



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Búsqueda tabú para determinar frecuencias en el transporte público

Héctor Manuel Martínez Luz

Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Noviembre de 2018



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Búsqueda tabú para determinar frecuencias en el transporte público

Héctor Manuel Martínez Luz

Tesis presentada al Programa de Maestría en Informática, Programa de Desarrollo de Ciencias Básicas, Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magister en Informática.

Directores de Tesis:

M.Sc.Ing. Prof. María E. Urquhart

Ph.D.Ing. Prof. Antonio Mauttone

Montevideo – Uruguay

Noviembre de 2018

Martínez Luz, Héctor Manuel

Búsqueda tabú para determinar frecuencias en el transporte público / Héctor Manuel Martínez Luz. - Montevideo: Universidad de la República, Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas, 2018.

IX, 95 p. 29, 7cm.

Directores de Tesis:

María E. Urquhart

Antonio Mauttone

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa de Maestría en Informática, 2018.

Referencias bibliográficas: p. **83 – 86**.

1. Optimización de Frecuencias en el Transporte Público, 2. Optimización Multiobjetivo, 3. Búsqueda Tabú.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Ph.D. Prof. Débora Ronconi

Ph.D. Prof. Libertad Tansini

Ph.D. Prof. Martín Pedemonte

Montevideo – Uruguay
Noviembre de 2018

Agradecimientos

Quisiera agradecer al área Informática del PEDECIBA por admitirme en el programa de Maestría en Informática.

A mis directores de tesis Antonio y Marita por el apoyo y paciencia que me tuvieron durante estos años. Su guía fue sumamente importante en este trabajo.

A mis padres cuyo sacrificio permitió realizar mi carrera, a mi hermano y abuela Ema quienes me soportaron durante mi tiempo de estudiante.

Por último, a mis dos grandes amores Paola y Margarita, ellas son mi soporte, fuerza y motivación para realizar siempre un esfuerzo más.

RESUMEN

En esta tesis se estudia el problema de determinación de frecuencias en el transporte público utilizando un enfoque de optimización combinatoria. La determinación de frecuencias es llevada a cabo en las etapas de planificación estratégica y táctica de los sistemas de transporte público. El problema consiste en determinar el intervalo de tiempo entre pasadas de buses subsecuentes de cada línea, considerando su ruta y la demanda de viajes. Las frecuencias impactan tanto a los usuarios como operadores. A los usuarios en el tiempo de espera. A los operadores en el costo de operación, dado que principalmente su costo está determinado por el tamaño de la flota requerida. En este trabajo se consideran dos formulaciones para el problema: objetivo único y multiobjetivo. La formulación de objetivo único minimiza el tiempo total de viaje de los usuarios sujeto a una restricción en el tamaño de flota, mientras que la formulación multiobjetivo extiende la de objetivo único removiendo la restricción. Se proponen tres algoritmos para la resolución aproximada del problema basados en la metaheurística Búsqueda Tabú. Para la formulación de objetivo único los dos primeros algoritmos implementados producen una única solución, mientras que para la multiobjetivo el algoritmo produce un conjunto de soluciones no dominadas que representan diferentes compromisos entre los intereses de los usuarios y operadores. La propuesta es probada utilizando cuatro instancias reales del problema de diferentes dimensiones que varían entre una decena y una centena de líneas de transporte. Se compara contra resultados exactos cuando están disponibles. Se hace un estudio computacional exhaustivo para determinar el comportamiento de los algoritmos propuestos. Los resultados obtenidos muestran que la metodología propuesta es capaz de mejorar las soluciones actuales en términos de tiempo de viaje y tamaño de flota. Además, para el caso de la variante multiobjetivo el método propuesto presenta diferentes soluciones alternativas con respecto al conflicto de intereses de los usuarios y operadores.

Palabras claves:

Optimización de Frecuencias en el Transporte Público, Optimización Multiobjetivo, Búsqueda Tabú.

ABSTRACT

In this thesis we study the transit frequency setting problem using a combinatorial optimization approach. Frequency setting takes place at the strategic and tactical planning stages of public transportation systems. The problem consists in determining the time interval between subsequent buses of each line, taking into account its route and trip demand. Frequencies impact over both users (in the waiting time), and operators (their cost is mainly determined by the size of the fleet required). In this work two formulations are considered for the problem: single-objective and multi-objective. The single-objective formulation minimizes the total travel time of users subject to a restriction on the fleet size, while the multi-objective formulation extends the single-objective formulation by removing the restriction. Three algorithms based on the Tabu Search metaheuristic are proposed to solve the problem approximately. For the single-objective formulation, the first two algorithms implemented produce a single solution, while for the multi-objective one the algorithm produces a set of non-dominated solutions that represent different compromises between the interests of users and operators. The proposal is tested using four real instances of the problem of different size, ranging from a dozen to one hundred transit lines. It is compared against exact results when they are available. A comprehensive computational study is done to determine the behavior of the proposed algorithms. The results obtained show that the proposed methodology is capable of improving current solutions in terms of travel time and fleet size. In addition, in the case of the multi-objective variant, the proposed method presents different alternative solutions with respect to the conflict of interests of users and operators.

Keywords:

Public Transit Frequency Optimization, Multi Objective Optimization, Tabu Search.

Tabla de contenidos

1	Introducción	1
1.1	Contexto	1
1.2	Planificación en el transporte público	2
1.3	Determinación de frecuencias en el transporte público	3
1.4	Motivación del trabajo	4
1.5	Estructura del Documento	5
2	Revisión bibliográfica	7
2.1	Artículos	8
2.2	Resumen	15
2.3	Conclusión	19
3	Definiciones y conceptos básicos	20
3.1	Definiciones para el modelo del problema	20
3.1.1	Red subyacente	21
3.1.2	Demanda	22
3.1.3	Red generalizada de transporte público	23
3.2	Búsqueda Tabú	27
3.2.1	Búsqueda local	29
3.2.2	Lista, período y clasificación tabú	29
3.2.3	Criterio de aspiración	30
3.2.4	Memoria de corto plazo (componiendo los conceptos)	31
4	Modelo del problema	34
4.1	Modelo de asignación de pasajeros	34
4.2	Modelo de optimización de frecuencias	37
4.2.1	Objetivo único	37
4.2.2	Multiobjetivo	39

5	Búsqueda tabú para la optimización de frecuencias	40
5.1	Definiciones para la búsqueda tabú propuesta	41
5.1.1	Representación de una solución	41
5.1.2	Movida	42
5.1.3	Periodo Tabú	42
5.1.4	Criterio de aspiración	43
5.1.5	Evaluación de soluciones	43
5.1.6	Casos de prueba	44
5.2	Memoria de corto Plazo	44
5.2.1	Primer acercamiento, estrategia exhaustiva	44
5.2.2	Segundo acercamiento, estrategia aspiración plus	49
5.3	Memoria de largo plazo	57
5.3.1	Estrategia oscilatoria	58
5.3.2	Memoria de evento crítico	59
5.3.3	Tercer acercamiento	60
5.4	Extensión multiobjetivo	62
6	Casos de estudio	69
6.1	Mandl	70
6.2	Rivera	71
6.3	Puerto Montt	73
6.4	Montevideo	75
7	Conclusiones	80
7.1	Trabajos a futuro	82
	Referencias bibliográficas	83
	Apéndices	87
	Apéndice 1 Algoritmo de asignación	88

Capítulo 1

Introducción

1.1. Contexto

Esta tesis de maestría presenta un estudio sobre la determinación de frecuencias en el transporte público. Fue llevada adelante dentro del grupo de investigación de transporte público del Departamento de Investigación Operativa del Instituto de Computación.

El trabajo consistió en estudiar los distintos acercamientos al problema e implementar una alternativa utilizando la metaheurística Búsqueda Tabú. La tesis parte de los antecedentes del grupo de investigación, principalmente en lo referente a la formulación y resolución exacta del problema y la construcción de diferentes instancias del mismo basadas en datos reales.

Parte de la tesis se desarrolló en el marco del proyecto de Investigación y Desarrollo financiado por la Comisión Sectorial de Investigación Científica “Algoritmos para la Optimización de Frecuencias en Sistemas de Transporte Público”. A su vez, diferentes partes de esta tesis contribuyeron a las siguientes publicaciones en actas de conferencias y revistas arbitradas:

- H. Martínez and A. Mauttone and M. Urquhart, “Formulación y metaheurística para el problema de la determinación de frecuencias en el transporte colectivo público”, XVI Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa, 2012, Río de Janeiro, Brasil ([Martínez et al., 2012a](#)),
- M. Martínez and A. Mauttone and M. Urquhart, “Formulation and metaheuristic approach to frequency optimization in public transportation systems”, Conference on Advanced Systems for Public Transportation,

2012, Santiago, Chile ([Martínez et al., 2012b](#)),

- H. Martínez and A. Mauttone and M. Urquhart, “Frequency Optimization in Public Transportation Systems: Formulation and Metaheuristic Approach”, *European Journal of Operational Research*, 2014 ([Martínez et al., 2014](#)),
- R. Giesen and H. Martínez and A. Mauttone and M. Urquhart, “A method for solving the multi-objective transit frequency optimization problem”, *Journal of Advanced Transportation*, 2016 ([Giesen et al., 2016](#)).

1.2. Planificación en el transporte público

En este trabajo se utiliza el término transporte público para referir al transporte colectivo de personas. En general, es un servicio donde los usuarios comparten el medio de transporte al que acceden mediante el pago de una tarifa establecida, y tanto rutas como horarios están determinados. En los sistemas de transporte público generalmente intervienen dos actores:

- Usuarios - Son aquellas personas que tienen necesidades de transporte, en este trabajo también denominados pasajeros.
- Operadores - Son los proveedores del servicio de transporte, en este trabajo también denominados empresas de transporte.

La planificación de sistemas de transporte público presenta diversos problemas relevantes desde el punto de vista de la Investigación Operativa, existiendo la oportunidad de aplicar metodologías que pueden lograr mejoras en términos de calidad y costo de servicio. El costo de un sistema de transporte público puede determinarse a partir del costo de operación, las tarifas y el tiempo de los usuarios. Las decisiones que los planificadores toman al diseñar el sistema, impactan directamente en su costo.

Este trabajo se centra en sistemas de transporte basados en buses, para estos [Ceder and Wilson \(1986\)](#) identifican cinco etapas de diseño:

- diseño de la red de rutas,
- determinación de frecuencias,
- diseño de las tablas de horarios,
- asignación de flota,
- y asignación de personal.

Generalmente, estas etapas se ejecutan en forma secuencial y esto determina que las decisiones tomadas en una etapa condicionen las siguientes. Por otro lado, las decisiones son tomadas según diferentes horizontes de planificación:

- estratégico (largo plazo),
- táctico (mediano plazo),
- operacional (corto plazo).

El diseño de la red de rutas pertenece a la etapa de planificación estratégica, la determinación de frecuencias y el diseño de las tablas de horarios pertenecen a la etapa de planificación táctica. Por último, la asignación de flota y personal forman parte de la planificación operacional.

1.3. Determinación de frecuencias en el transporte público

Determinar frecuencias en el transporte público implica definir el intervalo de tiempo entre pasadas de buses subsecuentes de cada línea, considerando su ruta y la demanda de viajes. Durante la planificación estratégica de un sistema de transporte público (en particular, cuando se diseñan las rutas), es necesaria una determinación preliminar de las frecuencias. Pero durante la planificación táctica, es necesario ajustar las frecuencias a variaciones de demanda entre diferentes estaciones del año y hora del día, o como respuesta a cambios en el diseño de las rutas ([Desaulniers and Hickman, 2007](#)).

Las frecuencias impactan tanto a los usuarios como operadores. A los usuarios en el tiempo de espera. A los operadores en el costo de operación, dado que principalmente está determinado por el tamaño de la flota requerida.

Aumentar la frecuencia de una línea resulta en una disminución del tiempo de espera por parte de los usuarios, y en el aumento de la cantidad de buses que sirven la línea por parte de los operadores. Por su parte, disminuir la frecuencia de una línea genera el resultado inverso al anterior, aumento del tiempo de espera y disminución de la cantidad de buses que sirven la línea. El interés de los usuarios es realizar el viaje en el menor tiempo posible, mientras que el interés de los operadores es realizar el servicio con el menor costo de operación. Si se asume que la demanda no varía (hipótesis del problema modelado en este trabajo), un aumento en las frecuencias de las líneas favorece el interés de los

usuarios, mientras que disminuir las frecuencias de las líneas favorece el interés de los operadores. Debido a la contraposición en los intereses de los usuarios y los operadores, es necesario optimizar teniendo en cuenta ambos intereses.

Cuan atractiva es una línea para los usuarios también se ve afectado por cambios en la frecuencia. Un aumento de la frecuencia resulta en una línea más atractiva ya que disminuye los tiempos de espera. Lo inverso sucede ante una disminución en la frecuencia, es decir, la línea resulta menos atractiva para los usuarios. Además, los cambios en las frecuencias afectan a usuarios que se mueven en diferentes lugares de la región de estudio. De esta forma no es posible optimizar la frecuencia de las líneas de forma aislada, ya que los cambios afectan todo el sistema.

Estos dos aspectos descritos, la contraposición en los intereses de usuarios y operadores, y la necesidad de optimizar el sistema en conjunto, agregan dificultad al problema.

La determinación de frecuencias ha sido abordada en la literatura como un problema de optimización, donde generalmente la función objetivo establece la minimización del tiempo total de viaje sujeto a una restricción de tamaño de flota, así como restricciones de infraestructura. El tiempo total de los usuarios consiste en acceso o caminata, espera, y viaje en bus, pudiendo existir otras variables como el tiempo de transbordo y egreso.

Los modelos de optimización de frecuencias incluyen un submodelo de comportamiento de los usuarios con respecto a un conjunto de líneas, en general conocido como submodelo de asignación ([Desaulniers and Hickman, 2007](#)). Este submodelo es necesario para incluir medidas relativas al rendimiento del sistema desde el punto de vista de los usuarios (típicamente, el tiempo de espera). Generalmente tiene una formulación y un método de solución que determina en mayor medida la complejidad del modelo de optimización de frecuencias en el que está embebido. Adicionalmente, el modelado conjunto de tanto las decisiones del planificador (frecuencias) como la de los usuarios (líneas que utilizan) usualmente impone una estructura de varios niveles ([Bard, 1998](#)) que hace al problema de optimización de frecuencias aún más complejo.

1.4. Motivación del trabajo

La motivación para realizar este trabajo surge del interés personal en abordar la complejidad del problema de determinación de frecuencias en el trans-

porte público y la intención de aportar a los resultados del grupo de investigación.

La dimensión de las instancias reales del problema es muy variada, desde sistemas con una decena de líneas en pequeñas ciudades a cientos de líneas en las metrópolis. Tanto la dimensión como su variedad agrega de por sí una gran complejidad a la planificación de un sistema de transporte público. Esto sin sumar el impacto que el transporte público tiene sobre la movilidad y el medio ambiente, dos aspectos fundamentales en la calidad de vida de los ciudadanos.

Búsqueda Tabú (Glover, 1989) es una reconocida metaheurística (i.e. marco de referencia algorítmico de alto nivel) (Blum and Roli, 2003), que ha obtenido soluciones de buena calidad en una gran variedad de problemas clásicos de optimización. La utilización de metaheurísticas para determinar frecuencias en el transporte público ha sido muy poco explorada en la literatura especializada, y hasta el comienzo de este estudio no registramos la utilización de Búsqueda Tabú. La mayoría de los acercamientos al problema utilizan métodos de optimización iterativos basados en el gradiente. El aporte de esta tesis está vinculado justamente a este punto, el tratamiento del problema utilizando la metaheurística Búsqueda Tabú.

1.5. Estructura del Documento

A continuación, en el capítulo 2 se presenta una revisión bibliográfica referente al problema de estudio. Los artículos seleccionados se introducen de forma cronológica y al final del capítulo se presenta una tabla a modo de resumen con los principales conceptos en juego de cada uno.

En el capítulo 3 se describen los conceptos básicos. Primero el marco conceptual para el modelo del problema y luego para la solución heurística implementada.

El capítulo 4 presenta la formulación matemática de los modelos utilizados en este trabajo. Se comienza describiendo el submodelo de asignación, luego se presenta el modelo para objetivo único y a continuación la variante multi-objetivo.

La solución propuesta utilizando la metaheurística Búsqueda Tabú se presenta en el capítulo 5. El mismo comienza con un concepto clave, la memoria de corto plazo y luego se van incorporando los mecanismos desarrollados para la memoria de largo plazo. Los conceptos utilizados en la extensión para el

problema multiobjetivo se presentan al final del capítulo.

Una vez presentados los algoritmos implementados, en el capítulo 6 se muestran los resultados para distintas instancias de problema. Estas modelan ciudades pequeñas con una decena de líneas, medianas y grandes con hasta cien líneas.

En el capítulo 7 se presentan las conclusiones y los trabajos a futuro.

Capítulo 2

Revisión bibliográfica

La literatura existente acerca de la optimización de frecuencias usualmente propone modelos definidos sobre una estructura subyacente de red que surge de:

- la representación de las rutas seguidas por los buses de las líneas,
- las trayectorias de los usuarios hacia y desde el sistema de transporte público,
- las paradas de buses,
- los puntos que generan y/o atraen demanda de viajes.

Otro aspecto relevante de los modelos refiere a la naturaleza no lineal de los mismos. Esto debido a que el tiempo de espera es inversamente proporcional a las frecuencias de las líneas. Adicionalmente a lo anterior, el modelo del comportamiento de los usuarios con varias líneas en una parada resulta en expresiones no lineales que involucran varias variables.

Los métodos de resolución existentes al momento de realización de este trabajo, son todos de naturaleza aproximada, en su mayoría consistentes en heurísticas guiadas por la formulación matemática y algunos pocos casos metaheurísticas. Los casos de prueba utilizados incluyen instancias ficticias y reales. Los casos reales publicados en la literatura consisten en sistemas que tienen hasta 100 líneas de transporte público. A continuación se presentan los artículos revisados considerados relevantes para el problema en orden cronológico.

2.1. Artículos

[Lampkin and Saalmans \(1967\)](#) trabajan sobre una serie de problemas del transporte público que incluye la construcción de rutas, optimización de frecuencias, tablas de horario, asignación de flota y personal. El objetivo global de este trabajo es maximizar el nivel de servicio del transporte público, el cual consiste en el tiempo de viaje más espera de los pasajeros, sujeto a un cierto nivel esperado de ganancia. Se asume que los pasajeros escogen el primer bus que los lleve a destino de entre las líneas que lo llevan en el menor tiempo siempre y cuando convenga ir en bus y no caminando, es decir el tiempo de espera al primer bus más el viaje es menor que el tiempo de caminata. El objetivo del problema de optimización de frecuencias es minimizar el tiempo total de los pasajeros (espera más viaje), sujeto a la cantidad de buses. Utilizan un conjunto discreto de valores de frecuencia, factores simples de una hora. Para resolver el problema, los autores utilizan una heurística que consiste en realizar perturbaciones a una solución (conjunto de frecuencias) en pos de mejorarla. La restricción de cantidad de buses varía entre F y $F - 1$, donde F es la cantidad máxima de buses dada. En la heurística, el tamaño de las perturbaciones disminuye con el correr de las iteraciones y la búsqueda es inducida por las soluciones encontradas (incrementar las rutas que mejoran al aumentar su frecuencia, disminuir aquellas que empeoran). El caso de estudio que se presenta corresponde a una ciudad del norte de Inglaterra, con aproximadamente 100.000 habitantes.

En ([Silman et al., 1974](#)) el foco es la construcción de rutas, y la optimización de frecuencias. Se asume que los pasajeros escogen el primer bus que los lleve a destino de entre las tres líneas con el menor tiempo (espera más viaje), siempre y cuando el tiempo no supere en un 50 % el tiempo del recorrido más rápido. En el problema de optimización de frecuencias el objetivo es minimizar el tiempo de los pasajeros más una penalización por transbordo y disconformidad de los mismos, sujeto a la cantidad máxima de buses. La disconformidad de los pasajeros está medida en función de la cantidad que viajan parados en los buses. El problema se resuelve mediante el método de proyección del gradiente. El tiempo total en la función objetivo es diferenciable si no hay transbordo y parcialmente diferenciable si lo hay, la penalización por disconformidad es parcialmente diferenciable. Se experimenta con un caso referente a la ciudad de Haifa, Israel, que comprende 42 zonas y 20 líneas.

Byrne (1975) construye un modelo teórico, donde el servicio de transporte público se brinda para un área de radio R y longitud de arco ϕ definida en coordenadas polares. Se asume que los pasajeros desean viajar desde un punto (r, θ) al centro del área $r = 0$. Las líneas son radiales y viajan a la misma velocidad. Se trabaja la construcción de rutas y optimización de los intervalos entre arribos (el inverso a la frecuencia). El objetivo es encontrar las posiciones de las líneas, los θ y sus respectivos intervalos entre arribos, y de esta forma minimizar el costo de los usuarios (tiempo de caminata o acceso más espera y viaje), y el de operación (cantidad de buses y tiempo). La función objetivo se define como el costo de los usuarios, dado por el tiempo total, más el costo de operación, dado por la cantidad de buses. El problema se resuelve derivando la función objetivo para cada variable (posición y tiempos entre arribos de las líneas). Como resultado, se obtiene que la posición óptima de una línea se da cuando los momentos de las proyecciones de la densidad de población sobre la línea a ambos lados de esta son iguales. Los intervalos entre arribos óptimos suceden cuando el costo de los usuarios es igual al costo de operación.

En el caso de (Byrne, 1976), el servicio de transporte se brinda para un área rectangular de largo L y ancho D , con un patrón de calles tipo grilla. Se superpone sobre el área un sistema de coordenadas de manera que las líneas corran paralelas al eje y . Se asume que los pasajeros desean viajar desde un punto (x, y) del área hasta $y = 0$. El acceso a las líneas es perpendicular a las mismas. Cada línea i viaja a una velocidad V_i conocida. Al igual que en (Byrne, 1975), se estudia la construcción de rutas y optimización de intervalos entre arribos. En este caso el objetivo también es encontrar las posiciones de las líneas (x) y sus intervalos entre arribos de manera de minimizar el costo de los usuarios (tiempo acceso, espera, y viaje), y de operación (cantidad de buses y costo por unidad de tiempo). La función objetivo se define similar al caso radial. El problema se resuelve derivando la función objetivo para cada variable (posición y tiempo entre arribos de las rutas). La posición óptima de una línea se da cuando el costo de acceso entre ambos lados de la línea es igual al cambio en el costo de operación cuando, debido al cambio de posición, cambia la longitud de la línea. Por su parte, el intervalo entre arribos óptimo ocurre cuando la diferencia entre el costo de los usuarios y el costo de operación es igual al cambio en el costo de operación cuando, debido al cambio del intervalo de arribo, cambia la longitud de la línea.

En (Dubois et al., 1979) se estudian tres problemas del transporte público,

la selección de infraestructura para la red de transporte público (calles por donde pueden transitar o no los buses), construcción de rutas, y optimización de frecuencias. El objetivo global de este estudio es maximizar el nivel de servicio (tiempo de los pasajeros), sujeto a un costo fijo expresado en términos del costo de inversión en infraestructura, largo de las rutas y cantidad de buses. Se asume que los pasajeros se comportan similar que en ([Lampkin and Saalmans, 1967](#)), escogen el primer bus que los lleve a destino de entre las líneas que lo llevan en menor tiempo (empatan en tiempo mínimo). En el problema de optimización de frecuencias, el objetivo corresponde a minimizar el tiempo total de los pasajeros (espera y viaje), sujeto a una cantidad de buses dada. Para resolverlo se utiliza una heurística guiada por gradiente. Finalmente, se describe un modelo de evaluación que dada la utilización de los vehículos personales (autos) muestra el nivel de uso del sistema de transporte público. Realizan experimentos para dos casos, las ciudades Niza y Toulouse de Francia, ambas con alrededor de 500.000 habitantes.

[Mandl \(1980\)](#) trabaja con dos problemas del transporte público, la construcción de rutas y la optimización de frecuencias, este último expresado mediante la determinación de cantidad de buses para cada línea. El comportamiento de los pasajeros es modelado de forma similar a ([Chriqui and Robillard, 1975](#)). En este caso el problema de optimización de frecuencias consiste en minimizar el costo de los usuarios dado por la cantidad de transbordos y el tiempo de espera, sujeto a una cantidad máxima de buses que representa la restricción de presupuesto. El problema es resuelto utilizando un algoritmo iterativo donde en cada paso se asignan los pasajeros a las líneas, se evalúa la solución, y luego se reasignan los pasajeros nuevamente. El algoritmo utiliza como solución inicial valores aleatorios de cantidad de buses para cada línea, y culmina cuando no encuentra mejoras. Se presentan dos casos: una ciudad de Bélgica (150.000 habitantes) representada por una red con 130 nodos, 350 arcos y 12 líneas, y otro caso representado por una red con 38 nodos, 106 arcos, y 8 líneas.

En ([Schéele, 1981](#)) se estudia el problema de optimización de frecuencias en el transporte público, formulado como uno de programación no lineal. El comportamiento de los usuarios está embebido en el modelo, el cual tiene como objetivo minimizar el tiempo total de los pasajeros sujeto a una serie de restricciones. El tiempo total de los pasajeros incluye espera, viaje en bus y caminata. Las restricciones incluyen un costo fijo (dado por la cantidad

de buses), capacidad de los buses, satisfacción de toda la demanda, y por último el nivel de accesibilidad formulado como una restricción de entropía. La función objetivo de la formulación es no convexa y las restricciones son lineales o convexas. Se propone un algoritmo iterativo guiado por una dirección de descenso, el cual se detiene cuando la distancia calculada junto con la dirección no permite generar una nueva solución, es decir cuando alcanza un mínimo local. Se experimenta con un caso de estudio correspondiente a la ciudad de Linköping, Suecia, de 80.000 habitantes, representado por una red con 38 nodos y 8 líneas.

[Han and Wilson \(1982\)](#) trabajan sobre el problema de optimización de frecuencias expresado mediante la determinación de cantidad de buses para cada línea al igual que en [\(Mandl, 1980\)](#). El objetivo de este trabajo es mejorar los tiempos de espera y la congestión en sistemas de transporte público. En este contexto, el término congestión refiere al incremento en el tiempo de viaje de los usuarios debido a capacidad insuficiente de las líneas. La capacidad está determinada por la capacidad de los buses y la frecuencia, que cuando son insuficientes causan que los usuarios no puedan abordar el bus por el cual esperan. La formulación utilizada minimiza el nivel de ocupación de los buses sujeto a la capacidad y a la cantidad de los mismos. Resuelve el problema en dos pasos, asignación base y del excedente. El propósito de la asignación base es convertir la restricción de capacidad en una restricción lineal. En el primer paso intentan asignar los buses de manera de cumplir con todas las restricciones utilizando la menor cantidad de buses posible. De forma iterativa actualizan las frecuencias de manera de cumplir con la capacidad máxima del arco más transitado de cada línea. Las frecuencias iniciales se calculan utilizando los flujos que tienen solo una línea. El método en general converge en pocos pasos y en ocasiones puede tener problemas cuando se forman ciclos en el pasaje de flujo de una línea a otra. Los autores muestran que para un sistema con mucha superposición de líneas, en general a la solución base se le puede agregar el excedente de buses sin violar las restricciones de capacidad. El segundo paso consiste en agregar el excedente a la solución base de manera de minimizar el problema que luego del paso uno solo posee restricciones lineales. Utilizan un caso sobre la ciudad de El Cairo, Egipto, representada por una red con 25 nodos y 34 líneas, donde 16 líneas se superponen en uno de los arcos. En este caso para la asignación del excedente aumentaron la solución base de forma proporcional a todo el excedente con el objetivo de minimizar la congestión en

cada ruta.

