

ESTUDIO Y APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL NO LINEAL

Pablo Monzón

Junio de 1999

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

ESTUDIO Y APLICACIÓN DE TÉCNICAS DE CONTROL NO LINEAL

PABLO ARIEL MONZÓN RANGELOFF

TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE *MAGISTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA* DE LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

DIRIGIDA POR: Profesor Rafael Canetti; Dr. Roberto Markarián

TRIBUNAL: Ing. Néstor Macé; M.Sc.Ing. César Briozzo; Dr. Jorge Lewowicz

Montevideo, junio de 1999.

Agradecimientos

A mi familia, que siempre dio todo sin pedir nada a cambio. A Paula, ella sabe por qué. A Roberto y Rafael, porque se embarcaron en esta travesía sin tener muy claro el destino. A todo el IIE, en particular a los controleros, a la CSIC y a la CAP por todo el apoyo. A Gerardo, Fabio, Edi, Quique, Luis, Victor, Marzelo, Macaya y Luar, porque siempre están ahí.

A Paula

*Al Profesor José Luis Massera,
que me enseñó la simpleza de los sistemas lineales*

Índice General

I	1
1 Sistemas No Lineales	3
1.1 ¿Qué es un sistema no lineal?	3
1.2 Clasificación de sistemas	4
1.3 Sistemas lineales autónomos	6
1.4 Sistemas no lineales	8
2 Teoría de Liapunov	11
2.1 Estabilidad según Liapunov	11
2.1.1 Sistemas autónomos	12
2.1.2 Sistemas no autónomos	21
2.2 Sistemas lineales autónomos	24
2.3 Teoremas recíprocos	25
2.4 Sistemas perturbados	32
2.4.1 $\delta(t, 0) = 0$, $\forall t \geq t_o$	33
2.4.2 $\delta(t, 0) \neq 0$, $\forall t \geq t_o$	36
2.5 Linealización	37
2.6 Control utilizando Liapunov	38
3 Control Óptimo	42
3.1 Problema del Regulador Óptimo	42
3.2 Programación Dinámica	44
3.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange	46
3.4 HJB vs. Euler-Lagrange	47
3.5 Regulador Óptimo Cuadrático Lineal (LQR)	48
4 Linealización Exacta	51
4.1 Campos de Vectores	52
4.2 Cambios de coordenadas	53
4.3 Teorema de Frobenius	55
4.4 Sistemas SISO	57
4.4.1 Grado relativo	58
4.4.2 Linealización exacta	61
4.5 Sistemas MIMO	64
4.5.1 Grado relativo	64

4.5.2	Linealización exacta	65
4.6	Conclusiones	67
II		69
5	Descripción del sistema a estudio	71
5.1	Introducción	71
5.2	Modelado	71
5.3	Objetivos del control	74
5.4	Sistema linealizado	75
6	Linealización Jacobiana	77
6.1	Introducción	77
6.2	Aplicación	78
7	Sistemas Lineales Dependientes de Parámetros	81
7.1	Introducción	81
7.2	Método LPV	82
7.3	Aplicación	84
8	Control por Linealización Exacta	87
8.1	Linealización exacta	87
8.2	Dinámica de los ceros	92
8.3	Ecuación normal	92
8.4	Estabilización parcial	94
8.5	Estabilización total	96
9	Conclusiones	99
9.1	Teorías básicas	99
9.2	Aplicaciones	100
A	Teorema de Frobenius	102
A.1	Introducción	102
A.2	Teorema de Frobenius	103
A.3	Otras formas del Teorema	112
A.4	Sistemas Lineales	112
A.5	Alcanzabilidad y Observabilidad	115
A.5.1	Alcanzabilidad y Observabilidad local	116
A.6	Conclusiones	120
	Bibliografía	121

Prefacio

El objetivo de la presente Tesis es el de estudiar aplicaciones de técnicas de Control No Lineal para lograr la estabilidad de un sistema no lineal. Para el logro de dicho objetivo será necesario realizar estudios tendientes a cubrir algunas áreas básicas de Control No Lineal no contempladas en los estudios de grado. Las distintas técnicas que se estudiarán se aplicarán sobre un sistema físico concreto.

El Control No Lineal ha sido estudiado intensamente desde el comienzo mismo de la Teoría de Control. Incluso los modelos físicos más sencillos son no lineales, lo cual ha motivado la búsqueda de estrategias de control que contemplen las no linealidades y las utilicen para lograr el desempeño deseado.

Una de las herramientas más útiles para estudiar la estabilidad de sistemas de control, lineales o no, es la Teoría de Liapunov para sistemas dinámicos, formulada por el matemático ruso en 1892. En general, la principal preocupación del Ingeniero de Control es la estabilidad del sistema a estudio y por eso siempre se está en la búsqueda de una función de Liapunov.

El estudio de sistemas no lineales es muy complejo, lo cual motivó que se estudiaran más en profundidad los modelos lineales, obtenidos por medio de simplificaciones en el modelo físico o por linealización del sistema no lineal en torno a una condición de funcionamiento. El problema de Control Lineal ha sido ampliamente estudiado¹. La linealidad determina un ámbito de trabajo comprensible, visualizable y relativamente simple. Cuando se quiere dar el salto hacia los sistemas no lineales surgen naturalmente los enfoques presentados en los capítulos 6 y 7, el segundo de más complejidad que el primero. Estos enfoques buscan extender al caso no lineal, de manera relativamente simple, algunas técnicas lineales de control.

La presente Tesis se organiza en dos partes. La primera parte introduce un conjunto de Teorías básicas de enorme importancia en el Control No Lineal. La segunda parte presenta un sistema físico concreto y describe la aplicación al mismo de varias técnicas de control.

Se presume que el lector tiene conocimientos de la Teoría de Control para Sistemas Lineales. Si no es el caso, una buena introducción a la misma puede encontrarse en las siguientes referencias: [Kha96, Kuo96, Kai80, Zho97], que son textos de cursos de grado o posgrado en control lineal.

¹Los trabajos de investigación de hoy día en sistemas lineales se orientan en general a extender los resultados conocidos al caso de sistemas lineales perturbados [Zho97].

El capítulo 1 es una introducción a los sistemas no lineales. Se presentan aquí los principales conceptos, la nomenclatura básica, las similitudes con el caso lineal y las propiedades inherentes a los sistemas no lineales.

El capítulo 2 presenta la denominada Teoría de Liapunov, vinculada con el concepto de estabilidad de ecuaciones diferenciales ordinarias y su aplicación a la Teoría de Control. La importancia de esta Teoría en el Control No Lineal es enorme, y prácticamente todas las técnicas de control para estabilizar sistemas se basan en encontrar y hacer uso de una función de Liapunov. Este capítulo pretende ser autocontenido e introduce conceptos básicos, que en general son vistos en cursos elementales de ecuaciones diferenciales, y conceptos más avanzados, como los Teoremas Recíprocos y el estudio de sistemas perturbados.

El capítulo 3 introduce el Control Óptimo, que es una aplicación al Control de conceptos de la optimización funcional, cuyos orígenes se remontan al siglo XVII. Muchas líneas actuales de investigación en Control No Lineal se enmarcan en el Control Óptimo, como por ejemplo el *Control Predictivo por Modelo* (MPC). Es frecuente enfrentarse a la necesidad de controlar un sistema no lineal en presencia de un conjunto de restricciones (como por ejemplo una acotación de la energía o la amplitud de la acción de control), minimizando un determinado *costo* (el tiempo empleado, la energía consumida, etc.).

El capítulo 4 presenta un cambio muy importante con respecto a los anteriores. Introduce el concepto de Linealización Exacta y su aplicación a los sistemas de control. La idea es muy sencilla y consiste en encontrar condiciones necesarias y/o suficientes para que existan un cambio de coordenadas y una realimentación de estados que determinen que la descripción del sistema en las nuevas variables sea *lo más lineal posible*. Las herramientas matemáticas involucradas aquí se toman de la Geometría y la Topología Diferencial y requieren la introducción de un conjunto de conceptos y teoremas que normalmente no se manejan a nivel de los cursos de grado. La Linealización Exacta sirve de base hoy a numerosos trabajos de investigación. La principal base teórica de esta línea es el Teorema de Frobenius. La demostración del mismo junto con algunos ejemplos de su aplicación a sistemas de control se presentan en forma autocontenida en el Apéndice A.

El capítulo 5 abre la segunda parte de esta Tesis y describe un sistema físico sobre el cual se aplicarán diferentes técnicas de Control No Lineal. Dicho sistema consiste en una turbina con aletas que permiten direccionar la salida del aire propulsado y que está sujeta a un soporte de tres grados de libertad. Es un modelo a escala que permite recrear, a nivel de laboratorio, dinámicas propias de aviones a propulsión. Un ejemplar de este dispositivo se encuentra en el Instituto Tecnológico de California (Caltech), lugar donde realicé una pasantía en el marco de mis estudios de Maestría, financiado conjuntamente por la Universidad de la República y el Caltech. Allí fue donde el Prof. John Doyle sugirió la idea de aplicar diferentes técnicas a dicho sistema como parte del trabajo de la presente Tesis. El objetivo de control elegido ha sido el de la estabilización del sistema mediante realimentación de estados. Se diseñarán controladores utilizando las técnicas presentadas y se simularán las respuestas del sistema realimentado para cuatro condiciones iniciales diferentes que representan distintos niveles de exigencia. Si bien

el objetivo de este trabajo no es el de comparar las diferentes técnicas ni determinar cuál es mejor o peor, introduciremos un costo asociado a cada acción de control. En el capítulo 9 se presenta un cuadro comparativo de los costos obtenidos para cada controlador utilizado y cada condición inicial testeada.

El capítulo 6 muestra la aplicación de la técnica de linealización al problema considerado en el capítulo anterior. Se pretende solucionar el problema con una realimentación de estados estática. Esta técnica es sencilla de aplicar pero se verifica en este caso que no soluciona completamente el problema, ya que para algunas de las condiciones iniciales de testeo las trayectorias obtenidas divergen.

En el capítulo 7 se presenta una técnica de control que se aplica a los denominados sistemas lineales dependientes de un parámetro (LPV), por lo que en primer lugar hay que obtener una expresión de esas características para el sistema a estudio y luego aplicar la técnica. Se realiza una utilización importante de las denominadas desigualdades matriciales lineales (LMI).

En el capítulo 8 se busca linealizar el sistema, encontrando un cambio de coordenadas adecuado, siguiendo la línea presentada en el capítulo 4. Una vez obtenida la linealización, que no es total en este caso, se muestra la aplicación de técnicas lineales de control sobre el sistema en las nuevas variables (en realidad, se obtienen leyes de control no lineales en las variables originales).

Finalmente se presentan algunas conclusiones en el capítulo 9 y se muestran los diferentes costos obtenidos para cada una de las acciones de control aplicadas.

Parte I

Capítulo 1

Sistemas No Lineales

1.1 ¿Qué es un sistema no lineal?

El concepto de sistema es un tanto vago, y su utilización es muy variada. Con este término nos referimos a un conjunto heterogéneo de entidades: sistemas físicos, sistemas políticos, sistemas económicos, etc. A los efectos de esta tesis, utilizaremos la definición estándar de *un conjunto de entes ligados por una relación*. Los entes que consideraremos son los siguientes: un primer conjunto de señales que llamaremos entradas, que podemos manipular a voluntad; un segundo conjunto que llamaremos estados; una relación funcional entre ambos conjuntos, que a cada señal de entrada le asocia un determinado estado. Por el término señal entendemos una función de dominio la semirrecta real positiva (el *tiempo*) y recorrido en \mathcal{R}^n para algún $n \geq 1$ natural. Un tratamiento completo del concepto de sistema puede encontrarse en [Oga80, Can77, Kuo96].

Normalmente, para el caso en que estemos estudiando sistemas físicos, la relación entre la entrada y el estado estará dada por una ecuación diferencial, que es nuestra representación matemática de los fenómenos físicos que se producen. Nuestra entrada será la excitación de la ecuación diferencial y el estado será la solución particular de la misma. Está claro que para conocer el estado, además de la entrada, es necesario conocer las condiciones iniciales, lo cual nos lleva al concepto tradicional de estado del sistema. Una definición formal del concepto de estado requiere introducir los conceptos de causalidad, concatenación de entradas y clases de equivalencia y puede encontrarse en [Can77, Kuo96].

Los sistemas que estudiaremos presentan la siguiente descripción

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{1.1}$$

siendo $t \in [0, +\infty) = \mathcal{R}_+$ la variable temporal, $x \in \mathcal{R}^n$ el vector de estados del sistema (que tomaremos como salida), $u \in \mathcal{R}^m$ el vector de entradas y $f : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^n$ la función que gobierna la ecuación diferencial (1.1) que describe el sistema. Controlar el sistema significa encontrar una función $u : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}^m$ que determine que el sistema tenga las propiedades deseadas. Una vez que hemos definido la acción de control $u(t)$, el sistema puede describirse por la ecuación

$$\dot{x} = f(t, x, u(t)) = \tilde{f}(t, x) \tag{1.2}$$

A continuación estudiaremos algunos conceptos generales de los sistemas "sin entradas" (o con entradas ya definidas).

Denotaremos por $\mathbf{x}(t, t_o, x_o)$ a la trayectoria solución del sistema (1.2) evaluada en el instante t , que para $t = t_o$ pasa por el punto x_o , o sea que $\mathbf{x}(t_o, t_o, x_o) = x_o$. No entraremos en el detalle de las condiciones necesarias y suficientes para la existencia y unicidad de las soluciones, que pueden encontrarse en [Kha96, Vid93, Arn74, Kat95]. Asumiremos que las mismas se cumplen¹.

La trayectoria puede verse como un mapa $\mathbf{x} : \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}_+ \times \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$. Supondremos que dicha función es continua y diferenciable respecto de cada una de sus variables. El conjunto de trayectorias de (1.2) se denomina *flujo* del sistema dinámico.

Para el caso en que el tiempo inicial esté sobreentendido o no sea un dato relevante (por ejemplo, para el caso de sistemas autónomos), simplificaremos la notación y usaremos $\mathbf{x}(t, x_o)$ para las trayectorias. Eventualmente prescindiremos también de la condición inicial x_o .

Llamaremos **punto fijo** del sistema (1.2) a todo $x_o \in \mathcal{R}^n$ que cumpla que

$$\mathbf{x}(t, t_o, x_o) = x_o, \quad \forall t \geq t_o$$

Estos puntos verifican que $\tilde{f}(t, x) = 0, \forall t \geq t_o$. Los puntos fijos del sistema son importantes porque implican un comportamiento *conocido* del sistema. En muchas ocasiones nuestro objetivo de control puede ser el llevar el sistema a las cercanías de un punto fijo, o encontrar la acción de control que transforme nuestras condiciones de funcionamiento deseadas en un punto fijo del sistema para luego movernos hacia allí. Si nuestro objetivo es seguir una determinada curva en el espacio \mathcal{R}^n , mediante un cambio de variable podemos transformar dicha curva en un punto fijo del nuevo sistema resultante, por lo que de aquí en más nos referiremos simplemente a puntos fijos, teniendo en cuenta que nos estamos refiriendo también a *trayectorias fijas*.

Frecuentemente la expresión (1.1) puede escribirse así

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x)u \tag{1.3}$$

La ecuación anterior es afín en el vector de entradas u . Expresiones de este tipo aparecen al escribir las ecuaciones dinámicas de un sistema físico actuado por fuerzas externas, como pesos o torques (ver capítulo 5), por lo que haremos referencias frecuentes a esta clase de sistemas.

1.2 Clasificación de sistemas

Según las características de la función f , los sistemas se clasifican en **lineales** y **no lineales**, y en **autónomos** y **no autónomos**.

¹Una condición necesaria y suficiente para la existencia y unicidad de una solución para sistema (1.2) es que $\tilde{f}(t, x)$ sea seccionalmente continua en t y localmente Lipschitziana en x en un entorno de $x = 0$ [Kha96]. Este resultado puede extenderse al sistema general (1.1), contemplando la nueva variable u .

Se dice que el sistema es *lineal* cuando la ecuación (1.1) admite la siguiente expresión

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$

siendo A y B matrices dependientes del tiempo de dimensiones adecuadas. Para el caso de una función f genérica, diremos que el sistema es *no lineal*.

El sistema (1.1) es *autónomo* cuando la función f no depende explícitamente del tiempo. En caso contrario el sistema será *no autónomo*.

El siguiente ejemplo, basado en [Kha96], ilustra los diferentes tipos de sistemas.

Ejemplo 1.1 Consideremos el sistema eléctrico representado en la figura 1.1. La entrada al sistema

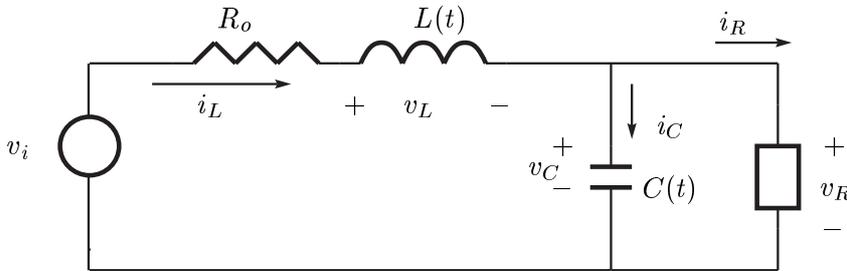


Figura 1.1: Circuito eléctrico del ejemplo 1.1

es el voltaje v_i en la fuente y consideremos como salidas el voltaje v_C en el condensador y la corriente i_L en la bobina. Los valores de la bobina y el condensador dependen explícitamente del tiempo. El elemento en paralelo con el condensador funciona según la ley $i_R = h(v_R)$, siendo h una función conocida. Las ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema, para variaciones lentas de los parámetros L y C , son las siguientes

$$v_L = L(t) \frac{di_L}{dt}$$

$$i_C = C(t) \frac{dv_C}{dt}$$

$$i_R = h(v_R)$$

Hagamos $x_1 = v_C$ y $x_2 = i_L$. Aplicando las leyes de Kirchoff, se obtiene la siguiente descripción dinámica del sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= \frac{1}{C(t)} [x_2 - h(x_1)] \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{L(t)} [v_i - x_1 - R_o x_2] \end{cases} \quad (1.4)$$

En el caso general, con L y C variantes en el tiempo (por ejemplo, por envejecimiento o por acción de la temperatura) y con h no lineal (por ejemplo, si la componente correspondiente es un diodo túnel), el sistema es no lineal y no autónomo. Si L y C son constantes, entonces el sistema es autónomo y no lineal. Si la función h es lineal (por ejemplo si la componente fuera una resistencia), entonces el sistema es lineal, autónomo o no según L y C sean o no constantes. ♠

1.3 Sistemas lineales autónomos

Los sistemas dinámicos lineales autónomos han concentrado gran parte de las investigaciones realizadas entre los años 40 y 80 del presente siglo. La linealidad es una característica muy fuerte, que determina la existencia de propiedades particulares para este tipo de sistemas y que, en muchos aspectos, hace que el estudio de los sistemas lineales sea más sencillo que el de sus pares no lineales.

La ecuación (1.1), para el caso de un sistema lineal autónomo, se escribe

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1.5)$$

con $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$ y $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ matrices constantes, relacionadas con los estados y las entradas respectivamente. Las propiedades del sistema (1.5) están completamente determinadas por las características de las matrices A y B [Oga80, Kuo96, Kai80, Zho97]. La matriz A se denomina **matriz de estados**. El sistema no forzado es

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ x(0) &= x_o \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde x_o representa la condición en el instante inicial. El sistema (1.6) tiene al origen $x = 0$ como punto de equilibrio. Si dicho punto fijo no es el único, entonces existen infinitos puntos fijos más², como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.2 Consideremos el sistema formado solamente por un condensador, como se muestra en la figura 1.2 (a). El estado está dado por la carga en el condensador. La condición de carga nula nos da un punto de equilibrio del sistema. Además, está claro que ante la imposibilidad de descargarse, el condensador mantendrá su carga inicial, no importa cuál sea el valor de ésta. Por lo tanto cualquier valor de la carga inicial del condensador representa un punto de equilibrio del sistema y tenemos un continuo de puntos fijos. ♠

Ejemplo 1.3 En el caso del sistema representado en la figura 1.2 (b), que consiste en un circuito de descarga de un condensador, el estado nuevamente es la carga. En esta oportunidad también se cumple que el condensador descargado es una condición de equilibrio del sistema y además es la única. La dinámica del sistema es la siguiente

$$R \left(\frac{d}{dt} Q \right) = -\frac{Q}{C}$$

con solución $Q(t) = Q_o e^{-\frac{t}{RC}}$. Como puede apreciarse, para cualquier carga inicial no nula, el condensador tiende a descargarse completamente. ♠

²El conjunto de puntos fijos coincide con el $\text{Ker}(A)$. No pueden existir múltiples puntos fijos aislados.

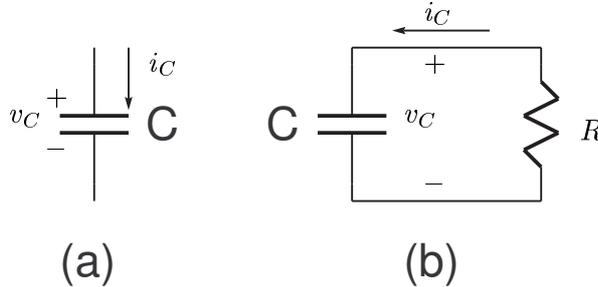


Figura 1.2: Condensador cargado y circuito de descarga

La solución analítica de la ecuación (1.6) es

$$\mathbf{x}(t) = e^{At} x_0 \quad (1.7)$$

El signo de los valores propios de la matriz A determina el comportamiento asintótico de la ecuación (1.7) y su módulo está relacionado con la velocidad de convergencia. Esto se verá más detalladamente en el capítulo 2. Si todos los valores propios tienen parte real negativa, entonces las trayectorias convergen asintóticamente al único punto fijo $x = 0$. Si hay valores propios con parte real positiva, entonces las trayectorias divergen con el tiempo. La existencia de valores propios complejos conjugados con parte real nula determina que haya trayectorias periódicas, con la particularidad de que no son aisladas, es decir, que podemos encontrar dos órbitas periódicas arbitrariamente cercanas, eligiendo convenientemente las respectivas condiciones iniciales. Cabe mencionar aquí que la amplitud de la oscilación también depende de la condición inicial y que la estructura de órbitas periódicas no es robusta frente a perturbaciones del sistema. Esta última afirmación significa que si nuestro sistema real es ligeramente diferente al original, entonces los resultados obtenidos en base a nuestro modelo no necesariamente se verificarán en la práctica. De hecho, pequeñas variaciones en los parámetros del sistema determinarán probablemente que los valores propios dejen de ser imaginarios puros. Los siguientes ejemplos ilustran los comportamientos anteriormente mencionados.

Ejemplo 1.4 La siguiente ecuación describe la linealización de la dinámica del péndulo simple de la figura 1.3 en torno a la posición de reposo $\theta = 0$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta - \frac{k}{m}\dot{\theta} \quad (1.8)$$

m es la masa colocada en el extremo del hilo de largo l , k representa la fricción del aire y θ representa el apartamiento respecto de la posición de reposo. El sistema es lineal y el vector de estados está dado por $[\theta, \dot{\theta}]^T$. La ecuación de estados puede escribirse así

$$\frac{d}{dt} \left(\begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

El polinomio característico de la matriz de estados es $\lambda^2 + \frac{k}{m}\lambda + \frac{g}{l}$, que tiene dos raíces con parte real negativa. Al lanzar la masa desde algún ángulo inicial θ con alguna velocidad $\dot{\theta}$, el péndulo tiende a la posición de reposo. ♠

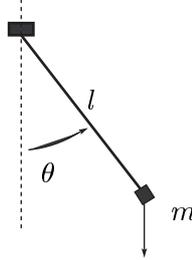


Figura 1.3: Péndulo simple

Ejemplo 1.5 Si en el ejemplo anterior consideramos que no hay fricción ($k = 0$), los autovalores resultan ser imaginarios puros, lo que determina que si dejamos caer el péndulo desde determinada altura, con velocidad nula, el movimiento será periódico, sin que disminuya con el tiempo la amplitud de las oscilaciones. Tenemos en este caso infinitas órbitas periódicas, cada una correspondiente a una determinada condición inicial. ♠

Ejemplo 1.6 Las siguientes ecuaciones describen la linealización de la dinámica del péndulo simple del ejemplo 1.4 cerca de la posición de equilibrio $\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$

$$\ddot{\theta} = +\frac{g}{l}\theta - \frac{k}{m}\dot{\theta}$$

que puede verse que tiene autovalores positivos. Intuitivamente, las trayectorias que se inician cerca del punto fijo se alejan de él. El péndulo cae. ♠

La solución del sistema forzado $\dot{x} = Ax + Bu$ es

$$\mathbf{x}(t) = e^{At}x_o + \int_0^{+\infty} e^{(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (1.10)$$

que está definida para todo instante positivo. La Transformada de Laplace

$$H(s) = (sI - A)^{-1}B \quad (1.11)$$

es un procedimiento usual en el estudio de Sistemas Lineales [Oga80, Kai80, Zho97, Kuo96]. La función $H(s)$ se denomina **transferencia** del sistema lineal. La estabilidad entrada acotada-estado acotado requiere que todos los valores propios de la matriz A (o sea, todos los polos de $H(s)$) tengan parte real negativa [Kai80].

1.4 Sistemas no lineales

Luego de haber visto las características más importantes de los sistemas lineales, comentaremos en esta sección algunos fenómenos exclusivos de los sistemas no lineales.

- En lo que tiene relación con los puntos fijos del sistema, puede existir una cantidad finita de ellos, formando un conjunto discreto. A modo de ejemplo, consideremos nuevamente el péndulo simple del ejemplo 1.4. Intuitivamente pueden encontrarse allí dos puntos fijos, correspondientes a $(\theta = 0, \dot{\theta} = 0)$ y $(\theta = \pi, \dot{\theta} = 0)$.
- En los sistemas lineales podemos encontrar también el fenómeno llamado **tiempo de escape finito**. En este caso, determinadas trayectorias divergen para tiempo finito, como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.7 Consideremos el sistema $\dot{x} = -x^2$ con la condición inicial $x_0 = -1$. La solución

$$\mathbf{x}(t, x_0) = \frac{1}{t-1}$$

está definida en el intervalo $[0, 1)$ y cuando $t \rightarrow 1$ se cumple que $\mathbf{x}(t, x_0)$ se sale de cualquier conjunto compacto en \mathcal{R} . ♠

- Al estudiar en la sección anterior los sistemas lineales, vimos que bajo ciertas condiciones se podían obtener trayectorias periódicas, y que en ese caso existía una cantidad infinita de ellas. En los sistemas lineales se puede dar la existencia de una cantidad finita de curvas periódicas, de amplitud y periodo fijos, independientes de las condiciones iniciales, que tienden a atraer o repeler las trayectorias que se originan en sus cercanías. Este tipo de trayectorias se denominan **ciclos límites** y son importantes en el estudio del control no lineal, ya que representan, al igual que los puntos fijos, un comportamiento conocido del sistema. El siguiente ejemplo, conocido como **Ecuación de Van der Pol**, describe por ejemplo la dinámica de algunos osciladores eléctricos y presenta la existencia de un ciclo límite.

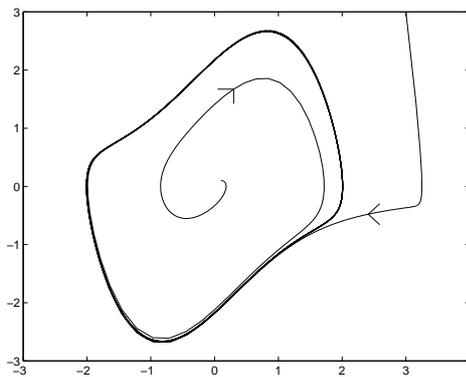


Figura 1.4: Ecuación de Van der Pol para $\epsilon = 1$

Ejemplo 1.8 Consideremos la ecuación

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \epsilon(1 + x_1^2)x_2 \end{aligned} \tag{1.12}$$

El parámetro positivo ϵ da una "medida" de la no linealidad del sistema. Para $\epsilon = 0$, el sistema es lineal y las soluciones son órbitas periódicas, circunferencias centradas en el origen (los valores propios correspondientes son $\pm j$). Para ϵ no nulo, la dinámica presenta, además del punto fijo en el origen, una órbita periódica que atrae todas las demás trayectorias (salvo la del punto fijo), como se aprecia en la figura 1.4. ♠

- Otra característica exclusiva de los sistemas no lineales es la existencia de **caos**. Este fenómeno consiste esencialmente en la incapacidad de predecir las características del movimiento cuando se tiene incertidumbre en las condiciones iniciales. Existe caos, por ejemplo, en la dinámica de la atmósfera y eso explica, en buena medida, la inexactitud de los pronósticos meteorológicos. La Teoría Matemática del Caos, si bien nace en el siglo pasado con los trabajos de Poincaré, ha tenido un fuerte empuje en los últimos años, debido entre otras cosas a las demandas realizadas por diversas áreas del conocimiento, como la Biología y el Control.

Capítulo 2

Teoría de Liapunov

En el presente capítulo se introducirán herramientas que nos permitirán estudiar la dinámica de un sistema en las cercanías de un punto de equilibrio. La Teoría de Liapunov, que es la principal herramienta que estudiaremos y utilizaremos, fue presentada por dicho matemático ruso hacia fines del siglo XIX. Sus famosos Teoremas dan condiciones suficientes para determinar el comportamiento asintótico de las trayectorias en las cercanías de un punto fijo. Las condiciones suficientes de Liapunov se transforman en necesarias bajo ciertas hipótesis adicionales poco restrictivas. Esto se prueba en los llamados Teoremas Recíprocos de Liapunov, entre los que se encuentra el Teorema de Massera, que se enuncia y comenta en la sección 2.3. Los Teoremas recíprocos permiten además determinar qué características del sistema se mantendrán en presencia de pequeñas perturbaciones, propiedad que nos interesa de sobremanera, ya que no debemos olvidar que nuestro modelo matemático es una aproximación al sistema físico real.

La intención es brindar aquí una introducción a la Teoría de Liapunov y su aplicación al análisis y diseño de sistemas de control. El Capítulo pretende ser de carácter complejo, por lo que se introducen algunas definiciones, conceptos y resultados que no serán usados en el resto de la Tesis. Se sigue en general la orientación de [Kha96]. Otras referencias son [Vid93, Slo91, Min62].

2.1 Estabilidad según Liapunov

Los sistemas que vamos a estudiar son de la forma

$$\dot{x} = f(t, x, u)$$

donde, como ya vimos, t es la variable temporal, $x \in \mathcal{R}^n$ es el vector de estados y $u \in \mathcal{R}^m$ es el vector de entradas. En muchos casos, el sistema a estudio no depende explícitamente del tiempo, por lo que la ecuación anterior puede escribirse¹ así

$$\dot{x} = f(x, u)$$

¹Mantendremos la misma notación para la función f a fin de no complicar la escritura.

Cuando queremos analizar un determinado sistema de control, para el cual conocemos la señal de entrada $u(t)$, el sistema puede escribirse como

$$\dot{x} = f(t, x)$$

Supondremos que la función f verifica un conjunto condiciones de regularidad respecto de las variables t , x y u que aseguran la existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial para una condición inicial dada. Dichas condiciones pueden encontrarse en en Capítulo 2 de [Kha96].

En general vamos a buscar acciones de control que dependan de los estados, es decir, del tipo $u = \Phi(x)$. En ese caso hablaremos de control por realimentación de estados y la descripción del sistema resulta ser de la forma

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.1}$$

que es un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo. Los sistemas sobre los que nos centraremos son del tipo (2.1) y dedicaremos buena parte del presente capítulo a su estudio.

Para las trayectorias usaremos la notación introducida en el capítulo 1. $\mathbf{x}(\tau, t, x)$ denotará la trayectoria en tiempo τ que en el instante t_0 pasa por x_0 .

2.1.1 Sistemas autónomos

Recordemos que un punto fijo o de equilibrio del sistema (2.1) es un $x_o \in \mathcal{R}^n$ que verifica que

$$0 = f(x_o)$$

Lo anterior implica que la trayectoria que se origina en x_o permanece allí indefinidamente. La propiedad de continuidad de las soluciones respecto de las condiciones iniciales ([Kha96, Arn74]) nos asegura que dado un determinado tiempo positivo t_1 , si partimos lo suficientemente cerca de un punto fijo, la trayectoria que obtendremos se mantendrá cerca del mismo, por lo menos hasta el instante t_1 . La pregunta que nos hacemos es la siguiente: ¿Bajo qué condiciones dicha propiedad de *permanecer cerca punto fijo* se cumplirá todo tiempo futuro? La respuesta a esta pregunta nos lleva a los conceptos de estabilidad y estabilidad asintótica.

Antes que nada, haremos la siguiente observación: si $x_o \in \mathcal{R}^n$ es un punto fijo del sistema (2.1), podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $x_o = 0$, ya que siempre podemos realizar el cambio de variable $z = x - x_o$ que nos lleva a una sistema equivalente al original, para el cual se cumple que $z = 0$ es un punto fijo.

Como el sistema es autónomo, se cumple la siguiente propiedad

$$\mathbf{x}(\tau, t, x) = \mathbf{x}(\tau - t, 0, x) \quad , \quad \forall t \geq 0 \tag{2.2}$$

O sea que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que las trayectorias se originan en $t = 0$. Omitiremos el instante inicial en la notación de las trayectorias, asumiéndolo nulo.

A continuación introduciremos una serie de definiciones. En todas ellas se asume que el origen $x = 0$ es un punto fijo del sistema (2.1), es decir que $0 = f(0)$.

