



**UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA**

Tesis para optar al Título de
Magíster en Ingeniería Matemática

**MÉTODOS DE FUNCIÓN DE ENERGÍA
APLICADOS AL PROBLEMA DEL MARGEN DE
SEGURIDAD AL COLAPSO DE TENSIÓN EN
REDES DE POTENCIA**

Autor: MICHEL ARTENSTEIN

**Directores de Tesis: Prof. ALVARO GIUSTO
Prof. PABLO MONZÓN**

Montevideo, Uruguay
2010

ISSN 1688-2806

Michel Artenstein
Tesis de Maestría en Ingeniería Matemática
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República

Montevideo, Uruguay, 2010

PÁGINA DE APROBACIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA

El tribunal docente integrado por los abajo firmantes aprueba la Tesis de Investigación.

Título: Métodos de función de energía aplicados al problema del margen de seguridad al colapso de tensión en redes de potencia.

Autor: Michel Artenstein

Tutores: Profesor Alvaro Giusto
Profesor Pablo Monzón

Carrera: Ingeniería Matemática

Puntaje:

Tribunal:

Profesor Roberto Markarian

Profesor Alfredo Piria

Profesor Mario Vignolo

Fecha:

INDICE

INTRODUCCION	1
<u>I.1 EL PROBLEMA DEL COLAPSO DE TENSION EN LOS SISTEMAS DE POTENCIA</u>	1
<u>I.2 UN EJEMPLO INTRODUCTORIO</u>	1
<u>I.3 EL MARGEN DE SEGURIDAD AL COLAPSO DE TENSION</u>	3
<u>I.4 ESTRUCTURA DE LA TESIS</u>	6
<u>I.5 CONSIDERACIONES ADICIONALES.....</u>	6
CAPÍTULO 1-EL COLAPSO DE TENSION Y LA BIFURCACION SILLA NODO	9
<u>1.1 SISTEMAS ESTRUCTURALMENTE ESTABLES</u>	9
<u>1.2 BIFURCACIONES DE SISTEMAS DINAMICOS.....</u>	10
<u>1.3 CASO PARTICULAR:SISTEMAS LINEALES</u>	11
<u>1.4 CASO GENERAL:SISTEMAS NO LINEALES</u>	11
<u>1.5 TIPOS DE BIFURCACION</u>	12
<u>1.6 BIFURCACIONES SILLA-NODO</u>	12
<u>1.7 TEOREMA DE SOTOMAYOR</u>	13
<u>1.8 TEOREMA DE LA VARIEDAD CENTRAL.....</u>	15
<u>1.9 APLICACION AL CASO DE LA BIFURCACION SILLA-NODO</u>	16
<u>1.10 RELACION ENTRE EL COLAPSO DE TENSIONES Y LA BIFURCACION SILLA-NODO</u>	16
<u>1.11 MARGEN DE CARGA</u>	20
<u>1.12 EL COLAPSO DE TENSION MAS CERCANO.....</u>	21
CAPÍTULO 2-TEOREMAS CLASICOS DE ESTABILIDAD	24
<u>2.1 CONCEPTOS BASICOS</u>	24
<u>2.2 TEOREMA DE LIAPUNOV.....</u>	24
<u>2.3 TEOREMA DE LASALLE.....</u>	26
<u>2.4 PROPIEDADES DE LA REGION DE ATRACCION</u>	27
<u>2.5 COMPARACION SINTETICA DE LOS TRES TEOREMAS PRINCIPALES EN RELACION A LA ESTABILIDAD ASINTOTICA</u>	28
<u>2.6 APLICABILIDAD AL PROBLEMA DEL COLAPSO DE TENSION EN LOS SISTEMAS DE POTENCIA</u>	28
CAPÍTULO 3-SISTEMAS CUASIGRADIENTES Y TEORIA DE VARAIYA ...	30
<u>3.1 SISTEMAS CUASIGRADIENTES</u>	30
<u>3.2 FUNCIONES DE ENERGIA DE VARAIYA</u>	33
CAPÍTULO 4-MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA Y FUNCION DE ENERGIA	40
<u>4.1 MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA Y DEFINICION DE FUNCION DE ENERGIA</u>	40
<u>4.2 MARGEN DE ENERGIA Y SUS PROPIEDADES</u>	46
CAPÍTULO 5-PROPIEDADES DEL FLUJO DE CARGAS EN CARTESIANAS	57
<u>5.1 MODELO DEL FLUJO DE CARGAS EN CARTESIANAS</u>	57
<u>5.2 PROPIEDADES DEL FLUJO DE CARGAS EN CARTESIANAS</u>	58
CAPÍTULO 6-REGLAS PRACTICAS PARA EL CALCULO DE EQUILIBRIOS INESTABLES DEL FLUJO DE CARGAS	62
<u>6.1 HIPOTESIS COMUNES A TODOS LOS METODOS</u>	63
<u>6.2 METODO DE LAS BAJAS TENSIONES.....</u>	64
<u>6.3 METODO CARTESIANAS</u>	66
CAPÍTULO 7-RELACIONES ENTRE MARGEN DE ENERGIA Y MARGEN DE CARGA.....	71

<u>7.1 MÉTODO DE DOBSON PARA EL CÁLCULO APROXIMADO DE MÁRGENES DE REACTIVA</u>	71
<u>7.2 CÁLCULO APROXIMADO DEL COLAPSO DE TENSIÓN MÁS CERCANO</u>	74
CAPÍTULO 8-APLICACIONES	79
<u>8.1 SÍNTESIS DE LAS APLICACIONES REALIZADAS</u>	79
<u>8.2 REDES ANALIZADAS</u>	79
<u>8.3 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE CÁLCULO DE UEP</u>	80
<u>8.4 MÉTODO DE CÁLCULO DE UEP SELECCIONADO PARA LAS RESTANTES APLICACIONES</u>	82
<u>8.5 FILTRADO DE LOS UEP A CALCULAR</u>	84
<u>8.6 EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE DOBSON PARA CÁLCULO DE MÁRGENES DE REACTIVA</u>	85
<u>8.7 EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE CÁLCULO APROXIMADO DEL COLAPSO DE TENSIÓN MÁS CERCANO</u>	86
<u>8.8 APLICACIONES A LA RED URUGUAYA</u>	88
CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE TRABAJO FUTURAS	91
ANEXO 1-DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS DEL CAPÍTULO 2	94
ANEXO 2-DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS DEL CAPÍTULO 3	100
ANEXO 3-DEMOSTRACIÓN DE QUE LA FUNCIÓN DE ENERGÍA DEL SISTEMA DE POTENCIA ES DE VARAIYA	105
ANEXO 4-INCORPORACIÓN DE DISPOSITIVOS ADICIONALES AL MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA	114
ANEXO 5-DATOS DE LAS REDES ANALIZADAS	120
ANEXO 6 –RESULTADOS EN LA RED DE 16 BARRAS	125
ANEXO 7 –DESCRIPCIÓN SINTÉTICA DEL PROGRAMA DE CÁLCULO	128

LISTA DE FIGURAS

FIGURA I.1 SISTEMA RADIAL	2
FIGURA I.2 CURVA P-V DEL SISTEMA RADIAL.....	2
FIGURA I.3 VARIACIÓN DE LA TENSIÓN DURANTE EL COLAPSO.....	3
FIGURA I.4 MARGEN DE SEGURIDAD ALTERNATIVO AL MARGEN DE CARGA	4
FIGURA I.5 REGIÓN DE ATRACCIÓN DE LOS PUNTOS DE OPERACIÓN ESTABLE.....	5
FIGURA 1.1 DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN SILLA-NODO PARA EL CASO UNIDIMENSIONAL.....	13
FIGURA 1.2 SOLUCIÓN EN UN ENTORNO DE 0 PARA EL CASO UNIDIMENSIONAL, CON $X(0)=0$	13
FIGURA 1.3 SITUACIÓN DEL SISTEMA ANTES DE LA BIFURCACIÓN ...	18
FIGURA 1.4 SITUACIÓN DEL SISTEMA EN LA BIFURCACIÓN.....	18
FIGURA 1.5 DIRECCIÓN DE CARGA ASOCIADA AL COLAPSO DE TENSIÓN MÁS CERCANO	22
FIGURA 2.1 CURVAS DE NIVEL DE LA FUNCIÓN V DE LIAPUNOV	25
FIGURA 7.1 INTERPRETACIÓN DEL MARGEN DE ENERGÍA.....	73
FIGURA 7.2 CÁLCULO APROXIMADO DEL COLAPSO DE TENSIÓN MÁS CERCANO	76
FIGURA A4.1 VARIACIÓN DE LA REACTIVA GENERADA POR LA MÁQUINA EN FUNCIÓN DE LA TENSIÓN.....	115
FIGURA A4.2 VARIACIÓN DE LA REACTIVA DE UN SVC EN FUNCIÓN DE LA TENSIÓN	116
FIGURA A4.3 VARIACIÓN DE LA POTENCIA REACTIVA CON LA TENSIÓN EN PRESENCIA DE UN OLTC.....	117
FIGURA A4.4 VARIACIÓN DE LA POTENCIA REACTIVA CON LA TENSIÓN EN UN BANCO DE CONDENSADORES.....	118
FIGURA A5.1 RED DE 3 BARRAS 3-1.....	120
FIGURA A5.2 RED DE 3 BARRAS	120
FIGURA A5.3 RED DE 16 BARRAS	121
FIGURA A5.4 ESQUEMA DE LA RED URUGUAYA	123

LISTA SELECCIONADA DE NOTACIONES

Sólo se incluyen en este listado las notaciones usadas a lo largo del trabajo que se entiende podrían dar lugar a confusión en caso de no ser explícitamente definidas.

$B(x, r)$: Bola cerrada de centro x y radio r

B_r : Bola cerrada de centro 0 y radio r

$\text{int}(A)$: Interior del conjunto A

$\text{cl}(A)$: Clausura del conjunto A

$\text{diag}(a, b, \dots)$: Matriz diagonal con componentes a, b, \dots

$M^{n \times m}$: Conjunto de las matrices reales de dimensión $n \times m$

(a, b, \dots) : Vector columna de componentes a, b, \dots

$\langle a, b \rangle$: Producto interno de los vectores a y b

$F_x(x_0)$: Matriz jacobiana de $F(x)$ respecto a x , calculada en x_0

RESUMEN

En este trabajo se analiza la aplicación de métodos de función de energía al problema de definir márgenes de seguridad al colapso de tensión en sistemas de potencia.

Luego de revisar la teoría matemática del colapso de tensión y la teoría de Liapunov de estabilidad de sistemas dinámicos, se describe la aplicación de estas teorías básicas a la definición de un margen de seguridad al colapso de tensión (el *margen de energía*) para un modelo del sistema de potencia.

Se presentan algunas propiedades básicas del margen de energía, y su relación con otro margen de seguridad al colapso de tensión (el *margen de carga*) de uso habitual en la planificación y operación de los sistemas de potencia.

Dado que el cálculo efectivo del margen de energía implica conocer los equilibrios inestables de las ecuaciones de régimen del sistema (el llamado *flujo de cargas*), se hace una revisión de los principales métodos de cálculo y, en particular, de las bases teóricas en que se apoyan los métodos de cálculo de estos equilibrios cuando el flujo de cargas se formula en coordenadas cartesianas.

Se presentan, finalmente, los resultados de algunas aplicaciones de prueba del correspondiente programa de cálculo desarrollado.

Se incluyen en el trabajo algunos aportes originales puntuales a la teoría y a los métodos de cálculo. En particular: se propone una corrección puntual a la teoría básica de funciones de energía en el modelo del sistema de potencia que preserva estructuras, se analiza la invariancia del margen de energía respecto a la dinámica de las cargas, se describe la forma de incorporar algunos modelos adicionales de equipamientos de potencia al modelo general del sistema, y se proponen ligeras variantes a algunos de los métodos de cálculo clásicos.

PALABRAS CLAVE: Estabilidad de tensión, Colapso de tensión, Función de energía

ABSTRACT

In this work we analyze the application of energy function methods to the problem of defining security margins to voltage collapse in power systems.

After reviewing the mathematical theory of voltage collapse and the Liapunov's theory of stability of dynamical systems, we describe how these theories may be applied to define a security margin to voltage collapse (the *energy margin*) in a power system model.

We describe some basic properties of the energy margin, and its relationship with another security margin (the *load margin*) frequently used in power systems' planning and operation.

Taking into account that the effective calculation of the energy margin requires the previous calculation of the unstable equilibria of the system's steady state equations (the so called *load flow* equations), we review its main calculation methods and, in particular, the theoretical foundations of the methods based on the rectangular formulation of the load flow equations.

We present, finally, the main results of some test applications of the corresponding calculation software.

We include in this work some specific original contributions to the theory and the calculation methods. In particular: we propose a modification to the basic theory of energy functions of power system's structure preserving model, we analyze the invariance properties of the energy margin in reference to the load dynamics, we describe how to incorporate some additional power devices to the general system's model, and we propose slight modifications to some of the classical calculation methods.

KEYWORDS: Voltage stability, Voltage collapse, Energy function

INTRODUCCION

I.1 El problema del colapso de tensión en los sistemas de potencia [Kundur]

El comportamiento de los sistemas de generación, transmisión y distribución de energía eléctrica cuando son sometidos a perturbaciones ha sido objeto de estudio e investigación desde la década del 40.

El principal esfuerzo de los investigadores se centró inicialmente en el análisis del comportamiento de los generadores de energía eléctrica cuando el sistema es sometido a perturbaciones bruscas y de gran magnitud. Se buscaba en esa época identificar los escenarios en los cuales los generadores afectados pierden sincronismo con el resto de la red, con el riesgo consecuente de provocar apagones de gran magnitud.

El así llamado problema de la *estabilidad transitoria* de los sistemas de potencia se mantuvo como objeto casi exclusivo de estudio de los investigadores hasta la década del 60, en que se comenzó a observar que los sistemas de potencia podían funcionar también en forma no deseada a causa de la interacción entre los generadores y sus sistemas de control en presencia de perturbaciones de pequeña magnitud (típicamente: aumentos de carga), habitualmente presentes en el funcionamiento normal de estos sistemas.

Estos problemas de *estabilidad a las pequeñas oscilaciones* se han venido analizando intensamente desde esa época, en concordancia con la evolución que se ha venido dando en el diseño y los métodos de ajuste de los sistemas de control de la red.

Mientras que tanto los problemas de estabilidad transitoria como de estabilidad de las pequeñas oscilaciones se centran en el análisis de las magnitudes que caracterizan el comportamiento de los generadores (ángulo de los rotores, frecuencia), el incremento sostenido que se ha venido dando en los últimos 30 años en las transferencias de potencia a través de las redes de transmisión existentes, provocó la aparición de fenómenos de inestabilidad sólo detectables a través de la observación de los niveles de tensión en los nodos de la red en que se conectan las cargas.

El así llamado problema de la *estabilidad de tensión* de los sistemas de potencia se puede manifestar, en particular, a través de un descenso de tensión incontrolado en algunas áreas del sistema cuando éste está sometido a aumentos de carga importantes.

Este fenómeno de *colapso de tensión* ha provocado apagones de importancia a lo largo de todo el mundo, y ha sido objeto relevante de estudio por parte de los profesionales en sistemas de potencia desde la década del 80.

I.2 Un ejemplo introductorio

A efectos de introducir el tipo de problemas que se pretende analizar en este trabajo, consideremos un sistema de potencia muy sencillo, formado por un único generador y una línea de transmisión alimentando una carga (Figura I.1).



Figura I.1 Sistema radial-Adaptado de [Grigsby]

Supongamos que el generador mantiene constante la tensión V_1 en sus bornes, y que vamos aumentando gradualmente la carga activa P_L a partir de un punto de operación inicial, manteniendo siempre fija la carga reactiva Q_L .

Las ecuaciones que describen los puntos de equilibrio de este sistema (*ecuaciones del flujo de cargas*) se basan en las clásicas relaciones de Kirchoff.

En el caso particular de este sistema radial, es fácil ver que la ecuación que permite calcular la tensión en la barra de carga V_2 es una ecuación de segundo grado parametrizada en P_L .

De acuerdo al signo del discriminante de esta ecuación, para cada valor de P_L tendremos dos, uno o ningún punto de equilibrio (Figura I.2).

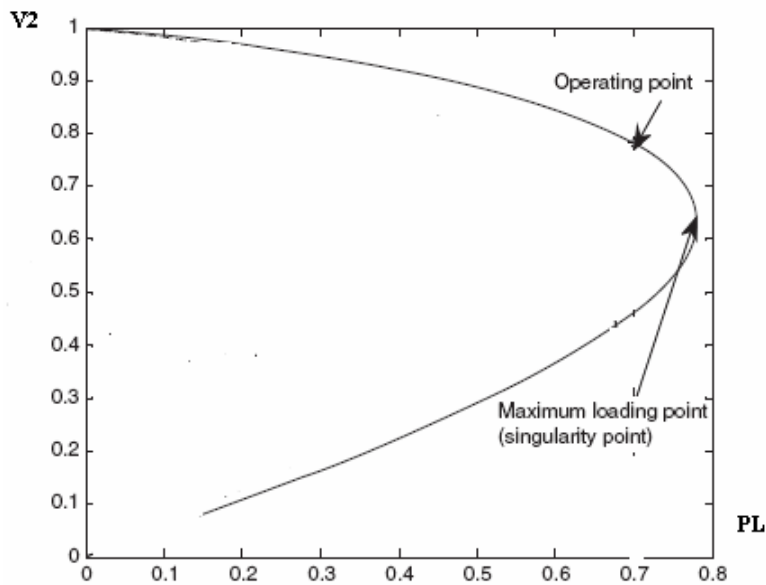


Figura I.2 Curva P-V del sistema radial-Adaptado de [Grigsby]

El punto en el cuál los 2 equilibrios se “funden” y desaparecen puede verse, por lo tanto, como el de máxima cargabilidad del sistema.

Se verifica, asimismo, que en la zona de variación de la carga en la cuál hay 2 soluciones, una de ellas (la de la parte superior de la curva) es estable a la pequeña señal (el jacobiano del sistema calculado en ese punto tiene todos sus autovalores con parte real negativa) y la otra (la de la parte inferior de la curva) no lo es.

Se puede verificar también que el jacobiano del sistema en el punto de máxima cargabilidad tiene un autovalor nulo.

Si uno quisiera investigar qué ocurre con la tensión V_2 si se opta por seguir aumentando P_L por encima del punto en que desaparece el equilibrio, ya es necesario modelar el sistema de potencia por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales que tenga en

cuenta el comportamiento dinámico del generador, de las cargas y de sus sistemas de control.

Si se resuelve ese sistema dinámico, se encuentra que un andamiento típico de la tensión es como el que se indica en la Figura I.3.

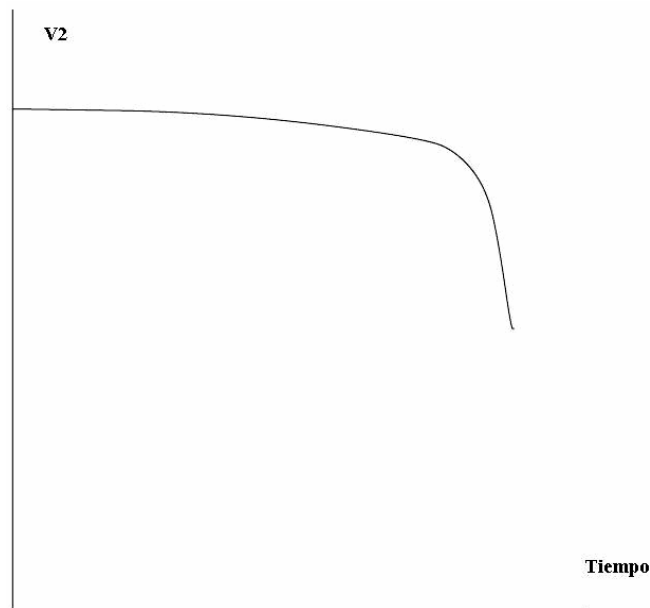


Figura I.3 Variación de la tensión durante el colapso-Adaptado de [Tutorial]

Como se observa en la figura, la tensión en la carga comienza a descender, primero muy lentamente y luego en forma mucho más rápida.

Este andamiento típico de la tensión al llegar al punto de máxima cargabilidad es el que motiva el nombre de *colapso de tensión* con que se conoce este fenómeno.

Es posible verificar, asimismo, que un fenómeno análogo se produce en el sistema si uno opta por aumentar la carga de otras formas (por ejemplo: aumentar sólo Q_L dejando P_L fijo, o aumentar ambas simultáneamente, pero en forma proporcional).

Más aun: el mismo fenómeno se produce habitualmente en los sistemas de potencia con múltiples generadores y cargas, cuando se aumentan las cargas en forma arbitraria en función de un parámetro unidimensional [Kundur].

El punto de colapso de tensión es, por lo tanto, un *límite de cargabilidad del sistema* asociado a una determinada forma de variación de las cargas y, por lo tanto, evaluar “qué tan cerca” está un sistema de potencia real de alcanzarlo es un dato importante, tanto para planificar como para operar el sistema.

I.3 El margen de seguridad al colapso de tensión

La forma clásica en que se evalúa la cercanía al colapso de tensión es por medio de métodos “paso a paso”. En estos métodos se va aumentando gradualmente la carga en el sistema en la forma prefijada, y se resuelve (para cada estado de carga) el sistema de ecuaciones que modela el sistema en equilibrio, a fin de encontrar el punto de equilibrio estable del sistema (se dice que estamos “recorriendo paso a paso la curva PV”) [Kundur].

Luego de un suficiente número de pasos, es de esperar que se detecte el punto en el cuál el sistema de ecuaciones deja de tener solución.

Una vez encontrado el punto de colapso, la variación del parámetro entre el punto de operación inicial y el de máxima cargabilidad (el *margen de carga* del sistema) suele tomarse como indicador para definir si el sistema se encuentra o no peligrosamente cerca del colapso de tensión.

La principal desventaja de este método de cálculo es el tiempo en que se emplea en llegar a la “nariz” de la curva, teniendo en cuenta muy especialmente que en los sistemas reales puede ser necesario resolver en cada paso un sistema algebraico no lineal de cientos y hasta miles de ecuaciones.

Se han investigado desde fines de los años 80, por lo tanto, métodos alternativos de cálculo que permitan resolver el problema en forma más aproximada, pero con tiempos de cálculo más cortos.

En particular, resulta atractivo intentar definir la cercanía al colapso de tensión a partir de los llamados *métodos directos*, los cuáles hacen uso exclusivamente de la información de que se dispone en el propio punto de operación.

En el caso particular del ejemplo desarrollado más arriba, resulta intuitivo que algunos de esos métodos directos podrían basarse en detectar la cercanía del punto de operación (el equilibrio estable) a la segunda solución del sistema de ecuaciones (el equilibrio inestable) para el mismo estado de cargas (Figura I.4).

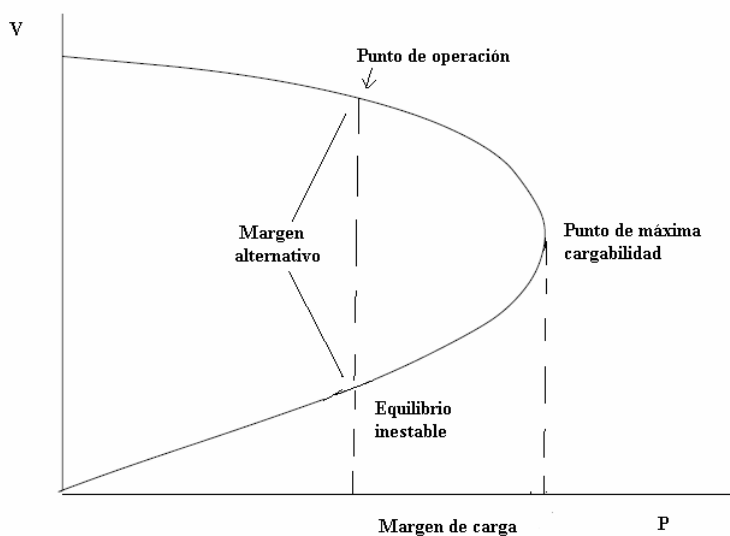


Figura I.4 Margen de seguridad alternativo al margen de carga

En este trabajo se analiza uno de estos métodos directos: la evaluación de la cercanía al colapso de tensión del sistema por aplicación de la teoría de funciones de energía.

Este método directo busca definir el margen al colapso de tensión en la forma sugerida en la Figura I.4, pero midiendo la “distancia” entre el equilibrio estable y el inestable de una forma alternativa (a través del llamado *margen de energía*) a la simple distancia euclidiana.

Este tipo de aplicaciones de las funciones de energía al problema del colapso de tensión es una extensión natural de los métodos similares que se han desarrollado desde los años 60 para analizar la estabilidad transitoria de los sistemas de potencia cuando están sometidos a perturbaciones rápidas y bruscas [Pai].

Estos métodos basados en las funciones de energía se pueden explicar en forma cualitativa en base a la siguiente figura:

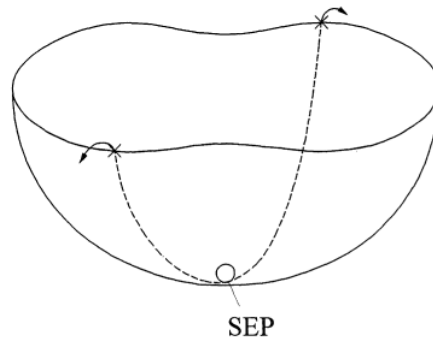


Figura I.5 Región de atracción de los puntos de operación estable [Kundur]

Si visualizamos a nuestro sistema de potencia como la esfera de la figura, y su punto de operación normal (equilibrio estable o “SEP”, Stable Equilibrium Point) como el fondo del recipiente, las perturbaciones en el sistema pueden provocar (si se inyecta suficiente energía al sistema durante la perturbación) que la esfera “escape” del recipiente (su “región de atracción”) sin retornar a su posición inicial.

En el caso particular del problema del colapso de tensión, se verá que el aumento de carga en el sistema va haciendo “contraer” lentamente el recipiente, acercándolo cada vez más al punto de operación estable.

El margen de energía se asocia, por lo tanto, a la altura mínima del recipiente; en el sentido que es una forma de “medir” qué tan pequeña se ha vuelto la región de atracción para un estado de cargas dado

I.4 Estructura de la Tesis

Esta Tesis está organizada de la siguiente forma:

-En el Capítulo 1 se revisa la teoría básica de bifurcaciones en sistemas dinámicos y su aplicación al problema del colapso de tensión

-En el Capítulo 2 se revisa la teoría clásica asociada al segundo método de Liapunov y a las regiones de atracción de puntos de equilibrio.

-En el Capítulo 3 se describen las características principales de los 2 tipos de funciones de energía (funciones de energía para sistemas cuasigradientes y funciones de energía de Varaiya) que son de aplicación a los sistemas de potencia.

-En el Capítulo 4 se describe el modelo matemático del sistema de potencia a adoptar, las características principales de su función de energía asociada, y la forma en que se puede definir un margen de seguridad al colapso de tensión (el margen de energía) en base a la función de energía.

-En el Capítulo 5 se describe la teoría de resolución de las ecuaciones del flujo de cargas en coordenadas cartesianas

-En el Capítulo 6 se describen las reglas prácticas a utilizar para calcular los equilibrios inestables del sistema de potencia

-En el Capítulo 7 se describen dos métodos que permiten calcular en forma aproximada el margen de carga a partir del margen de tensión y el colapso de tensión más cercano

-En el Capítulo 8 se describen varias aplicaciones de los métodos descritos en los capítulos 6 y 7 a sistemas de potencia de prueba, y también a un modelo del sistema de potencia uruguayo.

Se ha optado por incluir en Anexos algunas de las demostraciones matemáticas más extensas que son necesarias para describir la teoría (Anexos 1,2 y 3).

En el Anexo 4 se analiza la posibilidad de incorporar modelos de equipamientos adicionales al modelo básico del sistema de potencia utilizado a lo largo de la Tesis.

Se incluyen también en Anexos los datos detallados de las redes utilizadas en las aplicaciones (Anexo 5), el detalle de algunos resultados de las aplicaciones (Anexo 6) y una descripción sintética de los programas de cálculo desarrollados (Anexo 7).

Las Referencias asociadas a cada Capítulo y a cada Anexo se incluyen al final de los mismos.

I.5 Consideraciones adicionales

Ha sido una característica habitual en muchas ramas de la ingeniería el desarrollo exitoso de métodos de cálculo que se basan en parte en consideraciones heurísticas que complementan los fundamentos teóricos rigurosos.

La aplicación de la teoría del colapso de tensión a la resolución de problemas en los sistemas de potencia reales no escapa a esta regla. En consecuencia, varios de los métodos de cálculo utilizados en la práctica complementan los fundamentos matemáticos rigurosos con reglas heurísticas derivadas de la observación del comportamiento de muchos sistemas de potencia reales.

A lo largo de la Tesis se ha intentado identificar explícitamente esta situación, diferenciando las consideraciones heurísticas de aquéllas que derivan de fundamentos teóricos rigurosos.

Cabe destacar asimismo que, siguiendo la filosofía habitual de una Tesis de este tipo, en este trabajo se ha intentado esencialmente hacer una revisión del “estado del arte” del método de la función de energía aplicado al problema del colapso de tensión, a través del estudio y análisis de la literatura relevante existente.

No obstante, en algunos temas puntuales se han incorporado aportes originales a la teoría; por lo que a lo largo de la Tesis se declaran explícitamente los casos en que se da esta situación.

Referencias

[Grigsby] L.Grigsby (editor),”Power system stability and control-Electrical engineering Handbook”,2nd Edition,CRC Press,2006.

[Kundur] P.Kundur ,”Power system stability and control” ,Mc Graw-Hill Inc,1994

[Pai] M.A.Pai,”Power system stability-Analysis by the second method of Lyapunov”,North Holland Publishing Company,1981

[Tutorial] Voltage stability assessment procedures and guides (Draft). IEEE/PES Power system stability subcommittee, April 1999 www.power.uwaterloo.ca

CAPÍTULO 1-EL COLAPSO DE TENSIÓN Y LA BIFURCACIÓN SILLA NODO

En este Capítulo se hace una revisión sintética de la teoría de bifurcaciones de sistemas dinámicos, y su aplicación al problema del colapso de tensión.

Dado que este capítulo debe considerarse como introductorio al contenido principal de la Tesis, no se han incluido las demostraciones de los Teoremas citados.

1.1 Sistemas estructuralmente estables

Trabajaremos con sistemas dinámicos autónomos:

$$dx/dt = f(x), f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ con } U \text{ abierto y } f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)^1$$

Sabemos que para estos sistemas existe para cada $x_0 \in U$ una solución local única $\Phi(\cdot, x_0): I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cumple $\Phi(0, x_0) = x_0$, en que I es un intervalo abierto centrado en el origen. [Khalil 1]

$\Phi(t, x_0)$, con $t \in I$, se denomina la trayectoria del sistema basada en x_0 .

El conjunto de todas las trayectorias $\Phi_t: U \rightarrow \mathbb{R}^n / \Phi_t(x_0) = \Phi(t, x_0)$ con $t \in I$ es el llamado flujo del sistema dinámico.

Comentario

En rigor, la existencia y unicidad de la solución local sólo requiere pedir que f sea localmente Lipschitz: debe existir una constante L y un $r > 0$ tal que: $\|f(x) - f(y)\| < L\|x - y\|$. $\forall x, y$ en una bola de centro x_0 y radio r .

Sean $f \in C^1(U_1, \mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(U_2, \mathbb{R}^n)$ dos funciones (“campos vectoriales”) como las descritas más arriba, y los correspondientes sistemas dinámicos autónomos

$$(S1) \quad dx/dt = f(x)$$

$$(S2) \quad dx/dt = g(x)$$

f y g se dicen topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo (función continua, con inversa continua) $H: U_1 \rightarrow U_2$ que lleva las trayectorias del sistema S1 sobre las trayectorias del sistema S2, y que preserve el sentido de la parametrización.

Formalmente [Perko 1]:

Sea Φ_t el flujo de S1, ψ_τ el flujo de S2, $I_1, I_2 \subseteq \mathbb{R}$ los respectivos intervalos de existencia de las soluciones.

La definición nos dice que para cada $x \in U_1$ es posible definir una función $T(x): I_2 \rightarrow I_1$ creciente estricta tal que:

$$H(\Phi_{T(x)(\tau)}(x)) = \psi_\tau(H(x)) \quad \forall \tau \in I_2.$$

¹ Se recuerda que $C^r(A, B)$, con $r > 0$ natural, es el conjunto de funciones de dominio A y codominio B , continuas y con derivadas parciales continuas hasta el orden r .

Si $T(x)$ es la identidad (se “preserva el tiempo”) se dice que f y g son topológicamente conjugados.

Dada $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, diremos que f es estructuralmente estable sii $\exists \varepsilon > 0 / \forall g \in C^1(U, \mathbb{R}^n) / \|f - g\| < \varepsilon$ se cumple que f y g son topológicamente equivalentes.

Comentario

La norma que se adopta en $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ es la habitual :

$$\|f\| = \sup_{x \in U} \|f(x)\| + \sup_{x \in U} \|f_x(x)\|.$$

1.2 Bifurcaciones de sistemas dinámicos [Kwatny]

Estaremos interesados en analizar el comportamiento de sistemas dinámicos autónomos que dependen de un parámetro real:

$$dx/dt = f(x, \lambda), f: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ con } U \text{ abierto en } \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } f \in C^1(U \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n).$$

Dado $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ diremos que $f(\cdot, \lambda_0)$ es estructuralmente estable en λ_0 sii \exists un entorno J centrado en $\lambda_0 / \forall \lambda \in J$ se cumple que $f(\cdot, \lambda)$ es topológicamente equivalente a $f(\cdot, \lambda_0)$.

Si $f(\cdot, \lambda_0)$ no es estructuralmente estable en λ_0 , diremos que en λ_0 se produce una bifurcación del sistema dinámico.

Comentarios

-Estaremos interesados fundamentalmente en analizar bifurcaciones de sistemas dinámicos en el entorno de puntos de equilibrio (x_0, λ_0) ².

En tal caso, es necesario restringir la definición de equivalencia topológica a entornos “U” suficientemente pequeños de los puntos de equilibrio.

-Observamos que nuestra (segunda) definición de estabilidad estructural para sistemas que dependen de un parámetro no es totalmente consistente con la (primera) definición general de estabilidad estructural para campos vectoriales.

En efecto: dado un campo $f = f(\cdot, \lambda_0)$ estructuralmente estable según la segunda definición, y dado cualquier $\varepsilon > 0$, nada impide que siempre pueda existir un campo g que cumpla $\|f - g\| < \varepsilon$ y tal que f y g *no* sean topológicamente equivalentes.

Esto se debe, obviamente, a que la segunda definición de estabilidad estructural no exige que los campos topológicamente equivalentes a f sean *todos* los de un entorno centrado en f , sino sólo aquéllos que también pertenecen a la familia $\lambda \rightarrow f(\cdot, \lambda)$.

Una consecuencia práctica de no haber adoptado la definición más general de estabilidad estructural (la primera) es que si perturbamos ligeramente nuestra familia de campos $f(\cdot, \lambda)$ a una familia cercana $g(\cdot, \lambda)$, podría aparecer en $g(\cdot, \lambda_0)$ una bifurcación que no aparecía en $f(\cdot, \lambda_0)$.

² Recordamos que (x_0, λ_0) es un punto de equilibrio del sistema dinámico $dx/dt = f(x, \lambda)$ sii $f(x_0, \lambda_0) = 0$

Este eventual efecto indeseado se intenta resolver a través del concepto de bifurcaciones *genéricas*, mediante el cual se agregan requisitos adicionales a la definición de bifurcación que aseguran que las bifurcaciones encontradas no “desaparezcan” al cambiar ligeramente el modelo matemático de un sistema físico.

Estos requisitos normalmente se traducen en la no anulación de algunas derivadas parciales de f .

Como veremos más adelante, en el caso de las bifurcaciones de nuestro interés (las bifurcaciones silla-nodo), el Teorema de Sotomayor que las caracteriza establece condiciones de no anulación de derivadas que, precisamente, permiten asegurar esta propiedad de genericidad.

1.3 Caso particular: Sistemas Lineales

Consideraremos sistemas de la forma:

$$dx/dt = A(\lambda).x \quad \lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n, A \in M^{n \times n} \text{ diferenciable con continuidad en } \lambda$$

Si A es invertible, $x=0$ es el único punto de equilibrio del sistema.

Para un $\lambda=\lambda_0$ dado, sea k el número de autovalores de parte real positiva (la *clase* de la matriz) y $n-k$ el número de autovalores de parte real negativa, supuestos todos distintos. Suponemos que no hay autovalores de parte real nula por lo que, en particular, $A(\lambda_0)$ es invertible. El punto $x=0$ se denomina en tal caso *hiperbólico*.

Las soluciones del sistema son de la forma $x = \sum c_j v_j e^{\mu_j t}$ (μ_j autovalor, v_j vector propio asociado)³, por lo que existe en \mathbb{R}^n un subespacio invariante de dimensión k “inestable” (las trayectorias que comienzan en un punto del subespacio cerca del origen divergen de él y se mantienen en el subespacio) y un subespacio invariante complementario de dimensión $n-k$ “estable” (las trayectorias que comienzan en un punto del subespacio cerca del origen convergen a él y se mantienen en el subespacio).

Por continuidad, esta situación se mantendrá en un entorno de λ_0 , lo que permite probar que se cumplen las condiciones de estabilidad estructural. Se deduce que en λ_0 el sistema es estructuralmente estable [Perko 2]

Por lo tanto: *para los sistemas lineales las bifurcaciones se deben buscar para los valores del parámetro en que la matriz tiene autovalores de parte real nula* (el punto de equilibrio se dice en tal caso *no hiperbólico*)

El razonamiento se puede generalizar aun en el caso en que haya autovalores repetidos, haciendo uso de los autovectores generalizados.

