

Tesis de Maestría en Física



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



Rol de los diversos acoplamientos en la cromodinámica cuántica infrarroja

Matías Fernández Lakatos

Orientadores: Nicolás Wschebor y Marcela Peláez

PEDECIBA
Universidad de la República
Montevideo
2018

Tribunal de defensa de tesis:

- Presidente de mesa: Dr. Raúl Donangelo donangel@fing.edu.uy,
- Dra. Marcela Peláez, mpelaez@fing.edu.uy,
- Dr. Pablo Mora pablmora@gmail.com,
- Dr. Pablo Pais pol@fisica.edu.uy,
- Dr. Martin Reiris mareithu@gmail.com,
- Suplente: Dra. Lucia Duarte lduarte@fing.edu.uy,

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 1 |
| 1.1. Introducción | 1 |
| 1.2. La interacción fuerte y la carga de color | 3 |
| 1.3. Cromodinámica cuántica | 5 |
| 1.4. Problemas en el infrarrojo | 11 |
| 2. Modelo con gluones masivos | 16 |
| 2.1. Introducción de g_A y g_C | 16 |
| 2.2. Cálculo del propagador a partir de diagramas 1PI | 17 |
| 2.2.1. El propagador gluónico | 18 |
| 2.2.2. El propagador del fantasma | 19 |
| 2.3. Reglas de Feynman | 19 |
| 2.3.1. Truco de Feynman | 21 |
| 2.3.2. Diagramas | 24 |
| 2.4. Renormalización | 28 |
| 2.4.1. Características generales del esquema de renormalización | 30 |
| 2.4.2. Elección del esquema de renormalización | 31 |
| 2.4.3. Parte divergente de los factores de renormalización Z | 34 |
| 2.5. Definición de las constantes de acoplamiento g_C y g_A | 34 |
| 2.6. Problemas encontrados | 38 |
| 2.7. Resultados sin grupo de renormalización | 39 |
| 3. Resultados | 41 |
| 3.1. Grupo de renormalización | 41 |
| 3.2. Funciones β | 45 |
| 3.2.1. Vínculo entre g_{A0} y g_{C0} | 46 |
| 3.2.2. Resultados en el límite ultravioleta | 47 |
| 3.2.3. Resultados en el límite infrarrojo | 47 |
| 3.3. Comparación con simulaciones numéricas | 49 |
| 3.4. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales | 51 |
| 3.4.1. En la región infrarroja | 51 |
| 3.4.2. Caso general | 52 |
| 3.5. Análisis del polo de Landau | 54 |
| 3.6. Otras verificaciones | 55 |
| 3.7. Ajuste de parámetros y errores | 56 |
| 3.7.1. Error para los propagadores | 57 |

| | |
|---------------------------|-----------|
| 3.8. Resultados | 58 |
| 4. Conclusiones | 61 |
| Bibliografía | 64 |

Resumen

La fuerza nuclear fuerte es una de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Esta interacción es la responsable de mantener a los neutrones y protones formando los núcleos atómicos. Sin embargo, los componentes fundamentales que sienten la interacción fuerte son los quarks y gluones los cuales constituyen a los neutrones y protones. La teoría que describe las interacciones entre quarks y gluones es la Cromodinámica Cuántica (QCD). La QCD presenta interacciones pequeñas cuando los impulsos característicos del fenómeno estudiado son grandes respecto a la masa del protón por la velocidad de la luz. En ese régimen, llamado régimen ultravioleta (UV), se han desarrollado cálculos perturbativos eficientemente. Sin embargo, no pueden usarse las mismas técnicas para estudiar el régimen a impulsos pequeños, llamado régimen infrarrojo, ya que la teoría de perturbaciones usual predice que la intensidad de las interacciones crece sin límite (“polo de Landau infrarrojo”). En la tesis voy a introducir el modelo que proponemos para estudiar dicho régimen. El mismo consiste en modificar el lagrangiano fijado gauge de QCD agregando un término de masa para los gluones y diferenciar las constantes de acoplamiento entre gluones de la del acoplamiento entre éstos y los fantasmas. Hasta ahora, todos los cálculos publicados se han hecho asumiendo todas las constantes de acoplamiento iguales. Dicha identificación es apropiada para el régimen UV pero puede ser mejorada en el IR. El eje central de la tesis será mostrar el rol que adquieren estos acoplamientos en el régimen infrarrojo y la consecuencia de los mismos en las funciones de correlación.

Palabras clave: Cromodinámica cuántica, infrarrojo, teoría de perturbación.

Abstract

The strong nuclear force is one of the fundamental forces of nature. This interaction is responsible for maintaining neutrons and protons within the atomic nucleus. However, the fundamental components that feel the strong interaction are the quarks and gluons which form protons and neutrons. The theory that describes this interaction is Quantum Chromodynamics (QCD). The QCD interactions are small when the typical momenta in the phenomenon being studied are larger than the product of the mass of the proton times the speed of light. In this regime, called the ultraviolet regime (UV), efficient perturbative calculations have been developed. Nevertheless, the same techniques cannot be used to study the small momenta regime, referred to as the infrared regime (IR), since the usual perturbation theory predicts a divergent interaction (“Infrared Landau pole”). In this thesis I am going to present the model that we use to study this regime avoiding the existence of a Landau pole. The model consists of modifying the gauge fixed Lagrangian of QCD by adding a gluon mass term. In particular, we differentiate the coupling constants between ghost and gluons and the gluon self coupling. Previous work within this massive model were done considering the same coupling constants for all interactions. This approximation is appropriate for the UV regime but can be improved in the IR case. The main goal of this thesis is to show the role that these coupling constants play in the infrared regime and the consequences that they have in correlation functions.

Keywords: Quantum Chromodynamics, infrared, perturbation theory.

Agradecimientos

Cuando uno ve un puzzle ya armado desde lejos, aprecia una imagen continua. En esta ocasión, la imagen del puzzle se adjudica a mi. Sin embargo, si nos acercamos a él, seremos capaces de ver muchas piezas colocadas por distintos autores. Es por esta razón que necesito dar las gracias a personas e instituciones sin las cuales no hubiera sido posible realizar este trabajo.

Agradezco a la CAP por la financiación de mi beca, sin la cual no hubiera podido dedicarme totalmente a la tesis. Agradezco a la ANII, institución que financió el proyecto de mi orientadora y del cual me vi favorecido para poder viajar.

Agradezco al Instituto de Física de la Facultad de Ingeniería por el espacio y por sus integrantes. De ellos tengo especial agradecimiento a mis tutores Nicolás Wschebor y Marcela Peláez, los cuales estuvieron siempre a mi lado para responder cada pregunta que hacía (y eran muchas), por empujarme a ser mejor estudiante, por confiar en mi desde un principio y por mostrarme su mejor lado tanto académico como personal. Del mismo instituto quiero agradecer a la sala 20, no por su ruido pero sí por las lindas amistades que ahí se generaron y/o se fortalecieron. Por los ánimos que me dieron sus integrantes y por las infinitas risas que tan bien hacen.

Agradezco a mi novia y compañera, Nedda, que me acompaña desde el comienzo de este trabajo y con la cual siempre puede contar para todo dándome un alivio en este proceso. Agradezco también su paciencia cuando tuve que viajar.

A su vez, le quiero agradecer a mi familia. A los de sangre y a los que se hicieron parte de ella por su presencia. En particular, a mis padres y hermana los cuales me dieron un sustento desde siempre y los cuales hicieron posible la persona que hoy soy.

Le quiero agradecer también a mis compañeros y compañeras de licenciatura.

Finalmente, agradezco a todas las personas que en el día a día están y estuvieron presentes de una u otra forma.

Glosario

- Orden árbol (del inglés, tree-level): corresponde al orden cero del desarrollo perturbativo de una función de correlación con respecto al parámetro perturbativo.
- Primer orden u orden a 1 loop: corresponde al primer orden del desarrollo perturbativo de una función de correlación con respecto al parámetro perturbativo.
- Fantasma: Campo virtual que surge de la fijación gauge. El mismo tiene su correspondiente anti-campo llamado anti-fantasma. Éstos son variables grassmanianas.
- Propagador: Función de Green (o de correlación) a dos puntos de determinado campo.
- Constante de acoplamiento desnuda: constante de acoplamiento sin renormalizar. Esta constante es la que aparece en el lagrangiano.
- Función de forma del fantasma (J): se define como el producto del propagador del fantasma por el cuadrado del momento.