Definición 2.1 (Estabilidad) *Si para el sistema (2.1) se cumple que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\forall \|x_o\| < \delta(\epsilon) \ , \ \| \mathbf{x}(t, x_o) \| < \epsilon \ \forall t \geq 0$$

entonces el origen es estable según Liapunov. \diamond

Definición 2.2 (Estabilidad asintótica) *Si para el sistema (2.1) además de la estabilidad se cumple que $\delta(\epsilon)$ puede elegirse de modo tal que*

$$\forall \|x_o\| < \delta(\epsilon) \ , \ \lim_{t \rightarrow \infty} \| \mathbf{x}(t, x_o) \| = 0$$

entonces el origen es asintóticamente estable según Liapunov. \diamond

Definición 2.3 (Inestabilidad) *Para el sistema (2.1) el origen es inestable si no es estable.* \diamond

Las definiciones de estabilidad pueden interpretarse de la siguiente manera: si el origen es estable, partiendo suficientemente cerca de él nos mantendremos cerca de él indefinidamente. La estabilidad asintótica expresa que no sólo permaneceremos cerca del origen, sino que además nos acercaremos a él en forma asintótica. Ambos conceptos son muy importantes para la teoría de control, ya que muchas veces podemos decir que tenemos un sistema controlado cuando logramos mantenerlo cerca de una posición de equilibrio estable, con la seguridad de que no se alejará mucho de ese punto de funcionamiento. Si además tenemos estabilidad asintótica, entonces luego de un periodo transitorio, el sistema funcionará prácticamente en la posición de equilibrio.

Observación: Tanto en la definición de estabilidad, como en la de la estabilidad asintótica, está implícito que las trayectorias tienen que estar definidas para todo instante positivo. Se puede relajar este requerimiento, refiriendo las definiciones a los intervalos maximales de existencia [Rou73].

La aplicación de estos conceptos es enorme y varía desde los sistemas eléctricos de potencia hasta los reactores químicos, pasando por áreas tan diversas como la interacción de especies en la vida salvaje, la propagación de enfermedades contagiosas o el desarrollo de las células en un embrión [Kuo96, IEE95].

Si bien la definición del concepto de estabilidad es clara en cuanto a su significado, no es simple aplicarla directamente para determinar si un punto fijo dado es o no estable. En algunos casos, nos podemos ayudar con consideraciones físicas, como se muestra en el siguiente ejemplo.

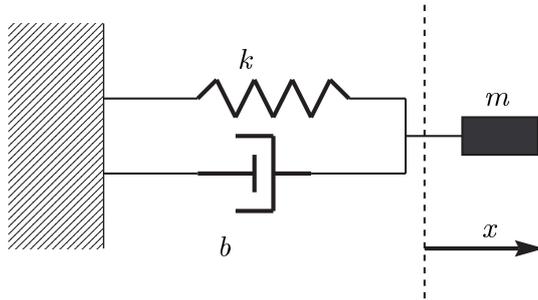


Figura 2.1: Sistema de masa y resorte con amortiguamiento

Ejemplo 2.1 Consideremos el sistema de la figura 2.1, que representa un sistema masa y resorte con amortiguamiento. Supondremos que la masa es $m = 1$, que la constante del resorte vale k y que el coeficiente de amortiguamiento es b . Las ecuaciones que rigen el sistema, considerando como estados la posición x_1 , medida desde el punto de reposo del resorte, y la velocidad x_2 , son

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -kx_1 - bx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Consideremos primero el caso $b = 0$. El sistema resulta ser conservativo, ya que la única fuerza que actúa es la del resorte. La energía del sistema, dada por

$$E(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{k}{2}x_1^2$$

es constante a lo largo de las trayectorias. Operando sobre las ecuaciones del sistema, obtenemos la siguiente relación

$$\frac{dE}{dt} = kx_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 = \frac{d(kx_1^2 + x_2^2)}{dt} = 0$$

lo que nos dice que las trayectorias son circunferencias (a menos de un cambio de escala en x_1 debido al factor k). Cuando hay amortiguamiento, la derivada de la energía a lo largo de las trayectorias es

$$\frac{dE}{dt} = -bx_2^2$$

por lo que ya no tenemos trayectorias periódicas. Del estudio de la mecánica, sabemos que la energía se disipa a lo largo de las trayectorias, y que el sistema se mueve hasta encontrar un punto de energía mínima, que en este caso es el origen. Las trayectorias se muestran en la figura 2.2. ♠

En 1892, Liapunov generalizó el concepto de función de energía y determinó la relación entre la existencia de funciones del tipo energía y la estabilidad del origen.

Definición 2.4 (Función de Liapunov) Llamaremos función de Liapunov para el sistema (2.1) a un mapa definido en un entorno \mathcal{D} del origen de \mathcal{R}^n , a valores reales, $\mathcal{V} : \mathcal{D} \rightarrow [0, +\infty)$, continuamente diferenciable², que verifica que

²Diremos también que un mapa continuamente diferenciable, o sea, derivable y con derivada continua, es de clase C^1 .

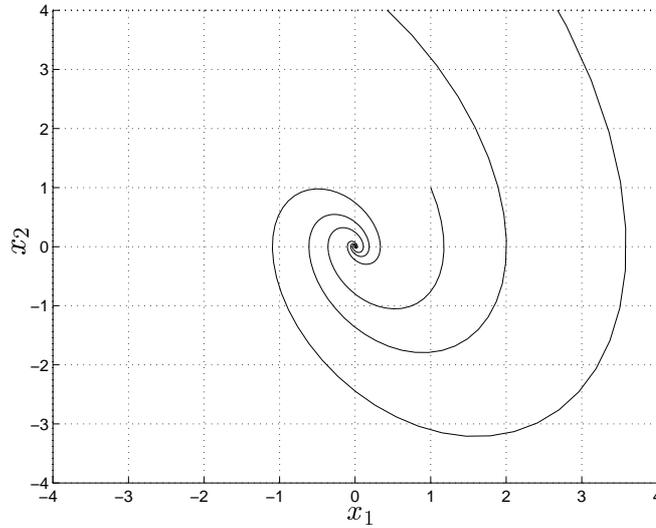


Figura 2.2: Trayectorias del sistema (2.3) con amortiguamiento

$$\mathcal{V}(0) = 0 \text{ y } \mathcal{V}(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} - \{0\} \quad (2.4)$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D} \quad (2.5)$$

◇

La derivada que aparece en la ecuación (2.5) es la derivada de la función \mathcal{V} a lo largo de las trayectorias del sistema y se define (y calcula) así

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \left. \frac{d}{dt} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t, x)) \right|_{t=0} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(x)$$

Las condiciones (2.4) y (2.5) se enuncian de la siguiente manera: la función de Liapunov debe ser definida positiva, con derivada semidefinida negativa.

Teorema 2.1 *Sea el sistema (2.1), con $x = 0$ como punto de equilibrio. Supongamos que existe una función de Liapunov para el sistema, definida en un entorno \mathcal{D} del origen. Entonces, se cumple que $x = 0$ es un punto de equilibrio estable.*

Si además se cumple que la derivada de la función de Liapunov es definida negativa, es decir,

$$\dot{\mathcal{V}}(x) < 0, \quad \forall x \in \mathcal{D} - \{0\}$$

entonces el origen es asintóticamente estable.

Demostración

Sea $\epsilon > 0$ dado y elijamos $r > 0$ tal que B_r , la bola de centro $x = 0$ y radio r ,

$$B_r = \{x \in \mathcal{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

esté contenida en \mathcal{D} . Sea α definido así

$$\alpha = \min_{\|x\|=r} \mathcal{V}(x)$$

Como consecuencia de la definición de signo de \mathcal{V} , resulta ser $\alpha > 0$ estrictamente.

Elijamos $\beta \in (0, \alpha)$ y definamos

$$\Omega_\beta = \{x \in B_r \mid \mathcal{V}(x) \leq \beta\}$$

Entonces se tiene que Ω_β es un conjunto acotado, ya que está estrictamente incluido en B_r por definición. Además, Ω_β es cerrado por ser la preimagen por la función continua \mathcal{V} del intervalo $[0, \beta]$. Entonces el conjunto Ω_β es compacto. Además se cumple que toda trayectoria que se inicia en Ω_β permanece en él indefinidamente³

$$\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t)) \leq 0 \Rightarrow \mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) \leq \mathcal{V}(\mathbf{x}(0)) \leq \beta \quad \forall t \geq 0$$

Las trayectorias que se inician en Ω_β están definidas para todo tiempo positivo, lo cual nos permite hablar de estabilidad y estabilidad asintótica.

Como \mathcal{V} es continua en $x = 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \mathcal{V}(x) < \beta$$

Entonces se cumple que

$$B_\delta \subset \Omega_\beta \subset B_r$$

y toda trayectoria que se origina en B_δ permanece en B_r para todo tiempo positivo, lo cual implica que

$$\|\mathbf{x}(0)\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t)\| < r \leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

y queda probada la estabilidad.

Para probar la estabilidad asintótica, supongamos que $\dot{\mathcal{V}}$ es definida negativa. Debemos mostrar que δ puede ser elegido de forma tal que $\mathbf{x}(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Probaremos equivalentemente que $\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$.

³Se dice en ese caso que el conjunto es positivamente invariante

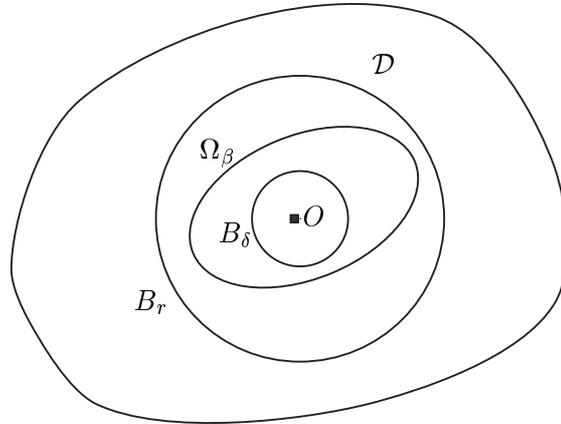


Figura 2.3: Conjuntos considerados en la demostración del Teorema 2.1

Como la función \mathcal{V} está acotada inferiormente por cero y es monotonamente decreciente, podemos afirmar la existencia de $c \geq 0$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) = c$$

Mostraremos que c es necesariamente nulo. Supongamos que no es así. Entonces existe $d > 0$ tal que las trayectorias no entran en B_d , otra vez como consecuencia de la continuidad de \mathcal{V} . Definamos

$$\gamma = - \max_{d \leq \|x\| \leq r} \dot{\mathcal{V}}(x)$$

En primer lugar, γ existe por la continuidad de $\dot{\mathcal{V}}$ y la compacidad del conjunto sobre el cual se maximiza. En segundo lugar, γ es estrictamente positivo debido a la definición de signo de $\dot{\mathcal{V}}$. Dentro de B_r se cumple la siguiente acotación

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t)) = \mathcal{V}(\mathbf{x}(0)) + \int_0^t \dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(\tau)) d\tau \leq \mathcal{V}(\mathbf{x}(0)) - \gamma t \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$$

Esta contradicción implica que $c = 0$ y que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. ♣

El Teorema anterior generaliza el concepto de función de energía asociada al sistema. Nos permite afirmar la estabilidad del punto de equilibrio que estemos estudiando, aunque para ello es necesario conocer una función de Liapunov. El hecho de no poder encontrar una tal función no implica la inestabilidad y a priori puede parecer que el resultado sólo puede ser aplicado a una clase reducida de sistemas. Sin embargo se han dedicado muchas horas de investigación a la búsqueda sistemática de funciones de Liapunov para una amplia variedad de sistemas, y

aun hoy pueden encontrarse en la literatura numerosos artículos y libros al respecto, como por ejemplo [Fre96]. Como veremos en lo que resta del presente capítulo, la utilidad teórica del resultado anterior es también muy importante.

Ejemplo 2.2 *Intentemos aplicar el Teorema de Estabilidad para clasificar el origen como punto de equilibrio del ejemplo 2.1, con amortiguamiento no nulo. Tomemos la función de energía*

$$E(x) = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

y verifiquemos que es una función de Liapunov para el sistema (2.3). La función es obviamente definida positiva y su derivada

$$\dot{E}(x) = x_2\dot{x}_2 + kx_1\dot{x}_1 = -bx_2^2 \leq 0$$

es semidefinida negativa en un entorno del origen (nótese que no depende de x_1). Entonces el Teorema nos dice que el origen es un punto de equilibrio estable, pero no nos dice nada respecto al comportamiento asintótico de las trayectorias, el cual conocemos por consideraciones físicas.

Al ser el sistema (2.3) lineal, pueden aplicarse las técnicas que veremos en la sección 2.2, que, en este caso, permiten determinar la existencia de una función de Liapunov cuadrática para el sistema con derivada definida negativa, lo cual implica la estabilidad asintótica del origen. ♠

Definición 2.5 *Cuando en el sistema (2.1) el origen es asintóticamente estable, el siguiente conjunto*

$$R_o = \left\{ x_o \in \mathcal{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, x_o) = 0 \right\}$$

será la región de atracción. ◇

El conjunto está formado por todos los puntos que verifican que las trayectorias que se inician en ellos convergen al origen. Este conjunto es importante, porque su conocimiento permite que el trabajo del ingeniero de control se centre en llegar a este conjunto y luego la propiedad de estabilidad regulará por sí sola el sistema. La región de atracción de un punto asintóticamente estable no es fácil de encontrar. Es posible determinar algunas propiedades topológicas del conjunto, como por ejemplo que es abierto, conexo y positivamente invariante ([Kha96], Cáp. 4). Hay formas numéricas de estimar la región de atracción (por ejemplo, simulando trayectorias desde distintos puntos iniciales, o realizando simulaciones *hacia atrás* desde puntos cercanos al origen). Por otro lado, está claro que si conocemos una función de Liapunov que nos de la estabilidad asintótica, el dominio de definición de dicha función nos permite obtener una estimación de la región de atracción [Kha96]. Esto nos lleva a la siguiente idea: el problema puede no ser sólo la búsqueda de una función de Liapunov sino la búsqueda de aquella que asegure la mayor región de atracción. Volveremos más adelante sobre este problema.

Definición 2.6 *Para el sistema (2.1) el origen es **globalmente** asintóticamente estable o estable **en grande** si es asintóticamente estable y se cumple que su región de atracción es todo el espacio ($R_o = \mathcal{R}^n$).* ◇

En principio puede pensarse que la estabilidad asintótica global está implicada por la existencia de una función de Liapunov definida en todo el espacio. Si se observa con cuidado la demostración del Teorema 2.1, puede apreciarse que todo el trabajo se realiza en forma local. En particular, el conjunto

$$\Omega_\beta = \{x \in \mathcal{R}^n \mid \mathcal{V}(x) \leq \beta\} \cap B_r$$

es acotado y a partir de ahí se sigue con las correspondientes acotaciones. Ese detalle no es menor y debe agregarse como hipótesis para extender el resultado a la estabilidad global, para evitar situaciones como la del ejemplo 2.3.

Ejemplo 2.3 *Supongamos que tenemos un sistema para el cual la siguiente función es de Liapunov*

$$\mathcal{V}(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

Los conjuntos Ω_β , para distintos β se muestran en la figura 2.4. Puede verse que para valores de β

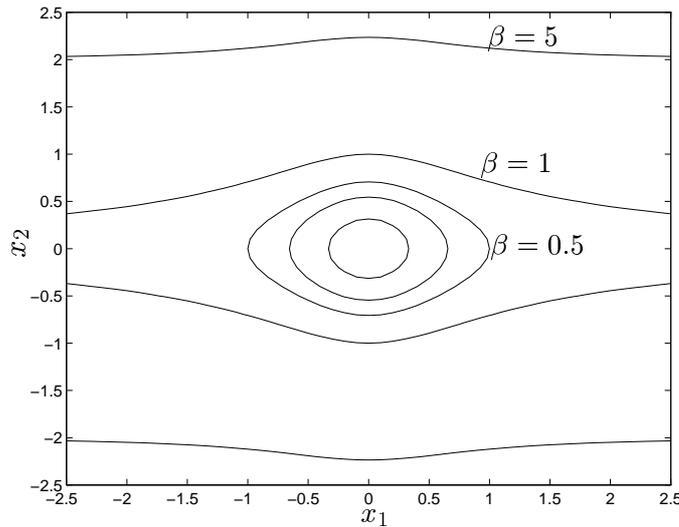


Figura 2.4: Curvas Ω_β para distintos valores de β

mayores que 1, los conjuntos que se obtienen no son acotados (en particular, puede verse que contienen la recta $x_2 = 0$, ya que $\frac{x_1^2}{1+x_1^2} < 1$ para todo x_1). Esto permite la existencia de trayectorias que, sin salirse de los conjuntos Ω_β , se alejen indefinidamente del origen. ♠

La formulación del Teorema de Estabilidad en Grande resulta ser la siguiente [Kha96]:

Teorema 2.2 *Sea el sistema (2.1), con $x = 0$ como punto de equilibrio. Supongamos que existe una función de Liapunov para el sistema, definida en todo el espacio \mathcal{R}^n y con derivada definida negativa en $\mathcal{R}^n - \{0\}$. Supongamos además que para todo $\beta > 0$ el conjunto Ω_β es acotado. Entonces, $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable. ◇*

Una forma de asegurar la acotación de los conjuntos Ω_β es mediante las llamadas *funciones radialmente no acotadas*.

Definición 2.7 Si $\mathcal{V} : \mathcal{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ cumple que para todo $x \in \mathcal{R}^n$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \mathcal{V}(x) = +\infty$$

diremos entonces que es radialmente no acotada. \diamond

Las ideas desarrolladas en la demostración de los Teoremas anteriores pueden ser aplicadas también para probar la inestabilidad del origen. Existen muchos teoremas *del estilo de Liapunov* en ese sentido, entre los cuales el más conocido es el Teorema de Cetaev, cuya demostración puede encontrarse en [Sot79].

Teorema 2.3 (Cetaev) Consideremos el sistema (2.1) con un punto fijo en $x = 0$. Sea \mathcal{D} un entorno del origen y $\mathcal{U} \subset \mathcal{D}$ un abierto tal que $0 \in \partial\mathcal{U}$. Supongamos que existe una función $\mathcal{V} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}$ de clase C^1 tal que $\mathcal{V} > 0$ y $\dot{\mathcal{V}} > 0$ en \mathcal{U} y $\mathcal{V} \equiv 0$ en $\partial\mathcal{U}$. Entonces $x = 0$ es inestable⁴.

Demostración

Supongamos que $x = 0$ es estable. Entonces, dado ϵ arbitrario, existe $\delta(\epsilon)$ que verifica que las trayectorias que se inician en B_δ no se salen de B_ϵ . Elijamos un valor de ϵ tal que $B_\epsilon \subset \mathcal{D}$ y elijamos $x_1 \in \mathcal{U} \cap B_\delta$ que cumpla que $\mathbf{x}(t, x_1) \in B_\epsilon$ para todo instante positivo. En el conjunto \mathcal{U} la función \mathcal{V} es creciente a lo largo de las trayectorias, por lo que se cumple que

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t, x_1)) \geq \mathcal{V}(x_1) > 0$$

mientras las solución no se salga del \mathcal{U} . Como la trayectoria es acotada y \mathcal{V} se anula en $\partial\mathcal{U}$, resulta que

$$\mathbf{x}(t, x_1) \in \mathcal{U} \cap B_\epsilon \quad \forall t \geq 0$$

La trayectoria se mantiene en \mathcal{U} y, debido a la continuidad de la función \mathcal{V} , no se acerca a los bordes de \mathcal{U} . Entonces existe $m > 0$ que acota inferiormente $\dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(t, x_1))$ y tenemos la siguiente acotación

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}(t, x_1)) = \mathcal{V}(x) + \int_0^t \dot{\mathcal{V}}(\mathbf{x}(\tau, x_1)) d\tau \geq \mathcal{V}(x) + \int_0^t m d\tau = \mathcal{V}(x) + mt \quad \forall t \geq 0$$

Resulta entonces que la trayectoria debe abandonar B_ϵ en algún instante, lo cual contradice la supuesta estabilidad del origen. \clubsuit

⁴ $\partial\mathcal{U}$ denota el borde del conjunto \mathcal{U} .

2.1.2 Sistemas no autónomos

El estudio de los sistemas que dependen explícitamente del tiempo es más complejo que el que hemos realizado para sistemas autónomos. Incluso las definiciones relativas a la estabilidad requieren una reformulación, que contemplen la dependencia temporal. El sistema no autónomo está expresado por

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.6)$$

con condición inicial $\mathbf{x}(t_o, t_o, x_o) = x_o$. Recordemos que es importante indicar el instante inicial, ya que no hay invariancia temporal. El interés del estudio de sistemas autónomos no está motivado solamente por el hecho de que muchos sistemas que nos interesan son variantes en el tiempo, sino que aún cuando estemos estudiando sistemas autónomos, podemos enfrentarnos a un sistema no autónomo.

Consideremos el sistema autónomo $\dot{x} = f(x)$ y una trayectoria particular $\bar{\mathbf{x}}(t)$ conocida. Si queremos estudiar cómo son las trayectorias que se inician cerca de $\bar{\mathbf{x}}(0)$, podemos realizar el siguiente procedimiento: consideremos en primer lugar el cambio de variables

$$z(t) = x(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)$$

Se cumple que

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = f(x) - \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = f(z + \bar{\mathbf{x}}) - \dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) \triangleq g(t, z)$$

Verifiquemos que $z = 0$ es un punto de equilibrio para el sistema gobernado por g

$$g(t, 0) = f(0 + \bar{\mathbf{x}}) - \dot{\bar{\mathbf{x}}} = 0$$

Entonces se cumple que las propiedades del sistema descrito por g en un entorno del origen de $z = 0$ son las propiedades del sistema descrito por f en un entorno de la trayectoria $\bar{\mathbf{x}}(t)$.

En las definiciones que siguen asumiremos nuevamente que el origen es un punto fijo del sistema (2.6).

Definición 2.8 (Estabilidad) Si para el sistema (2.6) se cumple que dado $\epsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(t_o, \epsilon) > 0$ tal que

$$\forall \|x_o\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, t_o, x_o)\| < \epsilon \quad \forall t \geq t_o, \quad \forall t_o \in \mathcal{R}$$

entonces el origen es estable según Liapunov. \diamond

Definición 2.9 (Estabilidad uniforme) Para el sistema (2.6) el origen es uniformemente estable según Liapunov si es estable y, para todo $\epsilon > 0$, el δ puede ser elegido independiente de t_o : $\delta = \delta(\epsilon)$. \diamond

Definición 2.10 (Estabilidad asintótica) Para el sistema (2.6) el origen es asintóticamente estable según Liapunov si es estable y además se cumple que $\delta(t_o, \epsilon)$ puede elegirse de modo tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t, t_o, x_o) = 0$ para todo $\|x_o\| < \delta(t_o, \epsilon)$ \diamond

Definición 2.11 (Estabilidad asintótica uniforme) Si para el sistema (2.6) se cumple que el origen es estable y que además existe $c_o > 0$, independiente de t_o , tal que para todo $\|x_o\| < c_o$ se cumple que $\mathbf{x}(t, t_o, x_o) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ uniformemente en t_o - es decir que para todo $\epsilon > 0$, existe $T(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t, t_o, x_o)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_o + T(\epsilon), \quad \forall t_o \in \mathcal{R}, \quad \forall \|x_o\| < c_o$$

- entonces el origen es uniformemente asintóticamente estable según Liapunov. \diamond

Definición 2.12 (Estabilidad asintótica uniforme global) Si para el sistema (2.6) se cumple que el origen es uniformemente estable en forma asintótica y que además dados ϵ y c positivos cualesquiera, existe $T(\epsilon, c) > 0$ tal que

$$\|\mathbf{x}(t, t_o, x_o)\| < \epsilon, \quad \forall t \geq t_o + T(\epsilon, c), \quad \forall t_o \in \mathcal{R}, \quad \forall \|x_o\| < c$$

entonces el origen es globalmente uniformemente asintóticamente estable según Liapunov. \diamond

Definición 2.13 (Inestabilidad) Para el sistema (2.6) el origen es inestable si no es estable. \diamond

Como puede apreciarse, en las definiciones anteriores aparece el concepto de uniformidad respecto del instante inicial. Dicho concepto es a veces un tanto difícil de comprender. A los efectos del estudio de las propiedades asintóticas de las trayectorias, es importante no sólo saber que, por ejemplo, se acercan al origen, sino que el tiempo que demoran en estar *cerca* del origen no depende del instante inicial. Existen ejemplos que muestran casos en los que esa situación no se da, y otros en los que incluso el saber simplemente que las trayectorias se van al origen no es una información útil [Kha96, Vid93].

Si bien las definiciones anteriores son claras en cuanto a las ideas que introducen, no son útiles para manipularlas técnicamente. Es por eso que en la literatura se manejan unas definiciones equivalentes, que utilizan los conceptos de funciones de Clase \mathcal{K} . Sólo reformulamos las definiciones que vamos a utilizar.

Definición 2.14 Llamaremos función de clase \mathcal{K} a una función $\alpha : [0, a) \rightarrow [0, +\infty)$ continua, estrictamente creciente y que se anula en 0. \diamond

Definición 2.15 Llamaremos función de clase \mathcal{KL} a una función $\beta(r, s)$ de dominio $[0, a) \times [0, +\infty)$ a valores positivos, tal que es de clase \mathcal{K} para s fijo y, para r fijo, es decreciente con respecto a s y cumple que $\lim_{s \rightarrow \infty} \beta(r, s) = 0$. \diamond

Las definiciones 2.9 y 2.11 pueden reformularse en términos de las funciones recién introducidas. Se obtienen entonces los siguientes resultados sobre equivalencias entre las distintas definiciones. Ver [Kha96], Cap.5.

Teorema 2.4 a) (Estabilidad uniforme) Para el sistema (2.6) el origen es uniformemente estable según Liapunov si y sólo si existen una función α de clase \mathcal{K} y una constante $c > 0$, independiente del instante inicial t_o , que verifican que

$$\| \mathbf{x}(t, t_o, x_o) \| \leq \alpha(\| x_o \|) , \quad \forall t \geq t_o \geq 0 \quad \forall \| x_o \| < c$$

b) (Estabilidad asintótica uniforme) Para el sistema (2.6) el origen es uniformemente asintóticamente estable según Liapunov si y sólo si existen una función β , de clase \mathcal{KL} , y una constante positiva c , independiente de la condición inicial t_o , que verifican que

$$\| \mathbf{x}(t, t_o, x_o) \| \leq \beta(\| x_o \|, t - t_o)$$

para todo $\| x_o \| < c$ y todo $t \geq t_o \geq 0$. ♣

La globalidad en las definiciones anteriores se alcanza cuando el dominio de las funciones α y β es toda la semirrecta positiva y la constante c puede tomarse infinita.

El concepto de función de Liapunov, para un sistema no autónomo, incorpora la idea de uniformidad respecto al tiempo.

Definición 2.16 La función $\mathcal{V} : [0, \infty) \times \mathcal{D} \subset [0, \infty) \times \mathcal{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ es una función de Liapunov para el sistema (2.6) si cumple que

$$\alpha_1(x) \leq \mathcal{V}(t, x) \leq \alpha_2(x) \tag{2.7}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(t, x) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(x) \tag{2.8}$$

para todo $x \in \mathcal{D}$ y todo $t \geq 0$, con α_1 , α_2 y α_3 funciones continuas a valores reales definidas positivas⁵. ◇

Las ecuaciones (2.7) y (2.8) extienden el concepto de definición de signo al caso no autónomo. La versión variante en el tiempo del Teorema 2.1, cuya demostración puede encontrarse en ([Kha96]. Cap.3), es como sigue:

Teorema 2.5 Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema (2.6) . Sea \mathcal{V} una función de Liapunov para el sistema. Entonces el origen es uniformemente asintóticamente estable. ♣

Para asegurar la globalidad de la estabilidad, basta con pedir que la función α_1 sea radialmente no acotada.

Un caso especial de estabilidad asintótica uniforme se tiene cuando las trayectorias verifican la acotación

$$\| \mathbf{x}(t, t_o, x_o) \| \leq k e^{-\gamma(t-t_o)} \| x_o \| , \quad \forall x_o \in B_r , \quad \forall t_o \geq 0$$

en un cierto entorno B_r del origen y con k y γ constantes positivas. Hablamos en este caso de estabilidad exponencial. La estabilidad exponencial es un caso particular del Teorema 2.4 b) con $\beta(r, s) = k r e^{-\gamma s}$, con k y γ positivos. Este concepto será retomado en la sección 2.3.

⁵Usualmente, las funciones α_i se toman de clase \mathcal{K} , es decir, monotonamente crecientes en la norma de x y que se anulan en 0, como se definirá en la sección 2.3

2.2 Sistemas lineales autónomos

En esta sección estudiaremos específicamente los sistemas autónomos lineales. Éstos presentan características particulares que permiten que su estudio resulte ser relativamente sencillo en comparación con el caso más general. Por ejemplo, puede hallarse la solución analítica para toda condición inicial y puede estudiarse directamente el comportamiento asintótico de las trayectorias. Si bien la mayoría de los sistemas no son lineales, la importancia del estudio de este tipo de sistemas radica en el llamado método de linealización, que consiste en extraer conclusiones sobre la dinámica del sistema en torno a un punto de equilibrio en base al comportamiento del sistema lineal que aproxima el sistema original en las cercanías de dicho punto. También son frecuentes los sistemas que pueden describirse mediante la interconexión de un sistema lineal y uno no lineal, y pueden estudiarse a partir del conocimiento de las propiedades de estabilidad del sistema lineal.

Un sistema lineal y autónomo se describe por la ecuación (2.9). Los puntos fijos del sistema son los que conforman el núcleo de la matriz $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$, por lo que el origen es un punto fijo aislado si se cumple que el determinante de la matriz A es no nulo.

$$\dot{x} = Ax \quad (2.9)$$

La solución analítica de la ecuación (2.9) que se inicia en x_o es

$$\mathbf{x}(t, x_o) = e^{At} x_o \quad (2.10)$$

y su comportamiento depende de los valores propios de la matriz A . No entraremos en detalles relacionados con esta afirmación, pero utilizando la forma canónica de Jordan de la matriz A , es posible escribir la solución (2.10) como combinación lineal de funciones de la forma

$$\alpha_{ik}(t) = t^{k-1} e^{\lambda_i t} \quad i = 1, \dots, r; \quad k = 1, \dots, m_i - 1$$

siendo r el número de valores propios distintos y m_i la multiplicidad algebraica de cada uno de ellos. Tenemos entonces el siguiente Teorema:

Teorema 2.6 *El origen es un punto de equilibrio estable del sistema (2.9) si y sólo si todos los valores propios de la matriz A tienen parte real no positiva y aquellos valores con parte real nula tienen multiplicidad algebraica igual a 1. Para el caso que todos los valores propios tienen parte real negativa, se tiene la estabilidad asintótica.* ♣

Las características lineales del sistema aseguran que las propiedades de estabilidad se cumplen siempre en forma global.

Definición 2.17 *Diremos que la matriz A es Hurwitz si todos sus valores propios tienen parte real negativa.* ◇

Una caracterización alternativa de la estabilidad del sistema (2.9) la podemos tener intentando aplicar los Teoremas de Liapunov, para lo cual es necesario encontrar una función de Liapunov para el sistema. Consideremos la siguiente candidata

$$\mathcal{V}(x) = x^T P x$$

donde P es una matriz simétrica $n \times n$. Para asegurar que se cumple la definición de signo de la función \mathcal{V} , la matriz P debe ser definida positiva. Estudiemos la derivada a lo largo de las trayectorias

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x = -x^T Q x$$

donde hemos definido la matriz Q por la relación

$$A^T P + P A = -Q \quad (2.11)$$

La matriz Q resulta ser simétrica. Para que la función \mathcal{V} sea de Liapunov, Q debe ser definida negativa. Planteemos el problema al revés. Supongamos que elegimos una matriz Q definida negativa y queremos hallar $P > 0$ que verifique la relación (2.11). En ese caso nos enfrentamos a la necesidad de resolver una ecuación en la variable P . Dicha ecuación se denomina **ecuación de Liapunov** y se prueba ([Kha96], Cap 3) que:

Teorema 2.7 *La matriz A es Hurwitz si y sólo si para toda matriz $Q = Q^T$ definida positiva, la ecuación de Liapunov (2.11) tiene una única solución P definida positiva.* ♣

Existen algoritmos numéricos que permiten resolver la ecuación de Liapunov. Además, debe notarse que para obtener una función de Liapunov no es necesario resolver la ecuación (2.11), sino que basta con resolver la siguiente inecuación en la variable $P > 0$

$$A^T P + P A < 0 \quad (2.12)$$

La ecuación (2.12) resulta ser un problema de programación lineal, resoluble mediante algoritmos muy eficientes de punto interior [Apk96]. Se denomina Desigualdad Matricial Lineal y aparece en la literatura con su sigla en inglés LMI. Existen algoritmos eficientes y rápidos para resolver las LMI [Gah95, Apk96]. Estos objetos matemáticos serán mencionados en repetidas ocasiones a lo largo de esta Tesis. Son de mucha utilidad en la Ingeniería de Control y fundamentalmente en los últimos 10 años ha habido una gran cantidad de trabajo de investigación sobre las aplicaciones a la Teoría de Control de las Desigualdades Matriciales Lineales. La bibliografía citada es una introducción sencilla y breve a las LMI y sus aplicaciones más inmediatas.

2.3 Teoremas recíprocos

Bajo ciertas hipótesis, no muy restrictivas, los Teoremas de Estabilidad de Liapunov admiten una formulación recíproca, en el sentido de que la estabilidad implica la existencia de una función de Liapunov. La demostración de los mismos es de tipo *constructivo*, o sea que la existencia de una función de Liapunov se prueba por la obtención de la misma. Lamentablemente dicha construcción no es en general factible en la práctica, por lo que estos Teoremas tienen fundamentalmente utilidad teórica y se emplean para obtener resultados teóricos sobre estabilidad (ver secciones 2.4 y 2.5).

Teorema 2.8 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

con f continua respecto de t y de clase C^1 respecto de x , definida en $[0, +\infty) \times B_r$. Supongamos que se cumple que la matriz jacobiana de f está acotada en B_r , uniformemente en t . Supongamos además que el origen es exponencialmente estable, o sea que existen k , γ y r_o constantes positivas que verifican

$$\| \mathbf{x}(t, t_o, x_o) \| \leq k \| x_o \| e^{-\gamma(t-t_o)}, \quad \forall t \geq t_o \geq 0 \quad (2.13)$$

siempre que x_o pertenezca a un entorno $\mathcal{D}_o \subset B_r$ del origen.