[Ceder \(1984\)](#) estudia los problemas de recolección de datos de carga de líneas, determinación de frecuencias y construcción de tablas de horarios. Comienza analizando dos métodos para la obtención de información de carga de buses: el relevamiento en un punto también llamado de carga máxima, y en viaje o relevamiento de perfil de carga. El primer método, releva la información de carga de una línea en un punto dentro del sector de mayor carga de la misma, por ejemplo, una parada. El segundo método releva la información en varios intervalos de la línea, por ejemplo, en cada parada o cada cierta distancia. Posteriormente el autor describe una serie de alternativas para determinar las frecuencias de las líneas dependiendo del método con que se obtuvo la información de carga. Además, realiza una comparación entre las distintas alternativas considerando el esfuerzo requerido para la obtención de datos en cada método. Finalmente describe dos métodos para construir las tablas de horarios, el primero redondea la frecuencia hacia arriba (obtenida de las alternativas antes descritas), y el segundo acerca la frecuencia al siguiente mayor valor de un conjunto dado, en general valores de frecuencias fáciles de recordar para los usuarios. Utiliza un caso sobre la ciudad de Jerusalén, Israel, para mostrar y comparar los distintos métodos y alternativas.

En las horas de mayor demanda, las líneas de buses experimentan un desbalance en la cantidad de pasajeros según la dirección. El objetivo de ([Furth, 1985](#)) es explotar este aspecto intercalando viajes expresos (sin pasajeros) en el sentido de menor carga. De esta manera se disminuye la cantidad de buses necesarios para cubrir la línea. Estudia una serie de problemas que se dan al construir los planes de intercalación de viajes expresos para distintos escenarios. Todas las partidas de los buses deben estar igualmente espaciadas para todos los planes que se construyan. Utiliza una red de transporte para modelar los planes de forma que cada nodo representa un punto en el tiempo y espacio (terminal origen o destino, donde origen representa al garaje), y los arcos representan las posibles trayectorias de un bus. Primero se calcula la cantidad de buses necesarios para un plan dado. Esto se resuelve encontrando el flujo mínimo en la red (modelo del plan), de forma que cumpla con las restricciones de flujo en cada arco. Luego, se construye un plan que minimice la cantidad de buses para un cierto nivel de servicio, establecido por los tiempos máximos entre arribos de ida y vuelta. Lo anterior se resuelve para dos casos, cuando la relación de los tiempos entre arribos es restringida a un entero y cuando

no. Para el primer caso existen un par de posibles soluciones óptimas, y por lo tanto el problema se resuelve evaluando estas posibilidades. Para el segundo caso se presenta un algoritmo iterativo que encuentra los tiempos entre arribos óptimos. De forma similar se resuelve el problema de construir un plan que minimice el tiempo de espera dada una cantidad de buses. Por último, realiza un análisis donde dado un plan se intenta minimizar el costo total (horas de buses en servicio más tiempo de espera) sujeto a la capacidad de los buses. Utiliza un caso de la ciudad de San Francisco, Estados Unidos.

El modelo propuesto en (LeBlanc, 1988) considera, además de los usuarios del sistema, a los de vehículos personales y cómo son afectados por las soluciones del problema de optimización de frecuencias. El objetivo es minimizar la utilización del transporte de vehículos personales, maximizando así la del transporte público. En la asignación modal (i. e. determinación de flujos en cada modo, a partir de una demanda general), se calculan los flujos óptimos de viajes en vehículos personales y buses. Para estos últimos se consideran los tiempos de acceso y transbordo. El problema es atacado de forma iterativa resolviendo en cada iteración los flujos para los diferentes modos de transporte. Utiliza caminos de menor costo en la asignación de pasajeros para el cálculo de los tiempos del transporte urbano. La función objetivo de la formulación minimiza el flujo de viajes en vehículos personales y el costo de operación del transporte público. El costo de operación está expresado utilizando penalizaciones para cada línea. El autor utiliza un caso sobre la ciudad de Sioux Falls, Estados Unidos, que cuenta con 5 líneas.

Constantin and Florian (1995) plantean al problema de optimización de frecuencias en el transporte público como un problema de programación bini-vel. El modelo del nivel superior corresponde a las decisiones del oferente del servicio de transporte, y consiste en determinar las frecuencias de cada línea para minimizar el tiempo de viaje de los pasajeros sujeto a un presupuesto fijo dado por la cantidad máxima de buses. El modelo del nivel inferior corresponde a quienes demandan el servicio, y determina la cantidad de pasajeros que viaja en cada línea dado un conjunto de frecuencias para estas. El modelo inferior está basado en el concepto de estrategia óptima del modelo de asignación de (Spiess and Florian, 1989). Resuelven el problema utilizando un método de proyección de gradiente, donde partiendo de un conjunto inicial de frecuencias la búsqueda de las nuevas soluciones son guiadas por el gradiente. Es un método iterativo donde en cada iteración, dado el conjunto fijo de frecuencias,

resuelve el modelo de asignación y calcula el salto a tomar en la dirección del gradiente, luego se actualiza el conjunto de frecuencias. Dado que la función objetivo no es diferenciable en todo el espacio, no siempre es posible calcular el gradiente, en estos casos se calcula un subgradiente. Experimentan con tres casos: Estocolmo, Suecia, 38 líneas; Winnipeg, Canadá, 67 líneas; y Portland, Estados Unidos, 115 líneas.

[Gao et al. \(2004\)](#) también utiliza la técnica de programación binivel para modelar el problema de optimización de frecuencias. El modelo del nivel superior resuelve el problema de optimización de frecuencias minimizando el costo total de los pasajeros (tiempo de espera y viaje) y el costo de operación. El modelo del nivel inferior resuelve el problema de asignación de pasajeros a las líneas; el mismo está basado en el modelo de asignación de pasajeros con congestión de ([de Cea and Fernández, 1993](#)) el cual modela la situación donde el tiempo de espera aumenta debido a capacidad insuficiente en los buses. El algoritmo que se propone parte de un conjunto inicial de frecuencias, y de forma iterativa mejora la solución utilizando análisis de sensibilidad. En cada paso de la iteración, dado un conjunto fijo de frecuencias, resuelve el modelo inferior utilizando diagonalización. Utiliza un pequeño caso de laboratorio con 4 nodos y 4 líneas.

De forma similar a ([Constantin and Florian, 1995](#)) y posteriormente ([Gao et al., 2004](#)), [Yu et al. \(2010\)](#) formula el problema como uno de programación binivel. El modelo superior determina las frecuencias de cada ruta para minimizar el tiempo total de los pasajeros (espera y viaje) sujeto a una restricción de presupuesto (cantidad máxima de buses). Adopta el modelo de asignación de ([Spiess and Florian, 1989](#)) para asignar los pasajeros a las líneas. Utilizan algoritmos genéticos para resolver el problema. Las soluciones (cromosomas), están representadas por un arreglo de enteros donde el índice representa la línea y el valor la frecuencia de la misma. Generan la población inicial de cromosomas utilizando métodos probabilísticos. Aplican ruleta y elitismo para la selección de cromosomas. Las operaciones de cruzamiento y mutación seleccionan de forma aleatoria los genes para actuar y luego redistribuyen el posible excedente de buses sobre los que poseen mayor residuo. Presentan dos casos, uno pequeño de laboratorio con 6 nodos y 4 líneas, y un caso real sobre la ciudad China de Dalian, 2.000.000 de habitantes, representada por una red con 2.300 nodos y 89 líneas.

2.2. Resumen

La tabla 2.1 resume las principales características de los enfoques descritos en la sección anterior siguiendo el mismo orden cronológico. Se presenta el año y autor de los artículos, las diferentes variables que manejan (además de la frecuencia), y las principales características del modelo. También se indica si la demanda es fija o puede variar, es decir si los usuarios deciden realizar el viaje utilizando el sistema de transporte público u otro medio teniendo en cuenta algún criterio como tarifa, confort, accesibilidad, etc. Por último, se indica la dimensión de los casos que presenta el artículo.

Tabla 2.1: Resumen de artículos revisados.

Año	Autor	Otras variables	Modelo	Demanda	Método	Casos
1967	Lampkin y Saalmans	rutas, tablas de horario, asignación de flota	min tiempo de viaje, s.a. tamaño de flota y capacidad	fija	heurístico, variante de un procedimiento de búsqueda aleatorio	ciudad del norte de Inglaterra, 100.000 habitantes
1974	Silman et al	rutas	min tiempo de viaje + disconformidad s.a. tamaño de flota	fija	heurístico, método de proyección del gra-diente	Haifa, Israel, 20 líneas
1975	Byrne	rutas	min tiempo de viaje, s.a. tamaño de flota	fija	analítico, se utilizan técnicas de cálculo	teórico, modelo radial (líneas radiales, accesos circunferenciales)
1976	Byrne	rutas	min tiempo de viaje, s.a. tamaño de flota	fija	analítico, se utilizan técnicas de cálculo	teórico, modelo rectangular (líneas paralelas al eje y, accesos a x)
1979	Dubois et al	infraestructura, rutas	min tiempo de viaje, s.a. tamaño de flota	elección modal	heurístico, método de proyección del gra-diente	Niza y Toulouse, Francia, 500.000 habitantes
1980	Mandl	rutas	min tiempo de espera, s.a. tamaño de flota	fija	heurístico, método de proyección del gra-diente	ciudad de Bélgica, 18 líneas, 150.000 habitantes

1980	Schéele		min tiempo de viaje, s.a. tamaño de flota, capacidad y accesibilidad	fija	heurístico, método de proyección del gra-diente	Linköping, Suecia, 6 líneas, 80.000 habitantes
1982	Han y Wilson		min ocupación en punto de mayor carga (de cada línea), s.a. tamaño de flota y capacidad	fija	heurístico	El Cairo, Egipto, 34 líneas
1988	LeBlanc		min viajes en auto y ponderación de frecuencias, s.a. frecuencias mínimas	elección modal	heurístico, método de búsqueda de patrón (algoritmo Hooke-Jeeves)	Sioux Falls, Estados Unidos, 5 líneas
1995	Constantin y Florian		min tiempo de viaje, s.a. tamaño de flota	fija	heurístico, método de proyección del gra-diente	Estocolmo, Suecia, 36 líneas; Winnipeg, Canada, 67 líneas; Portland, Estados Unidos, 115 líneas
2004	Gao et al		min tiempo de viaje y tarifa por frecuencia	fija	heurístico, método análisis de sensibilidad	de laboratorio, 4 líneas

2010	Yu et al		min tiempo de viaje, s.a. tamaño de flota	fija	heurístico, taheurística ritmos genéticos	me- algo-	Dalian, China, 89 líneas, 2.000.000 habitantes
------	----------	--	--	------	---	--------------	--

2.3. Conclusión

En comparación a otros problemas de planificación de transporte público, por ejemplo la asignación de flota ([Freling et al., 2003](#)) y personal ([Bunte and Klierer, 2009](#)), el problema de determinación de frecuencias ha recibido poca atención. Además, en gran parte de los estudios se trata como un problema secundario ante la construcción de rutas o tablas de horario.

El estudio utilizando metaheurísticas es casi nulo, la comunidad científica ha optado en la mayoría de los casos por las búsquedas guiadas por gradiente o alguna de sus variaciones. Dentro de los pocos estudios que utilizan metaheurísticas ninguno lo hace con Búsqueda Tabú.

De esta forma, considerando el impacto de la asignación de frecuencias en la planificación estratégica y táctica del transporte público, la complejidad de los modelos, las dimensiones de los casos de estudio y el éxito de Búsqueda Tabú en una gran variedad de problemas ([Gendreau and Potvin, 2010](#)), parece importante contar con un estudio que muestre su aplicabilidad y resultado.

Por último, de todos los estudios que utilizan metaheurísticas, ninguno compara resultados de la heurística contra resultados exactos como forma de medir la calidad de la aproximación.

Capítulo 3

Definiciones y conceptos básicos

En este capítulo se definen los conceptos básicos a partir de los cuales se formula el modelo del problema (capítulo 4), y los algoritmos de resolución (capítulo 5).

3.1. Definiciones para el modelo del problema

En este trabajo, una línea de transporte público se compone de una o dos rutas y un valor de frecuencia. Una ruta especifica el camino por donde transitan los buses de la línea y las paradas donde los pasajeros abordan y descienden de los buses. Si la línea tiene dos rutas entonces una determina el camino de ida, la otra el de vuelta, y el comienzo de una es el final de la otra y viceversa. Si tiene una sola ruta, entonces estamos ante una línea circular, en este caso el comienzo también es el final.

El valor de frecuencia especifica la cantidad de pasadas de los buses de la línea por unidad de tiempo. El tiempo entre pasadas determina la cantidad de buses necesarios para cubrir el servicio de la línea, lo que influye directamente en la predilección de los pasajeros al momento de elegir qué líneas abordar. Esto hace que el valor de frecuencias impacte tanto en la decisión de los pasajeros como en la de los operadores.

Se asume que los pasajeros se comportan de manera de minimizar el tiempo total de viaje. Este se compone del tiempo de caminata, de espera en las paradas, y de viaje en bus.

El problema de optimización de frecuencias implica determinar un valor de frecuencia para cada línea minimizando el tiempo total de los pasajeros sujeto

a una cantidad máxima de buses disponibles.

3.1.1. Red subyacente

La red subyacente es la estructura base donde se define la movilidad de los pasajeros. Esta red se modela mediante un grafo no dirigido y ponderado $T = (N', A')$ donde N' es el conjunto de nodos y A' el de los arcos que unen los nodos de N' .

Cada arco $a = (i, j) \in A'$, tiene asociado un costo que representa el tiempo necesario para viajar desde el nodo i al nodo j y viceversa (por ser T no dirigido). Los nodos representan lugares y los arcos la forma de viajar entre estos lugares.

Utilizando la red subyacente, una ruta se expresa como una secuencia de nodos adyacentes de T . Las rutas determinan la movilidad de los pasajeros en los buses.

Diferentes niveles de agregación de los datos, y restricciones en el tamaño de los modelos, determinan las distintas formas de modelar la red T . El nivel de agregación de los datos determina qué elementos de la realidad modelan los nodos de N' y los arcos de A' , es decir determina el nivel de detalle del modelo.

Los nodos de N' pueden representar:

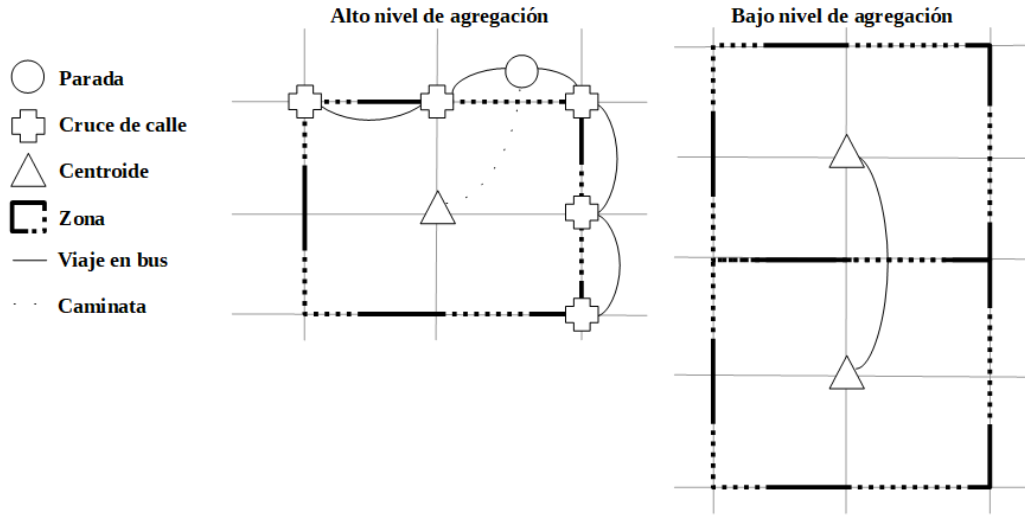
- lugares reales como cruces de calles o paradas de buses,
- o lugares ficticios como centroides de zonas geográficas.

Por su parte los arcos de A' , que determinan los viajes del sistema, toman su representación a partir de los nodos que unen, a modo de ejemplo:

- entre un cruce de calle y una parada de bus puede representar un viaje en bus,
- entre un centroide y una parada puede representar una caminata.

Un caso con bajo grado de agregación puede contener tres conjuntos disjuntos de nodos, orígenes/destinos de viajes, abordajes/descensos (paradas), y cruces de calles, o puede contener solo uno (origen/destino de viajes y a la vez abordaje/descenso de pasajeros) en un caso con alta agregación (figura 3.1). Si bien los modelos detallados se ajustan mejor a la realidad que los más agregados, también son más complejos, por esto es importante lograr un equilibrio en el modelado y contar con el detalle apropiado.

Figura 3.1: Ejemplo de modelos con alto y bajo nivel de agregación



3.1.2. Demanda

La demanda de viajes se representa mediante una matriz origen-destino (OD) $D = \{d_{od}\}$ con $o, d \in N''$ y $N'' \subset N'$. Cada entrada d_{od} indica la demanda de viajes de pasajeros desde el origen o hacia el destino d , expresada en viajes por unidad de tiempo, en un determinado período de estudio. El conjunto N'' es un subconjunto de N' conformado por los nodos que generan viajes.

Es común utilizar elementos ficticios como los centroides para representar los orígenes y destinos de los pasajeros (Ortúzar and Willumnsen, 2011). Para esto se divide el área de estudio en zonas y se concentra la demanda de viajes de la zona en el nodo determinado por su centroide.

El criterio para zonificar define el nivel de agregación de los datos, dado que es insumo para la recolección y procesamiento de los mismos. Existen diferentes criterios, algunos ejemplos son:

- límites administrativos como los barrios,
- áreas de influencia de lugares específicos como las paradas,
- determinado por parámetros como la distancia de acceso al sistema de transporte.

En este trabajo todos los viajes se realizan en bus, es decir los usuarios no optan por otro medio de transporte según la solución. La matriz D especifica el origen, destino y cantidad de viajes que se realizan en el período de estudio.

Estos datos son constantes para todas las soluciones posibles.

Como la información de D es para un determinado período de tiempo se pueden definir varias matrices, cada una para un período diferente. Es común encontrar al menos dos matrices, una para el período de horas de alta demanda (intervalo de tiempo cuando sucede la mayor cantidad de viajes) y otra para un período de demanda promedio o baja.

3.1.3. Red generalizada de transporte público

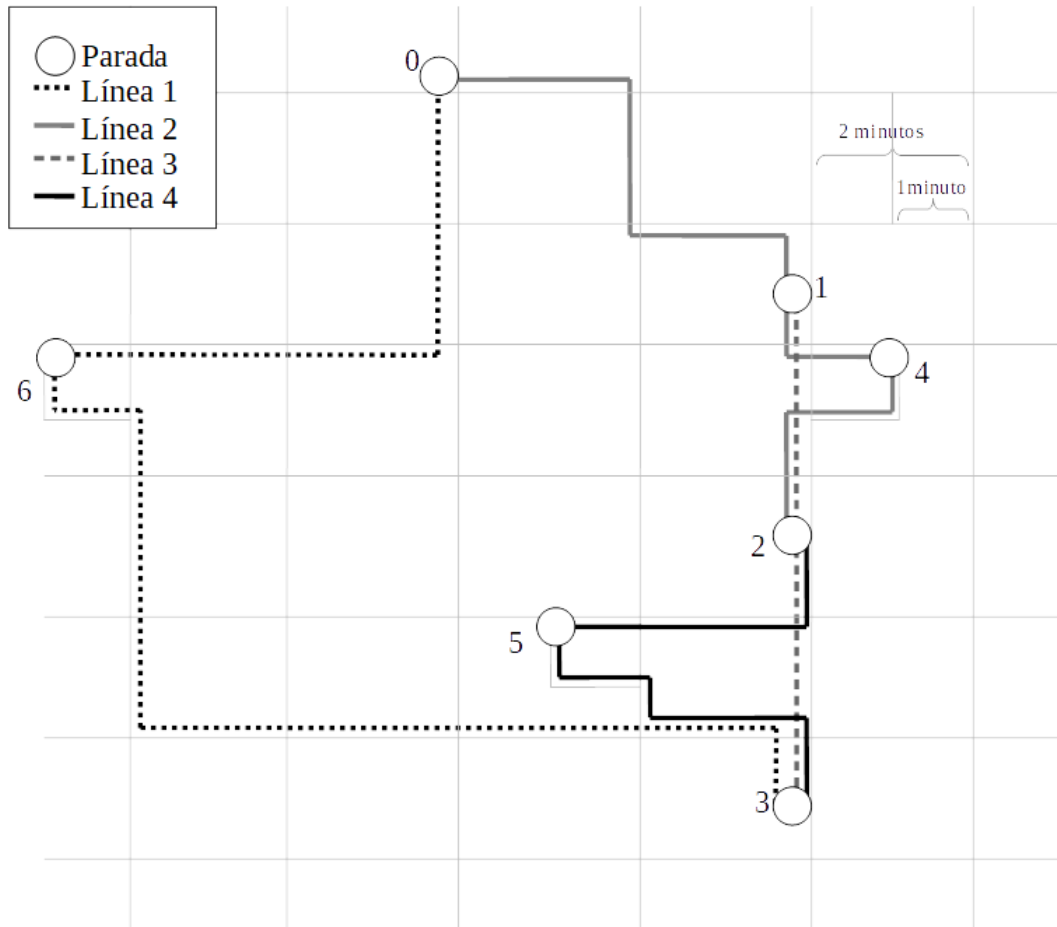
El viaje de un pasajero en el sistema de transporte consiste en una serie de fases: caminata desde el origen a una parada (acceso al sistema), espera de un bus, ascenso al bus, viaje en bus, descenso del bus y caminata desde la parada al destino (egreso del sistema). En general se utiliza el tiempo en bus o caminando para cuantificar estas etapas, excepto por las esperas donde se utiliza la distribución del tiempo de espera del primer bus de una línea dada.

En este trabajo se toma el modelo de (Spiess and Florian, 1989) donde la estructura del sistema se representa mediante un grafo dirigido $G = (N, A)$. El conjunto de arcos A describe las posibles formas de realizar los viajes, mientras que el conjunto N está formado por nodos orígenes, destinos e intermedios (los que definen segmentos de rutas de las líneas). Una ruta es una secuencia de arcos de A , y cada línea de transporte público se compone por una ruta de ida y otra de vuelta o una única ruta en el caso de líneas circulares.

Cada arco de A representa una fase del viaje, es decir un arco de viaje (caminando o a bordo de un bus) o un arco de abordaje/descenso de un bus. A cada arco $a \in A$ se le atribuye un tiempo de viaje (o costo de viaje) c_a y una frecuencia f_a . El tiempo (costo) de los arcos de viaje es el tiempo que insume realizar el viaje y su frecuencia es infinita dado que no hay espera. Los arcos de abordaje tienen tiempo cero y frecuencia de la línea que aborda. Por último, los arcos de descenso tienen tiempo cero y frecuencia infinita.

El método para construir el grafo G depende del nivel de agregación de los datos de cada caso. El algoritmo 3.1 construye el grafo G . El mismo primero recorre cada nodo parada y por cada línea que pasa por el nodo, agrega y conecta nodos auxiliares. Luego recorre los nodos orígenes y destinos para conectarlos a la estructura anterior (esto si ya no estaban). Se asume en la operación que el grafo $T = (N', A')$ representa la red subyacente del caso, que L es el conjunto de líneas, y que las rutas de las líneas se representan mediante

Figura 3.2: Realidad del caso 0



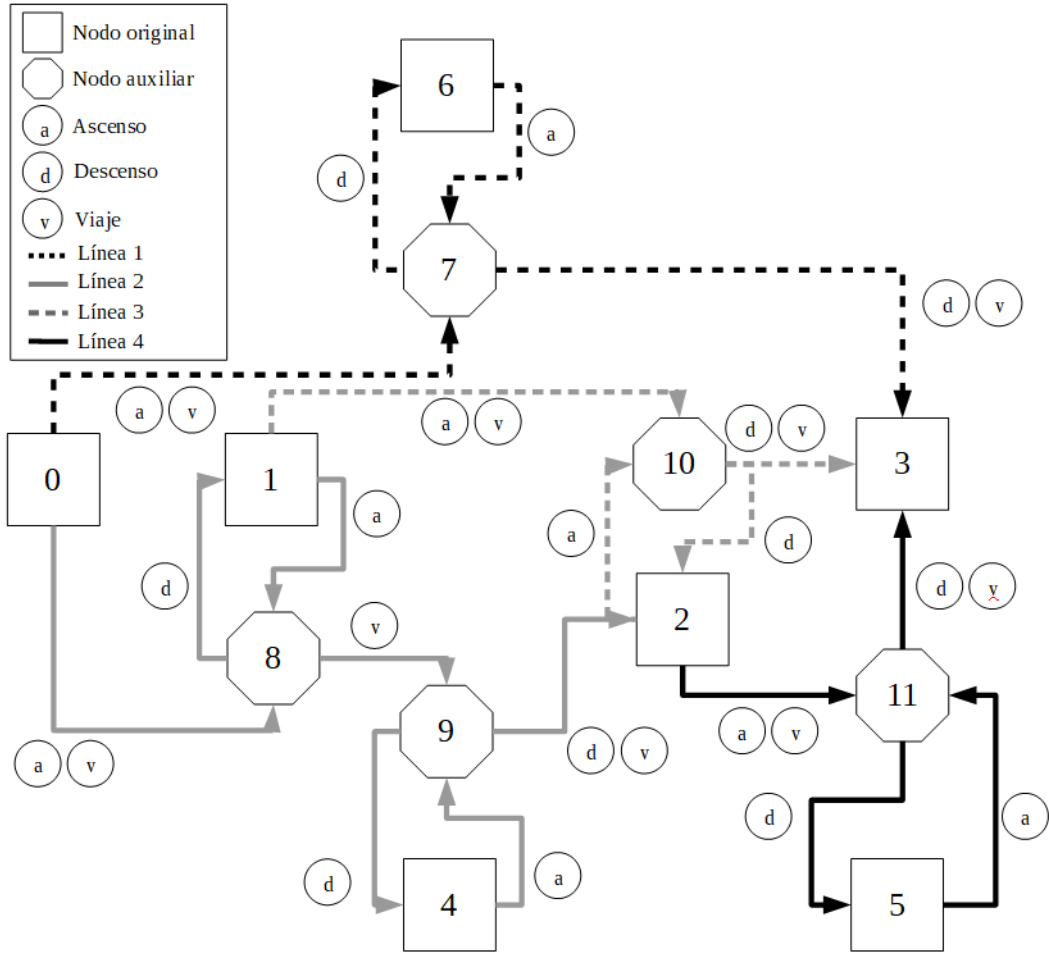
una secuencia de nodos de N' . La función $nuevoNodo()$ crea y retorna un nodo, mientras que $nuevoArco(i, j, c_a, f_a)$ crea y retorna un arco con origen i , destino j , tiempo c_a y frecuencia f_a .

