



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA



Herramientas para el análisis de convertidores dc-dc en régimen caótico

TESIS PRESENTADA A LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA POR

Fernando Trías

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGISTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.

DIRECTOR DE TESIS

Gabriel Eirea Universidad de la República

TRIBUNAL

César Briozzo Universidad de la República

Roberto Markarian Universidad de la República

Pablo Monzón Universidad de la República

DIRECTOR ACADÉMICO

Gabriel Eirea Universidad de la República

Montevideo
25 de febrero de 2014

Herramientas para el análisis de convertidores dc-dc en régimen caótico, Fernando Trías.

ISSN 1688-2806

Esta tesis fue preparada en L^AT_EX usando la clase iietesis (v1.1).

Contiene un total de 118 páginas.

Compilada el 25 de febrero de 2014.

<http://iie.fing.edu.uy/>



ACTA DE DEFENSA

TESIS DE MAESTRÍA

Fecha: Lunes 23 de diciembre de 2013 .-

Lugar: Montevideo, Facultad de Ingeniería – Universidad de la República.-

Plan de Estudio: Maestría en Ingeniería Eléctrica.-

Aspirante: Fernando Julio Trías Vignali.-

Documento de Identidad: 3.049.423-7

Director/es de Tesis: Dr. Gabriel Eirea.-

Tribunal: Prof. César Briozzo (IIE, Fac. Ingeniería);
Dr. Roberto Markarian (IMERL, Fac. Ingeniería);
Dr. Pablo Monzón (IIE, Fac. Ingeniería);
Dr. Gabriel Eirea (IIE, Fac. Ingeniería).-

Los miembros del Tribunal hacen constar que en el día de la fecha el **Sr. Ing. Fernando Trías** ha sido **APROBADO** en la defensa de su Tesis de Maestría titulada: "Herramientas para el análisis de convertidores dc-dc en régimen caótico"

La resolución del Tribunal se fundamenta en los puntos detallados a continuación:

La tesis aborda una temática importante en un área de fuerte aplicación como es la electrónica de potencia.

Se introducen herramientas matemáticas poderosas en un área en que la tecnología está dominada por la aproximación lineal complementada por ensayos.

El tesista demuestra una buena comprensión de las herramientas matemáticas necesarias para abordar el problema.

La tesis representa un aporte metodológico al estado del arte del colectivo nacional de sistemas eléctricos de potencia.

La exposición oral fue solvente y complementó adecuadamente la tesis escrita.



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA



FACULTAD DE
INGENIERIA

Para que conste,

Firmas originales

Prof. César Briozzo

Dr. Roberto Markarian

Dr. Pablo Monzón

Dr. Gabriel Eirea

Resumen

A lo largo de esta tesis se presentará el funcionamiento en régimen caótico de convertidores dc-dc. Para ello, en primer lugar, se introducirán herramientas matemáticas para el estudio cualitativo de los mismos, como los mapas estroboscópicos y diagramas de bifurcación. Posteriormente, ya abocados a buscar instrumentos útiles para el diseño, agregaremos otras provenientes del análisis estadístico, como los mapas de Markov que tienen importantes propiedades como la de ergodicidad. Veremos que los convertidores controlados por corriente, bajo ciertas hipótesis, pueden modelarse por ejemplos de mapas de Markov, como el normalizado y el de impacto, que nos permitirán buscar expresiones explícitas para los promedios de aquellas variables que sean de interés. Se incluyen aplicaciones de ingeniería como el cálculo de un filtro capacitivo en un rectificador que incluye un convertidor Buck-Boost y el diseño completo de un convertidor Boost con control por corriente.

Índice general

Resumen	I
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.1.1. Problemas en el modelado	1
1.1.2. Posible aplicación: espectro esparcido	4
1.1.3. Reparto de corriente en sistemas modulares de alta potencia	5
1.2. Algo de Historia	6
1.3. Lorenz: Aperiodicidad en un Sistema Determinístico	10
1.4. Definiciones de Caos y Atractor Extraño	15
1.5. Caos Transitorio	16
1.6. Conclusiones	17
2. Mapas	21
2.1. Introducción	21
2.2. Definición de mapa	21
2.3. Puntos periódicos	21
2.4. Mapas de Poincaré	22
2.5. Mapas estroboscópicos.	22
2.6. Sumideros (atractores), fuentes (repulsores) y sillas de montar	23
2.7. Mapas no lineales y la matriz jacobiana	24
2.8. Dinámica de los mapas bidimensionales	25
2.9. Bifurcación por duplicación de período	26
2.9.1. Duplicación de período en mapas de primer orden	26
2.9.2. Duplicación de período en mapas de segundo orden	28
2.9.3. Cascadas de duplicación de período como ruta al caos.	29
2.10. Alinealidad por saturación y <i>Border Collision</i>	30
2.10.1. Conversor Boost en modo corriente	30
2.10.2. Conversor Buck en modo tensión	32
2.11. Conclusiones	33
3. Mapas para circuitos electrónicos de potencia	35
3.1. Introducción	35
3.2. Estudio de algunas topologías de interés	37
3.2.1. Buck-Boost, control por corriente	37

Índice general

3.2.2. Buck en MCC y control por voltaje	40
3.2.3. Boost en MCC y control por corriente.	41
3.3. Resumen de las matrices de sistema para las topologías analizadas en este capítulo	44
3.3.1. Buck-Boost en MCD.	44
3.3.2. Buck en MCC	45
3.3.3. Boost en MCC y control por corriente	45
3.4. Simulaciones, diagramas de bifurcación, diagramas de Poincaré: un enfoque práctico	45
3.5. Conclusiones	50
4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un con- versor DC/DC	55
4.1. Introducción	55
4.2. Descripción y modelado del sistema a estudio	55
4.3. Mapas discretos	58
4.3.1. Instantes de apagado de la llave	58
4.3.2. Mapas en conducción continua	59
4.3.3. Mapas en conducción discontinua	60
4.4. Simulaciones	60
4.4.1. Uso del Jacobiano para la predicción de la bifurcación por duplicación de período	65
4.5. Conclusiones	69
5. Estadísticas de mapas caóticos	71
5.1. Introducción	71
5.2. Evolución de densidades: operador de Perrón-Frobenius.	71
5.3. Teorema de Birkoff-Khirschin.	74
5.4. Mapas de Markov	74
5.4.1. Definición. Densidad invariante de un Mapa de Markov	74
5.4.2. Ejemplo	77
5.5. Descripción mediante densidades del comportamiento caótico de un convertor DC/DC bajo modo de control por corriente	78
5.5.1. Modelo normalizado de corriente de inductor	78
5.5.2. Algunas propiedades interesantes del mapa normalizado	79
5.5.3. Densidad invariante del mapa normalizado	80
5.5.4. Promedio temporal de la corriente de inductor	81
5.5.5. Frecuencia de conmutación y tiempo útil promedios	83
5.5.6. Mapa de impacto	84
5.5.7. Cálculo de promedios de interés usando los momentos es- tadísticos del mapa de impacto	86
5.6. Aplicación: régimen caótico en un convertor Boost	88
5.6.1. Simulaciones	88
5.6.2. Validación de las ecuaciones	88
5.7. Ejemplo de diseño	91
5.8. Conclusiones	95

	Índice general	
6. Conclusiones finales		97
Bibliografía		103
Índice de figuras		105

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Esta tesis trata sobre el análisis de convertidores dc-dc en régimen caótico. Como el objeto es convertir la energía eléctrica a altos niveles de eficiencia, el convertidor de potencia ideal contiene solo componentes sin pérdidas. Hay dos grupos de componentes reales que aproximadamente tienen este comportamiento:

a) Switches, como transistores y diodos. Los switches activos, como MOSFETs y transistores, encienden y apagan en respuesta a una señal. Los switches pasivos, como los diodos, tienen una característica $[v, i]$ altamente no lineal.

b) Componentes reactivos. Los condensadores y bobinas están caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales. En un período absorben, guardan y devuelven la energía.

Los switches dirigen la energía a lo largo del circuito, mientras los componentes reactivos actúan como almacenes intermediarios. Otra fuente de alinealidad son los circuitos de control que incluyen componentes no lineales: comparadores, moduladores por ancho de pulso (PWMs), controles digitales, etc. En conjunto, todos estos elementos conforman sistemas físicos no-lineales y variables en el tiempo.

Los métodos tradicionales de diseño pasan por fijar un punto de equilibrio y estudiar la dinámica de las pequeñas perturbaciones en torno a él. Veremos que con ese enfoque se pierde una información que puede llevarnos a errores de diseño y, más aún, descartar dinámicas de funcionamiento que podrían ser provechosas desde el punto de vista de la performance del proyecto tanto técnica como económicamente.

1.1.1. Problemas en el modelado

Un ejemplo de convertidor DC/DC, el buck (Fig.1.1), es un circuito conmutado que convierte una tensión de continua en otra más baja, por ejemplo para reducir los 5Vdc estandar que provee la fuente de una computadora en los 3, 3Vdc que necesita un microprocesador. La llave S abre y cierra periódicamente a una frecuencia f , con un *duty ratio*¹ d . Cuando S cierra se presenta el voltaje de entrada E sobre

¹La fracción del período en que la llave está encendida.

Capítulo 1. Introducción

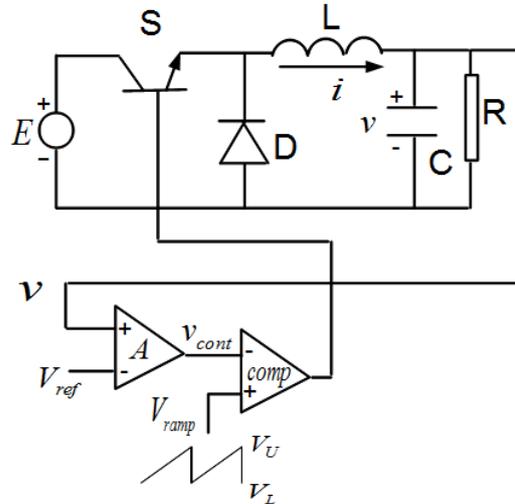


Figura 1.1: Conversor Buck, lazo cerrado de control de tensión de salida.

el filtro LC . Cuando abre, la self mantiene la corriente, forzando la conducción del diodo D y poniendo a tierra el filtro LC ². El filtro ve una onda cuadrada entre 0 y E . Sobre la carga R se impone una tensión con un valor medio que se puede variar cambiando el *duty* d . Esta forma de operación, donde la corriente de self no se anula en ningún momento, se llama «Modo de Conducción Continua». Para regular la tensión de salida v se incorpora un loop de realimentación por el que se compara la salida con una tensión de referencia V_{ref} . Ese error, una vez amplificado, forma una señal de control $V_{cont} = A[v - V_{ref}]$ que alimenta un circuito PWM , consistiendo este de un generador de rampa de frecuencia f con niveles extremos V_L y V_U y un comparador que dirige al switch S . Siempre que $V_{cont} < V_{ramp}$ este conducirá, obteniéndose un régimen en el cual la tensión de salida se mantiene muy cercana a V_{ref} .

La forma tradicional de modelar este tipo de circuito es tomar un promedio sobre un período de switch. Como la teoría tradicional de control requiere un modelo lineal, el circuito promediado resultante generalmente se linealiza en torno a un punto de equilibrio convenientemente elegido. Puede verse [8] capítulo 11 para un enfoque en profundidad. Asumiendo que el ripple de las variables de estado i y v es pequeño y que además su variación es lenta³ obtenemos el circuito promediado por simple sustitución de las llaves por uno de los llamados «circuitos canónicos» (ver Fig.1.2). En primer lugar los componentes lineales permanecen en el modelo ya que la derivada del promedio y el promedio de la derivada de cualquier variable de estado son iguales. En segundo lugar la sustitución de las llaves responde al hecho intuitivo de que— si la variación de i es pequeña —ya que la llave se enciende

²Suponiendo ideal a D .

³Se entiende suficientemente lento si su ancho de banda está por debajo de la mitad de la frecuencia de conmutación.

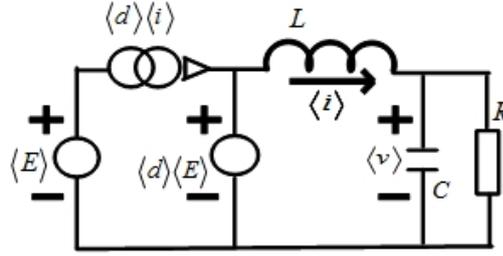


Figura 1.2: Conversor Buck, modelo promediado no lineal.

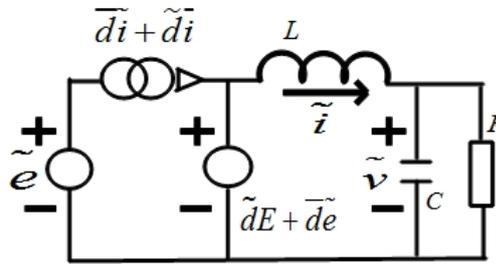


Figura 1.3: Conversor Buck, modelo lineal de perturbaciones.

un tiempo dT en cada período, el promedio de la corriente por S será $\langle d \rangle \langle i \rangle$. Asimismo, el promedio de la tensión sobre el diodo D — ya que E es de variación lenta —debe ser $\langle d \rangle \langle E \rangle$. El modelo es claramente no lineal debido a la existencia de los productos de variables $\langle d \rangle \langle i \rangle$ y $\langle d \rangle \langle E \rangle$. Dado un punto de equilibrio $(\bar{d}, \bar{i}, \bar{v})$, vamos a considerar pequeñas perturbaciones del mismo, teniéndose:

$$\langle d \rangle \langle i \rangle = (\bar{d} + \tilde{d}) (\bar{i} + \tilde{i}) = \bar{d}\bar{i} + \bar{d}\tilde{i} + \tilde{d}\bar{i} + \tilde{d}\tilde{i} \simeq \bar{d}\bar{i} + \bar{d}\tilde{i} + \tilde{d}\bar{i}$$

$$\langle d \rangle \langle v \rangle = (\bar{d} + \tilde{d}) (\bar{v} + \tilde{v}) = \bar{d}\bar{v} + \bar{d}\tilde{v} + \tilde{d}\bar{v} + \tilde{d}\tilde{v} \simeq \bar{d}\bar{v} + \bar{d}\tilde{v} + \tilde{d}\bar{v}$$

Se han despreciado los infinitésimos de segundo orden, obteniendo ahora un modelo lineal. Por superposición separamos el modelo de perturbaciones (Fig.1.3).

Si la tensión de entrada es constante ($\tilde{e} = 0$), tomando transformada de Laplace obtenemos la siguiente transferencia de lazo abierto:

$$\frac{\tilde{v}(s)}{\tilde{d}(s)} = \frac{\bar{E}}{LCs^2 + \frac{L}{R}s + 1}$$

Es fácil ver que el lazo de realimentación PWM realiza un control proporcional con la siguiente expresión:

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{v}} = \frac{A}{V_U - V_L}$$

Capítulo 1. Introducción

Tenemos todos los elementos para implementar un lazo de realimentación con un margen de fase aceptable. Si $f = 2,5kHz$, $A = 8,4$, $V_U = 8,2V$, $V_L = 3,8V$, $V_{ref} = 12V$, $L = 20mH$, $C = 47\mu F$ y $R = 22\Omega$ se obtiene un margen de fase que varía entre $10,2^\circ$ para $E_{\min} = 15V$ y $6,2^\circ$ para $E_{max} = 40V$ (ver [1]). Por tanto, mediante el procedimiento de promediado y linealización, se diseñó un control estable para todo el rango de interés de variación de la tensión de entrada.

En las Figuras 3.9 hasta 3.12 vemos las formas de onda en régimen de la tensión de salida, corriente de self y control para los valores de tensión de entrada E igual a $23V$, $26V$, $32,02V$ y $32,25V$ respectivamente. El comportamiento periódico que se aprecia en el primer caso, en el segundo caso es sustituido por otro que se repite cada dos ciclos de la rampa: aparecen subarmónicos del doble de período de la frecuencia de conmutación. Si continuamos incrementando E el comportamiento cambia a uno aparentemente aleatorio, errático y aperiódico. Esta situación es conocida como «caos».

El método de promediado y linealización predijo que el Buck sería estable sobre el rango completo de tensión de entrada, pero es evidente que el conversor puede exhibir subarmónicos y caos en el trayecto. No hay método basado en la linealización que pueda predecir tales efectos peculiares de los sistemas no lineales [1]. Antes aún, al promediar, aunque se obtiene otro sistema no lineal, se suprimen comportamientos que un modelo más detallado podría contemplar, siendo esta la primer motivación para afrontar esta tesis.

1.1.2. Posible aplicación: espectro esparcido

Los convertidores DC/DC, debido a los cambios bruscos de tensión y corriente en las llaves con que se implementan, son notorios generadores de interferencia electromagnética. El método tradicional de combate a este problema, ha sido el uso de filtros y apantallamientos que, aparte de lo complejo de su implementación, penalizan el diseño por sus importantes costos y peso agregado. La mayoría de los estándares sobre EMC⁴ imponen un límite superior en la potencia emitida por bandas específicas de frecuencia. Existen al día de hoy familias importantes de integrados⁵, que resuelven el problema esparciendo el espectro mediante la modulación de la frecuencia de conmutación por una señal pseudoaleatoria. De ese modo, se evita la concentración de energía en el entorno de determinadas frecuencias, típica del régimen periódico buscado por el diseño tradicional, pudiendo el conversor cumplir las regulaciones sin el agregado de circuitería adicional. Un logro especialmente interesante de los procedimientos de modificación espectral en la fuente misma de ruido, es que afecta todas las rutas de emisión en forma similar: tanto la interferencia por conducción –ya sea en modo diferencial o modo común– como la radiada. En contraste, el filtrado y apantallamiento utiliza distintas técnicas por cada ruta. Si operásemos el sistema en un régimen aperiódico como el mostrado en la sección anterior, se podría lograr el mismo efecto por la sola selección de

⁴Compatibilidad electromagnética por sus siglas en inglés.

⁵Como la HiperPFS, perteneciente a POWER integrations, o bien el PSoC 1 PRS perteneciente a Cypress Semiconductor.

los valores de los componentes, sin el agregado de circuitos complejos de control. Este es uno de los campos de investigación actual en electrónica de potencia [15] y representa un motivo práctico de relevancia para introducirnos en un tema como el que pretende esta tesis.

1.1.3. Reparto de corriente en sistemas modulares de alta potencia

La demanda de productos flexibles para altas potencias, por ejemplo en telecomunicaciones, ha impuesto la interconexión de convertidores en paralelo. El principal problema al paralelar convertidores es el control del reparto de corriente entre ellos. La salida de un convertidor es una fuente de tensión fija, constante en todo el rango de cargas para la que fué diseñada, de modo que es teóricamente imposible poner dos convertidores en paralelo alimentando la misma carga y que repartan equitativamente la corriente. Se necesita un control que en forma compulsiva asegure la distribución deseada. El enfoque utilizado es emplear un esquema de control activo que fuerce a la corriente de un convertidor a seguir la de otro [21].

La esencia de este tipo de control es monitorear la diferencia de las corrientes de salida de los convertidores e incorporar esta información en el loop de tensión. La Fig. 1.4 muestra una posible topología para dos convertidores en paralelo. Uno de ellos – convertidor 1, «*master*»– tiene un control de tensión común. El segundo convertidor – «*slave*»– tiene un un loop adicional interior que provee la información de error de corriente para ajustar el loop de tensión de modo de forzar el reparto de la carga. Ambos convertidores son controlados por un esquema de PWM simple como vimos para el Buck de la sección 1.1.1.

V_{offset} impone un *duty cycle* deseado para el caso del cumplimiento del objetivo de control; K_{V_1} y K_{V_2} son las ganancias de la realimentación de voltaje para los respectivos convertidores; K_i es la ganancia del loop de corriente del convertidor esclavo y m es el factor de peso de corriente. Si $m = 1$ esperamos un reparto de corriente exacto.

Sean dos convertidores Buck con los siguientes valores dados: $T = 40\mu seg$, $E = 40V$, $V_{ref} = 20V$, $V_{offset} = 3V$, $L_1 = 1,2mH$, $r_{L_1} = 0,05\Omega$, $L_2 = 3mH$, $r_{L_2} = 0,2\Omega$, $C = 4,7\mu F$, $r_C = 0,01\Omega$ y $R = 10\Omega$ y las ganancias de las realimentaciones $m = 1$, $K_i = 5$. Sea $K_{V_1} = K_{V_2} = K$ parámetro que vamos a variar para estudiar el comportamiento del sistema. La Fig.1.5 muestra las formas de onda para corrientes de self y la tensión de salida del sistema para $K_{V_1} = K_{V_2} = K = 3$. Se ve un régimen periódico de $T = 40\mu seg$ donde se cumplen los objetivos de control: $V_{out} \simeq 20V$ y reparto exacto de la carga, con $i_{L_1} \simeq i_{L_2} \simeq 1A$.

Por otro lado, la Fig.1.6 muestra las mismas formas de onda para $K_{V_1} = K_{V_2} = K = 8$. El régimen es completamente aperiódico –caótico– pero las consignas de control se siguen cumpliendo.

La puesta en paralelo de convertidores deriva en sistemas donde aparecen diversos comportamientos que llevan al caos. Este es otro motivo de relevancia para prestarle atención al tema, ya que el formidable crecimiento de las telecomunicaciones, principal consumo de corriente continua en nuestro país, tiene como corolario natural el agregado en paralelo de convertidores y por tanto, la necesidad de resolver,

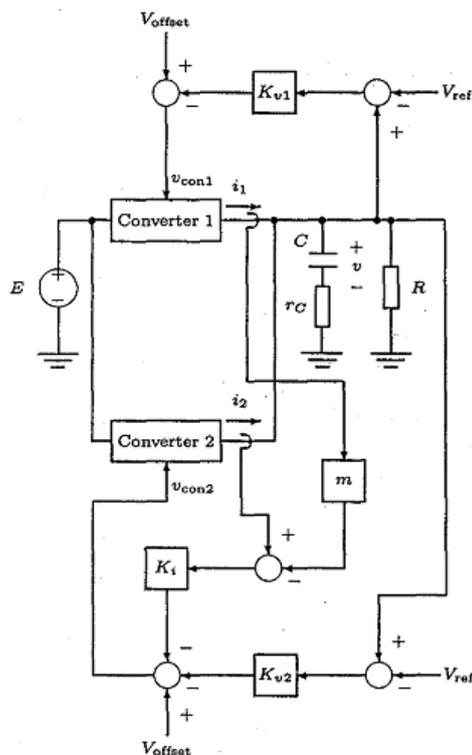


Figura 1.4: Conversores en paralelo. Esquema Maestro-Eslavo de control de reparto de corriente. Tomado de [21], cap. 7.

para mejor aprovechamiento de la inversión y optimización de las tasas de falla de los equipos, el problema del reparto de las cargas.

1.2. Algo de Historia

A mediados del siglo XVII, Newton introduce las ecuaciones diferenciales y resuelve el problema de los dos cuerpos, esto es, el movimiento de la tierra alrededor del sol dada la relación inverso-cuadrática de la atracción gravitacional entre ellos. Subsecuentes generaciones de físicos y matemáticos trataron de aplicar el método de Newton a la solución del problema de los tres cuerpos, hasta convencerse de que es imposible de resolver, en el sentido de obtener fórmulas explícitas que describan el movimiento.

Poincaré a fines del siglo XIX introdujo un nuevo punto de vista, el análisis geométrico, en el que se sustituye el interés por la posición exacta de cada cuerpo en todo instante, por el de investigar elementos cualitativos, como por ejemplo si el sistema solar será estable por siempre o no. Poincaré vislumbró la posibilidad del caos, donde un sistema determinista exhibe un comportamiento aperiódico que depende de la sensibilidad a las condiciones iniciales, haciendo imposible la

1.2. Algo de Historia

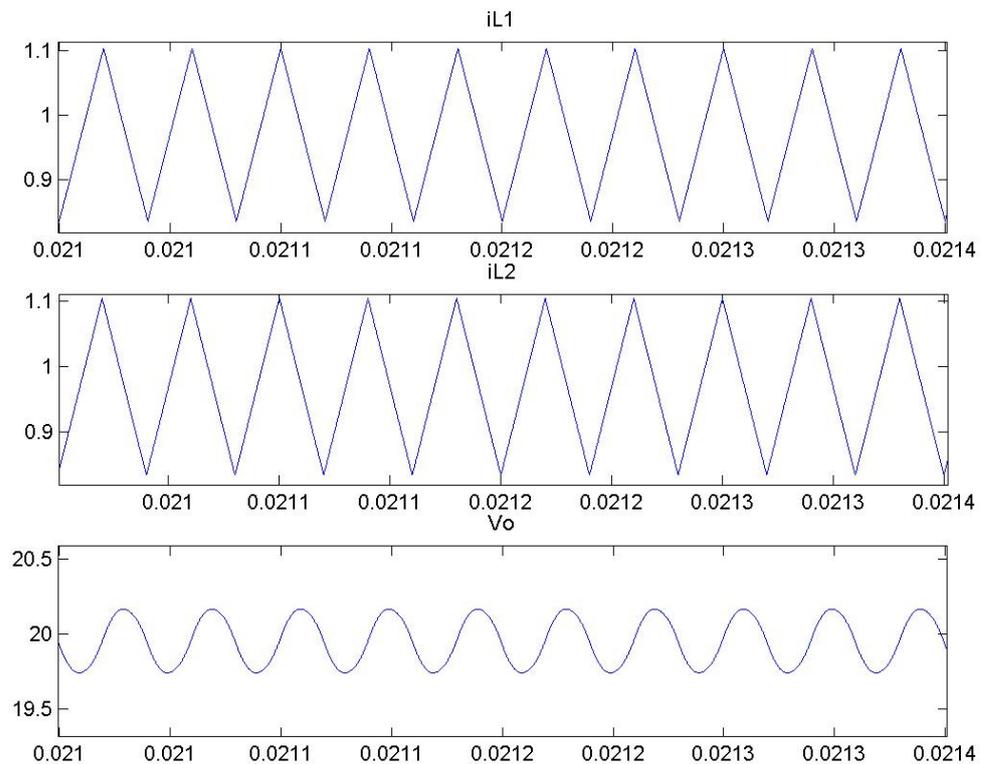


Figura 1.5: Convertidores Buck en paralelo. $K=3$, régimen periódico simple.

predicción a largo plazo.

En la primera mitad del siglo XX, se desarrollaron aún más los métodos geométricos de Poincaré, aplicados a una comprensión cada vez más profunda de la mecánica clásica. Simultáneamente el interés por los osciladores, imprescindibles para tecnologías tales como el radio, el radar y el láser, estimuló la invención de nuevas herramientas matemáticas para el análisis y diseño de sistemas no lineales, sin poner el caos aún como problema de primera línea. Van der Pol, en 1927, notó efectos caóticos en su oscilador de relajación: sintonizándolo para obtener algún subarmónico «escuchó» un ruido irregular, pero no tuvo demasiado interés de explicar esa oscilación espúrea.

En 1958 Kolmogorov introdujo el concepto de entropía métrica. Debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales de los sistemas caóticos, dos órbitas de inicio cercano divergen. Por el nivel de precisión experimental, limitada a una cierta cantidad de dígitos, podemos pensar en dos trayectorias que comiencen en puntos distintos pero indistinguibles. Conforme las trayectorias evolucionen se separarán lo suficiente como para ser distinguidas como diferentes. De algún modo estamos obteniendo información que no poseíamos en el instante inicial. Para sistemas

Capítulo 1. Introducción

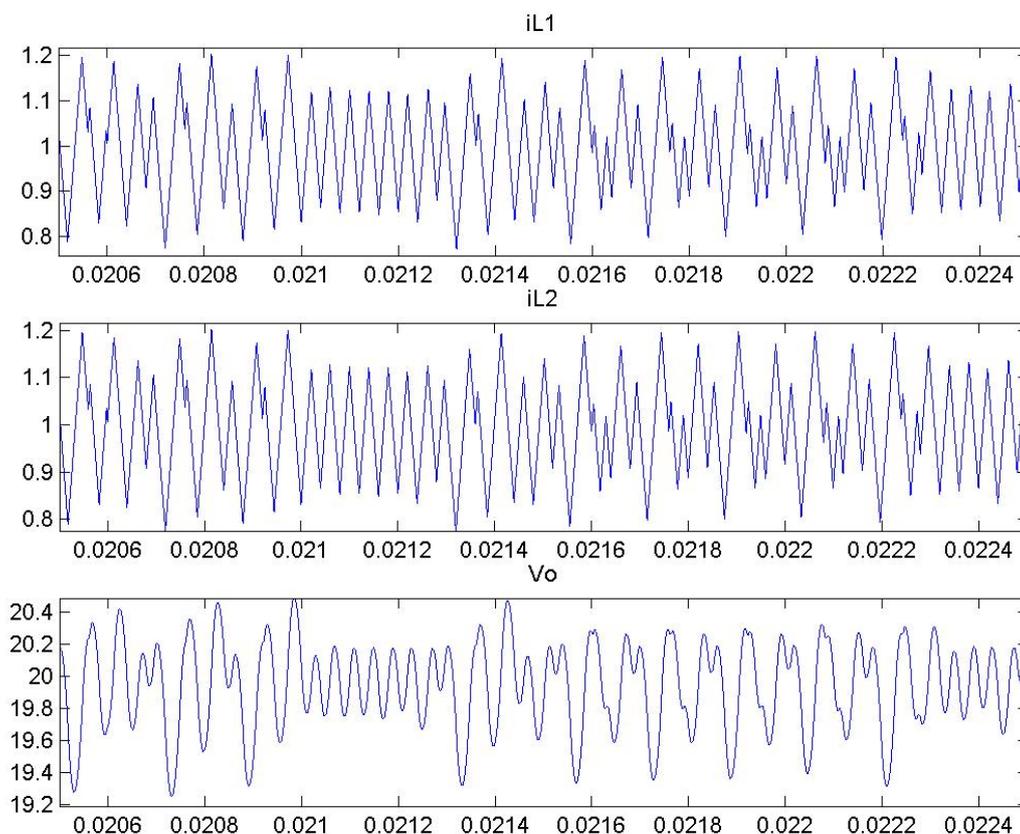


Figura 1.6: Convertidores Buck en paralelo. $K=8$, régimen caótico.

caóticos la entropía es positiva y nula para sistemas no caóticos. La entropía mide la velocidad de creación de información del sistema y juega un rol fundamental en la teoría del caos.

La introducción de la computadora a mitad del siglo pasado permitió experimentar con ecuaciones de una forma desconocida hasta ese momento, y de ese modo desarrollar una mayor intuición sobre los sistemas no lineales. Esto permitió a Lorentz descubrir en 1963 el movimiento caótico sobre un atractor extraño. Estaba estudiando un modelo simplificado de convección en la atmósfera para comprender la notoria impredecibilidad del tiempo, descubriendo que las soluciones de ese conjunto de ecuaciones no convergían a un punto de equilibrio o un estado periódico, sino que continuaban oscilando en forma irregular y aperiódica. Mas aún, si comenzaban dos simulaciones en condiciones iniciales muy próximas, el comportamiento resultante de ambas rápidamente divergía. El sistema era inherentemente impredecible, pequeños errores en la medida de las condiciones iniciales de la atmósfera serían inmediatamente amplificadas llevando a pronósticos equivo-

cados. Sin embargo, Lorentz mostró que había una estructura en el caos: ploteadas las soluciones en tres dimensiones tomaban la forma de dos alas de mariposa.

A fines de los setenta, Feigenbaum, analizando las cascadas de duplicación de período —una de las rutas más comunes hacia el caos— descubrió que existen ciertas leyes universales que gobiernan la transición desde un comportamiento regular a uno caótico: sistemas completamente diferentes pueden convertirse en caóticos de la misma forma.

En 1980 Baillieul, Brockett y Washburn sugirieron la existencia de caos en convertidores DC-DC y otros sistemas de control basados en modulación por ancho de pulso (PWM). Sin embargo recién en 1988 Hamill y Jefferies [14] escribieron el primer análisis detallado sobre caos en electrónica de potencia. En 1983 Chua sintetizó el primer circuito caótico autónomo, ampliamente estudiado como modelo de circuito electrónico caótico.

La línea de investigación inicial en conversión de continua se apoyaba sobre la integración de las ecuaciones diferenciales exactas de los modelos de esos sistemas. Rápidamente los esfuerzos cambiaron de dirección en sentido desarrollar modelos de sistema con los cuales se pudiese investigar teóricamente las conductas derivadas de la naturaleza no lineal de los mismos. En todos los avances posteriores —Deane, Hamill, Banerjee, Tse etc.— el método esencial utilizado para estudiar estos fenómenos ha sido obtener un modelo discreto en el tiempo del sistema bajo estudio y analizar los fenómenos observados en términos de la teoría de bifurcaciones en mapas. El método de muestreo de datos presentado por Kassakian, Schlecht y Verghese [8], por el cual se observan las variables de estado en instantes específicos de tiempo, jugó un papel muy importante. La elección de los instantes de muestreo no tiene por qué ser única, pudiendo por ejemplo ser: a) en cada pulso de reloj, o b) ídem pero ignorando los períodos donde no haya eventos de conmutación, o bien c) en cada evento de conmutación, por ejemplo cuando el error de tensión se cruza con la rampa en el control por tensión, o cuando la corriente de self alcanza la corriente de referencia en el control por corriente. Obtenido el modelo discreto del sistema bajo estudio, comenzó a aplicarse la teoría de bifurcaciones en mapas suaves y diferenciables, ya aplicado por matemáticos y físicos, pero no funcionó bien en todos los casos ya que sorprendentemente se encontró transiciones directas entre órbitas periódicas y caos, así como duplicaciones de período no suaves, fenómenos ambos no explicables por este tipo de mapas. Banerjee y otros [9] mostraron que esta clase de sistemas discretos producían mapas caracterizados por ser suaves a tramos, y que las bifurcaciones que provocaban pertenecían a un nuevo tipo llamado *border collision*. Matemáticos como Nusse y Yorke [10] habían podido mostrar que ese tipo de bifurcación podía darse pero no había ejemplos físicos de ello, apareciendo por primera vez en el campo de la electrónica de potencia.

Con esas herramientas los investigadores se han enfocado en el estudio de las distintas topologías de convertidores y sus posibles esquemas de PWM. El convertidor Buck controlado en modo tensión ha llamado la atención por la riqueza de fenómenos que radican en su alinealidad. Por otro lado el Boost controlado en modo corriente concita interés dado que es fácil obtener expresiones explícitas para su mapa correspondiente. En la actualidad, hay líneas de investigación fuertes

Capítulo 1. Introducción

en sentido de reducir la interferencia electromagnética, como mencionamos en la sección 1.1.2, y en la mejora de la respuesta dinámica ante cambios en las condiciones exteriores de carga o alimentación. En 1995 Hamil [12] conjeturó que estos convertidores, operando bajo un régimen de caos controlado, podrían semejarse a un sistema que se diseña inestable en lazo abierto— como los aviones modernos — y luego se estabiliza por realimentación, logrando sistemas más ágiles. En esta última dirección hay dos aproximaciones principales, el caos robusto (Benerhee, Yorke, Grebogi [11]) y el control del caos (Bueno y Marrero [13]) pero aún no surgen resultados cuantitativos importantes sobre esta línea de estudio.

1.3. Lorenz: Aperiodicidad en un Sistema Determinístico

El sistema de Lorenz se expresa en las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma(y - x) \\ rx - y - xz \\ xy - bz \end{bmatrix}$$

con

$$\sigma, r, b > 0$$

Este sistema tiene dos alinealidades, los productos xy y xz , y tiene importantes propiedades de simetría, ya que si reemplazamos $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$ las ecuaciones no cambian, de modo que si $(x(t), y(t), z(t))$ es solución, también lo es $(-x(t), -y(t), z(t))$. En otras palabras, toda solución es simétrica respecto al eje Oz o tiene un compañero simétrico respecto al mencionado eje.