1.4 Caso general: Sistemas no lineales

Consideramos un sistema no lineal $dx/dt = f(x)$, $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$.

³ Se recuerda que si un autovalor no es real, es posible combinar los términos de la sumatoria asociados a ese autovalor y a su conjugado, de forma que siempre se puede expresar x como una suma análoga de términos reales.

Un punto de equilibrio x_0 del sistema se dice *hiperbólico* si la matriz jacobiana $f_x(x_0)$ no tiene autovalores de parte real nula.

Se prueba (Teorema de Hartmann- Grobman) que si x_0 es un punto de equilibrio hiperbólico, es posible elegir un entorno V centrado en x_0 de forma que f restringido a V sea topológicamente equivalente al campo lineal $g = f_x(x_0).x$ restringido a un entorno de x_0 [G-H 1].

Si ahora consideramos una familia de sistemas no lineales $dx/dt=h(x,\lambda)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, $h : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $h \in C^1(U \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, se deduce que para que un punto de equilibrio (x_0, λ_0) sea de bifurcación *es necesario que sea no hiperbólico para la variable x* .

1.5 Tipos de bifurcación

Según que el autovalor de parte real nula tenga o no también su parte imaginaria nula, se distinguen los siguientes dos tipos de bifurcaciones genéricas:

Bifurcación silla-nodo: Cuando el jacobiano tiene un autovalor igual a cero

Bifurcación de Hopf: Cuando el jacobiano tiene un autovalor no nulo de parte real cero

1.6 Bifurcaciones silla-nodo

El modelo clásico de la bifurcación silla-nodo es:

$$dx/dt = -x^2 - \lambda, \quad x, \lambda \in \mathbb{R}$$

El correspondiente jacobiano de $h(x, \lambda) = -x^2 - \lambda$ es $h_x(x) = -2x$, por lo que la solución de esta ecuación diferencial tiene las siguientes propiedades:

a) Los puntos de equilibrio describen la parábola $x^2 = -\lambda$, en que la rama superior es de puntos de equilibrio estables (según Liapunov) y la inferior de puntos de equilibrio inestables. Este lugar geométrico de los puntos de equilibrio en el plano (x, λ) , identificando los estables y los inestables, se denomina *diagrama de bifurcación*.

b) El origen $(0,0)$ es un punto de bifurcación silla-nodo, y respecto a ese punto el comportamiento del sistema es:

-con 2 puntos de equilibrio, uno estable y el otro inestable, si $\lambda < 0$

-sin puntos de equilibrio si $\lambda > 0$

El correspondiente diagrama de bifurcación es el indicado en la Figura 1.1:

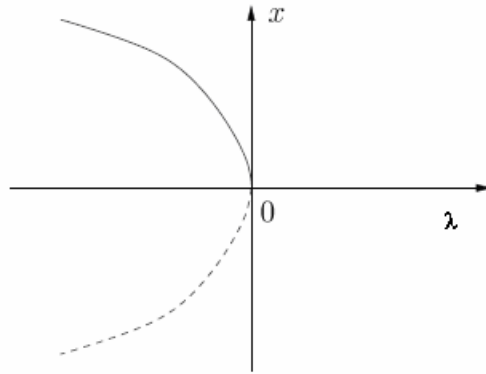


Figura 1.1 Diagrama de bifurcación silla-nodo para el caso unidimensional

Es inmediato, asimismo, que la solución $x(t)$ es decreciente.

Si $x(0)=0$, p.ej, la solución en un entorno de $t=0$ es $x(t) = -\lambda \cdot \tan(\lambda \cdot t)$ (Figura 1.2)

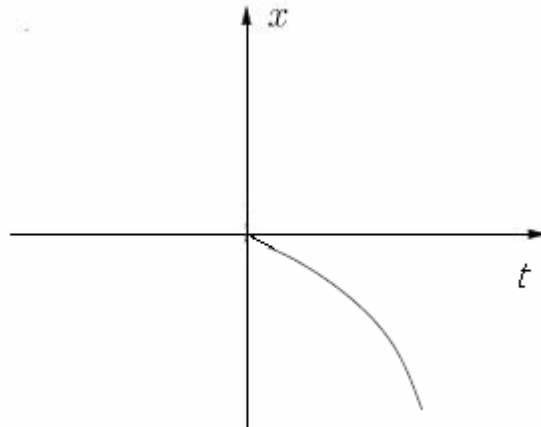


Figura 1.2 Solución en un entorno de 0 para el caso unidimensional, con $x(0)=0$

Se observa la similitud del diagrama de bifurcación con los diagramas V-P del sencillo ejemplo de la línea radial descrito en la Introducción, y la similitud de la variación de $x(t)$ para el caso $x(0)=0$ con la variación de la tensión durante el colapso de tensión

1.7 Teorema de Sotomayor [G-H 2]

Bajo ciertas condiciones el comportamiento del sistema unidimensional analizado en la sección anterior es típico de los sistemas no lineales $dx/dt=h(x,\lambda)$ multidimensionales ($x \in \mathbb{R}^n$) que dependen de un parámetro ($\lambda \in \mathbb{R}$), y en que el jacobiano tiene un autovalor nulo para un cierto (x_0, λ_0) , con x_0 de equilibrio: en tales sistemas dos puntos de equilibrio se “funden” en (x_0, λ_0) y luego “desaparecen”.

El sustento teórico de esta afirmación está dado por el siguiente Teorema de Sotomayor:

Hipótesis

Sea el sistema $dx/dt=h(x,\lambda)$ con $x\in\mathbb{R}^n$, $\lambda\in\mathbb{R}$, $h\in C^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ con $r>0$, y un punto de equilibrio x_0 para el valor λ_0 del parámetro (o sea: $h(x_0,\lambda_0)=0$) que cumple:

a) $J = h_x(x_0,\lambda_0)$ es de clase k , tiene un autovalor cero simple, y no tiene más autovalores con parte real nula.

b) $w^T \cdot h_\lambda(x_0,\lambda_0) \neq 0$

$w^T \cdot D^2 h(x_0,\lambda_0)(v,v) \neq 0$ (en que $D^2 h(v,v) = \sum_{i,j} (\partial^2 h / \partial x_i \partial x_j) \cdot v_i \cdot v_j$)

siendo v y w los autovectores derecho e izquierdo respectivamente correspondientes al autovalor nulo.⁴

Tesis

1) Existe una curva C^r de puntos de equilibrio del sistema en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, que pasa por (x_0,λ_0) y es tangente al hiperplano $\mathbb{R}^n \times \lambda_0$.

2) Para λ variando en un cierto entorno de λ_0 no hay puntos de equilibrio (x,λ) de “un lado” de λ_0 ($\lambda < \lambda_0$ o $\lambda > \lambda_0$, según el signo de las expresiones no nulas de la hipótesis b)), y hay 2 puntos de equilibrio del “otro lado”. Estos 2 puntos de equilibrio son hiperbólicos, y tales que las clases de sus sistemas asociados son k y $k+1$ respectivamente.

3) Sea Λ el conjunto de todos los campos vectoriales $C^r(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ con un equilibrio en (x_0,λ_0) y un autovalor nulo simple de su Jacobiano en ese punto. El subconjunto de Λ que cumple las hipótesis b) es denso⁵ en Λ .

Observaciones:

-Esta versión del Teorema de Sotomayor, extraída de [G-H 2], es una adaptación del Teorema original [Sotomayor] más adecuada a las aplicaciones que se harán en esta Tesis.

-Las tesis 1) y 2) nos dicen que el comportamiento cualitativo de las bifurcaciones silla-nodo en un entorno de (x_0,λ_0) es similar al del ejemplo unidimensional visto. En particular: la curva en la Tesis 1) es el equivalente a la parábola de puntos de equilibrio de dicho ejemplo unidimensional (Figura 1.1)

-La tesis 3) nos da la “tranquilidad” de que las condiciones de derivadas no nulas exigidas se cumplen “habitualmente” en los casos reales a analizar. Se dice, por lo tanto, que la bifurcación es *genérica*, en el sentido de que aparece habitualmente en sistemas de este tipo, y que no “desaparece” si el modelo se perturba ligeramente.

-En forma análoga, se puede caracterizar el comportamiento de una clase muy amplia de sistemas dependientes de un parámetro que sufren bifurcaciones provocadas por la anulación de la parte real de un par de autovalores conjugados (bifurcación de Hopf). Se deduce que, en cierto sentido, las bifurcaciones silla-nodo y de Hopf son las “únicas” que pueden sufrir los sistemas dependientes de un parámetro escalar.

⁴ Se recuerda que un autovector izquierdo es, por definición, un autovector de la matriz adjunta

⁵ Un conjunto A se dice denso en un conjunto B si $B \subset \text{cl}(A)$

1.8 Teorema de la variedad central

Como hemos visto, el teorema de Sotomayor permite identificar el comportamiento cualitativo de las bifurcaciones silla-nodo en sistemas multidimensionales con el que se produce en algunos ejemplos unidimensionales típicos.

Existen otras técnicas que permiten analizar el comportamiento del sistema en las inmediaciones de la bifurcación silla-nodo. Estos métodos se basan en analizar las trayectorias en direcciones particulares del espacio, de forma que el problema multidimensional se pueda analizar en espacios de dimensión más reducida.

El Teorema de la Variedad Central le da sustento teórico a una de estas técnicas.

Sea $dx/dt=f(x)$, $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^r(U, \mathbb{R}^n)$ para algún $r > 0$. Suponemos (sin perder generalidad) que el sistema tiene un equilibrio en el origen ($f(0)=0$, con $0 \in U$). Sea $A=f'_x(0)$ y Φ_t el flujo del sistema.

Se define la variedad local estable W^s en un entorno V de 0 de la siguiente forma:

$$W^s_{loc} = \{x \in V / \Phi_t(x) \in V \ \forall t \geq 0 \text{ y } \Phi_t(x) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty\}$$

En forma análoga se define la variedad local inestable W^u :

$$W^u_{loc} = \{x \in V / \Phi_t(x) \in V \ \forall t \leq 0 \text{ y } \Phi_t(x) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow -\infty\}$$

Es inmediato que la variedad local estable (inestable) es un conjunto invariante para el flujo para $t \geq 0$ ($t \leq 0$).

(Formalmente: $\Phi_t(W^s_{loc}) \subseteq W^s_{loc}$ si $t \geq 0$ y $\Phi_t(W^u_{loc}) \subseteq W^u_{loc}$ si $t \leq 0$ respectivamente)

Teorema de la variedad estable [G-H 1]

Suponemos que 0 es un equilibrio hiperbólico, y que A tiene $n-k$ autovalores con parte real negativa y k con parte real positiva.

Sea E^s el subespacio generado por los autovectores de A cuya parte real es negativa, y E^u el subespacio generado por los autovectores de A cuya parte real es positiva

Tesis: Existe una variedad local estable (inestable) r -diferenciable en un entorno de 0 , de dimensión $n-k$ (k) que es tangente en 0 a E^s (E^u)

Teorema de la Variedad Central [G-H 3]

Analizamos ahora el caso más general en que A también tiene autovalores de parte real nula.

A tiene, por lo tanto, $n-k-m$ autovalores con parte real negativa, m autovalores con parte real nula y k autovalores con parte real positiva.

Sea E^s el subespacio generado por los autovectores de A cuya parte real es negativa, E^u el subespacio generado por los autovectores de A cuya parte real es positiva y E^c el subespacio generado por los autovectores de A cuya parte real es nula.

Tesis

Existe una variedad local estable (inestable) única r -diferenciable en un entorno de 0 , de dimensión $n-k-m$ (k) que es tangente en 0 a E^s (E^u).

Existe asimismo una variedad W^c (variedad central), $r-1$ -diferenciable en un entorno de 0 , de dimensión m , que es tangente en 0 a E^c .

La variedad central es también invariante para el flujo.

Comentario

-La variedad central no es necesariamente única.

1.9 Aplicación al caso de la bifurcación silla-nodo

La variedad central en un entorno de la bifurcación será en este caso de dimensión 1. Existen en este caso técnicas sencillas que permiten calcular en forma aproximada la variedad central y, por lo tanto, analizar el comportamiento del sistema dinámico cuando sus trayectorias se basan en puntos iniciales contenidos en ella.

El resultado relevante [Barquín] es que las trayectorias del sistema restringidas a la variedad central se pueden obtener aproximadamente (hasta el tercer orden) resolviendo el sistema unidimensional $dx/dt = -x^2 - \lambda$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$ ya analizado en 1.6.

1.10 Relación entre el colapso de tensiones y la bifurcación silla-nodo

La moderna teoría de la estabilidad de tensión asocia el fenómeno del colapso de tensión a la aparición de una bifurcación silla-nodo en el sistema dinámico que modela un sistema de potencia con un parámetro de carga variable.

Esta asociación es puramente heurística, y se basa en que los incidentes ocurridos de colapso de tensión se caracterizan por la desaparición del punto de equilibrio, y una declinación posterior monótona (a diferencia de la bifurcación de Hopf, que se evidencia por tener modos oscilatorios) e inicialmente lenta de algunas de las tensiones de barra.

La Referencia [Barquin], en particular, describe diversos incidentes de colapso de tensión ocurridos en el mundo en las décadas del 70 y 80, todos los cuáles presentan claramente las características señaladas.

Todas estas propiedades son típicas de los sistemas que sufren una bifurcación silla nodo.

Esta asociación heurística se describe en [Dobson 1] de la siguiente forma:

a) Modelo del sistema: Se asume que el sistema de potencia se modela mediante un sistema dinámico autónomo dependiente de un parámetro unidimensional ⁶:

⁶ Es habitual asimismo modelar los sistemas de potencia como un sistema algebraico-diferencial. En tal caso, la aplicación de la teoría descrita requiere que previamente se eliminen las variables algebraicas (haciendo uso del teorema de la función implícita) [Kwatny] o que se aproximen las

$dx/dt=f(x,\lambda)$, $f:U \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, con U abierto en \mathbb{R}^n , $I=[\lambda_1, \lambda_2] \subset \mathbb{R}$ y $f \in C^1(U \times I, \mathbb{R}^n)$

En este modelo, algunas de las variables de estado “ x ” corresponden físicamente a los módulos de las tensiones de las barras de carga.

El parámetro se asocia habitualmente a variaciones lentas (cuasiestáticas) de carga (activa y/o reactiva) en algunas barras del sistema.

b) Hipótesis sobre el modelo Se asumen las siguientes condiciones:

b1) el campo f tiene equilibrios simples⁷ para valores del parámetro λ_1 y λ_2

b2) el campo f es tal que sólo puede tener equilibrios simples o, eventualmente, equilibrios en que la matriz jacobiana tiene un único autovalor nulo (bifurcación silla-nodo) para valores del parámetro en el interior de I

b3) en los puntos de bifurcación silla-nodo se cumplen las condiciones de no anulación de derivadas del teorema de Sotomayor (condiciones de genericidad)

c) Comportamiento del sistema cerca de la bifurcación silla-nodo: Suponemos que nuestro sistema de potencia funciona en puntos de equilibrios estables x_0^λ a medida que va variando el parámetro de carga λ (con esto queremos decir que x_0^λ es hiperbólico, y de clase 0), hasta llegar a un valor del parámetro λ^* para el cuál ocurre la bifurcación silla-nodo.

De acuerdo al teorema de Sotomayor, el equilibrio x^* para el cual ocurre la bifurcación surge de la fusión del equilibrio estable x_0^λ y de un equilibrio inestable cercano x_1^λ de clase 1, el cuál puede verse (para cada λ) como el “equilibrio más cercano” en el borde de la región de atracción asociada a x_0^λ (ver más adelante, en 2.2 del Capítulo 2, la definición precisa del concepto de región de atracción).

Ese equilibrio tipo 1 tiene asociada una variedad inestable de dimensión 1, la cuál terminará por “transformarse” (al variar λ) en la variedad central de dimensión 1 asociada a x^* .

Si v_1 es el autovector asociado al valor propio de parte real positiva del jacobiano en x_1^λ (tangente a la variedad inestable unidimensional), y v^* es el autovector propio asociado al valor propio nulo del jacobiano en x^* (tangente a la variedad central), resultará $v_1 \rightarrow v^*$ si $\lambda \rightarrow \lambda^*$.

(Es de esperar, asimismo, que uno de los autovectores propios del jacobiano en x_0^λ también tienda a v^* , pero en la práctica no es fácil identificar cuál es)

La situación antes de ocurrir la bifurcación y cerca de ella se puede representar gráficamente (para cada λ , y asumiendo $x \in \mathbb{R}^3$) de la siguiente forma:

ecuaciones algebraicas mediante ecuaciones diferenciales (método de las perturbaciones singulares)[De Marco 2].

⁷ Un equilibrio se dice simple si la matriz jacobiana calculada en él es invertible.

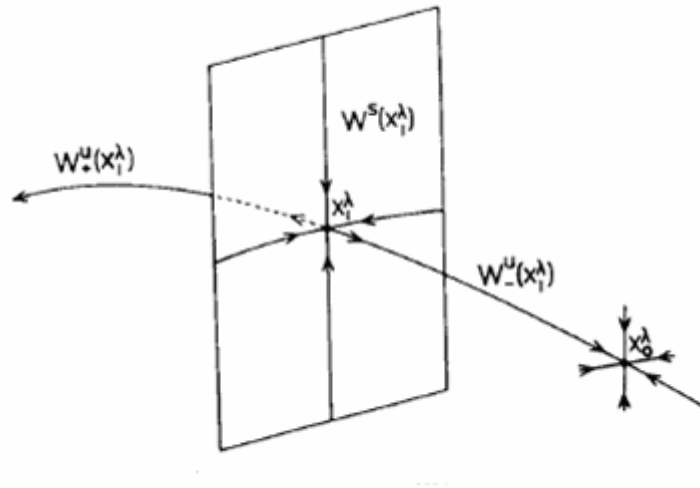


Figura 1.3 Situación del sistema antes de la bifurcación [Dobson 1]

En la Figura 1.3 se denomina $W^u(x_1^\lambda)$ al subconjunto de puntos de la variedad inestable contenidos en la región de atracción de x_0^λ . Dado que x_1^λ y x_0^λ terminan fundiéndose a través de un proceso continuo, este subconjunto es no vacío.

En consecuencia, las propiedades de la región de atracción descritas más adelante en este trabajo (Teorema 3.1, Capítulo 3) aseguran que, como se mencionó más arriba, x_1^λ pertenece al borde de dicha región.

Una vez que el sistema llega a la bifurcación silla-nodo, la situación se puede representar gráficamente de la siguiente forma:

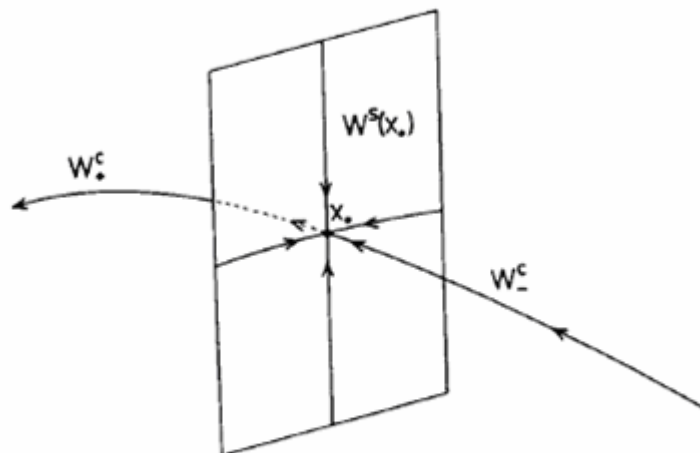


Figura 1.4 Situación del sistema en la bifurcación [Dobson 1]

En la Figura 1.4 se identifica con x_* al punto de bifurcación, con W^c al subconjunto de puntos de la variedad central cuyas trayectorias convergen al punto de equilibrio, y con W^c_+ al subconjunto de puntos de la variedad central cuyas trayectorias divergen del punto de equilibrio.

A los efectos de modelar el colapso de tensión en base a esta teoría se asumen las siguientes hipótesis adicionales:

d)Modelo específico del colapso de tensión:

d1)Una vez que el sistema llega al punto de bifurcación,se produce alguna perturbación que lo hace describir la trayectoria W^c_+

d2)La ubicación de W^c_+ en el espacio de estados es tal que algunas tensiones de barras describen esta trayectoria

Comentarios

-En [Dobson 1] se prueba que la hipótesis d1) es razonable en el siguiente sentido: las trayectorias basadas en puntos cercanos a x^* y a W^c_+ convergen con rapidez exponencial a W^c_+

-Sabemos que las trayectorias del sistema contenidas en la variedad central se describen con buena precisión por medio de las trayectorias de un sistema unidimensional ya analizado anteriormente (ver 1.9), por lo que sobre dichas trayectorias las variables de estado tienen un comportamiento similar al observado en los colapsos de tensión reales (decrecimiento inicialmente lento y luego rápido).

En todos los colapsos de tensión reales se ha observado este comportamiento en las tensiones de algunas barras, de ahí que sea necesaria la hipótesis d2).

Esta hipótesis no excluye que haya otras variables de estado (que no sean tensiones de barra) que también participen de este movimiento a lo largo de W^c_+ .

1.11 Margen de carga

1.11.1 Definición

El modelo adoptado del sistema de potencia es tal que a medida que varía el parámetro unidimensional λ van variando las cargas activas y/o reactivas en algunas barras de carga del sistema.

A medida que varían las cargas también van variando las potencias generadas en algunas de las barras de generación del sistema, a efectos de mantener el equilibrio de potencias en régimen.

En particular: si la ley de variación de las cargas es lineal en λ , se dice que las cargas que varían definen la *dirección de carga* del sistema.

Sea $\mu(\lambda)=(P_1(\lambda),P_2(\lambda),\dots,P_m(\lambda),Q_1(\lambda),Q_2(\lambda),\dots,Q_m(\lambda))$ el vector que identifica (para cada valor del parámetro λ) las cargas activas P_j y reactivas Q_j en cada una de las m barras de carga.

Supongamos nuestro sistema de potencia en régimen, funcionando con un vector de cargas $\mu_0=\mu(\lambda_0)$. Comenzamos entonces a variar nuestro parámetro λ de forma de ir aumentando carga en algunas barras escogidas, hasta llegar al valor del parámetro λ^* en el cual se produce el colapso de tensión (la bifurcación silla-nodo).

Si $\mu^*=\mu(\lambda^*)$, se define el margen de carga $=\|\mu^*-\mu_0\|$, considerando la norma euclidiana habitual.

El margen de carga así definido es la forma natural de cuantificar “qué tan cerca” está el sistema de llegar al colapso de tensión.

Se observa que el margen de carga no necesariamente se corresponde con alguna magnitud física de uso habitual en los sistemas de potencia, dado que no necesariamente coincide con la diferencia entre las potencias (activa, reactiva o aparente) entre el punto de colapso y el punto inicial.

1.11.2 Formas de cálculo

La forma habitual de calcular el margen de carga es a través de simulaciones “paso a paso”: se va haciendo variar el parámetro λ en pasos discretos, y para cada valor de λ se resuelve el estado de régimen del sistema $f(x,\lambda)=0$.

Este estado de régimen es el nuevo punto de partida para volver a variar λ .

El procedimiento termina al encontrar el punto de bifurcación (x^*, λ^*) ⁸

Existen diversos métodos para realizar efectivamente este cálculo “paso a paso”, el más popular de los cuáles es el *método de continuación* [Cañizares].

Los métodos “paso a paso” permiten tener en cuenta con precisión algunos aspectos particulares del modelado de los sistemas de potencia.

Por ejemplo: En los sistemas reales los generadores son capaces de controlar tensión en sus bornes sólo dentro de ciertos límites, definidos por su capacidad física de generar

⁸ En la jerga de los sistemas de potencia se dice que se está “recorriendo la curva P-V” (o “curva nariz”) paso a paso.

potencia reactiva. Cuando en los métodos “paso a paso” se detectan estos límites, se implementan en el sistema de ecuaciones las modificaciones necesarias para evitar violarlos.

1.12 El colapso de tensión más cercano.

Se observa que el margen de carga depende de la ley de variación de carga $\mu(\lambda)$ supuesta.

En particular: si se asumen variaciones de carga lineales en λ , es de interés conocer cuál es la dirección de carga que minimiza el margen de carga (la “peor” dirección de carga).

Este problema ha sido resuelto en un sentido local: partiendo de un estado de cargas inicial μ_0 , es posible encontrar la dirección de carga que minimiza $\| \mu^* - \mu_0 \|$ en las cercanías de una cierta dirección de carga prefijada.

La teoría que sustenta este método de cálculo se puede sintetizar de la siguiente forma [Dobson 2]:

a) El sistema de potencia se modela a través de un conjunto de ecuaciones diferenciales $dx/dt = f(x, \mu(\lambda))$ ⁹

b) Si las cargas $\mu(\lambda)$ se ven como puntos de un espacio $2m$ -dimensional, las direcciones de carga son semirrectas con punto inicial μ_0 .

Si sobre cada semirrecta ubicamos el punto μ^* asociado al colapso de tensión, el conjunto de los μ^* describen una cierta hipersuperficie Σ en ese espacio

(es de esperar que sea una hipersuperficie, dado que sus puntos están definidos por la restricción escalar de que el jacobiano del sistema en ese punto tenga un valor propio 0)

c) Se prueba que, localmente (en el entorno de un μ_0^* fijo, obtenido a partir de una dirección de carga inicial), Σ es una hipersuperficie diferenciable [Dobson 2].

Tiene sentido, por lo tanto, calcular la normal a Σ en cada uno de sus puntos μ^* .

Si denominamos w al autovector izquierdo asociado al autovalor nulo del jacobiano f_x del sistema calculado en el punto de colapso se prueba, asimismo, que esa normal es colineal con el vector $N = w \cdot f_{\mu}$

d) Encontrar el colapso de tensión más cercano significa, por lo tanto, encontrar la dirección de carga que es colineal con N en μ^* (Figura 1.5)

⁹ Esta formulación es válida incluso si algunos de los generadores varían su generación a medida que cambia λ , dado que estas variaciones de generación dependen de las variaciones de carga.

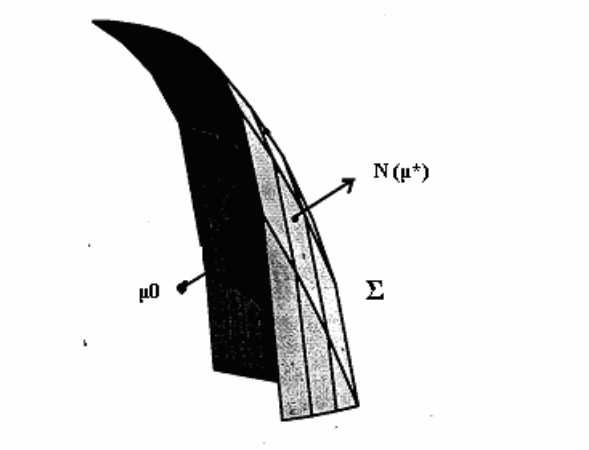


Figura 1.5 Dirección de carga asociada al colapso de tensión más cercano-Adaptada de [Dobson 3]

e)En [Dobson 2] se desarrolla un método iterativo que permite calcular la dirección de carga que lleva al colapso más cercano, “corrigiendo” en pasos sucesivos la dirección de carga inicial hasta conseguir alinearla con la normal.

Referencias

- [Barquín] J.Barquín, “Inestabilidad de tensiones: criterios de seguridad”-Apéndice D- (Tesis Doctoral) ,1993
- [Cañizares] C.Cañizares, “Voltage collapse and transient energy function analysis of AC/DC systems”,PhD Thesis,University of Winsconsin-Madison,1991
- [De Marco 2] C.De Marco,A.Bergen,”A Security Measure for Random Load Disturbances in Nonlinear Power System Models”, IEEE Transactions on Circuits and Systems,Vol.CAS-34,Nº12,December 1987
- [Dobson 1] I.Dobson,H.Chang,“Towards a theory of voltage collapse in electric power systems”,Systems & Control Letters 13,pp.253-262,North Holland,1989
- [Dobson 2] I.Dobson, “Computing a closest bifurcation instability in multidimensional parameter space”.Journal of Nonlinear Science,Vol.3,Springer Verlag,1993
- [Dobson 3] I .Dobson,”Computation of closest bifurcations in power systems”, IEEE Transactions on Power Systems,Vol 9 ,Nº2,May 1994
- [G-H 1] J.Guckenheimer,P.Holmes, “Nonlinear oscillations,dynamical systems and bifurcations of vector fields”- Cap. 1.3- Springer Verlag,1997
- [G-H 2] Idem,Cap.3.4
- [G-H 3] Idem,Cap.3.2
- [Khalil 1] H.K.Khalil , “Nonlinear Systems”-2nd Edition-Cap.2 -Prentice Hall.1996
- [Kwatny] H.Kwatny,R.Fischl,Ch.Nwankpa ,“Local bifurcations in power systems: theory, computation and application” ,Proceedings of the IEEE,Vol.83,Nº11,Nov.1995
- [Perko 1] L.Perko, “Differential equations and dynamical systems”-Cap.3.1-Springer Verlag,1991
- [Perko 2] Idem,Cap.4.1
- [Sotomayor] J.Sotomayor,”Generic bifurcation of dynamical systems”,en “Dynamical systems”-M.Peixoto (Editor),Academic Press,1973

CAPÍTULO 2-TEOREMAS CLÁSICOS DE ESTABILIDAD

En este capítulo se describe la teoría clásica de evaluación de la estabilidad de sistemas dinámicos en base al segundo método de Liapunov.

Se describen asimismo algunas variantes de este método (Teoremas de LaSalle y Barbashin-Krasovskii) que son también de aplicación en la teoría del colapso de tensión, así como algunas propiedades básicas de la región de atracción.

El material de este capítulo ha sido extraído esencialmente de [Khalil 1] y [Khalil 2].

La demostración de los principales teoremas se ha incluido en el Anexo 1.

2.1 Conceptos básicos

Trabajaremos con sistemas autónomos $dx/dt=f(x)$, con $f:D' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, siendo D' un abierto y conexo.

Se analizarán las propiedades locales del sistema respecto a un punto de equilibrio que, sin perder generalidad, se puede asumir que es el 0; por lo tanto asumimos $f(0)=0$.

Generalmente se pedirá $f \in C^1(D', \mathbb{R}^n)$, lo cual asegura la existencia y unicidad de una solución con condición inicial $x(0)$, para t en un cierto intervalo $[0, \delta]$.

Se dice que el equilibrio $x=0$ es estable si para cada $\varepsilon > 0$ es posible encontrar un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$

Se dice que el equilibrio $x=0$ es asintóticamente estable si es estable y, además, es posible encontrar un $\delta' > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta' \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$ si $t \rightarrow \infty$

Comentarios

-El teorema de existencia y unicidad asegura la existencia y unicidad de una solución para tiempos cercanos al instante inicial 0. Normalmente uno “continúa” la solución para tiempos mayores eligiendo un nuevo estado inicial para $t_0 > 0$ pequeño y volviendo a aplicar el teorema, siempre y cuando f siga siendo localmente Lipschitz.

Este procedimiento no asegura, no obstante, que la solución se pueda prolongar hasta $t = \infty$. La definición de estabilidad asintótica impone implícitamente que se debe cumplir esta propiedad adicional de existencia de solución para un intervalo de la forma (a, ∞) .

-La definición de estabilidad asintótica requiere que el equilibrio sea estable, dado que (desde el punto de vista de las aplicaciones) no es aceptable que la solución se mantenga cerca de la condición inicial sólo para tiempos “grandes” (observar que en la definición de estabilidad se exige el cumplimiento de la condición $\forall t \geq 0$)

2.2 Teorema de Liapunov

Sea D abierto y conexo, $V:D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, V \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$.

Se define la derivada de V a lo largo de las trayectorias del sistema como:

$$dV/dt(x) = \langle \nabla V(x), f(x) \rangle.$$

Interpretación:

Dado $x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, sabemos que hay una solución (trayectoria) única $\Phi(\cdot, x_0): (a, b) \subset \mathbb{R} \rightarrow D$ que pasa por x_0 en $t=0$:

$$\Phi(0, x_0) = x_0, \text{ y } \left. \frac{d}{dt} (\Phi(t, x_0)) \right|_t = f(\Phi(t, x_0)).$$

La forma natural de definir la derivada de V en la trayectoria es:

$$\left. \frac{d}{dt} V(\Phi(t, x_0)) \right|_t = \left. \frac{dV}{d\Phi} \right|_{\Phi(t, x_0)} \cdot \left. \frac{d}{dt} (\Phi(t, x_0)) \right|_t \text{ por lo que nuestra definición de } \left. \frac{dV}{dt} (x_0) \text{ no es más que } \left. \frac{d}{dt} V(\Phi(t, x_0)) \right|_{t=0}.$$

La región de atracción del equilibrio asintóticamente estable $x=0$ se define como:

$$R_A = \{ x \in D' / x(0) = x \text{ implica } x(t) \rightarrow 0 \text{ si } t \rightarrow \infty \}.$$

Teorema de Liapunov

Consideramos el sistema $dx/dt=f(x)$, con $f: D' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 , tal que $0 \in D'$ es un punto de equilibrio (o sea: $f(0)=0$), y D' es un abierto, conexo.

Suponemos que existe una $V: D \subset D' \rightarrow \mathbb{R}$, $V \in C^1(D)$, $0 \in D$, con D abierto y conexo, que cumple:

$$V(0)=0$$

$$V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$$

$$\left. \frac{d}{dt} V(x) \leq 0 \quad \forall x \in D.$$

T) a) $x=0$ es un equilibrio estable.

b) Si además $\left. \frac{d}{dt} V(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$, $x=0$ es un equilibrio asintóticamente estable.

Demostración

Ver Anexo 1

Interpretación intuitiva: si se elige el punto inicial dentro de la región de atracción del equilibrio, la trayectoria correspondiente va “cortando” sucesivas curvas de nivel $V(x)=C$ con C cada vez más chico (por ser dV/dt no creciente) y se va “incorporando” a los conjuntos invariantes positivos $\Omega_C = \{x \in D / V(x) \leq C\}$, lo cual asegura que la trayectoria se acerca al origen. Si $dV/dt=0$, la trayectoria no necesariamente converge al origen, sino que podría quedarse “dando vueltas” en un conjunto $V(x)=C$, con C arbitrariamente chico.

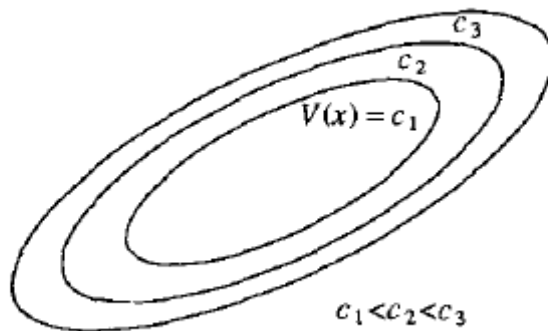


Figura 2.1 Curvas de nivel de la función V de Liapunov [Khalil 1]

En el caso $dV/dt < 0$, observamos que los “conjuntos de nivel” $\Omega_C = \{x \in D / V(x) \leq C\}$ acotados en D (por lo tanto: compactos) pertenecen a R_A .

En efecto: si $\exists r / \Omega_C \subset B_r \subset D \Rightarrow \Omega_C \subset \{x \in B_r / V(x) \leq C\}$, y en la demostración del Teorema se ve que $\{x \in B_r / V(x) \leq C\} \subset R_A$.

Si denominamos conjuntos *invariantes positivos* a aquéllos conjuntos M que cumplen: si $x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M \forall t \geq 0$; la condición de no crecimiento de V asegura que los conjuntos de nivel son invariantes positivos.

2.3 Teorema de LaSalle

La idea del Teorema de LaSalle es principalmente levantar la restricción $dV/dt < 0$ estricto, aceptando que haya puntos x_0 en que $dV/dt(x_0) = 0$, pero a condición de que las trayectorias no se “queden siempre” en esos puntos

Sea $dx/dt = f(x)$ un sistema en las mismas condiciones que en el Teorema de Liapunov.

Sea $\Omega \subset D$ compacto e invariante positivo y $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 que cumple $dV/dt(x) \leq 0$ en Ω .

Sea $E = \{x \in \Omega / dV/dt(x) = 0\}$ y $M \subset E$ su mayor invariante.

T) Si $x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \rightarrow M$ si $t \rightarrow \infty$.

Demostración

Ver Anexo 1

Comentarios

-Se observa que el Teorema no pide que sea $V(x) > 0$.

-En los casos que no se cumple $V(x) > 0$, en particular, no es inmediato que los conjuntos de nivel $\Omega_C = \{x \in D / V(x) \leq C\}$ sean acotados para C adecuados (para $V(x) > 0$ esta propiedad es cierta para C suficientemente pequeño, como se vio en la demostración del Teorema de Liapunov). (Un contraejemplo es: $V(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$)

-Para aplicar el Teorema de LaSalle en forma análoga al Teorema de Liapunov se requerirá, además, que el máximo invariante sea $M = \{0\}$.

-El Teorema de LaSalle, aparte de flexibilizar las hipótesis de Liapunov en cuanto a $V(x) > 0$ y $dV/dt(x) < 0$ también:

-introduce regiones de atracción Ω (el compacto de la hipótesis de LaSalle) más generales que los Ω_C del Teorema de Liapunov

-permite analizar casos de convergencia asintótica más general que la correspondiente a un único equilibrio aislado (varios equilibrios, ciclos estables, etc.).

Corolario del Teorema de Lasalle (Barbashin-Krasovskii)

Sea $dx/dt = f(x)$ un sistema en las mismas condiciones que en el Teorema de Liapunov.