Capítulo 1

Introducción

1.1. Introducción

La teoría aceptada actualmente para describir prácticamente todos los fenómenos observados de la naturaleza es el Modelo Estándar. La unión de esta teoría con la gravedad permite una descripción de casi todos los efectos observados. Esto incluye experimentos que han sondeado distancias tan pequeñas como 10^{-18} m. El Modelo Estándar propone dos grupos de partículas: fermiones y bosones. Los fermiones en el modelo estándar son 12 partículas elementales (sin estructura interna) de espín semientero junto con sus antipartículas. Por otro lado, los bosones tienen espín entero. Dentro de esta categoría se encuentran todos los mediadores de las fuerzas. Las partículas fundamentales conocidas en la actualidad, con excepción del bosón escalar de Higgs, pueden ser apreciadas en el siguiente cuadro:

Las tres generaciones de la
Materia (Fermiones)

| | I | II | III | |
|----------|--|--|---|--|
| masa → | 3 MeV | 1.24 GeV | 172.5 GeV | 0 |
| carga → | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | 0 |
| spin → | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| nombre → | u up | c charm | t top | γ photon |
| Quarks | 6 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ d down | 95 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ s strange | 4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ b bottom | 0 0 1 g gluon |
| | <2 eV 0 $\frac{1}{2}$ ν_e electron neutrino | <0.19 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ muon neutrino | <18.2 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ tau neutrino | 90.2 GeV 0 1 Z⁰ fuerza débil |
| | 0.511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e electron | 106 MeV -1 $\frac{1}{2}$ μ muon | 1.78 GeV -1 $\frac{1}{2}$ τ tau | 80.4 GeV ± 1 1 W[±] fuerza débil |
| Leptones | | | | Bosons (Fuerzas) |

Figura 1.1: Cuadro de las partículas del modelo Estándar.
(figura extraída de Wikipedia)

Los constituyentes de la materia ordinaria son principalmente: electrones, quarks *up* y quarks *down*. Esto se debe a que los átomos están compuestos por un núcleo formado por un número de protones y neutrones y una nube de electrones envolviéndolo. Los protones están formados por dos quarks *up* y uno *down*; mientras que al neutrón lo componen dos quarks *down* y uno *up*. Si bien existen más partículas, estas son las más abundantes en la Tierra. Las mismas forman parte del grupo de fermiones. Los fermiones interactúan a través de las cuatro fuerzas fundamentales:

- la gravedad, fenómeno natural en el cual dos objetos con masa se ven atraídos con una fuerza proporcional al inverso del cuadrado de la distancia y el producto de sus masas;
- el electromagnetismo, descrito también por una fuerza que decae con el inverso del cuadrado de la distancia y que es proporcional al producto de las cargas interactuantes;
- la interacción fuerte, la cual la sienten, entre los fermiones, solamente los quarks y tiene como consecuencia directa la agrupación de éstos en hadrones, y como indirecta la de mantener a los protones y neutrones unidos en el átomo;
- y la débil que se encuentra vinculada a algunos decaimientos radiactivos.

Para tener una idea de cuán intensas son estas fuerzas introducimos aquí un ejemplo de [37]. Tomamos a la fuerza fuerte como referencia y la comparamos en órdenes de magnitud con las demás a una escala de distancia de $10^{-17}m$ entre dos quarks *up*, *u*. La fuerza débil es 10^{-6} menos intensa, la electromagnética tan solo 10^{-2} menos y la gravitacional, asombrosamente, 10^{-43} menos que la fuerza fuerte. Puede sonar extraño que la fuerza gravitacional sea tanto más pequeña que la electromagnética ya que es la fuerza que predomina en el estudio del universo. Pero esta última sólo puede acumularse; mientras que la fuerza electromagnética, debido a la existencia de cargas positivas y negativas genera que los objetos en el universo terminen por poseer una carga global neutra. En cuanto a las restantes fuerzas, éstas son de muy corto alcance; la fuerza fuerte tiene un rango de $10^{-15}m$ y la débil uno de $10^{-17}m$.

La fuerza se comunica por medio de los bosones o portadores de fuerza. Para las distintas fuerzas existen distintos bosones. En el caso del electromagnetismo tenemos al fotón (γ), para la fuerza débil contamos con los bosones (W^{\pm} y el Z) y para la fuerza fuerte nos valemos de 8 gluones (g). Se especula que existe para la fuerza gravitacional un bosón de nombre gravitón. Los fermiones pueden ser separados en dos categorías: quarks y leptones. Los quarks sienten todas las cuatro fuerzas, mientras que los leptones solo interactúan mediante interacciones electrodébiles o gravitacionales. Las constantes de acoplamiento, elementos estudiados en este trabajo, cuantifican la intensidad de estas interacciones.

1.2. La interacción fuerte y la carga de color

Los hadrones son las partículas que sienten la fuerza fuerte. Los protones y neutrones son ejemplos. Éstos se dividen en dos tipos: mesones y bariones. Ambos están formados por distintas combinaciones de quarks. Los bariones, por ejemplo, están compuestos por tres quarks o tres anti-quarks; mientras que los mesones están constituidos por un quark y un anti-quark. Estas dos son las formas más comunes de encontrar agrupados a los quarks. No se descarta la posibilidad de que existan configuraciones neutras de color con un número de cuatro o incluso cinco quarks.

Los quarks, además de tener carga eléctrica, poseen una carga asociada a la fuerza fuerte: la carga de color. Existen tres cargas de color: rojo, azul, verde y sus correspondientes anticolores. El nombre no tiene nada que ver con los colores que percibimos en nuestra vida corriente, que son básicamente distintas longitudes de onda del mediador de la fuerza electromagnética (el fotón). La razón reside en las propiedades de la fuerza fuerte y su analogía con la síntesis aditiva de la luz. En la naturaleza los quarks se pueden agrupar formando combinaciones tales que la carga total de color sea neutra. Esquemáticamente, en el caso de los mesones, tendríamos un quark de color rojo, por ejemplo, y un anti-quark de color anti-rojo que sumados dan un color neutro. Para el caso de los bariones, esquemáticamente, tendríamos tres quarks de colores respectivamente rojo, azul y verde que sumados darían un color blanco, es decir, neutro.

Existe una propiedad muy importante que diferencia a los quarks de otros fermiones y es que no podemos observar quarks libres en la naturaleza. A este comportamiento se le denomina confinamiento. Esta propiedad no se ha podido demostrar analíticamente desde principios fundamentales. Sin embargo, podemos interpretar este fenómeno en el ejemplo presentado en la figura 1.2. Imaginemos que tenemos un mesón e intentamos separar sus constituyentes de forma tal de obtener un quark y un antiquark aislados. A medida que vamos separándolos la energía que debemos aportar crecerá y seguirá creciendo hasta que sea más redituable energéticamente la creación de una partícula junto con su correspondiente antipartícula formando así dos mesones y por ende ningún quark libre.

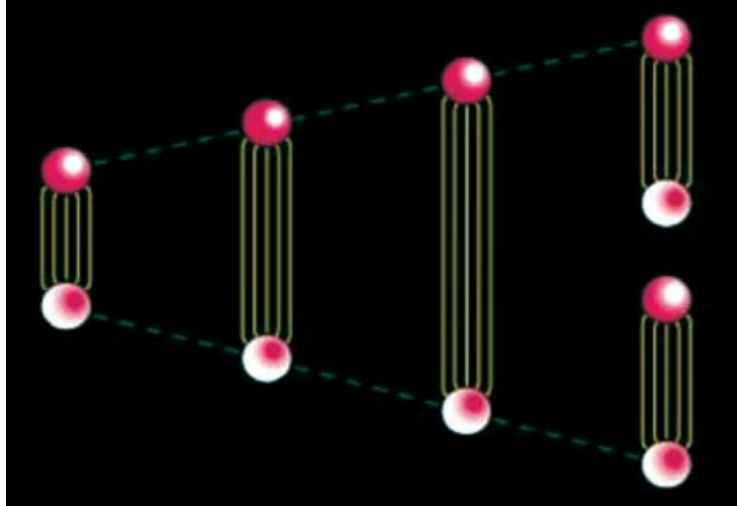


Figura 1.2: Representación visual del experimento mental al separar los constituyentes de un mesón. (figura extraída de [10]).

En el límite opuesto contamos con una propiedad igual de fascinante. A distancias muy pequeñas respecto a el radio de un protón ($\approx 8,4184 \times 10^{-16}m$) los quarks se comportan como si estuvieran libres. La intensidad de interacción fuerte decrece. Podemos ver este efecto cuantitativamente mediante las constantes de acoplamiento: éstas tienden a cero a medida que vamos a distancias más y más pequeñas. A este efecto se le llama libertad asintótica y le valió el premio Nobel de física en 2004 a Politzer, Wilczek y Gross, [21] y [30].

Estas características de la fuerza fuerte radican en que el gluón porta carga de color y esto hace que pueda interactuar con otros gluones. En el caso del electromagnetismo esto no ocurre: el fotón no es portador de carga eléctrica y por ende esencialmente no puede interactuar con otros fotones. La cantidad de colores son tres y emergieron históricamente para circunvalar un problema con el principio de Pauli. La partícula descubierta en 1952 llamada Δ^{++} está compuesta por tres quarks up : $|u\uparrow, u\uparrow, u\uparrow\rangle$, que hasta el momento eran vistos como tres estados cuánticos idénticos. Pero el principio de Pauli dicta que no es posible tener más de un fermión en el mismo estado cuántico generando así un problema. Greenberg en 1964 propuso otra propiedad cuántica capaz de diferenciar a estos tres estados, el color. Al atribuir un color distinto para cada quark obtenemos tres estados cuánticos distintos: $|u^b\uparrow, u^g\uparrow, u^r\uparrow\rangle$, en donde el supra índice indica el color del quark. Los colores elegidos son, del inglés, b , g y r por los colores azul, verde y rojo respectivamente.