La figura 3.2 muestra un ejemplo relativo al caso 0, un caso de laboratorio compuesto por siete paradas y cuatro líneas de transporte. Este caso es una variante del ejemplo presentado en (Spiess and Florian, 1989) al cual se le agregaron tres nodos para cumplir con las condiciones de la red subyacente pero sin alterar el resultado del modelo de asignación. Para mantener simple el caso consideramos que las líneas solo tienen rutas de ida, que la parada 0 es el origen de los viajes y la 3 el destino. La línea 1 comienza su ruta en la parada 0, pasa por la 6 y culmina en la 3, demora 25 minutos en recorrer la ruta y el tiempo entre arribos de los buses es 6 minutos. La línea 2 comienza en la parada 0, pasa por la 1, la 4 y finaliza en 2, realiza la ruta en 13 minutos y el tiempo entre arribos de los buses es 6 minutos. La línea 3 comienza en la

Algorithm 3.1 Algoritmo para construir la red generalizada de transporte

```
1: procedure  $(T(N', A'), L)$ 
2:    $O = [], N = [], A = []$ 
3:   Abordajes, descensos y viajes
4:   for  $n = 0, n < |N'|, n ++$  do
5:     if  $n$  es parada then
6:        $O \leftarrow O + n$ 
7:     end if
8:   end for
9:   for  $l = 0, l < |L|, l ++$  do
10:     $R = rutasLinea(L[l]), f = frecuenciaLinea(L[l])$ 
11:    for  $r = 0, r < |R|, r ++$  do
12:       $I = nodosRuta(R[r])$ 
13:       $n = nuevoNodo(), N \leftarrow n$ 
14:       $a = nuevoArco(O[I[1]], n, 0, f), A \leftarrow a$ 
15:      for  $i = 1, i < |I| - 1, i ++$  do
16:         $n' = nuevoNodo(), N \leftarrow N + n'$ 
17:         $a = nuevoArco(O[I[i]], n', 0, f), A \leftarrow A + a$ 
18:         $a = nuevoArco(n', O[I[i]], 0, \infty), A \leftarrow A + a$ 
19:         $a = nuevoArco(n, n', costo(n, n'), \infty), A \leftarrow A + a$ 
20:         $n = n'$ 
21:      end for
22:       $n = nuevoNodo(), N \leftarrow N + n$ 
23:       $a = nuevoArco(n, O[I[1]], 0, \infty), A \leftarrow A + a$ 
24:    end for
25:  end for
26:  Caminatas
27:  for  $n = 0, n < |N'|, n ++$  do
28:    if  $n$  es origen/destino y  $n \notin N$  then
29:       $N \leftarrow N + n$ 
30:      for  $a = 0, a < |A'|, a ++$  do
31:        if origen( $a$ ) es  $n$  then
32:           $a = nuevoArco(n, destino(a), costo(a), \infty), A \leftarrow A + a$ 
33:        end if
34:      end for
35:    end if
36:  end for
37:  return  $G(N, A)$ 
38: end procedure
```

Figura 3.3: Modelo reducido del caso 0



parada 1, luego pasa por 2 y termina el recorrido en 3, demora 8 minutos y los buses de la línea pasan cada 15 minutos. Por último la línea 4 comienza en la parada 2, pasa por 5 y finaliza en 3, realiza el recorrido en 10 minutos y los buses de la línea pasan cada 3 minutos.

Spieß and Florian (1989) observan que los nodos con un solo arco de entrada $a_1 = (c_1, f_1)$ y uno de salida $a_2 = (c_2, f_2)$, pueden ser sustituidos por un arco $a = (c_1 + c_2, f_1)$. Cabe notar que estos nodos corresponden a los nodos auxiliares relacionados a los orígenes y destinos de las rutas, de esta forma con apenas algunos cambios se puede modificar el algoritmo 3.1 para incluir esta observación y construir el modelo reducido (figura 3.3).

3.2. Búsqueda Tabú

[Glover \(1989\)](#) representa un problema de optimización combinatoria de la siguiente forma,

$$\min f(s) \tag{3.1}$$

$$s.a. s \in S \tag{3.2}$$

La función f en [3.1](#) puede ser lineal o no lineal, y la condición [3.2](#) restringe las variables de s a un conjunto discreto. Muchos algoritmos de optimización han sido implementados para abordar este tipo de problemas debido a la importancia práctica de los mismos.

El objetivo de los algoritmos de optimización es encontrar una solución óptima o próxima al óptimo en un tiempo razonable. Se puede distinguir entre dos tipos de algoritmos de optimización, completos y aproximados ([Blum and Roli, 2003](#)). Los algoritmos completos, también denominados exactos, son los que garantizan encontrar soluciones óptimas. Ejemplos de este tipo son, programación dinámica, lineal y entera, ramificación y poda. Hay problemas que son intrínsecamente difíciles desde el punto de vista computacional, por lo que los métodos exactos no son aplicables debido a los altos requerimientos en términos de recursos computacionales. Con los algoritmos aproximados, también llamados heurísticos, no hay garantía de encontrar una solución óptima, pero suelen tener buen rendimiento en problemas computacionalmente difíciles.

Dentro de los algoritmos heurísticos se encuentran las Búsquedas Locales. Una búsqueda local es un procedimiento que usa una operación llamada movida para definir la vecindad de cualquier solución ([Glover and Laguna, 1998](#)). El procedimiento parte de una solución inicial y de forma iterativa trata de reemplazar la solución actual por una mejor de la vecindad definida por la movida.

Una metaheurística es un framework algorítmico de alto nivel e independiente del problema, que provee un conjunto de guías o estrategias para el desarrollo de algoritmos heurísticos de optimización ([Sorensen and Glover, 2013](#)). Los algoritmos heurísticos guiados por este framework, por ejemplo búsquedas locales, pueden ser procedimientos complejos o incluir solo una descripción

de las operaciones que modifican una solución junto con una regla de evaluación asociada. La comunidad científica ha demostrado que las metaheurísticas son una alternativa viable a los métodos exactos, especialmente en problemas difíciles o de gran escala ([Sorensen and Glover, 2013](#)).

Existe un gran número de metaheurísticas, con bases muy diferentes que resulta en una gran variedad de características. En este trabajo se seleccionó para encarar la determinación de frecuencias en el transporte público la metaheurística Búsqueda Tabú. Esta es una metaheurística diseñada para prevenir que otros procedimientos queden atrapados en óptimos locales. Puede ser utilizada por cualquier procedimiento que utilice un conjunto de operaciones para transformar una solución en otra y que tenga una función para evaluar el atractivo de estas transformaciones.

Dos componentes muy importantes de Búsqueda Tabú son las estrategias de intensificación y diversificación. Las estrategias de intensificación fomentan movidas y atributos de soluciones históricamente buenas. Mientras que las estrategias de diversificación fomentan movidas y atributos de soluciones poco exploradas. Es importante lograr un buen balance entre intensificación y diversificación, por un lado para identificar de forma rápida regiones con soluciones de calidad alta, y por otro lado para no perder demasiado tiempo en regiones ya exploradas o que no proveen soluciones de calidad alta ([Blum and Roli, 2003](#)).

Esta metaheurística ha obtenido soluciones óptimas o próximas al óptimo en una gran variedad de problemas clásicos y prácticos, con aplicaciones que van desde planificación a telecomunicaciones, y desde reconocimiento de patrones a redes neuronales ([Glover, 1990](#)).

Búsqueda Tabú se basa en tres principios fundamentales,

- el uso de una estructura de memoria basada en atributos y diseñada para permitir la evaluación de criterios y la búsqueda histórica de información,
- el uso de un mecanismo que permita la interacción entre condiciones que limitan y liberan el proceso de búsqueda (expresado en clasificación tabú y criterios de aspiración),
- y la capacidad de incorporar funciones de memoria con diferentes alcances temporales, de corto y largo plazo, para implementar estrategias que logren intensificar y diversificar la búsqueda.

Para ejemplificar los conceptos claves de la memoria de corto plazo en el

contexto del problema de optimización de frecuencias suponemos,

- un conjunto discreto y ordenado de valores de frecuencia θ ,
- las soluciones $s \in S$ están representadas por un arreglo de índices a θ que representa la frecuencia de cada línea,
- una línea aumenta (disminuye) su frecuencia cuando cambia al siguiente valor más alto (bajo) en θ ,
- las soluciones se evalúan según el submodelo de asignación de (Spiess and Florian, 1989).

Posteriormente, en el capítulo 5 del documento se detallan estos y otros conceptos que potencian el proceso de la memoria de corto plazo y por consiguiente la implementación en general.

3.2.1. Búsqueda local

La operación que define la estructura de vecindad es un movimiento compuesto sobre un par de líneas, un aumento y una disminución. En la figura 3.4 se muestran todas las posibles movidas que se pueden aplicar a una solución s del caso 0 que comprende cuatro líneas y tres posibles valores de frecuencia.

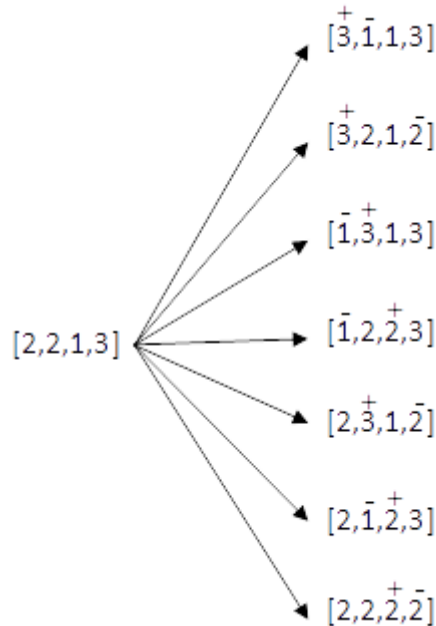
3.2.2. Lista, período y clasificación tabú

Se considera el tipo más común de memoria de corto plazo denominada basada en lo reciente. Para utilizarla, ciertos atributos que se encuentran en soluciones recientemente visitadas son marcados como tabú activos, y por esto las soluciones que contienen los elementos tabú activos (o una combinación de estos) son consideradas tabú (Glover and Laguna, 1998).

En este problema los atributos de una solución corresponden a las frecuencias de las líneas. De esta forma, nos interesa registrar cuando una línea cambia de frecuencia ya sea que aumente o disminuya. Si la frecuencia de una línea esta tabú activa entonces no puede cambiar su frecuencia.

Una lista tabú denominada *ComienzoTabu* registra la última iteración donde cada línea cambió su frecuencia. Si suponemos que *AumentoTest* y *DisminuyeTest* corresponden a los índices de las líneas donde se aumentará y disminuirá la frecuencia respectivamente, la clasificación utilizada para este problema se puede representar como: *movida(AumentoTest, DisminuyeTest)* es tabú activa si:

Figura 3.4: Movidas permitidas a la solución del caso 0. + indica que la frecuencia aumentó y – que la frecuencia disminuyó.



- $Iter \leq ComienzoTabu[AumentoTest] + AumentoTenure$, o
- $Iter \leq ComienzoTabu[DisminuyeTest] + DisminuyeTenure$

Los valores *AumentoTenure* y *DisminuyeTenure* corresponden a los valores del período tabú para los movimientos de aumento y disminución en la solución, mientras que *Iter* indica el número de iteración actual.

Un valor de período tabú indica la cantidad de iteraciones donde una movida se mantiene tabú activa.

3.2.3. Criterio de aspiración

En términos generales, el mecanismo de búsqueda usualmente evita movimientos que son tabú activos. Sin embargo, el concepto que aquí se introduce permite en ciertos casos obviar este mecanismo.

Los criterios de aspiración son introducidos para determinar en qué casos las reglas de activación tabú pueden ser violadas. El uso apropiado de estos criterios es muy importante para permitir a Búsqueda Tabú lograr su mejor rendimiento (Glover and Laguna, 1998). En este trabajo se utiliza el criterio de aspiración por defecto.

Tabla 3.1: Iteraciones del primer acercamiento para el caso 0. La columna *iter* indica el número de iteración y *tabú activo* indica las líneas cuya frecuencia no se puede modificar en la iteración. La columna \uparrow indica la línea seleccionada para aumentar su frecuencia, mientras que \downarrow indica la línea seleccionada para disminuir su frecuencia. Por último, *s* indica la solución actual y $f(s)$ indica el valor objetivo de la solución actual

<i>iter</i>	<i>tabú activo</i>	\uparrow	\downarrow	<i>s</i>	$f(s)$
—	—	2	3	[2, 2, 1, 3]	27.75
1	2, 3	1	0	[2, 2, 2, 2]	26
2	1, 0	2	3	[1, 3, 2, 2]	24
3	2, 3	—	—	[1, 3, 3, 1]	21

El criterio de aspiración por defecto es una instancia simple de los criterios de aspiración. Este, elimina el estado tabú de los atributos que hace más tiempo se encuentran tabú activos cuando todos los posibles movimientos son clasificados como tabú. Es decir, este criterio se dispara cuando los movimientos no tabú son muy pocos o nulos, permitiendo así a la búsqueda no bloquearse por falta de soluciones candidatas.

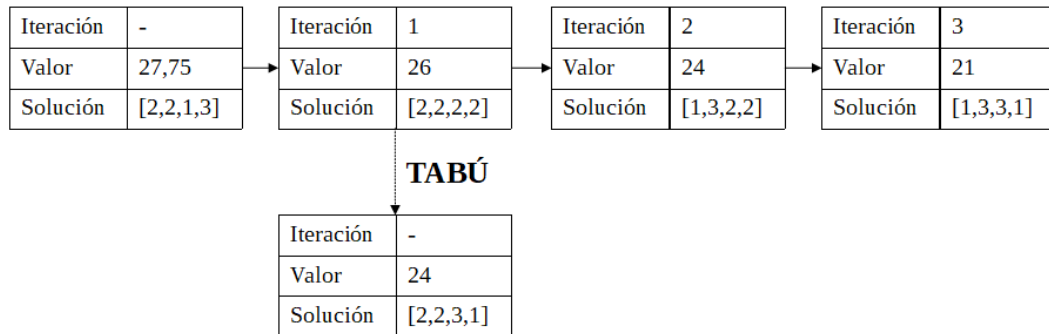
3.2.4. Memoria de corto plazo (componiendo los conceptos)

La memoria de corto plazo de una Búsqueda Tabú constituye una forma de exploración que busca encontrar la mejor solución posible bajo ciertas condiciones. Estas condiciones expresadas en la clasificación tabú están diseñadas para prevenir la repetición de ciertas soluciones marcándolas como tabú activas. La aplicación de los criterios de aspiración es el mecanismo que establece el balance necesario a las condiciones expresadas en la clasificación tabú.

Para ilustrar el funcionamiento de los conceptos presentados, supondremos un período tabú de una iteración, y una exploración exhaustiva que siempre escoge la mejor solución de la vecindad.

La tabla 3.1 muestra las primeras iteraciones de este ejemplo. Partiendo de la solución inicial [2, 2, 1, 3], la cual tiene un valor objetivo 27,75, se escoge aumentar la línea 2 y disminuir la 3 obteniendo así una mejora de 1.75. En la segunda iteración la mejor solución se encuentra aumentando la línea 2 y disminuyendo la 3 o aumentando la 1 y disminuyendo la 0, se escoge la segunda opción dado que la primera altera las líneas 2 y 3 que fueron modificadas en la iteración anterior por lo tanto es tabú. Finalmente, en la última iteración se

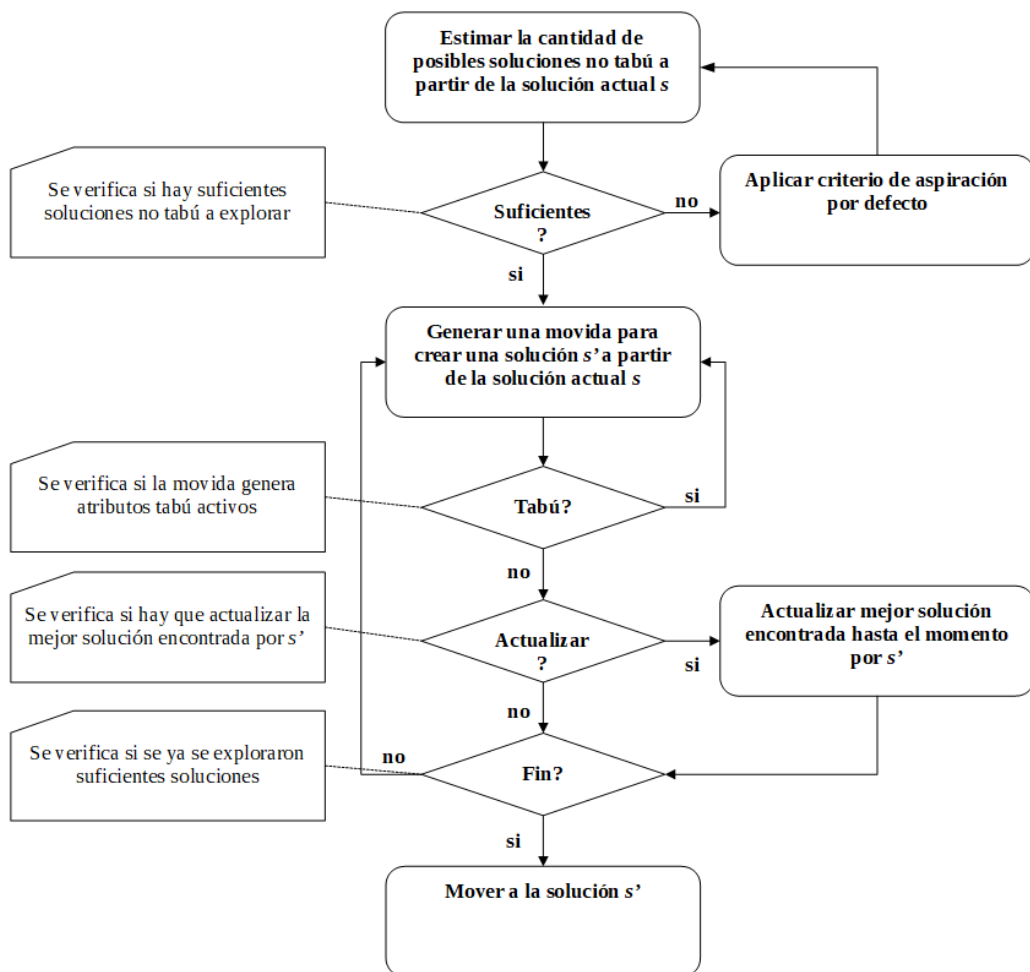
Figura 3.5: Efecto de la memoria de corto plazo.



elige la opción tabú anterior, es decir se aumenta la línea 2 y se disminuye la 3 obteniendo así la solución $[1, 3, 3, 1]$ con un valor de 21. La figura 3.5 muestra el efecto de la memoria de corto plazo en este ejemplo de iteración.

Por último, la figura 3.6 ilustra la operación de la memoria de corto plazo y cómo se componen los conceptos revisados, criterio de aspiración, lista y clasificación tabú. Lo primero que verifica el algoritmo, es que existan suficientes soluciones vecinas no tabú a explorar. En caso de que no hubieran suficientes, se utiliza el criterio de aspiración por defecto hasta alcanzar un número mínimo establecido. Luego de asegurar la existencia de un conjunto mínimo de soluciones vecinas no tabú, comienza la exploración. En cada paso se verifica que la solución vecina s' no tenga atributos tabú activos, en el problema de estudio implica que los valores de frecuencias de las líneas a modificar no hayan sido alteradas recientemente (cantidad de iteraciones del período tabú). El algoritmo se va quedando con la mejor solución s' (en el problema la que tiene el menor valor objetivo), hasta que se exploran suficientes vecinas. Por último, se mueve de s a la mejor solución encontrada s' . Es importante resaltar que la nueva solución s' no tiene que mejorar el valor objetivo de s necesariamente. La capacidad de continuar la exploración transitando por soluciones evaluadas como peores o de menor calidad (capacidad dada por el uso de la lista y clasificación tabú), es la que finalmente permite escapar de óptimos locales.

Figura 3.6: Operación de la memoria de corto plazo.



Capítulo 4

Modelo del problema

La optimización de frecuencias en un sistema de transporte público es modelada como un problema de optimización combinatoria en el cual hay que asignar valores a cada una de las líneas del sistema. Para ser consistentes con los modelos exactos que se han desarrollado en el grupo de trabajo y para aplicar metaheurísticas, los valores asignables son tomados de un conjunto finito previamente establecido.

El propósito es minimizar el tiempo total de los usuarios, viaje más espera, respetando el límite del tamaño de flota. Cada solución es evaluada de acuerdo al submodelo de asignación para calcular su correspondiente valor objetivo. En este trabajo se utiliza la formulación de (Martínez et al., 2014) donde el problema es modelado como uno de programación lineal entera mixta y donde se resuelven pequeños casos de forma óptima que posteriormente serán utilizados para comparar con la heurística propuesta en el capítulo 5.

A continuación se presentan los aspectos más relevantes del submodelo de asignación y la formulación del problema de optimización de frecuencias.

4.1. Modelo de asignación de pasajeros

Para representar la decisión de los pasajeros en la elección de qué líneas abordar se utiliza un submodelo de asignación. Este es necesario para medir el rendimiento del sistema.

Las frecuencias de las líneas tienen un gran impacto en la decisión de los pasajeros al momento de satisfacer su necesidad de viaje. Esto convierte al submodelo de asignación en un componente sumamente importante dado que

Tabla 4.1: Nuevos símbolos para el submodelo de asignación

<i>símbolo</i>	<i>descripción</i>
N	conjunto de nodos
A	conjunto de arcos
A_n^+	conjunto de arcos salientes del nodo n
A_n^-	conjunto de arcos entrantes al nodo n
$v_a, a \in A$	volumen de pasajeros del arco a , expresado en la unidad de demanda
$g_n, n \in N$	demanda del nodo n , $g_n = \sum_{d \in N''} d_{nd}$
$w_n, n \in N$	tiempo de espera en el nodo n multiplicado por la demanda que pasa por n

las frecuencias son las variables de decisión del problema de estudio.

El submodelo de asignación toma como entrada el grafo $G = (A, N)$, que representa las líneas del sistema de transporte, un conjunto de valores de frecuencia, la demanda OD , y retorna una distribución de los flujos de demanda representando los caminos entre los orígenes y destinos. Estos caminos son el resultado de aplicar la hipótesis acerca del comportamiento de los usuarios respecto a las líneas, y sus frecuencias.

Se utiliza el submodelo de estrategias óptimas (Spiess and Florian, 1989). En este, una estrategia se define como el conjunto de reglas que al aplicarse permiten al usuario alcanzar su destino. En términos del grafo G y para un nodo destino $r \in N$, una estrategia se representa mediante un subconjunto de los arcos de A , los que definen las líneas que el usuario selecciona a priori para viajar desde el origen al destino. El modelo asume que el usuario construye la estrategia minimizando el tiempo de viaje en bus más el tiempo de espera. Para esto selecciona, previo a comenzar el viaje, las líneas atractivas dentro de todas las que conectan el origen y destino incluyendo transbordos. Luego, el usuario aborda el primer bus de las líneas atractivas que escogió a priori, que pase por la parada en la que espera. La formulación utiliza, además de los ya presentados, los símbolos de la tabla 4.1.

Según las hipótesis del submodelo de asignación, el tiempo de espera en el nodo n con la estrategia \bar{A} está dado por

$$W(\bar{A}_n^+) = \frac{\alpha}{\sum_{a \in \bar{A}_n^+} f_a}, \alpha > 0, n \in N$$

Lo que significa que el tiempo de espera es inversamente proporcional a la suma de las frecuencias de las líneas que pasan por la parada.

Por otro lado, la proporción de pasajeros que abordan el arco a en el nodo n con la estrategia \bar{A} esta dada por

$$P_a(\bar{A}_n^+) = \frac{f_a}{\sum_{a' \in \bar{A}_n^+} f_{a'}}, a \in \bar{A}_n^+, n \in N$$

Lo que significa que la proporción de flujo que toma la línea del arco a es proporcional a la frecuencia f_a de la línea. El parámetro α es un factor de tiempo de espera, y depende de las asunciones acerca de la regularidad del servicio. En este trabajo se asume que $\alpha = 1$, lo que implica que los tiempos entre arribos de los buses se corresponden con una distribución exponencial negativa con media $\frac{1}{f_a}$.

El modelo que representa la decisión de los usuarios para un nodo destino $r \in N$ es formulado como

$$\min_{v,w} \sum_{a \in A} c_a v_a + \sum_{n \in N} w_n \quad (4.1)$$

$$s.a. \sum_{a \in A_n^+} v_a - \sum_{a \in A_n^-} v_a = g_n \quad n \in N \quad (4.2)$$

$$v_a \leq f_a w_n \quad a \in A_n^+, n \in N \quad (4.3)$$

$$v_a \geq 0 \quad a \in A \quad (4.4)$$

Dado un destino $r \in N$, la aplicación del modelo calcula:

- la distribución de demanda correspondiente, asignando los flujos v_a a cada arco $a \in A$,
- el tiempo de espera w_n en cada parada n .

La formulación se asemeja a un problema de camino mas corto. La diferencia está dada por el término que representa el tiempo de espera en la función objetivo 4.1 (segundo término) y la restricción 4.3 que representa la división de demanda en los nodos entre las líneas atractivas. Debido a esa restricción (4.3), el resultado no es un único camino, sino un hipercamino que representa las diferentes trayectorias de origen a destino (Martínez et al., 2014).

[Spiess and Florian \(1989\)](#) proponen un algoritmo de orden polinomial para resolver el modelo. El algoritmo se compone de dos partes, en la primera parte se calcula desde todos los orígenes la estrategia óptima \bar{A}^* para cada destino $r \in R$ y los tiempos esperados u_n^* en cada nodo $n \in N$ hacia el destino r . En la segunda parte, para cada destino $r \in R$ y desde todos los orígenes se asigna la demanda a la red a partir de la estrategia óptima \bar{A}^* calculada en la primera parte. En el apéndice [1](#) se presentan pseudocódigos del algoritmo y un ejemplo de aplicación.

4.2. Modelo de optimización de frecuencias

4.2.1. Objetivo único

El resultado de la asignación del submodelo permite calcular el tiempo total del sistema, la medida de rendimiento desde el punto de vista del usuario. Es importante notar que tanto los flujos como los tiempos de espera dependen de los valores de frecuencia de las líneas que son las variables de decisión del problema, lo que además implica que haya que aplicar el submodelo de asignación a cada nuevo conjunto de valores.

[Constantin and Florian \(1995\)](#) proponen un modelo para el problema de optimización de frecuencias con una formulación explícita basada en el submodelo de asignación de ([Spiess and Florian, 1989](#)). No hay un método exacto que resuelva el problema definido por ([Constantin and Florian, 1995](#)), ni uno aproximado validado con resultados exactos. La estructura binivel no lineal de la formulación lo convierte en un problema muy difícil de resolver.

En este trabajo se utiliza la formulación propuesta por [Martínez et al. \(2014\)](#), quienes proponen una linearización de ([Constantin and Florian, 1995](#)) para eliminar la estructura binivel bajo ciertas condiciones, permitiendo resolver el modelo de forma óptima utilizando técnicas de programación lineal entera mixta.

[Martínez et al. \(2014\)](#) definen el dominio de las frecuencias como el conjunto $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ donde cada elemento θ_i es un valor no negativo que representa un posible valor de frecuencia para las líneas. Una determinación de frecuencias asigna un valor de θ a cada línea $l \in L$. Para formular el modelo, se redefine la estructura G sustituyendo cada arco de abordaje por m arcos, con cada uno de los posibles valores de frecuencia, y se agrega la variable binaria y_{lf} que

Tabla 4.2: Símbolos para el modelo de optimización de frecuencias objetivo único

<i>símbolo</i>	<i>descripción</i>
R	conjunto de nodos destinos
B	cantidad máxima de buses
L	conjunto de líneas
$f(a), a \in A$	índice en θ de la frecuencia del arco a (f_a)
$l(a), a \in A$	línea del arco a
$v_a^r, a \in A, r \in R$	volumen de pasajeros en el arco a al destino r
$g_n^r, n \in N, r \in R$	demanda del nodo n al destino r
$w_n^r, n \in N, r \in R$	tiempo total de espera en el nodo n para todos los viajes hacia el destino r

toma el valor 1 si la línea l tiene frecuencia θ_f . Para presentar la formulación se agregan los símbolos de la tabla 4.2.

El modelo (Martínez et al., 2014) es formulado como,

$$\min_{y,v,w} \sum_{r \in R} \left(\sum_{a \in A} c_a v_a^r + \sum_{n \in N} w_n^r \right) \quad (4.5)$$

$$s.a. \sum_{l \in L} \sum_{f \in 1 \dots m} \theta_f y_{lf} \sum_{a \in A} c_a \leq B \quad (4.6)$$

$$\sum_{f \in 1 \dots m} y_{lf} = 1 \quad l \in L \quad (4.7)$$

$$\sum_{a \in A_n^+} v_a^r - \sum_{a \in A_n^-} v_a^r = g_n^r \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.8)$$

$$v_a^r \leq \theta_{f(a)} w_n^r \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.9)$$

$$v_a^r \leq g_n^r y_{l(a)f(a)} \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.10)$$

$$v_a^r \geq 0 \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.11)$$

$$y_{lf} \in \{0, 1\} \quad l \in L, f \in 1 \dots m \quad (4.12)$$

El objetivo de la formulación de (Martínez et al., 2014) es ofrecer el mejor servicio a los pasajeros respetando el tamaño máximo de flota. La formulación (4.5)-(4.12) es lineal entera mixta. Es interesante observar que para una determinación de frecuencias dada (fijas las variables y) que respete las restricciones (4.10) y (4.11), se obtienen $|R|$ problemas de asignación de pasajeros, independientes uno para cada destino.