Sea $V: D \rightarrow \mathbb{R}$ una función $C^1(D, \mathbb{R})$ que cumple:

- a) $V(0)=0$, $d/dt V(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$, $V(x) > 0$ en $D - \{0\}$
 b) Si $S = \{x \in D / dV/dt(x)=0\}$ y $x(0) \in S$, $x(0) \neq 0 \Rightarrow \exists t > 0 / x(t) \notin S$
 (con la notación del Teorema de LaSalle : $M = \{0\}$)

T) $x=0$ es asintóticamente estable

Demostración

Ver Anexo 1

2.4 Propiedades de la región de atracción

Si $D \subset D'$ es el dominio de una función de Liapunov V (más en general: el subdominio de D' en el cual se cumplen las propiedades necesarias de V , aun cuando V esté definida en todo D), observamos que no necesariamente $D \subset R_A$, dado que D no es necesariamente invariante (por lo tanto: si una trayectoria abandona D , nada asegura que sigan cumpliéndose las propiedades necesarias de V).

Las estimaciones habituales de R_A son los conjuntos de nivel de la forma $\Omega_C = \{x \in D / V(x) \leq C\}$, siempre y cuando sean acotados.

Las propiedades básicas de la región de atracción se describen en los siguientes 2 Lemas.

Lema 2.4.1 [Khalil 4]

R_A es un conjunto abierto, conexo e invariante

Demostración

Ver Anexo 1

Lema 2.4.2 [Khalil 4]

El borde de R_A está formado por trayectorias.

Se puede probar un resultado más general: el borde de un abierto invariante es también invariante (por lo tanto: como cada punto del borde puede tomarse como punto inicial de una trayectoria, el borde estará formado por trayectorias)

Demostración

Ver Anexo 1

2.5 Comparación sintética de los tres Teoremas principales en relación a la estabilidad asintótica

	Signo V	Signo dV/dt	Dominio deV	Comentarios
Liapunov	>0	<0	Cualquiera	
LaSalle	Cualquiera	≤ 0	Compacto, invariante	Convergencia asintótica a conjuntos
Barbashin	>0	≤ 0	Cualquiera	Condición $M=\{0\}$

2.6 Aplicabilidad al problema del colapso de tensión en los sistemas de potencia

En la aplicación de esta teoría al colapso de tensión en los sistemas de potencia se asume “a priori” la existencia de un equilibrio asintóticamente estable, por lo que *interesa identificar funciones V como las descritas en los 3 Teoremas principales a los sólo efectos de sacar conclusiones sobre la región de estabilidad, y no a los efectos de verificar que el equilibrio es estable.*

-La condición $dV/dt < 0$ es demasiado exigente para las funciones de energía de los sistemas de potencia, por lo que Liapunov *no es aplicable directamente.*

-La condición $V > 0$ en un dominio de tamaño razonable es demasiado exigente para las funciones de energía de los sistemas de potencia, por lo que Barbashin-Krasovskii es aplicable a ciertos teoremas de existencia en un entorno del equilibrio estable (teoría de los sistemas cuasigradientes), pero *no es útil para hacer estimaciones de la región de atracción*

-La condición de existencia “a priori” del compacto invariante es demasiado exigente para los sistemas de potencia, por lo que LaSalle *no es aplicable directamente.*

Por lo tanto: en la aplicación al colapso de tensión en los sistemas de potencia va a ser necesario definir *funciones V que no se adaptan exactamente a ninguno de los 3 Teoremas*, a los sólo efectos de poder mejorar las estimaciones de la región de atracción.

A lo largo de la Tesis denominaremos *funciones de energía* a estas funciones V que no se adaptan exactamente a ninguno de los 3 Teoremas principales, reservando el nombre de *funciones de Liapunov* a aquellas que sí lo hacen.

Referencias

[Khalil 1] H.K.Khalil ,“Nonlinear Systems”-2nd Edition-Cap.2 -Prentice Hall.1996

[Khalil 2] Idem,Cap.3

[Khalil 3] Idem,Apéndice A.2

[Khalil 4] Idem, Apéndice A.8

CAPÍTULO 3-SISTEMAS CUASIGRADIENTES Y TEORÍA DE VARAIYA

En este Capítulo se describen las modificaciones que es necesario realizar a la Teoría clásica descrita en el Capítulo 2, a efectos de poder definir en el Capítulo 4 funciones de energía adecuadas al problema del colapso de tensión.

La demostración de algunos de los teoremas de este Capítulo se ha incluido en el Anexo 2 .

3.1 Sistemas cuasigradietes [De Marco 5]

3.1.1 Introducción

Se pretende incorporar en una estructura común a varios de los posibles modelos de sistemas de potencia y sus funciones de Liapunov asociadas.

La idea es generalizar la estructura de los sistemas gradientes:

Llamaremos *sistema gradiente* a un sistema dinámico de la forma $dx/dt = -\nabla V(x)$, con $V:R^n \rightarrow R^n$ de clase C^1 .

Sea x_0 un punto de equilibrio del sistema (o sea: $-\nabla V(x_0)=0$), y supondremos que $V(x_0)=0$ y $\nabla^2 V(x_0)>0$. En estas condiciones, V tiene un mínimo local estricto en x_0 , y por lo tanto $V(x)>0$ en algún entorno $D(x_0)$.

Como además $dV/dt = \langle \nabla V, -\nabla V \rangle = -\|\nabla V\|^2 < 0$ en todo punto que no sea de equilibrio, V resulta una posible selección de función de Liapunov.

Observamos, además, que se obtienen los mismos resultados si se considera el sistema $dx/dt = -M\nabla V$ con $M \in M^{n \times n}$ y $M>0$, bajo las mismas hipótesis sobre V .

3.1.2 Definición de sistema cuasigradiete

Diremos que un sistema de la forma $dx/dt = -A \nabla V(x)$, con $V:R^n \rightarrow R^n$ de clase C^1 y $A \in M^{n \times n}$ es *cuasigradiete* respecto a un equilibrio x_0 si cumple las siguientes 5 propiedades:

a) A es invertible (por lo tanto: $\nabla V(x_0)=0$)

b) $A+A^t \geq 0$ ¹⁰

c) Sea $S = \{x / \langle (A+A^t) \nabla V(x), \nabla V(x) \rangle = 0\}$. Se asume que si $x(t) \in S, \forall t \in R$, siendo $x(t)$ una solución del sistema $\Rightarrow x(t)=x_E \forall t$, siendo x_E un equilibrio.

¹⁰ Se recuerda que si $B \in M^{n \times n}$, se dice que $B \geq 0$ sii $\langle Bx, x \rangle \geq 0 \forall x \in R^n$

(Dicho de otra forma: los invariantes contenidos en S están formados sólo por puntos de equilibrio)

a1) Suponemos que x_0 es estable a la pequeña señal. Si $g = -A \nabla V$, esto significa que los autovalores de $g_x(x_0)$ son todos de parte real negativa estricta.¹¹

En estas condiciones, es sabido que x_0 es asintóticamente estable [Khalil 5].

b1) Suponemos además (sin perder generalidad) que $V(x_0)=0$.

Queremos ver que en estas condiciones a),b),c), a1), b1) V es una función de Liapunov del sistema para x_0 , en el sentido del Teorema de Barbashin-Krasovskii.

Observaciones

-Estamos asumiendo “a priori” que x_0 es asintóticamente estable, por lo que (en el espíritu habitual del uso de funciones de Liapunov en sistemas de potencia) interesa identificar V a los efectos de sacar conclusiones sobre la región de estabilidad, y no a los efectos de verificar que el equilibrio es estable.

-Los sistemas gradiente (así como los sistemas hamiltonianos) cumplen con la condición b). Más en general: las matrices que se forman como suma de una matriz antisimétrica y una diagonal positiva cumplen con esta condición.

-La condición c) se cumple en forma trivial si $A+A^t > 0$ estrictamente, dado que en tal caso $\langle (A+A^t) \nabla V(x), \nabla V(x) \rangle = 0$ implica $\nabla V(x)=0$.

En los modelos clásicos de sistemas de potencia, no obstante, $A+A^t$ no es invertible.

3.1.3 Lema previo

Si se cumplen las condiciones a),b) para el sistema y a1), b1) para x_0 , el hessiano $\nabla^2 V(x_0)$ es definido positivo.

Demostración:

El hessiano $\nabla^2 V$ es, por construcción, una matriz simétrica \Rightarrow sólo tiene autovalores reales.

a) Si tuviera un autovalor $\lambda=0$:

$(-A \nabla V)_x(x_0) = -A \cdot \nabla V_x(x_0) = -A \cdot \nabla^2 V(x_0)$ tendría un autovalor nulo, lo que contradice la hipótesis de que x_0 es estable a la pequeña señal.

b) Si tuviera un autovalor $\lambda < 0$:

Como $V(x_0) = \nabla V(x_0) = 0$, deducimos que en toda bola $B(x_0, r)$ (centrada en x_0) $\exists x_1 \in B(x_0, r)$ tal que $V(x_1) < 0$ (si así no fuera: V tendría un mínimo relativo estricto en x_0 , lo que sólo es posible si $\nabla^2 V(x_0) > 0$).

¹¹ Los equilibrios estables a la pequeña señal se denominarán también *equilibrios estables* (a “secas”) a lo largo de esta Tesis.

Pero ya vimos que la condición $A+A^t \geq 0$ implica $dV/dt \leq 0$ sobre las trayectorias, por lo que una trayectoria que comience en x_1 (en que $V(x_1) < 0$) nunca podría tender asintóticamente a x_0 (en que $V(x_0)=0$). Esto contradice la estabilidad asintótica en x_0 . ///

3.1.4 Lema

V es de Liapunov (en el sentido de Barbashin-Krasovskii)

Demostración

Recordamos que el Teorema de Barbashin-Krasovskii afirma que una función $V:D \rightarrow \mathbb{R}^n$ que sea C^1 , con $D \subset \mathbb{R}^n$ y que cumple:

- 1) $V > 0$ en $D - \{0\}$
- 2) $dV/dt \leq 0$ en D
- 3) $S = \{x \in D / dV/dt(x) = 0\}$ y $x(t) \in S \quad \forall t$ implica $x(t) = x_0$ (siendo $x(t)$ una trayectoria del sistema)

es una función de Liapunov para x_0 .

Mostremos que la función V que permite definir el sistema cuasigradiiente cumple con estas 3 condiciones:

1) $\nabla^2 V(x_0) > 0$ y $V(x_0) = \nabla V(x_0) = 0$, por lo que V tiene un mínimo relativo estricto en x_0 . Esto implica que $V(x) > 0 \quad \forall x$ en algún entorno reducido D centrado en x_0 .

2) Dado que $dV/dt = \langle \nabla V, -A \nabla V \rangle = \langle -A \nabla V, \nabla V \rangle = \langle \nabla V, -A^t \nabla V \rangle = \langle -A^t \nabla V, \nabla V \rangle \Rightarrow$

$dV/dt = -1/2 \langle (A+A^t) \nabla V, \nabla V \rangle$, por lo que la condición b) implica $dV/dt \leq 0$.

3) Como x_0 es asintóticamente estable, debe ser un equilibrio aislado (la presencia de otro equilibrio en todo entorno de x_0 contradice la definición de estabilidad asintótica) \Rightarrow para D suficientemente pequeño, D sólo puede contener a x_0 como único equilibrio, y por lo tanto la condición c) de la definición de cuasigradiiente nos dice que el máximo invariante en S es $\{x_0\}$. ///

Comentario

La propiedad de ser sistemas cuasigradiientes nos permitirá construir fácilmente las funciones de energía clásicas de los sistemas de potencia a partir de sus modelos dinámicos o (visto de otra forma) nos permitirá probar formalmente que estas funciones de energía clásicas son funciones de Liapunov en el sentido de Barbashin Krasovskii.

¹² Observar que la demostración del lema sigue siendo válida bajo una hipótesis más débil que suponer x_0 estable a la pequeña señal: bastaría con suponer x_0 aislado y $\nabla^2 V(x_0) > 0$

Bajo estas hipótesis: aplicando el Teorema de Barbashin-Krasovskii deduciríamos que x_0 es asintóticamente estable.

Desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas, no obstante, esta teoría no nos permite hacer estimaciones fáciles de la región de atracción. En efecto, como es sabido, las regiones de atracción de estas funciones se estiman a través de los conjuntos $\Omega_c = \{x / V(x) \leq c\}$ contenidos en D , lo cual nos lleva al problema de estimar la región D en que V es >0 .

El problema de estimar las regiones de atracción se encara mejor, por lo tanto, a través de la teoría de Varaiya que se expondrá a continuación, y se verá más adelante que las mismas funciones de energía clásicas de los sistemas de potencia que obedecen a la estructura cuasigradiante también cumplen las propiedades de Varaiya.

3.2 Funciones de energía de Varaiya [Varaiya 1]

3.2.1 Introducción

Las estimaciones clásicas de la región de atracción se basan en las componentes conexas de los conjuntos de nivel $\Omega_c = \{x / V(x) \leq c\}$ que contienen al punto de equilibrio cuando son acotados (y, por lo tanto, compactos)¹³, y están contenidos en el abierto y conexo D en que se cumplen las propiedades de V requeridas en el Teorema de LaSalle. En efecto: en tales casos, al ser Ω_c invariante positivo y compacto es de aplicación el Teorema de LaSalle por lo que (si además se cumplen las propiedades necesarias para el conjunto $\{x / d/dt V(x)=0\}$; p.ej: que sólo contenga equilibrios aislados en Ω_c) se cumplirá $\Omega_c \subset R_A$ para c suficientemente chico.

Cuando se cumplen los requisitos del Teorema de Liapunov, siempre se puede encontrar un c para que Ω_c tenga las propiedades requeridas, como se ve en la propia demostración del Teorema.

Las propiedades de la región de atracción en la teoría que se verá a continuación no se basan directamente en estimaciones de la región de atracción en la forma vista, dado que en las aplicaciones a los sistemas de potencia no es razonable suponer $V(x)>0$ en un dominio D lo suficientemente “grande” (si D no es suficientemente grande, el requisito $\Omega_c \subset D$ no permite hacer estimaciones de R_A de este tipo que sean de uso práctico).

Definiciones previas

-Llamaremos inercia de la matriz A a la tripleta: $In(A) = (n_s(A), n_u(A), n_c(A))$ que identifica al número de sus autovalores de parte real negativa, positiva y nula respectivamente.

Un punto de equilibrio x_0 del sistema dinámico se dice tipo n si el jacobiano del sistema $J(x_0)$ calculado en el punto es de clase n (o sea: $n_u(J(x_0))=n$)

Con esta notación, un punto de equilibrio x_0 del sistema dinámico será hiperbólico sii el jacobiano del sistema $J(x_0)$ calculado en el punto cumple $n_c(J(x_0))=0$

¹³ La condición de que Ω_c sea compacto asegura la existencia y unicidad de soluciones del sistema dinámico $\forall t \geq 0$ [Khalil 1].

-Recordamos que ya hemos definido en el Capítulo 1 a la variedad (local) estable del punto de equilibrio x_i como:

$W^s(x_i) = \{x / \Phi(t,x) \rightarrow x_i \text{ para } t \rightarrow \infty\}$ (en particular: si x_i es asintóticamente estable, coincide con la región de atracción de x_i), y es inmediato que es un conjunto invariante positivo.

En forma análoga se ha definido la variedad (local) inestable $W^u(x_i) = \{x / \Phi(t,x) \rightarrow x_i \text{ para } t \rightarrow -\infty\}$

-Dadas dos variedades $A, B \subset \mathbb{R}^n$ se dice que se cortan transversalmente cuando se cumple una de estas 2 condiciones: a) no se cortan o b) en cada punto $x \in A \cap B$ se cumple: $T_x(A) + T_x(B) = \mathbb{R}^n$, siendo T_x el espacio tangente a la variedad correspondiente.

3.2.2 Definición de función de energía de Varaiya

Se supone un sistema dinámico $dx/dt = f(x)$ con un punto de equilibrio estable a la pequeña señal x_s ; y llamamos E al conjunto de todos los puntos de equilibrio del sistema. Llamamos $W^s(x_i)$ y $W^u(x_i)$ a las variedades estable e inestable respectivamente de $x_i \in E$, y R_A a la región de atracción de x_s .

Se hacen las siguientes hipótesis sobre este sistema dinámico:

A1) Si $x_i \in \partial R_A \cap E \Rightarrow x_i$ es hiperbólico.

A2) Si $x_i, x_j \in \partial R_A \cap E \Rightarrow W^s(x_i)$ y $W^u(x_j)$ se intersectan transversalmente.

A3) Existe una función $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, V de clase C^1 (función de energía de Varaiya) que cumple :

i) $dV/dt(x) \leq 0$ si $x \notin E$.

ii) $\{t \in \mathbb{R} / dV/dt(x) = 0\}$ es de medida nula (en \mathbb{R}) si $x \notin E$.

iii) Si $V(x(t))$ es acotado en la trayectoria $x(t) \Rightarrow x(t)$ es acotado.

Comentarios

1) Las propiedades A1 y A2 son “genéricas” (se cumplen en “casi todos” los sistemas dinámicos $dx/dt=f(x)$ [Smale]).

2) La propiedad A1 implica que los equilibrios en el borde de estabilidad son aislados [Varaiya 1] .

3) Las propiedades A3 i) y ii) implican que las trayectorias acotadas convergen a algún punto de equilibrio (se descarta la presencia de ciclos límites acotados p.ej) [Chiang 2] .

4) Comparemos las propiedades A3 respecto al Teorema de LaSalle y a las propiedades de los sistemas cuasigradientes:

Si se cumple A3 i) y A3 ii), sobre cada trayectoria es:

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t dV/dt(x(t))dt < V(x(0)) \text{ (estricto) si } x(t) \text{ no es un equilibrio}$$

y $t > 0$.

Por lo tanto: las únicas trayectorias contenidas en el conjunto $S = \{x / dV/dt(x)=0\}$ son los puntos de equilibrio, por lo que esta propiedad implica la propiedad correspondiente (propiedad c)) de los sistemas cuasigradientes (que a su vez (como vimos) implica la propiedad correspondiente de Barbashin Krasovskii)

5) Para cumplir con todas las hipótesis del Teorema de LaSalle “faltaría”, no obstante, la presencia del compacto invariante positivo Ω .

Por lo tanto: las funciones de energía de Varaiya no son “exactamente” las de LaSalle, y además (dado que no se pide $V > 0$) las propiedades de la región de atracción que se probarán para estas funciones de energía no se basan en considerar los conjuntos de nivel Ω_c .

Las funciones de energía de Varaiya, por lo tanto, *no cumplen estrictamente con las condiciones de ninguno de los 3 grandes Teoremas vistos*.

Esto significa que una función de energía de Varaiya no necesariamente puede ser usada para probar la estabilidad asintótica de un equilibrio. (Esto no tiene consecuencias prácticas, dado que será usada más bien para deducir propiedades de la región de atracción).

3.2.3 Propiedades de la región de atracción en sistemas con función de energía de Varaiya

Las propiedades principales de la región de atracción de sistemas con funciones de energía de Varaiya se demuestran a través de una serie de 4 Teoremas.

Los 2 primeros Teoremas permiten caracterizar al borde de la región de atracción a través de las variedades estables de los equilibrios tipo 1 contenidos en él, y su demostración se incluye en el Anexo 2.

Los 2 Teoremas restantes establecen la base teórica para definir el margen de energía al colapso de tensión que se definirá en el Capítulo 4.

Teorema 3.1

Suponemos que se satisfacen las condiciones A1, A2, A3 vistas, y sea x_i un equilibrio inestable

$$T) x_i \in \partial R_A \Leftrightarrow W^u(x_i) \cap R_A \neq \emptyset$$

Demostración

Ver Anexo 2

Teorema 3.2

Suponemos que se satisfacen las condiciones A1, A2, A3 vistas, y sean x_1, x_2, \dots, x_n los equilibrios hiperbólicos inestables en ∂R_A

$$T) \partial R_A = \bigcup_{x_i} W^s(x_i)$$

Demostración

Ver Anexo 2

Corolario

Recordamos que usamos la notación $cl(B)$ para denominar a la clausura del conjunto B

$$T) \partial R_A = \bigcup_{x_{i1}} cl(W^s(x_{i1})), \text{ en que la unión se hace sobre los equilibrios } x_{i1} \text{ tipo 1.}$$

Demostración

Ver Anexo 2

Comentario

Observamos que al ser x_{i1} tipo 1 resulta $W^s(x_{i1})$ una variedad de dimensión n-1

Teorema 3.3

Suponemos que se cumplen las hipótesis A1,A2,A3.

T)

- a) Si x_i es un equilibrio $\Rightarrow V(x_i) = \min \{V(x) : x \in W^s(x_i)\}$ (En particular: si x_i es asintóticamente estable $V(x_i) = \min \{V(x) : x \in R_A\}$)
- b) El punto en el cual se minimiza $V(x)$ en ∂R_A es un equilibrio tipo 1.

Demostración

a) Supongamos que el mínimo se da en $y \in W^s(x_i)$, con $y \neq x_i \Rightarrow$ por definición de la variedad estable es $\Phi(t, y) \rightarrow x_i$ si $t \rightarrow \infty$.

Como V es una función no creciente, se deduce $V(y) \geq V(x_i)$ (en rigor es $V(y) > V(x_i)$ por la hipótesis A3ii), pero no es necesaria la desigualdad estricta), por lo que sólo puede ser $V(y) = V(x_i) //$

b) Sabemos por el Teorema 3.2 que $\partial R_A = \bigcup_{x_i} W^s(x_i)$, por lo que (por la parte a)) deducimos que el mínimo buscado se da en un equilibrio $y \in \partial R_A$.

Por el Corolario del Teorema 3.2: $y \in \bigcup_{x_{i1}} cl(W^s(x_{i1}))$.

Si suponemos, por el absurdo, que y no es de tipo 1, debe ser $y \in \partial W^s(x_j)$ para algún $x_j \in \partial R_A$ tipo 1, dado que no puede haber 2 equilibrios en cada uno de los $W^s(x_i)$.

Dado que $W^s(x_j)$ es una variedad, escogiendo adecuadamente un entorno coordinado de x_j , siempre es posible elegir una bola $B(x_j, r)$ de forma que: $B(x_j, r) \cap cl(W^s(x_j)) \subset W^s(x_j)$ y $W^s(x_j) - B(x_j, r) \neq \emptyset$

Sea $BB = \partial B(x_j, r) \cap W^s(x_j) = \partial B(x_j, r) \cap cl(W^s(x_j))$, que es un conjunto compacto, y $x' \in BB$ tal que $V(x') = \min \{V(x) : x \in BB\}$.

Démosnos una trayectoria $x(t)$ tal que $x(0) \in W^s(x_j) - B(x_j, r) \Rightarrow x(t) \rightarrow x_j$, y la trayectoria cortará necesariamente $\partial B(x_j, r)$ (antes de “alcanzar” x_j).

Por las propiedades de decrecimiento estricto ya vistas en las trayectorias (en base a la hipótesis A3ii):

$\alpha)$ $V(x) > V(x_j)$ si $x \in \partial B(x_j, r)$ (tomando una trayectoria que comience en x)

$\beta)$ $V(x) > V(x')$ si $x \in W^s(x_j) - B(x_j, r)$ (tomando una trayectoria que comience en x , teniendo en cuenta que la trayectoria corta $\partial B(x_j, r)$, y la definición de x')

Como $y \in \partial W^s(x_j) \subset \partial(W^s(x_j) - B(x_j, r))$, es posible encontrar una sucesión $\{y_k\} \subset W^s(x_j) - B(x_j, r)$ tal que $y_k \rightarrow y$ si $k \rightarrow \infty$.

Como $\beta)$ nos dice que los $V(y_k)$ están acotados por debajo, por continuidad de V resulta: $V(y) \geq \inf \{V(y_k)\}$.

Por otra parte: por $\beta)$ $V(y_k) > V(x')$, y por $\alpha)$ $V(x') > V(x_j)$.

Por lo tanto: $V(y) > V(x_j)$, lo que contradice la definición de y ///

Teorema del punto de equilibrio inestable más cercano

Supongamos que se cumplen las hipótesis A1, A2, A3.

Sea $v_c = \min \{V(x_i) : x_i \text{ equilibrio en } \partial R_A\}$ y $R(v) =$ componente conexa de $\{x / V(x) \leq v\}$ que contiene al equilibrio estable x_s .

Si $v < v_c \Rightarrow R(v) \subset R_A$

Demostración

De acuerdo a resultados ya vistos, en rigor $v_c = \min \{V(x) : x \in \partial R_A\}$.

Supongamos, por el absurdo, que $\exists y \in R(v)$ con $v < v_c$, $y \notin R_A \Rightarrow y \notin \text{cl}(R_A)$ por ser $V(y) < v_c$.

Como $R(v)$ es conexo por definición $\Rightarrow \exists yy \in R(v) \cap \partial R_A$ (si así no fuera, sería $R(v) \cap R_A \neq \emptyset$ y $R(v) \cap (\text{cl}(R_A))^c \neq \emptyset$, dado que $x_s \in R_A$, $y \in (\text{cl}(R_A))^c$) \Rightarrow

$V(yy) \leq v < v_c$, lo cual no es posible por definición de v_c , y porque $yy \in \partial R_A$ ///

3.2.4 Algunas consideraciones sobre el punto de equilibrio inestable más cercano

Hacemos notar que el equilibrio x_c en que se da el mínimo no es necesariamente único y que, de acuerdo con el Teorema 3.3, x_c es un equilibrio tipo 1.

El valor v_c definido en el Teorema del punto de equilibrio inestable más cercano se denomina energía crítica, y el (o los) x_c asociado es el punto de equilibrio inestable más cercano (*cuep*, closest unstable equilibrium point).

Observamos, en particular, que el *cuep* depende de la V elegida.

En las aplicaciones de esta teoría al fenómeno del colapso de tensión, el interés se centra en estimar como se “contrae” la región de atracción a medida que aumenta la carga en el

sistema. Se busca encontrar, por lo tanto, equilibrios “cercaños” (en energía) al equilibrio estable que estén en el borde de R_A .

Es de especial interés, por lo tanto, encontrar el cuep; y la correspondiente energía crítica se usa para evaluar “qué tan cerca” está el sistema del colapso de tensión.

No obstante, en la práctica, se verá que se termina eligiendo como cuep al equilibrio tipo 1 que minimiza $V(x)$ en todo el espacio (y no en ∂R_A) lo cuál, en rigor, no es preciso (nada impide que puedan existir puntos de equilibrio “y” tal que $V(y) \leq v_c$ pero y esté fuera de $cl(R_A)$; y más precisamente en la componente conexa del conjunto de nivel que no incluye a x_s).

El motivo por el cual se hace esta aproximación es porque no se han encontrado métodos sencillos y rápidos para detectar si un equilibrio se encuentra o no en el borde de la región de atracción.

Se hace notar asimismo que esta aproximación es conservadora (“del lado de la seguridad”), dado que el mínimo de V en todo el espacio es obviamente no superior a la energía crítica).

Referencias

[Chiang 2] H.Chiang,M.Hirsch,F.Wu,"Stability regions of nonlinear autonomous dynamical systems ", IEEE Transactions on Automatic Control,Vol 33 N° 1 January 1988

[De Marco 5] C.De Marco",A new method of constructing Lyapunov functions for Power Systems",Proc.1988 IEEE Int.Symp.Circuit and Systems,pp 905-908,Helsinki , June 1988

[Khalil 1] H.K.Khalil, "Nonlinear Systems",2nd Edition ,Cap.2 ,Prentice Hall,1996

[Khalil 2] Idem-Cap.3

[Smale] S.Smale,"Differentiable dynamical systems",Bull.Amer.Math.Soc,vol.73 , pp747-817,1967

[Varaiya 1] H.Chiang, F.Wu,P.Varaiya,"Foundations of direct methods for Power System transient stability analysis", ,IEEE Transactions on Circuit and Systems, Vol.CAS-34 N° 2 Feb.1987

[Vidyasagar] M.Vidyasagar, "Nonlinear Systems Analysis",2nd Edition,Prentice Hall,1993

CAPÍTULO 4-MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA Y FUNCIÓN DE ENERGÍA.

En este capítulo se describe el modelo específico del sistema de potencia al cual se aplicará la teoría desarrollada en los capítulos 2 y 3.

Se define y calcula para este modelo la correspondiente función de energía, y se muestra que esta función verifica simultáneamente las propiedades de las funciones de energía de Varaiya y de las funciones de energía de sistemas cuasigradientes.

Finalmente, se define en base a esta función un margen de seguridad al colapso de tensión (el *margen de energía*) y se describen algunas de sus propiedades.

Cabe destacar que las variables de estado en este modelo se describen, como es habitual en el análisis de estabilidad de los sistemas de potencia, haciendo uso de la notación fasorial. [Ellgerd]

4.1 Modelo del sistema de potencia y definición de función de energía

El modelo a adoptar para el sistema de potencia debe necesariamente incluir las barras de carga del sistema, dado que en ellas es donde se manifiesta el fenómeno del colapso de tensión.

Este tipo de modelos se denominan en la literatura “modelos que preservan la estructura” (“structure preserving”), a efectos de diferenciarlos de otros modelos simplificados (usados clásicamente en el análisis de la estabilidad transitoria de los sistemas de potencia) en los que sólo se representan explícitamente las barras de generación.

La teoría básica de estos modelos se desarrolla en [Wu]

4.1.1 Modelo con barra infinita

Una primera aproximación a los modelos que preservan estructuras es suponer que una de las barras de generación del sistema (la barra “infinita”) tiene conectado un generador lo suficientemente grande como para que su rotor se mantenga siempre en su posición de equilibrio inicial. Esta barra se modela, por lo tanto, como una barra de tensión y ángulo de fase constante, y sin modelar explícitamente el generador correspondiente.

Las características principales del modelo son las siguientes:

-Los generadores se modelan como una fuente de tensión en serie con una reactancia (la denominada “reactancia transitoria”), asumiendo que controlan su tensión en la barra interna de la máquina y no en su barra terminal.

-Se consideran 1,2...n generadores, n+2,n+3,n+m+1 barras de carga o barras terminales de máquina, y una barra infinita n+1.

-Se denomina $E_j < \delta_j$ a las tensiones en las barras internas de máquina y en la barra infinita (con E_j constante y $\delta_{n+1} = 0$), y $V_k < \phi_k$ a las tensiones en las restantes barras.

-Se desprecian las conductancias (tanto de las ramas serie como “shunt”)

4.1.1.1 Ecuaciones desarrolladas del sistema

a) Ecuaciones de swing (ecuaciones que describen el movimiento de los rotores de los generadores):

$$d\delta_i/dt = \omega_i$$

$$M_i \cdot d\omega_i/dt = P_i - \sum_{l=n+2}^{n+m+1} E_l \cdot V_l B_{il} \sin(\delta_i - \varphi_l) - D'_i \omega_i$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

siendo M_i una constante que representa la inercia del generador "i", D'_i una constante que representa la amortiguación de su movimiento, $P_i > 0$ la potencia activa generada y B_{il} la susceptancia de la rama que une al generador "i" con la barra "l".

b) Ecuaciones de carga activa (balance de carga activa en las barras que no son de generación) :

$$0 = P_k - D_k \cdot d\varphi_k/dt - \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot V_k B_{jk} \sin(\varphi_k - \delta_j) - \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot V_k B_{lk} \sin(\varphi_k - \varphi_l)$$

$$k=n+2, n+3, \dots, n+m+1$$

siendo $P_k < 0$ la parte constante de la potencia activa de la carga y $D_k > 0$ un coeficiente constante que permite describir en forma simplificada la dependencia de la carga con la frecuencia. Este modelo de la potencia activa de las cargas es el denominado "modelo Bergen-Hill" [Bergen].

c) Ecuaciones de carga reactiva (balance de carga reactiva en las barras que no son de generación) :

$$0 = Q_k/V_k + \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot B_{jk} \cos(\varphi_k - \delta_j) + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot B_{lk} \cos(\varphi_k - \varphi_l)$$

$$k=n+2, n+3, \dots, n+m+1$$

siendo Q_k la potencia reactiva de la carga (< 0 o > 0 según que se absorba o genere respectivamente)

Por motivos que quedarán claros más adelante (ver 4.1.1.3), esta ecuación no es, en rigor, la ecuación clásica de balance de potencia reactiva, sino que es la ecuación clásica de balance de reactiva dividida por $V_k > 0$.

Por compatibilidad con la teoría desarrollada en los capítulos anteriores, interesa que el sistema sea de ecuaciones diferenciales (y no de ecuaciones diferenciales y algebraicas). A esos efectos, se hace uso de la aproximación del método de perturbaciones singulares [Khalil 5], mediante la cual se asume que las variables algebraicas modelan, en rigor, variables de estado de dinámica muy rápida.

Las ecuaciones de reactiva quedan expresadas, por lo tanto, de la siguiente forma:

$$\epsilon \cdot dV_k/dt = Q_k/V_k + \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot B_{jk} \cos(\varphi_k - \delta_j) + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot B_{lk} \cos(\varphi_k - \varphi_l)$$

con $\epsilon > 0$ pequeño

$$k = n+2, n+3, \dots, n+m+1$$

Comentarios:

-Las potencias activas y reactivas P_k , Q_k se asumen positivas si son inyecciones al nodo (positivas para generación, negativas para carga).

-Las velocidades de máquina ω_k no son absolutas, sino referidas a la velocidad de sincronismo, de acuerdo a la teoría básica de la ecuación de "swing". [Kundur]

-La teoría también se puede desarrollar sin suponer que las ecuaciones algebraicas se aproximan con ecuaciones diferenciales, lo cual introduce complicaciones técnicas adicionales, en el marco de la teoría de estabilidad de sistemas de ecuaciones algebraico-diferenciales (DAE) [Varaiya 5]

Nosotros hemos optado por formular este modelo de sistema de ecuaciones diferenciales "puras" siguiendo a [De Marco 4], y teniendo en cuenta que:

-en rigor, las ecuaciones algebraicas del modelo no son más que una aproximación de modelos reales de cargas con dinámicas muy rápidas.

-la formulación que hemos adoptado permite tratar en forma unificada tanto estos modelos aproximados como aquellos en que se conoce explícitamente la dinámica de las cargas (en esos casos, ϵ no es necesariamente pequeño)

-los principales resultados de la teoría y sus aplicaciones al problema del colapso de tensión no dependen del valor específico de ϵ elegido.

4.1.1.2 Forma compacta del modelo

El modelo se puede escribir en forma compacta con un método similar al indicado en [Varaiya 1]:

$$d\omega/dt = -M^{-1} \cdot T_1^t \cdot f(\alpha, V) - M^{-1} \cdot D' \cdot \omega$$

$$d\alpha/dt = T_1 \cdot \omega - T_2 D^{-1} T_2^t \cdot f(\alpha, V)$$

$$dV/dt = -D_V \cdot g(\alpha, V)$$

Siendo:

$$\alpha = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{n+m+1})$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

$$V = (V_{n+2}, \dots, V_{n+m+1})$$

$$f(\alpha, V) = (f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+2}, \dots, f_{n+m+1})$$

$$f_i(\alpha, V) = -P_i + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} E_l \cdot V_l B_{il} \sin(\delta_l - \varphi_l)$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

$$f_k(\alpha, V) = -P_k + \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot V_k B_{jk} \sin(\varphi_k - \delta_j) + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot V_k B_{lk} \sin(\varphi_k - \varphi_l)$$

$$k=n+2, n+3, \dots, n+m+1$$

$$g(\alpha, V) = (g_{n+2}, \dots, g_{n+m+1})$$

$$g_k(\alpha, V) = -Q_k/V_k - \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot B_{jk} \cos(\varphi_k - \delta_j) - \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot B_{lk} \cos(\varphi_k - \varphi_l)$$

$$k=n+2, n+3, \dots, n+m+1$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_n)$$

$D = \text{diag}(D_{n+2}, D_{n+3}, \dots, D_{n+m+1})$, y tomando $D_j = \varepsilon'$ (pequeño) en los casos en que el D_j original es 0.

$$D' = M^{-1} \text{diag}(D'_1, D'_2, \dots, D'_n) \cdot M^{-1}$$

$$D_V = \text{diag}(1/\varepsilon, 1/\varepsilon, \dots, 1/\varepsilon) \text{ (dimensión } m \times m)$$

$$T_1^t = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times m}], \text{ de forma que :}$$

$$T_1 \omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, 0, \dots, 0) \text{ (vector de dimensión } n+m)$$

$$T_1^t f(\alpha, V) = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

$$T_2^t = [0_{m \times n} \quad I_{m \times m}], \text{ de forma que:}$$

$$T_2^t f(\alpha, V) = (f_{n+2}, f_{n+3}, \dots, f_{n+m+1})$$

$$T_2 D^{-1} T_2^t f(\alpha, V) = (0, 0, \dots, 0, D_{n+2}^{-1} f_{n+2}, D_{n+3}^{-1} f_{n+3}, \dots, D_{n+m+1}^{-1} f_{n+m+1}) \text{ (vector de dimensión } n+m)$$

Con estas definiciones, el sistema toma la forma:

$$dx/dt = -A (M\omega, f, g)$$

$$\text{con } x = (\omega, \alpha, V)$$

$$A = \begin{bmatrix} D' & M^{-1} T_1^t & 0 \\ -T_1 M^{-1} & T_2 D^{-1} T_2^t & 0 \\ 0 & 0 & D_V \end{bmatrix}$$

4.1.1.3 Definición de la función de energía

La **función de energía** para este modelo se define naturalmente, por lo tanto, como:

$$W(x) = \int_{x_0}^x \langle (M\omega, f, g), (d\omega, d\alpha, dV) \rangle$$

siendo $x = (\omega, \alpha, V)$, $x_0 = (0, \alpha_0, V_0)$ el punto de equilibrio estable (punto de operación inicial) que se desea analizar, y notando con $\langle \rangle$ al producto interno habitual.

Comentario

$\omega_0 = 0$ dado que, como ya se ha señalado, las velocidades de las máquinas son relativas a la velocidad de sincronismo.

Las definiciones de f y g (y, en particular, el tecnicismo de dividir g_k por V_k) aseguran que se cumplan las condiciones de simetría necesarias para que la integral sea exacta. [Fleming].