La cromodinámica cuántica fue la manera satisfactoria que se encontró para describir microscópicamente la interacción fuerte. Ésta es una teoría cuántica de campos no abeliana e invariante de gauge bajo el grupo de simetría $SU(3)$, y es capaz de predecir la dinámica esperada de los gluones y quarks.

1.3. Cromodinámica cuántica

La teoría que describe la dinámica de los gluones y los quarks y que contiene todas las propiedades explicadas anteriormente es la Cromodinámica Cuántica, del inglés Quantum Chromodynamics. Ésta es una teoría descrita por el grupo no-abeliano $SU(3)$; S viene de especial por ser el determinante de las matrices igual a la unidad; U proviene de unitaria, es decir, toda transformación de este grupo preservará el producto escalar y, finalmente, 3 representa la dimensión de color (azul, verde y rojo). Lo anterior se traduce en que el lagrangiano será invariante frente a elementos locales de dicho grupo o, lo que es lo mismo, bajo una simetría gauge. Un elemento local perteneciente a este grupo puede ser escrito como $U(x) = e^{-ig\theta^a(x)t^a}$; con $\theta^a(x)$ una función arbitraria y t^a los generadores correspondientes al álgebra de Lie que satisfacen la regla de conmutación $[t^a, t^b] = if^{abc}t^c$ siendo f^{abc} las constantes de estructura. A su vez, elegimos que los generadores sean hermíticos y normalizados de forma tal que $\text{Tr}[t^a t^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}$. El lagrangiano renormalizable más general en el espacio Minkowskiano invariante frente a transformaciones gauge del tipo

$$\begin{cases} \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x), \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger, \end{cases}$$

es

$$\mathcal{L}_{M,inv} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i(i\gamma^\mu D_\mu - M_i)\psi_i, \quad (1.1)$$

con

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g^B f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (1.2)$$

$$D_\mu \psi = \partial_\mu \psi - ig^B A_\mu^a t^a \psi. \quad (1.3)$$

En donde ψ representa el campo fermiónico, A_μ la componente μ -ésima del campo bosónico, N^f el número de sabores y la constante de acoplamiento g es una medida de la fuerza de interacción entre los quarks y los gluones así como de la autointeracción entre estos últimos. Por más información acerca de la deducción de este lagrangiano se puede consultar los capítulos 15 y 16 de [29].

Vale la pena mencionar que a este lagrangiano se le podría agregar un término de la forma $\Theta^{ab}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F_a^{\mu\nu}F_b^{\rho\sigma}$ donde Θ^{ab} es una matriz constante y $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ el tensor de Levi-Civita. Se puede demostrar que este término es una derivada total por lo que no afecta ni a las ecuaciones de movimiento ni a las reglas de Feynman por lo cual no se lo incluye en el lagrangiano. Sin embargo, estos términos de borde son importantes para definir cargas conservadas de teorías de gravedad como Relatividad General.

Hemos logrado obtener un lagrangiano invariante de gauge, pero aparece un problema si deseamos obtener observables físicos. En la formulación de integrales de línea, introducida por Feynman en 1948, para obtener estos observables debemos realizar integrales funcionales que estarán mal definidas si no eliminamos la ambigüedad que surge de esta invariancia gauge. Para cada configuración de los campos se tiene un conjunto continuo e infinito de campos físicamente equivalentes

conectados a través de las transformaciones gauge, llamadas órbitas de gauge. Esto trae como consecuencia que en el cálculo de los valores esperados se generen indeterminaciones espurias del tipo ∞/∞ . Para corregir este problema debemos encontrar la manera de integrar tomando en cuenta cada configuración física una sola vez, lo cual es llamado fijar el gauge. El procedimiento usual para este objetivo es el procedimiento de Faddeev Popov (FP), explicado más adelante. La figura 1.3 representa gráficamente diferentes órbitas de gauge y su intersección con una condición gauge para determinar un único representante de cada órbita.

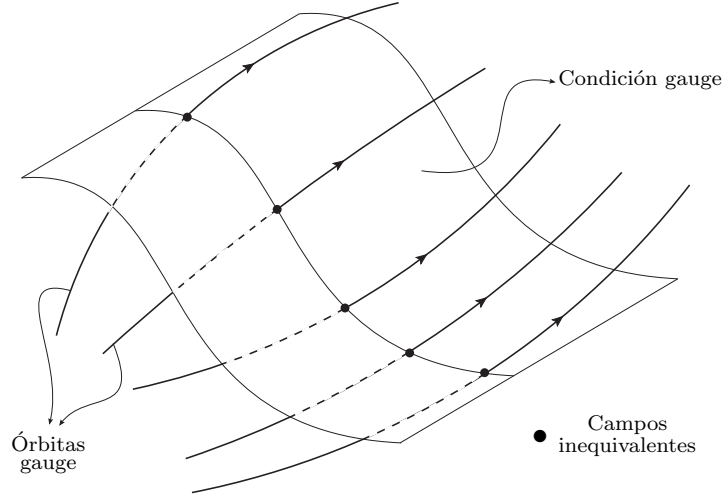


Figura 1.3: Representación esquemática de la fijación de gauge la que consiste en una hipersuperficie en el espacio de configuración del campo que debe interceptar cada órbita de gauge una y sólo una vez.

Para dar una mejor idea explicaremos brevemente lo dicho en mayor detalle. Debido a la simetría gauge, nuestro lagrangiano es invariante frente a las siguientes transformaciones del campo gluónico

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu = U A_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger, \quad (1.4)$$

que al desarrollado infinitesimalmente ($\theta \ll 1$) obtenemos

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu^\theta = A_\mu - (\partial_\mu \theta^a + g f^{abc} A_\mu^b \theta^c) t^a + \mathcal{O}(\theta^2). \quad (1.5)$$

Cada órbita de gauge está formada por sucesivas transformaciones infinitesimales de este tipo.

La formulación de integral de caminos vincula las funciones de correlación, o funciones de Green, con integrales funcionales. Por ejemplo, para un operador invariante de gauge queda expresado de la manera siguiente

$$\langle \Omega | \mathcal{O}_{inv} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty (1-i\epsilon)} \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}_{inv} \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x_M \mathcal{L}_{M,inv} \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[i \int_{-T}^T d^4x_M \mathcal{L}_{M,inv} \right]}. \quad (1.6)$$

El lado derecho de esta ecuación se realiza en el espacio de Minkowski. Estas integrales pueden pasar a evaluarse en el espacio Euclideo a través de la rotación de Wick. Ésta consiste en realizar el cambio $x_M^0 \rightarrow ix_E^0$, y al realizarlo obtenemos

$$\langle \Omega | \mathcal{O}_{inv} | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}A \mathcal{O}_{inv} \exp \left[- \int_{-T}^T d^4x_E \mathcal{L}_{E,inv} \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[- \int_{-T}^T d^4x_E \mathcal{L}_{E,inv} \right]}. \quad (1.7)$$

con

$$\mathcal{L}_{E,inv} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (-\gamma_\mu D_\mu + M_i) \psi_i. \quad (1.8)$$

De ahora en adelante trabajaremos con el lagrangiano en el espacio euclideo. Por otro lado, nos interesa calcular funciones de correlación de objetos no invariantes de gauge. Como es el caso del propagador del gluón:

$$\langle \Omega | T A_\mu^a(y) A_\nu^b(x) | \Omega \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int \mathcal{D}A A_\mu^a(y) A_\nu^b(x) \exp \left[- \int_{-T}^T d^4x_E \mathcal{L}_{E,inv} \right]}{\int \mathcal{D}A \exp \left[- \int_{-T}^T d^4x_E \mathcal{L}_{E,inv} \right]}. \quad (1.9)$$

En este caso la integral está mal definida por lo que será necesario fijar el gauge con el fin de eliminar esta inconsistencia. Para fijarlo necesitamos introducir una función delta de Dirac con el fin de integrar en una hipersuperficie con ciertos campos A_μ no equivalentes entre sí. La función $\delta(G(A^\theta))$, donde $G(A^\theta) = 0$ es la condición de gauge, impondrá esta restricción. En nuestro caso utilizaremos el gauge de Lorentz generalizado definido como: $G(A) = \partial^\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x)$ con $\omega^a(x)$ una función arbitraria. La manera que encontraron Faddeev y Popov para hacer esto fue introducir, dentro de la integral presente en la ecuación (1.9), el siguiente término unidad

$$1 = \int \mathcal{D}\theta(x) \delta(G(A^\theta)) \det \left(\frac{\partial G(A^\theta)}{\partial \theta} \right). \quad (1.10)$$