4.2.2. Multiobjetivo

En (Giesen et al., 2013) se observa que si removemos la restricción del tamaño de flota del modelo de objetivo único de (Martínez et al., 2014), se obtiene la variante multiobjetivo del problema. Esto ocurre ya que el costo de los operadores, expresado en el tamaño de flota, es un interés contrapuesto al de los usuarios, el tiempo total. De acuerdo con (Ehrgott, 2005) la solución del modelo no es única, sino un conjunto de soluciones no dominadas en el espacio de los objetivos; usualmente a este conjunto se lo denomina frente de Pareto.

Existen diferentes métodos para alcanzar una solución en un problema multiobjetivo: a priori, a posteriori e interactivo (Ehrgott and Gandibleux, 2002). El método a priori fija los parámetros que determinan un cierto costo-beneficio entre los objetivos en conflicto y luego resuelve la versión de objetivo único del problema. El método a posteriori construye el frente de Pareto y luego selecciona una solución del mismo. Por último, el método interactivo incorpora en la optimización información que guía la selección del nivel de costo-beneficio deseado; esta información es usualmente provista por los tomadores de decisión

Siguiendo la observación de (Giesen et al., 2013), la formulación para la versión multiobjetivo del problema de optimización de frecuencias queda,

$$\min_{y,v,w} \sum_{r \in R} \left(\sum_{a \in A} c_a v_a^r + \sum_{n \in N} w_n^r \right) \quad (4.13)$$

$$\min_{y,v,w} \sum_{l \in L} \sum_{f \in 1 \dots m} \theta_f y_{lf} \sum_{a \in A} c_a \quad (4.14)$$

$$s.a. \sum_{f \in 1 \dots m} y_{lf} = 1 \quad l \in L \quad (4.15)$$

$$\sum_{a \in A_n^+} v_a^r - \sum_{a \in A_n^-} v_a^r = g_n^r \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.16)$$

$$v_a^r \leq \theta_{f(a)} w_n^r \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.17)$$

$$v_a^r \leq g_n^r y_{l(a)f(a)} \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.18)$$

$$v_a^r \geq 0 \quad a \in A_n^+, n \in N, r \in R \quad (4.19)$$

$$y_{lf} \in \{0, 1\} \quad l \in L, f \in 1 \dots m \quad (4.20)$$

Capítulo 5

Búsqueda tabú para la optimización de frecuencias

Si bien la formulación de programación lineal entera mixta propuesta en (Martínez et al., 2014) permite obtener soluciones óptimas para el problema de optimización de frecuencias, los autores mencionan que es esperable que las instancias de gran tamaño sean difíciles de resolver y muestran que para un caso de una ciudad chica, el método exacto no logra garantizar la optimalidad luego de 48 horas de ejecución. Con la discretización del dominio de frecuencias, el problema se transforma en uno de optimización combinatoria cuyo espacio de búsqueda tiene un tamaño exponencial $|\theta|^{|L|}$ en el peor caso.

Como alternativa, en esta tesis se propone una metaheurística basada en Búsqueda Tabú (Glover, 1989). El método es basado en una búsqueda local en el espacio de las frecuencias (decisiones del planificador), mientras que las variables que representan decisiones de los usuarios son calculadas mediante una invocación al submodelo de asignación. Se aplican conceptos tabú sobre el mecanismo base de búsqueda local, para evitar quedar atrapado en óptimos locales. Uno de los principales componentes de Búsqueda Tabú es el uso de memoria.

5.1. Definiciones para la búsqueda tabú propuesta

5.1.1. Representación de una solución

Las soluciones $s \in S$, donde S es el conjunto de todas las posibles soluciones del problema, están representadas por un arreglo de índices al conjunto de frecuencias θ . Cada elemento del arreglo representa una línea del sistema de transporte público y su valor representa la frecuencia de esa línea. El conjunto θ , $|\theta| = m$, representa los posibles valores de frecuencias para cada elemento de s . A modo de ejemplo la solución s del caso 0 se representa como, $s = [2, 2, 1, 3]$, donde $\theta = \{\theta_1 = \frac{1}{15}, \theta_2 = \frac{1}{6}, \theta_3 = \frac{1}{3}\}$.

Se asume que el conjunto de todas las posibles frecuencias está ordenado de forma creciente, de este modo una línea aumenta (disminuye) su frecuencia cuando cambia al siguiente valor más alto (bajo) en θ .

Es importante notar que una disminución en la frecuencia de una línea causa que la solución sea menos atractiva desde el punto de vista de los usuarios o en el mejor caso igual. Por el contrario, un aumento en la frecuencia de una línea hace la solución más atractiva o en el peor caso igual. Desde el punto de vista de los operadores, el atractivo en una disminución o aumento es inverso al mencionado para los usuarios debido a la contraposición en los intereses de estos.

Dadas las siguientes funciones,

- $g: S \rightarrow R^+$ retorna el tiempo total de una solución $s \in S$ (ecuación 4.5 de la formulación del modelo),
- $h: S \rightarrow R^+$ retorna la cantidad de buses de una solución $s \in S$ (ecuación 4.6 de la formulación del modelo).

Se define el conjunto de soluciones triviales $S_T = \{sol_i\}, 1 \leq i \leq m$ donde sol_i representa la solución con todos los valores de frecuencia de las líneas igual a θ_i .

Las soluciones de S_T cumplen las siguientes propiedades,

$$g(sol_1) \geq g(s) \geq g(sol_m), \forall s \in S \quad (5.1)$$

$$h(sol_1) \leq h(s) \leq h(sol_m), \forall s \in S \quad (5.2)$$

$$g(sol_i) \geq g(sol_{i+1}), \forall 1 \leq i \leq m \quad (5.3)$$

$$h(sol_i) \leq h(sol_{i+1}), \forall 1 \leq i \leq m \quad (5.4)$$

Las dos primeras propiedades 5.1 y 5.2 establecen que sol_1 es la solución con el mayor tiempo total (viaje más espera) y la menor flota de S , mientras que sol_m es la solución con el menor tiempo total y la mayor flota de S . Estas dos propiedades acotan los valores del problema.

Por su parte, las propiedades 5.3 y 5.4 establecen que cada solución intermedia sol_i ($1 > i > m$) del conjunto de soluciones triviales tiene menor (mayor) tiempo total (tamaño de flota) que su anterior (sol_{i-1}) y mayor (menor) tiempo total (tamaño de flota) que su posterior (sol_{i+1}).

Es importante notar que toda solución s se puede alcanzar desde sol_1 (sol_m) mediante la aplicación de un numero finito de disminuciones (aumentos) y viceversa.

5.1.2. Movida

Como se menciona en la sección 3.2.1, la movida está definida por un aumento y una disminución en dos líneas seleccionadas. De acuerdo a lo anterior, cada solución tiene $|L|(|L| - 1)$ soluciones vecinas.

La idea detrás de utilizar un movimiento compuesto es compensar los intereses de los usuarios y de los operadores. Además, y con la ayuda de una penalización, es un mecanismo para mantener el tamaño de la flota en el entorno de un cierto valor.

5.1.3. Periodo Tabú

Complementando lo descrito en la sección 3.2.2, se optó por utilizar un único valor estático de período tabú (no varía durante la ejecución del algoritmo), y vinculado a la cantidad de líneas del caso de estudio, de esta forma tenemos que:

$$AumentoTenure = DisminuyeTenure = \begin{cases} \lfloor 0, 2|L| \rfloor, & \text{si } \lfloor 0, 2|L| \rfloor > 1 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.5)$$

Utilizar un valor de período tabú que se ajustara al tamaño del problema fue la razón para vincularlo a la cantidad de líneas, mientras que mantener fuera del estado tabú activo al menos el 60 % de las líneas es la idea detrás del coeficiente 0,2. Lo último se cumple para sistemas con al menos 4 líneas.

5.1.4. Criterio de aspiración

Por último, referido a 3.2.3, el criterio se implementó de forma que: cuando el número de posibles soluciones vecinas es inferior a un límite dado (parámetro del algoritmo), el criterio de aspiración por defecto elimina el estado tabú activo de las frecuencias que tengan el valor más bajo en $ComienzoTabu[XTest] + XTenure$ (donde X corresponde a *Aumento* o *Disminuye*) hasta alcanzar el mínimo número de vecinos establecido por N_{min} .

El número de posibles soluciones vecinas es estimado como el producto de la cantidad de líneas que pueden aumentar sus frecuencias por aquellas que pueden disminuir. Con este criterio se asegura tener siempre al menos una opción para continuar la búsqueda.

5.1.5. Evaluación de soluciones

Para evaluar las soluciones se implementó el algoritmo de etiquetado propuesto en (Spiess and Florian, 1989) que resuelve el submodelo de asignación utilizado (ver apéndice 1). En lugar de descartar soluciones que violan el límite superior del tamaño de flota, restricción en el modelo de optimización, se permiten soluciones no factibles y se guía la búsqueda penalizando los buses extra. De esta forma se define $f(s)$ como la función objetivo del algoritmo,

$$f(s) = g(s) + QY, \text{ donde } Q = \frac{g(s)}{h(s)}, Y = \begin{cases} B - h(s), & \text{si } B > h(s) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.6)$$

Q es una estimación de la influencia de los buses con respecto al tiempo

total de viaje de los usuarios, calculada como el valor objetivo dividido por el número de buses de la solución. Y es la cantidad excedente de buses. QY es el valor utilizado para penalizar la cantidad de buses que excede el tamaño de la flota disponible.

5.1.6. Casos de prueba

A continuación, se introducen dos nuevos casos de prueba que se utilizarán para comparar las distintas estrategias que se presentan en este capítulo del documento.

El caso 1 representa un sistema de transporte que cuenta con 80 buses para recorrer 7 líneas. Estas líneas conectan 15 puntos orígenes/destinos. El conjunto de posibles valores de frecuencia es $\theta = \{\frac{1}{60}, \frac{1}{50}, \frac{1}{40}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$

Se utilizan dos soluciones iniciales para el caso 1, la solución trivial sol_4 (solución con todas las frecuencias de las líneas igual a $\theta_4 = \frac{1}{30}$), y la solución trivial sol_6 (solución con todas las frecuencias de las líneas igual a $\theta_6 = \frac{1}{10}$).

El caso 2 representa un sistema de transporte con 13 líneas para conectar 84 orígenes/destinos. El tamaño de la flota de este sistema de transporte es 27 buses, y los posibles valores de frecuencias en este caso es $\theta = \{\frac{1}{60}, \frac{1}{40}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}\}$

Al igual que para el caso 1, para este caso también se utilizan dos soluciones iniciales, la solución trivial sol_2 (solución con todas las frecuencias de las líneas igual a $\theta_2 = \frac{1}{40}$), y la solución trivial sol_3 (solución con todas las frecuencias de las líneas igual a $\theta_3 = \frac{1}{30}$).

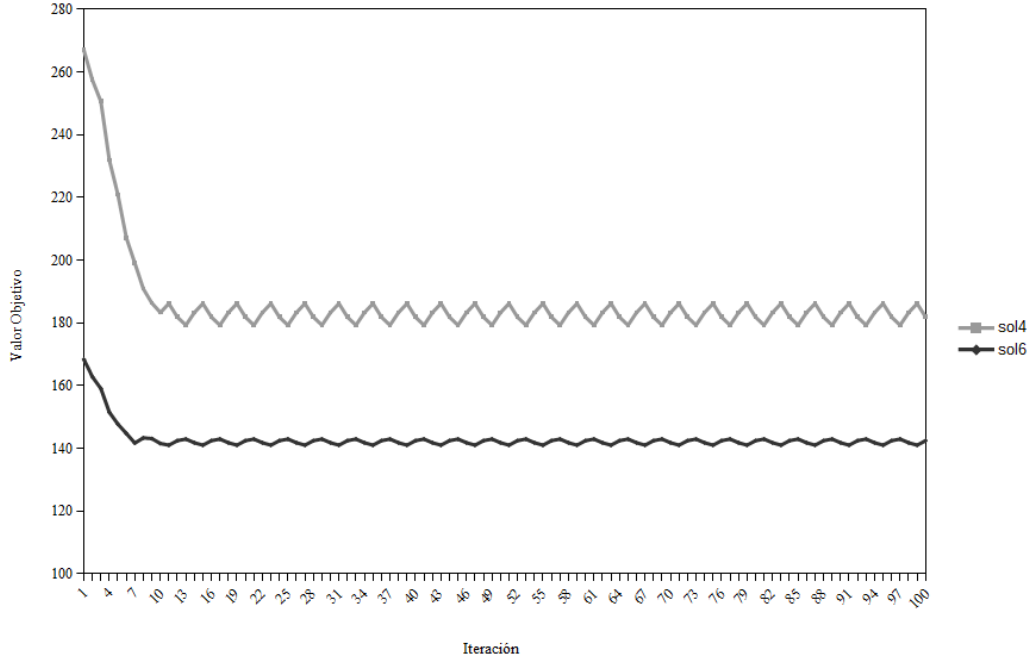
5.2. Memoria de corto Plazo

5.2.1. Primer acercamiento, estrategia exhaustiva

El primer acercamiento (A1) recoge todos los conceptos básicos vistos hasta ahora referentes a la búsqueda tabú,

- una operación que determina una vecindad (movida),
- una lista que registra los últimos cambios de frecuencia y una clasificación tabú,
- un valor de período tabú,
- un criterio que asegura una siguiente solución (criterio de aspiración).

Figura 5.1: Trayectoria del valor objetivo en 100 iteraciones del primer acercamiento al caso 1.



Aplicando una estrategia exhaustiva, donde en cada iteración se elige de entre todas las soluciones vecinas la mejor, el primer acercamiento brinda una visión preliminar del algoritmo.

Resultados Caso 1

Las figuras 5.1 y 5.2, muestran la evolución del valor objetivo y el tamaño de flota en las 100 primeras iteraciones del primer acercamiento para el caso 1.

Se observa de forma clara como en las primeras iteraciones hay un fuerte descenso en el tiempo total de los pasajeros vinculado al fuerte ascenso en el tamaño de la flota hasta llegar al entorno de 80 buses.

El algoritmo luego queda atrapado en la región de la solución $[6, 8, 3, 1, 1, 1, 8]$ cuando comienza en la solución trivial sol_4 y en la región de la solución $[5, 7, 7, 7, 1, 7, 8]$ cuando comienza en la solución trivial sol_6 , soluciones encontradas a pocas iteraciones de comenzar, iteración 12 y 10 respectivamente.

Las tablas 5.1 y 5.2 muestran las soluciones que comienzan a repetirse luego de alcanzar los óptimos locales $[6, 8, 3, 1, 1, 1, 8]$ y $[5, 7, 7, 7, 1, 7, 8]$, que terminan

Figura 5.2: Trayectoria del tamaño de flota en 100 iteraciones del primer acercamiento al caso 1.

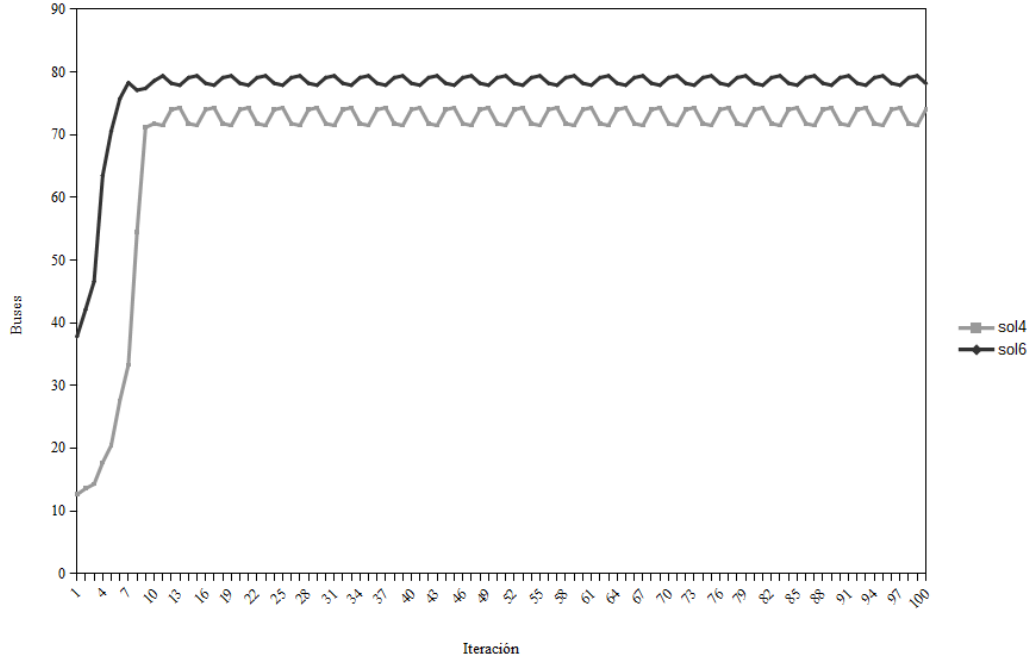


Tabla 5.1: Iteraciones en bucle del primer acercamiento para el caso 1, solución inicial sol_4

$iter$	$tabú\ activo$	\uparrow	\downarrow	s	$f(s)$	$h(s)$
12	2, 4	3	0	[6, 8, 3, 1, 1, 1, 8]	179.26	74.3
13	3, 0	4	2	[5, 8, 3, 2, 1, 1, 8]	183.29	71.7
14	4, 2	0	3	[5, 8, 2, 2, 2, 1, 8]	186.17	71.4
15	0, 3	2	4	[6, 8, 2, 1, 2, 1, 8]	181.83	74

convirtiéndose en las mejores soluciones encontradas por el algoritmo. Se puede observar claramente cómo se vulnera en ambos casos el período tabú de 1 iteración ejecutando dos movidas y luego las inversas (cambiando aumento por disminución y viceversa) a las dos anteriores.

Resultados Caso 2

Las gráficas de las figuras 5.3 y 5.4 muestran la evolución del valor objetivo y el tamaño de la flota en las 100 primeras iteraciones de la estrategia del primer acercamiento para el Caso 2.

En este caso sucede algo similar al anterior, nuevamente se nota un fuerte descenso en el tiempo de los usuarios al comienzo de las iteraciones de la

Tabla 5.2: Iteraciones en bucle del primer acercamiento para el caso 1, solución inicial sol_6

$iter$	$tabúactivo$	\uparrow	\downarrow	s	$f(s)$	$h(s)$
10	0, 4	3	6	[5, 7, 7, 7, 1, 7, 8]	140.98	79.4
11	3, 6	0	5	[5, 7, 7, 8, 1, 7, 7]	142.41	78.2
12	0, 5	6	3	[6, 7, 7, 8, 1, 6, 7]	142.92	77.9
13	6, 3	4	0	[6, 7, 7, 7, 1, 6, 7]	141.75	79.1

Figura 5.3: Trayectoria del valor objetivo en 100 iteraciones del primer acercamiento al caso 2.

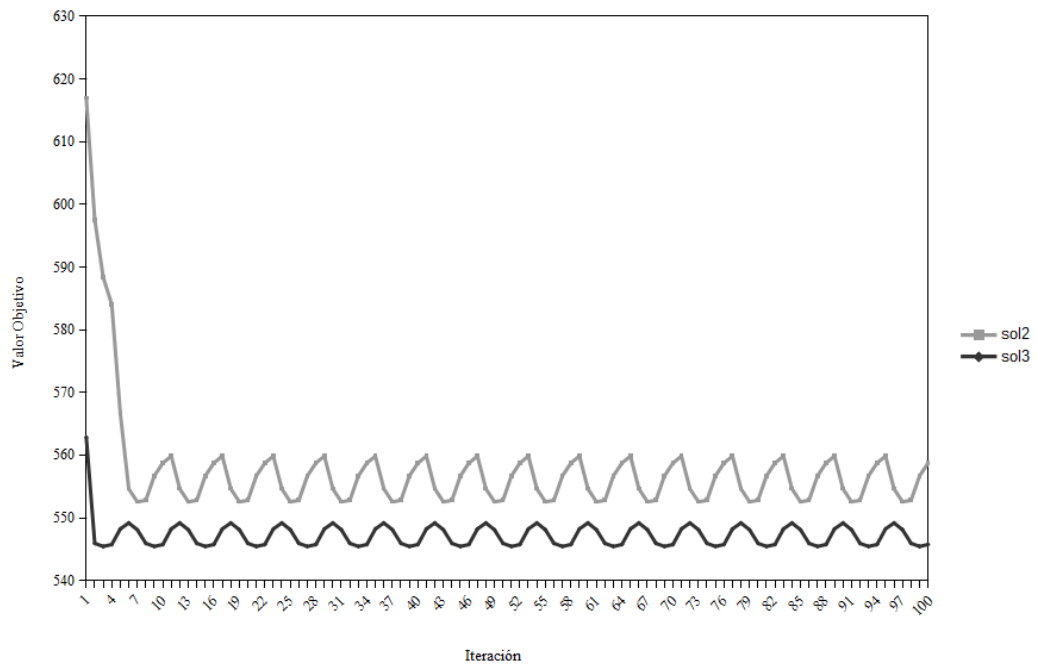
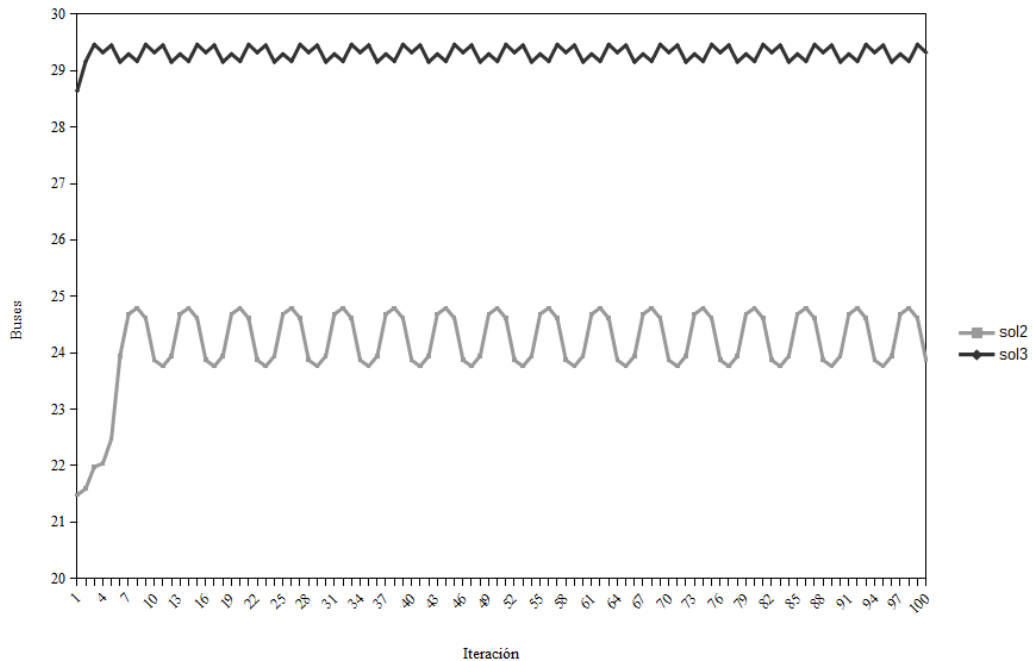


Figura 5.4: Trayectoria del tamaño de flota en 100 iteraciones del primer acercamiento al caso 2.



ejecución. Si bien el crecimiento en el tamaño de la flota no es tan significativo como en el Caso 2, es considerable.

Aquí el algoritmo queda atrapado en la región de la solución $[2, 1, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 2, 4, 1, 1]$ cuando inicia en la solución sol_2 y en la región de la solución $[3, 2, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 2, 3]$ cuando inicia en sol_3 . Estas soluciones son encontradas al comienzo de la ejecución, iteraciones 6 y 2 respectivamente.

Las tablas 5.3 y 5.4 muestran las soluciones que comienzan a repetirse luego de alcanzar los óptimos locales. En este caso se vulnera el período tabú de 2 iteraciones ejecutando tres movidas y luego las inversas.

Conclusión

La estrategia exhaustiva del primer acercamiento es incapaz de escapar de los óptimos locales. Las mejores soluciones son encontradas a pocas iteraciones de comenzar la ejecución y luego el algoritmo queda atrapado en ciclos de igual duración que el período tabú. Este problema está vinculado con el mecanismo de exploración y construcción de la lista de candidatos vecinos. El mismo orden de exploración con la misma decisión nos lleva por el mismo camino.

Otro problema, también vinculado a la lista de candidatos, tiene que ver con

Tabla 5.3: Iteraciones en bucle del primer acercamiento para el caso 2, solución inicial sol_2

<i>iter</i>	<i>tabú activo</i>		↑	↓	<i>s</i>	<i>f(s)</i>	<i>h(s)</i>
	1	2					
6		2, 4	4	2	[2, 1, 1, 1, 4, 2, 2, 1, 4, 2, 4, 1, 1]	552.56	24.6
7	2, 4	4, 2	9	5	[2, 1, 1, 1, 4, 1, 2, 1, 4, 3, 4, 1, 1]	552.8	24.7
8	4, 2	9, 5	6	0	[1, 1, 1, 1, 4, 1, 3, 1, 4, 3, 4, 1, 1]	556.7	24.6
9	9, 5	6, 0	2	4	[1, 1, 2, 1, 3, 1, 3, 1, 4, 3, 4, 1, 1]	558.74	23.8
10	6, 0	2, 4	5	9	[1, 1, 2, 1, 3, 2, 3, 1, 4, 2, 4, 1, 1]	559.8	23.7
11	2, 4	5, 9	0	6	[2, 1, 2, 1, 3, 2, 2, 1, 4, 2, 4, 1, 1]	554.63	23.9

Tabla 5.4: Iteraciones en bucle del primer acercamiento para el caso 2, solución inicial sol_2

<i>iter</i>	<i>tabú activo</i>		↑	↓	<i>s</i>	<i>f(s)</i>	<i>h(s)</i>
	1	2					
2		3, 11	6	8	[3, 2, 3, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 2, 3]	545.45	29.4
3	3, 11	6, 8	1	12	[3, 2, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 2, 3]	545.75	29.3
4	6, 8	1, 12	11	3	[3, 3, 3, 4, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 2, 2]	548.24	29.4
5	1, 12	11, 3	8	6	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 3, 2]	549.2	29.1
6	11, 3	8, 6	12	1	[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 2]	548.11	29.2
7	8, 6	12, 1	3	11	[3, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 3, 3]	554.94	29.1

la cantidad de soluciones vecinas que se visitan. Explorar todas las soluciones vecinas no parece ser una alternativa que escale. La tabla 5.5 muestra datos de las ejecuciones y de las mejores soluciones encontradas en el proceso.