Entonces existe una función

$$\mathcal{V} : [0, +\infty) \times \mathcal{D}_o \rightarrow \mathcal{R}$$

de clase C^1 que satisface las siguientes condiciones

$$c_1 \| x \|^2 \leq \mathcal{V}(t, x) \leq c_2 \| x \|^2$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \| x \|^2$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| \leq c_4 \| x \|^2$$

para c_1 , c_2 , c_3 y c_4 constantes positivas.

Demostración

Usaremos nuevamente la notación $\mathbf{x}(t, t_o, x_o)$ para designar la trayectoria que en el instante inicial t_o pasa por x_o . Como consecuencia de la acotación exponencial, se cumple que para toda condición inicial x_o en \mathcal{D}_o y todo instante inicial t_o , la trayectoria $\mathbf{x}(t, t_o, x_o)$ está definida para todo tiempo mayor o igual a t_o y se mantiene dentro de B_r , si se cumple que $\mathcal{D}_o \subset B_{\frac{r}{k}}$. Si no se cumpliera dicha condición, restringimos el conjunto \mathcal{D}_o .

Definamos la siguiente función como candidata a función de Liapunov

$$\mathcal{V}(t, x_o) = \int_t^{t+T} \mathbf{x}^T(\tau, t, x_o) \mathbf{x}(\tau, t, x_o) d\tau = \int_t^{t+T} \| \mathbf{x}(\tau, t, x_o) \|^2 d\tau \quad (2.14)$$

donde T es una constante que elegiremos luego. La función \mathcal{V} es a valores reales positivos. Por la acotación exponencial tenemos que

$$\mathcal{V}(t, x) \leq \int_t^{t+T} k^2 \| x \|^2 e^{-2\gamma(\tau-t)} d\tau = \frac{k^2}{2\gamma} (1 - e^{-2\gamma T}) \| x \|^2 \triangleq c_2 \| x \|^2$$

Llamemos L a la cota de la matriz Jacobiana de f en B_r ,

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right\| \leq L, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall t \geq 0$$

Se tiene entonces que f es Lipschitz en B_r con constante L . Por lo tanto, se cumple la siguiente acotación⁶

$$\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \|^2 \geq \| x \|^2 e^{-2L(\tau-t)}$$

Obtenemos entonces la segunda acotación

$$\mathcal{V}(t, x) \geq \frac{1}{2L} (1 - e^{-2LT}) \| x \|^2 \triangleq c_1 \| x \|^2$$

Calculemos la derivada de \mathcal{V} a lo largo de las trayectorias

$$\dot{\mathcal{V}} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(t, x)$$

Derivando tenemos que

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}} &= \| \mathbf{x}(t+T, t, x) \|^2 - \| \mathbf{x}(t, t, x) \|^2 \\ &\quad + \int_t^{t+T} 2\mathbf{x}^T(\tau, t, x) \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial t} d\tau \\ &\quad + \left(\int_t^{t+T} 2\mathbf{x}^T(\tau, t, x) \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} d\tau \right) f(t, x) \\ &= \| \mathbf{x}(t+T, t, x) \|^2 - \| x \|^2 + \int_t^{t+T} 2\mathbf{x}^T(\tau, t, x) \left[\frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} f(t, x) \right] d\tau \end{aligned}$$

Como

$$\mathbf{x}(\tau, t, x) = x + \int_t^\tau f(s, \mathbf{x}(s, t, x)) ds$$

resulta que

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial t} = -f(t, x) \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} = I_{n \times n}$$

y por lo tanto

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} f(t, x) = 0 \quad , \quad \forall \tau \geq t$$

La derivada temporal puede acotarse nuevamente así

$$\dot{\mathcal{V}} = \| \mathbf{x}(t+T, t, x) \|^2 - \| x \|^2 \leq - (1 - k^2 e^{-2\gamma T}) \| x \|^2$$

⁶Como $\| f(t, x) \| \leq L \| x \|$, resulta que

$$\left| \frac{d}{dt} (\| \mathbf{x}(t, t_0, x) \|^2) \right| \leq 2L \| x \|^2 \quad , \quad \forall t_0 \geq 0$$

Lo que da la definición de signo de la variación temporal y el valor de la constante

$$c_3 = 1 - k^2 e^{-2\gamma T}$$

Eligiendo T adecuadamente, podemos tomar c_3 tan cercano a 1 como queramos.

Como se tiene que

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = \int_t^{t+T} 2\mathbf{x}(\tau, t, x) \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} d\tau$$

utilizando técnicas de acotación similares a las ya empleadas, se llega a

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| \leq \frac{2k}{\gamma - L} \left(1 - e^{-(\gamma-L)T} \right) \|x\| \stackrel{\Delta}{=} c_4 \|x\|$$

♣

La hipótesis de estabilidad exponencial del Teorema anterior puede relajarse a la estabilidad asintótica uniforme, aunque la demostración es más trabajosa, ya que las acotaciones no resultan tan directas.

Veremos a continuación el Lema de Massera, de gran importancia técnica, ya que permite la demostración del Teorema Recíproco de Liapunov para el caso de la estabilidad asintótica. Las demostraciones del Lema de Massera y del teorema recíproco que le sigue se basan en [Kha96, Mas49, Vid93].

Lema 2.9 (Lema de Massera (1949)) *Sea $g : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$, continua y estrictamente decreciente, $g(t) > 0$ para $t \geq 0$, $g(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$. Sea $h : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$ continua y no decreciente, $h(t) > 0$ para $t \geq 0$. Entonces existe una función $G(t)$ tal que*

a) $G(t)$ y su derivada $G'(t)$ son funciones de clase \mathcal{K} definidas para todo $t \geq 0$.

b) *Existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que para cualquier función continua u que satisfice $0 \leq u(t) \leq g(t)$ para todo $t \geq 0$ se verifica que*

$$\int_0^\infty G(u(t)) dt \leq k_1 ; \int_0^\infty G'(u(t)) h(t) dt \leq k_2$$

Demostración

Como g es estrictamente decreciente, podemos elegir una sucesión de tiempos t_n tales que

$$g(t_n) \leq \frac{1}{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

En base a dicha sucesión, definiremos la siguiente función $\eta(t)$

i) $\eta(t_n) = \frac{1}{n}$

ii) η es lineal entre t_n y t_{n+1} .

iii) En el primer intervalo $(0, t_1)$, $\eta(t) = \left(\frac{t_1}{t}\right)^p$, con p elegido de tal forma que la derivada $\eta'(t)$ tenga un salto positivo en $t = t_1$, es decir $\eta'(t_1^-) < \eta'(t_1^+)$.

La función η es estrictamente creciente y, además, para $t \geq t_1$, se cumple que $\eta(t) \geq g(t)$ por construcción. La función inversa η^{-1} es estrictamente decreciente y tiende a 0 para $t \rightarrow \infty$. Se cumple que

$$\eta^{-1}(u(t)) \geq \eta^{-1}(g(t)) \geq \eta^{-1}(\eta(t)) = t, \quad \forall t \geq t_1$$

para toda función u que satisfaga $u(t) \leq g(t)$. Definamos la siguiente función

$$H(s) = \frac{e^{-\eta^{-1}(s)}}{h(\eta^{-1}(s))}, \quad s \geq 0$$

que es continua en $0 < s < \infty$, dada la continuidad de η^{-1} y h y dado que h es positiva. Puede verse que H es una función de clase \mathcal{K} en $[0, \infty)$, dado que se anula en $s = 0$ (por ser $\eta^{-1}(s) \rightarrow \infty$ para $s \rightarrow 0^+$). Además, la función H es monótona creciente, ya que al crecer s , decrece $\eta^{-1}(s)$, crece la exponencial del numerador y no crece el denominador, por ser h no decreciente. Por lo tanto, tiene sentido definir la siguiente función

$$G(r) = \int_0^r H(s) ds$$

que resulta ser continua y de clase \mathcal{K} , con derivada continua y de clase \mathcal{K} en $[0, \infty)$. Esta es la función de la tesis. Verifiquemos que se satisfacen las acotaciones.

Para la función u del enunciado se tiene

$$G'(u(t)) = H(u(t)) = \frac{e^{[-\eta^{-1}(u(t))]}{h[u(t)]} \leq \frac{e^{-t}}{h(t)}, \quad \forall t \geq t_1$$

Integrando, obtenemos

$$\int_{t_1}^{\infty} G'(u(t)) h(t) dt \leq \int_{t_1}^{\infty} e^{-t} dt \leq 1$$

y por lo tanto

$$\int_0^{\infty} G'(u(t)) h(t) dt \leq \int_{t_1}^{\infty} G'(u(t)) h(t) dt + 1 \triangleq k_2$$

con lo que hemos demostrado la segunda acotación de la tesis. Para acotar la primera, notemos que, al ser G monótona creciente y h no decreciente,

$$\int_{t_1}^{\infty} G(u(t)) dt = \int_{t_1}^{\infty} \int_0^{u(t)} \frac{e^{-\eta^{-1}(s)}}{h[\eta^{-1}(s)]} ds dt \leq \int_{t_1}^{\infty} \int_0^{\eta(t)} \frac{e^{-\eta^{-1}(s)}}{h(0)} ds dt$$

y que además, para $0 \leq s \leq \eta(t)$, se cumple

$$-\eta^{-1}(s) \leq -t$$

por lo que tenemos la siguiente acotación

$$\int_0^{\eta(t)} \frac{e^{-\eta^{-1}(s)}}{h(0)} ds \leq \int_0^{\eta(t)} \frac{e^{-t}}{h(0)} ds dt = \frac{e^{-t}}{h(0)} \eta(t) \leq \frac{e^{-t}}{h(0)}$$

para $t \geq t_1$, ya que en ese caso es $\eta(t) \leq 1$.

Finalmente,

$$\int_0^\infty G(u(t)) dt \leq \int_0^{t_1} G(u(t)) dt + \int_{t_1}^\infty \frac{e^{-t}}{h(0)} dt \leq \int_0^{t_1} G(g(t)) dt + \int_{t_1}^\infty \frac{e^{-t}}{h(0)} dt \triangleq k_1$$

♣

Ya estamos entonces en condiciones de demostrar el siguiente teorema:

Teorema 2.10 *Consideremos el sistema*

$$\dot{x} = f(t, x)$$

con f de clase C^1 definida en $[0, +\infty) \times B_r$. Supongamos que se cumple que la matriz jacobiana de f está acotada en B_r , uniformemente en t . Supongamos además que el origen es un punto de equilibrio uniformemente asintóticamente estable.

Entonces existe una función

$$\mathcal{V} : [0, +\infty) \times B_{r_0}$$

de clase C^1 , con r_0 a definir, que satisface las siguientes condiciones

$$\alpha_1(\|x\|) \leq \mathcal{V}(t, x) \leq \alpha_2(\|x\|)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(t, x) \leq -\alpha_3(\|x\|)$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| \leq \alpha_4(\|x\|)$$

para $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ y α_4 funciones de clase \mathcal{K} .

Demostración

Como vimos que la estabilidad asintótica uniforme puede caracterizarse por la existencia de una función β de clase \mathcal{KL} que cumple que

$$\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \| \leq \beta(\|x\|, \tau - t), \quad \forall \tau \geq t \geq 0$$

para $\forall x \in B_{r_o}$, $r_o < r$.

Mostraremos que la siguiente función,

$$\mathcal{V}(t, x) = \int_t^\infty G(\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \|) d\tau$$

con G elegida convenientemente, es una función de Liapunov para el sistema.

Comencemos por estudiar

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} = \int_t^\infty G'(\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \|) \frac{\mathbf{x}^T(\tau, t, x)}{\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \|} \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} d\tau$$

Como vimos en la demostración del Teorema recíproco para el caso de la estabilidad exponencial, la hipótesis

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \leq L$$

se traduce en

$$\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \| \leq e^{L(\tau-t)}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| &\leq \int_t^\infty G'(\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \|) e^{L(\tau-t)} d\tau \\ &\leq \int_t^\infty G'[\beta(\|x\|, \tau - t)] e^{L(\tau-t)} d\tau \\ &= \int_0^\infty G'[\beta(\|x\|, s)] e^{Ls} ds \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Massera, llamando $g(s) = \beta(r, s)$ (r fijo) y $h(s) = Ls$. Obtenemos así una función G , de clase \mathcal{K} , y constantes k_1 y k_2 , tales que

$$\int_0^\infty G'[\beta(\|x\|, s)] e^{Ls} ds \triangleq \alpha_4(\|x\|) \leq k_2$$

para todo $\|x\| \leq r_o$. α_4 es una función de clase \mathcal{K} , por serlo G' y β (para s fijo).

Veamos el resto de las acotaciones

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(t, x) &= \int_t^\infty G(\| \mathbf{x}(\tau, t, x) \|) d\tau \\ &\leq \int_t^\infty G[\beta(\|x\|, \tau - t)] d\tau = \int_0^\infty G[\beta(\|x\|, s)] ds \triangleq \alpha_2(\|x\|) \end{aligned}$$

donde nuevamente α_2 es una función de clase \mathcal{K} . La definición de signo de la función \mathcal{V} sale de la siguiente cadena de desigualdades

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(t, x) &= \int_t^\infty G(\|\mathbf{x}(\tau, t, x)\|) d\tau \\ &\geq \int_t^\infty G(\|x\| e^{-L(\tau-t)}) d\tau = \int_0^\infty G(\|x\| e^{-Ls}) ds \\ &\geq \int_0^{\frac{\ln 2}{L}} G\left(\frac{1}{2}\|x\|\right) \triangleq \alpha_1(\|x\|)\end{aligned}$$

donde hemos usado nuevamente la acotación uniforme del jacobiano de f , para acotar inferiormente la norma de la trayectoria, y el hecho de que $e^{-Ls} \leq \frac{1}{2}$ para todo $s \geq \frac{\ln 2}{L}$. La función α_1 es de clase \mathcal{K} por serlo G y la función norma.

Calculemos la variación de \mathcal{V} sobre las trayectorias

$$\begin{aligned}\dot{\mathcal{V}}(t, x) &= \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(t, x) = \\ &= -G(\|x\|) + \int_t^\infty G'(\|\mathbf{x}(\tau, t, x)\|) \frac{\mathbf{x}^T(\tau, t, x)}{\|\mathbf{x}(\tau, t, x)\|} \left[\frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} f(t, x) \right]\end{aligned}$$

Nuevamente tenemos que

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{x}(\tau, t, x)}{\partial x} f(t, x) = 0, \quad \forall \tau \geq t$$

De donde,

$$\dot{\mathcal{V}} = -G(\|x\|) \triangleq \alpha_3(\|x\|)$$

♣

2.4 Sistemas perturbados

Consideremos el sistema

$$\dot{x} = f(t, x) + \delta(t, x) \tag{2.15}$$

donde \mathcal{D} es un entorno del origen en \mathcal{R}^n , $f, \delta : [0, \infty) \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{R}^n$ son funciones localmente Lipschitz en x y f es de clase C^1 . El término δ representa una perturbación del **sistema original**

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{2.16}$$

que puede representar errores de modelado, incertidumbre en la dinámica, dinámica que no fue modelada y ruido en el sistema real. Asumiremos que el origen $x = 0$ es un punto fijo del

sistema original. Si llamamos \bar{f} a la función exacta que describe el sistema (2.15) y f al modelo que por simplicidad o por necesidad estamos usando, entonces se cumple que

$$\dot{x} = \bar{f}(t, x) = f(t, x) + [\bar{f}(t, x) - f(t, x)] = f(t, x) + \delta(t, x)$$

donde δ representa la diferencia entre nuestro modelo y la realidad.

Estamos limitando nuestro estudio a sistemas que se pueden escribir en la forma (2.15), es decir, sistemas en los que la perturbación aparece en forma aditiva en la dinámica, lo cual no es restrictivo, ya que normalmente se arriba a sistemas de esta forma cuando se pretende controlar sistemas no lineales.

En esta sección, veremos bajo qué condiciones, el conocimiento de la dinámica en torno del origen del sistema original (2.16) nos proporciona información relativa al sistema perturbado (2.15). A tales efectos, es necesario distinguir dos casos, cuando la perturbación δ se anula en el origen $x = 0$ y cuando no sucede así.

2.4.1 $\delta(t, 0) = 0$, $\forall t \geq t_o$

Cuando la perturbación se anula en el origen, se cumple que el mismo es un punto fijo del sistema original y del perturbado al mismo tiempo. A continuación veremos un resultado que permite obtener información sobre la estabilidad del origen como punto fijo del sistema perturbado a partir del conocimiento de las propiedades de estabilidad del origen como punto fijo del sistema original. Existen varios teoremas similares al Teorema 2.11 que manejan el mismo esquema de demostración ([Kha96], Cap. 4).

Teorema 2.11 *Supongamos que*

$$\delta(t, 0) = 0 , \forall t \geq t_o$$

y que el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema original (2.16). Supongamos además que la perturbación δ cumple que

$$\| \delta(t, x) \| \leq \gamma \| x \| , \forall t \geq t_o \tag{2.17}$$

en un entorno del origen. Entonces, si γ es suficientemente pequeño⁷, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado (2.15).

Demostración:

Como se cumplen las hipótesis del Teorema Recíproco de Liapunov para el caso de la estabilidad exponencial, podemos asegurar que existe una función de Liapunov para el sistema nominal (2.16), es decir, una función $\mathcal{V}(t, x)$ de clase C^1 definida en $[0, \infty) \times \mathcal{D}$, donde \mathcal{D} es un entorno del origen en \mathcal{R}^n , que verifica que

$$c_1 \| x \|^2 \leq \mathcal{V}(x) \leq c_2 \| x \|^2$$

⁷La cota para γ surge de la demostración del Teorema

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(t, x) \leq -c_3 \|x\|^2$$

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| \leq c_4 \|x\|$$

con c_1 , c_2 , c_3 y c_4 constantes positivas. Veremos bajo que condiciones la función \mathcal{V} es una función de Liapunov para el sistema perturbado (2.15). En primer lugar, restringimos el dominio de definición de la función de Liapunov a la región donde se verifica la acotación (2.17). Estudiemos la derivada respecto de las trayectorias

$$\dot{\mathcal{V}}(t, x) = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(t, x) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \delta(t, x)$$

Por las propiedades de \mathcal{V} y δ , la ecuación anterior puede acotarse como sigue

$$|\dot{\mathcal{V}}| \leq -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} \right\| \|\delta(t, x)\| \leq -\|x\|^2 (c_3 - \gamma c_4)$$

Entonces, si se cumple que

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} \tag{2.18}$$

tendremos que el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema perturbado. ♣

El resultado anterior muestra que la estabilidad exponencial es una propiedad *robusta* en el sentido que se mantiene frente a una clase determinada de perturbaciones. La validez de las consideraciones realizadas es siempre local, aunque si el origen es globalmente exponencialmente estable para el sistema nominal, entonces también lo será para el sistema perturbado.

Cabe observar que el Teorema anterior incluye el caso en que la perturbación satisface una acotación particular de la forma

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma(t) \|x\|$$

con $\gamma(t) < \bar{\gamma}$ para todo $t \geq 0$. Este tipo de acotación aparece frecuentemente en los problemas a estudio y es interesante en si misma ya que admite perturbaciones variantes en el tiempo a las que se le pueda imponer una cota uniforme. Si se tiene más información sobre la variación temporal de la cota $\gamma(t)$ se pueden obtener más conclusiones que las que brinda este Teorema ([Kha96], Cap. 5).

La ecuación (2.18) nos da una idea del tamaño de las perturbaciones que no desestabilizan el sistema, aunque está claro que para calcular la cota $\frac{c_3}{c_4}$, es necesario conocer explícitamente la función de Liapunov \mathcal{V} . Aún si conocemos una función \mathcal{V} para el sistema y una cota γ para la perturbación pero no se cumple la condición (2.18), el resultado anterior sólo nos dice que no podemos afirmar nada sobre la estabilidad del sistema perturbado y deberíamos intentar

buscar una función de Liapunov que maximice la cota admisible de γ .

La estabilidad exponencial es esencial en el resultado anterior. Cuando sólo se tiene estabilidad asintótica uniforme el estudio resulta ser un poco más delicado [Kha96]. El siguiente ejemplo muestra que la robustez frente a perturbaciones de crecimiento lineal señalada no se tiene con la sola estabilidad uniforme.

Ejemplo 2.4 *Consideremos el sistema escalar*

$$\dot{x} = -x^3 + \gamma x$$

donde el término γx representa una perturbación. El sistema original ($\gamma = 0$) admite la función de Liapunov

$$\mathcal{V}(x) = x^2$$

que es definida positiva y tiene derivada sobre las trayectorias

$$\dot{\mathcal{V}}(x) = -4x^4$$

que es definida negativa. Tenemos entonces estabilidad asintótica uniforme para el sistema original. Linealizando el sistema perturbado en torno al origen obtenemos

$$\dot{x} = \gamma x$$

lo que indica que el origen es inestable para todo valor de γ positivo arbitrariamente pequeño. ♠

Veamos que sucede en el caso particular de un sistemas lineal invariante en el tiempo perturbado

$$\dot{x} = Ax + \delta(t, x)$$

donde la perturbación se anula en el origen y verifica la acotación (2.17). Supongamos que el sistema nominal, lineal, tiene al origen como punto de equilibrio asintóticamente estable. Sabemos entonces que existen matrices P y Q , $n \times n$, definidas positivas, que satisfacen la ecuación de Liapunov

$$A^T P + P A = -Q$$

y que permiten definir la siguiente función de Liapunov cuadrática

$$\mathcal{V}(x) = x^T P x$$

para el sistema nominal. Es fácil verificar que las constantes c_1 , c_2 , c_3 y c_4 pueden tomarse así

$$c_1 = \lambda_{\min}(P) , \quad c_2 = \lambda_{\max}(P) , \quad c_3 = \lambda_{\min}(Q) , \quad c_4 = 2\lambda_{\max}(P)$$

donde hemos usado la notación $\lambda_{\min}(\cdot)$ y $\lambda_{\max}(\cdot)$ para designar el máximo y el mínimo valor propio de una matriz simétrica.

En este caso, la acotación para γ que surge del Teorema 2.11 es

$$\gamma < \frac{c_3}{c_4} = \frac{\lambda_{\min}(Q)}{2\lambda_{\max}(P)} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, si se satisface la condición (2.19), podemos asegurar la estabilidad asintótica del origen para el sistema perturbado.

Pensemos en el problema de maximizar el tamaño de las perturbaciones admisibles. En primer lugar supongamos fija la matriz A . Entonces debemos buscar una pareja (P, Q) que maximice la cota de la condición (2.19). Este problema está resuelto y la solución es la pareja $Q = I_{n \times n}$ y la solución P de la ecuación de Liapunov $A^T P + PA = -I$ ([Kha96], Cap. 5, Ejercicio 5.1).

En segundo lugar, supongamos que tenemos un sistema lineal de control y que podemos modificar la matriz A (por ejemplo, mediante una acción de control que consista en una realimentación lineal de estados). Entonces el problema es un poco más complejo ya que contamos con un grado más de libertad (las matrices P y Q y la matriz de realimentación de estados estabilizante). Detallaremos este problema en la sección 2.6.

2.4.2 $\delta(t, 0) \neq 0$, $\forall t \geq t_o$

Cuando la perturbación no se anula en el origen, no tenemos el resultado interesante del Teorema 2.11. El problema radica en que el origen ya no es un punto fijo del sistema perturbado y, por lo tanto, las conclusiones que podamos sacar sobre la estabilidad del origen para el sistema nominal no pueden trasladarse directamente al sistema perturbado. Aún así, podemos intentar aplicar la misma idea de ver bajo qué condiciones una función de Liapunov para el sistema nominal nos brinda información sobre las trayectorias en torno al origen del sistema perturbado. El siguiente Teorema, que sólo enunciaremos, traslada lo visto anteriormente al caso de perturbaciones que no se anulan en el origen.

Teorema 2.12 *Sea $x = 0$ un punto de equilibrio exponencialmente estable para el sistema nominal (2.16) y supongamos que $\delta(t, x)$ satisface la siguiente acotación*

$$\|\delta(t, x)\| \leq \rho \quad (2.20)$$

para todo $t \geq 0$ y para todo x en una bola de radio r centrada en el origen. Si ρ es suficientemente pequeño, entonces existen constantes positivas c , t_1 , b , k , R y γ que verifican que

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq k e^{-\gamma(t-t_o)} \|\mathbf{x}(t_o)\|, \quad \forall t_o \leq t < t_1, \quad \forall \|\mathbf{x}(t_o)\| \leq R \quad (2.21)$$

$$\|\mathbf{x}(t)\| \leq b, \quad \forall t \leq t_1 \quad (2.22)$$



Las ecuaciones (2.21) y (2.22) expresan la llamada **acotación última**⁸ de las trayectorias en torno al origen. Como puede apreciarse, al principio las trayectorias tienden exponencialmente al origen y luego se quedan *cerca* de él. Las constantes que aparecen resultan ser funciones

⁸En inglés: *ultimate bound*

de las cotas de la función de Liapunov que se asocia al sistema nominal. La demostración del Teorema se basa en un resultado similar al del Teorema de Liapunov, cuando sólo puede afirmarse que la derivada es definida negativa fuera de un entorno del origen. Esto implica que las trayectorias van hacia ese entorno y no se salen de allí ([Kha96], Cap. 5).

El estudio de perturbaciones que no se anulan en el origen aparece naturalmente cuando en un sistema de control miramos la acción de control como una perturbación. Seamos un poco más explícitos. Supongamos un sistema de control de la forma

$$\dot{x} = f(x) + u(t, x)$$

donde u es la señal de control. Si conocemos las características de estabilidad del sistema no forzado

$$\dot{x} = f(x)$$

basándonos en los Teoremas anteriores podemos extrapolar conclusiones para el sistema forzado. Por ejemplo, si el origen del sistema no forzado es exponencialmente estable y la acción de control, vista como una perturbación, satisface la acotación (2.20), podemos asegurar que las trayectorias resultantes serán acotadas. Esto se conoce como la estabilidad entrada-estado.

2.5 Linealización

En la presente sección, veremos como estudiar el comportamiento de un sistema en las cercanías de un punto de equilibrio en función de las propiedades del sistema obtenido al linealizar el original.

Consideremos el sistema no lineal y autónomo

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.23}$$

con $f(0) = 0$ y f de clase C^1 en un entorno del origen. Definamos la siguiente matriz

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x}(x) \right|_{x=0} \tag{2.24}$$

El sistema (2.23) puede escribirse así

$$\dot{x} = Ax + [f(x) - Ax]$$

y, definiendo $\delta(x) = f(x) - Ax$, obtenemos la siguiente descripción

$$\dot{x} = Ax + \delta(x) \tag{2.25}$$

La ecuación (2.25) es un caso particular de un sistema perturbado. En este caso el sistema nominal es lineal, de matriz de transición de estados A , y la perturbación verifica por definición que se anula en el origen y además que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{\|\delta(x)\|}{\|x\|} = 0$$

por la continuidad en $x = 0$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$. Estamos, por lo tanto, en las hipótesis del Teorema 2.11, ya que siempre podemos encontrar una constante γ tal que en un entorno del origen se cumpla que

$$\| \delta(x) \| \leq \gamma \| x \|$$

Restringiendo suficientemente dicho entorno, la constante γ puede tomarse tan pequeña como sea necesario.

En el capítulo 6 se profundiza este resultado y sus consecuencias.

El resultado expuesto aquí brevemente es más fuerte aún. Puede demostrarse que existe una correspondencia biunívoca local entre las trayectorias del sistema original y las del sistema lineal. Esto se conoce como Teorema de Hartman-Großman [Kha96, Har64, Lew81].

2.6 Control utilizando Liapunov

Las herramientas introducidas por Liapunov se emplean continuamente en la Teoría del Control. Las aplicaciones son variadas, así como los objetivos. En esta sección, presentaremos algunas ideas y conceptos que aparecen en el estudio de sistemas de control.

Recordemos que el sistema a estudio está descrito por la siguiente relación

$$\dot{x} = f(t, x, u) \tag{2.26}$$

El objetivo de control es determinar la señal de control $u : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}^m$ que determine que el sistema satisfaga un conjunto de propiedades requeridas. Una de dichas propiedades es en general la estabilidad del sistema (tanto referida a un punto fijo como a una trayectoria).

Existen en control dos grandes problemas: **análisis** y **síntesis**. El problema de análisis consiste en determinar si un sistema de control dado, con una señal de control dada, satisface las propiedades requeridas. El problema de síntesis consiste en diseñar la señal de control que lleve al sistema al comportamiento deseado.

Originalmente, la Teoría de Liapunov se aplicó al problema de análisis. De alguna manera se diseñaba la acción de control y se testeaba, mediante Liapunov, la estabilidad del sistema. Uno de los problemas clásicos de análisis es el denominado **Problema de Lure**. Dicho problema consiste en determinar la estabilidad del sistema mostrado en la figura 2.5. El sistema no tiene entradas externas y consiste en un sistema lineal de una entrada y una salida⁹, invariante en el tiempo, de parámetros concentrados, de matriz de transferencia $G(s)$, realimentado mediante una función no lineal ϕ que verifica una **condición de sector**, es decir, que existen α y β constantes no negativas, $0 \leq \alpha < \beta \leq \infty$, que satisfacen que

$$\alpha y^2 \leq y\phi(y) \leq \beta y^2, \quad \forall y \in \mathcal{R}$$

⁹Puede extenderse el resultado al caso multivariable [Kha96, Meg97].

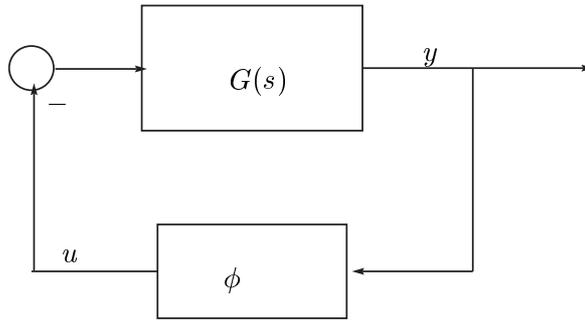


Figura 2.5: Problema de Lure o de estabilidad absoluta

(El gráfico de la función ϕ se encuentra en el sector limitado por las rectas de pendiente α y β ; se dice en este caso que la no linealidad ϕ pertenece al sector (α, β)). Problemas que pueden expresarse como en la figura 2.5 son frecuentes en los sistemas físicos [Kha96, Slo91, Vid93]. El Problema de Lure consiste en asegurar la estabilidad del sistema realimentado para cualquier no linealidad ϕ en el sector y se conoce también como problema de **estabilidad absoluta**. La resolución consiste en encontrar una función de Liapunov que asegure la estabilidad, independientemente de la no linealidad ϕ , siempre que ésta pertenezca al sector. Hay resultados clásicos en este tema, los denominados Criterio de Popov y Criterio del Círculo, que datan de unos 30 años atrás, y resultados más recientes, que generalizan y amplían dichos criterios, debidos a los trabajos de Megretski y Rantzer [Meg97].

Si bien al principio la Teoría de Liapunov se utilizó para analizar problemas de control, surgieron técnicas que utilizaban dicha Teoría para sintetizar sistemas. Estas técnicas parten de una función candidata a ser de Liapunov y diseñan la señal de control para convertirla en una función de Liapunov. Otras tienen una función de Liapunov para una *porción* del sistema y la extienden en forma inteligente al resto del sistema [Kha96, Slo91, Vid93, Rug91].

A principios de los años 80, la Teoría se orientó luego a la búsqueda de las denominadas *Funciones de Liapunov de Control* (CLF). Este concepto se aplica a sistemas de control con una estructura particular y es aquellos en los que la entrada aparece en forma afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (2.27)$$

Definición 2.18 Una CLF para el sistema (2.27) es una función $\mathcal{V} : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ de clase C^1 , definida positiva, que cumple que

$$\inf_u \left[\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} f(x) + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} g(x)u \right] < 0$$

para todo $x \neq 0$. ◇

La minimización indicada en la definición es para x fijo. Puede demostrarse que la CLF admite una señal de control continua que la transforme en función de Liapunov. Además, dicha

acción de control puede ser elegida de modo tal que se optimice un determinado índice de desempeño del sistema (como el introducido en el capítulo 3) [Son89]. Muchas de las técnicas nombradas para síntesis sirven para obtener una CLF para el sistema a estudio. Los trabajos de [JYu98, Pri98a, Pri98b] muestran una línea de investigación actual en esta dirección.

Ahora que hemos introducido algunas ideas sobre el uso de la Teoría de Liapunov en el análisis y la síntesis de sistemas de control, retomemos el problema presentado al final de la sub sección 2.4.1. Allí planteábamos la idea de encontrar una realimentación de estados y una función de Liapunov de forma tal de asegurar la estabilidad del origen como punto fijo del sistema

$$\dot{x} = Ax + Bu + \delta(t, x) \quad (2.28)$$

cuando δ verifica que se anula en el origen y que

$$\|\delta(t, x)\| \leq \gamma \|x\|$$

para todo x en una cierta región \mathcal{D} y para $t \geq t_0$. Supongamos que la pareja (A, B) es controlable, o sea que existe una matriz $K_{n \times m}$ que cumple que la matriz

$$\bar{A} = A - BK$$

es Hurwitz [Kha96, Oga80, Zho97, Kai80, Kuo96]. La matriz \bar{A} resulta ser la matriz de estados del sistema (2.28) cuando la acción de control es la realimentación de estados $u = -Kx$. El problema se plantea entonces como el de encontrar una matriz K estabilizante¹⁰ y una función de Liapunov cuadrática que maximicen la cota (2.17) admisible para la perturbación δ . Matemáticamente el problema se expresa así

$$\max_{\{K \text{ estabilizantes}; P=P^T>0\}} \left\{ \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} \mid (A - BK)^T P + P(A - BK) = -Q < 0 \right\}$$

Veamos algunas características particulares del problema. Si existe una pareja (K_o, P_o) que da el óptimo, entonces, según lo visto en la subsección 2.4.1, la matriz P_o debe ser solución de la ecuación

$$(A - BK_o)^T P_o + P_o(A - BK_o) = -I$$

ya que de no ser así, el objetivo podría mejorarse manteniendo K_o fijo. Por lo tanto podemos reformular el problema como sigue

$$\max_{\{K \text{ estabilizantes}; P=P^T>0\}} \left\{ \frac{1}{\lambda_{\max}(P)} \mid (A - BK)^T P + P(A - BK) = -I \right\}$$

O lo que es lo mismo

$$\min_{\{K \text{ estabilizantes}; P=P^T>0\}} \left\{ \lambda_{\max}(P) \mid (A - BK)^T P + P(A - BK) = -I \right\} \quad (2.29)$$

¹⁰O sea, tal que $\bar{A} = A - BK$ sea Hurwitz.