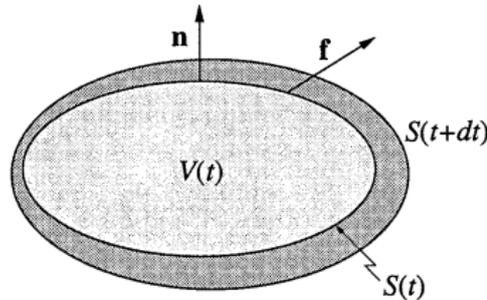


Figura 1.7: Evolución del volumen en el flujo. Extraído de [16]

El sistema de Lorenz es disipativo, los volúmenes en el espacio de estado se contraen en el flujo. En efecto, para cualquier sistema tridimensional $d\mathbf{x}/dt = f(\mathbf{x})$, tomando una superficie $S(t)$ que encierre un volumen $V(t)$ en el espacio de estado y considerando las trayectoria que tienen como condiciones iniciales los puntos de $S(t)$ dejándolos evolucionar un tiempo dt , $S(t)$ evoluciona hacia una nueva superficie $S(t + dt)$. En un punto \mathbf{x} de S dado, como $f(\mathbf{x})$ es la velocidad instantánea, siendo n la normal a S , tenemos:

1.3. Lorenz: Aperiodicidad en un Sistema Determinístico

$$V(t + dt) = V(t) + \int_S (f \times ndt) dA$$

Reagrupando, pasando al $\lim_{dt \rightarrow 0}$ y aplicando el «teorema de la divergencia», obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V (\nabla \times f) dV$$

Aplicado ahora al sistema de Lorenz:

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\sigma(y - x)] + \frac{\partial}{\partial y} [rx - y - xz] + \frac{\partial}{\partial z} [xy - bz] \right\} dV = -(\sigma + 1 + b)V$$

por tanto: $V(t) = V(0)e^{-(\sigma+1+b)t}$.

En otras palabras, cualquiera sea el conjunto $(\sigma, r, b) > 0$ de parámetros, los volúmenes en el espacio de estado se encogen exponencialmente hacia un conjunto de volumen cero. Las soluciones en ningún caso pueden ser pseudoperiódicas, ya que en ese caso las trayectorias caerían sobre la superficie de un toro que debería ser invariante bajo el flujo, y el volumen encerrado por el toro se mantendría constante en el tiempo. Tampoco podría haber puntos fijos u órbitas cerradas repeledoras, pues en las cercanías de estas los volúmenes se incrementan.

En la simulación para el caso específico $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 28$ e integrando sus ecuaciones a partir del punto inicial $(0, 1, 0)$ obtenemos para $y(t)$ la solución que se muestra en la Fig.1.8. Luego de un transitorio inicial (tramos (a) + (b)), la solución se establece en una oscilación irregular (tramo (c)) que persiste conforme $t \rightarrow \infty$ pero nunca se repite exactamente.

Sin embargo, si visualizamos la trayectoria en el espacio de estado (x, y, z) comprobaremos que aparece un patrón, una estructura del movimiento en forma de mariposa (ver Fig.1.9). Teniendo en cuenta simultáneamente $y(t)$ y el plano de fase (x, z) (Fig.1.10) podemos apreciar que la solución que comienza en $(0, 1, 0)$ se dirige en un principio hacia la derecha (tramo (a), $x, y > 0$), luego desvía a la izquierda inmediatamente (tramo (b), $x, y < 0$), recorriendo una espiral de radio creciente, para regresar nuevamente al lado derecho. Una vez allí la trayectoria crece en forma de espiral dando cierto número de vueltas hasta fugar nuevamente a la izquierda, continuando así indefinidamente. El número de circuitos que realiza la trayectoria a izquierda o derecha varía impredeciblemente, dándole la ya mencionada apariencia de secuencia aleatoria. Las trayectorias parecen cruzarse repetidamente producto de proyectar curvas tridimensionales en el plano. No existe tal cruce, que contravendría el teorema de la unicidad de la solución por un punto del espacio de fase.

Tenemos entonces un comportamiento aperiódico y aparentemente aleatorio. Sin embargo estamos frente a un sistema determinístico cuyas ecuaciones son conocidas. En este tipo de sistema el estado en un instante depende exclusivamente de su estado inicial, a diferencia de un sistema estocástico, en que el estado en

Capítulo 1. Introducción

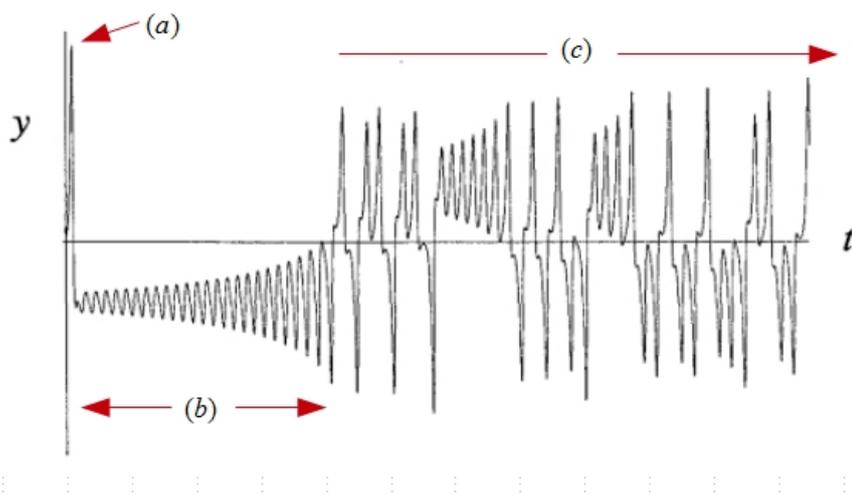


Figura 1.8: $y(t)$ de las ecuaciones de Lorenz si $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 28$. Extraído de [16] pág. 318.

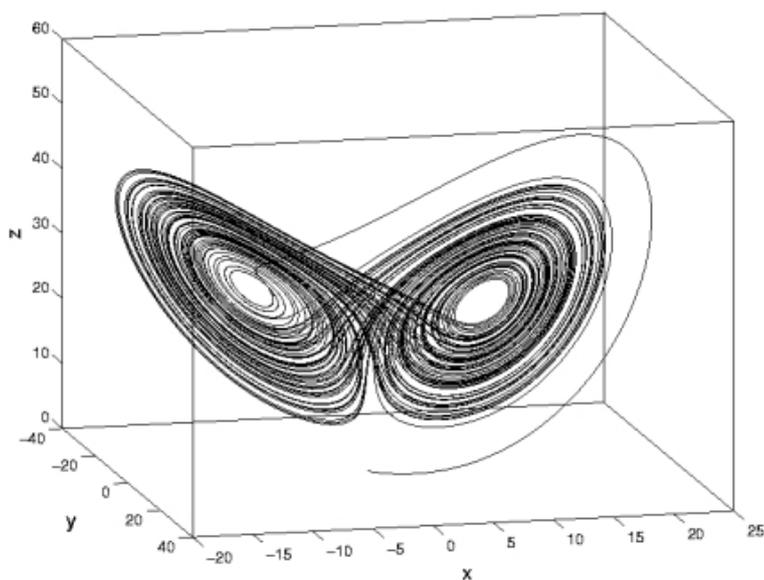


Figura 1.9: Atractor de Lorenz.

determinado instante refleja las condiciones iniciales más el ruido u otros elementos aleatorios que se encuentren a lo largo de su camino. Luego de un período transitorio inicial el sistema ingresa en un estado estable que puede considerarse solución de equilibrio, en el sentido de que si el sistema comienza en un punto de esta solución, permanecerá en ella indefinidamente.

El movimiento sobre el atractor exhibe alta dependencia de las condiciones

1.3. Lorenz: Aperiodicidad en un Sistema Determinístico

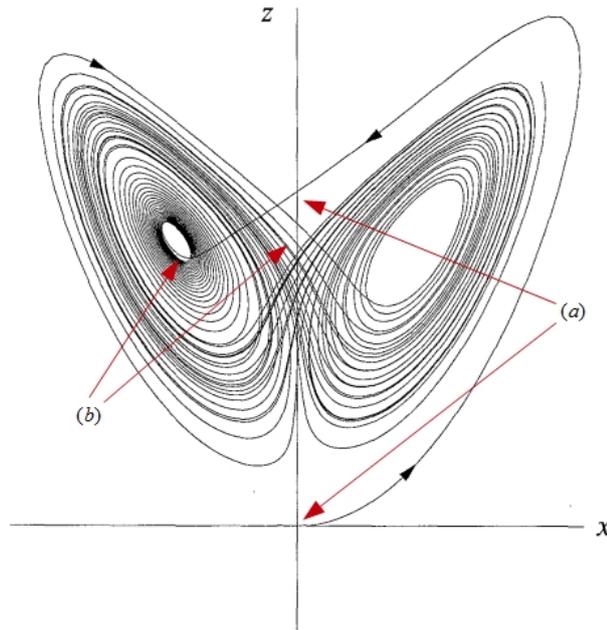


Figura 1.10: Plano de fase (x, z) de las ecuaciones de Lorenz si $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 28$. Extraído de [16] pág. 319.

iniciales. En la Fig.1.11 puede apreciarse cómo dos trayectorias que comienzan muy cercanas una de la otra rápidamente divergen. La trayectoria es por tanto impredecible en el largo plazo, tanto debido al límite con el que podemos conocer las condiciones iniciales como por la resolución en aritmética discreta —el número real no existe— que impone el computador.

Si $\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}[t, \mathbf{x}(0)]$ ⁶ es la trayectoria a partir de un punto inicial $\mathbf{x}(0)$ perteneciente al atractor, podemos estudiar la evolución de la distancia con otra trayectoria que comience en $\mathbf{x}_\delta(0)$ muy cercano (ver Fig.1.12).

Para el sistema de Lorenz, si hacemos un gráfico $\ln \|\delta\mathbf{x}(t)\| = h(t)$ obtenemos una curva muy cercana a una recta con pendiente positiva λ (ver Fig.1.13). La curva no es exactamente una recta, por un lado sus oscilaciones son debidas a que λ varía algo a lo largo del atractor. En segundo lugar la medida de $\ln \|\delta\mathbf{x}(t)\|$ pierde sentido en cuanto $\|\delta\mathbf{x}(t)\|$ es comparable a las dimensiones del atractor, y por tanto la curva va a saturar en determinado instante.

Podemos escribir:

$$\ln \|\delta\mathbf{x}(t)\| \approx \ln \|\delta\mathbf{x}(0)\| + \lambda t$$

o de otro modo:

$$\|\delta\mathbf{x}(t)\| \approx e^{\lambda t} \|\delta\mathbf{x}(0)\|$$

El número λ es una buena aproximación de lo que se denomina «exponente de Lyapunov» del sistema dinámico, el cual caracteriza la velocidad de separación de

⁶ $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$.

Capítulo 1. Introducción

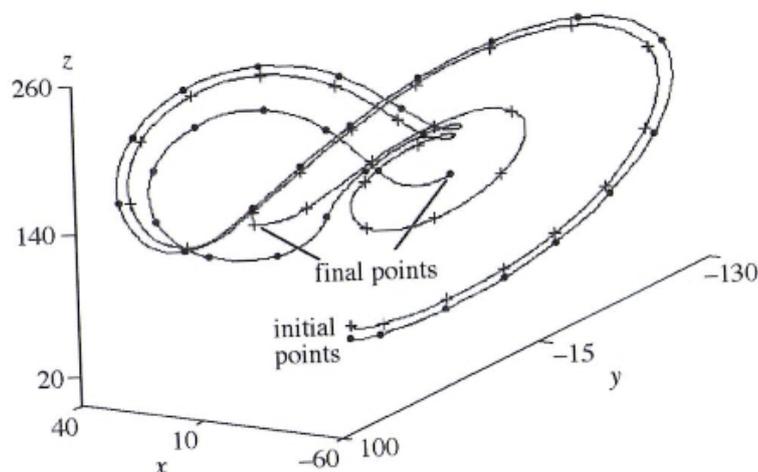


Figura 1.11: Atractor de Lorenz. Sensibilidad a las condiciones iniciales. Tomado de [21] pág. 21.

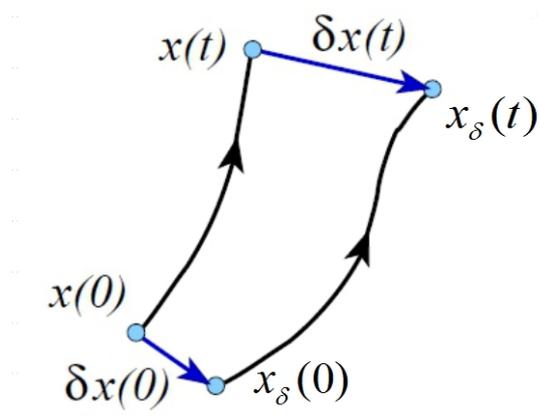


Figura 1.12: Conversión del desplazamiento $\delta x(0)$ en $\delta x(t)$.

dos trayectorias de condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas. En rigor, la velocidad de separación puede ser diferente para distintas orientaciones del vector de separación inicial $\delta \mathbf{x}(0)$, por tanto no existe un único exponente de Lyapunov sino un espectro de exponentes igual en número a las dimensiones del espacio de estado. Es común referirse al mayor de estos exponentes como «exponente máximo de Lyapunov». Un vector de separación inicial arbitrario tiene una componente en la dirección asociada con el exponente máximo y dado el crecimiento exponencial relacionado, el efecto de los otros exponentes puede desaparecer rápidamente en el

1.4. Definiciones de Caos y Atractor Extraño

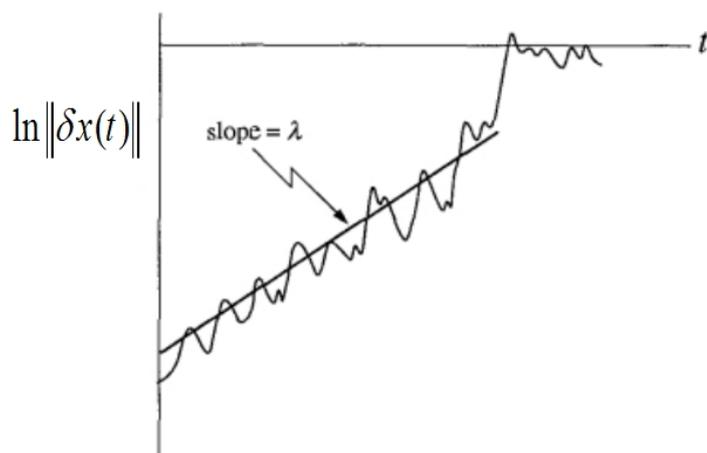


Figura 1.13: Crecimiento exponencial de la distancia entre dos trayectorias con puntos iniciales cercanos para el sistema de Lorenz. Tomado de [16] pág. 321.

tiempo⁷, quedando la dinámica del sistema fuertemente determinada por el exponente máximo de Lyapunov. No habiendo posibilidad de confusión, nos referiremos a este último como «exponente de Lyapunov».

Si el «exponente de Lyapunov» es positivo⁸ el sistema es sensible a las condiciones iniciales, pero no necesariamente caótico. Para ello tienen que darse otras condiciones como la de aperiodicidad en el largo plazo de las soluciones.

1.4. Definiciones de Caos y Atractor Extraño

No existe definición de caos universalmente aceptada (ver [16]), pero en general se acuerda en los tres ingredientes usados en la siguiente definición: «**Caos es un comportamiento a largo plazo aperiódico en un sistema determinístico que exhibe alta sensibilidad a las condiciones iniciales**».

«Comportamiento a largo plazo aperiódico» significa que hay trayectorias que no se estabilizan en puntos fijos, órbitas periódicas o cuasiperiódicas conforme $t \rightarrow \infty$.

«Sistema determinístico» es aquel en el que toda trayectoria queda determinada por sus condiciones iniciales. No tiene entonces entradas o parámetros aleatorios o de ruido. El comportamiento irregular descansa sobre las alinealidades del sistema.

«Alta sensibilidad a las condiciones iniciales» significa que trayectorias cercanas se separan exponencialmente rápido⁹.

⁷En sistemas de orden mayor que dos la situación es más complicada si hay exponentes nulos.

⁸Para el atractor de Lorenz $\lambda \simeq 0,9$ ver [16], pág. 321.

⁹ El sistema $\frac{dx}{dt} = x$ es determinístico, exhibe separación exponencial de las trayectorias cercanas, es inestable pero no es caótico, ya que el infinito actúa como punto fijo atractor

Capítulo 1. Introducción

Sobre el término «atractor» hay desacuerdo también en como definirlo en forma rigurosa. Una definición lo suficientemente amplia como para incluir todos los candidatos naturales, pero lo suficientemente restrictiva como para excluir los sospechosos, es la siguiente: un «atractor» es un conjunto cerrado A con las siguientes propiedades:

1) A es invariante, cualquier trayectoria $x(t)$ que comience en A se mantiene en A en todo instante posterior.

2) A atrae un conjunto abierto de condiciones iniciales: existe un conjunto U que contiene a A tal que si $x(0) \in U$ la distancia entre $x(t)$ y A tiende a cero si $t \rightarrow \infty$. En otras palabras, A atrae todas las trayectorias que comienzan lo suficientemente cerca de él. El más grande de los U se denomina «cuenca de atracción»¹⁰ de A .

3) A es mínimo, no tiene un subconjunto que satisfaga las condiciones 1 y 2.

En general podemos clasificar los atractores bajo las siguientes categorías:

a) **Puntos Fijos:** la solución es un punto en el espacio de estado.

b) **Ciclo Límite u Órbita Periódica:** La trayectoria se mueve a lo largo de un camino cerrado en el espacio de estado. El movimiento se asocia a un número finito de frecuencias relacionadas unas con otras en razones racionales, el movimiento es periódico.

c) **Órbita Cuasi-Periódica:** La trayectoria se mueve en la superficie de un toro. El movimiento se asocia con un número finito de frecuencias relacionadas entre sí en razones irracionales.

d) **Atractor Extraño:** aquel atractor que exhibe alta sensibilidad a las condiciones iniciales.

1.5. Caos Transitorio

En la Fig.1.14 vemos el comportamiento del sistema de Lorenz para valores bajos de r ¹¹. El origen es globalmente estable para $r < 1$. En $r = 1$ el origen pierde su estabilidad, apareciendo un par simétrico de puntos fijos C^+ y C^- linealmente estables:

$$C^+ = \left(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1) \right)$$
$$C^- = \left(-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1) \right)$$

A partir de $r \approx 13,926$ se crea un par de ciclos-límite inestables que conviven con C^+ y C^- . El comportamiento del sistema es complejo (ver Fig.1.15): las trayectorias, por un tiempo, pueden vagar aperiódicamente sobre un conjunto invariante del espacio, eventualmente acercarse y volver a alejarse de C^+ y/o C^- (tramos (a)), para finalmente aproximarse indefinidamente a alguno de los puntos

y por tanto no cumple con la condición de comportamiento aperiódico.

¹⁰En inglés *basin of attraction*.

¹¹La figura describe la naturaleza de los puntos fijos para $x > 0$, lo que ocurre para $x < 0$ es idéntico por simetría. Mas adelante se verá que este tipo de gráfico se denomina Diagrama de Bifurcaciones.

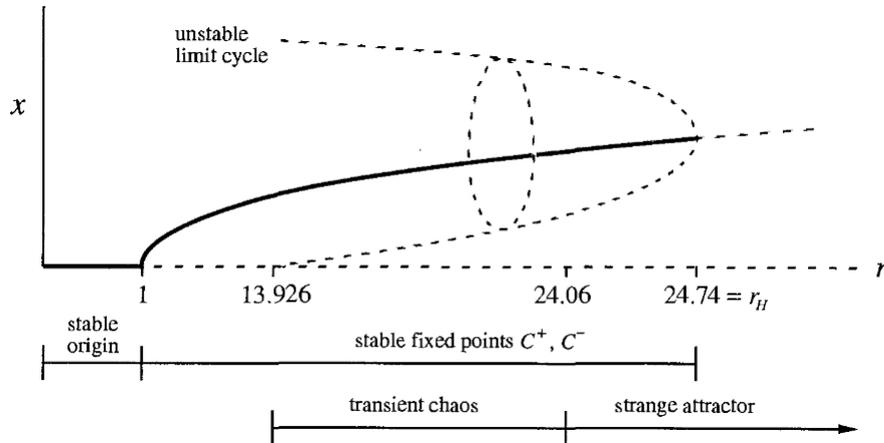


Figura 1.14: Diagrama de Bifurcaciones al variar r de las ecuaciones de Lorenz si $\sigma = 10$ y $b = \frac{8}{3}$. Extraído de [16] pág. 330.

fijos (tramo (b)). El tiempo en que la trayectoria pasea previo a establecerse en su punto de equilibrio se incrementa con r . Este tipo de conducta suele llamarse «Caos Transitorio», y el conjunto invariante mencionado –con forma de alas de mariposa– no es en rigor un atractor. La dinámica no es «caótica» debido que el comportamiento a largo plazo no es aperiódico. La Fig.1.16 refleja esa conducta para $y(t)$. Luego de un comportamiento transitorio «extraño» (tramo (a)) la solución se aproxima a un valor de equilibrio estable (tramo (b)).

El caos transitorio muestra que un sistema determinístico puede ser impredecible, aún si su estado final es simple. No se necesita un atractor extraño para generar un comportamiento efectivamente aleatorio. Muchos juegos de azar son demostraciones de caos transitorio: luego de tirados, los dados bailan hasta caer en una de seis posiciones estables de equilibrio.

1.6. Conclusiones

Una de las más prometedoras áreas de aplicación del modelado complejo de los convertidores es la reducción de la interferencia electromagnética (EMI) radiada y conducida, inherente a los flancos de corriente y tensión que presentan las fuentes conmutadas de potencia. En este sentido, el esfuerzo iría en la dirección de, mediante un régimen caótico, esparcir (*spread*) el espectro de frecuencia, achatándolo y eliminando los picos asociados a la frecuencia fundamental y armónicos del régimen periódico equivalente. En orden de poder formular procedimientos de diseño, se necesita primero una teoría para el cálculo de promedios de las variables de estado bajo caos. Segundo, una teoría que prediga la estructura del espectro de potencia del convertidor operando bajo este régimen. En ese sentido, Isabelle [24] mostró, para ciertas hipótesis razonables, que los convertidores DC-DC controlados

Capítulo 1. Introducción

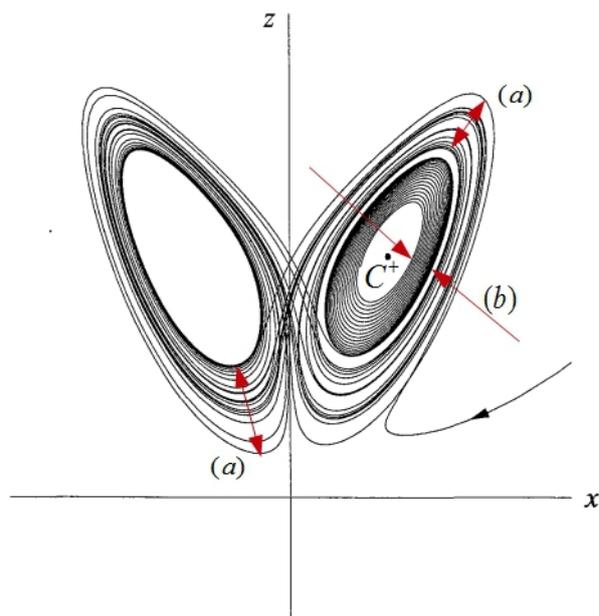


Figura 1.15: Trayectorias de las ecs. de Lorenz para $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 21$. Se observa que la trayectoria tiende a estabilizarse sobre C^+ . Extraído de [16] pág. 332.

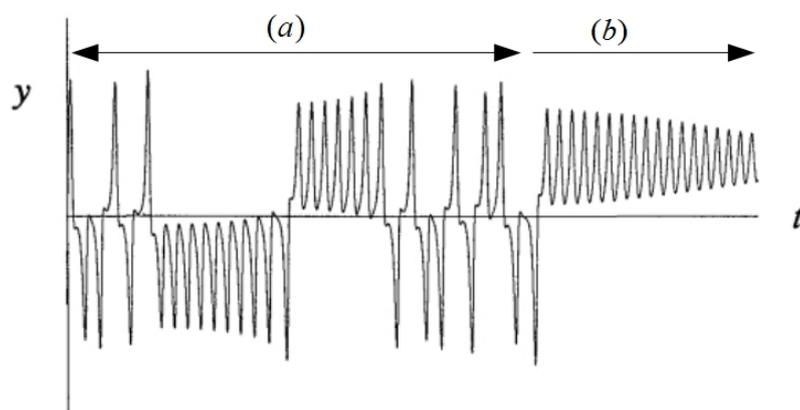


Figura 1.16: $y = y(t)$ de las ecs. de Lorenz para $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 21$. Extraído de [16] pág. 332.

en modo corriente pueden ser aproximados por ciertos tipos particulares de mapas, conocidos como «Mapas de Markov», para los cuales estos problemas son tratables.

En este estudio pretendemos introducir, con cierto rigor matemático, algunas herramientas de análisis pero sin perder de vista el resultado útil para el diseño. En el capítulo 2 desarrollamos los conceptos referidos a mapas discretos en aplicación a sistemas dinámicos en general. Sobre el final del mismo introducimos algunos

1.6. Conclusiones

convertidores DC/DC para explicar un tipo de proceso de bifurcación poco común en otros sistemas físicos como es el de «*Border Collision*». A continuación, en el capítulo 3, desarrollamos modelos discretos para distintos tipos de convertidores bajo diferentes formas de conducción y control. A modo de aplicación, en el capítulo 4 se estudia la forma de seleccionar un condensador a la entrada de un convertidor de modo de evitar el comportamiento caótico en algunos tramos de funcionamiento. Finalizamos este trabajo con un capítulo 5 dedicado a la utilización de métodos estadísticos en aplicación al diseño de convertidores con control por corriente y régimen caótico.

Capítulo 2

Mapas

2.1. Introducción

En este capítulo se introducirán algunas herramientas matemáticas de uso en el análisis de sistemas dinámicos en general. La literatura es profusa al respecto (véase por ejemplo [17]), pero a nosotros nos interesará solo aquellos ítems que, como los mapas estroboscópicos y las bifurcaciones por duplicación de período, son de suma utilidad para el estudio de los convertidores DC/DC. Más adelante introduciremos herramientas más específicas a la materia que nos ocupa. En tanto, dedicaremos algún tiempo a explicar los métodos más usados para el control de los convertidores DC/DC, lo suficiente como para exponer lo fundamental de un tipo de bifurcación muy común en electrónica de potencia como es la de «border collision».

2.2. Definición de mapa

Una función cuyos dominios de entrada y salida son los mismos, se llama «mapa». Sea x un punto y f el mapa. La «órbita» de x bajo f es el conjunto de puntos $\{x, f(x), f^2(x), \dots\}$ ¹. El punto de inicio de la órbita se llama «valor inicial» de la órbita. Un punto p es un «punto fijo» del mapa si $f(p) = p$.

2.3. Puntos periódicos

Un punto p es periódico de «período k » si $f^k(p) = p$, siendo k el menor entero positivo que cumpla dicha igualdad. La órbita con valor inicial p , que consistirá de k puntos, se llama «órbita periódica de período k », ver Fig. 2.1.

¹Aquí $f^2(x) = f(f(x))$.

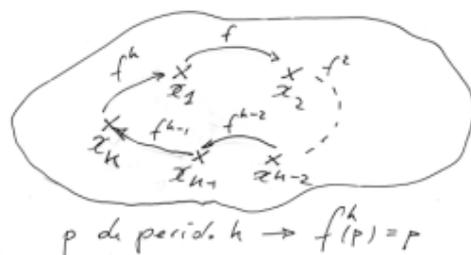


Figura 2.1: Órbita de periodicidad k .

2.4. Mapas de Poincaré

El mapa de Poincaré es una forma simplificada de mirar trayectorias de flujos de ecuaciones diferenciales. En vez de estudiar la trayectoria completa perteneciente a determinado espacio Ω , se busca la información relevante «codificada» en sus puntos de intersección con un subconjunto de Ω («sección» de Poincaré). La Fig. 2.2 muestra el mapa G generado por las intersecciones A, B, etc. de la trayectoria C sobre la sección S . En general, la técnica del mapa de Poincaré reduce un sistema dinámico continuo y k -dimensional a un mapa $(k - 1)$ -dimensional. Mucho del comportamiento dinámico de la trayectoria C está presente en el mapa G . Por ejemplo, la trayectoria será periódica (o sea forma una curva cerrada) sí y solo sí el mapa G tiene una órbita periódica.

No existe un método general para construir una sección de Poincaré. Debe asegurarse que esta intersecte todas las órbitas de interés, lo que exige que la sección de Poincaré sea transversal al flujo del sistema, dicho de otro modo, las trayectorias que comienzan en la sección deben atravesar la misma, no pudiendo pertenecer o ser paralelas a ella.

2.5. Mapas estroboscópicos.

Para sistemas no autónomos como el convertidor Buck de la Fig. 1.1 donde la entrada externa tiene un período T , la elección natural para realizar un mapa de Poincaré es mapear las variables en los instantes nT . En la Fig. 2.3 se ilustra el proceso de toma de muestras. La superposición de todos los planos de observaciones discretas en uno sólo es el mapa estroboscópico. En este trabajo consideraremos sólo convertidores de período constante y usaremos indistintamente los términos mapa de Poincaré y mapa estroboscópico².

²Sobre el uso del término «estroboscópico» véase por ejemplo [21].

2.6. Sumideros (atractores), fuentes (repulsores) y sillas de montar

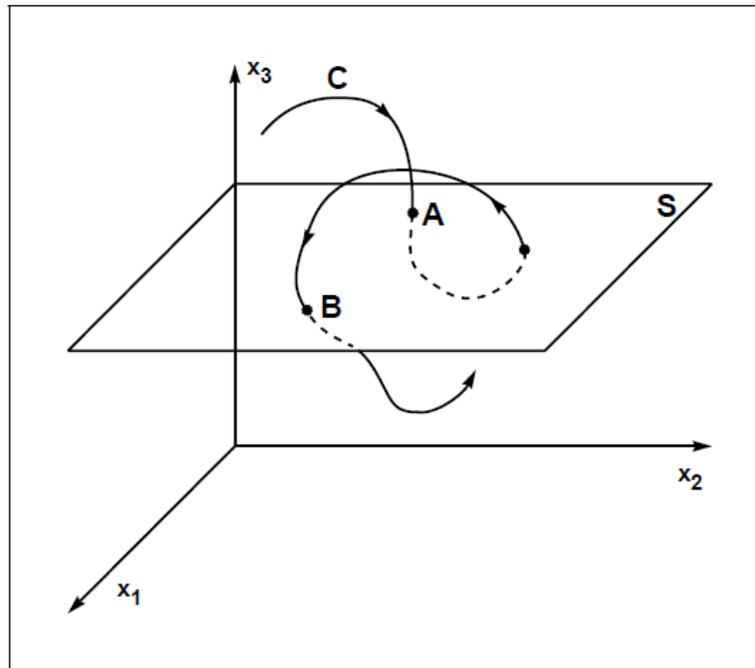


Figura 2.2: Mapa de Poincaré derivado de una ecuación diferencial tridimensional. Tomado de [17], pág. 49

2.6. Sumideros (atractores), fuentes (repulsores) y sillas de montar

Sea un mapa f definido en \mathfrak{R}^m con un punto fijo p (es decir $f(p) = p$), y sea $\varepsilon > 0$. Consideremos el conjunto $N_\varepsilon(p) = \{v \in \mathfrak{R}^m; |v - p| < \varepsilon\}$ ³, que denominaremos « ε entorno abierto de p ». Si hay un ε tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(v) = p \forall v \in N_\varepsilon(p)$ diremos que p es un «punto fijo de atracción» o «sumidero» del mapa f . Si hay un entorno $N_\varepsilon(p)$ tal que todo $v \in N_\varepsilon(p)$ (excepto p) se mapea fuera de $N_\varepsilon(p)$, entonces decimos que p es un punto fijo «repulsor» o «fuente». Junto al sumidero y la fuente, los mapas de orden mayor o igual a dos presentan otro tipo de punto fijo, llamado «silla de montar». Este tipo de punto fijo presenta al menos una dirección de atracción y otra de repulsión. Los tres tipos de punto fijo se ilustran en la Fig. 2.4.

La dinámica en la vecindad del punto fijo de un mapa, al igual que para los flujos ⁴, está dirigida por su aproximación lineal dada por la matriz jacobiana.

³En todo este trabajo, siempre que se mencione una norma será la norma-2 o euclidiana.

⁴Sistemas dinámicos continuos

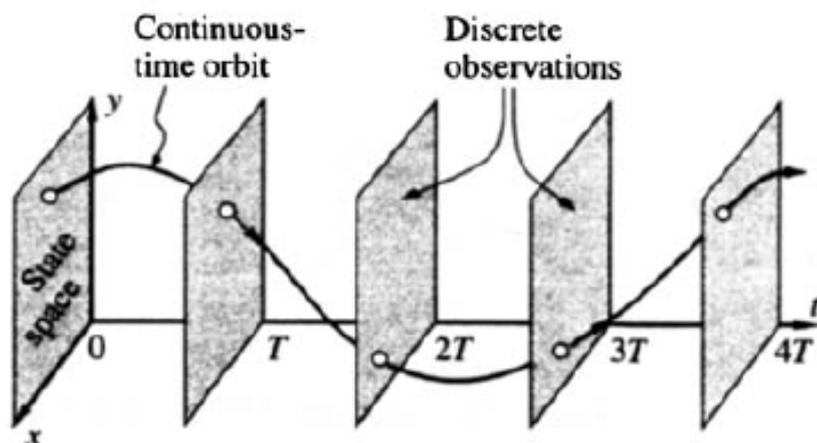


Figura 2.3: Mapa estroboscópico para un sistema dinámico continuo y no autónomo con fuerza externa de período T . Tomada de [3]

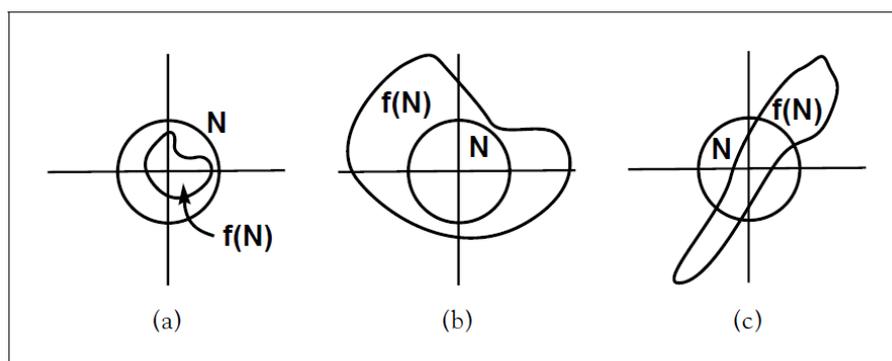


Figura 2.4: Dinámica local cerca de un punto fijo: (a) atractor, (b) repulsor y (c) silla de montar. Tomada de [17], pág. 59

2.7. Mapas no lineales y la matriz jacobiana

Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ diferenciable, mapa sobre \mathfrak{R}^m y $p \in \mathfrak{R}^m$. La «matriz jacobiana» de f en p , $Df(p)$, es:

$$Df(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_m}(p) \end{pmatrix}$$

Dados p y un h pequeño pertenecientes a \mathfrak{R}^m , el incremento en f debido a h ,

2.8. Dinámica de los mapas bidimensionales

con un error menor o igual a $k|h|^2$ será:

$$f(h+p) - f(p) \approx Df(p).h \quad (2.1)$$

Si p es punto fijo entonces $f(p) = p$, por tanto la expresión (2.1) nos queda:

$$f(h+p) \approx p + Df(p).h$$

En otras palabras, la acción del mapa no lineal f sobre puntos cercanos a p será el movimiento $p+h \rightarrow p + Df(p).h$, o si tomamos a p como origen: $h \rightarrow Df(p).h$. Un punto fijo p se llama «hiperbólico» si ninguno de los valores propios de $Df(p)$ tiene módulo 1⁵. El teorema de Hartman-Grobman afirma que estudiar la dinámica local a un punto fijo hiperbólico p es equivalente a estudiar la dinámica del sistema lineal descrito por la matriz jacobiana.

Se puede ver que si el módulo de todos los valores propios de $Df(p)$ es menor a 1 entonces p es un atractor o sumidero. Si es mayor a 1, estamos frente a un repulsor o fuente. Para los mapas en \mathbb{R}^m con $m > 1$ puede haber direcciones (vectores propios) para las cuales las órbitas divergen conviviendo con otras para las que convergen (ver [17], cap. 2).

Si p es hiperbólico, y si al menos un valor propio tiene magnitud mayor a 1 y otro magnitud menor a 1, entonces a p lo llamamos «silla de montar».