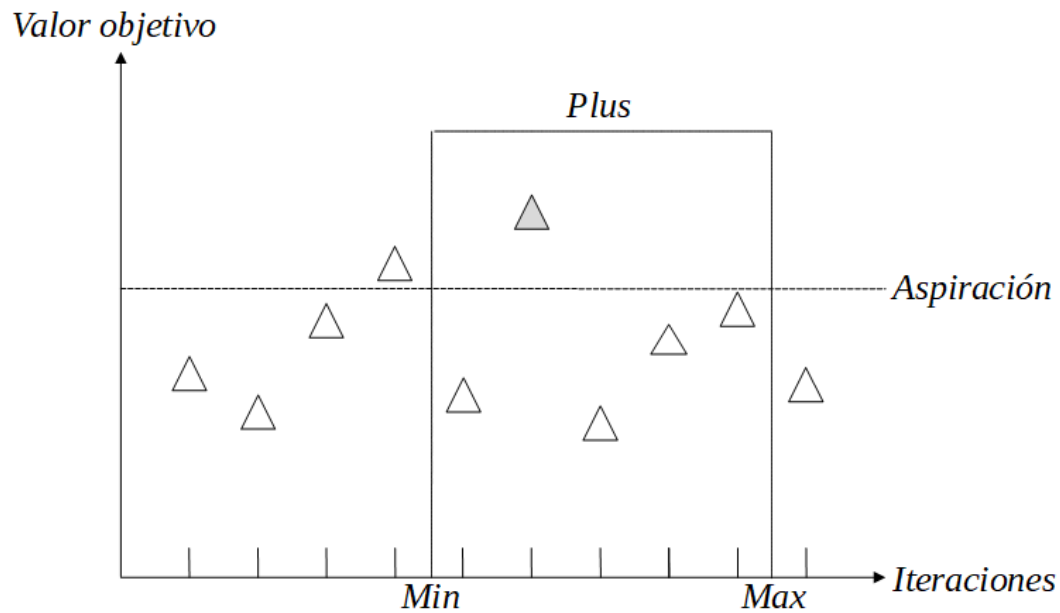
5.2.2. Segundo acercamiento, estrategia aspiración plus

Una importante consideración para la búsqueda tabú es determinar una estrategia apropiada en la exploración de soluciones vecinas con el objetivo

Tabla 5.5: Resumen de 100 iteraciones del primer acercamiento. La columna *visitas* corresponde a la cantidad de veces que fue encontrada la solución, mientras que $1^{era}iter$ a la primera iteración en la que fue encontrada. Por su parte, $TE(seg)$ indica el tiempo de ejecución en segundos, y por ultimo EMA corresponde a la cantidad ejecuciones del modelo de asignación.

<i>caso</i>		<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>visitas</i>	$1^{era}iter$	$TE(seg)$	EMA
1	sol_4	179.26	179.26	74.3	23	12	0.41	1001
	sol_6	140.98	140.98	79.4	23	10	0.53	1515
2	sol_2	552.56	552.56	24.6	16	6	38.64	2647
	sol_3	545.45	499.79	29.4	17	2	84.06	6291

Figura 5.5: Estrategia aspiración plus.



de reducir el número de soluciones que se visitan sin perder calidad en la búsqueda.

El segundo acercamiento (A2) utiliza como base al primero e introduce modificaciones en la exploración de las soluciones. Como una forma sistemática para explorar las soluciones vecinas se implementó para este nuevo acercamiento la estrategia aspiración plus (Glover and Laguna, 1998).

La estrategia aspiración plus explora una cantidad plus de soluciones luego de encontrar una solución cuyo valor objetivo mejora un cierto valor de aspiración. Para mantener controlado el número de soluciones vecinas a visitar, esta estrategia utiliza dos valores que indican el mínimo y máximo número de soluciones a explorar (figura 5.5).

Los valores plus, aspiración, mínimo y máximo de la estrategia de aspiración plus varían en cada iteración de la siguiente manera (símbolos en tabla 5.6),

Tabla 5.6: Símbolos para aspiración plus

<i>símbolo</i>	<i>descripción</i>
s_i	solución de la iteración i
V	cantidad máxima de soluciones vecinas
V_i	cantidad de soluciones vecinas a s_{i-1} no tabú
L_i^+	cantidad de líneas de s_{i-1} que pueden aumentar
L_i^-	cantidad de líneas de s_{i-1} que pueden disminuir
U_i	cantidad plus de soluciones a explorar en la iteración i
A_i	valor de aspiración en la iteración i
M_i^+	cantidad mínima de soluciones a explorar en la iteración i
M_i^-	cantidad máxima de soluciones a explorar en la iteración i
P_{min}	parámetro de la estrategia aspiración plus
P_{max}	parámetro de la estrategia aspiración plus

$$V_i = L_i^+ L_i^- \quad (5.7)$$

$$M_i^- = \min(V_i, P_{min} |L|) \quad (5.8)$$

$$M_i^+ = \min(V_i, P_{max} |L|) \quad (5.9)$$

$$U_i = \frac{M_i^+ - M_i^-}{2} \quad (5.10)$$

$$A_i = \frac{A_{i-1} + g(s_{i-1}) - g(s_{i-2})}{2} \quad (5.11)$$

El valor de aspiración en cada iteración es un promedio entre el valor de aspiración de la iteración anterior y la diferencia entre el valor objetivo actual y el de la iteración anterior (mejora o deterioro). De esta forma el valor de aspiración está afectado por los valores objetivo de iteraciones anteriores.

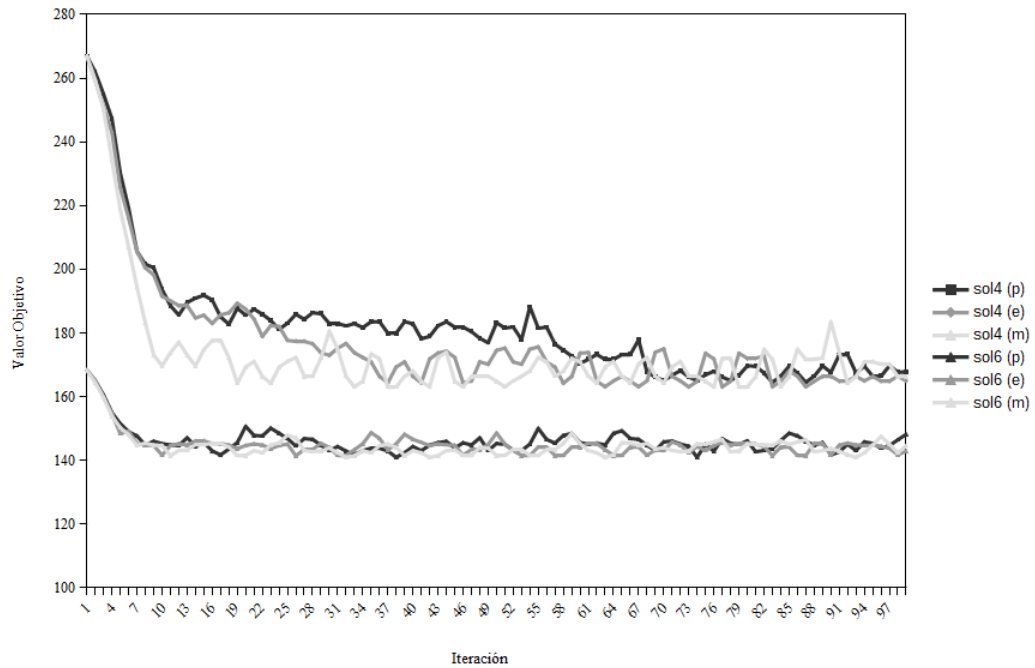
La estrategia implementada explora en cada iteración un número de soluciones no menor a $M_i^- |L|$ y no mayor a $M_i^+ |L|$, o a la cantidad de soluciones vecinas no tabú en la iteración. Esto último debido a que puede haber menos soluciones vecinas que el valor de los parámetros. Las soluciones vecinas candidatas resultantes de aplicar esta estrategia, son evaluadas en orden aleatorio.

Los resultados de las ejecuciones del segundo acercamiento que se muestran a continuación se realizaron utilizando los valores 5.7.

Tabla 5.7: Valores para aspiración plus

id	P_{min}	P_{max}
P	0.5	1
E	0.5	2
M	0.5	3

Figura 5.6: Trayectoria del valor objetivo en 100 iteraciones del segundo acercamiento al caso 1.



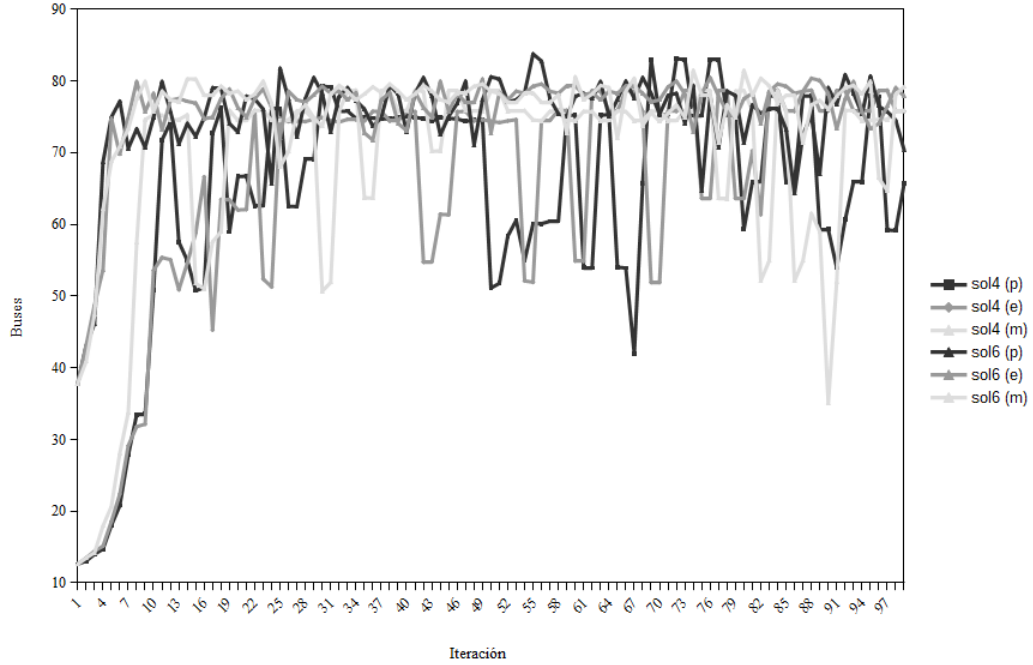
Resultados Caso 1

Las gráficas de las figuras 5.6 y 5.7 muestran, la evolución del tiempo total y el tamaño de la flota resultado de ejecutar el segundo acercamiento para el caso 1. Mientras que las figuras 5.8 y 5.9 muestran la cantidad de ejecuciones del modelo de asignación (EMA) en cada iteración para el mismo caso.

Si bien las gráficas de evolución del segundo acercamiento para el caso 1 muestran la misma tendencia que en el primer acercamiento, existe una gran diferencia entre ambas evoluciones. En los resultados del segundo acercamiento no se detectan los ciclos que se formaban con el primer acercamiento, de hecho no se detecta ciclo alguno.

Las gráficas de evolución EMA para el caso 1, muestran el esfuerzo realizado por el algoritmo en cada iteración. Se puede notar cómo influyen los parámetros

Figura 5.7: Trayectoria del tamaño de flota en 100 iteraciones del segundo acercamiento al caso 1.



(P_{min}, P_{max}) en este esfuerzo. De alguna manera las gráficas de evolución EMA también apoyan lo mencionado en el párrafo anterior referido a la no detección de ciclos.

Resultados Caso 2

Las figuras 5.10 y 5.11 muestran la evolución del tiempo total y del tamaño de la flota resultado de ejecutar el segundo acercamiento para el caso 2. Las figuras 5.12 y 5.13 muestran la evolución EMA, cantidad de ejecuciones del modelo de asignación en cada iteración, para el mismo caso.

De forma similar a lo mencionado para el caso 1, las gráficas para este caso 2 muestran una tendencia similar al primer acercamiento, pero sin mostrar ciclos de repetición de soluciones. Las evoluciones EMA confirman los resultados observados para el caso 1 referentes a la influencia de los parámetros (P_{min}, P_{max}) en el esfuerzo computacional de la búsqueda local del algoritmo.

Conclusión

El segundo acercamiento, con la estrategia aspiración plus, logra dos grandes mejoras sobre el primer acercamiento:

Figura 5.8: Cantidad de EMA en cada iteración en la ejecución del segundo acercamiento para el caso 1, solución inicial sol_4 , 100 iteraciones.

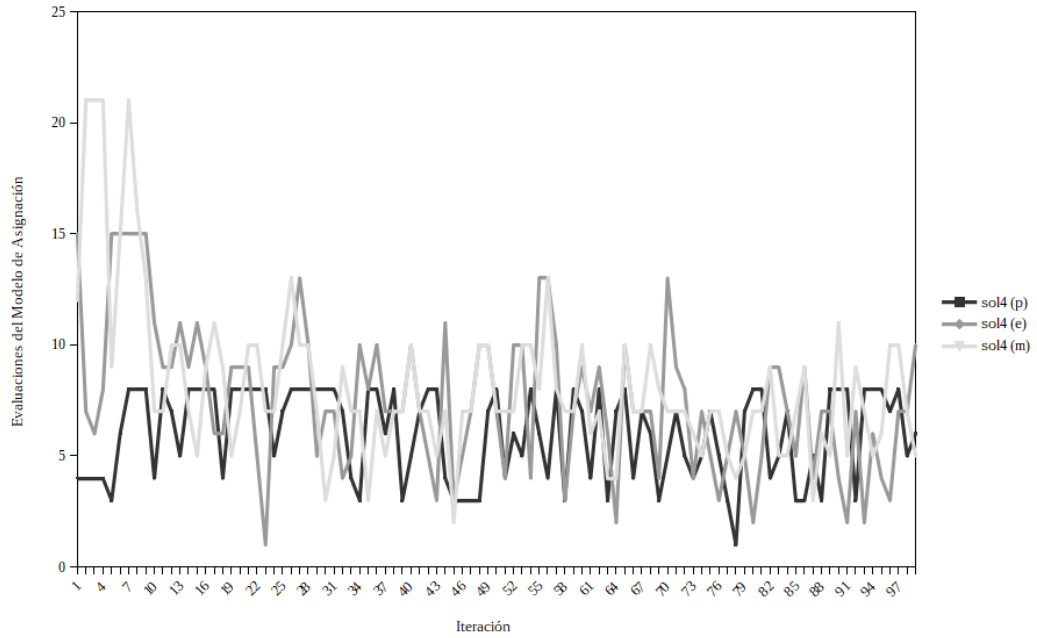


Figura 5.9: Cantidad de EMA en cada iteración en la ejecución del segundo acercamiento para el caso 1, solución inicial sol_6 , 100 iteraciones.

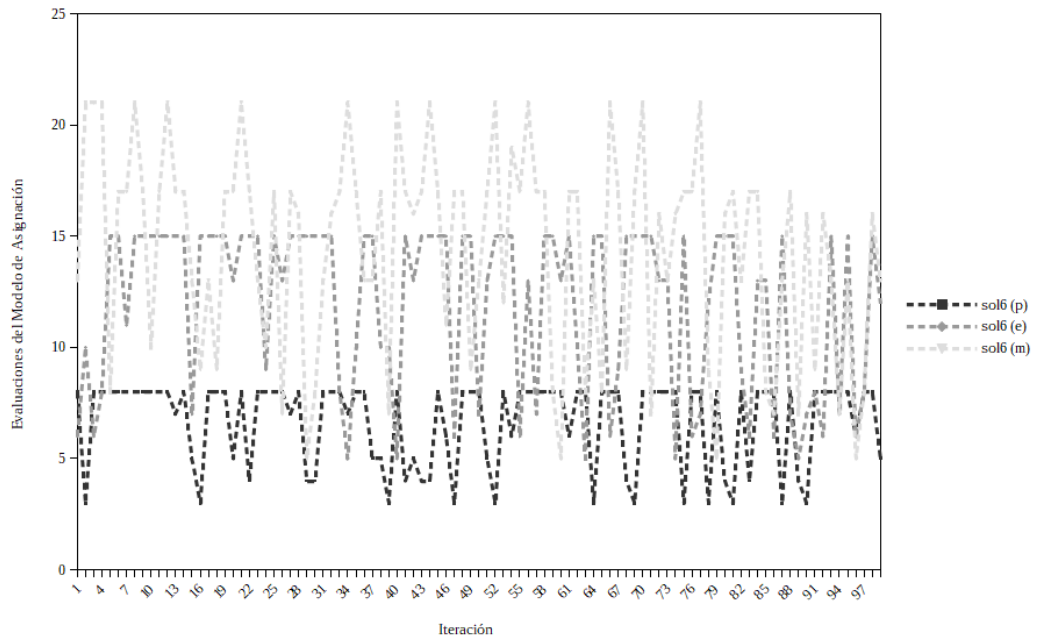


Figura 5.10: Trayectoria del valor objetivo en 100 iteraciones del segundo acercamiento al caso 2.

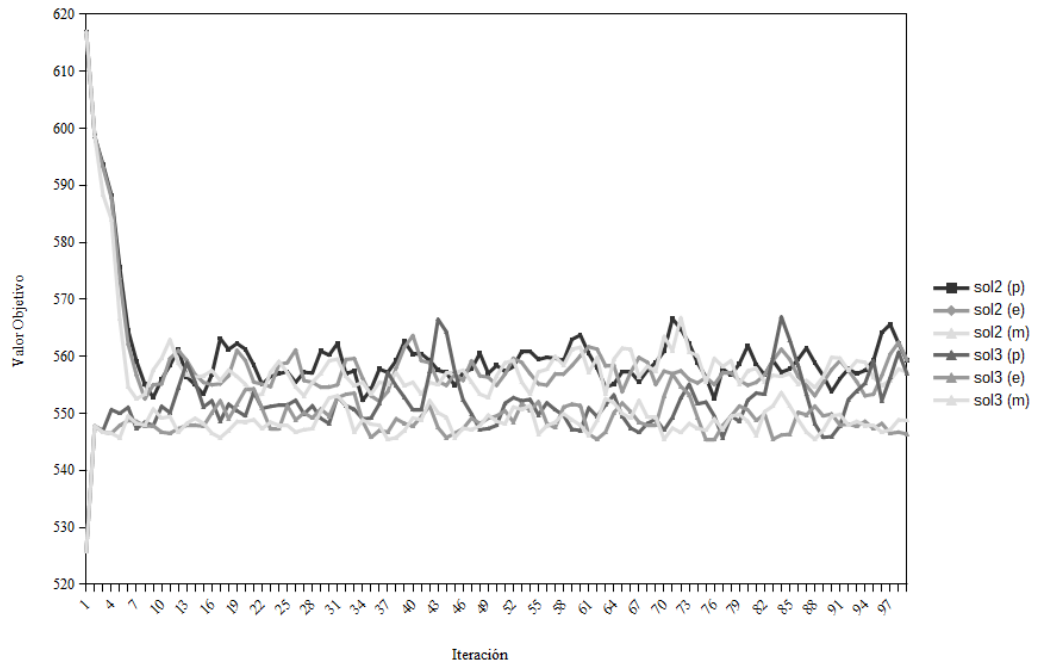


Figura 5.11: Trayectoria del tamaño de flota en 100 iteraciones del segundo acercamiento al caso 2.

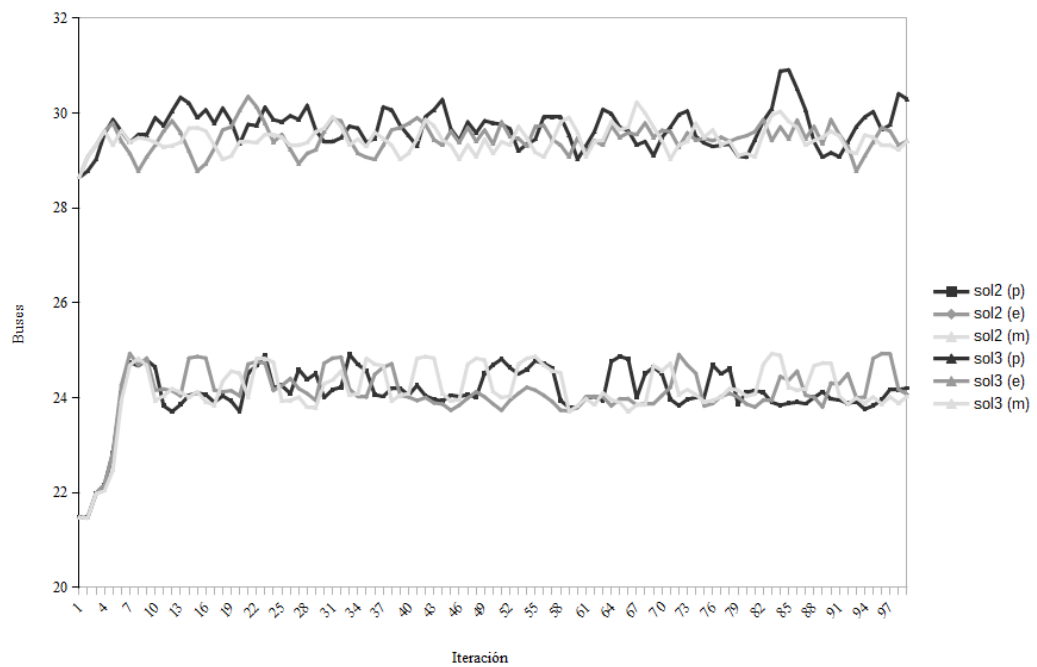


Figura 5.12: Cantidad de EMA en cada iteración en la ejecución del segundo acercamiento para el caso 2, solución inicial sol_2 , 100 iteraciones.

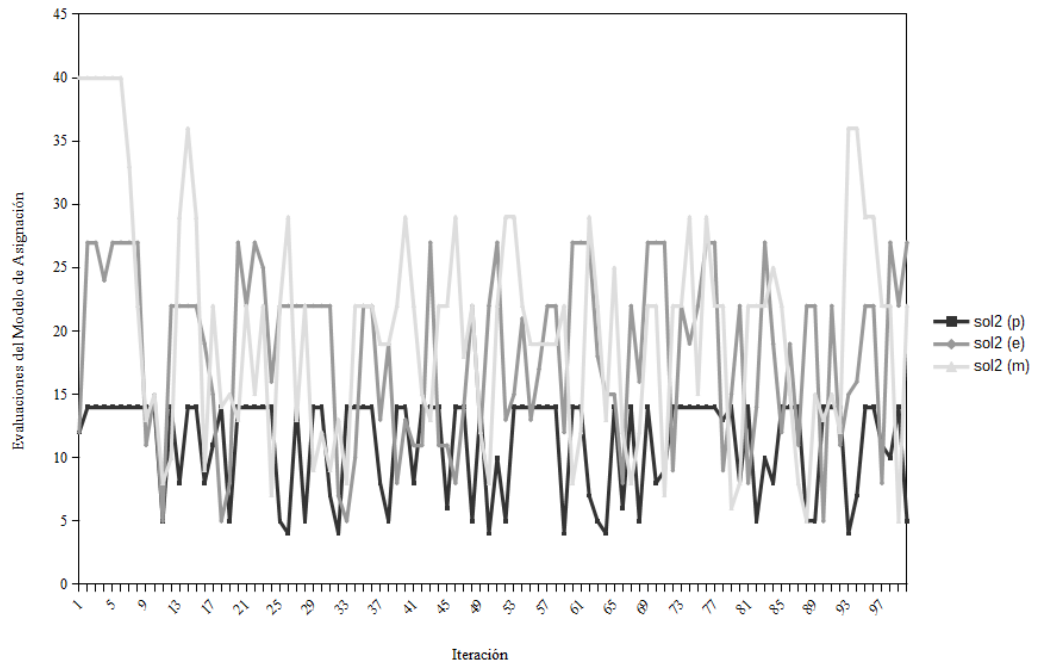


Figura 5.13: Cantidad de EMA en cada iteración en la ejecución del segundo acercamiento para el caso 2, solución inicial sol_3 , 100 iteraciones.

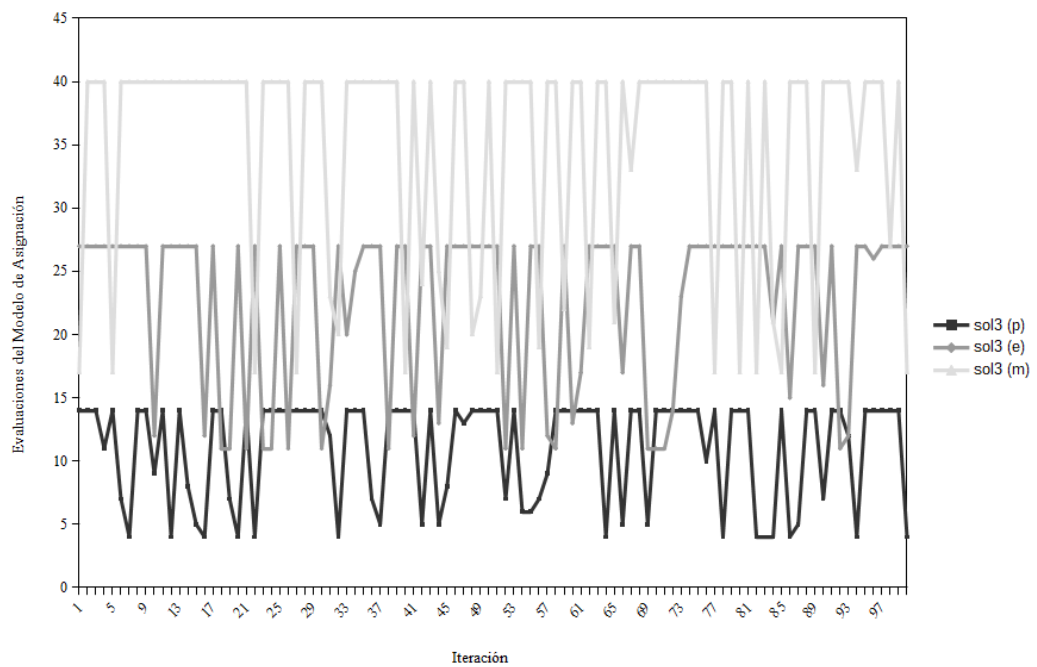


Tabla 5.8: Resumen de 100 iteraciones del segundo acercamiento.

<i>caso</i>		<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>visitas</i>	<i>1^{era}iter</i>	<i>TE(seg)</i>	<i>EMA</i>	
1	<i>sol₄</i>	<i>p</i>	164.51	164.51	77.95	2	81	0.47	1183
		<i>e</i>	163.08	163.08	78.68	2	71	0.52	1478
		<i>m</i>	163.08	163.08	78.68	6	35	0.55	1564
	<i>sol₆</i>	<i>p</i>	140.98	140.98	79.4	2	36	0.44	1316
		<i>e</i>	140.98	140.98	79.4	1	99	0.8	2418
		<i>m</i>	140.98	140.98	79.4	4	30	0.92	2787
2	<i>sol₂</i>	<i>p</i>	552.27	552.27	24.7	1	32	28.69	2152
		<i>e</i>	552.12	552.12	24.49	1	34	47.06	3528
		<i>m</i>	552.56	552.56	24.68	1	5	51.89	3885
	<i>sol₃</i>	<i>p</i>	545.75	502.09	29.32	1	75	27.45	2135
		<i>e</i>	545.45	499.79	29.46	1	73	56.81	4401
		<i>m</i>	545.45	499.79	29.46	1	35	87.2	6783

- evita los ciclos cortos de exploración, aquellos de largo igual al período tabú, y de esta manera logra una exploración mucho mayor,
- permite configurar mediante los parámetros (P_{min}, P_{max}) el esfuerzo a realizar por el algoritmo en la exploración de vecinos.

Si bien se logró evitar los ciclos cortos que se daban utilizando el primer acercamiento, aún el algoritmo queda atrapado en regiones establecidas por características de la solución inicial. Esto se puede visualizar de forma clara mirando las gráficas de evolución de los tiempos totales, donde los valores de una y otra solución inicial nunca se tocan.

También es interesante observar que esta incapacidad del algoritmo para evitar características que derivan o se establecen en un comienzo (por la solución inicial), afecta la cantidad de soluciones vecinas que se visitan en cada iteración. Esto se logra visualizar en las gráficas de evolución de EMA.

La tabla 5.8 muestra datos de las ejecuciones y de las mejores soluciones encontradas en el proceso.

5.3. Memoria de largo plazo

En la sección 5.2 se utilizó una memoria de corto plazo para mantener los movimientos que deben evitarse en iteraciones posteriores. En esta sección extendemos lo hasta ahora descrito agregando una memoria de largo plazo (Glover and Laguna, 1998). La memoria de largo plazo puede mejorar la Búsqueda

Tabla 5.9: Mejora de los resultados del segundo acercamiento sobre el primer acercamiento.