En donde A^θ es el campo de gauge transformado. Este término igual a la unidad no sólo va a eliminar las equivalencias entre campos, también contribuirá al lagrangiano con dos nuevos términos. El primer término vendrá del determinante:

$$\det \left(\frac{\partial G(A^\theta)}{\partial \theta} \right).$$

Al usar la siguiente propiedad,

$$\det(\mathcal{M}) = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left\{ - \int d^4x \int d^4y \bar{c}^a(x) \mathcal{M}_{ab}(x,y) c^b(y) \right\},$$

siendo c y \bar{c} variables grassmanianas no físicas, obtenemos

$$\det \left(\frac{\partial G(A^{a,\theta})}{\partial \theta^b} \right) = \int \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \exp \left\{ - \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a \left(\partial_\mu \delta^{ab} + g f^{abc} A_\mu^c \right) c^b \right\}. \quad (1.11)$$

Si definimos

$$(D_\mu c)^a = \partial_\mu c^a + g f^{abc} A_\mu^b c^c,$$

obtendremos el nuevo término del lagrangiano:

$$\partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a. \quad (1.12)$$

El segundo término proviene de la condición de gauge de Lorentz generalizada. Para entender este procedimiento podemos analizar el denominador de la ecuación (1.9). Una vez incluido el término (1.10) y reescribiendo el determinante, obtenemos

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\theta(x) \delta\left(\partial_\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x)\right) \exp\left[-\mathcal{S}_{inv} - \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a\right]. \quad (1.13)$$

Debido a que $\omega(x)$ es una función arbitraria, esta ecuación vale para cualquier valor de la misma. En particular, vale para una combinación lineal de funciones $\omega(x)$ bajo una normalización adecuada. Hacemos esto integrando en todas las funciones $\omega(x)$ con un peso gaussiano centrado en $\omega = 0$. Es decir, dentro de (1.13) tendremos una integral del tipo

$$N(\xi) \int \mathcal{D}\omega \exp\left[-\int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}\right] \delta\left(\partial_\mu A_\mu^a(x) - \omega^a(x)\right).$$

Por lo que operando obtendremos,

$$N(\xi) \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\theta(x) \exp[-\mathcal{S}'],$$

con

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S}_{inv} + \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \int d^4x \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2.$$

Como vemos, aparece un nuevo término:

$$\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu^a)^2$$

Este término puede ser reescrito al agregar un campo bosónico auxiliar, b^a , dándonos

$$\mathcal{S}'' = \mathcal{S}_{inv} + \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \frac{\xi}{2} (b^a)^2 + i b^a \partial_\mu A_\mu^a,$$

En esta tesis nos interesamos en la condición de Landau, que corresponde a $\xi \rightarrow 0$. Esto reemplaza la ecuación (1.13) con

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\bar{c} \mathcal{D}c \mathcal{D}\theta(x) \mathcal{D}b^a \exp\left[-\mathcal{S}_{inv} - \int d^4x \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a - \int d^4x \left(i b^a \partial_\mu A_\mu^a\right)\right].$$

El último término del exponente puede interpretarse, utilizando la siguiente propiedad

$$\int \mathcal{D}b^a \exp \left[i \int d^4x b^a \partial_\mu A_\mu^a \right] = \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu^a(x)),$$

correspondiente a la condición $\partial_\mu A_\mu^a = 0$. Observamos así la equivalencia entre el gauge de Landau ($\xi \rightarrow 0$) y $\partial_\mu A_\mu^a = 0$.

En resumen, obtenemos el lagrangiano de FP

$$\mathcal{L}_{FP} = \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (-\gamma_\mu D_\mu + M_i) \psi_i}_{\mathcal{L}_{inv}} + \underbrace{\partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a}_{\text{término proveniente del determinante}} + \underbrace{ib^a \partial_\mu A_\mu^a}_{\text{término de fijación gauge}}. \quad (1.14)$$

Este es el lagrangiano de la QCD en el gauge de Landau en el espacio euclideo. Su éxito se debe en gran medida a que cumple con la libertad asintótica. Como ocurre con todas las teorías cuánticas de campos, las constantes de acoplamiento dependen de la escala de energía en juego. La libertad asintótica se puede apreciar en que las constantes de acoplamiento en la QCD tienden a cero cuando la energía crece. Para calcular estas constantes necesitaremos del grupo de renormalización. Este método nos permite hallar la dependencia de las constantes de acoplamiento con la energía a través de una función beta definida como

$$\beta_g = \mu \frac{dg(\mu)}{d\mu}$$

Donde μ corresponde a la escala de energía o impulso característico del problema estudiado.

El resultado obtenido por Politzer, Gross y Wilczek en 1973 usando el desarrollo perturbativo fue

$$\beta_g(g(\mu)) = -\beta_0 \frac{g(\mu)^3}{16\pi^2} + \mathcal{O}(g^5) \quad (1.15)$$

con

$$\beta_0 = \frac{11}{3} C_a - \frac{4}{3} T_f N_f,$$

donde $C_a = N = 3$ es el número de colores y $T_f = 1/2$. El número de sabores, N_f , va a variar según la energía (μ) y sólo contarán aquellos sabores cuyas masas sean tales que $m \ll \mu$. Aún en el UV, donde todos los seis sabores son tomados en cuenta, la función $\beta_g(g(\mu))$ es negativa y por ende g convergerá a cero a altas energías como se muestra en la figura 1.4. Como ésta representa la fuerza de interacción entre los quarks éstos actuarán como si estuviesen libres a escalas de energías muy grandes, es decir, cuando estén muy cerca unos de otros.

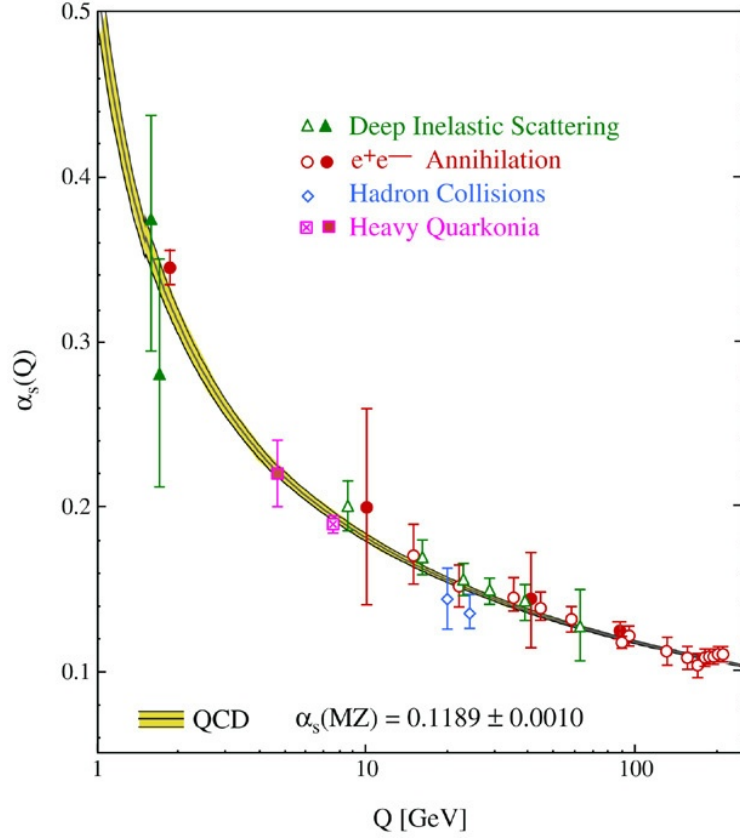


Figura 1.4: Resumen de datos experimentales para la evolución de $\alpha_s = \frac{g^2}{16\pi^2}$. Esto muestra la evolución acorde con la libertad asintótica publicados en [5].

En el otro extremo tenemos la zona infrarroja (IR) que si analizamos analíticamente usando el desarrollo perturbativo del lagrangiano de FP y tomando β hasta el orden g^3 , tenemos,

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -\beta_0 \frac{g^3}{16\pi^2}.$$

Esto da como resultado,

$$g^2(\mu) = \frac{g_0^2}{1 + \frac{g_0^2 \beta_0}{16\pi^2} \log\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)},$$

siendo μ_0 la escala de energía a la cual fijamos g_0 en un esquema de renormalización (explicado más adelante). Con poco esfuerzo se puede ver que $g^2(\mu)$ diverge cuando $\mu = \mu_0 e^{-\frac{16\pi^2}{\beta_0 g_0^2}}$ en lo que se denomina polo de Landau. Para valores de g_0 compatibles con los experimentos, se encuentra que la posición del polo de Landau tiene lugar para energías del orden de algunos cientos de MeV. Podemos observar que no es factible aplicar la teoría de perturbación con el lagrangiano de FP ya que el parámetro perturbativo dejará de ser pequeño. Este parámetro, α , que se vincula con g a través

de

$$\alpha(\mu) = \frac{g^2(\mu)}{4\pi},$$

diverge en el IR, imposibilitando el análisis perturbativo en esta región.