2.8. Dinámica de los mapas bidimensionales

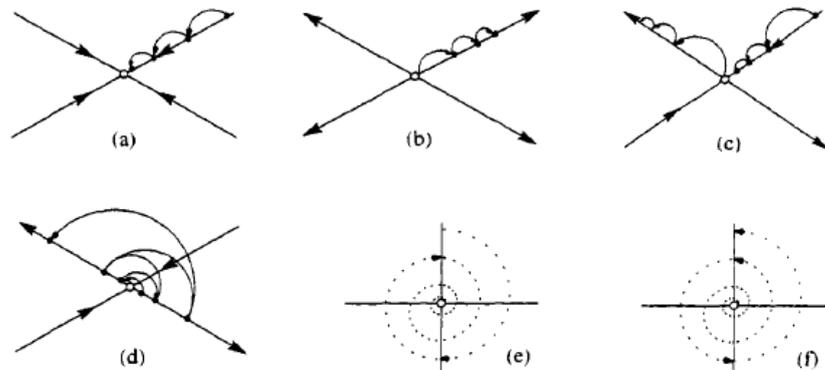


Figura 2.5: Ejemplos de puntos fijos para un mapa linealizado de segundo orden. Tomada de [3].

La Fig. 2.5 ilustra lo expuesto en 2.7 referido a mapas bidimensionales⁶. Si los valores propios del punto fijo p son reales, tenemos: (a) si $|\lambda_1| < 1$ y $|\lambda_2| < 1$, p es

⁵No tiene eigenvalores en el círculo unidad.

⁶Un conjunto importante de circuitos en electrónica de potencia se puede modelar como sistemas dinámicos de orden 2.

Capítulo 2. Mapas

atractor; (b) si $|\lambda_1| > 1$ y $|\lambda_2| > 1$, p es repulsor; (c) si $|\lambda_1| < 1$ y $\lambda_2 > 1$, p es silla de montar «regular»; (d) si $|\lambda_1| < 1$ y $\lambda_2 < -1$, p es silla de montar tipo «flip»⁷.

Si los valores propios son complejos tenemos: (e) si $|\lambda_1|, |\lambda_1| < 1$ p es espiral atractora; (f) si $|\lambda_1|, |\lambda_1| > 1$ p es espiral repulsora.

2.9. Bifurcación por duplicación de período

Si un mapa en \mathfrak{R}^m depende de un parámetro a , perteneciente a un intervalo de números reales, podemos pensar en que lo que realmente tenemos es una «familia» de mapas, uno por cada valor del parámetro. Decimos que f depende de un parámetro escalar y usamos la notación: $f_a(x)$, en tanto que para las órbitas usaremos indistintamente

$$\begin{aligned}x &\rightarrow f_a(x) \\x(n+1) &= f_a(x(n))\end{aligned}$$

Si variamos el parámetro a , puede ocurrir que un punto fijo exista hasta cierto valor del mismo y a partir de allí sea sustituido por otro o un nuevo conjunto de puntos fijos; o bien sea estable hasta cierto valor e inestable pasada esa frontera. En estos casos decimos que estamos ante una «bifurcación». Llamamos al valor del parámetro a para el que el número o la estabilidad de los puntos fijos cambia, «valor de bifurcación» o «valor crítico». La órbita para el valor crítico de a se llama «órbita de bifurcación».

Existen varios tipos de bifurcaciones, pero un enfoque general de esto queda fuera del alcance de este trabajo. Simplemente describiremos la bifurcación llamada de «duplicación de período» que es la que nos interesa. La Fig. 2.6 representa el caso: conforme crece el parámetro a el punto fijo de atracción P_E pierde su estabilidad en $a = a_0$. Para $a > a_0$ tenemos una silla de montar (punto fijo inestable P_{silla}) y un atractor de período 2, cuyos puntos fijos, P_1^{E2} y P_2^{E2} , cumplen $f(f(P_1^{E2})) = P_1^{E2}$ y $f(f(P_2^{E2})) = P_2^{E2}$.

2.9.1. Duplicación de período en mapas de primer orden

El mapa de primer orden

$$x(n+1) = -(1+a)x(n) + x^3(n)$$

es un modelo simple y representativo de las bifurcaciones por duplicación de período. Vamos a suponer que $|a| \ll 1$, de modo que despreciamos los términos de orden mayor o igual a 2, los que englobaremos bajo la expresión « $O(a^2)$ ». Tenemos 3 puntos fijos⁸: $p_1 = 0$ y $p_{2,3} = \pm\sqrt{2+a}$. Estudiando el comportamiento

⁷Las órbitas «voltean» o «saltan» a dos lados del punto fijo.

⁸Producto de resolver la ecuación $x = -(1+a)x + x^3$

2.9. Bifurcación por duplicación de período

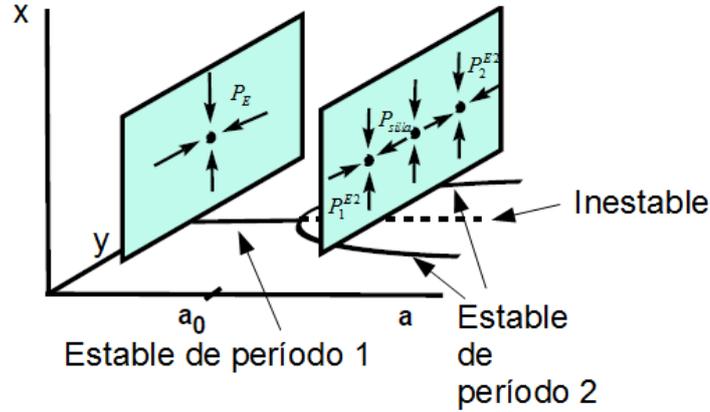


Figura 2.6: Duplicación de período.

de las derivadas en un entorno de los puntos fijos⁹, concluimos que p_1 es estable para $a < 0$ y $p_{2,3}$ inestables, cualquiera sea el valor que adopte el parámetro. Consideremos ahora la segunda iteración de f . Tendremos¹⁰

$$f(f(x)) = f^2(x) \approx (1 + 2a)x - 2(1 + 2a)x^3 + O(x^5)$$

Estamos trabajando en las cercanías de $x = p_1 = 0$, podemos despreciar entonces los términos $O(x^5)$ de modo de mantener en la expresión el orden x^3 que es el que introduce la alinealidad en el mapa f original. Resultan tres puntos fijos¹¹ $p_1 = 0$ y $p_{2,3} = \pm\sqrt{a(1-2a)}$, ahora el primero inestable y los otros dos estables para $a > 0$ ¹². La Fig. 2.7 muestra la situación en su conjunto. Para $a < 0$ tenemos un único punto fijo estable $x = 0$. Para $a > 0$ no tenemos puntos fijos estables desde el punto de vista del mapa f , pero sí dos puntos fijos estables para la primer iteración $f(f(x))$. Una vez que la órbita alcance alguno de estos puntos comenzará a saltar entre uno y otro indefinidamente. En conclusión, traspasando la frontera $a = 0$ pasamos de una órbita de período 1 a otra de período 2 (duplicación de período).

⁹La condición de estabilidad estará dada por: $\left| \frac{\partial f_a}{\partial x}(p_1) \right| = |-(1+a)| < 1$ y $\left| \frac{\partial f_a}{\partial x}(p_{2,3}) \right| = |(5+2a)| < 1$

¹⁰Surge de ordenar en a la expresión

$f^2(x) = -(1+a)[-(1+a)x + x^3] + [-(1+a)x + x^3]^3$ y eliminar $O(a^2)$

¹¹Al resolver $p \approx (1+2a)p - 2(1+2a)(p)^3$

¹²Haciendo las mismas aproximaciones, la condición de estabilidad queda: $\left| \frac{\partial (f_a^2)}{\partial x}(p) \right| = |1-4a| < 1$

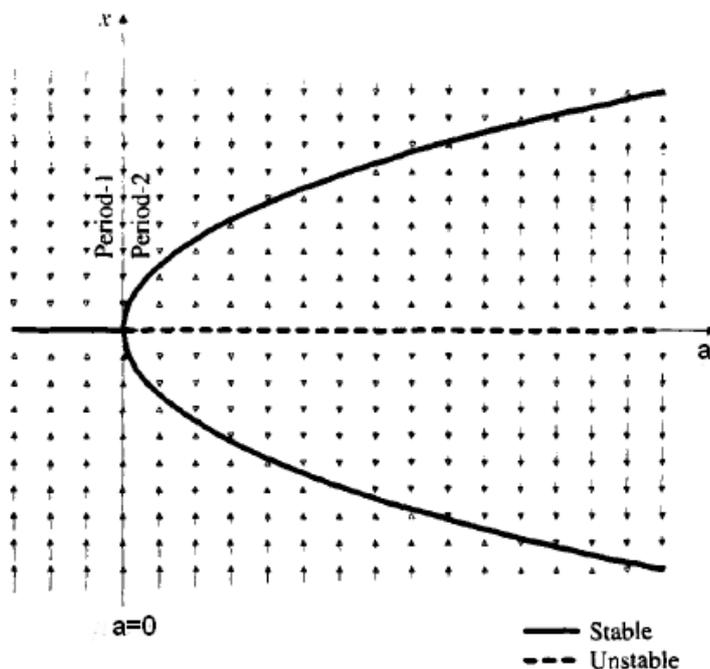


Figura 2.7: Duplicación de período en un mapa de primer orden. Figura tomada de [4]

2.9.2. Duplicación de período en mapas de segundo orden

La clave del comportamiento del mapa de primer orden visto con anterioridad, la encontramos al ver de qué modo pasa el punto $p_1 = 0$ a la inestabilidad. La derivada $\frac{\partial f_a}{\partial x}(p_1)$ traspasa el módulo 1 pero... en -1 . Cualquier órbita de un mapa del tipo $x(n+1) = \frac{\partial f_a}{\partial x}(p_1)x(n) = -x(n)$ simplemente salta entre el x_0 inicial y $-x_0$ indefinidamente, lo que caracteriza una órbita de período 2.

Como ya vimos, la dinámica de los sistemas de orden mayor está caracterizada por los valores propios del jacobiano en el punto fijo a estudio. Supongamos un mapa de parámetro a y que en principio los dos valores propios del Jacobiano en el punto de equilibrio son reales y de módulo menor a 1. El punto fijo en estudio es, entonces, estable para ese valor del parámetro. Si ahora comenzamos a variar a y uno de los valores propios alcanza el -1 , la órbita crítica (o sea la que corresponde a ese valor del parámetro) tendrá ese comportamiento de período 2 en la dirección del vector propio correspondiente. Pasamos de tener un punto fijo estable con una órbita de período 1, a una órbita de período 2.

En general, para sistemas de segundo orden, tendremos una bifurcación por duplicación de período cuando uno de los valores propios traspase el círculo unidad por el punto -1 (Fig.2.8).

2.9. Bifurcación por duplicación de período

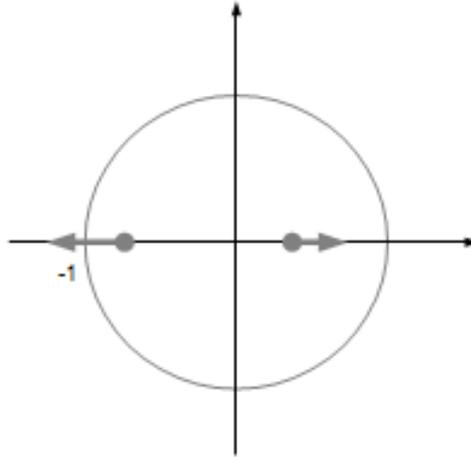


Figura 2.8: Movimiento de los valores propios respecto al círculo unidad en una duplicación de período para un mapa de segundo orden.

2.9.3. Cascadas de duplicación de período como ruta al caos.

En el capítulo 1 se vió que el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico es impredecible. Sin embargo, esto no significa que no se pueda hacer un estudio sistemático de este comportamiento complejo. Detrás de esta conducta, aparentemente aleatoria e impredecible, subyace un orden que gobierna la forma en que se organiza esta complejidad. En particular, frecuentemente se trata de encontrar elementos precursores que nos permitan decir si es probable que ocurra el caos en un sistema de comportamiento no caótico. En la literatura se usa profusamente el término «ruta al caos» para referirse a una serie de bifurcaciones a través de las cuales un comportamiento no caótico se convierte en caótico.

En la gran mayoría de sistemas no lineales de baja dimensión (como los que nos ocupan) que exhiben un comportamiento caótico, se observan como precursores, cascadas de duplicación de período [17]. Una «cascada» aparece como una secuencia infinita de bifurcaciones de duplicación de período. Una órbita periódica estable se transforma en inestable conforme se modifica un parámetro y es reemplazada por otra órbita estable del doble de período. El proceso continúa a través de una infinidad de tales bifurcaciones. Este es un fenómeno experimentalmente observable: cuando tiene lugar la duplicación de período, aparecen subarmónicos¹³ de orden par.

¹³Componentes del espectro de frecuencia múltiplos de $1/2$, $1/3$, ..., $1/N$ de la frecuencia fundamental.

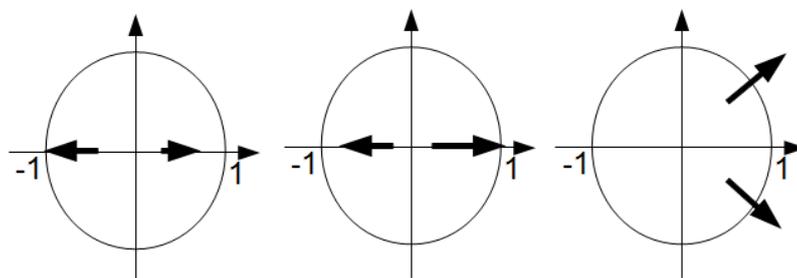


Figura 2.9: Cruce del círculo unidad por parte de los valores propios en un mapa suave.

2.10. Alinealidad por saturación y *Border Collision*

Hemos visto que si al variar un parámetro en un mapa de segundo orden, un valor propio escapa del círculo unidad por el punto -1 , tenemos una bifurcación por duplicación de período. Existen otros tipos de bifurcaciones «suaves» producidas por el cambio en la estabilidad de un punto fijo, las que se clasifican por el modo en que uno o ambos valores propios llegan y cruzan el círculo unidad. En la llamada bifurcación «silla-nodo»¹⁴ un valor propio toca el círculo en $+1$. En la bifurcación «Neimark» un par complejo conjugado de valores propios cruza el círculo unidad. La Fig. 2.9 representa las tres situaciones descritas.

En electrónica de potencia no solo encontramos este tipo de bifurcaciones suaves. Los convertidores DC-DC a lo largo de un período conmutan entre una topología circuital y otra conforme encienden y apagan las llaves que los constituyen (ver Fig.3.1). Si las topologías se alternan siguiendo el mismo orden período tras período tenemos una estructura. Diremos que un convertidor ha cambiado estructuralmente cuando su secuencia topológica en uno o más períodos de conmutación se ha alterado. Tenemos un tipo de bifurcación, caracterizada por este tipo de cambios estructurales, denominada «*border collision*».

Existen dos situaciones particularmente relevantes: (1) el cambio de modo de operación entre las conducciones continua y discontinua y (2) la alinealidad por saturación, que debe su naturaleza a la limitación en el rango de algunos parámetros de control.

En lo subsiguiente nos detendremos en la alinealidad por saturación. Un convertidor DC/DC típico es un circuito de segundo orden que comprende una fuente de tensión, un inductor, un switch, un diodo y un capacitor en paralelo con la salida, que consideraremos resistiva. Dos de los circuitos de control más usados son los de «modo corriente» y «modo tensión».

2.10.1. Convertidor Boost en modo corriente

La Fig. 2.10 muestra un convertidor Boost controlado en modo corriente ([21], cap. 5). El objetivo del Boost es entregar una tensión de salida más alta que la de

¹⁴ en inglés «*saddle-node*»

2.10. Alinealidad por saturación y *Border Collision*

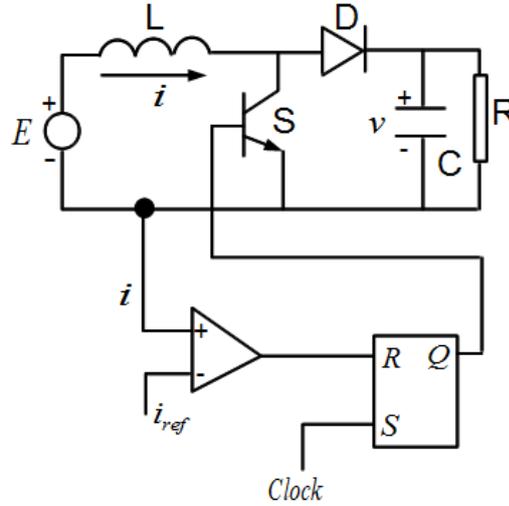


Figura 2.10: Conversor Boost controlado en modo corriente.

la entrada. Obsérvese que el circuito está en lazo abierto, ya que i_{ref} es presentado como un valor constante. Para controlar la tensión de salida v , i_{ref} debería ser función del error de tensión $v - V_{ref}$. Supondremos que las variaciones de i_{ref} serán extremadamente lentas respecto a la dinámica del circuito en su conjunto.

La esencia del control en modo corriente es que, cuando la llave S se cierra en cada pulso de reloj o *clock* – expresión que seguiremos usando – la corriente de inductor se incrementa hasta alcanzar el valor de referencia i_{ref} forzando la apertura de la misma. Tendremos tres tipos de evolución posible en un período T (ver Fig. 2.11): (1) uno cuando en el instante nT la llave se enciende con el pulso de clock y la corriente alcanza i_{ref} , por tanto la llave se abre antes del próximo período. (2) Un segundo tipo cuando nuevamente la llave encendió con el pulso de *clock* pero la corriente no alcanza el valor de referencia en ningún instante. La llave se mantiene encendida a través de todo el período. (3) Un tercer tipo de evolución es cuando en el período anterior la corriente alcanza el valor i_{ref} exactamente al finalizar el período. La llave permanecerá apagada en el período de interés descargándose la self durante el mismo. El valor $i_L(n)$ en el instante nT para el cual la corriente alcanza i_{ref} exactamente en el instante de *clock* $(n+1)T$ es el valor de borde i_{borde} . Establecido un régimen periódico cualquiera –períodos 1, 2, 4 etc.–, si el valor $i(n) = i_{borde}$ según Ec.(2.2) puede ser alcanzado conforme varíe un parámetro – R por ejemplo–, decimos que estamos en la frontera del fenómeno llamado «*border collision*», en este caso por saturación del *Duty Cycle*.

Si:

$$i(n) = i(n+1) - \frac{E \cdot T}{L}$$

entonces:

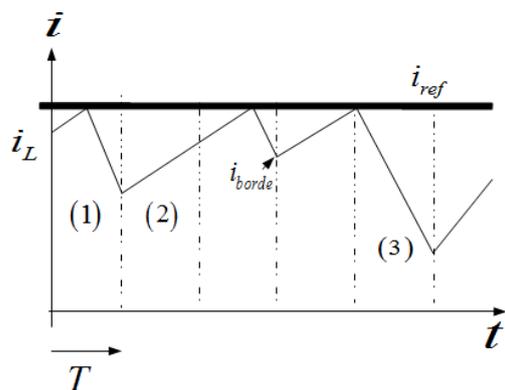


Figura 2.11: Forma de la corriente de inductor para un Boost controlado en modo corriente. Se ha perdido el régimen periódico y tenemos un régimen con saturación del *duty cycle* (2), apreciándose además el límite del «border collision» (3).

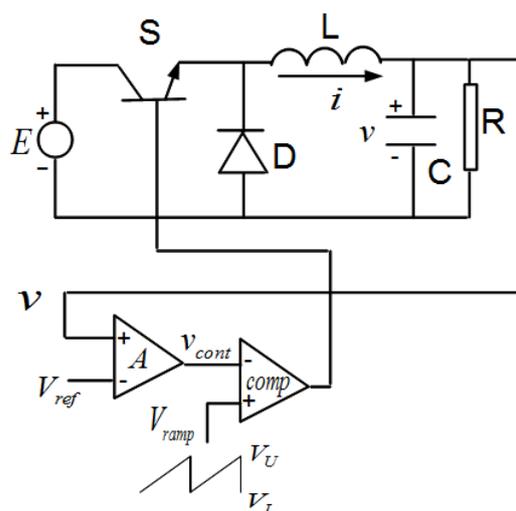


Figura 2.12: Conversor Buck controlado en modo voltaje.

$$i_{borde} = i_{ref} - \frac{E.T}{L} \quad (2.2)$$

2.10.2. Conversor Buck en modo tensión

La Fig. 2.12 representa un convertidor Buck -reductor de tensión- en modo de control por tensión ([21], cap. 5). Este modo consiste en comparar una señal de control con un diente de sierra V_{ramp} . En el circuito de la figura, la señal de control se define como:

$$v_{cont}(t) = A \cdot [v(t) - V_{ref}]$$

La expresión del diente de sierra será:

$$V_{ramp}(t) = V_L + (V_U - V_L) \cdot \left(\frac{t}{T} \text{ mód } 1 \right)$$

donde V_L y V_U son respectivamente mínimo y máximo del diente de sierra y T es el período de switch. El switch S se activa cuando

$$v_{cont}(t) < V_{ramp}(t)$$

La Fig. 2.13 ilustra seis posibilidades de forma de onda para distintas modalidades de funcionamiento. Las tres primeras permiten explicar el fenómeno de «border collision» para el caso de control por tensión. En (1) el voltaje de control atraviesa todo el período manteniéndose por encima de la rampa, el switch se mantiene apagado todo el período. En (2) atraviesa por debajo de la rampa y el switch se mantiene encendido todo el período. En (3) el ciclo involucra un tiempo en OFF y otro en ON del switch. Los bordes entre estas zonas de funcionamiento estarán dadas por la condición donde, estando en un régimen periódico en un modo tipo (3), el voltaje de control roza la parte superior para (1) o inferior para (2). Suponiendo que la tensión de salida v varía mucho más lentamente que la dinámica del convertidor, podemos, partiendo de un régimen periódico, establecer que tendremos *border collision* si se dá $v_{cont}(T) = V_U$ (si pasamos de (3) a (1)) o $v_{cont}(T) = V_L$ (si pasamos de (3) a (2)). En términos de mapas, esto significa que

$$v(n) = \frac{V_{UoL}}{A} + V_{ref}$$

2.11. Conclusiones

En este capítulo se han introducido en la forma que creímos mas breve y consistente los recursos matemáticos de uso general para el estudio de sistemas dinámicos, que serán utilizados a lo largo de este trabajo. Hemos definido qué es un mapa y comentado diversos tipos de mapas útiles en electrónica de potencia, como los de Poincaré y Estroboscópico. Hemos definido y clasificado distintos tipos de puntos fijos. Se ha descrito cómo podemos utilizar la matriz jacobiana para estudiar la estabilidad de los mismos. Hemos presentado el fenómeno de bifurcación por duplicación de período, tanto para sistemas de primer como de segundo orden. Las cascadas de duplicación de período aparecen comúnmente en electrónica de potencia como ruta a un comportamiento caótico del sistema. Finalmente describimos el fenómeno denominado «border collision» asociado a procesos de bifurcación caracterizados por alteraciones en la secuencia topológica, como el pasaje de la conducción continua a discontinua, o a saturaciones del circuito de control¹⁵, y no

¹⁵Ejemplo de lo cual vimos la saturación del tiempo de actuación de la llave, que no puede ser mayor al período T o menor que 0.

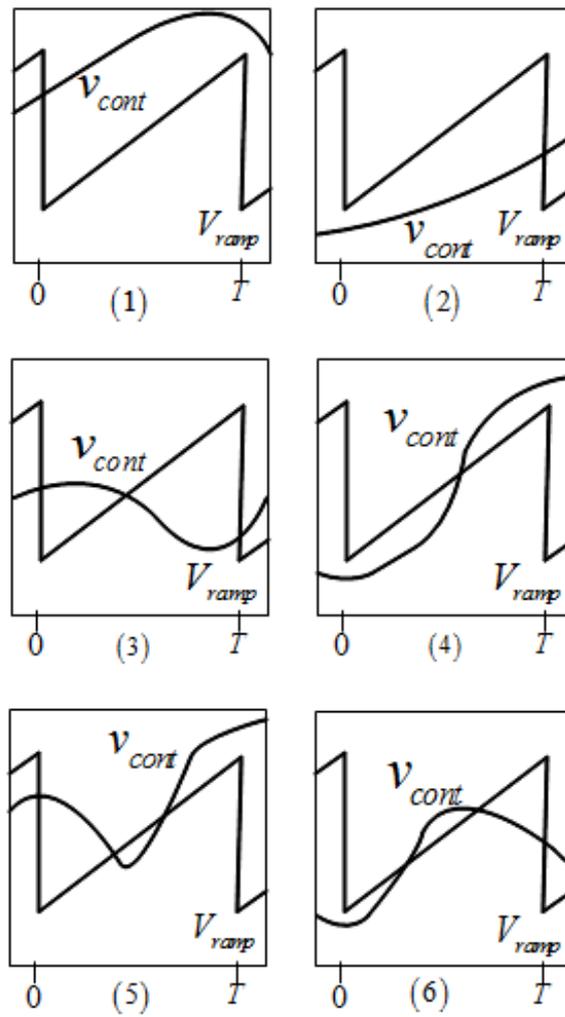


Figura 2.13: Formas de onda para los distintos modos de evolución en control de modo tensión.

por el cambio de estabilidad de un punto fijo del mapa..

Capítulo 3

Mapas para circuitos electrónicos de potencia

3.1. Introducción

En el capítulo anterior introdujimos el concepto de mapa y algunas de sus propiedades. En este capítulo estableceremos el modo de derivar los mapas discretos de los convertidores DC/DC. Ejemplificaremos con algunas topologías de interés.

Los circuitos de electrónica de potencia se modelan naturalmente mediante ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, a)$$

$$\frac{dx}{dt}, x \in \mathbb{R}^n$$

donde $a \in \mathbb{R}^p$ es el vector parámetro y f debe ser una función suave a tramos, esto es, el espacio de estado puede ser dividido en regiones, cada una de las cuales el sistema tiene una forma funcional «suave»¹. El sistema conmuta entre diferentes configuraciones conforme el flujo cruce una frontera del espacio de estado.

Para pasar a un mapa discreto, en primer lugar hay que tener en cuenta que se trata de sistemas no autónomos, y en nuestro caso, sujetos a una fuerza externa asociada a un reloj que cambia la topología del circuito conmutando forzosamente algunos componentes cada período de duración T^2 . Conviene entonces utilizar mapas estroboscópicos muestreando en forma coincidente con cada pulso de conmutación. Es habitual modelar haciendo las siguientes simplificaciones:

- 1) Llaves o switches ideales.
- 2) Conmutaciones instantáneas.

¹Continua y con derivadas continuas. Sin embargo, en los bordes que limitan estas regiones se acepta que haya discontinuidad en f , o que habiendo continuidad, haya discontinuidades en las primeras derivadas.

²Existen convertidores DC-DC con conmutación no periódica, pero no serán objeto de este estudio.

Capítulo 3. Mapas para circuitos electrónicos de potencia

3) Elementos pasivos lineales e invariantes en el tiempo.

En este caso cada fase de la dinámica del sistema, cuya secuencia está dada por las leyes que gobiernan a las llaves, puede ser modelada por un sistema LTI³ de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = A_i x + B_i u$$

con $i = 1, 2, \dots, N$ si hay N posibles configuraciones según los estados ON-OFF de las llaves del sistema.

4) Las trayectorias de las variables de estado son continuas en las transiciones entre diferentes fases.

La Fig. 3.1 describe la dinámica de un convertidor Buck-Boost. El encendido de la llave (SW) se da en forma periódica, en tanto su apagado se vincula con algún objetivo de control⁴. El vector de estados puede elegirse como:

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

Cuando la llave controlable está encendida y circula corriente nula por (D) el sistema queda caracterizado por el par A_1, B_1 . Si por el contrario, la llave controlada está apagada y circula corriente por la otra, tendremos A_2, B_2 . Puede ocurrir que antes de la nueva orden de encendido se anule la corriente de inductor, en ese caso tenemos un tercer estado caracterizado por el par A_3, B_3 y decimos que tenemos conducción discontinua. Para obtener el mapa estroboscópico de conmutación hay que integrar las ecuaciones anteriores, es decir:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= A_i \cdot x(t) + B_i \cdot u(t) \\ e^{-A_i t} \cdot \left[\frac{dx(t)}{dt} - A_i \cdot x(t) \right] &= e^{-A_i t} \cdot B_i \cdot u(t) \\ \frac{d}{dt} [e^{-A_i t} \cdot x(t)] &= e^{-A_i t} \cdot B_i \cdot u(t) \end{aligned}$$

finalmente obteniendo:

$$x(t) = e^{A_i t} x(0) + \int_0^t e^{A_i(t-\tau)} B_i \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

con $i = 1, 2, 3$.

Si los tiempos de duración de cada tramo en la n - *esima* conmutación son respectivamente $d_1^n T$, $d_2^n T$ y $d_3^n T$ tendremos:

$$x(nT + d_1^n T) = N_1(d_1^n) x(nT) + M_1(d_1^n) \quad (3.1)$$

$$x(nT + d_1^n T + d_2^n T) = N_2(d_2^n) x(nT + d_1^n T) + M_2(d_2^n) \quad (3.2)$$

³Lineal e invariante en el tiempo, por sus siglas en inglés.

⁴Esto puede implementarse al revés, es decir, que la llave apague en forma periódica asociando el encendido al control.

3.2. Estudio de algunas topologías de interés

$$\begin{aligned} x(nT + d_1^n T + d_2^n T + d_3^n T) &= x((n+1)T) \\ &= N_3(d_3^n)x(nT + d_1^n T + d_2^n T) + M_3(d_3^n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Siendo:

$$N_i(d_i) = e^{A_i d_i T} \quad (3.4)$$

$$M_i(d_i) = \int_0^{d_i T} e^{A_i \tau} B_i u. d\tau = A_i^{-1} (e^{A_i d_i T} - I) B_i U \quad (3.5)$$

(se ha supuesto que A_i es invertible y que la tensión de entrada es constante), cumpliéndose además: $d_1^n + d_2^n + d_3^n = 1$ e $i_L(d_1^n T + d_2^n T) = 0$ si hay conducción discontinua, o bien $d_3^n = 0$, $d_1^n + d_2^n = 1$ en caso de conducción continua.

El mapa se completa con una condición de control de la forma

$$\sigma [x(d_1^n T)] = 0 \quad (3.6)$$

Que, por ejemplo, para el caso de control por corriente será $i_L(d_1^n T) = [1, 0].x(d_1^n T) = I_{ref}$, donde x proviene de la expresión 3.1.

3.2. Estudio de algunas topologías de interés

Hemos visto un procedimiento general para poder modelar el comportamiento de cierto tipo de convertidores como mapas discretos. En esta sección llevaremos un poco a tierra este concepto, ejemplificando con cuatro convertidores o combinaciones de ellos, y derivando las matrices de sistema necesarias para aplicar las expresiones generales vistas en la sección anterior.

3.2.1. Buck-Boost, control por corriente

En este primer ejemplo trataremos el convertidor Buck-Boost trabajando tanto en conducción continua como en conducción discontinua. La Fig. 3.1 en su parte superior muestra el esquema del circuito.

Cuando conduce (SW) el diodo (D) estará cortado. Obtenemos las ecuaciones de esta fase de la dinámica analizando los dos circuitos vistos en a) de la misma figura. Cuando se abre (SW) la corriente por la self fuerza la conducción del diodo (D). Las ecuaciones de esta etapa son las que provienen del análisis del circuito en b). A continuación pueden ocurrir dos cosas: o bien llega la orden de encendido de (SW), y volvemos al circuito visto en a), o se termina de descargar la inductancia cortándose (D). En este caso tendremos una fase en que ninguna de las llaves conduce, lo que caracteriza al modo de conducción discontinua. Sus ecuaciones surgen al estudiar el circuito c) de descarga de C sobre R . Finalmente vendrá la

Capítulo 3. Mapas para circuitos electrónicos de potencia

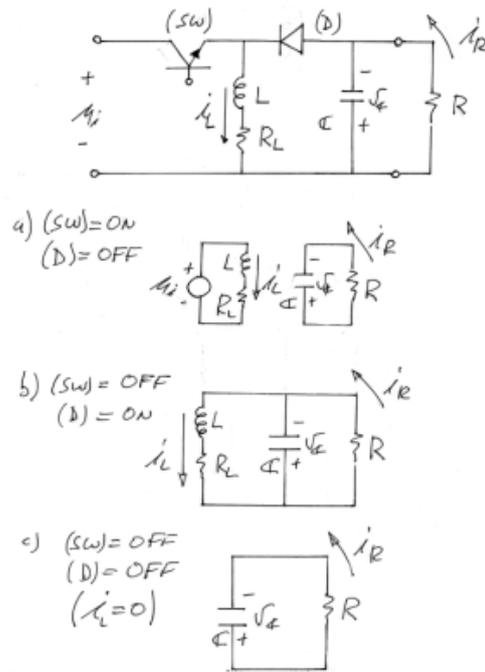


Figura 3.1: Fases de la dinámica del convesor Buck-Boost

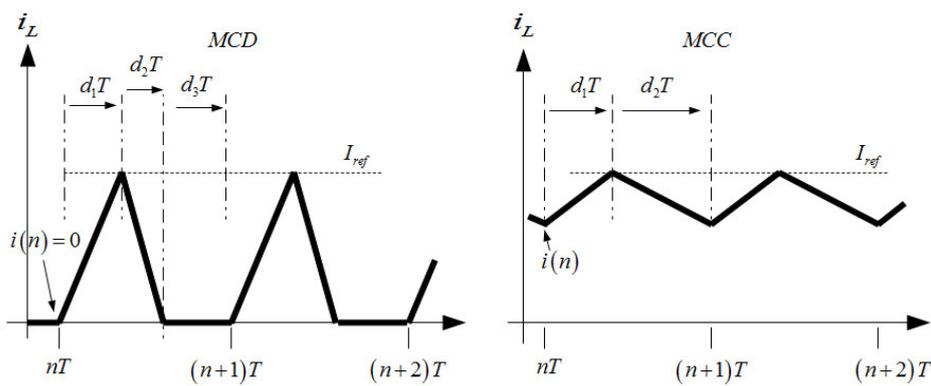


Figura 3.2: Corriente de inductor para modo de conducción discontinua (MCD) y continua (MCC) respectivamente. El control es por corriente.

3.2. Estudio de algunas topologías de interés

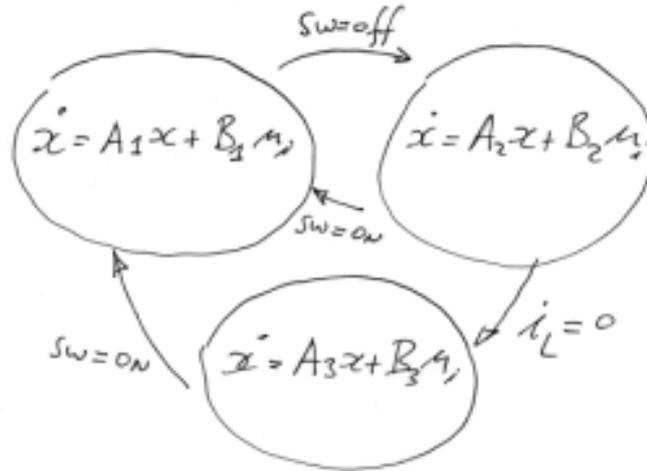


Figura 3.3: Esquema de las condiciones de conmutación para el Buck-Boost en modo de conducción discontinua.

orden de encendido de (SW) volviéndose al circuito presentado en a). La Fig. 3.2 muestra las formas de onda de la corriente de self para ambos modos de conducción.

Las ecuaciones que modelan al sistema son las siguientes:

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

$$\frac{dx}{dt} = A_1x + B_1U = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$\frac{dx}{dt} = A_2x + B_2U = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$\frac{dx}{dt} = A_3x + B_3U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U$$

Para el caso de conducción continua, simplemente prescindimos de la tercera expresión. La Fig. 3.3 presenta un esquema de las condiciones de conmutación para las correspondientes fases o estados posibles para el convertidor. El encendido de la llave (SW) se da en forma periódica, en tanto su apagado se da cuando la corriente de inductor iguala una corriente I_{ref} . Esta última es una función del tiempo⁵, pero la supondremos de variación muy lenta respecto a la dinámica del convertidor y por tanto, aproximadamente constante.

En la sección 3.3 hay un resumen de las matrices de sistema para esta topología y modo de conducción. Con estas y las ecs. (3.1) a (3.6) tenemos el modelo de mapa discreto para el convertidor. Las condiciones de conmutación serán:

⁵Si el objetivo de control fuese la regulación de la tensión de salida, podría tener la forma $I_{ref}(t) = g \cdot (v_C(t) - V_{ref})$.