Utilizando la equivalencia de las siguientes ecuaciones

$$P = P^T > 0, \lambda_{max}(P) < c \Leftrightarrow P - cI < 0$$

siendo I la matriz identidad $n \times n$, la expresión (2.29) puede replantearse así

$$\begin{aligned} & \min c \\ \text{sujeto a} & \\ & P = P^T > 0 \\ & P - cI < 0 \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -I$$

donde hemos introducido la variable auxiliar c real.

La resolución del problema anterior no parece ser trivial y muestra una posible línea de trabajo futuro.

Capítulo 3

Control Óptimo

Controlar un sistema consiste en decidir qué acciones corresponde tomar, dentro de las posibles, para que el sistema se comporte de una manera adecuada a nuestros objetivos. Sin entrar aquí en definiciones que serán presentadas más adelante, el concepto anterior nos muestra que la Teoría de Control debe contemplar un compromiso entre lo que es necesario hacer y lo que es posible hacer.

En virtud del compromiso mencionado, los problemas de control pueden ser planteados de forma tal de obtener el mejor desempeño posible dentro de las limitaciones existentes. Tal planteo es lo que se conoce como *Control Óptimo*. Como su nombre lo indica, la solución de un problema de control óptimo involucra un proceso de optimización, satisfaciendo un conjunto de restricciones. Dichas restricciones pueden ser limitaciones propias del problema, o pueden ser también condiciones que nosotros imponemos, como el grado de desempeño admisible o el conjunto de las acciones de control posibles.

La Teoría del Control Óptimo está pues íntimamente vinculada a la Teoría de Optimización con Restricciones y el Cálculo Variacional. Las primeras investigaciones en esta línea matemática se remontan a fines del siglo XVII, con el problema del braquistocrono o del tiempo mínimo de Jacob Bernoulli, que tuvo soluciones propuestas por Newton, L'Hopital, Leibnitz y el propio Bernoulli entre otros.

Dos diferentes enfoques permiten atacar el problema del Cálculo Variacional, las *ecuaciones de Euler-Lagrange* y las *ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman* y se corresponden con dos visiones diferentes para el problema del Control Óptimo, la *programación dinámica* y el *principio del mínimo de Pontriagin*. Ambos enfoques, junto con sus virtudes y defectos, serán estudiados en este capítulo.

3.1 Problema del Regulador Óptimo

El problema de Control Óptimo consiste en la minimización (maximización) de una determinada función objetivo o **función de costo** vinculada a un determinado sistema dinámico, modelado mediante una descripción de entradas y estados. En el presente trabajo, nos limitare-

mos al **Problema de Regulación**, es decir, al problema de llevar el estado inicial al estado nulo en un determinado lapso de tiempo y utilizando un conjunto de entradas admisibles.

El sistema con el que trabajaremos será el siguiente¹

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u \quad , \quad \mathbf{x}(t_o) = x_o \quad (3.1)$$

siendo $x \in \mathcal{R}^n$ el vector de estados, $u \in \mathcal{R}^m$ el vector de entradas y $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ y $g : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$ funciones diferenciables. Supondremos que siempre estamos en las hipótesis necesarias para la existencia y unicidad de la solución del sistema (3.1). Llamaremos $\mathbf{x}(t, t_o, x_o)$ a la solución correspondiente a la condición inicial $x_o \in \mathcal{R}^n$, es decir, $\mathbf{x}(t_o, t_o, x_o) = x_o$. También usaremos la notación $\mathbf{x}(t, t_o, x_o) = \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}$ cuando no haya posibilidad de confusión.

Asociada al sistema tenemos la siguiente función de costo

$$\mathcal{J}(x_o, t_o, u, t_f) = \psi(\mathbf{x}(t_f, t_o, x_o), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), u, t) dt \quad (3.2)$$

donde por comodidad hemos usado \mathbf{x} en el integrando para referirnos a la trayectoria en el instante t . L denota una función de pérdida, normalmente denominada **lagrangiano**. t_f es el primer instante en el que la trayectoria llega a un cierto conjunto predefinido \mathcal{S} que llamaremos conjunto **objetivo**. t_f puede ser fijo (dato del problema) o variable (a determinar). ψ es una **función de peso** que se calcula en el estado final $\mathbf{x}(t_f, t_o, x_o)$. Las funciones L y ψ verifican

$$L(0, 0, t) = 0 \quad , \quad \psi(0, t_f) = 0$$

Llamaremos \mathcal{U} al conjunto de entradas admisibles, es decir, aquellas que satisfacen el conjunto de restricciones que nuestro problema impone en las entradas.

El **Problema de Control Óptimo** consiste en determinar si existe una entrada admisible $u^* \in \mathcal{U}$, definida en el intervalo dado $[t_o, t_f]$ tal que minimice el funcional \mathcal{J} .

Los datos del problema son el conjunto admisible de entradas \mathcal{U} y el conjunto objetivo \mathcal{S} . Normalmente buscaremos una solución u^* que sea un realimentación de estados, del tipo $u^* = h(x)$.

Eligiendo adecuadamente las funciones L y ψ y los conjuntos \mathcal{U} y \mathcal{S} se obtienen diferentes problemas de control óptimo. Por ejemplo, tomando $L = 1$, $\psi = 0$, $\mathcal{S} = \{x_f\}$ y $\mathcal{U} = \{u(t) | \exists t_f \in [0, +\infty) \mathbf{x}(t_f, t_o, x_o) = x_f\}$ tenemos planteado el problema de alcanzar el estado final x_f dado en tiempo mínimo, o eligiendo $L = \|u\|^2$, $\psi = 0$, $\mathcal{S} = \{x_f\}$ y $\mathcal{U} = \{u \in L_2[t_o, t_f] | \mathbf{x}(t_f, t_o, x_o) = x_f\}$ encontramos el problema de pasar del estado inicial x_o a un estado final x_f dado con mínima energía de entrada en un tiempo t_f dado. Otros problemas de control óptimo pueden encontrarse en [And90] y [Nev97].

¹La Teoría que se presenta a continuación vale para un conjunto más amplio de sistemas, descritos por la relación $\dot{x} = f(t, x, u)$, pero nos limitaremos a estudiar los sistemas gobernados por la expresión afín (3.1), que describe muchos sistemas físicos.

El problema que estudiaremos nosotros es el siguiente:

Problema del regulador óptimo: Consiste en llevar el estado inicial a un estado de equilibrio, o al menos aproximarse a él, minimizando el funcional \mathcal{J} . Normalmente el punto de equilibrio elegido es el origen $x = 0$. Para ello, tanto L como ψ se eligen no negativas, el tiempo final t_f es dado, $\mathcal{U} = \{u(t) \text{ seccionalmente continua}\}$ y $\mathcal{S} = \{0\}$.

Como el tiempo final es dado obviaremos la dependencia respecto de t_f del funcional \mathcal{J} . Hay dos casos distintos para el problema del regulador óptimo: cuando t_f es finito y cuando $t_f = \infty$. Estudiaremos el primer caso.

3.2 Programación Dinámica

Este enfoque para la resolución del problema de control óptimo se basa en el *Principio de Optimalidad*. Escribamos nuevamente el problema de control

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(x_o, t_o, u) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(\mathbf{x}(t_f, t_o, x_o), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), u, t) dt \right\} \quad (3.3)$$

sujeto a

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u$$

$$\mathbf{x}(t_o) = x_o$$

Teorema 3.1 (Principio de Optimalidad) *Si la entrada u^* es óptima en el intervalo $[t, t_f]$, partiendo de un estado $x(t)$, entonces también lo es en el intervalo $[t + \Delta t, t_f]$, para cualquier Δt ($0 \leq \Delta t \leq t_f - t$).* ♣

Esta afirmación, formulada por Bellman a mediados de este siglo, permite obtener una expresión analítica para la resolución del problema de optimización [Bel62, Sag68, Ath66]. Definamos el siguiente mapa

$$\mathcal{V}^*(x_o, t_o) = \min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(x_o, t_o, u) \quad (3.4)$$

que llamaremos **función de valor**. Esta función, independiente de la entrada u , asocia a cada estado inicial el costo óptimo correspondiente. Si logramos conocer la función de valor, entonces tendremos resuelto el problema de control óptimo para cualquier condición inicial x_o y cualquier instante inicial t_o .

El Principio de Optimalidad se expresa de la siguiente manera en términos de la función de valor

$$\mathcal{V}^*(x, t) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \int_t^{t+\Delta t} L(\mathbf{x}(\tau), u, \tau) d\tau + \mathcal{V}^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) \right\} \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau, t, x)$. Hemos omitido algunos subíndices por comodidad. De la expresión anterior puede encontrarse una ecuación en derivadas parciales para la función de valor. Para ello, daremos los siguientes pasos: en primer lugar, aproximaremos la integral por el término $L(x, u, t) \cdot \Delta t$; en segundo lugar, aproximaremos el segundo término de la derecha de la igualdad por su desarrollo de Taylor multivariable; en tercer lugar, usaremos la aproximación

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) \approx \mathbf{x}(t) + [f(x) + g(x)u] \Delta t$$

Obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\mathcal{V}^*(\mathbf{x}(t + \Delta t), t + \Delta t) = \mathcal{V}^*(x, t) + \frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial t} \Delta t + \left(\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial x} \right)^T [f(x) + g(x)u] \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(x)$$

donde $\mathcal{O}(\Delta t)$ y $\mathcal{O}(x)$ denotan términos de orden mayor que 1 en Δt y x respectivamente; o sea que satisfacen

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{O}(\Delta t)|}{\Delta t} = 0, \quad \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{|\mathcal{O}(x)|}{\|x\|} = 0$$

Por lo tanto, la expresión (3.5) se transforma en

$$\mathcal{V}^*(x, t) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L(x, u, t) \Delta t + \mathcal{V}^*(x, t) + \frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial t} \Delta t + \left(\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial x} \right)^T [f(x) + g(x)u] \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) \right\}$$

Agrupando los términos independientes de u a la izquierda de la igualdad y cancelando $\mathcal{V}^*(x, t)$ obtenemos

$$-\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial t} \Delta t = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L(x, u, t) \Delta t + \left(\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial x} \right)^T [f(x) + g(x)u] \Delta t + \mathcal{O}(\Delta t) \right\} \quad (3.6)$$

Dividiendo por Δt y haciendo tender Δt a cero, se llega a la siguiente expresión

$$-\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial t} = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ L(x, u, t) + \left(\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial x} \right)^T [f(x) + g(x)u] \right\} \quad (3.7)$$

que se conoce como la **ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman** (HJB). Para obtener la condición de borde de la ecuación, hay que observar que en el instante $t = t_f$, se tiene que $\mathcal{J}(x, t_f, u) = \psi(\mathbf{x}(t_f, t_f, x), t_f) = \psi(x, t_f)$ independiente de u . Se cumple entonces que

$$\mathcal{V}^*(x, t_f) = \psi(x, t_f), \quad \forall x \quad (3.8)$$

La expresión (3.7) resulta ser una ecuación en derivadas parciales que también involucra una optimización, cuya solución es la función de valor asociada al funcional de costo (3.2). Un camino para encontrar la solución es el siguiente. En primer lugar, se realiza la minimización indicada en (3.7), obteniéndose una expresión para u (dependiente de \mathcal{V}^*)

$$u^* = h \left(\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial x}, x, t \right) \quad (3.9)$$

En segundo lugar, se resuelve la ecuación en derivadas parciales resultante de substituir u por u^*

$$-\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial t} = L(x, u^*, t) + \left(\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial x} \right)^T [f(x) + g(x)u^*]$$

3.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Este enfoque para resolver el problema de control óptimo se basa en la utilización de multiplicadores de Lagrange [Bry75]. Nuevamente escribimos el problema

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{J}(x_o, t_o, u) = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ \psi(\mathbf{x}(x_o, t_o, t_f), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} L(\mathbf{x}(t), u, t) dt \right\} \quad (3.10)$$

sujeto a

$$\dot{x} = f(x) + g(x).u, \quad \mathbf{x}(t_o) = x_o$$

Consideremos una nueva función de costo, resultante de agregarle las restricciones a la original, utilizando multiplicadores de Lagrange. Este proceso permite transformar un problema de optimización con restricciones en uno más grande pero sin restricciones. Como las restricciones son igualdades que deben cumplirse en cada instante de tiempo, se agregan al costo original en forma integral, mediante multiplicadores λ que son funciones del tiempo. Obtenemos la siguiente expresión para el costo *aumentado*

$$\begin{aligned} \bar{\mathcal{J}}(x_o, t_o, u) &= \mathcal{J}(x_o, t_o, u) + \int_{t_o}^{t_f} \lambda^T(t) [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \dot{\mathbf{x}}] dt \\ &= \psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_o}^{t_f} \{ [L(\mathbf{x}, u, t) + \lambda^T(t) [f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u - \dot{\mathbf{x}}]] \} dt \end{aligned} \quad (3.11)$$

El término $L(x, u, t) + \lambda^T(t) [f(x) + g(x)u]$ se denomina **Hamiltoniano** y se denota $H(x, u, \lambda, t)$. Integrando por partes la expresión $-\lambda(t)\dot{\mathbf{x}}(t)$ se tiene

$$-\int_{t_o}^{t_f} \lambda^T(t)\dot{\mathbf{x}}(t)dt = -\lambda^T(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \lambda^T(t_o)\mathbf{x}(t_o) + \int_{t_o}^{t_f} \dot{\lambda}^T(t)\mathbf{x}(t)dt$$

Por lo que se obtiene la siguiente expresión para el costo aumentado

$$\bar{\mathcal{J}}(x_o, t_o, u) = \psi(\mathbf{x}(t_f), t_f) - \lambda^T(t_f)\mathbf{x}(t_f) + \lambda^T(t_o)\mathbf{x}(t_o) + \int_{t_o}^{t_f} [H(\mathbf{x}, u, \lambda, t) + \dot{\lambda}^T(t)\mathbf{x}(t)] dt \quad (3.12)$$

Hemos transformado el problema original en la minimización del costo (3.12) sin restricciones. Para solucionar el problema de control óptimo, debemos encontrar u y λ que minimicen $\bar{\mathcal{J}}$. Las condiciones para un punto óptimo en este caso se obtienen directamente del cálculo variacional [Bry75]. Consideremos las variaciones admisibles $\delta\bar{\mathcal{J}}$ de $\bar{\mathcal{J}}$ para t_o fijo (recordemos que t_f también es fijo²)

$$\delta\bar{\mathcal{J}} = \left[\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} \Big|_{t=t_f} - \lambda^T \Big|_{t=t_f} \right] \delta\mathbf{x} + \lambda^T \delta\mathbf{x} \Big|_{t=t_o} + \int_{t_o}^{t_f} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial\mathbf{x}} + \dot{\lambda}^T \right) \delta\mathbf{x} + \frac{\partial H}{\partial u} \delta u \right] dt$$

²Para el caso en que t_o y/o t_f no son fijos, como en el ejemplo del braquistocrono, deben incorporarse sus variaciones en el cálculo de $\delta\bar{\mathcal{J}}$ [Bry75].

Las variaciones admisibles de \bar{J} en un óptimo deben ser nulas, lo que resulta en una primera ecuación

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x} - \lambda^T \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} u \right] \quad (3.13)$$

La correspondiente condición de borde es³

$$\lambda^T(t_f) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$$

La segunda ecuación que se obtiene es

$$0 = \frac{\partial H}{\partial u} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} u \right) \lambda - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right)^T \quad (3.14)$$

la cual determina la expresión para la entrada óptima u^* .

Recapitulando, resulta ser que para resolver el problema de optimización (3.10), hay que resolver las siguientes ecuaciones diferenciales acopladas, conocidas como ecuaciones de *Euler-Lagrange* (EL).

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad , \quad \mathbf{x}(t_o) = x_o$$

$$\dot{\lambda}^T = -\frac{\partial L}{\partial x} - \lambda^T \left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} u \right] \quad , \quad \lambda^T(t_f) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$$

El problema anterior, con condiciones iniciales en t_o y t_f , se conoce en la literatura como *problema con condiciones iniciales en dos puntos* (**two-point boundary value problem**) y puede resolverse numéricamente utilizando técnicas de disparo. La señal de control óptima se obtiene de la ecuación (3.14).

Las ecuaciones de Euler-Lagrange constituyen una versión particular del **Principio del Mínimo de Pontriagin** que asegura la existencia de la función $\lambda(t)$ que permite encontrar la entrada óptima [Pon59].

3.4 HJB vs. Euler-Lagrange

Los dos enfoques para resolver el problema de control óptimo presentados anteriormente tienen ventajas y desventajas que determinan cuál de ellos corresponde utilizar en cada caso.

³Estamos haciendo la identificación

$$\left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{t=t_f} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}(t_f)}$$

La programación dinámica se basa en la capacidad de resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Como vimos, dicha ecuación consiste en una ecuación en derivadas parciales que no siempre puede resolverse analíticamente, aunque a veces pueden encontrarse aproximaciones numéricas. Esa es esencialmente la principal desventaja de este enfoque. En la siguiente sección veremos un caso particular en la que la ecuación HJB puede ser resuelta analíticamente y que será ampliamente utilizado en este trabajo. Además, el hecho de que la función de valor satisfaga la ecuación HJB es una condición suficiente, pero no necesaria, a menos que \mathcal{V}^* sea diferenciable [Nev97]. Por otro lado, si encontramos la función de valor \mathcal{V}^* , podemos obtener la señal óptima de control por medio de la ecuación (3.9). Dicha entrada óptima resulta ser una realimentación de estados y hemos resuelto el problema para *cualquier condición inicial*.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son un par de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas y en general pueden ser resueltas más fácilmente que la ecuación HJB, lo cual constituye la principal ventaja de este enfoque. Ambas ecuaciones son condiciones necesarias a satisfacer por el par óptimo (λ, u^*) . Como desventaja principal, la solución que se obtiene por este enfoque es *en lazo abierto* en el siguiente sentido: dada la pareja (x_o, t_o) , podemos encontrar la acción de control u óptima; para una nueva pareja, debemos recalcular la solución.

3.5 Regulador Óptimo Cuadrático Lineal (LQR)

En la presente sección veremos un caso particular para el cual la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman admite una solución analítica. Estudiaremos el caso en el que el sistema es lineal y el costo es cuadrático.

Consideremos primero un sistema físico que admite la siguiente descripción lineal variante en el tiempo

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x(t_o) = x_o$$

Consideremos el costo cuadrático

$$\mathcal{J}(x_o, t_o, u) = \frac{1}{2} \int_{t_o}^{t_f} (\mathbf{x}^T Q(t) \mathbf{x} + u^T R(t) u) dt + \frac{1}{2} \mathbf{x}^T(t_f) S_f \mathbf{x}(t_f) \quad (3.15)$$

En la ecuación (3.15), la matriz R es definida positiva y pesa la energía de la acción de control⁴. La matriz Q pesa la energía de la trayectoria, en tanto que la matriz S_f pesa el estado final en tiempo t_f . En general, las matrices Q y S_f se toman semidefinidas positivas.

Veamos como queda la ecuación (HJB) en este caso

$$-\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial t} = \min_{u \in \mathcal{U}} \left\{ x^T Q(t) x + u^T R(t) u + \left(\frac{\partial \mathcal{V}^*}{\partial x} \right)^T [A(t)x + B(t)u] \right\} \quad (3.16)$$

⁴ Asociaremos la potencia instantánea de una señal con su cuadrado. La integral del cuadrado de la señal nos da la energía.

Dadas las características particulares del problema (sistema lineal y costo cuadrático), buscaremos una solución para la ecuación anterior del tipo cuadrático

$$\mathcal{V}^*(x, t) = x^T P(t)x$$

La ecuación HJB resulta ser

$$-x^T \dot{P}(t)x = \min_{u \in \mathcal{U}} \{x^T Q(t)x + u^T R(t)u + [2x^T P(t)] [A(t)x + B(t)u]\}$$

que también puede escribirse como

$$-x^T \dot{P}(t)x = \min_{u \in \mathcal{U}} \{x^T Q(t)x + 2x^T P(t)A(t)x - x^T (PBR^{-1}B^T P)x + \quad (3.17)$$

$$\| u^T R^{-\frac{1}{2}} + x^T PBR^{-\frac{1}{2}} \|^2 \}$$

La señal óptima de control resulta ser, según la ecuación (3.9), la siguiente realimentación de estados

$$u^* = -R^{-1}B^T(t)P(t)x$$

De (3.17) surge que la ecuación que debe verificar la función de valor cuadrática es

$$-\dot{P} = Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P \quad (3.18)$$

que es una ecuación de Riccati. La condición de borde sale de la ecuación (3.8)

$$P(t_f) = S_f \quad (3.19)$$

La ley de realimentación de estados es

$$u^* = -R^{-1}B^T(t)P(t)x$$

Consideremos ahora el caso particular de un sistema lineal invariante en el tiempo (matrices A y B constantes). En este caso, podemos considerar que las matrices de pesos Q y R son constantes. En el problema de la regulación del sistema lineal, vamos a pedir que dicha regulación sea asintótica, es decir, que el origen sea un atractor asintótico global. Por dicho motivo, vamos a considerar $t_f = \infty$ y aprovechando la invariancia temporal, tomaremos $t_o = 0$.

El llamado *problema estacionario* o **regulador asintótico** consiste en encontrar una realimentación estática de estados

$$u = -Kx, \quad K \text{ cte}$$

que convierta al origen en un atractor global. Dicho problema tiene solución si la ecuación (3.18) admite una solución P constante ($\dot{P} = 0$) [Bry75]. La ecuación estacionaria,

$$0 = Q + A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P \quad (3.20)$$

se denomina **ecuación algebraica de Riccati**. Existen varios algoritmos numéricos que permiten resolver la ecuación (3.20) con bastante precisión. Normalmente puede existir varias soluciones, pero se prueba que sólo una es definida positiva [Zho97, Bry75]. Tal solución permite además, obtener una función de Liapunov para el sistema.

La realimentación de estados es

$$u^* = -R^{-1}B^T P x$$

Todos los controladores que implementan las realimentaciones lineales estáticas de estados que aparecen en esta tesis han sido diseñados por el procedimiento descrito en la presente sección.

Capítulo 4

Linealización Exacta

En este capítulo presentaremos una visión diferente de los sistemas de control. Una visión esencialmente no lineal, que utiliza expresamente las no linealidades del sistema para el análisis y la síntesis de sistemas. La denominada *linealización exacta* estudia cómo extender en forma simple a los sistemas no lineales las técnicas de control desarrolladas para sistemas lineales.

La idea es muy sencilla. Estudiaremos bajo qué condiciones existen un cambio local de coordenadas y una realimentación de estados que determinen que la descripción del sistema en las nuevas variables sea lineal o casi lineal (en un sentido que luego definiremos). Hay que destacar la importancia de la palabra *local* recién utilizada, ya que no debemos olvidar que estamos tratando con sistemas no lineales, donde no es fácil obtener propiedades globales.

Veremos un procedimiento sistemático para encontrar un cambio de variables adecuado que lleve el sistema a la denominada *forma normal*. Para ello es necesario introducir algunas ideas y conceptos elementales en la denominada *Geometría Diferencial*. Muchos de los conceptos que presentaremos aquí no se profundizarán y el lector interesado puede encontrarlos desarrollados en [War71, Min62, DoC88].

El Teorema de Frobenius es la clave en este capítulo y su demostración, junto con la descripción de algunas aplicaciones a la Teoría de Control que no se verán aquí, se presenta en el Apéndice 9 en forma autocontenida. En el presente capítulo se incluyen sólo los conceptos necesarios para llegar a la formulación del Teorema de Frobenius y su utilización en el estudio de sistemas no lineales.

La presentación que aquí se realiza sigue la línea utilizada por [Isi89] y puede encontrarse también en [Kha96] y [Slo91].

En las siguientes secciones introduciremos un conjunto de ideas, conceptos y resultados propios de la Geometría Diferencial. El lector familiarizado con estos conceptos puede ir directamente a la sección 4.4.

4.1 Campos de Vectores

En el contexto de la Geometría Diferencial, los mapas que asocian a cada punto $x \in \mathcal{R}^n$ un vector n -dimensional se denominan **campos de vectores**. Los campos de vectores en \mathcal{R}^n forman un espacio vectorial de dimensión n y los identificaremos con los vectores columnas. Definamos el espacio dual de \mathcal{R}^n como

$$(\mathcal{R}^n)^* = \{h : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R} \mid h \text{ lineal y continua}\}$$

El espacio dual está formado por todas las funciones lineales (y continuas) de \mathcal{R}^n a valores reales. Es también un espacio vectorial de dimensión n . Llamaremos *campos de covectores* a los elementos $(\mathcal{R}^n)^*$ y los identificaremos con los vectores fila. Si $v \in \mathcal{R}^n$ y $h \in (\mathcal{R}^n)^*$, usaremos la notación $\langle h, v \rangle$ para $h(v)$, siendo \langle, \rangle el producto escalar en \mathcal{R}^n . Uno de los covectores más conocido es el *vector gradiente* de una función escalar de varias variables.

Los campos de vectores pueden sumarse y multiplicarse por escalares, formando, como ya se dijo, un espacio vectorial. Existen otras operaciones que involucran campos de vectores y que utilizaremos frecuentemente.

En las definiciones siguientes, $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ y $g = (g_1, \dots, g_n)^T$ serán campos de vectores y $\lambda : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ una función multivariable escalar.

Podemos calcular la derivada de λ en la dirección de (a lo largo de) g . El resultado es una nueva función escalar. Utilizaremos la siguiente notación

$$L_g \lambda(x) = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \cdot g(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \cdot g_i(x) \quad (4.1)$$

La expresión $L_f L_g \lambda(x)$ representa la derivación sucesiva de la función λ , primero en la dirección de g y luego en la de f y $L_f^k \lambda(x)$ denota la derivación de λ en la dirección de f k veces consecutivas con la convención $L_f^0 h_1 = h_1$.

A partir de dos campos de vectores podemos obtener un tercero con la siguiente definición

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \quad (4.2)$$

donde

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

La operación así definida se denomina **corchete de Lie** y tiene las siguientes propiedades

i) es lineal en cada una de las variables;

ii) es antisimétrica, es decir

$$[f, g] = -[g, f]$$

iii) satisface la **identidad de Jacobi**.

Se cumple que para f , g y h campos de vectores

$$[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$$

Existen varias propiedades que combinan las dos operaciones recién introducidas. Simplemente a modo de ejemplo citaremos la siguiente

$$L_{[f, g]} \lambda(x) = L_f L_g \lambda(x) - L_g L_f \lambda(x)$$

Dado que el corchete de Lie de dos campos de vectores es un nuevo campo, podemos realizar sucesivas operaciones con él. Para simplificar la escritura, utilizaremos la siguiente notación

$$ad_f g(x) = [f, g](x) ; ad_f^k g(x) = [f, ad_f^{k-1} g](x)$$

4.2 Cambios de coordenadas

En Control Lineal es muy frecuente utilizar cambios de coordenadas para obtener descripciones del sistema sencillas de estudiar, como las clásicas formas canónicas [Kai80]. Sea el sistema lineal

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (4.3)$$

Consideremos una función $T : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$, lineal, invertible y que se anule en el origen. Definamos el siguiente cambio de variables

$$z = Tx$$

Entonces se cumple que

$$\dot{z} = T\dot{x} = T(Ax + Bu) = TAT^{-1}z + TBu = \bar{A}z + \bar{B}u$$

con $\bar{A} = TAT^{-1}$ y TB . La salida queda

$$y = CT^{-1}z = \bar{C}z$$

con $\bar{C} = CT^{-1}$. La transformación T puede elegirse para que la matriz \bar{A} esté en la forma canónica de Jordan o tenga pocos elementos no nulos, etc.

Cuando el sistema es lineal, nos limitamos a cambios de coordenadas lineales, ya que de esa forma, la descripción del sistema en las nuevas coordenadas continua siendo lineal. En el caso

de sistemas no lineales, no hay motivo para limitarse a cambios de coordenadas lineales. Los cambios de coordenadas que manejaremos serán de la forma

$$z = \Phi(x) \quad (4.4)$$

con $\Phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ una función definida en un entorno \mathcal{U} del origen, diferenciable, invertible y con inversa diferenciable. Una función con tales características se denomina **difeomorfismo local**. Cuando el dominio de definición \mathcal{U} es todo el espacio, hablaremos de un difeomorfismo global.

Sea $z = [z_1, \dots, z_n] = [\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)]$. Hallemos la representación del sistema en las nuevas variables.

$$\dot{z}_1 = \frac{d\Phi_1(x)}{dt} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \left[f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \right] = L_f\Phi_1(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i}\Phi_1(x)u_i$$

Tenemos entonces que

$$\dot{z}_1 = L_f\Phi_1(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i}\Phi_1(x)u_i$$

$$\dot{z}_2 = L_f\Phi_2(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i}\Phi_2(x)u_i$$

⋮

$$\dot{z}_n = L_f\Phi_n(x) + \sum_{i=1}^m L_{g_i}\Phi_n(x)u_i$$

La descripción del sistema en las nuevas variables puede escribirse como

$$\dot{z} = \bar{f}(z) + \sum_{i=1}^m \bar{g}_i(z)u_i$$

$$y_j = \bar{h}_j(z), \quad j = 1, \dots, p$$

con

$$\bar{f}(z) = \begin{bmatrix} L_f\Phi_1(\Phi^{-1}(z)) \\ \vdots \\ L_f\Phi_n(\Phi^{-1}(z)) \end{bmatrix}, \quad \bar{g}_i(z) = \begin{bmatrix} L_{g_i}\Phi_1(\Phi^{-1}(z)) \\ \vdots \\ L_{g_i}\Phi_n(\Phi^{-1}(z)) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, m$$

$$\bar{h}_j(z) = h_j(\Phi^{-1}(z)) \quad j = 1, \dots, p$$

La invertibilidad de la función Φ es necesaria para poder recuperar la descripción original. La diferenciabilidad de Φ asegura que la nueva descripción mantiene las propiedades de suavidad en los nuevos campos de vectores \bar{f} , \bar{g} y \bar{h} .

Recordaremos aquí el siguiente resultado, que resulta de mucha utilidad en la práctica

Teorema 4.1 (Teorema de la Función Inversa) *Sea $\Phi : \mathcal{V} \subset \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$ una función diferenciable definida en un entorno del origen y sea*

$$A = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x) \right|_{x=0}$$

Si $\det(A) \neq 0$, entonces Φ es un difeomorfismo local; o sea que existe un entorno \mathcal{U} del origen tal que la restricción de Φ a dicho entorno es invertible, con inversa diferenciable. ♣

4.3 Teorema de Frobenius

En la presente sección introduciremos una serie de conceptos y resultados que son puramente matemáticos y que nos brindarán las herramientas para buscar, en forma sistemática, cambios de coordenadas con características particulares, que determinen que la nueva descripción del sistema sea sencilla de estudiar.

Los campos de vectores asocian a cada punto de \mathcal{R}^n un vector. Si tenemos varios campos de vectores con dominio común, cada punto $x \in \mathcal{R}^n$ tiene asignado un conjunto de vectores. Dicho conjunto de vectores define un subespacio vectorial. La primera definición que presentaremos será la siguiente:

Definición 4.1 (Distribución) *Dados los campos de vectores f_1, f_2, \dots, f_d definidos en un entorno \mathcal{U} del origen de \mathcal{R}^n , llamaremos distribución diferenciable al mapa diferenciable Δ definido en dicho entorno que a cada punto x del dominio le asocia el subespacio $\Delta(x)$ definido así*

$$\Delta(x) = \text{gen} \{f_1(x), f_2(x), \dots, f_d(x)\}$$

◇

Usaremos la notación $\Delta = \text{gen} \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$. Llamaremos dimensión de la distribución en x a la dimensión del subespacio $\Delta(x)$. Si la dimensión es la misma en todos los puntos de \mathcal{U} diremos que la distribución es no singular. Si la distribución es no singular y de dimensión d , existen d campos de vectores tales que, en cada punto x , son una base del subespacio $\Delta(x)$.

Sea $\Delta = \text{gen} \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$ y supongamos que $\dim(\Delta(x)) = d$. Dicha dimensión es máxima y diremos entonces que x es un punto regular de Δ . Puede probarse que existe un entorno de x formado enteramente por puntos regulares. Diremos que x es un punto singular cuando no es regular. No profundizaremos mucho más en el concepto de distribuciones. Una descripción amplia de las propiedades de estos entes matemáticos puede encontrarse en [War71].

Definición 4.2 Una distribución Δ es **involutiva** si

$$\forall f, g \in \Delta \implies [f, g] \in \Delta$$

◇

Una distribución involutiva es cerrada frente al corchete de Lie. Supongamos que tenemos una distribución

$$\Delta = \text{gen} \{f_1, f_2, \dots, f_d\}$$

Para verificar que es involutiva, alcanza con verificar que los siguientes corchetes de Lie pertenecen a la distribución

$$[f_i, f_j], \quad \forall i = 1, \dots, d, j = 1, \dots, d$$

Una distribución de dimensión 1 es obviamente involutiva, ya que $[f, f] = 0$ para cualquier campo f .

Dada una distribución Δ de dimensión d y un punto x de \mathcal{R}^n regular, definamos el siguiente conjunto

$$\Delta^\perp(x) = \{w \in (\mathcal{R}^n)^* \mid \langle w, f_i(x) \rangle = 0, i = 1, \dots, d\} \quad (4.5)$$

Para cada x donde está definido $\Delta(x)$ cada vector $v \in \mathcal{R}^n$ define un funcional lineal y continuo sobre $\Delta(x)$

$$h_{x,v}(f) = \langle v, f(x) \rangle$$

El conjunto recién definido está formado por todos los funcionales (covectores) que se anulan en el subespacio $\Delta(x)$ y se denomina habitualmente **anulador** de $\Delta(x)$. Con estas ideas, podemos definir el mapa que a cada $x \in \mathcal{R}^n$ le asocia el subespacio $\Delta^\perp(x)$.