<i>caso</i>			<i>f</i> (%)	<i>g</i> (%)	<i>h</i> (%)	<i>TE</i> (%)	<i>EMA</i> (%)
1	<i>sol</i> ₄	<i>p</i>	8.23	8.23	4.85	-14.63	-18.18
		<i>e</i>	9.03	9.03	5.79	-26.83	-47.65
		<i>m</i>	9.03	9.03	5.79	-34.15	-56.24
	<i>sol</i> ₆	<i>p</i>	0	0	0	16.98	13.14
		<i>e</i>	0	0	0	-50.94	-59.6
		<i>m</i>	0	0	0	-73.58	-83.96
2	<i>sol</i> ₂	<i>p</i>	0.05	0.05	0.41	25.75	18.7
		<i>e</i>	0.08	0.08	0.81	-21.79	-33.28
		<i>m</i>	0	0	0	-34.29	-46.77
	<i>sol</i> ₃	<i>p</i>	-0.06	-0.54	0.34	67.34	66.06
		<i>e</i>	0	0	0	32.42	30.04
		<i>m</i>	0	0	0	-3.74	-7.82

Tabú mediante la exploración de soluciones difíciles de alcanzar, e intensificar la búsqueda en regiones prometedoras. Permite al algoritmo visitar y mantener soluciones de un horizonte más amplio.

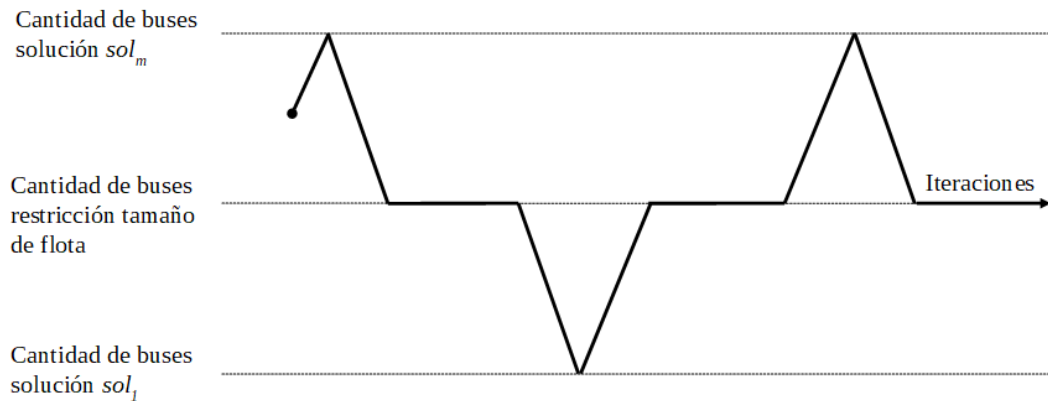
5.3.1. Estrategia oscilatoria

La estrategia oscilatoria tiene un vínculo cercano con los orígenes de la búsqueda tabú, y provee un medio para alcanzar un equilibrio efectivo entre intensificación y diversificación en el mediano y largo plazo (Glover and Laguna, 1998).

El método general de esta estrategia consiste en dirigir la búsqueda en relación a un nivel crítico o frontera de oscilación. Al alcanzar el entorno de la frontera de oscilación se modifica la operación que define las movidas para cruzar esta región. Una vez que se cruza la región del nivel crítico, el algoritmo avanza una profundidad específica para luego retornar. De esta forma la frontera de oscilación es alcanzada y cruzada nuevamente, pero esta vez desde la dirección opuesta. Luego el algoritmo procede a un nuevo retorno a la región crítica.

En este trabajo se implementó la estrategia oscilatoria utilizando las operaciones aumento y disminución exclusivamente, con las cuales es posible explorar todo el espacio de soluciones, desde la solución *sol*₁ a la solución *sol*_{*m*}. En el camino de una solución a otra se cruza la frontera de oscilación, en este problema

Figura 5.14: Estrategia oscilatoria implementada.



determinada por la restricción del tamaño de flota, y cada vez que esto ocurre se aplica una fase de intensificación la cual restringe al algoritmo a buscar en este entorno hasta que trascurren un número determinado k de iteraciones. En cada iteración la estrategia de memoria de corto plazo es aplicada. La figura 5.14 ilustra el comportamiento de la estrategia oscilatoria implementada.

Resumiendo, la función objetivo guía la oscilación de la estrategia en base a la frontera de oscilación dada por la restricción del tamaño de flota. Se optó por una oscilación simple y uniforme, que incluye una fase de intensificación cada vez que alcanza la región crítica.

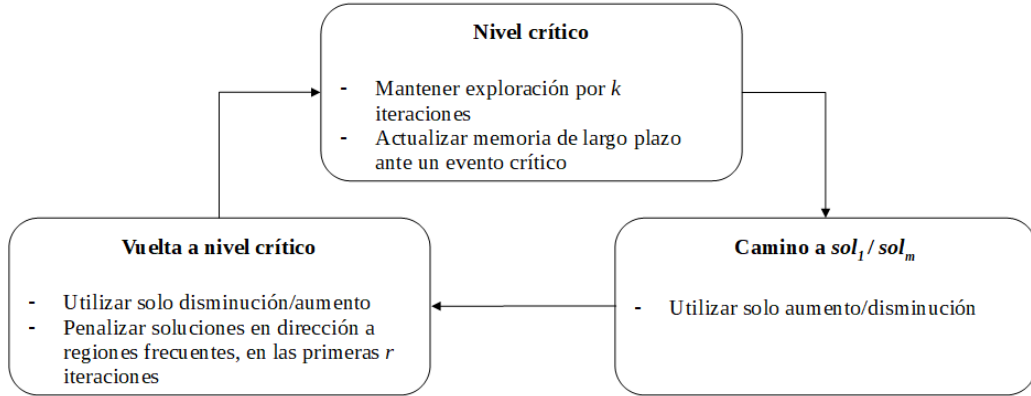
5.3.2. Memoria de evento crítico

El mecanismo de estrategia oscilatoria se ajusta perfectamente con un tipo de memoria basada en frecuencia, la memoria de eventos críticos. En esta memoria se registran durante la búsqueda los sucesos más recientes que se definen como críticos. Con esto se obtiene una medida de los valores de frecuencia más recientes y ocurrentes de los eventos críticos, y se utiliza esta información para tomar decisiones a corto y largo plazo.

Los eventos críticos aquí corresponden a la primera solución factible encontrada o una nueva mejor solución. Es decir, la primera solución al alcanzar la frontera de oscilación y cada mejor solución encontrada en esta región.

La memoria fue implementada con una matriz $M = m_{lf}$, con $l \in L, f \in \theta$, donde cada entrada m_{lf} indica la frecuencia del valor f en la línea l . Para actualizar M se utiliza además un factor suavizante β , con $0 \leq \beta \leq 1$. Valores de β cercanos a 1 reducen el suavizado dando más peso a los valores recientes.

Figura 5.15: Memoria de evento crítico y estrategia de oscilación.



Dado un evento crítico en la solución s , la matriz M se actualiza de la siguiente manera,

$$m_{lf} = \begin{cases} m_{lf}(1 - \beta), & \text{si } s_l = f \\ m_{lf}(1 - \beta) + \beta, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.12)$$

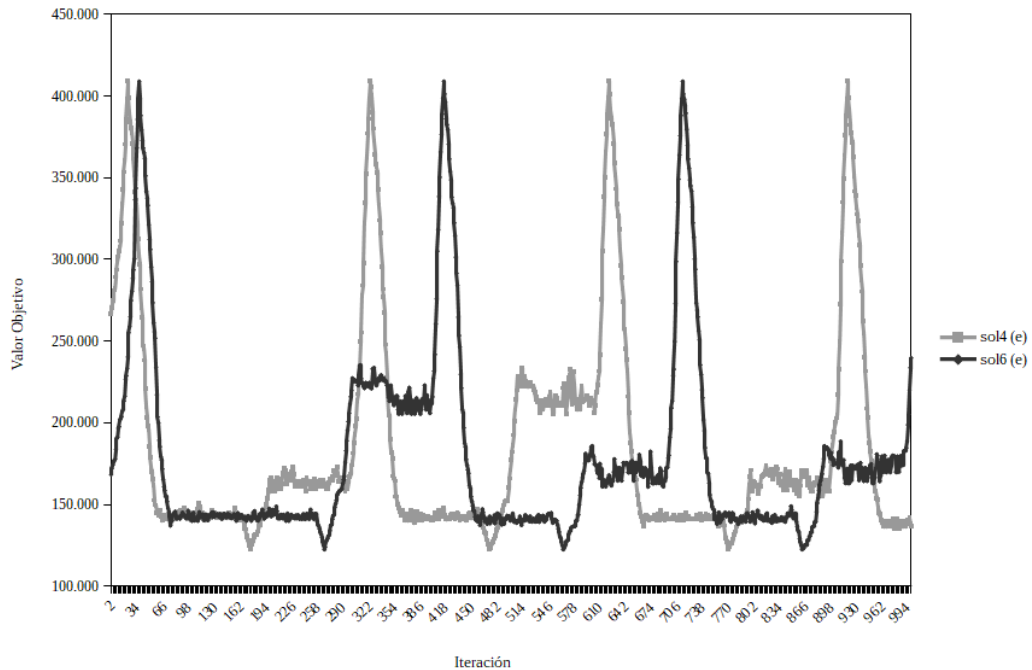
Los valores de M son afectados con el transcurso del tiempo. Las entradas m_{lf} con valores cercanos a 0 indican que ha sido poco frecuente la ocurrencia de f en la línea l , al menos en los últimos eventos críticos. En este caso para las pruebas se utilizó $\beta = 0.5$. Utilizando la matriz M se construye la solución w , donde cada w_l corresponde a la frecuencia con el menor valor en la columna l de M . Esta solución contiene los atributos poco o no explorados en la búsqueda.

De esta forma, cada vez que se alcanza sol_1 o sol_m , se penaliza los caminos a las soluciones más ocurrentes durante un número fijo de iteraciones r , para de esta manera guiar la búsqueda a espacios poco ocurrentes. La penalización se realiza tomando en cuenta la distancia euclídea entre la solución actual, la que se está evaluando, y la solución w .

5.3.3. Tercer acercamiento

El tercer acercamiento agrega al algoritmo del segundo acercamiento la implementación de la estrategia oscilatoria de la sección 5.3.1 y la implementación de la memoria de evento crítico de la sección 5.3.2. De esta forma se incorpora una nueva estrategia de exploración de largo alcance y una nueva estructura de memoria asociada. A continuación se presentan los resultados obtenidos y

Figura 5.16: Trayectoria del tiempo total del tercer acercamiento para el caso 1, 1000 iteraciones.



se describen las principales observaciones de utilizar los dos mecanismos de memoria de largo plazo.

Resultados

Las figuras 5.16 y 5.17 muestran la trayectoria del tiempo total y la cantidad de buses para el caso 1, mientras que las figuras 5.18 y 5.19 lo hacen para el caso 2.

Conclusión

El tercer acercamiento logra superar el problema que presenta A2, segundo acercamiento, en cuanto a la dependencia entre los resultados y las características de la solución inicial. Esto se aprecia en las gráficas donde es difícil distinguir entre la trayectoria de ambas soluciones iniciales en ambos casos.

De esta forma se logra un comportamiento independiente de la solución inicial, lo que evita la necesidad de recurrir a estrategias de múltiples arranques. La tabla 5.10 muestra datos de las ejecuciones y de las mejores soluciones encontradas en el proceso, mientras que la tabla 5.11 presenta la mejora del

Figura 5.17: Trayectoria del tamaño de flota del tercer acercamiento para el caso 1, 1000 iteraciones.

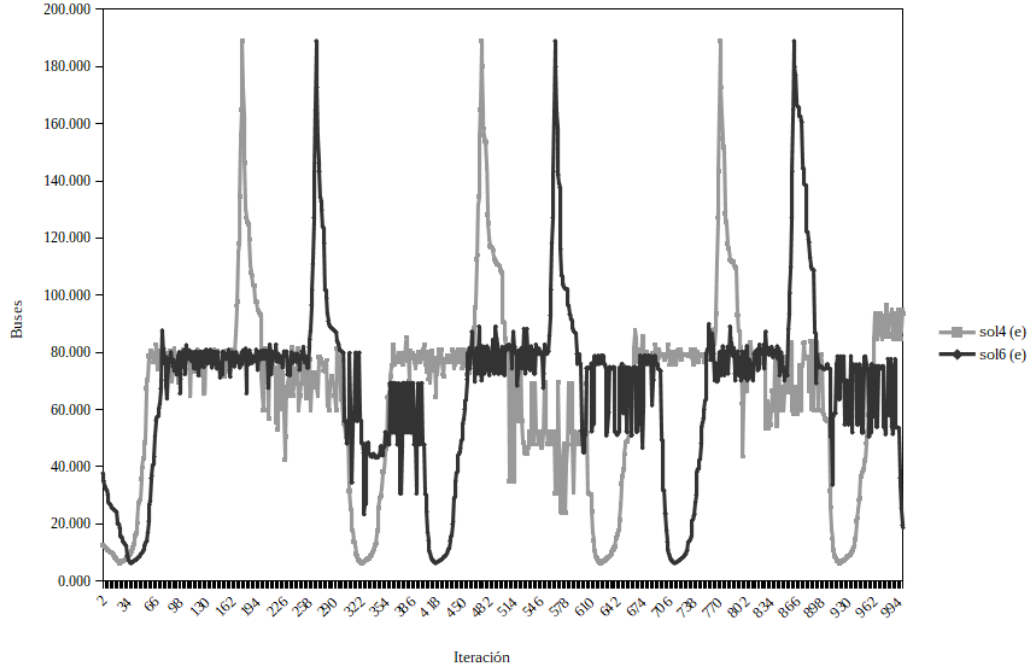


Tabla 5.10: Resumen 1000 iteraciones del tercer acercamiento.

caso		f	g	h	visitas	1 ^{era} iter	$E(seg)$	EMA
1	sol_4	139.98	139.98	78.6	8	64	2.5	7292
	sol_6	139.98	139.98	78.6	4	156	2.26	6625
2	sol_2	515.7	515.58	27	2	375	224.61	16834
	sol_3	517.34	517.34	26.98	3	707	234.83	17656

tercer acercamiento respecto al segundo.

5.4. Extensión multiobjetivo

Utilizando el algoritmo descrito en la sección 5.3, se propone un extensión multiobjetivo del problema con un enfoque a posteriori, es decir, se encuentra un conjunto de soluciones no dominadas que aproximan a un frente de Pareto. La extensión se basa en los siguientes pasos:

- encontrar un conjunto inicial de soluciones utilizando la memoria de largo plazo,
- construir soluciones estadísticas a partir de las iniciales del paso 1,

Figura 5.18: Trayectoria del tiempo total del tercer acercamiento para el caso 2, 1000 iteraciones.

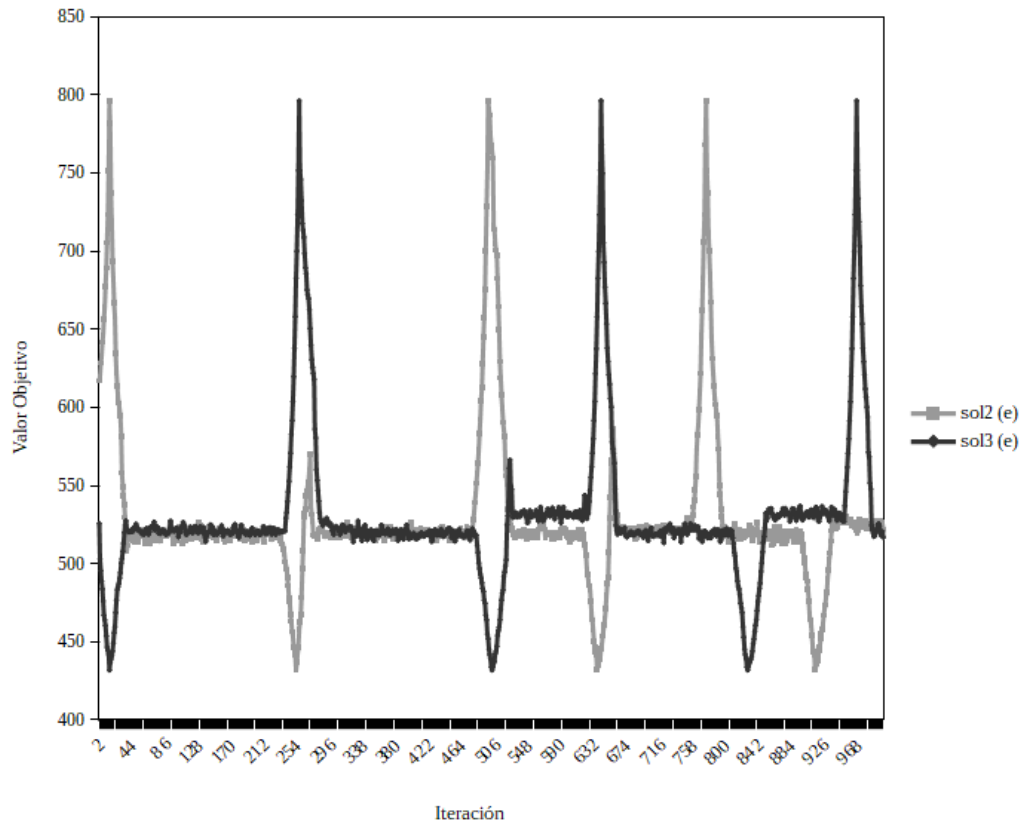


Tabla 5.11: Mejora de los resultados del tercer acercamiento sobre el segundo acercamiento.

caso		f	g	h	$TE(\%)$	$EMA(\%)$
1	sol_4	14.16	14.16	0.1	43.56	43.3
	sol_6	0.71	0.71	1.01	69.37	70.25
2	sol_2	6.49	6.51	-9.47	47.71	48.96
	sol_3	5.15	-3.51	8.42	56.61	58.88

Figura 5.19: Trayectoria del tamaño de flota del tercer acercamiento para el caso 2, 1000 iteraciones.

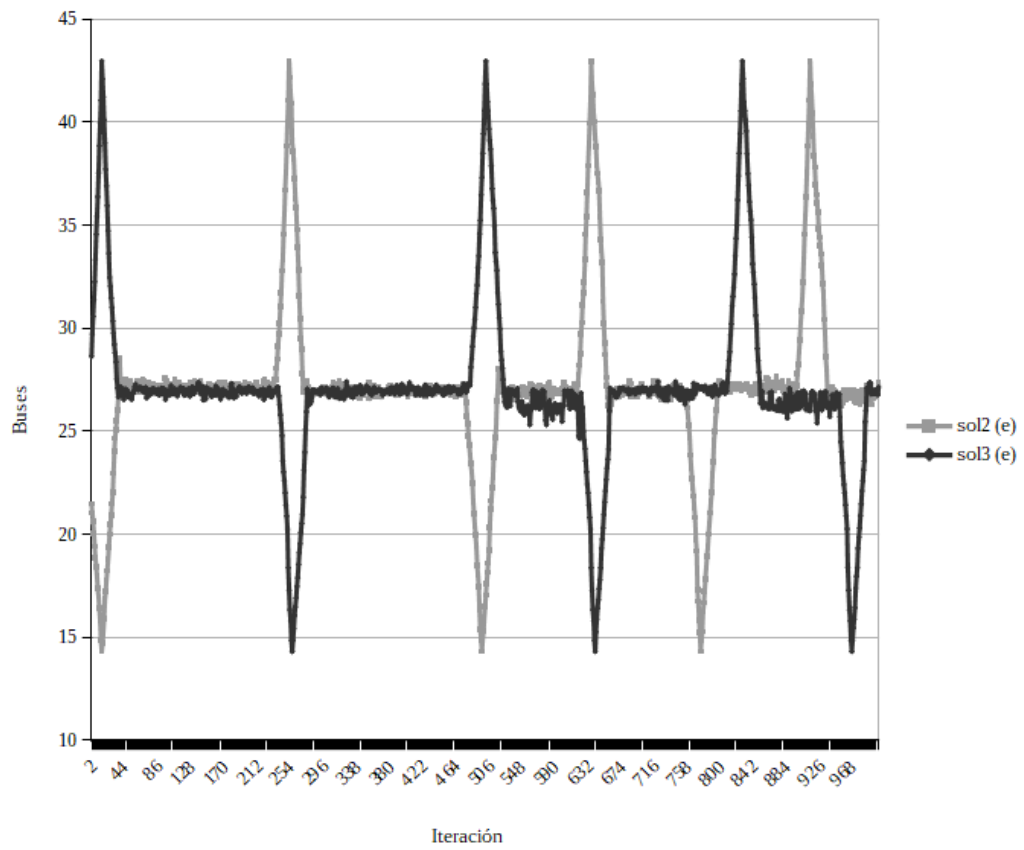
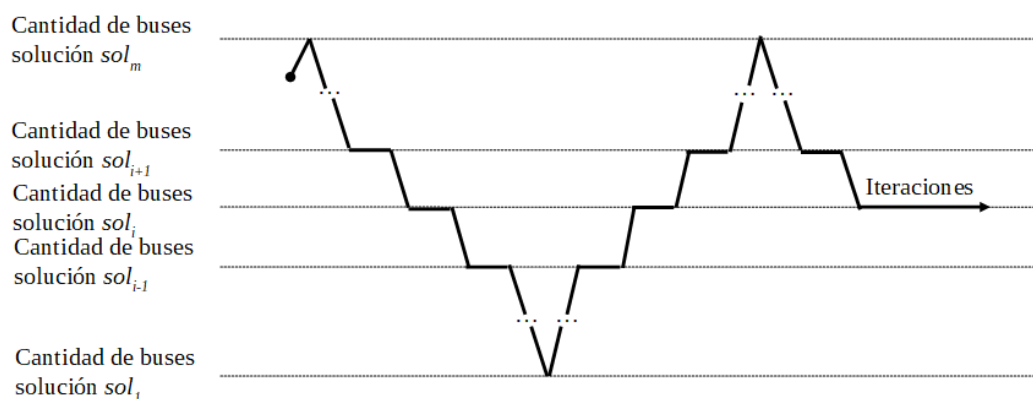


Figura 5.20: Estrategia oscilatoria multinivel crítico implementada.



- encontrar nuevas soluciones en los caminos entre las dos anteriores,
- seleccionar las soluciones no dominadas de entre todas las encontradas.

Para encontrar las soluciones iniciales en el paso 1, se extendió la memoria de largo plazo para que fuese capaz de manejar múltiples niveles críticos. Se utiliza el conjunto de soluciones triviales S_T para establecer los niveles. Cada nivel está determinado por $h(sol_i)$, es decir, la cantidad de buses de la solución trivial sol_i . Es importante notar que la única solución en el nivel 1 corresponde a sol_1 y en el nivel m a sol_m . La figura 5.20 ilustra el comportamiento de la estrategia oscilatoria para múltiples niveles.

Luego de la ejecución de la memoria de largo plazo se obtiene para cada nivel un conjunto con las mejores soluciones encontradas, máximo 15 por nivel.

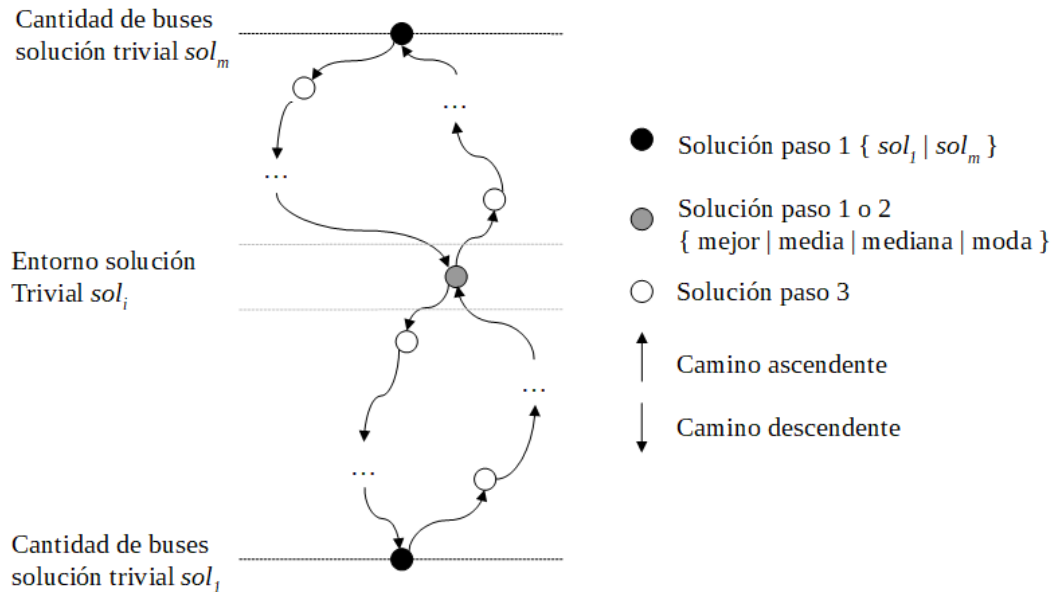
Para construir las soluciones estadísticas del paso 2 se utiliza la media, moda y mediana de las mejores soluciones de cada nivel obtenidas en el paso anterior. Las operaciones se realizan sobre los atributos de las soluciones, es decir, se calcula la media, moda y mediana para cada línea. El orden de las mejores soluciones encontradas está dado por el valor objetivo de las mismas.

De esta forma, al final del paso 2 tenemos un conjunto con $4m - 6$ soluciones,

- m mejores,
- $m - 2$ medias,
- $m - 2$ modas,
- $m - 2$ medianas.

En el paso 3 se construyen los caminos entre las soluciones de los niveles obtenidos en los pasos 1 y 2 mencionados. Comenzando desde la solución del

Figura 5.21: Encadenamiento de soluciones, paso 3.



nivel 1 se busca en dirección a la del nivel 2, luego a la del nivel 3, y así hasta el nivel m , a este camino se lo denomina ascendente. De forma similar, se busca en el camino descendente, comenzando en el nivel m .

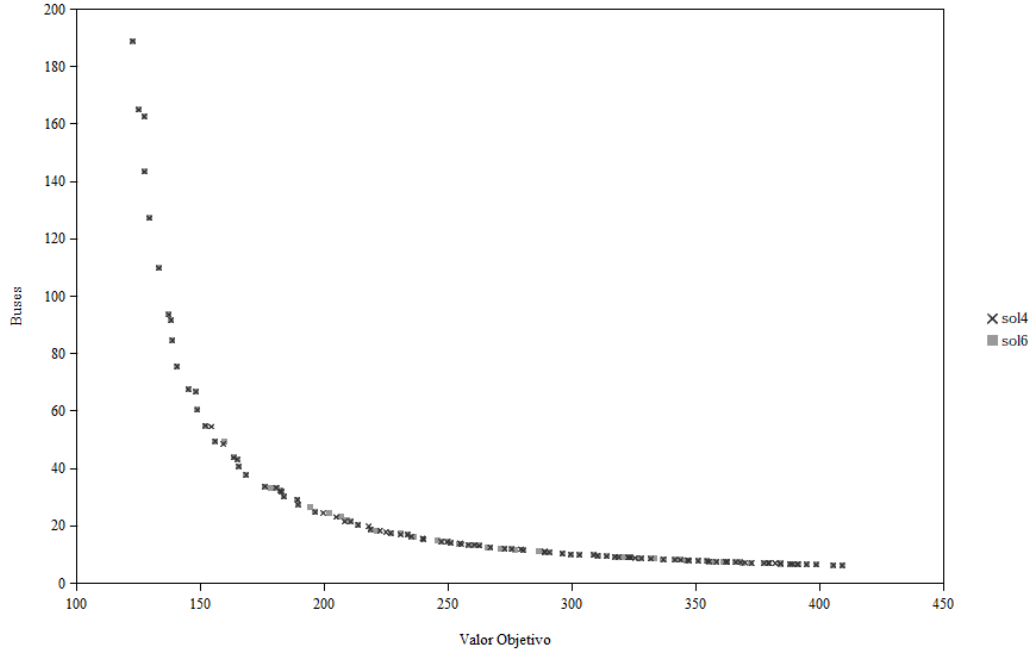
En cada paso de ambos caminos, una búsqueda exhaustiva es llevada a cabo para seleccionar la mejor y siguiente solución. Debido a la penalización en la función objetivo y que el tamaño de flota es fijado utilizando la solución actual, ambos caminos no necesariamente son iguales.