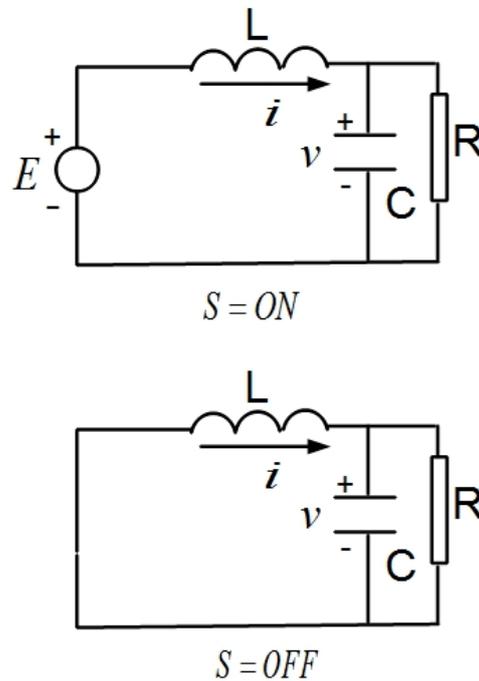


Figura 3.4: Conversor Buck en modo de conducción continua: fases en sucesión.

$$i_L(d_1^m T) = [1, 0]x(d_1^m T) = I_{ref} \text{ y } i_L(d_2^m T) = [1, 0]x(d_2^m T) = 0.$$

3.2.2. Buck en MCC y control por voltaje

La Fig.2.12 muestra el circuito del conversor Buck controlado en modo tensión. Supondremos conducción continua, por lo que el funcionamiento estará dado por la alternancia de dos fases, una con la llave S en ON y D en OFF y la otra exactamente al revés. La Fig.3.4 muestra los dos circuitos en sucesión. Obsérvese que el circuito para S en OFF es el mismo que el de S en ON con $E = 0$.

Definiendo:

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

Obtenemos:

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + B_1 U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

$$\frac{dx}{dt} = A_2 x + B_2 U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} E$$

3.2. Estudio de algunas topologías de interés

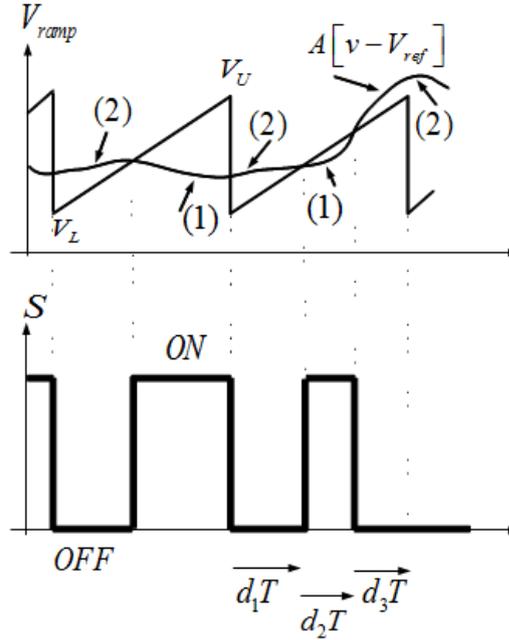


Figura 3.5: Control por tensión. Alguna forma de onda posible.

En la sección 3.3 hay un resumen de las matrices de sistema para esta topología y modo de conducción. Con estas y las ecs. (3.1) a (3.6) tenemos el modelo de mapa discreto para el convertor.

Respecto al control en modo tensión, hay que tener cuidado de buscar todas las conmutaciones en cada período de duración T . La Fig.3.5 muestra algunas posibilidades. Los puntos de conmutación para cada tramo j –es decir los d_j – estarán dados por la solución en secuencia de las ecuaciones

$$A \cdot [v(d_j T) - V_{ref}] - \left[V_L + (V_U - V_L) \cdot \left(\sum_1^{j-1} d_i T + d_j T \right) \right] = 0$$

con

$$v = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(d_j T)$$

y

$$x(d_j T) = e^{A_j d_j T} x_j(0) + A_j^{-1} (e^{A_j d_j T} - I) B_j E$$

debiéndose elegir adecuadamente las matrices de sistema, descrita por los subíndices j (ver Fig. 3.5).

3.2.3. Boost en MCC y control por corriente.

La Fig. 3.6 muestra un convertor Boost en control por corriente y lazo cerrado, esto es, ahora i_{ref} es una función del error de la tensión de salida. La Fig. 3.7

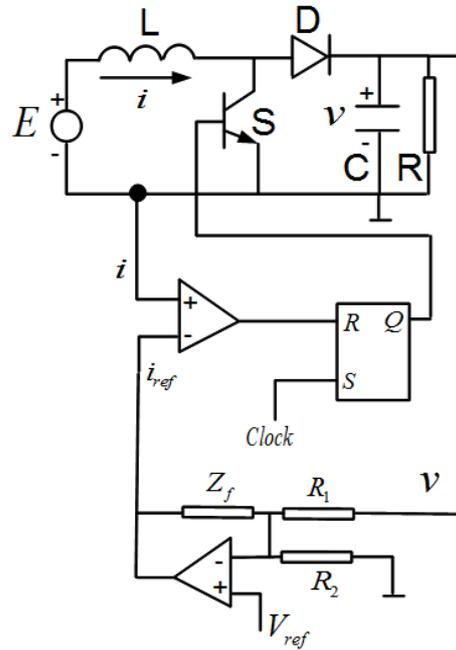


Figura 3.6: Boost, control por corriente, lazo cerrado.

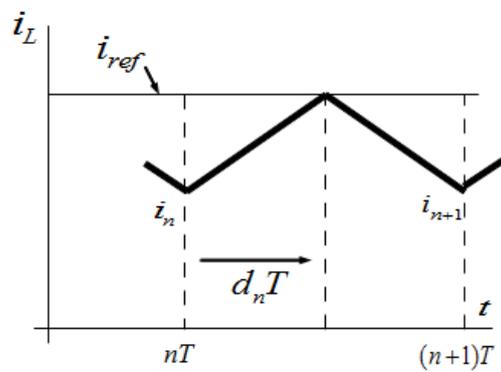


Figura 3.7: Corriente de inductor en control por corriente.

muestra la idea de este tipo de control. En cada pulso de reloj la llave S se enciende y la corriente de self comienza a incrementarse. Cuando alcanza el valor i_{ref} se apaga y comienza a descargar sobre el conjunto RC a través de D .

En modo de conducción continua (MCC) tendremos la alternancia de los dos circuitos que se muestran en la Fig. 3.8 .

Definiendo:

3.2. Estudio de algunas topologías de interés

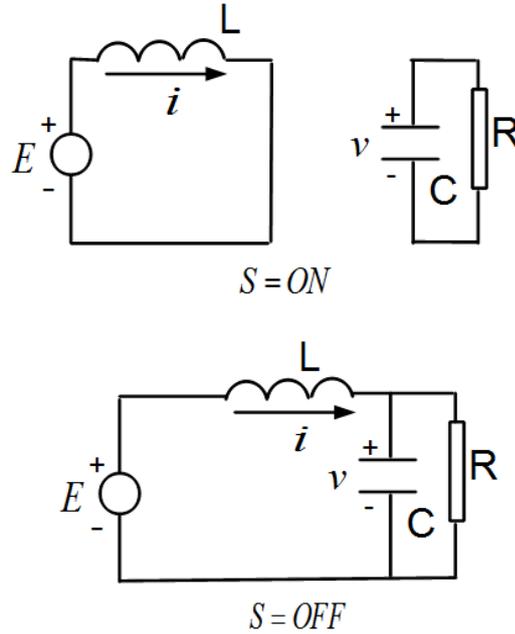


Figura 3.8: Conversor Boost en modo de conducción continua: fases en sucesión.

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

obtenemos, para S en ON :

$$\frac{dx}{dt} = A_1 x + B_1 U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} E$$

y para S en OFF :

$$\frac{dx}{dt} = A_2 x + B_2 U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E$$

Tenemos aquí el problema de que A_1 no es invertible, y no podemos usar las ecs. (3.1) a (3.5) cuando $S = ON$ para obtener el mapa. Debemos integrar directamente

$$\frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$$

y

$$\frac{dv_C}{dt} = \left(-\frac{1}{RC}\right) v_C$$

obteniendo las siguientes ec. para el instante $d_1 T$ de apagado:

$$i_{ref} - i_n = \frac{U d_1 T}{L}$$

Capítulo 3. Mapas para circuitos electrónicos de potencia

$$v_C(d_1T) = v_n e^{-\frac{d_1T}{RC}}$$

Vamos utilizar una simple resistencia $Z_f = R_f$ en el amplificador de error, de cuyo análisis surge que ⁶

$$k \cdot i_{ref} = V_{ref} \left[1 + \frac{R_f}{R_2} \right] - \frac{R_f}{R_1} [v_C(d_1T) - V_{ref}]$$

Eliminando i_{ref} de estas tres últimas expresiones tenemos nuestra

$$\sigma(d_1T, i_n, v_n) = 0$$

que describe el control del conversor.

3.3. Resumen de las matrices de sistema para las topologías analizadas en este capítulo

$$x = \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

3.3.1. Buck-Boost en MCD.

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{R_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

⁶ Aquí k expresa el hecho de que tanto i como i_{ref} son tensiones cuyo valor coincide con las de las mencionadas corrientes, de modo que $k = 1\Omega$.

3.4. Simulaciones, diagramas de bifurcación, diagramas de Poincaré: un enfoque práctico

3.3.2. Buck en MCC

$$A_1 = A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.3.3. Boost en MCC y control por corriente

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Como A_1 no es invertible, para $S = ON$ integramos directamente las ecs. obteniendo:

$$\dot{i}_{ref} - \dot{i}_n = \frac{U d_1 T}{L}$$

$$v_C(d_1 T) = v_n e^{-\frac{d_1 T}{RC}}$$

3.4. Simulaciones, diagramas de bifurcación, diagramas de Poincaré: un enfoque práctico

En esta sección tomaremos el conversor Buck en modo de conducción continua y control por tensión de la sección 3.2.2. Asumiremos los siguientes valores para los parámetros del circuito: $L = 20mH$, $C = 47\mu F$, $R = 22\Omega$, $V_{ref} = 11V$, $V_U = 8,2V$, $V_L = 3,8V$, $T = 400\mu seg$, $A = 8,4$. Tomaremos la tensión de entrada E como parámetro variable. Haremos la simulación completa y presentaremos las curvas en régimen de i_L , v_C y *error vs rampa*, para cuatro valores $E = 23V$, $E = 26V$, $E = 32,02V$ y $E = 32,25V$.

Vemos cuatro comportamiento distintos (ver Figs. 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12). En los dos primeros tenemos un régimen claramente periódico, aunque en el segundo las formas de onda tiene el doble de período de la frecuencia de conmutación. Para los criterios de diseño habituales esto no es deseable al introducirse subarmónicos en el lazo de control. En el tercer y cuarto régimen no hay periodicidad, sin embargo observemos que el objetivo de control ($v_C \approx V_{ref}$) se cumple al igual que los dos

Capítulo 3. Mapas para circuitos electrónicos de potencia

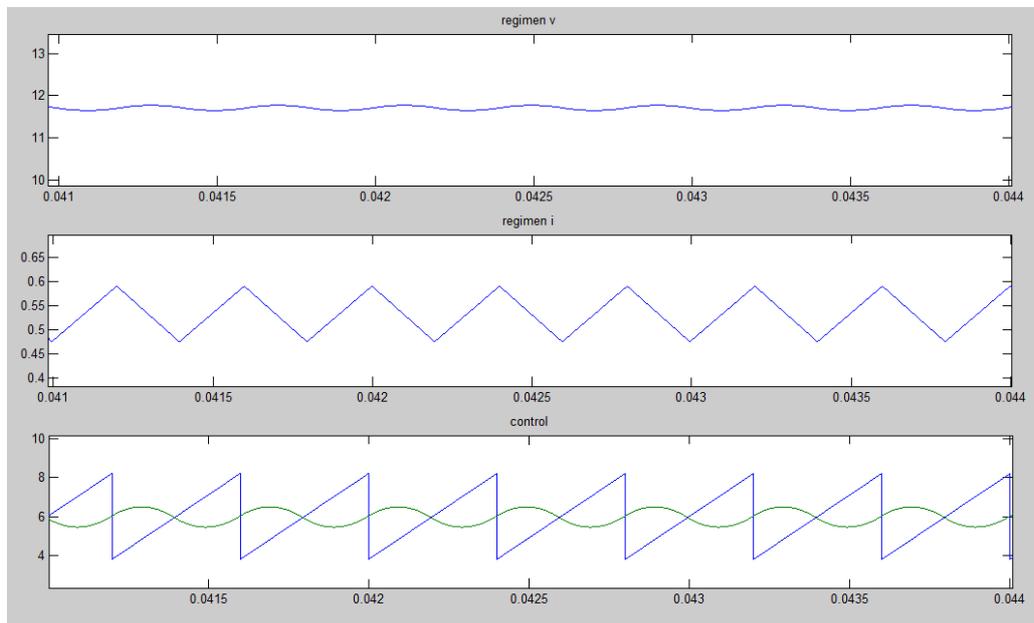


Figura 3.9: Régimen para $E=23V$ del convertor Buck: period-1.

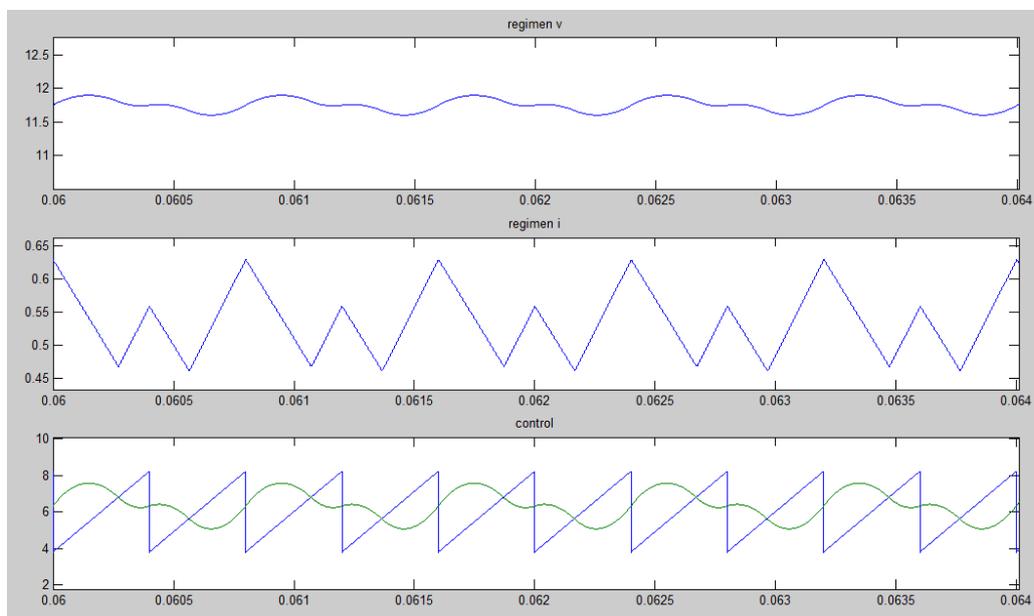


Figura 3.10: Régimen para $E=26V$ del convertor Buck: period-2.

3.4. Simulaciones, diagramas de bifurcación, diagramas de Poincaré: un enfoque práctico

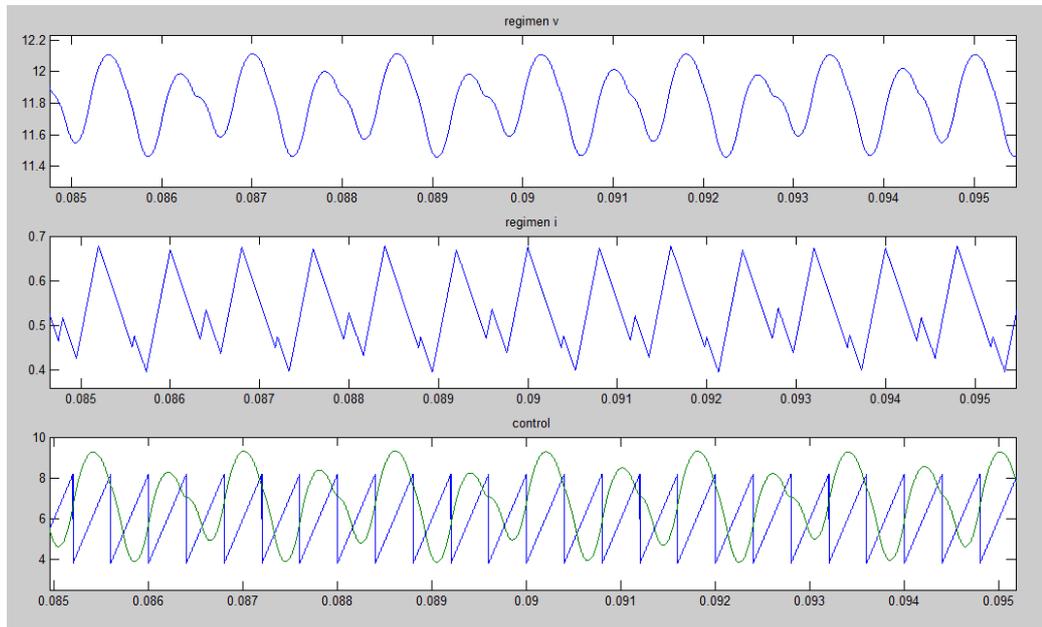


Figura 3.11: Régimen para $E=32.02V$ del convertor Buck: régimen caótico «suave».

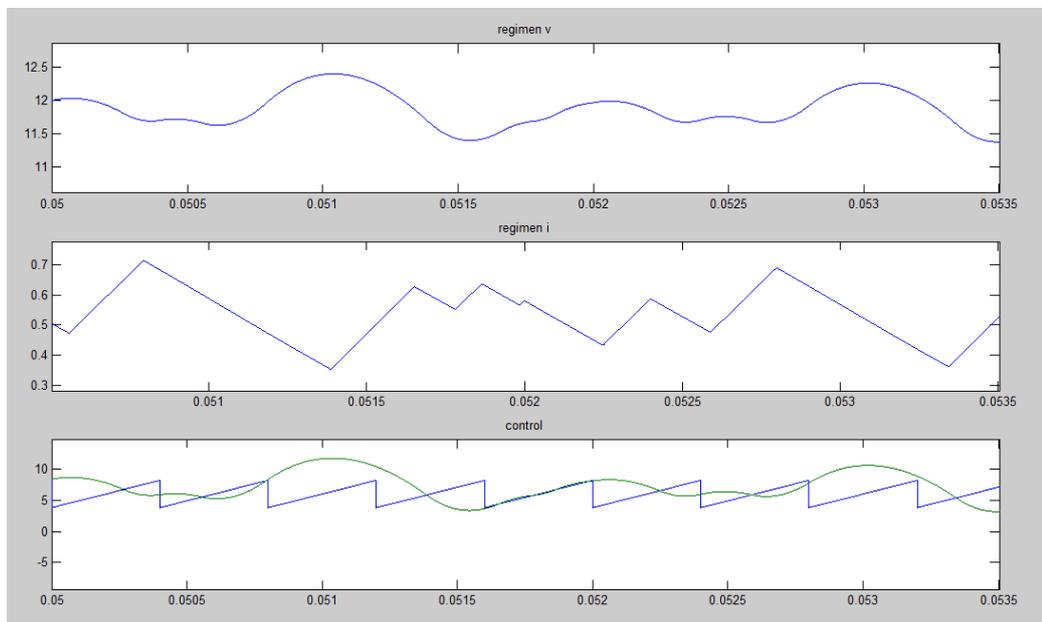


Figura 3.12: Régimen para $E=32.25V$ del convertor Buck: régimen caótico «no suave».

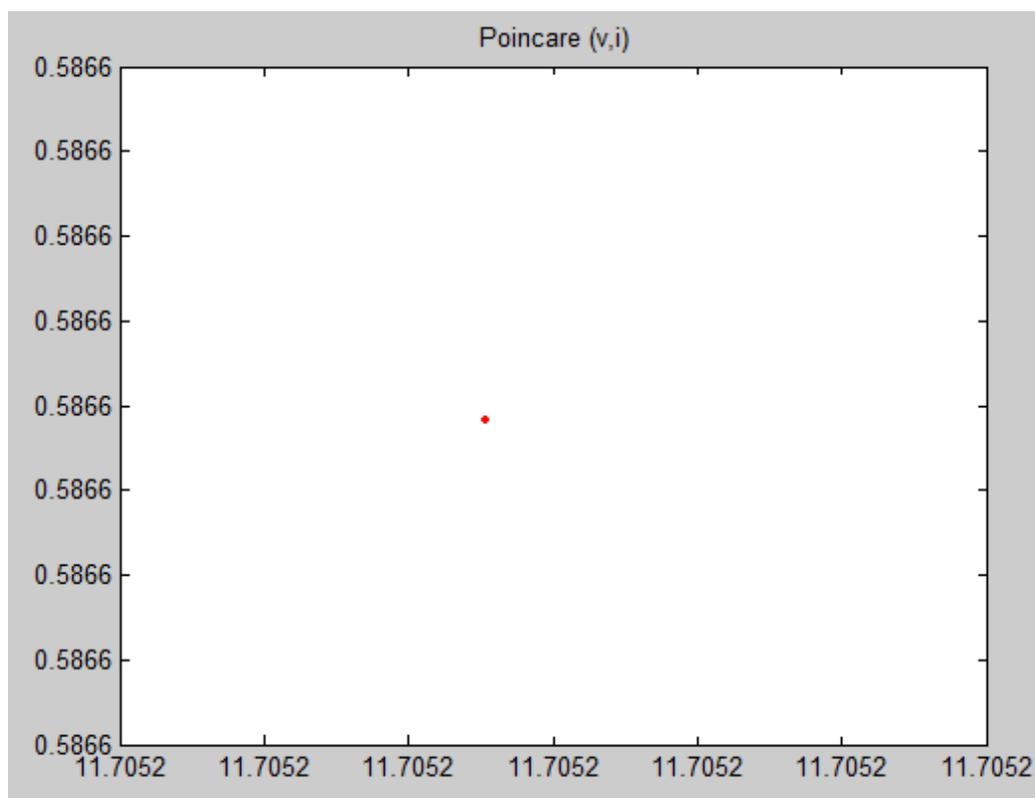


Figura 3.13: Diagrama de Poincaré para el régimen del convertor Buck con $E=23V$.

anteriores y los valores de todas las variables están acotados, no hay peligro de rotura del convertor.

Utilizando el mapa discreto desarrollado en 3.2.2 podemos obtener los mapas de Poincaré de los cuatro regímenes vistos con anterioridad. Recordemos que se trata de analizar sólo el estado de régimen, por lo que hay que dejar correr el modelo unos cuantos ciclos de reloj y tomar solo los últimos. En nuestro caso, se tomaron los últimos 1000 ciclos de 3500 en total.

No importa cuántos elementos tengan las series temporales que conforman los diagramas de Poincaré, siempre obtenemos el mismo tipo de atractor para ese valor del parámetro de entrada: un punto para el régimen de período 1— siempre el mismo, ver Fig. 3.13— dos para el de período 2 (ver Fig. 3.14) y los atractores caóticos de las Figs. 3.15 y 3.16. Para obtener un panorama general, es conveniente construir el «diagrama de bifurcaciones» del sistema. Para ello variamos E entre un valor mínimo y máximo en pequeños escalones, corremos el mapa discreto del convertor para cada uno de estos valores de entrada y nos quedamos con los valores de régimen. La Fig. 3.17 muestra el gráfico i_L vs E para 400 valores de E entre $22V$ y $32V$.

Podemos observar distintas conductas del convertor conforme varía E . Hay una ruta de bifurcaciones principal de duplicación de período. En los zoom puestos en

3.4. Simulaciones, diagramas de bifurcación, diagramas de Poincaré: un enfoque práctico

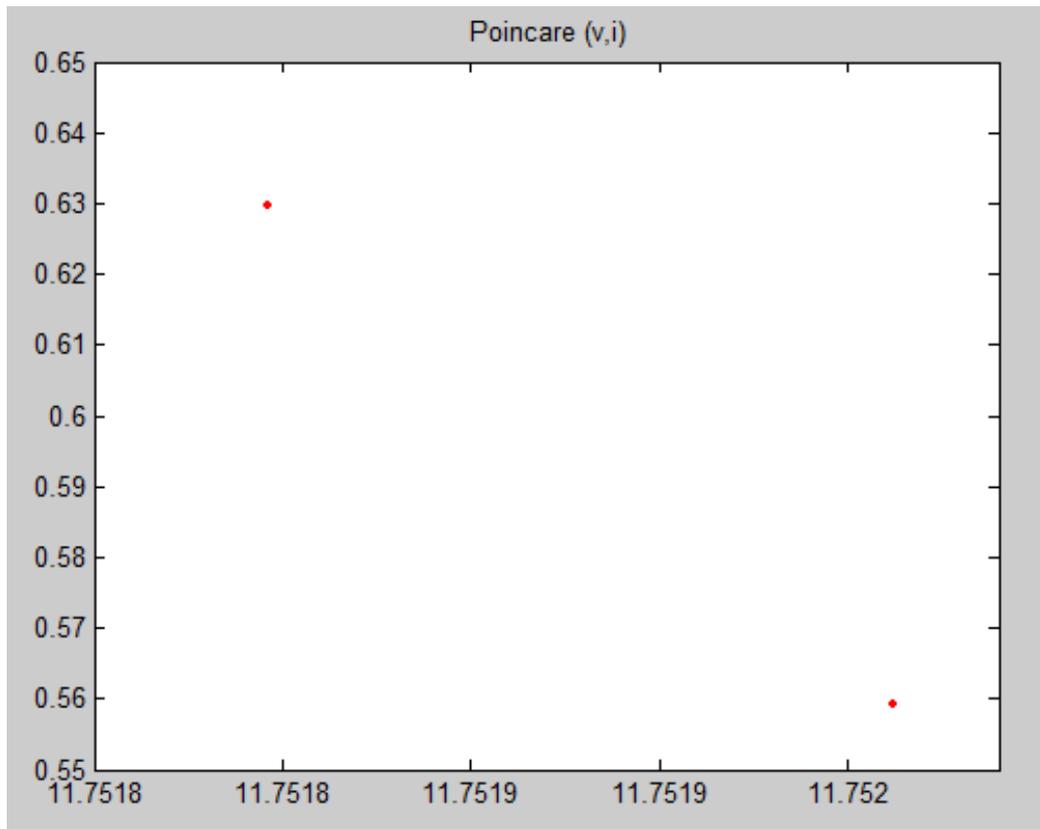


Figura 3.14: Diagrama de Poincaré para el régimen del convertidor Buck con $E=26V$.

$E \approx 24,6V$ y $E \approx 30,9V$ vemos el pasaje de un régimen de período 1 a período 2 y de período 2 a período 4 (ver Figs. 3.18 y 3.19). A partir de $E \approx 32V$ el convertidor entra en una región caótica, reconocible porque los puntos que conforman el atractor se fusionan en bandas. Para $E = 32,02$ tenemos un caos de cuatro bandas, pero más adelante tenemos un súbito alargamiento del atractor, asociado a una bifurcación no suave. El fenómeno de «border collision» lo reconocemos por la saturación del control (comparar en las Figs. 3.11 y 3.12 las formas de onda de control).

Para valores de E un poco por debajo de $24V$ vemos que el atractor principal (período 1) convive con un atractor caótico inestable. En la práctica podríamos observar algún comportamiento transitorio irregular para este rango de tensión de entrada.⁷

⁷ No interesa a los efectos de este trabajo, pero en las simulaciones no hay ruido, por tanto no es esperable el pasaje de un atractor a otro. Seguramente si dejásemos correr la simulación un tiempo más, desaparecería el atractor transitorio.

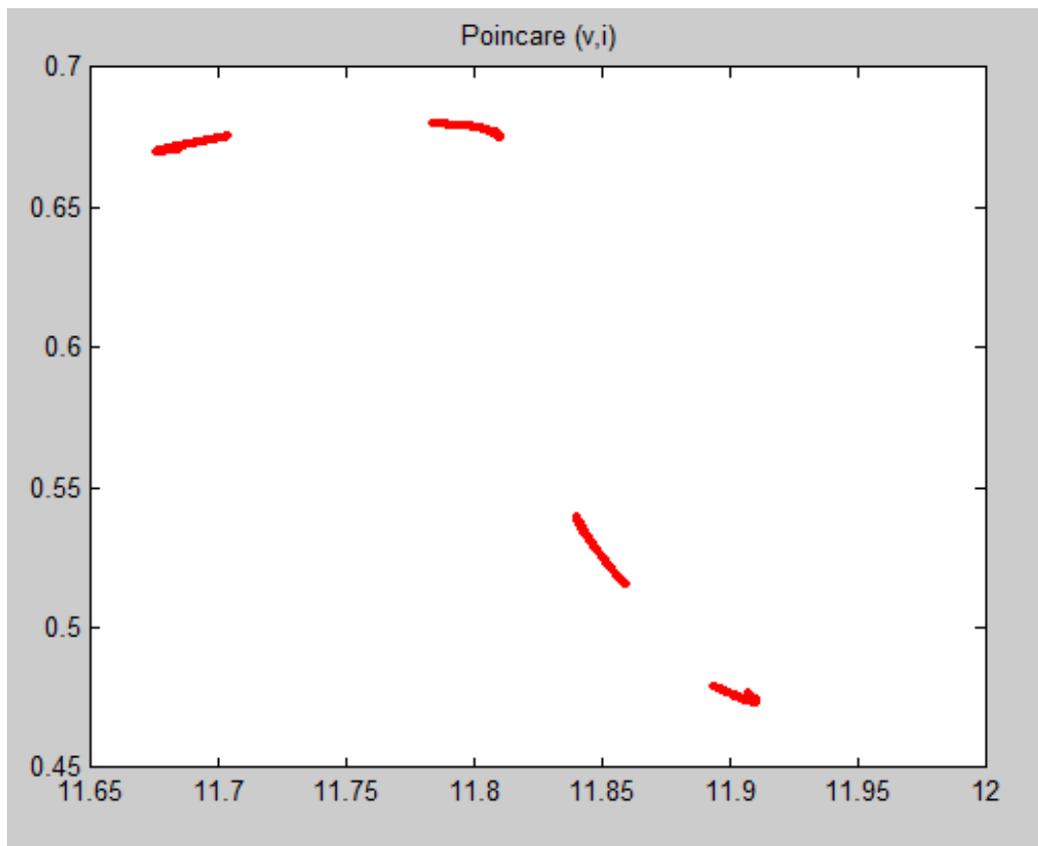


Figura 3.15: Diagrama de Poincaré para el régimen del convertor Buck con $E=32.02V$.

3.5. Conclusiones

Hemos desarrollado en forma general y luego concretado para algunos convertidores, en determinados regímenes de conducción y tipos de control, el concepto de mapa discreto. La aplicación a un convertor Buck en modo de conducción continua y control por tensión, permitió mostrar la utilidad de los diagramas de Poincaré y el diagrama de Bifurcación para obtener información acerca de la conducta del dispositivo ante variaciones de un parámetro.

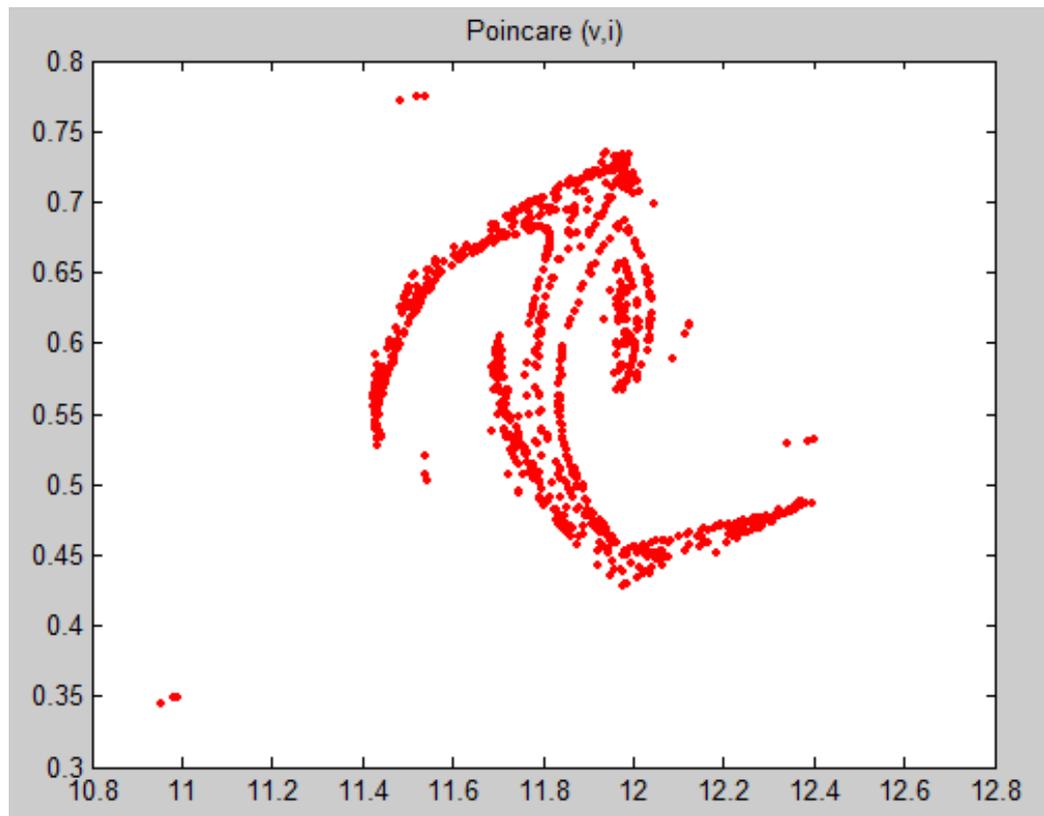


Figura 3.16: Diagrama de Poincaré para el régimen del convertor Buck con $E=32.25V$.

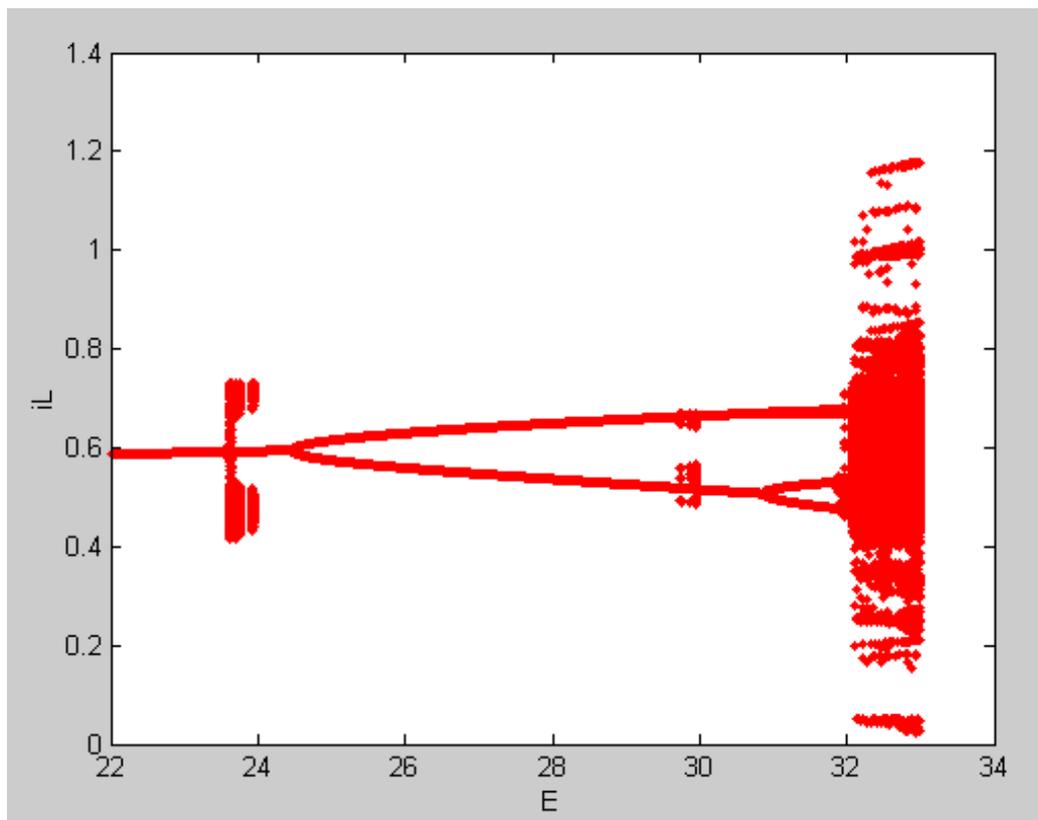


Figura 3.17: Diagrama de Bifurcaciones para la corriente i_L del régimen del convertor Buck con $22V < E < 33V$.