La necesidad de mantener estas condiciones de simetría impone, asimismo, que el modelo que estamos desarrollando incluya ciertas simplificaciones con respecto a los sistemas de potencia reales. En particular: se han despreciado las resistencias de las ramas que unen los nodos del sistema, no se han incluido modelos detallados de los sistemas de control de la red y (como se menciona en 4.1.3) no es sencillo incorporar al modelo cargas activas que sean dependientes de la tensión.

El sistema dinámico se escribe, por lo tanto, como:

$$dx/dt = -A \cdot \nabla W$$

Es posible desarrollar en forma explícita $W(x)$, obteniendo la siguiente expresión:

$$W(\omega, \alpha, V) = 1/2 \cdot \omega^t \cdot M \cdot \omega - 1/2 \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{k=1}^{n+m} V_i V_k B_{ik} \cos(\alpha_i - \alpha_k) + \\ + 1/2 \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{k=1}^{n+m} V_{i^s} V_{k^s} B_{ik} \cos(\alpha_i^s - \alpha_k^s) - P(\alpha - \alpha^s) + \sum_{i=n+2}^{n+m} \int_{V_{is}}^{V_i} Q_i(x)/x \, dx$$

en que los índices “s” identifican a las variables correspondientes al equilibrio estable

Comentario

Hasta ahora se ha supuesto que las cargas reactivas Q_i son independientes de la tensión, pero más adelante se verá como incorporar modelos más generales de cargas reactivas dependientes de la tensión.

4.1.1.4 Verificación de que el sistema es cuasigradiante

Se muestra a continuación que la matriz A cumple con las propiedades necesarias para que el sistema sea cuasigradiante

a) A es no singular:

Supongamos por el absurdo que A tiene un valor propio $\lambda=0$, con vector propio asociado $x=(x_1,x_2,x_3)$

Imponiendo $Ax=0$ obtenemos:

$$D'x_1 + M^{-1}T_1^t x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -D'^{-1} M^{-1} T_1^t x_2$$

$$-T_1 M^{-1} x_1 + T_2 D^{-1} T_2^t x_2 = 0 \Rightarrow (T_1 M^{-1} D'^{-1} M^{-1} T_1^t + T_2 D^{-1} T_2^t) x_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M^{-1} D'^{-1} M^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1^t \\ T_2^t \end{bmatrix} x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0, \text{ pues todas las matrices son invertibles} \Rightarrow x_1 = 0$$

$$D_V x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \quad ///$$

b) $A+A^t$ es semidefinida positiva

$$\text{Por cálculo directo: } T_2 D^{-1} T_2^t = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & D^{-1} \end{bmatrix} \text{ de donde } A+A^t = 2 \cdot \begin{bmatrix} D' & 0 & 0 \\ 0 & T_2 D^{-1} T_2^t & 0 \\ 0 & 0 & D_V \end{bmatrix}$$

(diagonal por bloques, con bloques no negativos) es ≥ 0 ///

c) Si $S = \{x / \langle (A+A^t) \nabla W(x), \nabla W(x) \rangle = 0\}$, haciendo uso de que $D' > 0$, $D^{-1} > 0$ y $D_V > 0$ (o calculando explícitamente) resulta:

$$S = \{x / f_{n+1} = f_{n+2} = \dots = f_{n+m} = 0, g = 0 \text{ y } \omega = 0\}$$

Si una trayectoria $x(t) \in S \quad \forall t$, imponiendo que sea solución del sistema dinámico resulta: (del conjunto de ecuaciones en $d\omega/dt$) $f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0$, y por lo tanto $x(t)$ es un punto de equilibrio. ///

a1) x_0 es estable a la pequeña señal, por hipótesis

b1) De acuerdo a la definición de la función de energía: $W(x_0) = 0$ ///

Comentarios:

- $W \in C^1$, pues f y g son continuas y diferenciables

- Observar que, en particular, las demostraciones de a) y c) requieren que los amortiguamientos de las máquinas D'_k sean todos no nulos.

- Con muy poco esfuerzo adicional, es posible desarrollar un modelo muy similar y más detallado del sistema de potencia, en el cual no es necesario asumir la presencia de una barra infinita. [Varaiya 1]

En este modelo más detallado del sistema de potencia, la barra infinita se sustituye por una máquina real (la “barra de referencia”), a cuyo ángulo de fase se refieren las restantes máquinas del sistema.

La teoría del colapso de tensión a la cuál aplicaremos el modelo de sistema de potencia descrito no necesita hacer uso de este modelo más detallado.

4.1.2 Verificación de que la función de energía es de Varaiya

En la Referencia [Varaiya 1] se demuestra que la función de energía asociada a un modelo del sistema de potencia más simple que el usado en esta Tesis (el llamado *modelo clásico*, que es de aplicación al análisis de la estabilidad transitoria clásica de los sistemas de potencia) es de Varaiya.

La demostración tiene algunos puntos oscuros y, además, no se puede extender en forma inmediata a los modelos que preservan estructuras que es necesario utilizar en el análisis del colapso de tensión.

En el Anexo 3 se incluye un análisis detallado del problema y una propuesta que permite “contornear” las dificultades encontradas.

4.1.3 Tratamiento de cargas reactivas dependientes de la tensión [Varaiya 1]

Los modelos desarrollados más arriba asumen que las cargas reactivas Q_k son constantes, independientes de la tensión.

No obstante, estos modelos permiten incorporar la dependencia de las cargas reactivas con la tensión de la propia barra sin ningún cambio: basta con formular las ecuaciones sustituyendo Q_k por la función $Q_k(V_k)$, en que $Q_k(V_k)$ se asume C^1 .

Comentarios

-En rigor: dado que ahora la función de energía incorporará términos de la forma

$$\int_{V_0}^{V_k} Q_k(V_k)/V_k dV_k, \text{ bastaría con pedir } Q_k(V_k) \text{ continua. La continuidad de la derivada es}$$

un requisito general para asegurar la unicidad de las soluciones de sistemas autónomos generales de la forma $dx/dt=f(x)$.

-La función de energía sigue estando bien definida, dado que la incorporación de las funciones $Q_k(V_k)$ a las g_k sólo afecta los términos diagonales $\partial g_k/\partial V_k$. Por lo tanto: no se afectan las condiciones de simetría del jacobiano requeridas para asegurar la integrabilidad de (M, ω, f, g) en forma independiente de la trayectoria.

-El mismo razonamiento asegura que *no* es posible incorporar al modelo la dependencia $P_k(V_k)$ de las cargas activas con la tensión (sí sería posible incorporar una eventual dependencia $P_k(\alpha_k)$, lo cuál no tiene interés en las aplicaciones prácticas).

La incorporación de modelos $P_k(V_k)$ requiere la utilización de una extensión del Teorema de Lasalle [Bretas]. En esta Tesis no se ha trabajado sobre esta Teoría.

4.2 Margen de energía y sus propiedades

4.2.1 Definición

Dado un punto de operación estable x_s , se pretende medir la “distancia” al colapso de tensión mediante el llamado margen de energía, que se define de la siguiente forma:

$ME = \min \{W(x_u) : x_u \in \partial R_A(x_s), x_u \text{ equilibrio inestable}\}$. ([De Marco 3], adaptado según [Guedes 1])

Observamos que, de acuerdo a la teoría de las funciones de energía de Varaiya, es también $ME = \min \{W(x) : x \in \partial R_A(x_s)\}$

Al equilibrio inestable asociado a ME se lo denomina, como ya hemos indicado, “equilibrio inestable más cercano” (cuep).

Denominaremos margen de energía asociado a una dirección de carga a $W(x_u)$, siendo x_u el equilibrio inestable (no necesariamente el cuep) asociado a esa dirección de carga

4.2.2 Invariancia respecto a la dinámica de las cargas

En esta sección se analiza la dependencia de la función y margen de energía, así como de los equilibrios inestables tipo 1 del sistema, respecto a las matrices D y D_V que definen la dinámica de las cargas.

Dado que por lo general esta dinámica no es bien conocida en los sistemas de potencia reales, el análisis de esta dependencia es relevante para evaluar los límites de aplicabilidad práctica de la teoría descrita.

El contenido de esta sección es un aporte original de esta Tesis.

4.2.2.1 Invariancia del margen de carga respecto a la dinámica de las cargas

Ya hemos señalado en el Capítulo 1 que la teoría clásica del colapso de tensión mide la “distancia” al colapso de tensión mediante el margen de carga

Si partimos de un modelo del sistema de potencia $dx/dt = F(x, \lambda)$, $x \in R^n$, $\lambda \in R$, en [Dobson 4] se prueba que el margen de carga no cambia si se cambia F por otra F^* con propiedades convenientes.

Esta propiedad se enuncia formalmente así:

Si sustituimos el campo vectorial $F(x, \lambda)$ por otro campo $F^*(x, \lambda)$ de forma que $F^* = H(F)$, con H tal que $H(0) = 0$ (conserva los puntos de equilibrio) y ese cero es único (no introduce equilibrios nuevos) y tal que el jacobiano de H en 0 es invertible (por lo que F^* mantiene el punto de anulación del jacobiano de F), resulta:

- a) F y F^* tienen exactamente las mismas bifurcaciones silla-nodo
- b) Cuando se eligen factores de escala adecuados, los autovectores derechos e izquierdos del jacobiano de ambos sistemas en el punto de colapso coinciden.

Esta propiedad permite identificar una amplia familia de modelos de dinámica de cargas para las cuáles el margen de carga no varía.

Esta invariancia respecto a la dinámica de las cargas representa una “ventaja” para el margen de carga en relación a otros posibles márgenes de seguridad al colapso de

tensión propuestos en la literatura dado que, como ya se ha señalado, la dinámica exacta de las cargas es en muchos casos difícil de modelar con precisión.

Por ejemplo: se ha propuesto como una posible medida de distancia al colapso el módulo del autovalor más chico del jacobiano del sistema, y para este margen de seguridad no se cumple una propiedad de invariancia similar respecto a la dinámica de las cargas (Observar que, p.ej, el jacobiano de $2F(x)$ no tiene los mismos autovalores que el de $F(x)$).

Interesa, por lo tanto, verificar en qué condiciones se puede enunciar una propiedad de invariancia similar para el margen de energía.

4.2.2.2 Lema previo

Sea $A \in M^{2(n+m) \times 2(n+m)}$ que cumple:

A es invertible

$A+A^t \geq 0$.

Sean $M \in M^{n \times n}$ diagonal y positiva, y $G \in M^{(n+2m) \times (n+2m)}$ simétrica e invertible.

T) La inercia $\text{In}(B)$ de la matriz $B = -A \cdot \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$ no depende de A

Demostración

Tomemos $H = \begin{bmatrix} -M^{-1} & 0 \\ 0 & -G^{-1} \end{bmatrix}$, que es una matriz simétrica dado que G lo es.

Dado que $B \cdot H = A$ y $H \cdot B^t = A^t \Rightarrow B \cdot H + H \cdot B^t = A + A^t \geq 0$ por hipótesis.

Por el Teorema de Inercia [Wimmer]: $\text{In}(H) = \text{In}(B)$, lo que muestra que $\text{In}(B)$ no depende de A. ///

4.2.2.3 Invariancia de la función de energía

Recordemos que nuestro modelo es :

$$dx/dt = -A \cdot \nabla W$$

$$A = \begin{bmatrix} D' & M^{-1}T_1^t & 0 \\ -T_1M^{-1} & T_2D^{-1}T_2^t & 0 \\ 0 & 0 & D_V \end{bmatrix}$$

$$W(x) = \int_{x_0}^x \langle (M\omega, f, g), (d\omega, d\alpha, dV) \rangle$$

La definición de la función de energía es coherente gracias a las propiedades de A, que hacen que el sistema dinámico sea del tipo cuasigradiente.

a) Invariancia de la función de energía para dinámicas de carga sencillas

Es inmediato que las propiedades de A que aseguran que el sistema sea cuasigradiante no cambian si las matrices D y D_V que definen la dinámica de las cargas se cambian por otras D_1 y D_{V1} , siempre y cuando sigan siendo del mismo tipo que las originales: diagonales y definidas positivas.

En tal caso, además:

- a) $W(x)$ no cambia, pues no depende de las matrices D y D_V
- b) Dado que A invertible, los puntos de equilibrio del sistema se obtienen resolviendo $\nabla W = 0$, por lo que no dependen de las matrices D y D_V .
- c) Si x_0 es un punto de equilibrio estable a la pequeña señal para el sistema original, también lo es para el nuevo sistema con dinámica de cargas D_1 y D_{V1} .
En efecto: el jacobiano del nuevo sistema calculado en x_0 es de la forma:

$$J(x_0) = -A_1 \cdot \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & G(x_0) \end{bmatrix} \text{ siendo } G(x_0) = \begin{bmatrix} f_\alpha(x_0) & f_V(x_0) \\ g_\alpha(x_0) & g_V(x_0) \end{bmatrix} \text{ y } A_1 \text{ la matriz asociada a}$$

D_1 y D_{V1} .

Por lo tanto: $J(x_0)$ está en las condiciones del Lema Previo (ver 4.2.2.2).

Se deduce que $\text{In}(J(x_0))$ no depende de A y, por lo tanto, todos los autovalores de $J(x_0)$ son de parte real negativa. ///

En definitiva: en estas condiciones el sistema sigue siendo cuasigradiante, y la función de energía no depende de la dinámica específica de las cargas asumida en el modelo.

Comentarios

-Por supuesto que esta afirmación es válida para el tipo de dinámica de cargas asumida: dependiente de la frecuencia $d\alpha/dt$ para la carga activa y de la derivada de la tensión dV/dt para la reactiva, pero enseguida veremos que se puede extender la propiedad de invariancia a dinámicas más generales.

-Se observa que la función que lleva $A \nabla W$ en $A_1 \nabla W$ (en que A_1 es como A , cambiando D por D_1 y D_V por D_{V1}) es un caso particular de función "H" de las que cumplen las propiedades de invariancia del margen de carga mencionadas más arriba (ver 4.2.2.2), por lo que este cambio conserva el punto de colapso y los correspondientes autovectores.

b) Invariancia de la función de energía para dinámicas de carga más generales

Observemos que nuestro sistema dinámico se puede escribir en forma aun más compacta, agrupando las ecuaciones de activa y reactiva de las cargas:

Pongamos $z=(\alpha, V)$, $x=(\omega, z)$, $h=(f, g)$ $D_2^{-1} = \begin{bmatrix} D^{-1} & 0 \\ 0 & D_V \end{bmatrix}$

$$T_{22}^t = [0_{2m \times n} \quad I_{2m \times 2m}]$$

$$T_{11}^t = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times 2m}]$$

Con estas definiciones, el sistema se escribe:

$$d\omega/dt = -M^{-1} \cdot T_{11}^t \cdot h(z) - M^{-1} \cdot D' \cdot \omega$$

$$dz/dt = T_{11} \cdot \omega - T_{22} D_2^{-1} T_{22}^t \cdot h(z)$$

Todos los desarrollos anteriores siguen valiendo, dado que las condiciones de simetría del jacobiano que se utilizaron para definir la función de energía se aplicaron desde un principio al jacobiano h_z .

El sistema es, por lo tanto, del tipo cuasigradiente :

$$dx/dt = -A \cdot \nabla W$$

$$\text{con } A = \begin{bmatrix} D' & M^{-1} T_{11}^t \\ -T_{11} M^{-1} & T_{22} D_2^{-1} T_{22}^t \end{bmatrix} \text{ y } W(x) = \int_{x_0}^x \langle (M\omega, h), (d\omega, dz) \rangle$$

Repitiendo las demostraciones ya vistas, es inmediato que el sistema sigue siendo cuasigradiente si la matriz D_2 que define la dinámica de las cargas se sustituye por cualquier otra matriz $D_3 > 0$.

En particular: La tercer condición que define al sistema como cuasigradiente se puede demostrar así:

$$\text{Si } \langle (A+A^t) \nabla W, \nabla W \rangle = 0 \Rightarrow \langle \begin{bmatrix} D' & 0 \\ 0 & T_{22} D_3^{-1} T_{22}^t \end{bmatrix} \cdot (M\omega, h), (M\omega, h) \rangle = 0, \text{ y}$$

pongamos $h'=(h_{n+2}, h_{n+3}, \dots, h_{n+m})$.

$$\text{Desarrollando, resulta: } \sum D_i' M_i^2 \omega_i^2 + \langle D_3^{-1} h', h' \rangle = 0.$$

Como $D_3 > 0$ se deduce $\omega = 0 \Rightarrow \langle D_3^{-1} h', h' \rangle = 0 \Rightarrow h' = 0$. Sustituyendo en el sistema dinámico se obtiene $h = 0$. ///

Además: al igual que en el caso analizado más arriba, la función de energía no cambia al cambiar D_2 en la forma indicada.

Se amplía, por lo tanto, la clase de dinámicas de carga para las que se mantiene invariante la función de energía.

En particular: se podrían introducir modelos de dinámica de cargas activas y/o reactivas que no dependan exclusivamente de la frecuencia $d\alpha/dt$ o de la derivada de la tensión dV/dt .

En efecto: cualquier modelo de la forma $D_4 (d\alpha/dt, dV/dt) = -(f, g)$ para las barras de carga, con $D_4 > 0$, está en las condiciones del razonamiento anterior si elegimos $D_2 = D_4$.

Comentarios

-No parece posible sacar conclusiones más generales, del tipo que obtiene [Dobson 4] para el margen de carga, dado que si se cambia $F = (M\omega, f, g)$ por $F^* = H(F)$ (siendo H una función del tipo descrito en 4.2.2.1) se deben imponer adicionalmente condiciones de simetría al jacobiano de F^* para que también derive de un gradiente.

-Sin modificar en nada el razonamiento, es inmediato que la invariancia también es cierta si se cambia (simultáneamente con el cambio de la dinámica de las cargas) la matriz de amortiguamientos D' por otra matriz diagonal $D'_1 > 0$.

-Observamos que hasta ahora sólo mostramos que al cambiar la dinámica de las cargas en la forma indicada el sistema sigue siendo cuasigradiente. Restaría probar que la correspondiente función de energía sigue siendo de Varaiya.

4.2.2.4 Invariancia del margen de energía

Dado que ya hemos visto que la función de energía es invariante, sólo queda probar que el cuep también lo es.

En [Varaiya 4] se demuestra que el cuep no cambia si la matriz de amortiguamientos D' cambia por otra matriz diagonal positiva D'_1 .

La demostración se puede adaptar al caso de nuestro interés, en que lo que se desea cambiar es la matriz de dinámica de las cargas D_2 definida más arriba .

Llamemos $d(D', D_2)$ a nuestro sistema dinámico con matriz de amortiguamientos D' y matriz de dinámica de cargas D_2 , y con punto de equilibrio estable x_s .

Sea x_c el cuep del sistema, calculado a través de la función de energía W que se ha estado analizando (o sea: $W(x_c) = \min \{W(x) : x \in \partial R_A\}$)

Sean $D'_1 > 0$ una matriz diagonal y $D_3 > 0$. Consideremos el sistema dinámico $d(D'_1, D_3)$.

T) a) W es también función de energía de Varaiya para $d(D'_1, D_3)$,

b) x_c es también un cuep asociado a $d(D'_1, D_3)$ y W

Demostración

a)

Las propiedades A1) y A2) de Varaiya se asumen ciertas por ser “genéricas”

Las propiedad de Varaiya A3i) ya se ha demostrado para W respecto a $d(D'_1, D_3)$ al analizar la invariancia de la función de energía para los sistemas cuasigradientes.

Las propiedades de Varaiya A3ii) y A3iii) se demuestran en forma idéntica a como se ha hecho para el sistema original $d(D', D_2)$

Por lo tanto: W es también una función de energía de Varaiya para $d(D'_1, D_3)$.///

b)

Es evidente que los puntos de equilibrio de ambos sistemas coinciden, y (de acuerdo a lo ya visto en 4.2.2.3) x_s es también un equilibrio estable de $d(D'_1, D_3)$.

Sea $W(x_c) = v_c$ y $R(v_c)$ = componente conexa que contiene x_s de $\{x / W(x) < v_c\}$.

(menor estricto, para que esté contenido en la región de atracción)

Llamémosle R_A a la región de atracción de $d(D', D_2)$ y R'_A a la región de atracción de $d(D'_1, D_3)$.

Sabemos (ver el Teorema del punto de equilibrio inestable más cercano en 3.2.3) que $R(v_c) \subset R_A$, por lo que $R(v_c)$ contiene un único punto de equilibrio x_s .

Por ser $R(v_c) \subset R_A$, $W(x)$ no sólo es acotada por arriba en $R(v_c)$, sino también por abajo. En efecto: para cada $x \in R(v_c)$, es $W(x) \geq W(x_s)$, dado que (de acuerdo al Teorema 3.3) $W(x_s) = \min \{W(x) : x \in R_A\}$

Si $x \in R(v_c) \Rightarrow$ en la trayectoria $\Phi'(t, x) \subset R(v_c)$ (por ser $R(v_c)$ invariante) asociada a $d(D'_1, D_3)$ es $W(\Phi'(t, x))$ acotada \Rightarrow por la propiedad A3iii) de las funciones de energía de Varaiya es $\Phi'(t, x)$ acotada.

Dado que W es una función de energía de Varaiya para $d(D'_1, D_3)$, cumple con la propiedad de que sus trayectorias acotadas convergen a un punto de equilibrio.

Como $R(v_c)$ contiene un único punto de equilibrio, concluimos que $\Phi'(t, x)$ converge a $x_s \Rightarrow R(v_c) \subset R'_A \Rightarrow x_c \in \text{cl}(R'_A)$ por continuidad de $W \Rightarrow x_c \in \partial R'_A$, pues R'_A no puede contener otros puntos de equilibrio.

Sea otro $x_u \in \partial R'_A$, tal que $W(x_u) < W(x_c) = v_c \Rightarrow x_u \in R_A$, lo cuál es absurdo pues R_A no puede contener otros puntos de equilibrio.

Se deduce: $W(x_c) = \min \{W(x) : x \in \partial R'_A\}$, lo cuál significa que x_c es un cuep de $d(D'_1, D_3)$ ///

4.2.2.5 Invariancia de los equilibrios tipo 1

El sistema gradiente $d'(D', D_2)$ asociado al sistema dinámico completo $d(D', D_2)$ es el sistema $dx/dt = -\nabla W'$, siendo $W' = \int \langle h, dz \rangle$, $h = (f, g)$, $z = (\alpha, V)$

Es, por lo tanto, el sistema que resulta si se le “quita” al sistema original la dinámica de las máquinas de la ecuación de swing y las dinámicas específicas de la carga.

Es evidente que el sistema gradiente “conserva” los puntos de equilibrio del sistema original (en el sentido que x_i es de equilibrio de $d'(D', D_2) \Leftrightarrow (0, x_i)$ lo es de $d(D', D_2)$).

El sistema gradiente no conserva la función de energía (dado que no incluye el término de energía cinética asociado a las máquinas), pero sí los valores de la función de energía en los puntos de equilibrio.

Deseamos ver que los equilibrios tipo 1 de sistemas cuya dinámica de cargas es como la supuesta en 4.2.2.3 siguen siendo equilibrios tipo 1 si consideramos el sistema gradiente en vez del sistema completo.

Sea por lo tanto $x_0 = (0, x'_0)$ un equilibrio hiperbólico tipo 1 del sistema completo $d(D', D_2)$

T) x'_0 es un equilibrio hiperbólico tipo 1 del sistema gradiente $d'(D', D_2)$.

Demostración

a) Dado que $d(D', D_2)$ es un sistema cuasigradiante:
 $dx/dt = -A \cdot \nabla W$, siendo A invertible.

El correspondiente jacobiano en un punto de equilibrio x_0 es:

$$J(x_0) = -A \cdot \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & G(x_0) \end{bmatrix} \text{ siendo } G(x_0) = \begin{bmatrix} f_\alpha(x_0) & f_\nu(x_0) \\ g_\alpha(x_0) & g_\nu(x_0) \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto: $J(x_0)$ está en las condiciones del Lema Previo (ver 4.2.2.2), y se deduce que $\ln(J(x_0))$ no depende de A .

En particular, tomando $A = I$ (matriz identidad), y denominando $n_u(X)$ al número de autovalores de parte real positiva de X , se deduce:

$$n_u(J(x_0)) = n_u\left(-\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & G(x_0) \end{bmatrix}\right).$$

b) Si consideramos el sistema gradiente $dx/dt = -\nabla W$, su jacobiano correspondiente en $x'_0 / x_0 = (0, x'_0)$ es $J'(x'_0) = -G(x_0)$, por lo que:

$$n_u(J'(x'_0)) = n_u\left(-\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & G(x_0) \end{bmatrix}\right) = n_u(J(x_0)).$$

En particular, cada equilibrio $x_0 = (0, x'_0)$ tipo 1 del sistema completo se corresponde con un equilibrio x'_0 tipo 1 del sistema gradiente ///

Corolario Dado que el sistema gradiente no depende de la dinámica de las cargas, deducimos que la característica de un equilibrio de ser tipo 1 es independiente de la dinámica de las cargas (siempre dentro de la clase de los modelos de dinámica de carga considerados)

Comentarios

-En las aplicaciones prácticas al colapso de tensión se buscan habitualmente equilibrios tipo 1 del sistema completo a través de equilibrios tipo 1 del sistema gradiente, por lo que hemos justificado teóricamente que estos métodos de cálculo son correctos.

-Al igual que en [Varaiya 4], se observa que, si bien se ha probado que los cuerp y los equilibrios tipo 1 de los sistemas $d(D', D_2)$ y $d(D'_1, D_3)$ coinciden, los bordes de estabilidad de ambos sistemas, no obstante, no necesariamente coinciden.

-Observar que se ha demostrado algo más que la invariancia de los equilibrios tipo 1: se cumple también la invariancia de inercias de los jacobianos respecto a la dinámica de las cargas, y la invariancia del número de autovalores de parte real positiva entre el sistema completo y el sistema gradiente.

Adicionalmente: el número de autovalores de parte real negativa del sistema completo y del gradiente no son iguales, y difieren en el número de generadores del sistema.

-La demostración generaliza los resultados análogos demostrados en [Varaiya 4] para los modelos clásicos de Estabilidad Transitoria El aprovechamiento de la propiedad cuasigradiante del sistema permite hacer una demostración más compacta.

Referencias

- [Bergen] A.Bergen,D.Hill,"A structure preserving model for power system stability analysis",IEEE Trans.Power App.Syst.,vol.PAS-100,Nº 1,Jan.1981
- [Bretas] N.Bretas,L.Alberto, "Lyapunov function for power systems with transfer conductances:extension of the invariance principle", IEEE Transactions on Power Systems, Vol.18,Nº 2,May 2003
- [De Marco 2] C.De Marco,A.Bergen,"A Security Measure for Random Load Disturbances in Nonlinear Power System Models", IEEE Transactions on Circuits and Systems,Vol.CAS-34,Nº12,December 1987
- [De Marco 3] T.Overbye,C.De Marco,"Voltage security enhancement using energy based sensitivities",IEEE Transactions on Power Systems,Vol.6,Nº 3.August 1991
- [De Marco 4] T.Overbye,C.De Marco,"An energy based security measure for assessing vulnerability to voltage collapse", IEEE Transactions on Power Systems,Vol.5,Nº 2,May 1990
- [Dobson 4] I.Dobson,"The irrelevance of load dynamics for the loading margin to voltage collapse and its sensitivities", Bulk power system voltage phenomena-III,Voltage stability,security and control,Davos,August 1994
- [Ellgerd] O.Ellgerd,"Introducao a teoria de sistemas de energia elétrica"-Cap.2-Mc.Graw Hill,1976
- [Fleming] W.Fleming,"Functions of several variables", Springer-Verlag ,1977
- [Guedes 1] R.Guedes,L.Alberto, N.Bretas,"Power System Low-Voltage Solutions Using an Auxiliary Gradient System for Voltage Collapse Purposes", IEEE Transactions on Power Systems,Vol.20,Nº3,August 2005
- [Khalil 5] H.Khalil,"Nonlinear systems"-Cap.9, Prentice-Hall,1996
- [Kundur] P.Kundur,"Power system stability and control", Mc Graw-Hill Inc,1994
- [Varaiya 1] H.Chiang, F.Wu,P.Varaiya,"Foundations of direct methods for Power System transient stability analysis", IEEE Transactions on Circuit and Systems,Vol.CAS-34 Nº 2 Feb.1987
- [Varaiya 2] P.Varaiya,F.Wu,R.Chen, "Direct Methods for Transient Stability Analysis of Power Systems:Recent Results", Proceedings of the IEEE,Vol.73,Nº12,December 1985
- [Varaiya 4] H.Chiang,F.Wu,P.Varaiya,"Foundations of the PEBS boundary surface method for Power System Transient Stability Analysis", IEEE Transactions on Circuits and Systems,Vol.35,Nº6,June 1988

[Varaiya 5] N.Tsolas,A.Arapostathis, P.Varaiya, “A Structure Preserving Energy Function for Power System Transient Stability Analysis”, IEEE Transactions on Circuits and Systems,Vol.32,N°10,October 1985

[Wimmer] H.Wimmer,“Inertia theorems for matrices,controllability and linear vibrations”, Linear Algebra and its Applications,vol.8,pp 337-343, 1974

[Wu] F.Wu, C.Liu, “Characterization of power systems small disturbance with models incorporating voltage variation”, ,IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.CAS-33,Apr.1986

CAPÍTULO 5-PROPIEDADES DEL FLUJO DE CARGAS EN CARTESIANAS

El modelo de sistema de potencia desarrollado en el Capítulo 4 es denominado habitualmente “modelo en polares”, dado que la tensión de cada barra aparece en el modelo a través de 2 variables de estado: el módulo y el ángulo de fase del correspondiente fasor.

Si se realiza el cambio de variable clásico a coordenadas cartesianas, estas tensiones aparecen en el nuevo modelo a través de 2 nuevas variables, que pueden verse como las componentes real e imaginaria del complejo cuyo módulo y ángulo de fase aparecen en el modelo en polares.

De acuerdo a lo visto en los capítulos anteriores, a efectos de calcular el margen de energía de los sistemas de potencia, es necesario encontrar sus puntos de equilibrio.

El sistema de ecuaciones algebraico que define estos puntos de equilibrio es el llamado *flujo de cargas* del sistema, y en el modelo del sistema de potencia que estamos usando las incógnitas a despejar son, precisamente, las tensiones de barra que no son constantes.

A efectos de resolver efectivamente este sistema algebraico, es de interés analizar sus propiedades cuando se realiza este cambio de variables de polares a cartesianas.

La teoría descrita en este Capítulo ha sido extraída de [Makarov].

5.1 Modelo del flujo de cargas en cartesianas

Las ecuaciones de equilibrio (flujo de cargas) del sistema de potencia en coordenadas cartesianas son las siguientes:

Ecuaciones de potencia activa (barras de carga y generación):

$$P_i + \sum_j [e_i (e_j G_{ij} - f_j B_{ij}) + f_i (f_j G_{ij} + e_j B_{ij})] = 0$$

Ecuaciones de potencia reactiva (barras de carga):

$$Q_i + \sum_j [f_i (e_j G_{ij} - f_j B_{ij}) - e_i (f_j G_{ij} + e_j B_{ij})] = 0$$

Ecuaciones de tensión (barras de generación):

$$V_i^2 - (e_i^2 + f_i^2) = 0$$

Siendo:

e_k y f_k : las componentes cartesianas (componente “real” e imaginaria”) de la tensión en cada barra “k”

V_k : el módulo de la tensión en las barras en que ésta es de módulo constante

P_k, Q_k las cargas o generaciones activa y reactiva respectivamente, y en que se asume $P_k, Q_k > 0$ si son generaciones.

G_{ij}, B_{ij} : conductancia y susceptancia de la rama que une las barras “i” y “j” ¹⁴

Se observa que si P_k, Q_k se suponen constantes o de impedancia constante (proporcionales al cuadrado de la tensión), las ecuaciones son de la forma $f(x)=y+g(x)=0$, con $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $x_k=e_k$ ó f_k , $y = (P_1, P_2, \dots, Q_1, Q_2, \dots, V_1^2, V_2^2, \dots)$ un vector constante, y $g(x)$ de segundo grado en x .

Las cargas de corriente constante no serían consideradas en este método (la forma de considerarlas sería aproximarlas (con un desarrollo de Taylor) por una función de segundo grado en x . [Makarov]).

Se analizarán por lo tanto las propiedades de ecuaciones del tipo $f(x)=y + g(x)=0$, con $x, y \in \mathbb{R}^n$, y un vector constante y $g(x)$ una función de segundo grado.

El jacobiano correspondiente será una función de primer grado en x , de la forma:

$$J(x) = f'_x(x) = g'_x(x) = \sum_j A_j x_j + B, \text{ con } A_j \text{ y } B=J(0) \text{ matrices constantes}$$

5.2 Propiedades del flujo de cargas en cartesianas

Propiedad 1

Sean x_1 y x_2 dos soluciones distintas de $f(x)=0$, $x_m = (x_1+x_2)/2$ y $\Delta = x_2-x_1$

T) $J(x_m)$ es no invertible, y Δ es el autovector derecho asociado al correspondiente autovalor nulo.

Demostración

Desarrollando por Taylor, y siendo $f(x)$ de segundo orden:

$$f(x_1)=f(x_2) + J(x_2)(-\Delta) + 1/2 W(-\Delta)$$

$$f(x_2)=f(x_1) + J(x_1) \Delta + 1/2 W(\Delta)$$

siendo $W(x)$ una forma cuadrática en x , por lo que $W(-\Delta)= W(\Delta)$

Restando miembro a miembro:

$$(J(x_1)+J(x_2)) \Delta=0 \Rightarrow \left(\sum_j A_j (x_{1,j}+x_{2,j}) + 2B \right) \Delta=0 \Rightarrow J((x_1+x_2)/2) \Delta=J(x_m) \Delta=0 \quad ///$$

Comentario

¹⁴ Se plantea un modelo general en que no se desprecian las conductancias de las ramas, si bien luego (al aplicar la función de energía) deberemos suponer $G_{ij}=0$.

Si denominamos $y' = -g(x_m)$, resulta $y' + g(x_m) = 0$, por lo que y' puede verse como el conjunto de tensiones de generación, cargas y potencias activas de generación que verifica las ecuaciones del flujo de cargas $f(x) = y' + g(x) = 0$.

x_m puede verse, por lo tanto, como una solución del flujo de cargas en ese nuevo estado de tensiones de generación, cargas y potencias generadas, con la propiedad importante adicional de que el jacobiano de este flujo $J(x_m)$ es no invertible.

Si la diferencia $y' - y$ de estos nuevos términos independientes respecto a los originales pudiera interpretarse como un aumento de cargas y variación de generación respecto al estado original " y ", habríamos encontrado en x_m un punto de colapso de tensión cercano a x_1 y a x_2 , y asociado a la variación de carga descrita por $y' - y$.

Una condición necesaria para que esta interpretación sea válida es que el signo de y' en las coordenadas asociadas a cargas o potencias generadas sea el adecuado para que en las barras correspondientes siga habiendo cargas o generaciones, según corresponda (en una ecuación " j " de potencia activa de generación, p.ej., y'_j debe ser positiva). Obviamente, esta condición no se puede asegurar que se cumpla.

No obstante, la relación $y' - y = -1/4 J(x_1)\Delta$ que veremos en seguida nos permite afirmar que para x_2 y x_1 suficientemente cerca, y' e y también están cerca, por lo que esta última condición es de esperar que "no esté muy lejos" de cumplirse.

Propiedad 2

Sea $x(\mu) = x_1 + \mu(x_2 - x_1)$ con $\mu \in \mathbb{R}$ la recta por x_1, x_2 , que se suponen soluciones de $f(x) = 0$. $f(x(\mu))$ está contenido en una recta

Demostración

$$f(x) = f(x_1) + J(x_1)(\mu \Delta) + 1/2 W(\mu \Delta) = f(x_1) + \mu J(x_1) \Delta + 1/2 \mu^2 W(\Delta)$$

$$f(x_2) = f(x_1) + J(x_1) \Delta + 1/2 W(\Delta)$$

$$\text{con } \Delta = x_2 - x_1$$

Como $f(x_2) = f(x_1) = 0$, de la segunda ecuación resulta $J(x_1) \Delta = -1/2 W(\Delta)$, y sustituyendo en la primera:

$$f(x(\mu)) = J(x_1) \Delta (\mu - \mu^2), \text{ que está contenido en una recta colineal con } J(x_1) \Delta //$$

En particular: para $\mu = 1/2$ resulta $f(x_m) = 1/4 J(x_1) \Delta = g(x_m) + y \Rightarrow$

$$y' - y = -1/4 J(x_1) \Delta.$$

Propiedad 3

La ecuación $f(x) = 0$ tiene a lo sumo 2 soluciones en cada recta de \mathbb{R}^n .

Demostración

Supongamos que existe x^* solución de la ecuación, y queremos probar que existe a lo sumo un único $\lambda \neq 0$ tal que $x^* + \lambda \Delta x$ también es solución para cada Δx .

Sea $h(x^*, \lambda) = f(x^* + \lambda \Delta x) - f(x^*)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, y $\Delta x \in \mathbb{R}^n$ dado.

Observamos que $h(x^*, \lambda) = 0 \Leftrightarrow f(x^* + \lambda \Delta x) = 0$

Desarrollando por Taylor:

$f(x^* + \lambda \Delta x) = f(x^*) + J(x^*) \lambda \Delta x + 1/2 \lambda^2 W(\Delta x) = J(x^*) \lambda \Delta x + 1/2 \lambda^2 W(\Delta x)$, dado que $f(x^*) = 0$.

$$\begin{aligned} h(x^*, \lambda) &= \left\| \lambda J(x^*) \Delta x + 1/2 \lambda^2 W(\Delta x) \right\|^2 = \\ &= \lambda^2 \left[\left\| J(x^*) \Delta x \right\|^2 + 1/4 \lambda^2 \left\| W(\Delta x) \right\|^2 + \lambda \langle J(x^*) \Delta x, W(\Delta x) \rangle \right] = \\ &= \lambda^2 (a \lambda^2 + b \lambda + c) \text{ con definiciones obvias.} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para que $x^* + \lambda \Delta x$ sea raíz de la ecuación debe ser:

$\lambda = 0$, valor asociado a x^* o
 $a \lambda^2 + b \lambda + c = 0$.

