del grupo. Por eso es de utilidad marcar diferentes pasos, a modo de proyectos intermedios, que sirvan para guiar el camino hacia el prototipo final.

## 6.2. Etapas de la implementación del proyecto

### IMPETOM-B: Utilización de la Evaluation Board

Una primera etapa es el uso de la Evaluation Board, tratando de implementar lo más posible del sistema simplemente con esta placa. Aparte del control de la

## 6.2. Etapas de la implementación del proyecto

multiplexación, el manejo de los datos, y el traspaso de estos a la PC, se puede explorar la generación de señal mediante el códec de audio. También la medida de voltajes mediante los canales de entrada del códec y la demodulación de la señal en el DSP. Este proyecto requiere el manejo de las herramientas para programar el DSP, así como el entendimiento de su funcionamiento.

Requiere manejar la comunicación con la PC, la memoria, el códec de audio y puertos de propósito general. No se requiere la construcción de ninguna circuitería. Esta etapa se representa en la figura 6.2.

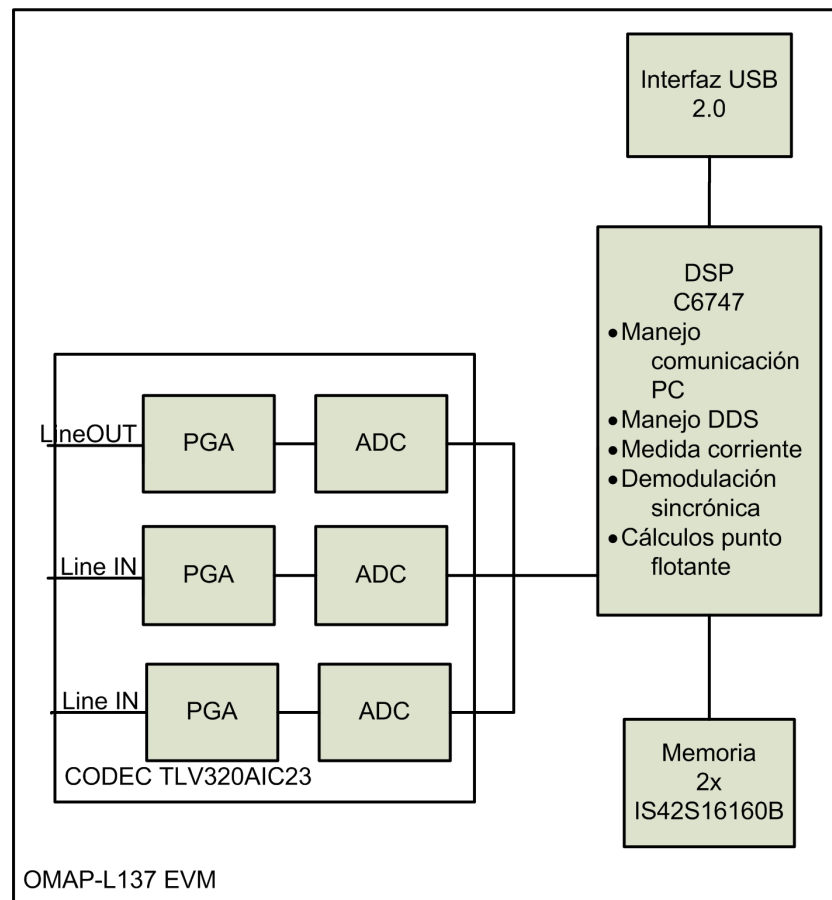


Figura 6.2: Primera etapa para el desarrollo del nuevo diseño de IMEPTOM, utilización de la tarjeta de evaluación.

### IMPETOM-G: Fuente de corriente controlada y medida de tensión

La segunda etapa corresponde a la construcción del circuito de fuente de corriente, con el generador de señal mediante el DDS, y la fuente de Howland modificada, se utiliza el potenciómetro para medir la corriente inyectada.

Además de la etapa de medida de tensión, mediante el amplificador de instrumentación, la aislación del sistema y el estudio y diseño de la cinta con electrodos

## Capítulo 6. Nuevo diseño para IMPETOM

para colocar en el paciente.

Este proyecto cuenta con el montaje del circuito para la fuente de corriente, junto a la programación del DDS, y el montaje del circuito de medida de tensión, el diseño y construcción del cinto con electrodos. Un esquema se muestra en la figura 6.3.

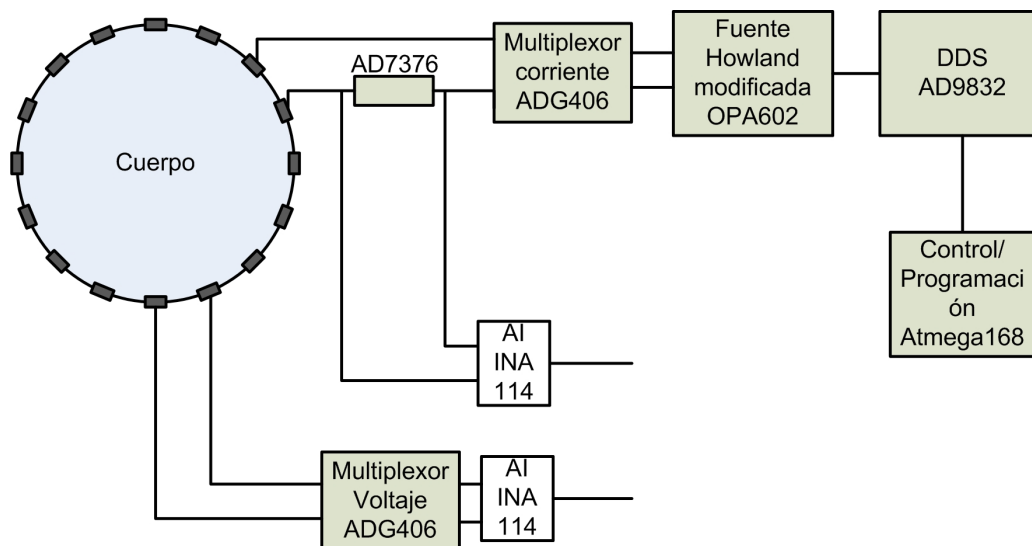


Figura 6.3: Segunda etapa para el desarrollo del nuevo diseño de IMEPTOM, Creación del *front end*.

Estas dos etapas se pueden realizar, en gran parte, en paralelo.

### IMPETOM-D: IMPETOM con DSP y *front end*

La unificación de las dos primeras etapas sería un tercer proyecto, posterior a los dos primeros, donde se deberá coordinar, mediante el DSP, los primeros dos proyectos. El resultado debería ser un primer sistema de adquisición de datos con el que se pueda medir el rendimiento del diseño y detectar fallas en el mismo.

Este proyecto requiere conocer el funcionamiento del DSP y de las etapas de fuente de corriente y de medición de tensión, además deberá generar protocolos para la medición del rendimiento y la aplicación de los tests.

Se deberá obtener medidas que permitan medir el rendimiento del equipo y concluir si es necesario realizar un re-diseño. El resultado de esta etapa es un sistema como el descrito en la figura 6.1.

### IMPETOM-F: IMPETOM funcional

Dado los resultados de diseño anterior, se puede concluir que el diseño es lo suficientemente bueno como para seguir trabajando en el prototipo en esa línea.

Uno de los posibles problemas que se pueden detectar es en el uso del códec de audio para la conversión analógica digital de las señales medidas, en este caso se

## 6.2. Etapas de la implementación del proyecto

deberá realizar una circuitería que incorpore conversores externos y que pasen las señales en formato digital al DSP. En este punto, también se deberá considerar, de acuerdo a lo concluído anteriormente, si es necesario implementar dieciséis canales de entrada, en este caso, se debe explorar la capacidad de hacer esto mediante una Circuit Evaluation Board.

Este proyecto debe concluir nuevamente con un prototipo que permita tomar datos, nuevamente se mide el rendimiento del equipo, y se deja lugar a pequeñas mejoras que se piense que se puedan hacer. Esta etapa se ilustra en la figura 6.4.

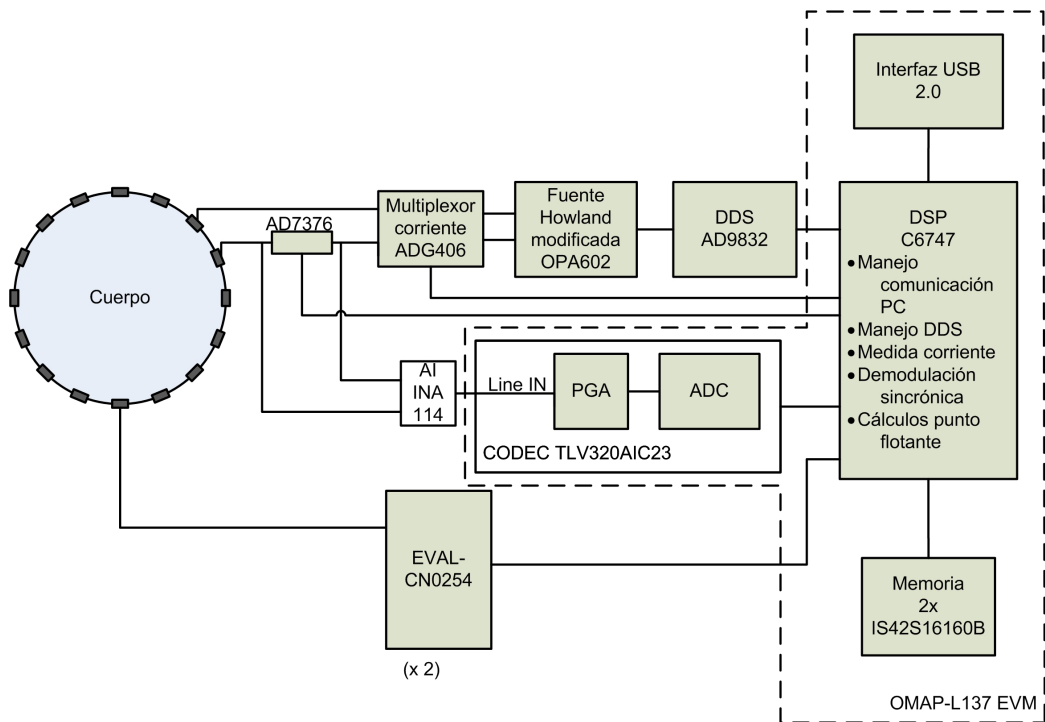


Figura 6.4: Última etapa para el desarrollo del nuevo diseño de IMEPTOM. Se considera la utilización de 16 canales de voltaje mediante una tarjeta de evaluación.

### IMPETOM-P: Pruebas sobre IMPETOM

Ya sea que el diseño original se consideró satisfactorio, o se debió rediseñar alguna parte, se requiere una última etapa donde se acondicione definitivamente el prototipo en un gabinete, y se realicen pruebas de validación en fantasmas y animales o voluntarios.

Esta etapa no tiene por que ser parte de un proyecto de ingeniería, ya que requiere conocimientos de diseño industrial y de protocolos de validación de datos. En esta etapa se puede validar tanto la circuitería sola, como el conjunto con la reconstrucción, y en caso de que esté completado el programa para adquisición de datos en tiempo real, el sistema completo.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.



# Capítulo 7

## Problema inverso y problema directo

### 7.1. Manejo de problemas inversos

Muchas veces, para obtener el valor de una propiedad o parámetro, ésta no puede medirse directamente, sino que debe inferirse de otras propiedades, resultado de experimentos y observaciones. Esto se da en todas las áreas de la ingeniería y la ciencia, siendo muy común en medicina y en el tratamiento de imágenes. Ejemplos de esto son la tomografía, donde se infiere la atenuación a los rayos X en cada punto del cuerpo en base a las atenuaciones medidas al atravesar los rayos el cuerpo, o la fotografía, donde la intensidad de la luz emitida y reflejada por los cuerpos es inferida en base a los voltajes generados por las ondas que entran en contacto con los sensores.

La obtención de estos parámetros en base a observaciones externas es lo que se denomina problema inverso, en contraposición a lo que se denomina problema directo, que es la deducción de estas observaciones en base al conocimiento de la propiedad que las causa.

Quizás uno de los ejemplos más simples de problema inverso en el área médica es el electrocardiograma (ECG). En este estudio el comportamiento eléctrico del corazón es inferido en base a medidas de tensiones realizadas en la superficie del cuerpo humano.

Para resolver el problema inverso lo fundamental es conocer y saber resolver el problema directo. El problema directo se puede resolver de muchas formas, pero generalmente se debe contar con un modelo del sistema en el que estamos trabajando. Este modelo consiste en una representación del medio físico en el que estamos y un conjunto de leyes que relacionan la causa con el efecto que queremos. En ECG el modelo más simple para esto es el llamado modelo del dipolo [84], en el que se modela el cuerpo humano como una esfera homogénea, lineal e isotrópica con una conductividad única. La actividad eléctrica del corazón se modela como un dipolo de corriente, resultado de la suma de la actividad eléctrica debido a la propagación de potenciales de acción en cada célula cardíaca. Las leyes físicas que permiten determinar los potenciales en el borde son las que vinculan la densidad de corriente con el potencial, es decir la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchoff. Como

## Capítulo 7. Problema inverso y problema directo

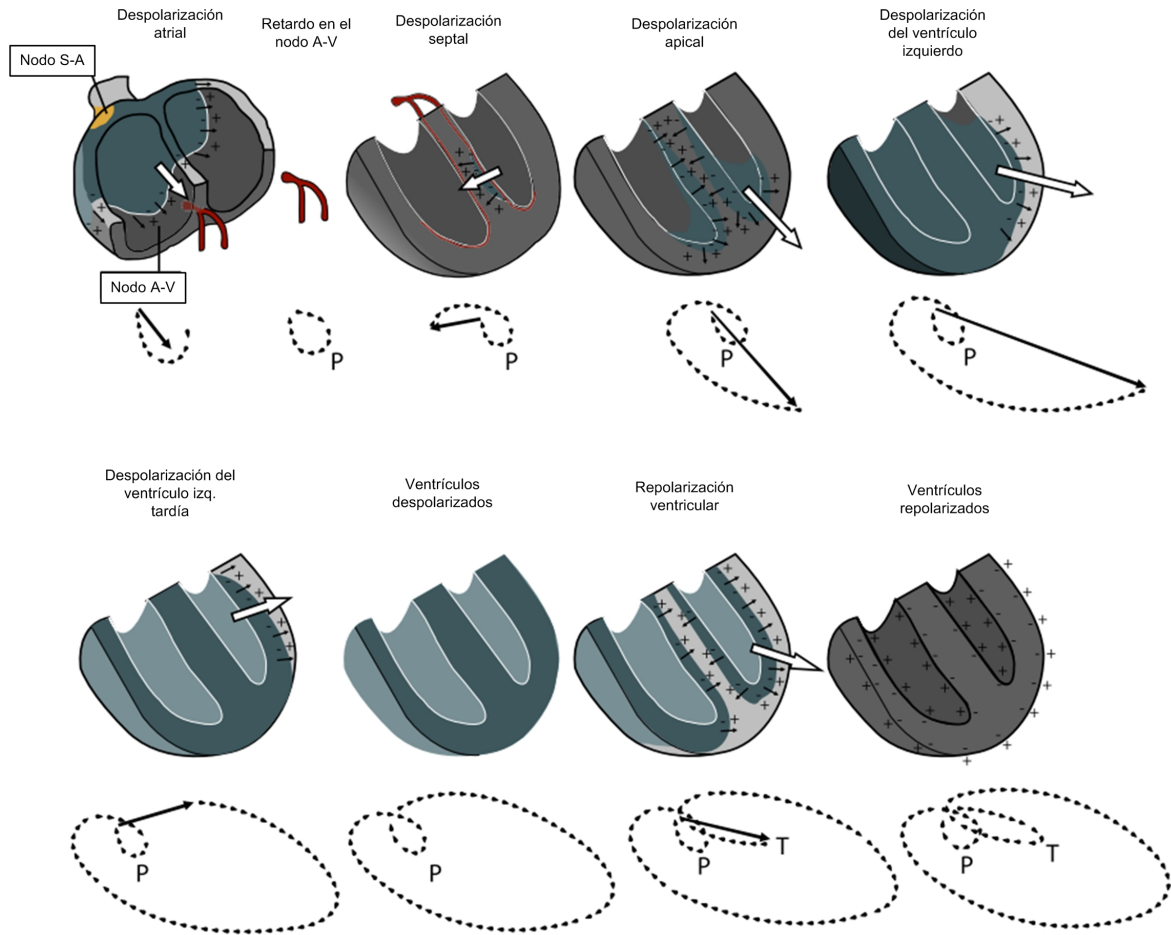


Figura 7.1: Vector corazón para una secuencia normal de despolarización ventricular. Tomado de [84]

veremos más adelante, estas son las mismas leyes que se utilizan en la tomografía por impedancia eléctrica. Con este modelo podemos obtener, para diferentes comportamientos del corazón, cómo son los potenciales en la superficie, por ejemplo, como se ve en la figura 7.1 podemos deducir cómo va a ser la diferencia de potencial entre los electrodos colocados en los brazos del paciente para un comportamiento normal del corazón al proyectar el vector corazón en el vector que va del hombro derecho al hombro izquierdo.

La resolución del problema inverso podría realizarse de forma analítica si fuera posible la inversión de las ecuaciones que rigen el sistema, en la gran mayoría de los casos esto no es posible. La mayoría de las veces la solución se obtiene mediante la comparación de los resultados observados con diferentes soluciones al problema directo. Siendo la solución al problema inverso la causa que produjo el efecto más similar a las observaciones que nosotros obtuvimos. La similitud de las soluciones

## 7.2. Mal condicionamiento

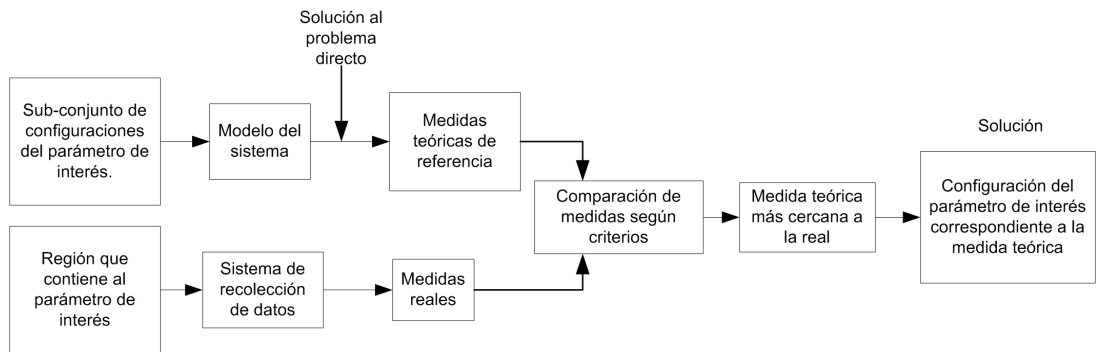


Figura 7.2: Esquema de posible resolución de problemas inversos mal condicionados

va a estar dada por diferentes factores y va a depender del espacio y la norma con la que trabajemos. Ver figura 7.2

Aquí aparece uno de las principales dificultades para resolver problemas inversos, y es que los datos observados pueden llevar a soluciones que no estén dentro de las soluciones esperables.

## 7.2. Mal condicionamiento

En el caso del problema directo, la función que transforma las causas en efectos generalmente tiene cierta continuidad natural, esto hace que pequeñas variaciones en la causa generen pequeñas variaciones en el efecto. Esto es lo que se denomina un problema bien condicionado. Este término surge de una publicación de Hadamard [33, p. 51] en el que describe tres atributos que debe tener un problema físico para considerarse bien condicionado:

- Existencia de la solución,
- unicidad de la solución y
- estabilidad de la solución.

El último punto indica que la solución debe depender de forma continua de los datos del problema, esto es lo que explicábamos anteriormente de la proximidad de las soluciones dada la proximidad de los datos.

Los problemas inversos generalmente no cumplen con estas condiciones, siendo lo que se llaman problemas mal condicionados. El tercer punto es el más importante para el mal condicionamiento, este es el caso en que pequeñas perturbaciones en las medidas llevan a soluciones muy lejanas a la original. Esto significa que errores en las observaciones, por más pequeños que sean, pueden llevar a soluciones arbitrariamente lejanas a la correcta y generalmente que no se corresponden con soluciones posibles en la realidad. Estos errores son propios de cualquier sistema de medición o de recolección de datos, y se pueden deber a ruido externo que se

## Capítulo 7. Problema inverso y problema directo

introduce en las medidas o al error propio introducido por los componentes. El mal condicionamiento hace difícil de resolver los problemas inversos.

La principal forma de solventar esta dificultad es a través del conocimiento previo del conjunto de soluciones posibles, de forma de limitar nuestras soluciones a este conjunto. Una de las técnicas para realizar esto se denomina regularización, que se explicará con más detalle adelante, pero básicamente consiste en tomar una solución de referencia y movernos en el entorno de esa solución.

Sin embargo, cabe destacar que en el caso de ECG el médico no obtiene el problema inverso solucionado, sino que debe observar las mediciones realizadas y él mismo deducir cual es el comportamiento del corazón. Por lo que la resolución del problema inverso la realiza el médico.

### 7.3. Descripción del problema de tomografía por impedancia eléctrica

La tomografía por impedancia eléctrica es un problema inverso, ya que partimos de medidas de tensiones y corrientes en el borde del cuerpo para llegar a un parámetro interno que es la conductividad y que es la que determina estas medidas. Además es un problema mal condicionado. De las tres características detalladas anteriormente, podemos decir que la solución existe, ya que el cuerpo tiene una conductividad. Que esta solución es única se puede demostrar solamente para ciertas condiciones [67] [115] [73] [110] pero podemos asumir que es cierto en nuestro caso, sin embargo es la tercera condición la que no se cumple, ya que pequeñas perturbaciones en la tensión medida lleva a conductividades que varían mucho de la solución correcta, por lo que veremos, para solucionar este problema deberemos contar con información *a priori* y regularizarlo.

# Capítulo 8

## Ecuaciones de la Tomografía por Impedancia

### 8.1. Introducción

El problema a resolver está contenido en una región  $\Omega$  cerrada y acotada de  $\mathbb{R}^3$ , con una superficie  $\partial\Omega$ . Esta región, que en nuestro caso es el tórax humano, va a tener una impedancia dependiente de las variables espaciales. Dado que el equipo va a medir solamente la parte real del voltaje y vamos a reconstruir la conductividad, nuestra función objetivo va a ir del dominio  $\mathbb{R}^3$  a los reales  $\mathbb{R}$ . Esta función va a ser la conductividad, y la llamaremos  $\sigma(x, y, z)$ .

### 8.2. Ecuaciones de Maxwell

Dentro de la región, las ecuaciones de Maxwell son las que explican el comportamiento de los campos eléctricos y las densidades de corriente, pero se considera que a las frecuencias en que trabaja la EIT los campos magnéticos pueden ser despreciados [81, p. 6].

$\phi$  es el potencial escalar dentro de la región, y el campo eléctrico es menos el gradiente del potencial,  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . La densidad de corriente es

$$\mathbf{J} = -\sigma\nabla\phi, \quad (8.1)$$

equivalente a la ley de Ohm. Dada la ausencia de fuentes de corrientes internas, la divergencia de esta densidad debe ser cero  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ , y juntando esto con lo anterior obtenemos una formulación de la ley de kirchoff:

$$\nabla \cdot \sigma\nabla\phi = 0. \quad (8.2)$$

El gradiente  $\sigma\nabla\phi$  es

$$\left( \sigma \frac{\partial\phi}{\partial x}, \sigma \frac{\partial\phi}{\partial y}, \sigma \frac{\partial\phi}{\partial z} \right), \quad (8.3)$$

## Capítulo 8. Ecuaciones de la Tomografía por Impedancia

y la divergencia  $\nabla \cdot \sigma \nabla \phi$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \sigma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \sigma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right). \quad (8.4)$$

Para  $\sigma = 1$  es la ecuación de Laplace. En el caso real la conductividad es positiva,  $\sigma > 0$  por lo que es una ecuación en derivadas parciales elíptica de segundo orden [41, p. 312]. En el problema directo,  $\sigma$  se asume conocido y se debe hallar  $\phi$ .

Para poder resolver esta ecuación se deben dar condiciones de borde [41, p. 312], estas vienen dadas por las condiciones de Dirichlet y de Neumann.

La condición de borde de Dirichlet le da un valor al potencial en la superficie:

$$\phi|_{\partial\Omega} = u \quad (8.5)$$

Con esta condición la ecuación en derivadas parciales (PDE) tiene una solución única. La condición de Neumann especifica la densidad de corriente en la superficie en la dirección normal saliente:

$$\sigma \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = g \quad (8.6)$$

$\mathbf{n}$  es el vector unitario normal saliente a  $\partial\Omega$ , esto es lo mismo que decir:

$$\sigma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = g \quad (8.7)$$

Dónde  $g$  es la densidad de corriente entrando al cuerpo. En el caso en que tenemos electrodos, la función  $g$  va a ser el valor de la corriente por los electrodos, y cero en el resto del cuerpo.

Cuando consideramos los electrodos, se debe tener en cuenta que en estos se genera una caída de tensión, por lo que para tener un modelo más completo de las condiciones de borde se deben combinar las dos vistas previamente, lo que es lo que se llama el modelo completo del electrodo y toma en cuenta la impedancia de contacto. Más adelante se explica esto en detalle. Considerando por ahora electrodos puntuales, lo usual es contar con  $\sigma$  y una condición de borde, y con esto resolver la PDE.

Para las condiciones de borde,  $u$  puede ser cualquiera, pero  $g$  debe tener integral cero en la superficie, ya que la corriente que entra es igual a la que sale:  $\int_{\partial\Omega} g = 0$ . Hay que tener en cuenta que si especificamos el potencial en el borde, la solución es única, ahora, si especificamos la densidad de corriente en el borde, la solución no es única, ya que si encontramos un  $\phi$  que sea la solución,  $\phi + c$  también lo va a ser debido a que en la condición de borde  $\sigma \nabla \phi \cdot \mathbf{n} = g$ , la derivada de la constante desaparece. Por lo que en este caso, la solución queda determinada a menos de una constante, equivalente al valor de tierra.

### 8.3. Potencia disipada

Si vemos el mismo problema desde el punto de vista de la potencia, tenemos que esta es:

$$P = IV = \frac{V^2}{R}. \quad (8.8)$$

### 8.3. Potencia disipada

Dónde  $P$  es la potencia,  $V$  el voltaje,  $I$  la corriente y  $R$  la resistencia.

En el caso nuestro podemos hablar de una densidad de potencia  $DP$  a partir de la ecuación 8.1,

$$DP = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}, \quad (8.9)$$

esto una densidad, y por tanto sus unidades serían  $W/m^3$ . Mide la energía que entregamos al cuerpo, y debemos limitarla por razones de seguridad, ya que es fuente de calentamiento y podemos llegar a herir al paciente.

La potencia total disipada en el cuerpo es:

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dx dy dz. \quad (8.10)$$

Por conservación de la energía, esta potencia disipada tiene que ser igual a la aplicada en la superficie del cuerpo, que se puede expresar como:

$$\int_{\partial\Omega} \phi \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{S}, \quad (8.11)$$

donde  $\mathbf{S}$  es una medida de la superficie de la región. Por lo que desde este punto de vista, el sistema queda definido por la ecuación que iguala la potencia disipada con la aplicada en la superficie:

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \phi \sigma \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} d\mathbf{S}. \quad (8.12)$$

Con esto vemos que se puede iniciar con la potencia a partir de la ecuación 8.10 y derivar todo el problema a partir de ahí desde una perspectiva más física. Aunque vemos que en esta ecuación solo aparece la derivada primera de  $\phi$ , mientras que antes teníamos derivadas segundas, por lo que vemos que desde este punto de vista aparecen restricciones que antes no aparecían.

Un primer punto es que la potencia disipada debe ser finita por cuestiones de seguridad, como dijimos. Entonces la integral  $\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\mathbf{x} < C$ . Esto da una restricción en el voltaje, que puede tener saltos pero que la integral debe permanecer finita. Esta limitación que en principio es puramente física, tiene una propiedad matemática asociada que es común para la resolución de PDEs. Esta es que si

$$\int_{\Omega} |\phi|^2 + |\nabla \phi|^2 d\mathbf{x} < \infty \quad (8.13)$$

decimos que  $\phi$  pertenece a  $H^1(\Omega)$ , siendo  $H^1$  el espacio de sobolev de primer orden (ver apéndice A). Para la solución de la ecuación en derivadas parciales elíptica, importa solamente el término  $|\nabla \phi|^2$ , si este es integrable esto significa que  $|\phi|^2$  también es integrable y que su integral es finita. Además, si la conductividad  $\sigma$  está acotada entre ciertos valores, tampoco va a afectar, por lo que la condición de que  $\int_{\Omega} \sigma \nabla \phi \cdot \nabla \phi d\mathbf{x}$  sea finita es equivalente a decir que  $\phi$  debe pertenecer a  $H^1$ . Estos espacios de Sobolev indican cuantas derivadas tiene la función, en un sentido más débil, ya que solo exige que el cuadrado de la derivada sea integrable, en cierta forma es una diferenciabilidad en sentido del promedio.

Esta restricción es importante para la resolución numérica del problema, ya que las funciones  $\phi$  en  $H^1$  son el tipo de elementos que podemos aproximar mediante el método de elementos finitos 9.2.

## 8.4. Modelo completo del electrodo

El problema al que nos enfrentamos es al de trasladar las corrientes en la superficie en voltajes en la superficie, esto corresponde a condiciones de Neumann y condiciones de Dirichlet, por lo que tenemos el operador

$$\Lambda_\sigma : \phi|_{\partial\Omega} \rightarrow j. \quad (8.14)$$

Este operador es lo que se llama transconductancia, y depende de la conductancia interna del cuerpo. El problema inverso es la obtención de  $\sigma$  a partir del operador  $\Lambda_\sigma$

$$\Lambda_\sigma \rightarrow \sigma \quad (8.15)$$

el cual toma los datos de corriente y tensiones en la superficie y devuelve el valor de la distribución de la conductividad.

Si tomamos en cuenta un modelo más real para los electrodos, estos van a contar con una superficie de contacto  $E_l$  para el electrodo  $l$ .  $L$  es el número total de electrodos, por lo que  $1 \leq l \leq L$ . La corriente y el voltaje (respecto de cierta referencia) en el electrodo  $l$  lo llamaremos  $I_l$  y  $V_l$  respectivamente. Si consideramos que los electrodos son conductores perfectos, cada uno va a tener un  $V_l = \text{phi}$  en  $E_l$  constante. Además, en la superficie que no está cubierta por electrodos no puede fluir corriente dentro y fuera del cuerpo, esto es  $\partial\phi/\partial\mathbf{n} = 0$ , las corrientes por los electrodos son

$$I_l = \int_{E_l} \sigma \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} d\mathbf{S}. \quad (8.16)$$

El problema completo queda determinado por la ley de kirchoff 8.2, más las condiciones de borde dadas por los electrodos:

$$\int_{E_l} \sigma \partial\phi/\partial\mathbf{n} = I_l \quad (8.17)$$

$$\partial\phi/\partial\mathbf{n} = 0, \text{ en } \Gamma' \quad (8.18)$$

$$\nabla\phi \times \mathbf{n} = 0, \text{ en } \Gamma \quad (8.19)$$

donde  $\Gamma = \bigcup_l E_l$  y  $\Gamma' = \partial\Omega - \Gamma$ . La última condición indica que la tensión phi en los electrodos es constante.

Los electrodos médicos, ya sea los de Ag/AgCl, u otros, van a tener una impedancia asociada al contacto con la piel, esta va a generar una caída de potencial a través de esta interfaz de contacto, esta es

$$\phi + z_l \sigma \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = V_l \quad (8.20)$$

Donde la impedancia de contacto  $z_l$  puede variar en cada electrodo  $E_l$ , aunque generalmente se asume constante. Esta condición 8.20, junto con 8.17 y 8.18 forman lo que se denomina modelo completo del electrodo o CEM.



# Capítulo 9

## Problema Directo

### 9.1. Planteo del problema directo

Para resolver el problema inverso, como ya fue mencionado, es indispensable conocer el problema directo, el cual se representa a través del mapeo  $\sigma \in \Sigma \mapsto u \in U$  donde  $u$  representa el potencial medido en la frontera de la región, y  $U \subseteq H^{1/2}$  siendo  $H^{1/2}$  el espacio de Sobolev de orden 1/2, para que la potencia disipada dentro del cuerpo no sea infinita (ver [4] y apéndice A). <sup>1</sup>  $\sigma$  es la función que representa la conductividad dentro del cuerpo, teniendo que  $\Sigma = \{\sigma \in L^\infty \text{ tal que } \text{ess\,inf } \sigma > 0\}$  porque la conductividad debe ser positiva. Este mapeo es el que lleva las conductividades en el interior de la región en potenciales en la frontera. Este se debe resolver para diferentes conductividades pre determinadas de forma de tener voltajes teóricos para poder compararlos con los medidos. Además, los campos eléctricos internos son necesarios para el cálculo de la matriz Jacobiana.

Para un problema no lineal, el problema directo se expresa como:

$$u = h(\sigma), \tag{9.1}$$

y si el problema es lineal,

$$u = H\sigma, \tag{9.2}$$

Encontrar el operador directo no lineal  $h$  mediante métodos analíticos en EIT es solo posible en casos con geometrías y conductividades muy simples [81, p. 29], como pueden ser en dominios circulares o fantomas tipo tanques [96], [97] pero estas soluciones no se pueden extender a casos de geometrías más generales y conductividades más complejas. A su vez, en estos casos más simples se considera conductividades homogéneas. Para el resto de los casos es necesaria la discretización tanto de la región como de la resistividad, y el uso de métodos numéricos

---

<sup>1</sup>Para este documento se prefirió omitir algunos temas relacionados al análisis real y funcional, esto debido a que la complejidad del tema excedería el alcance de esta tesis, la mención a los espacios de Sobolev es debido a su fuerte relacionamiento con propiedades físicas del problema, pero otras definiciones y propiedades matemáticas más estrictas relacionadas a los espacios funcionales que intervienen son obviadas.

como el de Elementos Finitos para arribar a formulaciones discretas del problema y luego, si se quiere, linealizarlo con ayuda de la matriz jacobiana para llegar a una formulación como en 9.2, sin nunca llegar a conocer el operador  $h$ .

### 9.2. Método de Elementos Finitos

Para reconstrucciones en dominios más generales, y mediante métodos no lineales, es necesario el uso de técnicas numéricas para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales, los tres métodos más utilizados son el método de diferencias finitas (FDM), el de elementos finitos (FEM) y el de elementos de borde (BEM). Estos son descritos en detalle en diferentes publicaciones [68].

El método de diferencias finitas discretiza el dominio  $\Omega$  con una grilla regular, las coordenadas de cada punto en la grilla son del tipo  $x = lh$ ,  $y = mh$  y  $z = nh$ , con  $l$ ,  $m$  y  $n$  enteros. El potencial  $\phi(x, y, z)$  es evaluado en cada punto y se escribe como  $\phi(l, m, n)$ . El teorema de Taylor se utiliza para obtener la ecuación en diferencias, por ejemplo para expresar  $\partial\phi(l, m, n)/\partial x$  como función de  $\phi$  en  $(l - 1, m, n)$ ,  $(l, m, n)$  y  $(l + 1, m, n)$ , lo que convierte la ecuación en derivadas parciales en un operador lineal algebraico. Esto se repite por cada punto, logrando un sistema de ecuaciones lineales del tipo  $A\phi = b$ , la cual puede ser resuelta para el potencial eléctrico en los puntos de la grilla, dado los datos especificados en el borde por  $b$ . Este método es usado en aplicaciones geofísicas de EIT [16] donde la imagen del terreno se modela como un subespacio de  $\mathbb{R}^2$ . La simplicidad geométrica del dominio hace que esta solución numérica sea aplicable. Sin embargo, para dominios más complejos es necesaria una discretización con elementos muy pequeños y técnicas especiales para tratar los bordes curvados [16] por lo que no es un método atractivo para EIT. El BEM realiza una reducción de un grado en la dimensionalidad del problema, transformando los operadores diferenciales definidos en el dominio en un operador integral definido en el borde. La variable dependiente se asume constante en cada subdominio, por lo que la región debe segmentarse en muchas sub regiones, dependiendo de su heterogeneidad, por lo que este método es propicio para dominios altamente homogéneos, ya que si el dominio es muy heterogéneo, la discretización debe ser muy grande. Además este método utiliza matrices densas, por lo que es caro computacionalmente [16].

El método de elementos finitos [72] [68] consiste en discretizar la región  $\Omega$  en un número, no uniforme, no solapados, de elementos conectados vía nodos. El potencial  $\phi$  es aproximado dentro de cada elemento por una función definida por los valores en los nodos de los elementos. El principio de Galerkin es convertir las ecuaciones en derivadas parciales originales en un conjunto de ecuaciones integrales para cada valor en los nodos. Combinando las ecuaciones sobre el dominio, el potencial eléctrico  $\phi$  en cada nodo puede ser expresado mediante matrices  $A\phi = b$ . Este método es muy adaptable a diferentes geometrías del dominio, condiciones de borde y heterogeneidad del dominio, por eso es la opción más utilizada para EIT.

## 9.3. Formulación de Elementos Finitos

El problema queda descrito por las ecuaciones anteriores 8.2, 8.17, 8.18, 8.20, estas son las que definen el valor del potencial en el dominio y son las que se utilizan para la aplicación del método de elementos finitos.

Se comienza aproximando el dominio  $\Omega$  como un número finito de elementos. En dos dimensiones un elemento es un triángulo y en tres dimensiones es un tetraedro. La colección de los elementos se llama malla de elementos finitos. Supondremos que hay  $k$  elementos con  $n$  vértices.

La transformación desde el dominio continuo y operadores integrales al dominio discreto y matrices se logra mediante métodos de aproximación integral como el de Galerkin [10]. Para aplicar el método de Galerkin aproximamos el potencial  $\phi$  dentro de la región como una combinación lineal de funciones interpolantes  $\alpha$ , tales que valen uno en un vértice y cero en el resto:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{en el vértice } i \\ 0 & \text{en cualquier otro,} \end{cases} \quad (9.3)$$

por lo que la aproximación del potencial se puede escribir como

$$\phi_\alpha = \sum_{i=1}^n \Phi_i \alpha_i. \quad (9.4)$$

Donde  $\Phi$  es el valor del potencial en el vértice  $i$ .  $\phi_\alpha$  es una combinación lineal de las funciones bases  $\alpha_i$ , ponderadas por el vector  $\Phi_i$ . Las funciones  $\alpha$  pueden tener diferentes características, como ser lineales o cuadráticas.

La conductividad la vamos a considerar constante dentro de cada elemento, por lo que  $\sigma$  se discretiza como:

$$\sigma = \sum_{i=1}^k \sigma_i \beta_i, \quad (9.5)$$

donde las funciones  $\beta_i$  son constantes en cada elemento:

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{en el elemento } i \\ 0 & \text{en cualquier otro elemento.} \end{cases} \quad (9.6)$$

Planteando el problema de esta forma debemos seguir cumpliendo con las ecuaciones del sistema, estas son ecuaciones en derivadas parciales. Una forma de llegar a la formulación matricial es la desarrollada por Polydorides en [98, p. 44]. Ahí se llega a que para todos los elementos de la malla,  $i, j = 1, \dots, n$ :

$$\iiint_{\Omega_E} \sigma \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\Phi_j}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\Phi_j}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\Phi_j}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial \Omega_E} \alpha_i \frac{1}{z_l} (V_l - \Phi_j \alpha_j) d\mathbf{S}, \quad (9.7)$$

con  $z_l$  la impedancia de contacto del electrodo  $l$  y  $V_l$  el potencial medido en él.

## Capítulo 9. Problema Directo

El objetivo del método de elementos finitos es el de convertir esta ecuación en algo matricial, para esto se evalúa para todos los vértices  $n$  de la malla.

Para un elemento cualquiera, si  $\Phi \in \mathbb{R}^4$  es el vector que contiene el potencial en cada uno de sus nodos, podemos factorizar respecto de él en 9.7 y obtener una representación matricial, para esto llamamos  $A_m \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  al término de la izquierda:

$$A_m(i, j) = \iiint_{\Omega_E} \sigma \left( \frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \frac{\partial \alpha_j}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \frac{\partial \alpha_j}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \frac{\partial \alpha_j}{\partial z} \right) dx dy dz \quad i, j = 1, \dots, 4, \quad (9.8)$$

y  $A_z \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  y  $A_v \in \mathbb{R}^4$  a los términos de la derecha:

$$A_z(i, j) = \iint_{\partial \Omega_E} \frac{1}{z_l} \alpha_i \alpha_j d\mathbf{S} \quad i, j = 1, \dots, 4, \quad (9.9)$$

$$A_v(i) = \iint_{\partial \Omega_E} \frac{1}{z_l} \alpha_i d\mathbf{S} \quad i = 1, \dots, 4. \quad (9.10)$$

y la representación matricial para el elemento  $n$  queda:

$$(A_m + A_z)\Phi = A_v V_l. \quad (9.11)$$

Estas matrices van a depender de la ubicación del elemento, por ejemplo, en caso de elementos que no están en contacto con electrodos  $A_z$  va a ser cero.

A esta representación debe agregarse la corriente inyectada por los electrodos, esto se hace utilizando la ecuación 8.17. Debemos considerar que tenemos una cantidad  $p$  de elementos ubicados debajo del electrodo, por lo que la superficie es la suma de la superficie de los elementos debajo de él:

$$\partial \Omega_E = \bigcup_{i=1}^p \partial \Omega_{E_i} \quad (9.12)$$

y la corriente que se inyecta por el electrodo  $l$   $I_l$  es:

$$I_l = \iint_{\partial \Omega_E} \frac{1}{z_l} (V_l - \phi_\alpha) d\mathbf{S} = \sum_{i=1}^p \iint_{\partial \Omega_{E_i}} \frac{1}{z_l} (V_l - \Phi_j \alpha_j) d\mathbf{S} \quad j = 1, \dots, 4. \quad (9.13)$$

Donde el índice  $j$  corresponde a los vértices del elemento  $i$ . El término con el potencial del electrodo  $V_l$  es constante para toda la superficie  $E_l$ , por lo que sale de la integral multiplicado por el área  $E_l$ :

$$I_l = \frac{1}{z_l} E_l V_l - \sum_{i=1}^p \frac{1}{z_l} \Phi_j \iint_{\partial \Omega_{E_i}} \alpha_j d\mathbf{S} \quad j = 1, \dots, 4. \quad (9.14)$$

El término  $\frac{1}{z_l} E_l$  es un estimado de la impedancia de contacto del electrodo  $l$ , y en el modelo matricial de FEM forma una matriz diagonal  $A_D \in \mathbb{R}^{L \times L}$ , donde el valor de los elementos de la diagonal son justamente  $\frac{1}{z_l} E_l$ . Hasta ahora tenemos las

matrices  $A_m$ ,  $A_z$  y  $A_v$  correspondientes a cada elemento, para obtener el modelo de toda la malla debemos construir las matrices que unen estas matrices para todos los elementos. Es claro que estas matrices van a ser *sparse*, y que muchos de sus elementos serán cero.

La matriz  $A_M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se forma a partir de las matrices  $A_m$  a las cuales se les suma los  $A_z$  correspondientes. Luego  $A_V \in \mathbb{R}^{n \times L}$  y  $A_V^T \in \mathbb{R}^{L \times n}$  se forman de manera similar a partir de  $A_v$ . Junto con  $A_D$  tenemos la representación correspondiente al modelo completo del electrodo:

$$\begin{bmatrix} A_M + A_Z & A_V \\ A_V^T & A_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ V_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} \quad (9.15)$$

Donde  $\Phi \in \mathbb{R}^n$  es el potencial en cada nodo y  $V_L \in \mathbb{R}^L$  es el potencial en cada electrodo, e  $I$  representa el patrón de corrientes inyectado. Este desarrollo, más en profundidad, y cómo se calculan las matrices se encuentra en [98].

## 9.4. Matriz Jacobiana

Luego de obtenida la discretización mediante el método de elementos finitos y resuelto el problema directo, un siguiente paso es la linealización del problema, eso se puede realizar a través de la matriz Jacobiana. Esta matriz mide las variaciones de las tensiones medidas en la superficie cuando hay una perturbación en la conductividad de algunos de los elementos de la malla. Teniendo en cuenta que vamos a tener un vector de tensiones medidas  $U$  cuyo largo  $m$  depende del patrón de corriente que estemos inyectando y del número de electrodos con los que contamos, en nuestro caso es 208, la matriz jacobiana va a ser  $J \in \mathbb{R}^{m \times k}$  siendo  $k$  el número de elementos de la malla.

$$J = \begin{pmatrix} \partial U_1 / \partial \sigma_1 & \cdots & \partial U_1 / \partial \sigma_k \\ \partial U_2 / \partial \sigma_1 & \cdots & \partial U_2 / \partial \sigma_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial U_m / \partial \sigma_1 & \cdots & \partial U_m / \partial \sigma_k \end{pmatrix},$$

Tres de las formas más conocidas de calcular esta matriz son, el método de perturbación, donde se introduce una perturbación  $\partial \sigma_i$  en cada elemento y se resuelve el problema directo para tener la variación en los potenciales, el método de Yorkey [130] y el método de *lead field* [89] [16]. tanto el método de perturbación como el de Yorkey requieren que el problema directo se resuelva un número de veces igual al número de elementos de la matriz, los que los hace muy costosos computacionalmente. El método de la perturbación fue el más utilizado en los comienzos, ahora con modelos en tres dimensiones o con muchos elementos este es un método muy costoso y en lo posible se debería evitar. El desarrollo de estos métodos se encuentran en las referencias antes mencionadas, así como en [16] y [98].

## 9.5. Solución al Problema Directo

La solución al problema como se dejó planteado en 9.15 puede ser resuelto de forma directa o iterativa, en [98] se sugiere que los métodos iterativos son bastante más eficientes en el cómputo de la solución. Si llamamos  $A$  a la matriz que contiene las matrices  $A_M$ ,  $A_Z$ ,  $A_V$  y  $A_D$ ,  $V$  a la columna con  $\Phi$  y  $V_L$  e  $I$  la matriz que es cero en su parte superior y contiene las corrientes en la parte inferior, el problema queda:

$$A\Phi = I \quad (9.16)$$

En nuestro caso debemos obtener el vector  $\Phi$  con los potenciales a partir del conocimiento de  $A$  y de  $I$ , por lo que el problema a resolver en sí sería:

$$\Phi = A^{-1}I. \quad (9.17)$$

Este es, a diferencia del problema inverso, un problema bien condicionado, la matriz  $A$  es cuadrada y simétrica, por lo que se puede calcular mediante métodos de mínimos cuadrados (LS) y llegar a una solución estable y única.

De todas formas, calcular la inversa de forma “exacta” es muy costoso computacionalmente, ya que si se realiza esto en programas como Matlab, la tolerancia que estos programas buscan es muy baja, del orden de  $10^{-15}$ , lo que por otra parte, además de ser muy costoso computacionalmente, no es necesario tal nivel de exactitud en la inversa, ya que tanto nuestro modelo como las medidas realizadas contienen errores que hacen que nunca se pueda alcanzar niveles de exactitud muy altos, por ejemplo, para una relación de señal a ruido (SNR) de  $60dB$ , la inversa de  $A$  solo debe calcularse con una tolerancia no menor a  $10^{-4}$  [98]. Por lo que resolver directamente la inversa de  $A$  y el problema directo lleva a una introducción de cálculos innecesarios para lograr un refinamiento que no aporta nada a la solución del problema.

En cambio, si reformulamos el problema directo 9.17 como:

$$\|\Phi - A^{-1}I\|_2 \leq \epsilon \quad (9.18)$$

donde  $\epsilon$  es el error estimado de las medidas vamos a poder calcular la inversa sin un excesivo uso de memoria y de procesamiento.

Como estamos en el caso de conductividades, es decir, valores reales positivos, la matriz es definida positiva, por lo que usando la factorización de Cholesky<sup>2</sup> y encontrar una matriz  $K$  triangular que cumpla que:

$$A = K^T K \quad \text{tal que} \quad \|A\Phi - K^T K\Phi\|_2 \leq \epsilon \quad (9.19)$$

La inversa de  $A$  se puede hallar mediante la inversa de  $K$  y la propiedad:

$$(K^T)^{-1} = (K^{-1})^T, \quad (9.20)$$

---

<sup>2</sup>La factorización de Cholesky dice que una matriz  $A$  simétrica y positiva definida puede ser factorizada de manera eficiente por medio de una matriz triangular inferior y una matriz triangular superior  $A = LL^T$  donde  $L^T$  es la matriz transpuesta de  $L$ .