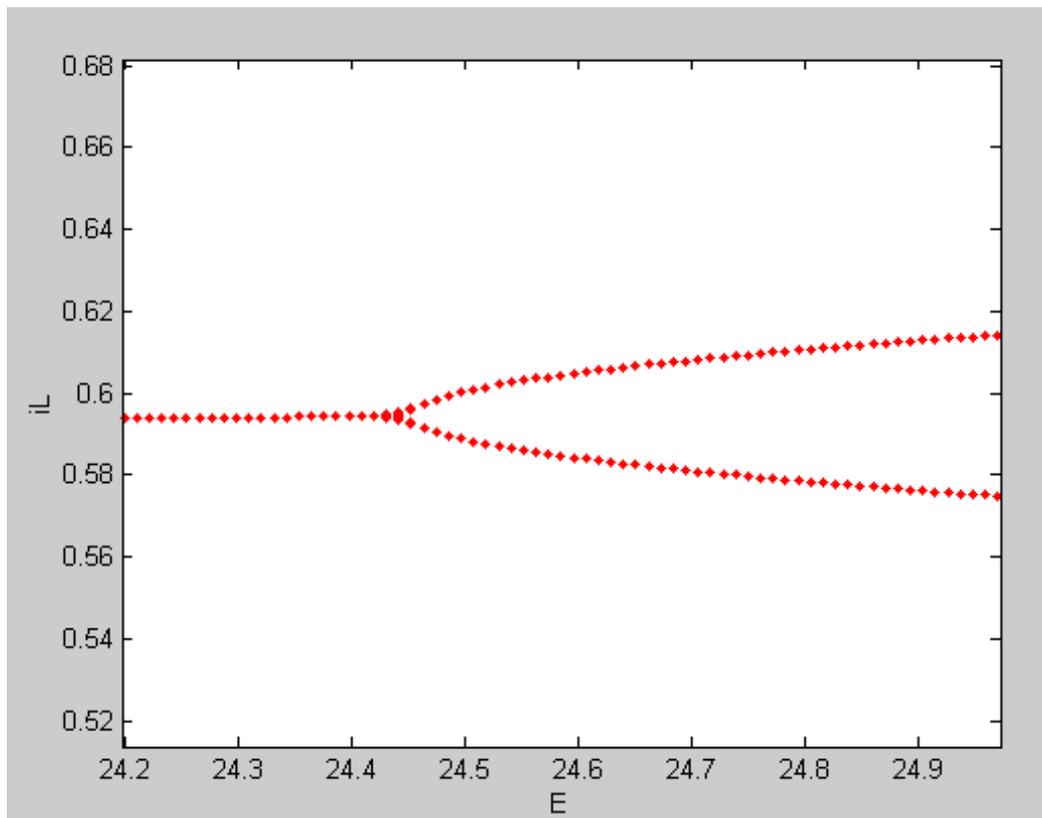


Figura 3.18: Zoom sobre Diagrama de Bifurcaciones. Pasaje de Period 1 a Period 2.

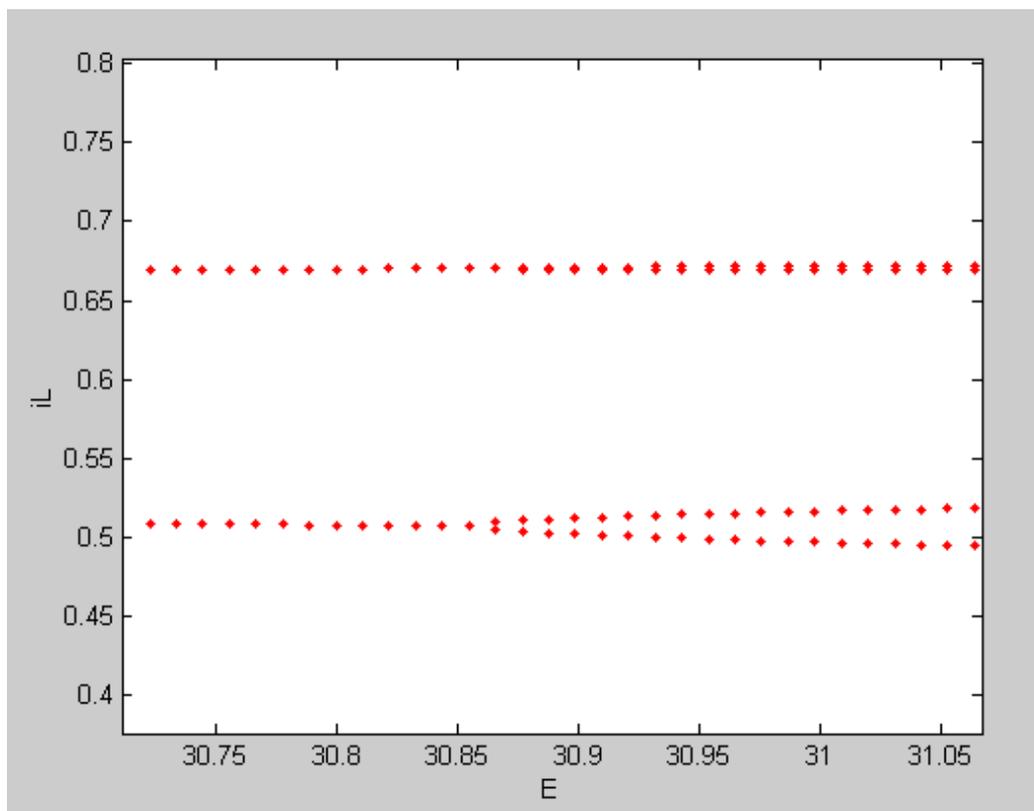


Figura 3.19: Zoom sobre Diagrama de Bifurcaciones. Pasaje de Period 2 a Period 4.

Capítulo 4

Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un conversor DC/DC

4.1. Introducción

En este capítulo, estudiaremos el comportamiento de un sistema conformado por un conversor Buck-Boost –controlado por corriente de pico– puesto a continuación de un rectificador simple compuesto por un puente de diodos y un condensador C_f (ver Fig. 4.1). La idea es dar solución a un problema práctico como es el de dimensionar C_f de modo de evitar un comportamiento inestable. Usualmente se buscaría un punto de funcionamiento considerado extremo a esos efectos, aceptando entonces una dinámica de pequeños desplazamientos del mismo y aplicar instrumentos del análisis lineal clásico, como los diagramas de Bode u otros. Aquí se analizará el problema sin realizar ese tipo de aproximaciones, tomando el sistema en forma completa e identificando estabilidad con un régimen de período 1. Un análisis mas completo puede verse en [20].

4.2. Descripción y modelado del sistema a estudio

En su conjunto, el sistema en cuestión es un conversor AC-DC. El puente de diodos rectifica la tensión alterna de entrada y el Buck-Boost funciona como control de la salida. En el momento de mayor tensión a la entrada (ver Fig. 4.2), esta coincidirá, despreciando la caída en los diodos, con la tensión sobre C_f . Conforme la entrada sigue su ciclo y comienza a bajar, en cierto momento el puente deja de conducir ¹ y comienza a descargarse C_f aportando la energía que requiere el conversor Buck-Boost. Este proceso continúa hasta que la tensión rectificadora de onda completa alcance el valor en bornes de C_f y nuevamente pase a conducir el puente de diodos ².

Véase la sección 3.2.1 para la descripción del comportamiento del conversor

¹Lo computamos cuando la condición $i_{PD} = i_{Cf} + i_{SW} \geq 0$ deja de cumplirse.

²Lo computamos cuando la condición $u_{Cf} \geq |u_i|$ deja de cumplirse.

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un convertor DC/DC

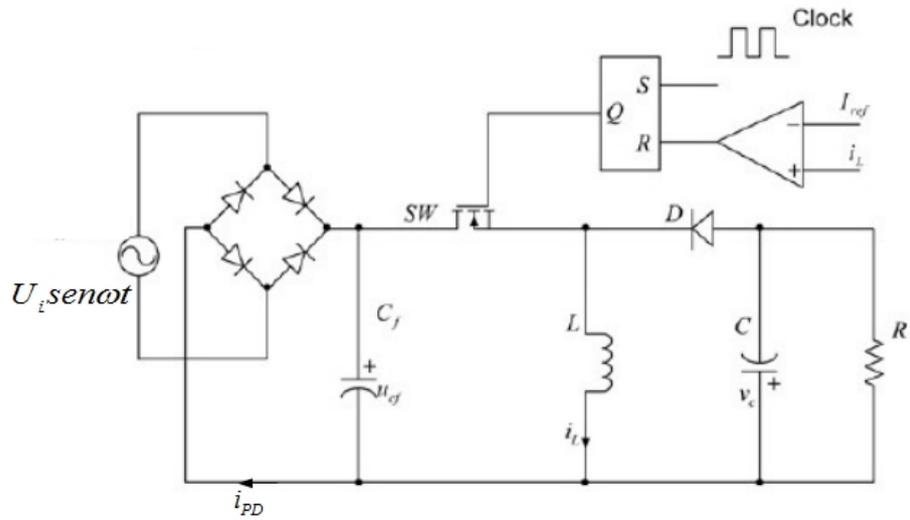


Figura 4.1: Convertor Buck-Boost como etapa de salida de un rectificador.

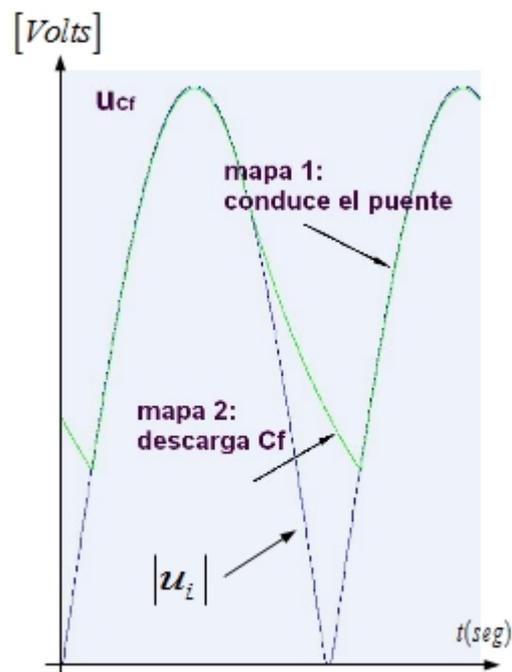


Figura 4.2: Mapas estroboscópicos según el comportamiento de u_{Cf}

Buck-Boost con control por corriente. Allí asumimos una conducta como la del primer ciclo que se ve en la Fig. 4.3. Pero en el siguiente ciclo, la pendiente de la

4.2. Descripción y modelado del sistema a estudio

curva de corriente, asociada a la tensión sobre C_f ³ por la Ec.(4.1), no es suficiente para que i_L corte I_{ref} antes del próximo pulso de reloj.

$$i_L(t) = i_L(n) + \frac{u_{Cf}(n)}{L}t \quad (4.1)$$

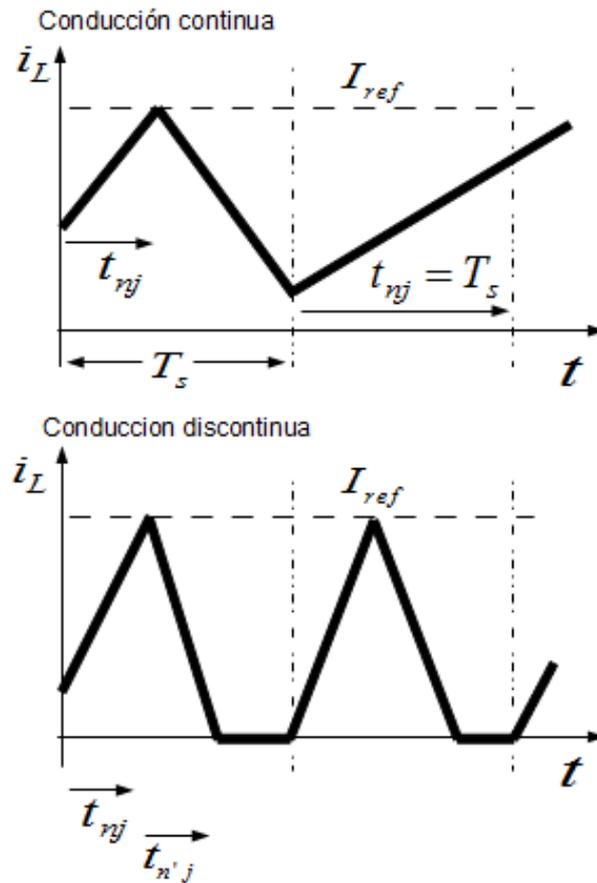


Figura 4.3: Control en modo corriente

Veremos que este fenómeno es el desencadenante de secuencias intermitentes de bifurcaciones para tensiones u_{Cf} demasiado bajas que puedan ocurrir en cada período de la salida del puente rectificador. El problema propuesto es encontrar los valores para C_f que eliminen esas secuencias. Obsérvese que cuanto mayor sea este último, mayor será la corriente de pico por el puente, de modo que finalmente debiera elegirse el mínimo que asegure la estabilidad.

La tensión u_{Cf} tiene dos expresiones distintas según el puente de diodos conduzca o no. Para el primer caso («mapa 1»): $u_{Cf}(n) = U_i |\text{sen}(\omega n T_S)|$. Para el

³ u_{Cf} será considerada constante entre períodos de conmutación puesto que su variación es muy lenta respecto a la frecuencia de conmutación del convertidor.

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un conversor DC/DC

segundo («mapa 2») tendremos la descarga del condensador C_f . Cada una de estas dos situaciones dará lugar a un mapa estroboscópico distinto (Fig. 4.2). El «mapa 1», correspondiente a los períodos de tiempo en que el puente conduce será descrito por las Ecs. (3.1) a (3.5) –ya que en algunos períodos tendremos conducción discontinua– con las matrices de la sección 3.3.1. El «mapa 2» es de tercer orden, ya que a las variables de estado i_L y v_C se agrega u_{C_f} . También tendremos conducción discontinua en algunos períodos.

Para el «mapa 2» (descarga de C_f) tendremos que si SW=ON y D=OFF:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \\ u_{C_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/L \\ 0 & -1/(RC) & 0 \\ -1/C_f & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \\ u_{C_f} \end{bmatrix}$$

Si SW=OFF y D=ON, C_f no tiene camino para descargarse, manteniéndose constante su tensión en bornes, entonces:

$$u_{C_f} = u_{C_f}(tn_2) \quad (4.2)$$

siendo tn_2 el instante en que la corriente de self del mapa 2 alcanzó el valor I_{ref} . Para este estado, la dinámica del mapa 2 estará dada por:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \\ u_{C_f} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1/L & 0 \\ 1/C & -1/(RC) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \\ u_{C_f} \end{bmatrix}$$

Para los períodos con conducción discontinua, tendremos un tramo final con SW=OFF y D=OFF, donde solo se observa la descarga de C sobre R y su dinámica está dada por:

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{v_C}{CR}$$

4.3. Mapas discretos

4.3.1. Instantes de apagado de la llave

Los instantes tn_1 («mapa 1») y tn_2 («mapa 2») en que la corriente i_L alcanza I_{ref} forzando la apertura de SW (ver Fig.4.3), se obtienen integrando las ecuaciones correspondientes a SW=ON y D=OFF de los mapas 1 o 2 respectivamente. Obtenemos:

«Mapa 1»

$$i_L(n) + \frac{|U_{isen}(\omega n T_S)|}{L} t_{n1} = I_{ref} \quad (4.3)$$

«Mapa 2»

$$C_1^{mapa2} \cdot \cos \beta^{mapa2}(n.T_S + t_{n2}) + C_2^{mapa2} \cdot \text{sen} \beta^{mapa2}(n.T_S + t_{n2}) = I_{ref} \quad (4.4)$$

siendo:

$$\begin{aligned} C_1^{mapa2} &= i_L(n) \\ \beta^{mapa2} &= \frac{1}{\sqrt{L \cdot C_f}} \\ C_2^{mapa2} &= u_{C_f}(n) \cdot \sqrt{\frac{C_f}{L}} \end{aligned}$$

El cálculo de t_{n_j} ($j=1,2$ según de que mapa se trate) clasifica los períodos en dos tipos según este sea menor o mayor que T_S (en ese caso será $t_{n_j} = T_S$).

4.3.2. Mapas en conducción continua

El mapa para conducción continua se obtiene integrando las ecuaciones para SW=OFF y D=ON entre $t = t_{n_j}$ y $t = T_S$. Obtenemos:

«Mapa 1» si $t_{n1} = T_S$:

$$\begin{aligned} i_L(n+1) &= i_L(n) + \frac{|U_i \text{sen}(\omega n T_S)|}{L} T_S \\ v_C(n+1) &= v_C(n) e^{-\frac{T_S}{RC}} \\ u_{C_f}(n+1) &= |U_i \text{sen} \omega(n+1) T_S| \end{aligned} \quad (4.5)$$

«Mapa 1» si $t_{n1} < T_S$:

$$\begin{aligned} i_L(n+1) &= e^{\alpha(T_S - t_{n1})} \cdot \\ &\left[C_1^{mapa1} \cos \beta^{mapa1}(T_S - t_{n1}) + C_2^{mapa1} \text{sen} \beta^{mapa1}(T_S - t_{n1}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_C(n+1) &= -L e^{\alpha(T_S - t_{n1})} \cdot \\ &\left[(C_1^{mapa1} \alpha + C_2^{mapa1} \beta^{mapa1}) \cos \beta^{mapa1}(T_S - t_{n1}) + \right. \\ &\left. + (C_2^{mapa1} \alpha - C_1^{mapa1} \beta^{mapa1}) \text{sen} \beta^{mapa1}(T_S - t_{n1}) \right] \end{aligned}$$

$$u_{C_f}(n+1) = U_i |\text{sen} \omega(n+1) T_S|$$

Con:

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un convertor DC/DC

$$\begin{aligned}
 C_1^{mapa1} &= I_{ref} \\
 \alpha &= -\frac{1}{2RC} \\
 \beta^{mapa1} &= \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}} \\
 C_2^{mapa1} &= -\frac{1}{\beta^{mapa1}} \left(v_C(n) e^{-\frac{t_{n1}}{RC}} + \alpha I_{ref} \right)
 \end{aligned}$$

«Mapa 2» si $t_{n2} = T_S$:

$$\begin{aligned}
 i_L(n+1) &= C_1^{mapa2} \cos \beta^{mapa2}(n+1)T_S + C_2^{mapa2} \text{sen} \beta^{mapa2}(n+1)T_S \\
 v_C(n+1) &= v_C(n) e^{-T_S/RC} \\
 u_{Cf}(n+1) &= L\beta^{mapa2} \left[C_2^{mapa2} \cos \beta^{mapa2}(n+1)T_S - C_1^{mapa2} \text{sen} \beta^{mapa2}(n+1)T_S \right]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

«Mapa 2» si $t_{n2} < T_S$:

$$\begin{aligned}
 i_L(n+1) &= e^{\alpha(T_S-t_{n2})} \left[C_1^{mapa2} \cos \beta^{mapa2}(T_S - t_{n2}) + C_2^{mapa2} \text{sen} \beta^{mapa2}(T_S - t_{n2}) \right] \\
 v_C(n+1) &= -L e^{\alpha(T_S-t_{n2})} \left[(C_1^{mapa2} \alpha + C_2^{mapa2} \beta^{mapa2}) \cos \beta^{mapa2}(T_S - t_{n2}) \right. \\
 &\quad \left. + (C_2^{mapa2} \alpha - C_1^{mapa2} \beta^{mapa2}) \text{sen} \beta^{mapa2}(T_S - t_{n2}) \right] \\
 u_{Cf}(n+1) &= L\beta^{mapa2} \left[C_2^{mapa2} \cos \beta^{mapa2} t_{n2} - C_1^{mapa2} \text{sen} \beta^{mapa2} t_{n2} \right]
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.3.3. Mapas en conducción discontinua

Si para el «Mapa j» ($j=1,2$) en el instante $t_{nj} + t_{n'j} < T_s$ se anula i_L (ver Fig. 4.3), tendremos conducción discontinua y una fase final donde tendremos exclusivamente la descarga de C . Las expresiones para la n-esima iteración serán:

$$\begin{aligned}
 i_L(n+1) &= 0 \\
 v_C(n+1) &= v_C(t_{nj}+t_{n'j}) e^{-\frac{[T_s-(t_{nj}+t_{n'j})]}{RC}} \\
 u_{Cf}(n+1) &= u_{Cf}(t_{nj}+t_{n'j})
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

4.4. Simulaciones

Tenemos definidos entonces los mapas $i_L(n)$, $v_C(n)$ y $u_{Cf}(n)$ de las tres variables de estado involucradas en nuestro sistema. Daremos ahora valores a los parámetros del sistema:

4.4. Simulaciones

$$\begin{aligned}
 T_S &= 10\mu\text{seg} \\
 T &= 20\text{mseg} \\
 L &= 0,1\text{mH} \\
 C &= 100\mu\text{F} \\
 R &= 40\Omega \\
 I_{ref} &= 1,6\text{A} \\
 U_{in} &= 35\text{V}
 \end{aligned}$$

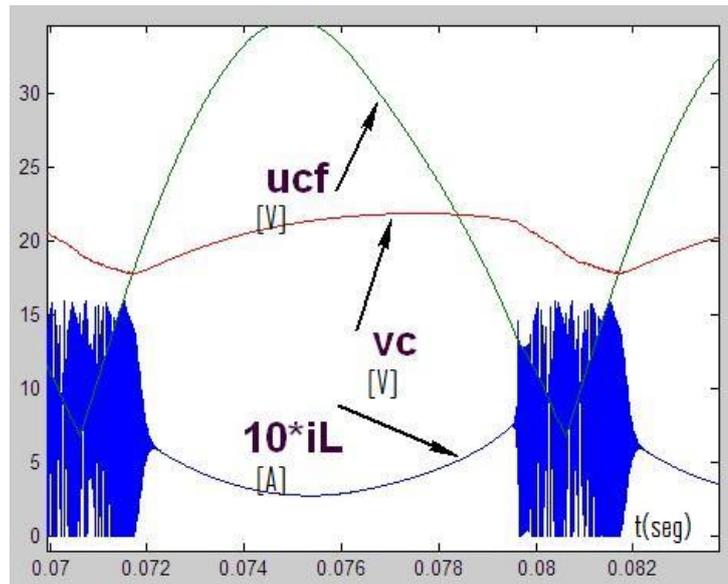


Figura 4.4: Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=90\mu\text{F}$

Las Figs. 4.4, 4.5, 4.6 y 4.7 muestran los mapas de las variables de estado para $C_f = 90\mu\text{F}$, $120\mu\text{F}$, $150\mu\text{F}$ y $220\mu\text{F}$ respectivamente. Conforme C_f se incrementa, el mínimo de u_{Cf} adopta valores más altos durante el período en que se produce la descarga del capacitor, lo que corresponde al «mapa 2». Para $C_f = 220\mu\text{F}$ tenemos un régimen estable para todo instante. Para los otros valores de C_f , en cada iteración la variación tanto de v_C como de u_{Cf} es «suave», en tanto que la de i_L puede llegar a ser muy importante. En la Fig. 4.8 vemos los mapas, para la evolución temporal medida en ángulo eléctrico θ_e respecto a u_i , si $C_f = 120\mu\text{F}$ durante un período completo $[-90^\circ, +90^\circ]$ de la tensión sobre el capacitor de entrada. Los puntos (1) y (2) son, respectivamente, el comienzo y final del proceso de bifurcaciones.

Si representamos el retrato de fase i_L vs v_C , este se percibe con la apariencia de que para un valor v_C (pero en realidad un entorno pequeño de él) tendremos más de un valor correspondiente de i_L . Lo podemos apreciar en la Fig. 4.9. En (1) se abre el proceso de bifurcaciones con dos valores de i_L por cada valor de v_C (a), lo que se continúa hasta (b) con 4 valores de i_L por cada v_C , regresando en (c)

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un convertor DC/DC

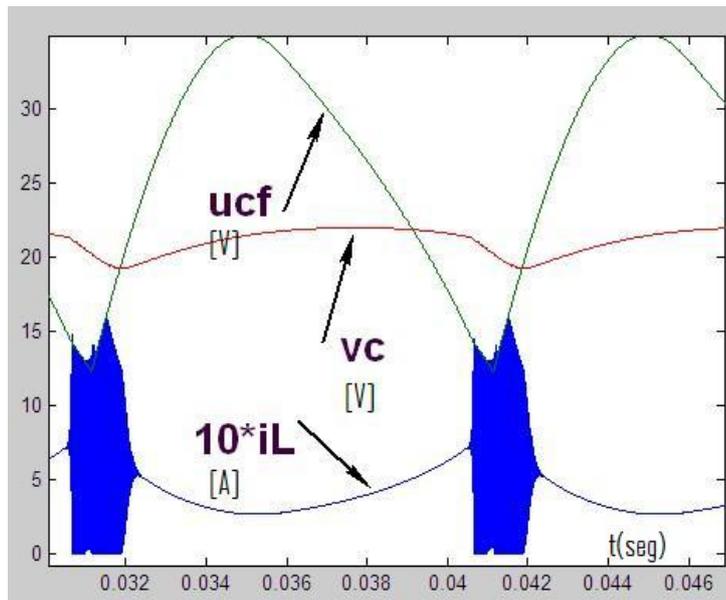


Figura 4.5: Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=120\mu\text{F}$

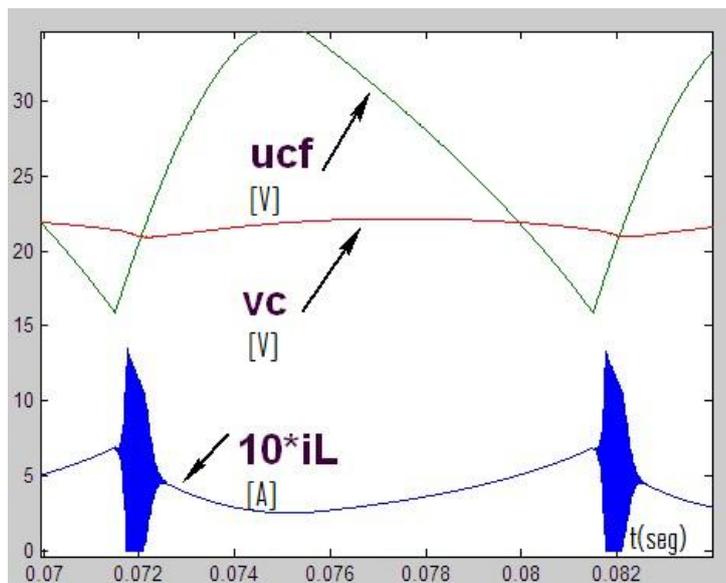


Figura 4.6: Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=150\mu\text{F}$

nuevamente con dos valores de i_L por cada v_C . En (2) se retoma el régimen⁴ de período 1. Hablaremos así de regímenes de período 2, 4, 8 etc. según el número de

⁴En este contexto, la palabra «régimen» está usada en el sentido de «zonas de funcionamiento», ya que no llega a constituirse un régimen en el convertor DC/DC puesto que u_{Cf} varía.

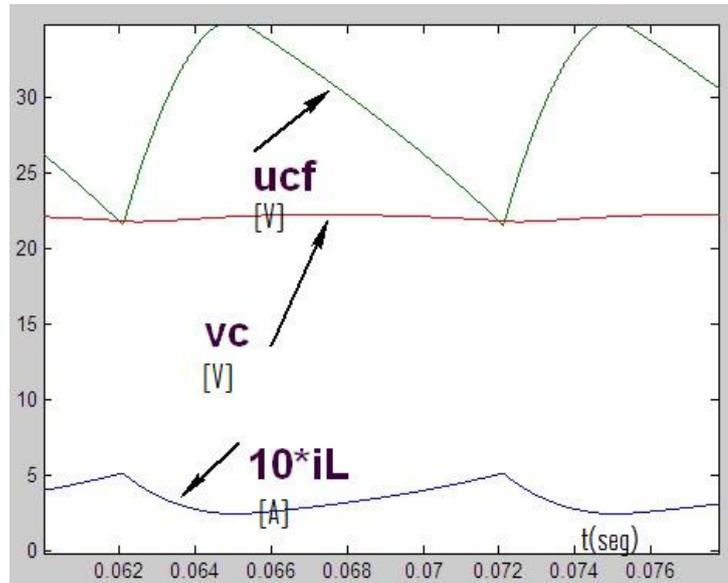


Figura 4.7: Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=220\mu\text{F}$

valores de i_L que aparezcan por cada valor de v_C .

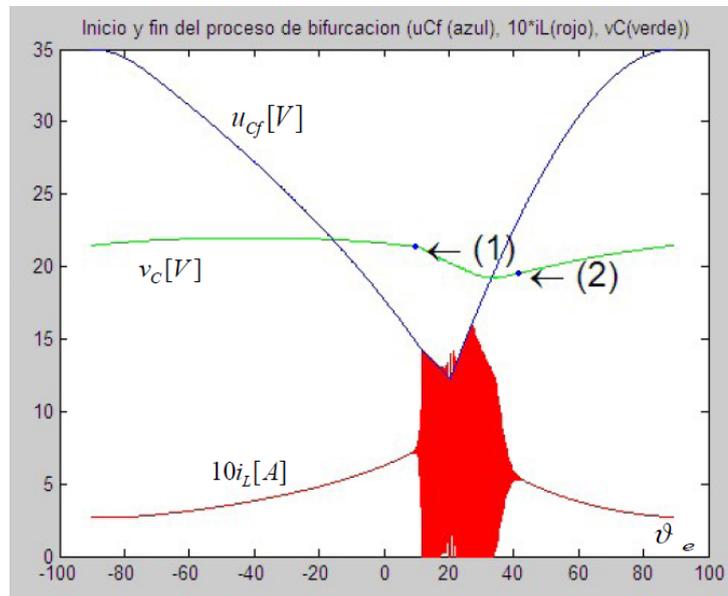


Figura 4.8: Régimen para $C_f=120\mu\text{F}$.

Podemos pensar en aislar el convertor buck-boost y estudiar la evolución de sus variables de estado i_L y v_C . En ese esquema podríamos asumir a u_{Cf} como el parámetro de entrada que en su variación provoca los cambios en la dinámica

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un convertor DC/DC

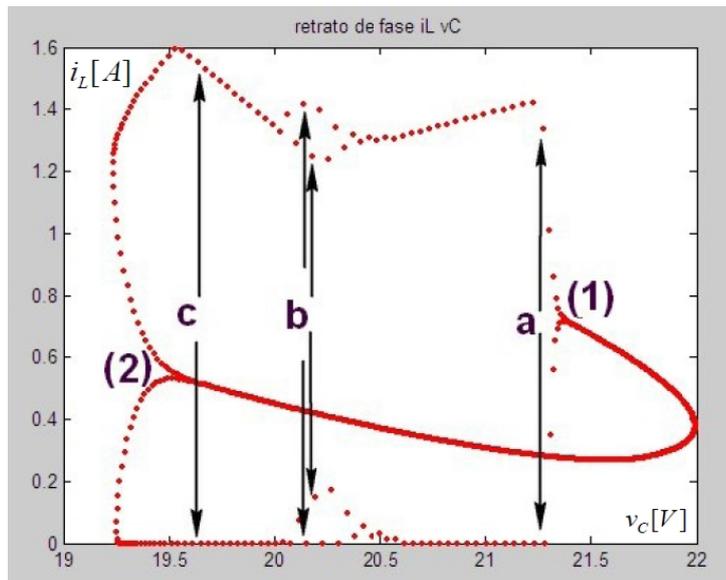


Figura 4.9: Retrato de fase i_L vs v_C para $C_f=120\mu F$

del convertor. Esto hay que tomarlo con cierto cuidado: la Fig. 4.10 hace un zoom sobre los mapas de corriente i_L y tensiones v_C y u_{C_f} en régimen para $C_f = 120\mu F$. Se muestra el comienzo (1) y final (2) del proceso de bifurcaciones. Obsérvese que para iguales valores de u_{C_f} tenemos dinámicas distintas en las otras dos variables de estado (de hecho la entrada y salida de la zona de inestabilidad para i_L se da en valores diferentes de u_{C_f}). Ello no ocurriría si se tratase de un proceso cuasiestático en que la dinámica del convertor fuese lo suficientemente rápida como para que, ante la variación de u_{C_f} , el transitorio que llevase a las variables i_L y v_C a orbitar finalmente sobre sus puntos de equilibrio durase un tiempo despreciable, ya que de ser así a un valor dado de la entrada le correspondería un conjunto único de puntos de equilibrio.

En la Fig. 4.11 se muestra el tramo de período 4 para $C_f = 120\mu F$. La elección de los valores para C_f no ha sido arbitraria: para $C_f = 150\mu F$ vamos a encontrar en el mapa $i_L(n)$ un régimen de período 2, para $C_f = 120\mu F$ tendremos tramos de períodos 2 y 4 y para $C_f = 90\mu F$ encontramos un régimen de bifurcaciones por duplicación de período (2, 4, 8, 16, etc.) más vasto.

En este capítulo no tenemos la mirada puesta sobre el régimen caótico, pero véase la Fig. 4.13 donde se hace un corte temporal del mapa i_L . Puede apreciarse un régimen en que no se puede destacar ninguna periodicidad, lo que es característico de un proceso caótico.

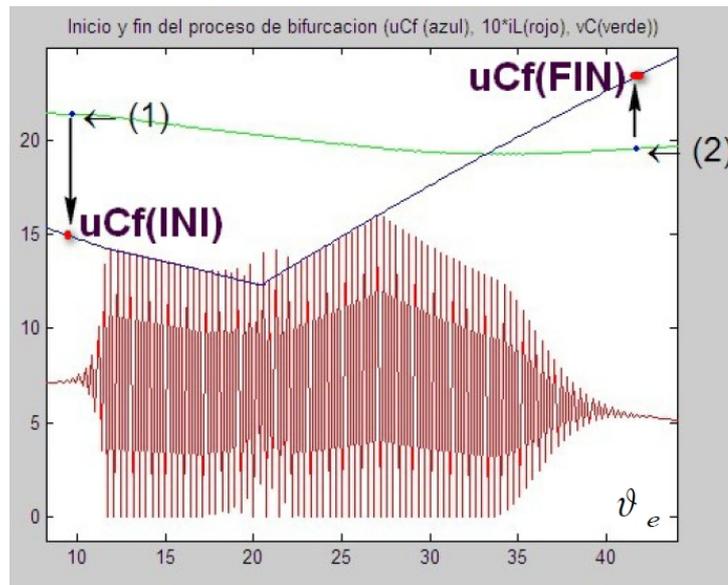


Figura 4.10: Zoom sobre el régimen para $C_f=120\mu F$.