1.4. Problemas en el **infrarrojo**

El hecho de que no se pueda utilizar cálculos perturbativos en el IR con el lagrangiano de FP genera dificultades a la hora de intentar estudiar analíticamente esta zona. Consecuentemente, muchos abordajes semi-analíticos han sido desarrollados para acceder a las propiedades infrarrojas de QCD. Los más populares son los de Dyson-Schwinger (ver por ejemplo [23],[3], [2]) y el grupo de renormalización no perturbativo (ver por ejemplo [22]). Ambos consisten en un conjunto infinito de ecuaciones acopladas relacionando funciones de correlación con un número diferente de campos. Este conjunto de ecuaciones concuerda con la expansión perturbativa en el límite donde la teoría de perturbación es válida. Sin embargo, en el régimen IR, es necesario introducir algunas aproximaciones para poder resolver el sistema de ecuaciones. La idea es utilizar aproximaciones consistentes con la información extraída mediante las simulaciones en la red y luego proceder a aplicarlas en situaciones mas generales.

En este trabajo se analizará otra estrategia consistente en intentar lograr una teoría que sea perturbativa tanto en UV como en el IR. Para atacar este problema investigamos más la región IR a través de simulaciones numéricas. Si bien éstas nos muestran el comportamiento de algunos elementos de esta teoría, no nos dicen nada acerca del por qué del mismo. Para ello podremos generar una hipótesis *ad hoc* basándonos en la información que éstas brindan para luego intentar corroborar y ajustar la teoría con las simulaciones. En primera instancia observamos, a través de las simulaciones, el comportamiento de la constante de acoplamiento obtenidas a partir del acoplamiento del fantasma y el gluón y del vértice de tres gluones. Estos comportamientos pueden ser observados en las figuras 1.5 y 1.6, respectivamente. Como podemos apreciar en dichas gráficas la constante de acoplamiento no sólo no diverge en el IR, sino que su valor permanece moderado lo que contradice el análisis perturbativo usual, el cual se basa en el lagrangeano de FP que muestra una constante de acoplamiento divergente.

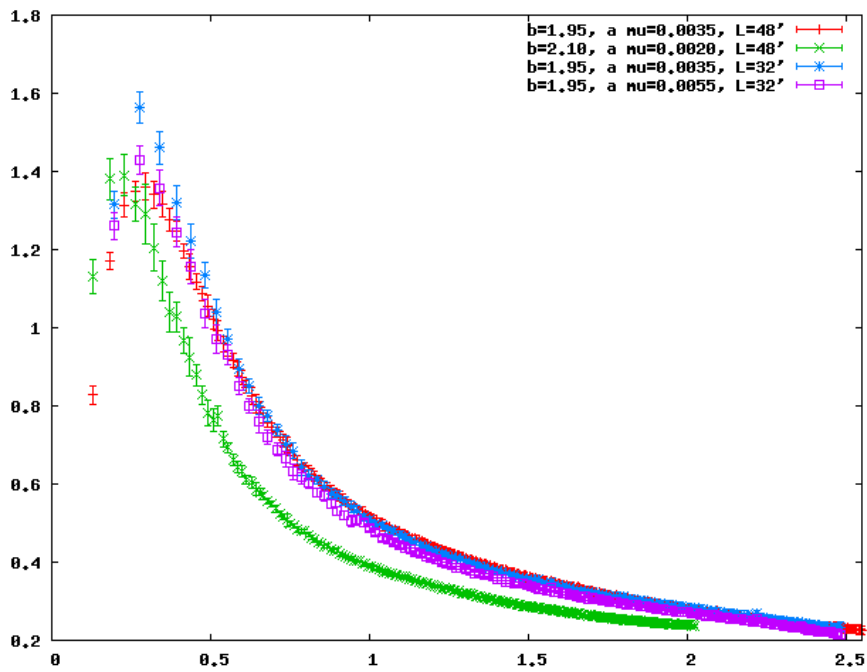


Figura 1.5: Running de la constante de acoplamiento del fantasma en función del producto del paso de la red con el momento (en GeV). (Gráfica extraída de [6])

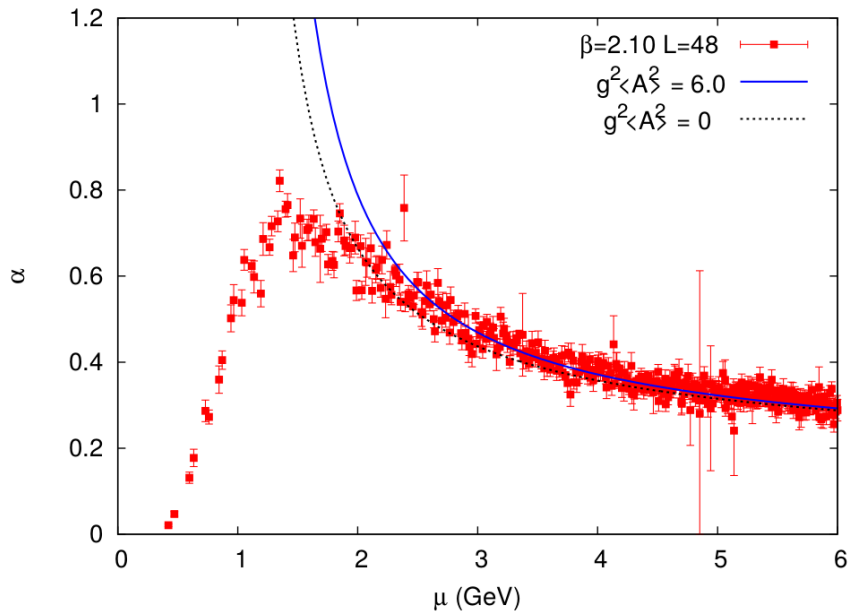


Figura 1.6: En rojo el running de la constante de acoplamiento de tres gluones en función del momento. (Gráfica extraída de [8])

¿Qué es lo que está pasando? Esta duda está íntimamente ligada a la pregunta sobre el confinamiento de los quarks. Decir qué sucede a escalas de energías infrarrojas es decir qué es lo que sucede a distancias grandes, como por ejemplo a aquellas que superen el radio del protón. Como consecuencia deberíamos pensar en el comportamiento de los gluones o de los quarks fuera de los hadrones. Esto desembocaría en entender lo que lleva a los quarks a agruparse en conjuntos de carga de color neutra y qué sucede con el gluón a estas escalas.

Un posible origen de las dificultades de la teoría de perturbación surge a la hora de fijar el gauge. En QCD para hacer cálculos analíticos es necesario fijar el gauge para poder definir, por ejemplo, los propagadores. En todo el procedimiento de Faddeev-Popov (FP) se supuso que las órbitas gauge cruzan una y sólo una vez la superficie que representa la fijación gauge. Sin embargo, en el IR la realidad es distinta ya que surgen situaciones como la representada en la figura 1.7, donde estas órbitas intersectan varias veces el plano que define la condición de gauge. Este problema fue descubierto por Gribov, del cual proviene el nombre de las copias, en [20].

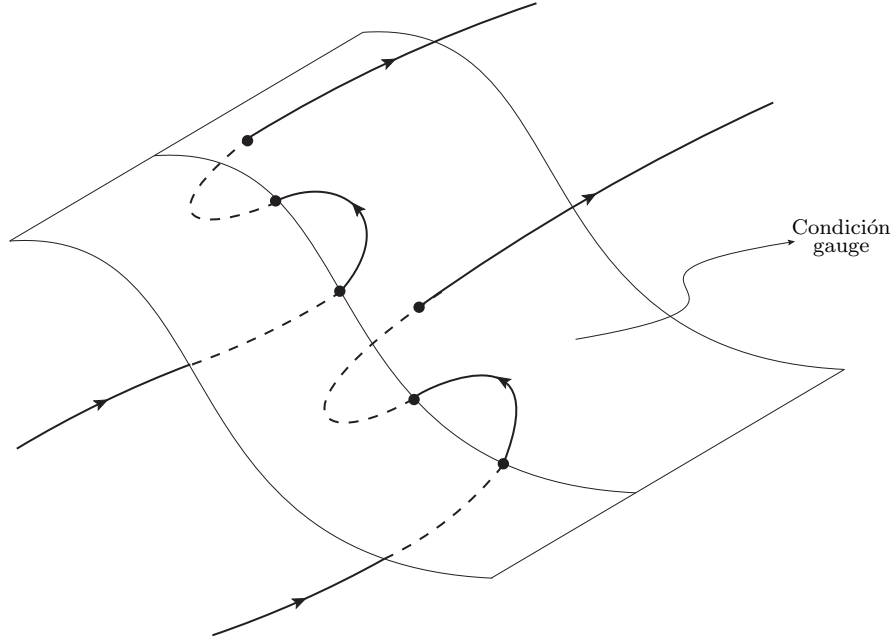


Figura 1.7: Representación de las copias de Gribov las cuales se muestran como puntos negros sobre cada órbita de gauge intersectando la condición gauge más de una vez.