## 9.5. Solución al Problema Directo

por lo que solo se necesita la inversa de  $K$ . La solución a 9.17 que se obtiene mediante el método de Cholesky es

$$\Phi = K^{-1}(K^T)^{-1}I \quad \text{tal que} \quad \|\Phi - A^{-1}I\|_2 \leq \epsilon. \quad (9.21)$$

Los algoritmos iterativos van calculando aproximaciones a la inversa cada cual incrementa un poco la precisión, comienzan con una aproximación alejada de la real y luego van acercándose hasta detenerse cuando se cumple lo pre establecido como tolerancia.

Los métodos iterativos más utilizados son el *linear preconditioned conjugate gradients* (PCG) iteration, designado para la solución del problema LS, y el *bi-conjugate gradients algorithm* (BiCG), estos algoritmos se encuentran en las librerías de Matlab, y una descripción de su funcionamiento se da en [98].

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.



# Capítulo 10

## Problema inverso linealizado

### 10.1. Introducción

El problema a resolver es el mapeo  $u \in U \mapsto \sigma \in \Sigma$ , esto es claramente un problema inverso, ya que partimos de las condiciones de borde para obtener un modelo del interior de la región. Además, este problema es mal condicionado, lo que acarrea dificultades mayores cuando se trata de obtener la solución, siendo necesaria la regularización del problema.

Para resolver el problema inverso contamos con métodos probabilísticos y con métodos determinísticos. Estos últimos divididos en lineales y no lineales, dentro de cada uno de estos, además, tenemos los iterativos o de un solo paso.

Los algoritmos lineales requieren la linealización del problema, los métodos de regularización de Tijonov son un ejemplo de métodos de un solo paso, y el algoritmo de gradientes conjugados un ejemplo de método iterativo.

Los algoritmos no lineales son en su mayoría iterativos, y permiten, mediante los algoritmos adecuados, la reconstrucción de saltos en la conductividad.

Calcular la solución exacta  $\sigma$  para el problema no lineal es equivalente a encontrar un mínimo local en una gráfica no lineal. Se comienza con un punto inicial  $\sigma_0$  y se linealiza el problema alrededor de ese punto, se evalúa el jacobiano en  $\sigma_0$  y se regulariza para resolver el problema lineal obteniendo el próximo punto de la iteración. Esto crea una secuencia de soluciones lineales para las cuales la diferencia con la solución exacta va disminuyendo a medida que crecen las iteraciones. Lo más costoso es el cálculo del jacobiana luego de que se obtiene una nueva solución.

Cuando se resuelve el problema en un solo paso, el proceso anterior se corta en la primer iteración. Para que estos métodos sean eficientes se debe contar con un buen punto de partida, que asegure que la solución va a estar en su entorno.

### 10.2. Imágenes diferenciales

En EIT es usual la reconstrucción de imágenes diferenciales, esto es, mostrar las variaciones en la distribución de la conductividad respecto de una distribución original. Si las variaciones son relativamente pequeñas, estas se pueden reconstruir

## Capítulo 10. Problema inverso linealizado

de forma precisa con el modelo linealizado del problema. Para la reconstrucción de imágenes diferenciales se comienza con esta distribución de referencia  $\sigma_0$ , con sus voltajes en la superficie generados  $u_0$ , si se da una perturbación  $\delta\sigma$  vamos a obtener una nueva distribución de la conductividad  $\sigma$  diferente de  $\sigma_0$  y también  $u$  diferente de  $u_0$ . Calculando el jacobiano en  $\sigma_0$ , la forma discreta del problema linealizado para reconstrucciones diferenciales es

$$J\delta\sigma = \delta u \Leftrightarrow J(\sigma_0 - \sigma) = u_0 - u, \quad (10.1)$$

donde  $u$  son las medidas reales, y  $u_0$  fueron obtenidas mediante la solución del problema directo

$$J(\sigma_0 - \sigma) = h(\sigma_0) - u. \quad (10.2)$$

Para que la linealización sea válida la perturbación debe ser pequeña, esto implica que la imagen inicial de referencia debe ser buena. Qué tan pequeña debe ser esta perturbación para que la reconstrucción lineal sea válida no es posible saberlo de antemano, y depende de la exactitud del problema.

### 10.3. Regularización de problemas inversos mal condicionados

El problema inverso consiste en obtener los parámetros  $\sigma$  correspondiente a las observaciones  $u$  a través del mapeo  $h$ . Los errores e incertidumbres que se suman a las medidas, junto con errores que se puedan realizar en el modelado lleva a que

$$h(\sigma) - u = 0 \quad (10.3)$$

no exista, es decir, que las medidas  $u$  no están en el rango de  $h$ . Hay otros problemas asociados a (10.3). y el problema es mal condicionado en el sentido de Hadamard ya que no cumple con la tercer condición vista en 7.2, la que implica que pequeños errores en las medidas llevan a errores arbitrariamente grandes en la conductividad recuperada.

En esta sección trabajaremos con el problema lineal, es decir el operador lineal  $H$ . Una forma de encarar estos problemas es a través del método de mínimos cuadrados (MC)

$$\sigma_{MC} = \arg \min \|H\sigma - u\|^2, \quad (10.4)$$

que garantiza una solución aproximada aunque las medidas no pertenezcan al rango de  $H$ .

El núcleo de  $H$ ,  $\mathcal{N}(H) = \{\sigma \in \Sigma : H\sigma = 0\}$ , es el que nos va a dar información sobre la unicidad de la solución, ya que si consideramos un vector  $\sigma_{\mathcal{N}} \in \mathcal{N}(H)$  y sabemos que  $\sigma_{MC}$  es una solución a (10.4), entonces  $\sigma_{MC} + \sigma_{\mathcal{N}}$  también lo es. Lo que quiere decir que el núcleo de  $H$  genera soluciones no únicas para el problema.

El núcleo de esta matriz,  $\mathcal{N}(H)$ , se puede estudiar a través de la *descomposición en valores singulares* (SVD) de  $H$ .

## 10.4. Descomposición en valores singulares

La descomposición SVD de una matriz  $H \in \mathbb{R}^{D \times M}$  es de la forma [33, p. 52]

$$H = W\Lambda V^T = \sum_{i=1}^q \mathbf{w}_i \lambda_i \mathbf{v}_i^T, \quad (10.5)$$

donde  $W = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_D) \in \mathbb{R}^{D \times D}$  y  $V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_M) \in \mathbb{R}^{M \times M}$  son matrices ortonormales,  $q = \min(M, D)$ , y  $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_q) \in \mathbb{R}^{D \times M}$  es una matriz con elementos no negativos y ordenados en su diagonal, de forma que:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_q \geq 0. \quad (10.6)$$

Si  $D < M$  la matriz  $\Lambda$  es

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & & \dots & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_D & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

y si  $D > M$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_M \\ & & & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Los números  $\lambda_i$  son llamados *valores singulares* de  $H$ , y los vectores  $\mathbf{w}_i$  y  $\mathbf{v}_i$  son llamados *vectores singulares izquierdos* y *vectores singulares derechos*. Llamando  $r$  al rango de  $H$ , si  $r < q$ , los últimos valores singulares  $\lambda_{r+1}, \dots, \lambda_q$  son cero, y los correspondientes vectores singulares  $\mathbf{v}_{r+1}, \dots, \mathbf{v}_q$  pertenecen al núcleo  $\mathcal{N}(H)$ . Además, de la relación (10.5) se puede ver que  $H^T H = V\Lambda^2 V^T$  y que  $HH^T = W\Lambda W^T$  por lo que la SVD está fuertemente asociada a la descomposición por valores propios de  $H^T H$  y  $HH^T$ , y por esto se deduce que la descomposición SVD es única para una matriz  $H$ , con excepción de los vectores singulares asociados a valores singulares múltiples.

Consideremos las medidas  $u$  resultado del modelo directo  $u = H\sigma$  para un  $\sigma$  arbitrario,  $\sigma \in \Sigma$ . Dada la descomposición SVD de  $H$ , y utilizando la ortonormalidad de  $V$ , el vector  $\sigma$  se puede expresar como una combinación lineal de vectores singulares  $\mathbf{v}_i$

$$\sigma = \sum_{i=1}^r (\mathbf{v}_i^T \sigma) \mathbf{v}_i, \quad (10.7)$$

entonces

$$u = \sum_{i=1}^r \lambda_i (\mathbf{v}_i^T \sigma) \mathbf{w}_i. \quad (10.8)$$

## Capítulo 10. Problema inverso linealizado

El mal condicionamiento del problema se puede ver a través de los valores singulares decayendo a cero. Esto indica que hay ciertas imágenes  $\sigma$  en el espacio generado por los vectores singulares  $\mathbf{v}_i$  con los  $i$  más grandes, en estos casos, las medidas  $u$  son atenuadas por los pequeños valores de los  $\lambda_i$ . Esas observaciones no son confiables cuando hay ruido, por lo que vuelve difícil invertir el problema. En problemas mal condicionados, los valores singulares para los  $i$  más grandes pueden ser tan pequeños que siempre se vuelve numéricamente inestable. Lo típico en problemas mal condicionados es que los valores singulares decaigan a cero sin que hayan grandes diferencias entre ellos, y generalmente tenemos la siguiente situación [16]

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_z \geq \mu > \lambda_{z+1} \geq \dots \geq \lambda_w \geq \epsilon > \lambda_{w+1} \geq \dots \geq \lambda_r > 0 = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_q, \quad (10.9)$$

donde  $\mu$  es el umbral de precisión dado por los instrumentos, y  $\epsilon$  es el umbral para los cuales las observaciones son consideradas numéricamente nulas. Los primeros valores singulares  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_z\}$  causan observaciones que son confiables, los valores singulares  $\{\lambda_{z+1}, \dots, \lambda_w\}$  causan observaciones que no son confiables, y los valores singulares  $\{\lambda_{w+1}, \dots, \lambda_q\}$  causan observaciones que son en la práctica nulas. El espacio  $\Sigma$ , que es el generado por los vectores singulares  $\mathbf{v}_i$  puede ser categorizado de la siguiente forma:

- El subespacio de  $\Sigma$  generado por  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_z\}$  da lugar a observaciones que son confiables y no hay problemas asociados a ellos.
- El subespacio de  $\Sigma$  generado por  $\{\mathbf{v}_{z+1}, \dots, \mathbf{v}_w\}$  da lugar a observaciones que tienen una pequeña amplitud, esto significa que van a ser sensibles a errores en las medidas.
- El subespacio de  $\Sigma$  generado por  $\{\mathbf{v}_{w+1}, \dots, \mathbf{v}_q\}$  da lugar a observaciones que son nulas numéricamente, este subespacio da lugar a la no unicidad de las soluciones, e información adicional es necesaria para recuperar los parámetros  $\sigma$  correctamente.

El mal condicionamiento es entonces esta condición de que algunos parámetros del modelo no pueden ser recuperados, ya sea porque están en el núcleo del operador directo, o porque dan lugar a medidas muy pequeñas como para diferenciarlas de los errores inherentes. Un indicador del mal condicionamiento de un problema es el número de condición de  $H$

$$\text{cond}(H) = \frac{\lambda_1}{\lambda_r} \quad (10.10)$$

el cual es muy grande para problemas mal condicionados.

### 10.5. Solución al problema de Minimos Cuadrados lineal

Si suponemos que  $H$  tiene rango completo, el núcleo de  $H$  va a ser el vector nulo  $\mathcal{N} = 0$  si  $D > M$ . Para resolver el problema (10.4) se debe derivar en un

## 10.5. Solución al problema de Minimos Cuadrados lineal

entorno de  $\sigma$ , y buscar el punto donde se anula esta derivada, por lo tanto el gradiente que queremos anular es

$$0 = \lim_{\partial\sigma \rightarrow 0} \frac{\|H(\sigma + \partial\sigma) - u\|^2 - \|H\sigma - u\|^2}{\|\partial\sigma\|}. \quad (10.11)$$

Y descomponemos los términos a derivar de la siguiente forma

$$\|H(\sigma + \partial\sigma) - u\|^2 = (H(\sigma + \partial\sigma) - u)^T (H(\sigma + \partial\sigma) - u) \quad (10.12)$$

y

$$\|H\sigma - u\|^2 = (H\sigma - u)^T (H\sigma - u). \quad (10.13)$$

Sustituyendo y desarrollando los términos de arriba, aplicando además las identidades

- $(ab)^T = b^T a^T$
- $(a + b)^T = a^T + b^T$

usando además, que si  $a$  y  $b$  son vectores columna, y  $F$  una matriz simétrica

- $a^T b = b^T a$
- $a^T F b = b^T F a$

luego agrupamos en términos de primer y segundo orden de  $\partial\sigma$  y llegamos a que

$$0 = \lim_{\partial\sigma \rightarrow 0} \frac{\|2\partial\sigma^T (H^T H\sigma - H^T u) + \partial\sigma^T H^T H \partial\sigma\|}{\|\partial\sigma\|}. \quad (10.14)$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz es fácil ver que el segundo término de la expresión anterior tiende a cero

$$\frac{\|\partial\sigma^T H^T H \partial\sigma\|}{\|\partial\sigma\|} \leq \frac{\|H^T H\| \|\partial\sigma\|^2}{\|\partial\sigma\|} \xrightarrow{\partial\sigma \rightarrow 0} 0, \quad (10.15)$$

entonces para que la derivada se anule, se debe anular el primer término de (10.14)

$$H^T H\sigma - H^T u = 0, \quad (10.16)$$

con lo que llegamos a la solución de la ecuación normal

$$H^T H\sigma_{MC} = H^T u, \quad (10.17)$$

que es equivalente a

$$\sigma_{MC} = H^\dagger u. \quad (10.18)$$

Donde la matriz  $H^\dagger = (H^T H)^{-1} H^T$  es la llamada *inversa de Moore Penrose* de  $H$ . Dada la descomposición SVD de  $H$ , la solución a la inversa de MC puede ser expresada de (10.18) como

$$\sigma_{MC} = \sum_{i=1}^M \frac{\mathbf{w}_i^T u}{\lambda_i} \mathbf{v}_i. \quad (10.19)$$

## Capítulo 10. Problema inverso linealizado

La ecuación (10.19) nuevamente muestra las dificultades asociadas con la solución de problemas inversos mal condicionados, los términos con valores altos de  $i$ , para los cuales las observaciones son pobres, son fuertemente amplificadas por el factor  $1/\lambda_i$ . Es común en problemas mal condicionados que el número de condición sea muy alto, hasta del orden de  $10^{20}$ , cualquier ruido en los datos  $u$  con componentes en el espacio generado por los vectores singulares  $\mathbf{w}_i$  para valores altos de  $i$  es amplificado enormemente, llevando a una solución que está dominada por el ruido.

### 10.6. Regularización

Se ve entonces que no es posible resolver un problema mal condicionado directamente de (10.18), es por esto que se utilizan técnicas específicas, llamadas *técnicas de regularización* para lidiar con estas dificultades. La forma más inmediata para tratar de regularizar un problema es la llamada regularización *SVD truncada* (TSVD). Tomando el umbral  $\mu$  dado por las incertidumbres de los instrumentos, debajo del cual las observaciones no son fiables, la técnica resuelve (10.18) expresando la solución en términos de la descomposición SVD y limitando la suma a los primeros  $z$  términos para los cuales  $\lambda_z \geq \mu$ . En el caso lineal, (10.19) quedaría

$$\sigma_{TSVD} = \sum_{i=1}^z \frac{\mathbf{w}_i^T u}{\lambda_i} \mathbf{v}_i. \quad (10.20)$$

De esta forma, solo las observaciones que son significantes son tomadas en cuenta. Todo el ruido en los componentes pertenecientes al espacio generado por  $\{\mathbf{w}_{z+1}, \dots, \mathbf{w}_D\}$ , los cuales serían amplificadas, no son tomados en cuenta. Esto trae estabilidad al problema, pero estamos limitando la solución  $\sigma_{TSVD}$  al subespacio de  $\Sigma$  generado por los vectores singulares  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_z\}$ , esto va a generar imágenes regulares donde no van a haber cambios bruscos, y se prohíben completamente las soluciones con saltos, asociadas a los vectores singulares con subíndices más altos. Esto finalmente va a afectar la resolución. Para evitar esto, otras técnicas penalizan los componentes correspondientes a los cambios bruscos, pero sin eliminarlos del todo, una de estas técnicas es la *Regularización de Tijonov*.

#### Regularización de Tijonov

Este método trata de amortiguar el peso de los vectores singulares con subíndices más altos en el modelo reconstruido  $\sigma_{MC}$ . Esto lo hace agregando un término a la función objetivo

$$\sigma_\alpha = \arg \min \|h(\sigma) - u\|^2 + \alpha F(\sigma). \quad (10.21)$$

Para el caso lineal, la solución inversa se formula de la siguiente forma

$$\sigma_\alpha = \arg \min \|H\sigma - u\|^2 + \alpha F(\sigma), \quad (10.22)$$

donde  $F(\sigma) \geq 0$  es un funcional de regularización, y  $\alpha > 0$  es el parámetro de regularización o factor de Tijonov. El funcional  $F(\sigma)$  puede tomar la forma

$$F(\sigma) = \|L\sigma\|^2 \quad (10.23)$$

o la forma

$$F(\sigma) = \|L(\sigma - \sigma_0)\|^2, \quad (10.24)$$

donde  $L$  es la matriz de regularización, y  $\sigma_0$  es un estimado de  $\sigma$ . De las dos expresiones para el funcional se utilizará (10.24) para mayor generalidad.

El problema inverso queda

$$\sigma_{(\alpha, L, \sigma_0)} = \arg \min \|H\sigma - u\|^2 + \alpha \|L(\sigma - \sigma_0)\|^2. \quad (10.25)$$

La base de la regularización de Tijonov es la siguiente: minimizar (10.25) significa buscar  $\sigma_{(\alpha, L, \sigma_0)}$  que produzca al mismo tiempo, un pequeño residuo  $\|H\sigma - u\|$  y también un reducido valor del funcional de penalización  $\|L(\sigma - \sigma_0)\|$ . La matriz de regularización  $L$  introduce algo de información a-priori al problema, complementando la información que no es observable del núcleo de  $H$ . El rol del factor de Tijonov es balancear la cantidad de información previa que es usada en el proceso. Esto queda más claro al verlo desde un punto de vista estadístico como un estimador de *maximum a posteriori* (MAP) con ruido aditivo e hipótesis de distribuciones gaussianas como se verá en el capítulo 12.

Para resolver el problema lineal (10.25), procedemos de la misma forma que en 10.5, en este caso el gradiente a anular es

$$0 = \lim_{\partial\sigma \rightarrow 0} \frac{\|H(\sigma + \partial\sigma) - u\|^2 + \alpha \|L(\sigma + \partial\sigma - \sigma_0)\|^2 - (\|H\sigma - u\|^2 + \alpha \|L(\sigma - \sigma_0)\|^2)}{\|\partial\sigma\|}, \quad (10.26)$$

descomponiendo y agrupando en términos de primer y segundo orden de  $\partial\sigma$  como en 10.5, llegamos a que

$$0 = \lim_{\partial\sigma \rightarrow 0} \frac{\|2\partial\sigma^T(H^T H\sigma + \alpha L^T L\sigma - H^T u - \alpha L^T L\sigma_0) + \partial\sigma^T(H^T H + \alpha L^T L)\partial\sigma\|}{\|\partial\sigma\|}. \quad (10.27)$$

Nuevamente se puede ver que, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwartz, el segundo término de la expresión anterior tiende a cero

$$\frac{\|\partial\sigma^T(H^T H + \alpha L^T L)\partial\sigma\|}{\|\partial\sigma\|} \leq \frac{\|(H^T H + \alpha L^T L)\| \|\partial\sigma\|^2}{\|\partial\sigma\|} \xrightarrow{\partial\sigma \rightarrow 0} 0, \quad (10.28)$$

entonces para que la derivada se anule, se debe anular el primer término de (10.27)

$$H^T H\sigma + \alpha L^T L\sigma - H^T u - \alpha L^T L\sigma_0 = 0 \quad (10.29)$$

, y entonces la solución regularizada queda

$$\sigma_{(\alpha, L, \sigma_0)} = (H^T H + \alpha L^T L)^{-1}(H^T u + \alpha L^T L\sigma_0). \quad (10.30)$$

El efecto de la regularización se puede ver si  $L$  es elegida para que  $\mathcal{N}(H) \cap \mathcal{N}(L) = \emptyset$ . En este caso (10.25) se dice que está regularizada, y  $(H^T H + \alpha L^T L)$  es definida positiva, la inversa es única y depende continuamente de los datos  $u$ .

El requerimiento de que  $\mathcal{N}(H) \cap \mathcal{N}(L) = \emptyset$  significa que los vectores singulares derechos con subíndices más grandes (que generan el espacio nulo de  $H$ ) están en el espacio generado de  $L$ . El efecto es penalizar estos modelos en la reconstrucción, efecto parecido al del TSVD.

## Capítulo 10. Problema inverso linealizado

### Regularización de Tijonov estándar

Una de las formas más simples de regularización, cuando el funcional de regularización  $F$  es como en (10.24), es la que corresponde a elegir  $L = I$  y  $\sigma_0 = 0$ .

Con  $L = I$ , la solución al problema lineal inverso es

$$\sigma_{(\alpha, I)} = (H^T H + \alpha I)^{-1} H^T u, \quad (10.31)$$

lo cual, aplicando la descomposición SVD de  $H$ , puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \sigma_{(\alpha, I)} &= (V \Sigma^2 V^T + \alpha I)^{-1} H^T u \\ &= (V \Sigma^2 V^T + V \alpha V^T)^{-1} H^T u \\ &= V (\Sigma^2 + \alpha I)^{-1} V^T V \Sigma U^T u \\ &= V (\Sigma^2 + \alpha I)^{-1} \Sigma U^T u, \end{aligned} \quad (10.32)$$

que también se puede ver como

$$\sigma_{(\alpha, I)} = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \alpha} \frac{\mathbf{w}_i^T u}{\lambda_i} \mathbf{v}_i. \quad (10.33)$$

Los factores multiplicativos  $\lambda_i^2/(\lambda_i^2 + \alpha)$  tiende a 1, para valores grandes de  $\lambda_i$  ( $\lambda_i \gg \alpha$ ), y tiende a 0 para valores pequeños de  $\lambda_i$  ( $\lambda_i \ll \alpha$ ). La contribución de los valores singulares con índices altos es eliminada de la solución inversa.

### NOSER

Otra opción para la matriz  $L$  es la que se utiliza en el algoritmo de NOSER,  $L = \text{diag}(\sqrt{J^T J})$ . Esta matriz también es diagonal, dónde  $J$  es la matriz jacobiana del problema, cuyos elementos  $\frac{\partial u}{\partial \sigma}$  en EIT indican las derivadas de los voltajes medidos respecto de variaciones en la conductividad. Utilizando la descomposición SVD, la solución regularizada se expresa como

$$\sigma_{(\alpha, NOSER)} = \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i^2 + \alpha l_i^2} \frac{\mathbf{w}_i^T u}{\lambda_i} \mathbf{v}_i, \quad (10.34)$$

donde los  $l_i$  son los elementos diagonales de  $L$ . También en este caso los factores multiplicativos  $\lambda_i^2/(\lambda_i^2 + \alpha l_i^2)$  tienden al valor 1 para valores grandes de  $\lambda_i$ , y a 0 para valores pequeños de  $\lambda_i$ . Los términos multiplicativos en frente de  $\frac{\mathbf{w}_i^T u}{\lambda_i} \mathbf{v}_i$  son llamados *factores de filtro*.



# Capítulo 11

## Métodos Iterativos

### 11.1. Introducción

Otra opción para la resolución del problema inverso es la de regularizar mediante iteración, el método de Landweber es de los más clásicos, originalmente pensado para problemas de mínimos cuadrados bien condicionados luego adaptado para problemas inversos [129]. La iteración de Landweber  $k + 1$  es

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \tau J^T(u - J\sigma_n) \quad (11.1)$$

donde el parámetro  $\tau$  en  $R$  cumple que

$$2(\|J^T J\|^{-1}) > \tau > 0. \quad (11.2)$$

Mientras la aproximación a la solución  $\sigma_n$  no se acerca a la solución real, el residuo  $(u - J\sigma_n)$  del sistema lineal es grande, y el error en los datos es pequeño respecto al residuo. El gradiente negativo del funcional  $(J^T(u - J\sigma_n))$  va haciéndose más pequeño, cuando se van haciendo más iteraciones, el valor del residual se reduce y el componente de error en los datos crece, hasta dominar la función objetivo. La iteración continúa hasta cumplirse con la condición de Morozov, que se da básicamente cuando el error y el residuo son iguales, lo mejor es no continuar hasta llegar a la solución de mínimos cuadrados, ya que es inestable. Este método es relativamente lento, comparado con el de gradientes conjugados [98], el uso de  $J^T$  como aproximación de  $J^{-1}$  no es buena, por lo que el costo computacional del método no es bueno.

Si se sustituye el factor escalar  $\tau$  por un funcional que aproxima mejor el Hessiano de error residual, es posible mejorar este método [98] si se utiliza  $J^T J$  o  $(J^T J + \lambda I)^{-1}$  lleva a la regularización de Tijonov iterativa

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + (J^T J + \lambda I)^{-1} J^T(u - J\sigma_n) \quad n = 0, 1, \dots \quad (11.3)$$

### 11.2. Regularización por Variación Total

En (10.21) se muestra el planteo del problema regularizado de forma general. También vimos que para la regularización de Tijonov, el funcional  $F(\sigma)$  puede

## Capítulo 11. Métodos Iterativos

tomar la forma de (10.23) o (10.24). Cuando el funcional toma estas formas, se dice que es una regularización cuadrática ya que se está usando la norma al cuadrado. Esto garantiza que el funcional sea diferenciable y convexo, haciendo más fácil resolver el problema, aunque también hace que no sea posible distinguir cambios bruscos en el modelo reconstruido.

Hay situaciones en que es deseable detectar estos cambios o discontinuidades, por lo que es necesario encarar el problema de otra forma. Una es estas formas es la que se conoce como *Variación Total*. En este método vamos a buscar las soluciones en el espacio de funciones de variación acotadas (BV).

Este espacio se define a través de la derivada distribucional de una función [8, Sec. 2.2]: Sea  $\Omega$  un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$  y  $u$  una función en  $L^1(\Omega)$ , se define

$$\int_{\Omega} |Du| = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx; \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \in C_0^1(\Omega)^N, |\varphi|_{L^\infty(\Omega)} \leq 1 \right\}, \quad (11.4)$$

donde  $\operatorname{div} \varphi = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}(x)$ ,  $dx$  es la medida de Lebesgue,  $C_0^1(\Omega)^N$  es el conjunto de funciones continuas diferenciables con soporte compacto en  $\Omega$ , y

$$|\varphi|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_x \sqrt{\sum_i \varphi_i^2(x)}. \quad (11.5)$$

Si  $u \in C^1(\Omega)$ , usando integración por partes se ve que  $\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \varphi dx$  entonces  $\int_{\Omega} |Du| = \int_{\Omega} |\nabla u(x)| dx$ .

Con esto definimos el conjunto de funciones de variación acotada como

$$BV(\Omega) = \left\{ u \in L^1(\Omega); \int_{\Omega} |Du| < \infty \right\}, \quad (11.6)$$

y la variación total de  $u$ ,  $TV(u) = \int_{\Omega} |Du|$ .

Un pequeño ejemplo en una dimensión ayuda a entender porque este método favorece la reconstrucción de saltos y discontinuidades. Supongamos que los dos puntos A y B de la figura están conectados. Se muestran tres tipos diferentes de funciones  $f(x)$  que los conectan. Como las funciones son monótonamente crecientes, el TV de cada una de ellas es

$$TV(f) = \int_A^B f'(x) dx = f(B) - f(A) \quad (11.7)$$

que es el mismo para cada función. TV trata a  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  de la misma forma, y usado como el funcional para regularizar un problema, no favorece a la solución más suave. La norma  $\ell^2$  tiene diferentes valores para  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$ , y utilizada como término de penalización en la regularización de un problema, va a favorecer la solución más suave, que es la que tiene menor valor en la norma  $\ell^2$ . Como ejemplo,  $f_3$  en norma  $\ell^2$  tiene valor infinito, por lo que nunca sería considerada como una solución válida. Con esto se ve que el TV permite una mayor clase de funciones ser solución del problema regularizado, incluyendo funciones discontinuas.

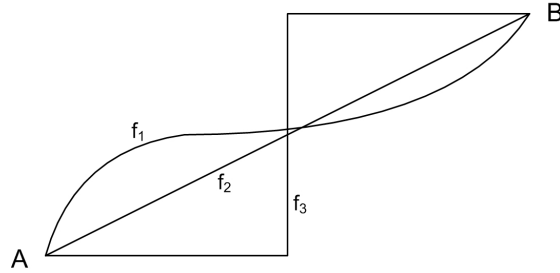


Figura 11.1: Distintos caminos que unen el punto A y B. Todos tiene igual TV,

En [17] se analizan diferentes métodos para la aplicación y resolución del problema en EIT mediante el uso de TV, estos métodos son tanto determinísticos como probabilísticos. La eficiencia numérica y la estabilidad son los principales temas a tratar. El uso de técnicas *ad hoc* es común, dado el bajo rendimiento de los algoritmos tradicionales,

Uno de los métodos más eficientes y simples es el desarrollado por Chambolle (descrito en el apéndice B) el cual calcula la función en base a proyecciones en el espacio correspondiente.

Este algoritmo no se puede utilizar en el problema de EIT, debido a que está pensado para imágenes, donde el dominio de la entrada es igual al de la salida, a diferencia de EIT donde el dominio de entrada son medidas de tensión y el de salida conductividades.

De todos los métodos que se han utilizado en EIT, el que se destaca por sus resultados es el llamado *Primal Dual-Interior Point Methods* (PD-IPM), desarrollado por Lionheart, Adler y Borsic en [18] donde se utiliza el problema dual para encontrar el mínimo buscado. Este es un problema de optimización convexa que se resuelve el problema

$$\sigma_\alpha = \arg \min_{\sigma} \|h(\sigma) - u\|^2 + \alpha TV(\sigma), \quad (11.8)$$

mediante el uso de las ecuaciones primales y duales de forma iterativa. El estudio de este método escapa del alcance de esta tesis.

### 11.3. Métodos no lineales

Para resolver el problema no lineal, dado que no hay un método directo para el caso de tres dimensiones [98], lo que se puede hacer es eliminar los términos correspondientes a la segunda derivada en las series de Taylor para el problema directo no lineal, logrando una especie de inversa generalizada del Jacobiano, y luego invirtiendo el problema mediante técnicas de minimización no lineal convencionales. Esto es lo que se llama método de Gauss-Newton.

En principio se trata de minimizar el error residual

$$e(\sigma) = \frac{1}{2}(h(\sigma) - u)^T(h(\sigma) - u) = \frac{1}{2}\|h(\sigma) - u\|^2. \quad (11.9)$$

## Capítulo 11. Métodos Iterativos

### Solución al problema de Minimos Cuadrados no lineal

Este método funciona aproximando primero el funcional objetivo  $\psi(\sigma) = \|h(\sigma) - u\|^2$  cerca de un estimado inicial  $\sigma^{(k)}$  con su serie de Taylor de segundo orden

$$\tilde{\psi}(\sigma) = \psi(\sigma^{(k)}) + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)})(\sigma - \sigma^{(k)}) + \frac{1}{2}(\sigma - \sigma^{(k)})^T \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(\sigma^{(k)})(\sigma - \sigma^{(k)}) \quad (11.10)$$

y luego buscando minimizar el funcional aproximando  $\tilde{\psi}(\sigma)$ . Con esto se encuentra un nuevo estimado  $\sigma^{(k+1)}$ . La iteración se repite hasta que se cumple con algún criterio de convergencia. En un punto óptimo  $\sigma^{(k+1)}$ , debemos tener

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\sigma}(\sigma^{(k+1)}) = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)}) + (\sigma^{(k+1)} - \sigma^{(k)})^T \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(\sigma^{(k)}) = 0 \quad (11.11)$$

de donde, asumiendo que la matriz hessiana  $\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(\sigma^{(k)})$  es invertible,

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} - \left( \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(\sigma^{(k)}) \right)^{-1} \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)}) \quad (11.12)$$

donde el gradiente  $\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)})$  puede ser expresado de la siguiente forma

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)}) = -2 \left( \frac{\partial h}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)}) \right)^T (h(\sigma^{(k)}) - u) \quad (11.13)$$

y el hessiano

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(\sigma^{(k)}) = 2 \left( \frac{\partial h}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)}) \right)^T \left( \frac{\partial h}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)}) \right) + 2 \sum_i \left( \frac{\partial^2 h_i}{\partial\sigma^2}(\sigma^{(k)})(h_i(\sigma^{(k)}) - u_i) \right) \quad (11.14)$$

Como en el entorno de la solución los términos de segundo orden en (11.14) son despreciables con respecto a los términos de primer orden, generalmente son descartados por simplicidad. Llamando al término  $\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}(\sigma^{(k)})$  como  $J_k$ , es decir, el Jacobiano, la ecuación de Newton queda

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} - (J_k^T J_k)^{-1} J_k^T (h(\sigma^{(k)}) - u) \quad (11.15)$$

o, lo que es equivalente

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} - J_k^\dagger (h(\sigma^{(k)}) - u) \quad (11.16)$$

Y así, el cálculo del siguiente paso para un problema no lineal (11.16) es similar a la solución del problema inverso lineal (10.18). Las propiedades de  $J_k$  determinan el mal condicionamiento de cada paso en el método de Newton, y pueden ser analizados mediante la descomposición SVD. El cálculo de cada paso sufre las mismas dificultades asociadas con (10.19) si el problema está mal condicionado.

## Inversión de MC no lineal regularizada

La formulación de la regularización del problema inverso no lineal es similar a (10.22),

$$\sigma_{(\alpha, L, \sigma_0)} = \arg \min \|h(\sigma) - u\|^2 + \alpha \|L(\sigma - \sigma_0)\|^2. \quad (11.17)$$

Aplicando el método de Newton, el problema no lineal se resuelve iterativamente con la recursión

$$\sigma_{(\alpha, L, \sigma_0)}^{(k+1)} = \sigma_{(\alpha, L)}^{(k)} - (J_k^T J_k + \alpha L^T L)^{-1} [J_k^T (h(\sigma_{(\alpha, L)}^{(k)}) - u) - \alpha L^T L(\sigma - \sigma_0)]. \quad (11.18)$$

Todas las consideraciones hechas para el problema lineal regularizado aplica para cada paso linealizado de la inversión no lineal (10.22). De manera similar al problema lineal, (11.18) es regularizada si  $\mathcal{N}(J_k) \cap \mathcal{N}(L) = \emptyset$  para cada paso  $k$ .

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Capítulo 12

## Modelo probabilístico

El análisis del problema inverso desde un punto probabilístico da una visión diferente al análisis determinístico. Permite ver las medidas como variables aleatorias, con distribuciones de probabilidad donde se introduce el ruido inherente al sistema de adquisición, y establecer un nivel de confianza para la imagen reconstruida. Además se puede ver la relación entre el estudio probabilístico y el analítico, y cómo los métodos de un tipo se corresponden con métodos del otro tipo.

El objetivo del análisis probabilístico es el de encontrar la distribución de conductividad más probable dadas las medidas obtenidas. Como ya vimos, al ser el problema inverso mal condicionado, las medidas podrían llevar a resultados no correspondientes con la realidad, por lo que, mediante el conocimiento previo del comportamiento de nuestro modelo en la realidad, limitaremos las soluciones a aquellas que sean las más probables dentro del conjunto de soluciones posibles.

El método bayesiano permite interpretar las probabilidades en función de lo que nosotros conocemos a priori de las variables, en la realidad las observaciones siempre van a tener cierta incertidumbre, que es donde comienzan a jugar las densidades de probabilidad, ya que indican la dispersión, o la falta de conocimiento, sobre el valor real del parámetro. Si no sabemos nada del parámetro la densidad de probabilidad va a ser una constante.

En el caso del problema inverso, como para la mayoría de los casos donde se analiza desde una perspectiva probabilística, vamos a tener tres factores a tener en cuenta:

1. El problema directo, es decir, que mapea la distribución de la conductividad en las medidas en el borde, va a ser nuestro modelo donde se aplican las leyes físicas que rigen el problema. Este es el que vincula los parámetros del modelo, es decir la conductividad, con los datos medidos, o sea los voltajes en la superficie. El problema directo permite predecir, dado los parámetros del modelo  $\sigma$ , cuales serían los datos medidos  $u$  libres de errores en las medidas. En la realidad estas medidas nunca van a ser iguales a las predichas por el problema directo, tanto por los errores propios del sistema de adquisición como de errores en el modelado del sistema. Este se representa en formato

## Capítulo 12. Modelo probabilístico

de función de densidad de probabilidad, como  $p(u|\sigma)$  sobre el espacio de las medidas  $U$ , y es lo que se llama verosimilitud.

2. Las medidas  $u$ , estas evidentemente contienen información sobre los potenciales en los electrodos colocados en la superficie, por más que estén afectados por errores. Estas medidas se representan como  $p(u)$  y también se encuentran sobre el espacio de las medidas  $U$ .
3. El conocimiento que tenemos a priori de los parámetros del modelo también nos es útil para el análisis estadístico, esta información es independiente de las medidas realizadas, y se representa en forma de densidad de probabilidad como  $p(\sigma)$ , en  $\Sigma$ . Si no tenemos ninguna información a priori, entonces  $p(\sigma) = c$  constante, pero siempre algún mínimo de información tenemos. En el caso de EIT, sabemos que la conductividad debe ser positiva, todas estas informaciones se pueden traducir en condiciones que deben cumplir los parámetros del modelo.

El método bayesiano para la solución del problema inverso indica que podemos definir la densidad de probabilidad condicional  $p(\sigma|u)$  sobre  $\Sigma$  como

$$p(\sigma|u) = \frac{p(u|\sigma)p(\sigma)}{p(u)}. \quad (12.1)$$

Esta ecuación expresa el conocimiento que tenemos de los parámetros de salida dada la combinación de los tres factores mencionados antes y permite obtener información valiosa del modelo  $\sigma$  cuando obtuvimos medidas  $u$ .

Una de las formas más generales y básicas de utilizar  $p(\sigma|u)$  es evaluándola en diferentes subconjuntos del espacio del modelo  $\Sigma$ , para conocer cual es la probabilidad de que el modelo se encuentre en ese subconjunto. Por ejemplo, dado  $\Sigma_1 \subset \Sigma$

$$p(\sigma \in \Sigma_1) = \int_{\Sigma_1} p(\sigma|u) d\sigma. \quad (12.2)$$

Si hacemos esto para varios subconjuntos se puede obtener información de la conductividad. Pero si lo que queremos es obtener un valor de la conductividad se deben utilizar otras herramientas, como los estimadores. Los estimadores de dispersión nos van a decir que confianza podemos tener en los valores obtenidos mediante los estimadores. Entre los estimadores más utilizados para problemas inversos se encuentra el de máximo a posteriori (MAP), máxima verosimilitud (MV) y el de mínimos cuadrados (MC). Dada la densidad de probabilidad a posteriori  $p(\sigma|u)$  para la conductividad  $\sigma \in \Sigma$ , el estimador MAP es

$$\sigma_{MAP} = \max_{\sigma \in \Sigma} p(\sigma|u). \quad (12.3)$$

Este estimador da la más probable configuración para la conductividad dados los resultados experimentales, la información a priori y las leyes físicas que se aplican al sistema. Este se resuelve como un problema de optimización.



El estimador de máxima verosimilitud se define como

$$\sigma_{MV} = \max_{\sigma \in \Sigma} p(u|\sigma). \quad (12.4)$$

La densidad de probabilidad  $p(u|\sigma)$  es llamada verosimilitud, y mide cuan veraz es el evento de medir  $u$ , dado el modelo  $\sigma$ . Este estimador nos dice que modelo  $\sigma$  es el que produciría las observaciones  $u$ , sin otmar en cuenta  $p(\sigma)$ . Esto se puede ver como intentar resolver el problema inverso sin regularizarlo.

El estimador de mínimos cuadrados se calcula como la esperanza de la densidad de probabilidad posterior

$$\sigma_{MC} = \nu_{\sigma|u} = E[p(\sigma|u)]. \quad (12.5)$$

Para estimar la confianza en los datos obtenidos mediante los estimadores se utilizan los estimadores de dispersión, un estimador de dispersión común es el llamado de covarianza posterior

$$C_{\sigma|u} = \int_{\Sigma} (\sigma - \nu_{\sigma|u})(\sigma - \nu_{\sigma|u})^T p(\sigma|u) d\sigma, \quad (12.6)$$

Donde  $\nu_{\sigma|u}$  es la esperanza de la densidad de probabilidad posterior  $p(\sigma|u)$ . Esto va a ser aplicable solo si la densidad de probabilidad posterior puede aproximarse a una distribución gaussiana.

Un análisis analítico es posible si conocemos o podemos modelar la información  $p(u|\sigma)$ ,  $p(\sigma|u)$  y  $p(u)$ .

Un ejemplo de esto es cuando tenemos una distribución gaussiana generalizada, que para  $x$  se define como

$$G_n(x) \propto \left( -\frac{1}{n} \sum_i \frac{|x_i - x_{0_i}|^n}{(\theta_{n_i})^n} \right), \quad (12.7)$$

con  $n \geq 1$  y  $\theta$  es la estimación de la dispersión, la cual se define como

$$(\theta_{n_i})^n = \int_X |x - x_o|^n p(x) dx. \quad (12.8)$$

Para  $n < 2$  la gaussiana generalizada tiende a cero cuando  $x \rightarrow \infty$  más lentamente que para  $n = 2$ . La familia de distribuciones  $G_n(x)$  con  $n < 2$  corresponden a modelos donde existe, o puede existir, una gran desviación respecto del estimador, estos datos que se alejan del centro se llaman *outliers* y generalmente no corresponden a los errores inherentes al sistema de adquisición, sino que son errores introducidos por otros problemas como la mala colocación de los electrodos que quedan haciendo mal contacto. Los algoritmos de reconstrucción que trabajan con este tipo de distribuciones se llaman algoritmos robustos por su menor sensibilidad a *outliers* que los algoritmos que asumen  $n \geq 2$ , donde la gaussiana cae a cero de forma más rápida. Para  $n \rightarrow \infty$  la gaussiana generalizada tiende a una función tipo caja, con soporte  $[x_o - \theta_\infty, x_o + \theta_\infty]$ .

## Capítulo 12. Modelo probabilístico

Utilizando ruido aditivo e hipótesis gaussianas se simplifica la densidad de probabilidad posterior, permitiendo formulaciones analíticas para los estimadores  $\sigma_{MAP}$  y  $\sigma_{MV}$ , y permite ver la relación de estos métodos con los de regularización.

El estimador MAP está dado por la ecuación 12.3, luego se utiliza el teorema de Bayes (ecuación 12.1) para calcular  $p(\sigma|u)$ .

Que el error sea aditivo significa que las medidas van a ser afectadas por ciertas incertidumbres

$$u = h(\sigma) + \nu, \quad (12.9)$$

donde  $\sigma$  y  $\nu$  son estadísticamente independientes y  $p_{ruido}$  es la distribución de las incertidumbres. Si fijamos  $\sigma$ , dada la independencia entre  $\sigma$  y  $\nu$ , vamos a tener que  $p(u|\sigma)$  va a ser igual que la distribución de las incertidumbres

$$p(u|\sigma) = p_{ruido}(u - h(\sigma)). \quad (12.10)$$

Si suponemos que la distribución de las incertidumbres es gaussiana, con media cero y covarianza  $C_{ruido}$ , la distribución se puede expresar como

$$p(u|\sigma) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u - h(\sigma))^T C_{ruido}^{-1} (u - h(\sigma)) \right\}. \quad (12.11)$$

Si además suponemos que la distribución del modelo también es gaussiana con media  $\sigma_0$  y covarianza  $C_\sigma$ , y como tenemos las medidas  $u$  consideramos  $p(u)$  constante, entonces la distribución a posteriori del modelo es

$$p(\sigma|u) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{2}(u - h(\sigma))^T C_{ruido}^{-1} (u - h(\sigma)) \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{2}(\sigma - \sigma_0)^T C_\sigma^{-1} (\sigma - \sigma_0) \right\}. \quad (12.12)$$

Como la maximización de  $p(\sigma|u)$  es el estimador MAP, llegamos a que

$$\sigma_{MAP} = \arg \min \frac{1}{2} [(u - h(\sigma))^T C_{ruido}^{-1} (u - h(\sigma)) + (\sigma - \sigma_0)^T C_\sigma^{-1} (\sigma - \sigma_0)], \quad (12.13)$$

que es el mismo problema de minimización que (10.21).

De forma similar, el esitmador MV queda:

$$\sigma_{MV} = \arg \min \frac{1}{2} (u - h(\sigma))^T C_{ruido}^{-1} (u - h(\sigma)) \quad (12.14)$$

Estos son idénticos a los métodos determinísticos de mínimos cuadrados para los casos regularizados y no regularizados.

El cálculo de  $\sigma_{MAP}$  y  $\sigma_{MV}$  requiere la solución del problemas de optimización no lineales, ya que el modelo directo  $h(\sigma)$  es no lineal.

Si vemos nuevamente el caso de distribuciones gaussianas generalizadas, de orden  $n_1$  para el ruido y  $n_2$  para  $p(\sigma)$ , tenemos que

$$p(u|\sigma) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^U \frac{|u_i - h(\sigma)_i|^{n_1}}{(\theta_{n_1})_i^{n_1}} \right\}, \quad (12.15)$$

la densidad a posteriori es

$$p(\sigma|u) \propto \exp \left\{ -\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^U \frac{|u_i - h(\sigma)_i|^{n_1}}{(\theta_{n_1})_i^{n_1}} \right\} \cdot \exp \left\{ -\frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{\Sigma} \frac{|\sigma_i - \sigma_{0_i}|^{n_2}}{(\theta_{n_2})_i^{n_2}} \right\}, \quad (12.16)$$

y los estimadores MV y MAP quedan

$$\sigma_{MV} = \arg \min \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^U \frac{|u_i - h(\sigma)_i|^{n_1}}{(\theta_{n_1})_i^{n_1}} \quad (12.17)$$

$$\sigma_{MAP} = \arg \min \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^U \frac{|u_i - h(\sigma)_i|^{n_1}}{(\theta_{n_1})_i^{n_1}} + \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{\Sigma} \frac{|\sigma_i - \sigma_{0_i}|^{n_2}}{(\theta_{n_2})_i^{n_2}}. \quad (12.18)$$

La elección de  $n_1$  y  $n_2$  debe ser tal que represente bien los datos. Para  $n_1 > 1$  y  $n_2 > 1$  finitos, las funciones objetivo 12.17 y 12.18 son funciones diferenciables, y se pueden utilizar métodos de optimización tradicionales. Para  $n_1 = 1$  o  $n_2 = 1$  las funciones objetivo tendrán sumas de valores absolutos, las que no son diferenciables para los puntos donde se hacen cero, por lo que algoritmos especiales son necesarios, en el caso de  $n_2 = 1$  se relaciona con la reconstrucción de imágenes con saltos en la conductividad, y variación total es uno de estos algoritmos.

$n_1 = 2$  y  $n_2 = 2$  lleva a los casos con Gaussianas tradicionales, y cuando se considera  $n_1 = 1$  estamos considerando *outliers* en los datos, por lo que son necesarios métodos robustos.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Capítulo 13

## Comparación de métodos de reconstrucción

### 13.1. Herramientas informáticas

Se implementaron reconstrucciones con varios de los métodos descritos anteriormente. Para todos los métodos se utilizó el software EIDORS.

#### EIDORS

EIDORS [6] [40] es un conjunto de herramientas desarrolladas para MATLAB y OCTAVE que implementan diferentes métodos para la resolución del problema de tomografía por impedancia eléctrica. Inicialmente desarrollado dentro de las tesis de doctorado de Vaukhonen [116] y Polydorides [98] comenzó como un software para la resolución del problema directo e inverso en dos dimensiones, hasta evolucionar en una suite de herramientas código libre, con diferentes métodos de resolución del problema inverso. EIDORS está diseñado en base a una programación de orientación a objetos. Hay cuatro tipos principales de objetos, datos, imagen, modelo directo y modelo inverso.

El modelo directo contiene la información sobre el la malla de elementos finitos, la posición de los electrodos y sus características, el patrón de inyección de corriente, y punteros a los métodos para la solución del problema directo y del jacobiano. Las mallas se pueden crear de diferentes formas para adaptarlas a casa situación, pueden ser en dos o tres dimensiones, tener la forma de tanques o del tórax humano o de cerdo.