Este nuevo mapa se denomina **co-distribución** y está formado por funcionales que actúan sobre los elementos de la distribución Δ . Puede probarse que la dimensión de la co-distribución es $n - d$, o sea que existen $n - d$ campos de covectores w_1, \dots, w_{n-d} tales que

$$\Delta^\perp = \text{gen} \{w_1, \dots, w_{n-d}\}$$

Con las definiciones anteriores estamos en condiciones de enunciar el Teorema de Frobenius, que es el resultado principal de esta sección. La demostración, junto con las definiciones necesarias para la misma, se presenta en el Apéndice A.

Teorema 4.2 (Frobenius) *Sea la distribución Δ no singular, de dimensión d , definida en un entorno \mathcal{U} del origen. Dicha distribución es involutiva si y sólo si existen $n - d$ funciones $\lambda_i : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{R}, i = 1, \dots, n - d$, diferenciables, tales que los covectores gradientes $d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}$ cumplen que $\Delta^\perp = \text{gen} \{d\lambda_1, \dots, d\lambda_{n-d}\}$* ♣

Las funciones λ_i que menciona el Teorema 4.2 verifican que

$$\langle d\lambda_i(x), f(x) \rangle = L_f \lambda_i(x) = 0 \quad \forall f \in \Delta, \quad \forall x \in \mathcal{U}, \quad i = 1, \dots, n - d$$

Esta propiedad será de gran utilidad para nuestro objetivo.

4.4 Sistemas SISO

En la Teoría del Control frecuentemente nos encontramos con sistemas que pueden describirse por un sistema de ecuaciones diferenciales con la siguiente forma

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (4.6)$$

$$y_i = h_i(x) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

siendo

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T \quad ; \quad u = [u_1, \dots, u_m]^T$$

los vectores de *estados* y *entradas* respectivamente, y_1, \dots, y_p las *salidas* y $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$, $G : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$, $h_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, p$, mapas definidos en un abierto $U \subset \mathcal{R}^n$, en general diferenciables (C^∞) y en algún caso, analíticos. Por comodidad, en lugar de trabajar con la función matricial G trabajaremos con las funciones vectoriales

$$g_i(x) = \begin{bmatrix} g_{1i}(x_1, \dots, x_n) \\ g_{2i}(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_{ni}(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, m$$

donde cada función escalar g_{ji} es diferenciable, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

Una gran cantidad de sistemas físicos pueden ser descritos por ecuaciones del tipo (4.6). Tradicionalmente los más estudiados han sido los *sistemas lineales*, donde los mapas f , g_i y h_i toman la siguiente forma

$$f(x) = Ax \quad , \quad g_i(x) = b_i \quad , \quad h_k(x) = c_k x \quad , \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, p \end{cases}$$

siendo A una matriz $n \times n$, b_i un vector columna de \mathcal{R}^n y c_j un vector fila de \mathcal{R}^n , por lo que el sistema puede escribirse así

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (4.7)$$

con $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$.

Al presentar el sistema (4.6) hemos hecho la suposición de que el número de salidas es igual al número de entradas. Esto no es limitante, como se verá en el desarrollo de la teoría y permite estudiar buena parte de los sistemas físicos. Estudiaremos en primer lugar los sistemas con una entrada y una salida (SISO), que permiten visualizar los conceptos principales de la teoría de linealización exacta. Luego extenderemos dichos conceptos al caso multivariable (MIMO).

4.4.1 Grado relativo

Supongamos en primer lugar que $m = 1$, o sea que estamos en el caso de una entrada y una salida.

Definición 4.3 *El sistema 4.6 tiene grado relativo r_1 en el punto x_o si*

1. $L_{g_1} L_f^k h_1(x) = 0$ para todo x en un entorno de x_o y para $k = 0, \dots, r_1 - 2$.

2. $L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x_o) \neq 0$ ◇

Cabe destacar expresamente que el grado relativo depende de la función h_1 . En muchos problemas, como el que trataremos en la segunda parte de esta tesis, la elección de la salida del sistema queda a nuestro criterio y eso influye en el grado relativo que podemos obtener y, como veremos más adelante en este capítulo, influye en nuestra capacidad de obtener una descripción sencilla del sistema.

Consideremos la salida del sistema y sus sucesivas derivadas evaluadas en $t = t_o$, asumiendo que el sistema parte de x_o

$$y_1(t_o) = h_1(x(t_o)) = h_1(x_o)$$

$$y_1^{(1)} = \frac{\partial h_1}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial h_1}{\partial x} f(x(t)) + \frac{\partial h_1}{\partial x} g_1(x(t)) u(t) = L_f h_1(x(t)) + L_{g_1} h_1(x(t)) u(t)$$

De la definición de grado relativo resulta que para tiempos t cercanos a t_o se cumple que

$$y_1^{(k)}(t) = L_f^k h_1(x(t)) \quad k = 1, \dots, r_1 - 2$$

Finalmente

$$y_1^{(r_1)}(t_o) = L_f^{r_1} h_1(x_o) + L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x_o) u(t_o)$$

El grado relativo es entonces la cantidad de veces que tenemos que derivar la salida para que, en $t = t_o$, la entrada aparezca explícita.

Ejemplo 4.1 *Veamos el grado relativo para el caso de el sistema lineal*

$$\dot{x} = Ax + bu$$

$$y = cx$$

con $f(x) = Ax$, $g(x) = b$ y $h(x) = cx$. Calculemos primero

$$L_f h(x) = \frac{\partial h}{\partial x} f(x) = cAx$$

De donde

$$L_f^k h(x) = cA^k x \Rightarrow L_g L_f^k h(x) = cA^k b$$

El grado relativo r_1 debe verificar que

$$cA^k b = 0 \quad k = 1, \dots, r_1 - 1 \quad ; \quad cA^{r_1-1} b \neq 0$$

De la Teoría de Control Lineal sabemos que r_1 coincide con el exceso de polos-ceros de la transferencia del sistema [Kai80]

$$H(s) = c(sI - A)^{-1} b$$

de ahí el nombre. ♠

Un par de consecuencias de la definición de grado relativo son las siguientes [Isi89]:

Lema 4.3 *El siguiente conjunto de covectores*

$$\left\{ dh_1(x_o), dL_f h_1(x_o), \dots, dL_f^{r_1-1} h_1(x_o) \right\}$$

es linealmente independiente. ♣

Lema 4.4 *Para toda función Φ real definida en \mathcal{U} las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

$$1. \quad L_{g_1} \Phi(x) = L_{g_1} L_f \Phi(x) = \dots = L_{g_1} L_f^k \Phi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$$

$$2. \quad L_{g_1} \Phi(x) = L_{ad_f g_1} \Phi(x) = \dots = L_{ad_f^k g_1} \Phi(x) = 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}. \quad \clubsuit$$

El lema 4.3 muestra que necesariamente se tiene que $r_1 \leq n$. Llamemos \mathcal{G} a la distribución generada por el campo g_1 en un entorno del punto x_o . Consideremos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= h_1(x) \\ \Phi_2(x) &= L_f h_1(x) \\ &\vdots \\ \Phi_{r_1}(x) &= L_f^{r_1-1} h_1(x) \end{aligned}$$

cuyos gradientes son linealmente independientes (lema 4.3) y los primeros $r_1 - 1$ pertenecen a \mathcal{G}^\perp por la definición de grado relativo. Como \mathcal{G} es involutiva, el Teorema de Frobenius nos asegura la existencia de $n - 1$ funciones diferenciables que generan \mathcal{G}^\perp , por lo que podemos completar el conjunto $\Phi_1, \dots, \Phi_{r_1-1}$ con funciones que llamaremos $\Phi_{r_1+1}, \dots, \Phi_n$ hasta obtener una base de \mathcal{G}^\perp . Dichas funciones verifican que

$$L_{g_1} \Phi_i(x) = 0 \quad i = r_1 + 1, \dots, n \quad \text{para } x \text{ cercano a } x_o \quad (4.8)$$

Además, podemos elegir las de forma tal que el siguiente mapa

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1(x) \\ \Phi_2(x) \\ \vdots \\ \Phi_n(x) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

sea un cambio de coordenadas en un entorno de x_o . La búsqueda de las funciones complementarias $\Phi_{r_1+1}, \dots, \Phi_n$ no es sencilla en general e implica la resolución de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales. Si $r_1 = n$, el conjunto $\{h_1, L_f h_1, \dots, L_f^{n-1} h_1\}$ nos define directamente un cambio de coordenadas.

Utilizando el cambio de coordenadas definido en (4.9), escribamos la descripción del sistema en las nuevas coordenadas. Calculemos detalladamente \dot{z}_1 .

$$\dot{z}_1 = \frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial x} \dot{x} = L_f \Phi_1 + L_{g_1} \Phi_1 u_1 = L_f \Phi_1 = z_2$$

donde hemos usado que $\Phi_1 \in \mathcal{G}^\perp$. Repitiendo el razonamiento, llegamos a que

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_1-1} &= z_{r_1} \end{aligned}$$

¿Qué sucede con \dot{z}_{r_1} ?

$$\dot{z}_{r_1} = \frac{d\Phi_{r_1}}{dt} = \frac{\partial\Phi_{r_1}}{\partial x} \dot{x} = L_f \Phi_{r_1} + L_{g_1} \Phi_{r_1} u_1 = L_f \Phi_{r_1} + \left(L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1 \right) u_1 \triangleq b(z) + a(z) u_1$$

Recordemos que por la definición de grado relativo se cumple que $a(\Phi(x_o)) \neq 0$ lo cual implica, por la continuidad, que existe un entorno de $\Phi(x_o)$ en el cual $a(z)$ es invertible. Para completar la descripción, observemos que para las últimas $n - r_1$ funciones de cambio de coordenadas se cumple la condición (4.8), lo cual implica que

$$\dot{z}_j = L_f \Phi_j + L_{g_1} \Phi_j u_1 = L_f \Phi_j \triangleq q_j(z) \quad j = r_1 + 1, \dots, n$$

Resumiendo, la descripción del sistema en las nuevas coordenadas es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_1-1} &= z_{r_1} \\ \dot{z}_{r_1} &= b(z) + a(z) u_1 \\ \dot{z}_{r_1+1} &= q_{r_1+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{aligned} \tag{4.10}$$

Las ecuaciones (4.10), junto con la ecuación de salida $y_1 = z_1$ definen la denominada **forma normal**, que sirve de punto de partida para la aplicación de técnicas no lineales de control. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el cambio de coordenadas Φ es tal que lleva al punto x_o al origen $z = 0$, por lo que asumiremos que la forma normal describe al sistema en un entorno del origen.

El esquema de la figura 4.1 muestra la forma normal del sistema (4.6). En dicha figura pueden identificarse un bloque lineal (una cadena de integradores) y unos bloques no lineales, relacionados con la entrada u_1 y con los últimos $n - r_1$ estados. Obsérvese que la entrada u_1 no afecta en forma directa a dichos estados.

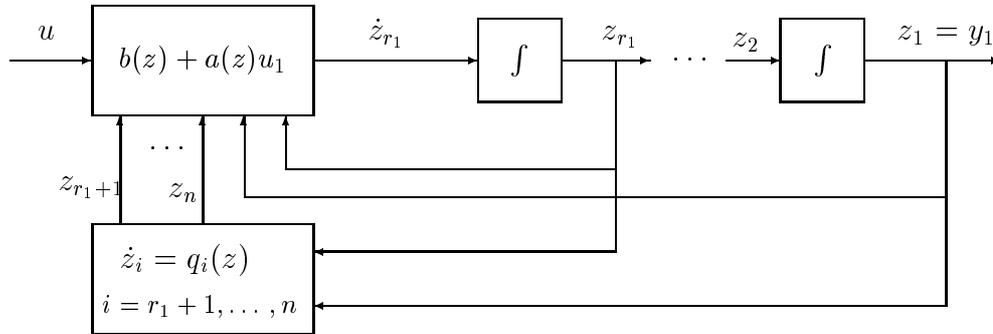


Figura 4.1: Forma normal para un sistema SISO

4.4.2 Linealización exacta

Lo que haremos ahora, una vez que hemos encontrado la forma normal del sistema, es buscar una realimentación de estados que determine que el sistema se describa por un conjunto de ecuaciones lineales o casi lineales.

Dada la forma normal (4.10), supongamos en primera instancia que $r_1 = n$. Consideremos la siguiente realimentación de estados¹

$$u_1 = \alpha(z) + \beta(z)v_1 \tag{4.11}$$

siendo v_1 una entrada de referencia. Como el grado relativo es máximo, la forma normal es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= b(z) + a(z)u_1 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Elijamos

$$\alpha(z) = -\frac{b(z)}{a(z)} \quad , \quad \beta(z) = \frac{1}{a(z)}$$

Entonces la realimentación de estados es

$$u_1 = \frac{1}{a(z)} [-b(z) + v_1] = \frac{1}{a(\Phi(x))} [-b(\Phi(x)) + v_1]$$

¹La realimentación está expresada en término de los estados z .

y la descripción del sistema con la realimentación incorporada es

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{n-1} &= z_n \\ \dot{z}_n &= v_1 \end{aligned} \tag{4.13}$$

que es lineal y controlable [Kai80], con matrices correspondientes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

La salida del sistema es $y_1 = Cz$ con

$$C = [1 \quad \dots \quad 0]$$

O sea que cuando el grado relativo es máximo, el sistema admite un cambio de coordenadas y una realimentación de estados que nos lleva a una descripción lineal y controlable. Decimos en ese caso que el sistema es **linealizable entrada-estados**.

Cuando el grado relativo es menor que n la misma realimentación de estados propuesta en (4.11) nos lleva el sistema a la descripción

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= z_3 \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_1-1} &= z_{r_1} \\ \dot{z}_{r_1} &= v_1 \\ \dot{z}_{r+1} &= q_{r+1}(z) \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= q_n(z) \end{aligned} \tag{4.14}$$

que es *casi* lineal, ya que consiste en dos subsistemas, uno lineal de dimensión r_1 y otro no necesariamente lineal. Descompongamos el vector z en dos partes

$$z = \begin{bmatrix} \zeta \\ \eta \end{bmatrix}$$

Si llamamos

$$q(z) = \begin{bmatrix} q_{r+1}(z) \\ \vdots \\ q_n(z) \end{bmatrix}$$

la ecuación (4.14) se escribe así

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1 &= z_2 \\
 \dot{z}_2 &= z_3 \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r_1-1} &= z_{r_1} \\
 \dot{z}_{r_1} &= v_1 \\
 \dot{\eta} &= q(\zeta, \eta)
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

La dinámica de la porción η del vector de estados no es afectada directamente por la entrada y las características del sistema completo dependen en buena medida de la evolución del vector η .

Definición 4.4 *Llamaremos **dinámica de los ceros** a la determinada por la siguiente ecuación*

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t)) \tag{4.16}$$

◇

Como ya dijimos, el vector η depende indirectamente de la entrada u_1 y no influye para nada en la salida $y_1 = z_1$. Si miramos el sistema desde el punto de vista entrada-salida y consideramos, por ejemplo, el problema de hallar v_1 que anule y_1 para todo instante, dicho problema se resuelve en forma fácil, ya que la condición $y_1(t) = 0$ para todo $t \geq t_o$ implica

$$z_1 = \dots = z_{r_1-1} = v_1 = 0$$

La dinámica del sistema se reduce entonces a la de los ceros y la misma no puede ser observada simplemente mirando la salida, que en este caso sería idénticamente nula. Eso puede generar inconvenientes cuando la dinámica (4.16) no es estable.

Para el caso de un sistema lineal, la dinámica de los ceros es lineal y los modos son los ceros del numerador de la transferencia del sistema, de ahí el nombre [Isi89].

Por lo expuesto anteriormente, resulta claro que si el grado relativo del sistema es máximo, entonces podemos encontrar un cambio de coordenadas y una realimentación de estados que asocien al sistema una forma normal lineal y controlable. Cuando el grado relativo no es máximo, el resultado no es tan agradable, pero aún así puede obtenerse una forma normal con una porción lineal y controlable y otra porción vinculada a la denominada dinámica de los ceros. Como vimos, el grado relativo depende de la función h_1 de salida, por lo que cabe preguntarse bajo qué condiciones existe una función de salida que determine que el grado relativo sea máximo. La respuesta está en el siguiente teorema cuya demostración, basada esencialmente en el Teorema de Frobenius, puede encontrarse en [Isi89], Cap. 4.

Teorema 4.5 *Sea el sistema*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_1$$

Existe una función de salida h_1 en el entorno del punto x_o que de un grado relativo máximo en x_o si y sólo si

1. La matriz

$$\begin{bmatrix} g_1(x_o) & ad_f g_1(x_o) & \dots & ad_f^{m-1} g_1(x_o) \end{bmatrix}$$

tiene rango completo n .

2. La distribución

$$\Delta = \text{gen} \{ g_1, ad_f g_1, \dots, ad_f^{m-2} g_1 \}$$

es involutiva en un entorno de x_o .



Cuando el teorema anterior no se cumple, entonces el sistema sólo puede ser parcialmente linealizado. Se dice en ese caso que el sistema es linealizable entrada-salida. Se debe poner especial cuidado en estudiar la dinámica de los ceros.

4.5 Sistemas MIMO

En esta sección extenderemos los conceptos y definiciones estudiados para el caso SISO al problema multivariable. Salvo algunos detalles concretos, la extensión es intuitiva y directa.

4.5.1 Grado relativo

La versión multivariable del grado relativo se obtiene extendiendo la definición 4.3 con cierto cuidado, ya que debemos contemplar el efecto de las diferentes entradas en las distintas salidas. La idea conceptual sigue siendo la misma.

Definición 4.5 El sistema 4.6 tiene grado relativo $[r_1, \dots, r_m]$ en el punto x_o si

1.

$$L_{g_j} L_f^k h_i(x) = 0$$

para todo x en un entorno de x_o y para $j = 1, \dots, m; i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, r_i - 1$.

2. La matriz $A(x)$ es no singular en $x = x_o$

$$A(x) = \begin{bmatrix} L_{g_1} L_f^{r_1-1} h_1(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_1-1} h_1(x) \\ L_{g_1} L_f^{r_2-1} h_2(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_2-1} h_2(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{g_1} L_f^{r_m-1} h_m(x) & \dots & L_{g_m} L_f^{r_m-1} h_m(x) \end{bmatrix}$$



La versión multivariable del lema 4.3 es

Lema 4.6 *Supongamos que el sistema tiene grado relativo (r_1, \dots, r_m) en x_o . Entonces los siguientes vectores gradientes*

$$dL_f^k h_i(x_o) \quad \text{para } i = 1, \dots, m; \quad k = 0, \dots, r_i - 1$$

son linealmente independientes. ♣

Un consecuencia inmediata del lema anterior es que

$$r = \sum_{i=1}^m r_i \leq n$$

4.5.2 Linealización exacta

Con la misma idea que en el caso SISO, para cada salida h_i , podemos definir el siguiente conjunto de funciones

$$\begin{aligned} \Phi_1^i(x) &= h_i(x) \\ \Phi_2^i(x) &= L_f h_i(x) \\ &\vdots \\ \Phi_{r_i}^i(x) &= L_f^{r_i-1} h_i(x) \end{aligned} \tag{4.17}$$

A partir de dichas funciones y utilizando el lema anterior, podemos obtener $r - m$ gradientes linealmente independientes. Dichos gradientes, por la definición de grado relativo, pertenecen al anulador de la distribución

$$\Delta = \text{gen} \{g_1, \dots, g_m\}$$

Miremos primero el caso $r = n$. Tenemos entonces $n - m$ covectores linealmente independientes en el anulador de Δ , o sea que tenemos una base de Δ^\perp .

Miremos el siguiente mapa $z = \Phi(x)$

$$z_1^1 = \Phi_1^1(x), \dots, z_{r_1}^1 = \Phi_{r_1}^1(x)$$

$$z_1^2 = \Phi_1^2(x), \dots, z_{r_2}^2 = \Phi_{r_2}^2(x)$$

$$\vdots$$

$$z_1^m = \Phi_1^m(x), \dots, z_{r_m}^m = \Phi_{r_m}^m(x)$$

El cambio de coordenadas definido por las funciones (4.17) permite pasar a la **forma normal** MIMO que es muy similar al caso SISO

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= z_{r_i}^i \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= b_i(z) + \sum_{j=1}^m a_{ij}(z) u_j \end{aligned} \tag{4.18}$$

Con la misma idea que en el caso de una entrada y una salida, definimos la siguiente realimentación de estados

$$u = A^{-1}(z) [-b(z) + v] \quad (4.19)$$

con $b = (b_1, \dots, b_m)^T$, A la matriz de término genérico $((a_{ij}))$ y $v = [v_1, \dots, v_m]^T$. La matriz A es invertible en un entorno de $z = 0$ por la segunda condición requerida en la definición del grado relativo, ya que

$$a_{ij}(x) = L_{g_j} L_f^{r_i-1} h_i(x)$$

Con la realimentación, la forma normal resulta ser lineal y controlable

$$\begin{aligned} \dot{z}_1^i &= z_2^i \\ &\vdots \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= z_{r_i}^i \quad i = 1, \dots, m \\ \dot{z}_{r_i-1}^i &= v_i \end{aligned} \quad (4.20)$$

La extensión del teorema 4.5 para sistemas con más de una entrada requiere de algunos cuidados especiales. Para sistemas SISO se cumple que la distribución generada por el único campo g_1 es automáticamente involutiva. Cuando tenemos m campos, g_1, \dots, g_m , hay que introducir hipótesis sobre la distribución generada por ellos, de forma de poder asegurar la existencia de un conjunto de m funciones de salida que permitan linealizar el sistema.

Dados los campos de vectores g_1, \dots, g_m , definamos las siguientes distribuciones

$$\mathcal{G}_0 = \text{gen} \{g_1, \dots, g_m\}$$

$$\mathcal{G}_1 = \text{gen} \{g_1, \dots, g_m, \text{ad}_f g_1, \dots, \text{ad}_f g_m\}$$

$$\mathcal{G}_i = \text{gen} \left\{ \text{ad}_f^k g_j, k = 1, \dots, i, j = 1, \dots, m \right\} \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

El teorema que brinda las condiciones necesarias y suficientes para la linealización del sistema se presenta a continuación. La demostración puede encontrarse en [Isi89].

Teorema 4.7 *Sea el sistema*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u_1$$

Existen m funciones de salida h_1, \dots, h_m tales que el grado relativo en el punto x_o es (r_1, \dots, r_m) con

$$r = \sum_{i=1}^m r_i = n$$

(o sea que existen un cambio de coordenadas y una realimentación de estados que nos brinden una descripción lineal y controlable del sistema) si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones

1. Las distribuciones \mathcal{G}_i tienen dimensión constante en un entorno de x_0 para $i = 0, 1, \dots, n-1$.
2. La distribución \mathcal{G}_{n-1} tiene dimensión n .
3. Las distribuciones \mathcal{G}_i son involutivas para $i = 0, 1, \dots, n-2$.



Cuando no se cumple la condición $r = n$, sólo una porción de los estados pueden ser linealizados. La forma normal es entonces

$$\begin{aligned}
 \dot{z}_1^i &= z_2^i \\
 &\vdots \\
 \dot{z}_{r_i-1}^i &= z_{r_i}^i \\
 \dot{z}_{r_i-1}^i &= v_i \\
 \dot{\eta} &= q(\zeta, \eta)
 \end{aligned} \quad i = 1, \dots, m \tag{4.21}$$

donde hemos utilizado que $z = [\zeta, \eta]^T$ y $\zeta = [\zeta^1; \zeta^2; \dots; \zeta^r]$. La dinámica de los ceros es

$$\dot{\eta}(t) = q(0, \eta(t))$$

4.6 Conclusiones

La linealización exacta consiste en encontrar un cambio de coordenadas y una realimentación de estados que nos permitan obtener una descripción sencilla del sistema a estudio. Bajo ciertas hipótesis referidas a los campos f, g_1, \dots, g_m , pueden definirse m funciones de salida de forma tal que sea sencillo y sistemático encontrar tanto el cambio de coordenadas como la realimentación de estados. Cuando dichas condiciones no se cumplen, aparece la denominada dinámica de los ceros y el estudio de sus características particulares, fundamentalmente referidos a su estabilidad, brinda un conocimiento del sistema que deberá ser utilizado en el diseño de los controladores buscados.

Una de las críticas más extendidas que se realizan a la linealización exacta está referida al hecho de que para obtener la descripción lineal se realiza una *inversión de la planta*, ya que en cierto sentido los pasos seguidos para la linealización cancelan las no linealidades. Asimismo la elección del cambio de coordenadas y de la realimentación de estados se basa en el conocimiento exacto de los campos involucrados en la dinámica del sistema, por lo que en este contexto no se habla de robustez².

La forma normal, si bien es nuestro punto final cuando hablamos de linealización exacta,

²Las técnicas de control que parten de sistemas ya linealizados incluyen la robustez como una perturbación aditiva en el sistema [Kha96].

sirve de punto de partida para la aplicación de técnicas no lineales de control como *backstepping* y *control deslizante*, que aplican técnicas de Liapunov sobre la forma normal. Numerosos trabajos en los últimos años se han dedicado a la síntesis de controladores estabilizantes para sistemas descritos en su forma normal, como los trabajos de P. Kokotovic mencionados en la Bibliografía.

Parte II

Capítulo 5

Descripción del sistema a estudio

5.1 Introducción

Para mostrar la aplicación de las diferentes técnicas no lineales de control, junto con sus ventajas y desventajas, vamos a trabajar sobre un modelo no lineal sencillo. El mismo resulta de la descripción de la dinámica de un sistema físico que representa un experimento de control de vuelo. El conjunto, formado por una pequeña turbina adosada a un soporte giratorio, permite estudiar, a nivel de laboratorio, dinámicas de vuelo similares a las de un avión de propulsión (del tipo F-18 o X-31) en vuelo directo o un avión Harrier en suspensión [Gal90].

Un ejemplar de tal dispositivo se encuentra en el laboratorio del Departamento de Control y Sistemas Dinámicos del Instituto Tecnológico de California (CDS-Caltech) y cuenta con las interfaces necesarias para poder poner en práctica diferentes tipos de controladores, sencillos o complejos. La descripción de la dinámica y los valores numéricos utilizados en el presente trabajo han sido obtenidos de los reportes técnicos del CDS, surgidos de los numerosos experimentos realizados para el modelado y la identificación del sistema (ver por ejemplo [Cho94], [Mur96]) .

El sistema ha sido utilizado por investigadores y estudiantes del CDS para la prueba de diferentes técnicas lineales y no lineales de control y existen reportes y artículos que documentan las actividades realizadas ([Kan95], [Bod95], [Nie97], [JYu98]). Algunos de dichos trabajos han sido repetidos a nivel de simulaciones en esta tesis, en tanto que se han diseñado nuevos controladores que han sido probados numéricamente y que quizás algún día puedan ser ensayados en el laboratorio.

5.2 Modelado

El sistema formado por la turbina y el soporte puede verse en la figura 5.1(a). El soporte consiste en un sistema de tipo pantográfico con cuatro barras articuladas que impone que la turbina gire siempre respecto a un eje horizontal y se muestra en la figura 5.1(b). La turbina se encuentra dentro de una especie de tobera que canaliza el aire impulsado. El contrapeso compensa la acción del peso de la propia turbina, permitiendo usar así toda su potencia en las

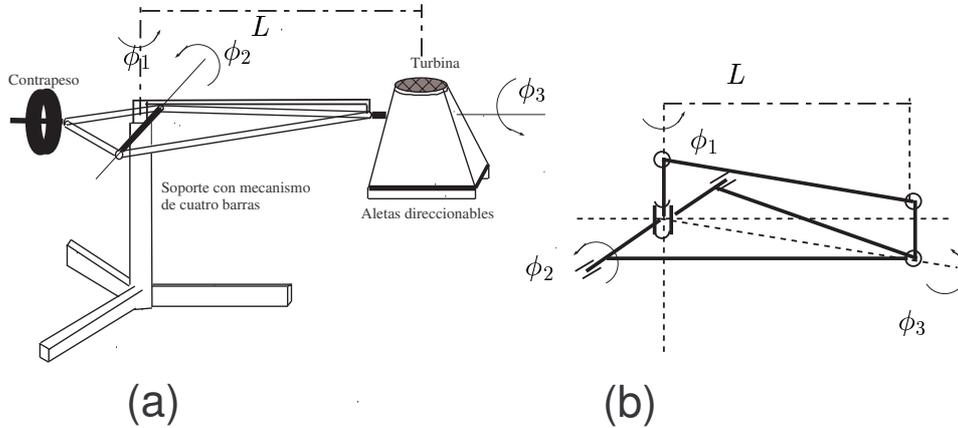


Figura 5.1: Esquema de la turbina y su soporte

acciones de control. Dichas acciones se generan mediante dos paletas al final de la tobera, que trabajan conjuntamente y direccionan el flujo de salida según los diferentes modos que pueden apreciarse en la figura 5.2. Estos modos permiten realizar maniobras agresivas de frenado y de inversión del movimiento. El modelado del sistema puede realizarse mediante la aplicación

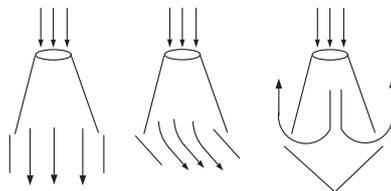


Figura 5.2: Modos de direccionado del flujo de salida

de las ecuaciones de Lagrange al sistema compuesto por la turbina, la tobera, el soporte y el contrapeso. Por este procedimiento se obtiene una descripción dinámica con la siguiente forma

$$M(X)\ddot{X} + C(X, \dot{X})\dot{X} + N(X) = T(X, F) \quad (5.1)$$

donde X denota el vector de estados $(\phi_1, \dot{\phi}_1, \phi_2, \dot{\phi}_2, \phi_3, \dot{\phi}_3)^T$. Las coordenadas (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) son respectivamente el azimut, la altura y el ángulo de giro de la turbina y se miden en radianes. M es la matriz de inercia generalizada; C es la matriz de Coriolis; N es el vector de términos potenciales y T es el vector de torques y fuerzas aplicadas. La deducción y la expresión final para la ecuación (5.1) puede encontrarse en [Cho94] y [Kan95].

Un modelo más sencillo puede obtenerse si se ignora la dinámica del soporte. Llamémosle

L a la distancia del eje central del soporte al punto de apoyo de la turbina. La turbina sólo puede moverse en una esfera de radio L . Para simplificar, estudiaremos la dinámica que resulta de proyectar localmente el movimiento de la turbina en la esfera sobre un plano tangente a la misma. El sistema entonces puede escribirse en función de las siguientes coordenadas

$$\begin{aligned}x &= L\phi_1 \\y &= L\phi_2 \\ \theta &= \phi_3\end{aligned}$$

Las nuevas variables x y y se miden en metros. El modelo no lineal obtenido, conocido como *modelo planar*, es bastante simple y continua siendo representativo de las principales características dinámicas del sistema. Para la derivación del modelo planar, nos basaremos en la figura 5.3. La acción de la turbina se modela como dos fuerzas: una colineal con el eje de la

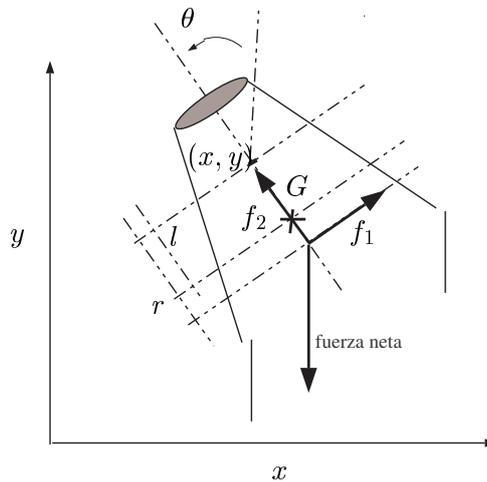


Figura 5.3: Modelo planar para el sistema

tobera (f_2) y otra perpendicular al mismo (f_1), aplicadas en un punto que dista r del punto (x, y) donde encaja el soporte a la tobera. Dicho punto está a una distancia l del centro de masa G . Las ecuaciones que describen al sistema pueden calcularse mediante las ecuaciones de Newton, resultando en el siguiente sistema

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= f_1 \cos(\theta) - f_2 \sin(\theta) - d\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -mg + f_1 \sin(\theta) + f_2 \cos(\theta) - d\dot{y} \\ J\ddot{\theta} &= -mgl \sin(\theta) + r f_1 \end{cases} \quad (5.2)$$

Los significados y valores de los diferentes parámetros que aparecen en la ecuación (5.2) pueden encontrarse en la Tabla 5.1. Redefiniremos las entradas para lograr que el origen del sistema sea un punto de equilibrio con entrada nula. Haremos $u_1 = f_1$ y $u_2 = f_2 - mg$, por lo que el

m	masa del sistema turbina-tobera	4.0 kg
r	distancia de las aletas al punto pivot	0.26 m
l	distancia del centro de masa al punto pivot	0.0213 m
g	constante de gravedad	9.8 $\frac{m}{seg^2}$
d	coeficiente de fricción viscosa	0.1 $\frac{kg}{s}$
J	momento de inercia respecto al eje θ	0.0475 kg.m ²
L	distancia del punto de apoyo de la turbina al eje del soporte	1.435 m

Tabla 5.1: Descripción de los parámetros del modelo planar

sistema con el que trabajaremos en esta Tesis es

$$\begin{cases} m\ddot{x} &= -mg \sin \theta - d\dot{x} + u_1 \cos(\theta) - u_2 \sin(\theta) \\ m\ddot{y} &= mg(\cos \theta - 1) - d\dot{y} + u_1 \sin(\theta) + u_2 \cos(\theta) \\ J\ddot{\theta} &= -mgl \sin(\theta) + ru_1 \end{cases} \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) tienen la forma particular afín que mencionamos en el capítulo 1

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u \quad (5.4)$$

donde $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}]^T$ es el vector de estados y

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -g \sin(\theta) - \frac{d}{m} \dot{x} \\ \dot{y} \\ g(\cos(\theta) - 1) - \frac{d}{m} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ -\frac{mgl}{J} \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\cos(\theta)}{m} & -\frac{\sin(\theta)}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{\sin(\theta)}{m} & \frac{\cos(\theta)}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

5.3 Objetivos del control

Nuestro objetivo será regular el sistema. Además, intentaremos hacer dicha regulación mediante realimentación de estados, es decir, mediante una ley de control de la forma $u = \phi(x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta})$. Para obtener un índice que permita en cierto sentido comparar las diferentes técnicas de control aplicadas, definiremos un costo cuadrático asociado a la condición inicial y a la acción de control, como el que vimos en el capítulo 3

$$\mathcal{J} = \int_0^{+\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T u) dt \quad (5.5)$$

Hemos elegido un peso unitario para la acción de control y hemos tomado la siguiente matriz de peso de la trayectoria

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

	x	\dot{x}	y	\dot{y}	θ	$\dot{\theta}$
x_{o1}	0.1	0	0.1	0	$0.1 \frac{\pi}{2}$	0
x_{o2}	1	1	1	0	$-0.1 \frac{\pi}{2}$	0
x_{o3}	3	3	3	0	$-0.9 \frac{\pi}{2}$	0
x_{o4}	5	5	5	0	$-0.9 \frac{\pi}{2}$	0

Tabla 5.2: Condiciones iniciales para test

que pesa más las coordenadas de posición lineales y menos la coordenada angular y las velocidades.