Si para alcanzar el nivel i desde el nivel superior/inferior (es decir nivel $i + 1/i - 1$) son necesarios n aumentos/disminuciones, entonces se encontrarán exactamente n soluciones en el camino descendente/ascendente entre ambas soluciones de los niveles.

Los caminos son explorados para cada tipo de solución por vez, mejor, media, moda y mediana. Al final, un simple proceso es llevado a cabo para filtrar las soluciones dominadas.

El algoritmo descrito produce un conjunto de soluciones no dominadas, aproximación al frente óptimo de Pareto, en una ejecución. Esto es relevante desde el punto de vista computacional ya que no implica resolver la variante de objetivo único muchas veces, y por lo tanto el algoritmo puede considerarse como una metaheurística multiobjetivo (Ehrgott and Gandibleux, 2002).

Figura 5.22: Frente de Pareto obtenido con la extensión multiobjetivo para el caso 1, 1500 iteraciones con las soluciones iniciales sol_4 y sol_6 , buses/valor objetivo.



Resultados

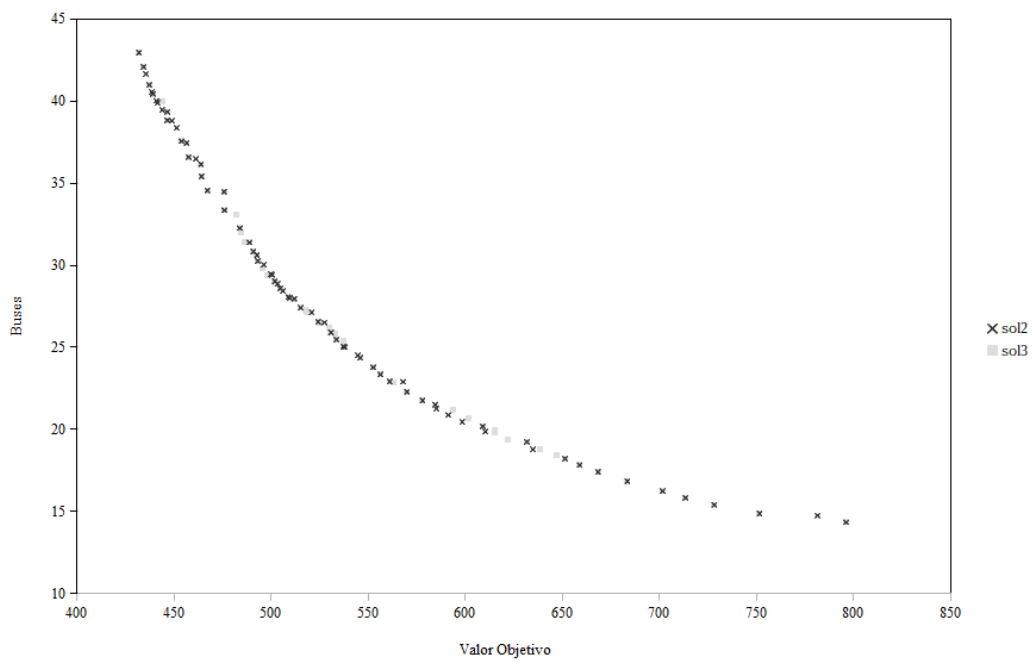
Utilizando la extensión multiobjetivo del algoritmo, se realizaron 4 ejecuciones de 1500 iteraciones cada una. La figura 5.22 muestra el resultado obtenido para el caso 1 con soluciones iniciales sol_4 y sol_6 , mientras que la figura 5.22 muestra el resultado para el caso 2 con soluciones iniciales sol_2 y sol_3 .

La tabla 5.12 muestra datos de las ejecuciones y de la cantidad de soluciones encontradas en el proceso.

Tabla 5.12: Resumen de las 4 ejecuciones de la extensión multiobjetivo del algoritmo, 1500 iteraciones cada una. La columna CSO corresponde a la cantidad de soluciones encontradas, mientras que $CSND$ cantidad de soluciones encontradas no dominadas.

<i>caso</i>		CSO	$CSND$	$TE(seg)$	EMA
1	sol_4	392	103	3.6	9684
	sol_6	392	109	3.31	8998
2	sol_2	312	71	228.87	17311
	sol_3	312	66	216.57	16492

Figura 5.23: Frente de Pareto obtenido con la extensión multiobjetivo para el caso 2, 1500 iteraciones con las soluciones iniciales sol_2 y sol_3 , buses/valor objetivo.



Capítulo 6

Casos de estudio

En el capítulo 5 se realizó un estudio computacional de las diferentes variantes del algoritmo propuesto para determinar su comportamiento, principalmente en función de sus componentes. En cambio, en este capítulo se muestra la implicancia de la aplicación del algoritmo a casos reales.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos de aplicar los algoritmos descritos en el capítulo anterior a una serie de casos de estudio. Estos algoritmos se implementaron en C++ y las pruebas se realizaron en un computador Core-i5 con 8 GB de RAM.

No existe un conjunto de casos en la literatura con los cuales se puedan comparar resultados. Son pocos los publicados que se pueden reproducir, esto por no contar con una descripción completa. Además, en general los enfoques asumen hipótesis en su implementación no siempre explicitados.

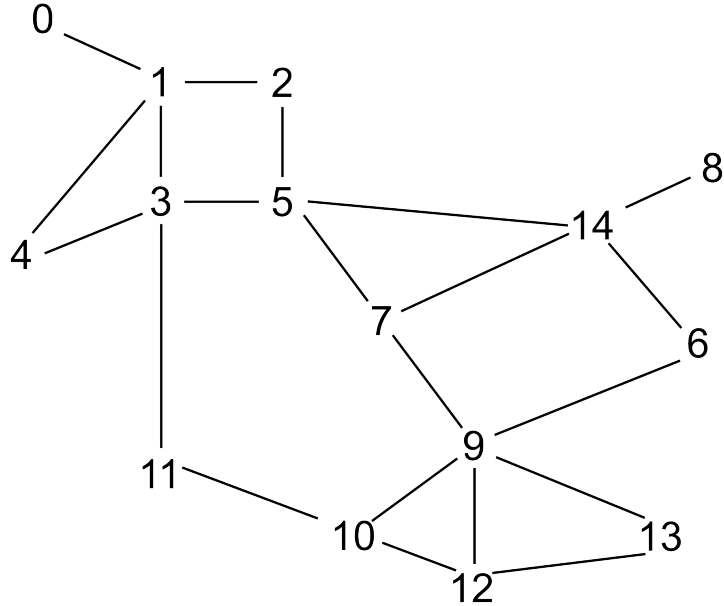
Para salvar lo anterior, se utilizan 4 casos de estudio contruidos por el grupo de investigación. Los mismos han sido ajustados de la literatura o creados por el grupo y representan ciudades reales. Las diferentes dimensiones de los casos muestran la versatilidad de los algoritmos implementados.

Los resultados se comparan con los obtenidos mediante el método exacto de (Martínez et al., 2014) en dos casos. Si bien los tiempos de ejecución no son

Tabla 6.1: Casos de estudio utilizados.

<i>Nombre</i>	<i>Dimensión</i>
Mandl	Pequeño
Rivera	Mediano-Pequeño
Puerto Montt	Mediano
Montevideo	Grande

Figura 6.1: Red subyacente del caso Mandl.



directamente comparables debido a que las plataformas de ejecución difieren, expresan la viabilidad de ejecución de los mismos ante los diferentes casos.

6.1. Mandl

El primer caso representa el sistema de transporte público de una pequeña ciudad, propuesto por (Mandl, 1980). El grafo que lo modela con un alto nivel de agregación contiene 15 nodos y 21 arcos no dirigidos (figura 6.1). Cada nodo es parada de bus y un potencial origen/destino de viajes de una matriz OD que contiene 172 pares. Se configuró el conjunto posible de valores de frecuencias $\theta = \{\frac{1}{60}, \frac{1}{50}, \frac{1}{40}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}, \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}\}$. El tamaño máximo de flota es 80, tomado de (Baaj and Mahmassani, 1991).

Dado que el caso no tiene ningún conjunto de rutas asociado, se utilizó las rutas generadas en (Mauttone and Urquhart, 2009b) y la solución trivial sol_6 .

Se configuraron las corridas de los acercamientos de la Búsqueda Tabú para que realicen 1500 iteraciones. La tabla 6.2 muestra los valores objetivos del acercamiento 2 y 3 de la Búsqueda Tabú propuesta (memoria de corto y largo plazo) y del algoritmo exacto. Se puede observar cómo los algoritmos heurísticos propuestos obtienen resultados muy cercanos a (Martínez et al., 2014), y la diferencia a favor de los métodos heurísticos en los tiempos de ejecución.

Tabla 6.2: Resultados de la búsqueda tabú y el método exacto (Martínez et al., 2014). La columna *MSI* corresponde a mejora sobre solución inicial y *TE* a tiempo de ejecución.

	<i>h</i>	<i>MSI</i> (%)	<i>TE</i> (seg)
A2	140.98	16.25	11.16
A3	139.98	16.85	3.61
(Martínez et al., 2014)	139.54		2460

Tabla 6.3: Mejores soluciones encontradas y las diferencias con la solución inicial.

	<i>línea</i>													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
<i>ini</i>	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
A2	5	5	7	7	7	7	7	7	1	1	7	7	8	8
A3	6	6	7	7	7	7	4	4	7	7	7	7	8	8

La tabla 6.3 por su parte, muestra las soluciones alcanzadas por los acercamientos y marca las diferencias entre los valores de frecuencia de las líneas.

Dada la cantidad de líneas estamos ante un caso pequeño. La figura 6.2 grafica el frente de Pareto obtenido por el algoritmo multiobjetivo y las encontradas por los acercamientos A2 y A3.

6.2. Rivera

El segundo caso representa al sistema de transporte público de la ciudad uruguaya de Rivera y ha sido utilizado en (Mauttone and Urquhart, 2009a), (Mauttone and Urquhart, 2009b), y (Martínez et al., 2014).

La red subyacente contiene 84 nodos y 143 aristas sin dirección (figura 6.3), mientras que la matriz OD tiene 378 pares origen destino que representan la demanda en un horizonte temporal de 12 horas. Como solución inicial se considera el conjunto de líneas que operaba en la ciudad cuando el caso fue construido en el año 2003. Hay 11 líneas con rutas de ida y vuelta, y dos circulares.

Al igual que en el caso de Mandl, los elementos del grafo están dados con un alto nivel de agregación y por esto se considera cada nodo como un potencial origen/destino de viajes y como parada de buses al mismo tiempo.

Se utilizan las frecuencias utilizadas por las líneas del sistema para formar el conjunto posible de valores de frecuencias $\theta = \{\frac{1}{60}, \frac{1}{40}, \frac{1}{30}, \frac{1}{20}\}$. El tamaño

Figura 6.2: Frente de Pareto del algoritmo multiobjetivo y mejores soluciones encontradas por los acercamientos 2 y 3.

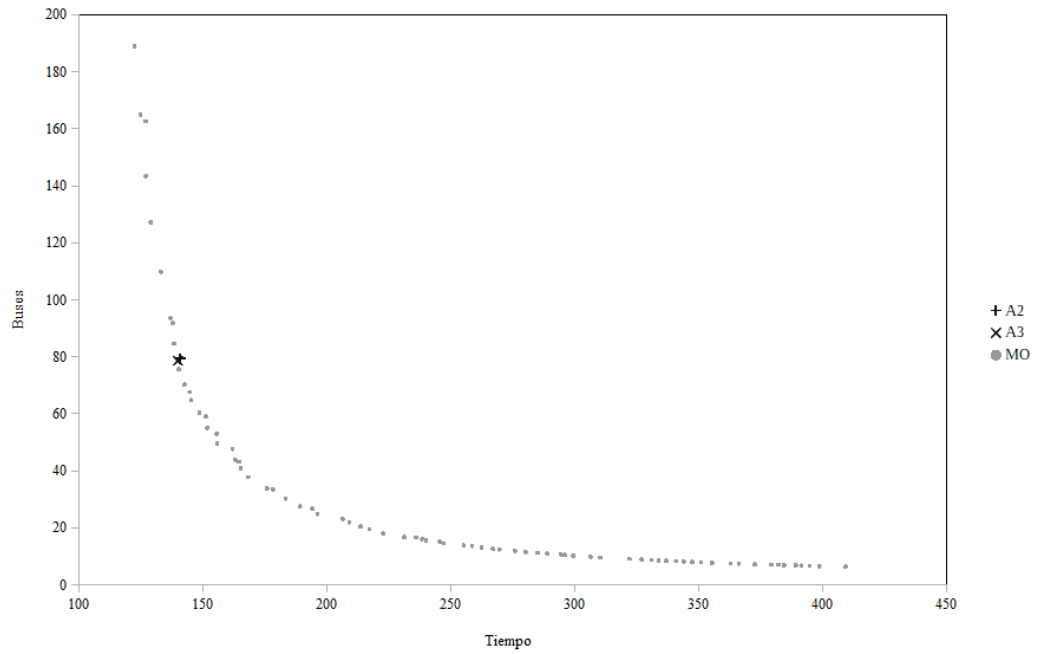


Figura 6.3: Red subyacente del caso Rivera.

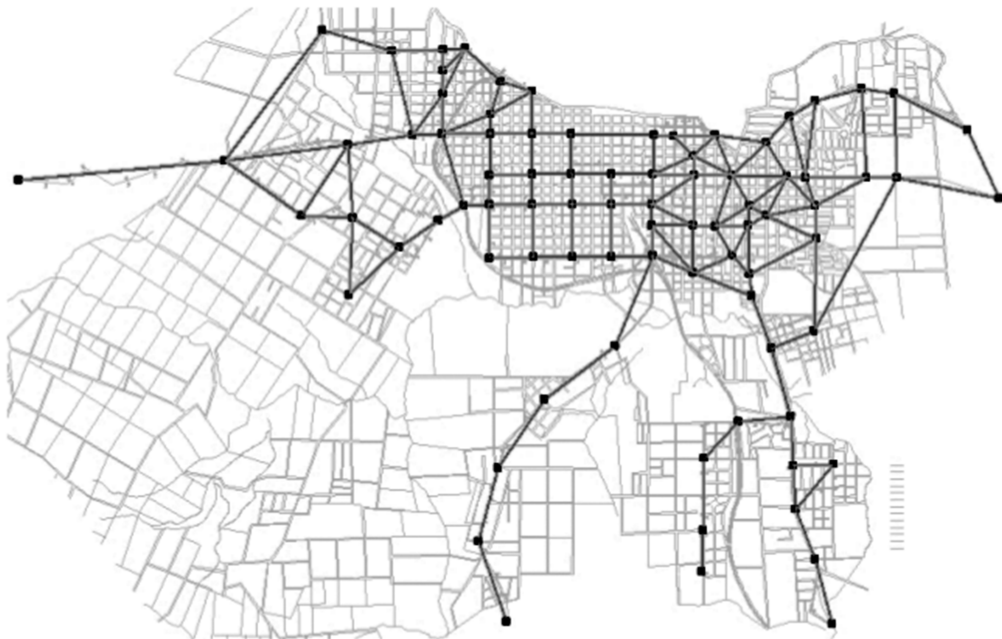


Tabla 6.4: Resultados de la búsqueda tabú y el método exacto (Martínez et al., 2014).

	h	$MSI(\%)$	$TE(seg)$
A2	517.56	3.07	841.84
A3	515.84	3.39	321.65
(Martínez et al., 2014)	514.23	3.69	*

Tabla 6.5: Mejores soluciones encontradas y las diferencias con la solución inicial.

	<i>línea</i>												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<i>ini</i>	3	1	3	3	1	3	3	1	4	3	4	2	2
A2	3	1	2	3	3	2	4	2	3	4	4	1	1
A3	3	1	3	4	3	2	4	1	3	3	4	1	2

máximo de flota es 27.

Si bien la red subyacente es bastante más grande en cantidad de nodos y aristas que el caso Mandl, dada la cantidad de líneas estamos ante un caso pequeño-mediano.

La tabla 6.4 muestra los valores objetivos de los acercamientos 2 y 3 de la Búsqueda Tabú y del método exacto. Se puede observar que los resultados de ambos acercamientos obtienen una mejora similar sobre la solución inicial y muy cercana al método exacto. El tiempo de ejecución de A3 es bastante menor que A2. Como se describe en (Martínez et al., 2014), en el caso del método exacto (*) se impuso un tiempo límite de 48 horas luego del cual se obtuvo una solución factible con un gap relativo de 18%, por lo tanto esta solución no es la óptima sino la mejor encontrada por el método exacto en base a la formulación (Martínez et al., 2014). Se configuraron las corridas de los acercamientos de la Búsqueda Tabú para que realicen 1500 iteraciones.

Por último, la figura 6.4 grafica las soluciones del algoritmo multiobjetivo y las encontradas por los acercamientos A2 y A3.

6.3. Puerto Montt

El tercer caso representa al sistema de transporte público de la ciudad chilena de Puerto Montt y es utilizado en (Giesen et al., 2013). Esta ciudad tiene un sistema de transporte público que comprende 20 líneas de buses, cada una con un itinerario de ida y vuelta, cuyos tiempos entre arribos se encuentran

Figura 6.4: Frente de Pareto del algoritmo multiobjetivo y mejores soluciones encontradas por los acercamientos 2 y 3.

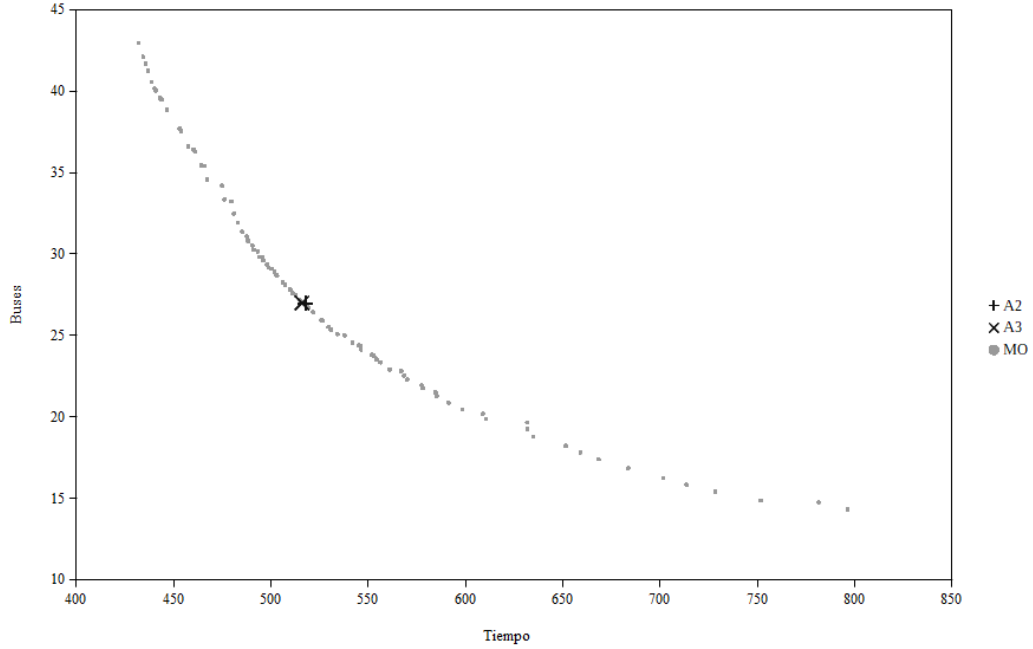


Tabla 6.6: Resultados de la búsqueda tabú para los escenarios alta y baja demanda.

<i>Escenario</i>		<i>h</i>	<i>MSI (%)</i>	<i>TE(seg)</i>
alta demanda	A2	1863.26	1.94	6349
	A3	1863.14	1.94	1648
baja demanda	A2	814.84	4.07	6999
	A3	815.24	4.02	1733

en el rango [1.5, 16.1] minutos.

El grafo contiene 733 nodos y 1662 arcos, incluyendo 70 centroides de zonas y sus correspondientes arcos de acceso (figura 6.5). Se consideran dos escenarios: alta y baja demanda. El primero de los escenarios comprende 3780 pares OD y 8595 viajes/hora, mientras que el segundo comprende 4335 pares OD y 3802 viajes/hora. Como es de esperarse, el escenario de alta demanda involucra más viajes concentrados en menos pares OD.

Se configuró el conjunto predeterminado de frecuencias $\theta = \{\frac{1}{20}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\}$, los cuales son valores representativos con respecto a las frecuencias actuales del sistema real. En el sistema real hay muchos valores de frecuencias diferentes, por esto se restringe el conjunto predeterminado a uno de tamaño manejable.

Las tablas 6.7 y 6.6 muestran los resultados de aplicar los algoritmos imple-

Figura 6.5: Red subyacente del caso Puerto Montt.



mentados para el problema de objetivo único al caso Puerto Montt. Se puede apreciar que ambos acercamientos obtienen resultados muy cercanos y que A3 lo logra en un tiempo casi 4 veces menor. También se puede apreciar cómo la mejora es bastante mayor en el escenario de baja demanda donde alcanza el 4 %.

Finalmente, la figura 6.6 presenta las soluciones encontradas utilizando la variante multiobjetivo y las de objetivo único.

6.4. Montevideo

El cuarto y último caso representa a Montevideo, ciudad capital de Uruguay. La red subyacente contiene 4945 nodos y 14672 aristas por donde transitan 133 líneas de buses (figura 6.8). Los orígenes/destinos y cantidad de viajes de la matriz OD se generaron de forma aleatoria. Este caso es utilizado en (Martínez et al., 2014), dada la cantidad de líneas estamos ante un caso grande.

El conjunto de posibles valores de frecuencia $\theta = \{\frac{1}{60}, \frac{1}{40}, \frac{1}{20}, \frac{1}{12}, \frac{1}{6}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\}$ y el tamaño de flota es 1500 buses. Dado que el caso no cuenta con los valores de frecuencia del sistema real, se utiliza la solución trivial sol_4 como inicial.

Los datos que se muestran en las figuras 6.9 y 6.10 son el resultado de

Tabla 6.7: Mejores soluciones encontradas por los acercamientos 2 y 3, y diferencias con la solución inicial.

		<i>línea</i>									
		1		2		3		4		5	
alta demanda	<i>ini</i>	4	5	5	5	4	4	5	4	5	5
	A2	2	5	3	5	4	4	1	2	5	5
	A3	1	4	2	2	5	5	1	1	5	5
baja demanda	<i>ini</i>	4	3	3	5	4	4	5	4	4	5
	A2	1	4	1	3	4	4	1	1	4	5
	A3	2	5	2	3	5	5	1	1	5	5
		6		7		8		9		10	
alta demanda	<i>ini</i>	4	4	1	4	2	4	4	4	4	5
	A2	5	5	2	5	4	2	2	2	5	5
	A3	4	4	1	5	5	2	2	2	5	5
baja demanda	<i>ini</i>	4	4	1	4	1	4	4	4	1	4
	A2	5	5	1	4	5	1	1	1	5	5
	A3	5	5	1	5	3	2	1	1	5	5
		11		12		13		14		15	
alta demanda	<i>ini</i>	4	3	4	1	4	4	4	4	5	4
	A2	5	5	5	2	5	5	5	5	4	1
	A3	5	1	3	1	5	5	5	5	5	1
baja demanda	<i>ini</i>	4	4	3	1	4	4	4	4	2	4
	A2	5	4	2	2	5	5	5	5	5	1
	A3	5	5	5	2	5	5	5	5	1	1
		16		17		18		19		20	
alta demanda	<i>ini</i>	5	5	3	1	4	4	4	4	4	4
	A2	5	5	5	5	2	4	4	5	5	2
	A3	5	5	5	4	1	3	3	5	5	1
baja demanda	<i>ini</i>	5	3	2	1	4	4	4	4	4	4
	A2	5	5	5	5	1	3	3	5	5	1
	A3	4	5	5	5	4	5	5	5	5	4

Figura 6.6: Frente de Pareto del algoritmo multiobjetivo y mejores soluciones encontradas por los acercamientos 2 y 3 para el escenario de alta demanda.

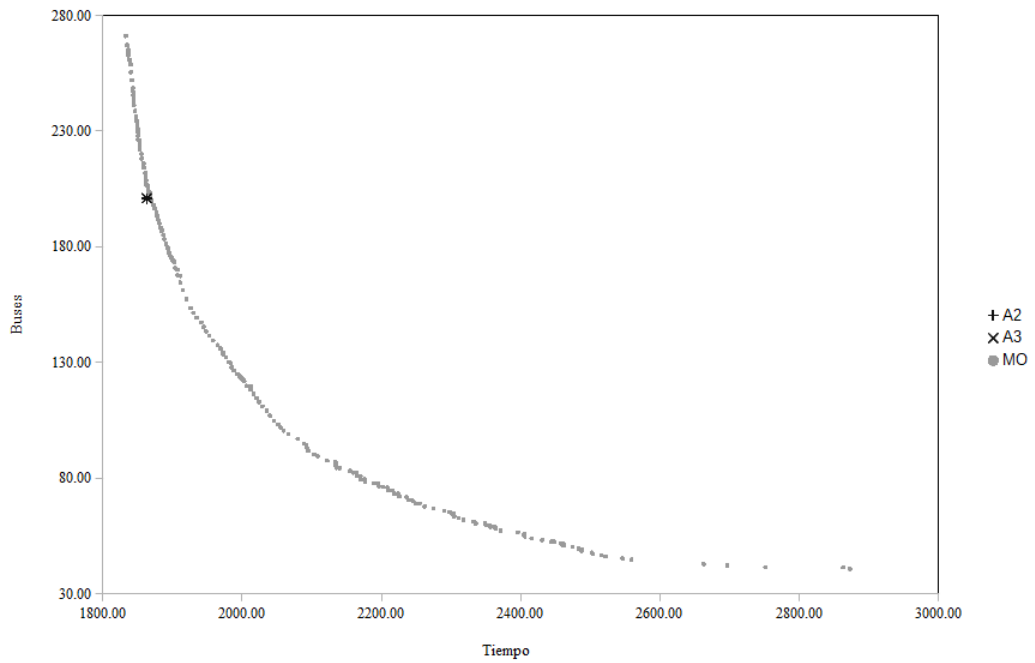


Figura 6.7: Frente de Pareto del algoritmo multiobjetivo y mejores soluciones encontradas por los acercamientos 2 y 3 para el escenario de baja demanda.

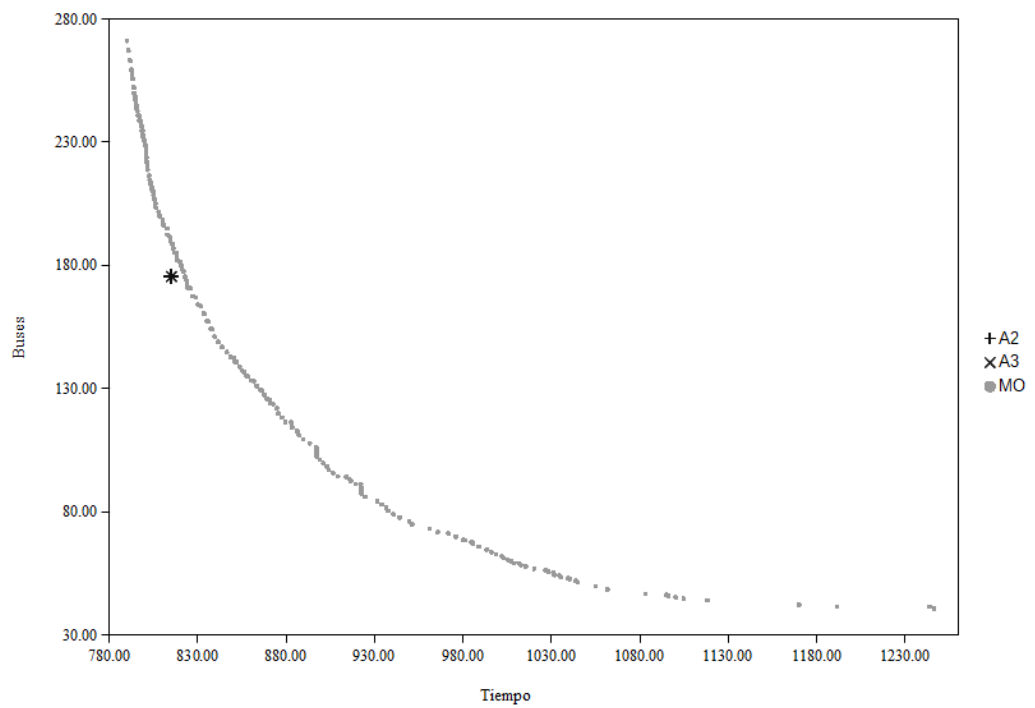


Figura 6.8: Red subyacente del caso Montevideo.