Los objetos de datos son los que contienen las medidas de tensión, ya sean reales o simuladas, contiene un campo para ingresar el tiempo en que se hicieron las medidas y de forma opcional se puede incluir la configuración de electrodos y el modelo directo para comprobar que los datos correspondan con el modelo.

El modelo inverso es el objeto que tiene la información para la reconstrucción de la imagen, contiene el puntero al método de solución del problema inverso, campos para los hiperparámetros de regularización y las imágenes a priori.

## Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción

El objeto imagen contiene los valores de las conductividades reconstruidas mediante la solución del problema inverso, o puede ser creado artificialmente.

Con estos cuatro tipos de objetos se puede definir de forma completa el problema, lo que permite la construcción del sistema que se adapta al equipo de recolección de datos, comparar diferentes métodos para el cálculo del jacobiano o para la solución del problema inverso, tanto con datos simulados o reales.

### GREIT

Otro de los algoritmos que comparamos es GREIT [3]. Este es un algoritmo de reconstrucción específico para medidas del tórax humano, fue desarrollado mediante el consenso de varios investigadores de EIT para alcanzar un algoritmo que cumpla con ciertas características que se consideran necesarias para que un sistema sea apto para uso clínico.

Este es un algoritmo lineal, de un solo paso, basado en una matriz de reconstrucción. Para el problema directo se utiliza mallas del tórax tanto de adulto como de niño basados en imágenes del tipo tomografía computada o resonancia magnética, el modelo es en tres dimensiones y utiliza elementos finitos junto con el modelo completo del electrodo. Las imágenes reconstruidas son cortes tomográficos en dos dimensiones de 32x32 píxeles, y el algoritmo está diseñado para un anillo de 16 u 8 electrodos a la altura del esternón, para patrones de corrientes adyacentes y medidas tetrapolares. Se utilizan imágenes diferenciales.

Las características que se buscan alcanzar con este algoritmo se basan en objetivos, que son pequeñas alteraciones circulares positivas de la resistividad que se ubican en diferentes puntos de la región, estas son: respuesta uniforme de la amplitud, un error en la posición lo más pequeño y uniforme, minimización del efecto de anillado, que es el que se da cuando alrededor del objetivo se forma una pequeña zona donde la diferencia de resistividad sería negativa, resolución uniforme en toda la región, limitar la deformación en forma de los objetivos, y en lo posible mantener una alta resolución, además de mantener una baja amplificación del ruido y baja sensibilidad al movimiento de los electrodos.

La forma de llegar a la matriz de este algoritmo es mediante el entrenamiento del sistema mediante la alimentación del problema con diferentes imágenes deseadas, y junto con estas, una imagen con pesos, que le asignan a cada pixel el peso que tendrá en la reconstrucción. En [3] se explica en detalle la forma de entrenamiento.

### IMPETOM I

Aparte de los implementados con EIDORS, se utiliza el software de Impetom I [60], el cual es uno de los proyectos dentro del desarrollo del IMPETOM original, corresponde al estudio de los métodos de reconstrucción y la implementación de la interfaz de usuario para el equipo. Esto se desarrolló dentro de un proyecto de fin de carrera entre los años 2000 y 2002 por los ingenieros Hartman, Lobo y Ruétalo, y la coordinación de Simini. Impetom I utiliza el método de elementos finitos para la discretización de la región y la solución del problema directo, se utiliza un modelo circular de dos dimensiones, con 492 o 1968 elementos. Para la reconstrucción

## 13.2. Métodos de regularización comparados

de imágenes emplea tres métodos que se pueden elegir por medio de la interfaz gráfica, estos son, backprojection, método de un solo paso con regularización de Tijonov estándar, y método iterativo de Newton Raphson. Todos utilizan la matriz jacobiana para la linealización del problema.

En ese proyecto se realizaron pruebas sobre datos simulados y otros obtenidos de un fantoma circular con un equipo desarrollado en la Universidad de Kuoipio [60]. Luego en el proyecto IMPETOM [54] se utilizó estos algoritmos para reconstrucciones con los datos recolectados mediante IMPETOM C [43].

De estas reconstrucciones se ven algunas limitaciones en el software, el modelo de dos dimensiones no toma en cuenta la dispersión en diferentes planos de la corriente, el uso de un círculo no se adapta a la geometría del tórax, no se toma en cuenta la impedancia de contacto de los electrodos. Todo esto lleva a que si bien las reconstrucciones en fantomas cilíndricos fueron aceptables, cuando se probó con datos de voluntarios, las reconstrucciones no fueron satisfactorias.

## 13.2. Métodos de regularización comparados

### Regularización por TSVD

Para esta regularización, descrita en 10.6, el parámetro  $z$  que debemos manejar aquí es el número de vectores singulares que vamos a utilizar. Con esto calculamos la matriz de reconstrucción y resolvemos el problema como  $\sigma_R = H^\dagger u$ . Debemos tener una imagen base alrededor de la cual calcular el jacobiano, generalmente esta imagen inicial es una imagen homogénea, de conductividad constante. Luego se calcula el jacobiano  $J$ . Se halla la descomposición SVD de la matriz  $J$ , obteniendo la matrices  $\Lambda$ ,  $W$  y  $V$ .

Se normalizan los valores singulares y el parámetro se toma como el porcentaje a partir del cual se descartan los vectores y valores singulares, esto es:  $\lambda_{Ni} = \lambda_i/\lambda_1$  y los valores singulares que se utilizan son  $\{\lambda_{Ni}\} = \{\lambda_{Ni}/\lambda_{Ni} \geq z/100\}$ , y con estos datos se vuelve a reconstruir la matriz como  $RM = V\Sigma_{\lambda_N}U^T$ . La reconstrucción es a través de la matriz  $RM$ :  $\sigma_{REC} = RM(u_2 - u_1)$ , donde  $u_2$  son las medidas del modelo con las perturbaciones y  $u_1$  sin las perturbaciones.

### Regularización por Tijonov en un solo paso

Aquí nuevamente se realiza la reconstrucción mediante un solo paso a través de la matriz de reconstrucción. En el caso del método estándar, la regularización viene dada por la matriz identidad  $L = I$  (ver sección 10.6) por lo que la matriz de reconstrucción es  $RM = (J^T J + \alpha I)^{-1} J^T$  y como antes,  $\sigma_{REC} = RM(u_2 - u_1)$ . El parámetro  $\alpha$  se buscó de forma empírica para cada caso.

### Regularización por NOSER

Una variante al método de Tijonov estándar es cuando se usa la regularización de NOSER, vista en 10.6 donde  $L = L = \text{diag}(\sqrt{J^T J})$ , y la matriz de reconstrucción es  $RM = (J^T J + \alpha L^T L)^{-1} J^T$ .

## Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción

### Regularización por Variación Total

Se aplicó el algoritmo descrito en 11.2, donde se prueba con diferente cantidad de iteraciones. Las diferencias obtenidas al variar el número de iteraciones se muestran en el apéndice F.

### 13.3. Comparación

Realizamos la comparación de diferentes métodos en base a tres niveles de dificultad. Comenzamos con datos simulados, donde obtenemos los valores de voltaje a partir de la solución del problema directo sobre una distribución de conductividad elaborada en EIDORS.

Luego utilizamos datos obtenidos mediante IMPETOM C, medidos tanto en un fantoma cilíndrico como en un paciente sano.

#### Datos Simulados

Se realiza una comparación con datos simulados. Construimos una malla cilíndrica y le agregamos perturbaciones circulares de radio 0.1 respecto del radio de la circunferencia de la malla. La simulación va a ser suponiendo que tenemos 16 electrodos y el método de medida es el descrito anteriormente.

En uno de los casos son dos perturbaciones cerca del borde del cilindro, en otra es una única perturbación en el centro del cilindro. Esto se muestra en las figuras 13.1 13.2.

Con este modelo se resuelve el problema directo y se obtienen las medidas simuladas. como la reconstrucción es diferencial, se necesitan dos *frames*, uno el que corresponde al modelo sin las perturbaciones y otro con las perturbaciones. El vector de medidas resultado de resolver el problema directo para el modelo sin perturbaciones es el que se utiliza como la referencia respecto a la cual se medirán las variaciones en la conductividad. Como segundo conjunto de tensiones simuladas, se toman las que corresponden al modelo con perturbaciones y se le suman 15dB de ruido de ruido blanco.

Para no cometer lo que se llama *crimen inverso* [69, p. 5], la reconstrucción se debe realizar utilizandouna malla diferente a la que se utilizó para generar las medidas, de forma de evitar una situación en que el modelo real es exacto, llevando a mejores soluciones, pero no realistas, en este caso, para la reconstrucción se toma una malla en dos dimensiones de 576 elementos.

En el método de TSVD (figuras 13.3b, 13.3c, 13.5b, 13.5c) se nota la diferencia al variar el porcentaje de vectores singulares involucrados en la reconstrucción (ver apéndice C), cuando mayor es este porcentaje la imagen reconstruida comienza a mostrar lo efectos típicos del problema mal condicionado, como los problemas de resolución en los bordes [4]. Los mejores resultados se vieron para un porcentaje entre 2 % y 5 %. De todas formas no se notaron diferencias para las reconstrucciones en los datos simulados sin ruido y con ruido, esto demuestra que efectivamente hay una cantidad de soluciones que están siendo rechazadas totalmente, y por lo pronto



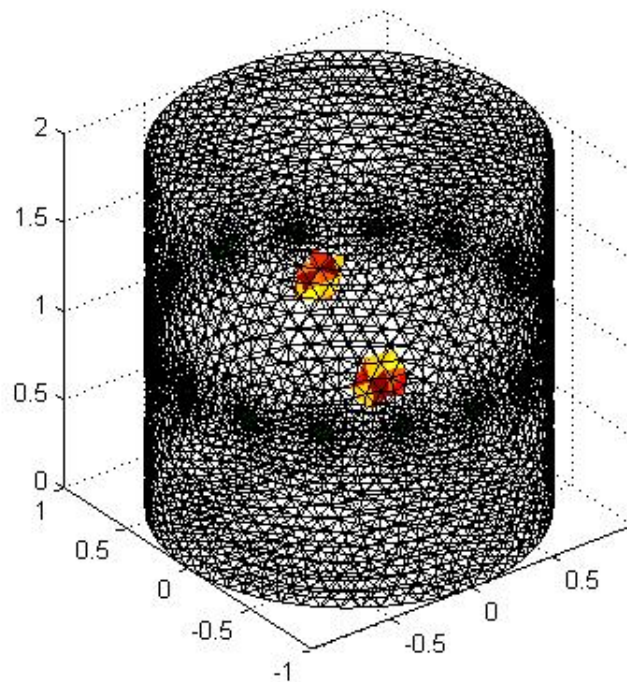


Figura 13.1: Modelo con dos perturbaciones en la conductividad del que partimos para simular los datos

el ruido paralelo a los vectores singulares con subíndices más altos no está entrando en juego.

Las regularizaciones con métodos basados en Tijonov (figuras 13.3d, 13.3e, 13.5d, 13.5e), el estándar y NOSER (figuras 13.4a, 13.4b, 13.6a, 13.6b), mostraron mejor rendimiento que TSVD para las reconstrucciones sin ruido, logrando una mejor resolución y un borde más definido de las perturbaciones. En estos casos, la diferencia con los datos con ruido es notable, por lo que se ve que aquí sí el ruido paralelo a los vectores singulares con subíndices más altos, aunque atenuado, aparece en la reconstrucción. Para el caso de Tijonov, el parámetro  $\alpha$  se buscó empíricamente, y el que da mejor resultado es  $\alpha = 1 \times 10^{-3}$ . Para Noser el parámetro utilizado, también por lo visto empíricamente es  $\alpha = 1 \times 10^{-2}$ .

En la regularización mediante Variación Total (figuras 13.4c, 13.4d, 13.6c, 13.6d) se obtuvo el resultado esperado para este método, grandes zonas de color uniforme y saltos entre las diferentes zonas mostrando claramente los bordes en la imagen. Se percibe que cuantas más iteraciones se realicen mayor es el contraste entre zonas (ver apéndice F), Las imágenes mostradas corresponden a 10 iteraciones, aunque con 5 ya se logra una buena imagen. El hiperparámetro utilizado es  $\alpha = 1 \times 10^{-5}$

El algoritmo GREIT (figuras 13.4e, 13.4f, 13.6e, 13.6f) muestra la mayor uni-

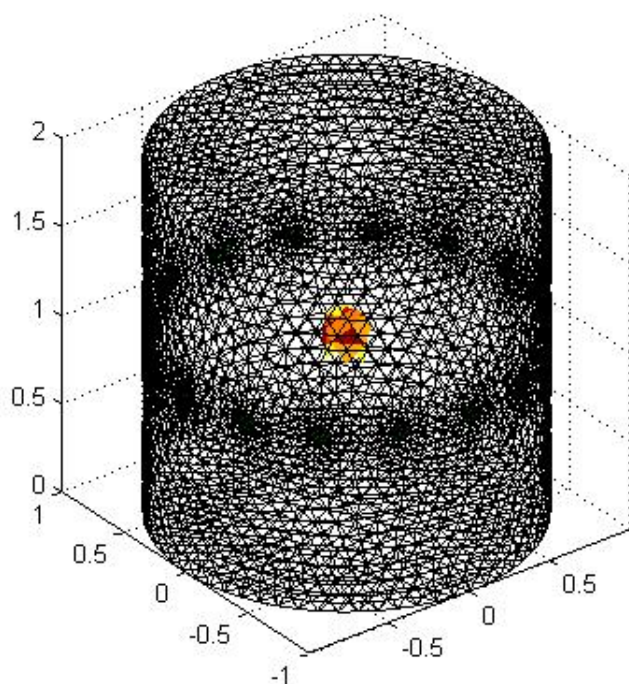


Figura 13.2: Modelo con una perturbación en la conductividad del que partimos para simular los datos

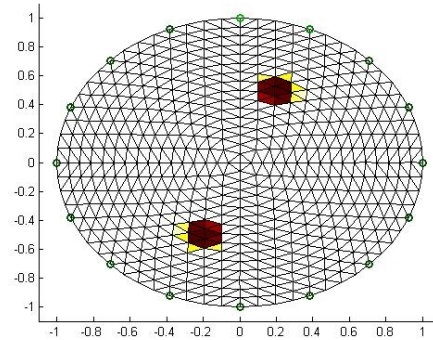
formidad entre las perturbaciones cerca del borde y la perturbación en el centro, este era uno de los objetivos del algoritmo. En este caso realizando un entrenamiento uniforme, es decir, dándole el mismo peso a toda la región, se logran buenos resultados.

#### Fantoma tanque cilíndrico con botella

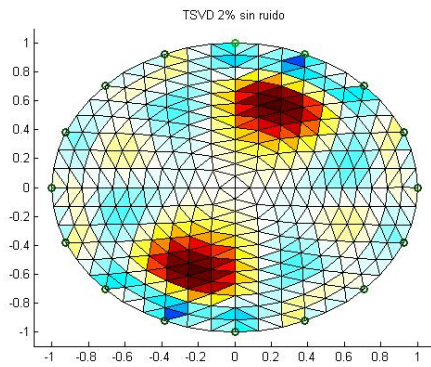
Para las pruebas del sistema IMPETOM C se construyó un fantoma con un tacho cilíndrico de helado de cinco litros, de 28cm de diámetro, el tacho se completó con agua salada. Dentro del tacho se coloca una botella de refresco vacía, de unos 8cm de diámetro. La botella recorre el tacho primero a través del diámetro y luego por la circunferencia. La secuencia completa se puede ver en los apéndices C, D, E, F y G, esta cuenta con 299 *frames* tomados a razón de 15 por segundo.

Con este fantoma, en esta parte se comparan tomando la botella cuando se encuentra sobre el borde y sobre el centro.

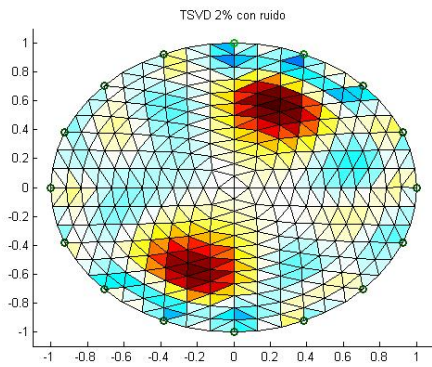
Para realizar la imagen diferencial se comparó tomando como referencia una imagen homogénea y una imagen que es el promedio de todas las medidas de la secuencia. En este caso los mejores resultados se obtuvieron con la imagen homogénea como referencia (ver apéndices C, D, E, F y G).



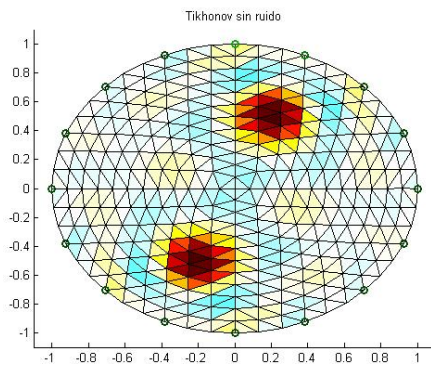
(a) Simulación de cilindro con dos perturbaciones



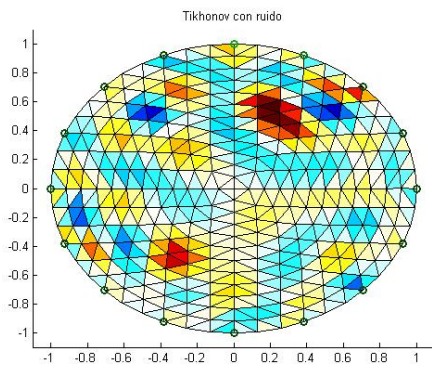
(b) TSVD 2% de V.S. sin ruido



(c) TSVD 2% de V.S. con ruido



(d) Tikhonov sin ruido



(e) Tikhonov con ruido

Figura 13.3: Comparación de métodos de reconstrucción. La primera fila muestra el modelo teórico que se quiere reconstruir. Las siguientes filas muestran las reconstrucciones en el siguiente orden: TSVD con un 2% de valores singulares y Tikhonov Estándar. La primer columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido blanco aditivo de  $12dB$ .

## Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción

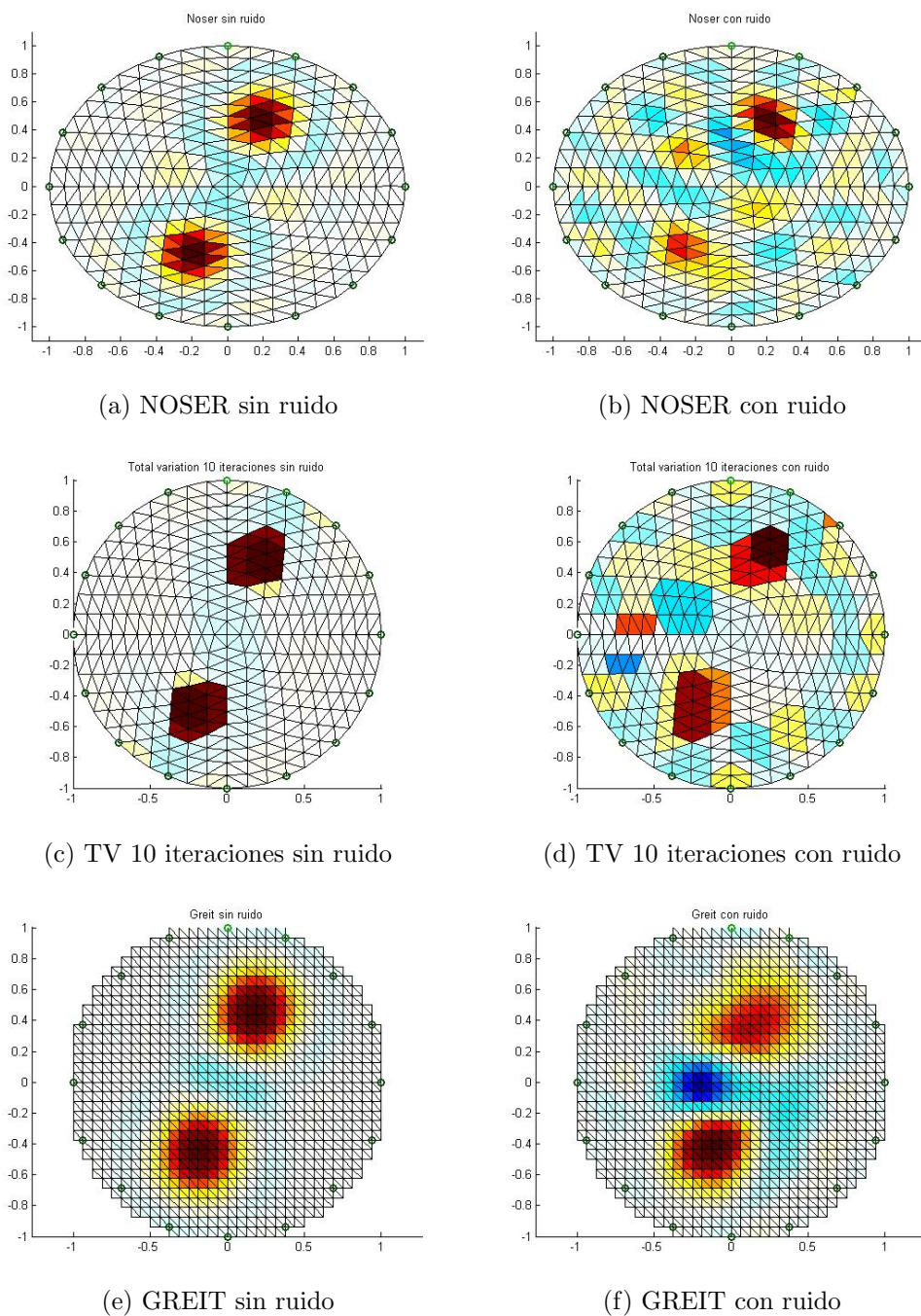
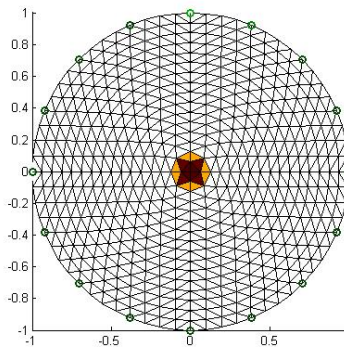
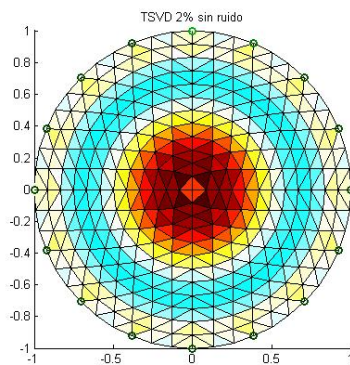


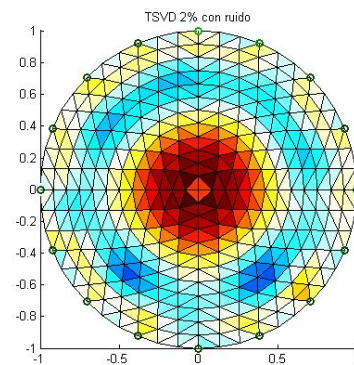
Figura 13.4: Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.3. La primera fila corresponde al método de NOSER, la segunda a Variación Total y la tercera a GREIT. Nuevamente la primera columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido aditivo de  $12dB$ .



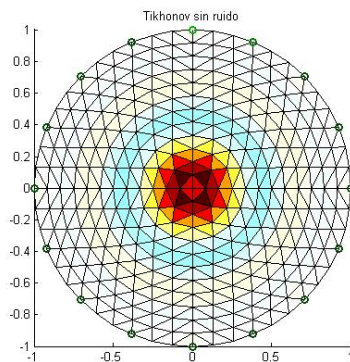
(a) Simulación de cilindro con una perturbación



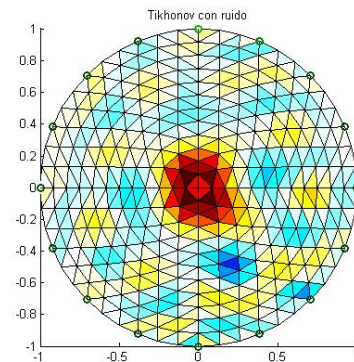
(b) TSVD 2% de V.S. sin ruido



(c) TSVD 2% de V.S. con ruido



(d) Tikhonov sin ruido



(e) Tikhonov con ruido

Figura 13.5: Comparación de métodos de reconstrucción para datos simulados. La primera fila muestra el modelo simulado que se quiere reconstruir. Las siguientes filas muestran las reconstrucciones en el siguiente orden: TSVD con un 2% de valores singulares y Tikhonov Estándar. La primera columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido blanco aditivo de  $12dB$ .

## Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción

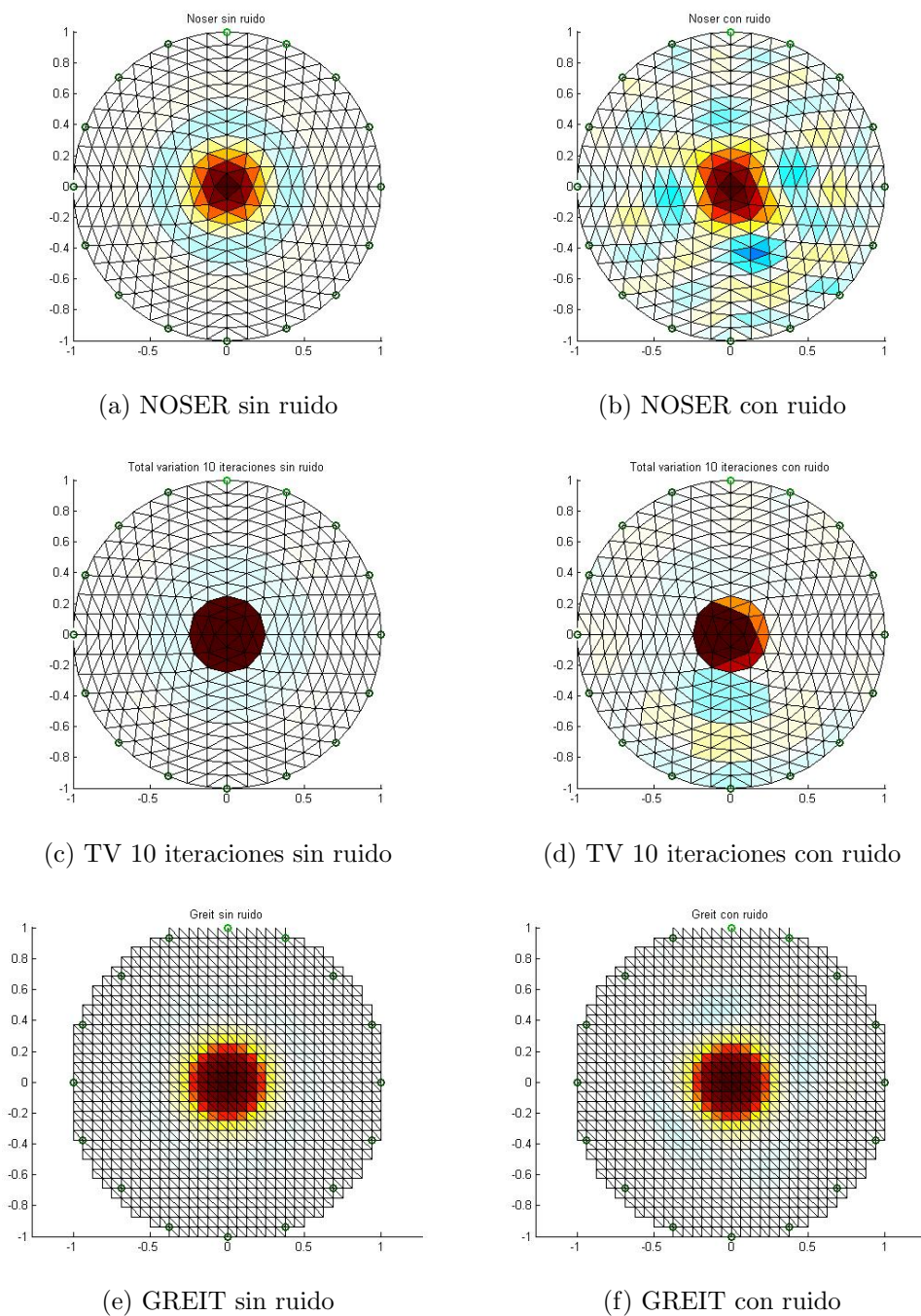


Figura 13.6: Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.5. La primera fila corresponde al método de NOSER, la segunda a Variación Total y la tercera a GREIT. Nuevamente la primera columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido aditivo de  $12dB$ .

### 13.3. Comparación

En estas imágenes también hay que tener en cuenta cuanta responsabilidad tienen los métodos de reconstrucción y cuanta el hardware utilizado para la recolección de datos. Es sabida que el método de electrodos adyacentes tiene problemas para la localización de objetos en el centro de la región, como se aprecia en los métodos de Tijonov y NOSER (figuras 13.7c y 13.7e), donde no se llega a apreciar nada de la botella y solo se percibe ruido sobre el borde del tacho. Los hiperparámetros utilizados fueron  $\alpha = 0,1$  y  $\alpha = 1$  respectivamente.

Para los algoritmos de Variación Total y GREIT si se distingue al objeto en el centro del tacho (figuras 13.8c y 13.8e), aunque sigue existiendo ruido en el borde, por lo que es de concluir que esto es debido más al hardware que al método de reconstrucción. Para TV se utilizaron 5 iteraciones y un hiperparámetro de  $\alpha = 5$ , ya que en este caso se notó que era necesario hiperparámetros más altos, entre 1 y 10.

Para GREIT, en este caso se utilizó un entrenamiento donde se le da más peso a los objetos en el centro por eso se logra una buena imagen. Una comparación con diferentes tipos de entrenamientos para este caso se ve en el apéndice G

En el caso de IMPETOM (figura 13.8a) para la botella en el centro se llega a distinguir algo, si bien la imagen generada está muy contaminada de ruido.

En el caso de la botella en el borde, todos los algoritmos lograron reconstrucciones donde se distingue la botella, en los métodos de Tijonov y NOSER (figuras 13.7d y 13.7f) el objeto se encuentra más deformado que para los algoritmos de IMPETOM, TV y GREIT (figuras 13.8b, 13.8d y 13.8f) Con esto se puede ver que el sistema de recolección de datos es más sensible a detectar objetos en el borde de la región.

Para GREIT en este caso se entrenó utilizando una distribución uniforme. El resto de los parámetros y el número de iteraciones se mantuvo igual al caso con la botella en el centro para los diferentes algoritmos.

#### Voluntario sano

Durante el proyecto IMPETOM se tomaron medidas a un niño de ocho años, hijo de uno de los estudiantes que estaba realizando el proyecto. Se le colocaron los 16 electrodos alrededor del tórax y se tomó una secuencia de 500 *frames* a 15 por segundo que muestra el ciclo respiratorio. La secuencia completa se muestra en los apéndices D, E, F y G.

Para la comparación se utilizan las medidas correspondientes al momento de máxima inspiración.

Para la referencia contra la cual comparar, en este caso los mejores resultados se dan cuando se utiliza el promedio de todas las medias tomadas, a diferencia del caso anterior donde se tomaba una imagen homogénea. El utilizar el promedio está incorporando más información al sistema, sobre todo de la forma y tamaño de los pulmones.

En este caso los errores introducidos al adquirir los datos son mayores que en el caso anterior, debido a un peor contacto de los electrodos a la piel, al corrimiento de estos y a la variación de la superficie de la región durante el ciclo respiratorio.

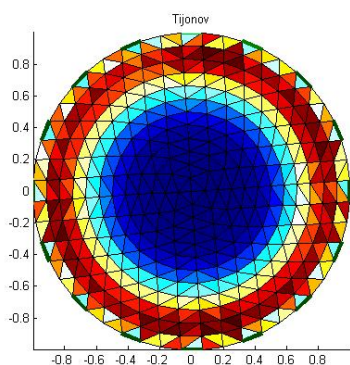
### Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción



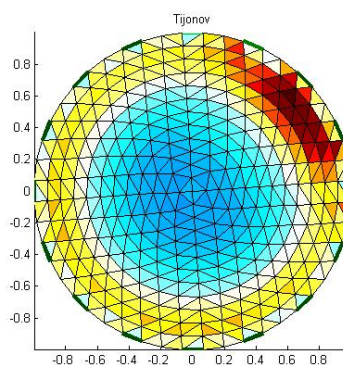
(a) Fantoma con botella en el centro



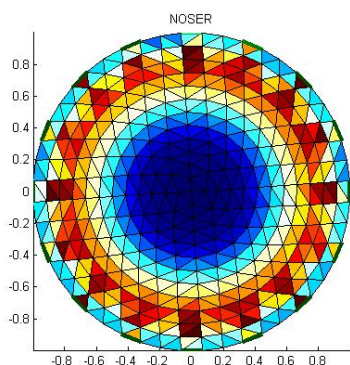
(b) Fantoma con botella en el borde



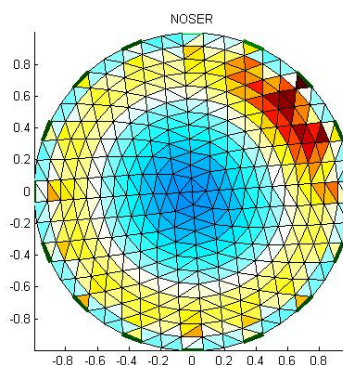
(c) Tjonov



(d) Tjonov



(e) NOSER

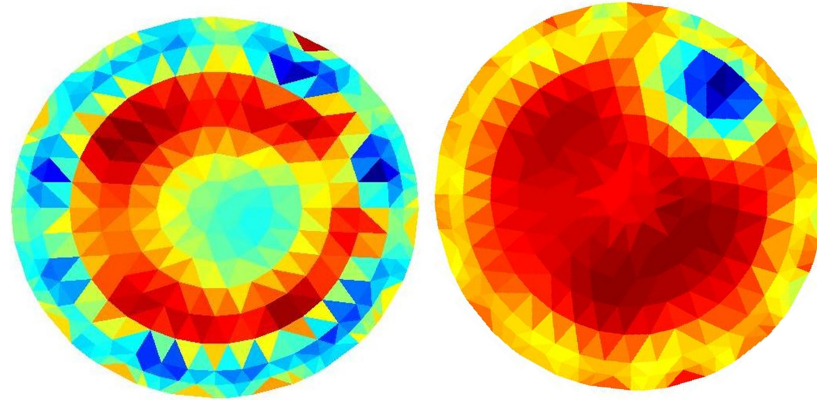


(f) NOSER

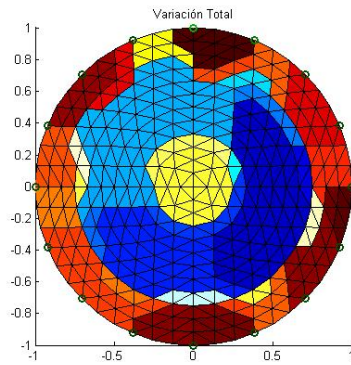
Figura 13.7: Comparación de métodos de reconstrucción para fantoma cilíndrico con botella, datos adquiridos con IMPETOM C. La primera fila muestra los fantomas a reconstruir. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Tjonov estándar y Noser. La primera columna muestra es para el tanque lleno de agua salada con una botella vacía en el centro, en la segunda columna la botella está en el borde del tanque.



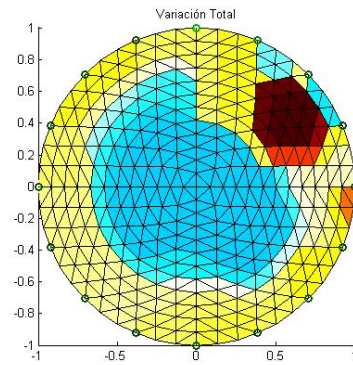
### 13.3. Comparación



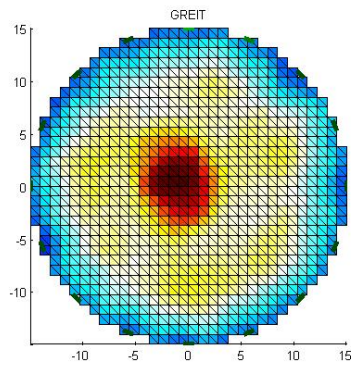
(a) IMPETOM método Gauss-Newton (b) IMPETOM método Gauss-Newton



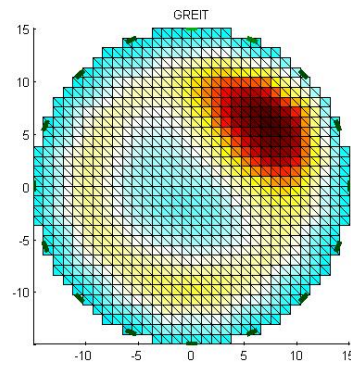
(c) Variación Total



(d) Variación Total



(e) GREIT



(f) GREIT

Figura 13.8: Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.7. La primer fila muestra la reconstrucción mediante el software de IMPETOM I, con el método de Gauss-Newton. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Variación Total y Greit. Nuevamente la primer columna muestra es para el tanque lleno de agua salada con una botella vacía en el centro, en la segunda columna la botella está en el borde del tanque.

## Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción

En todos los métodos se vuelve a ver la tendencia a mostrar los objetos sobre el borde de la región, y una mayor dificultad para detectar variaciones en el centro.

En el caso de Tjonov y NOSER (figuras 13.9b y 13.9c), la forma de los pulmones no es la mejor, y si bien se pueden distinguir, no es una buena representación. Los hiperparámetros utilizados fueron  $\alpha = 0,1$  y  $\alpha = 1$  respectivamente.

Para este caso, la reconstrucción mediante Variación Total (figura 13.10b) no llego a reproducir un contraste muy grande, y si bien se llegan a distinguir los pulmones, estos no son claros. En este caso se realizaron 5 iteraciones y el hiperparámetro que mejor resultados dio fue  $\alpha = 1 \times 10^{-3}$ .

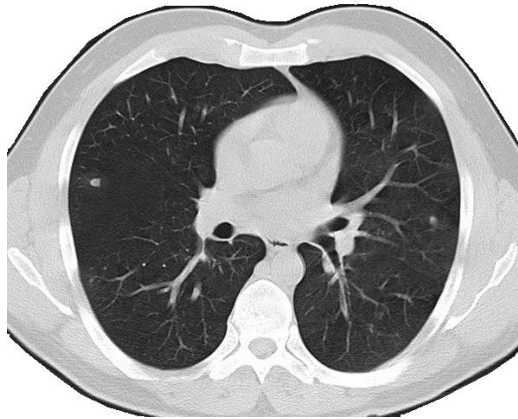
El algoritmo GREIT (figura 13.10c) nuevamente fue entrenado con objetivos uniformemente distribuidos, y es el que muestra una estructura más homogénea en toda la región.

El caso de IMPETOM (figura 13.10a) sirve para mostrar la sensibilidad del problema cuando la malla usada no corresponde con la realidad. En todos los algoritmos se utilizan mallas con forma de tórax, pero en IMPETOM la malla es circular, esto genera una reconstrucción que no se asemeja en nada a lo que se pretende.

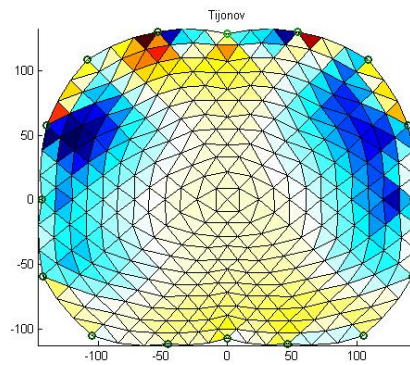
### Parámetros GREIT

Se comparan los dos métodos lineales de un solo paso que mejor resultados dan: NOSER y GREIT, tomando como base los parámetros especificados en [3] para la evaluación de un algoritmo de reconstrucción. Estos parámetros son los que se tuvieron en cuenta para el desarrollo del algoritmo GREIT:

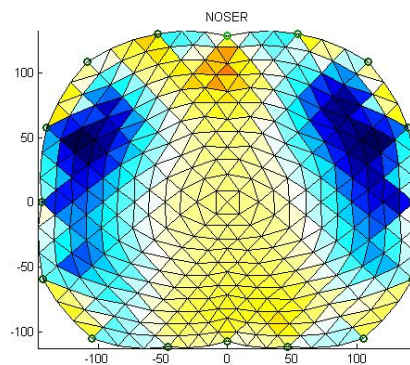
- **Respuesta a la Amplitud (AR)** Mide la relación entre la amplitud de la perturbación y la amplitud de la reconstrucción, es deseable que sea constante para toda la región, ya que si la misma perturbación lleva a diferentes amplitudes en diferentes partes de la región, puede llevar a una mala interpretación de la imagen.
- **Anillado (RNG)** Es una medida del área de conductividad de signo opuesto que se genera alrededor de la reconstrucción del objeto. Se calcula como la relación entre el área de signo opuesto respecto del área del objeto reconstruido.
- **Amplificación del ruido (NF)** Mide la amplificación en la imagen reconstruida de ruido aleatorio introducido en las medidas. Se mide basado en la definición dada en [5]. Este parámetro debe ser bajo, y en lo posible consistente con el ruido que se introduce en el sistema de recolección de datos.
- **Deformación del objeto (SD)** Mide la relación entre el área de la perturbación real y el área de la reconstruida. Esta característica debe ser pequeña y uniforme.



(a) Ejemplo de Tomografía Computada del tórax



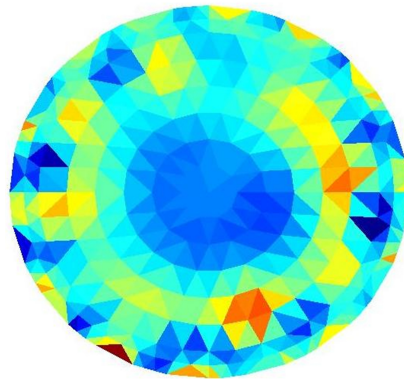
(b) Tignonov



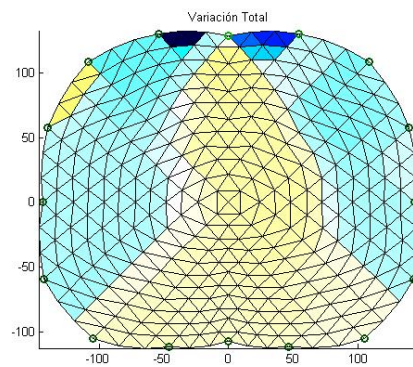
(c) NOSER

Figura 13.9: Comparación de métodos de reconstrucción para voluntario sano, datos adquiridos con IMPETOM C. La primer fila muestra un ejemplo de Tomografía Computada del tórax. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Tignonov estándar y Noser.

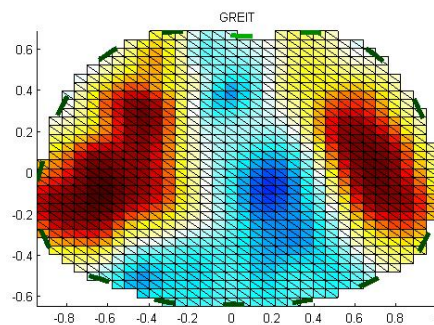
## Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción



(a) IMPETOM método Gauss-Newton



(b) Variación Total



(c) GREIT

Figura 13.10: Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.9. La primer fila muestra la reconstrucción mediante el software de IMPETOM I, con el método de Gauss-Newton. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Variación Total y Greit.

### 13.3. Comparación

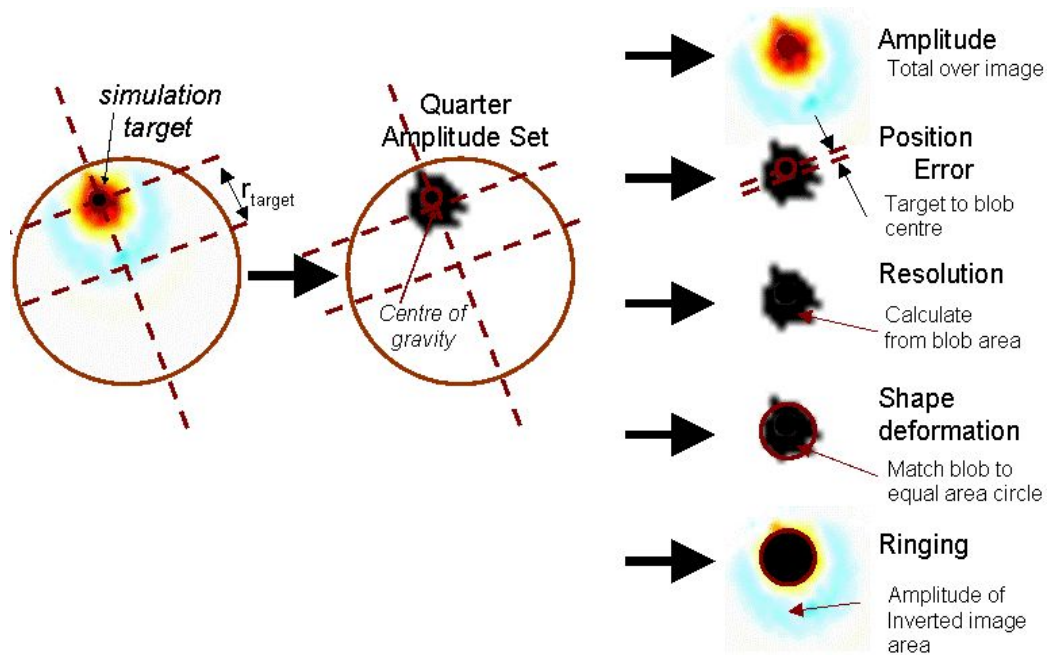


Figura 13.11: Parámetros para la comparación de métodos de reconstrucción. Tomado de [3]

- **Resolución (RES)** Mide la relación entre el área de los objetos reconstruidos respecto al área de toda la región. Es deseable que sea pequeña y constante.
- **Error en la Posición (PE)** Mide el error en la posición del objeto reconstruido respecto del real. Se toma como la diferencia entre el vector desde el centro de la región al centro de la perturbación real menos el vector desde el centro de la región al centro de la perturbación reconstruida. Este error debe ser lo menor posible y constante para toda la región.

Los parámetros están ordenados según la importancia que tienen para nuestra aplicación. Así, por ejemplo, la resolución está en una posición baja debido a que no es nuestro objetivo obtener imágenes detalladas.

Los resultados de la comparación se ven en la figura 13.12, aquí se grafican las características descritas anteriormente en función de la distancia al origen de la región.

En estas gráficas se puede apreciar algunas de las observaciones que ya habíamos hecho con anterioridad, por ejemplo la mayor sensibilidad hacia el borde de la región, esto se ve en casi todas las características, ya sea en la respuesta a la amplitud, como en el anillado o en la deformación de los objetos.

También se aprecia que el algoritmo GREIT está pensado para tener una uniformidad mayor en toda la región, y que esto se logra bastante, ya que todos los parámetros se mantienen más constantes que para el algoritmo NOSER.