El objetivo de control es lograr que el origen sea un atractor asintótico y que su región de atracción incluya un conjunto predeterminado de condiciones iniciales. Dicho conjunto, que se muestra en la Tabla 5.2, está formado por dos condiciones *cercanas* al origen, que es de esperar que no planteen dificultades, y dos condiciones iniciales *más exigentes*, que están bastante alejadas del origen y que incluso plantean desafíos interesantes en el sistema físico en el sentido de que el sistema comienza moviéndose en un sentido opuesto al de la salida del aire. Cabe mencionar que las condiciones iniciales x_{o3} y x_{o4} se utilizarán para estudiar mediante simulaciones la capacidad de regulación de los controladores que se hallarán en la segunda parte de esta Tesis, pero no representan condiciones de trabajo factibles en la práctica, dado que escapan del rango de funcionamiento del sistema real. Para visualizar el desempeño del sistema realimentado, graficaremos la evolución temporal de los estados x , y y θ .

5.4 Sistema linealizado

Algunas de las aplicaciones que se estudiarán en la presente Tesis se basan en el conocimiento de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema funcionando en las cercanías del origen. Dichas ecuaciones se obtienen al linealizar el sistema en torno al punto de equilibrio $[x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}]^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$. La descripción resulta ser lineal y autónoma, de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu$$

con

$$A = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0; u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{mgl}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \left. \frac{\partial f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x}) \cdot u}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=0; u=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

Capítulo 6

Linealización Jacobiana

En este capítulo mostraremos como utilizar el Método Indirecto de Liapunov visto en la sección 2.5 para la estabilización de un sistema no lineal. La idea consiste en estabilizar el sistema lineal que aproxima al original en un entorno del origen. Esta técnica es relativamente sencilla de aplicar y permite obtener una realimentación estática lineal de estados.

En la primera sección presentaremos la idea general y en la segunda la aplicación concreta.

6.1 Introducción

Consideremos el sistema

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \quad (6.1)$$

donde \mathbf{x} es el vector de estados y u es la señal de control. Supongamos que el origen es un punto de equilibrio del sistema, o sea que $f(0, 0) = 0$.

Sean

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0; u=0}, \quad B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\mathbf{x}=0; u=0}$$

Podemos re-escribir el sistema (6.1)

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu + [f(\mathbf{x}, u) - A\mathbf{x} - Bu] = A\mathbf{x} + Bu + \tilde{f}(\mathbf{x}, u)$$

donde $\tilde{f}(\mathbf{x}, u)$ verifica que

$$\tilde{f}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{x}}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(0, 0) = 0$$

Por lo tanto

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + Bu \quad (6.2)$$

es una aproximación de primer orden del sistema (6.1).

Si el par (A, B) es controlable, entonces podemos diseñar una realimentación de estados $u = -Kx$ tal que el origen del sistema lineal en lazo cerrado sea globalmente asintóticamente estable [Kai80].

$$\dot{\mathbf{x}} = (A - BK)\mathbf{x}$$

Lo anterior es equivalente a que la matriz $A - BK$ sea Hurwitz. La realimentación de estados puede ser elegida de forma de satisfacer en forma óptima un compromiso entre la trayectoria obtenida y la acción de control ejercida por el regulador (esto se conoce como Problema LQR o del Regulador Óptimo Lineal).

Consideremos ahora el sistema original (6.1) junto con la realimentación

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, -K\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x})$$

Estudiemos la linealización del sistema en torno al origen

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \mathbf{x}}(0) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{x}} = A - BK$$

El Método Indirecto de Liapunov asegura que, al ser el origen asintóticamente estable para el sistema lineal, lo es también para el sistema no lineal. Más aún, el Teorema de Hartman-Grobman establece que las dinámicas de ambos sistemas son conjugadas en un entorno suficientemente pequeño del origen [Kha96, Har64, Lew81].

6.2 Aplicación

Consideremos el modelo linealizado en torno al origen obtenido en el capítulo 5

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{mgl}{J} & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

Mediante la técnica LQR presentada en el capítulo 3, se diseñó el siguiente controlador

$$K_1 = \begin{bmatrix} -3.1623 & -2.7951 & 0.0000 & 0.0000 & 6.6495 & 1.9662 \\ 0.0000 & 0.0000 & 3.1623 & 5.0292 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

Los autovalores de la matriz de estados del sistema realimentado $A - BK$ son $-2.6188 \pm 3.6828i$, $-2.4253 \pm 1.3206i$, $-0.6411 \pm 0.6160i$. Las siguientes gráficas muestran las respuestas obtenidas para las distintas condiciones iniciales. Puede observarse que para condiciones iniciales cercanas al origen (x_{o1}, x_{o2}) , el regulador lineal se comporta aceptablemente (figuras 6.1 y 6.2), con un tiempo de establecimiento de unos 3 segundos. Las trayectorias para la condición inicial x_{o3} se muestran en la figura 6.3. El tiempo de establecimiento crece a unos 12 segundos y las oscilaciones presentes son de tal magnitud que hacen inaceptable el desempeño. Para la condición inicial x_{o4} el sistema diverge (figura 6.4).

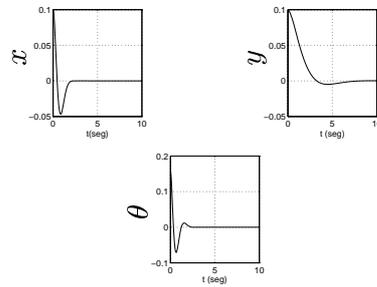


Figura 6.1: Respuesta del sistema controlado mediante linealización jacobiana para la condición inicial x_{o1}

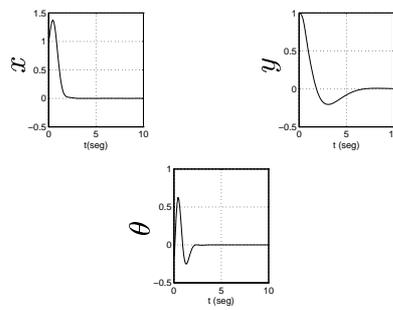


Figura 6.2: Respuesta del sistema controlado mediante linealización jacobiana para la condición inicial x_{o2}

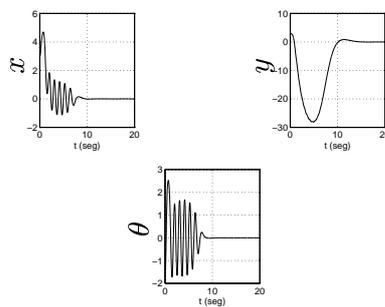


Figura 6.3: Respuesta del sistema controlado mediante linealización jacobiana para la condición inicial x_{o3}

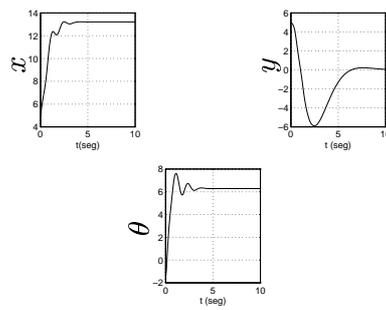


Figura 6.4: Respuesta del sistema controlado mediante linealización jacobiana para la condición inicial x_{o4}

Capítulo 7

Sistemas Lineales Dependientes de Parámetros

En este capítulo estudiaremos el caso particular de sistemas que admiten una descripción cuasi-lineal en el sentido siguiente: sus ecuaciones de estado pueden escribirse en forma lineal, con matrices que dependen de un conjunto de parámetros que pueden o no variar con el tiempo.

7.1 Introducción

Consideremos el sistema representado por la siguiente ecuación

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u, \rho) \quad (7.1)$$

siendo \mathbf{x} el vector de estados, u el vector de entradas y ρ un vector de parámetros. La dinámica depende entonces no sólo del estado y las entradas, sino también del valor instantáneo de los parámetros. Los parámetros pueden ser estáticos o variantes en el tiempo, y conocidos o no, lo que determina el enfoque a aplicar para su estudio.

Cuando nos enfrentamos a parámetros desconocidos a priori, y que no podemos medir, podemos considerarlos como una perturbación al sistema y utilizar herramientas de control robusto, para lo cual puede ser necesario que la dependencia del sistema con respecto a los parámetros sea de una forma particular (por ejemplo, afin o LFT) [Apk96]. Cuando mediante una medida podemos tener acceso al valor instantáneo de los parámetros, podemos aplicar técnicas que incorporen explícitamente dicha información.

Sistemas dependientes de parámetros aparecen frecuentemente en la realidad y han sido ampliamente estudiados. Los parámetros pueden ser coeficientes que aparecen en la descripción del sistema, parte del vector de estados o incluso algunas de las entradas. Normalmente se conoce el rango y la forma de variación de los parámetros y dicha información se tiene en cuenta en el momento de diseñar el controlador.

Para estudiar el caso más general, es decir, cuando los parámetros varían en el tiempo, las diversas técnicas se basan directamente en los Teoremas de Liapunov. El Método de Ganancia

Programada (Gain Scheduling) es un ejemplo de la afirmación anterior. En este caso, se diseña un controlador para el sistema lineal obtenido *congelando* el parámetro ρ y linealizando el sistema en torno al origen, de forma que el sistema realimentado tenga al mismo como un atractor local (**para ρ fijo**). Si el parámetro no varía muy rápidamente, se puede demostrar que el origen es un atractor global para el sistema variante en el tiempo. Para demostrar esa propiedad, se utiliza una función de Liapunov que depende también del parámetro [Kha96, Rug91].

Cuando el sistema (7.1) puede escribirse de la forma

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\rho)\mathbf{x} + B(\rho)u \quad (7.2)$$

decimos que estamos en el caso de un **sistema lineal dependiente de parámetros**. Diversas técnicas desarrolladas para sistemas lineales pueden ser extendidas a esta clase de sistemas. En la sección siguiente presentamos una extensión directa del Método LQR introducido al final del Capítulo 3.

7.2 Método LPV

Consideremos nuevamente el sistema (7.2) en el cual el parámetro ρ varía en el siguiente conjunto

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} := \{ \rho : \mathcal{R}^+ \rightarrow \mathcal{R}^r \mid \rho \in C^1, \rho(t) \in \mathcal{P} \forall t \geq 0, \underline{\nu}_i(\rho) \leq \dot{\rho}_i \leq \bar{\nu}_i(\rho), i = 1, \dots, r \}$$

siendo \mathcal{P} un compacto en \mathcal{R}^r . Los números $\underline{\nu}_i$ y $\bar{\nu}_i$ representan las cotas de variación temporal del i -ésimo parámetro. Por lo tanto, los parámetros admisibles tienen acotadas su magnitud y su velocidad de variación.

Siguiendo la misma línea que para sistemas lineales sin parámetros, buscaremos una función de Liapunov cuadrática para el sistema (7.2), del tipo $\mathcal{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T P \mathbf{x}$, aunque en este caso admitiremos una dependencia de la misma respecto del parámetro ρ

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}, \rho) = \mathbf{x}^T P(\rho) \mathbf{x}$$

Tal como se vio en el capítulo 3, debemos buscar una función matricial P definida positiva, dependiente del parámetro ρ , que minimice el siguiente funcional de costo sobre el sistema¹

$$\mathcal{J}(u) = \int_0^{+\infty} (\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} + u^T u) dt$$

La función P se obtiene como solución de la siguiente ecuación de Riccati [And90]

$$\begin{cases} \dot{P}(\rho) + A^T(\rho)P(\rho) + P(\rho)A(\rho) + Q - P(\rho)B(\rho)B^T(\rho)P(\rho) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 0 \end{cases} \quad (7.3)$$

y la entrada óptima está dada por la realimentación de estados

$$u(t) = -B^T(\rho)P(\rho)\mathbf{x}$$

¹Por comodidad, nuevamente hemos tomado la matriz R asociada al costo de la entrada como la identidad.

Teniendo en cuenta que $\dot{P} = \frac{\partial P}{\partial \rho} \dot{\rho}$, la existencia de una solución para la ecuación de Riccati está implicada por a la existencia de una matriz definida positiva $X(\rho)$ que satisfaga la desigualdad matricial (7.4) para todo valor del parámetro² [Apk96],

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^r \dot{\rho}_i \frac{\partial X}{\partial \rho_i} + A(\rho)P(\rho) + X(\rho)A(\rho) - B(\rho)B^T(\rho) & X(\rho)C^T(\rho) \\ C(\rho)X(\rho) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.4)$$

siendo $Q = C^T C \geq 0$.

Para un valor fijo del parámetro, la ecuación (7.4) constituye una **Desigualdad Matricial Lineal (LMI)** en la variable X . Las LMI son objetos matemáticos que han sido ampliamente estudiados, sobre todo en los últimos 15 años, luego de los trabajos de Karmarkar sobre programación lineal [Kar84]. La convexidad y la linealidad juegan un papel muy importante en su resolución. Son de mucha utilidad en la Ingeniería de Control y fundamentalmente en los últimos 10 años ha habido una gran cantidad de trabajo de investigación sobre las aplicaciones a la Teoría de Control de las Desigualdades Matriciales Lineales. Existen algoritmos eficientes y rápidos para resolver las LMI [Gah95, Apk96]. Esta misma bibliografía es también una introducción sencilla y breve a las LMI y sus aplicaciones más inmediatas.

Cuando en la ecuación (7.4) consideramos la dependencia con respecto del parámetro, lo que tenemos entonces es un conjunto infinito de desigualdades matriciales lineales (una por cada valor admisible del parámetro), lo cual introduce un grado de dificultad con respecto al caso sin parámetros.

La matriz $X(\rho)$ define la realimentación de estados subóptima $u = -B^T(\rho)X^{-1}(\rho)\mathbf{x}$. La suboptimalidad surge de que no resolvemos exactamente la ecuación (7.3). Obtenemos también la siguiente función de Liapunov para el sistema realimentado

$$\mathcal{V}(\mathbf{x}, \rho) = \mathbf{x}^T X^{-1}(\rho)\mathbf{x}$$

Dada la dependencia afín con la velocidad de variación temporal del parámetro, y utilizando propiedades de convexidad del conjunto de matrices de signo definido, la anterior desigualdad matricial es equivalente a la siguiente [Apk96]

$$\begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^r \bar{\nu}_i(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho} + A(\rho)P(\rho) + X(\rho)A(\rho) - B(\rho)B^T(\rho) & X(\rho)C^T(\rho) \\ C(\rho)X(\rho) & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (7.5)$$

donde la notación $\sum_{i=1}^r \bar{\nu}_i(\rho)$ significa que hay que escribir una desigualdad matricial por cada vértice del hipercubo que acota la velocidad de variación temporal de los parámetros. Para fijar ideas, si consideramos $r = 2$, resulta que se tienen 4 desigualdades, correspondientes a $\bar{\nu}_1(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_1} + \bar{\nu}_2(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_2}$, $\bar{\nu}_1(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_1} + \underline{\nu}_2(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_2}$, $\underline{\nu}_1(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_1} + \bar{\nu}_2(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_2}$ y $\underline{\nu}_1(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_1} + \underline{\nu}_2(\rho) \frac{\partial X}{\partial \rho_2}$.

²La existencia de una solución X para la desigualdad matricial asegura la existencia de una solución P para la ecuación de Riccati que además cumple $P > X^{-1}$ [Apk96].

Todavía tenemos un conjunto infinito de desigualdades. Un camino posible para su resolución es el siguiente: restringimos nuestra búsqueda a funciones $X(\rho)$ del tipo $X(\rho) = \sum_{i=1}^p f_i(\rho)X_i$, con f_i pertenecientes a un determinado conjunto de funciones que llamaremos *funciones base*. Con esta nueva restricción en la función que estamos buscando, las desigualdades matriciales (7.5) pasan a ser infinitas LMI en las variables X_1, X_2, X_3, X_4 y X_5 , es decir, una para cada valor posible del vector de parámetros. Para enfrentar este problema de dimensionalidad, realizamos una grilla en el conjunto \mathcal{P} de los ρ admisibles, obteniendo una gran LMI en las variables X_1, \dots, X_r que puede resolverse con algoritmos estándar de programación lineal como ya mencionamos.

7.3 Aplicación

Nuestro sistema a estudio,

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -g \sin(\theta) - \frac{d}{m} \dot{x} \\ \dot{y} \\ g(\cos(\theta) - 1) - \frac{d}{m} \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ -\frac{mgl}{J} \sin(\theta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\theta)}{m} u_1 - \frac{\sin(\theta)}{m} u_2 \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta)}{m} u_1 + \frac{\cos(\theta)}{m} u_2 \\ \frac{r}{J} u_1 \end{bmatrix}$$

admite la siguiente formulación como sistema LPV

$$\dot{\mathbf{x}} = A(\theta)\mathbf{x} + B(\theta)u =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{m} & 0 & 0 & -g \frac{\sin(\theta)}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{d}{m} & g \frac{(\cos(\theta)-1)}{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{mgl \sin(\theta)}{J\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \\ \dot{y} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\cos(\theta)}{m} & -\frac{\sin(\theta)}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{\sin(\theta)}{m} & \frac{\cos(\theta)}{m} \\ 0 & 0 \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

con parámetro unidimensional $\rho = \theta$. Las cotas para el parámetro y su velocidad se basan en consideraciones mecánicas del sistema físico y son las siguientes

$$|\theta| \leq \frac{\pi}{2}, \quad |\dot{\theta}| \leq 10$$

Se eligieron como funciones bases los primeros 5 polinomios de Legendre, que constituyen un conjunto de funciones normalizadas³

$$f_1(\theta) = 1, \quad f_2(\theta) = \frac{2}{\pi}\theta, \quad f_3(\theta) = \frac{3\left(\frac{2}{\pi}\theta\right) - 1}{2}$$

$$f_4(\theta) = \frac{5\left(\frac{2}{\pi}\theta\right)^3 - 3\left(\frac{2}{\pi}\theta\right)}{2}, \quad f_5(\theta) = \frac{35\left(\frac{2}{\pi}\theta\right)^4 - 30\left(\frac{2}{\pi}\theta\right)^2 - 3}{2}$$

³Podría haberse elegido cualquier otra base de polinomios.

La LMI con la que se trabajó se obtuvo de la siguiente manera. Se realizó una grilla en el parámetro θ y para cada valor del parámetro se escribieron las siguientes desigualdades

$$\begin{bmatrix} -10\frac{\partial X}{\partial \theta} + A(\theta)X(\theta) + x(\theta)A^T(\theta) - B(\theta)B^T(\theta) & X(\theta)C^T(\theta) \\ C(\theta)X(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$\begin{bmatrix} 10\frac{\partial X}{\partial \theta} + A(\theta)X(\theta) + x(\theta)A^T(\theta) - B(\theta)B^T(\theta) & X(\theta)C^T(\theta) \\ C(\theta)X(\theta) & -I \end{bmatrix} < 0$$

$$X(\theta) = \sum_{i=1}^5 f_i(\theta)X_i > 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^5 f'_i(\theta)X_i$$

La LMI se resolvió utilizando el LMIControl Toolbox de Matlab. Los resultados obtenidos en las simulaciones para las condiciones iniciales de testeo se muestran en las siguientes figuras. Como puede apreciarse, el sistema realimentado realiza una regulación aceptable en todos los casos.

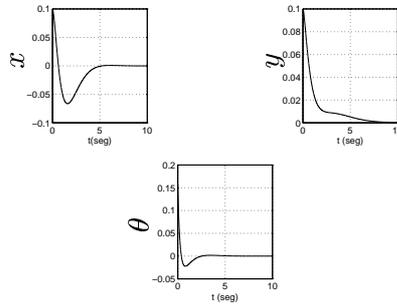


Figura 7.1: Respuesta del sistema con realimentación lineal dependiente del parámetro $\rho = \theta$ para la condición inicial x_{o1}

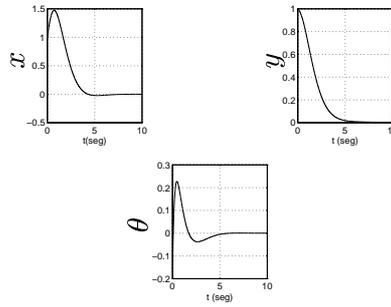


Figura 7.2: Respuesta del sistema con realimentación lineal dependiente del parámetro $\rho = \theta$ para la condición inicial x_{o2}

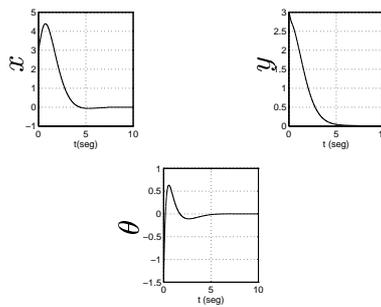


Figura 7.3: Respuesta del sistema con realimentación lineal dependiente del parámetro $\rho = \theta$ para la condición inicial x_{o3}

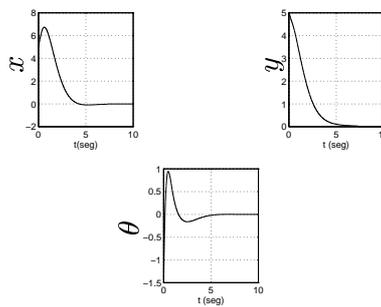


Figura 7.4: Respuesta del sistema con realimentación lineal dependiente del parámetro $\rho = \theta$ para la condición inicial x_{o4}

Capítulo 8

Control por Linealización Exacta

En el presente capítulo aplicaremos la teoría desarrollada en el capítulo 4 para obtener la forma normal del sistema físico a estudio. Una vez obtenida dicha forma, y con base en ella, realizaremos el diseño de un regulador que utiliza las mismas ideas sencillas que las empleadas en el capítulo 6.

Para entender bien lo descrito en este capítulo, es necesario tener bien presentes los conceptos, definiciones y resultados del capítulo 4.

8.1 Linealización exacta

El sistema físico a estudio puede ser modelado de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= f(\mathbf{x}) + g_1(\mathbf{x})u_1 + g_2(\mathbf{x})u_2 \\ Y_1 &= h_1(\mathbf{x}) \\ Y_2 &= h_2(\mathbf{x})\end{aligned}\tag{8.1}$$

con

$$f = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ -g \sin(\theta) - \frac{d}{m}\dot{x} \\ \dot{y} \\ g(\cos(\theta) - 1) - \frac{d}{m}\dot{y} \\ \dot{\theta} \\ -\frac{mgl}{J} \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad g_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\theta)}{m} \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta)}{m} \\ 0 \\ \frac{r}{J} \end{bmatrix}, \quad g_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{m} \\ 0 \\ \frac{\cos(\theta)}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

siendo el vector de estados $\mathbf{x} = [x, \dot{x}, y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}]^T$, u_1 y u_2 las entradas. El sistema no es linealizante entrada-estados, ya que no se cumplen las condiciones necesarias y suficientes del Teorema 4.7 del capítulo 4¹ [Kan95]. Sólo podemos linealizar parcialmente el sistema, para lo cual definimos las siguientes funciones de salida.

$$h_1(\mathbf{x}) = y, \quad h_2(\mathbf{x}) = \theta$$

Calculemos el grado relativo del sistema en un entorno del origen

¹La demostración de que no se cumplen las hipótesis es extremadamente engorrosa y no se ha incluido aquí.

(1) Asociado a la salida $h_1(\mathbf{x}) = y$

$$L_{g_1}h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}}g_1 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot g_1 = 0$$

$$L_{g_2}h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}}g_2 = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot g_2 = 0$$

Como $L_f h_1 = \frac{\partial h_1}{\partial \mathbf{x}}f = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \cdot f = \dot{y}$, resulta que

$$L_{g_1}L_f h_1 = \frac{\partial L_f h_1}{\partial \mathbf{x}}g_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot g_1 = \frac{\sin(\theta)}{m}$$

$$L_{g_2}L_f h_1 = \frac{\partial L_f h_1}{\partial \mathbf{x}}g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \cdot g_2 = \frac{\cos(\theta)}{m}$$

(2) Asociado a la salida $h_2(\mathbf{x}) = \theta$

$$L_{g_1}h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}}g_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot g_1 = 0$$

$$L_{g_2}h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}}g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot g_2 = 0$$

Como $L_f h_2 = \frac{\partial h_2}{\partial \mathbf{x}}f = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \cdot f = \dot{\theta}$, resulta que

$$L_{g_1}L_f h_2 = \frac{\partial L_f h_2}{\partial \mathbf{x}}g_1 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot g_1 = \frac{r}{J}$$

$$L_{g_2}L_f h_2 = \frac{\partial L_f h_2}{\partial \mathbf{x}}g_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1] \cdot g_2 = 0$$

Veamos el rango de la matriz

$$A(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} L_{g_1}L_f h_1 & L_{g_2}L_f h_1 \\ L_{g_1}L_f h_2 & L_{g_2}L_f h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(\theta)}{m} & \frac{\cos(\theta)}{m} \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

Se tiene que: $\det(A(\mathbf{x})) = -\frac{r \cos(\theta)}{Jm} \neq 0$ en un entorno del origen. Encontramos entonces que el *grado relativo* en el origen es $[r_1, r_2] = [2, 2]$.

Consideremos ahora la siguiente distribución

$$\mathcal{G} = \text{gen} \{g_1, g_2\} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(\theta)}{m} \\ 0 \\ \frac{\sin(\theta)}{m} \\ 0 \\ \frac{r}{J} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\sin(\theta)}{m} \\ 0 \\ \frac{\cos(\theta)}{m} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Veamos si es involutiva, calculando el Corchete de Lie $[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos(\theta)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin(\theta)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sin(\theta)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\cos(\theta)}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\implies \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{x}} g_1 = 0$, $\frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}} g_2 = 0$ de donde $[g_1, g_2](\mathbf{x}) = 0 \in \mathcal{G}$. Por lo tanto la distribución \mathcal{G} es involutiva.

Este último resultado, junto con el Teorema de Frobenius, asegura la existencia de un conjunto linealmente independiente de difeomorfismos

$$\{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4\}$$

tales que generan la co-distribución \mathcal{G}^\perp , es decir

$$L_{g_i} \left(\frac{d\Phi_j}{d\mathbf{x}} \right) = 0 \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

Por lo visto anteriormente, podemos tomar $\Phi_1 = h_1$ y $\Phi_2 = h_2$. Veamos la condición general que deben cumplir Φ_3 y Φ_4 . Sea $\phi \in \mathcal{G}^\perp$ y sea

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = [\phi_x, \phi_{\dot{x}}, \phi_y, \phi_{\dot{y}}, \phi_\theta, \phi_{\dot{\theta}}]$$

Entonces

$$L_{g_1} \phi = \frac{\cos(\theta)}{m} \phi_{\dot{x}} + \frac{\sin(\theta)}{m} \phi_{\dot{y}} + \frac{r}{J} \phi_{\dot{\theta}} = 0$$

$$L_{g_2} \phi = -\frac{\sin(\theta)}{m} \phi_{\dot{x}} + \frac{\cos(\theta)}{m} \phi_{\dot{y}} = 0$$

De donde debe cumplirse que

$$\phi_{\dot{y}} = \tan(\theta) \phi_{\dot{x}} \quad , \quad \phi_{\dot{\theta}} = -\frac{J}{mr \cos(\theta)} \phi_{\dot{x}} \quad (8.2)$$

Para obtener una base de \mathcal{G}^\perp elegimos

$$\Phi_3(\mathbf{x}) = x \quad , \quad \Phi_4(\mathbf{x}) = \dot{x} + \tan(\theta)\dot{y} - \frac{J}{mr \cos(\theta)}\dot{\theta}$$

Como puede apreciarse, optamos por una función muy simple (Φ_3) y una más compleja (Φ_4). No debe olvidarse que la elección de ambas fue arbitraria, con la única restricción de satisfacer (8.2). Si los resultados que obtuvimos con esta elección no hubieran sido satisfactorios podríamos haber escogido otro par de funciones.

Obtenemos entonces el cambio de coordenadas $Z = \Phi(\mathbf{x})$

z_1	$=$	$\Phi_1(\mathbf{x})$	$=$	y
z_2	$=$	$L_f h_1(\mathbf{x})$	$=$	\dot{y}
z_3	$=$	$\Phi_2(\mathbf{x})$	$=$	θ
z_4	$=$	$L_f h_2(\mathbf{x})$	$=$	$\dot{\theta}$
z_5	$=$	$\Phi_3(\mathbf{x})$	$=$	x
z_6	$=$	$\Phi_4(\mathbf{x})$	$=$	$\dot{x} + \tan(\theta)\dot{y} - \frac{J}{mr \cos(\theta)}\dot{\theta}$

El mismo cumple que

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \tan(\theta) & \dot{y}(1 + \tan^2(\theta)) - \frac{J\dot{\theta} \sin(\theta)}{mr \cos^2(\theta)} & -\frac{J}{mr \cos(\theta)} \end{bmatrix} \Bigg|_{\mathbf{x}=0}$$

$$\Rightarrow \det \left(\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=0} \right) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{J}{mr} \end{vmatrix} = 1$$

Por lo que Φ resulta ser un difeomorfismo en un entorno del origen.

Hallemos la expresión del sistema en las nuevas coordenadas

$$\dot{z}_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \mathbf{x}} (f + g_1 u_1 + g_2 u_2) = L_f \Phi_1 + (L_{g_1} \Phi_1) u_1 + (L_{g_2} \Phi_1) u_2 = L_f \Phi_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = \frac{\partial (L_f \Phi_1)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_f^2 \Phi_1 + (L_{g_1} L_f \Phi_1) u_1 + (L_{g_2} L_f \Phi_1) u_2 =$$

$$= g(\cos(\theta) - 1) - \frac{d}{m} \dot{y} + \frac{\sin(\theta)}{m} u_1 + \frac{\cos(\theta)}{m} u_2$$

$$\dot{z}_2 = g(\cos(z_3) - 1) - \frac{d}{m}z_2 + \frac{\sin(z_3)}{m}u_1 + \frac{\cos(z_3)}{m}u_2$$

Análogamente

$$\dot{z}_3 = L_f \Phi_2 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = \frac{\partial (L_f \Phi_2)}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}} = L_f^2 \Phi_2 + (L_{g_1} L_f \Phi_2) u_1 + (L_{g_2} L_f \Phi_2) u_2 =$$

\Rightarrow

$$\dot{z}_4 = -\frac{mgl}{J} \sin(z_3) + \frac{r}{J} u_1,$$

\Rightarrow

$$\dot{z}_5 = L_f \Phi_3 = \dot{x} = z_6 - \dot{y} \tan(\theta) + \frac{J\dot{\theta}}{mr \cos(\theta)} = z_6 - z_2 \tan(z_3) + \frac{J z_4}{mr \cos(z_3)},$$

Finalmente

$$z_6 = \dot{x} + \tan(\theta) \dot{y} - \frac{J\dot{\theta}}{mr \cos(\theta)} \Rightarrow \dot{z}_6 = L_f \Phi_4$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \dot{z}_6 = & \left[0 \ 1 \ 0 \ \tan(\theta) \right] \left(\dot{y}(1 + \tan^2(\theta)) - \frac{J\dot{\theta}}{mr} \left(-\frac{1}{\cos^2(\theta)} \right) (-\sin(\theta)) \right) \\ & - \frac{J}{mr \cos(\theta)} \left[.f(\mathbf{x}) = -g \sin(z_3) - \frac{d}{m}z_6 + \frac{Jd}{m^2 r \cos(z_3)} z_4 + z_4 z_2 + \right. \\ & \left. + \tan(z_3) \left[g(\cos(z_3) - 1) + z_4 z_2 \tan(z_3) - \frac{J z_4^2}{mr \cos(z_3)} + \frac{gl}{r} \right] \right] \end{aligned}$$

La forma normal del sistema, para las salidas (y, θ) elegidas, resulta ser

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= g(\cos(z_3) - 1) - \frac{d}{m}z_2 + \frac{\sin(z_3)}{m}u_1 + \frac{\cos(z_3)}{m}u_2 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= -\frac{mgl}{J} \sin(z_3) + \frac{r}{J}u_1 \end{aligned} \tag{8.3}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_5 &= z_6 - z_2 \tan(z_3) + \frac{J z_4}{mr \cos(z_3)} \\ \dot{z}_6 &= -\frac{d}{m}z_6 + \frac{Jd z_4}{m^2 r \cos(z_3)} + z_4 z_2 + \\ & \quad + \tan(z_3) \left[g \left(\frac{l}{r} - 1 \right) + z_4 z_2 \tan(z_3) - \frac{J z_4^2}{mr \cos(z_3)} \right] \end{aligned} \tag{8.4}$$

La ecuación (8.3) describe la parte *linealizable* del sistema.

8.2 Dinámica de los ceros

La *dinámica de los ceros* del sistema es la ecuación (8.4) para $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = u_1 = u_2 = 0$

$$\begin{aligned}\dot{z}_5 &= z_6 \\ \dot{z}_6 &= -\frac{d}{m}z_6\end{aligned}\quad (8.5)$$

que tiene la siguiente solución

$$z_6(t) = z_{6o}e^{-\frac{d}{m}t}, \quad z_5(t) = z_{5o} + \frac{m}{d}z_{6o}\left(1 - e^{-\frac{d}{m}t}\right)$$

y que **no tiene al origen como punto de equilibrio asintóticamente estable**. Obsérvese que en la dinámica de los ceros $z_5 = x$ y $z_6 = \dot{x}$. Las trayectorias mostradas en la figura 8.1 fueron obtenidas por medio de simulaciones del sistema no lineal (8.1) para condiciones iniciales nulas en $[y, \dot{y}, \theta, \dot{\theta}]^T$ y entradas nulas y se corresponden con la ecuación (8.5).