Esta última ecuación tiene a lo sumo una única raíz doble, dado que $h(x^*, \lambda) \geq 0$ ///

Propiedad 4 (Teorema “X-ray”)

Sean x_1 y x_2 distintos, con $J(x_1)$ no singular.

T) El número y ubicación de los puntos singulares (puntos en que el jacobiano es no invertible) en la recta $x_1 - x_2$ queda definido por los valores propios reales de la matriz $J^{-1}(x_1) J(x_2)$.

Demostración

$x = x_1 + \mu \Delta$ con $\Delta = x_2 - x_1$ un punto de la recta $x_1 - x_2$ distinto de x_1

De la expresión general $J = \sum_j A_j x_j + B$ se deduce:

$$\begin{aligned} J(x) &= (1 - \mu) J(x_1) + \mu J(x_2) \Rightarrow J(x) = \mu J(x_1) [J^{-1}(x_1) J(x_2) - (\mu - 1) \mu^{-1} I] = \\ &= \mu J(x_1) [J^{-1}(x_1) J(x_2) - \lambda_0 I] \text{ con } \lambda_0 = (\mu - 1) \mu^{-1} \text{ y } \mu \neq 0 \text{ un real arbitrario.} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $J(x)$ es singular $\Leftrightarrow \lambda_0$ es valor propio de $J^{-1}(x_1) J(x_2)$ ///

Comentarios

-La Propiedad marca una metodología para buscar valores singulares en la recta $x_1 - x_2$, que consiste en buscar los valores propios de $J^{-1}(x_1) J(x_2)$.

A cada uno de sus eventuales valores propios reales excepto $\lambda_0 = 1$ (si ese fuera el caso) le corresponde un μ y, por lo tanto, un correspondiente punto singular en la recta.

-Observar que, dado que x_m (el punto medio de dos soluciones x_1 y x_2) es uno de tales valores singulares, en tales condiciones se deduce que $\lambda_0 = -1$ es siempre valor propio de $J^{-1}(x_1) J(x_2)$.

-Este Teorema no se utiliza a lo largo de la Tesis, pero igual se incluye en este Capítulo a los sólo efectos de presentar una síntesis más completa de los teoremas relevantes de la teoría del flujo de cargas en cartesianas.

Referencias

[Makarov] Y.Makarov,D.Hill,I.Hiskens, “Properties of quadratic equations and their application to power system analysis”, Electrical Power and Energy Systems 22 (2000),pp 313-323.

CAPÍTULO 6-REGLAS PRÁCTICAS PARA EL CÁLCULO DE EQUILIBRIOS INESTABLES DEL FLUJO DE CARGAS

De acuerdo a la teoría desarrollada en los Capítulos 3 y 4, a los efectos del cálculo efectivo del margen de energía es necesario calcular el cuep del sistema.

Será necesario, por lo tanto, disponer de algoritmos que permitan:

- a) calcular los puntos de equilibrio inestables del sistema, y
- b) seleccionar aquéllos que estén en el borde de la región de estabilidad

Cabe destacar que no se han encontrado algoritmos eficientes que permitan detectar en forma rápida si un equilibrio pertenece o no al borde de la región de estabilidad.

Los algoritmos encontrados en la literatura [Baraya 1, Guedes 1] se basan en resolver numéricamente el sistema dinámico en ciertos intervalos limitados de tiempo, a efectos de verificar la condición necesaria y suficiente vista en el Capítulo 3 ($W^u(x_i) \cap R_A \neq \emptyset$) de pertenencia de un equilibrio inestable al borde de la región de estabilidad.

La incorporación de estos algoritmos de integración del sistema dinámico a los métodos de cálculo del cuep los enlentecen excesivamente, y “anulan” la principal ventaja (que es la velocidad de cálculo) que tienen estos métodos de energía respecto a otros métodos de cálculo de márgenes de seguridad respecto al colapso de tensión más precisos, como ser el método de continuación para el cálculo del margen de carga.

En el entendido que se debe conservar a toda costa la velocidad de cálculo, aun a expensas de sacrificar precisión, en este trabajo no se incorpora ningún algoritmo de verificación de pertenencia de los equilibrios inestables al borde de la región de estabilidad.

Se observa al respecto que si el equilibrio inestable de mínima energía calculado no perteneciera al borde de la región de estabilidad, el correspondiente margen de energía sería más pequeño que el real, lo cual introduce un factor de seguridad adicional en el margen calculado.

El número de equilibrios inestables del sistema varía fuertemente con su estado de carga, y para sistemas levemente cargados este número se estima del orden de 2^{n-1} [Klump], siendo “n” el número de barras del sistema.

Teniendo en cuenta que para un sistema relativamente pequeño como el uruguayo es $n \cong 100$, es inmediato que existe un fuerte estímulo para desarrollar algoritmos que eviten tener que calcular todos los equilibrios inestables para seleccionar de entre ellos al cuep.

Estos algoritmos deberían tratar de “filtrar” de alguna manera los equilibrios inestables de interés, que son los de tipo 1 de bajo margen de energía.

En este Capítulo se describen algoritmos para el cálculo de equilibrios inestables del flujo de cargas, así como métodos de filtrado que permiten reducir “a priori” el número de equilibrios que es necesario encontrar a efectos de calcular el margen de energía del sistema.

Se hace notar que los algoritmos de cálculo desarrollados en la literatura no tienen en su mayoría una base teórica sólida. Estos algoritmos se apoyan, más bien, en heurísticas

derivadas de la observación de los sistemas de potencia ,y de la aplicación práctica de estos algoritmos a muchos sistemas reales.

En este capítulo y en los subsiguientes se usará la abreviatura *sep* (stable equilibrium point) para denominar al punto de operación estable y *uep* (unstable equilibrium point) para denominar a un equilibrio inestable.

6.1 Hipótesis comunes a todos los métodos

Los métodos existentes en la literatura se basan en las siguientes hipótesis heurísticas:

1) Los sistemas de potencia tienen (para un estado de carga y generación y para una topología de red dada) un único punto de operación asintóticamente estable, que se caracteriza por tener valores “altos” (cercaos a 1 p.u) de tensión en sus barras.¹⁵

2) Los equilibrios inestables tipo 1 de interés se caracterizan por tener algunas barras del sistema con una tensión muy baja, en tanto que sus restantes coordenadas de tensión se mantienen muy próximas a las del equilibrio estable

Comentario

Esta hipótesis se basa en observar la forma en que se comportan los sistemas de potencia a medida que se va aumentando su carga a través de la variación cuasiestática de un parámetro unidimensional λ .

Al acercarnos a la bifurcación silla-nodo $x^*(\lambda^*)$, la teoría básica del colapso de tensión expuesta en el Capítulo 1 nos dice que se cumplen las siguientes propiedades:

a) El equilibrio estable $x_1(\lambda)$ tiende a fusionarse con un equilibrio inestable tipo 1 $x_2(\lambda)$

b) Un autovector derecho $v_1(\lambda)$ del jacobiano $J(x_1(\lambda))$ tiende a alinearse con el autovector derecho $v_2(\lambda)$ de $J(x_2(\lambda))$ correspondiente al autovalor inestable, y ambos tienden a alinearse según la recta que une $x_1(\lambda)$ con $x_2(\lambda)$

c) En el límite, cuando el sistema alcanza el colapso de tensión, $x_1(\lambda)$ y $x_2(\lambda)$ se funden en el equilibrio asociado a la bifurcación silla-nodo x^* , y $v_1(\lambda)$ y $v_2(\lambda)$ se funden en la dirección del autovector derecho v^* correspondiente al autovalor nulo de $J(x^*)$.

d) v^* (y, por lo tanto, aproximadamente v_1 y v_2) “apunta” en la dirección del espacio de estados en que se observa inicialmente el colapso de tensión (como fenómeno dinámico)

e) La tangente a la curva $x_1(\lambda)$ tiende a alinearse con $v_1(\lambda)$ y, por lo tanto, las mayores coordenadas (en módulo) de $v_1(\lambda)$ identifican aquellas barras en que las variaciones de coordenadas (tensión y ángulo) son mayores a medida que nos movemos en $x_1(\lambda)$.

¹⁵ Se han encontrado ejemplos de sistemas de potencia con más de un punto de operación estable, pero asumiendo parámetros del sistema sumamente “exóticos”.

Este conjunto de propiedades rigurosas se complementan con la siguiente hipótesis heurística adicional:

a1) Cerca del colapso de tensión, se puede elegir una orientación de v_1 con algunas de sus componentes de tensión negativas y mucho mayores (en módulo) que las restantes componentes de tensión.

Recordamos al respecto que, de acuerdo a la teoría de [Dobson 1] expuesta en el Capítulo 1 esta propiedad es parte de la definición de lo que se entiende por “colapso de tensión”.

La propiedad b) nos dice que si estamos suficientemente cerca del colapso se cumplirá $x_2 \cong x_1 + k \cdot v_1$ para algún $k > 0$ y pequeño.

Por lo tanto: usando la propiedad a1) deducimos que es de esperar que (cerca del colapso de tensión) las coordenadas de tensión de x_2 y x_1 difieran claramente sólo en algunas coordenadas. Por lo tanto (y dado que se supone que x_1 se caracteriza por tener tensiones altas), x_2 se caracterizará por tener algunas tensiones muy bajas.

La hipótesis común 2) debería aplicarse, por lo tanto, sólo a sistemas que estén lo “suficientemente cerca” del colapso de tensión para alguna dirección de carga.

Se observa también que, dado que existen infinitas maneras de hacer variar la carga en función de un parámetro λ , en principio no se puede descartar que los x_2 resultantes presenten coordenadas de tensiones de barra bajas en cualesquiera combinaciones posibles.

6.2 Método de las bajas tensiones [DeMarco 1]

De acuerdo a las hipótesis generales vistas, una forma de buscar el cuép sería:

-suponer un punto de búsqueda inicial con los mismos ángulos que x_1 , algunas coordenadas de tensión iguales a las de x_1 , y otras coordenadas de tensión mucho más bajas que las de x_1 .

-a partir de ese punto de búsqueda inicial, correr un método iterativo (por lo general: Newton Raphson en coordenadas rectangulares o polares) para resolver el sistema no lineal.

El método requiere, por lo tanto, resolver 2^m veces el sistema no lineal (flujo de cargas), siendo “m” el número de barras de tensión variable (las llamadas *barras PQ* en la teoría del flujo de cargas).

Si bien la literatura menciona métodos para mejorar la búsqueda del punto inicial (de forma de acelerar la convergencia del flujo de cargas) [Tamura], la cantidad de sistemas a resolver hace el método prohibitivo, incluso para sistemas de potencia reales pequeños.

Según [DeMarco 1] y [Tamura], se introduce la hipótesis heurística adicional:

a2) los equilibrios tipo 1 relevantes (y, en particular, el cuép) se pueden calcular con sólo asumir que cada punto de búsqueda inicial tiene una *única* tensión de barra baja.

Se consigue, por lo tanto, reducir el número de flujos de carga a resolver a tan sólo “m”.

Comentarios

a) Si existe en el sistema un conjunto de barras de carga fuertemente interconectadas, es de esperar que un aumento de carga sostenido en cualquiera de ellas termine provocando un colapso de tensión en todas ellas simultáneamente.

Si se asume un punto de búsqueda inicial con una tensión baja en una cualquiera de ellas, es de esperar, por lo tanto, que el equilibrio inestable que se obtenga al resolver el sistema tenga coordenadas de tensión bajas en todas las barras del conjunto.

Para este conjunto de barras “coherentes en tensión”, por lo tanto, el método de suponer una única barra con tensión baja para comenzar la iteración no afecta el resultado final: existirá un único x_2 asociado a todo el conjunto que se obtendrá por el método iterativo, cualquiera sea la barra del conjunto que se asuma de tensión baja para comenzar la iteración.

El método descrito se basa en este caso, por lo tanto, en la heurística de suponer que alcanza con elegir una barra representativa cualquiera de cada área coherente para formar los puntos de búsqueda inicial.

b) Quedaría por analizar el caso en que el cuep surja de asumir puntos de búsqueda inicial que combinen tensiones bajas entre las barras representativas (equivale a suponer aumentos de cargas simultáneos en diversas áreas débilmente conectadas).

Aportamos para este caso los siguientes comentarios:

b1) La referencia [DeMarco 1] muestra un ejemplo muy sencillo en que los equilibrios inestables obtenidos de esta forma *no son tipo 1*, pero no queda claro que sea un ejemplo típico

b2) Hacemos notar que un uep estará más lejos (en distancia euclidiana) del sep mientras más coordenadas bien distintas tenga respecto a las coordenadas del sep.

Por lo tanto: es de esperar que un uep con una única coordenada de tensión baja esté más cerca del sep que un uep con otra coordenada adicional de tensión baja

b3) En relación a los márgenes de energía :si consideramos el uep asociado a 2 áreas “casi totalmente” desconectadas, el margen de energía correspondiente se obtiene aproximadamente del margen correspondiente al uep asociado a una de las áreas sumándole unos pocos términos (los asociados a las barras de tensión baja de la otra área).

Recordamos al respecto que el margen de energía ME se puede calcular explícitamente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} ME = & -1/2 \sum_i \sum_k V_i V_k B_{ik} \cos(\alpha_i - \alpha_k) + \\ & + 1/2 \sum_i \sum_k V_i^s V_k^s B_{ik} \cos(\alpha_i^s - \alpha_k^s) - P(\alpha - \alpha^s) - \sum_i \int_{V_i^s}^{V_i} Q_i(x)/x dx \end{aligned}$$

con $Q_i < 0$ cuando se supone independiente de la tensión.

Los únicos términos aproximadamente no nulos son aquéllos que corresponden a coordenadas bien distintas del uep respecto del sep.

No es posible deducir de esta fórmula “a priori” si al agregar estos términos adicionales el margen de energía aumenta o disminuye ,dado que los términos adicionales correspondientes a los 2 primeros sumandos de ME tienden a aumentarlo,pero los correspondientes al último sumando tienden a disminuirlo.No obstante, algunas pruebas hechas con las redes utilizadas en el Capítulo 8 sugieren que en las redes de potencia reales el margen de energía asociado a una red formada por 2 áreas débilmente conectadas es superior al margen de energía asociado a cada área individual.

6.3 Método cartesianas [Klump]

Este método aplica alguna de las propiedades vistas del flujo de cargas en coordenadas cartesianas.

Recordamos al respecto la Propiedad 2 del Capítulo 5:

$y' - y = -1/4 J(x_1)\Delta. \Rightarrow \Delta = 4.J(x_1)^{-1}(y - y')$ (A)
(Recordar que y es el estado de cargas inicial e y' es el “estado de cargas” asociado al punto medio)

La relación nos dice que si se conoce un vector colineal con $y' - y$, es posible calcular la dirección en la cuál buscar el uep x_2 desde x_1 .

El Método cartesianas se apoya en la siguiente hipótesis heurística adicional:

a3) Para cada x_2 el conjunto de parámetros “ y ” asociado a cada x_m se puede obtener aproximadamente a partir del conjunto inicial “ y ” con sólo aumentar carga reactiva en una sólo de las barras del sistema.

Comentarios

-Esta hipótesis se basa en suponer que x_m es aproximadamente un punto de colapso de tensión del sistema cercano a x_1 y x_2 . Ya hemos observado (al desarrollar la teoría del flujo de cargas en cartesianas) que esto no es estrictamente cierto.

-La suposición de que se puede alcanzar este punto de colapso cercano a x_2 aumentando reactiva en una única barra se basa en la misma heurística mediante la cuál en el Método de las bajas tensiones se buscó el cuep asumiendo que tenía una única coordenada de tensión pequeña.

Se recuerda al respecto que en los sistemas de potencia reales las variaciones de carga reactiva afectan fuertemente las tensiones en las barras en que ocurren estas variaciones.

En función de esta hipótesis, el Método cartesianas consta de los siguientes pasos:

1) Se toma $y - y'$ como un vector con una única coordenada no nula, asociada a la ecuación de reactiva de alguna de las barras de carga del sistema

2) A partir de la relación (A) se calcula la dirección Δ de búsqueda de x_2 .

3) Mediante los métodos ya explicados al desarrollar la teoría del flujo de cargas en cartesianas se calcula un x_2 en la dirección Δ (que puede no existir)

Comentario:

Ya vimos en el Capítulo 5 cómo armar una ecuación de cuarto grado para encontrar x_2 , y que la condición para que exista la raíz es que la ecuación tenga una raíz doble no nula.

Esta condición es difícil de verificar en la práctica, dado que los errores numéricos de cálculo de los coeficientes de la ecuación tienden a “sacar” a las raíces de la condición de raíz doble.

En la práctica, por lo tanto, se procede distinto [Klump]:

a) en vez de resolver la ecuación, se busca el mínimo x_{\min} de la correspondiente función de cuarto grado

b) se toma x_{\min} como punto inicial de un proceso Newton-Raphson para encontrar la raíz exacta.

Todos los posibles x_2 se calcularían, por lo tanto, haciendo variar la coordenada no nula en el Paso 1), y el número máximo de uep que se calculan es, nuevamente, el número de barras de carga del sistema.

En las aplicaciones descritas en el Capítulo 8 se ensaya también una pequeña variante de este método. Recordamos al respecto que en el Capítulo 5 se muestra que la ecuación de cuarto grado que define las soluciones en la dirección de búsqueda se puede factorizar como $f(x) = x^2 g(x)$, con $g(x)$ de segundo grado. La variante ensayada consiste, simplemente, en buscar el mínimo de $g(x)$, en vez de buscar el mínimo de la función completa $f(x)$.

Este método de cálculo alternativo es un aporte original de esta Tesis

6.4 Métodos de filtrado

6.4.1 Introducción

Los métodos descritos anteriormente proponen calcular el margen de energía a través del cálculo de un número de equilibrios inestables (uep) igual al número de barras de carga del sistema.

Para sistemas de tamaño mediano (del orden de 100 barras de carga) o grande (varios miles de barras de carga) la carga computacional de realizar el cálculo de un número tan grande de uep es aún muy alta.

Se han desarrollado, por lo tanto, métodos de “filtrado” de los uep, que permitan prever en forma aproximada cuáles son las barras del sistema (barras críticas) en las cuáles un aumento de carga hace disminuir más rápidamente el margen al colapso de tensión.

Estas barras serían “candidatas naturales” a generar los uep de margen de energía más bajo, por lo que el cálculo de los uep se reduciría a asumir tensión baja sólo en esas barras (Método de las bajas tensiones) o asumir aumento de carga reactiva sólo en esas barras (Método cartesianas).

Los métodos de filtrado se basan habitualmente en tratar de detectar cuáles son las barras en que la tensión tiende a descender más rápidamente a medida que se va aumentando la carga en el sistema.

Dado que el colapso de tensión es un fenómeno no lineal, estos métodos podrían no detectar barras críticas que mantienen su tensión bastante alta aun muy cerca del punto de colapso. Esta situación puede darse, en particular, en el caso de barras de carga muy cercanas a barras de tensión controlada por generadores o barras de carga con tensión controlada por bancos de capacitores.

Se hace notar, finalmente, que los dos métodos de filtrado que se van a describir se han desarrollado originalmente para los métodos “paso a paso” de cálculo del colapso de tensión.

6.4.2 Método del vector tangente [Cañizares]

Sea $F(z, \mu) = 0$ la ecuación de equilibrio de nuestro sistema de potencia, siendo $z = (\alpha, V)$ el vector de variables de estado en polares y $\mu = \mu(\lambda)$ el vector de variaciones de cargas, en que λ es un parámetro escalar.

⇒

$\frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{d\mu} + \frac{\partial F}{\partial \mu} = 0$ en cada punto de equilibrio, y particularmente en el punto de equilibrio inicial de operación (el sep).

⇒

$\frac{dz}{d\mu} = -J^{-1} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mu}$ siendo $J = \frac{\partial F}{\partial z}$ el jacobiano del sistema en el sep.

Comentario

J es no singular en el sep dado que (como sabemos), se hace singular recién en el punto de colapso.

Si centramos la atención en las componentes de z que son tensiones V_j de barras de carga “j”, el valor de $dV_j/d\mu$ nos dice aproximadamente qué tanto varía la tensión en la barra “j” frente a una variación de carga.

El método consiste, por lo tanto, en:

-calcular $dz/d\mu$ de acuerdo a la fórmula vista

-seleccionar como barras críticas aquéllas barras con componente $dV_j/d\mu$ grande en módulo

Caso particular:

En las aplicaciones nos interesará utilizar este método para el caso particular en que las ecuaciones del sistema en equilibrio son las del flujo de cargas, y se aumenta carga reactiva en una única barra “k” del sistema.

La forma explícita de la ecuación de equilibrio del sistema $F(z, \mu) = 0$ será en este caso (para un sistema de “n” barras, “m” de las cuáles son de carga):

$f_j(z) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, n-1$ (ecuaciones de activa en todas las barras, excepto la “slack”)

$g_j(z) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ (ecuaciones de reactiva en todas las barras de carga, excepto la barra “k”)

$g_k(z) + \mu = 0$ (ecuación de reactiva en la barra “k”)

Por lo tanto: $\partial F / \partial \mu$ es un vector constante (independiente de μ), con todas sus coordenadas nulas excepto una única coordenada que vale 1.

Se deduce que $dz/d\mu$ no es más que una de las columnas de la matriz J^{-1} , por lo que para este caso particular la selección de las barras críticas se reduce a analizar las componentes más grandes (en módulo) de la parte de esa columna asociada a las componentes de tensión de z.

6.4.3 Método de análisis modal [Tutorial]

Este método no es más que una simplificación del anterior, basada en que cerca del punto de colapso el vector tangente $dz/d\mu$ tiende a alinearse con el autovector de J asociado con el valor propio que termina anulándose en el punto de colapso.

Sea v el autovector (derecho) de J asociado al valor propio más pequeño (en módulo), y v' el subvector de v asociado a las componentes de tensión de z.

El método consiste, simplemente, en asociar las barras críticas a las componentes más grandes (en módulo) de v' .

Se observa que (salvo casos particulares como el indicado más arriba) este método selecciona las barras críticas en forma independiente de la dirección de carga, lo cuál es una posible fuente de imprecisión.

Una forma aproximada de tener en cuenta en este método la dependencia con la dirección de carga, consiste en considerar simultáneamente varios valores propios más pequeños en vez de uno sólo. Esta variante trata de contemplar el hecho de que no necesariamente el autovalor más pequeño es el que (a medida que varía λ , describiendo diversas direcciones de carga) finalmente termina anulándose al llegar el sistema al colapso de tensión.

Referencias

[Cañizares] A.de Souza,C.Cañizares,V.Quintana, “New techniques to speed up voltage collapse computations using tangent vectors”, IEEE Transactions on Power Systems,Vol.12,Nº3,Aug.1997

[DeMarco 1] T.Overbye,C.DeMarco,”Improved techniques for power system voltage stability assessment using energy methods”, IEEE Transactions on Power Systems,Vol.6,Nº4,Nov.1991

[Dobson 1] I.Dobson,H.Chang, “Towards a theory of voltage collapse in electric power systems” ,Systems & Control Letters 13 (1989),pp.253-262, North Holland

[Guedes 1] R.Guedes,L.Alberto,N.Bretas,”Power system low voltage solutions using an auxiliary gradient system for voltage collapse purposes” IEEE Transactions on Power Systems,Vol.20,Nº3,Aug.2005

[Guedes 2] R.Guedes,L.Alberto,N.Bretas,”Low voltage solutions calculation for voltage stability analysis using energy methods” .2001 IEEE Porto Power Tech Conference,Sep.2001

[Klump] T.Overbye,R.Klump, “Effective calculation of power system low voltage solutions” , IEEE Transactions on Power Systems, Vol.11, Nº1,Feb.1996

[Makarov] Y.Makarov,D.Hill,I.Hiskens, “Properties of quadratic equations and their application to power system analysis”, Electrical Power and Energy Systems 22 (2000),pp 313-323.

[Tamura] Y.Tamura,K.Iba,S.Iwamoto,”A method for finding multiple load flow solutions for general power systems”.Proc.IEEE PES Winter Meeting, A80 043-0,New York,Feb.1980

[Tutorial] Voltage stability assessment procedures and guides (Draft). IEEE/PES Power system stability subcommittee, April 1999 www.power.uwaterloo.ca

[Varaiya 1] H.Chiang,F.Wu,P.Varaiya,“Foundations of direct methods for power system transient stability analysis”,IEEE Transactions on Circuits and Systems,Vol.CAS-34,Nº2,Feb.1987

CAPÍTULO 7-RELACIONES ENTRE MARGEN DE ENERGÍA Y MARGEN DE CARGA

Si bien el margen de energía ha mostrado ser un indicador valioso para identificar rápidamente qué tan cerca está un sistema de potencia de llegar al colapso de tensión, el margen de carga es (de alguna forma) el “preferido” por los operadores del sistema, dado que tiene la gran ventaja de tener un significado físico intuitivo y sencillo.

Una vez calculado el margen de energía del sistema es de interés, por lo tanto, obtener algunas conclusiones (aunque sólo sea aproximadas) sobre el correspondiente margen de carga del sistema.¹⁶

En este capítulo se exponen dos métodos que permiten calcular en forma aproximada:
-el margen de carga asociado a una dirección de carga dada a partir del margen de energía asociado a la misma dirección de carga
-el colapso de tensión más cercano en las cercanías de la dirección de carga asociada a un punto de equilibrio inestable dado

Cabe destacar que, si bien ambos métodos se pueden extender para su aplicación a direcciones de carga arbitrarias, nosotros nos centraremos en el caso particular en que la dirección de carga es el aumento de reactiva en una única barra del sistema (se habla en tal caso de “margen de reactiva” de la barra). Esto se debe a que las aplicaciones del Capítulo 8 se centran exclusivamente en este caso.

7.1 Método de Dobson para el cálculo aproximado de márgenes de reactiva [Dobson 5]

7.1.1 Método original de Dobson

Si bien la teoría de márgenes de energía la hemos desarrollado para modelos genéricos $Q(V)$ de variación de cargas reactivas con la tensión, en los desarrollos que siguen es necesario suponer que las cargas reactivas son independientes de la tensión.

Sean:

Q_{0j} =carga reactiva inicial de la barra en estudio “j”

Q_{maxj} =carga reactiva de la barra en estudio cuando se llega al colapso de tensión

MR =Margen de reactiva= $Q_{maxj}-Q_{0j}$

ME =Margen de energía asociado a esa variación de carga

$x_s = (\alpha_s, V_s)$ punto de operación estable del sistema (sep), cuyas componentes son los módulos de la tensión y sus ángulos de fase en todas las barras del sistema.

¹⁶ Por supuesto que el margen de carga siempre es calculable a través de métodos “paso a paso”, pero la idea es evitar tener que introducir métodos de cálculo excesivamente lentos.

$x_u = (\alpha_u, V_u)$ solución inestable del sistema (uep) asociada a la variación de carga supuesta, cuyas componentes son los módulos de la tensión y sus ángulos de fase en todas las barras del sistema.

$x^* = (\alpha^*, V^*)$ punto de colapso de tensión del sistema asociado a la variación de carga supuesta, cuyas componentes son los módulos de la tensión y sus ángulos de fase en todas las barras del sistema.¹⁷

$V_{sj}, V_{uj} =$ componente “j” de los vectores V_s, V_u

Recordamos que, de acuerdo a la teoría del colapso de tensión, a medida que aumenta la carga en el sistema en la forma supuesta, x_s y x_u se terminan fundiendo en un único punto de colapso x^* .

De acuerdo a la teoría de funciones de energía vista:

$$W(x_s, x_u) = \int_{x_s}^{x_u} \langle (f, g), (d\alpha, dV) \rangle, \text{ siendo } f=(f_1, f_2, \dots) \text{ y } g=(g_1, g_2, \dots) \text{ las ecuaciones de}$$

balance de potencia activa y reactiva en todas las barras del sistema y W el margen de energía asociado a x_u .

Observamos que, de acuerdo al teorema fundamental del cálculo:

$$\partial W / \partial x_s = (-f(\alpha_s, V_s), -g(\alpha_s, V_s)) = (0, 0, \dots, 0), \text{ dado que } (\alpha_s, V_s) \text{ es un punto de equilibrio del sistema}$$

$$\text{En forma análoga: } \partial W / \partial x_u = (0, 0, \dots, 0)$$

Supongamos que hacemos variar la carga reactiva Q_j de la barra en estudio, desde Q_{0j} hasta $Q_{\max j}$.

De acuerdo a los desarrollos vistos en el Capítulo 4, la expresión explícita de $W(x_s, x_u)$ es de la forma:

$$W(x_s, x_u) = A(x_s, x_u) + \int_{V_{sj}}^{V_{uj}} Q_j(x) / x \, dx, \text{ en que } A(x_s, x_u) \text{ es independiente de } Q_j$$

Por lo tanto:

$$dW/dQ_j = \partial W / \partial x_s \cdot \partial x_s / \partial Q_j + \partial W / \partial x_u \cdot \partial x_u / \partial Q_j + \partial W / \partial Q_j = \ln(V_{uj} / V_{sj}), \text{ y teniendo en cuenta que acabamos de observar que los 2 primeros sumandos son nulos.}$$

Por lo tanto:

$$\int_{Q_{0j}}^{Q_{\max j}} dW/dQ_j \, dQ_j = W(x_s(Q_{\max j}), x_u(Q_{\max j})) - W(x_s(Q_{0j}), x_u(Q_{0j})) = -W(x_s(Q_{0j}), x_u(Q_{0j})), \text{ dado que } x_s(Q_{\max j}) = x_u(Q_{\max j}) \text{ (pues las soluciones se funden en el punto de colapso)} \Rightarrow$$

¹⁷ En relación a la teoría desarrollada en el Capítulo 4, se ha suprimido en todos los casos la referencia explícita a la variable de estado ω , dado que trabajaremos exclusivamente con puntos de equilibrio, en todos los cuáles $\omega=0$.

$$\int_{Q_{0j}}^{Q_{\max j}} (\ln(V_{sj}) - \ln(V_{uj})) dQ_j = W(x_s(Q_{0j}), x_u(Q_{0j})) = ME \text{ (por definición)}$$

Se deduce: el margen de energía no es más que el área encerrada por la curva $Q(V)$, cuando las tensiones se expresan en escala logarítmica.

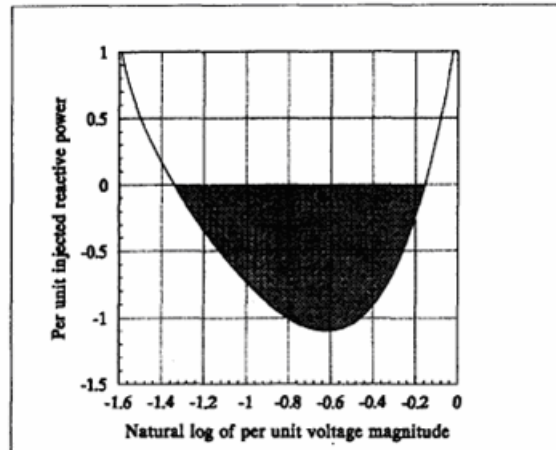


Figura 7.1 Interpretación del margen de energía [Dobson 5]

(En la figura se han tomado las cargas reactivas con signo negativo, y se ha asumido que la carga reactiva inicial es nula)

A efectos de calcular el margen de reactiva se asume en [Dobson 5], finalmente, que la curva $Q-\ln(V)$ es (aproximadamente) una parábola.

Con esta hipótesis adicional, el área a calcular resulta:

$$ME = (Q_{\max j} - Q_{0j}) \cdot \frac{2}{3} \cdot (\ln(V_{sj}) - \ln(V_{uj})) \Rightarrow MR = \frac{3}{2} \cdot ME / (\ln(V_{sj}) - \ln(V_{uj}))$$

La fórmula obtenida nos permite, por lo tanto, un cálculo inmediato del margen de energía a partir del margen de reactiva y de las tensiones del sep y del uep en la barra "j".

Comentario.

La aplicación práctica de la fórmula depende de que podamos identificar el uep asociado a la variación de carga reactiva en la barra "j".

7.1.2 Método alternativo

Como hemos visto, la fórmula obtenida se basa en la hipótesis heurística de que la curva $Q-\ln(V)$ tiene forma parabólica; al menos suficientemente cerca del punto de colapso.

Una variante a esta hipótesis es suponer que la propia curva $Q-V$ tiene forma parabólica.

Esta aproximación está sustentada en la propia teoría de las bifurcaciones silla nodo, y ha sido usada repetidamente en el pasado para aproximar los diagramas de bifurcación cerca de la bifurcación silla-nodo [Ejebe].

Supongamos, por lo tanto, que la curva $Q(V_j)$ es de la forma:

$$Q(V_j) - Q_{0j} = a \cdot V_j^2 + b \cdot V_j + c$$

Invirtiendo los ejes coordenados para calcular el área de la figura:

$$ME = \int_{V_{uj}}^{V_{sj}} (Q(V_j) - Q_{0j}) / V_j \, dV_j = a/2 \cdot (V_{sj}^2 - V_{uj}^2) + b \cdot (V_{sj} - V_{uj}) + c \cdot \ln(V_{sj} / V_{uj})$$

Conocido ME, esta relación impone una primera condición que deben cumplir los coeficientes a, b, c

Las restantes condiciones necesarias para calcular a, b y c se obtienen imponiendo que la parábola pase por los puntos $(V_{sj}, 0)$ y $(V_{uj}, 0)$.

Finalmente, conocidos a, b y c se puede calcular:

$$MR = Q(V_j^*) - Q_{0j} = a \cdot V_j^{*2} + b \cdot V_j^* + c, \text{ siendo } V_j^* = -b/(2a) \text{ el vértice de la parábola (o lo que es lo mismo: la tensión en la barra "j" en el punto de colapso).}$$

Este método de cálculo alternativo es un aporte original de esta Tesis.

7.2 Cálculo aproximado del colapso de tensión más cercano [Yorino]

7.2.1 Modelo del sistema

Suponemos un sistema con m barras de carga y n de generación, siendo el generador "n" la barra infinita (barra *slack*).

Trabajaremos con modelos del sistema como los descritos en el Capítulo 1 en relación a la teoría del colapso de tensión más cercano.

Las ecuaciones del sistema en coordenadas polares son:

$$\begin{aligned} P_k + \mu'_k &= p_k(x) && \text{Ecuaciones de activa de las cargas, } k=1,2,\dots,m \\ Q_k + \mu''_k &= q_k(x) && \text{Ecuaciones de reactiva de las cargas, } k=1,2,\dots,m \\ P'_k &= g_k(x) && \text{Ecuaciones de activa de las generaciones, } k=1,2,\dots,n-1 \end{aligned}$$

$\mu = (\mu'_1, \mu'_2, \dots, \mu'_m, \mu''_1, \dots, \mu''_m)$ es el vector de variaciones de cargas del sistema, dependiente a su vez de un cierto parámetro escalar λ

$x = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m+n-1}, V_1, \dots, V_m)$ es el vector de incógnitas (ángulos y módulos de tensiones)

Las ecuaciones se pueden expresar en forma compacta como:

$$y(\mu) = f(x), \text{ siendo } y = (P_1 + \mu'_1, \dots, Q_m + \mu''_m, P'_1, \dots, P'_{n-1}) \text{ el estado de cargas y generaciones del sistema, y } f = (p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m, g_1, \dots, g_{n-1})$$

o alternativamente como:

$$F(x, \mu) = y(\mu) - f(x) = 0$$

Sea $J(x) = F_x(x, \mu) = -f_x(x)$, siendo (x, μ) una solución del sistema.

Observar que estamos asumiendo en este modelo que todas las variaciones de carga definidas por μ serán absorbidas por la barra slack.

7.2.2 Definiciones preliminares

Suponemos que conocemos un estado de operación estable inicial $y_1 = y(0) = f(x_1)$, y que x_2 es una solución inestable (uep) del sistema de ecuaciones $y_1 = f(x)$.

Sean z_1 y z_2 los estados correspondientes a x_1 y x_2 en coordenadas cartesianas (parte real e imaginaria de las tensiones de barra, en vez de módulo y ángulo). Sabemos que el punto medio $z_m = (z_2 + z_1)/2$ cumple la propiedad de que $J(x_m)$ es no invertible, siendo x_m el estado z_m expresado en coordenadas polares.

Comentario. Por supuesto que la propiedad de ser no invertible es también válida para $J(z_m)$, en que ahora el jacobiano se calcula para el modelo del sistema en cartesianas.

Sea $y_m = f(x_m)$ y $\mu_1 = (y_{m,1} - P_1, \dots, y_{m,m} - P_m, y_{m,m+1} - Q_1, \dots, y_{m,2m} - Q_m)$ el vector de variaciones de carga asociado a x_m .

Sea, finalmente, w_m el autovector izquierdo de $J(x_m)$ asociado a su autovalor nulo.

7.2.3 Revisión de la teoría básica del colapso de tensión más cercano

Recordamos los siguientes aspectos básicos de la teoría del colapso de tensión más cercano, ya descritos en el Capítulo 1 :

a) $\Sigma = \{ \mu / F(x, \mu) = 0 \text{ y } J(x) \text{ es no invertible} \}$ es una unión de hipersuperficies (las hipersuperficies de los “límites de cargabilidad”) en el espacio de las cargas μ .

b) Si $\mu^* \in \Sigma$, x^* es tal que $F(x^*, \mu^*) = 0$ y $J(x^*)$ es singular, y w es el autovector izquierdo (expresado como vector fila) de $J(x^*)$ para el autovalor nulo, el vector $wF_\mu(x^*, \mu^*)$ es normal a Σ en μ^* .