### Capítulo 13. Comparación de métodos de reconstrucción

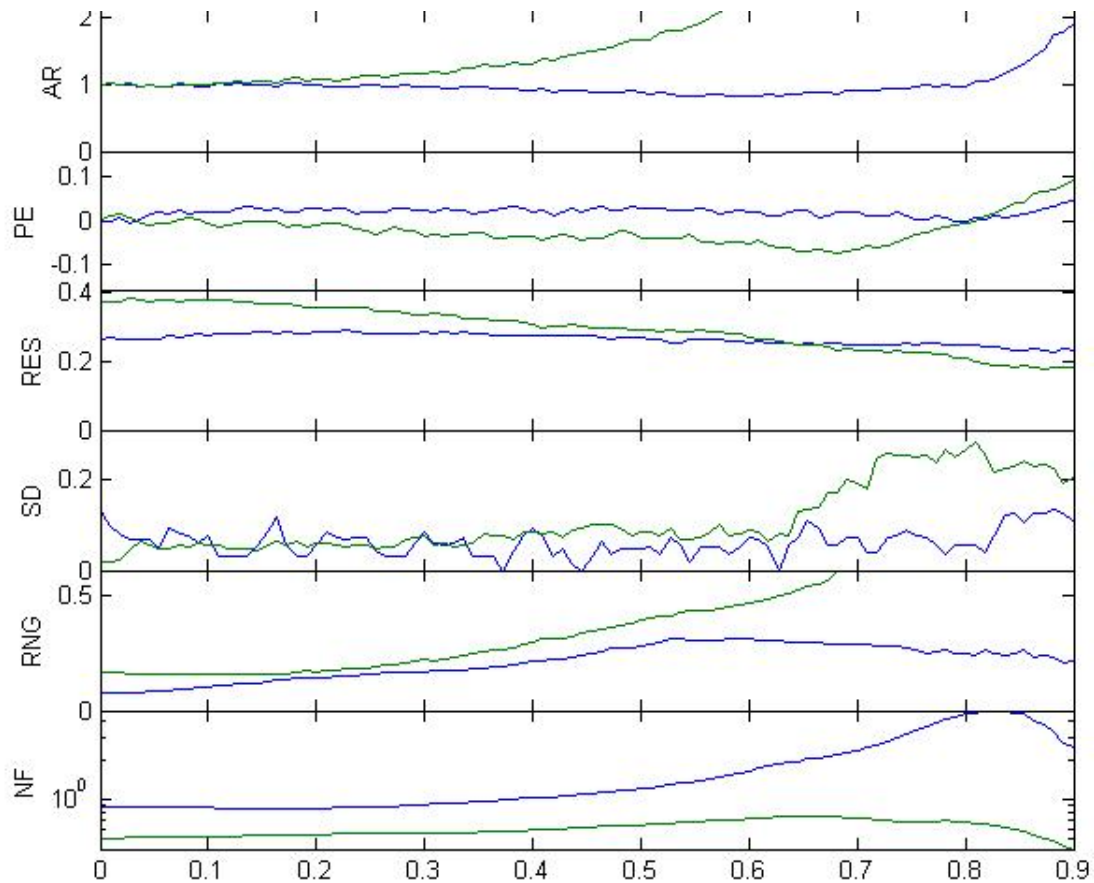


Figura 13.12: Comparación entre método NOSER (Verde) y GREIT (Azul) para los parámetros especificados en [3], donde AR es respuesta a la amplitud, PE es error en la posición, RES es la resolución, SD la deformación del objeto, RNG el anillado, y NF la amplificación del ruido. Estas características están graficadas según la distancia al centro de la región, comenzando a la izquierda y alejándose hacia la derecha.

# Capítulo 14

## Conclusiones

### 14.1. Introducción

Este trabajo presenta un resumen de la técnica de tomografía por impedancia eléctrica, tanto de la parte de circuitería como de los algoritmos de reconstrucción, para la aplicación particular del seguimiento de las funciones pulmonares y el tratamiento de las lesiones agudas pulmonares.

En ambos aspectos se trató de estudiar las posibilidades actuales, con el objetivo de presentar un diseño que permita la construcción de un equipo portátil, de bajo costo y que permita reconstruir imágenes en tiempo real de la conductividad en el tórax, no siendo la resolución una prioridad para el equipo.

El anterior prototipo de IMPETOM proporcionó un primer paso para el estudio del tema, si bien luego no se pudo utilizar parte de ese diseño.

Con el presente trabajo de tesis se profundizan todos los temas abordados hasta ahora en la línea de investigación de IMPETOM (en circuitería y en desarrollo informático así como en los algoritmos utilizados). Es por lo tanto momento propicio para evaluar las posibilidades de desarrollos futuros, a la luz de la evidencia de los temas a mejorar. En esta discusión se valorarán los resultados logrados hasta hoy proyectándolos hacia futuras metas.

### 14.2. Discusión

Transitar por todos los aspectos de la instrumentación de tomografía por impedancia eléctrica le dio al autor una formación a la vez completa sobre un abanico de aspectos y profunda dado que fue necesario proyectar soluciones concretas.

Recordando que el objetivo original propuesto para la realización de esta tesis es el desarrollo de un instrumento que no busca resolución de imágenes pero en cambio es un intento de cuantificar zonas de conductividad dispar (agua y aire) con la finalidad de seguir su evolución, no se consideró necesario modificar las características del modelo anterior de IMPETOM, en cuanto a número de electrodos y patrón de corriente inyectada.

## Capítulo 14. Conclusiones

El diseño propuesto para la circuitería, basado en el tratamiento digital de las señales, condice con los diseños actuales, y supone la actualización necesaria del diseño original de IMPETOM. Entre estas opciones el uso de un DSP pretende dar más flexibilidad que el uso de FPGAs, además de la posibilidad en un futuro de la implementación del algoritmo de reconstrucción dentro de este procesador, y lograr un equipo independiente de una computadora personal.

Otras mejora que creemos que ayudarán a desarrollar un mejor equipo es el uso de la resistencia shunt para medición de la corriente, ya que éste es uno de los aspectos que más error introduce.

A pesar de la década transcurrida desde el proyecto inicial de IMPETOM, el trabajo de esta tesis confirma la arquitectura de 16 canales de medida de tensión generadas por un único canal de corriente multiplexado hacia los 16 electrodos. La opción de un solo canal de medida de voltaje, (mencionada en 6.1) tuvo su justificación en la búsqueda de simplificación del circuito a implementar, a su vez opción que fue posible gracias a la exigencia muy baja de definición temporal de las imágenes.

El estudio del problema matemático de la reconstrucción tomográfica fue profundo y llegó a plantear condiciones y procedimientos que no estaban planteados en la versión inicial de IMPETOM: Se llegó a comparar resultados de reconstrucciones con y sin malla anatómicamente adaptadas, además de comparar los procedimientos de regularización y de reconstrucción propiamente dichos.

Se debe mencionar la utilidad para esta tesis de la aplicación EIDORS, la que permitió implementar los algoritmos de reconstrucción con facilidad.

Los algoritmos para la resolución del problema inverso lineal vistos en el capítulo 10 no son tan complicados de implementar, ya que consisten en la multiplicación de matrices. La dificultad se encuentra en el cálculo de estas matrices, lo que incluye la discretización mediante Elementos Finitos (sección 9.2), cálculo de la matriz Jacobiana (sección 9.4) y resolución del problema directo (sección 9.5).

Para optimizar la obtención de resultados y seguir procedimientos estándares ya existentes se utilizó los que trae EIDORS.

Los métodos iterativos (capítulo 11), tanto para la resolución del problema lineal como no lineal, incrementan de forma considerable los cálculos necesarios, así como el tiempo de reconstrucción. Para el caso de una computadora portátil con un procesador Intel Core2Duo T5800 de 2GHz de velocidad de reloj y 4GB de memoria RAM, el método iterativo de Variación Total con diez iteraciones demora en promedio 1,4 segundos, mientras que el método GREIT tarda 0,012 segundos.

A su vez, el resultado a través de métodos iterativos no es necesariamente superior al que se obtiene mediante los métodos de un solo paso, esto es debido a los errores inherentes al problema, por ejemplo, al ruido introducido en las medidas o la poca cantidad de datos con los que contamos para la reconstrucción.

Los resultados obtenidos mediante los métodos de un solo paso son variados (capítulo 10), los métodos más simples como el Truncamiento de Valores Singulares o la regularización mediante Tijonov no muestran buenos resultados, con problemas para la representación de variaciones en el centro de la región y poca capacidad para representar correctamente la forma de la variación.



Otros algoritmos de un solo paso, como la regularización mediante NOSER o GREIT tienen un buen comportamiento. En el caso de NOSER la matriz de regularización utilizada utiliza la matriz Jacobiana, introduciendo el factor de la sensibilidad en el peso que se les da a los valores singulares. El algoritmo de GREIT ajusta los parámetros en base a un entrenamiento donde asigna diferentes pesos a los diferentes elementos de la imagen, de forma de cumplir con ciertas condiciones. De estos dos métodos se llega a imágenes de las que se puede obtener información relevante de forma confiable. Por esto el autor cree que el nuevo IMPETOM debe utilizar algoritmos de un solo paso como los dos mencionados en este parágrafo.

Más allá de la obtención de imágenes de cortes más o menos fieles a la realidad de las variaciones de conductividad interna del tórax, existe el procesamiento de los voltajes cutáneos con algoritmos adaptados a extraer nueva información derivada del fenómeno de la impedancia diferente según composición, forma o disposición interna. Esta nueva información espacial derivada de algoritmos como el de Variación Total (ver 11.2) abre un campo de investigación amplio que deberá ser recorrido en las próximas décadas. Este enfoque, presente en otros ámbitos, por ejemplo para quitar ruido en imágenes, abre una perspectiva de innovación en las líneas de investigación fisiopatológica importante.

Para que esta técnica llegue a utilizarse en el ámbito clínico es fundamental que las imágenes reconstruidas cumplan con ciertas características que garanticen la confiabilidad de las mismas. Entre estas características se encuentran las vistas en la sección 13.3, siendo las más importantes una respuesta uniforme a las variaciones en toda la región, pequeño error en la posición de las variaciones, poco efecto de anillado y una baja amplificación del ruido.

De todos los algoritmos de un solo paso vistos, el algoritmo GREIT (sección 13.1) está concebido para destacarse en las características antes mencionadas. La comparación de métodos realizada en el capítulo 13 confirma esto, destacándose ante otros métodos, como la regularización mediante NOSER (sección 13.3).

El autor cree que GREIT debe ser el algoritmo que utilice el nuevo IMPETOM para la reconstrucción de las imágenes.

Los mejores resultados se obtuvieron con imágenes diferenciales en donde como referencia se utiliza el promedio de las medidas hechas hasta el momento, por lo que se propone que el equipo vaya formando este promedio a medida que se realizan van adquiriendo nuevos conjuntos de datos. A diferencia de un método iterativo donde con un solo conjunto de datos se va de a pasos buscando la mejor solución, el método propuesto va mejorando a lo largo del tiempo, a medida que se van obteniendo los conjuntos de datos y el promedio utilizado como referencia se estabiliza.

Además se comprobó la importancia del uso de una malla que represente lo más fielmente posible el contorno del cuerpo, ya que el uso de mallas que no lo hagan genera errores en la reconstrucción como lo visto al utilizar el software de IMPETOM-I (capítulo 13), así como la tendencia del método de inyección adyacente a representar con más énfasis las perturbaciones en el borde que en el centro de la región, esto también se debe a los errores en la recolección de datos.

### 14.3. Trabajo futuro

Uno de los objetivos de esta tesis es la consolidación de una línea de trabajo que nació en forma casi simultánea a la de los centros pioneros de Inglaterra (Sheffield y Oxford) y EE.UU.. Los múltiples temas de investigación que permitió explorar o simplemente vislumbrar el tránsito por el presente trabajo de maestría auguran un amplio y favorable futuro.

La Tomografía por Impedancia Eléctrica toca varias disciplinas, las más notorias son la de la electrónica y la resolución de problemas inversos. Las soluciones dentro de estas áreas son amplias y tienen la característica de que se pueden aplicar a diferentes ámbitos, por lo que a pesar de que esta técnica quizás nunca llegue a consolidarse en el uso clínico, el estudio de los métodos tanto de circuitería como de algoritmos de reconstrucción es de un gran valor para el estudiante.

La investigación en EIT constituye un ejemplo de trabajo interdisciplinario en el cual las diferentes formaciones se complementan y se necesitan mutuamente para formular, verificar y aportar ideas o soluciones. El fisiólogo y el clínico con su motivación exigente ofrecen explicaciones y razones, el matemático interpreta necesidades y elige estructuras y algoritmos, los ingenieros, tanto eléctricos como en computación implementan los circuitos y programas necesarios. Diseño industrial participa en la construcción de la cinta la conexión, en la ergonomía e interfaz con el usuario.

En la sección 6.2 se plantean diferentes etapas para la concreción del hardware de este prototipo. El ruido introducido por el mal contacto de los electrodos, así como el movimiento o un posicionamiento incorrecto son factores fundamentales que afectan la reconstrucción de la imagen, debido a esto, es deseable un estudio de la forma de fijar los electrodos al paciente, ya sea mediante una cinta u otro método. Otro aspecto relativo más al diseño es el del gabinete, se deberá diseñar el lugar donde se alojará el equipo.

Otro agregado al diseño planteado anteriormente, y de mucha importancia, es la implementación de la aislación eléctrica de los electrodos con el paciente, esto se puede lograr mediante optoacopladores u otro método, pero es imprescindible que en etapas de pruebas clínicas este equipo cumpla con las normas establecidas para seguridad eléctrica, tanto en corrientes de fuga como ante fallas, por lo que es también necesario otra etapa donde se estudie toda esta temática y se implementen las medidas necesarias.

Respecto del problema de programación, por ahora se considera suficiente el manejo de la herramienta de código abierto EIDORS para la implementación y comparación de diferentes métodos, pero puede ser deseable la implementación de la resolución del problema directo, aunque sea por motivos solamente educativos, aunque para eso es necesario contar con una preparación matemática importante.

Hoy en día los algoritmos de reconstrucción tienden a ser más complicados, tratando de resolver el problema no lineal de forma iterativa, buscando una mejor resolución y fidelidad anatómica, lo que no es imprescindible, pero no se descarta.

También falta la implementación del software que controle el equipo y que funciones como interfaz entre el sistema de recolección de datos y el algoritmo de

reconstrucción.

#### Perspectiva de desarrollo concreto

**IMPETOM-B:** Utilización de la Evaluation Board para implementar el control de IMPETOM, se controla la multiplexación, el manejo de los datos, y del DDS para generar la señal que inyectará la fuente de corriente y el traspaso de estos a la PC. Se explora la generación de señal mediante el códec de audio. También la medida de voltajes mediante los canales de entrada del códec y la demodulación de la señal en el DSP. Este proyecto requiere el manejo de las herramientas para programar el DSP, así como el entendimiento de su funcionamiento. El resultado del proyecto es una matriz de datos según norma IMPETOM.

**IMPETOM-G:** Corresponde a la construcción del *front end* del IMPETOM, este incluye la fuente de corriente, con el generador de señal mediante el DDS y la fuente de Howland modificada, se utiliza el potenciómetro para medir la corriente inyectada. Además de la etapa de medida de tensión, mediante el amplificador de instrumentación y la aislación del sistema. Este proyecto incluye el proyecto del circuito para la fuente de corriente, junto a la programación del DDS, y el proyecto del circuito de medida de tensión. El resultado del proyecto es una matriz de datos según norma IMPETOM.

**IMPETOM-D:** Es la unificación de las dos primeras etapas, se deberá coordinar, mediante el mismo DSP, los proyectos G y B. El resultado debería ser un primer sistema liviano de adquisición de datos con un canal de medida de tensión en el que se pueda medir el rendimiento del diseño y detectar fallas en el mismo. Este proyecto requiere conocer el funcionamiento del DSP y de las etapas de fuente de corriente y de medición de tensión, además deberá generar protocolos para la medición del rendimiento y la aplicación de los tests. Se deberán obtener medidas que permitan medir el rendimiento del equipo y establecer los límites de su performance. El resultado del proyecto es una matriz de datos según norma IMPETOM.

**IMPETOM-F:** Se deberá realizar una circuitería que incorpore convertidores A/D externos y que pasen las señales en formato digital al DSP. Se implementarán dieciséis canales de entrada, se deberá explorar la capacidad de hacer esto mediante una Circuit Evaluation Board. Se deberá implementar la aislación de estos canales. Este proyecto debe concluir nuevamente con un prototipo que permita tomar datos, nuevamente se mide el rendimiento del equipo, y se deja lugar a pequeñas mejoras que se piense que se puedan hacer. El resultado del proyecto es una matriz de datos según norma IMPETOM.

**IMPETOM-P** En esta etapa se acondiciona el prototipo en un gabinete. Se estudia e implementa la cinta con electrodos que se colocará en el paciente y se realicen pruebas de validación en fantasmas y animales o voluntarios. Esta etapa no tiene

## Capítulo 14. Conclusiones

por qué ser parte de un proyecto de ingeniería, ya que requiere conocimientos de diseño industrial y de protocolos de validación de datos. En esta etapa se puede validar tanto la circuitería sola, como el conjunto con el programa de reconstrucción, y en caso de que esté completo el programa para adquisición de datos en tiempo real, se podrá probar el sistema entero.

**IMPETOM-CLIN** Es el desarrollo del programa que permite la reconstrucción de imágenes en tiempo real. Lee las matrices en disco en tiempo real de los prototipos G, F y D. Se utilizan las herramientas de EIDORS para la exploración de los algoritmos y la selección de parámetros. Se deberá realizar la interfaz gráfica y la comunicación con el DSP para la obtención de las medidas. Además de guardar las imágenes en formato DICOM y crear un informe para la HCE.

**IMPETOM-DIR** Se implementará la solución al problema directo. Esto requiere el estudio matemático y entendimiento del método de Elementos Finitos, se deberá calcular la matriz Jacobiana del sistema y la resolución del problema directo. Es una caja negra que sustituye el EIDORS del proyecto IMPETOM-CLIN.

**IMPETOM-VAR** Es la implementación y exploración del método de Variación Total y otros algoritmos novedosos que permitan obtener otro tipo de información de las medidas de tensión. Permitirá realizar un trabajo interdisciplinario de exploración de nuevos significados de imágenes funcionales.

# Apéndice A

## Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev están vinculados al número de derivadas débiles que tiene una función. Estas se relacionan con el problema de EIT desde un costado físico, lo cual se explica en este apéndice.

### A.1. Notación y preliminares

**Multi-índices y derivadas.** Una  $n$ -tupla  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  de enteros no negativos son un *Multi-índice*. Se define

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j, \quad (\text{A.1})$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!, \quad (\text{A.2})$$

y para  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}. \quad (\text{A.3})$$

Escribiendo  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$  para derivadas en  $\mathbb{R}^n$ , las derivadas quedan expresadas en términos de multi-índices:

$$\partial^\alpha = \prod_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (\text{A.4})$$

**Derivada Débil.** Supongamos que  $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ , donde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto abierto. Vamos a decir que  $\partial^\alpha u = v$  *débilmente*, donde  $\alpha$  es un multi-índice, si para todo  $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_{\Omega} v \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u \partial^\alpha \phi. \quad (\text{A.5})$$

Esto es fácil de ver mediante integración por partes.

$L^1_{loc}(\Omega)$  es el conjunto de funciones localmente integrables en  $\Omega$ . Una función  $u$  definida casi todo punto en  $\Omega$  es *localmente integrable* en  $\Omega$  cuando  $u \in L^1(U)$  para todo subconjunto abierto  $U$  de  $\Omega$ .

## Apéndice A. Espacios de Sobolev

Dado un entero no negativo  $m$ ,  $C^m(\Omega)$  es el espacio de funciones  $u$  que, junto con todas sus derivadas parciales  $\partial^\alpha u$  de orden  $|\alpha| \leq m$ , son continuas en  $\Omega$ .  $C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^\infty C^m(\Omega)$ .  $C_c^\infty(\Omega)$  consiste en todas las funciones en  $C^\infty(\Omega)$  que tienen soporte compacto en  $\Omega$ .

### A.2. Definiciones y propiedades básicas

**Normas de Sobolev.** Se define el operador  $\|\cdot\|_{m,p}$ , donde  $m$  es un entero positivo, y  $1 \leq p \leq \infty$ , de la siguiente forma: [2, Ch. 3]

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_p^p \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < \infty \quad (\text{A.6})$$

$$\|u\|_{m,\infty} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_\infty, \quad (\text{A.7})$$

para toda función  $u$  donde el lado derecho tenga sentido.

**Espacios de Sobolev.** Para cualquier entero positivo  $m$  y  $1 \leq p \leq \infty$  consideramos tres espacios donde  $\|\cdot\|_{m,p}$  es una norma:

- (a)  $H^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in C^m(\Omega) : \|u\|_{m,p} < \infty\}$ .
- (b)  $W^{m,p}(\Omega) \equiv \{u \in L^p(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}$ .
- (c)  $W_c^{m,p}(\Omega) \equiv \overline{C_c^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)}$ .

Equipados con la norma definida anteriormente, estos son llamados *espacios de Sobolev* sobre  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ . Se ve fácilmente que  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$  y si  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $W_c^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$  porque  $C_c^\infty$  es denso en  $L^p(\Omega)$  [113, p. 142]. Para cualquier  $m$  tenemos la siguiente cadena de inclusiones:

$$W_c^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega),$$

y se puede probar que  $H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$  para cualquier dominio  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ .

**Teorema:**  $W^{m,p}(\Omega)$  es un espacio de Banach (para todo  $m, p, \Omega$ )

**Prueba:** Si  $(u_i)$  es una sucesión de Cauchy en  $W^{m,p}$ , entonces  $(\partial^\alpha u_i)$  es también de Cauchy en  $L^p$  si  $|\alpha| \leq m$ . Por completitud de  $L^p$ , existen funciones  $u^\alpha$  tales que  $\partial^\alpha u_i \xrightarrow{L^p} u^\alpha$  para cada  $|\alpha| \leq m$ . Hay que ver que  $\partial^\alpha u$  existe y es  $u^\alpha$ . Usando la definición de derivada débil:

$$\int_\Omega u^\alpha \phi = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_\Omega \partial^\alpha u_j \phi = \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u_j \partial^\alpha \phi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u \partial^\alpha \phi, \quad (\text{A.8})$$

con lo que  $u^\alpha = \partial^\alpha u$  y  $u_i \xrightarrow{W^{m,p}} u$ .  $\square$

## A.2. Definiciones y propiedades básicas

Un corolario de esto es que  $W_c^{m,p}(\Omega) \subset H^{m,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ . Además:

**Teorema:**  $W_c^{m,p}(\mathbb{R}^n) = W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$  para todo  $m \in \mathbb{N}, 1 \leq p < \infty$ .

El caso de  $p = \infty$  es diferente, y  $x \mapsto |x|$  es un ejemplo simple de una función en  $W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \setminus H^{1,\infty}(\mathbb{R})$ .

Para probar el teorema se necesita recordar el siguiente resultado del teorema de regularización [113, p. 142]: Sea  $\phi \in C_c^\infty \mathbb{R}^n$ , no negativa, con soporte en la bola unitaria, tal que satisface que  $\int_{\mathbb{R}^n} \phi = 1$ . Un ejemplo de este tipo de funciones es:  $\phi(x) = C \exp[-1/(1-|x|)^2]$  para  $|x| < 1$  y  $C$  elegido correctamente. Luego se escalan estas funciones  $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n} \phi(\epsilon^{-1}x)$  de forma de que preserven la masa ( $\|\phi_\epsilon\|_1 = 1$ ) y se acumulen en el origen ( $\phi_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \delta$ ). Dada una función  $u \in L_{loc}^1 \mathbb{R}^n$  entonces  $u_\epsilon = u * \phi_\epsilon$  se llama regularización de  $u$ , y  $u_\epsilon \in C^\infty \mathbb{R}^n$ . Además, si  $u \in L^p$ ,  $u_\epsilon \xrightarrow{L^p} u$  y  $(\partial^\alpha u)_\epsilon = \partial^\alpha u_\epsilon$ .

Otro tipo de funciones que utilizaremos son las llamadas *bump functions*  $b \in C_c^\infty \mathbb{R}^n$  tales que  $b|_{B(0,1)} = 1$  y  $b|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,2)} = 0$ . También vamos a escalar estas funciones  $B_R(x) = b(x/R)$ , ( $b_R|_{B(0,R)} = 1, b_R|_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,2R)} = 0$ ) además se cumple que cualquier derivada parcial de orden  $k$  está acotada por  $C/R^k, C = C_{k,n}$  independiente de  $R$ .

**Prueba del teorema** Supongamos que  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  y  $u_\epsilon$  es su regularización. Tomamos una  $b_R$  como las definidas anteriormente y tenemos que  $b_R u_\epsilon \in C_c^\infty \mathbb{R}^n$  para todo  $\epsilon, R > 0$ . Por el teorema de regularización se puede elegir una sucesión  $(\epsilon_n)$  tal que  $\|u - u_{\epsilon_n}\|_{W^{m,p}(\Omega)} < 1/n$ . Por el teorema de convergencia dominada y las propiedades de  $b_R$ , podemos tomar una sucesión  $(R_n)$  tal que  $\|u_{\epsilon_n} - b_{R_n} u_{\epsilon_n}\|_{W^{m,p}(\Omega)} < 1/n$ . Por desigualdad triangular llegamos a que  $b_{R_n} u_{\epsilon_n} \xrightarrow{W^{k,p}} u$  como buscábamos.  $\square$

El mismo resultado se puede obtener para un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  [25], por lo que se concluye que, para  $1 \leq p < \infty$  los tres espacios definidos anteriormente son iguales

$$W_c^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}(\Omega)$$

**Teorema:** Si  $1 < p < \infty$ ,  $W^{m,p}(\Omega)$  y  $W_c^{m,p}(\Omega)$  son reflexivos.

**Prueba:** Hay que notar que  $W^{m,p}(\Omega)$  (y  $W_c^{m,p}(\Omega)$ ) usando el mapeo  $u \mapsto (u, (\partial^\alpha u)_{|\alpha| \leq k})$  es un isomorfismo, como espacio de Banach, con un subespacio cerrado de  $L^p(\Omega) \times \dots \times L^p(\Omega)$ , este producto de espacios es reflexivo para  $1 < p < \infty$ , y como un subespacio cerrado de un espacio reflexivo es reflexivo, queda demostrado.  $\square$

### A.3. Espacios de Sobolev y Transformada de Fourier

El hecho de que sea un espacio de Hilbert, y por las Transformadas de Fourier, hace interesante ver el comportamiento de los espacios de Sobolev en  $L^2$ . Comenzamos definiendo nuevamente el espacio como:

$$H^m(\Omega) \equiv \{u \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha u \in L^2(\Omega) \text{ para } 0 \leq |\alpha| \leq m\}, \quad (\text{A.9})$$

donde  $m$  es un entero positivo, y  $\Omega \in \mathbb{R}^n$ . Esta definición tiene un equivalente en términos de la transformada de Fourier: [44]

**Teorema:**  $u \in H^m$  sí y solo sí  $(1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2$ , y las normas

$$u \mapsto \left[ \sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 \right]^{1/2} \quad \text{y} \quad u \mapsto \left[ \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^m d\xi \right]^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

son equivalentes.

**Comienzo de la prueba:** Dado que  $(\partial^\alpha u)(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{u}(\xi)$  y como la transformada de Fourier es un isomorfismo en  $L^2$  tenemos que:

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha u\|_2^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int |\hat{u}(\xi)|^2 |(2\pi i \xi)^\alpha|^2 d\xi. \quad (\text{A.11})$$

Para finalizar la prueba basta con ver que las cantidades  $\sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2$  y  $(1 + |\xi|^2)^m$  son comparables, esto es:

$$C_1(1 + |\xi|^2)^m \leq \sum_{|\alpha| \leq m} |\xi^\alpha|^2 \leq C_2(1 + |\xi|^2)^m. \quad (\text{A.12})$$

La demostración de esta última afirmación se encuentra en [44, p. 191]

Esta relación entre los espacios de Sobolev y las Transformadas de Fourier permite generalizar  $H^m$  y reemplazar  $m$  por un número real  $s$ . La clase de Schwartz  $\mathcal{S}$  es el espacio de todas las funciones  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$  que junto a todas sus derivadas decaen más rápido que cualquier potencia de  $x$  en el infinito. Esto es,  $u \in \mathcal{S}$  si y solo si  $u \in \mathcal{S}$  y para todos los mult-índices  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u(x)| < \infty. \quad (\text{A.13})$$

$\mathcal{S}'$  es el espacio de distribuciones temperadas, que son los funcionales lineales sobre  $\mathcal{S}$ . Estas distribuciones crecen “como mucho” polinómicamente en el infinito. Por ejemplo, todos los polinomios son distribuciones temperadas, pero  $u(x) = e^{|x|}$  no. La importancia de las distribuciones temperadas es que tienen transformada de Fourier.

Entonces si  $u(\xi)$  es una función en  $\mathbb{R}^n$  tal que  $(1 + |\xi|^2)^{s/2} u(\xi) \in L^2$ , resulta que  $u\phi \in L^1$  para una  $\phi \in \mathcal{S}$  y  $u$  una distribución temperada (cuya acción sobre  $\phi \in \mathcal{S}$



## A.4. Ejemplo

es  $\int u\phi$ ). Como la transformada de Fourier mapea distribuciones temperadas en distribuciones temperadas se puede definir el espacio de Sobolev de orden  $s$  como:

$$H^s = H^s\mathbb{R}^n \equiv \left\{ u \in \mathcal{S}'\mathbb{R}^n : \hat{u} \text{ es una función y } \|u\|_s^2 \equiv \int |\hat{u}(\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^s d\xi < \infty \right\} \quad (\text{A.14})$$

La norma  $\|\cdot\|_s$  sobre  $H_s$  es llamada la norma de Sobolev de orden  $s$ .

La relación entre la diferenciabilidad de  $u$  y el espacio  $H^s$  al que pertenece viene dada por el siguiente teorema [44, p. 192]:

**Teorema:** Supongamos que  $k$  es un entero positivo,  $s$  un número real, y  $u$  es una distribución temperada. Entonces  $u \in H^s$  sí y solo si  $\partial^\alpha u \in H^{s-k}$  para  $|\alpha| \leq k$ , y las normas

$$\|u\|_s \text{ y } \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{s-k}^2 \right]^{1/2} \quad (\text{A.15})$$

son equivalentes. En particular  $\partial^\alpha$  es un operador acotado desde  $H^s$  a  $H^{s-k}$  para todo  $s$  cuando  $|\alpha| \leq k$ .

$H^s$  es un espacio de Hilbert con el producto interno:

$$\langle f, g \rangle_s = \int \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} (1 + |\xi|^2)^s d\xi, \quad (\text{A.16})$$

y la transformada de Fourier es un isomorfismo desde  $H^s$  a  $L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$  con  $d\mu(\xi) = (1 + |\xi|^2)^s d\xi$ .

**Ejemplo.** Sea  $\delta$  el delta de Dirac en  $\mathbb{R}^n$ , como  $\hat{\delta} = 1$  y pasando a coordenadas polares, tenemos que:

$$\|\delta\|_s^2 = \int (1 + |\xi|^2)^s d\xi = \omega_n \int_0^\infty (1 + r^2)^s r^{n-1} dr, \quad (\text{A.17})$$

que es finito sí y solo sí  $s < -\frac{1}{2}n$  ya que el integrando es básicamente  $r^{2s+n-1}$  para  $r$  grande. Entonces,  $\delta \in H^s$  sí y solo sí  $s < -\frac{1}{2}n$ .

## A.4. Ejemplo

En la tomografía por impedancia eléctrica se intenta reconstruir la conductividad dentro de un cuerpo basado en mediciones en el borde. Se colocan electrodos en la superficie por donde se inyectan corrientes y se miden voltajes, y es de esta información que se obtiene un mapeo de la resistividad dentro de la región. Las ecuaciones que gobiernan vienen de las ecuaciones de Maxwell, aunque considerando que estamos en baja frecuencia podemos ignorar el campo magnético. Dado un cuerpo  $\Omega$ , subconjunto de tres dimensiones cerrado y acotado, con un borde

## Apéndice A. Espacios de Sobolev

regular  $\partial\Omega$ , el cuerpo tiene una conductividad  $\sigma$  función de la variable espacial  $x$ . El potencial escalar es  $\phi$  y el campo eléctrico  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . La densidad de corriente es  $\mathbf{J} = -\sigma\nabla\phi$  que se corresponde con la ley de Ohm. Como no hay fuentes de corrientes internas, la ley de Kirchoff de corrientes queda  $\nabla \cdot \sigma\nabla\phi = 0$  y la densidad de corriente en el borde  $j = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \sigma\nabla\phi \cdot \mathbf{n}$ , donde  $\mathbf{n}$  es el vector normal saliente a  $\partial\Omega$ .

La potencia disipada dentro del cuerpo se puede ver como  $\int_{\Omega} \mathbf{E}\mathbf{J} = \int_{\Omega} \sigma(\nabla\phi)^2$ . Ahora, por razones físicas obvias, esta potencia debe ser finita, por lo tanto debemos imponer que  $\int_{\Omega} |\nabla\phi|^2 < \infty$ , y  $\phi$ , que se puede considerar la solución débil de

$$\begin{cases} \nabla \cdot \sigma\nabla\phi = 0 \\ \phi|_{\partial\Omega} = v \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

pertenece al espacio de Sobolev de primer orden en  $\Omega$ ,  $\phi \in H^1(\Omega)$ , donde  $v$  son los voltajes en el borde del cuerpo, que en el caso de la tomografía por impedancia eléctrica son los voltajes medidos a través de electrodos colocados en el cuerpo.

Un resultado conocido de espacios de Sobolev [2, p. 217] dice que: si  $u \in H^{m,p}(\Omega)$ , entonces,  $v = u|_{\partial\Omega}$  pertenece a  $H^{m-1/p,p}(\partial\Omega)$  y

$$\|v\|_{m-1/p,p,\partial\Omega} \leq K_1 \|u\|_{m,p,\Omega}. \quad (\text{A.19})$$

En nuestro caso, tenemos que para  $\phi$ ,  $m = 1$  y  $p = 2$ , por lo que  $\phi|_{\partial\Omega} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ . Además en el borde tenemos el mapeo de Dirichlet a Neumann:

$$\Lambda_{\sigma} : \phi|_{\partial\Omega} \rightarrow j = \sigma \frac{\partial\phi}{\partial n}. \quad (\text{A.20})$$

De esto podemos ver que la densidad de corriente puede ser suave una derivada menos,  $j \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ .

# Apéndice B

## Algoritmo de Chambolle

Se estudió el algoritmo de Chambolle para Varición Total, este no puede utilizarse para EIT ya que requiere que el mapeo sea entre dominios iguales.

En este apéndice se explica este algoritmo y la implementación realizada.

El problema (10.21) cuando utilizamos la regularización por variación total queda

$$\sigma_\alpha = \arg \min \|h(\sigma) - u\|^2 + \alpha TV(\sigma). \quad (\text{B.1})$$

Para el caso en que el operador directo es la identidad,

$$\sigma_\alpha = \arg \min \|\sigma - u\|^2 + \alpha TV(\sigma), \quad (\text{B.2})$$

Chambolle [29] desarrolló un algoritmo para la solución de este problema tratándolo como un problema de proyección.

El algoritmo se presenta para el caso discreto, donde  $u_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, N$  es una imagen discreta, y  $X = R^{N \times N}$  el conjunto de todas las imágenes discretas de  $N \times N$ . Además definimos el operador gradiente  $\nabla : X \mapsto X \times X$  como

$$\nabla(u)_{i,j}^1 = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{if } i < N, \\ 0 & \text{if } i = N \end{cases} \quad \nabla(u)_{i,j}^2 = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{if } j < N, \\ 0 & \text{if } j = N \end{cases}. \quad (\text{B.3})$$

Y el operador divergencia se construye como en el caso continuo como el adjunto del gradiente,  $\text{div} = -\nabla^*$ ,

$$(\text{div}p)_{i,j} = (\text{div}p)_{i,j}^1 + (\text{div}p)_{i,j}^2, \quad (\text{B.4})$$

con

$$(\text{div}p)_{i,j}^1 = \begin{cases} p_{i,j}^1 - p_{i-1,j}^1 & \text{if } 1 < i < N, \\ p_{i,j}^1 & \text{if } i = 1, \\ -p_{i-1,j}^1 & \text{if } i = N \end{cases} \quad (\text{div}p)_{i,j}^2 = \begin{cases} p_{i,j}^2 - p_{i,j-1}^2 & \text{if } 1 < j < N, \\ p_{i,j}^2 & \text{if } j = 1, \\ -p_{i,j-1}^2 & \text{if } j = N \end{cases}. \quad (\text{B.5})$$

## Apéndice B. Algoritmo de Chambolle

El operador de variación total para este caso discreto queda

$$TV(u) = \sum_{i,j=1}^N |(\nabla u)_{i,j}|, \quad (\text{B.6})$$

con  $|y| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}$  para  $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n$ . En [29] Chambolle demostró que la función que minimiza (B.2) es

$$\mathbf{w} = u - P_{\alpha G}(u), \quad (\text{B.7})$$

donde  $P_{\alpha G}(u)$  es la proyección ortogonal de  $u$  en el conjunto  $\alpha G$  definido como

$$G = \{v \in X; \exists p \in X, |p_{i,j}| \leq 1, \forall i, j, \text{ tal que } v = \text{div} p\}. \quad (\text{B.8})$$

La prueba de esto se hace a través de principios de convexidad y dualidad.

Para calcular la proyección  $P_{\alpha G}(u)$  se debe resolver el siguiente problema,

$$\text{mín } \{|\alpha \text{div} p - u|_{X \times X}^2; p \in X \times X, |p_{i,j}| \leq 1 \forall i, j = 1, \dots, N\}, \quad (\text{B.9})$$

lo cual se hace mediante multiplicadores de Lagrange, y se llega a un algoritmo iterativo, donde dado  $p^0 = 0$  se calcula  $p_{i,j}^{n+1}$  como

$$p_{i,j}^{n+1} = \frac{p_{i,j}^n + \tau(\nabla(\text{div} p^n - u/\alpha))_{i,j}}{1 + \tau|(\nabla(\text{div} p^n - u/\alpha))_{i,j}|}. \quad (\text{B.10})$$

Se prueba además, que para  $0 < \tau \leq \frac{1}{8}$ ,  $\alpha \text{div} p^n$  converge a  $P_{\alpha G}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

### Implementación

Se implementó el algoritmo de Chambolle para eliminar el ruido de imágenes. Se utilizó Matlab, el algoritmo es el descrito anteriormente y que se muestra en Algorithm 1.

A pesar de que se demuestra la convergencia para  $0 < \tau < 1/8$ , el autor expresa que los mejores resultados se dan con  $\tau = 1/4$ . Para la elección del parámetro  $\alpha$ , se plantea el mismo problema de eliminación del ruido, considerando que a la imagen obtenida tiene un ruido gaussiano aditivo de varianza  $\sigma^2$ . El problema planteado así queda

$$\text{mín } \|\sigma - u\|^2 = N^2 \sigma^2, \quad (\text{B.11})$$

donde  $N^2$  el número total de píxeles. Ahora se debe encontrar el  $\alpha$  para que  $P_{\alpha G}(u) = N^2 \sigma^2$ . Chambolle [29] describe un algoritmo para esto, se comienza con un  $\alpha_0 > 0$  arbitrario y se calcula  $P_{\alpha_0 G}(u)$  igual que en (B.10). Luego, dado  $\alpha_n$  y  $P_{\alpha_n G}(u)$  calculamos  $\alpha_{n+1} = (N\sigma / \|P_{\alpha_n G}(u)\|) \alpha_n$  y  $P_{\alpha_{n+1} G}(u)$ .

Se prueba que  $u - P_{\alpha_n G}(u)$  converge a la solución de (B.11) cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Es fácil de ver que esto es como actualizar  $\alpha_{n+1} = N\sigma / \|\text{div} p^n\|$  luego de cada iteración en (B.10). Esto se implementó pero los resultados no eran los óptimos, si ayudó a ver el rango de  $\alpha$  en el cual se debía trabajar, pero para la implementación final se utilizó  $\alpha = 50$  fijo en todas las iteraciones.

El algoritmo se utilizó sobre una imagen de 512 x 512 píxeles en escala de grises con valores entre 0 y 255, a esta imagen se le sumó ruido gaussiano con una desviación estándar de 25. Como condición de parada se midió que la diferencia entre  $p^n$  y  $p^{n-1}$  sea menor a una tolerancia establecida, en este caso 1/100. Se realizaron 41 iteraciones hasta alcanzar este valor.

---

**Algorithm 1** Algoritmo de Chambolle para regularización por TV

---

```

1:  $p^0 = 0$ 
2:  $\tau = 1/4$ 
3:  $\alpha = 50$ 
4: while  $n < n^{MAX}$  and  $dif < tol$  do
5:    $n = n + 1$ 
6:    $p_{i,j}^n = \frac{p_{i,j}^{n-1} + \tau(\nabla(\text{div}p^{n-1} - u/\alpha))_{i,j}}{1 + \tau|\nabla(\text{div}p^{n-1} - u/\alpha)|_{i,j}}$ 
7:    $dif = |(p^n - p^{n-1})|$ 
8: end while
9:  $\mathbf{w} = u - \alpha \text{div}p$ 
10: return  $\mathbf{w}$ 

```

---

En la figura B.1 se ve la imagen reconstruida, y también la diferencia entre esta imagen y la imagen con ruido. Si la eliminación del ruido fuera óptima, esta diferencia debería ser ruido uniforme.

## Apéndice B. Algoritmo de Chambolle

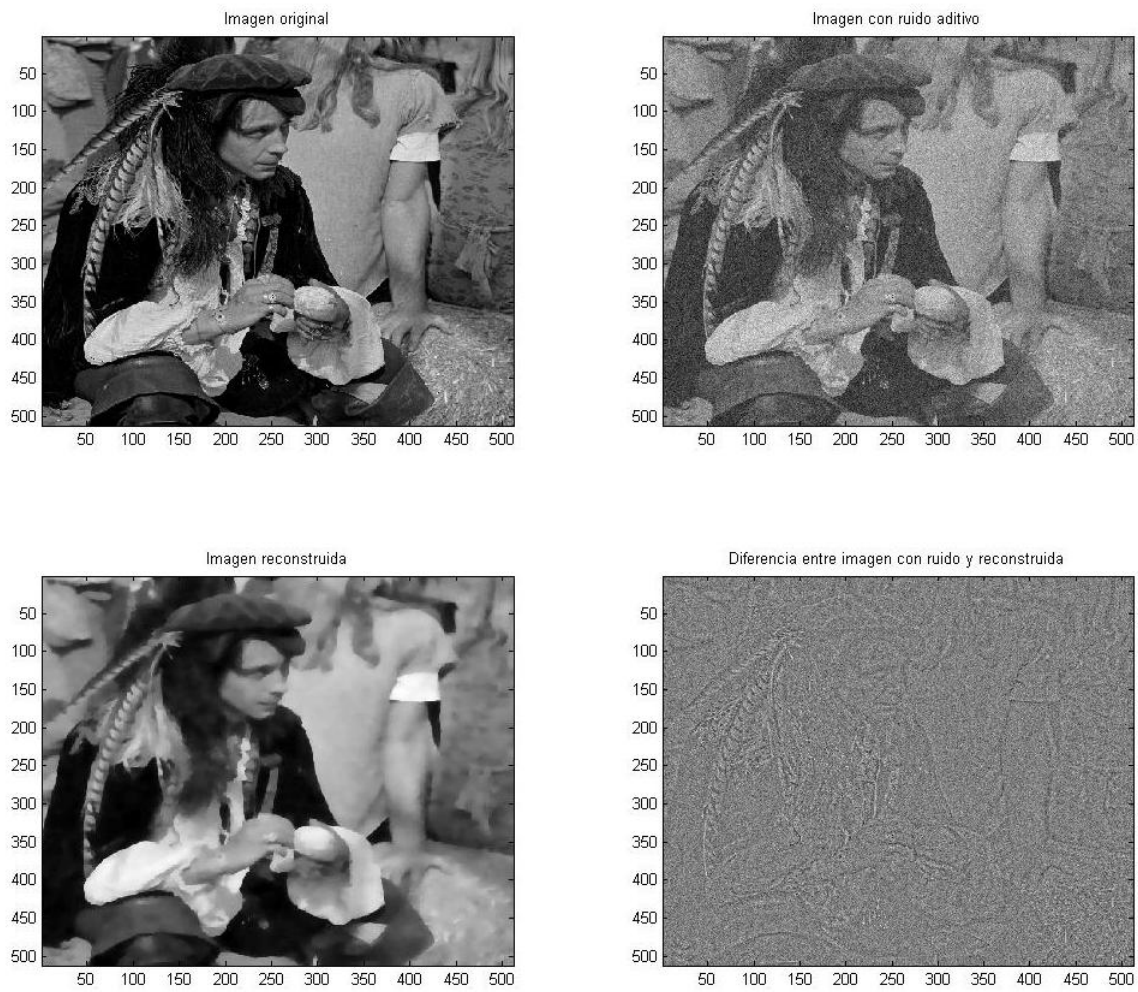


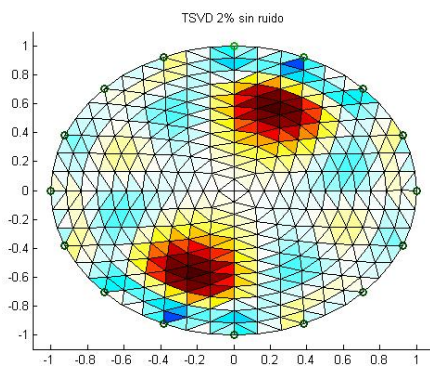
Figura B.1: Eliminación de ruido mediante el algoritmo de Chambolle

## Apéndice C

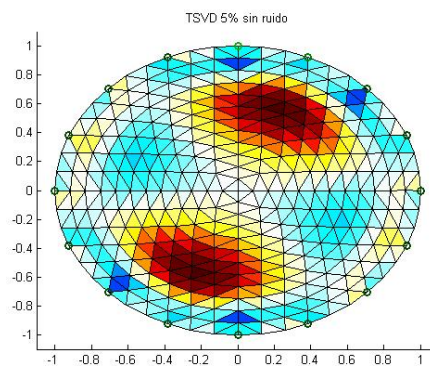
# Reconstrucción de imágenes mediante truncamiento de valores singulares (TSVD)

Se muestra la reconstrucción de imágenes mediante el método de truncamiento de valores singulares, el cual consiste en tomar en cuenta sólo aquellos valores singulares más grandes.