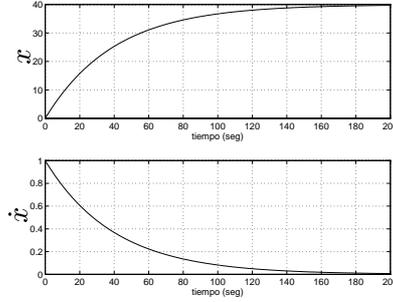


Figura 8.1: Respuesta del sistema para $x_o = [0; 1; 0; 0; 0; 0]^T$ y entrada nula

8.3 Ecuación normal

Utilizando la notación compacta ζ para el vector $[z_1, z_2, z_3, z_4]^T$ y η para el vector $[z_5, z_6]^T$, las ecuaciones (8.3) y (8.4) se escriben así

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \begin{bmatrix} z_2 \\ b_1(\zeta) \\ z_4 \\ b_2(\zeta) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ a_{11}(\zeta)u_1 + a_{12}(\zeta)u_2 \\ 0 \\ a_{21}(\zeta)u_1 + a_{22}(\zeta)u_2 \end{bmatrix} \\ \dot{\eta} = q(\eta, \zeta) \end{cases}$$

donde

$$q(\eta, \zeta) = \begin{bmatrix} z_6 - z_2 \tan z_3 + \frac{Jz_4}{mr \cos z_3} \\ -\frac{d}{m}z_6 + \frac{Jdz_4}{m^2r \cos z_3} + z_4z_2 + \tan z_3 \left[g \left(\frac{l}{r} - 1 \right) + z_4z_2 \tan z_3 - \frac{Jz_4^2}{mr \cos z_3} \right] \end{bmatrix}$$

$$b(\zeta) = \begin{bmatrix} b_1(\zeta) \\ b_2(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(\cos(z_3) - 1) - \frac{d}{m}z_2 \\ -\frac{mgl}{J} \sin z_3 \end{bmatrix}$$

$$A(\zeta) = \begin{bmatrix} a_{11}(\zeta) & a_{12}(\zeta) \\ a_{21}(\zeta) & a_{22}(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sin(z_3)}{\frac{m}{r}} & \frac{\cos(z_3)}{\frac{m}{r}} \\ \frac{r}{J} & 0 \end{bmatrix}$$

y

$$A^{-1}(\zeta) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{J}{r} \\ \frac{m}{\cos(z_3)} & -\frac{J}{r} \tan(z_3) \end{bmatrix}$$

Observemos que

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = b(\zeta) + A(\zeta) \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

y consideremos la señal de control

$$u = \alpha(\zeta) + \beta(\zeta)v$$

donde $v = [v_1, v_2]^T$ representa las señales de referencia. Elijamos entonces

$$u = A^{-1}(\zeta)[v - b(\zeta)]$$

La acción de control a implementar es

$$\boxed{\begin{aligned} u_1 &= \frac{mgl}{r} \sin(z_3) + \frac{J}{r} v_2 \\ u_2 &= \frac{m}{\cos(z_3)} v_1 - \frac{J \tan(z_3)}{r} v_2 + \frac{d}{\cos(z_3)} z_2 - \frac{mg}{\cos(z_3)} (\cos(z_3) - 1) - \frac{mgl}{r} \tan(z_3) \sin(z_3) \end{aligned}}$$

El sistema realimentado resulta ser

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v_2 \\ \dot{\eta} &= q(\eta, \zeta) \end{aligned} \tag{8.6}$$

La ecuación (8.6) es la *forma normal* de sistema.

La parte lineal se escribe $\dot{\zeta} = A\zeta + Bv$, con

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con el par (A, B) completamente controlable. La salida del sistema es $[y, \theta] = C\zeta$, con

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

8.4 Estabilización parcial

Para estabilizar el sub-sistema lineal, usamos una realimentación de estados $v = -K\zeta$, donde K fue diseñada mediante la técnica LQR presentada en el capítulo 3, con $Q = \text{diag}([10, 1, 1, 1])$ y $R = I_{2 \times 2}$, y vale

$$K = \begin{bmatrix} 3.1623 & 2.7064 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 & 1.7321 \end{bmatrix}$$

El esquema de realimentación se muestra en la figura 8.2.

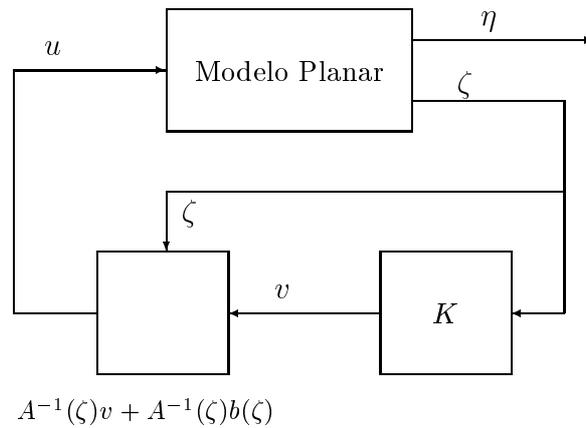


Figura 8.2: Diagrama de bloques del sistema controlado parcialmente en base a la forma normal

Las figuras 8.3-8.6 muestran que el diseño realizado funciona correctamente desde el punto de vista entrada-salida, es decir, sobre la parte *linealizada* del sistema, aunque a costa de perder la capacidad de control sobre la dinámica de los ceros. Obsérvese que la posición x diverge.

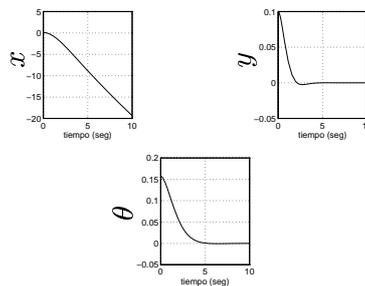


Figura 8.3: Respuesta del sistema controlado parcialmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o1}

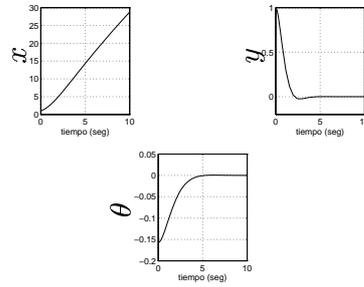


Figura 8.4: Respuesta del sistema controlado parcialmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o2}

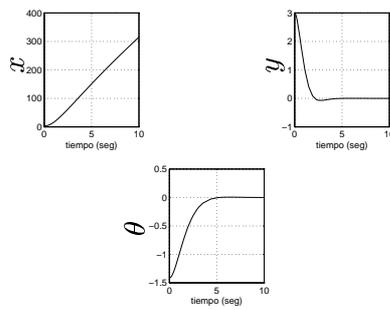


Figura 8.5: Respuesta del sistema controlado parcialmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o3}

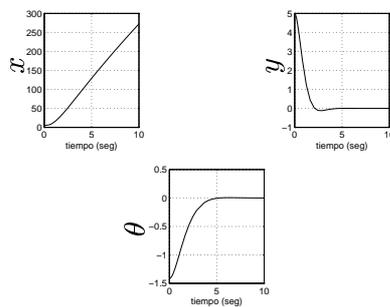


Figura 8.6: Respuesta del sistema controlado parcialmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o4}

8.5 Estabilización total

Si sólo nos preocupara el desempeño entrada-salida del sistema, el controlador diseñado en la parte anterior resulta ser satisfactorio, ya que en ese caso no nos importaría la divergencia en el estado x . Consideremos el problema de estabilizar todo el sistema. La descripción *normal* que ahora poseemos del mismo, luego de realizadas la transformación de coordenadas y el cambio de entradas linealizante, nos permitirá intentar la estabilización del sistema por medio de la aplicación de diferentes técnicas.

La que aplicaremos en esta ocasión será nuevamente la Linealización Jacobiana, similar a la descrita en el capítulo 6. Escribamos nuevamente la forma normal

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2 \\ \dot{z}_2 &= v_1 \\ \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_4 &= v_2 \\ \dot{\eta} &= q(\eta, \zeta)\end{aligned}\tag{8.7}$$

Aplicaremos nuevamente la técnica de linealización jacobiana vista en el capítulo 6, con la diferencia que ahora estamos trabajando sobre las nuevas coordenadas. Haremos una realimentación lineal de los estados nuevos que resultará en una realimentación no lineal de las variables originales.

La ley de control $v = -\bar{K} \begin{bmatrix} \eta \\ \zeta \end{bmatrix}$ fue diseñada con el método LQR presentado en el capítulo 3. Hemos modificado ligeramente las matrices Q y R del costo, ya que el mismo es cuadrático en las variables originales. Como el cambio de coordenadas realizado es no lineal, la expresión del costo en las nuevas variables no es cuadrática, por lo que hemos utilizado un costo cuadrático *parecido* en las nuevas variables. No es de esperar que las trayectorias que se obtengan con el controlador obtenido tengan asociado un costo original pequeño.

La realimentación es

$$v_1 = -\bar{K}_1 \cdot [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]^T = -[3.16, 2.70, 0, 0, 0, 0] \cdot [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]^T$$

$$v_2 = -\bar{K}_2 \cdot [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]^T = -[0, 0, 25.2044, 7.1370, -3.1623, -5.2071] \cdot [z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]^T$$

siendo \bar{K}_1 y \bar{K}_2 los vectores fila de la matriz \bar{K} . El esquema de realimentación de estados utilizados se muestra en la figura 8.7.

Los resultados obtenidos para el diseño descrito se muestran a continuación en las figuras 8.8-8.11. Puede apreciarse que la regulación es buena. Otros esquemas de control no lineal, como *backstepping*, *control deslizante* o *MPC* podrían ser aplicados sobre el sistema expresado en la forma normal [Kha96, Nev97] pero hemos optado por no hacerlo en esta Tesis.

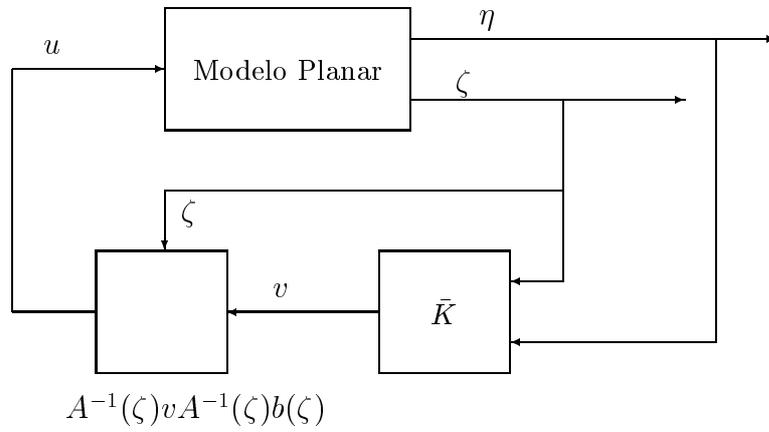


Figura 8.7: Diagrama de bloques del sistema controlado totalmente en base a la forma normal

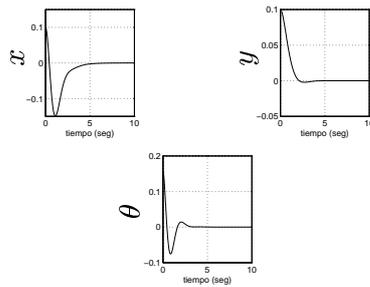


Figura 8.8: Respuesta del sistema controlado totalmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o1}

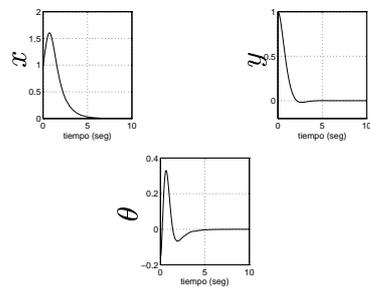


Figura 8.9: Respuesta del sistema controlado totalmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o2}

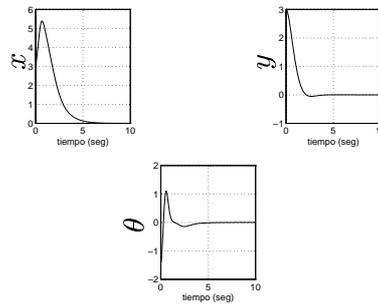


Figura 8.10: Respuesta del sistema controlado totalmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o3}

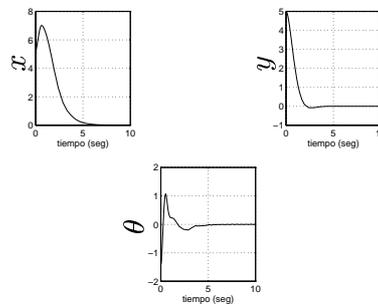


Figura 8.11: Respuesta del sistema controlado totalmente en base a la forma normal para la condición inicial x_{o4}

Capítulo 9

Conclusiones

A lo largo de esta Tesis hemos desarrollado un trabajo grande de aprendizaje e integración de técnicas de estudio de Control No Lineal. Por un lado hemos estudiado con diferentes grado de profundidad un conjunto de Teorías básicas y por otro lado hemos realizado algunas aplicaciones prácticas que muestran su utilización.

9.1 Teorías básicas

Como se desprende de las diferentes aplicaciones mostradas, la importancia de la Teoría de Liapunov es enorme. Es difícil encontrar un artículo o un trabajo sobre estabilidad de sistemas no lineales que no mencione a Liapunov y recordemos que la estabilidad es en general la primera propiedad del sistema que el Ingeniero de Control pretende asegurar.

Muchas veces el sistema con el que se trabaja presenta restricciones, naturales o artificiales. Las mismas deben ser contempladas en el proceso de síntesis de controladores y para ello debe recurrirse a las herramientas desarrolladas por el Control Óptimo. Diversos enfoques permiten obtener soluciones más o menos sencillas para problemas de optimización de trayectorias, tiempo y consumo.

En este trabajo hemos estudiado también un enfoque del problema de Control No Lineal que utiliza técnicas y resultados de la Geometría Diferencial, denominado Linealización Exacta. Vimos que existen condiciones necesarias y suficientes para que existan un cambio de coordenadas y una realimentación de estados que linealicen el sistema. También vimos que cuando dichas condiciones no se cumplen, igual podemos transformar el sistema en una descripción sencilla de manejar, denominada *forma normal*. La importancia de esta técnica radica en que al disponer de una forma sistemática de llevar el sistema a su forma normal, podemos aplicarle luego un conjunto de técnicas lineales y no lineales de control que se basan en dicha descripción. Incluso líneas actuales de investigación, como el Control Predictivo por Modelo utiliza la linealización exacta para asegurar propiedades relativas a la estabilidad [Nev97].

9.2 Aplicaciones

En el presente trabajo también hemos mostrado la aplicación de algunas técnicas de Control No Lineal sobre un sistema concreto. Si bien el objetivo no era comparar las distintas técnicas empleadas, introdujimos un costo asociado que nos permite sacar algunas conclusiones. Simulamos el comportamiento de cada controlador diseñado utilizando técnicas específicas que se basan en las Teorías estudiadas en la primera parte para cada una de las condiciones iniciales elegidas a priori.

Los controladores diseñados fueron los siguientes: en primer término una realimentación lineal estática de estados basada en la Linealización Jacobiana presentada en el capítulo 6; en segundo lugar una realimentación cuasi lineal de estados (lineal dependiente de un parámetro) diseñada según la técnica LPV del capítulo 7 y finalmente una realimentación no lineal de estados basada en la forma normal obtenida mediante linealización exacta en el capítulo 8.

En la Tabla 9.1 se aprecian los costos asociados a los distintos controladores sintetizados y las diferentes condiciones iniciales testeadas. De las tres técnicas que aplicamos, la Lineal-

	Linealización	Cuasi-LPV	EFL
$x_{o1} = [0.1; 0; 0.1; 0; 0.1\pi/2; 0]^T$	0.36	2.7	1.96
$x_{o2} = [1; 1; 1; 0; -0.1\pi/2; 0]^T$	41.7	71.9	60.24
$x_{o3} = [3; 3; 3; 0; -0.9\pi/2; 0]^T$	8.2×10^4	1565	1010.5
$x_{o4} = [5; 5; 5; 0; -0.9\pi/2; 0]^T$	Inestable	3005	1725

Tabla 9.1: Comparación de los costos asociados a las diferentes técnicas de control para las diferentes condiciones iniciales

ización Jacobiana resulta ser la más sencilla, ya que encontrar el controlador requiere poco trabajo en comparación con las demás. Simplemente hay que obtener las matrices A y B de la aproximación lineal y luego correr alguna rutina clásica que devuelva el controlador lineal óptimo para la aproximación, que puede probarse que también es óptimo localmente para el sistema original.

La técnica LPV permite encontrar una realimentación cuasi-lineal de estados que estabiliza el sistema no lineal. En el diseño se agregó como una restricción el hecho de que la región de atracción incluyera todas las condiciones iniciales de testeo, imponiendo que las mismas estuvieran incluidas en el dominio de definición de la función de Liapunov buscada. Se partió de las mismas matrices A y B que en el caso anterior y se le agregó un poco más de trabajo al plantear el problema de programación lineal. La resolución del mismo es relativamente sencilla ya que se dispone de métodos numéricos rápidos y eficientes.

La Linealización Exacta permitió encontrar una ley de control no lineal que estabilizara al sistema en la región deseada, aunque cabe destacar que no se impuso dicha condición expresamente. Si el controlador hallado no hubiera servido para algunas de las condiciones iniciales de test, tendríamos que haber buscado otro mejor o haber aplicado alguna técnica diferente partiendo de la forma normal hallada para el sistema.

Como puede apreciarse, el controlador lineal diseñado usando Linealización Jacobiana es el que tiene asociado el menor costo, aunque esa situación se da sólo para las condiciones iniciales cercanas al origen, ya que las trayectorias que parten de más lejos divergen.

Del trabajo realizado en esta Tesis surgieron algunos problemas y aplicaciones interesantes que se dejaron de lado por una cuestión de organización y tiempo. A modo de ejemplo, citamos el problema de estudiar la maximización, mediante una realimentación estática de estados, de la magnitud de las perturbaciones admisibles que preservan la estabilidad asintótica del sistema lineal autónomo nominal. Este problema se presentó al final del capítulo 2. También citamos la aplicación de técnicas de control no lineal que toman como punto de partida la forma normal del sistema introducida en el capítulo 4. Creemos que el presente trabajo brinda una base suficiente para enfrentar los problemas citados, y otros relacionados, con posibilidades de éxito.

Apéndice A

Teorema de Frobenius

El contenido de este apéndice se basa fundamentalmente en un trabajo previo realizado como parte del curso de Introducción a la Geometría Diferencial. Dicho curso, dictado en la Facultad de Ciencias por el Dr. Miguel Paternáin, formó parte de la curricula establecida para la Maestría. Si bien se realizaron modificaciones de forma y estilo para compatibilizar el trabajo con el resto de la Tesis, el trabajo está escrito en forma autocontenida en cuanto a los conceptos de Geometría Diferencial que se utilizan, aunque se asume que el lector maneja ideas propias del control lineal [Kai80, Kuo96, Oga80]. Es por eso que se vuelven a definir muchos de los conceptos ya presentados en el capítulo 4. Lo esencial aquí es que se enuncia y demuestra el Teorema de Frobenius y se cuentan algunas de sus aplicaciones a la Teoría del Control diferentes de las ya mostradas en el capítulo 4. El enfoque adoptado puede decirse que es más bien matemático, en contraste con el utilizado en la redacción del capítulo 4. Se siguió la orientación y la notación utilizada por [War71].

A.1 Introducción

En la Teoría del Control frecuentemente nos encontramos con sistemas que pueden describirse por un sistema de ecuaciones diferenciales con la siguiente forma:

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (\text{A.1})$$

$$y_i = h_i(x) \quad , \quad 1 \leq i \leq p \quad (\text{A.2})$$

siendo

$$x = [x_1, \dots, x_n]^T \quad ; \quad u = [u_1, \dots, u_m]^T$$

los vectores de *estados* y *entradas* respectivamente, y_1, \dots, y_p las *salidas* y $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^n$, $G : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^{n \times m}$, $h_i : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, p$, mapas definidos en un abierto $U \subset \mathcal{R}^n$, en general diferenciables (C^∞) y en algún caso, analíticos. Por comodidad, en lugar de trabajar

con la función matricial G trabajaremos con las funciones vectoriales

$$g_i(x) = \begin{bmatrix} g_{1i}(x_1, \dots, x_n) \\ g_{2i}(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \\ g_{ni}(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, m$$

donde cada función escalar g_{ji} es diferenciable, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Una gran cantidad de sistemas físicos pueden ser descritos por ecuaciones del tipo (A.1) y (A.2). Tradicionalmente los más estudiados han sido los *sistemas lineales*, donde los mapas f, g_i y h_i toman la siguiente forma

$$f(x) = Ax \quad , \quad g_i(x) = b_i \quad , \quad h_k(x) = c_k x \quad , \quad \begin{cases} i = 1, \dots, m \\ k = 1, \dots, p \end{cases}$$

siendo A una matriz $n \times n$, b_i un vector columna de \mathcal{R}^n y c_j un vector fila de \mathcal{R}^n , por lo que el sistema puede escribirse así:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

con $B \in \mathcal{R}^{n \times m}$ y $C \in \mathcal{R}^{p \times n}$. Para este tipo de sistemas se han podido encontrar condiciones necesarias y suficientes que permiten explicar, predecir y *controlar* el comportamiento del mismo. Interesa en general estudiar cómo pueden trasladarse dichas condiciones a los sistemas no lineales, así como también caracterizar los fenómenos típicamente no lineales (ciclos límites, múltiples puntos de equilibrio, etc.). En ese sentido, el Teorema de Frobenius permite generalizar a sistemas cualesquiera los conceptos de *controlabilidad, observabilidad y alcanzabilidad* que son fundamentales en los sistemas lineales, pues permiten separar el plano de fase en regiones (subespacios) en las que se conoce el comportamiento del sistema.

A.2 Teorema de Frobenius

A continuación se presentan la noción de campos de vectores actuando sobre una variedad diferenciable junto con las propiedades de los mismos y las ideas básicas necesarias para el Teorema de Frobenius. Esta sección sigue la presentación del tema de [War71].

Sea M^n una variedad diferenciable de dimensión n y sea $m \in M^n$. El conjunto de vectores tangentes a M^n en m , $T_m M$, puede pensarse como el conjunto de operadores lineales de derivación que actúan sobre el conjunto de las funciones diferenciables de M^n a valores reales, definidos de la siguiente manera: si $v \in T_m M$, entonces para toda $f : M^n \rightarrow \mathcal{R}$, $v(f)$ es el siguiente número real

$$v(f) = v_1 \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_m + \dots + v_n \left. \frac{\partial f}{\partial x_n} \right|_m$$

Dada una parametrización local (U, φ) de $m \in M^n$, denotaremos por x_1, \dots, x_n a las coordenadas locales de $x = \varphi(r) \in \varphi(U) \subset M^n$ con $r \in U$ y por r_1, \dots, r_n a las coordenadas de r . El

conjunto

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m / i = 1, \dots, n \right\}$$

constituye una base de $T_m M$, donde los operadores están definidos así

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right) (f) = \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial r_i} \Big|_{\varphi^{-1}(m)}$$

Se tiene entonces que para todo $v \in T_m M$

$$v = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_m$$

siendo $x_i : i = 1, \dots, n$ las funciones coordenadas:

$$x_i : M^n \rightarrow \mathcal{R} / x_i(p) = r_i, p = \varphi(r_1, \dots, r_n)$$

Definición A.1 Campo de Vectores *Un campo de vectores es una aplicación de M^n en el fibrado tangente TM definida de la siguiente forma*

$$X : M^n \rightarrow TM / X(m) = (m, v), v \in T_m M$$

◇

Obsérvese que si llamamos π a la proyección canónica de TM sobre M^n , resulta que $\pi \circ X = Id$ en M^n . Se dice que X es una sección en TM . Usaremos la siguiente notación: $X(m)$ y X_m denotan al vector v y $X(f)$ denota la función de M^n en \mathcal{R} definida por $X(f)(m) = v(f)$ con $f : M^n \rightarrow \mathcal{R}$ diferenciable.

Si (U, φ) es una parametrización local de M^n , se tiene que

$$X|_U = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

siendo $a_i : M^n \rightarrow \mathcal{R}$. Se dice que X es diferenciable (C^∞) en $\varphi(U)$ si lo son las a_i , $i = 1, \dots, n$. Esto implica que también $X(f)$ es diferenciable.

Definición A.2 [Corchetes de Lie] *Si X e Y son campos de vectores diferenciables en M^n , definimos el corchete de Lie de X e Y así*

$$[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$$

con $f : M^n \rightarrow \mathcal{R}$

◇

Si escribimos X e Y en coordenadas locales

$$Y(f) = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad , \quad X(f) = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

la expresión para el corchete de Lie resulta ser

$$[X, Y]_m(f) = \left[\sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) - \sum_{k=1}^n \left(b_k \sum_{i=1}^n \frac{\partial a_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \right] (f)$$

por lo que $[X, Y]$ es un nuevo campo de vectores diferenciable que cumple que es bilineal (lineal en cada una de las variables) y además

$$[X, Y] = -[Y, X] \tag{A.3}$$

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(X(g))Y - gY(f)X \tag{A.4}$$

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0 \tag{A.5}$$

con f y g funciones de M^n en \mathcal{R} diferenciables y X, Y y Z campos de vectores. La propiedad (A.5) se conoce como la Identidad de Jacobi y junto con la propiedad (A.3) y la bilinealidad determinan que el conjunto de campos de vectores diferenciables en M^n con la operación $[\ , \]$ sea un Álgebra de Lie.

Definición A.3 Si $\phi : M^n \rightarrow N^p$ es una función diferenciable, X es un campo C^∞ en M^n , Y es un campo C^∞ en $N^p \Rightarrow X$ e Y están ϕ -relacionados si

$$d\phi \circ X = Y \circ \phi$$

◇

Propiedad A.1 Si $d\phi \circ X = Y \circ \phi$ y $d\phi \circ X_1 = Y_1 \circ \phi$ entonces

$$d\phi \circ [X, X_1] = [Y, Y_1] \circ \phi$$

Definición A.4 Distribuciones Dada M^n , una distribución \mathcal{D} de dimensión c es una aplicación que a cada punto m de M^n le asigna un subespacio de $T_m M$ de dimensión c . Dicho subespacio lo notaremos con $\mathcal{D}(m)$. \mathcal{D} es diferenciable en m si existe un entorno V de m y campos de vectores X_1, \dots, X_c definidos en V , de clase C^∞ , tales que en cada punto $m \in V$, generan a $\mathcal{D}(m)$. ◇

Diremos que $X \in \mathcal{D}$ si $X(m) \in \mathcal{D}(m)$ para todo $m \in M^n$. La siguiente definición es importante para el resultado que queremos probar.

Definición A.5 Una distribución \mathcal{D} es involutiva si

$$\forall X, Y \in \mathcal{D} \implies [X, Y] \in \mathcal{D}$$

◇

Definición A.6 Dado X un campo de vectores en M^n , se dice que la curva $\sigma : (a, b) \rightarrow M^n$ es una curva integral si $\forall t \in (a, b)$ se cumple que

$$\dot{\sigma}(t) = X(\sigma(t)) \tag{A.6}$$

◇

Para obtener condiciones de existencia y unicidad de la solución de la ecuación diferencial (A.6) en la variedad M^n basta observar que dicha ecuación admite una representación en coordenadas locales que da origen a una ecuación diferencial ordinaria en \mathcal{R}^n . Se tiene entonces el siguiente teorema que no demostraremos.

Teorema A.1 Sea $X \in C^\infty(M^n)$. Entonces para cada $m \in M^n$ existe un intervalo

$$(a_m, b_m) \subset \mathcal{R}$$

tal que $0 \in (a_m, b_m)$ y una única curva integral

$$\gamma_m : (a_m, b_m) \rightarrow M^n$$

tal que $\gamma_m(0) = m$ y $\dot{\gamma}(t) = X(\gamma(t))$ para todo $t \in (a_m, b_m)$. ♣

La unicidad se entiende del siguiente modo: γ coincide con cualquier otra curva integral cuyo valor en 0 sea m y cuyo dominio esté incluido en (a_m, b_m) . Para cada $t \in \mathcal{R}$ podemos definir la siguiente función

$$X_t : \{m \in M^n : t \in (a_m, b_m)\} \rightarrow M^n$$

por la relación

$$X_t(m) = \gamma_m(t)$$

que cumple, entre otras, con las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} X_s \circ X_t &= X_{s+t} \\ X_t \circ X_{-t} &= Id \end{aligned}$$

Definición A.7 Dada una distribución diferenciable \mathcal{D} en M^n , una subvariedad¹ (N^c, Ψ) es una variedad integral de \mathcal{D} si

$$d\Psi(T_n N) = \mathcal{D}(\Psi(n))$$

◇

Es decir que el plano tangente a la subvariedad en el punto n coincide con la distribución en dicho punto (a menos de la inclusión Ψ)

Estamos ya en condiciones de presentar el **Teorema de Frobenius**

Sea \mathcal{D} una distribución diferenciable en M^n . Por cada punto m de M^n pasa una variedad integral de \mathcal{D} si y sólo si \mathcal{D} es involutiva

Demostraremos en primer lugar que una distribución integrable es involutiva.

Teorema A.2 Sea \mathcal{D} una distribución en M^n de dimensión c tal que para todo $m \in M^n$ existe una subvariedad integral (N^c, Ψ) de \mathcal{D} . Entonces \mathcal{D} es involutiva.

Demostración

Sean X e Y campos de vectores en M^n tales que $X, Y \in \mathcal{D}$ y sea $m \in M^n$. Probaremos que $[X, Y]_m \in \mathcal{D}$.

Sea (N^c, Ψ) la subvariedad integral de \mathcal{D} que pasa por m , que existe por hipótesis. Para cada $n \in N^c$ se cumple entonces

$$d\Psi(T_n N) \subset \mathcal{D}(\Psi(n)) \tag{A.7}$$

Consideremos $n_o \in N^c$ tal que $\Psi(n_o) = m$. Como para cada $n \in N^c$ se tiene que

$$d\Psi : T_n N \rightarrow T_{\Psi(n)} M \tag{A.8}$$

es una transformación lineal inyectiva, podemos definir los campos de vectores \tilde{X}, \tilde{Y} en N^c :

$$\begin{aligned} \tilde{X} / (d\Psi) \tilde{X} &= X \circ \Psi \\ \tilde{Y} / (d\Psi) \tilde{Y} &= Y \circ \Psi \end{aligned}$$

de donde se deduce que los campos \tilde{X} y \tilde{Y} están Ψ -relacionados, al igual que \tilde{Y} e Y . Por la propiedad (A.1), resulta que

$$d\Psi \left([\tilde{X}, \tilde{Y}]_{n_o} \right) = [X, Y]_{\Psi(n_o)} = [X, Y]_m \in \mathcal{D}(m)$$

donde la pertenencia es consecuencia de (A.7). ♣

Demostraremos ahora el recíproco, con el agregado de algunos resultados.

¹La definición de subvariedad utilizada aquí es la de Warner [War71] y es distinta a la utilizada en otros textos, que requieren que $N \subset M$ y que la inclusión $i : N \rightarrow M$ sea un encaje [DoC88]

Teorema A.3 Sea \mathcal{D} una distribución de dimensión c en M^n involutiva y sea $m \in M$. Entonces:

- i) Existe una variedad integral de \mathcal{D} por m .
- ii) Existe un sistema de coordenadas cúbico centrado² en m cuyas funciones coordenadas x_1, \dots, x_n satisfacen que los cortes del tipo

$$x_i = \text{constante} \quad i = c + 1, \dots, n$$

son variedades integrales de \mathcal{D} .

- iii) Si (N^c, Ψ) es una variedad integral conexa de \mathcal{D} tal que $\Psi(N) \subset \varphi(U)$ entonces $\Psi(N)$ está en uno de dichos cortes.

Demostración

La demostración la haremos por inducción en la dimensión de la distribución. El caso $c = 1$ es consecuencia del siguiente Lema:

Lema A.4 Sea $m \in M^n$ y X un campo de vectores en M^n tal que $X_m \neq 0$. Entonces existe (U, φ) parametrización local de m tal que

$$X|_{\varphi(U)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\varphi(U)}$$

siendo $\frac{\partial}{\partial x_1}$ el operador asociado a la primer coordenada.

Demostración

Elijamos V, ψ una carta local de m con $\psi(0) = m$, de funciones coordenadas y_1, \dots, y_n tal que

$$X_m = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_m \tag{A.9}$$

Podemos realizar dicha elección pues $X_m \neq 0$. Considerando entonces la ecuación diferencial asociada a X , resulta que existe $\epsilon > 0$ y $W \subset \mathcal{R}^{n-1}$ entorno abierto del origen tal que

$$\tilde{V} = (-\epsilon, \epsilon) \times W \subset V$$

y la función $\sigma : \tilde{V} \rightarrow M$

$$\sigma(t, a_2, \dots, a_n) = X_t(\psi(0, a_2, \dots, a_n))$$

está bien definida y es diferenciable en \tilde{V} . Calculemos la diferencial de σ en el origen:

$$d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_m = X_m \neq 0, \quad d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial r_i} \Big|_0 \right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_m \quad i = 2, \dots, n$$

² $\varphi : U \subset \mathcal{R}^n \rightarrow M^n$ siendo $U = \{(r_1, \dots, r_n) \in \mathcal{R}^n \mid |r_i| < \epsilon_i, i = 1, \dots, n\}$; U un prisma en \mathcal{R}^n centrado en el origen y tal que $\varphi(0) = m$

Tenemos entonces que 0 es un valor regular de σ y que por lo tanto σ es un difeomorfismo local. Entonces existe $U \subset \tilde{V}$ tal que $(U, \sigma|_U)$ es una parametrización local de m que cumple que

$$X|_{\varphi(U)} = \frac{\partial}{\partial x_1} \Big|_{\varphi(U)}$$

pues

$$d\sigma \left(\frac{\partial}{\partial r_1} \Big|_{\sigma(t, a_2, \dots, a_n)} \right) = X_{\sigma(t, a_2, \dots, a_n)}$$

La hipótesis de inducción se verifica tomando U cúbico centrado en \mathcal{R}^n . ♣

Veamos ahora el paso de inducción. Supongamos que el teorema vale para distribuciones de dimensión $c - 1$. Como \mathcal{D} es diferenciable y de dimensión c , existen X_1, \dots, X_c , campos de vectores linealmente independientes, que generan \mathcal{D} , definidos en un entorno de m que podemos pensarlo del tipo $\psi(V)$, siendo (V, ψ) una carta local de m con $\psi(0) = m$. Por el Lema anterior, podemos suponer que V es cúbico, centrado en 0 y tal que $\psi(V)$ verifica:

$$X_1|_{\psi(V)} = \frac{\partial}{\partial y_1} \Big|_{\psi(V)}$$

siendo y_1, \dots, y_n las funciones coordenadas. En $\psi(V)$ definamos los siguientes campos de vectores:

$$Y_1 = X_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}$$

$$Y_i = X_i - X_i(y_1)X_1 \quad : \quad i = 2, \dots, c$$

Los nuevos campos Y_i siguen siendo linealmente independientes (por serlo los X_i), por lo que $\{Y_1, \dots, Y_c\}$ genera a \mathcal{D} . Definamos el siguiente corte

$$S = \{(y_1, \dots, y_n) \in \psi(V) / y_1 = 0\}$$

y consideremos las restricciones de los campos Y_2, \dots, Y_c a S

$$Z_i = Y_i|_S \quad , \quad i = 2, \dots, c$$

Por la definición se cumple que $Y_i(y_1) = 0$ para $i = 2, \dots, c$ ya que $X_1(y_1) = \frac{\partial y_1}{\partial y_1} = 1$. Resulta entonces que los campos Z_i , $i = 2, \dots, c$ son campos de vectores en S (es decir: $Z_i(s) \in T_q S$ para $q \in S$). Por lo tanto los campos Z_2, \dots, Z_c generan una distribución \mathcal{D}' en S , de dimensión $c - 1$. Veamos que \mathcal{D}' es involutiva.