Tener que lidiar con el problema de las copias de Gribov tiene por consecuencia no saber cuál es el lagrangiano fijado de gauge válido en el IR para una fijación de gauge arbitraria. Es menester mencionar que existen condiciones de gauge para las cuales no tenemos el problema de las copias de Gribov. Pero para una condición de gauge arbitraria no se sabe cuál es el lagrangiano fijado gauge correspondiente (salvo en el ultravioleta).

Para resolver este problema recurrimos a las simulaciones numéricas las cuales arrojan luz sobre el tema. En los últimos años éstas no sólo han aumentado en cantidad sino que también en calidad. La figura 1.8, extraída de [7], nos muestra una función escalar $D(q)$ (ver ecuación (1.16)) asociada al propagador del gluón en el gauge de Landau.

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q) = D(q)\delta^{ab}P_{\mu\nu}^{\perp}(q). \quad (1.16)$$

En la misma podemos ver cómo $D(q)$ satura en el IR. Este comportamiento es similar al de un propagador masivo.

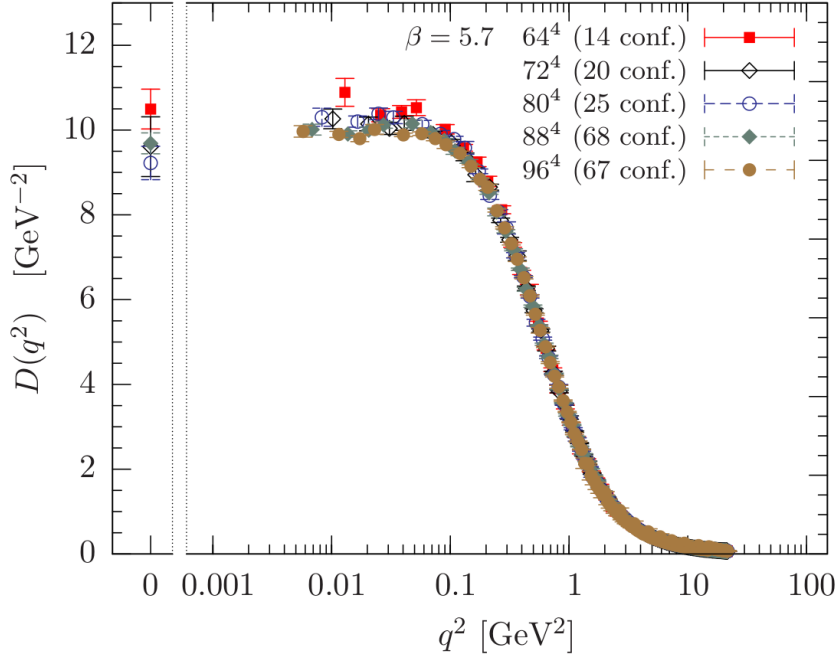


Figura 1.8: Propagador del gluón en la red $D(q^2)$ vs q^2 para varios tamaños de red y con espaciamiento entre puntos fijo.

Si deseamos calcular analíticamente este propagador al orden árbol en gauge de Landau con el lagrangiano \mathcal{L}_{FP} , obtendremos

$$D_{FP\mu\nu}^{ab}(q^2) = \frac{\delta^{ab}}{q^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) = \frac{\delta^{ab}}{q^2} P_{\mu\nu}^{\perp}(q), \quad (1.17)$$

el cual diverge cuando el momento tiende a cero. El último paso en (1.17) define al propagador transversal $P_{\mu\nu}^{\perp}(q)$

Es por esto que nuestro grupo ha optado por seguir la opción que pone en tela de juicio el lagrangiano de FP. Se propone modificar el mismo al suponer que en la fijación gauge, mediante un procedimiento que se desconoce, se crea un término de masa para el gluón. Por lo que tendríamos fenomenológicamente

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{FP} + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a. \quad (1.18)$$

La presencia de este término genera una modificación al orden árbol en el propagador de forma tal que adquiere una masa pudiendo así reproducir un comportamiento similar al observado en la figura 1.8. A continuación podemos ver el propagador del gluón obtenido analíticamente con la respectiva modificación en **violeta**

$$D_{\mu\nu}^{ab}(q^2) = \frac{\delta^{ab}}{q^2 + m^2} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) = \frac{\delta^{ab}}{q^2 + m^2} P_{\mu\nu}^\perp(q), \quad (1.19)$$

pudiendo apreciar que no diverge en el límite IR.

Este nuevo lagrangiano coincide con un caso particular al introducido en 1976 por G. Curci y R. Ferrari, [18]. Dicho trabajo es una extensión de la teoría de Yang-Mills en donde se le asocia una masa al campo bosónico asociado al gluón así como al ghost. En nuestro caso, el término vinculado a la masa se le agrega al lagrangiano ya habiéndose fijado el gauge, obteniendo así

$$\mathcal{L} = \underbrace{\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \sum_{i=1}^{N_f} \bar{\psi}_i (-\gamma_\mu D_\mu + M_i) \psi_i}_{\mathcal{L}_{inv}} + \underbrace{ib^a \partial_\mu A_\mu^a}_{\text{gauge de Landau}} + \underbrace{\partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a}_{\text{término proveniente del determinate}} + \underbrace{\frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a}_{\text{término másico del gluón}}.$$

Si bien actualmente no se sabe explicar cómo es que se genera este término, creemos que proviene de una correcta fijación de gauge. Es sabido que este lagrangiano es renormalizable a todo orden en teoría de perturbación, ver [15] y [18]. Por otro lado, si obtenemos el espacio físico mediante el procedimiento estandar basado en la simetría BRST, emergen estados de norma negativa. Por esta razón se dejó de lado el modelo de CF en ese entonces. Sin embargo, actualmente se puede ver en las simulaciones numéricas esta violación de positividad en el espacio físico definido usualmente, por ejemplo en [11], [16], [17], [4], [1], [25], [13] y [12]. Esto hace que los motivos por los cuales el modelo de CF fue descartado, en el día de hoy, no se sostengan realmente.

En este trabajo nos limitamos a la teoría sin quarks para simplificar los cálculos. Por esto, nuestro lagrangiano, tomando en cuenta la condición de fijación gauge $\partial_\mu A_\mu^a = 0$, pasa a ser

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a + ib^a \partial_\mu A_\mu^a, \quad (1.20)$$

con

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g^B f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c.$$

Dicho de otra forma, no sabemos exactamente cuál es el lagrangiano en el IR. Suponemos la forma del mismo para luego ver si podemos ajustar bien dicho modelo a los valores observados en la red (simulaciones numéricas).

Esta idea no es nueva, existen varios trabajos bajo esta misma premisa: observar qué dicen las simulaciones, estimar cuál será nuestro lagrangiano en el IR, calcular datos y luego comparar. Continuando la idea del término de masa para el gluón, se le suma un planteo, presentado en el capítulo siguiente, el cual pretende mejorar los cálculos actuales hechos en [27], [28] y [36].

Capítulo 2

Modelo con gluones masivos

Este capítulo motiva la introducción de constantes de acoplamiento diferentes para cada tipo de vértice en la teoría. En dicho contexto presentaremos los cálculos de los diagramas que contribuyen a primer orden en la función a dos puntos incluyendo el término masivo para el gluón.

Finalmente presentaremos los primeros resultados comparados con las simulaciones numéricas.

2.1. Introducción de g_A y g_C

Como se explicó en el capítulo anterior, se trabajará con el lagrangiano \mathcal{L} en el gauge de Landau, sin la presencia de los quarks y con un término de masa motivado por las simulaciones en la red. La primera contribución en el desarrollo perturbativo fue estudiada en [36] donde se comparó el primer orden en la teoría de perturbaciones para el propagador del fantasma y del gluón obteniendo resultados con un error menor al 20%. Estos resultados motivaron a seguir testeando el modelo para cantidades mucho más complicadas como las funciones de correlación a tres puntos para las cuales también se obtuvieron resultados bastante buenos, ver [27]. Vale resaltar que el modelo permite reproducir exitosamente un gran número de funciones de correlación en diversas configuraciones cinemáticas únicamente con un sólo parámetro extra.

En esta tesis queremos analizar otro aspecto ya que, en dichos estudios no se tuvo en cuenta la diferencia de los acoplamientos pese a que se vuelve significativa en el límite IR. El estudio de las consecuencias al tomarlos diferentes será el eje central de mi trabajo de tesis. En este capítulo motivaré la importancia de tener en cuenta dichas diferencias especialmente en el régimen IR y su implementación dentro del marco descrito en [36]. Vale la pena mencionar que estas diferencias, aunque las simulaciones numéricas sugieren que no son despreciables, suelen ignorarse en el estudio a bajas energías de las funciones de correlación.