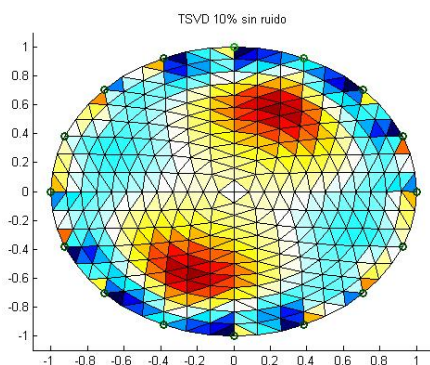
## Apéndice C. Reconstrucción de imáenes mediante truncamiento de valores singulares (TSVD)



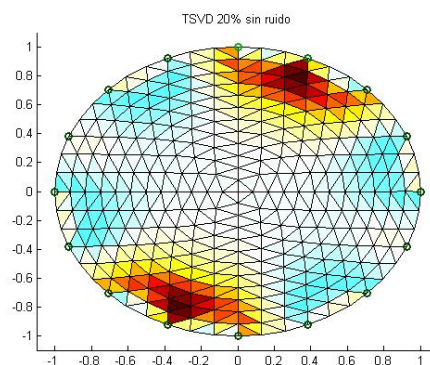
(a) 2 % de valores los singulares



(b) 5 % de valores los singulares



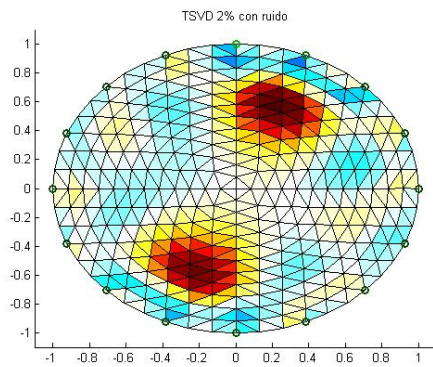
(c) 10 % de valores los singulares



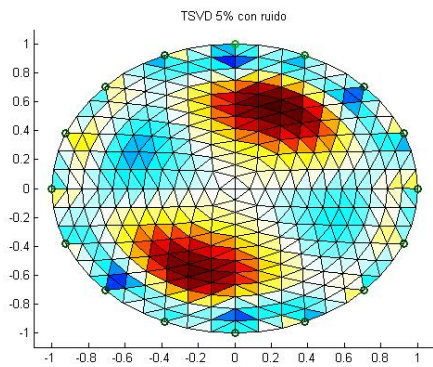
(d) 20 % de valores los singulares

Figura C.1: Regularización mediante TSVD de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares

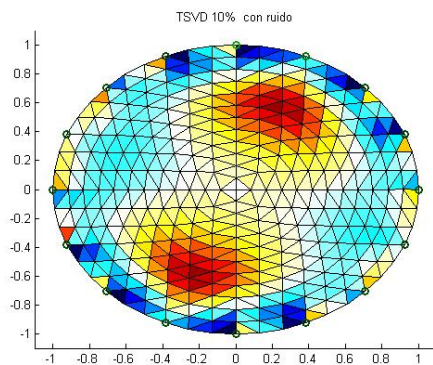




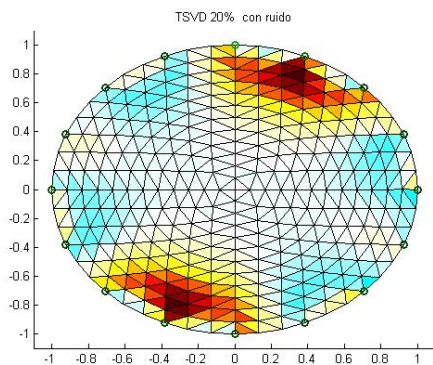
(a) 2 % de valores los singulares



(b) 5 % de valores los singulares



(c) 10 % de valores los singulares



(d) 20 % de valores los singulares

Figura C.2: Regularización mediante TSVD de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares

## Apéndice C. Reconstrucción de imánes mediante truncamiento de valores singulares (TSVD)

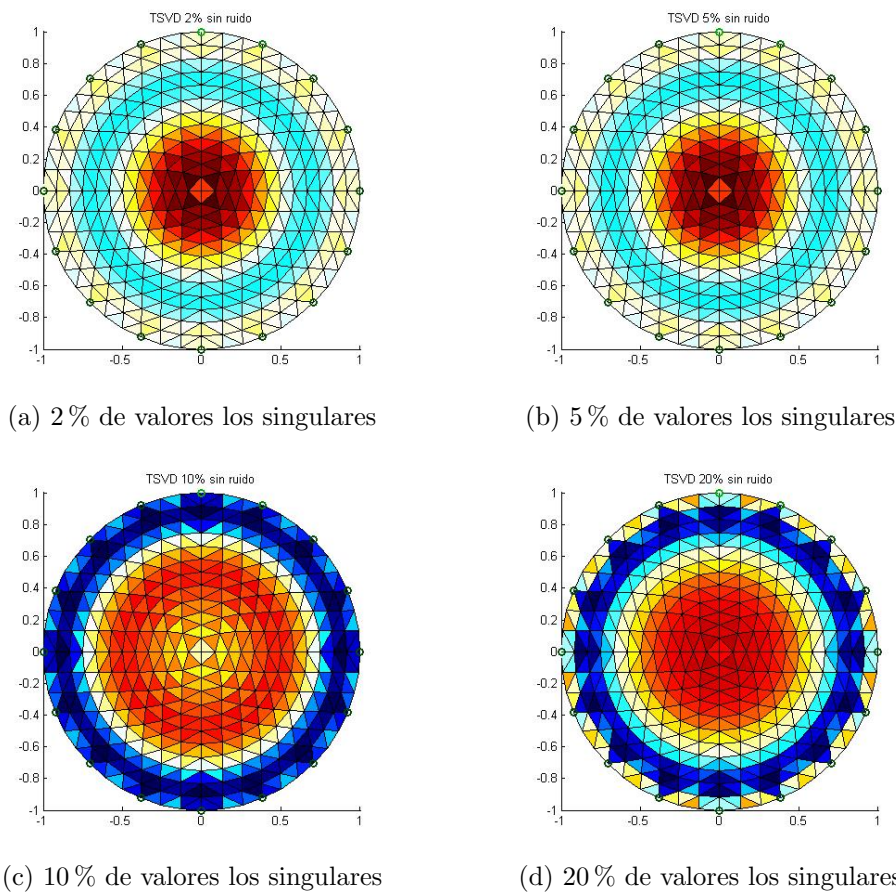
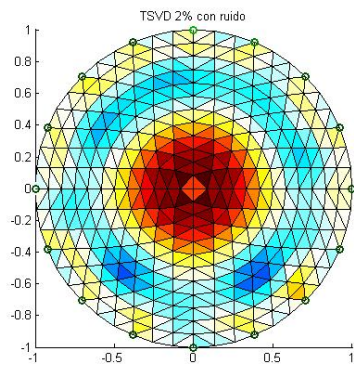
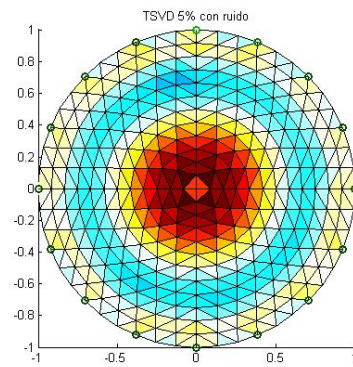


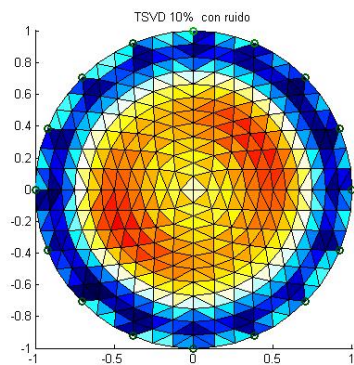
Figura C.3: Regularización mediante TSVD de datos simulados con una perturbación, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares



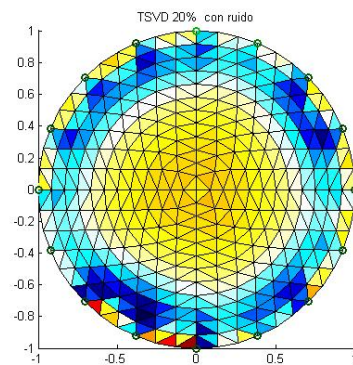
(a) 2% de valores los singulares



(b) 5% de valores los singulares



(c) 10% de valores los singulares



(d) 20% de valores los singulares

Figura C.4: Regularización mediante TSVD de datos simulados con una perturbación, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares

Apéndice C. Reconstrucción de imágenes mediante truncamiento de valores singulares (TSVD)

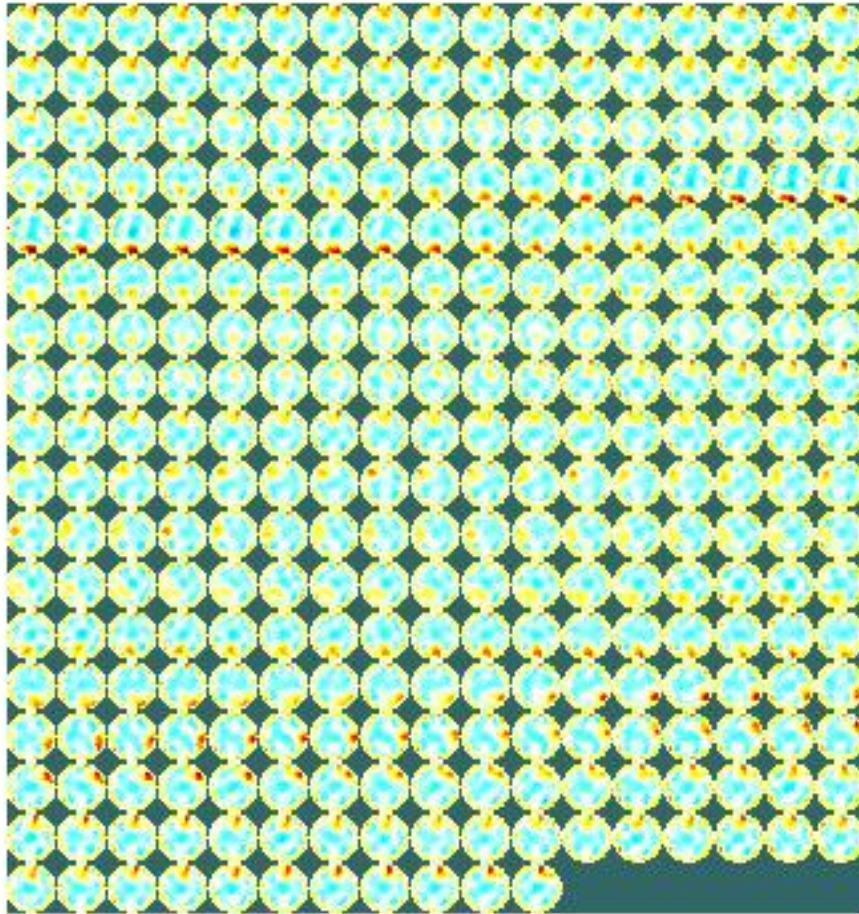


Figura C.5: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TSVD, 2% de valores los singulares, teniendo como referencia una imagen homogénea.

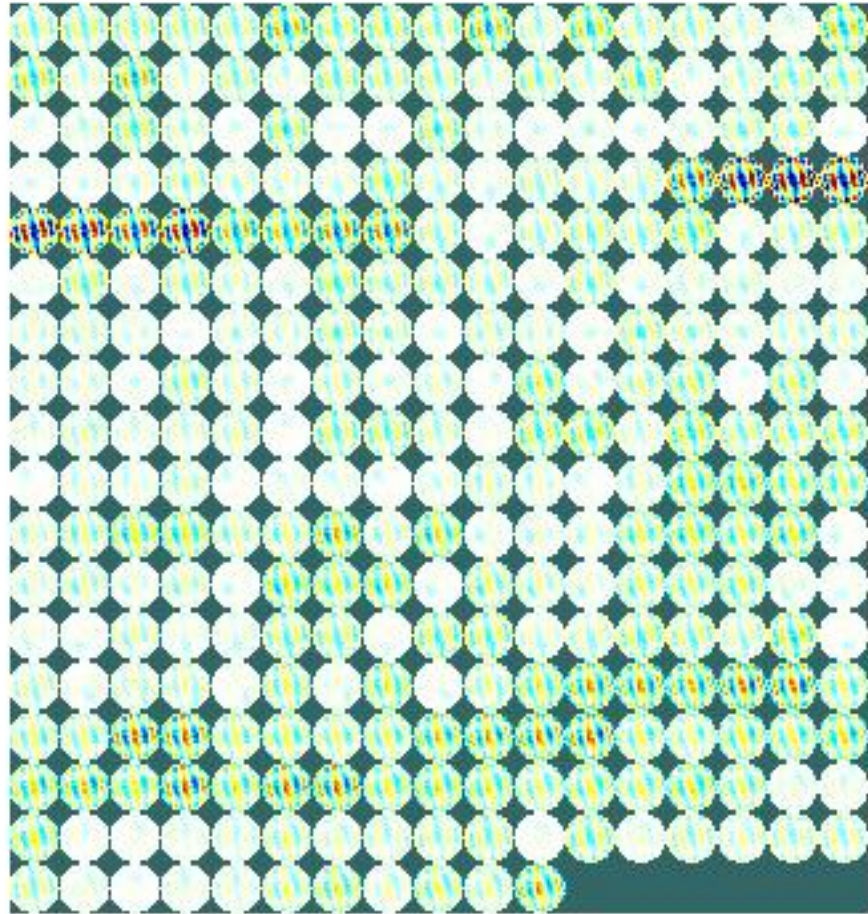
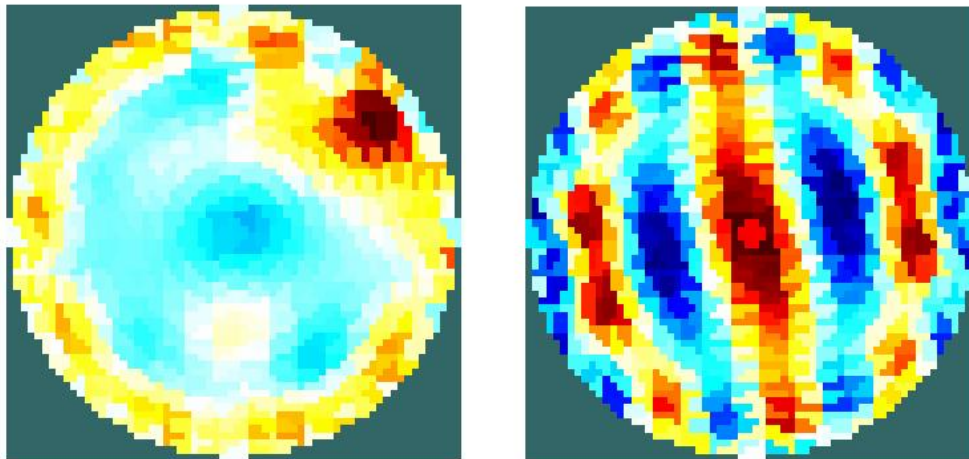
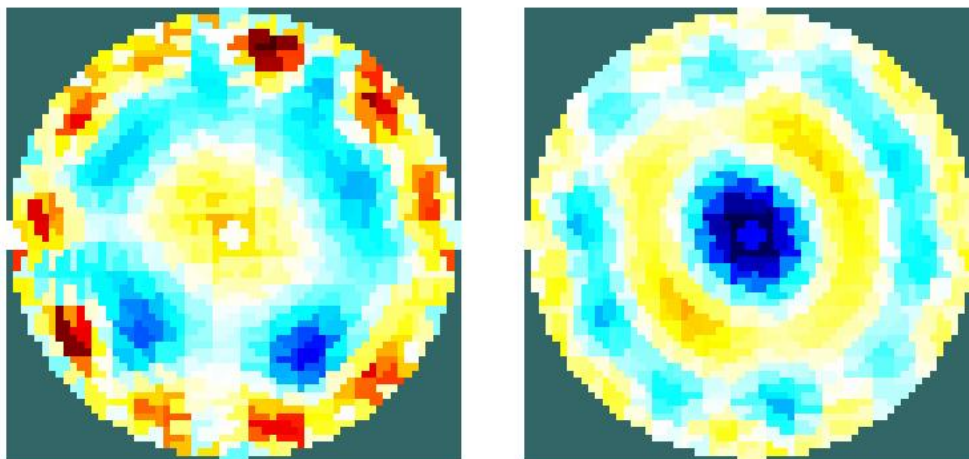


Figura C.6: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TSVD, 2% de valores los singulares, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

Apéndice C. Reconstrucción de imágenes mediante truncamiento de valores singulares (TSVD)



(a) Botella en el borde, imagen homogénea como referencia (b) Botella en el borde, promedio de medidas como referencia



(c) Botella en el centro, imagen homogénea como referencia (d) Botella en el centro, promedio de medidas como referencia

Figura C.7: Reconstrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante TSVD, 2% de valores los singulares, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como referencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas.

## Apéndice D

# Reconstrucción de imágenes mediante regularización de Tijonov

Se muestran imágenes reconstruidas mediante el método lineal de un solo paso, incluyendo la regularización de Tijonov.

Apéndice D. Reconstrucción de imágenes mediante regularización de Tikonov

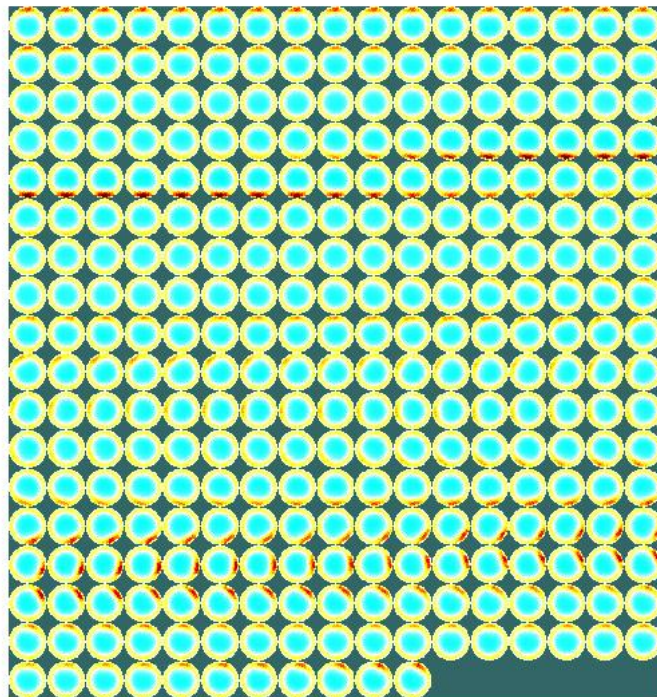


Figura D.1: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tikonov, teniendo como referencia una imagen homogénea.



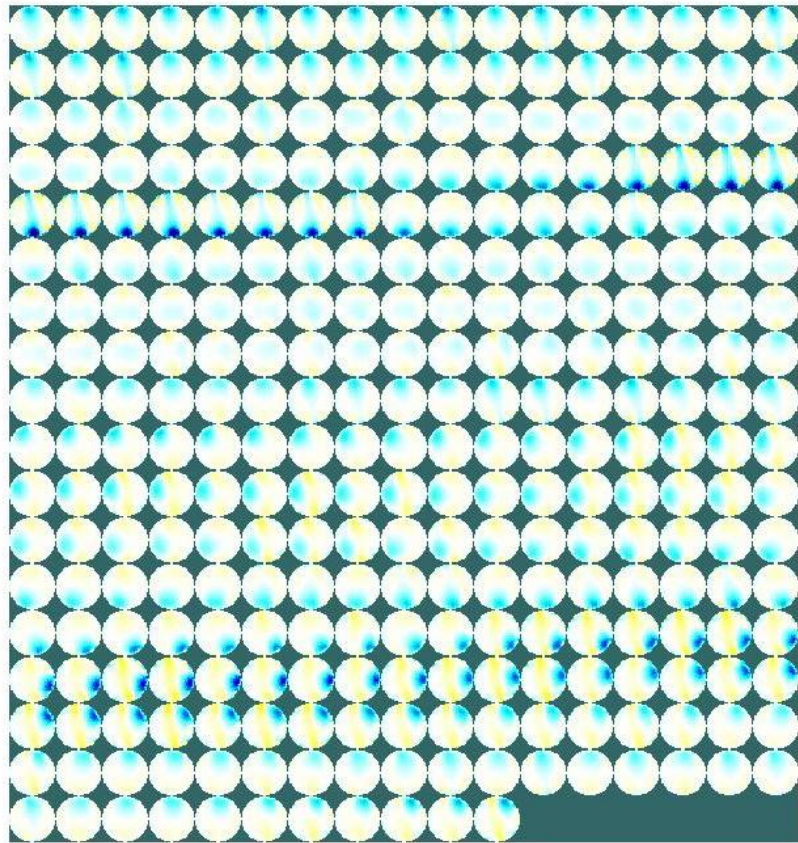
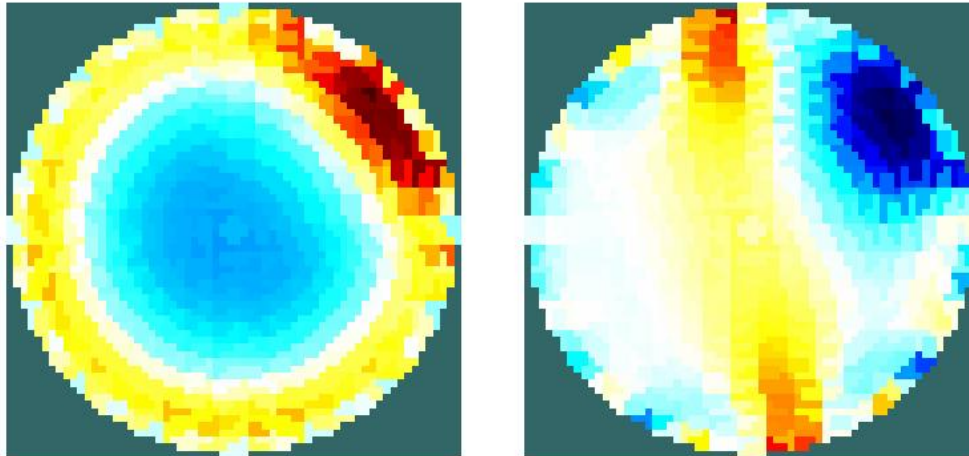
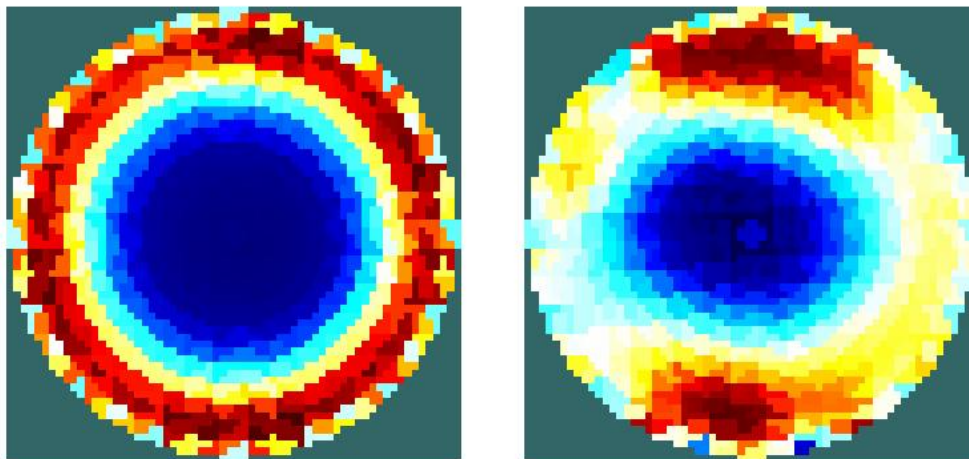


Figura D.2: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tijonov, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

Apéndice D. Reconstrucción de imánes mediante regularización de Tjonov



(a) Botella en el borde, imagen homogénea como referencia (b) Botella en el borde, promedio de medidas como referencia



(c) Botella en el centro, imagen homogénea como referencia (d) Botella en el centro, promedio de medidas como referencia

Figura D.3: Reconstrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante regularización de Tjonov, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como referencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas.

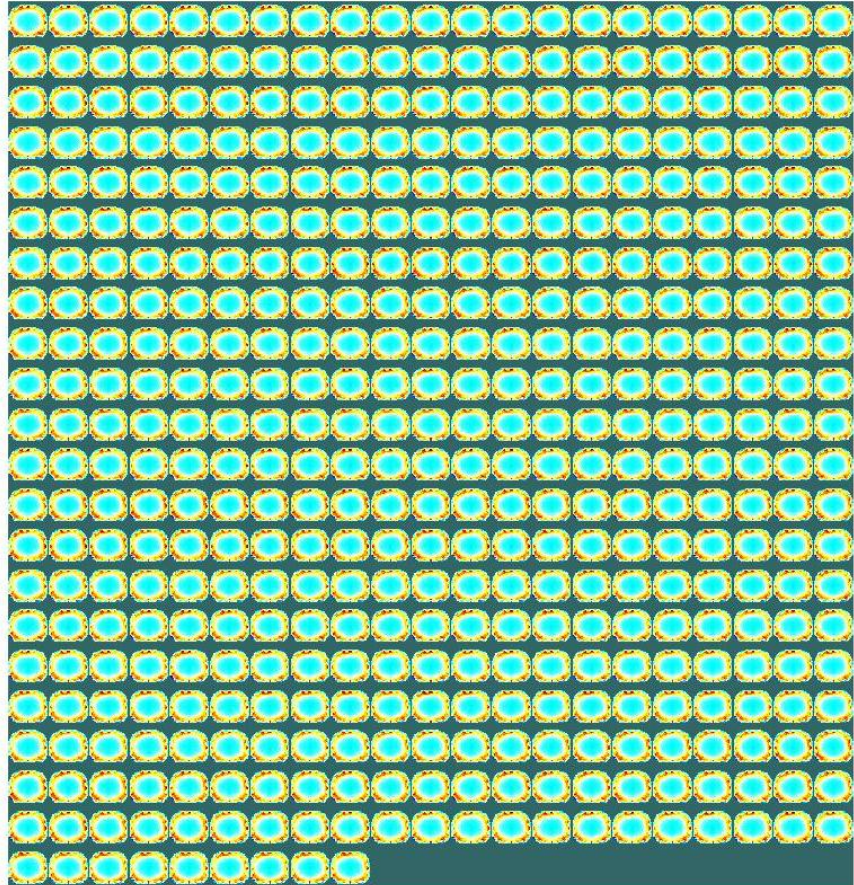


Figura D.4: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tikonov, teniendo como referencia una imagen homogénea.

Apéndice D. Reconstrucción de imágenes mediante regularización de Tikonov

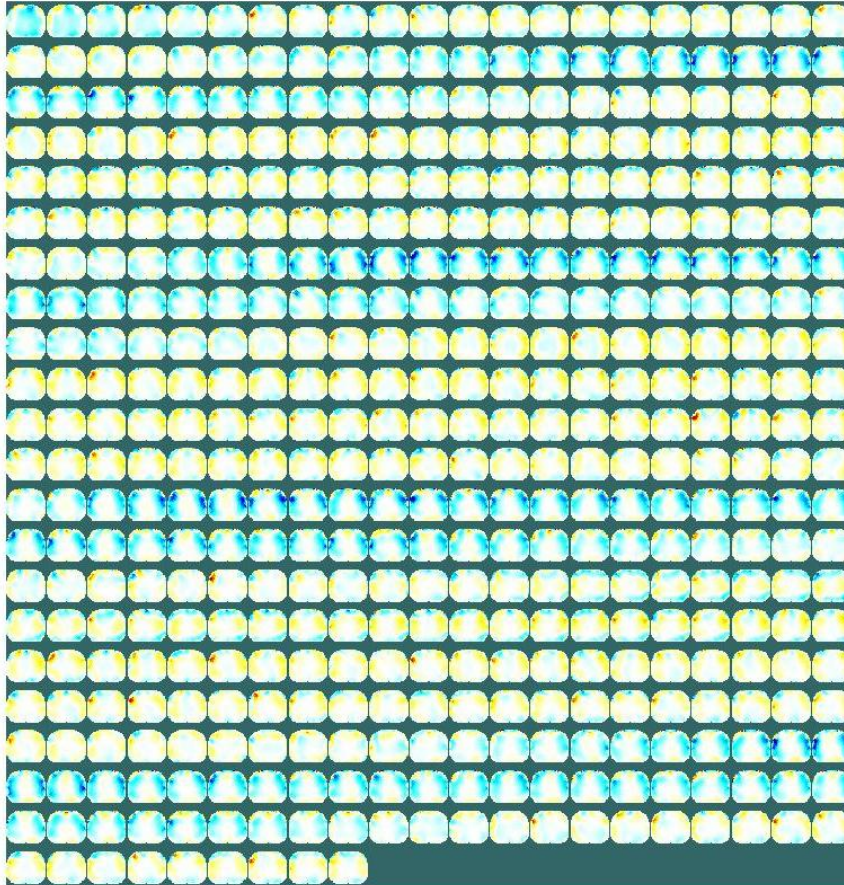


Figura D.5: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tikonov, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

## Apéndice E

# Reconstrucción de imágenes mediante NOSER

Se muestran imágenes reconstruidas mediante el método lineal de un solo paso, incluyendo la regularización NOSER.

## Apéndice E. Reconstrucción de imágenes mediante NOSER

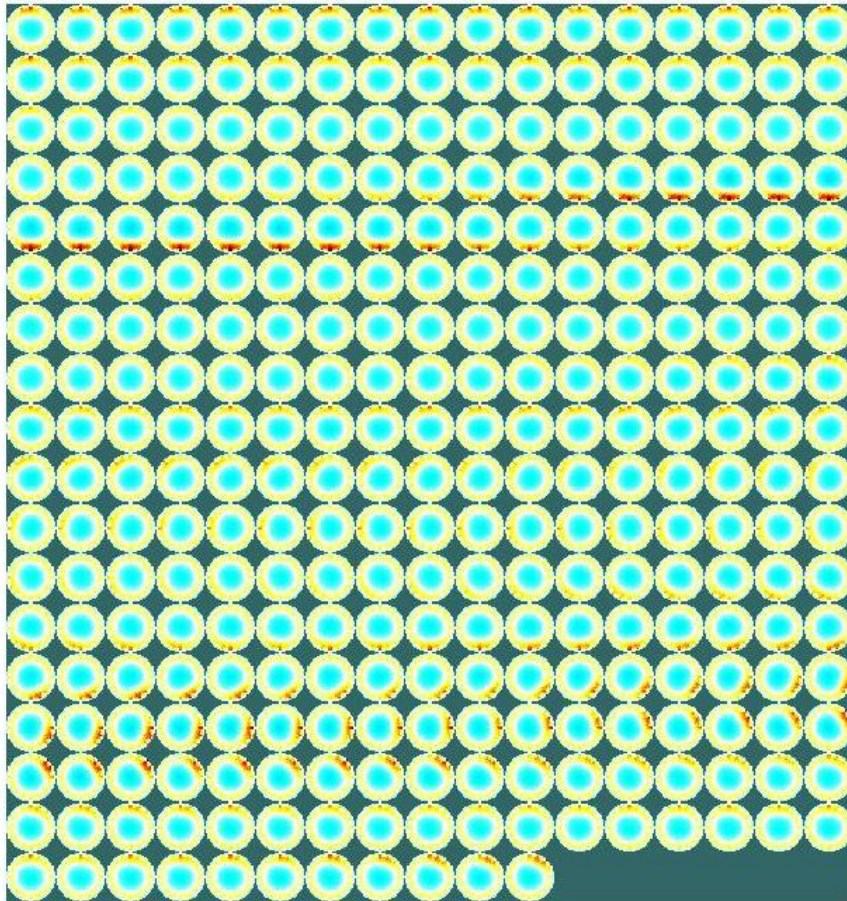


Figura E.1: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante NOSER, teniendo como referencia una imagen homogénea.

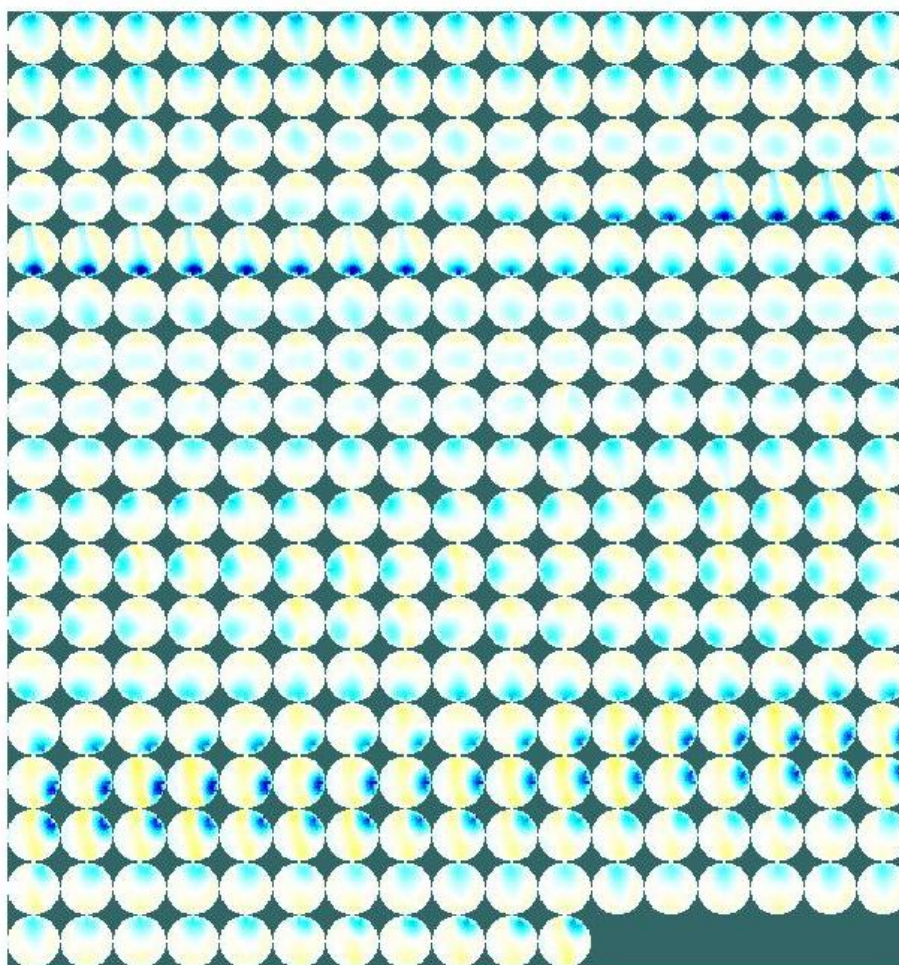
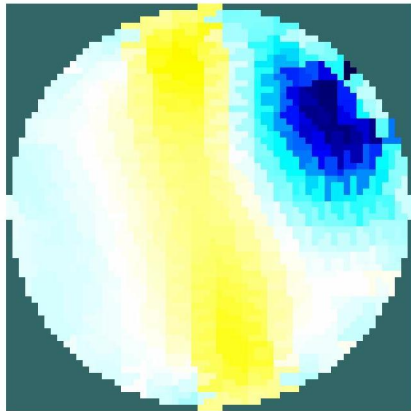
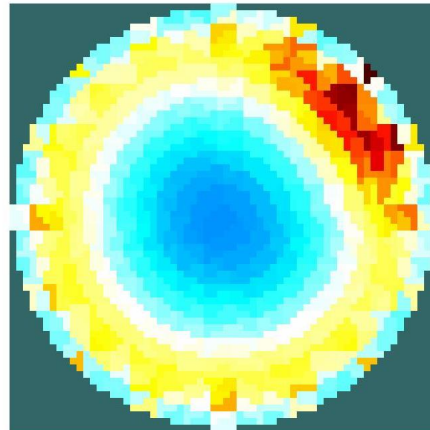


Figura E.2: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante NOSER, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

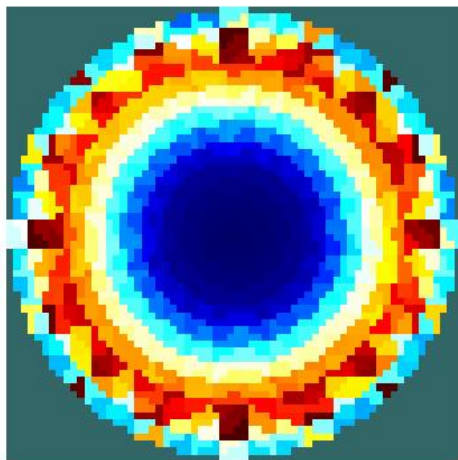
## Apéndice E. Reconstrucción de imágenes mediante NOSER



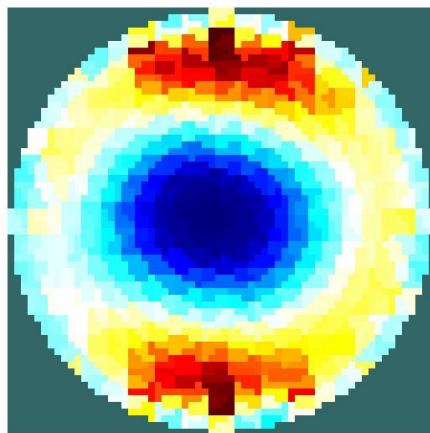
(a) Botella en el borde, imagen homogénea como referencia



(b) Botella en el borde, promedio de medidas como referencia



(c) Botella en el centro, imagen homogénea como referencia



(d) Botella en el centro, promedio de medidas como referencia

Figura E.3: Reconstrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante NOSER, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como referencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas.



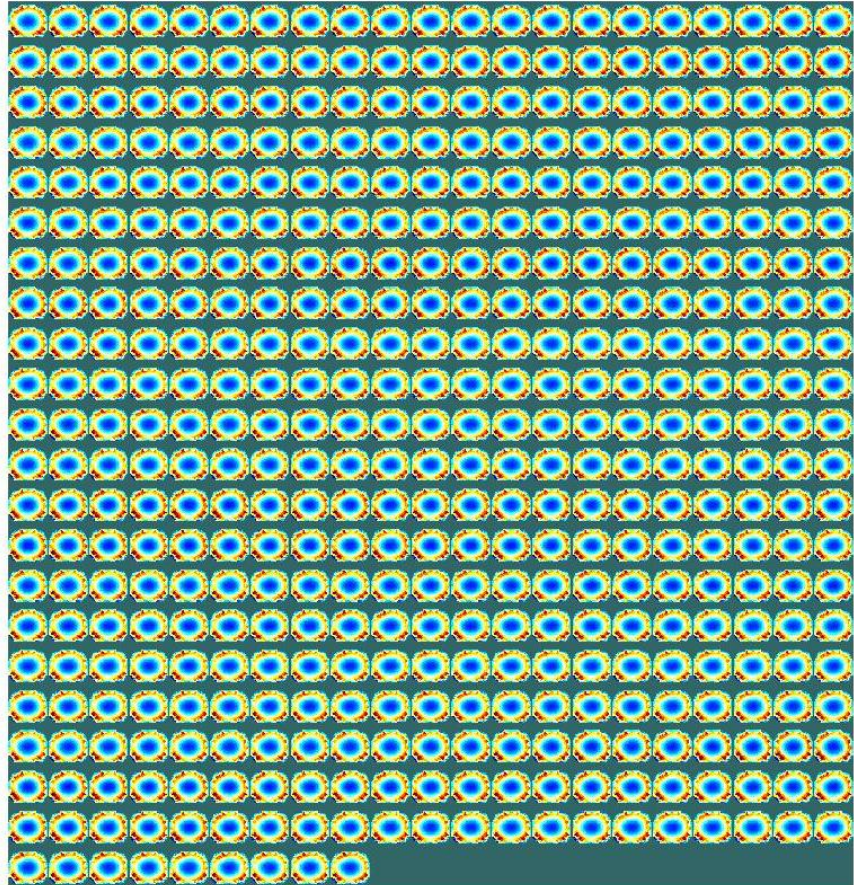


Figura E.4: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de NOSER, teniendo como referencia una imagen homogénea.

## Apéndice E. Reconstrucción de imágenes mediante NOSER

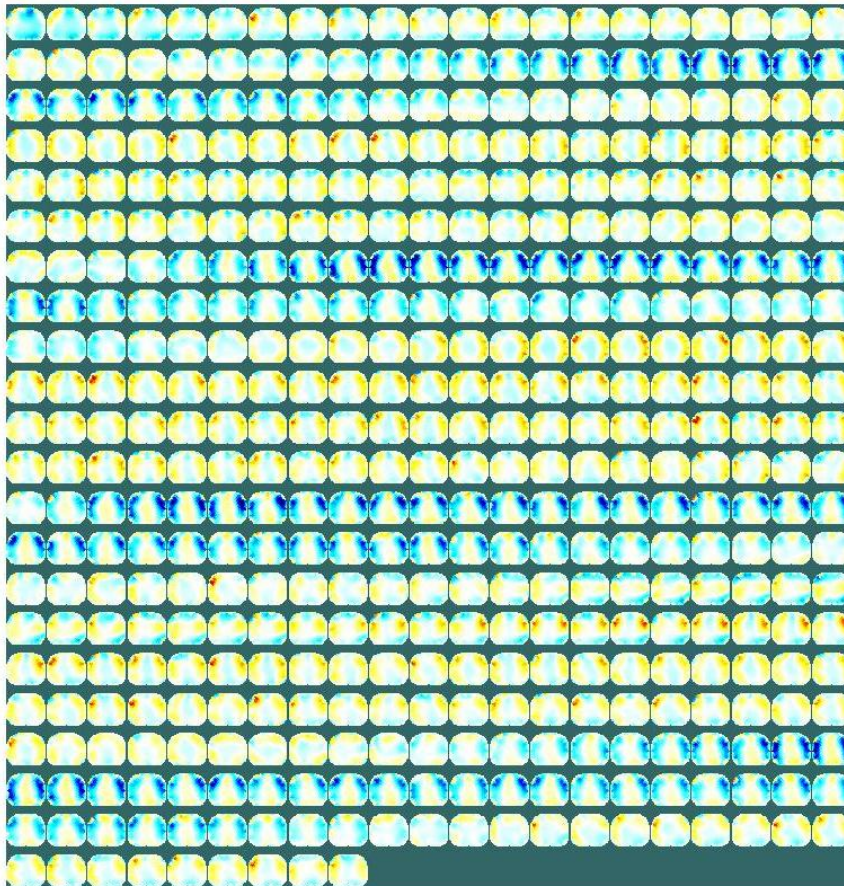


Figura E.5: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de NOSER, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

## Apéndice F

# Reconstrucción de imágenes mediante Variación Total (TV)

Se muestran imágenes reconstruidas mediante el método lineal iterativo, incluyendo la regularización por variación total.

## Apéndice F. Reconstrucción de imáenes mediante Variación Total (TV)

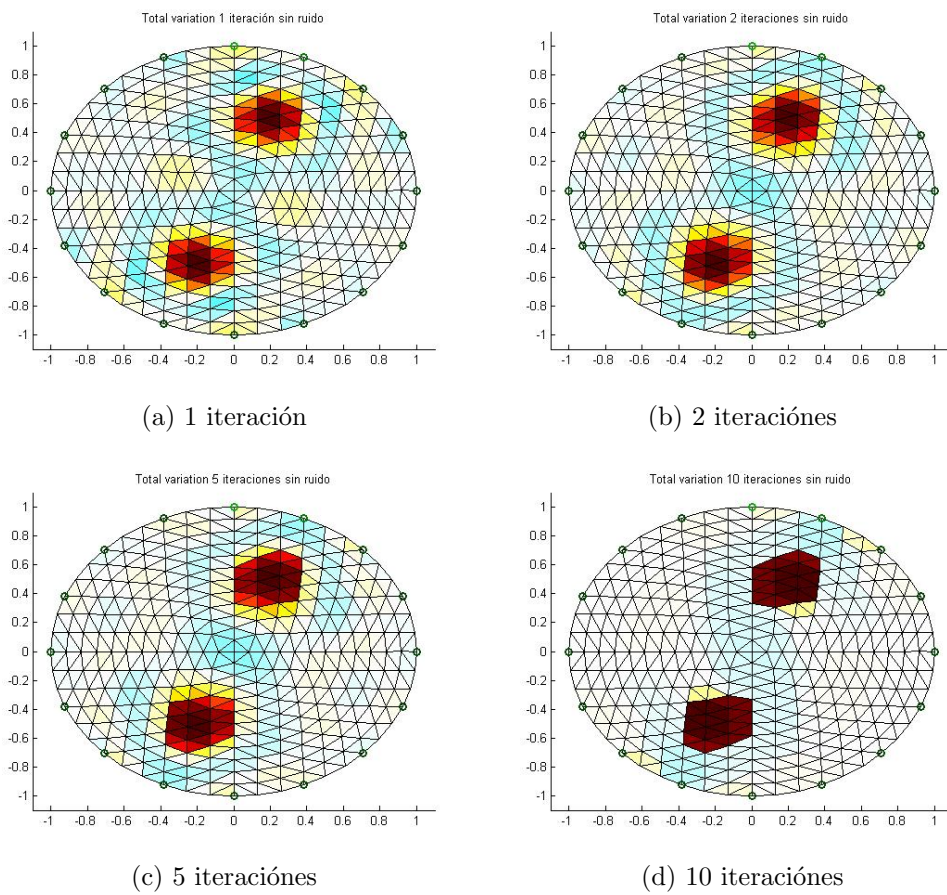
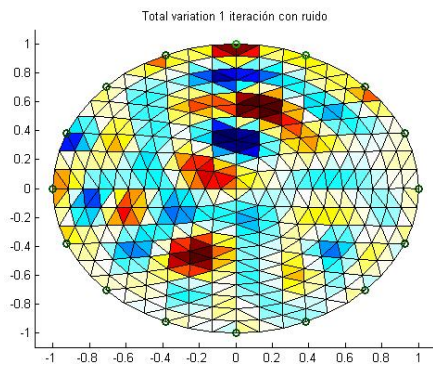
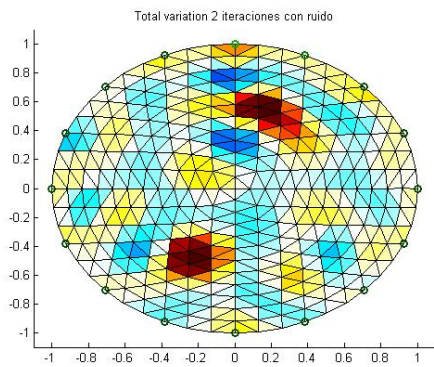


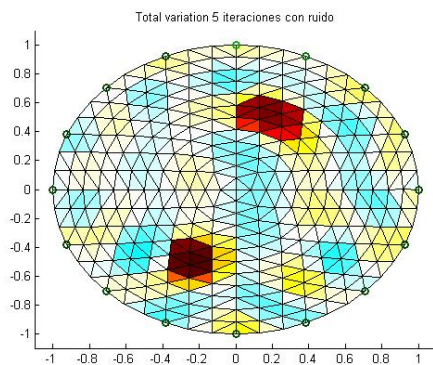
Figura F.1: Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente número de iteraciones



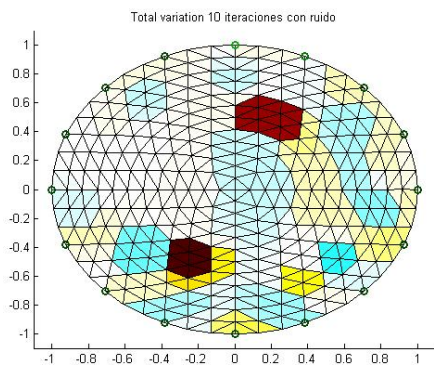
(a) 1 iteración



(b) 2 iteraciones



(c) 5 iteraciones



(d) 10 iteraciones

Figura F.2: Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente número de iteraciones

## Apéndice F. Reconstrucción de imánes mediante Variación Total (TV)

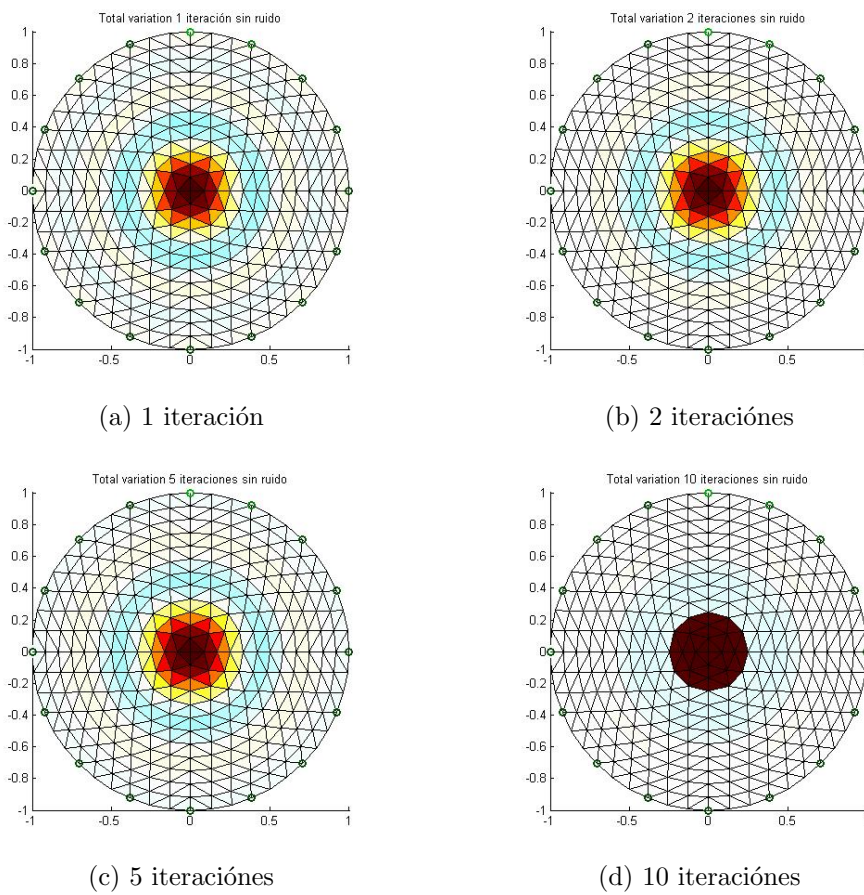
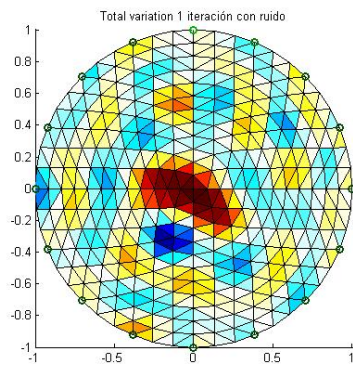
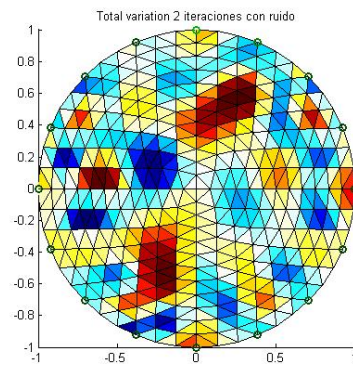


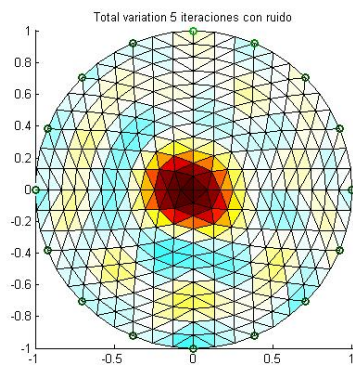
Figura F.3: Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente número de iteraciones



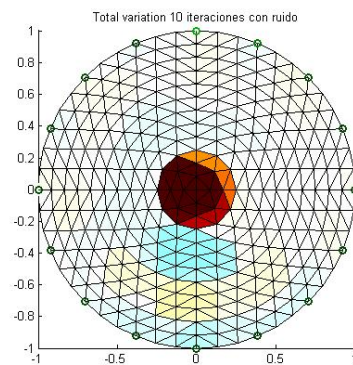
(a) 1 iteración



(b) 2 iteraciones



(c) 5 iteraciones



(d) 10 iteraciones

Figura F.4: Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente número de iteraciones

Apéndice F. Reconstrucción de imágenes mediante Variación Total (TV)

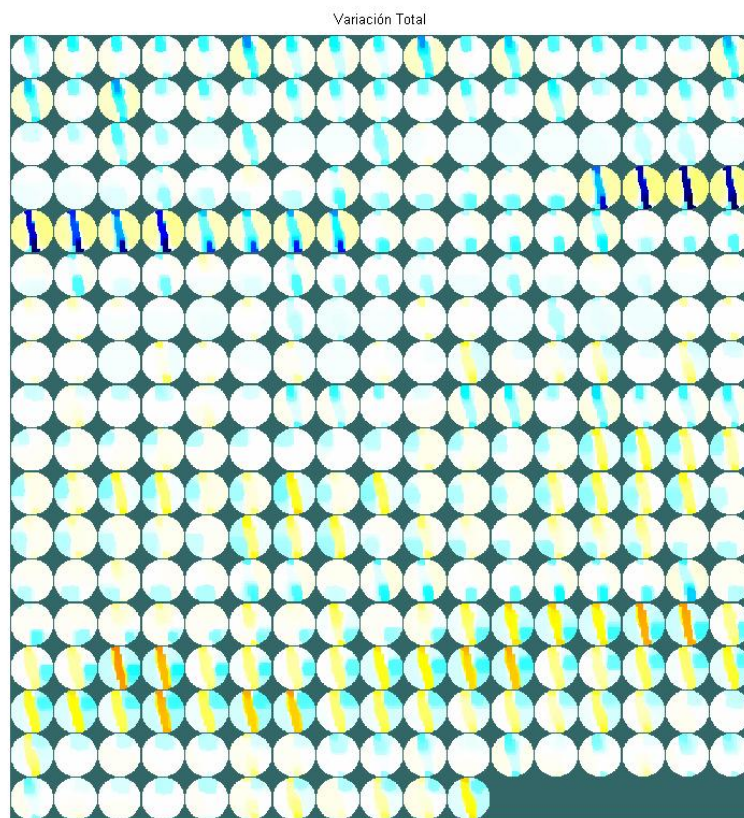


Figura F.5: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea.