Tenemos que estudiar los corchetes $[Z_i, Z_j]$, que están relacionados con los $[Y_i, Y_j]$ por medio de la inclusión de S en M . Consideremos $[Y_i, Y_j]$ y veamos que tiene componente 0 en la dirección y_1 . Por la definición del corchete de Lie, tenemos que

$$[Y_i, Y_j](y_1) = \left[\sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{h=1}^n \frac{\partial b_h}{\partial y_k} \frac{\partial y_1}{\partial y_h} \right) - \sum_{k=1}^n \left(b_k \sum_{h=1}^n \frac{\partial a_h}{\partial y_k} \frac{\partial y_1}{\partial y_h} \right) \right]$$

siendo

$$Y_i = \sum_{k=1}^n a_k \frac{\partial}{\partial y_k} \quad , \quad Y_j = \sum_{k=1}^n b_k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

La condición $Y_i(y_1) = Y_j(y_1) = 0$ implica $a_1 = b_1 = 0$, lo cual implica que $[Y_i, Y_j](y_1) = 0$. Por lo tanto en $\psi(V)$

$$[Y_i, Y_j] = \sum_{k=2}^c c_{ijk} Y_k$$

de donde

$$[Z_i, Z_j] = \sum_{k=2}^c c_{ijk}|_S Z_k$$

por lo que \mathcal{D}' es involutiva en S . Entonces podemos aplicar la hipótesis de inducción:

Existe $W \subset \mathcal{R}^{n-1}$, cúbico, centrado en 0 y $\zeta : W \rightarrow S$ tal que (W, ζ) es una carta local de $\zeta(0) = m \in S$, de funciones coordenadas w_2, \dots, w_n , tal que los cortes $w_i = \text{constante}$ para $i = c+1, \dots, n$ son variedades integrales de \mathcal{D}' en $\zeta(W) \subset S$.

Consideremos ahora las funciones

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_j &= w_j \circ \pi \quad , \quad j = 2, \dots, n \end{aligned} \tag{A.10}$$

siendo $\pi : \zeta(W) \rightarrow S$ la proyección canónica en el sistema de coordenadas $\{y_1, \dots, y_n\}$. Las funciones x_i verifican que todas se anulan en m , por lo que hemos encontrado un sistema de coordenadas cúbico, centrado en m , dado por las funciones coordenadas x_1, \dots, x_n , que se corresponde con alguna parametrización (U, φ) .

Veamos ahora que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_c}\}$ constituyen una base de \mathcal{D} . Para ello, calculemos $Y_i(x_{c+1})$. La definición dada en (A.10) implica directamente que

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \begin{cases} 1 & j = 1 \\ 0 & j = 2, \dots, n \end{cases}$$

por lo que entonces

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$$

en $\varphi(U)$. Por lo tanto, $Y_1(x_{c+1}) = 0$. Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{c+1})) = Y_1(Y_i(x_{c+1})) =$$

$$Y_1(Y_i(x_{c+1})) - Y_i(0) = Y_1(Y_i(x_{c+1})) - Y_i(Y_1(x_{c+1})) = [Y_1, Y_i](x_{c+1})$$

Como por hipótesis \mathcal{D} es involutiva, entonces $[Y_1, Y_i] \in \mathcal{D}$ para $i = 2, \dots, c$, o sea que

$$[Y_1, Y_i] = \sum_{k=1}^c c_{ik} Y_k$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(Y_i(x_{c+1})) = \sum_{k=1}^c c_{ik} Y_k(x_{c+1}) \quad i = 2, \dots, c \quad (\text{A.11})$$

Si damos un corte \tilde{U} en $\varphi(U)$ fijando las últimas $n - 1$ coordenadas ($x_i = \text{constante}$ para $i = 2, \dots, n$), la ecuación (A.11) resulta ser un sistema de ecuaciones diferenciales con incógnitas $Y_i(x_{c+1})$, $i = 2, \dots, c$, como funciones de x_1 solamente. En esas condiciones, el sistema admite una solución única, dada una condición inicial. Las soluciones se mueven en \tilde{U} . Además, $S \cap \tilde{U}$ consiste en un único punto $\{m_{\tilde{U}}\} \in S \cap U$. Se cumple entonces que

$$Y_i(x_{c+1})(m_{\tilde{U}}) = Z_i(w_{c+1})(m_{\tilde{U}}) = 0 \quad , \quad i = 2, \dots, c$$

pues $Z_i = Y_i$ y $x_j = w_j$ en S y la igualdad a 0 es consecuencia de que, dado que el teorema se cumple en dimensión $c - 1$, las variedades integrales de \mathcal{D}' en S están contenidas en cortes del tipo $w_j = \text{constante}$ para $j = c + 1, \dots, n$. Por lo tanto la solución para la ecuación (A.11) es la idénticamente nula. El razonamiento vale también para x_{c+r} , $r = 2, \dots, n - c$. De donde

$$Y_i(x_{c+r}) \equiv 0 \quad , \quad i = 2, \dots, c \quad , \quad r = 1, \dots, n - c$$

Este resultado implica que los campos de vectores

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \quad , \quad \dots \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x_c}$$

son una base de \mathcal{D} en $\varphi(U)$ y que, por lo tanto, los cortes con $x_j = \text{constante}$ para $j = c + 1, \dots, n$ son variedades integrales de \mathcal{D} .

Demostremos ahora la última afirmación de la tesis. Supongamos que (N^c, Ψ) es una variedad integral conexa de \mathcal{D} tal que $\Psi(N) \subset \varphi(U)$. Llamemos π a la proyección en $U \subset \mathcal{R}^n$ sobre las últimas $n - c$ coordenadas. Entonces $d(\pi \circ (\varphi)^{-1})$ se anula cuando se aplica en \mathcal{D} . Como

$$d\Psi(T_n N) \subset \mathcal{D}$$

entonces

$$d(\pi \circ (\varphi)^{-1} \circ \Psi) = d(\pi \circ (\varphi)^{-1}) \circ d\Psi \equiv 0$$

para todo $n \in N$. De donde $\pi \circ (\varphi)^{-1} \circ \Psi$ es una función localmente constante (constante en realidad pues N conexa). Entonces $\Psi(N)$ está contenida en un corte obtenido fijando las últimas $n - c$ coordenadas. ♣

A.3 Otras formas del Teorema

El resultado presentado en la sección anterior determina que, dada una distribución \mathcal{D} en M^n , involutiva y de dimensión c , existe entonces para cada punto de la variedad una parametrización local, cúbica y centrada, con la propiedad de que las funciones coordenadas asociadas x_1, \dots, x_n son tales que

$$\mathcal{D}(m) = \text{gen} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_m, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_c} \right)_m \right\}$$

Es decir que \mathcal{D} es localmente generada por funciones coordenadas. Para cada punto $m \in M^n$ consideremos el conjunto de los funcionales lineales y continuos de $T_m M$ en los reales que notaremos con $T_m^* M$. En este nuevo espacio vectorial, consideremos el subconjunto de los funcionales que se anulan para cualquier vector de $\mathcal{D}(m)$. Este subconjunto se conoce como el anulador de $\mathcal{D}(m)$, se define de la siguiente forma

$$\mathcal{D}^\perp(m) = \bigcap_{\Phi \in T_m^* M} \text{Ker}(\Phi)$$

\mathcal{D}^\perp es un subespacio vectorial, de dimensión $n - c$. Al mapa que a cada punto de la variedad le asocia el subespacio \mathcal{D}^\perp lo llamaremos *co-distribución*³ en M^n . La siguiente base de $T_m M$, $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_m, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_m \right\}$, induce una base en $T_m^* M$, $\{(d\Phi_1)_m, \dots, (d\Phi_n)_m\}$, definida como sigue

$$(d\Phi_i)_m \left(\left(\frac{\partial}{\partial \Phi_j} \right)_m \right) = \delta_{ij}$$

para $i, j = 1, \dots, n$, siendo δ_{ij} la función de Kronecker. Como se puede observar directamente, el funcional $(d\Phi_i)_m$ es precisamente la diferencial de la función coordenada Φ_i en el punto m , por lo que tenemos la siguiente expresión alternativa para el **Teorema de Frobenius** [Isi89](Cap.1, 1.4)

Teorema A.5 *Sea \mathcal{D} una distribución en M^n de dimensión c . Entonces \mathcal{D} es involutiva sí y sólo sí existen $n - c$ funciones de M^n en \mathcal{R} tales que sus diferenciales constituyen una base de la co-distribución \mathcal{D}^\perp .* ♣

Esta versión del Teorema es similar a la presentada por [War71] (Cap.2, 2.32) en términos de *ideales y 1-formas diferenciales*.

A.4 Sistemas Lineales

En la presente sección se describen brevemente los sistemas lineales. Al respecto existe una abundante bibliografía. Una buena y completa presentación puede encontrarse en [Kai80, Zho97, Kuo96, Oga80].

³Una *co-distribución* es un mapa que a cada punto $m \in M$ le asigna un subespacio de $T_m^* M$

Consideremos el sistema lineal

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

donde u representa el vector de entradas e y el vector de salidas. Para el estudio de la interacción entrada-salida, Kalman introdujo, por 1960, los conceptos de alcanzabilidad y observabilidad. Junto con estos conceptos, presentó una forma de *descomponer* el sistema en sub-sistemas *alcanzables e inalcanzables* y *observables e no observables*. La obtención de estos sub-sistemas consiste en la identificación en el espacio de fases (\mathcal{R}^n) de subespacios invariantes bajo la matriz A y su relación con las matrices B y C .

Supongamos que V es un subespacio vectorial de \mathcal{R}^n invariante bajo A y tal que la imagen de B esta contenida en V . O sea que se cumplen las siguientes dos condiciones:

$$Av \in V, \forall v \in V, \quad Bu \in V, \forall u \in \mathcal{R}^m$$

Haciendo un cambio de coordenadas adecuado, podemos partir las matrices A y B de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donde las dimensiones del bloque nulo en la matriz A son $(n - d) \times d$, siendo d la dimensión de V y el resto de los bloques tienen dimensiones compatibles. En ese caso, podemos descomponer el vector de estado y consecuentemente el sistema (A.4) como sigue

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + b_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{22}x_2\end{aligned}$$

siendo x_1 el vector de las primeras d componentes de x . La solución del sistema anterior es la siguiente

$$\begin{aligned}x_1(t) &= e^{A_{11}t}x_1(0) + \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)}A_{12}e^{A_{22}\tau}d\tau x_2(0) + \int_0^t e^{A_{11}(t-\tau)}B_1u(\tau)d\tau \\ x_2(t) &= e^{A_{22}t}x_2(0)\end{aligned}\tag{A.12}$$

Como puede concluirse directamente de las ecuaciones, la *acción de control*, es decir, la entrada u no tiene influencia sobre una porción del vector de estados (x_2). Por lo tanto, el conjunto de estados que pueden ser alcanzados en un cierto tiempo T , partiendo de la condición inicial $x(0)$ es necesariamente de la forma $x^o(T) + v$, donde

$$v \in V, \quad x^o(T) = e^{AT}x(0)$$

La condición anterior se transforma en suficiente si uno pide que el subespacio V sea el *más pequeño* que satisface las condiciones anteriores, lo cual implica que [Kai80]

$$V = \text{Im} (B AB \dots A^{n-1}B)$$

Se dice que el par (A, B) es alcanzable si

$$\dim \{Im (B AB \dots A^{n-1}B)\} = n$$

O equivalentemente para todo $x \in \mathcal{R}^n$, existe $u(t)$ definida en $[0, T]$ tal que

$$x = \int_0^T e^{A(T-\tau)} B u(\tau) d\tau$$

Se puede realizar un razonamiento similar al anterior, y en cierto sentido dual, mirando ahora el sistema del lado de la salida. Consideremos un subespacio W invariante bajo A tal que esté contenido en el núcleo de la matriz C . Es decir

$$Aw \in W \quad \forall w \in W, \quad Cw = 0 \quad \forall w \in W$$

Realizando un proceso similar al anterior, se llega a la siguiente descripción del sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1u \\ \dot{x}_2 &= A_{22}x_2 + B_2u \\ y &= C_2x_2 \end{aligned}$$

De las ecuaciones anteriores puede concluirse que el conjunto de estados de coordenadas $x_2 = 0$ no tiene influencia sobre la salida. Dos condiciones iniciales dentro de ese conjunto serán indistinguibles para alguien que esté observando la salida del sistema. Es más, debido a la linealidad, dos condiciones iniciales que difieran en un elemento de W serán indistinguibles desde la salida. Esta propiedad permite clasificar los estados en observables y no observables, según influyan o no en la salida. Si al subespacio W le pedimos además que sea el *más grande* que cumple las condiciones anteriores, se llega a la siguiente propiedad

$$W = Ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Se dice que el par (C, A) es observable si $\dim(W) = n$ o equivalentemente

$$Ce^{At}x = 0, \quad \forall t \geq 0 \Leftrightarrow x = 0$$

La *Descomposición Canónica de Kalman* se obtiene realizando simultáneamente el pasaje del sistema (A.4) a uno donde se identifiquen las partes alcanzables y observables.

De lo anterior resulta que el espacio de fase puede ser partido en subespacios con propiedades particulares importantes, por medio de transformaciones lineales adecuadas (los cambios de base correspondientes). Cuando uno pretende llevar esta idea al caso de sistemas no lineales, aparecen algunas características particulares. En primer lugar, los cambios de coordenadas en sistemas no lineales pueden ser también no lineales. Son en general *difeomorfismos* que no alteran la diferenciabilidad de los mapas f , g_i y h_i del sistema (A.1) y (A.2). Estos cambios de coordenadas pueden ser locales o globales, según el caso en que estemos trabajando. En segundo lugar, la partición en regiones observables y alcanzables quizás sea posible realizarla en forma local y, en cualquier caso, dichas regiones serán variedades diferenciables. Como veremos en la siguiente sección el Teorema de Frobenius nos permite encontrar dichas variedades.

A.5 Alcanzabilidad y Observabilidad

Valiéndonos del Teorema de Frobenius, veremos a continuación como podemos extender al caso general no lineal, las descomposiciones canónicas presentadas en la sección A.4 para sistemas lineales.

En primer lugar observemos que dichas descomposiciones se basan en la existencia de subespacios invariantes particulares, vinculados con las matrices A , B y C . En segundo lugar, notemos que dichas descomposiciones tienen carácter global, es decir, constituyen una partición de todo el espacio.

Para el caso no lineal, intentaremos realizar un análisis local, en el que los subespacios invariantes serán reemplazados por subvariedades invariantes. En esa dirección introduciremos algunas definiciones y resultados.

Definición A.8 Una distribución \mathcal{D} se dice invariante bajo un campo de vectores f (ambos actuando sobre M^n) si

$$[f, \tau] \in \mathcal{D} \quad , \quad \forall \tau \in \mathcal{D}$$

◇

Denotaremos por $[f, \mathcal{D}]$ a la distribución generada por todos los vectores de la forma $[f, \tau]$ con $\tau \in \mathcal{D}$. Si $\{\tau_1, \dots, \tau_c\}$ es una base de \mathcal{D} , entonces algunas consecuencias directas de la definición anterior son las siguientes:

Propiedad A.2 \mathcal{D} es invariante bajo $f \Leftrightarrow$

$$[f, \tau_i] \in \mathcal{D} \quad , \quad i = 1, \dots, c$$

Propiedad A.3

$$\mathcal{D} + [f, \mathcal{D}] = \text{gen}\{\tau_1, \dots, \tau_c, [f, \tau_1], \dots, [f, \tau_c]\}$$

Propiedad A.4 Si \mathcal{D} es invariante bajo f_1 y f_2 entonces lo es también bajo $[f_1, f_2]$.

Los resultados anteriores se basan en la igualdad

$$[f, \tau] = \sum_{k=1}^c c_k [f, \tau_k] + \sum_{k=1}^c (dc_k(f)) \tau_k$$

que se obtiene de la ecuación (A.4) con $f \equiv 1$ y $g = c_k$ y en la Identidad de Jacobi (A.5).

Los siguientes resultados muestran el camino que hay que seguir para llegar a las formas canónicas buscadas.

Lema A.6 Sea M^n una variedad, f un campo de vectores y $m \in M^n$. Si \mathcal{D} es una distribución de dimensión c en M^n involutiva, entonces existe una parametrización (U, φ) de m tal que la representación en coordenadas locales del campo f es de la siguiente forma

$$f(r_1, \dots, r_n) = \begin{bmatrix} f_1(r_1, \dots, r_c, r_{c+1}, \dots, r_n) \\ \vdots \\ f_c(r_1, \dots, r_c, r_{c+1}, \dots, r_n) \\ f_{c+1}(r_{c+1}, \dots, r_n) \\ \vdots \\ f_n(r_{c+1}, \dots, r_n) \end{bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

♣

Si llamamos

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (r_1, \dots, r_c) \\ \zeta_2 &= (r_{c+1}, \dots, r_n) \end{aligned}$$

el sistema dinámico

$$\dot{x} = f(x)$$

adopta la siguiente expresión en coordenadas

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}_1 &= \tilde{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) \\ \dot{\zeta}_2 &= \tilde{f}_2(\zeta_2) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Como puede observarse, la ecuación (A.14) tiene una forma similar a la (A.12) con entrada nula. Más aún, la ecuación (A.12) puede verse como un caso particular de la (A.14) considerando $M^n = \mathcal{R}^n$, $f(x) = Ax$ y la distribución constante $\mathcal{D}(x) = V$, siendo V un subespacio vectorial invariante bajo A .

A.5.1 Alcanzabilidad y Observabilidad local

Escribamos nuevamente el sistema de control

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \quad (\text{A.15})$$

$$y_i = h_i(x) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

siendo f, g_1, \dots, g_m campos de vectores en M^n y h_1, \dots, h_p funciones de M^n en los reales.

Teorema A.7 Si \mathcal{D} es una distribución involutiva de dimensión c en M^n , invariante bajo los campos f, g_1, \dots, g_m , que cumple además que

$$\text{gen}\{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathcal{D}$$

entonces para cada $m \in M^n$ existe un entorno tal que la expresión en coordenadas locales del sistema (A.15) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \tilde{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_{1i}(\zeta_1, \zeta_2)u_i \\ \dot{\zeta}_2 &= \tilde{f}_2(\zeta_2)\end{aligned}\tag{A.16}$$

$$y_i = \tilde{h}_i(\zeta_1, \zeta_2) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

con $\zeta_1 = (r_1, \dots, r_c)$ y $\zeta_2 = (r_{c+1}, \dots, r_n)$. ♣

El teorema anterior permite *visualizar* las regiones alcanzables en un entorno del punto m . Si estudiamos la trayectoria $x(t)$ del sistema dinámico (A.16), vemos que la entrada no afecta a la porción ζ_2 de las coordenadas de x . Designemos por

$$\Phi_T^f(x_o) = x_o(T)$$

el flujo del campo f en el instante T , con condición inicial x_o . Entonces, las últimas $n - c$ coordenadas de $\Phi_T^f(x_o)$ coinciden con las de x_o en todo instante (del dominio de la solución). Por lo que la trayectoria se mueve en un corte del tipo $\zeta_i = \text{constante}$, $i = c + 1, \dots, n$, que, por el Teorema de Frobenius es justamente una variedad integral de \mathcal{D} . Entonces el conjunto de puntos de la variedad M^n alcanzables desde x_o en un tiempo menor o igual a T es un subconjunto de una variedad integral. Podemos entonces realizar una partición local del espacio de estados en subvariedades de dimensión c que contiene los conjuntos alcanzables en un tiempo dado.

El teorema análogo para la observabilidad es el siguiente:

Teorema A.8 *Si \mathcal{D} es una distribución involutiva de dimensión c en M^n , invariante bajo los campos f, g_1, \dots, g_m , que cumple además que la co-distribución*

$$\text{gen}\{dh_1, \dots, dh_p\} \subset \mathcal{D}^\perp$$

entonces para cada $m \in M^n$ existe un entorno tal que la expresión en coordenadas locales del sistema (A.15) adquiere la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{\zeta}_1 &= \tilde{f}_1(\zeta_1, \zeta_2) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_{1i}(\zeta_1, \zeta_2)u_i \\ \dot{\zeta}_2 &= \tilde{f}_2(\zeta_2) + \sum_{i=1}^m \tilde{g}_{2i}(\zeta_2)u_i\end{aligned}\tag{A.17}$$

$$y_i = \tilde{h}_i(\zeta_2) \quad , \quad 1 \leq i \leq p$$

con $\zeta_1 = (r_1, \dots, r_c)$ y $\zeta_2 = (r_{c+1}, \dots, r_n)$. ♣

En este caso, el espacio de estados puede ser partido en subvariedades de dimensión c de forma tal que los puntos de una misma subvariedad producen la misma salida (es decir que son indistinguibles para un observador a la salida).

Los teoremas anteriores implican el conocimiento de una distribución con características particulares. Un conjunto de resultados permiten asegurar la existencia de una tal distribución e indican una manera de encontrarla. Citaremos a continuación algunos de dichos resultados, que indican como seguir para resolver el problema.

Lema A.9 *Dada una distribución \mathcal{D} diferenciable y campos de vectores f, g_1, \dots, g_m , entonces la familia de distribuciones que contienen a \mathcal{D} y son invariantes bajo f, g_1, \dots, g_m contiene un elemento minimal, que es una distribución diferenciable (que notaremos $\langle f, g_1, \dots, g_m | \mathcal{D} \rangle$). ♣*

Lema A.10 *La siguiente secuencia de distribuciones*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \mathcal{D} \\ \mathcal{D}_k &= \mathcal{D}_{k-1} + [f, \mathcal{D}_{k-1}] + \sum_{i=1}^m g_i, \mathcal{D}_{k-1} \end{aligned}$$

verifica que

$$\mathcal{D}_{k-1} \subseteq \mathcal{D}_k \subseteq \langle f, g_1, \dots, g_m | \mathcal{D} \rangle$$

♣

Este lema brinda un *algoritmo* para encontrar una distribución que cumpla con las condiciones del teorema A.7, cuando consideramos $\mathcal{D} = \text{gen}\{g_1, \dots, g_m\}$. Para las cuestiones de observabilidad existen resultados similares que involucran la búsqueda de co-distribuciones [Isi89].

Mostraremos a continuación un ejemplo (tomado de [Isi89]) que ilustra sobre la aplicación de los resultados anteriores.

Ejemplo A.1 *Consideremos el siguiente sistema en dimensión 4:*

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u$$

con $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ y

$$f(x) = \begin{bmatrix} x_1 x_3 + x_2^2 \\ x_3 \\ x_4 - x_2 x_3 \\ x_3^2 + x_2 x_4 - x_2^2 x_3 \end{bmatrix} \quad g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Apliquemos entonces el algoritmo del Lema A.10. Tenemos entonces que $\mathcal{D}_0 = \text{gen}\{g\}$ y $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_0 + [f, \mathcal{D}_0]$. Como

$$[f, \mathcal{D}_0] = \{[f, \tau] / \tau \in \mathcal{D}_0\} = \{[f, \lambda g] / \lambda \in \mathcal{R}\} = \text{gen}\{[f, g]\}$$

Calculemos $[f, g]$ en coordenadas:

$$[f, g](x) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

siendo $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial x}$ los jacobianos respectivos. Operando, tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} x_3 & (1+x_2)e^{x_2} & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x_3 & -x_2 & 1 \\ 0 & x_4 - 2x_2x_3 & 2x_3 - x_2^2 & x_2 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

de donde

$$[f, g](x) = \begin{bmatrix} -e^{x_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De lo anterior resulta que $\mathcal{D}_1 = \text{gen}\{g, [f, g]\}$. Siguiendo con la construcción, vemos que $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 + [f, \mathcal{D}_1] + [g, \mathcal{D}_1]$. Pero como en este caso se cumple que

$$[f, [f, g]] = [g, [f, g]] = 0$$

resulta que

$$\mathcal{D}_1 = \langle f, g | \text{gen}\{g\} \rangle = \text{gen}\{g, [f, g]\}$$

Por lo tanto, \mathcal{D}_1 es la mínima distribución invariante bajo f y g que contiene la distribución generada por $\{g\}$. Como corolario de un resultado no enunciado aquí se tiene que \mathcal{D}_1 es involutiva. Vamos a utilizarla entonces para hallar una descomposición del sistema como la (A.16). Para integrar la distribución, encontraremos funciones λ_1 y λ_2 a valores reales tales que

$$\text{gen}\{d\lambda_1, d\lambda_2\} = [\langle f, g | \text{gen}\{g\} \rangle]^\perp$$

lo que escrito de otra manera equivale a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & e^{x_2} \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ x_3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Las funciones deben satisfacer la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_4} x_3 = 0$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} e^{x_2} = 0$$

Como la segunda igualdad implica que $\frac{\partial \lambda}{\partial x_1} = 0$, la ecuación se reduce a

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_2} + \frac{\partial \lambda}{\partial x_4} x_3 = 0$$

Dos posibles soluciones linealmente independientes son las siguientes:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= x_3 \\ \lambda_2 &= x_4 - x_2 x_3 \end{aligned}$$

Haciendo el siguiente cambio de coordenadas

$$\begin{aligned}z_1 &= x_1 \\z_2 &= x_2 \\z_3 &= \lambda_1(x) = x_3 \\z_4 &= \lambda_2(x) = x_4 - x_2x_3\end{aligned}$$

la expresión del sistema en las nuevas coordenadas resulta ser

$$\dot{z} = \begin{bmatrix} z_1 z_3 + z_2 e^{z_2} \\ z_3 \\ z_4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

que tiene la misma forma que (A.16). ♠

A.6 Conclusiones

Una aplicación importante del Teorema de Frobenius es la mostrada en los capítulos 4 y 8: el control por linealización exacta. Además, como se vio en este apéndice, entonces, el Teorema de Frobenius permite trasladar a los sistemas de control no lineales, definiciones y conceptos que han demostrado gran utilidad en el estudio de los sistemas lineales, como alcanzabilidad, controlabilidad, observabilidad y detectabilidad. Vimos que bajo determinadas hipótesis, los sistemas que estudiamos admiten una descomposición local en subvariedades alcanzables, controlables, etc. Tal partición coincide con la conocida Descomposición Canónica de Kalman para el caso particular de un sistema lineal. Numerosos trabajos, fundamentalmente los de H. Sussmann [Sus73, Sus77, Sus79b, Sus79a, Sus83] permiten realizar particiones del espacio de estados de carácter global.

Bibliografía

- [And90] B.D.O. Anderson; J.B. Moore. *Optimal Control - Linear Quadratic Methods*. Prentice-Hall, Inc., 1990.
- [Apk96] P. Apkarian; G. Becker; P. Gahinet; H. Kajiwara. *LMI techniques in control engineering from theory to practice*, 1996. Workshop Notes CDC, Kobe, Japan.
- [Arn74] V. Arnold. *Équations Différentielles Ordinaires*. MIR, Moscou, 1974.
- [Ath66] M. Athans; P.L. Falb. *Optimal Control*. McGraw-Hill, Inc., 1966.
- [Bel62] R. Bellman; S.E. Dreyfus. *Applied Dynamic Programming*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [Bod95] B. Bodenheimer; P. Bendotti; M. Kantner. *Linear parameter-varying control of a ducted fan*. Technical Report 95-004, CDS - Caltech, 1995.
- [Bry75] Bryson & Ho. *Applied Optimal Control*. Meisphere Publ. Corp., Washington D.C., 1975.
- [Can77] R. Barrera.; R. Canales. *Análisis de Sistemas Dinámicos y Control Automático*. Limusa, Mexico, 1977.
- [Cho94] H. Choi; P. Sturdza; R. Murray. Design and construction of a small ducted fan engine for nonlinear control experiments. In *Proceedings of the 1994 American Control Conference*, pages 2618–2622, 1994.
- [DoC88] M. P. Do Carmo. *Geometria Riemanniana*. IMPA, 1988.
- [Fre96] R. Freeman; P. Kokotovic. *Robust Nonlinear Control Design: State-Space and Lyapunov Techniques (Systems & Control: Foundations & Applications)*. Birkhauser, 1996.
- [Gah95] P. Gahinet; A. Nemirovski; A. Laub; M. Chilali. *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*, 1995.
- [Gal90] B. Gal-Or. Fundamentals Concepts of Vectored Propulsion. *Journal of Propulsion*, (6):747–757, 1990.
- [Har64] P. Hartman. *Ordinary Differential Equations*. Wiley, New York, 1964.

- [IEE95] *Proceedings of the IEEE: Special Issue on Nonlinear Phenomena in Power Systems*, November 1995.
- [Isi89] Alberto Isidori. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1989.
- [JYu98] J. Yu; A. Jadbabaie; J. Primbs; Y. Huang. Comparison of nonlinear control designs for a ducted fan model. Unpublished, 1998.
- [Kha96] Hassan Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, 1996.
- [Kai80] Thomas Kailath. *Linear Systems*. Prentice Hall, 1980.
- [Kan95] M. Kantner; B. Bodenheimer; P. Bendotti; R. Murray. An experimental comparison of controllers for a vectored thrust, ducted fan engine. In *Proceedings of the American Control Conference*, 1995.
- [Kar84] N. Karmarkar. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, (4):373–595, 1984.
- [Kat95] A. Katok.; B. Hasselblatt. *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1995.
- [Kuo96] Benjamin C. Kuo. *Sistemas de Control Automático*. Prentice-Hall, 7 edition, 1996.
- [Lew81] J. Lewowicz.; E. Lima de Sá.; J. Tolosa. Lyapunov functions of two variables and a conjugacy theorem for dynamical systems. *Acta Científica Venezolana*, 32:463–468, 1981.
- [Mas49] Jose Luis Massera. On Liapounoff’s conditions of stability. *Annals of Mathematics*, 50:705–721, 1949.
- [Meg97] A. Megretski; A. Rantzer. System analysis via integral quadratic constraints. *IEEE TAC*, 42(6):819–830, June 1997.
- [Min62] N. Minorsky. *Nonlinear Oscillations*. Princeton, 1962.
- [Mur96] R. Murray. *Modeling of the caltech ducted fan*, 1996. Class Notes.
- [Nev97] Vesna Nevistić. *Constrained Control of Nonlinear Systems*. PhD thesis, ETH, Zurich, 1997.
- [Nie97] M. Van Nieuwstadt; R. Murray. Real time trajectory generation for differentially flat systems. In *Proceedings of the 1996 IFAC World Congress*, 1997.
- [Pri98a] J. Primbs; V. Nevistić; J. Doyle. On receding horizon extensions and control lyapunov functions (part i). Submitted to IEEE TAC, 1998.
- [Pri98b] J. Primbs; V. Nevistić; J. Doyle. On receding horizon extensions and control lyapunov functions (part II). Submitted to IEEE TAC, 1998.
- [Oga80] K. Ogata. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice-Hall, 1980.

- [Pon59] L. S. Pontryagin. *Optimal Control Processes*. 1959.
- [Rou73] N. Rouche; J. Mawhin. *Ordinary Differential Equations*. Pitman, Boston, 1973.
- [Rug91] W. R. Rugh. Analytical framework for gain scheduling. *IEEE Control Systems Magazine*, 11(January):79–84, 1991.
- [Sag68] A.P. Sage. *Optimum Systems Control*. Prentice Hall, N.J., 1968.
- [Slo91] J.J. Slotine; Li Weiping. *Applied Nonlinear Control*. Prentice-Hall, Inc., 1991.
- [Son89] E. D. Sontag. A 'universal' construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization. *Systems and Control Letters*, 13(2):117–123, 1989.
- [Sot79] Jorge Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. IMPA, Rio de Janeiro, 1979.
- [Sus73] H. Sussmann. Orbits of families of vector fields and integrability of distributions. *Trans. Am. Math. Soc.*, (180):171–188, 1973.
- [Sus77] H. Sussmann. Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems. *Math. Syst. Theory*, (10):263–284, 1977.
- [Sus79a] H. Sussmann. Single input observability of continuous time systems. *Math. Syst. Theory*, (12):371–393, 1979.
- [Sus79b] H. Sussmann. Subanalytic sets and feedback control. *J. of Differential Equations*, (31):31–52, 1979.
- [Sus83] H. Sussmann. Lie brackets and local controlability. *J. Control Optimization*, (21):686–713, 1983.
- [Vid93] M. Vidyasagar. *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, 2nd edition, 1993.
- [War71] F. W. Warner. *Foundations on Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Springer Verlag, 1971.
- [Zho97] K. Zhou; J. Doyle. *Essentials of Robust Control*. Prentice-Hall, 1997.