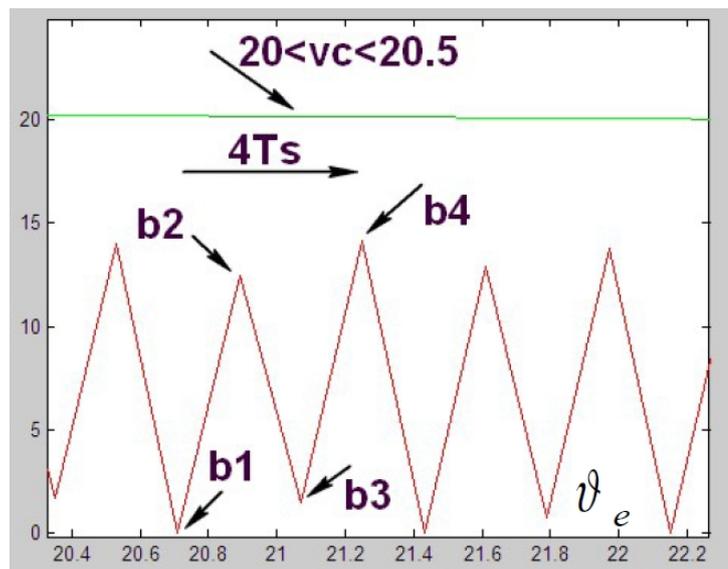


Figura 4.11: Tramo de período 4 de i_L para $C_f=120\mu F$

4.4.1. Uso del Jacobiano para la predicción de la bifurcación por duplicación de período

El propósito de evitar la inestabilidad, identificada en este contexto con cualquier régimen distinto al de período 1, nos lleva a establecer los puntos de bifurcación. En el punto (1) de la Fig.4.10 comienza del proceso de bifurcaciones. A partir

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un convertor DC/DC

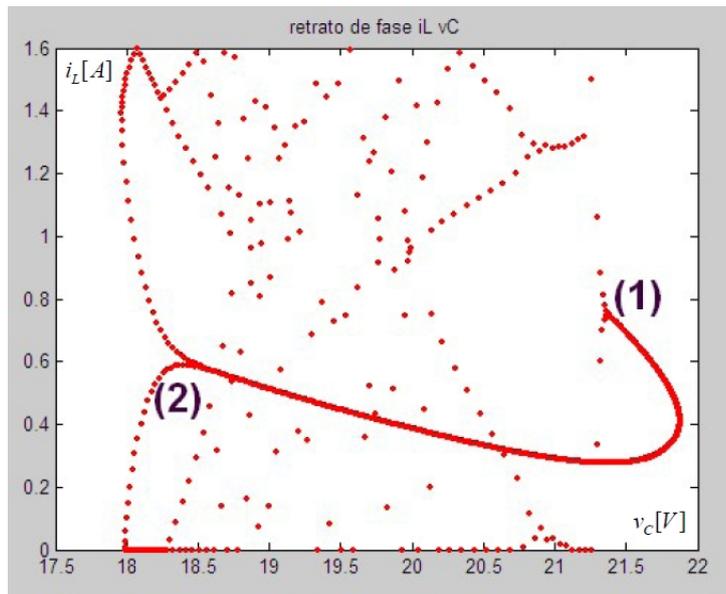


Figura 4.12: Retrato de fase i_L vs v_C para $C_f=90\mu\text{F}$

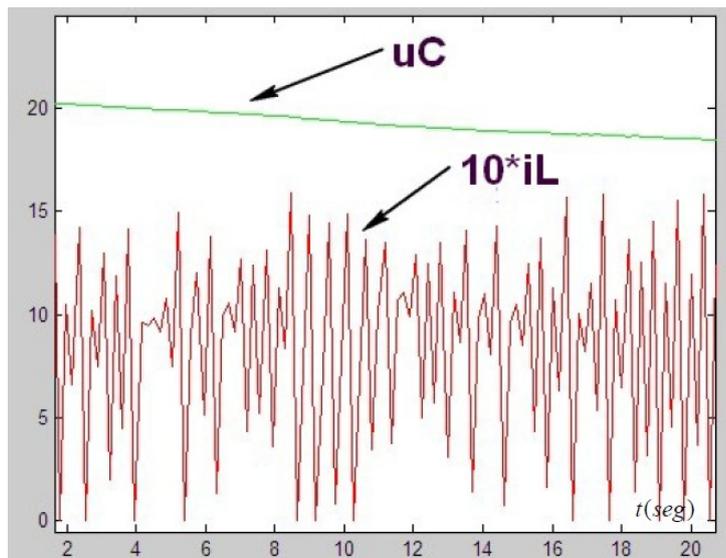


Figura 4.13: Tramo aperiódico (asociado al concepto de caos) de i_L para $C_f=90\mu\text{F}$

de que alcanzamos el punto (2) se vuelve al régimen de período 1. Obsérvese que este punto pertenece al mapa 1, donde por estar conduciendo el puente rectificador, la dinámica del sistema no depende de C_f sino que es la de un convertor Buck-Boost (como el de la Fig.4.14), con la tensión de entrada u_{ns} como parámetro que modifica su régimen. Esto simplifica el análisis ya que el «mapa 1» es de segundo orden. Es más, observando las simulaciones (Figs. 4.4 a 4.7) podemos descartar la

4.4. Simulaciones

conducción discontinua en un entorno al punto (2). Vemos por tanto reducido el análisis al de la estabilidad del «mapa 1» con conducción continua. Si me aseguro que u_{ns} sea mayor que la que se corresponde con el punto (2), impondremos el período 1 para todo instante. Formalicemos esto: para cada valor u_{ns} donde el sistema, de variables de estado i_L y v_C , es estable, tiene un punto de equilibrio estable. En tal caso, los valores propios del Jacobiano correspondiente pertenecen al círculo unidad. Si comienzo a reducir la tensión u_{ns} , me acerco al punto donde se da la bifurcación, pasando de un régimen de período 1 al de período 2. Ese valor es el límite inferior para las tensiones u_{ns} que aseguran la estabilidad. Ese valor del parámetro hace que uno al menos de los valores propios del Jacobiano salga del círculo unidad. En nuestro caso, este se acerca al punto -1, escapando a través de él (véase la Fig. 4.16).

Las ecuaciones para el cálculo del Jacobiano, correspondientes al «mapa 1» para conducción continua son:

$$\begin{bmatrix} i_L(n+1) \\ v_C(n+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(i_L(n), v_C(n), u_{ns}) \\ f_2(i_L(n), v_C(n), u_{ns}) \end{bmatrix}_{\text{mapa1}}$$

$$J_{u_{ns}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial i_L} & \frac{\partial f_1}{\partial v_C} \\ \frac{\partial f_2}{\partial i_L} & \frac{\partial f_2}{\partial v_C} \end{bmatrix}_{u_{ns}}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial i_L} = e^{\alpha(T_S - t_{n1})} \left\{ \frac{\partial t_{n1}}{\partial i_L} \left[\left(C_1^{\text{mapa1}} \beta^{\text{mapa1}} - C_2^{\text{mapa1}} \alpha \right) \text{sen}(\beta^{\text{mapa1}}(T_S - t_{n1})) \right. \right. \\ \left. \left. - \left(C_2 \beta^{\text{mapa1}} + C_1^{\text{mapa1}} \alpha \right) \cos(\beta^{\text{mapa1}}(T_S - t_{n1})) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial C_1^{\text{mapa1}}}{\partial i_L} \cos(\beta^{\text{mapa1}}(T_S - t_{n1})) + \frac{\partial C_2^{\text{mapa1}}}{\partial i_L} \text{sen}(\beta^{\text{mapa1}}(T_S - t_{n1})) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v_C} = e^{\alpha(T_S - t_{n1})} \left[\frac{\partial C_1^{\text{mapa1}}}{\partial v_C} \cos(\beta^{\text{mapa1}}(T_S - t_{n1})) + \frac{\partial C_2^{\text{mapa1}}}{\partial v_C} \text{sen}(\beta^{\text{mapa1}}(T_S - t_{n1})) \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_2}{\partial i_L} = L e^{\alpha(T_S - t_{n1})} \left\{ \frac{\partial t_{n1}}{\partial i_L} \left[\left(C_1^{\text{mapa1}} \alpha + C_2^{\text{mapa1}} \beta^{\text{mapa1}} \right) \sigma_1 + \left(C_2^{\text{mapa1}} \alpha - C_1^{\text{mapa1}} \beta^{\text{mapa1}} \right) \sigma_2 \right] \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial C_1^{\text{mapa1}}}{\partial i_L} \sigma_1 + \frac{\partial C_2^{\text{mapa1}}}{\partial i_L} \sigma_2 \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v_C} = -L e^{\alpha(T_S - t_{n1})} \left(\frac{\partial C_1^{\text{mapa1}}}{\partial v_C} \sigma_1 + \frac{\partial C_2^{\text{mapa1}}}{\partial v_C} \sigma_2 \right)$$

con:

$$\frac{\partial t_{n1}}{\partial i_L} = -\frac{L}{u_{ns}}$$

$$\frac{\partial t_{n1}}{\partial v_C} = 0$$

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un convertor DC/DC

$$\frac{\partial C_1^{mapa1}}{\partial i_L} = 0$$

$$\frac{\partial C_1^{mapa1}}{\partial v_C} = 0$$

$$\frac{\partial C_2^{mapa1}}{\partial i_L} = \frac{v_C}{\beta^{mapa1} RCL} e^{-\frac{t_{n1}}{RC}} \frac{\partial t_{n1}}{\partial i_L}$$

$$\frac{\partial C_2^{mapa1}}{\partial v_C} = \frac{1}{\beta^{mapa1} L} e^{-\frac{t_{n1}}{RC}}$$

$$\sigma_1 = \alpha \cos(\beta^{mapa1}(T_S - t_{n1})) - \beta^{mapa1} \text{sen}(\beta(T_S - t_{n1}))$$

$$\sigma_2 = \alpha \text{sen}(\beta^{mapa1}(T_S - t_{n1})) + \beta^{mapa1} \cos(\beta(T_S - t_{n1}))$$

Para calcular el punto de equilibrio correspondiente a cada valor del parámetro, debemos darnos cuenta que para el sistema en estudio, dada la característica de variación en el tiempo del voltaje de entrada, los puntos fijos del modelo discreto cambian conforme lo hace la tensión de entrada, no dando suficiente tiempo para que el sistema evolucione hasta alcanzarlos. No podemos usar los valores de i_L y v_C que se corresponden con determinado u_{ns} en las simulaciones realizadas en la sección 4.4. Hay que hacer la simulación del convertor según la Fig. 4.14 dejando correr suficiente tiempo para que las variables de estado se estabilicen en el punto de equilibrio. Una vez obtenido este, calcular el Jacobiano, sus valores propios, etc.

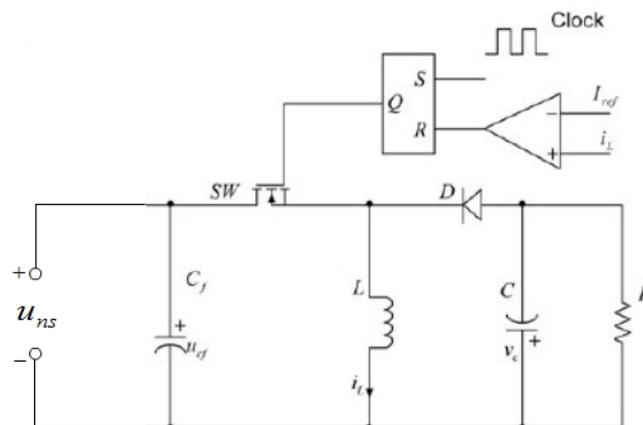


Figura 4.14: Convertor Buck-Boost con control por pico de corriente.

La Fig. 4.15 muestra el transitorio del Buck-Boost en cuestión. Véase que ambas variables de estado se estabilizan en el punto de equilibrio a partir de los

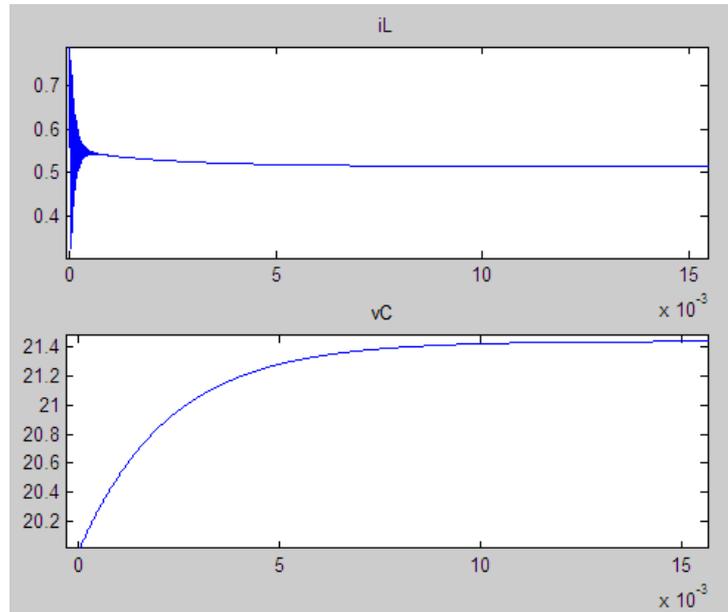


Figura 4.15: Mapas de las variables de estado del conversor Buck-Boost para $u_{ns} = 22V$.

15 mseg., mayor incluso al período de 10 mseg. de la frecuencia fundamental de la rectificadora de onda completa.

Las figuras 4.16 y 4.17 describen la evolución del valor propio λ_1 conforme varía u_{ns} . El cruce por -1 será en $u_{ns} = 21,36V$, siendo ese entonces el voltaje mínimo de entrada al Buck-Boost que asegura la estabilidad. Para el rectificador, el mínimo u_{ns} se corresponde al instante donde la descarga de C_f se corta con la rectificadora de onda completa de la tensión de entrada.

Mediante simulaciones del sistema completo variando C_f obtenemos para $C_f = 217\mu F$ el valor mínimo $u_{ns} = 21,36V$ deseado. Tomamos $C_f = 220\mu F$ evitando de este modo la inestabilidad (ver en la Fig. 4.7 los mapas correspondientes).

4.5. Conclusiones

Hemos aplicado las herramientas descritas en los capítulos anteriores para analizar un sistema concreto como es un circuito rectificador basado en un puente de diodos más un conversor Buck-Boost. En especial se ha visto la utilidad, a los efectos de conocer las condiciones de estabilidad del sistema, del estudio de la ubicación de los valores propios del Jacobiano conforme varía un parámetro —en nuestro caso la tensión de entrada al conversor— desarrollada en la sección 2.9.2 para sistemas de segundo orden. Parándonos en un régimen de período 1 y evitando llegar al valor del parámetro a partir del cual comienza el proceso de bifurcaciones, pudimos calcular un valor mínimo para el filtro C_f que asegure la estabilidad del conjunto.

Capítulo 4. Aplicación: selección de filtro capacitivo a la entrada de un convertor DC/DC

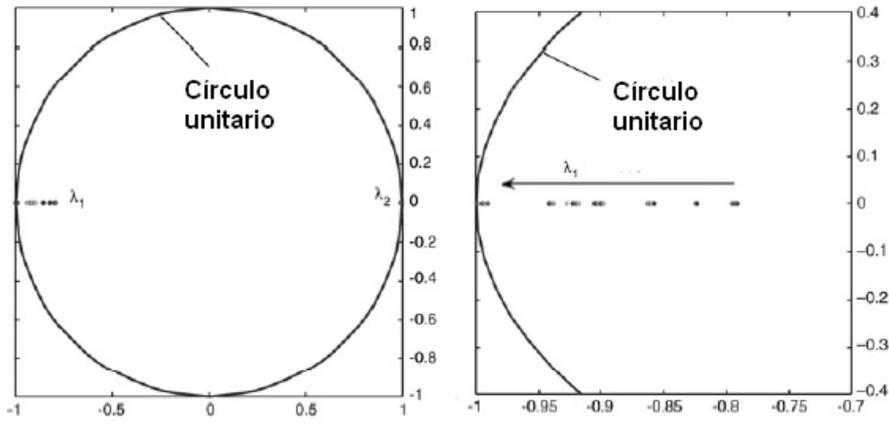


Figura 4.16: Lugar geométrico de los valores propios λ_1 y λ_2 . Zoom sobre el mismo en las cercanías de -1.

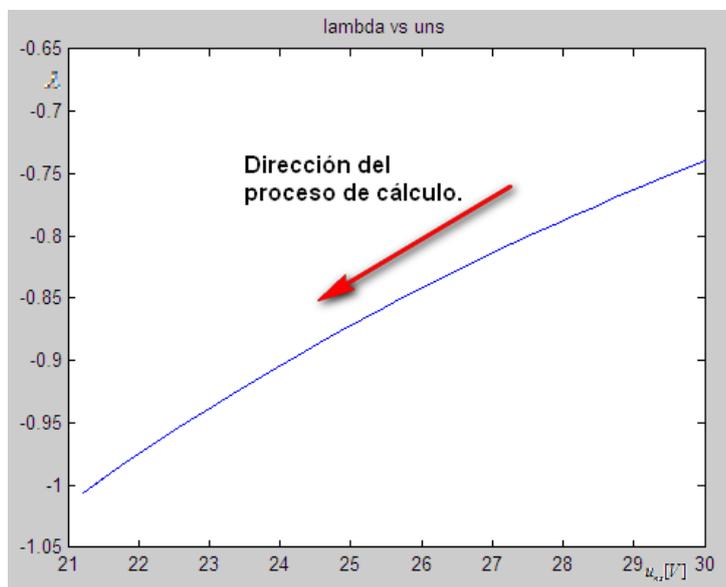


Figura 4.17: λ_1 vs u_{ns}

Capítulo 5

Estadísticas de mapas caóticos

5.1. Introducción

En los capítulos anteriores hemos presentado herramientas de análisis de conversores en régimen caótico tales como los mapas de Poincaré y diagrama de bifurcaciones, que nos permiten estudiar el comportamiento de los mismos en forma cualitativa. En este capítulo introduciremos herramientas matemáticas provenientes del análisis estadístico que, bajo algunas hipótesis, nos facultarán llegar a expresiones explícitas de los promedios temporales de las variables de interés, que apoyarán el diseño para la operación en régimen caótico.

5.2. Evolución de densidades: operador de Perrón-Frobenius.

Supongamos un mapa $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Tomemos un número N relativamente grande de estados iniciales: $x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0$. Ahora aplicamos a cada uno de esos estados el mapa F , obteniendo N nuevos estados:

$$x_1^1 = F(x_1^0), x_2^1 = F(x_2^0), \dots, x_N^1 = F(x_N^0).$$

Para definir lo que queremos decir cuando hablamos de densidades es útil introducir el concepto de función indicador para un conjunto Δ :

$$I_{\Delta}(x) = \begin{cases} 1..si..x \in \Delta \\ 0..si..x \notin \Delta \end{cases} \quad (5.1)$$

En términos generales decimos que $f_0(x)$ es la función de densidad de los estados iniciales $x_1^0, x_2^0, \dots, x_N^0$ si por cada (no demasiado pequeño, ver [23] pág. 5) $\Delta \subset [0, 1]$ tenemos:

$$\int_{\Delta} f_0(u).du \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{\Delta}(x_j^0)$$

Igualmente la densidad $f_1(x)$ para los estados $x_1^1, x_2^1, \dots, x_N^1$ satisface:

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

$$\int_{\Delta} f_1(u).du \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{\Delta}(x_j^1)$$

Estudiar la «evolución» de una densidad según el mapa F es encontrar una relación entre f_1 y f_0 . Para ello es necesario aquí introducir el concepto de «preimagen» de un intervalo $\Delta \subset [0, 1]$ bajo la operación de un mapa F . Es el conjunto de puntos que se convertirán en Δ luego de una aplicación de F , o de otro modo:

$$F^{-1}(\Delta) = \{x : F(x) \in \Delta\}$$

La Fig. 5.1 muestra la preimagen del segmento $[0, x]$ para el mapa $F(x) = 4x(1 - x)$, que resulta la unión de los dos intervalos resaltados.

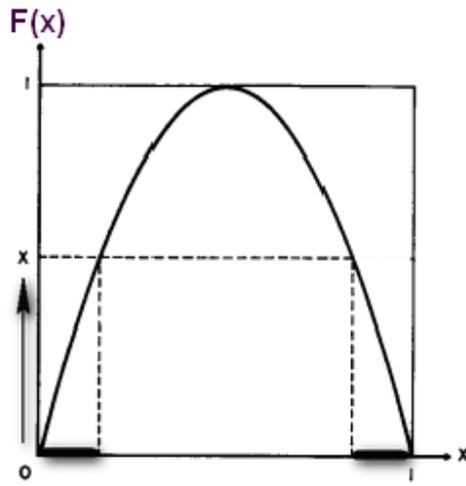


Figura 5.1: Preimagen del conjunto $[0, x]$ bajo un mapa $F(x)$ cuadrático.

Como el número de estados perteneciente a la imagen Δ y preimagen $F^{-1}(\Delta)$ debe ser el mismo, podemos escribir $I_{\Delta}(F(x_j^0)) = I_{F^{-1}(\Delta)}(x_j^0)$, por tanto:

$$\int_{\Delta} f_1(u).du \simeq \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{\Delta}(F(x_j^0)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N I_{F^{-1}(\Delta)}(x_j^0) \simeq \int_{F^{-1}(\Delta)} f_0(u) du.$$

Si Δ es el intervalo $[a, x]$, podemos obtener una expresión explícita para f_1 :

$$\int_a^x f_1(u)du = \int_{F^{-1}([a,x])} f_0(u) du$$

y diferenciando en x tenemos:

5.2. Evolución de densidades: operador de Perrón-Frobenius.

$$f_1(x) = \frac{d}{dx} \int_{F^{-1}([a,x])} f_0(u) du$$

Claramente f_1 depende de f_0 , utilizándose la notación: $f_1 = P_F f_0$. Decimos que P_F es el operador de «Perrón-Frobenius» correspondiente al mapa F .

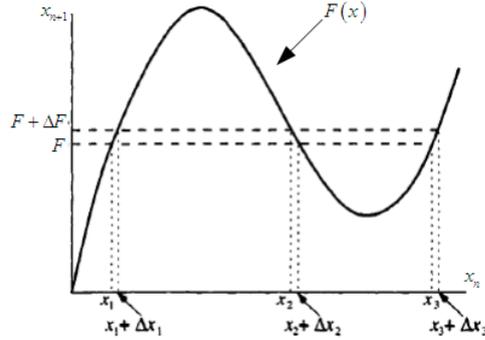


Figura 5.2: Derivación del operador de Frobenius-Perron para un mapa dado $x_{n+1} = F(x_n)$.

La Fig. 5.2 ayuda a comprender cómo surge f_1 a partir de f_0 . En la aplicación del mapa, el número de estados que entran en $[F, F + \Delta F]$ tiene el aporte proveniente de su preimagen conformada por la unión $\bigcup_{i=1}^3 [x_i, x_i + \Delta x_i]$, cada tramo haciendo el aporte

$$\frac{f_0[x_i, x_i + \Delta x_i]}{\left| \frac{dF}{dx}(x_i) \right|}$$

o sea

$$f_1[F, F + \Delta F] = \sum_{i=1}^m \frac{f_0[x_i, x_i + \Delta x_i]}{\left| \frac{dF}{dx}(x_i) \right|}$$

pudiéndose pensar en una expresión general si $\Delta x_i \rightarrow 0$:

$$(P_F f_0)(y) = f_1(y) = \sum_{i=1}^m \frac{f_0(x_i)}{\left| \frac{dF}{dx}(x_i) \right|} \quad (5.2)$$

siendo $x_i = F^{-1}(y)$, $i = 1, \dots, m$ (hay m soluciones).

Iterando un número N de veces obtenemos la evolución de la densidad f_0 según el mapa F : $f_0 \rightarrow f_1 = P_F f_0 \rightarrow \dots \rightarrow f_N = P_F^N f_0$. Definimos «densidad invariante» a aquella que cumple:

$$(P_F f)(x) = f(x)^1. \quad (5.3)$$

Si existe $f(x)$, es el punto fijo de la transformación P_F . En tal caso, el mapa F tendrá la propiedad de que las densidades convergen a una única densidad f . La

¹Si P_F es un operador lineal en un espacio infinito, f es vector propio de eigenvalor 1.

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

solución de la Ec.(5.3) es difícil en general, pero veremos más adelante un tipo de transformación, denominada «mapa de Markov», para el que la densidad invariante puede ser determinada exactamente.

5.3. Teorema de Birkoff-Khirschin.

Obtener la densidad $f(x)$ invariante en el operador de Perrón-Frobenius de un mapa F , es clave para la aplicación del teorema de Birkoff-Khirschin que permite sustituir los promedios en el tiempo de una función $\Phi(\cdot)$ de la serie temporal que genera el sistema en régimen caótico, por sus promedios espaciales o de ensamble, computados respecto a esta densidad.

Un mapa F definido en determinado dominio, en el que todo conjunto invariante o tiene medida nula, o es el dominio completo a excepción de un conjunto de medida nula (conjunto de medida «total»), se lo denomina «ergódico»².

Si el operador de Perrón-Frobenius asociado al mapa F tiene una densidad invariante única $f(x) > 0$, la serie asociada $x_{n+1} = F(x_n)$ será ergódica³.

El teorema de Birkoff-Khirschin afirma que dada la función $\Phi(\cdot)$ –con alguna regularidad⁴– y el mapa F definidos ambos en el segmento $[0, 1]$, este último con densidad invariante en el operador de Perrón-Frobenius $f(x)$, con $\int_0^1 f(x)dx = 1$, que genera la serie $x_{n+1} = F(x_n)$ ergódica, tendremos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Phi(x_i) = \int_{[0,1]} \Phi(x) f(x) dx.$$

Dada esta equivalencia, las propiedades promedio del sistema no-lineal – probado su carácter ergódico por la existencia de la densidad invariante única asociada al mapa que la genera– pueden ser calculadas en forma precisa, no quedándonos limitados a la realización de simulaciones o caer en métodos exclusivamente empíricos [24]. La consideración en general de los procesos ergódicos está por lejos fuera del alcance de este trabajo. Puede verse en [23] sección 4.2.

5.4. Mapas de Markov

5.4.1. Definición. Densidad invariante de un Mapa de Markov

Decimos que un mapa $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es de Markov⁵, sí y solo sí:

- (1) existe un conjunto de puntos $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_N = 1$ tal que en cada intervalo $I_i = [a_{i-1}, a_i]$, ($i = 1, \dots, N$), el mapa tiene la forma $F_i(x) = m_i x + n_i$,
- (2) para cada i : $F(a_i) = a_j$ para algún j .

²Ver [23], definición 4.2.1.

³Ver [23], teorema 4.2.2., el recíproco también es cierto.

⁴ *well-behaved*, $\Phi(\cdot)$ integrable por ejemplo en [24].

⁵ En rigor *Mapa de Markov eventualmente expansor y lineal a tramos*.

(3) existe un entero k para el que en la k -ésima iteración resulta

$$\inf_{x \in [0,1]} \left\{ \left| \frac{d}{dx} F^k(x) \right| \right\} > 1$$

Esta última propiedad⁶ va a determinar que las pendientes del mapa cumplan $|m_i| > 0$ en lo que a nosotros interesa [24]. La Fig. 5.3 muestra un ejemplo de mapa de Markov. Los mapas de Markov tienen densidades $f(x) > 0$ invariantes en el operador de Perrón-Frobenius, únicas con $\int_0^1 f(x) dx = 1$, que pueden ser calculadas en forma explícita; son por tanto ergódicos y cumplen el teorema de Birkoff-Khirschin .

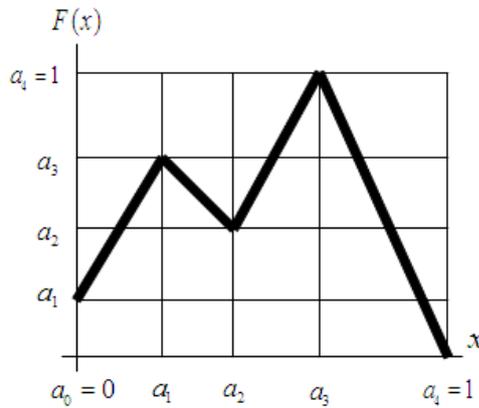


Figura 5.3: Ejemplo de mapa de Markov con $N = 4$.

Un mapa de Markov tiene la expresión general

$$F(x) = \sum_{i=1}^N (m_i x + n_i) I_{[a_{i-1}, a_i]}(x)$$

donde $I_{[a_{i-1}, a_i]}$ es la expresión (5.1) –función indicador– con $\Delta = [a_{i-1}, a_i]$. Aplicando la ec. (5.3) obtenemos la expresión de la aplicación del operador de Perrón-Frobenius referido a un mapa de Markov a una densidad $f_0(x)$:

$$(P_F f_0)(x) = \sum_{i=1}^N \frac{f_0(F^{-1}(x))}{\left| \frac{dF}{dx}(F^{-1}(x)) \right|} I_{[a_{i-1}, a_i]}(F^{-1}(x))$$

donde figuran los aportes de las N posibles contraimágenes de x^7 . Si consideramos una distribución f_0 constante en cada tramo, con $f_0^i = f_0[a_{i-1}, a_i]$, y como $F^{-1}(x) = \frac{x-n_i}{m_i}$ (ver Fig.5.4), obtenemos:

⁶Que describe el concepto de *eventualmente expansor*.

⁷Si $F^{-1}(x)$ no pertenece a $[a_{i-1}, a_i]$, entonces $I_{[a_{i-1}, a_i]}(F^{-1}(x)) = 0$.

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

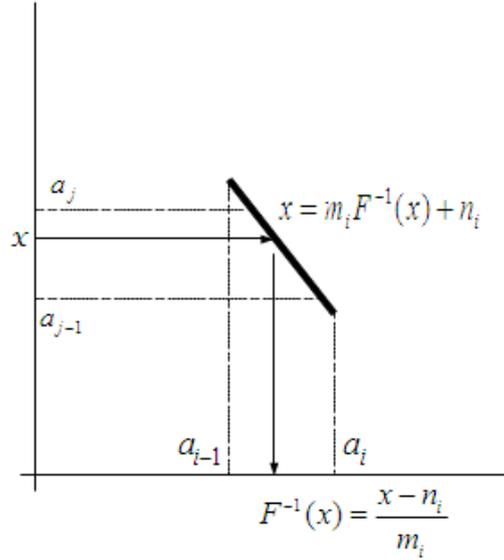


Figura 5.4: Aporte del tramo i de f_0 al tramo j de f_1 .

$$(P_F f_0)(x) = \sum_{i=1}^N \frac{f_0^i}{|m_i|} I_{[a_{i-1}, a_i]} \left(\frac{x - n_i}{m_i} \right) \quad (5.4)$$

Obsérvese que si $f_0(x)$ es constante a tramos, también lo será $P_F f_0(x)$. Si iteramos un número suficiente de veces, obtendremos la densidad invariante $f(x)$ que también será constante a tramos. Podemos pensar en una representación vectorial de las densidades:

$$\begin{aligned} \vec{f}_0 &= [f_0^1, f_0^2, \dots, f_0^N]^T \\ P_F \vec{f}_0 &= \vec{f}_1 = [f_1^1, f_1^2, \dots, f_1^N]^T \\ \vec{f} &= [f^1, f^2, \dots, f^N]^T \end{aligned}$$

En tal caso la ec. (5.4) admite la expresión matricial:

$$\vec{f}_1 = [P_{ij}] \vec{f}_0$$

siendo

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{|m_i|} \cdot \text{si} \cdot (f_0^i) \cdot \text{aporta} \cdot a \cdot (f_1^j) \\ 0 \cdot \text{otro} \cdot \text{caso} \end{cases}$$

matriz $N \times N$.

Para el ejemplo de mapa de Markov de la Fig. 5.3 tendremos:

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{|m_4|} \\ \frac{1}{|m_1|} & 0 & 0 & \frac{1}{|m_4|} \\ \frac{1}{|m_1|} & \frac{1}{|m_2|} & \frac{1}{|m_3|} & \frac{1}{|m_4|} \\ 0 & 0 & \frac{1}{|m_3|} & \frac{1}{|m_4|} \end{bmatrix}$$

El vector que describe la densidad invariante cumple $[P_{ij}] \vec{f} = \vec{f}$, y por tanto es el vector propio de la matriz $[P_{ij}]$ con valor propio 1. Tal pareja de vector y valor propio siempre existe [24]. Una vez calculado \vec{f} , una densidad invariante será⁸:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^N f^i \cdot I_{[a_{i-1}, a_i]}(x)}{\sum_{i=1}^N f^i \cdot (a_i - a_{i-1})}$$

5.4.2. Ejemplo

El mapa de la Fig. 5.5 tiene dos particiones $[0, a]$ y $[a, 1]$.

$$F(x) = \begin{cases} \left(\frac{1-a}{a}\right)x + a \cdot si \cdot 0 \leq x \leq a \\ \left(\frac{1}{1-a}\right)(1-x) \cdot si \cdot a \leq x < 1 \end{cases}$$

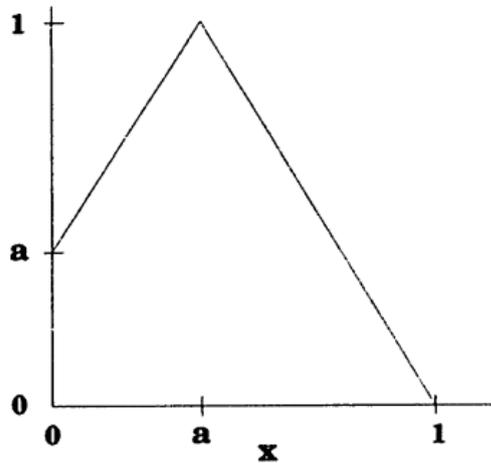


Figura 5.5: Ejemplo de mapa de Markov con $N = 2$.

De acuerdo a esto, la matriz 2×2 que describe la evolución de las densidades será:

$$[P_{ij}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 - a \\ \frac{a}{1-a} & 1 - a \end{pmatrix}$$

⁸No es única, esta cumple $\int_0^1 f(x) dx = 1$

cuyo eigenvector de valor propio 1 es $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \end{pmatrix}$ y por tanto su densidad invariante resulta:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+a} \cdot si \cdot 0 \leq x \leq a \\ \frac{1}{1-a^2} \cdot si \cdot a \leq x < 1 \end{cases}$$

5.5. Descripción mediante densidades del comportamiento caótico de un convertor DC/DC bajo modo de control por corriente

5.5.1. Modelo normalizado de corriente de inductor

La Fig. 5.6 muestra un segmento típico de la corriente $i_L(t)$ de un convertor DC/DC bajo control en modo corriente y régimen caótico. Los convertidores aquí analizados operan en modo de conducción continua. Para régimen periódico o caótico con tensión de entrada constante U_{in} y bajo ripple de tensión de salida, m_1 y m_2 serán aproximadamente constantes⁹. Obsérvese que cualquier pulso de disparo sobre la llave que llegue estando la misma ya conduciendo, será obviamente ignorado, como ocurre en $t = nT$. Asumiendo que $i_L(t)$ es lineal a tramos, su dinámica será descrita por el siguiente mapa:

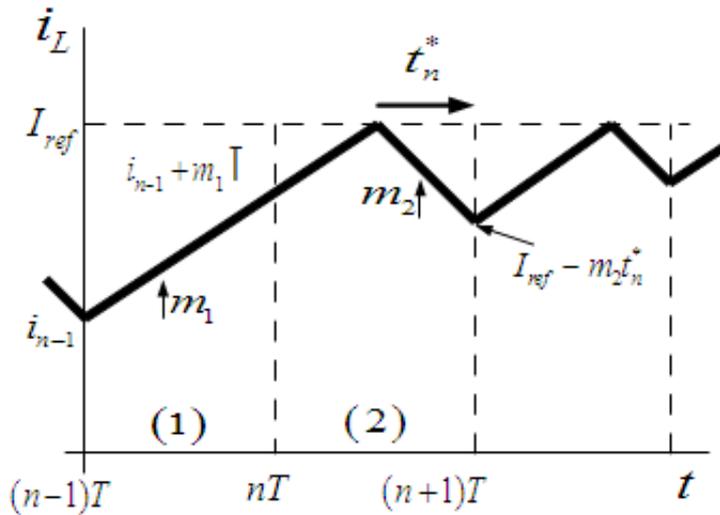


Figura 5.6: Corriente de inductor en un régimen caótico.

$$i_{n+1} = \begin{cases} i_n + m_1 T & si \quad i_n \leq I_{ref} - m_1 T \\ I_{ref} - m_2 t_n^* & si \quad \dots \quad i_n > I_{ref} - m_1 T \end{cases} \quad (5.5)$$

⁹Para el convertor Boost: $m_1 = \frac{U_{in}}{L}$ y $m_2 = \frac{U_{out}-U_{in}}{L}$; para el Buck: $m_1 = \frac{U_{in}-U_{out}}{L}$ y $m_2 = \frac{U_{out}}{L}$; finalmente para el Buck-Boost: $m_1 = \frac{U_{in}}{L}$ y $m_2 = \frac{U_{out}}{L}$.

5.5. Descripción mediante densidades del comportamiento caótico de un convertidor DC/DC bajo modo de control por corriente

con $t_n^* = T - \frac{I_{ref} - i_n}{m_1}$.

Véase que para $t_n^* = T$ (la descarga mas larga posible) por ser conducción continua, siempre tendremos $I_{ref} \geq i_L(t) \geq I_{ref} - m_2 T$. Entonces si $a = \frac{1}{m_2 T}$ y $b = 1 - \frac{I_{ref}}{m_2 T}$ podemos definir la corriente normalizada:

$$z(t) = ai_L(t) + b$$

que cumplirá $0 \leq z(t) \leq 1$. El mapa 5.5 se transforma en el «mapa normalizado» (Fig:5.7):

$$z_{n+1} = \begin{cases} z_n + \frac{1}{\alpha} & \text{si } z_n \leq 1 - \frac{1}{\alpha} \\ \alpha(1 - z_n) & \text{si } z_n > 1 - \frac{1}{\alpha} \end{cases}$$

con $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$.