Variación Total

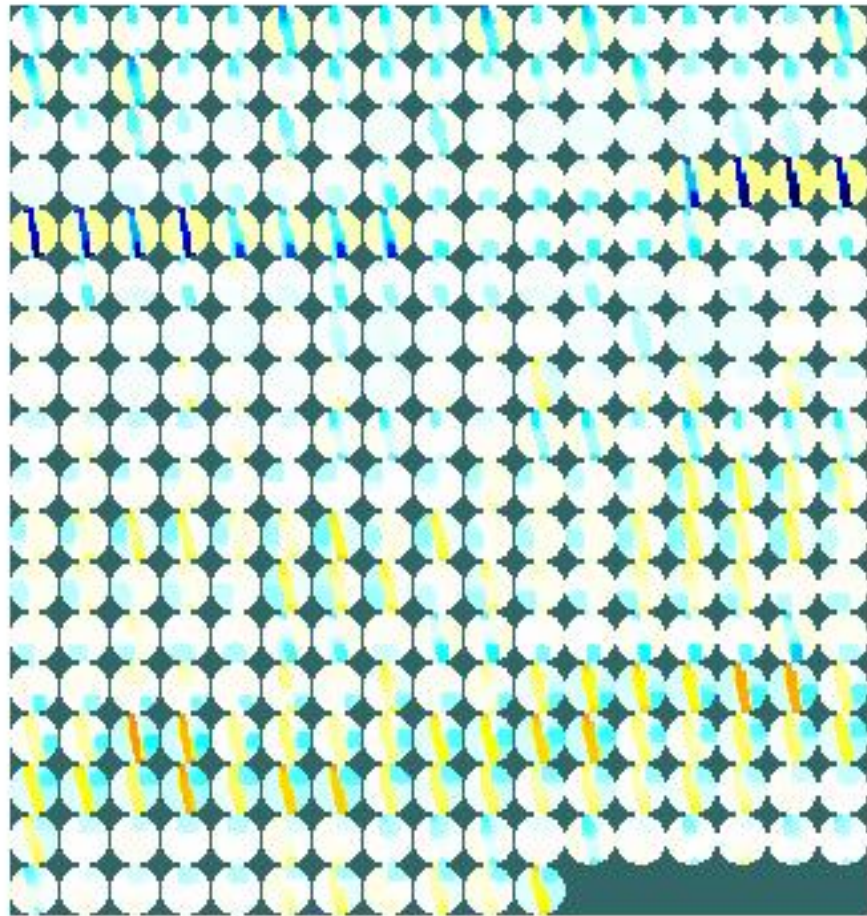
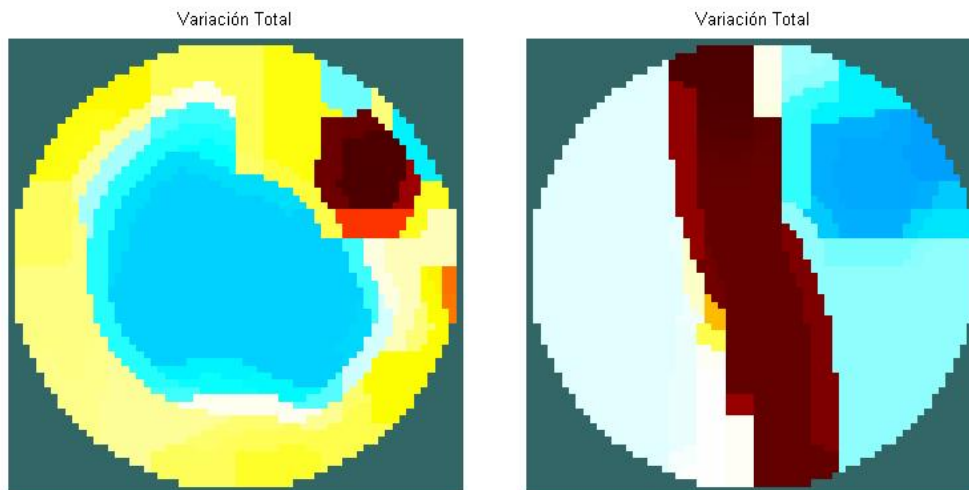
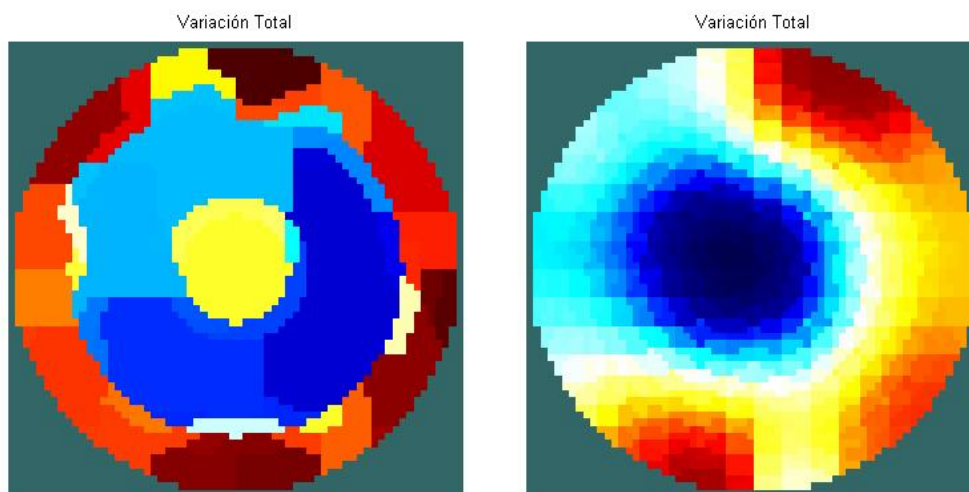


Figura F.6: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

## Apéndice F. Reconstrucción de imágenes mediante Variación Total (TV)



(a) Botella en el borde, imagen homogénea como referencia  
(b) Botella en el borde, promedio de medidas como referencia



(c) Botella en el centro, imagen homogénea como referencia  
(d) Botella en el centro, promedio de medidas como referencia

Figura F.7: Reconstrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como referencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas.

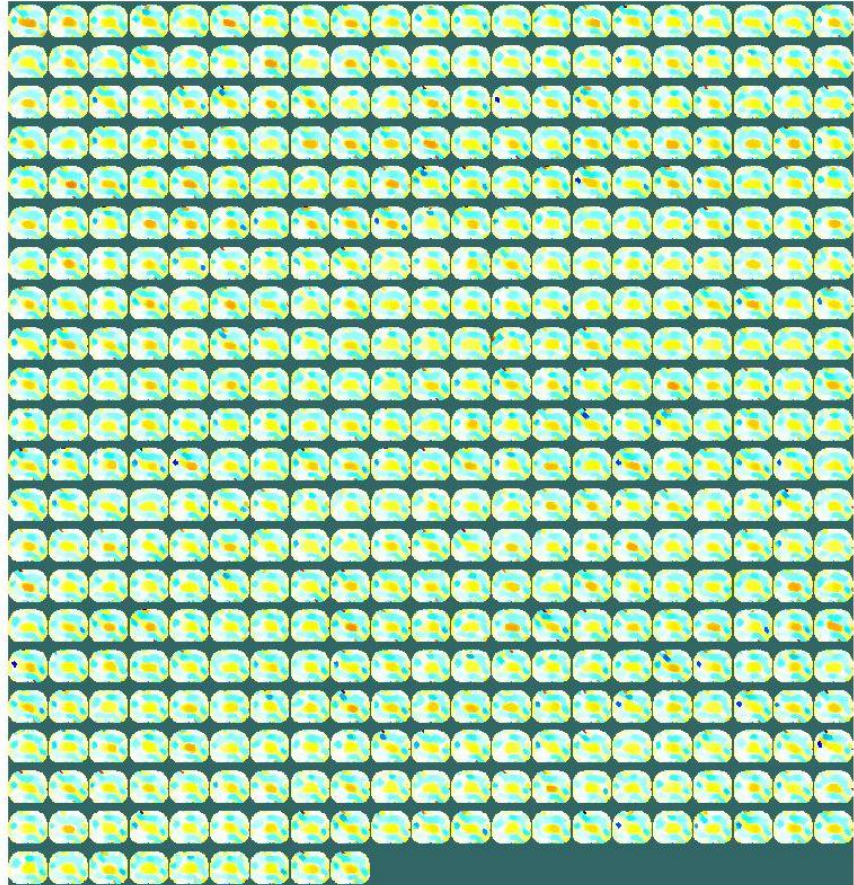


Figura F.8: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea.

Apéndice F. Reconstrucción de imágenes mediante Variación Total (TV)

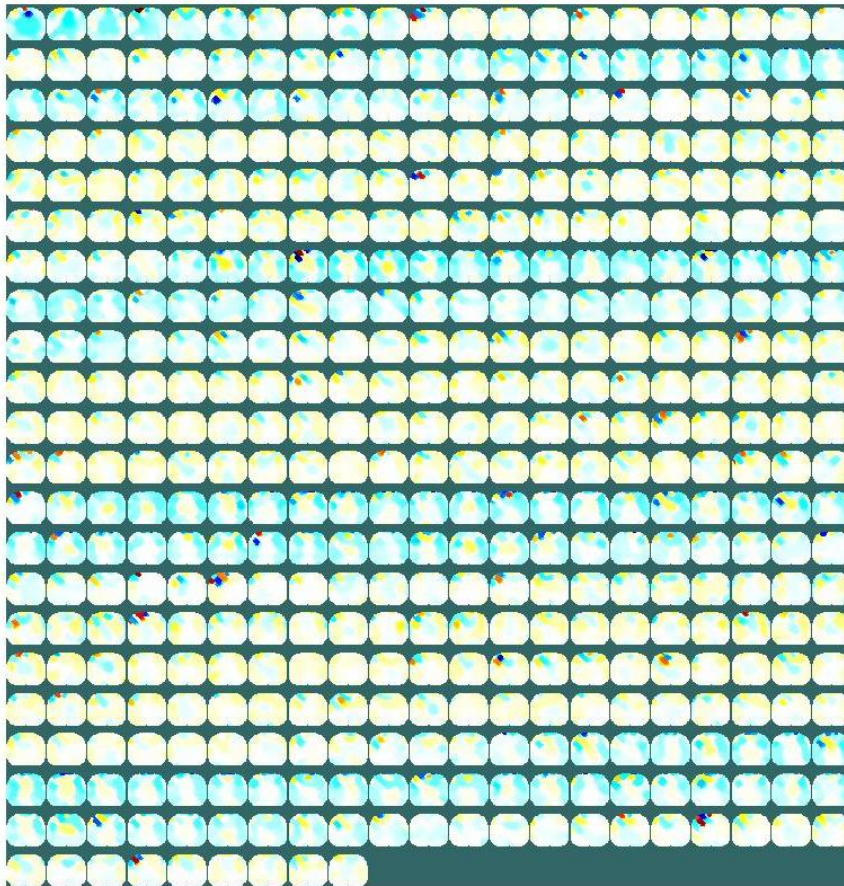


Figura F.9: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

## Apéndice G

# Reconstrucción de imágenes mediante GREIT

Se muestran imágenes reconstruidas mediante el método lineal de un solo paso GREIT.

## Apéndice G. Reconstrucción de imágenes mediante GREIT

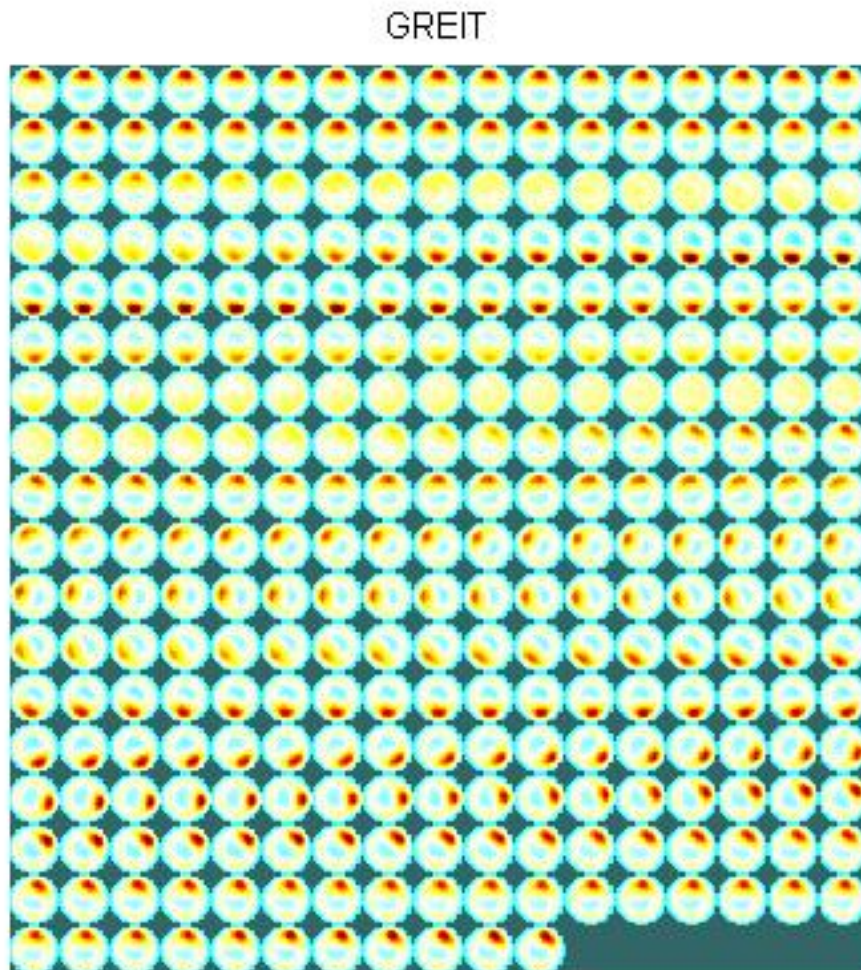


Figura G.1: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento dándole más peso al centro de la región, teniendo como referencia una imagen homogénea.

GREIT

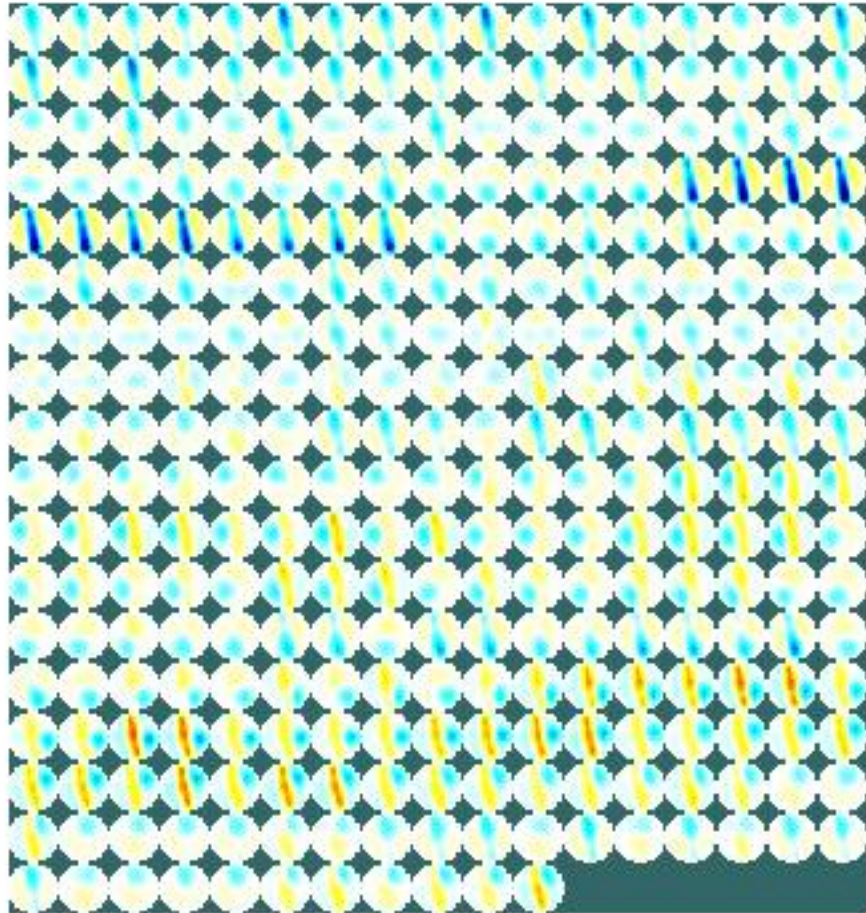
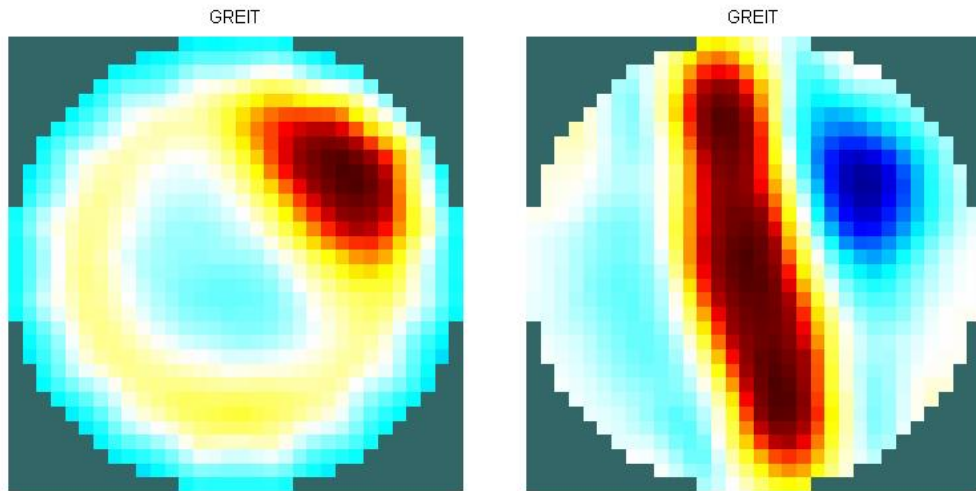
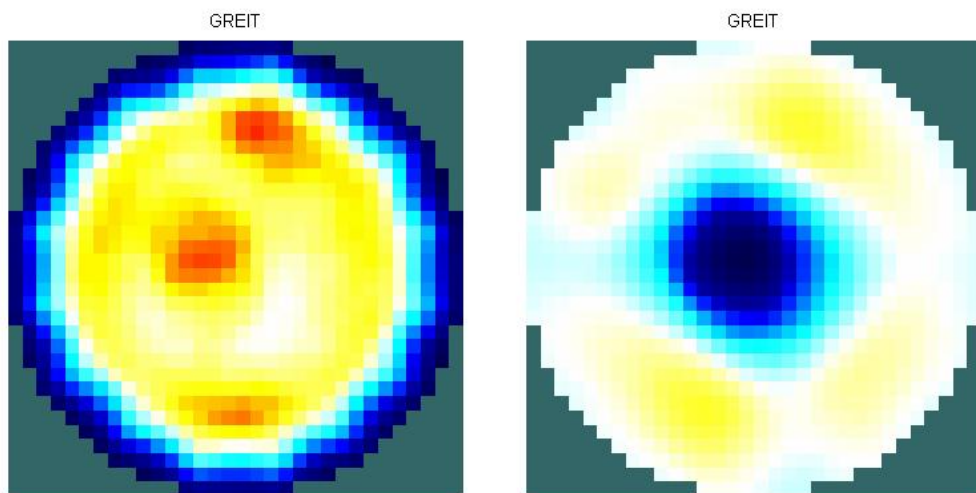


Figura G.2: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

## Apéndice G. Reconstrucción de imánes mediante GREIT



(a) Botella en el borde, imagen homogénea (b) Botella en el borde, promedio de medidas como referencia



(c) Botella en el centro, imagen homogénea (d) Botella en el centro, promedio de medidas como referencia

Figura G.3: Reconstrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento dándole más peso al centro de la región, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como referencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas.



GREIT

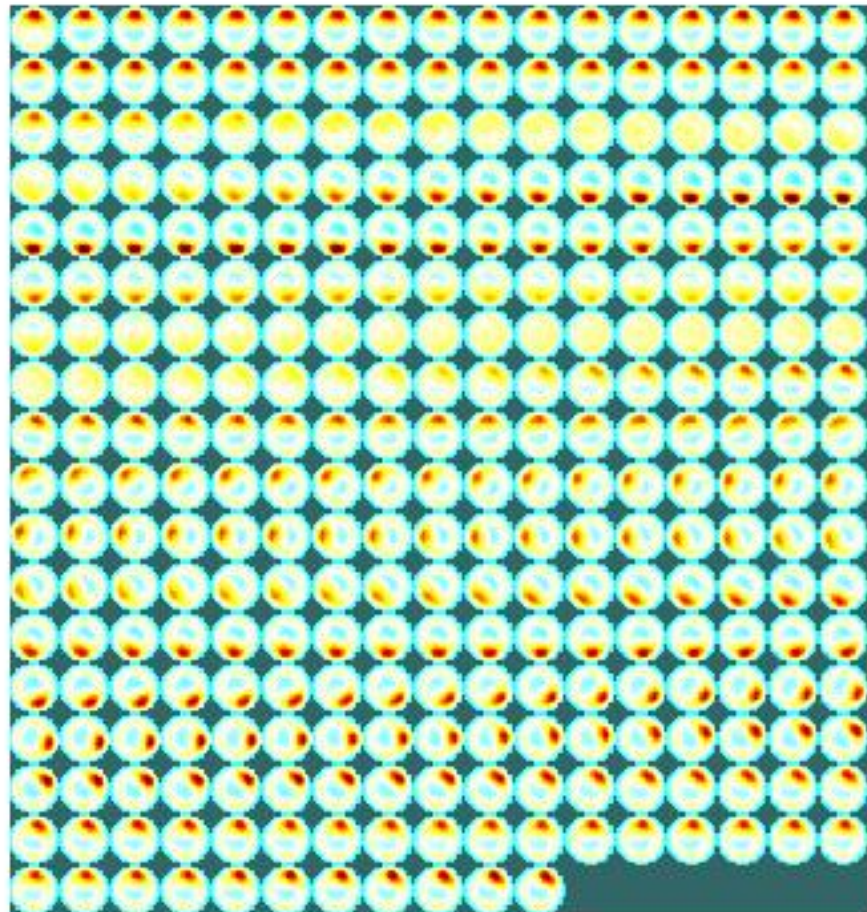


Figura G.4: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, teniendo como referencia una imagen homogénea.

## Apéndice G. Reconstrucción de imágenes mediante GREIT

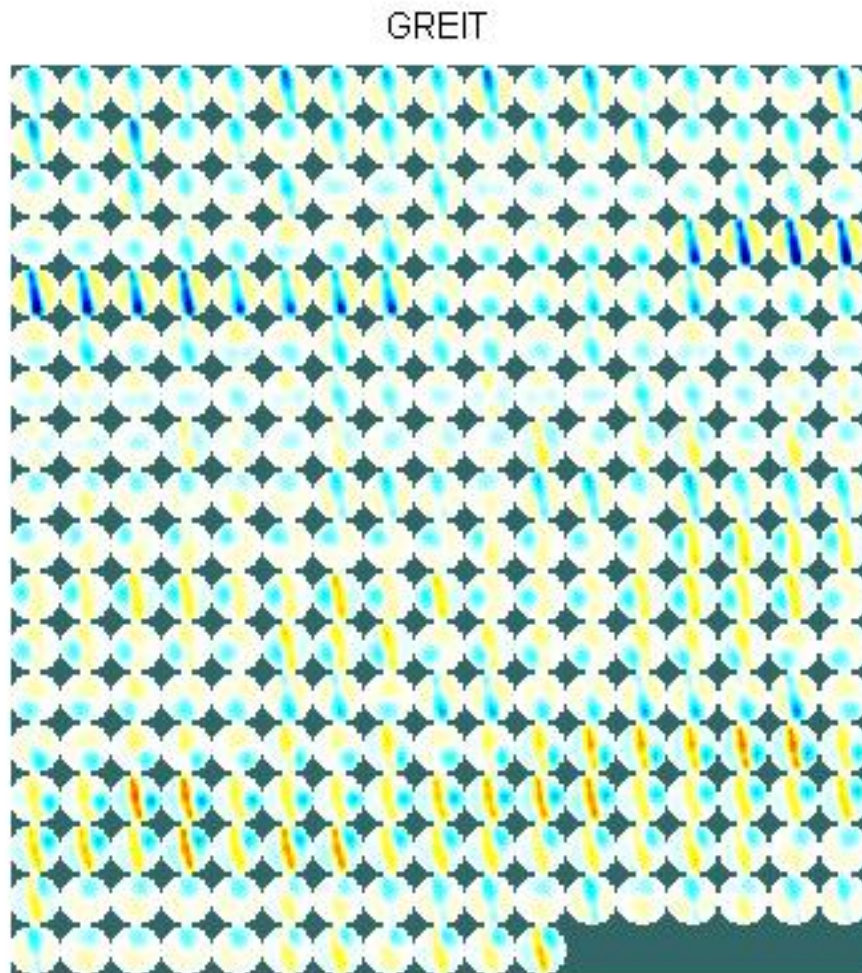
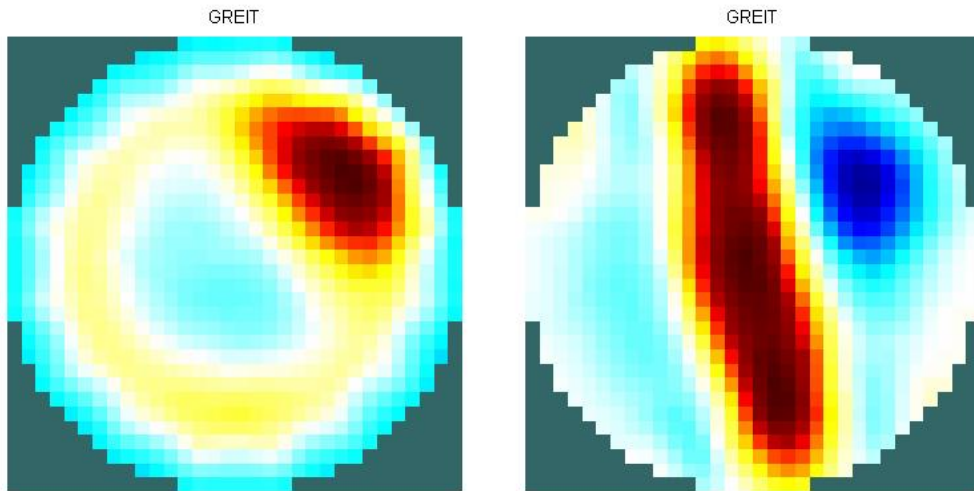
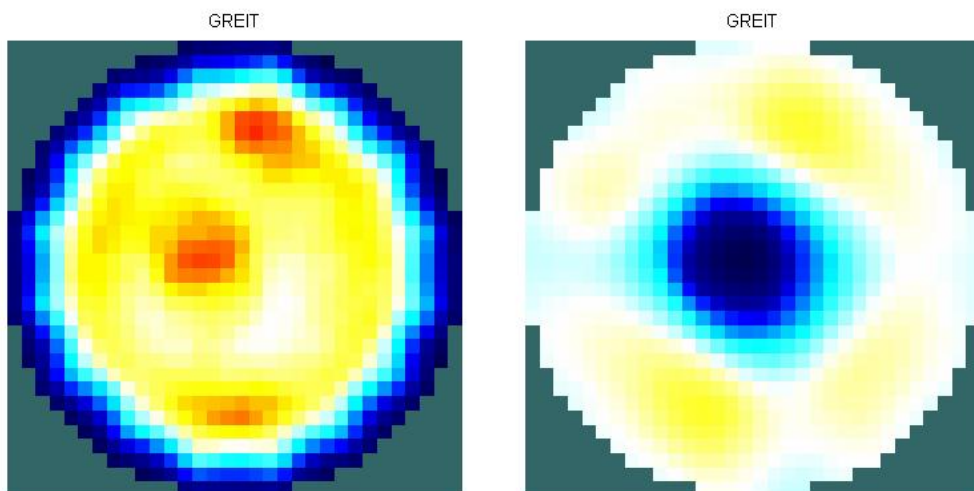


Figura G.5: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.



(a) Botella en el borde, imagen homogénea (b) Botella en el borde, promedio de medidas como referencia



(c) Botella en el centro, imagen homogénea (d) Botella en el centro, promedio de medidas como referencia

Figura G.6: Reconstrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como referencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas.

## Apéndice G. Reconstrucción de imágenes mediante GREIT



Figura G.7: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia una imagen homogénea.

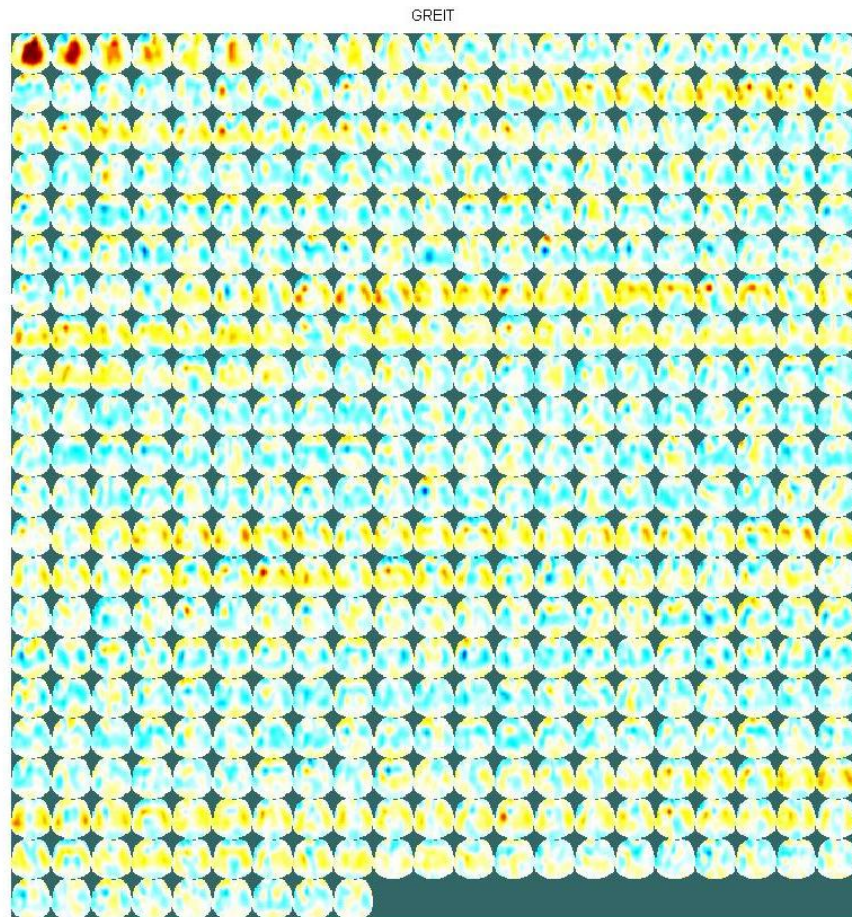


Figura G.8: Reconstrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

## Apéndice H

# Reconstrucción del banco de datos Montreal Data 1995

Para esta reconstrucción se utiliza el banco de datos *Montreal Data 1995* donde se utilizó para obtener las medidas un equipo de 16 electrodos con la inyección y la medida en electrodos adyacentes, como fue explicado anteriormente. La secuencia que se utiliza es la de un ciclo respiratorio, donde los datos fueron adquiridos a una frecuencia de 7 *frames* por segundo.

Apéndice H. Reconstrucción del banco de datos Montreal Data 1995

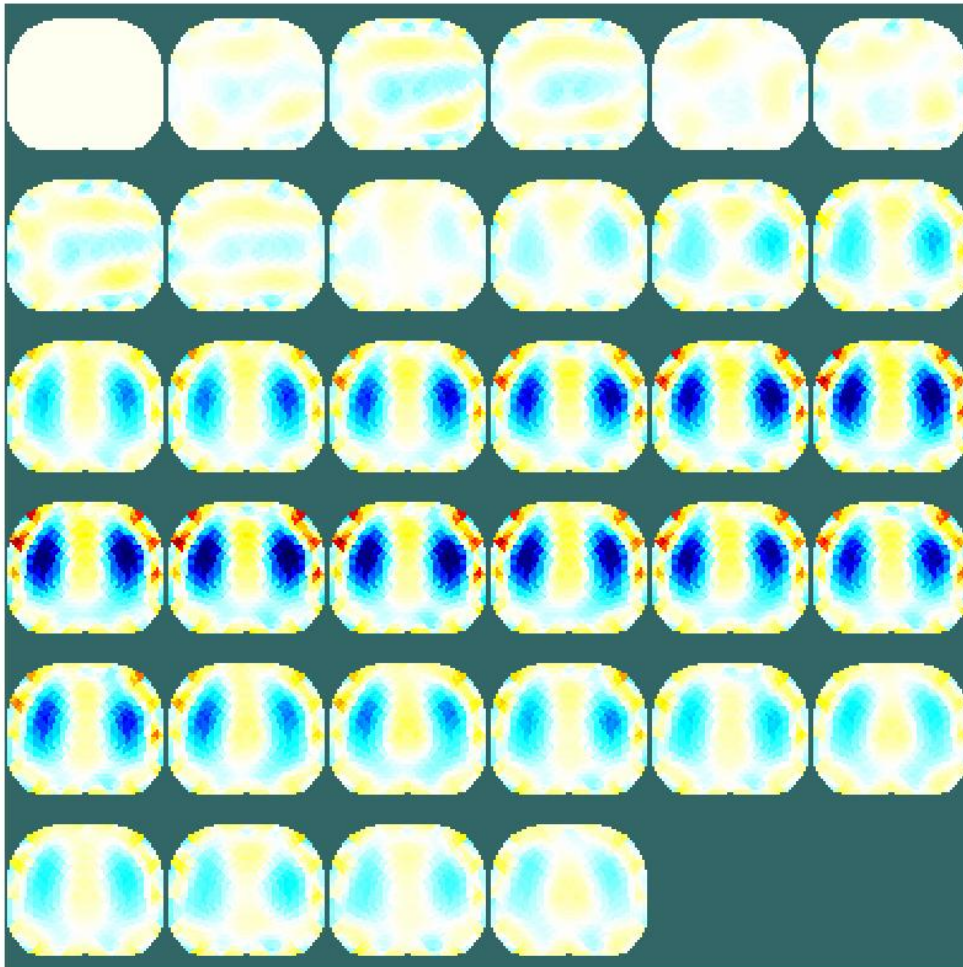


Figura H.1: Reconstrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TSVD, 10 % valores singulares, teniendo como referencia una imagen homogénea.



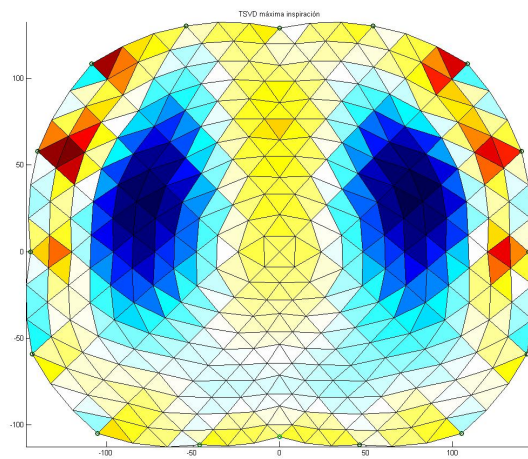


Figura H.2: Reconstrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TSVD10% valores singulares, teniendo como referencia una imagen homogénea.

Apéndice H. Reconstrucción del banco de datos Montreal Data 1995

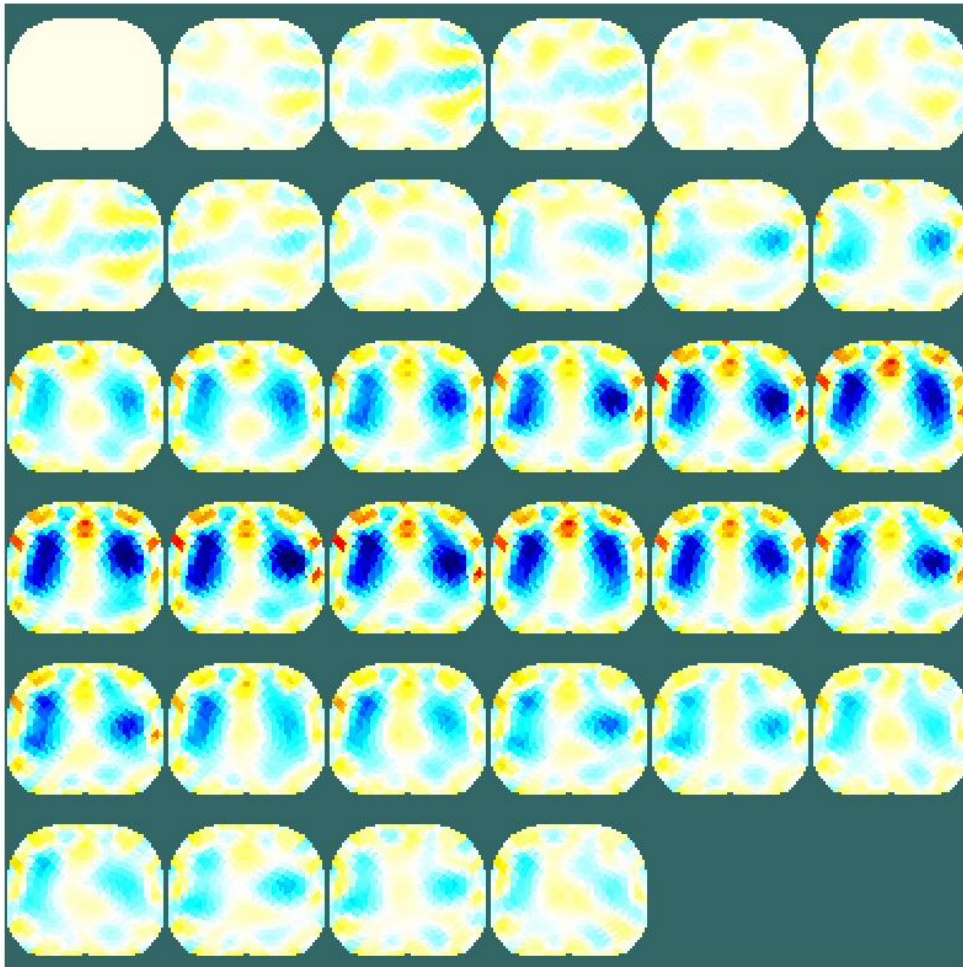


Figura H.3: Reconstrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante regularización de Tijonov,  $\alpha = 0,1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea.

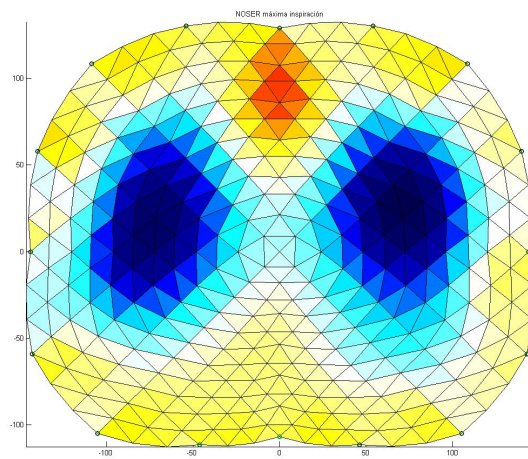


Figura H.4: Reconstrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante regularización de Tijonov,  $\alpha = 0,1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea.

Apéndice H. Reconstrucción del banco de datos Montreal Data 1995

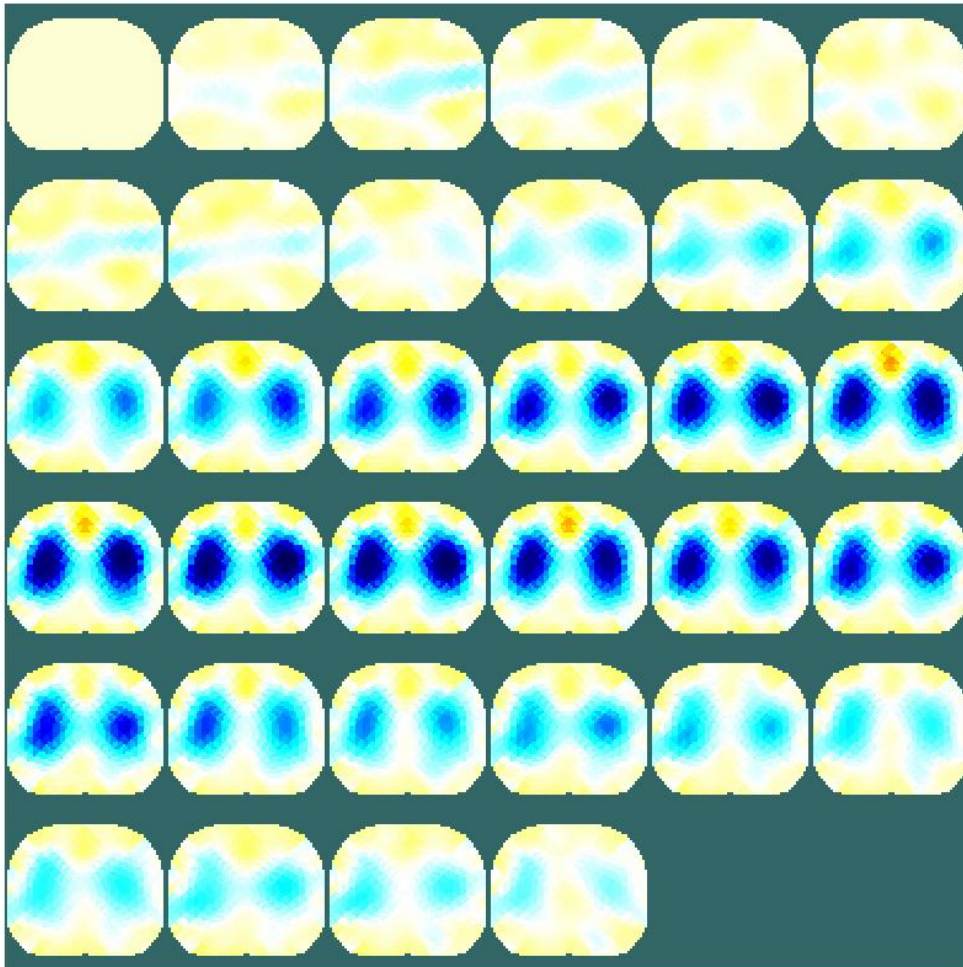


Figura H.5: Reconstrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante NOSER,  $\alpha = 1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea.

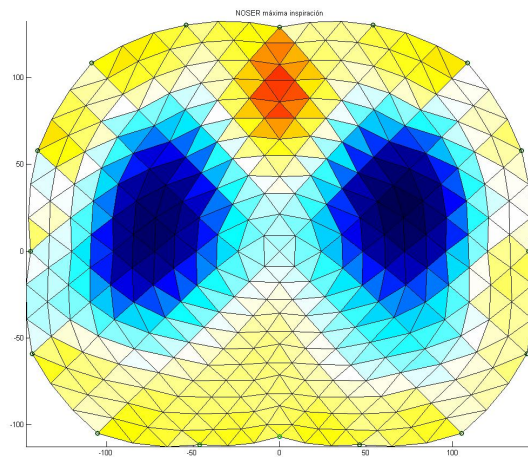


Figura H.6: Reconstrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante NOSER,  $\alpha = 1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea.

Apéndice H. Reconstrucción del banco de datos Montreal Data 1995

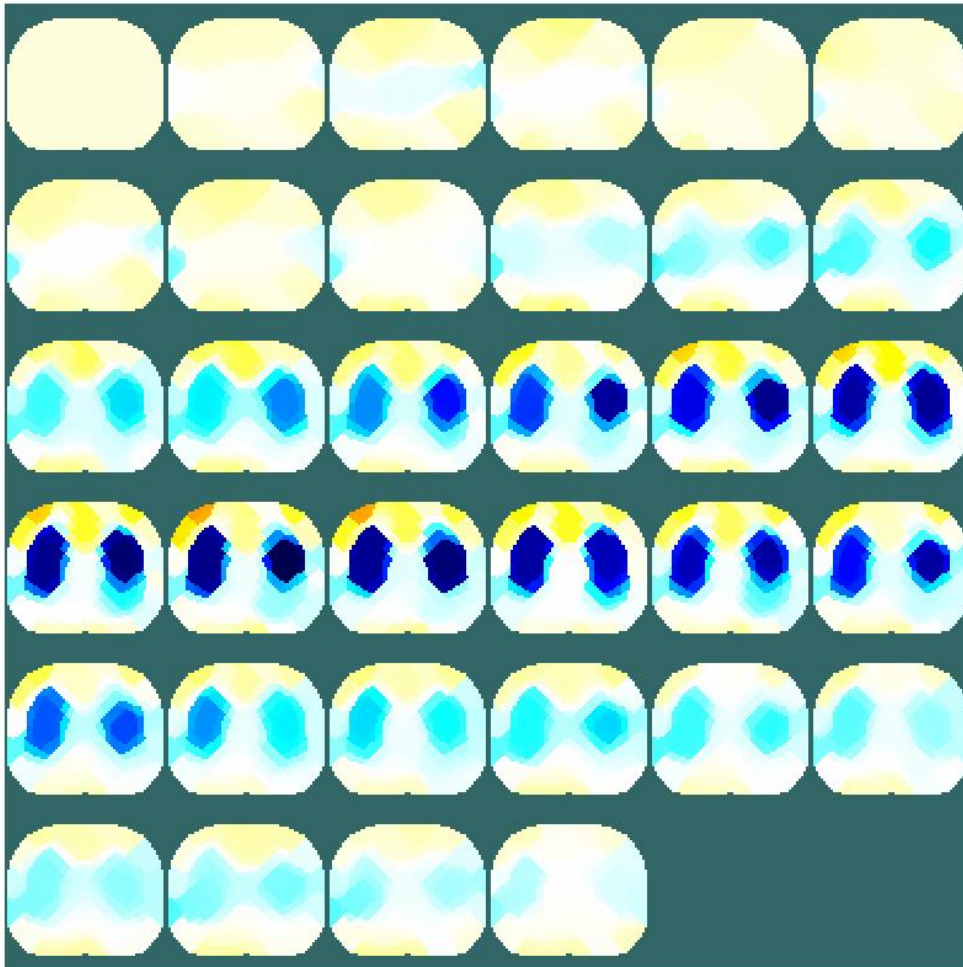


Figura H.7: Reconstrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TV,  $\alpha = 1 \times 10^{-3}$ , 10 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea.