Figura 6.9: Evolución del valor objetivo en las 500 iteraciones A2 para el caso Montevideo.

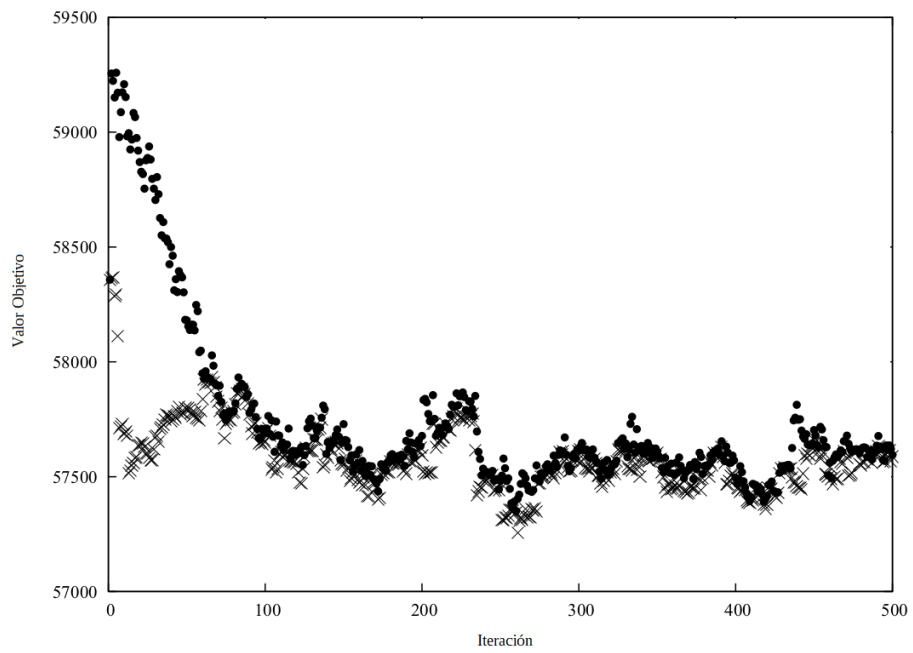
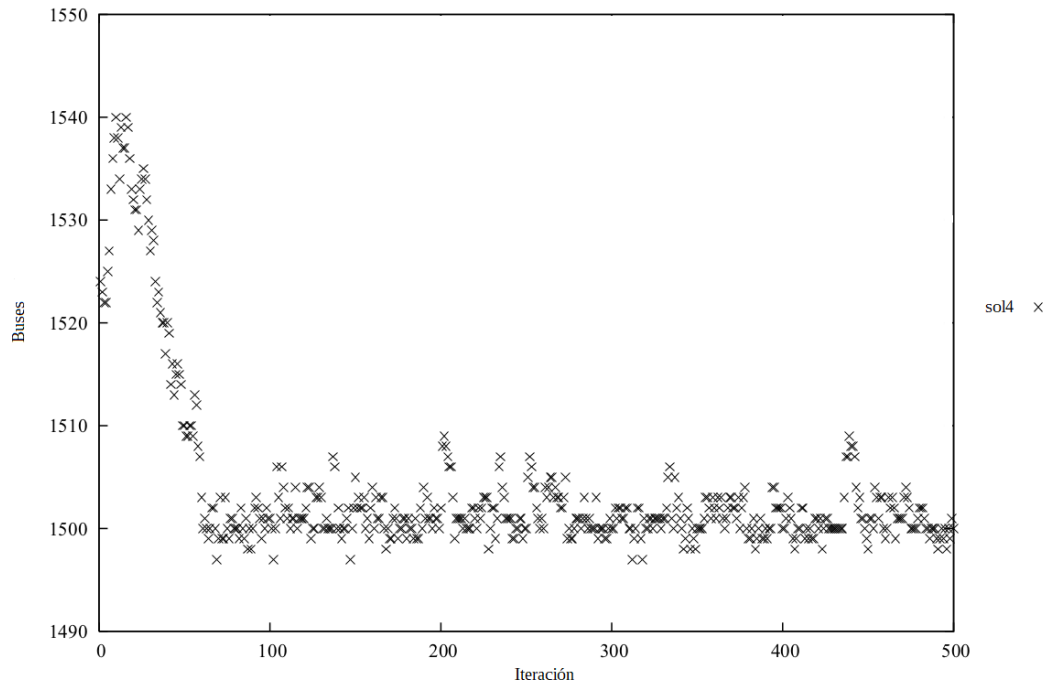


Figura 6.10: Evolución del tamaño de flota en las 500 iteraciones A2 para el caso Montevideo.



realizar 500 iteraciones de la búsqueda tabú A2. Se observó un tiempo de ejecución aproximado de 1 hora y media cada 10 iteraciones. El algoritmo obtiene una mejora de 1.7%, y la mejor solución alcanzada presenta cambios en la mayoría de las frecuencias de las líneas.

Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se trabajó sobre el problema de optimización de frecuencias en el transporte público. Para esto, se revisaron distintos modelos y algoritmos que han sido aplicados al problema en los últimos 50 años. El principal aporte de este trabajo está dado en el estudio e implementación de una alternativa utilizando la metaheurística Búsqueda Tabú.

Si bien es un problema complejo que ha atraído el interés de los investigadores, la literatura sobre el tema es escasa comparada con otros problemas del transporte público como la asignación de flota y personal.

Dada la complejidad del problema y la necesidad de aplicar a casos reales, la comunidad científica ha puesto énfasis en la resolución del problema utilizando métodos aproximados. Aun así, la resolución del problema de estudio mediante metaheurísticas es casi nula, lo cual valoriza este trabajo.

Desde el punto de vista metodológico, el aporte de este trabajo es la construcción de una alternativa para la resolución del problema de objetivo único, y otra para el multiobjetivo. En el caso del problema de objetivo único, el algoritmo se fue desarrollando de manera incremental, observando y validando en cada mecanismo que se agregaba. Primero se establecieron los aspectos básicos de Búsqueda Tabú: una operación para definir la vecindad de una solución, una lista, clasificación y periodo tabú, y un criterio de aspiración.

A esta composición de aspectos básicos que llamamos acercamiento 1, era necesario agregarle un concepto vital, un mecanismo elaborado de exploración de soluciones vecinas. Aspiración plus le aportó al algoritmo la capacidad de ajustar el esfuerzo de exploración en beneficio de la calidad de la solución en términos de valor objetivo. La principal falencia de este acercamiento, el 2, es

que su resultado depende mucho de la calidad de la solución inicial utilizada. Lo que motivó la propuesta del acercamiento 3.

El acercamiento 3, toma al 2 y lo potencia agregándole la capacidad de una memoria de largo plazo. Se utilizó la técnica de estrategia oscilatoria en conjunto con la memoria de eventos críticos para salvar el problema con respecto a la solución inicial del segundo acercamiento. Estas técnicas lograron mejorar las soluciones y el tiempo de ejecución de manera categórica, llegando así a una alternativa para el problema de objetivo único utilizando búsqueda tabú.

La versión multiobjetivo resulta atractiva dado que permite obtener muchas soluciones de compromiso en lugar de una sola. Esto aporta en la toma de decisiones ya que permite visualizar los costos y beneficios al moverse en ese conjunto resultado. La alternativa implementada consta de una serie de pasos. El primer paso, toma el acercamiento 3 de la versión de objetivo único, expande la estructura de la estrategia oscilatoria y memoria de eventos críticos para obtener un conjunto de soluciones inicial. Luego, en el segundo paso, se genera otro conjunto de soluciones realizando operaciones estadísticas simples sobre el conjunto del primer paso. En el tercero, se generan caminos entre las soluciones de los pasos anteriores, y se registran las soluciones transitadas. Por último, se realiza un simple procedimiento de purga de las soluciones dominadas.

Los algoritmos fueron probados utilizando cuatro casos, construidos completamente o adaptados, por el grupo de investigación. El tamaño de estos casos va de una decena de líneas a más de una centena. El caso de Montevideo es comparable en tamaño con los casos más grandes existentes en la literatura. Si bien para este problema no existen casos de estudios de referencia, los algoritmos implementados obtuvieron resultados en los rangos publicados en la literatura, entre 1 % y 5 %.

Por otro lado, se comparó el resultado de la búsqueda tabú contra resultados exactos, no conociéndose antecedentes de este tipo de comparaciones en la literatura del problema.

Estos aspectos, tamaño de los casos y resultados, establecen a los algoritmos implementados como una alternativa considerable para la resolución del problema de optimización de frecuencias.

7.1. Trabajos a futuro

El modelo de asignación utilizado asume que los buses cuentan con la capacidad infinita, es decir, pueden llevar todos los pasajeros que desean abordar la línea. En sistemas donde hay una gran afluencia de pasajeros esto no sucede. Por esta razón resulta interesante considerar la capacidad de los buses.

Otro aspecto que escapa al modelo del problema utilizado refiere a la congestión y su impacto en los tiempos de viaje en bus.

Se utilizó una técnica simple para construir los caminos del tercer paso de la versión multiobjetivo. Resulta interesante en este punto, explorar técnicas más avanzadas para construir estos caminos, por ejemplo utilizar la metaheurística encadenamiento de trayectorias.

Finalmente, sería interesante poder comparar los resultados de la búsqueda tabú con otras heurísticas.

Referencias bibliográficas

- Baaaj, M. and Mahmassani, H. (1991). An ai-based approach for transit route system planning and design. Journal of Advanced Transportation, (25):187–210.
- Bard, J. (1998). Practical Bilevel Optimization. Kluwer.
- Blum, C. and Roli, A. (2003). Metaheuristics in combinatorial optimization: Overview and conceptual comparison. ACM Computing Surveys, (3):268–308.
- Bunte, S. and Kliewer, N. (2009). An overview on vehicle scheduling models. Public Transportation, 1(4):299–317.
- Byrne, B. (1975). Public transportation line position and headways for minimum users and system cost in a radial case. Transportation Research, (9):97–102.
- Byrne, B. (1976). Cost minimizing positions, length and headways for parallel public transit lines having different speeds. Transportation Research, (10):209–214.
- Ceder, A. (1984). Bus frequency determination using passenger count data. Transportation Research A, (18):439–453.
- Ceder, A. and Wilson, N. (1986). Bus network design. Transportation Research B, (20):331–344.
- Chriqui, C. and Robillard, P. (1975). Common bus lines. Transportation Science, (9):115–121.
- Constantin, I. and Florian, M. (1995). Optimizing frequencies in a transit network: a nonlinear bi-level programming approach. International Transactions in Operational Research, (2):149–164.

- de Cea, J. and Fernández, E. (1993). Transit assignment for congested public transport systems: An equilibrium model. Transportation Science, (27):133–147.
- Desaulniers, G. and Hickman, M. (2007). Public transit. Transportation, Handbooks in Operations Research and Management Science, 14:69–127.
- Dubois, D., Bel, G., and Llivre, M. (1979). A set of methods in transportation network synthesis and analysis. Journal of the Operational Research Society, (30):797–808.
- Ehrgott, M. (2005). Multicriteria Optimization. Springer.
- Ehrgott, M. and Gandibleux, X. (2002). Multiple criteria optimization: State of the art annotated bibliographic surveys. In International Series in Operations Research and Management Science, pages 369–444. Kuwer.
- Freling, R., Huisman, D., and Walgelmans, A. (2003). Models and algorithms for integration of vehicle and crew scheduling. Journal of Scheduling, 6(1):63–85.
- Furth, P. (1985). Alternating deadheading in bus route operations. Transportation Science, (19):13–28.
- Gao, Z., Sun, H., and Shan, L. (2004). A continuous equilibrium network design model and algorithm for transit systems. Transportation Research B, (38):235–250.
- Gendreau, M. and Potvin, J. (2010). Handbook of Metaheuristics. Springer.
- Giesen, R., Martínez, H., Mauttone, A., and Urquhart, M. (2013). Public transit service design: a case study of frequency optimization for a medium-sized city. In 16 th EURO Working Group on Transportation, Porto, Portugal.
- Giesen, R., Martínez, H., Mauttone, A., and Urquhart, M. (2016). A method for solving the multi-objective transit frequency optimization problem. Journal of Advanced Transportation, 50(8):2323–2337.
- Glover, F. (1989). Tabu search - part i. ORSA Journal on Computing, (1):190–206.

- Glover, F. (1990). Tabu search - a tutorial. Interfaces, (20):74–94.
- Glover, F. and Laguna, M. (1998). Tabu search. Springer.
- Han, A. and Wilson, N. (1982). The allocation of buses in heavily utilized networks with overlapping routes. Transportation Research B, (13):221–232.
- Lampkin, W. and Saalmans, P. (1967). The design of routes, service frequencies and schedules for a municipal bus undertaking: a case study. Operational Research Quaterly, (18):375–397.
- LeBlanc, L. (1988). Transit system network design. Transportation Research B, (22):383–390.
- Mandl, C. (1980). Evaluation and optimization of urban public transportation networks. European Journal of Operational Research, (5):396–404.
- Martínez, H., Mauttone, A., and Urquhart, M. (2012a). Formulación y metaheurística para el problema de la determinación de frecuencias en el transporte colectivo público. In XVI Congreso Latino-Iberoamericano de Investigación Operativa, Río de Janeiro, Brasil.
- Martínez, H., Mauttone, A., and Urquhart, M. (2014). Frequency optimization in public transportation systems: Formulation and metaheuristic approach. European Journal of Operational Research, 236:22–36.
- Martínez, M., Mauttone, A., and Urquhart, M. (2012b). Formulation and metaheuristic approach to frequency optimization in public transportation systems. In Conference on Advanced Systems for Public Transportation, Santiago, Chile.
- Mauttone, A. and Urquhart, M. (2009a). A multi-objective metaheuristic approach for the transit network design problem. Public Transport, (1):253–273.
- Mauttone, A. and Urquhart, M. (2009b). A route set construction algorithm for the transit network design problem. Computers and Operations Research, (36):2440–2449.

- Ortúzar, J. and Willumnsen, L. (2011). Modelling Transport. John Wiley and Sons.
- Schéele, S. (1981). A supply model for public transit services. Transportation Research B, (14):133–146.
- Silman, L., Barzili, Z., and Passy, U. (1974). Planning the route system of urban buses. Computer & Operations Research, (1):210–211.
- Sorensen, K. and Glover, F. (2013). Metaheuristics. In Encyclopedia of Operations Research and Management Science, pages 960–970. Springer.
- Spiess, H. and Florian, M. (1989). Optimal strategies: a new assignment model for transit networks. Transportation Research B, (23):83–102.
- Yu, B., Yang, Z., and Yao, J. (2010). Genetic algorithm for bus frequency optimization. Journal of Transportation Engineering, (136):576–583.

APÉNDICES

Apéndice 1

Algoritmo de asignación

El modelo de optimización de frecuencias presentado en el capítulo 4 incluye el submodelo de asignación de (Spiess and Florian, 1989). El submodelo de asignación es necesario ya que define el comportamiento de los usuarios respecto a un conjunto de líneas (solución del problema), y de esta forma permite obtener medidas relativas al rendimiento del sistema de transporte público desde el punto de vista de los usuarios. El algoritmo es una variante de Dijkstra dado que resuelve un problema similar: encontrar el hipercamino mas corto en un grafo. En este apéndice se presenta los pseudocódigos del algoritmo y un ejemplo de ejecución del mismo utilizando el caso 0.

El algoritmo 1.1 recibe como parámetro la red de transporte $G(N, A)$, donde N es el conjunto de nodos y A el de arcos, la matriz de demanda D , y el destino de los viajes r . Este último parámetro se agrega de modo de simplificar los pseudocódigos. Si bien se presenta el algoritmo para un destino, extenderlo no es difícil ya que solo es necesario repetirlo para cada uno de los destinos.

El algoritmo se compone de dos partes:

- en la primera parte, línea 2, se calcula la estrategia óptima \bar{A}^* desde todos los orígenes al destino $r \in N$ y los tiempos esperados u_n^* en cada nodo $i \in N$ hacia el destino r ;
- en la segunda parte, línea 3, se asigna la demanda (que viaja al destino $r \in N$ desde todos los orígenes), a la red utilizando la estrategia óptima \bar{A}^* calculada en la primera parte.

La función *estrategiaOptima* (1.2) implementa la primera parte del algoritmo. A partir de la red de transporte $G(N, A)$ y el nodo destino r , retorna la estrategia óptima \bar{A}^* que los usuarios adoptan, los tiempos esperados u para

Algorithm 1.1 Asignación de (Spiess and Florian, 1989)

```
1: procedure ASIGNACION( $G(N, A), D, r$ )
2:    $\bar{A}^*, u, f, L \leftarrow estrategiaOptima(G(N, A), r)$ 
3:    $V, v \leftarrow asignacionDemanda(G(N, A), D, r, \bar{A}^*, f, L)$ 
4: end procedure
```

alcanzar r , y la lista L que contiene los arcos en el orden inverso en el que fueron procesados (relevante para la segunda parte del algoritmo). Esta función, calcula \bar{A}^* y u en el orden inverso a los viajes, es decir recorriendo la red desde el destino hacia los orígenes. Para esto, utiliza las siguientes variables auxiliares:

- $f_i, i \in N$ para mantener la frecuencia combinada de los arcos salientes al nodo i ,
- $visitado_i, i \in N$ para marcar cuando alcanza un nodo i ,
- $visitado_a, a \in A$ para marcar cuando alcanza un arco a ,
- E , para guardar los arcos $a \in A$ de forma ordenada.

En este trabajo las frecuencias se combinan linealmente, es decir la frecuencia combinada en un nodo i es la suma de los valores de frecuencias de los arcos salientes a i , $f_i = \sum_{a \in A_i^+} f_a$.

La función *asignacionDemanda* (1.4) implementa la segunda parte del algoritmo. Toma como entrada la red de transporte $G(N, A)$, la matriz de demanda D , el nodo destino r , la estrategia óptima \bar{A}^* , y la lista de arcos L . Este último parámetro indica el orden en que se procesan los arcos al asignar la demanda. La función retorna los volúmenes de pasajeros que transitan por cada nodo $V_i, i \in N$ y cada arco $v_a, a \in A$.

También se presentan las funciones *valorObjetivoPrimal* (1.5) y *valorObjetivoDual* (1.3), dos opciones para obtener el tiempo total del sistema de transporte representado por $G(N, A)$ y D para el destino r . Estas opciones son alternativas que retornan el mismo valor. La primera, toma como entrada los datos de la red $G(N, A)$, la matriz de demanda D , el destino r , y los tiempos u . Mientras que la segunda, toma como entrada la red $G(N, A)$, la estrategia óptima \bar{A}^* y los volúmenes v y V .

Es interesante observar que no es necesario ejecutar la segunda parte del algoritmo para obtener el valor objetivo. Es decir, si lo que se necesita es el valor objetivo, basta con ejecutar la primera parte del algoritmo y luego la función

Algorithm 1.2 Primera parte del algoritmo de asignación de (Spiess and Florian, 1989)

```

1: procedure ESTRATEGIAOPTIMA( $G(N, A), r$ )
2:   Inicialización
3:    $\overline{A}^* = \square$ 
4:   for all  $i \in N$  y  $i \neq r$  do
5:      $u_i \leftarrow \infty$ 
6:      $f_i \leftarrow 0$ 
7:   end for
8:    $u_r \leftarrow 0$ 
9:    $f_r \leftarrow 0$ 
10:  Encontrar estrategia óptima
11:  for all  $i \in N$  y  $i \neq r$  do
12:     $visitado_i \leftarrow False$ 
13:  end for
14:   $visitado_r \leftarrow True$ 
15:  for all  $a \in A$  do
16:     $visitado_a \leftarrow False$ 
17:  end for
18:   $E = crear(), L = crear()$ 
19:  for all  $a \in A$  y  $destino(a) = r$  do
20:     $insertar(E, a, c_a)$ 
21:  end for
22:  while  $E \neq \emptyset$  do
23:     $a = min(E), eliminar(E, a)$ 
24:     $insertar(L, a, |A| - |L|)$ 
25:     $i \leftarrow origen(a), j \leftarrow destino(a)$ 
26:    if  $u_i \geq u_j + c_a$  then
27:       $actualizar \leftarrow True$ 
28:      if  $f_a = \infty$  then
29:         $u_i \leftarrow u_j + c_a$ 
30:         $f_i \leftarrow \infty$ 
31:      else
32:         $m \leftarrow 1$ 
33:        if  $visitado_i = True$  then
34:           $m \leftarrow f_i u_i$ 
35:        end if
36:         $u_i \leftarrow \frac{m + f_a(u_j + c_a)}{f_i + f_a}$ 
37:         $f_i \leftarrow f_i + f_a$ 
38:      end if
39:       $\overline{A}^* \leftarrow \overline{A}^* + \{a\}$ 
40:    end if

```

```

41:     if  $visitado_i = False$  then
42:          $visitado_i \leftarrow True$ 
43:         for all  $a' \in A$  y  $destino(a') = i$  y  $visitado_{a'} = False$  y
          $origen(a') \neq r$  do
44:              $insertar(E, a', u_i + c_{a'})$ 
45:         end for
46:     else
47:         if  $actualizar = True$  then
48:             for all  $a' \in A$  y  $destino(a') = i$  y  $visitado_{a'} = False$  y
              $origen(a') \neq r$  do
49:                  $actualizar(E, a', u_i + c_{a'})$ 
50:             end for
51:         end if
52:     end if
53: end while
54: return  $\bar{A}^*, u, L$ 
55: end procedure

```

Algorithm 1.3 Cálculo valor objetivo problema dual

```

1: procedure VALOROBJETIVODUAL( $G(N, A), D, r, u$ )
2:      $vod \leftarrow 0$ 
3:     for all  $i \in N$  do
4:          $vod \leftarrow d_{ir}u_i$ 
5:     end for
6: end procedure

```

Algorithm 1.4 Segunda parte del algoritmo de asignación de (Spiess and Florian, 1989)

```
1: procedure ASIGNACIONDEMANDA( $G(N, A), D, r, \bar{A}^*, L$ )
2:   Inicialización
3:   for all  $a \in A$  do
4:      $v_a \leftarrow 0$ 
5:   end for
6:   for all  $i \in N$  do
7:      $V_i \leftarrow D_{ir}$ 
8:   end for
9:   Asignar la demanda de acuerdo a la estrategia óptima
10:  while  $L \neq \emptyset$  do
11:     $a = \min(L), \text{eliminar}(L, a)$ 
12:     $i \leftarrow \text{origen}(a), j \leftarrow \text{destino}(a)$ 
13:    if  $a \in \bar{A}^*$  then
14:      if  $f_a = \infty$  then
15:         $v_a \leftarrow V_i$ 
16:         $V_j \leftarrow V_j + V_i$ 
17:         $V_i \leftarrow 0$ 
18:      else
19:         $v_a \leftarrow \frac{V_i f_a}{f_i}$ 
20:         $V_j \leftarrow V_j + v_a$ 
21:      end if
22:    end if
23:  end while
24:  return  $V, v$ 
25: end procedure
```

Algorithm 1.5 Cálculo valor objetivo problema primal

```
1: procedure VALOROBJETIVOPRIMAL( $G(N, A), \bar{A}^*, v, V$ )
2:    $tv \leftarrow 0, te \leftarrow 0$ 
3:   for all  $a \in \bar{A}^*$  do
4:      $tv \leftarrow tv + c_a v_a$ 
5:   end for
6:   for all  $i \in N$  do
7:      $facum \leftarrow 0$ 
8:     for all  $a \in \bar{A}^*$  y  $origen(a) = i$  y  $facum \neq \infty$  do
9:        $facum \leftarrow fdiv + f_a$ 
10:    end for
11:    if  $facum \neq \infty$  y  $fdiv > 0$  then
12:       $te \leftarrow te + \frac{V_i}{facum}$ 
13:    end if
14:  end for
15:   $vop \leftarrow tv + te$ 
16: end procedure
```

valorObjetivoPrimal (1.5). Esto fue utilizado en la Búsqueda Tabú presentada en el capítulo 5 dado que se reduce considerablemente el tiempo de ejecución de la heurística, ya que para evaluar las soluciones solo se utiliza el valor objetivo.

Para finalizar, las tablas 1.1 y 1.2 muestran el resultado de aplicar el algoritmo 1.1 al caso 0, resultados para la primera y segunda parte del algoritmo respectivamente.

Tabla 1.1: Resultado de aplicar la primera parte del algoritmo (Spiess and Florian, 1989) al caso 0

#	etiqueta de los nodos (u_i, f_i)										arco con $\min u_j + c_a$					
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$a = (i, j)$	f_a	$u_j + c_a$	$a \in \bar{A}^*$
1	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	$\infty, 0$	(10, 3)	∞	4	si
2			$\infty, 0$									$\infty, 0$	(2, 10)	$\frac{1}{15}$	4	si
3			$19, \frac{1}{15}$									$4, \infty$	(11, 3)	∞	6	si
4												$6, \infty$	(5, 11)	$\frac{1}{3}$	6	si
5					9, 13								(1, 10)	$\frac{1}{15}$	8	si
6		$23, \frac{1}{15}$											(11, 5)	∞	9	no
7													(2, 11)	$\frac{1}{3}$	10	si
8			$11.5, \frac{2}{5}$										(10, 2)	∞	11.5	no
9													(9, 2)	∞	15.5	si
10									15.5, ∞				(4, 9)	$\frac{1}{6}$	15.5	si
11					$21.5, \frac{1}{6}$								(7, 3)	∞	16	si
12													(6, 7)	$\frac{1}{6}$	16	si
13													(8, 9)	∞	17.5	si
14								17.5, ∞					(1, 8)	$\frac{1}{6}$	17.5	si
15		$19, \frac{7}{30}$											(8, 1)	∞	19	no
16													(9, 4)	∞	21.5	no
17													(7, 6)	∞	22	no
18	$30.5, \frac{1}{6}$												(0, 8)	$\frac{1}{6}$	24.5	si
	$27.5, \frac{1}{3}$	$19, \frac{7}{30}$	$11.5, \frac{2}{5}$	0, 0	$21.5, \frac{1}{6}$	$9, \frac{1}{3}$	$22, \frac{1}{6}$	16, ∞	17.5, ∞	15.5, ∞	4, ∞	6, ∞				

Tabla 1.2: Resultado de aplicar la segunda parte del algoritmo (Spiess and Florian, 1989) al caso 0

#	volúmenes de los arcos		volúmenes de los nodos											
	(i, j)	volumen	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
19	(0, 7)	0.5	1	0	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0
18	(0, 8)	0.5									0.5			
17	(7, 6)	0								0.5				
16	(9, 4)	0												
15	(8, 1)	0												
14	(1, 8)	0									0.5			
13	(8, 9)	0.5										0.5		
12	(6, 7)	0							0.5					
11	(7, 3)	0.5				-0.5								
10	(4, 9)	0												
9	(9, 2)	0.5			0.5									
8	(10, 2)	0												
7	(2, 11)	0.42												0.42
6	(11, 5)	0												
5	(1, 10)	0												
4	(5, 11)	0												
3	(11, 3)	0.42				-0.08								
2	(2, 10)	0.08											0.08	
1	(10, 3)	0.08				0								
			27.75, $\frac{1}{3}$	19, $\frac{7}{30}$	11.5, $\frac{2}{5}$	0, 0	21.5, $\frac{1}{6}$	9, $\frac{1}{3}$	22, $\frac{1}{6}$	16, ∞	17.5, ∞	15.5, ∞	4, ∞	6, ∞