Para el modelo particular que estamos considerando, bastará con poner $wF_\mu(x^*, \mu^*)$ como wF_μ “a secas”, dado que F_μ es una matriz constante.

c) El margen de carga mínimo (colapso de tensión más cercano) se dará para μ^* colineal con wF_μ :

$$\mu^* = k \cdot wF_\mu \text{ para algún } k.$$

(En principio, nada asegura que el tal μ^* sea único, de ahí que se hable de colapsos de tensión más cercanos “locales”, i.e.: en las cercanías de una dirección de carga dada)

7.2.4 Cálculo aproximado del punto de colapso más cercano

El método de aproximación a desarrollar consiste en ir introduciendo factores de corrección a μ_1 , de forma de poder encontrar un μ^* aproximado en sus cercanías (ese

colapso de tensión más cercano aproximado es también “local”, en el sentido de que se asocia al x_2 inestable con que se calculó μ_1).

Las hipótesis a usar son las siguientes:

1) $\mu_1 \in \Sigma$.

Se hace notar que esta hipótesis es necesaria dado que, si bien $J(x_m)$ es no invertible, nada asegura que $F(x_m, \mu_1) = 0$.

Observar, no obstante, que la definición de μ_1 se hizo, precisamente, para que (x_m, μ_1) sea solución de las ecuaciones de activa y reactiva de las cargas (pero no necesariamente de las ecuaciones de activa de la generación).

2) μ^* y μ_1 están lo suficientemente cerca como para poder aproximar Σ por un hiperplano que contiene a ambos puntos

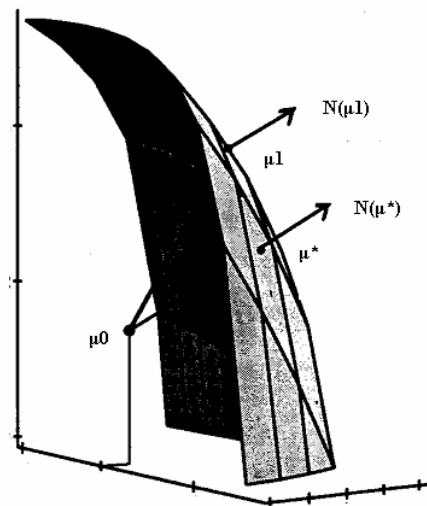


Figura 7.2 Cálculo aproximado del colapso de tensión más cercano-
Adaptada de [Dobson 3]

La hipótesis 2) nos dice que $N(\mu^*) = w F_\mu$ y $N(\mu_1) = w_m F_\mu$ son colineales, por lo que $w_m F_\mu$ es colineal con μ^* .

De acuerdo a la hipótesis 1), para encontrar μ^* bastará, por lo tanto, con proyectar μ_1 sobre $N = N(\mu_1)$ (Ver Figura 7.2) :

$$\mu^* = \|\mu_1\| \cdot \cos\theta \cdot n, \text{ siendo } n = N / \|N\| \text{ y } \cos\theta = \langle n, \mu_1 \rangle / \|\mu_1\|$$

El vector μ^* obtenido define la dirección de carga asociada al punto de colapso más cercano aproximado.

7.2.5 Corrección adicional

Para tener en cuenta de alguna forma la curvatura de Σ , se suele corregir μ^* , multiplicándolo por un factor de corrección algo menor que 1 (valor propuesto en [Yorino]: entre 0,9 y 1)

Comentario

El procedimiento matemático utilizado no asegura que la dirección de carga obtenida sea admisible desde el punto de vista físico.

En particular: podrían obtenerse por este método cargas activas negativas en el punto de colapso, lo cuál no tiene sentido físico.

En las aplicaciones prácticas: en caso que alguna de las cargas activas $P_k + \mu_{1,k}$ resulte negativa, se puede optar simplemente por poner esa coordenada en "0" en la dirección de carga final.

Referencias

[Dobson 3] F.Alvarado,I.Dobson,Y.Hu, “Computation of closest bifurcations in power systems”, IEEE Transactions on Power Systems,Vol.9, N°2, May.1994

[Dobson 5] T.Overbye,I.Dobson ,“Q-V curve interpretations of energy measures for voltage security”,IEEE Transactions on Power Systems,Vol.9,N°1,February 1994

[Ejebe] G.Ejebe,G.Irisarri,S.Mokhtari,O.Obadina,P.Ristanovic,J.Tong, “Methods for contingency screening and ranking for voltage stability analysis of power systems”, IEEE Transactions on Power Systems,Vol.11,N°1,February 1996

[Yorino] N.Yorino,S.Harada,H.Cheng,”A method to approximate a closest loadability limit using multiple load flow solutions” ,IEEE Transactions on Power Systems,Vol.12, N°1,Feb.1997

CAPÍTULO 8-APLICACIONES

En este capítulo se describen algunas aplicaciones de la teoría descrita en los capítulos anteriores.

A esos efectos, se desarrollaron rutinas de cálculo en ambiente MatLab que se aplicaron a redes de prueba de tamaño creciente, a fin de comprobar su desempeño en escenarios de complejidad diversa.

Los programas se desarrollaron de forma de poder manejar archivos de datos compatibles con el programa Estten [AM], a fin de poder comparar los resultados obtenidos con los que se obtienen si se calculan en las mismas redes márgenes de carga convencionales mediante uno de los métodos “paso a paso” (el método de continuación).

En el Anexo 7 se describen en forma sintética los programas desarrollados.

8.1 Síntesis de las aplicaciones realizadas

Se realizaron aplicaciones de la teoría vista en relación a los siguientes 2 aspectos principales:

1)Cálculo de uep y márgenes de energía (Ver secciones del Capítulo 6 indicadas entre paréntesis)

En esta parte del trabajo se desarrollaron programas que permiten calcular los márgenes de energía en sistemas de potencia.

A esos efectos, se elaboraron y aplicaron a las redes de prueba las siguientes rutinas de cálculo:

- Cálculo de los equilibrios inestables (uep) mediante el método de bajas tensiones (6.2)
- Cálculo de los uep mediante el método cartesianas, en sus 2 variantes (6.3)
- Cálculo del margen de energía (6.2)
- Filtrado de uep mediante análisis modal (6.4.3)
- Filtrado de uep mediante el método del vector tangente (6.4.2)

2)Cálculo aproximado de márgenes de carga (Ver secciones del Capítulo 7 indicadas entre paréntesis)

A efectos de probar los métodos aproximados de cálculo de margen de carga a partir del margen de energía, se desarrollaron y aplicaron a las redes de prueba las siguientes rutinas de cálculo:

- Cálculo aproximado del margen de carga reactiva, en su versión original de Dobson (7.1.1)
- Cálculo aproximado del margen de carga reactiva, en su versión alternativa (7.1.2)
- Cálculo aproximado del colapso de tensión más cercano (7.2)

8.2 Redes analizadas

Se realizó una comparación preliminar de la eficiencia de los 3 métodos de cálculo de uep en las siguientes redes:

1) Red de 3 barras, denominada “Red 3-1”. Esta red resulta interesante de analizar dada la simetría de la red y de las cargas.

2) Red de 3 barras, denominada “Red 3-2”. Esta red está formada por 2 circuitos radiales sólo conectados por una barra “slack”, por lo que se sabe “a priori” que tiene exactamente 3 uep (2 con tensión baja en cada una de las barras de carga y el tercero con tensión baja en ambas barras de carga simultáneamente)

3) Red de 16 barras, denominada “Red 16”.

4) Finalmente, se realizaron algunas aplicaciones del método desarrollado a un modelo de la red de Trasmisión uruguaya completa para el año 2007, de 117 barras.

Los datos de las 3 primeras redes analizadas se incluyen en el Anexo 5.

8.3 Comparación de los métodos de cálculo de uep

En las Tablas siguientes se muestran los resultados obtenidos aplicando los tres distintos métodos de cálculo mencionados más arriba:

1) Método de las bajas tensiones (BT).

2) Método cartesianas (CART1), siguiendo la metodología original descrita en [Klump]

3) Método cartesianas (CART2), siguiendo la metodología alternativa propuesta en el Capítulo 6 de este trabajo.

En todos los casos, se comenzó buscando el punto de operación estable (sep) mediante un flujo de cargas convencional en coordenadas polares. Este flujo de cargas aplica el método de Newton Raphson a partir de un punto de iteración inicial definido en el archivo de datos. Esta rutina no se desarrolló en el marco de esta tesis, sino que se hizo uso de la misma rutina que utiliza el conjunto de programas Estten.

El sep es necesario tanto para calcular el margen de energía como para obtener los puntos de iteración inicial para los 2 métodos en cartesianas.

El sep obtenido se utiliza, además, para identificar los generadores que alcanzan sus límites de reactiva en el punto de operación inicial. Dado que los uep se deben obtener resolviendo exactamente el mismo sistema de ecuaciones del cuál es solución el sep, estos generadores deben suponerse también funcionando en sus límites de reactiva a efectos de calcular los uep.

En los 3 casos, los uep se obtuvieron a partir de los puntos de iteración inicial definidos por cada método a partir de una rutina casi idéntica a la utilizada para calcular el sep.

En todos los casos las tablas muestran las tensiones p.u en las barras de carga obtenidas para cada uno de los uep, y los márgenes de energía p.u correspondientes.

A)Red 3-1

Los 3 métodos encontraron prácticamente los mismos 2 uep, de acuerdo al detalle de la tabla siguiente:

Barra	uep1	uep2
Bus 1	0.2183	0.3407
Bus 2	0.3407	0.2183
Margen de energía	0.8575	0.8575

Tabla 8.1 Resultados en la red 3-1

B)Red 3-2

Barra	uep1 (todos)	uep2 (BT)	uep2 (CART1)	uep2 (CART2)
Bus 1	0.4326	0.6230	0.6235	0.4317
Bus 2	0.7463	0.2396	0.7463	0.7463
Margen de energía	0.125	1.5124	0	0.125

Tabla 8.2 Resultados en la red 3-2

Comentarios

-Se observa que en esta aplicación del método CART1 el uep2 coincide con el sep (ese es el motivo, obviamente, por el cual su margen de energía es 0). Esta situación se observó en otros casos de prueba, tanto para el método CART1 como CART2.

Esta situación se da cuando el punto inicial calculado es de tensiones relativamente altas.

Como se explica en el Anexo 7, para el método CART2 se implementó una rutina que permite identificar estas situaciones y (en caso que se den), "afina" la búsqueda del uep disminuyendo en pasos sucesivos las tensiones iniciales, sin apartarse de la dirección de búsqueda del uep impuesta por el método.

-Se observa que en esta aplicación del método CART2 el uep2 coincide con el uep1. Se podría evitar que esto ocurra implementando una corrección similar a la señalada más arriba para evitar "reencontrar" el sep. No obstante, se observó que la implementación de esta corrección adicional enlentece excesivamente el cálculo, lo cual se entendió incompatible con los objetivos del método.

-Si bien los uep2 obtenidos no coinciden, se observa que en los 3 casos se identificó correctamente el margen de energía del sistema (margen de energía mínimo no nulo).

-Se observa asimismo que los uep calculados por el método BT y sus márgenes de energía coinciden dentro de un margen de error razonable (del orden del 5 %) con los publicados en la referencia [De Marco 1] (Cabe destacar al respecto que la información de la red publicada en esta referencia no es totalmente completa, por lo que en rigor no se puede asegurar que se haya trabajado con una red idéntica)

C)Red 16

En la Tabla siguiente se comparan en forma sintética los principales resultados obtenidos, en tanto que el detalle de estos resultados se muestra en el Anexo 6.

	BT	CART1	CART2
Número de uep encontrados	12	7	12
Número de uep iguales a los del método BT	12	5	8
Margen de energía del sistema	2.151	2.176	2.151
Segundo margen de energía más bajo	2.176	4.282	2.176
Tercer margen de energía más bajo	3.496	9.346	3.496

Tabla 8.3 Comparación de resultados en la Red 16

Se observa que con los métodos BT y CART2 se obtiene el mismo margen de energía del sistema, e incluso se obtienen los mismos 2 márgenes de energía siguientes más bajos.El método CART1, en cambio, muestra más dificultades para converger a los uep y proporciona resultados más imprecisos.En particular:el método CART1 no calcula con exactitud el margen de energía del sistema.

8.4 Método de cálculo de uep seleccionado para las restantes aplicaciones

Una vez realizada la comparación de los 3 métodos de cálculo de uep, los restantes casos de prueba se corrieron sobre la red de 16 barras (Red 16), y haciendo uso exclusivamente del método de cálculo de uep en cartesianas CART2.

Se optó por seguir trabajando con uno de los 2 métodos en cartesianas, debido a que los métodos en cartesianas descritos permiten identificar fácilmente la dirección de carga aproximada asociada a cada uep calculado. (Se recuerda que, de acuerdo a lo visto al describir la teoría correspondiente en el Capítulo 6, los métodos en cartesianas asumen una dirección de carga de aumento de potencia reactiva en una barra del sistema).

La identificación inmediata de la dirección de carga permite hacer comparaciones rápidas con los métodos clásicos “paso a paso”.

El motivo por el cuál se optó por seguir trabajando con CART2 en vez de CART1 es que (como se ha visto), de los 2 métodos en cartesianas comparados es el que mostró un mejor desempeño en el cálculo de los uep y del margen de energía del sistema.¹⁸

8.5 Comparación con el método de continuación

Se comparó el resultado obtenido sobre Red 16 aplicando el método CART2 ,con el obtenido aplicando el método “paso a paso” de continuación sobre la misma red.

A esos efectos, se realizaron 12 corridas del programa Estten sobre la misma red, cada una de ellas con una dirección de carga correspondiente al aumento de potencia reactiva en cada una de las barras de carga del sistema.

Se eligieron estas direcciones de carga dado que, como ya se ha visto, los métodos de cálculo en cartesianas asumen que se aumenta potencia reactiva en una barra a efectos de definir la dirección de búsqueda de cada uep.

El resultado que proporciona el programa Estten es el margen de carga del sistema para cada dirección de carga (en este caso: cantidad de potencia reactiva que es necesario agregar en cada barra para llegar al colapso de tensión), por lo que, obviamente, no es posible hacer una comparación directa con los márgenes de energía obtenidos con el método CART2.

No obstante, sí es posible observar si las barras asociadas a los menores márgenes de carga coinciden aproximadamente con las barras asociadas al menor margen de energía.

Barra	Margen de carga(Mvar)	Margen de energía (p.u)
2	459.4	9.346
4	1282.7	26.0
5	543.9	3.574
6	371.5	10.623
7	1269.6	23.585
9	148.2	2.176
10	175.04	5.134
11	223.4	8.180
12	145.5	2.151
13	643.7	12.760
14	589.9	11.291
16	165.8	3.496

Tabla 8.4 Comparación entre margen de energía y margen de carga en Red 16

¹⁸ En lo que hace a la velocidad de cálculo, se observó que el método BT es el que muestra un mejor desempeño.

Se observa que los 3 márgenes de carga mínimos (resaltados en negrita en la Tabla) se obtienen aumentando carga reactiva en las mismas barras asociadas a los 3 márgenes de energía más pequeños (también resaltados en negrita en la Tabla).

Se respeta asimismo el orden relativo entre estos 3 márgenes de carga mínimos y los correspondientes márgenes de energía.

Esta relación entre márgenes de carga y de energía se pierde a partir del cuarto margen de carga mínimo, pero de cualquier forma se observa en este ejemplo una tendencia general a asociar márgenes de carga pequeños con márgenes de energía pequeños.

8.5 Filtrado de los uep a calcular

De acuerdo a lo explicado en el Capítulo 6, para redes grandes es deseable disponer de métodos de filtrado previos que eviten tener que calcular una cantidad muy grande de uep .

Se desarrollaron rutinas que permiten realizar ese filtrado previo por los 2 métodos descritos en dicho Capítulo:

-Análisis modal en el sep (Método MOD)

-Cálculo del vector tangente en el sep (Método VEC)

Las rutinas se probaron sobre la red de 16 barras (Red 16) ya utilizada en los ensayos anteriores.

Los 5 márgenes de energía más bajos obtenidos para Red 16 con el método CART2 son (ver Anexo 6) los siguientes:

Barra	Margen de energía
12	2.151
9	2.176
16	3.496
5	3.574
10	5.133

Tabla 8.5 Márgenes de energía más bajos en Red 16

La columna "Barra" identifica la barra en la que se supuso aumento de reactiva para calcular el uep.

A)Método MOD

La rutina desarrollada calcula en el sep los autovectores propios de valor propio más pequeño (en módulo), y selecciona en cada autovector las coordenadas de tensión más grandes (en módulo).

En forma arbitraria, se optó por seleccionar el 20 % de las coordenadas más grandes para los autovectores asociados a los 2 autovalores más pequeños (obviamente:estos parámetros son fácilmente ajustables en el programa).

El resultado de este filtrado es que las barras "candidatas" para calcular los uep son las barras 12, 9, 10 y 11.

El método detecta, por lo tanto, las 2 barras de energía más baja.
No se detectan las 2 siguientes (barras 16 y 5), pero sí la quinta (y sexta) en orden creciente.

B) Método VEC

La rutina desarrollada calcula los vectores tangente en el sep, para cada dirección de carga asumida, y selecciona en cada vector tangente las coordenadas de tensión más grandes (en módulo).

Por coherencia con las hipótesis en que se basa el método CART2, se asumieron direcciones de carga de aumento de potencia reactiva sucesivamente en cada una de las barras del sistema.

En forma arbitraria, se optó por seleccionar las 4 coordenadas de tensión más grandes entre todos los vectores tangente calculados (obviamente: estos parámetros son fácilmente ajustables en el programa).

El resultado de este filtrado es que las barras “candidatas” para calcular los uep son las barras 12, 9, 10 y 16.

El método detecta, por lo tanto, las 3 barras de energía más baja.

No se detecta la siguiente (barra 5), pero sí la quinta en orden creciente.

Comentarios

-Es interesante observar que ninguno de los 2 métodos detecta la cuarta barra de energía más baja (barra 5), ni siquiera si se aumenta el número de componentes más grandes calculadas.

Se observa al respecto que la barra 5 está unida por una rama de impedancia relativamente baja a la barra slack del sistema (ver descripción de la red en Anexo 5).

Es de esperar, por lo tanto, que la barra 5 no cambie apreciablemente su tensión, aun estando muy cerca del colapso (una situación similar se podría dar para aquellas barras que tienen instalados bancos de capacitores, lo cuál no se da en Red 16)

Dado que ambos métodos se basan, esencialmente, en detectar preliminarmente las barras con variaciones de tensión importantes a medida que va aumentando la carga en el sistema; es intuitivo que no sean capaces de detectar esta barra como “barra candidata”.

8.6 Evaluación del método de Dobson para cálculo de márgenes de reactiva

Se desarrolló una rutina para implementar el cálculo aproximado de los márgenes de reactiva a partir de los márgenes de energía en sus 2 variantes (método original de Dobson DOB1 y método alternativo DOB2) descritas en el Capítulo 7.

Los márgenes de carga reactiva reales indicados en la Tabla siguiente se calcularon por medio del programa Estten, y son los mismos que ya aparecieron en la Tabla 8.4

Barra	Margen real (Mvar)	Método DOB1	Método DOB2
2	459.4	105.8	467.3
4	1282.7	211.0	1299.9

5	543.9	4351.6	4353.8
6	371.5	44.6	531.1
7	1269.6	811.5	1293.7
9	148.2	144.9	169.1
10	175.04	276.0	346.0
11	223.4	322.1	470.8
12	145.5	138.7	163.4
13	643.7	457.2	709.2
14	589.9	464.5	661.8
16	165.8	136.3	200.4

Tabla 8.6 Evaluación de los métodos para cálculo aproximado de los márgenes de reactiva en Red 16
La columna "Barra" identifica la barra en la que se supuso aumento de reactiva para calcular el uep.

En la Tabla se han marcado en negrita los casos en que el margen aproximado está dentro de una tolerancia de +/- 20 % del margen real.

En relación al método DOB1 se observa que la aproximación es buena para los 2 uep de margen de energía más bajo (barras 9 y 12), algo peor para el uep del margen de energía siguiente (barra 16), y mala para los restantes.

En relación al método DOB2 se observa que la aproximación sigue siendo buena (aunque algo peor que en el método DOB1) para los 2 uep de margen de energía más bajo (barras 9 y 12), y que se mejora sensiblemente la precisión de la aproximación en varios de los restantes uep.

8.7 Evaluación del método de cálculo aproximado del colapso de tensión más cercano

Las comparaciones se hicieron con el cuep de Red 16 que, como hemos visto, es el obtenido asumiendo que el colapso de tensión se produce aumentando potencia reactiva en la barra 12.

Se calculó el colapso de tensión más cercano asociado a esta dirección de carga mediante las siguientes 2 técnicas de cálculo:

- a) Método aproximado de Yorino, descrito en el Capítulo 7
- b) Método de Dobson para el cálculo de la bifurcación más cercana [Dobson 3], haciendo uso del programa Estten

En ambos casos se calculó la dirección de carga asociada a la bifurcación más cercana. Esta dirección de carga no es más que el vector $DC = (\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_n, \Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_n)$, siendo ΔP_j y ΔQ_j las variaciones de carga activa y reactiva en la barra de carga "j" entre el estado inicial y la bifurcación más cercana.

Se calcularon asimismo los correspondientes márgenes de carga, que no son más que las normas euclidianas de los vectores DC.

En las tablas siguientes se indican las coordenadas relevantes de los vectores DC, indicándose exclusivamente aquéllas que son superiores al 10 % de la coordenada más grande

Barra	ΔP (MW) Yorino	ΔP (MW) Dobson	ΔQ (MVar) Yorino	ΔQ (MVar) Dobson
2			9.0	
6			14.9	
7	11.2			
9		19.1	41.0	45.9
10		19.6	50.1	43.5
11		14.4	31.9	30.7
12		19.3	80.7	47.6

Tabla 8.7 Direcciones de carga de los métodos para cálculo aproximado de los márgenes de reactiva en Red 16

Análisis de los resultados

Se observan resultados bastante distintos entre ambas direcciones de carga, principalmente en las componentes de activa.

No obstante, los márgenes de carga correspondientes no son tan distintos, obteniéndose un valor de 112.3 para el método de Yorino y 92.5 para el de Dobson.

Se recuerda que el Método de Yorino se basa en las siguientes aproximaciones:

- a) Se asume que el punto de colapso según la dirección de carga inicial (aumento de reactiva en barra 12) se da en el punto medio entre el uep y el sep
- b) Se asume que la hipersuperficie de los puntos de bifurcación es aproximadamente plana en la zona cercana al punto de colapso inicial y a la bifurcación más cercana

A efectos de verificar la validez de la hipótesis a) para la red analizada, se calculó el margen de carga asociado al punto medio entre el uep y el sep, obteniéndose un valor de 151 MVar, lo cual es muy aproximado al margen de carga real de 145.5 obtenido corriendo Estten.

Un análisis de la dirección de carga asociada a ese punto medio muestra asimismo que no se aparta mucho de la dirección de carga correspondiente al aumento de reactiva en la barra 12.

De acuerdo a lo explicado en el Capítulo 5, el punto medio no es por lo general una solución exacta del sistema de ecuaciones que modela el sistema de potencia, en la medida que puede llegar a tener tensiones en las barras de generación o potencias activas generadas distintas a las del sep y el uep, cargas activas negativas, etc. Un análisis de los valores de estas variables en el punto medio mostró que no se dieron violaciones importantes de estas restricciones.

Se concluye que, al menos en este caso particular, la principal fuente de error es la aproximación b).

De acuerdo a las recomendaciones de [Yorino], el programa de cálculo desarrollado incluye un factor de corrección empírico “ α ” de la curvatura de la hipersuperficie. Para este ejemplo en particular, se tomó $\alpha = 0.95$.

Para obtener coincidencia entre el margen de carga exacto (método de Dobson) y el aproximado (método de Yorino) hubiese sido necesario tomar $\alpha = 0.82$, lo cual está por debajo del límite inferior de 0.9 sugerido en [Yorino].

Algunas pruebas hechas con la misma red pero con otros niveles de carga mostraron, asimismo, que no es posible definir un factor α único que proporcione resultados más satisfactorios en todos los casos.

8.8 Aplicaciones a la red uruguaya

Se hicieron algunas aplicaciones del método CART2 a un modelo de la red de Trasmisión uruguaya del año 2007 (ver esquema unifilar geográfico en el Anexo 5), a los sólo efectos de observar el desempeño de los programas de cálculo desarrollados en una red real.

La red utilizada consta de 117 barras, de las cuáles 103 son barras de carga.

A efectos de realizar un análisis más realista, se introdujo una opción en el programa que permite realizar el cálculo de los uep asociado exclusivamente a las barras con carga inicial no nula (64 de las 103 barras de carga).

En la Tabla siguiente se indican los resultados obtenidos para los 14 casos de margen de energía más bajo:

Barra	Tacuarembó	C.Bocas	Las Piedras	Bifurcación	Rocha	MontA	Rosario
Margen de energía	0.677	0.678	0.678	0.678	0.678	0.678	0.678

Barra	MontC	Maldonado	Young	T.Gomensoro	Rivera	MontL	Arapey
Margen de energía	0.678	0.678	0.678	0.966	1.060	1.224	1.612

Tabla 8.8 Márgenes de energía más bajos en la red uruguaya 2007

Se probó asimismo sobre esta red el método de filtrado VEC, para las 20 barras de margen de energía más bajo.

En la Tabla siguiente se indican los resultados obtenidos para los 14 casos de margen de energía más bajo.

Barra	Tacuarembó	Rocha	Rosario	Young	T.Gomensoro	Rivera	Arapey
Margen de energía	0.677	0.678	0.678	0.678	0.966	1.060	1.612

Barra	M.Corrales	Artigas	F.Bentos	Colonia	Trinidad	MontA30	TyTres
Margen de energía	3.579	3.626	4.985	5.420	6.278	17.56	48.43

Tabla 8.8 Márgenes de energía más bajos en la red uruguaya 2007 filtrando por el método VEC.

Nota En ambas Tablas se identifica la barra en la cuál se supuso el aumento de carga reactiva

Se observa que el método de filtrado detecta 7 de los 14 casos de margen de energía más bajo y (lo que es más importante) permite calcular con precisión el menor margen de energía (el margen de energía del sistema).

El cálculo completo (Pentium IV, 2.6 GHz.768 Mb RAM) para las 64 barras de carga no nula se realizó en 1739 seg, en tanto que el cálculo con filtrado previo para 20 barras se realizó en 658 seg.

Se observó durante las corridas que un porcentaje importante del tiempo se emplea en tratar de resolver los casos en que la convergencia se produce al sep.

En la medida que se pudiera optimizar esta parte del proceso, por lo tanto,es de esperar que los tiempos de cálculo se acorten sensiblemente.En el Anexo 7 se realizan algunos comentarios al respecto.

Cabe destacar que se estima que el cálculo “paso a paso” de los márgenes de reactiva de las 64 barras con el programa Estten llevaría más de 3 horas.

Referencias

[AM] M.Artenstein,P.Monzón ,“Tools for voltage collapse analysis and applications” , Revista IEEE LatinAmerica,Vol.4, N° 3,May 2006

[DeMarco 1] T.Overbye,C.DeMarco,”Improved techniques for power system voltage stability assessment using energy methods”, IEEE Transactions on Power Systems,Vol.6,N°4,Nov.1991

[DeMarco 4] T.Overbye,C.DeMarco,”Low voltage power flow solutions and their role in exit time based security measures for voltage collapse ”, Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control,Austin,Texas,Dec.1988

[Dobson 3] F.Alvarado,I.Dobson,Y.Hu, “Computation of closest bifurcations in power systems”, IEEE Transactions on Power Systems,Vol.9, N°2, May.1994

[Klump] T.Overbye,R.Klump, “Effective calculation of power system low voltage solutions” , IEEE Transactions on Power Systems, Vol.11, N°1,Feb.1996

[Yorino] N.Yorino,S.Harada,H.Cheng,”A method to approximate a closest loadability limit using multiple load flow solutions” ,IEEE Transactions on Power Systems,Vol.12, N°1,Feb.1997

CONCLUSIONES Y LÍNEAS DE TRABAJO FUTURAS

En este trabajo se ha hecho una revisión de los fundamentos teóricos que permiten definir el margen de energía al colapso de tensión en redes de potencia.

Posteriormente se han analizado y descrito algunas propiedades del margen de energía que lo identifican como una opción atractiva entre los diversos márgenes de seguridad al colapso de tensión elegibles.

En relación al cálculo efectivo del margen de energía, se han presentado los principales métodos de filtrado y cálculo de equilibrios inestables del flujo de cargas, así como los métodos de cálculo aproximados que vinculan al margen de energía con el margen de carga.

Se ha desarrollado un programa de cálculo para implementar el cálculo efectivo del margen de energía, y se lo ha validado a través de aplicaciones de prueba en redes de tamaño creciente.

Se han incluido en el trabajo algunos aportes originales puntuales a la teoría y a los métodos de cálculo. En particular: se ha propuesto una corrección puntual a la teoría básica de funciones de energía en modelos del sistema de potencia que preservan estructuras, se ha analizado la invariancia del margen de energía respecto a la dinámica de las cargas, se han descrito modelos adicionales de equipamientos de potencia que se pueden incorporar al modelo general del sistema para el que se puede definir una función de energía, y se han propuesto ligeras variantes a algunos de los métodos de cálculo clásicos.

Algunos comentarios finales sobre aspectos puntuales del trabajo son los siguientes:

a) Los métodos de cálculo prácticos existentes de los equilibrios inestables del flujo de potencia se basan en consideraciones fundamentalmente heurísticas.

b) La velocidad de cálculo del margen de energía es muy superior a la velocidad de cálculo del margen de carga. En contraposición, los modelos del sistema de potencia aplicables al cálculo de márgenes de energía deben incluir necesariamente algunas simplificaciones respecto a los modelos usados en los métodos “paso a paso”.

c) El método de Yorino para cálculo del colapso de tensión más cercano permite encontrar el margen de carga al colapso con una precisión razonable, pero no se puede decir lo mismo de la correspondiente dirección de carga.

En relación a posibles líneas de trabajo futuras, comentamos lo siguiente:

a) Es deseable poder avanzar en la fundamentación teórica de los métodos de cálculo del equilibrio inestable más cercano. En particular, podrían intentarse formularse al menos las condiciones suficientes que debería cumplir el modelo del sistema de potencia para asegurar que el método de las bajas tensiones o el método cartesiano permitan encontrar siempre el cuép. Estas condiciones suficientes podrían enunciarse, p.ej, en función de algunas propiedades numéricas de los elementos B_{ij} de la matriz de susceptancias nodales del sistema.

b) A efectos de validar con más precisión los métodos de cálculo del cuep descritos, es necesario disponer de un método que permita calcular *todos* los equilibrios inestables del sistema.

Es necesario al respecto revisar la (escasa) literatura existente sobre el tema, seleccionar y/o proponer un método de cálculo, y elaborar el correspondiente programa computacional.

c) A efectos de comprender mejor los límites de aplicabilidad del método descrito, es deseable disponer de una metodología que permita cuantificar el efecto de las simplificaciones del modelo usado (sin resistencias en las líneas y transformadores, con cargas activas independientes de la tensión, etc.) sobre la seguridad de los sistemas que eventualmente se operen en base al margen de energía.

d) Los métodos basados en funciones de energía pueden “competir” con los métodos de cálculo más precisos “paso a paso” en la medida que sean muy rápidos y, por lo tanto, aplicables ya sea a la operación “on line” de los sistemas eléctricos o al filtrado previo de casos a analizar en detalle durante la planificación de la operación o de la expansión del sistema.

A efectos de comprender mejor como se posicionan estos métodos en relación a otros métodos de cálculo “rápido” existentes, es necesario realizar una revisión de los mismos y, eventualmente, comparar sus ventajas y desventajas mediante simulaciones sobre redes de prueba.

e) Es conveniente implementar una plataforma común que permita integrar el programa de cálculo del margen de energía con los programas existentes de cálculo “paso a paso” del margen de carga. Esto permitiría, en particular, usar en forma ágil los márgenes de energía como herramienta de filtrado rápido de aquéllos casos que se desean analizar en más detalle con simulaciones “paso a paso”.

ANEXOS

ANEXO 1-DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS DEL CAPÍTULO 2

[Khalil]

A1.1 Teorema de Liapunov

Consideramos el sistema $dx/dt=f(x)$, con $f :D' \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , tal que $0 \in D'$ es un punto de equilibrio (o sea: $f(0)=0$). D' es un abierto y conexo.

Suponemos que existe una $V:D \subset D' \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 , con $0 \in D$, que cumple:

$$V(0)=0$$

$$V(x)>0 \quad \forall x \in D - \{0\}$$

$$d/dt V(x) \leq 0 \quad \forall x \in D.$$

T) a) $x=0$ es un equilibrio estable.

b) Si además $d/dt V(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$, $x=0$ es un equilibrio asintóticamente estable.

Demostración

a) Dado $\varepsilon > 0$, elegimos $0 < r \leq \varepsilon$ de forma que la bola cerrada $B_r \subset D$.

Sea $\alpha = \min \{V(x) : \|x\| = r\}$, que existe y es > 0 por ser $V(x) > 0$ en el compacto $\|x\| = r$.

Tomemos β en $(0, \alpha)$ y luego definamos $\Omega_\beta = \{x \in B_r / V(x) \leq \beta\} \subset \text{int}(B_r)$ (si así no fuera, y pudiéramos encontrar algún x en Ω_β con $\|x\| = r$, sería $V(x) \geq \alpha > \beta$ por definición de α).

Si $x(t), t \geq 0$, es una trayectoria que comienza en $t=0$ en Ω_β resulta $V(x(t)) \leq V(x(0)) \leq \beta$ por ser $d/dt V(x) \leq 0 \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta$ (se dice que Ω_β es *positivamente invariante*).

Observemos, además que Ω_β es cerrado (lo es todo conjunto de la forma $\{x / h(x) \leq g(x)\}$, con h y g continuas, y Ω_β es la intersección de un conjunto de esta forma con un cerrado B_r) y, por lo tanto (al estar contenido en B_r), es compacto.

Uno de los teoremas de existencia y unicidad de los sistemas autónomos asegura, por lo tanto, que nuestro sistema tiene una solución única en $t \geq 0$ para cada condición inicial $x(0) \in \Omega_\beta$.

Como $V(x)$ es continua, $V(0)=0$ y $V(x) \leq \beta$ si $x \in \Omega_\beta \subset \text{int}(B_r) \Rightarrow \exists \delta > 0$ tal que si $\|x\| \leq \delta$ es $V(x) < \beta$. Por lo tanto: $B_\delta \subset \Omega_\beta \subset \text{int}(B_r)$.

Por lo tanto: si $x(0) \in \text{int}(B_\delta) \Rightarrow x(0) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \Omega_\beta \Rightarrow x(t) \in \text{int}(B_r) \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$
///

b) Queremos ver que dado $a > 0$, existen $\delta > 0$ (independiente de a) y $T > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < a \quad \forall t > T$.

Elijamos $r > 0$ tal que $B_r \subset D$, tomemos $m = \min \{V(x) : \|x\| = r\}$, consideremos $\Omega_m = \{x \in B_r / V(x) \leq m\}$ y elijamos $\delta > 0$ tal que $x(0) \in \Omega_m$ y $\|x(0)\| < \delta$ (siempre hay una bola

centrada en 0 contenida en Ω_m , por el razonamiento de continuidad visto en la parte a)). Dado que Ω_m es invariante positivo, esta selección de δ (que es independiente del a elegido) asegura que $x(t) \in D \forall t \geq 0$, lo cual es necesario para asegurar que $V(x(t))$ está definido y cumple las propiedades de la hipótesis¹⁹

El conjunto Ω_m es, obviamente, una aproximación a la región de atracción de $x=0$

Sin perder generalidad podemos suponer $a \leq r$.

Sea $\alpha = \min \{V(x) : a \leq \|x\| \leq r\}$. Tomemos b en $(0, \alpha)$ y luego definamos $\Omega_b = \{x \in B_r / V(x) \leq b\} \subset \text{int}(B_a)$, con igual razonamiento que el empleado en a).

Bastará, por lo tanto, con probar que existe $T > 0$ tal que si $\|x(0)\| < \delta \Rightarrow V(x(t)) < b \forall t > T$ o, lo que es lo mismo (dado que $b \rightarrow 0$ si $a \rightarrow 0$), que $V(x(t)) \rightarrow 0$ si $\|x(0)\| < \delta$ y $t \rightarrow \infty$.

Como $V(x(t))$ es decreciente y no menor que 0 \Rightarrow existe $c \geq 0$ tal que $V(x(t)) \rightarrow c$ si $t \rightarrow \infty$, y supongamos (por el absurdo) $c > 0$.

Con el razonamiento de continuidad visto en la parte a): es posible encontrar $d > 0$ que cumple $B_d \subset \Omega_c$, en que $\Omega_c = \{x \in B_r / V(x) \leq c\}$ es no vacío por haber supuesto $c > 0$.

Como $V(x(t))$ es decreciente y tiende a c , deducimos que $x(t) \notin B_d \forall t \geq 0$.

Sea $-\gamma = \max \{d/dt V(x) : d \leq \|x\| \leq r\}$ (existe por ser $d/dt V(x)$ continua), en que $-\gamma < 0$ por ser $d/dt V(x) < 0$ en $D - \{0\}$.

$$V(x(t)) = V(x(0)) + \int_0^t d/dt V(x(t)) dt \leq V(x(0)) - \gamma t \quad (\text{pues } x(t) \in \Omega_m \subset B_r \text{ (recordar que } \Omega_m$$

es invariante positivo) y $x(t) \notin B_d \Rightarrow d \leq \|x(t)\| \leq r)$

Se deduce que para $t \rightarrow \infty$ $V(x(t))$ toma valores negativos, por lo que $V(x(t))$ no podría tener un límite $c > 0$. ///

A1.2 Teorema de LaSalle

Conceptos previos

Decimos que p es un límite positivo de la trayectoria $x(t)$ si existe una subsucesión $t_n \rightarrow \infty$ tal que $x(t_n) \rightarrow p$. El conjunto de todos los p para un $x(t)$ dado es el conjunto límite positivo de $x(t)$.