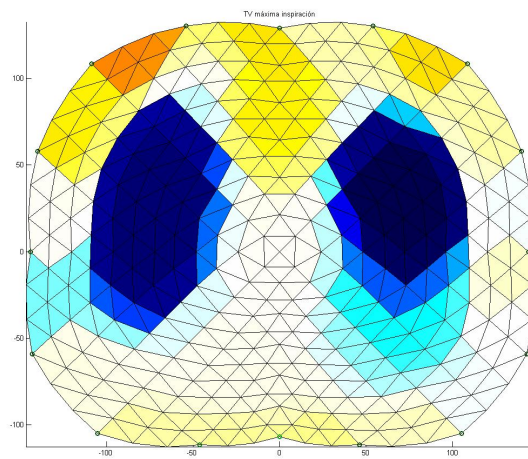


Figura H.8: Reconstrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TV,  $\alpha = 1 \times 10^{-3}$ , 10 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea.

Apéndice H. Reconstrucción del banco de datos Montreal Data 1995

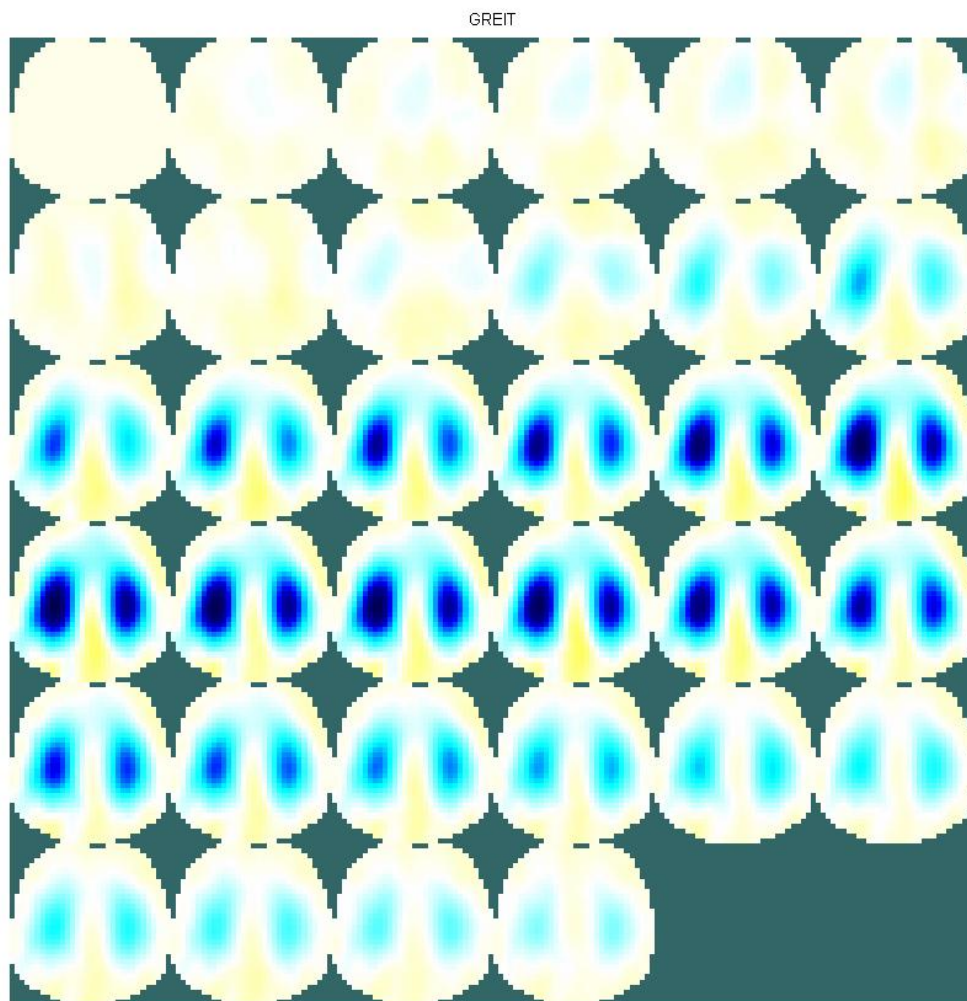


Figura H.9: Reconstrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia una imagen homogénea.



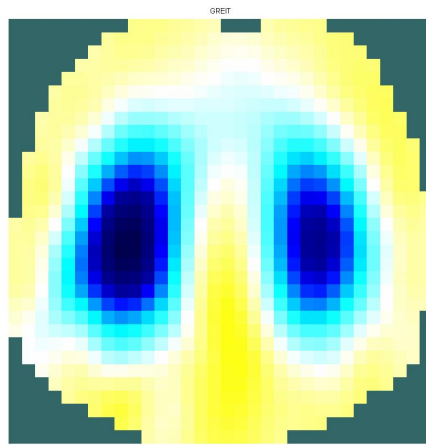


Figura H.10: Reconstrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia una imagen homogénea.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

## Apéndice I

Publicación en CLABIO 2012 - First  
Latin American Conference on  
Bioimpedance, Joinville, Brasil,  
Noviembre 2012

# Electrical Impedance Tomography for pulmonary oedema extent monitoring: review and updated design

**Eduardo Santos, Franco Simini**

Núcleo de Ingeniería Biomédica, Facultades de Medicina e Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay

E-mail: [esantos@fing.edu.uy](mailto:esantos@fing.edu.uy)

**Abstract.** Monitoring pulmonary oedema would be greatly facilitated by the availability of a graphical representation of its size and density to guide therapeutic interventions. Currently the clinician has only indirect estimations because X-ray imaging or computed tomography can not be repeated often. To avoid the transfer of critically ill patients and to have continuous information Electrical Impedance Tomography (EIT) is suggested. Circuit designs for EIT are reviewed, including wave generators, current sources, differential amplifiers, synchronous voltmeters, multiplexers and control modules. Nine designs are studied, the characteristics of five of them are presented (England 2005, Uruguay 2002, Iran 2006, China 2007 and Switzerland 2012). Three different solutions are compared (cost range from U\$322 to U\$508) and an optimal design is proposed which includes a direct digital synthesizer (DDS) for signal generation, a modified Howland configuration for current source, 16 bits for the analog to digital conversion, and a digital signal processor (DSP) for the synchronous demodulation as well as to process the measurements for the reconstruction algorithm. This allows us to design low cost, gross graphical representations for oedema extent monitoring, with little anatomical accuracy.

## 1. Introduction

Treatment of pulmonary oedema is based among other parameters upon the estimation of alveolar volume occupied by liquid. The injection of high frequency current ( $> 20kHz$ ) at amplitudes not perceived by the human body (of the order of  $2mA$ ) and the resulting measurements of voltages on the chest's skin, allow to estimate the electrical impedance. This estimation can be displayed as a tomographic image. The method, known as Electrical Impedance Tomography (EIT), low-cost, non-invasive and prolonged application to show a low resolution image of the distribution of fluid in the lungs and its evolution. Is thus an attractive alternative to X-rays and other cumbersome procedures

Since the pioneering work of Barber and Brown in 1984 [1], the last two and a half decades have seen a considerable growth of EIT applications in research centers, with few commercial offers. Since 1995 the Núcleo de Ingeniería Biomédica (nib) has developed circuits [2], reconstruction softwares [3] and complete prototypes [4, 5] under the name of IMPETOM (**impedance tomography**) with test results in phantoms and healthy volunteers.

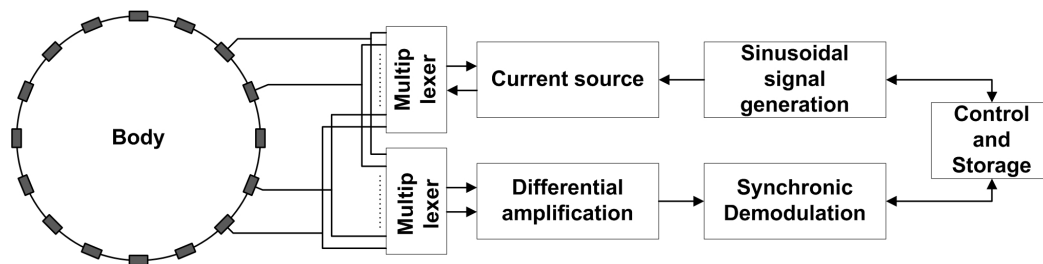
This paper presents the evolution of EIT designs adopted, as published in English literature.

## 2. EIT hardware architecture

The different blocks of an EIT system are the following:

- Waveform synthesis
- Current source
- Differential amplifier
- Synchronous voltmeter
- Multiplexers
- Control block

Figure 1 shows the architecture of a typical EIT system.



**Figure 1.** EIT system basic block structure with a differential current source. There are 16 electrodes affixed onto the skin of the patient's body

### 2.1. Waveform synthesis

The wave generator makes the reference signal for the sinusoidal current source, besides generating the synchronizing signal to be used by the demodulator. There are analog and digital solutions, the latter being the most commonly used in recent developments such as the circuit described by Saulnier [6]. These solutions feed a digital-analog converter with stored samples. The performance of this unit is measured in terms of spectral purity and its signal to noise ratio (SNR).

### 2.2. Current source

The current source is driven by the wave generator signal to convert it into a current to be injected into the body through the electrodes. You can use single-ended or floating sources. The former are ideal for systems with multiple sources, while the latter are used on systems with a single source [6]. The proposed solutions for the current source are varied, mostly using discrete op amps or transistors, but all eventually face the same problem: the output impedance is difficult to maintain high [6]. This impedance consists of an output resistance and stray capacitance: the output impedance thus affects the value of the injected current, but not always in the same way, as it depends on the load seen by the source, in this case the human body (and the electrode interface skin), which is constantly changing. That is why the design of the source must take into account load variability in order to obtain an output impedance that allows the current to vary at most within an acceptable range. Ideally, this range should not exceed the precision of the system in terms of A/D bits [6]. One may also measure the actual current being injected and to reflect it in the reconstruction algorithm.

### *2.3. Differential amplifier*

Either differential or single-ended voltages may be measured in principle, but the vast majority of systems adopts differential configurations that result with a reduced dynamic range of the voltages [6]. Designers face here a second problem to solve: the common mode voltage of the amplifiers. To reduce it, the components and the operating point must be chosen very carefully. In addition to this, one may use specific techniques, such as an additional electrode located away from the area where the measurement is taken to reintroduce feedback current much in the same way as the ECG driven-right-leg circuit [7].

### *2.4. Synchronous voltmeter*

To reconstruct a tomographic image it is necessary to take phase-sensitive voltage measurements, either to measure the resistivity and permittivity, or just the resistivity. This is why it is necessary to have a coherent signal from the wave generator. One can perform this demodulation in either the analogue or digital domain, the latter being the most used recently [6]. One way to perform the digital demodulation is via an A/D which converts the input analogue signal to digital samples which are then multiplied by sine or cosine functions of the same frequency. Then the samples are integrated over a number of cycles of the original wave as described by Saulnier [6], to obtain a value used in the algorithm.

### *2.5. Multiplexers*

The multiplexers are needed in systems with a single current source or with fewer voltmeters than electrodes. Multiplexers are used to select channels through which current is injected and where the voltage is measured. The multiplexers have non ideal characteristics that create problems in the system, as the on-resistance, and above all, the input and output capacitances.

### *2.6. Control and data storage block*

Control is necessary to synchronize all other blocks, to store the measured data and to transfer it to a computer that will perform the image reconstruction. Depending on the complexity of this block, the options are varied, from basic microcontroller [8] to high performance DSPs (digital signal processors) [9, 10, 11, 12] in order to make a more complex pre-processing of the data.

## **3. Literature review method**

We searched the literature on EIT systems, excluding publications solely related to reconstruction algorithms, therefore not including hardware information. Selected publications contain descriptions of circuits used, and were published from 2004 to 2012. The previous study by NIB was concluded in 2004, and therefore the publications prior to this date are analyzed in the documentation of these projects [2, 3, 4, 5]. In the present analysis we also included the characteristics of IMPETOM [2, 3, 4, 5] to compare it with newer equipment.

The search yielded seven publications by five groups, that along with the solutions for IMPETOM, allow us to identify trends in design and performance of EIT systems.

## **4. EIT projects**

**Ferreira, Rodriguez and Simini** proposed in 2002 [2] a circuitry for electrical impedance tomography with sinusoidal signal generation using the Function Generator MAX038 (Maxim). The current source includes the operational amplifier AD844 (Analog Devices). Two multiplexers MAX336 (Maxim) select the electrodes that carry the current. In the measurement stage, 16 identical circuits avoid the use of a multiplexer. The INA114 (Burr Brown) functions as an instrumentation amplifier and the output is fed to a bandpass filter made with the MAX274

chip (Maxim). A sample and hold circuit captures the filter output with the LTC1043 (Linear Technology) IC.

**Gonzalez, Liguori, and Simini** in 2005 [4] designed a prototype to integrate with the previous project, developing the control stage and the analog to digital conversion through the PC-LPM-16PnP (National Instruments) board, which has 16 input channels and 12-bit resolution converters. The results measured by [2] show a SNR (signal to noise ratio) of  $40dB$ , CMRR (common mode rejection ratio) in the order of  $50dB$  and a current source output impedance of  $560k\Omega$  at  $50kHz$ .

**Wang, Liu and Wang** in 2005 used a DSP [9, 10] for control and data preprocessing, the DSP used is the TMS320F206 (Texas Instruments). A VCCS (voltage controlled current source) generates the signal that is injected by the electrodes. For measuring voltages, a multiplier is implemented with the AD734 (Analog Devices) IC, A low pass filter with the MAX275 chip (Maxim), and the ADC used is the AD1674 (Analog Devices). The results are oriented to rebuild times, reaching a rate of more than thirty frames per second.

**Soleimani** in 2006 [13] showed a low-cost equipment for reconstruction in 2 dimensions. The signal is digitally generated, using an EPROM (27C258) to storage a sinusoidal of  $23kHz$ . A counter reads the data from the EPROM and feeds a DAC (DAC-0808 National Semiconductor). Harmonic distortion was measured in 1.3%. This signal is fed to a buffer which in turn is connected to a VCCS, performed with the operational AD644 (Analog Devices). For measuring the voltage, synchronous demodulator is used due to its ability to remove noise. It uses the AD625 instrumentation amplifier (Analog Devices) as the input stage before the acquisition card PCL-812PG I/O (Advantech).

**Xu et al.** created in 2007 a system [11] using 128 electrodes for three-dimensional images of the human thorax. A multiple frequency current is injected using the IC AD9852 (Analog Devices). The frequency range is from  $1kHz$  to  $2MHz$ . The control module is implemented with the chip TMS320F2812 (Texas Instruments). The multiplexer MAX306 (Maxim) is used. For the acquisition of data the integrated AD624 (Analog Devices) is used as a pre-amplifier, then a fourth-order Butterworth filter is implemented with the integrated MAX275 (Maxim). The synchronizing signal is taken from the AD9852, and a synchronous demodulator is implemented in the DSP. As conclusion, reconstructed images are shown, but they don't provide hardware performance data in the form of SNR or any other form.

**Bera and Nagaraju** developed in 2009 [14] a system to study calibration. For current injection they use a VCO (voltage controlled oscillator) built with the MAX038 (Maxim), which feeds a modified Howland type current source [6]. This module is constructed with two operational amplifiers AD811 (Analog Devices) and generates current of  $1mA$  and  $50kHz$ . A differential amplifier stage and a filter is used for the voltage measurement. Then the resulting voltage signal is measured with a multimeter and a digital oscilloscope. A central electrode is used to reduce the common mode signal. The results show that the common mode is reduced to a maximum of  $67mV$ .

**Hamidi et al.** implemented in 2010 [12] a synchronous demodulator with a DSP (Texas Instruments MS320C6713) which is mounted on the development board TLV320AIC23(Texas Instruments). This board has two 16 bits ADCs (AIC23 Texas Instruments) with a sampling rate of 96 kbps. With simulated data, the system had an error in the phase of 0.12 degrees and a signal to noise ratio (SNR) of  $130dB$ . Using a phantom, the results were worse, but still significantly good.

**Gaggero et al.** in 2012 [15] developed a system to address two important problems affecting the reliability and usability of electrical impedance tomography. These are: a) EIT is very sensitive to the contact impedance of the electrodes, which can be very large and vary over time due to movement. b) The difficulty of placing the electrodes individually. To solve these problems they implemented a method of active electrodes, which uses a voltage buffer physically close to

the electrodes. This stabilizes the contact impedance, and also using a multiplexing method reduces the wires from the electrode belt to the central block. In the central block of the equipment is the signal generator, power source, the electrode handling and the communication with the PC. For this, two boards are used: an Altera Stratix II development kit (Altera) that has integrated the AD9433 ADC (TI), the DAC904 DAC (TI) and Ethernet interface. Another custom board is responsible for the analog stage, it has a differential amplifier and high pass filter implemented with an AD8221 (Analog Devices) then converts the signal into a differential signal and performs a low pass filter with the integrated THS4502 (IT). The sinusoidal signal is generated in the FPGA through a numerically controlled oscillator (NCO), and a modified Howland circuit is used as a current source. The results shown are the output resistance of current source, and provides that for lower frequencies, this resistance will be lower.

**Dixtal Biomedical** developed a commercial system, and seen in operation in Montevideo in 2010, called DX 1800, which provides real-time chest images. It has two modules: the DX1800 itself, and a monitoring software that runs on a computer. The DX 1800 is the system responsible for the current generation, voltage measurement and data processing, this system has 32 electrodes to be placed in a line around the patient's chest. The software handles the user interface and display the reconstructed images. The connection between modules is performed via an Ethernet connection. Because it is a commercial system, it was not possible to know how the different blocks are implemented.

Another commercial system is the PulmoVista 500 of **Dräger Medical** [16] to display the distribution of ventilation. It has a processing block and a screen showing the ventilation in the lungs and various respiratory measures. A belt with one row of 16 electrodes is placed around the chest and injects currents between  $80kHz$  and  $130kHz$ , generating images with a rate of 10 to 30 per second with a resolution of  $1440 \times 900$  pixels.

Table 1 presents the summary characteristics outlined for the most representative systems, taking the published figures and extrapolating information wherever possible.

## 5. Design Options

Using the information from the previous projects, we consider three feasible options for the IMPETOM hardware, one option corresponding to a completely analog signal processing, the other two using a digital signal processor. These are analyzed based on cost factors, difficulty of assembly, performance and speed.

### 5.1. Discrete components without digital processing

The first option is to design a system using discrete components without a digital signal processing, this would include a basic microcontroller (eg ATmega168, Atmel, \$ 3.33) which is responsible for control and synchronization of different blocks. In this, the demodulation of the signals would be carry out using discrete components, also the filtering and gain stages. Where possible, we use analog-digital converters (A/D converters or ADCs) to digitize the signals and send them to the computer for image reconstruction. Another option derivative of this solution is to use a data acquisition card as used in the project IMPETOM [4], these cards would provide the A/D and communication with the computer. A precondition for improving system performance with respect to the previously developed is to use at least 16bit ADCs resolution. These data acquisition card (DAQs) have multiple input channels, making it possible to have a channel for each pair of electrodes, enabling measure in parallel, this also means build 16 input channels, such as those by IMPETOM C [2], increasing the cost and difficulty of design, in addition, that these DAQs use many input channels makes them very expensive, such as the NI USB-6211 (National Instruments) having a minimum cost of \$690. The main problem with this solution is to repeat the same mistakes in IMPETOM C, obtaining a system where the electrical noise



**Table 1.** Comparative characteristics of circuits for Electrical Impedance Tomography.

	Sheffield system	IMPETOM C	Open access	128 electrodes system	Active Electrodes	
	England 2005 [17]	Uruguay 2002 [2]	Iran 2006 [13]	China 2007 [11]	Switzerland 2012 [15]	
Waveform synthesis	Look up table in ROM	Function generator	EPROM 27C258, VCCS(AD644)	DDS AD9852 (Altera)	Altera Stratix (NCO) DAC904	II
Current source	floating with transformer	AD844	current generator 5mA, 23kHz		Modified Howland	
Multiplexer	2 multiplexers 1 to 16 AD DG506	2 multiplexers 1 to 16	IC-4067 multiplexers	16 MAX306 multiplexers		
Differential amplifier	Instrumentation amplifier INA 110	Instrumentation amplifier INA 114	Instrumentation amplifier AD625	Pre-amplifier AD624 with 4 order low-pass filter MAX275	AD8221 + THS4502	
Demodulation	Phase-sensitive voltmeter	LTC1043 sampler	Synchronized pulse demodulation	Synchronic demodulation	Digital Demodulation AD9433	
Processing	External computer	IMPETOM I [3]	I/O card ADVANTECH PCL-812PG 16bits	High speed DSP TMS320 F2818	Altera Stratix II	

and the imperfection of discret components dominate the measurements obtained, making it impossible to get a reasonable image. The advantage is the cost, table 2 shows the cost of the most notable components of the system, the total shown does not reflect the cost that actually could have this solution, as it ignores many minor components, like resistors, capacitors, crystals, connectors, etc. which increases the final cost.

### 5.2. Evaluation Board

To minimize the processing of signals in analog form, they must be passed as soon as possible for the A/D converters and perform as much processing in digital format, this would be after a basic first filtering and gain stage, the signals are then processed by a Digital Signal Processor (DSP), both in the filtering phase and in demodulation and for obtaining the amplitude and phase of the signals. This option gives a great flexibility to the system, allowing suit the system to different uses, such as measuring both resistivity and permittivity, also to reduce appreciably the errors introduced by the use of discrete components, and the processing speed ensures the final speed of the system to reconstruct the images won't be affected. By using a DSP, the system transmit to the computer the measurement vector ready to be used in the reconstruction

**Table 2.** Cost of EIT hardware designed with discrete components.

Block	Design	Component	Quantity	Price, each, U\$S
Signal Generator	DDS	AD9832	1	11
	Multiplier DAC	DAC8811	2	13
VCCS	Operational Amplifiers	OPA602	2	10
Current Measurement	Digital potentiometer	AD7376	1	8
Multiplexers	Multiplexer	ADG406	4	12
Amps., filtering	Differential Amps.	INA114	4	12
	Programmable gain amps.	PGA203	2	17
Synch. Demod. Control	Discrete components	AD630	2	25
	Microcontroller	Atmega168	1	4
	Memory	M48Z129V	1	27
	ADC	AD7892	2	23
			<b>Total</b>	<b>322</b>

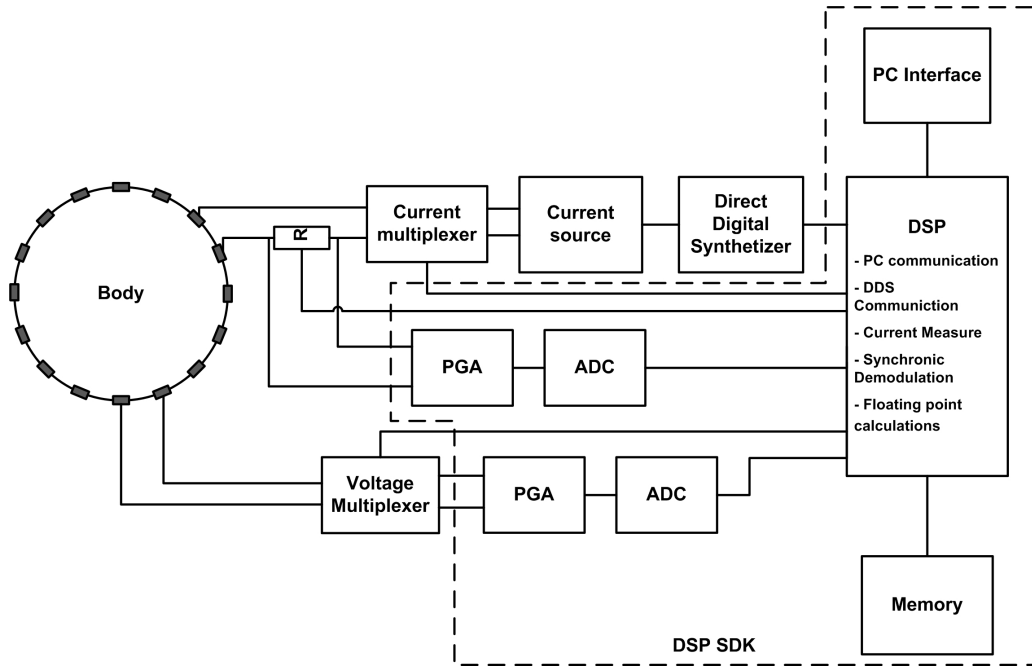
Notes: DDS: Direct Digital Synthesis, DAC: Digital to analog converter, VCCS: Voltage controlled current source, ADC: Analog to digital converter.

method.

Two paths can be taken to use DSPs, the first is an Evaluation Board or Starter Kit, examples of this are the Starter Kit TMS320C6713 (IT, \$ 395) or the Evaluation System ADSP-BF533 EZ-Kit (Analog, \$ 490). These systems are aimed at evaluation or initiation of the engineer in the use of a DSP model and tools developed, often for teaching purposes. It is not the purpose of these boards be used in commercial products. The advantage of using these boards is to have a complete system that contains the DSP, memory, demodulators including the A/D and programmable gain amplifiers (PGAs), communication with the computer, ports for general use, the circuit to program the DSP, this arranged in the most optimal way to get results soon from the start. Figure 2 shows the block diagram for a system implemented with an evaluation board. Figure 3 shows the block diagram of the card TMS320C6713 SDK.

The disadvantage is that being this boards a fixed set of components, some of them couldn't adapt to the problem being solved, in fact, most of these cards, at least those found in a price range between \$ 300 and \$ 600, are designed to work with audio, then the A/D and PGAs are within a codec (AIC23 IT in the TMS320C6713 [18]) specifically designed for audio, this doesn't exclude the use of this boards for EIT systems, there are systems implemented with very similar boards ([19], [12]) but it is necessary to adapt to certain limitations, the most notorious is that this codec operates at frequencies used in standard audio processing, the higher sampling frequency being  $96kSPS$  (samples per second,) by the Nyquist theorem, this limits our system to work at frequencies below  $48kHz$ , although to get really good SNR values, operating frequency must be still smaller, below  $20kHz$ ; this increases the total time required for the acquisition of the signals, in addition to some under-use the DSP that is designed to operate at very high speeds (the DSP within the TMS320C6713 has the same name and operates at  $225MHz$  and can perform 1350 million floating point operations per second [20].) Another disadvantage is the

cost, again Table 3 will present costs of the more noticeable component to use, and a estimated total cost where we have to take into account the same observations that were made for the table above, in this case the difference between this cost and the real final cost is a little lower than the case of using discrete components, since the board brings all the components needed for the entire system to function properly.

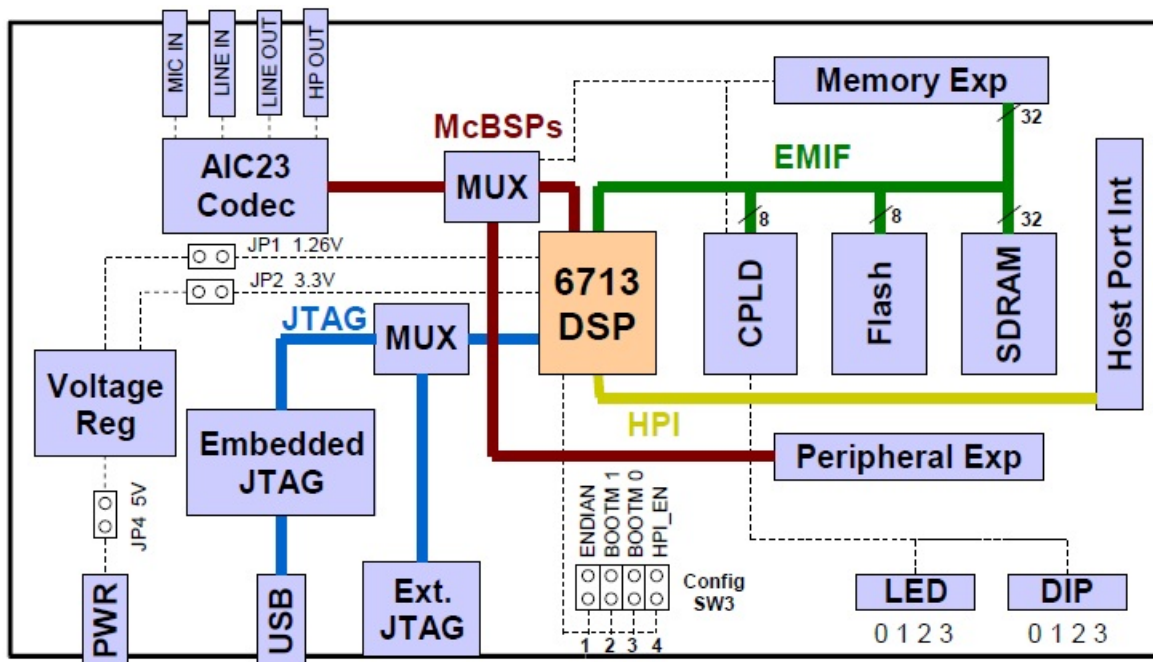


**Figure 2.** EIT hardware using an Evaluation Board.

**Table 3.** Cost of EIT hardware based on a DSP Evaluation Board.

Block	Design	Component	Quantity	Price, each, US\$
Signal Generator	DDS	AD9832	1	11
	Multiplier DAC	DAC8811	2	13
VCCS	Operational Amps	OPA602	2	10
Current Measurement	Digital potentiometer	AD7376	1	8
Multiplexers	Multiplexer	ADG406	4	12
Amps, filtering				
Synch. Demod. Control	DSP EB	TMS320C6713	1	395
<b>Total</b>				<b>508</b>

Notes: DDS: Direct Digital Synthesis, DAC: Digital to analog converter, VCCS: Voltage controlled current source, DSP: Digital signal processor, DSP EB: DSP Evaluation board.



**Figure 3.** Block diagram for Starter Kit TMS320C671. Taken from [18].

### 5.3. Discrete components with digital processing

Another option to work with DSPs, overcoming the problems described of working with Starter Kits, is to set up our system with components that are most suited to our problem, that is, mainly, the use of DACs with a higher sampling frequency, such as the AD7892 (Analog, \$ 23) which has 18bits of resolution and the ability to get up  $1MSPS$ , which theoretically would allow the system to work up to a frequency of  $500kHz$ . Another advantage is that you get a system more adapted to the problem at a lower cost than using a Starter Kit. One problem with this solution is the difficult to achieve a truly compatible and harmonious system, since in these types of components details such as clock speed, type of communication, supply voltages, etc. are essential for the assembled system to work properly. Another problem, not least, is the construction of the system board, since most of the components are surface mounting, and components such as DSP, memory and ADC have many contacts, it makes very difficult to assembly the components using a normal solder. Table 4 again refers to the component costs, taking into account the same considerations made above, the cost of this option is similar to the first.

Table 5 compares the advantages and disadvantages of the three methods discussed.

## 6. Proposed design

The proposed design for IMPETOM tries to improve the previous designs, overcoming the most notable problems by digitalizing the signals in early stages of the process. By doing this we can take advantage of the precision of the digital filtering and demodulation. Also, we don't have the tools needed to build a complicated board with many surface mounting components, then, our design is based on an Evaluation Board.

The selected board is the OMAP-L137/TMS320C6747 Floating Point Starter Kit (\$ 415, Spectrum Digital). The most important characteristics for us:

- OMAP-L137 processor, with a with a C6747 VLIW DSP floating point processor and an

**Table 4.** Cost of integrated and discrete components EIT Hardware.

Block	Design	Component	Quantity	Price, each, US\$
Signal Generator	DDS	AD9832	1	11
	Multiplier DAC	DAC8811	2	13
VCCS	Operational Amps.	OPA602	2	10
Current Measurement	Digital potentiometer	AD7376	1	8
Multiplexers Amps., filtering	Multiplexer	ADG406	4	12
	Operational Amps.	INA114	4	12
	Programmable gain amps.	PGA203	2	17
Synch. Demod. Control	DSP	TMS320C6713B	1	45
	DSP	TMS320C6713B	1	0
	Memory	M48Z129V	1	27
	ADC	AD7892	2	23
			<b>Total</b>	<b>313</b>

Notes: DDS: Direct Digital Synthesis, DAC: Digital to analog converter, VCCS: Voltage controlled current source, DSP: Digital signal processor, ADC: Analog to digital converter.

**Table 5.** Advantages and disadvantages of the options discussed

Option	Advantages	Disadvantages
Discrete Components without DSP	Cost	Electrical noise Components imperfections
Evaluation Board	Complete System Optimal Selection of components	No flexibility for components Cost
Discrete components with DSP	System adapted to our system  Cost less than a Starter Kit	Difficult that the whole system works in an harmonious way Difficult build process

Notes: DSP: Digital signal processor.

ARM926EJ-S processor operating up to 300 Mhz.

- 64 Megabytes SDRAM.
- USB2 2.0 Full speed interface.
- TLV320AIC3106 Stereo Codec
- Expansion connectors for daughter card use.

The general design is similar to the one described in 5.2. The codec has 4 input channels, considering that a channel will be used to measure the injected current, there would be three

input channels to measure voltage in parallel, so at first it seems more reasonable to start with a single measurement channel and then see if expansion is needed.

This system is intended to perform two significant changes from the previous IMPETOM systems implemented [2, 4], first, measuring the current that is injected. The current source is one of the most important sources of errors in the system [6], due to imperfections in the components such as parasitic capacitances, leading to output impedance which are far from infinite. Therefore, considering that the current value does not vary with load on the reconstruction method is an important source of error, to avoid this we can measure the current that is injected and use the correct value in the reconstruction. For this measurement it is best to use a digital potentiometer, which is controlled by the control block which ensures that the signal obtained makes the most of the range of the ADC.

The other change is in principle to make a single measurement channel and to use a multiplexer to obtain all the necessary measures. This change has the disadvantages of increasing the acquisition time relative to the use of channels in parallel, in addition that the multiplexers are sources of noise and errors [6]. The reason for this change is the complexity and cost of building 16 measuring channels, plus it must have a system capable of handling these signals in parallel, the option used in the IMPETOM project [4], is that of a DAQ, which raises the cost.

## 7. Conclusions

The systems developed in recent years largely share some methods, such as DDS to generate the sinusoidal signal or a configuration of simple or modified Howland as current source. In the measurement stage, the instrumentation amplifier is followed by an analog to digital converter of at least 16 bit resolution, then, in the digital domain the filtering, synchronous demodulation and other data processing is performed. For control and data processing the DSP is the most popular option for its speed and calculation capacity. In addition, the fewer multiplexers are used, the better the performance of the system. This setting seems to give the best compromise between performance and cost.

The solution implemented in IMPETOM [2, 4], because the technology at the time it was originally developed, is far from what is thought to be the best implementation today. Research continues on several aspects of this development for a prototype according to the set objectives. The availability of a low-cost, noninvasive, without ionizing radiation, which has at all times the evolution of water content in lung space is an aspiration of the intensivists from around the world.

## Acknowledgments

The authors are thankful to the students who developed earlier versions of IMPETOM since 2002: Adriana Ferreira, Santiago González, Raúl Hartman, Andrés Liguori, Jorge Lobo, Walter Quinteros, Alfredo Rodríguez and Mateo Ruétalo, as well as to the clinical specifications of Javier Hurtado, MD, Cristina Santos, MD and Walter Olivera, MD, and fellow EE researchers who contributed guidance and advice: Pablo Mazzara, Linder Reyes and Daniel Geido.

## References

- [1] Barber D C and Brown B H 1984 *J. Phys. E. Sci. Instrum.* **17** 723 – 733
- [2] Ferreira A, Rodríguez A and Simini F 2002 *IMPETOM-C Tomógrafo de Impedancia Eléctrica. Academic thesis* (Universidad de la República, Montevideo)
- [3] Hartman R, Lobo J, Ruétalo M and Simini F 2002 *IMPETOM-I Tomógrafo de Impedancia Eléctrica. Academic thesis* (Universidad de la República, Montevideo)
- [4] González S, Liguori A and Simini F 2005 *IMPETOM. Academic thesis* (Universidad de la República, Montevideo)
- [5] Quinteros W and Simini F 2007 *IMPETOM-48 Tomógrafo de Impedancia Eléctrica con tres hileras de electrodos. Academic thesis* (Universidad de la República, Montevideo)

- [6] Saulnier G 2004 Eit instrumentation *Electric Impedance Tomography: Methods, History and Applications* ed Holder D (London, England: IOP Publishing) p 65
- [7] Webster J G (ed) 2010 *Medical Instrumentation. Application and Design* (Hoboken, NJ: Wiley)
- [8] Xu G, Zhang S, Wu H, Yang S, Geng D, Yan W and Wang M 2005 The acquisition hardware system with direct digital synthesis and filtered back-projection imaging in electrical impedance tomography *Engineering in Medicine and Biology Society, 2005. IEEE-EMBS 2005. 27th Annual International Conference of the pp* 7758 –7761
- [9] Wang C, Liu J and Wang H 2005 Pipeline data acquisition method in the eit system *Instrumentation and Measurement Technology Conference, 2005. IMTC 2005. Proceedings of the IEEE* vol 1 pp 437 –440
- [10] Wang M, Ma Y, Holliday N, Dai Y, Williams R and Lucas G 2005 *Sensors Journal, IEEE* **5** 289 – 299
- [11] Xu G, Wang R, Zhang S, Yang S, Justin G, Sun M and Yan W 2007 A 128-electrode three dimensional electrical impedance tomography system *Engineering in Medicine and Biology Society, 2007. EMBS 2007. 29th Annual International Conference of the IEEE* pp 4386 –4389
- [12] Hamidi S A, Jafari R, Nia A M and Soleimani M 2010 *Journal of Physics Conference Series* **224**
- [13] Soleimani M 2006 *BioMedical Engineering OnLine* **5**
- [14] Bera T and Nagaraju J 2009 A simple instrumentation calibration technique for electrical impedance tomography (eit) using a 16-electrode phantom *Automation Science and Engineering, 2009. CASE 2009. IEEE International Conference on* pp 347–352
- [15] Gaggero P O, Adler A, Brunner J and Seitz P 2012 *Physiological Measurement D* **33** 831
- [16] Dräger 2011 Dräger pulmovista 500 data sheet
- [17] Smith R, Freeston I and Brown B 1995 *Biomedical Engineering, IEEE Transactions on* **42** 133 –140 ISSN 0018-9294
- [18] Spectrum Digital 2003 *TMS320C6713 DSK Technical Reference*
- [19] Radil T, Ramos P and Serra A C 2008 *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* **57** 197–204
- [20] 2011 TMS320C6713B URL <http://www.ti.com/product/tms320c6713b>

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.



## Apéndice J

Publicación en BIBE 2013 - 13th IEEE  
International Conference on  
BioInformatics and BioEngineering,  
Chania, Greece, November 2013

# Comparison of Electrical Impedance Tomography Reconstruction Techniques Applied to IMPETOM System

Eduardo Santos and Franco Simini

**Abstract**— Electrical Impedance Tomography (EIT) reconstruction can estimate thorax fluid content. Its use in critically ill patients is promising and may prove clinically useful. Boundary voltages (16-electrode frames) were obtained with our 50 kHz-5 mA IMPETOM system. Comparison of the 492-element Newton-Raphson algorithm with EIDORS open source tool (NOSER & GREIT algorithms), applied to a healthy volunteer, suggests that anatomically adjusted 3D models give better results. Nevertheless for phantom imaging an initial uniform image yields more accurate reconstructions. The results help in the selection and implementation of the reconstruction method for systems similar to IMPETOM.

## I. INTRODUCTION

Estimation of alveolar fluid content and distribution is essential in the management of conditions such as cardiogenic pulmonary oedema, pleural effusions, pneumonia and adult respiratory distress syndrome (ARDS). Electrical impedance of tissues can be estimated by measuring voltages on the skin while applying high frequency currents ( $> 20$  kHz) whose amplitudes ( $< 5$  mA) are below perception thresholds. Processing electrical impedance matrices yields tomographic images [1]. This method, known as Electrical Impedance Tomography (EIT), is a low-cost, non-invasive, continuous-measurement method used to obtain low resolution images of the distribution of pleuro-pulmonary fluids and air. It is thus an attractive alternative to currently adopted imaging procedures of the thorax (X-rays, Ultrasound, Computer Tomography (CT) and Magnetic Resonance Imaging (MRI)). Following Barber and Brown's pioneering works [2], we developed a system called IMPETOM (**imp**edance **tom**ography) consisting in a series of prototypes [1], [3], [4], [5], [6] tested in phantoms and healthy volunteers. This paper compares different reconstruction methods (Figure 2) used to elaborate data obtained with IMPETOM. This comparison led to specification improvements of our pre-clinical prototype.

## II. MATERIAL AND METHODS

### A. Inverse Problem

1) *Mathematical background:* EIT is a technique used to derive conductivity within a region from measurements taken on its boundary. The region of interest  $\Omega$  is part of space ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ), the same electrodes are used to inject the currents and to measure the voltages. There are several possible configurations for an EIT system, including the frequency and waveform of injected current, the number

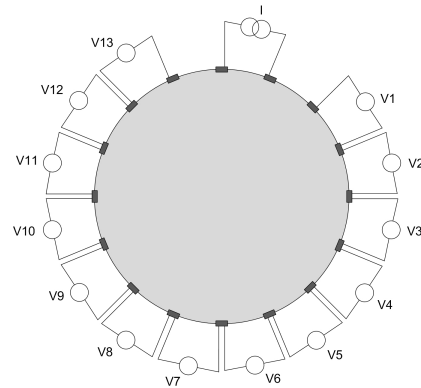


Fig. 1: EIT data collection system.

of electrodes and their pairing (e.g. adjacent, Figure 1 or opposite electrodes). The problem to solve is the mapping  $d \in D \mapsto m \in M$  where  $d$  is the potential along the boundary of the region  $\Omega$ , and  $D \subseteq H^{1/2}$ , being  $H^{1/2}$  the  $1/2$  order Sobolev space [7],  $m$  represents the conductivity inside the region, and  $M$  is the subset of differentiable functions  $m$  such that  $m > 0$ . Since boundary information is used to reconstruct the interior of the region, this is an inverse problem. As shown later, it is also an ill-conditioned problem, which makes reconstruction not straightforward. To overcome the ill-conditioning we introduced a regularisation method.

The system is governed by Maxwell's equations considering we are using low frequencies, the magnetic field is ignored. Given that thorax  $\Omega$  is closed and bounded, with a smooth boundary  $\partial\Omega$ , conductivity within the thorax  $\sigma$  is a function of the spatial variable  $x$ . The potential is  $\phi$  and the electric field  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . The current density is  $\mathbf{J} = -\sigma \nabla \phi$  consistent with Ohm's law. Since there are not current sources within the body, Kirchoff's law yields  $\nabla \cdot \sigma \nabla \phi = 0$  and the current density along the boundary  $\partial\Omega$  can be expressed as  $j = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = \sigma \nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ , where  $\mathbf{n}$  is the outgoing normal vector to  $\partial\Omega$ . All currents entering the body  $\Omega$  eventually exit: mathematically  $\int_{\partial\Omega} j = 0$ . The Dirichlet boundary condition states that, given the conductivity  $\sigma$  and knowing the potential along the boundary  $\phi|_{\partial\Omega}$  is enough to determine the body potential  $\phi$ . Similarly, the Neumann boundary condition states that  $\sigma$ , and the current density along the boundary,  $j$ , are enough to determine  $\phi$  [9]. Using these two conditions we can define the mapping  $\Lambda_\sigma : \phi|_{\partial\Omega} \rightarrow j$  and the problem to be solved is the inverse of

E. Santos and F. Simini are with the Núcleo de Ingeniería Biomédica, Facultades de Medicina e Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay [esantos@fing.edu.uy](mailto:esantos@fing.edu.uy)

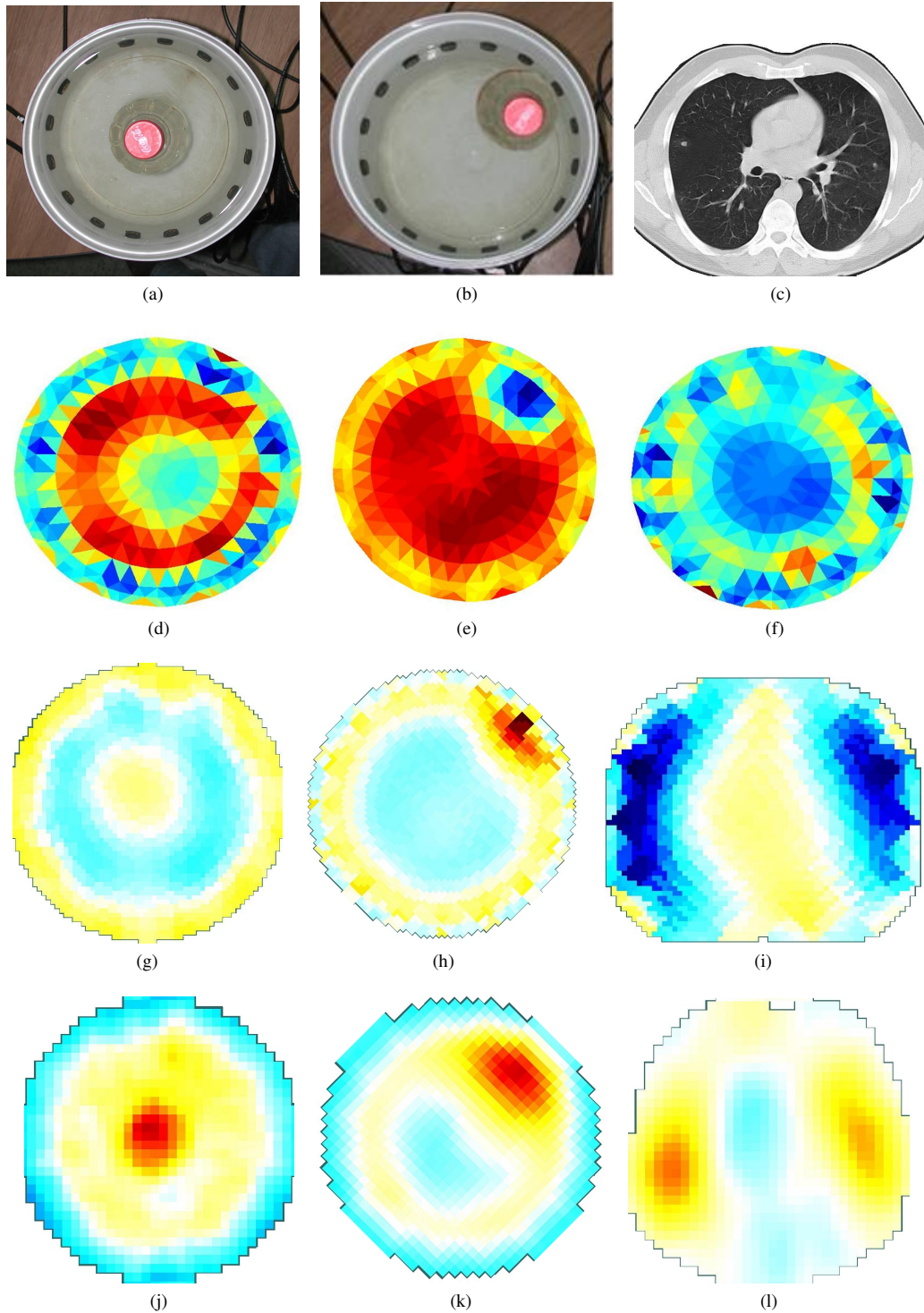


Fig. 2: Comparison of reconstruction methods: the first row shows the phantom or patient to be imaged. The lines below show the output of IMPETOM (492 pixels), NOSER (equiv. 2048 pixels) and GREIT (1024 pixels) algorithms. First column is an empty plastic bottle in a saline filled tank. Second column shows the bottle placed near the edge of the tank. Third column is a sample CT scan and tomographic sections of a normal volunteer.

the mapping  $\Lambda_\sigma \rightarrow \sigma$ , which produces  $\sigma$  values, distributed conductivity.

But in EIT systems we only know the potential along the boundary  $\phi|_{\partial\Omega}$  at the electrodes, and these potentials are represented by the measurement vector  $d$ .

2) *First part of the solution: Forward Problem Solving:* To solve the inverse problem it is necessary to know the forward problem,  $h : M \rightarrow D$  which is the mapping of the conductivity inside the body  $\Omega$  to the potentials along the boundary  $d = h(m)$ . Since it is a non-linear mapping we assume there must be a linear equivalent:

$$d = Hm \quad (1)$$

The determination of the forward operator  $h$  by mathematical analysis is only possible if the geometry and the conductivity of the EIT problem are simple (e.g. uniform conductivity in a cylinder) [8]. In all other cases, it is necessary to numerically discretise both the region and the conductivity with finite elements. It is also necessary to feed the method with initial experimental data to obtain a linear formula such as (1).