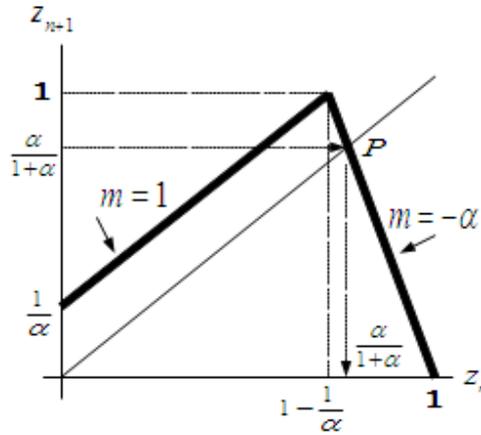


Figura 5.7: Mapa normalizado.

5.5.2. Algunas propiedades interesantes del mapa normalizado

Resaltemos que la zona $1 - \frac{1}{\alpha} < z_n < 1$ del mapa normalizado se corresponde a la $i_n > I_{ref} - m_1 T$ del mapa original cuando en el período correspondiente no hay pérdida de la conmutación de apagado. Véase en la Fig.5.7 que si $\alpha \geq 1$ el punto de equilibrio $P = \left[z = \frac{\alpha}{1+\alpha} \right]$ del mapa será inestable¹⁰. Equivalentemente podemos decir que no habrá órbita periódica estable para $D \geq 1/2$ ¹¹ hecho bien conocido en la literatura de electrónica de potencia.

La dinámica del convertidor DC/DC puede ser cualitativamente descrita por el mapa normalizado. La Fig. 5.8 muestra el diagrama de bifurcaciones. Si $\alpha < 1$ entonces la dinámica es periódica. Si $\alpha \geq 1$ será aperiódica. Esta región puede

¹⁰Tenemos estabilidad si $\left| \frac{\partial z_{n+1}}{\partial z_n} \right| = |-\alpha| = \alpha < 1$

¹¹Ya que la excursión de corriente en un régimen de período 1 es $\Delta i_L = m_1 D T = m_2(1 - D)T$, si $\alpha = \frac{m_2}{m_1} < 1$ resulta $\frac{D}{1-D} < 1$.

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

además ser subdividida conforme crece α : luego de $\alpha = gm = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618...$ ¹² todos los puntos del diagrama de bifurcación serán visitados en alguna iteración, o de otro modo, todos los puntos del espacio de estado del sistema ocupados por el atractor serán visitados. Puede consultarse [25] para una explicación más amplia.

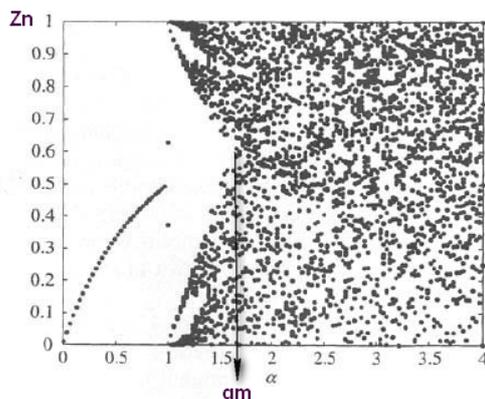


Figura 5.8: Diagrama de bifurcación del mapa normalizado. Tomado de [6].

5.5.3. Densidad invariante del mapa normalizado

El mapa normalizado no es de Markov en general, puesto que no cumple con la condición (2) vista en 5.4.1 pero sí lo es para valores enteros de α . En tal caso podemos dividir el segmento $[0,1]$ en α particiones (ver Fig. 5.9):

$$[a_0, a_1] = \left[0, \frac{1}{\alpha} \right]$$

$$[a_1, a_2] = \left[\frac{1}{\alpha}, \frac{2}{\alpha} \right]$$

.....

$$[a_{i-1}, a_i] = \left[1 - \frac{1}{\alpha}, 1 \right]$$

La matriz de evolución de las densidades para este mapa de Markov será:

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha^{-1} \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha^{-1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \alpha^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha^{-1} \end{bmatrix}$$

¹²gm se conoce como *golden mean*

5.5. Descripción mediante densidades del comportamiento caótico de un convertidor DC/DC bajo modo de control por corriente

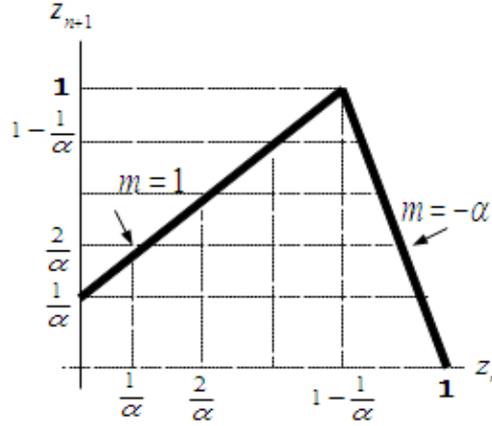


Figura 5.9: Mapa con α entero.

Calculando el vector propio con valor propio 1, obtenemos la densidad invariante que tendrá la expresión:

$$f(z_n) = \frac{2i}{1 + \alpha} \dots si \dots z_n \in [a_{i-1}, a_i] \quad (5.6)$$

5.5.4. Promedio temporal de la corriente de inductor

Se define el promedio temporal en el n-ésimo período de la corriente de inductor como:

$$\bar{i}_L(n) = \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} i_L(t).dt$$

Obsérvese que es una variable de tiempo discreto definida para cada período de conmutación $[nT, (n+1)T]$. Puesto en términos de la variable normal $z(t)$:

$$\bar{i}_L(n) = \frac{1}{T} \int_{nT}^{(n+1)T} \left[\frac{z(t) - b}{a} \right].dt = \frac{1}{a} \bar{z}(n) - \frac{b}{a} \quad (5.7)$$

La Fig. 5.10 muestra el significado de $\bar{i}_L(n)$ y $\bar{z}(n)$. Por simple observación de la misma vemos que para períodos donde no hay apagado de la llave (o sea $0 \leq z_n \leq 1 - \alpha^{-1}$) resulta:

$$\frac{1}{T} \int_T z(t).dt = \frac{1}{2} \left[z_n + z_n + \frac{m_1}{m_2 T} T \right]$$

En los períodos con conmutación de apagado ($1 - \alpha^{-1} < z_n \leq 1$) resulta:

$$\frac{1}{T} \int_T z(t).dt = \frac{1}{2T} (z_n + 1) (T - t_n^*) + \frac{1}{2T} \left(1 + 1 - \frac{t_n^*}{T} \right) t_n^*$$

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

. Con $T - t_n^* = \frac{I_{ref} - i_n}{m_1} = \alpha T(1 - z_n)$.

En resumen:

$$\bar{z}(n) = \begin{cases} z_n + \alpha^{-1} \dots \dots \dots si \dots 0 \leq z_n \leq 1 - \alpha^{-1} \\ \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}(z_n^2 - 1) - \frac{\alpha^2}{2}(z_n - 1)^2 \dots si \dots 1 - \alpha^{-1} < z_n \leq 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

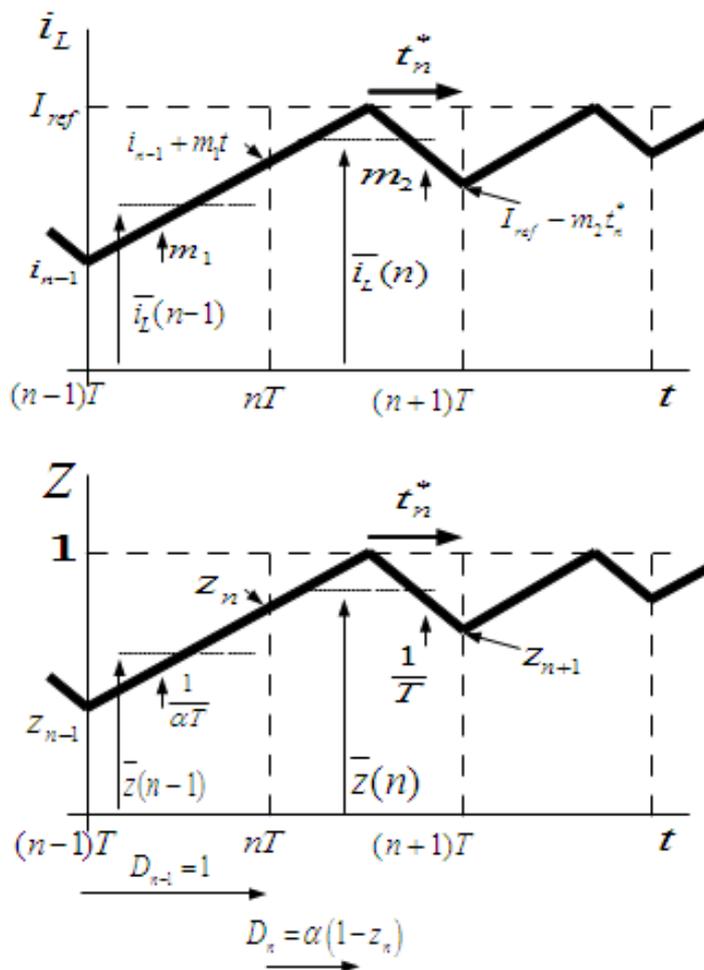


Figura 5.10: Mapas comparados de i_L y z .

Vamos a calcular el promedio temporal de la corriente de inductor, que será el de la secuencia $i_L(n)$. De la ec. (5.7) surge que

$$\langle \bar{i}_L(n) \rangle = \frac{1}{a} \langle \bar{z}(n) \rangle - \frac{b}{a} \quad (5.9)$$

Para obtener una expresión explícita de $\langle \bar{z}(n) \rangle$ aplicamos el teorema ergódico

5.5. Descripción mediante densidades del comportamiento caótico de un conversor DC/DC bajo modo de control por corriente

sustituyendo este promedio temporal por el de ensamble:

$$\langle \bar{z}(n) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \bar{z}(n) = \int_{[0,1]} \bar{z}(z_n) f(z_n) dz_n$$

con $\bar{z}(z_n)$ calculado en (5.8) y $f(z_n)$ en (5.6). Haciendo la integral obtenemos

$$\langle \bar{z}(n) \rangle = \frac{2}{3}$$

Finalmente, de ec. 5.9 obtenemos:

$$\langle \bar{i}_L(n) \rangle = m_2 T (\langle \bar{z}(n) \rangle - 1) + I_{ref} = I_{ref} - \frac{m_2 T}{3} \quad (5.10)$$

5.5.5. Frecuencia de conmutación y tiempo útil promedios

Una cantidad de interés en el análisis de los convertidores es la frecuencia promedio de switch $\langle S \rangle$, definida como el número promedio de aperturas de switch por período de muestra. Para una operación periódica será $\langle S \rangle = 1$, pero para una operación caótica tendremos $\langle S \rangle < 1$, ya que hay períodos en que no tendremos apertura de switch. Como vimos en la Sección 5.5.2, habrá conmutación de apagado si $1 - \alpha^{-1} < z_n < 1$. La frecuencia con que esto ocurra es $\langle S \rangle$. Entonces, para α entero mayor que 1 (ver Ec.5.6)

$$\langle S \rangle = P [1 - \alpha^{-1} < z_n < 1] = \int_{1-\alpha^{-1}}^1 f_{i=\alpha}(z) dz = \int_{1-\alpha^{-1}}^1 \frac{2\alpha}{1+\alpha} dz$$

$$\langle S \rangle = \frac{2}{1+\alpha}$$

Este resultado puede proveer una motivación para programar la operación caótica del conversor, ya que para α grandes las pérdidas de switch¹³ se verían reducidas. Sin embargo adviértase que conforme baja la frecuencia aumenta el riple. En cada caso concreto de diseño, para establecer una conclusión, debe estudiarse el compromiso entre ambos factores y compararlo con lo que ocurriría de bajarse la frecuencia de switch manteniendo el régimen periódico.

Para el cálculo del *Duty Cycle* promedio, véase que en cada ciclo n está definido el tiempo de trabajo como una variable discreta D_n (ver Fig. 5.10)¹⁴:

$$D_n = \begin{cases} 1 & \dots si \dots 0 < z_n < 1 - \alpha^{-1} \\ \alpha(1 - z_n) & \dots si \dots 1 - \alpha^{-1} < z_n < 1 \end{cases}$$

¹³ Proporcional a la frecuencia de switch

¹⁴ La condición para que haya apagado en el período es que $z_n + \frac{1}{\alpha} T > 1$, en ese caso $z_n + \frac{1}{\alpha} DT = 1$

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

El promedio temporal $\langle D_n \rangle$ será, apelando al teorema de Birkhoff:

$$\langle D_n \rangle = \int_0^1 D_n \cdot f(z_n) \cdot dz_n$$

donde $f(z_n)$ es la expresión 5.6.

Por tanto

$$\langle D_n \rangle = \sum_{i=1}^{\alpha-1} \int_{\frac{i-1}{\alpha}}^{\frac{i}{\alpha}} \frac{2i}{1+\alpha} \cdot dz_n + \int_{1-\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{2\alpha}{1+\alpha} \alpha (1-z_n) \cdot dz_n = \frac{2}{\alpha(1+\alpha)} \sum_{i=1}^{\alpha-1} (i) + \frac{1}{1+\alpha}$$

resultando

$$\langle D_n \rangle = \frac{\alpha}{(1+\alpha)} = D_{per}(U_{out}, U_{in})$$

que corresponde al de la operación periódica para las tensiones de entrada y salida dadas.

5.5.6. Mapa de impacto

En la Sección 5.5.1 estudiamos un tipo de mapa estroboscópico que denominamos «normalizado» para la corriente de inductor. Estudiaremos en esta sección otro tipo de mapa que denominaremos «de impacto». Los mapas estroboscópicos describen el vector de estado en cada instante del reloj del sistema. Los mapas de impacto generan muestras del vector de estado solo después de que un evento de conmutación haya ocurrido. En referencia a la Fig. 5.10, el pulso de reloj que llega en nT es reconocido por el mapa estroboscópico pero ignorado por el mapa de impacto.

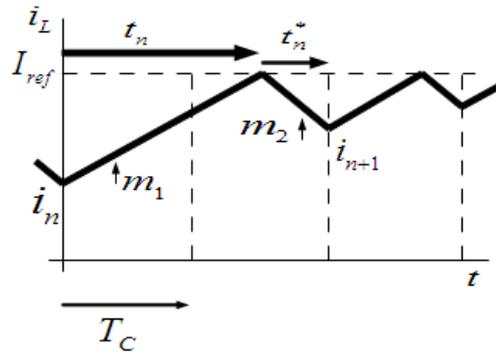


Figura 5.11: Corriente de inductor y mapa de impacto.

De la Fig. 5.11 surge:

$$i_{n+1} = I_{ref} - m_2 t_n^*$$

5.5. Descripción mediante densidades del comportamiento caótico de un convertor DC/DC bajo modo de control por corriente

y

$$t_n^* = \left[T_C - T_C \left(\frac{t_n}{T_C} \right) \text{ mód } 1 \right] = T_C \left[1 - \left(\frac{t_n}{T_C} \right) \text{ mód } 1 \right]$$

por tanto¹⁵:

$$i_{n+1} = I_{ref} - m_2 T_C \left[1 - \left(\frac{t_n}{T_C} \right) \text{ mód } 1 \right] \quad (5.11)$$

Por otro lado:

$$m_1 t_n = (I_{ref} - i_n) \Rightarrow m_1 t_{n+1} = (I_{ref} - i_{n+1}) \quad (5.12)$$

Definiendo el «tiempo adimensional» $x_n \triangleq \frac{t_n}{T_C}$ y utilizando las ecs. (5.11) y (5.12) obtenemos la expresión del mapa de salto:

$$x_{n+1} = \alpha (1 - x_n \text{ mód } 1)$$

con $\alpha = \frac{m_2}{m_1}$.

Al igual que el mapa «normal» estroboscópico, el mapa de salto genera una secuencia inestable para $\alpha \geq 1$ y caótica para $\alpha \geq g_m$. Este mapa es conocido como «mapa de Rényi», es lineal a tramos y ergódico [25]. La Fig. 5.12 muestra el diagrama $x_{n+1} = F(x_n)$ para $\alpha = 2,3$. Obsérvese que para α entero el mapa es de Markov. Su matriz de evolución de densidad, de dimensión $\alpha \times \alpha$ es:

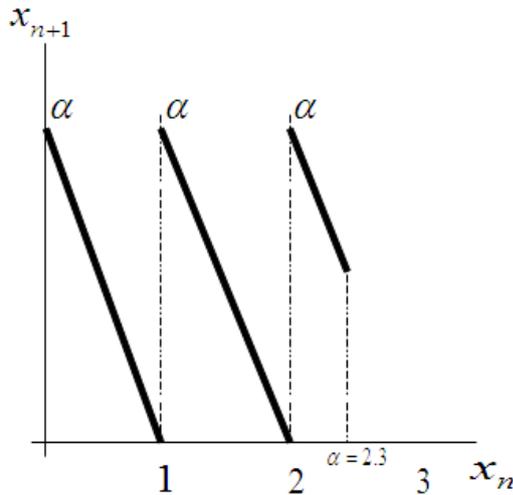


Figura 5.12: Mapa de impacto con $\alpha = 2,3$.

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} \alpha^{-1} & \dots & \alpha^{-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^{-1} & \dots & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

¹⁵En la Fig. 5.11 hay una sola pérdida de apagado, pero la expresión anterior vale no importa cuántos períodos haya sin esta conmutación.

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

cuyo vector propio con valor propio unidad es $(\alpha, \dots, \alpha)^T$ y su densidad invariante:

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^N f^i \cdot I_{[a_{i-1}, a_i]}(x)}{\sum_{i=1}^N f^i \cdot (a_i - a_{i-1})} = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha} \alpha \cdot I_{[i-1, i]}(x)}{\sum_{i=1}^{\alpha} \alpha} = \frac{1}{\alpha} \forall x \in [0, \alpha]$$

La densidad $f(x)$, constante si α es entero, para el caso general será constante a tramos. Sin embargo una densidad uniforme es una aproximación aceptable si $\alpha > gm$, ver [25] y [7].

5.5.7. Cálculo de promedios de interés usando los momentos estadísticos del mapa de impacto

Podemos ahora calcular, teorema de Birkhoff mediante, los momentos estadísticos generados por el mapa de impacto¹⁶:

$$E(x_n^k) = \int_0^{\alpha} x^k \cdot f(x) \cdot dx \approx \int_0^{\alpha} x^k \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot dx = \frac{\alpha^k}{k+1} \quad (5.13)$$

Cálculo de la energía

Definiendo la variable discreta W_n como el incremento de energía guardada en el inductor durante el n-esimo encendido de la llave ¹⁷:

$$W_n = V_L \cdot \int_0^{t_n} (i_n + m_1 t) \cdot dt = V_L \cdot \left[(I_{ref} - m_1 \cdot t_n) \cdot t_n + \frac{m_1 \cdot t_n^2}{2} \right] = V_L \cdot T_C \cdot \left[I_{ref} \cdot x_n - \frac{m_1 \cdot T_C \cdot x_n^2}{2} \right]$$

su promedio temporal será, si aplicamos 5.13:

$$E(W_n) = V_L \cdot T_C \cdot \left[I_{ref} \cdot E(x_n) - \frac{m_1 \cdot T_C \cdot E(x_n^2)}{2} \right] = \frac{V_L \cdot T_C \cdot \alpha}{2} \cdot \left[I_{ref} - \frac{m_1 \cdot T_C \cdot \alpha}{3} \right]$$

Cálculo de las pérdidas por conmutación

Las pérdidas por conmutación promedio pueden ser aproximadas conservadoramente como:

$$P_{switch} = \frac{E(W_{on} + W_{off})}{E(t_n + t_n^*)} \approx \frac{V_x \left[\int_0^{t_{on}} E(i_n) dt + \int_0^{t_{off}} I_{ref} dt \right]}{E(t_n + t_n^*)} \quad (5.14)$$

¹⁶Para α entero esta aproximación se transforma en una expresión exacta.

¹⁷Aquí V_L es V_{in} para los convertidores Boost y Buck-Boost y $V_{out} - V_{in}$ si el convertidor es un Buck.

5.5. Descripción mediante densidades del comportamiento caótico de un convertor DC/DC bajo modo de control por corriente

siendo t_{on} y t_{off} los retardos de encendido y apagado respectivamente de la llave. V_x varía con la topología¹⁸. El valor esperado del período será: $E(t_n + t_n^*) = T_C \cdot E([x_n] + 1)$, con $[x_n]$ parte entera de x_n .

$$E(t_n + t_n^*) = T_C \cdot \left[\int_0^\alpha ([x_n] + 1) f(x_n) dx_n \right]$$

Entonces, para α entero y aplicando (5.13):

$$E(t_n + t_n^*) = T_C \cdot \left[\sum_{i=1}^{\alpha-1} \int_{i-1}^i \left(\frac{i-1}{\alpha} \right) dx + \int_0^\alpha \frac{1}{\alpha} dx \right] = \frac{T_C}{\alpha} \cdot \left[\sum_{i=1}^{\alpha-1} i + \alpha \right] = \frac{T_C}{\alpha} \cdot \left[\frac{(\alpha-1)\alpha}{2} + \alpha \right]$$

$$E(t_n + t_n^*) = T_C \cdot \left[\frac{(\alpha+1)}{2} \right] \quad (5.15)$$

Debido al mayor riple del régimen caótico, $E(i_n)$ es menor que su contraparte periódica, así como I_{ref} es mayor. Las pérdidas de encendido del régimen caótico serán por tanto menores que las de su contraparte periódica, así como las de apagado mayores. Asumiendo que estos incrementos se compensan (ver [26]) podemos afirmar que el numerador de la expresión 5.14 es igual para el régimen caótico y periódico y que la relación entre pérdidas será:

$$\frac{P_{switch.c}}{P_{switch.p}} = \frac{T_C}{T_C \cdot \left[\frac{(\alpha+1)}{2} \right]} = \frac{2}{\alpha+1}$$

La reducción en las pérdidas de conmutación ($\alpha > 1$) es una ventaja para la operación aperiódica.

Cálculo del riple de la corriente de inductor

En dirección a los problemas de EMI estudiaremos el riple de la corriente de inductor. Acorde a la Fig. 5.11 tenemos: $\Delta i_n = m_1 \cdot T_C \cdot x_n$, o sea que el riple de corriente pico a pico caótico tendrá un promedio:

$$E(\Delta i_n) = m_1 \cdot T_C \cdot E(x_n) = \frac{m_1 \cdot T_C \cdot \alpha}{2}$$

Para el caso periódico, el riple de corriente será $\Delta i_{per} = m_1 \cdot D \cdot T_C = m_1 \cdot \frac{\alpha}{1+\alpha} \cdot T_C$, entonces

$$\frac{E(\Delta i_n)}{\Delta i_{per}} = \frac{1+\alpha}{2} > 1 \dots si \dots \alpha > 1$$

Claramente tenemos mayor riple en el caso caótico que para el caso periódico si las tensiones de entrada y salida son similares.

¹⁸Boost: $V_x = V_{out}$; buck: $V_x = V_{in}$; buck-boost: $V_x = V_{in} + V_{out}$.

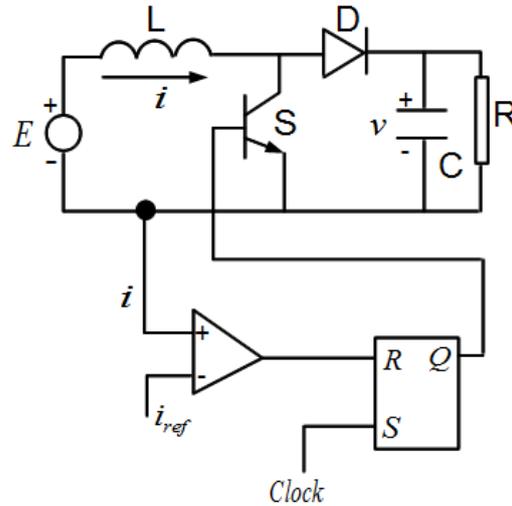


Figura 5.13: Conversor Boost controlado en modo corriente.

5.6. Aplicación: régimen caótico en un conversor Boost

5.6.1. Simulaciones

En las secciones 2.10.1 y 3.2.3 estudiamos el conversor Boost en MCC, control por corriente y el régimen aperiódico por saturación. La Fig. 5.13 muestra el conversor que analizaremos. Decimos que está en lazo abierto ya que I_{ref} no depende de las variables de salida y podemos darle el valor arbitrario que queramos. En nuestro ejemplo el período de conmutación será $T = 100\mu\text{seg}$ y los valores que tendrán los componentes del sistema serán: $E = 5V$, $L = 1,5mH$, $C = 20\mu F$ y $R = 40\Omega$. La Fig. 5.14 muestra el diagrama de bifurcaciones del conversor si variamos I_{ref} entre 0.4A y 1A. Se distinguen cuatro «zonas» de funcionamiento: periodo-1 hasta $I_{ref} = 0,5352A$, periodo-2 entre $0,5352A < I_{ref} < 0,6548A$, atractor caótico de cuatro ramas entre $0,6548A < I_{ref} < 0,78A$ y un atractor caótico de una sola rama a partir de $I_{ref} > 0,78A$.

Las figuras 5.15 y 5.16 muestran respectivamente los mapas del régimen de v_C , i_L y D y el diagrama de Poincaré para $I_{ref} = 2A$. Puede observarse claramente la saturación del *duty-cycle* que caracteriza el fenómeno que denominamos *border collision* para este tipo de conversor y control (ver sección 2.10).

Físicamente la saturación expresa el hecho de que la llave del conversor enciende y puede estar en ese estado varios períodos a pesar de que el *duty-cycle* no puede superar el valor 1, como se aprecia en la Fig. 5.17.

5.6.2. Validación de las ecuaciones

En las secciones anteriores hemos obtenido un conjunto de expresiones para valores promedio de variables interesantes a los efectos del diseño, y que resumimos

5.6. Aplicación: régimen caótico en un convertor Boost

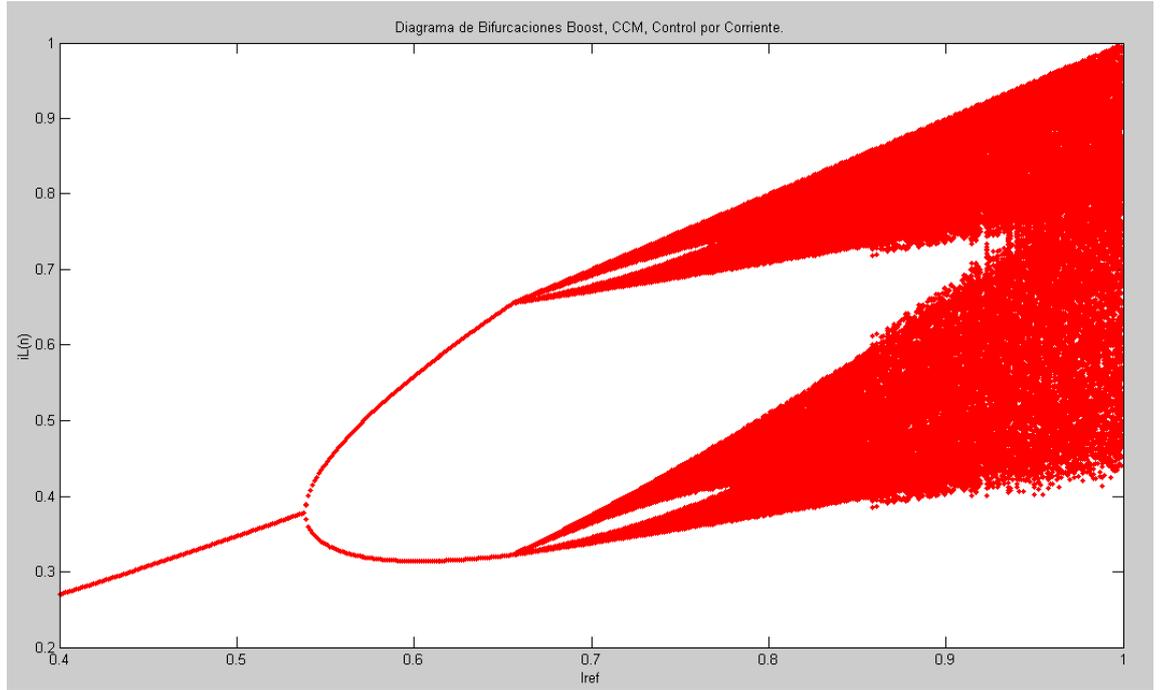


Figura 5.14: Diagrama de bifurcaciones para un convertor Boost con $E = 5V$, $iL = 1,5mH$, $C = 20\mu F$, $R = 40\Omega$ y $T = 100\mu seg$.

$I_{ref}[A]$	$\langle v_C \rangle [V]$	α	$\langle S \rangle$	$\langle D^{teo} \rangle$	$\langle D_n \rangle$	$\varepsilon(\langle D_n \rangle)$	$\langle i_L^{teo} \rangle [A]$	$\langle i_L \rangle [A]$	$\varepsilon(\langle i_L \rangle)$	$v_C^{ripple} [V_{rms}]$
0,7	10,306	1,0612	0,9703	0,5148	0,5189	0,79 %	0,5821	0,5319	8,62 %	0,397
0,8	11,136	1,2272	0,8980	0,5510	0,5550	0,73 %	0,6636	0,6209	6,44 %	0,642
0,9	11,980	1,3932	0,8357	0,5822	0,5857	0,61 %	0,7452	0,7182	3,63 %	0,533
1,0	12,810	1,5623	0,7805	0,6097	0,6134	0,60 %	0,8264	0,8220	0,59 %	0,591
1,1	13,490	1,6957	0,7419	0,6290	0,6314	0,37 %	0,9116	0,9130	0,91 %	0,664
1,2	14,040	1,8080	0,7123	0,6439	0,6485	0,72 %	0,9910	0,9880	1,11 %	0,773
1,3	14,690	1,9380	0,6807	0,6596	0,6612	0,24 %	1,0850	1,0830	0,15 %	0,824
1,6	16,240	2,2480	0,6158	0,6921	0,6979	0,83 %	1,3502	1,3260	1,79 %	1,100
1,8	17,280	2,4560	0,5787	0,7106	0,7151	0,62 %	1,5271	1,5020	1,64 %	1,290
2,0	18,330	2,6660	0,5456	0,7272	0,7318	0,63 %	1,7040	1,6920	0,69 %	1,440
2,3	19,640	2,9280	0,5092	0,7454	0,7505	0,68 %	1,9747	1,9470	1,40 %	1,735
2,6	20,900	3,1800	0,4785	0,7608	0,7656	0,64 %	2,2467	2,2080	1,72 %	2,002
3	22,606	3,5212	0,4424	0,7788	0,7830	0,54 %	2,6088	2,5840	0,95 %	2,347

Tabla 5.1.

a continuación:

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\langle D_n^{teo} \rangle = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \quad (5.16)$$

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

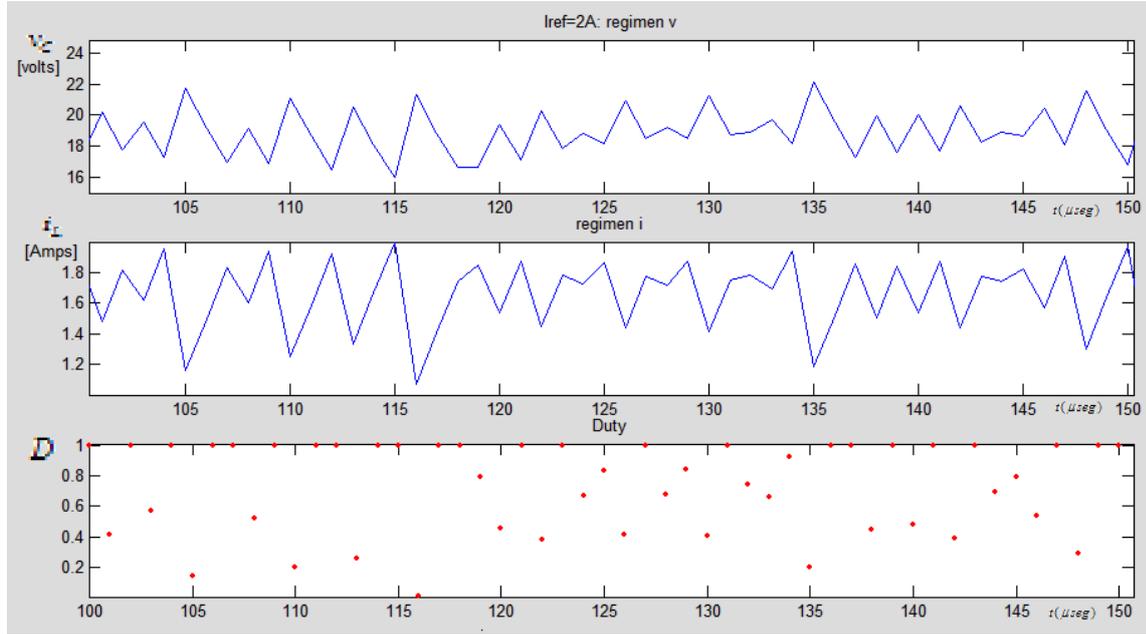


Figura 5.15: Mapas de tensión v_C , corriente i_L y duty-cycle en régimen para $I_{ref} = 2A$.

$$\begin{aligned} \langle S \rangle &= \frac{2}{1 + \alpha} \\ \langle D_n \rangle \frac{T}{\langle S \rangle} &= \frac{T\alpha}{2} \\ \langle i_L^{teo} \rangle &= I_{ref} - \frac{m_2 T}{3} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Al solo efecto de ilustrar las ideas, véase la Fig. 5.18; allí se dibuja una posible forma de onda promedio para i_L .

En nuestro caso tenemos un convertor Boost, por tanto:

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{U_{in}}{L} \\ m_2 &= \frac{U_{out} - U_{in}}{L} \end{aligned}$$

En la Tabla 5.1 se muestra el resultado de variables relevantes para trece simulaciones correspondientes a igual número de valores de I_{ref} . Se aprecia inmediatamente que α es función creciente de I_{ref} , lo cual es bastante intuitivo dada la dependencia con $U_{out} \approx \langle v_C \rangle$ a través de m_2 .

Las ecuaciones a validar son las (5.16) y (5.17). Ambas ecuaciones tienen como hipótesis previa que el ripple de tensión de salida $-v_C^{ripple} [V_{rms}]$ en la tabla sea pequeño. Se puede ver que conforme aumenta I_{ref} también lo hace el ripple

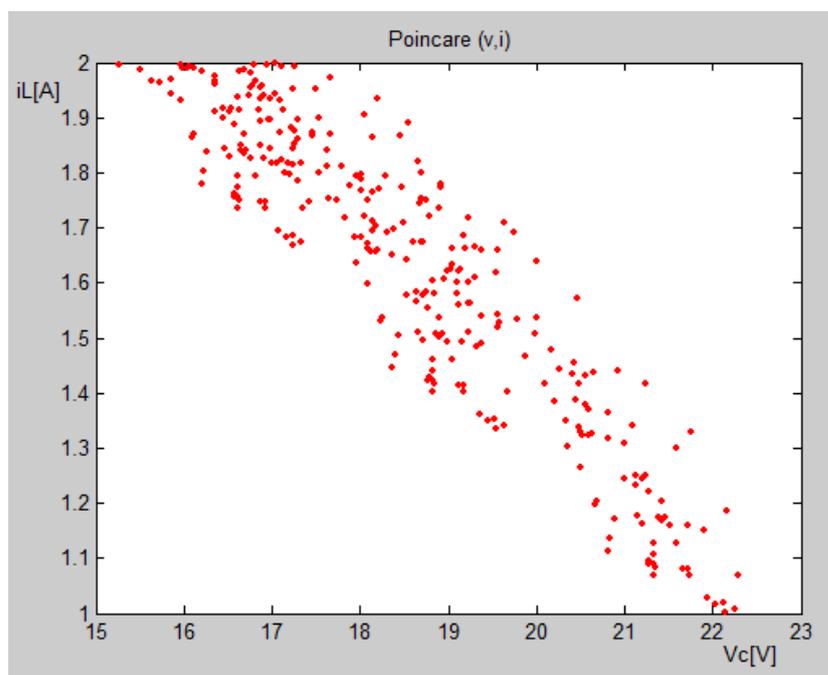


Figura 5.16: Diagrama de Poincaré para $I_{ref} = 2A$.

tanto en valores absolutos como en términos relativos a la tensión promedio de salida $\langle v_C \rangle$, por tanto, tendremos un límite en cuanto a la profundización en la «caoticidad» del sistema para sostener la validez de las ecuaciones. Estas además, fueron derivadas utilizando el mapa normalizado suponiéndolo de Markov, lo que ocurre solo si α es entero. Sin embargo podemos ver que el comportamiento es aceptable para todas las simulaciones realizadas. Los errores $\varepsilon(\langle D_n \rangle)$ y $\varepsilon(\langle i_L \rangle)$ relativos entre el valor teórico y el de la simulación se encontraron por debajo del 1% para el primero y del 9% para el segundo, mejorando para este último si $\alpha \geq g_m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618..$ con un error menor al 2%.