Por ejemplo: un equilibrio asintóticamente estable es el conjunto límite positivo de toda trayectoria que comience en $t=0$ en su región de atracción.

A los efectos del Teorema de LaSalle interesará diferenciar los conjuntos invariantes “a secas” (o sea: las trayectorias se mantienen en el conjunto $\forall t$) de los conjuntos invariantes positivos (las trayectorias se mantienen en el conjunto $\forall t \geq 0$)

¹⁹ Este tecnicismo no es necesario si se supone $D=D'$, en cuyo caso basta con tomar $\delta=r$.

Usaremos el siguiente Lema [Khalil 3]:

Sea $x(t)$ una solución acotada para $t \geq 0$, y sea L^+ su conjunto límite positivo

T) L^+ es:

- a) No vacío
- b) Compacto
- c) Invariante
- d) $x(t) \rightarrow L^+$ si $t \rightarrow \infty$

Teorema de LaSalle

Sea $dx/dt=f(x)$ un sistema en las mismas condiciones que en el Teorema de Liapunov.

Sea $\Omega \subset D$ compacto e invariante positivo y $V:D \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 que cumple $dV/dt(x) \leq 0$ en Ω .

Sea $E = \{x \in \Omega / dV/dt(x)=0\}$ y $M \subset E$ su mayor invariante.

T) Si $x(0) \in \Omega \Rightarrow x(t) \rightarrow M$ si $t \rightarrow \infty$.

Demostración

Dado $x(0) \in \Omega$, como $V(x(t))$ es continua en el compacto $\Omega \Rightarrow$ está acotada por debajo en Ω . Siendo $V(x(t))$ decreciente (si bien no estricta) y acotada por debajo, debe tener un límite "a" cuando $t \rightarrow \infty$.

Como $x(t) \in \Omega \forall t \geq 0$, resulta $x(t)$ acotada, y su conjunto límite positivo L^+ (un cerrado) $\subset \Omega$.

Sea $p \in L^+$, existirá $t_n \rightarrow \infty / x(t_n) \rightarrow p$.

Como $V(x(t))$ tiene límite, resulta $a = \lim V(x(t_n)) = V(p)$ por continuidad. $\Rightarrow V(p) = a \forall p \in L^+$.

Sea $x_1 \in L^+$, y deseamos calcular $dV/dt(x_1)$. Para ello, analizamos la trayectoria (única) $x_1(t)$ que pasa por x_1 .

Como L^+ es (por el Lema) un conjunto invariante, resulta $x_1(t) \in L^+ \forall t \Rightarrow V(x_1(t)) = a$ (constante) $\Rightarrow dV/dt(x_1) = 0 \Rightarrow L^+$ es invariante y sus puntos cumplen $dV/dt = 0 \Rightarrow L^+ \subset M$.

Por el lema: $x(t) \rightarrow L^+$ y, por lo tanto, $x(t) \rightarrow M$ ///

A1.3 Teorema de Barbashin-Krasovskii

Sea $dx/dt=f(x)$ un sistema en las mismas condiciones que en el Teorema de Liapunov.

Sea $V:D \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^1 que cumple:

- a) $V(0)=0, d/dt V(x) \leq 0 \forall x \in D, V(x) > 0$ en $D - \{0\}$
- b) Si $S = \{x \in D / dV/dt(x)=0\}$ y $x(0) \in S, x(0) \neq 0 \Rightarrow \exists t > 0 / x(t) \notin S$ (con la notación del Teorema de LaSalle : $M = \{0\}$)

T) $x=0$ es asintóticamente estable

Demostración

Como $V(x) > 0$, basta con elegir como compacto Ω del Teorema de LaSalle el que se definió en la segunda parte del Teorema de Liapunov:

$$\Omega = \Omega_m = \{x \in B_r / V(x) \leq m\} \text{ con } r > 0 \text{ tal que } B_r \subset D \text{ y } m = \min \{V(x) : \|x\| = r\} \quad ///$$

A1.4 Propiedades de la región de atracción

Lema 2.4.1

La región de atracción R_A es un conjunto abierto, conexo e invariante

Demostración

a) R_A es invariante

Sea $x(0) = x \in R_A$, queremos ver que $x(s) \in R_A, \forall s$.

Usemos la notación $x(s) = \Phi(s, x)$ para denominar a la trayectoria que pasa por x en $s=0$, por lo que con esta notación queremos ver que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x(s)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \Phi(s, x)) = 0$ si $t \rightarrow \infty$, sabiendo que $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x) = 0$ si $t \rightarrow \infty$

Las propiedades de existencia y unicidad de las soluciones del sistema aseguran que las trayectorias cumplen con la propiedad de grupo:

$$\Phi(t, \Phi(s, x)) = \Phi(t+s, x).$$

Dado s fijo, resulta $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \Phi(s, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t+s, x) = 0$, dado que $t+s \rightarrow \infty$ ///

b) R_A es abierto

Sea $p \in R_A$, queremos ver que es posible encontrar un entorno de p en R_A .

Por definición de estabilidad asintótica: $\exists a > 0 / \text{si } \|x(0)\| < a \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, x(0)) = 0$ si $t \rightarrow \infty$.

Por lo tanto: $\text{int}(B_a) \subset R_A$.

Como estamos suponiendo $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, p) = 0$, es posible encontrar $T > 0$ que cumpla

$$\|\Phi(T, p)\| < a/2.$$

Elijamos $b > 0$ tal que todo q que cumpla $\|q - p\| < b$ también cumpla

$\|\Phi(T, p) - \Phi(T, q)\| < a/2$ (siempre es posible elegir este b dado que los teoremas básicos para estos sistemas dinámicos aseguran la continuidad de las soluciones respecto a las condiciones iniciales) $\Rightarrow \|\Phi(T, q)\| < a \Rightarrow \Phi(T, q) \in \text{int}(B_a) \subset R_A$.

Como acabamos de probar que R_A es invariante, se deduce $\Phi(0, q) = q \in R_A$, y por lo tanto la bola abierta de centro p y radio b está en R_A ///

c) R_A es conexo

Si R_A (un abierto) pudiera ponerse como $R_A = A \cup B$, con A, B abiertos y disjuntos, supongamos que $0 \in A$ y elijamos $x(0) \in B \Rightarrow$ para algún a tal que $\text{int}(B_a) \subset A$ (siempre existe por ser A abierto) existirá $T > 0$ tal que $x(T) \in \text{interior}(B_a)$ por definición de

estabilidad asintótica. En tal caso la curva $x(t)$, $t \in [0, T]$ (conexa, por ser la imagen de $[0, T]$ por una función continua) une un punto de A con uno de B, lo cual contradice que A y B son componentes conexas ///

Lema 2.4.2

Si el borde de R_A es no vacío, está formado por trayectorias.

Probaremos un resultado más general: el borde de un abierto invariante es también invariante (por lo tanto: como cada punto del borde puede tomarse como punto inicial de una trayectoria, el borde estará formado por trayectorias)

Demostración

Dado M abierto e invariante y $x \in \partial M$, sabemos que (por definición de borde) existe $x_n \subset M$ tal que $x_n \rightarrow x$.

Como M es invariante: $\Phi(t, x_n) \in M \quad \forall n, t$, y por la continuidad de las trayectorias respecto a las condiciones iniciales $\Phi(t, x_n) \rightarrow \Phi(t, x)$. Por lo tanto, $\Phi(t, x)$ es un punto de acumulación de M, $\forall t$.

Como $\Phi(t, x) \notin M$ (dado que M es invariante y $x = \Phi(0, x) \notin M$) $\Rightarrow \Phi(t, x) \in \partial M$ ///

Referencias

[Khalil] H.K.Khalil,"Nonlinear Systems"-2nd Edition,Prentice Hall, 1996

ANEXO 2-DEMOSTRACIONES DE TEOREMAS DEL CAPÍTULO 3

[Varaiya 1]

En este Anexo haremos referencia a las hipótesis A1, A2, A3 de la definición de función de energía de Varaiya que se describen en 3.2.2.

Lemas previos

Las demostraciones de estos Lemas se pueden encontrar en [Varaiya 1], y no se han incluido en esta Tesis.

Lema previo 1

Sea x_i un equilibrio hiperbólico, y R_A la región de atracción de otro equilibrio x_s .

T) $x_i \in \partial R_A \Leftrightarrow \{W^u(x_i) - x_i\} \cap \text{cl}(R_A) \neq \emptyset$

Lema previo 2

Sean x_i, x_j puntos de equilibrio hiperbólicos que cumplen la condición A2.

Suponemos también $\{W^u(x_i) - x_i\} \cap \{W^s(x_j) - x_j\} \neq \emptyset$.

T) $\dim W^u(x_i) > \dim W^u(x_j)$

Lema previo 3

Si se cumple la condición A3:

T) Cada trayectoria en ∂R_A converge a un punto de equilibrio de ∂R_A

Lema previo 4

Sean x_1, x_2, x_3 equilibrios hiperbólicos.

Suponemos que $W^u(x_1)$ interseca transversalmente a $W^s(x_2)$, y que $W^u(x_2)$ interseca transversalmente a $W^s(x_3)$

T) $W^u(x_1)$ interseca transversalmente a $W^s(x_3)$ ²⁰

Teorema 3.1

Suponemos que se satisfacen las condiciones A1, A2, A3, y sea x_i un equilibrio inestable.

T) $x_i \in \partial R_A \Leftrightarrow W^u(x_i) \cap R_A \neq \emptyset$

²⁰ Cuando decimos en este Lema “interseca transversalmente”, estamos asumiendo que existe una intersección no vacía (recordar que el concepto general de transversalidad incluye el caso de intersección vacía).

Demostración

a) \Leftarrow

Como R_A no tiene más puntos de equilibrio que $x_s \Rightarrow x_i \notin R_A \Rightarrow \{W^u(x_i)-x_i\} \cap R_A \neq \emptyset$, por lo que el Lema 1 nos dice que $x_i \in \partial R_A$ ///

b) \Rightarrow

b1) Supongamos que $x_i \in \partial R_A$ es tipo 1.

Por el Lema 1 sabemos que $\{W^u(x_i)-x_i\} \cap \text{cl}(R_A) \neq \emptyset$, por lo que bastará con probar $\{W^u(x_i)-x_i\} \cap \partial R_A = \emptyset$.

Si así no fuera: sea $y \in \{W^u(x_i)-x_i\} \cap \partial R_A$. Si consideramos la trayectoria $y(t) \subset \partial R_A$ (que es invariante) que cumple $y(0)=y$, el Lema 3 nos dice que hay algún equilibrio z en ∂R_A al cual converge $y(t)$. Por lo tanto: $y \in \{W^s(z)-z\}$.

Deducimos: $\{W^s(z)-z\} \cap \{W^u(x_i)-x_i\} \neq \emptyset \Rightarrow$ por el Lema 2 : $\dim W^u(x_i) > \dim W^u(z)$.

Como x_i es tipo 1, se deduce $\dim W^u(z) < 1$, lo cual es absurdo pues z está en ∂R_A , en donde no hay equilibrios asintóticamente estables (si ∂R_A tuviera un equilibrio asintóticamente estable, su región de atracción (un abierto no vacío) debería incluir puntos de R_A , lo cual contradice la definición de R_A) ///

b2) Supongamos que $x_i \in \partial R_A$ es tipo 2

Repitiendo el razonamiento anterior: $\dim W^u(z) < 2 \Rightarrow z$ es tipo 1 (ya observamos que no puede ser un equilibrio asintóticamente estable) $\Rightarrow W^u(z) \cap R_A \neq \emptyset$ pues acabamos de ver que el Teorema se cumple para equilibrios tipo 1.

Tomemos $x_1=x_i$, $x_2=z$, $x_3=x_s$ a efectos de aplicar el Lema 4:

1) $W^u(x_1)$ y $W^s(z)$ se intersectan (se probó más arriba, siempre asumiendo $\{W^u(x_i)-x_i\} \cap \partial R_A \neq \emptyset$.) y lo hacen transversalmente por la hipótesis A2

2) $W^u(z)$ y $W^s(x_s)=R_A$ se intersectan, y lo hacen transversalmente pues $\dim(W^s(x_s))=n$

Se deduce, por el Lema 4 : $W^u(x_i) \cap R_A \neq \emptyset$ (y la condición de transversalidad es otra vez obvia).

Por lo tanto: en este caso no se llega a un absurdo, pero si $\{W^u(x_i)-x_i\} \cap \partial R_A \neq \emptyset \Rightarrow$

$W^u(x_i) \cap R_A \neq \emptyset$, que es lo que se necesita ///

El caso general se prueba por inducción, con el mismo método usado para los equilibrios tipo 2. ///

Teorema 3.2

Suponemos que se satisfacen las condiciones A1, A2, A3 vistas, y sean x_1, x_2, \dots, x_n los equilibrios hiperbólicos inestables en ∂R_A

$$T) \partial R_A = \bigcup_{x_i} W^s(x_i)$$

Demostración

a) \Rightarrow

Por el Lema 3: si $p \in \partial R_A \Rightarrow p \in W^s(x_i)$ para algún "i" ///

b) \Leftarrow Sea $x_i \in \partial R_A$ un equilibrio, por lo que $W^u(x_i) \cap R_A \neq \emptyset$ (Teorema 3.1)

Llamemos m a la dimensión de $W^s(x_i)$ = codimensión de $W^u(x_i)$.

Sea $p \in W^u(x_i) \cap R_A$, y tomemos un disco m -dimensional $D \subset R_A$ centrado en p y tal que D y $W^u(x_i)$ se intersecten transversalmente.

Por el λ -lema [Smale] se cumplirá :

$W^s(x_i) \subseteq \text{cl}(\cup \Phi(-t, D))$, en que la unión es sobre los $t \geq 0$.

Como $\text{cl}(\cup \Phi(-t, D)) \subset \text{cl}(R_A)$ por ser R_A invariante y $D \subset R_A \Rightarrow W^s(x_i) \subset \text{cl}(R_A)$.

Por definición de R_A , debe ser $W^s(x_i) \cap R_A = \emptyset \Rightarrow W^s(x_i) \subseteq \partial R_A$ ///

Corolario

Se quiere probar:

T) $\partial R_A = \cup_{x_{i1}} \text{cl}(W^s(x_{i1}))$, en que la unión se hace sobre los equilibrios x_{i1} tipo 1. ///

Demostración

Revisión previa: Teorema de Baire

Recordemos que A se dice denso en $B \Leftrightarrow B \subset \text{cl}(A)$

El Teorema de Baire en su formulación clásica dice que si X es un espacio métrico completo y $\{W_n\}$ es un conjunto de abiertos densos en $X \Rightarrow \cap_n W_n$ es denso en X .

Una formulación alternativa se obtiene a partir de la definición de conjuntos diseminados ("nowhere dense"): $E \subset X$ se dice diseminado si $V \subset X$ y abierto, $V \subset \text{cl}(E)$ implica $V = \emptyset$ (o sea: $\text{cl}(E)$ es de interior vacío).

Los conjuntos de la forma $\cup_n E_n$ con E_n diseminado se dicen de *primera categoría*, y la formulación alternativa de Baire es: los espacios métricos completos no son de primera categoría.

Las principales propiedades de los conjuntos diseminados $N \subset X$ son:

-Si N es diseminado $\Rightarrow \text{cl}(N)$ es diseminado

-Si N es diseminado $\Rightarrow \text{cl}(N)^c$ en X (el exterior de N en X) es denso en X

-Si X es un espacio métrico completo y $N_n \subset X$ son diseminados y cerrados $\Rightarrow \cup_n N_n$ es diseminado

Con estos elementos pasamos a la demostración:

Observamos que $\partial R_A = (\cup W^s(x_{i1})) \cup (\cup W^s(x_{ik}))$, en que x_{i1} son los equilibrios de tipo 1, y x_{ik} los equilibrios de tipo > 1 .

El segundo término está formado por variedades $W^s(x_{ik})$ de dimensión $< n-1$, que son conjuntos diseminados en R^n y, por lo tanto, en ∂R_A .

$W^s(x_{ik})$ es diseminado $\Rightarrow \text{cl}(W^s(x_{ik}))$ es diseminado $\Rightarrow \cup \text{cl}(W^s(x_{ik}))$ es diseminado.

Observar que este último conjunto (no necesariamente cerrado si la unión no es finita) sigue estando en ∂R_A , pues ∂R_A es cerrado, por lo que cada $\text{cl}(W^s(x_{ik})) \subset \partial R_A$.
 Sea $M = \bigcup \text{cl}(W^s(x_{ik}))$, observamos que su complemento M^c en ∂R_A está contenido en $\bigcup W^s(x_{i1})$ y es denso en ∂R_A .
 Por lo tanto: $\partial R_A \subset \text{cl}(M^c) \subset \text{cl}(\bigcup W^s(x_{i1})) \subset \bigcup \text{cl}(W^s(x_{i1}))$, y la relación recíproca $\bigcup \text{cl}(W^s(x_{i1})) \subset \partial R_A$ es inmediata ///

Referencias

[Smale] S.Smale, "Differentiable dynamical systems", Bull.Amer.Math Society, vol.73, pp.747-817,1967

[Varaiya 1] H.Chiang, F.Wu,P.Varaiya, "Foundations of direct methods for Power System transient stability analysis", ,IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.CAS-34 N° 2 Feb.1987

ANEXO 3-DEMOSTRACIÓN DE QUE LA FUNCIÓN DE ENERGÍA DEL SISTEMA DE POTENCIA ES DE VARAIYA

A3.1 Función de energía de Varaiya

En el capítulo 3 de esta Tesis se definió cuándo se entiende que una función de energía es de Varaiya.

Se repite por comodidad esta definición:

Se supone un sistema dinámico $dx/dt=f(x)$ con un punto de equilibrio x_s estable a la pequeña señal, y llamamos E al conjunto de todos los puntos de equilibrio del sistema. Llamamos $W^s(x_i)$ y $W^u(x_i)$ a las variedades estable e inestable respectivamente de $x_i \in E$, y R_A a la región de atracción de x_s .

Se supone que se cumplen las siguientes propiedades:

A1) Si $x_i \in \partial R_A \cap E \Rightarrow x_i$ es hiperbólico

A2) Si $x_i, x_j \in \partial R_A \cap E \Rightarrow W^s(x_i)$ y $W^u(x_j)$ se intersectan transversalmente

A3) Existe una función $W:R^n \rightarrow R$, W de clase C^1 (función de energía de Varaiya) que cumple :

i) $dW/dt(x) \leq 0$ si $x \notin E$

ii) Si $x \notin E \Rightarrow \{t \in R / dW/dt(x)=0\}$ es de medida nula (en R)

iii) Si $W(x(t))$ es acotado $\Rightarrow x(t)$ es acotado

A3.2 Función de energía del sistema de potencia

En el capítulo 4 de esta Tesis se ha descrito un modelo del sistema de potencia que preserva la estructura, y su correspondiente función de energía.

Se repite aquí, por comodidad, el modelo y su correspondiente función de energía:

$$dx/dt = -A.(M\omega, f, g)$$

con $x = (\omega, \alpha, V)$ y

$$A = \begin{bmatrix} D' & M^{-1}T_1^t & 0 \\ -T_1M^{-1} & T_2D^{-1}T_2^t & 0 \\ 0 & 0 & D_V \end{bmatrix}$$

Siendo:

$$\alpha = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \varphi_{n+2}, \dots, \varphi_{n+m+1})$$

$$\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$$

$$V = (V_{n+2}, \dots, V_{n+m+1})$$

$$f(\alpha, V) = (f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+2}, \dots, f_{n+m+1})$$

$$f_i(\alpha, V) = -P_i + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} E_i \cdot V_l B_{il} \sin(\delta_i - \varphi_l)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$f_k(\alpha, V) = -P_k + \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot V_k B_{jk} \sin(\varphi_k - \delta_j) + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot V_k B_{lk} \sin(\varphi_k - \varphi_l)$$

$$k = n+2, n+3, \dots, n+m+1$$

$$g(\alpha, V) = (g_{n+2}, \dots, g_{n+m+1})$$

$$g_k(\alpha, V) = -Q_k/V_k - \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot B_{jk} \cos(\varphi_k - \delta_j) - \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot B_{lk} \cos(\varphi_k - \varphi_l)$$

$$k = n+2, n+3, \dots, n+m+1$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_n)$$

$D = \text{diag}(D_{n+2}, D_{n+3}, \dots, D_{n+m+1})$, y tomando $D_j = \varepsilon'$ (pequeño) en los casos en que el D_j original es 0.

$$D' = M^{-1} \text{diag}(D'_1, D'_2, \dots, D'_n) \cdot M^{-1}$$

$$D_V = \text{diag}(1/\varepsilon, 1/\varepsilon, \dots, 1/\varepsilon) \text{ (dimensión } m \times m \text{)}$$

$$T_1^t = [I_{n \times n} \quad 0_{n \times m}]$$

$$T_2^t = [0_{m \times n} \quad I_{m \times m}]$$

Función de energía:

$$W(x) = \int_{x_s}^x \langle (M\omega, f, g), (d\omega, d\alpha, dV) \rangle$$

siendo $x = (\omega, \alpha, V)$, y $x_s = (0, \alpha_s, V_s)$ el punto de equilibrio estable (punto de operación inicial) que se desea analizar.

A3.3 Propiedades A1 y A2

Se asume en ambos casos “a priori” que estas propiedades son ciertas (“genéricas”) en el sistema en estudio.

Comentarios

-En relación a la Propiedad A1, es posible probar que (bajo una condición suficiente que se asume cierta para los sistemas en estudio) el jacobiano no puede tener un valor propio nulo [Varaiya 1].

En efecto: el jacobiano del sistema en un punto de equilibrio x_0 es:

$$J(x_0) = -A \cdot \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & G(x_0) \end{bmatrix} \text{ siendo } G(x_0) = \begin{bmatrix} f_\alpha(x_0) & f_\nu(x_0) \\ g_\alpha(x_0) & g_\nu(x_0) \end{bmatrix}$$

Si se asume $G(x_0)$ invertible, $J(x_0)$ no puede tener valor propio 0 ///

-No nos ha sido posible encontrar una condición suficiente sencilla similar que también asegure que el jacobiano no tenga valores propios imaginarios puros.

A3.4-Propiedades A3i) y A3ii)

A3i):

Ya se probó $dW/dt(x) \leq 0$ en el Capítulo 4, al mostrar que el sistema es cuasigradiente ///

A3ii):

Queremos ver que el conjunto $T' = \{t / dW/dt(x) = 0, x \notin E\}$ es de medida nula. Para ello, basta con utilizar la demostración de la propiedad análoga de los sistemas cuasigradientes:

Supongamos (por el absurdo) que existen $T_2 > T_1 > 0$ tal que $dW/dt(x(t)) = 0$ en $t \in [T_1, T_2] \Rightarrow$ por definición de dW/dt resulta $\langle (A + A^t) \nabla W(x(t)), \nabla W(x(t)) \rangle = 0$ en $[T_1, T_2] \Rightarrow$ por lo demostrado para los sistemas cuasigradientes (Capítulo 4) resulta $dx/dt = 0$ en $[T_1, T_2]$ y, por lo tanto, x es un punto de equilibrio ///

A3.5-Propiedad A3iii)

La demostración de la propiedad A3iii) presenta algunas dificultades que se han entendido insalvables.

A efectos de aclarar la situación, se describe en primer término la demostración de esta propiedad para el denominado *modelo clásico* del sistema de potencia.

Modelo clásico

En el modelo clásico del sistema de potencia se asume que las cargas son impedancias constantes. Esto permite implementar un mecanismo de reducción algebraica de las ecuaciones, de forma que las cargas se agrupan con las impedancias de la red.

El resultado final es un modelo en el cuál sólo existen barras de generación (barras de tensión controlada) unidas por ramas cuya impedancia es una combinación de las impedancias de las ramas originales y las impedancias de las cargas

En relación al modelo que preserva estructuras, sólo “sobreviven” las ecuaciones de “swing”.

Ecuaciones del sistema:

$$d\alpha_i/dt = \omega_i$$

$$M_i \cdot d\omega_i/dt = P_i - \sum_{j=1}^n E_i \cdot E_j B_{ij} \text{sen}(\alpha_i - \alpha_j) - D'_i \omega_i$$

$$i=1, 2, \dots, n$$

$$M = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_n)$$

$$f(\alpha) = (f_1, f_2, \dots, f_n)^t$$

$$f_i(\alpha) = -P_i + \sum_{j=1}^n E_i \cdot E_j B_{ij} \text{sen}(\alpha_i - \alpha_j)$$

Función de energía:

$$W(x) = \int_{x_s}^x \langle (M\omega, f), (d\omega, d\alpha) \rangle$$

$x = (\omega, \alpha)$, $x_s = (0, \alpha_s)$ es el punto de equilibrio estable

De acuerdo a la hipótesis de la propiedad A3iii), suponemos que existen constantes c_1 y c_2 , con $c_2 > c_1$ / $c_1 < W(x(t)) < c_2$ para cada trayectoria $x(t)$.

La demostración de que se cumple la propiedad A3iii) de Varaiya se realiza mediante los siguientes pasos:

a) Acotación de $\omega(t)$ [Varaiya 1]

Integrando la ecuación de “swing“:

$$\omega_i(t) = e^{-D'_i / M_i t} \omega_i(0) + 1/M_i \cdot \int_0^t e^{-D'_i / M_i (t-s)} f_i(\alpha(s)) ds$$

$f_i(\alpha(s))$ es uniformemente acotado (los términos en α son funciones sinusoidales).

Sea, por lo tanto, $a_i > 0$ tal que $\| f_i(\alpha(s)) \| \leq a_i$.

Siendo D'_i, M_i positivos, concluimos que $\| \omega_i(t) \| \leq b_i$, con

$$b_i = \| \omega_i(0) \| + a_i \cdot M_i / D'_i$$

///

b) Acotación de $\alpha(t)$

b.1)

Al ser $\omega(t)$ acotada, resulta $d\alpha/dt(t) = \omega(t)$ acotada en cada trayectoria

De la ecuación de “swing“, deducimos que $d^2\alpha/dt^2=d\omega/dt$ es acotada en cada trayectoria, dado que $M_i \cdot d\omega_i/dt = -f_i(\alpha) - D'_i \omega_i$ y $f_i(\alpha)$ es una función acotada.

Derivando la ecuación de “swing“: $M \cdot d^3\alpha/dt^3 = -D' d^2\alpha/dt^2 - f'(\alpha) \cdot d\alpha/dt$, por lo que $d^3\alpha/dt^3$ es también acotada en cada trayectoria

b.2)

Aplicamos el desarrollo de Taylor a $d\alpha/dt$ en torno a $t > 0$, con un incremento $h > 0$ fijo a elegir:

$d\alpha/dt(t+h) - d\alpha/dt(t) - h d^2\alpha/dt^2(t) = 1/2 \cdot h^2 \zeta$, con $\zeta = d^3\alpha/dt^3(t+s)$, para algún $s \in [0, h]$.
Por lo indicado más arriba, ζ es uniformemente acotada en t , y sea $k' / \|\zeta\| \leq k'$

Multiplicando por M y usando la ecuación de “swing“:

$$M \cdot d\alpha/dt(t+h) - (M-hD') d\alpha/dt(t) = -h f(\alpha) + 1/2 \cdot h^2 M \zeta \Rightarrow$$

$$\| M \cdot d\alpha/dt(t+h) - (M-hD') d\alpha/dt(t) \| \geq \| h f(\alpha) \| - 1/2 \cdot h^2 \| M \| k' \Rightarrow$$

Tomando $k = \max(\| M-hD' \|, \| M \|)$, se cumplirá:

$$\| M \cdot d\alpha/dt(t+h) - (M-hD') d\alpha/dt(t) \| \leq k (\| d\alpha/dt(t+h) \| + \| d\alpha/dt(t) \|)$$

uniformemente en $t \Rightarrow$ existen constantes $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ tales que:

$$\| d\alpha/dt(t+h) \| + \| d\alpha/dt(t) \| \geq k_1 \cdot h [\| f(\alpha) \| - h k_2] \quad (A)$$

b.3)

Sea E' el conjunto de puntos de equilibrio proyectado en el espacio de los α :

$$E' = \{\alpha_0 / f(\alpha_0) = 0\}.$$

Como los equilibrios se suponen hiperbólicos (y, por lo tanto, aislados) es posible encontrar un $\varepsilon > 0$ (fijo) de forma que las bolas cerradas $B(\alpha_{0i}, \varepsilon)$, con $\alpha_{0i} \in E'$, sean disjuntas, y la distancia entre sus bordes sea $> \varepsilon$.

$$\text{Sea } N = \cup B(\alpha_{0i}, \varepsilon), \text{ con } \alpha_{0i} \in E' \Rightarrow N^c = \cap B(\alpha_{0i}, \varepsilon)^c \subset \cap (\text{int}(B(\alpha_{0i}, \varepsilon)))^c$$

Si $M' = \cap (\text{int}(B(\alpha_{0i}, \varepsilon)))^c$, resulta M' un conjunto cerrado.

Sea $\beta = \min \{ \| f(\alpha) \| : \alpha \in M' \cap [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi] \}$ (tantas veces como la dimensión de α). β está bien definido pues $M' \cap [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \times \dots \times [0, 2\pi]$ es compacto.

Como $f(\alpha)$ es periódica y $f(\alpha) \neq 0$ en N^c , se concluye que existe $\eta > 0$ tal que $\| f(\alpha) \| > \eta$ si $\alpha \in N^c$

b.4)

Sean $T = \{t / \alpha(t) \in N^c\}$, $P = \{\alpha(t)/t \in T\}$, $Q = \{\alpha(t)/t \in T^c\}$ y $L(T)$ la medida de Lebesgue de T .

Queremos probar que si $L(T)$ es acotada, se cumple la Tesis, para lo cual bastará con probar que P y Q son acotados.

b.4.1) Probemos: si $L(T)$ es acotada $\Rightarrow P$ es acotado

Demostración

Si $t \in T$:

$$\| \alpha(t) \| = \left\| \int_T \omega(t) dt \right\| \leq \int_T \| \omega(t) \| dt \leq L(T).C \text{ para algún } C > 0, \text{ pues ya vimos que } \omega(t) \text{ es acotada en cada trayectoria.} \quad ///$$

b.4.2) Probemos: si $L(T)$ es acotada $\Rightarrow Q$ es acotado

Demostración

Fijemos un $t' \in T^c \Rightarrow \alpha(t') \in Q \Rightarrow \alpha(t') \in B(\alpha_{0i}, \epsilon)$ para algún equilibrio α_{0i} .

Por definición de P y Q , $B(\alpha_{0i}, \epsilon)$ es una bola cerrada “pegada” a P (la distancia entre la bola cerrada y P es nula)

$$\text{Se deduce: } \| \alpha(t') \| \leq L(T).C + 2 \epsilon \quad ///$$

b.5)

Sabemos que en la trayectoria $x(t)$ se cumple $dW/dt = -\langle D' d\alpha(t)/dt, d\alpha(t)/dt \rangle$, y por lo tanto

$$W(t) = \int_0^t -\langle D' \cdot d\alpha/dt(t), d\alpha/dt(t) \rangle dt + W(0) \Rightarrow$$

$$\int_T \langle D' \cdot d\alpha/dt(t), d\alpha/dt(t) \rangle dt \leq \int_0^\infty \langle D' \cdot d\alpha/dt(t), d\alpha/dt(t) \rangle dt \leq c_2 - c_1 \quad (B)$$

Análogamente:

$$\int_T \langle D' \cdot d\alpha/dt(t+h), d\alpha/dt(t+h) \rangle dt \leq \int_0^\infty \langle D' \cdot d\alpha/du(u), d\alpha/du(u) \rangle du \leq c_2 - c_1 \quad (B)$$

b.6)

Tomemos $h = 1/2 \eta k_2^{-1} \Rightarrow$ por (A) resulta:

$$\| d\alpha/dt(t+h) \| + \| d\alpha/dt(t) \| \geq k_1 h [\| f(\alpha(t)) \| - h k_2] \geq k_1 \eta / 2 \text{ si } t \in T \quad (C)$$

b.7)

$$\text{Sea } d = \min \{D'_i\} \Rightarrow \int_T \langle D' \cdot d\alpha/dt(t), d\alpha/dt(t) \rangle dt \geq d \int_T \| d\alpha/dt(t) \|^2 dt$$

$$\text{Análogamente: } \int_T \langle D' \cdot d\alpha/dt(t+h), d\alpha/dt(t+h) \rangle dt \geq d \int_T \| d\alpha/dt(t+h) \|^2 dt \Rightarrow$$

Por (B) y (C) :

$$2(c_2 - c_1) \geq \int_T \langle D' \cdot d\alpha/dt(t), d\alpha/dt(t) \rangle dt + \int_T \langle D' \cdot d\alpha/dt(t+h), d\alpha/dt(t+h) \rangle dt \geq$$

$$d \left[\int_T \| d\alpha/dt(t) \|^2 dt + \int_T \| d\alpha/dt(t+h) \|^2 dt \right] \geq (\text{usamos la desigualdad: } a^2 + b^2$$

$$\geq (a+b)^2/2) \geq d/2 \int_T [\| d\alpha/dt(t) \| + \| d\alpha/dt(t+h) \|]^2 dt \geq d/2 (k_1 h \eta/2)^2 L(T)$$

Por lo tanto: $L(T)$ es acotada \Rightarrow por b.4) $\{ \alpha(t) \}$ es acotado $///$

Comentarios

-Cabe destacar que en [Varaiya 1] se hace una demostración más sencilla, pero haciendo uso de la siguiente propiedad:

$\sum P_i (\alpha_i - \alpha_i^s)$ es acotado en las trayectorias \Rightarrow los α_i son acotados en las trayectorias.

Esta propiedad no es para nada evidente, y la referencia en la cuál se apoya [Varaiya 6] tampoco aclara la situación.

-Se ha optado por lo tanto en adaptar la demostración más compleja de [Varaiya 5]

No obstante, esta demostración tiene varios puntos oscuros, por lo que también se ha debido consultar [Chiang 1], que hace una demostración similar en un contexto más general.

Modelo que preserva estructuras

Si se trata de extender esta demostración al modelo que preserva estructuras, aparecen dificultades insalvables.

Esto se debe a que ahora aparecen las tensiones como variables de estado.

Para reproducir la demostración de que $\omega(t)$ es acotado, por ejemplo, es necesario suponer que $f(\alpha, V)$ lo es, siendo:

$$f_i(\alpha, V) = -P_i + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} E_i \cdot V_l B_{il} \text{sen}(\delta_i - \varphi_l)$$

$i=1, 2, \dots, n$

$$f_k(\alpha, V) = -P_k + \sum_{j=1}^{n+1} E_j \cdot V_k B_{jk} \text{sen}(\varphi_k - \delta_j) + \sum_{l=n+2}^{n+m+1} V_l \cdot V_k B_{lk} \text{sen}(\varphi_k - \varphi_l)$$

$k=n+2, n+3, \dots, n+m+1$

Es necesario suponer “a priori”, por lo tanto, que las tensiones en las barras de carga son acotadas en las trayectorias, lo que no es para nada evidente.

Se hace notar que la demostración de esta propiedad para el modelo que preserva estructuras (que es un modelo más ajustado a la realidad que el modelo clásico) es imprescindible para poder completar la fundamentación rigurosa de la teoría. Se hace necesario, por lo tanto, buscar alguna solución alternativa.

Comentario

En [Varaiya 1] se comenta simplemente que la extensión de la demostración del modelo clásico al modelo que preserva estructuras es inmediata, sin entrar en mayores detalles.

Solución adoptada

Observamos que en el desarrollo de la teoría la propiedad A3iii) de Varaiya se usa tan sólo para probar la propiedad fundamental F) $\partial R_A = \cup W^s(x_i)$ (ver Teorema 3.2 en el Capítulo 3), en que $W^s(x_i)$ es la variedad estable del equilibrio $x_i \in \partial R_A$ (esta propiedad es la que después se usa para probar las propiedades fundamentales del equilibrio más cercano (el *cuep*)).

Entendemos que todo el desarrollo se puede mantener aun cuando la propiedad A3iii) no sea cierta, pero restringiendo ∂R_A al conjunto de las trayectorias que son acotadas:

Si $B = \{ \Phi(t,x) / \Phi(t,x) \text{ es acotada} \}$, siendo $\Phi(t,x)$ las trayectorias del sistema, la propiedad F) indicada más arriba se restringiría a: $\partial R_A \cap B = \cup W^s(x_i)$, x_i equilibrio en ∂R_A .

Comentarios

-Recordamos que ∂R_A es invariante, y B obviamente también lo es, por lo que $\partial R_A \cap B$ también es invariante

-La definición asegura que los puntos de equilibrio $x_i \in \partial R_A$ también pertenecen a $\partial R_A \cap B$

-Con esta “redefinición” de ∂R_A , se hace innecesaria la propiedad A3iii) de Varaiya.

-En [Varaiya 1] se prueba que la región de estabilidad R_A para este modelo (y también para el modelo clásico) no es acotada, por lo que $\partial R_A \cap B$ es un subconjunto propio de ∂R_A .

Esta propuesta de solución es un aporte original de esta Tesis.