Cuando estudiamos los resultados de las simulaciones numéricas éstas nos muestran que, si bien en el UV las constantes son casi iguales y tienden a cero (libertad asintótica), en el IR presentan diferentes comportamientos. Este fenómeno es observado en las figuras 1.5 y 1.6 extraídas de [6] y [8] respectivamente. La hipótesis propuesta es que introducir esta diferenciación para cada una de las constantes de

acoplamiento dará lugar a mejores resultados. Veremos que, con esta distinción, nuestro modelo permite fácilmente reconstruir las curvas de las constantes de acoplamiento.

El objetivo de mi tesis consiste en estudiar cómo se comportan los diferentes acoplamientos y cómo dicha diferencia puede mejorar los resultados en el IR. Con estos cambios obtenemos el siguiente lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \partial_\mu \bar{c}^a (D_\mu c)^a + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_\mu^a \quad (2.1)$$

Con

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_A^B f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \\ (D_\mu c)^a &= \partial_\mu c^a + g_C^B f^{abc} A_\mu^b c^c \end{aligned}$$

y f^{abc} las constantes de estructura.

Sabemos que en el ultravioleta las dos constantes son iguales a primer orden y por lo tanto se cumple $g_A^B = g_C^B = g^B$. La razón para diferenciarlas es simplemente para seguirles el rastro para cuando sí sea necesaria la distinción al renormalizar. Las constantes de acoplamiento miden la fuerza que se ejercen las partículas entre sí en una interacción. En nuestro caso tenemos tres vértices posibles que serán los bloques fundamentales de nuestra teoría. Si agregáramos los quarks entonces se sumaría un vértice más. A su vez, si imponemos que todos los vértices de interacción tengan la misma constante de acoplamiento y tomamos en cuenta el grupo de renormalización (explicado en el capítulo 3.1) entonces estaremos admitiendo que para toda escala de energía estos vértices tendrán la misma relevancia.

Para comparar nuestra teoría con los datos de las simulaciones lo haremos a través de los propagadores del fantasma y gluón. Obtendremos sus valores usando la teoría de perturbaciones a primer orden en el modelo cuyo lagrangiano es el presentado en la ecuación (2.1).

2.2. Cálculo del propagador a partir de diagramas 1PI

Es sabido que cada término en el desarrollo perturbativo puede representarse con un diagrama de Feynman producto de unir los bloques de interacción fundamentales. El desarrollo perturbativo puede reorganizarse en series de lo que llamamos diagramas 1PI. Los diagramas 1PI, del inglés “one-particle irreducible”, denotan a aquellos a los que si se le corta una línea interna no se convierte en dos diagramas desconectados, sino que en uno con dos patas externas más. Por ejemplo, en las figuras 2.2 y 2.1 se muestran ejemplos de diagramas 1PI y no 1PI.

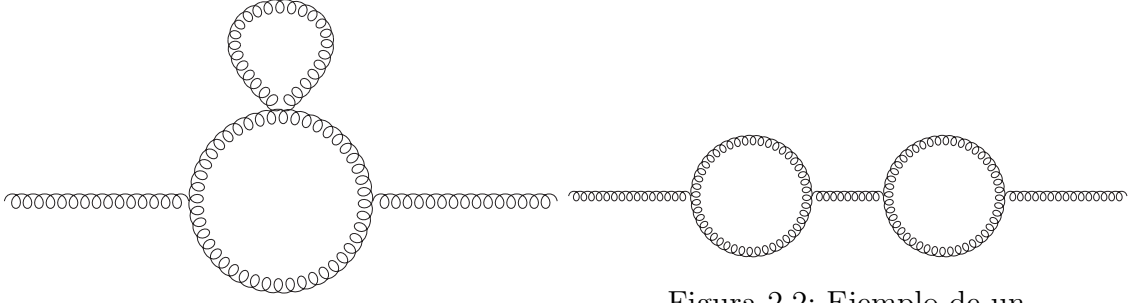


Figura 2.1: Ejemplo de un diagrama 1PI.

Figura 2.2: Ejemplo de un diagrama que no es 1PI, sino que se compone de dos 1PI.

En nuestro trabajo calculamos hasta el primer orden perturbativo, o lo que es lo mismo, hasta orden g^2 .

A continuación veremos cómo se expresan los propagadores a través de los diagramas de Feynman y en la sección 2.3 veremos qué representan analíticamente estos diagramas y cómo calcularlos.

2.2.1. El propagador gluónico

El cálculo exacto expresado a través de los diagramas de Feynman para el gluón está representado en la figura 2.3.

$$\begin{aligned}
 \text{---}\bullet\text{---} &= \text{---} + \text{---} \textcircled{1PI} \text{---} + \dots \\
 &= \text{---} \left(1 + \textcircled{1PI} \text{---} + \textcircled{1PI} \text{---} \textcircled{1PI} \text{---} + \dots \right) \\
 &= \text{---} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \textcircled{1PI}^n \text{---} \right) \\
 &= \text{---} \left(1 - \textcircled{1PI} \text{---} \right)^{-1} \\
 &= \left(\text{---}^{-1} - \textcircled{1PI} \right)^{-1} = \frac{1}{\Gamma_{AA}^{(2)B}}
 \end{aligned}$$

Figura 2.3: Propagador gluón-gluón.

En la figura 2.3 vemos la definición de la función vértice, $\Gamma_{AA}^{(2)B}$, para el gluón. A lo largo de la tesis vamos a trabajar con ella en vez de la función de correlación a dos puntos. Luego lo relacionaremos con la función de correlación a dos puntos para el gluón, o propagador completo del mismo. Análogamente haremos lo mismo para el propagador del fantasma.

Para el caso del gluón, los diagramas 1PI a un loop (u orden g^2) están explícitamente representados en la figura 2.4. Mientras que todo diagrama 1PI de mayor orden, y que en este trabajo es despreciado, está contenido en el término $\mathcal{O}(g^4)$.

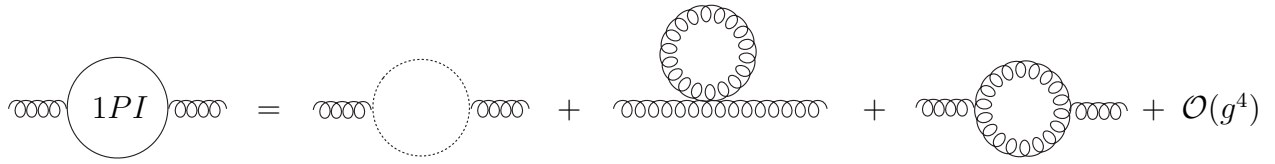


Figura 2.4: Diagramas 1PI de los gluones a 1 loop.

2.2.2. El propagador del fantasma

Para el caso del propagador fantasma podemos seguir los mismos pasos que para el propagador del gluón mostrados explícitamente en la figura 2.3. Esto da como resultado la definición de la función vértice para el fantasma $\Gamma_{C\bar{C}}^{(2)B}$, explicitada en la figura 2.5.

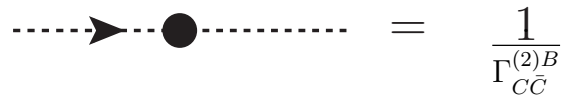


Figura 2.5: Propagador fantasma-fantasma.

La cantidad de diagramas 1PI para el propagador del fantasma es más pequeña debido a las configuraciones posibles de vértices, dando la posibilidad de tan sólo un diagrama a orden g^2 y expresado en la figura 2.6.



Figura 2.6: Diagrama 1PI del fantasma a orden g^2 .

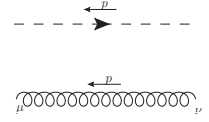
2.3. Reglas de Feynman

Uno de los logros más notables de Richard Feynman fue la invención de lo que ahora se llaman los diagramas de Feynman. Estos dibujos representan términos en el desarrollo perturbativo de las funciones de correlación. En esta sección presentamos las reglas de Feynman en el espacio de momentos para el sector del gluón y fantasma. Éstas se encuentran derivadas en el apéndice de [26].

Propagador
del fantasma
Propagador
del gluón

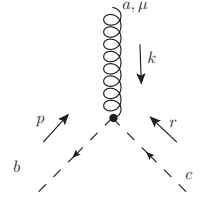
$$D_0^{ab}(p) = \frac{\delta^{ab}}{p^2}$$

$$D_{0,\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \frac{1}{p^2+m^2} P_{\mu\nu}^\perp(p)$$



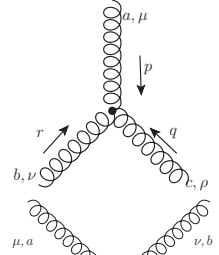
Vértice
gluón-fantasma
-antifantasma

$$\left[\Gamma_{c\bar{c}A}^{(3),\text{tree-level}} \right]_\mu^{bca}(r, p, k) = -ig_C^B f^{abc} p_\mu$$



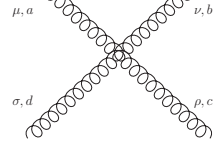
Vértice de
3 gluones

$$\left[\Gamma^{(3),\text{tree-level}} \right]_{\mu\nu\rho}^{abc}(p, q, r) = ig_A^B f^{abc} [(q-r)_\mu \delta_{\nu\rho} + (r-p)_\nu \delta_{\mu\rho} + (p-q)_\rho \delta_{\mu\nu}]$$



Vértice de
4 gluones

$$\left[\Gamma^{(4),\text{tree-level}} \right]_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} = (g_A^B)^2 [f^{eab} f^{ecd} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) + f^{eac} f^{ebd} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) + f^{ead} f^{ecb} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\rho})]$$



Cuadro 2.1: Reglas Feynman.