5.7. Ejemplo de diseño

Diseñaremos un convertor Boost que eleve la tensión de $E = 5V$ a $U_{out} = 25V$. En ese caso

$$\alpha = \frac{m_2}{m_1} = \frac{U_{out} - E}{E} = 4$$

entero y mayor a g_m . Destaquemos que una condición para el diseño caótico en un convertor Boost es que la diferencia de tensiones de entrada y salida sea importante. En ese caso

$$\langle D_n \rangle = \frac{\alpha}{1 + \alpha} = \frac{4}{5} = 0,8$$

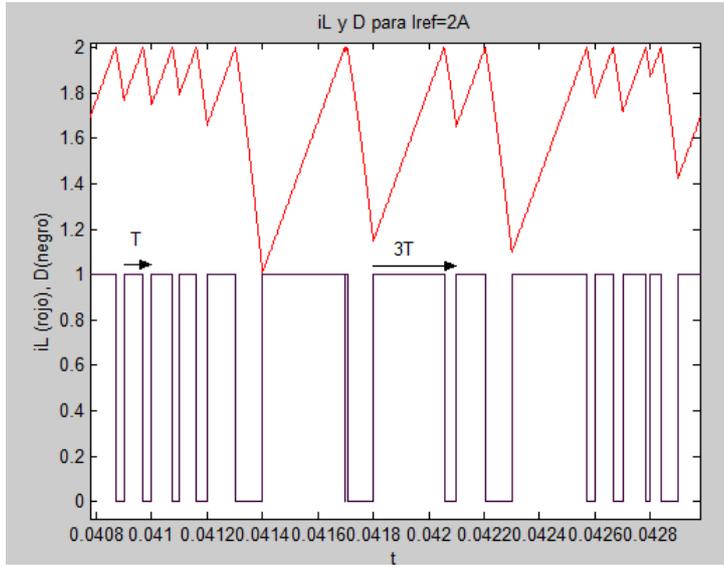


Figura 5.17: Señal de disparo D y corriente de self para el Boost en régimen aperiódico e $I_{ref} = 2A$.

y

$$\langle S \rangle = \frac{2}{1 + \alpha} = 0,4$$

Debemos asegurar la conducción continua. La descarga de la self es de pendiente $-m_2$ y duración máxima T . Para que no alcance el cero, la condición es:

$$m_2 \cdot T \leq I_{ref} \quad (5.18)$$

Si se exige una potencia máxima de $10W$, tendremos

$$\langle i_L \rangle = \frac{P^{m\acute{a}x}}{E} = 2A = I_{ref} - \frac{m_2 T}{3} \quad (5.19)$$

La Fig. 5.19 muestra los lugares determinados por las ecs. (5.18) y (5.19), descritos respectivamente por las rectas (1) y (2) para $T = 100\mu seg$. Cualquier punto entre A y B de la recta (2) nos sirve. Supongamos que por razones de EMI queremos

$$\langle \Delta i_L \rangle = \frac{m_1 T \alpha}{2} \leq 1,5A$$

por tanto $m_1 \leq 7,5kA/seg$.

Tomaremos

$$P = [I_{ref} \quad m_1] = [2,7A \quad 5,25kA/seg]$$

resultando

$$m_2 = \alpha m_1 = 21kA/seg$$

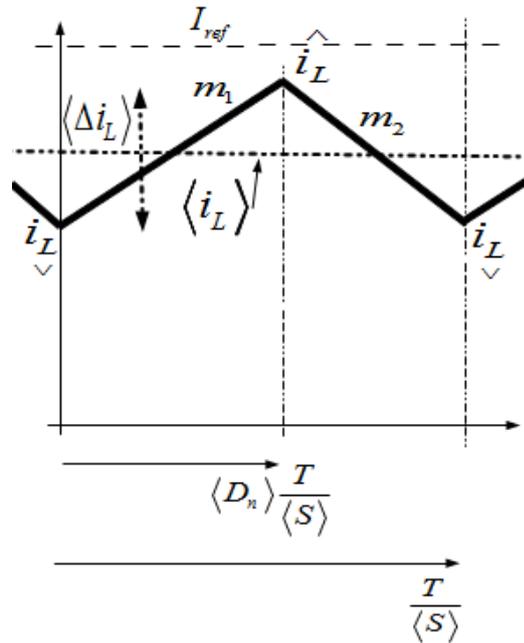


Figura 5.18: Onda de corriente de self promedio en un convertidor en control por corriente y régimen aperiódico.

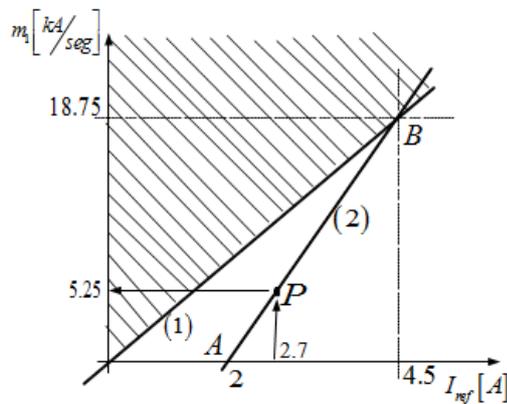


Figura 5.19: Estudio para los valores I_{ref} y m_1 de diseño.

y

$$L = \frac{E}{m_1} = 0,95mH$$

Para el dimensionado de C asumimos una descarga ($S = ON$, $D = OFF$) de duración duty-cycle promedio a corriente constante $I_o = P^{m\acute{a}x}/U_o = 0,4A$, e

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

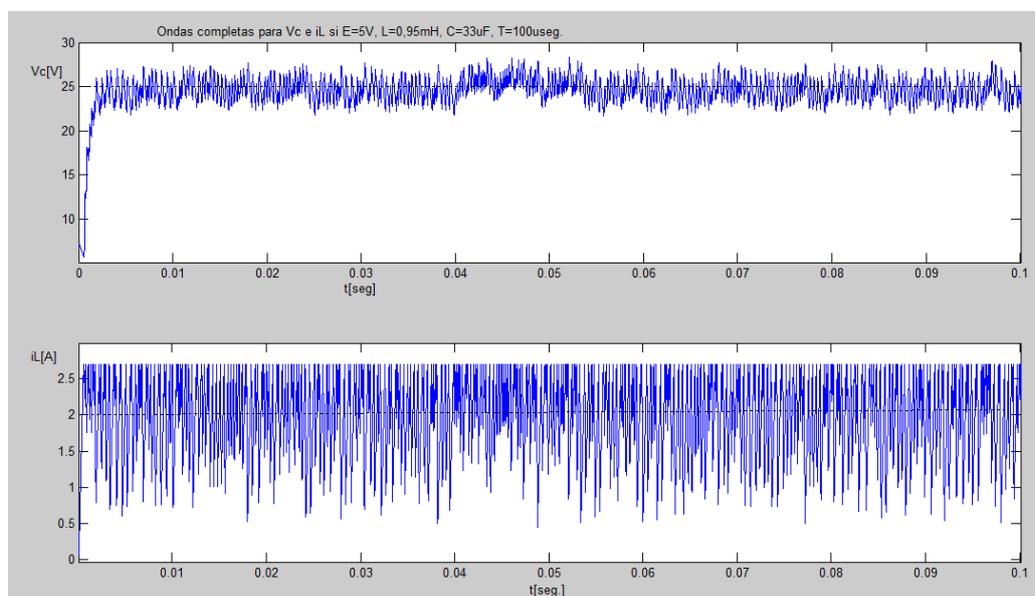


Figura 5.20: Formas de onda i_L y v_C para un Boost con $L = 0,95mH$, $C = 33\mu F$, $T = 100\mu seg$, $R = 62,5\Omega$ y $E = 5V$.

impondremos un ripple de tensión de salida menor a $10\%U_o = 2,5V$, por tanto, si:

$$Q = I_o \langle D_n \rangle \frac{T}{\langle S \rangle} = C \cdot \Delta v_C$$

obtenemos

$$C \geq I_o \langle D_n \rangle \frac{T}{\langle S \rangle} \frac{1}{\Delta v_C^{\max}} = 32\mu F$$

tomando $C = 33\mu F$.

Las figuras 5.20 y 5.21 muestran las formas de onda para i_L y v_C desde el transitorio de arranque la primera y concentrada en un tramo del régimen aperiódico la segunda. En la simulación,

$$\langle v_C \rangle = 24,7V$$

$$\langle D_n \rangle = 0,7986$$

e

$$\langle i_L \rangle = 1,95A$$

por tanto los errores relativos al diseño son:

$$\varepsilon(\langle v_C \rangle) = 1,2\%$$

$$\varepsilon(\langle D_n \rangle) = 0,18\%$$

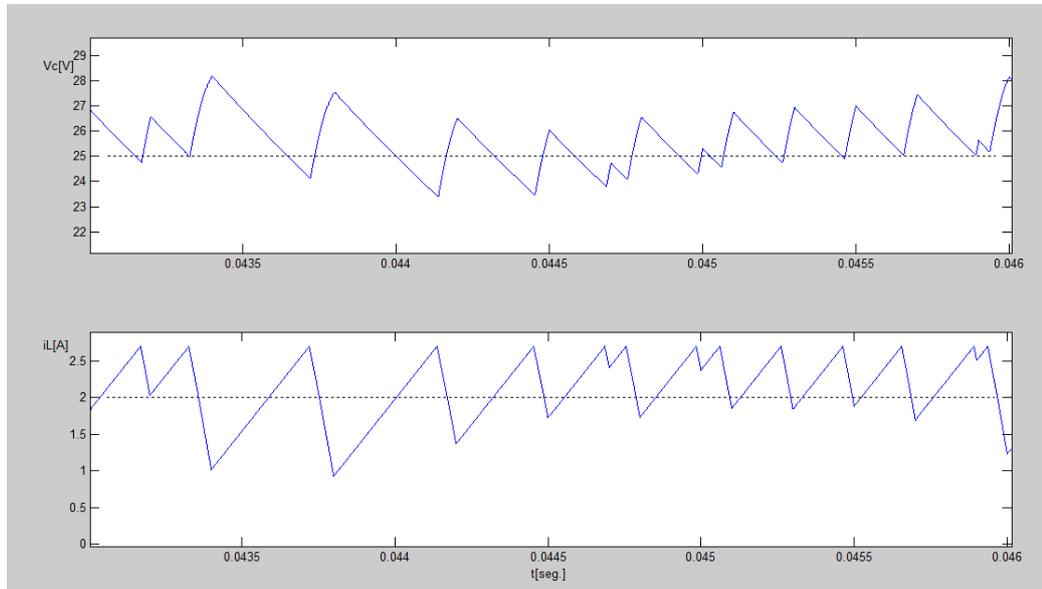


Figura 5.21: Formas de onda i_L y v_C para un Boost con $L = 0,95mH$, $C = 33\mu F$, $T = 100\mu seg$, $R = 62,5\Omega$ y $E = 5V$. Zoom sobre el régimen aperiódico.

y

$$\varepsilon(\langle i_L \rangle) = 2,5\%$$

Asimismo, los valores RMS de

$$\Delta i_L^{RMS} = 0,6A$$

y

$$\Delta v_C^{RMS} = 0,7$$

nos llevan, en una aproximación de onda de ripple promedio triangular, a unos valores pico a pico de

$$\Delta i_L = \sqrt{3} \cdot \Delta i_L^{RMS} = 1,04A$$

y

$$\Delta v_C = \sqrt{3} \cdot \Delta v_C^{RMS} = 1,21V$$

completamente aceptables y acorde a los cálculos hechos. La Fig. 5.22 muestra el diagrama de Poincaré para tener presente la dispersión de los puntos del mapa respecto a los promedios de tensión de salida y corriente de entrada de diseño.

5.8. Conclusiones

En este capítulo hemos aplicado herramientas que provienen del análisis estadístico para obtener, apelando al concepto de ergodicidad, expresiones explícitas para los promedios temporales de variables que son de interés ante el diseño de

Capítulo 5. Estadísticas de mapas caóticos

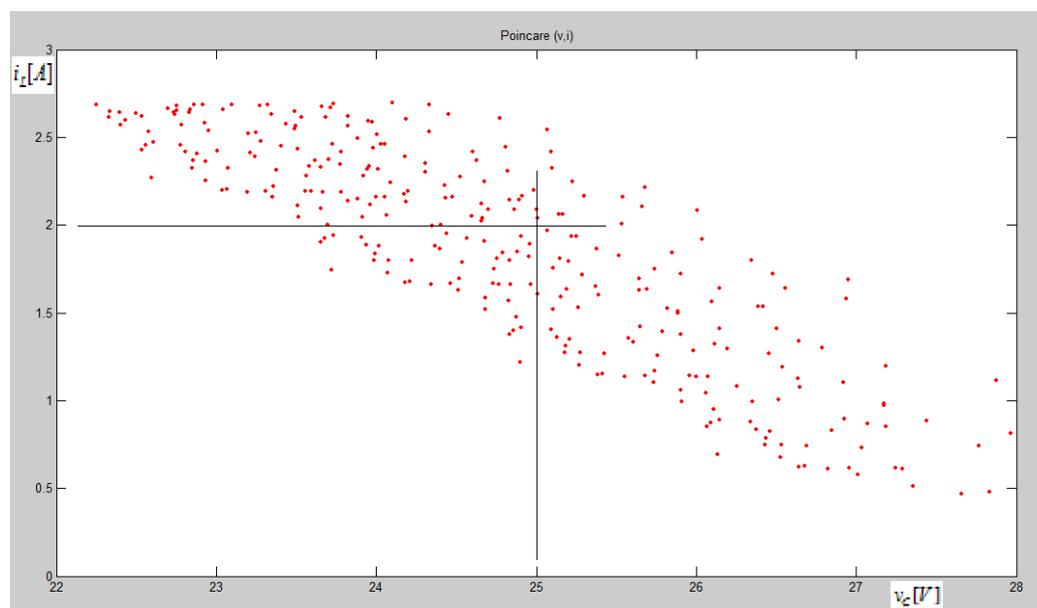


Figura 5.22: Diagrama de Poincaré para un Boost con $E = 5V$, $L = 0,95mH$, $C = 33\mu F$ y $T = 100\mu seg$.

convertidores en modo de conducción continua, control por corriente y trabajando en régimen caótico. Obtuvimos la expresión del promedio temporal de la corriente de inductor, así como de la frecuencia real de conmutación y del *duty-cycle*, demostrando que este último es igual al del caso periódico. Asimismo pudimos comparar las pérdidas de conmutación para los casos caótico y periódico, demostrando que una de las ventajas de la operación aperiódica es la reducción de estas pérdidas. En sentido contrario, también pudimos mostrar que el ripple de la corriente de inductor es mayor para el caso aperiódico, de modo que tendremos compromisos de diseño a evaluar para la aplicación de que se trate antes de elegir el régimen aperiódico. Finalmente corroboramos la consistencia de las expresiones halladas con simulaciones de convertidores Boost en concreto, uno ya dado y otro diseñado a los efectos. Surge que, dadas las aproximaciones hechas, en especial la suposición de ripple muy pequeño en la tensión de salida – de cumplimiento siempre relativo – las ecuaciones nos brindan una herramienta adecuada para el diseño de convertidores si queremos un régimen aperiódico.

Capítulo 6

Conclusiones finales

Los convertidores electrónicos de potencia, por su naturaleza conmutada, conforman sistemas no lineales. El método tradicional de promedio y linealización del circuito de potencia, con sus muy buenos resultados a la vista, tiene implícita una pérdida de información que puede llevarnos ya sea a errores en el diseño, o bien a no tener en cuenta propiedades aprovechables de la complejidad de comportamientos de estos dispositivos.

En particular, en esta tesis, hemos introducido herramientas que nos permitan analizar y diseñar los convertidores DC/DC admitiendo un régimen caótico. Las ecuaciones que modelan estos sistemas son deterministas, no contienen componentes aleatorios, sin embargo presentan comportamientos a largo plazo aperiódicos, cuyas cualidades de respuesta dinámica y de espectro de frecuencia son motivo de atención en la actualidad en dirección a utilizarlas convenientemente. El capítulo 2 refiere enteramente a las propiedades básicas de los mapas discretos que fueron utilizados a lo largo de esta tesis. Los sistemas que nos ocupan son no autónomos, siendo impulsados por un reloj de período fijo T , por lo que son apropiados para ser descritos mediante los llamados «mapas estroboscópicos». Utilizando propiedades de la matriz jacobiana asociada a este tipo de mapa, se han explicado conductas como los procesos de bifurcaciones «suaves» de duplicación de período. Por otro lado se ha visto que aparecen otras rutas al caos, «no suaves», como las producidas por cambios en la secuencia de topologías circuitales que se alternan en el funcionamiento de estos equipos. Este tipo de proceso entra dentro de los clasificados como de *border collision*. Aquí se ha prestado especial atención al producido por la saturación del *duty cycle* en convertidores controlados tanto por tensión como por corriente.

En el capítulo 3 se estableció un procedimiento general para deducir, a partir de las ecuaciones diferenciales que los describen completamente, los mapas correspondientes a convertidores conmutados de cualquier orden. A continuación se derivaron los mapas asociados a las topologías y modos de conducción y control relevantes para esta tesis, de segundo orden en general. Utilizando un Buck en modo conducción continua y control por tensión se mostró la utilidad de los diagramas de bifurcación y los mapas de Poincaré (o estroboscópico en nuestro contexto) para exponer las propiedades del régimen que se establece para el o los valores de interés

Capítulo 6. Conclusiones finales

de un parámetro, en ese caso la tensión de entrada E .

Se puso énfasis en aplicaciones de ingeniería de los procedimientos puestos sobre la mesa. En primer lugar en el capítulo 4 estudiamos un rectificador constituido a partir de un puente de diodos con filtro capacitivo y un convertor Buck-Boost. Este último con control por corriente y posibilidades de conducción, tanto continua como discontinua. El sistema, en general de tercer orden, puede reducirse al segundo orden en los tramos de la tensión de entrada en que los diodos conducen y por tanto el filtro condensador sigue la tensión de salida del puente. En ese caso, el comienzo del proceso de bifurcaciones era suave (aunque rápidamente evolucionaba hacia la saturación del *duty*) y pudimos utilizar el método del jacobiano para encontrar el mínimo valor para el condensador de entrada que evitase el apartamiento del régimen de período 1, considerado, en un contexto mas cercano al pensamiento tradicional de abordaje de diseño, como deseable.

Para formular procedimientos de diseño sobre convertidores en régimen caótico, hace falta poder calcular promedios de las variables de interés. En el capítulo 5, luego de introducir la idea de la evolución de densidades en mapas de primer orden y el operador de Perrón-Frobenius, se presentó la propiedad de ergodicidad que poseen los sistemas en los que existe una densidad invariante en este operador. El teorema ergódico sostiene que en este caso se pueden obtener los promedios en el tiempo asociados a una serie temporal, por sus promedios de ensamble referidos a la densidad invariante. Existe un tipo de mapas, llamados «mapas de Markov» para los cuales es posible encontrar expresiones explícitas de sus densidades invariantes. Bajo la hipótesis de tensión de salida esencialmente constante, se puede reducir el orden del convertor DC/DC, y pensar que su dinámica es representable exclusivamente por el mapa de corriente. Más aún, bajo determinadas suposiciones respecto al dimensionado de los componentes y si el control es por corriente y hay conducción continua, se encontró, en el primer caso mediante cambios adecuados de variable y en el segundo prestando atención solo a los instantes de conmutación de las llaves, dos tipos de mapa que describen la dinámica del convertor y tienen la propiedad de ser de Markov. Mediante el llamado «mapa normalizado» se hallaron expresiones para el promedio de la corriente de inductor, la frecuencia promedio de la forma de onda de corriente y el *duty* promedio. Por otro lado, utilizando el llamado «mapa de impacto» se pudo estimar las pérdidas de conmutación de un convertor caótico y compararlas con un equivalente de período 1, concluyendo que el convertor caótico tiene ventajas sobre su equivalente. Se dedujo además una expresión para el promedio del riple de la corriente de self. Aquí el comportamiento del equivalente periódico resultó mejor, por lo que en resumidas cuentas, no surge en forma general una recomendación sobre cual de ambas soluciones utilizar, sino que hay que evaluar los compromisos que impone cada caso concreto.

Integrando los resultados obtenidos en forma separada mediante los dos modelos de mapa descriptos, se obtiene una visión de conjunto de lo que es la onda promedio de corriente de self; se puede ver en la Fig. 5.18. Con esta herramienta se ha diseñado un convertor Boost caótico que, a la luz de las simulaciones hechas, mostró tener un comportamiento muy cercano al previsto por el modelo estadístico, no obstante las aproximaciones realizadas.

Quedan instaladas varias líneas de estudio para trabajos futuros. Puesta la mirada sobre el problema del diseño de convertidores que cumplan las regulaciones existentes de compatibilidad electromagnética, si se pretende utilizar las propiedades de espectro esparcido, posibles en un régimen caótico, se deberían buscar expresiones explícitas, o aproximaciones adecuadas, de los espectros de frecuencia asociados a las variables significativas de estos sistemas. En un paso previo a ello, se han obtenido algunas densidades vinculadas a convertidores en modo de conducción continua y control por corriente. Se deberán buscar resultados equivalentes para el modo de conducción discontinua y el control por tensión. Finalmente, se deberá corroborar experimentalmente los resultados obtenidos, precedente imprescindible para su aplicación en la industria.

Bibliografía

- [1] Nonlinear phenomena in power electronics; edited by Soumitro Banerjee and George C. Verghese; Published by John Wiley and Sons, Hoboken, NJ; TK7881.15 B36 2001, ISBN 0-7803-5383-8; D. C. Hamill, S. Banerjee, G. C. Verghese: *Introduction.*, cap. 1, pag. 1.
- [2] Nonlinear phenomena in power electronics; edited by Soumitro Banerjee and George C. Verghese; Published by John Wiley and Sons, Hoboken, NJ; TK7881.15 B36 2001, ISBN 0-7803-5383-8; Vasca, M. di Bernardo, and G. Olivar: *A closer look at sampled-data models for power converters.*, cap. 2, pag. 38.
- [3] Nonlinear phenomena in power electronics; edited by Soumitro Banerjee and George C. Verghese; Published by John Wiley and Sons, Hoboken, NJ; TK7881.15 B36 2001, ISBN 0-7803-5383-8; Soumitro Banerjee: *Introduction to nonlinear dynamics and chaos*, cap. 3, pag. 53.
- [4] Nonlinear phenomena in power electronics; edited by Soumitro Banerjee and George C. Verghese; Published by John Wiley and Sons, Hoboken, NJ; TK7881.15 B36 2001, ISBN 0-7803-5383-8; Jonathan H. B. Deane: *Bifurcations of smooth maps.* , cap. 3, pag. 67.
- [5] Nonlinear phenomena in power electronics; edited by Soumitro Banerjee and George C. Verghese; Published by John Wiley and Sons, Hoboken, NJ; TK7881.15 B36 2001, ISBN 0-7803-5383-8; Soumitro Banerjee, Celso Grebogi: *Bifurcations in piecewise-smooth maps.* , cap. 3, pag. 73.
- [6] Nonlinear phenomena in power electronics; edited by Soumitro Banerjee and George C. Verghese; Published by John Wiley and Sons, Hoboken, NJ; TK7881.15 B36 2001, ISBN 0-7803-5383-8; J. L. Rodríguez Marrero, G. C. Verghese, R. Santos Bueno, S. H. Isabelle: *Computation of Averages Under Chaos*, cap. 4, pag. 129.
- [7] Nonlinear phenomena in power electronics; edited by Soumitro Banerjee and George C. Verghese; Published by John Wiley and Sons, Hoboken, NJ; TK7881.15 B36 2001, ISBN 0-7803-5383-8; J. H. B. Deane: *Calculation of spectral peaks in a chaotic DC/DC converter*, cap. 4, pag. 149.
- [8] J. G. Kassakian, M. F. Schlecht, G. C. Verghese: *Principles of Power Electronics*. Adison-Wesley. ISBN 0-201-09689-7

Bibliografía

- [9] S. Banerjee, E. Ott, J. A. Yorke, and G. H. Yuan. *Anomalous bifurcations in dc-dc converters: Borderline collisions in piecewise smooth maps*. IEEE Power Electronics Specialists' Conference, pp. 1337-1344. 1997.
- [10] H. E. Nusse and J. A. Yorke. *Border-collision bifurcations for piecewise smooth one dimensional maps*. In: J. B. (itrcurion und Cliuo.s. vol. 5. no. 1. pp, 189- 207. 1995.
- [11] S. Banerjee, J. A. Yorke, and C. Grebogi, *Robust chaos*, Physical Review Letters, vol. 80 pp. 3049-3052. 1998.
- [12] D. C. Hamill, *Power electronics: A field rich in nonlinear dynamics*. 3rd Int. Specialists Workshop on Nonlinear Dynamics of Electronic Systems (University College, Dublin). pp. 165- 178, 1995.
- [13] R. S. Bueno and J. L. R. Marrero. *Control of a boost dc-dc converter in the chaotic regime*, IEEE Int. Conf. on Control Applications, pp. 832-837. 1998.
- [14] D. C. Hamill and D. J. Jefferies. *Subharmonics and chaos in a controlled switched-mode power converter*. IEEE Trans on Circuits and Systems. vol. 35. no. 8. pp. 1059 1061. 1988.
- [15] S. Banerje, D. Kastha, S. SenGupta: *Minimising EMI problems with chaos*. Proceedings of INCEMIC 2001-2002
- [16] Steven H. Strogatz: *Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. Perseus Books, 1994. Reading, Massachusetts. ISBN 0-201-54344-3.
- [17] K. T. Alligood, T. D. Sauer, J. A. Yorke: *CHAOS. An introduction to dynamical systems*. Springer, 1996. ISBN 0-387-94677-2.
- [18] B. Lee, V. Ajarapu: *Period doubling route to chaos in an electrical power system*. IEEE, 1993, Paper 9609C (P9, P11).
- [19] Jason Tan, Herbert H. C. Iu and S. H. Ling: *Symbolic Representation of Border Collision Bifurcation in Switching DC/DC Converters*. The 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronic Society (IECON), Nov. 5-8, 2007, Taipei, Taiwan.
- [20] C. D. Xu, K. W. E. Cheng: *Examination of bifurcation of the non-linear dynamics in buck-boost converters with input capacitor rectifier*. Power Electronics, IET Volume:4 , Issue: 2, 2011.
- [21] Chi Kong Tse: *Complex behavior of switching power converters*. CRC press, Boca Raton. ISBN 0-8493-1862-9.
- [22] Guohui Yuan, Soumitro Banerjee, Edward Ott, and James A. Yorke: *Border-Collision Bifurcations in the Buck Converter*. IEEE transactions on circuits and systems-1:fundamental theory and applications, vol 45, N° 7, July 1998.

- [23] A. Lasota, M. C. Mackey: *Probabilistic properties of deterministic system*. Publisher: Cambridge University Press (December 27, 1985). ISBN-13: 978-0521302487.
- [24] S. H. Isabelle: *A signal processing framework for the analysis and application of chaotic systems*. Publisher: Research Laboratory of Electronics, Massachusetts Institute of Technology. May 1995. Technical report (Massachusetts Institute of Technology. Research Laboratory of Electronics) ; 593.
- [25] Oliver Woywode, Jens Weber, Henry Guldner, A. L. Baranovsky and Wolfgang Schwartz: *Bifurcation and statistical analysis of dc-dc converters*. IEEE transactions on circuits and systems-1:fundamental theory and applications, vol 50, N° 8 august 2003.
- [26] Oliver Woywode, Jens Weber, Henry Guldner: *A topological and statistical approach to dc-dc converters*. Power electronics specialists conference, 2001, PESC. 2001. IEEE 32nd annual.

Índice de figuras

1.1. Conversor Buck, lazo cerrado de control de tensión de salida. . . .	2
1.2. Conversor Buck, modelo promediado no lineal.	3
1.3. Conversor Buck, modelo lineal de perturbaciones.	3
1.4. Conversores en paralelo. Esquema Maestro-Esclavo de control de reparto de corriente. Tomado de [21], cap. 7.	6
1.5. Conversores Buck en paralelo. $K=3$, régimen periódico simple. . . .	7
1.6. Conversores Buck en paralelo. $K=8$, régimen caótico.	8
1.7. Evolución del volumen en el flujo. Extraído de [16]	10
1.8. $y(t)$ de las ecuaciones de Lorenz si $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 28$. Extraído de [16] pág. 318.	12
1.9. Atractor de Lorenz.	12
1.10. Plano de fase (x, z) de las ecuaciones de Lorenz si $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 28$. Extraído de [16] pág. 319.	13
1.11. Atractor de Lorenz. Sensibilidad a las condiciones iniciales. Tomado de [21] pág. 21.	14
1.12. Conversión del desplazamiento $\delta x(0)$ en $\delta x(t)$	14
1.13. Crecimiento exponencial de la distancia entre dos trayectorias con puntos iniciales cercanos para el sistema de Lorenz. Tomado de [16] pág. 321.	15
1.14. Diagrama de Bifurcaciones al variar r de las ecuaciones de Lorenz si $\sigma = 10$ y $b = \frac{8}{3}$. Extraído de [16] pág. 330.	17
1.15. Trayectorias de las ecs. de Lorentz para $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 21$. Se observa que la trayectoria tiende a estabilizarse sobre C^+ . Extraído de [16] pág. 332.	18
1.16. $y = y(t)$ de las ecs. de Lorentz para $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$ y $r = 21$. Extraído de [16] pág. 332.	18
2.1. Órbita de periodicidad k	22
2.2. Mapa de Poincaré derivado de una ecuación diferencial tridimensional. Tomado de [17], pág. 49	23
2.3. Mapa estroboscópico para un sistema dinámico continuo y no autónomo con fuerza externa de período T . Tomada de [3]	24
2.4. Dinámica local cerca de un punto fijo: (a) atractor, (b) repulsor y (c) silla de montar. Tomada de [17], pág. 59	24

Índice de figuras

2.5. Ejemplos de puntos fijos para un mapa linealizado de segundo orden. Tomada de [3].	25
2.6. Duplicación de período.	27
2.7. Duplicación de período en un mapa de primer orden. Figura tomada de [4]	28
2.8. Movimiento de los valores propios respecto al círculo unidad en una duplicación de período para un mapa de segundo orden.	29
2.9. Cruce del círculo unidad por parte de los valores propios en un mapa suave.	30
2.10. Conversor Boost controlado en modo corriente.	31
2.11. Forma de la corriente de inductor para un Boost controlado en modo corriente. Se ha perdido el régimen periódico y tenemos un régimen con saturación del <i>duty cycle</i> (2), apreciándose además el límite del «border collision» (3).	32
2.12. Conversor Buck controlado en modo voltaje.	32
2.13. Formas de onda para los distintos modos de evolución en control de modo tensión.	34
3.1. Fases de la dinámica del convesor Buck-Boost	38
3.2. Corriente de inductor para modo de conducción discontinua (MCD) y continua (MCC) respectivamente. El control es por corriente. . .	38
3.3. Esquema de las condiciones de conmutación para el Buck-Boost en modo de conducción discontinua.	39
3.4. Conversor Buck en modo de conducción continua: fases en sucesión.	40
3.5. Control por tensión. Alguna forma de onda posible.	41
3.6. Boost, control por corriente, lazo cerrado.	42
3.7. Corriente de inductor en control por corriente.	42
3.8. Conversor Boost en modo de conducción continua: fases en sucesión.	43
3.9. Régimen para $E=23V$ del convesor Buck: period-1.	46
3.10. Régimen para $E=26V$ del convesor Buck: period-2.	46
3.11. Régimen para $E=32.02V$ del convesor Buck: régimen caótico «suave».	47
3.12. Régimen para $E=32.25V$ del convesor Buck: régimen caótico «no suave».	47
3.13. Diagrama de Poincaré para el régimen del convesor Buck con $E=23V$	48
3.14. Diagrama de Poincaré para el régimen del convesor Buck con $E=26V$	49
3.15. Diagrama de Poincaré para el régimen del convesor Buck con $E=32.02V$	50
3.16. Diagrama de Poincaré para el régimen del convesor Buck con $E=32.25V$	51
3.17. Diagrama de Bifurcaciones para la corriente i_L del régimen del convesor Buck con $22V < E < 33V$	52
3.18. Zoom sobre Diagrama de Bifurcaciones. Pasaje de Period 1 a Period 2.	53
3.19. Zoom sobre Diagrama de Bifurcaciones. Pasaje de Period 2 a Period 4.	54
4.1. Convesor Buck-Boost como etapa de salida de un rectificador.	56
4.2. Mapas estroboscópicos según el comportamiento de u_{Cf}	56

4.3. Control en modo corriente	57
4.4. Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=90\mu F$. . .	61
4.5. Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=120\mu F$. .	62
4.6. Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=150\mu F$. .	62
4.7. Mapas de las variables de estado en el régimen para $C_f=220\mu F$. .	63
4.8. Régimen para $C_f=120\mu F$	63
4.9. Retrato de fase i_L vs v_C para $C_f=120\mu F$	64
4.10. Zoom sobre el régimen para $C_f=120\mu F$	65
4.11. Tramo de período 4 de i_L para $C_f=120\mu F$	65
4.12. Retrato de fase i_L vs v_C para $C_f=90\mu F$	66
4.13. Tramo aperiódico (asociado al concepto de caos) de i_L para $C_f=90\mu F$	66
4.14. Conversor Buck-Boost con control por pico de corriente.	68
4.15. Mapas de las variables de estado del conversor Buck-Boost para $u_{ns} = 22V$	69
4.16. Lugar geométrico de los valores propios λ_1 y λ_2 . Zoom sobre el mismo en las cercanías de -1.	70
4.17. λ_1 vs u_{ns}	70
5.1. Preimagen del conjunto $[0,x]$ bajo un mapa $F(x)$ cuadrático. . . .	72
5.2. Derivación del operador de Frobenius-Perron para un mapa dado $x_{n+1} = F(x_n)$	73
5.3. Ejemplo de mapa de Markov con $N = 4$	75
5.4. Aporte del tramo i de f_0 al tramo j de f_1	76
5.5. Ejemplo de mapa de Markov con $N = 2$	77
5.6. Corriente de inductor en un régimen caótico.	78
5.7. Mapa normalizado.	79
5.8. Diagrama de bifurcación del mapa normalizado. Tomado de [6]. . .	80
5.9. Mapa con α entero.	81
5.10. Mapas comparados de i_L y z	82
5.11. Corriente de inductor y mapa de impacto.	84
5.12. Mapa de impacto con $\alpha = 2,3$	85
5.13. Conversor Boost controlado en modo corriente.	88
5.14. Diagrama de bifurcaciones para un conversor Boost con $E = 5V$, $i_L = 1,5mH$, $C = 20\mu F$, $R = 40\Omega$ y $T = 100\mu seg$	89
5.15. Mapas de tensión v_C , corriente i_L y duty-cycle en régimen para $I_{ref} = 2A$	90
5.16. Diagrama de Poincaré para $I_{ref} = 2A$	91
5.17. Señal de disparo D y corriente de self para el Boost en régimen aperiódico e $I_{ref} = 2A$	92
5.18. Onda de corriente de self promedio en un conversor en control por corriente y régimen aperiódico.	93
5.19. Estudio para los valores I_{ref} y m_1 de diseño.	93
5.20. Formas de onda i_L y v_C para un Boost con $L = 0,95mH$, $C = 33\mu F$, $T = 100\mu seg$, $R = 62,5\Omega$ y $E = 5V$	94

Índice de figuras

5.21. Formas de onda i_L y v_C para un Boost con $L = 0,95mH$, $C = 33\mu F$, $T = 100\mu seg$, $R = 62,5\Omega$ y $E = 5V$. Zoom sobre el régimen aperiódico.	95
5.22. Diagrama de Poincaré para un Boost con $E = 5V$, $L = 0,95mH$, $C = 33\mu F$ y $T = 100\mu seg$	96

Compilado el 25 de febrero de 2014.
<http://iie.fing.edu.uy/>