Referencias

[Chiang 1] H.Chiang,F.Wu,"Stability of nonlinear systems described by a second-order vector differential equation", IEEE Transactions on Circuits and Systems,Vol.CAS-35 N° 6 June 1988

[Varaiya 1] H.Chiang, F.Wu,P.Varaiya,"Foundations of direct methods for Power System transient stability analysis", IEEE Transactions on Circuit and Systems,Vol.CAS-34 N° 2 Feb.1987

[Varaiya 5] N.Tsolas,A.Arapostathis,P.Varaiya,"A structure preserving energy function for powers system transient stability analysis", IEEE Transactions on Circuit and Systems,Vol.CAS-32 N° 10 Oct.1985

[Varaiya 6] A.Arapostathis,S.Santry,P.Varaiya,"Global analysis of swing dynamics", IEEE Transactions on Circuit and Systems,Vol.CAS-29 N° 10 oct..1982

ANEXO 4-INCORPORACIÓN DE DISPOSITIVOS ADICIONALES AL MODELO DEL SISTEMA DE POTENCIA

En este Anexo se sugiere en qué forma es posible incorporar los modelos de algunos dispositivos de uso habitual en los sistemas de potencia al modelo básico utilizado a lo largo de la Tesis.

Estos dispositivos adicionales deben incorporarse al modelo de forma tal que sea posible seguir definiendo una función de energía para el sistema en la forma vista.

Una condición necesaria, por lo tanto, es que las ecuaciones que se agreguen al sistema no “destruyan” la simetría de su jacobiano.

Esta condición a cumplir impone que sea necesario asumir ciertas simplificaciones en los modelos a adoptar.

Estos modelos de dispositivos adicionales no fueron usados en las aplicaciones descritas en el Capítulo 8.

Los desarrollos descritos en A.4.2, A.4.3 (en forma parcial) y A.4.4 son aportes originales de esta Tesis

A4.1 Tratamiento de los límites de generación de reactiva de las máquinas

En el modelo desarrollado hasta ahora no es necesario incorporar las ecuaciones de generación de reactiva de las máquinas.

Esto es válido siempre y cuando sea posible mantener la consigna de tensión de la máquina sin violar sus límites de generación de reactiva.

Cuando esto no es posible, existen dispositivos de control que fuerzan a la máquina a generar no más que la reactiva límite y (en contrapartida) ya no es posible mantener constante la tensión en sus bornes.

Aparece, por lo tanto, una nueva incógnita (la tensión de la máquina) y una nueva ecuación (el balance de reactiva de la máquina).

Es posible incorporar en forma sencilla este comportamiento a nuestro modelo mediante la siguiente técnica [De Marco 3]:

-Se asume que la barra de generación de tensión controlada es la barra terminal y no la barra interna de la máquina (lo cuál, en rigor, es un modelo más preciso de la realidad).

-Se incorpora a la ecuación de reactiva de la barra terminal de la máquina (que ya existe en nuestro modelo, dado que las barras terminales de máquina se tratan como barras de carga convencionales) un término adicional $Q_{gen}(V_t)$ que describa aproximadamente la variación de generación de reactiva de la máquina en función de la tensión

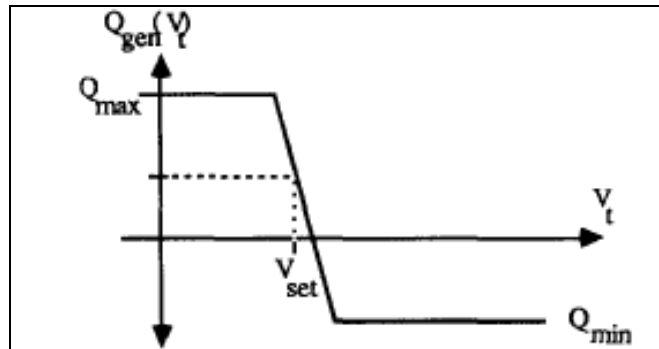


Figura A4.1 Variación de la reactiva generada por la máquina en función de la tensión [DeMarco 3]

Observamos que la función $Q_{gen}(V_t)$ asumida permite controlar la tensión terminal en una “banda” en torno a la consigna V_{set} . Este modelo (en contraposición con el modelo clásico en que se trata de mantener la tensión terminal “exactamente” en V_{set}) está más cerca de la realidad y, además, permite asegurar la continuidad de $Q_{gen}(V_t)$.

Como ya se ha mencionado anteriormente, desde el punto de vista teórico es necesario también asegurar la diferenciabilidad de $Q_{gen}(V_t)$, lo cual se puede conseguir, simplemente, “redondeando” la función en los 2 puntos sin derivada (desde el punto de vista de las aplicaciones esta aproximación no tiene consecuencias prácticas).

En el cálculo explícito de la función de energía, asumiendo que en el sep es $V_0 = V_{set}$

para las barras de generación, resulta $\int_{V_{set}}^V Q_{gen}(V_t)/V_t dV_t \approx Q_{max} \ln(V/V_{set})$ si $V \leq V_{set}$,

que es el caso habitual para el colapso de tensión.

Una consecuencia de la adopción de este modelo de control de tensión en las barras terminales de las máquinas es que se hace necesario simplificar el modelo, eliminando los nodos internos de las máquinas

El modelo así simplificado, en el cual no se tienen en cuenta las reactancias internas de la máquina, formula las ecuaciones de “swing” (balance de activa) y de reactiva directamente en los nodos terminales de la máquina.

Se obtiene así un modelo de “flujo de cargas”+ecuaciones de swing, con las siguientes diferencias:

- a) las tensiones en barras de generación no son exactamente constantes en la zona de regulación
- b) es necesario formular las ecuaciones de reactiva de las máquinas

A4.2 Tratamiento de compensadores estáticos (SVC)

Los modelos de SVC se pueden incorporar mediante funciones $Q_k(V_k)$, en forma similar a como se tratan los límites de reactiva de los generadores.

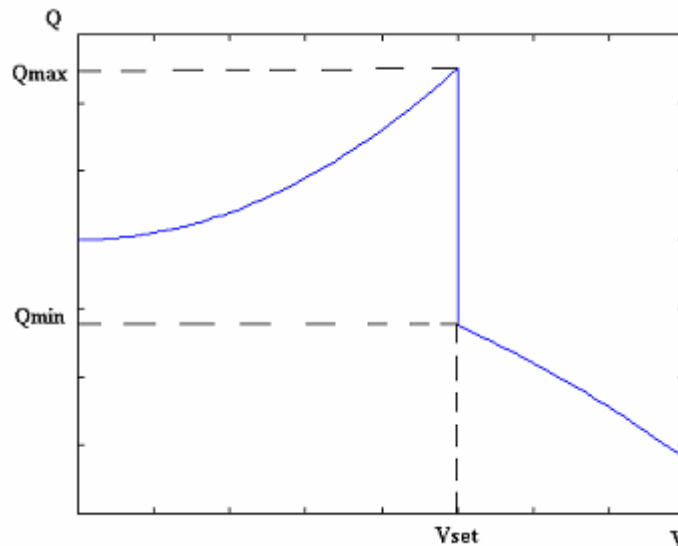


Figura A4.2 Variación de la reactiva de un SVC en función de la tensión

Se observa que:

- la zona de regulación está definida por las reactivas límite nominales (inductiva y capacitiva) del SVC
- por fuera de las zona de regulación, la variación de reactiva con la tensión es la correspondiente a un reactor o banco de condensadores fijos, según corresponda.

(Estamos asumiendo que el SVC y su sistema de control son tales que por fuera de la banda de regulación no se siguen maniobrando bancos de condensadores o reactores por “steps”, sino que queda un condensador o reactor de valor fijo)

Valen las mismas consideraciones hechas para la generación de reactiva de las máquinas en relación a las aproximaciones para conseguir funciones $Q(V)$ continuas y diferenciables.

A4.3 Tratamiento de conmutadores bajo carga de transformadores (OLTC) en regulación automática

Se asumen las siguientes hipótesis simplificadoras:

- los OLTC con regulación automática sólo existen eventualmente en transformadores de carga (i.e: no hay OLTC en regulación automática en transformadores “serie” de la red)
- se asume la regulación continua
- los transformadores de carga se asumen ideales (con impedancia de cortocircuito nula), de forma que la tensión en el devanado de media tensión está dada por la tensión del devanado de alta tensión multiplicada por la relación nominal asociada al “tap”

En estas condiciones, el efecto de los “taps” se puede modelar a través de la curva $Q_k(V_k)$ de la carga “vista” del lado de alta tensión.

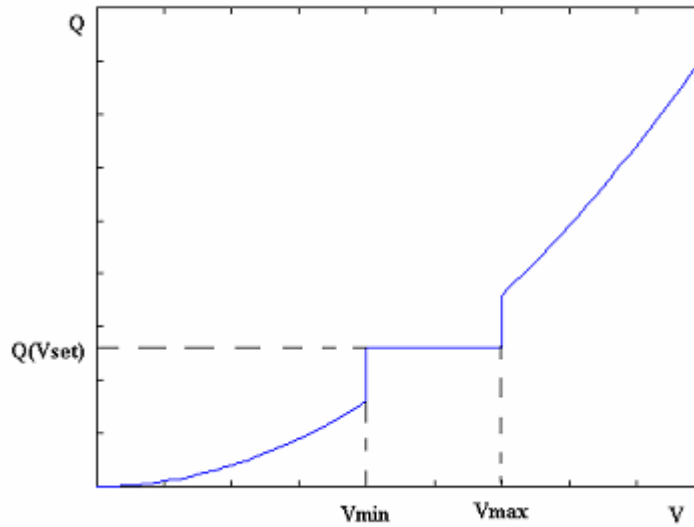


Figura A4.3 Variación de la potencia reactiva con la tensión en presencia de un OLTC

Se observa que:

-en la zona de regulación (tensión de alta variando entre V_{kmin} y V_{kmax}) $Q_k(V_k)$ es aproximadamente constante, y vale $Q_k(V_{kset})$, siendo V_{kset} la tensión consigna del lado carga.

-fuera de la zona de regulación $Q_k(V_k)$ es la función de variación “natural” de la carga con la tensión,

Valen las mismas consideraciones hechas para la generación de reactiva de las máquinas en relación a las aproximaciones para conseguir funciones $Q(V)$ diferenciables.

A4.4 Tratamiento de bancos de condensadores maniobrables en regulación automática

Se puede hacer un tratamiento aproximado de estos dispositivos, modelándolos como la parte capacitiva de los SVC (o sea: suponiendo que en la zona de regulación la variación de reactiva es continua)

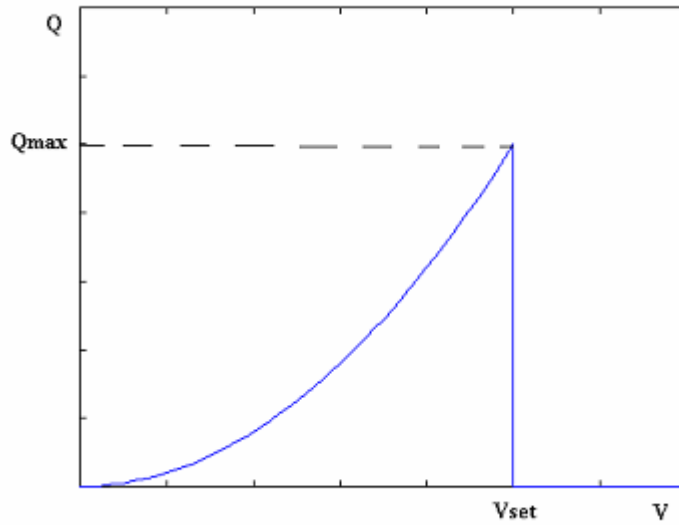


Figura A4.4 Variación de la potencia reactiva con la tensión en un banco de condensadores

En este modelo $Q_{\max} \cong V_{\text{set}}^2 \cdot Y_b$, siendo Y_b la admitancia asociada al número máximo posible de condensadores que se pueden conectar

Valen las mismas consideraciones hechas para la generación de reactiva de las máquinas en relación a las aproximaciones para conseguir funciones $Q(V)$ diferenciables.

Referencias

[De Marco 3] T.Overbye,C.De Marco,"Voltage security enhancement using energy based sensitivities", IEEE Transactions on Power Systems,Vol.6,Nº 3.August 1991

ANEXO 5-DATOS DE LAS REDES ANALIZADAS

A5.1 Red de 3 barras (Red 3-1)

La topología de esta red coincide con la analizada en [DeMarco 4].

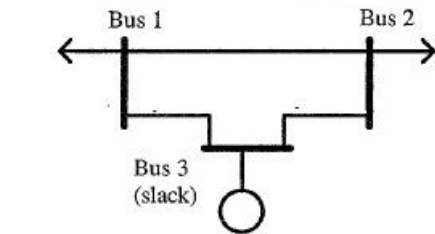


Figura A5.1 Red de 3 barras 3-1-Adaptada de [De Marco 4]

DATOS DE BARRAS

BARRA	TENSION	CARGA	
		MW	MVAR
Bus 3	1.0		
PQ Bus 1		100	50
PQ Bus 2		100	50

DATOS DE LINEAS

	BARRA_1	BARRA_2	RESISTENCIA	REACTANCIA	SUCEPTANCIA
Linea	Bus 3	Bus 1	0	0.2	0
Linea	Bus 3	Bus 2	0	0.2	0
Linea	Bus 1	Bus 2	0	0.2	0

Notas

- La barra slack es Bus 3
- Las barras con código "PQ" son de carga.

A5.2 Red de 3 barras (Red 3-2)

Esta red coincide con la analizada en [DeMarco1].

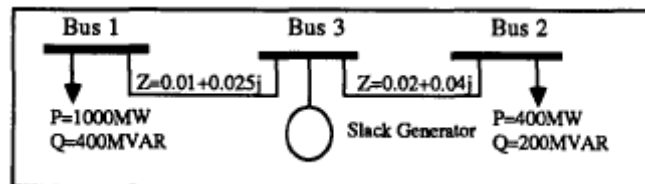


Figura A5.2 Red de 3 barras 3-2 [De Marco 4]

A5.3 Red de 16 barras (Red 16)

La topología de esta red coincide con la analizada en [De Marco 4].

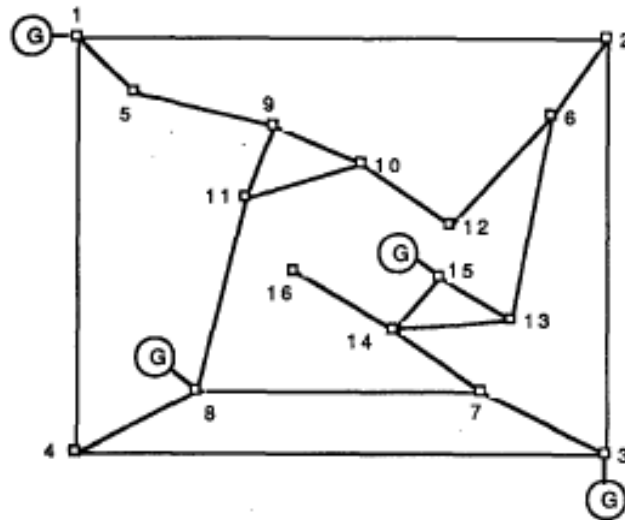


Figura A5.3 Red de 16 barras [De Marco 4]

DATOS DE BARRAS

BARRA	TENSION	CARGA		GENERACION
		MW	MVAR	MW
1	1.02			
PQ 2		0	0	
PV 3	1.02			200
PQ 4		0	0	
PQ 5		20	5	
PQ 6		0	0	
PQ 7		30	60	
PV 8	1.01			20
PQ 9		30	75	
PQ 10		20	8	
PQ 11		20	4	
PQ 12		30	65	
PQ 13		40	12	
PQ 14		25	75	
PV 15	1.0			0
PQ 16		15	10	

Notas

- La barra slack es la Barra 1
- Las barras con código "PQ" son de carga, y las de código "PV" son de generación
- Se supuso límites de generación de reactiva infinitos en todos los generadores

DATOS DE LINEAS

	BARRA_1	BARRA_2	RESISTENCIA	REACTANCIA	SUCEPTANCIA
Linea	1	2	0.01	0.1	0.05
Linea	1	4	0.01	0.05	0.1
Linea	1	5	0.001	0.05	0
Linea	2	3	0.03	0.3	0.1
Linea	2	6	0.0	0.04	0.0
Linea	3	4	0.01	0.04	0.2

Linea	3	7	0.005	0.03	0
Linea	4	8	0.03	0.2	0.0
Linea	5	9	0.14	0.32	0
Linea	6	12	0.05	0.15	0.0
Linea	6	13	0.05	0.15	0.0
Linea	7	8	0.02	0.08	0
Linea	7	14	0.06	0.08	0
Linea	8	11	0.04	0.11	0.0
Linea	9	10	0.02	0.08	0
Linea	9	11	0.02	0.08	0
Linea	10	11	0.01	0.05	0.0
Linea	10	12	0.01	0.05	0
Linea	13	14	0.02	0.08	0
Linea	13	15	0.01	0.06	0.0
Linea	14	15	0.01	0.08	0
Linea	14	16	0.06	0.08	0

A.5.4 Esquema unifilar geográfico de la Red de Trasmisión uruguaya

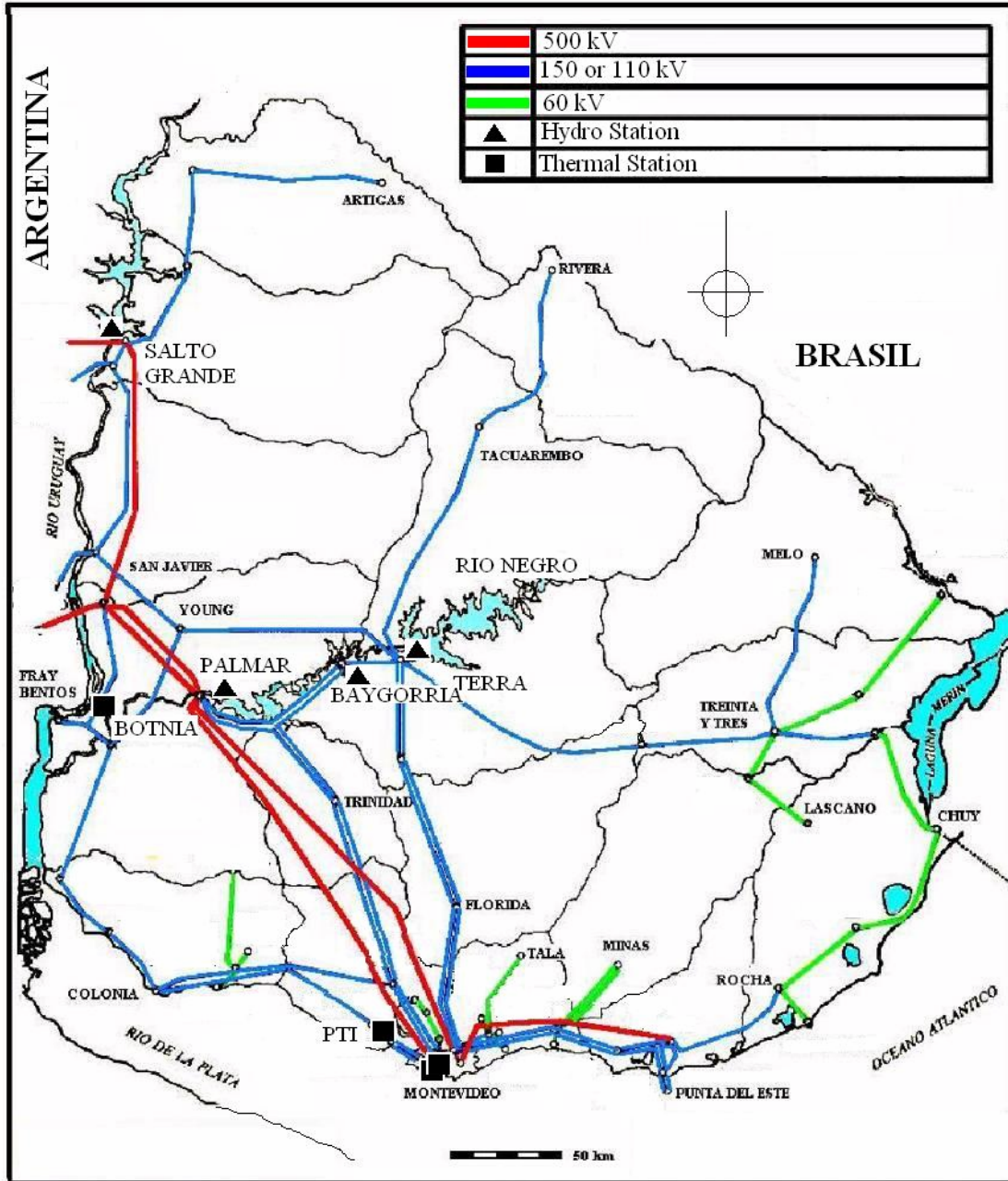


Figura A5.4 Esquema de la red uruguaya

Referencias

[DeMarco 1] T.Overbye, C.DeMarco,"Improved techniques for power system voltage stability assessment using energy methods", IEEE Transactions on Power Systems, Vol.6,Nº4,Nov.1991

[DeMarco 4] T.Overbye, C.DeMarco,"Low voltage power flow solutions and their role in exit time based security measures for voltage collapse ", Proceedings of the 27th Conference on Decision and Control,Austin,Texas,Dec.1988

ANEXO 6 –RESULTADOS EN LA RED DE 16 BARRAS

Las tablas muestran las tensiones p.u en las barras de carga obtenidas para cada uno de los uep, y los márgenes de energía correspondientes.

Cuando la Tabla muestra un valor de tensión “0.0”, se debe interpretar que la tensión en esa barra es positiva, pero muy pequeña (del orden de 10^{-5} p.u o inferior)

Método BT

	uep1	uep2	uep3	uep4	uep5	uep6	uep7
Barra	2	4	5	6	7	9	10
2	0.0	0.9872	0.9434	0.3554	0.9449	0.8713	1.3831
4	1.0218	0.0	1.0218	1.0218	1.0207	1.0218	1.0218
5	0.9563	0.9996	0.0092	0.9584	0.9959	0.8909	0.7923
6	0.2067	0.9680	0.9004	0.0	0.9050	0.7902	1.2845
7	0.9818	0.9949	0.9943	0.9784	0.0127	0.9924	1.0035
9	0.5737	0.8858	0.5528	0.5881	0.8638	0.0923	0.3679
10	0.5197	0.8955	0.6538	0.5285	0.8688	0.2919	0.0148
11	0.6396	0.9158	0.6985	0.6492	0.8965	0.3819	0.0496
12	0.3756	0.8858	0.6786	0.3779	0.8490	0.3422	0.0265
13	0.8153	0.9790	0.9647	0.7710	0.8268	0.9410	1.0825
14	0.9062	0.9669	0.9621	0.8899	0.5729	0.9533	1.0053
16	0.8971	0.9585	0.9536	0.8807	0.5581	0.9448	0.9973
Energía	9.3442	25.998	10.542	7.7278	23.585	2.1760	13.684

	uep8	uep9	uep10	uep11	uep12
Barra	11	12	13	14	16
2	0.7964	0.8168	0.7513	0.8968	0.9619
4	1.0219	1.0218	1.0218	1.0215	1.0217
5	0.0094	0.9274	0.9818	0.9927	0.9975
6	0.6752	0.7064	0.6063	0.8303	0.9286
7	0.9905	0.9910	0.9153	0.7902	0.9335
9	0.1149	0.3610	0.7576	0.8378	0.8726
10	0.0058	0.2883	0.7380	0.8366	0.8792
11	0.0557	0.4626	0.8013	0.8728	0.9042
12	0.0410	0.0859	0.6681	0.8046	0.8631
13	0.9165	0.9231	0.0147	0.6201	0.8717
14	0.9443	0.9467	0.5998	0.0262	0.6817
16	0.9356	0.9381	0.5858	0.0060	0.0212
Energía	12.625	2.1506	12.749	11.112	3.4959

Tabla A6.1 Cálculo de equilibrios inestables con el método BT

Comentarios

-En la segunda fila de la Tabla se identifica la barra en la cuál se supuso tensión baja para comenzar las iteraciones.

Método CART1

	uep1	uep2	uep5	uep6	uep10	uep13	uep14
Barra	2	4	7	9	13	10	11
2	0.0	0.9873	0.9449	0.8708	0.7514	0.0311	0.8186
4	1.0218	0.0	1.0207	1.0218	1.0219	1.0216	1.0216
5	0.9567	0.9996	0.9959	0.8910	0.9818	0.0102	0.9089
6	0.2071	0.9681	0.9050	0.7893	0.6064	0.1954	0.7094
7	0.9819	0.9949	0.0127	0.9924	0.9155	0.9141	0.9911
9	0.5759	0.8861	0.8638	0.0931	0.7580	0.0809	0.2805
10	0.5221	0.8958	0.8688	0.2905	0.7384	0.1841	0.0162
11	0.6415	0.9160	0.8965	0.3814	0.8018	0.0395	0.0087
12	0.3783	0.8861	0.8490	0.3398	0.6685	0.2101	0.0157
13	0.8155	0.9790	0.8268	0.9409	0.0149	0.0222	0.9237
14	0.9063	0.9669	0.5729	0.9532	0.6000	0.5991	0.9468
16	0.8973	0.9585	0.5581	0.9447	0.5860	0.5851	0.9381
Energía	9.3459	25.998	23.585	2.1760	12.759	52.707	4.2822

Tabla A6.2 Cálculo de equilibrios inestables con el método CART1

Comentarios

-En la segunda fila de la Tabla se identifica la barra en la cuál se supuso aumento de potencia reactiva para definir la dirección de búsqueda .Las barras que no figuran en esta fila corresponden a casos en los que no se encontró solución en la dirección de búsqueda.

-En la tabla se han identificado con la misma numeración que en la Tabla del Método BT a los uep que coinciden con los obtenidos por el Método BT

-Se observa que el método detecta 5 uep iguales a los del Método BT,y otros 2 uep distintos (uep13 y uep14).

-El método no detecta el uep de mínimo margen de energía del Método BT (uep9), pero sí el siguiente en orden creciente (uep6), con un margen de energía muy similar. Los uep adicionales detectados por este método son de margen de energía superior a éste.

Método CART2

	uep1	uep2	uep5	uep6	uep9	uep10	uep11
Barra	2	4	7	9	12	13	14
2	0.0	0.9873	0.9449	0.8708	0.8169	0.7514	0.8966
4	1.0218	0.0	1.0207	1.0218	1.0218	1.0219	1.0215
5	0.9569	0.9996	0.9959	0.8910	0.9270	0.9818	0.9927
6	0.2074	0.9681	0.9050	0.7894	0.7066	0.6064	0.8301
7	0.9819	0.9949	0.0127	0.9924	0.9911	0.9156	0.7899
9	0.5770	0.8861	0.8638	0.0933	0.3581	0.7580	0.8379
10	0.5233	0.8958	0.8688	0.2906	0.2866	0.7385	0.8366

11	0.6425	0.9160	0.8965	0.3815	0.4609	0.8019	0.8730
12	0.3797	0.8861	0.8490	0.3399	0.0866	0.6685	0.8046
13	0.8156	0.9790	0.8268	0.9409	0.9231	0.0149	0.6195
14	0.9063	0.9669	0.5729	0.9532	0.9468	0.6001	0.0252
16	0.8973	0.9585	0.5581	0.9447	0.9382	0.5861	0.0794
Energía	9.3459	25.998	23.585	2.1760	2.1512	12.760	11.291

Barra	uep12	uep15	uep16	uep17	uep18
Barra	16	11	5	6	10
2	0.9619	0.3554	0.8423	0.3556	0.7252
4	1.0218	1.0218	1.0217	1.0230	1.0217
5	0.9975	0.8998	0.8836	0.8007	0.9040
6	0.9286	0.0	0.7454	0.0	0.5668
7	0.9335	0.9785	0.9919	0.9793	0.9885
9	0.8727	0.0116	0.0466	0.1498	0.1290
10	0.8793	0.1393	0.0409	0.2022	0.0551
11	0.9043	0.0203	0.0504	0.0215	0.0207
12	0.8631	0.0366	0.2004	0.0935	0.2516
13	0.8717	0.7711	0.9315	0.7712	0.8930
14	0.6817	0.8899	0.9499	0.8903	0.9353
16	0.0204	0.8808	0.9413	0.8811	0.9266
Energía	3.4958	8.1803	3.5735	10.623	5.1336

Tabla A6.3 Cálculo de equilibrios inestables con el método CART2

Comentarios

-En la segunda fila de la Tabla se identifica la barra en la cuál se supuso aumento de potencia reactiva para definir la dirección de búsqueda (barra “asociada” al margen de energía) .Las barras que no figuraran en esta fila corresponderían a casos en los que no se encontró solución en la dirección de búsqueda (en este ejemplo no se ha dado esta situación).

-En la tabla se han identificado con la misma numeración que en la Tabla del Método BT a los uep que coinciden con los obtenidos por el Método BT

-Se observa que el método detecta 8 uep iguales a los del Método BT, y otros 4 uep distintos (uep15 a uep18).

-El método detecta el uep de mínimo margen de energía del Método BT (uep9), así como los 2 siguientes en orden creciente (uep6 y uep12). Los uep adicionales detectados por este método son de margen de energía superior a esos tres.

ANEXO 7 –DESCRIPCIÓN SINTÉTICA DEL PROGRAMA DE CÁLCULO

En este Anexo se describen en forma sintética las características principales de los programas desarrollados para implementar los cálculos descritos en el Capítulo 8 de esta Tesis.

Estos programas se han desarrollado en ambiente MatLab, versión 5.3.

A7.1 Entrada de datos

El archivo de datos de la red es un archivo ASCII en el cuál se describen los datos necesarios para correr un flujo de cargas convencional.

Se ha utilizado el mismo formato de datos que utiliza el programa Estten [AM], a los sólo efectos de poder reutilizar algunas de sus rutinas de cálculo y facilitar la comparación de resultados.

A7.2 Rutina principal

La rutina principal del programa (llamada Enmain) es la que carga el archivo de datos y permite que el usuario defina las principales opciones de cálculo (método de cálculo de los uep, opciones de filtrado, opción de no considerar barras con carga nula, etc.).

Enmain convoca luego ordenadamente a las rutinas de cálculo del punto de operación inicial (Iniflujoe, Solflujo, Salflujo), del método de filtrado elegido (Filtmodal, Filtvector) y del método de cálculo de uep elegido (Metbt, Metcart, Metcart2c).

Finalmente, Enmain convoca a la rutina de cálculo del margen de energía (Energ).

A7.3 Cálculo del punto de operación inicial (sep)

A los efectos del cálculo del sep se han reutilizado las rutinas de cálculo de solución del flujo de cargas ya desarrolladas para el programa Estten, introduciéndoles tan sólo pequeñas modificaciones.

Las rutinas desarrolladas son las siguientes:

Iniflujoe: Lee un archivo de “settings” básicos del programa (Settingsest12) y el archivo de datos (rutina Lecdat), extrae del archivo de datos el punto inicial con que se comenzarán las iteraciones para resolver el flujo de cargas (rutina Pinicial) y calcula la matriz de admitancias nodales del sistema (rutina Ybb12).

Se pueden ajustar asimismo en esta rutina algunos datos básicos para resolver el flujo de cargas (tolerancia, número de iteraciones).

Esta rutina se encarga, asimismo, de anular las resistencias de red no nulas que se hayan ingresado en el archivo de datos, dado que los métodos desarrollados asumen que las redes no tienen pérdidas.

Flujosoloe: Es la rutina principal de resolución de las ecuaciones del flujo de cargas en coordenadas polares.

Esta rutina convoca a la rutina de solución de flujo de cargas propiamente dicha (Solflujo) y a una rutina que elabora un informe detallado de los resultados obtenidos (Salflujo).

La rutina Solflujoe resuelve las ecuaciones del flujo de cargas por el método de Newton Raphson, haciendo uso de los parámetros de cálculo y del punto de iteración inicial definido en Iniflujoe.

Hace uso, a su vez, de una rutina que construye las ecuaciones del sistema y su jacobiano en polares (Ecflujo) y de otra rutina (LimreacPSAT) que evalúa si alguna de las máquinas del sistema han llegado a sus límites de reactiva. De darse este caso, LimreacPSAT realiza las modificaciones necesarias en el sistema.

Comentario

Por compatibilidad con Estten se han mantenido asimismo las rutinas que evalúan límites vinculados a conmutadores bajo carga y bancos de condensadores, si bien las restantes rutinas del programa no se han desarrollado para tener en cuenta la eventual presencia de estos dispositivos en la red.

A7.4 Filtrado de los uep

El programa permite realizar un filtrado previo de los uep a calcular, de acuerdo a la teoría descrita en el Capítulo 6.

Las rutinas desarrolladas son las siguientes:

-Filtvectan: Esta rutina implementa el filtrado de los uep a calcular por el método del vector tangente.

La implementación se ha hecho exclusivamente para el caso particular descrito en el Capítulo 6 (aumento de carga reactiva en una barra del sistema por vez).

Se ha utilizado, asimismo, el criterio heurístico de suponer que los elementos más grandes en la submatriz a analizar (submatriz del jacobiano inverso J^{-1} asociada a las ecuaciones de reactiva y a las tensiones) se dan siempre en su diagonal principal.

-Filtmodal: Esta rutina implementa el filtrado de los uep a calcular por el método de análisis modal.

La cantidad de autovalores más pequeños (en módulo) a considerar se ha fijado en el 10 % (redondeado hacia arriba) del número total de barras del sistema (obviamente: este valor es fácilmente modificable en el programa).

Comentario

El número total de uep a calcular en ambos métodos es un dato de entrada que se ingresa en la rutina principal Enmain.

A7.5 Cálculo de los uep

Se han implementado los 3 métodos de cálculo descritos en el Capítulo 6.

En todos los casos, y una vez definido de acuerdo a cada método el punto de operación inicial, el uep se calcula haciendo uso de la rutina Flujosoloe ya descrita, con las siguientes precauciones:

-No se hace un nuevo análisis de límites de generación de reactiva de las máquinas, dado que la teoría exige que el sistema de ecuaciones a resolver sea idéntico al usado para encontrar el sep.

-No se emite un informe detallado de cada solución encontrada, sino que sólo se retienen los resultados relevantes de cada corrida.

Las rutinas desarrolladas son las siguientes:

-Metbt: Cálculo de los uep por el método de bajas tensiones.

El programa asume una tensión para comenzar las iteraciones de 0,2 p.u en la barra analizada (obviamente: este valor es fácilmente modificable en el programa).

-Metcart: Cálculo de los uep por el método cartesianas, en su versión original.

Esta rutina hace uso de la rutina auxiliar Jacflucar, que se encarga de calcular el jacobiano del flujo de carga en cartesianas.

Cabe destacar que (como se explica en el Capítulo 8), en las aplicaciones se ha optado por no usar esta versión original del método cartesianas, el cuál sólo se utilizó en las pruebas iniciales.

A esto se debe que no se hayan implementado en esta rutina algunas mejoras (como ser la opción de no utilizar para el cálculo barras con carga nula, o las correcciones para evitar que el uep calculado coincida con el sep) que sí se han implementado en el método cartesianas en su versión alternativa.

-Metcart2c: Cálculo de los uep por el método cartesianas, en su versión alternativa.

Esta rutina hace uso de la rutina auxiliar Jacflucar, que se encarga de calcular el jacobiano del flujo de carga en cartesianas.

En esta rutina se implementó un algoritmo que permite identificar los casos en que el método de Newton Raphson converge nuevamente al sep y (en caso que se dé esta situación), "afina" la búsqueda del uep, disminuyendo en pasos sucesivos las tensiones del punto de iteración inicial pero sin apartarse de la dirección de búsqueda del uep impuesta por el método cartesianas

Mediante esta técnica, se consiguió en la mayoría de los casos obtener efectivamente el uep asociado a esa dirección de búsqueda. En los casos en que esto no se consigue (a causa de haber superado un número máximo de intentos o porque el punto de iteración inicial se ha alejado demasiado del punto de iteración inicial original), la rutina pasa a calcular el uep mediante el método de bajas tensiones.

Comentario

En las pruebas hechas con la red de 16 barras se detectó la necesidad de realizar esta "separación" entre el sep y el uep mediante pasos de iteración muy pequeños. Esto se debe a que en algunos casos se han encontrado muchos uep en las cercanías de algunos puntos de iteración inicial. Por lo tanto: de no realizar una búsqueda muy precisa podría "perdersse" el uep asociado a la dirección de búsqueda definida.

Esta necesidad de realizar la búsqueda en pasos pequeños tiene obviamente un efecto negativo sobre la velocidad de cálculo.

A7.6 Cálculo del margen de energía

Una vez calculados los uep, la rutina Energ se encarga de calcular sus márgenes de energía asociados

Cabe destacar que en la versión actual del programa este cálculo se realiza asumiendo que todas las cargas reactivas son independientes de la tensión.

A7.7 Cálculo del margen de reactiva por el método de Dobson.

Una vez calculados los uep y sus márgenes de energía asociados, es posible convocar a las rutinas que calculan los márgenes de reactiva aproximados correspondientes, de acuerdo con la teoría descrita en el Capítulo 7.

Se han desarrollado una rutina que implementa el método original de Dobson (MargDobson2) y otra que implementa el método alternativo descrito en el Capítulo indicado (MargDobson3)

A7.8 Cálculo aproximado del colapso de tensión más cercano

Una vez calculados los uep y sus márgenes de energía asociados, es posible convocar a la rutina MetYorino que calcula el colapso de tensión aproximado más cercano correspondiente al cuep, de acuerdo con la teoría descrita en el Capítulo 7.

Esta rutina hace uso a su vez de la rutina CLL3, que es la que calcula efectivamente la dirección de carga asociada al colapso de tensión más cercano aproximado.

A esos efectos, CLL3 hace uso de las rutinas auxiliares Jacflucar (cálculo del jacobiano del flujo de cargas en cartesianas) y Mismatchcar (cálculo de la variación de carga asociada al punto medio entre el sep y el cuep).

Cabe destacar que CLL3 asume $\alpha=0,95$ para el factor de curvatura de la hipersuperficie de puntos de bifurcación (obviamente: este valor es fácilmente modificable en el programa).

Referencias

[AM] M.Artenstein, P.Monzón, “Tools for voltage collapse analysis and applications” , Revista IEEE LatinAmerica, Vol.4, N° 3, May 2006