3) *Second part of the solution: Regularisation:* The inverse problem consists in the determination of the parameters  $m$  corresponding to the measurements  $d$  knowing the mapping  $H$ . The measurements errors and uncertainties involved are such that (1) does not hold. When this happens we have an ill-conditioned problem in the Hadamard sense [10] which implies that at least one of the following is true:

- (i) The solution does not exist.
- (ii) The solution is not unique.
- (iii) The solution is a noncontinuous function of the data, such that small perturbations cause arbitrarily large errors in the reconstructed parameters.

With the least squares method the problem can be expressed as:

$$m_{LS} = \arg \min \|Hm - d\|^2 \quad (2)$$

Where  $m_{LS}$  being the discretised solution of  $\sigma$ . Facing the problem by means of the single value decomposition (SVD) [11, p. 52] of the matrix  $H$  it is possible to observe that in the presence of measurements noise the solution can become very unstable, and the resulting conductivity inaccurate.

Tikhonov modified equation (2) to confine the solution to a space of expected solutions: this is done by adding a term introducing information on where the solution might be.

$$m_{(\alpha, L, m_0)} = \arg \min (\|Hm - d\|^2 + \alpha \|L(m - m_0)\|^2) \quad (3)$$

Where  $m_0$  is an initial estimation of  $m$ . Different forms of  $L$  can be used, such as Tikhonov's standard regularisation  $L = I$  and NOSER regularisation  $L = \text{diag}(\sqrt{J^T J})$  where  $J$  is the Jacobian matrix whose elements  $\frac{\partial d}{\partial m}$  are derived from an initial conductivity estimate. In (3)  $m$  is therefore the desired tomographic reconstruction of the region  $\Omega$ .

## B. IMPETOM Structure

IMPETOM, described in [1] includes: Waveform synthesis, Current source, Differential amplifier, Synchronous voltmeter, Multiplexers and Control block. IMPETOM [3], [5] uses a single ring of 16 electrodes, which applies a sinusoidal, 50 kHz-5 mA current injected in two adjacent electrodes. Voltage is measured on all other pairs of adjacent electrodes, obtaining 13 measurements. This pattern is repeated for every pair of electrodes, thus  $13 \times 16 = 208$  voltages measurements are obtained. This vector is called a *frame* and contains the information used for reconstruction. Only one current source is multiplexed but 16 separated measurement channels work in parallel.

## C. EIT Reconstruction Implementations

To obtain tomographic reconstruction, we consider three different implementations: the original IMPETOM [4], GREIT and NOSER regularisation, both obtained using the EIDORS package [12] which is an open source software suite for image reconstruction in EIT with several algorithms to solve both forward and inverse problems. IMPETOM original reconstruction software uses the Newton-Raphson method, with finite elements.

## D. Experimental Data

The original data was obtained using IMPETOM circuitry [5] and was tested with both IMPETOM system and EIDORS [13]. This comparison is important for prototype development and deciding the best algorithm to adopt.

1) *Cylindrical tank phantom:* For development purposes an original phantom was built. It consists of a cylindrical tank 21 cm in diameter, filled with saline water. Inside the tank an empty 8 cm diameter plastic bottle was initially moved along the diameter of the tank, and subsequently around its boundary.

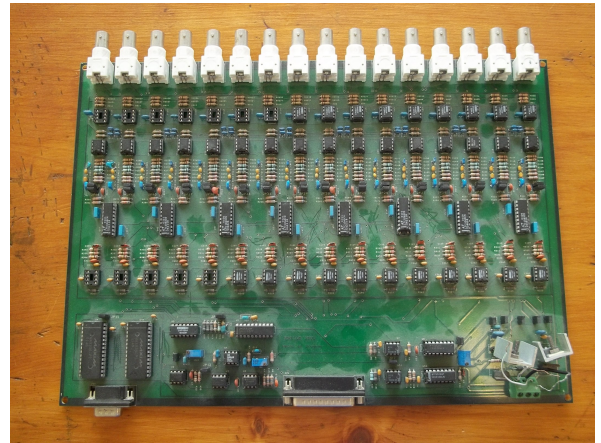


Fig. 3: IMPETOM circuit board as described by [3]. Upper coaxial connectors are used for the 16 skin electrodes. 16 voltmeters and one current source (lower left area) are visible. A DB25 connector (bottom centre) is used to connect to the A/D converter.

2) *Healthy volunteer*: A healthy eight-years-old son one of the authors [5] was harnessed with the 16 electrode IMPETOM to obtain tomographic images of his chest.

3) *Acquisition parameters*: A/D converter of IMPETOM allowed to acquire images at a rate of 15 *frames/sec*. The experiment with the phantom included 300 frames and 400 were acquired when the volunteer was imaged.

4) *GREIT reconstruction algorithm*: One of the reconstruction algorithms we tested is GREIT, an open source, consensus linear reconstruction algorithm for lung EIT [14]. The specifications of GREIT are: (i) Single ring electrode configurations with adjacent current injection and measurement. (ii) Linear reconstruction of a 2D conductivity difference image, based on a 3D forward model. (iii) Reconstruction into a  $32 \times 32$  pixel array for a single ring of 16, 12 or 8 electrodes. (iv) predefined shapes of: a) neonatal chest, b) male and female adult chest, and c) cylindrical tank. GREIT is useful because it includes performance figures of merit for EIT images reconstructions. Consensus figures of merit, in order of importance, are: (i) uniform amplitude response, (ii) small and uniform position error, (iii) small ringing artefacts, (iv) uniform resolution, (v) limited shape deformation, and (vi) high resolution.

5) *Reconstruction parameters*: Standard IMPETOM parameters were used: 492 elements, 2D circular mesh.

NOSER regularisation parameter was set by trial and error to 0.07 for phantom imaging (Figures 2g, 2h) and to 1.0 for the healthy volunteer (Figure 2i). For the cylindrical phantom 256 elements-2D circular mesh was used. A thorax shaped mesh was selected to image the volunteer.

The GREIT algorithm was trained with a uniform distribution of points for the chest and a heavy-centred distribution of points [14] for the phantom.

The initial image for the cylindrical tank is a uniform circle which gives a *frame* of simulated measurements with the forward solution. This frame is subtracted from the real measure *frame*. The difference was then used to feed the inverse problem in order to obtain tomographic section (Figure 2). This method is always used by IMPETOM. By contrast with NOSER and GREIT we use a different approach for the volunteer, which consist of using the mean of 400 real measurements as the initial *frame*. The difference between the mean *frame* and the real *frame* is fed to the inverse problem algorithm yielding the tomographic image.

### III. RESULTS

The result of the comparison is shown in Figure 2. Considering that our goal was to develop a prototype for quantitative air/fluid chest distribution [1] and not an anatomically accurate image the results are promising. IMPETOM Figures 2d, 2e, 2f were not as good as GREIT, Figures 2j, 2k, 2l but where than NOSER, Figures 2g, 2h, except for the lung reconstruction in Figure 2i. With standard desktop computing power all three methods create images in less than a second.

The GREIT algorithm included 3D mesh to account for current leakages to adjacent planes, which is factor of quality.

There are two factors that enabled us to obtain better results for chest reconstruction (Figures 2i, 2l) with respect to the original IMPETOM reconstruction (Figure 2f): a chest shaped model and starting with the mean of 400 frames to feed the inverse problem solver.

A quantitative comparison between different methods would be desirable, and with the available data is possible to implement it in future works.

### IV. CONCLUSIONS

Both the IMPETOM hardware and software must be improved using open source tools and anatomically adjusted 3D models. By doing so we expecto to improve our tool to clinically quantify lung water over time.

### V. ACKNOWLEDGMENTS

Part of the development of these research was possible thank to Roberto Markarian and Pablo Musé who both showed interest and made useful suggestions during their course on Real and Functional Analysis. Editorial assistance by Bruno Simini is thankfully acknowledged by the authors.

### REFERENCES

- [1] E. Santos and F. Simini, Electrical Impedance Tomography for pulmonary oedema extent monitoring: review and updated design, *J. Phys.: Conf. Ser.*, vol. 407, 2012, online at <http://iopscience.iop.org/1742-6596/407/1/012024>.
- [2] D. C. Barber and B. H. Brown, Applied potential tomography, *J. Phys. E. Sci. Instrum.*, vol. 17, 1984, pp 723-733.
- [3] A. Ferreira and A. Rodríguez and F. Simini, IMPETOM-C Tomógrafo de Impedancia Eléctrica. Academic thesis, *Universidad de la República, Montevideo*, 2002.
- [4] R. Hartman and J. Lobo and M. Ruétalo and F. Simini, IMPETOM-I Tomógrafo de Impedancia Eléctrica. Academic thesis, *Universidad de la República, Montevideo*, 2002.
- [5] S. González and A. Liguori and F. Simini, IMPETOM. Academic thesis, *Universidad de la República, Montevideo*, 2005.
- [6] W. Quinteros and F. Simini, IMPETOM-48 Tomógrafo de Impedancia Eléctrica con tres hileras de electrodos. Academic thesis, *Universidad de la República, Montevideo*, 2007
- [7] A. Adler, R. Gaburro and W. Lionheart, Electrical Impedance Tomography, in *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Otmir Scherzer, editor, Springer, New York, NY, 2011.
- [8] G. Saulnier, EIT Instrumentation, in *Electric Impedance Tomography: Methods, History and Applications*, David Holder, editor, IOP Publishing, London, England, 2004.
- [9] W. Lionheart, N. Polydorides and A. Borsic, The Reconstruction Problem, in *Electric Impedance Tomography: Methods, History and Applications*, David Holder, editor, IOP Publishing, England, 2004.
- [10] A. Borsic, Regularisation Methods for Imaging from Electrical Measurements, *Oxford Brookes University*, Oxford, UK, 2002, online at <http://www.maths.manchester.ac.uk/bl/theses/intro.html>
- [11] J. Chung, S. Knepper and J. G. Nagy, Large-Scale Inverse Problems in Imaging, in *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Otmir Scherzer, editor, Springer, New York, NY, 2011.
- [12] A. Adler and W. Lionheart, Uses and abuses of EIDORS: An extensible software base for EIT *Internet draft*, 2006, online at <http://www.sce.carleton.ca/faculty/adler/publications/2005/adler-lionheart-2005-EIDORS.pdf>.
- [13] EIDORS: Electrical Impedance Tomography and Diffuse Optical Tomography Reconstruction Software (Version 3.5), *Software*, online at <http://eidors3d.sourceforge.net/>.
- [14] A. Adler et al., GREIT: a unified approach to 2D linear EIT reconstruction of lung images, *Phys. Meas.*, vol. 30(6), 2009, pp S35-55.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Apéndice K

## Publicación en IEEE Transactions on Medical Imaging

Título: **Electrical Impedance Tomography with IMPETOM system:  
an application from bench to bedside**

Autores: **Eduardo Santos, Franco Simini y Javier Hurtado**

**Presentado en febrero de 2014**

No se incluye el texto para respetar el embargo de la publicación.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.



# Referencias

- [1] Timbó. [www.timbo.org.uy](http://www.timbo.org.uy), 2013.
- [2] R A Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press, New York, NY, 1975.
- [3] A Adler, J H Arnold, R Bayford, A Borsic, B Brown, P Dixon, T J C Faes, I Frerichs, H Gagnon, Y Gärber, B Grychtol, G Hahn, W R B Lionheart, A Malik, R P Patterson, J Stocks, A Tizzard, N Weiler, and G K Wolf. GREIT: a unified approach to 2D linear EIT reconstruction of lung images. *Physiological measurement*, 30(6):S35–55, June 2009.
- [4] A Adler, R Gaburro, and W R B Lionheart. Electrical impedance tomography. In O Scherzer, editor, *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. Springer, New York, NY, 2011.
- [5] A Adler and R Guardo. Electrical Impedance Tomography : Regularized Imaging and Contrast Detection. *IEEE transactions on medical imaging*, 15(2):170–179, 1996.
- [6] A Adler and W R B Lionheart. Uses and abuses of EIDORS: an extensible software base for EIT. *Physiological measurement*, 27(5):S25–42, May 2006.
- [7] Analog Devices. A Technical Tutorial on Digital Signal Synthesis, 1999.
- [8] G Aubert and P Kornprobst. *Mathematical Problems in Image Processing Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*. Springer, New York, second edition, 2006.
- [9] N J Avis and D C Barber. Adjacent Or Polar Drive ? : Image Reconstruction Implications in Electrical Impedance Tomography Systems Employing Filtered Back Projection. *Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 1689–1690, 1992.
- [10] I Babuska, R Tempone, and G E Zouraris. Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(2):800–825, 2004.
- [11] D C Barber, B H Brown, and I L Freeston. Imaging Spatial Distributions of Resistivity Using Applied Potential Tomography APT. In *Information Processing in Medical Imaging*, pages 446–462. Springer, 1984.

## Referencias

- [12] T K Bera and J Nagaraju. A Simple instrumentation calibration technique for Electrical Impedance Tomography (EIT) using a 16-electrode phantom. *2009 IEEE International Conference on Automation Science and Engineering*, pages 347–352, August 2009.
- [13] P Bertemes-Filho, B H Brown, and A J Wilson. A comparison of modified Howland circuits as current generators with current mirror type circuits. *Physiological measurement*, 21(1):1–6, 2000.
- [14] P Bertemes-Filho, L H Negri, A Felipe, and V C Vincence. Mirrored Modified Howland Circuit for Bioimpedance Applications: Analytical Analysis. *Journal of Physics: Conference Series*, 407:012030, December 2012.
- [15] K Boone, D C Barber, and B H Brown. Imaging with electricity: Report of the European Concerted Action on Impedance Tomography. *Journal of Medical Engineering & Technology*, 21(6):201–232, 1997.
- [16] A Borsic. *Regularisation Methods for Imaging from Electrical Measurements*. Doctoral thesis, Oxford Brookes University, 2002.
- [17] A Borsic, B Graham, A Adler, and W R B Lionheart. Total variation regularization in electrical impedance tomography. Technical Report 2007.92, The University of Manchester, Manchester, UK, Jun 2007.
- [18] A Borsic, B M Graham, A Adler, and W R B Lionheart. Total Variation Regularization in Electrical Impedance Tomography Total Variation Regularization in Electrical Impedance Tomography. (June), 2007.
- [19] W R Breckon. *Image reconstruction in electrical impedance tomography*. Doctoral thesis, Oxford Polytechnic, 1990.
- [20] W R Breckon and M K Pidcock. Mathematical aspects of impedance imaging. *Clinical physics and physiological measurement : an official journal of the Hospital Physicists' Association, Deutsche Gesellschaft für Medizinische Physik and the European Federation of Organisations for Medical Physics*, 8 Suppl A:77–84, January 1987.
- [21] B H Brown, D C Barber, A D Leathard, L Lu, W Wang, R H Smallwood, and A J Wilson. High frequency EIT data collection and parametric imaging. *Innovation et technologie en biologie et médecine*, 15:1–8, 1994.
- [22] B H Brown, D C Barber, and A D Seagar. Applied potential tomography: possible clinical applications. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, 6(2):109–21, May 1985.
- [23] B H Brown, A M Sinton, D C Barber, A D Leathard, and F J McArdle. Simultaneous display of lung ventilation and perfusion on a real-time EIT system. *IEEE-EMBS*, 14:1710–1711, 1992.
- [24] D Buchanan. Choosing DACs for Direct Digital Synthesis. *Analog Devices*.

- [25] S M Buckley. Sobolev spaces: A short course. Lecture Notes on Sobolev Spaces, University of La Laguna, 2000.
- [26] Burr-Brown. INA 114. Datasheet.
- [27] A P Calderon. On an inverse boundary problem. In *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, pages 65–73, Río de Janeiro, 1980.
- [28] E Calzia, G Hahn, and G Hellige. Electrical impedance tomography: looking behind the secrets of regional lung function. *Intensive care medicine*, 31(11):1474–5, November 2005.
- [29] A Chambolle. An Algorithm for Total Variation Minimization and Applications. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, (20):89–97, 2004.
- [30] D Chen, W Yang, and M Pan. Design of Impedance Measuring Circuits Based on Phase-Sensitive Demodulation Technique. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 60(4):1276–1282, 2011.
- [31] M Cheney, D Isaacson, J C Newell, S Simske, and J Goble. NOSER: An algorithm for solving the inverse conductivity problem. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 2(2):66–75, 1990.
- [32] V A Cherepenin, Gulyaev Y V, A V Korjenevsky, S A Sapetsky, and T S Tuykin. An electrical impedance tomography system for gynecological application GIT with a tiny electrode array. *Physiological measurement*, 33(5):849–62, May 2012.
- [33] J Chung, S Knepper, and J G Nagy. Large-scale inverse problems in imaging. In O Scherzer, editor, *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*. Springer, New York, NY, 2011.
- [34] L Constantinou, A Demosthenous, P Langlois, R Bayford, and I Triantis. An improved CMOS current driver for electrical impedance tomography. *2011 20th European Conference on Circuit Theory and Design (ECCTD)*, pages 290–293, August 2011.
- [35] R D Cook, G J Saulnier, D G Gisser, J C Goble, J C Newell, and D Isaacson. ACT3: a high-speed, high-precision electrical impedance tomograph. *IEEE transactions on bio-medical engineering*, 41(8):713–22, August 1994.
- [36] E L V Costa, J B Borges, A Melo, F Suarez-Sipmann, C Toufen, S H Bohm, and M B P Amato. Bedside estimation of recruitable alveolar collapse and hyperdistension by electrical impedance tomography. *Intensive care medicine*, 35(6):1132–7, June 2009.
- [37] S Crotti, D Mascheroni, P Caironi, P Pelosi, G Ronzoni, M Mondino, J J Marini, and L Gattinoni. Recruitment and Derecruitment during Acute. *American journal of respiratory and critical care medicine*, 164:131–140, 2001.

## Referencias

- [38] F J Dickin and M Wang. Electrical resistance tomography for process applications. *Measurement Science and Technology*, 7(3):247–260, March 1996.
- [39] Dixtal Biomédica. DX 1800 Operators Manual, 2009.
- [40] Eidors: Electrical impedance tomography and diffuse optical tomography reconstruction software (version 3.5). <http://eidors3d.sourceforge.net/>.
- [41] L C Evans. Partial differential equations. Graduate studies in mathematics. *American Mathematical Society*, 2, 1998.
- [42] L Fabrizi, A McEwan, T Oh, E J Woo, and D S Holder. A comparison of two EIT systems suitable for imaging impedance changes in epilepsy. *Physiological measurement*, 30(6):S103–20, June 2009.
- [43] A Ferreira, A Rodríguez, and F Simini. *IMPETOM-C Tomógrafo de Impedancia Eléctrica. Academic thesis*. Universidad de la República, Montevideo, 2002.
- [44] G B Folland. *Introduction to Partial Differential Equations*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [45] A Friedman and M Vogelius. Determining cracks by boundary measurements. *Indiana University Mathematics Journal*, 38(1):527–556, 1989.
- [46] C Frugoni, R Escuder, L Artia, F Simini, and F Nieto. *IMPEMAT - Medidor de impedancia corporal. Academic Thesis*. Academic thesis, Universidad de la República, Montevideo, 1995.
- [47] P O Gaggero, A Adler, J Brunner, and P Seitz. Electrical impedance tomography system based on active electrodes. *Physiological measurement*, 33(5):831–47, May 2012.
- [48] L Gattinoni, A Pesenti, M Bombino, S Baglioni, M Rivolta, F Rossi, G Rossi, R Fumagalli, R Marcolin, and D Mascheroni. Relationships between lung computed tomographic density, gas exchange, and PEEP in acute respiratory failure. *Anesthesiology*, 69(1):824–832, 1988.
- [49] D G Gisser, D Isaacson, and J C Newell. Current topics in impedance imaging. *Clinical physics and physiological measurement : an official journal of the Hospital Physicists' Association, Deutsche Gesellschaft für Medizinische Physik and the European Federation of Organisations for Medical Physics*, 8 Suppl A:39–46, January 1987.
- [50] D G Gisser, D Isaacson, and J C Newell. Theory and performance of an adaptive current tomography system. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, 9:34–41, 1988.
- [51] J C Globe. *The three-dimensional inverse problem in electric current computed tomography*. Doctoral thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, 1990.

- [52] M Goharian, M Soleimani, A Jegatheesan, K Chin, and G R Moran. A DSP based multi-frequency 3D electrical impedance tomography system. *Annals of biomedical engineering*, 36(9):1594–603, September 2008.
- [53] C Gómez-Leberge and A Adler. Direct calculation of the electrode movement Jacobian for 3D EIT. In *13th International Conference on Electrical Bioimpedance and the 8th Conference on Electrical Impedance Tomography*, pages 364–367, 2007.
- [54] S González, A Liguori, and F Simini. *IMPETOM. Academic thesis*. Universidad de la República, Montevideo, 2005.
- [55] H Griffiths. Magnetic induction tomography. *Measurement Science and Technology*, 12(1):1126–1131, 2001.
- [56] R J Halter, A Hartov, and K D Paulsen. A broadband high-frequency electrical impedance tomography system for breast imaging. *IEEE transactions on bio-medical engineering*, 55(2 Pt 1):650–9, February 2008.
- [57] S a Hamidi, R Jafari, A M Nia, and M Soleimani. Design and implementation of a DSP-based digital phase sensitive demodulation for an EIT system. *Journal of Physics: Conference Series*, 224:012147, April 2010.
- [58] N D Harris, A J Suggett, D C Barber, and B H Brown. Applications of applied potential tomography (APT) in respiratory medicine. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, 8(A):155–165, 1987.
- [59] N O Harris, B H Brown, and D C Barber. Continuous Monitoring of Lung Ventilation with Electrical Impedance Tomography. *Proceedings of the Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, pages 1754–1755, 1992.
- [60] R Hartman, J Lobo, M Ruétalo, and F Simini. *IMPETOM-I Tomógrafo de Impedancia Eléctrica. Academic thesis*. Universidad de la República, Montevideo, 2002.
- [61] W He, K Ju, B Li, Z Xu, and C He. A multi-channel electrical impedance measurement system using DSP. *2010 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics, (Bmei)*:28–31, October 2010.
- [62] G T Herman. *Fundamentals of computerized tomography: image reconstruction from projections*. Springer, 2009.
- [63] J Hinz. Regional Ventilation by Electrical Impedance Tomography \*. *CHEST Journal*, 124(1):314, July 2003.
- [64] D S Holder. Electrical impedance tomography (EIT) of brain function. *Brain topography*, 5(2):87–93, January 1992.
- [65] N Holliday, R A Williams, and G Lucas. A high-performance EIT system. *IEEE Sensors Journal*, 5(2):289–299, April 2005.

## Referencias

- [66] H Hong, M Rahal, A Demosthenous, and R H Bayford. Floating voltage-controlled current sources for electrical impedance tomography. *2007 18th European Conference on Circuit Theory and Design*, (1):208–211, August 2007.
- [67] V Isakov. Uniqueness and stability in multi-dimensional inverse problems. *Inverse Problems*, 9(6):579–621, December 1993.
- [68] C R Johnson. Computational and numerical methods for bioelectric field problems. *Critical reviews in biomedical engineering*, 25(1):1–81, January 1997.
- [69] Jari K and Erkki S. *Statistical and Computational Inverse Problems*, volume 160 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York, NY, 2005.
- [70] N Kerrouche, C N McLeod, and W R B Lionheart. Time series of EIT chest images using singular value decomposition and Fourier transform. *Physiological measurement*, 22(1):147–157, 2001.
- [71] S Khan, A Borsic, P Manwaring, A Hartov, and R Halter. FPGA Based High Speed Data Acquisition System for Electrical Impedance Tomography. *Journal of Physics: Conference Series*, 434:012081, April 2013.
- [72] A Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems*. Springer, New York, second edition, 2011.
- [73] R Kohn and M Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 37(3):289–298, 1984.
- [74] V P Kolehmainen. *Novel Approaches to Image Reconstruction in Diffusion Tomography*. Doctoral thesis, Kuopio University, 2001.
- [75] P W A Kunst. Electrical Impedance Tomography in the Assessment of Extravascular Lung Water in Noncardiogenic Acute Respiratory Failure\*. *Chest*, 116(6):1695–1702, December 1999.
- [76] W C Lawrence Denyer. *Electronics for real-time and three-dimensional Electrical Impedance Tomographs*. Doctoral thesis, Oxford Brookes University, 1996.
- [77] S Leonhardt and B Lachmann. Electrical impedance tomography: the holy grail of ventilation and perfusion monitoring? *Intensive care medicine*, 38(12):1917–29, December 2012.
- [78] Z Li, Z Xu, C Ren, W Wang, D Zhao, and H Zhang. Study of Voltage Control Current Source in Electrical Impedance Tomography System. *2010 4th International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering (iCBBE)*, pages 2–5, 2010.

- [79] W R B Lionheart. Boundary shape and electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 14:139–147, 1998.
- [80] W R B Lionheart. EIT Reconstruction Algorithms: Pitfalls, Challenges and Recent Developments. *Physiological measurement*, 25(1):125–142, 2004.
- [81] W R B Lionheart, N Polydorides, and A Borsic. *Electric Impedance Tomography: Methods, History and Applications*. IOP Publishing, London, England, 2004.
- [82] W R B Lionheart, N Polydorides, and A Borsic. The Reconstruction Problem. In *Electric Impedance Tomography: Methods, History and Applications*. IOP Publishing, London, England, 2004.
- [83] M H Loke. Electrical imaging surveys for environmental and engineering studies. 2000.
- [84] Roger G M. Hst.542j/2.792j/be.371j/6.022j quantitative physiology: Organ transport systems. *Lecture notes from HST/MIT Open Courseware, available at <http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Health-Sciences-and-Technology/HST-542JSpring-2004/CourseHome/>*.
- [85] R Mann, F J Dickin, M Wang, T Dyakowski, R A Williamqg, R B Edwards, A E Forrest, and P J Holden. Application of electrical resistance tomography to interrogate mixing processes at plant scale. *Chemical Engineering Science*, 52(13):2087–2097, 1997.
- [86] Medical Drager. EIT Evaluation Kit, 2005.
- [87] F Mémoli. Receptor de Correlación. Notas del curso Sistemas de Comunicación. Online en [http://iie.fing.edu.uy/ense/assign/siscom/teorico/recept\\_correlacion\\_2.0.pdf](http://iie.fing.edu.uy/ense/assign/siscom/teorico/recept_correlacion_2.0.pdf), 2002.
- [88] V A Morozov. *Methods for solving incorrectly pose problems*. Springer-Verlag, New York, 1984.
- [89] T Murai and Y Kagawa. Electrical impedance computed tomography based on a finite element model. *IEEE transactions on bio-medical engineering*, 32(3):177–84, March 1985.
- [90] J C Newell, D G Gisser, and D Isaacson. An electric current tomograph. *IEEE transactions on bio-medical engineering*, 35(10):828–33, October 1988.
- [91] J C Newell, D Isaacson, M Cheney, G J Saulnier, D G Gisser, J Goble, R D Cook, and P M Edic. Impedance Images of the Chest. *Engineering in Medicine and Biology Society*, 5:1752–1753, 1992.
- [92] T I Oh, H Wi, P J Yoo, E J Woo, and D Y Kim. A fully parallel multi-frequency EIT system with flexible electrode configuration: KHU Mark2. *Physiological measurement*, 32(7):835, 2011.

## Referencias

- [93] W H Olson. Electrical Safety. In John G. Webster, editor, *Medical Instrumentation Application and Design*, pages 638–676. Wiley, Hoboken, NJ, fourth edition, 2010.
- [94] R D Pascual-Marqui, C M Michel, and D Lehmann. Low resolution electromagnetic tomography: a new method for localizing electrical activity in the brain. *International journal of psychophysiology : official journal of the International Organization of Psychophysiology*, 18(1):49–65, October 1994.
- [95] P Pelosi, M Goldner, A Mckibben, A Adams, G Eccher, P Caironi, S Losappio, L Gattinoni, and J J Marini. Recruitment and Derecruitment During Acute An Experimental Study. *American journal of respiratory and critical care medicine*, 164:122–130, 2001.
- [96] M K Pidcock, M Kuzuoglu, and K Leblebicioglu. Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography: I. Two-dimensional problems. *Physiological measurement*, 16(2):77–90, May 1995.
- [97] M K Pidcock, M Kuzuoglu, and K Leblebicioglu. Analytic and semi-analytic solutions in electrical impedance tomography. II. Three-dimensional problems. *Physiological measurement*, 16(2):91–110, 1995.
- [98] N Polydorides. *Image Reconstruction Algorithms For Soft-Field Tomography*. Doctoral thesis, University of Manchester, 2002.
- [99] W Quinteros and F Simini. *IMPETOM-48 Tomógrafo de Impedancia Eléctrica con tres hileras de electrodos*. Academic thesis, Universidad de la República, Montevideo, 2007.
- [100] T Radil, P M Ramos, and A C Serra. Impedance Measurement With Sine-Fitting Algorithms Implemented in a DSP Portable Device. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, 57(1):197–204, 2008.
- [101] P Rahmati, M Soleimani, S Pulletz, I Frerichs, and A Adler. Level-set-based reconstruction algorithm for EIT lung images: first clinical results. *Physiological measurement*, 33(5):739–50, May 2012.
- [102] J Riera, P J Riu, P Casan, and J R Masclans. Electrical impedance tomography in acute lung injury. *Medicina intensiva / Sociedad Española de Medicina Intensiva y Unidades Coronarias*, 35(8):509–17, November 2011.
- [103] A S Ross and G J Saulnier. High Output Impedance Current Source. United States Patent, 2006.
- [104] A Samouëlian, I Cousin, A Tabbagh, A Bruand, and G Richard. Electrical resistivity survey in soil science: a review. *Soil and Tillage Research*, 83(2):173–193, September 2005.
- [105] G J Saulnier. EIT instrumentation. In D S Holder, editor, *Electric Impedance Tomography: Methods, History and Applications*, chapter 2, page 65. IOP Publishing, London, England, 2005.



- [106] F Simini. Seguridad del Paciente. In F Simini, editor, *Ingeniería Biomédica, perspectivas desde el Uruguay*, chapter 2. Universidad de la República Oriental del Uruguay, Montevideo, 2007.
- [107] R W Smith, B H Brown, and I L Freeston. Real-time electrical impedance tomography. In *Proceedings of a meeting on electrical impedance tomography*, pages 212–216, Copenhagen, 1990.
- [108] R W Smith, I L Freeston, and B H Brown. A real-time electrical impedance tomography system for clinical use—design and preliminary results. *IEEE transactions on bio-medical engineering*, 42(2):133–40, February 1995.
- [109] M Soleimani. Electrical impedance tomography system: an open access circuit design. *Biomedical engineering online*, 5:28, January 2006.
- [110] E Somersalo, M Cheney, and D Isaacson. Existence and Uniqueness for Electrode Models for Electric Current Computed Tomography. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(4):1023–1040, 1992.
- [111] Spectrum Digital. *TMS320C6713 DSK Technical Reference*, 2003.
- [112] Spectrum Digital. *TMS320C6713B Datasheet*, 2012.
- [113] G Teschl. Topics in real and functional analysis. online at <http://www.mat.univie.ac.at/gerald/>, mar 2011.
- [114] E Teschner and M Imhoff. Tomografia por Impedância Elétrica: A realização da monitorização regional. Dräger Medical, 2013.
- [115] G Uhlmann and J Sylvester. A Global Uniqueness Theorem for an Inverse Boundary Value Problem. *Annals of Mathematics*, 125(1):153–169, 1987.
- [116] M Vauhkonen. *Electrical impedance tomography and prior information*. Doctoral thesis, Kuopio University, 1997.
- [117] J Victorino, J B Borges, V N Okamoto, G F J Matos, M R Tucci, M P R Caraméz, H Tanaka, F S Sipmann, D C B Santos, C S V Barbas, C R R Carvalho, and M B P Amato. Imbalances in regional lung ventilation: a validation study on electrical impedance tomography. *American journal of respiratory and critical care medicine*, 169(7):791–800, April 2004.
- [118] C Wang, J Liu, and H Wang. Pipeline Data Acquisition Method in the EIT System. *2005 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings*, 1(May):437–440, 2005.
- [119] A J Wilson, P Milnes, A R Waterworth, R H Smallwood, and B H Brown. Mk3.5: a modular, multi-frequency successor to the Mk3a EIS/EIT system. *Physiological measurement*, 22(1):49–54, February 2001.

## Referencias

- [120] J Grasiela B Wolff, H D Farias, A Ramos, and A F L Nogueira. Analysis and Imaging in Magnetic Induction Tomography using the Impedance Method. *Journal of Physics: Conference Series*, 407:012022, December 2012.
- [121] G Xu, R Wang, S Zhang, S Yang, J Gusphyl, M Sun, and W Yan. A 128-electrode three dimensional electrical impedance tomography system. *Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Conference*, 2007:4386–9, January 2007.
- [122] G Xu, S Zhang, H Wu, S Yang, D Geng, W Yan, and M Wang. The acquisition hardware system with direct digital synthesis and filtered back-projection imaging in electrical impedance tomography. *Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Conference*, 7:7758–61, January 2005.
- [123] S Xu, M Dai, C Xu, C Chen, M Tang, S Xuetao, and D Xiuzhen. Performance evaluation of five types of Ag/AgCl bio-electrodes for cerebral electrical impedance tomography. *Annals of biomedical engineering*, 39(7):2059–67, July 2011.
- [124] S Xuetao, Y Fusheng, F Feng, L Ruigang, and D Xiuzhen. High precision Multifrequency Electrical Impedance Tomography System and Preliminary imaging results on saline tank. *Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Conference*, 2:1492–5, January 2005.
- [125] S Xuetao, Y Fusheng, J Zhenyu, F Feng, L Ruigang, and D Xiuzhen. Digital Demodulation in Data Acquisition System for Multi-Frequency Electrical Impedance Tomography. *2010 4th International Conference on Bioinformatics and Biomedical Engineering*, pages 1–3, June 2010.
- [126] S Xuetao, S Wangjun, Y Fusheng, F Feng, L Ruigang, and D Xiuzhen. Quasi-polar drive pattern for brain electrical impedance tomography. *Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Conference*, 3:2648–51, January 2005.
- [127] W Q Yang. Hardware design of electrical capacitance tomography systems. *Measurement Science and Technology*, 7(1):225–232, 1996.
- [128] W Q Yang and L Peng. Image reconstruction algorithms for electrical capacitance tomography. *Measurement Science and Technology*, 14(1):R1–R13, January 2003.
- [129] W Q Yang, D M Spink, T A York, and H McCann. An image reconstruction algorithm based on Landweber’s iteration method for electrical capacitance tomography. *Measurement Science and Technology*, 10:1065–1069, 1999.

- [130] T J Yorkey and J G Webster. A comparison of impedance tomographic reconstruction algorithms. *Clinical Physics and Physiological Measurement*, 8:55–62, 1987.
- [131] A Zarafshani, N Huber, N Béqo, B Tunstall, G Sze, C Chatwin, and W Wang. A flexible low-cost, high-precision, single interface electrical impedance tomography system for breast cancer detection using FPGA. *Journal of Physics: Conference Series*, 224:012169, April 2010.
- [132] Y Zeng, L Xu, and Z Cao. FPGA-based implementation of Prony Demodulation in the Multi-frequency EIT System. *2011 IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference (I2MTC)*, pages 1–5, 2011.
- [133] X Zhang, S Chen, H Wang, and Y Zhang. FPGA-based multi-frequency excitation and modulation technology in EIT system. *2010 3rd International Conference on Biomedical Engineering and Informatics*, (Bmei):907–911, October 2010.
- [134] D Zhao. High output-impedance current source for electrical impedance tomography. *2011 4th International Conference on Biomedical Engineering and Informatics (BMEI)*, 2:1106–1109, October 2011.
- [135] D Zhao, C Ren, H Sha, Z Li, and W Wang. A FPGA-based sweep-frequency voltage source for EIT system. *2010 International Conference on Electronics and Information Engineering*, 2(Iceie):V2–264–V2–267, August 2010.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Índice de tablas

1.1. Valores típicos para la resistividad de los tejidos humanos ( $20kHz$ - $100kHz$ ). Tomado del resumen sobre la técnica de EIT publicada por Boone, Barber y Brown en 1997 [15]. . . . .	3
4.1. Características comparadas de circuitos para Tomografía de Impedancia Eléctrica.. . . .	52
5.1. Estimación de costos de componentes notables para opción de hardware mediante componentes discretos sin procesamiento digital. . .	57
5.2. Estimación de costos de componentes notables para opción de hardware mediante componentes tarjetas de evaluación. . . . .	61
5.3. Estimación de costos de componentes notables para opción de hardware mediante componentes discretos con procesamiento digital. . .	62
5.4. Ventajas y desventajas de las opciones analizadas . . . . .	63

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Índice de figuras

1.1.	Sistema de recolección de datos para tomografía por impedancia eléctrica. . . . .	2
1.2.	Tomografía por impedancia eléctrica para monitoreo de funciones pulmonares. . . . .	3
1.3.	Colocación de electrodos en el tórax para Tomografía por impedancia eléctrica. Tomado de publicación sobre EIT de Draeger Medical [114]. . . . .	5
1.4.	Cinto para colocación de electrodos en el tórax desarrollado en el proyecto IMPETOM C [43]. . . . .	5
1.5.	Sistema de EIT IMPETOM 48, utiliza 3 hileras de 16 electrodos para medir las corrientes que se escapan del plano de inyección. Arriba se muestra el gabinete conteniendo los canales de medida e inyección. Abajo el fantoma construido para las pruebas. . . . .	8
2.1.	Contribución de la impedancia dependiendo de la distancia al plano donde se colocan los electrodos. Tomado de publicación publicitaria realizada por Draeger [114]. . . . .	15
2.2.	Diferentes configuraciones de electrodos para un sistema de EIT para seguimiento de funciones pulmonares . . . . .	17
2.3.	Método de electrodos adyacentes, rotación de los electrodos de inyección de corrientes, dando toda la vuelta al tórax para obtener las medidas. . . . .	18
3.1.	Estructura de bloques de un sistema de EIT básico con inyección de corriente diferencial. Cuenta con 16 electrodos fijados en la superficie del tórax. . . . .	21
3.2.	Esquema de funcionamiento para la generación de onda sinusoidal de un DDS (sintetizador digital directo). . . . .	23
3.3.	Densidad espectral del ruido en un DAC en función de la frecuencia de muestreo y los bits de resolución para un valor de $A = 2$ . . . . .	25
3.4.	Fuentes de corriente flotantes y referenciadas a tierra . . . . .	26
3.5.	Fuentes de corriente flotantes y referenciadas a tierra tomando en cuenta las no idealidades en la impedancia de salida . . . . .	27
3.6.	Impedancia de salida necesaria para lograr una resolución específica, dependiendo de la impedancia de carga. . . . .	29

## Índice de figuras

3.7. Fuente de corriente OTA. . . . .	30
3.8. Fuente de corriente OTA propuesta por Bayford y otros. Tomado de [34]. . . . .	31
3.9. Segunda fuente de corriente OTA propuesta por Bayford y otros. Tomado de [34]. . . . .	32
3.10. Fuente de corriente configuración tipo Howland. . . . .	32
3.11. Fuente de corriente configuración tipo Howland modificada. . . . .	33
3.12. Modificación propuesta por Zhao y otros. a la configuración de Howland modificada. Tomado de [78]. . . . .	34
3.13. Esquema de circuito conversor de impedancia negativo para compensación de capacidades no deseadas . . . . .	35
3.14. Esquema de circuito resonante LC para compensación de capacidades no deseadas . . . . .	35
3.15. Reducción de efecto de capacidades parásitas mediante cable apantallado. Se utiliza un seguidor para que la malla tenga la misma tensión que el conductor. . . . .	36
3.16. Amplificador operacional con ganancia de modo común. . . . .	37
3.17. Amplificador operacional con capacidades parásitas y resistencias no apareadas a la entrada. . . . .	37
3.18. Ejemplo del uso de la realimentación del modo común para la reducción de su efecto utilizado en un circuito de electrocardiograma. Tomado de la hoja de datos del integrado INA 114 [26] . . . . .	38
3.19. Demodulador digital. . . . .	39
3.20. Esquema de multiplexor con no idealidades. . . . .	41
4.1. Esquema de componentes de la circuitería de IMPETOM C. . . . .	44
4.2. fotografía de la circuitería de IMPETOM C. . . . .	45
4.3. Esquema de bloques de la circuitería de IMPETOM. . . . .	45
4.4. Esquema del equipo creado por Wang y otros. Tomado de [118]. . . . .	46
4.5. Esquema de bloques del equipo creado por Xu y otros. Tomado de [122]. . . . .	47
4.6. Esquema del equipo creado por Xu y otros en 2007. Tomado de [121]. . . . .	48
4.7. Esquema del equipo creado por Hamidi y otros. Tomado de [57]. . . . .	49
4.8. Esquema del equipo creado por Gagger y otros. [47]. . . . .	49
4.9. Esquema del equipo creado por Khan y otros. Tomado de [71]. . . . .	50
4.10. Esquema del equipo comercial creado por Dixtal. Tomado de [39]. . . . .	51
4.11. Esquema del equipo comercial creado por Draeger. Tomado de [114]. . . . .	51
5.1. Diagrama de bloques de un sistema de EIT utilizando componentes discretos. . . . .	56
5.2. Diagrama de bloques de un sistema de EIT con procesamiento digital, con la posibilidad de utilizar una tarjeta de evaluación. . . . .	59
5.3. Diagrama de bloques de la tarjeta TMS320C6713 SDK. Tomado de [111] . . . . .	60
6.1. Nuevo diseño propuesto para IMEPTOM. . . . .	68



6.2. Primera etapa para el desarrollo del nuevo diseño de IMEPTOM, utilización de la tarjeta de evaluación. . . . .	69
6.3. Segunda etapa para el desarrollo del nuevo diseño de IMEPTOM, Creación del <i>front end</i> . . . . .	70
6.4. ltima etapa para el desarrollo del nuevo diseño de IMEPTOM. Se considera la utlización de 16 canales de voltaje mediante una tarjeta de evaluación. . . . .	71
7.1. Vector corazón para una secuencia normal de despolarización ventricular. Tomado de [84] . . . . .	74
7.2. Esquema de posible resolución de problemas inversos mal condicionados . . . . .	75
11.1. Distintos caminos que unen el punto A y B. Todos tiene igual TV, . . . . .	99
13.1. Modelo con dos perturbaciones en la conductividad del que partimos para simular los datos . . . . .	113
13.2. Modelo con una perturbación en la conductividad del que partimos para simular los datos . . . . .	114
13.3. Comparación de métodos de reconstrucción. La primera fila muestra el modelo teórico que se quiere reconstruir. Las siguientes filas muestran las reconstrucciones en el siguiente orden: TSVD con un 2% de valores singularesy Tijonov Estándar. La primer columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido blanco aditivo de $12dB$ . . . . .	115
13.4. Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.3. La primera fila corresponde al método de NOSER, la segunda a Variación Total y la tercera a GREIT. Nuevamente la primer columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido aditivo de $12dB$ . . . . .	116
13.5. Comparación de métodos de reconstrucción para datos simulados. La primera fila muestra el modelo simulado que se quiere reconstruir. Las siguientes filas muestran las reconstrucciones en el siguiente orden: TSVD con un 2% de valores singularesy Tijonov Estándar. La primer columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido blanco aditivo de $12dB$ . . . . .	117
13.6. Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.5. La primera fila corresponde al método de NOSER, la segunda a Variación Total y la tercera a GREIT. Nuevamente la primer columna corresponde a las medidas sin ruido y la segunda con un ruido aditivo de $12dB$ . . . . .	118

## Índice de figuras

13.7. Comparación de métodos de reconstrucción para fantoma cilíndrico con botella, datos adquiridos con IMPETOM C. La primer fila muestra los fantasmas a reconstruir. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Tijonov estándar y Noser. La primer columna muestra es para el tanque lleno de agua salada con una botella vacía en el centro, en la segunda columna la botella está en el borde del tanque. . . . .	120
13.8. Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.7. La primer fila muestra la reconstrucción mediante el software de IMPETOM I, con el método de Gauss-Newton. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Variación Total y Greit. Nuevamente la primer columna muestra es para el tanque lleno de agua salada con una botella vacía en el centro, en la segunda columna la botella está en el borde del tanque. . . . .	121
13.9. Comparación de métodos de reconstrucción para voluntario sano, datos adquiridos con IMPETOM C. La primer fila muestra un ejemplo de Tomografía Computada del tórax. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Tijonov estándar y Noser. . . . .	123
13.10 Segunda parte de la comparación de métodos comenzada en 13.9. La primer fila muestra la reconstrucción mediante el software de IMPETOM I, con el método de Gauss-Newton. Las siguientes filas muestran la imagen reconstruida mediante Variación Total y Greit. . . . .	124
13.11 Parámetros para la comparación de métodos de reconstrucción. Tomado de [3] . . . . .	125
13.12 Comparación entre método NOSER (Verde) y GREIT (Azul) para los parámetros especificados en [3], donde AR es respuesta a la amplitud, PE es error en la posición, RES es la resolución, SD la deformación del objeto, RNG el anillado, y NF la amplificación del ruido. Estas características están graficadas según la distancia al centro de la región, comenzando a la izquierda y alejándose hacia la derecha. . . . .	126
B.1. Eliminación de ruido mediante el algoritmo de Chambolle . . . . .	142
C.1. Regularización mediante TSVD de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares . . . . .	144
C.2. Regularización mediante TSVD de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares	145
C.3. Regularización mediante TSVD de datos simulados con una perturbación, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares . . . . .	146
C.4. Regularización mediante TSVD de datos simulados con una perturbación, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente porcentaje de valores singulares	147

C.5. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TSVD, 2% de valores los singulares, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 148

C.6. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TSVD, 2% de valores los singulares, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . . 149

C.7. Recosntrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante TSVD, 2% de valores los singulares, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como refrencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas. . . . 150

D.1. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tijonov, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 152

D.2. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tijonov, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . . 153

D.3. Recosntrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante regularización de Tijonov, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como refrencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas. . . . . 154

D.4. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tijonov, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 155

D.5. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de Tijonov, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . . 156

E.1. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante NOSER, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 158

E.2. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante NOSER, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. 159

E.3. Recosntrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante NOSER, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como refrencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas. . . . . 160

E.4. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de NOSER, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 161

E.5. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante regularización de NOSER, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . . 162

F.1. Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente número de iteraciones . . . . . 164

## Índice de figuras

F.2. Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente número de iteraciones . . . .	165
F.3. Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo sin ruido en las medidas para diferente número de iteraciones . . . . .	166
F.4. Regularización mediante TV de datos simulados con dos perturbaciones, como lo visto en 13.3, reconstrucción del modelo con ruido sumado en las medidas para diferente número de iteraciones . . . .	167
F.5. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea.	168
F.6. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . .	169
F.7. Recosntrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como refrencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas. . . . .	170
F.8. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea.	171
F.9. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante TV, 5 iteraciones, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . .	172
G.1. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento dándole más peso al centro de la región, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . .	174
G.2. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . .	175
G.3. Recosntrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento dándole más peso al centro de la región, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como refrencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas. . . . .	176
G.4. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . .	177
G.5. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . .	178
G.6. Recosntrucción del fantoma descrito en 13.3 mediante GREIT, con entrenamiento uniforme en toda la región, para la botella cerca del borde y en el centro, se compara cuando se toma como refrencia una imagen homogénea y cuando se toma como referencia el promedio de las medidas. . . . .	179

G.7. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 180

G.8. Recosntrucción de la secuencia completa descrita en 13.3 mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia el valor medio de todas las medidas. . . . . 181

H.1. Recosntrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TSVD, 10% valores singulares, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 184

H.2. Recosntrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TSVD10% valores singulares, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 185

H.3. Recosntrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante regularización de Tijonov,  $\alpha = 0,1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 186

H.4. Recosntrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante regularización de Tijonov,  $\alpha = 0,1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 187

H.5. Recosntrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante NOSER,  $\alpha = 1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 188

H.6. Recosntrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante NOSER,  $\alpha = 1$ , teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 189

H.7. Recosntrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TV,  $\alpha = 1 \times 10^{-3}$ , 10 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 190

H.8. Recosntrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante TV,  $\alpha = 1 \times 10^{-3}$ , 10 iteraciones, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 191

H.9. Recosntrucción de la secuencia completa del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 192

H.10. Recosntrucción del *frame* de máxima inspiración del banco de datos *Montreal Data 1995* mediante GREIT, entrenamiento uniforme, teniendo como referencia una imagen homogénea. . . . . 193



Esta es la última página.  
Compilado el domingo 23 marzo, 2014.  
<http://iie.fing.edu.uy/>