Además, cada diagrama viene con un factor de simetría que puede ser calculado de la siguiente manera:

- Hay un signo de menos por cada loop fermiónico,
- hay un $(-1)^\nu/\nu!$ (donde ν es el número de vértices) que proviene del desarrollo de la exponencial.
- hay un $1/3!$ por cada vértice de tres gluones
- hay un $1/4!$ por cada vértice de cuatro gluones
- hay un factor extra para los diagramas que tienen diferentes tipos de vértices que provienen de desarrollar \mathcal{L}_{int} . Tendremos un factor $\nu!/(\nu_1!\nu_2!\nu_3!)$ donde ν_i representa el número de vértices de un tipo
- finalmente debemos agregar el factor combinatorio debido a las distintas contracciones provenientes del teorema de Wick para eliminar dobles conteos.

Finalmente, debemos integrar en los momentos internos a fin de obtener la expresión propia de dicho diagrama. A modo de ejemplo, podemos ver a continuación la implementación de las reglas de Feynman para el cálculo del único diagrama a primer orden en el cual interviene el propagador del fantasma.

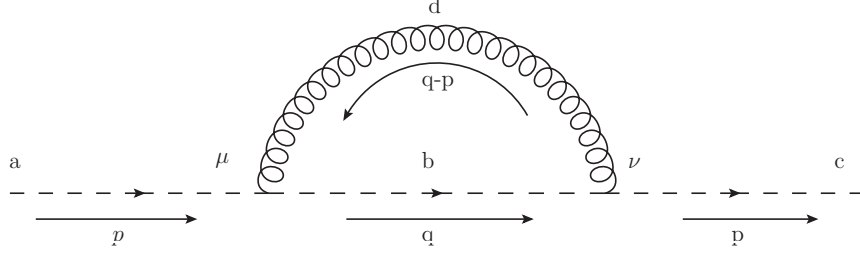


Figura 2.7: Contribución a 1 loop para el propagador del fantasma.

Este diagrama simboliza, a través de las reglas de Feynman, la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} (-ig_C^B f^{dab}(-q_\mu)) \frac{1}{q^2} (-ig_C^B f^{dbc}(-p_\nu)) \frac{P_{\mu\nu}^\perp(p-q)}{(q-p)^2 + m^2} \\ & = -(g_C^B)^2 f^{dab} f^{dbc} p_\nu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{q_\mu P_{\mu\nu}^\perp(p-q)}{q^2 (q-p)^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

con

$$P_{\mu\nu}^\perp(p) := \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \quad (2.3)$$

Vale aclarar que los índices de color de los propagadores ya se han contraído y que todos los diagramas son calculados sin patas externas. Esto último se puede observar en este ejemplo al no ver presentes a los propagadores de los fantasmas con momento p en la resolución del diagrama. El producto de los factores de estructura puede ser simplificado, $f^{dab} f^{dbc} = -f^{dba} f^{dbc} = -N\delta^{ac}$, siendo N el número de colores y δ^{ac} la delta de colores respetando así la conservación de color entre ambos extremos del diagrama.

A la hora de calcular la integral, se puede realizar la siguiente simplificación

$$q_\mu P_{\mu\nu}^\perp(p-q) = (q_\mu - p_\mu) P_{\mu\nu}^\perp(p-q) + p_\mu P_{\mu\nu}^\perp(p-q) = p_\mu P_{\mu\nu}^\perp(p-q)$$

Al hacerlo eliminamos un momento interno que, de lo contrario, lo tendríamos que integrar. Por ende, el diagrama de la figura 2.7 representa la integral

$$N(g_C^B)^2 \delta^{ac} p_\mu p_\nu \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} \frac{P_{\mu\nu}^\perp(p-q)}{(q-p)^2 + m^2} \quad (2.4)$$

2.3.1. Truco de Feynman

En esta sección presentaremos el truco de Feynman como herramienta para calcular la integral (2.4) y otras similares. El procedimiento presentado en esta sección será el mismo que utilizaremos para calcular todos los diagramas de Feynman durante la tesis. Cabe destacar que esta integral es divergente en $d = 4$, por lo que debemos regularizarlas. En este caso utilizamos la regularización dimensional.

Debido a que la integral barre todos los momentos uno puede hacer un shift sin alterar el resultado. Esto no genera problema para las teorías donde funciona la regularización dimensional, como lo es esta. La misma puede ser problemática en

teorías con quarks quirales. Haciendo el cambio $q-p = q'$, con p constante llegamos a

$$N(g_C^B)^2 \delta^{ac} p_\nu p_\mu \int \frac{d^d q'}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q' + p)^2} \frac{P_{\mu\nu}^\perp(q')}{q'^2 + m^2}. \quad (2.5)$$

Muchos de los diagramas presentan varios productos de momentos que hacen el cálculo de la integral muy complicado, sobre todo si éstos se encuentran en el denominador. Una forma de abordar este problema es reducir la cantidad al costo de tener más integrales que resolver. Por ejemplo,

$$\frac{1}{q^2} \frac{1}{q^2 + m^2} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 + m^2} \right).$$

Utilizando esta simplificación podemos ver cómo simplificamos el número de propagadores,

$$\frac{P_{\mu\nu}^\perp(q)}{q^2 + m^2} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2 + m^2} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2(q^2 + m^2)} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2 + m^2} - \frac{q_\mu q_\nu}{m^2} \left(\frac{1}{q^2} - \frac{1}{q^2 + m^2} \right).$$

La resolución de este diagrama quedará definida una vez que se resuelvan las siguientes integrales:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q+p)^2} \frac{\delta_{\mu\nu}}{q^2 + m^2}, \\ I_2 &= -\frac{1}{m^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q+p)^2} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}, \\ I_3 &= \frac{1}{m^2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q+p)^2} \frac{q_\mu q_\nu}{q^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Para resolverlas utilizamos el truco de Feynman el cual consiste en simplificar el denominador utilizando la forma siguiente:

$$\frac{1}{D_1^{\nu_1} D_2^{\nu_2} \dots D_n^{\nu_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta(\Sigma x_i - 1) \frac{\prod x_i^{\nu_i - 1}}{(x_1 D_1 + \dots + x_n D_n)^{\Sigma \nu_i}} \frac{\Gamma(\nu_1 + \dots + \nu_n)}{\Gamma(\nu_1) \dots \Gamma(\nu_n)}. \quad (2.6)$$

A modo de ejemplo se detalla el cálculo de la integral I_3 , aplicando el truco de Feynman tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(q+p)^2(q^2+m^2)} &= \int_0^1 dx \frac{1}{(x(q+p)^2 + (1-x)(q^2+m^2))^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{((q+xp)^2 + (1-x)(m^2+xp^2))^2} \\ &= \int_0^1 dx \frac{1}{(l^2 + \Delta)^2}, \end{aligned}$$

con $l = q + xp$ y $\Delta = (1-x)(m^2 + xp^2)$.

Al colocar este resultado en la integral I_3 y haciendo el cambio en el momento $q = l - xp$, obtenemos

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{m^2} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \int_0^1 dx \frac{(l - xp)_\mu (l - xp)_\nu}{(l^2 + \Delta)^2} \\ &= \frac{1}{m^2} \int_0^1 dx \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l_\mu l_\nu + x^2 p_\mu p_\nu}{(l^2 + \Delta)^2}, \end{aligned}$$

en donde las potencias impares de l son cero debido a que la integral barre todos los momentos.

Además, podemos usar la siguiente fórmula

$$\int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} l_\mu l_\nu f(l^2) = \frac{\delta_{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} l^2 f(l^2),$$

dando como resultado

$$I_3 = \frac{1}{m^2} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\delta_{\mu\nu}}{d} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2 + \Delta)^2} + x^2 p_\mu p_\nu \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2 + \Delta)^2} \right\}. \quad (2.7)$$

Algo a destacar de esta ecuación es que depende únicamente del módulo del momento integrado y no de sus ángulos, por lo que podemos separar la hipersuperficie de la esfera d -dimensional, es decir,

$$\int d^d l \rightarrow \int_0^\infty dl S_d l^{d-1}$$

con $S_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})}$ y $\Gamma(n)$ la función gamma.

Cabe recordar que para valores enteros $\Gamma(n) = (n - 1)!$. Luego se usa la fórmula

$$\int_0^\infty \frac{u^\alpha du}{(u + r)^\beta} = r^{\alpha+1-\beta} \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta - \alpha - 1)}{\Gamma(\beta)},$$

la integral I_3 queda

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{m^2} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\delta_{\mu\nu}}{2} \Delta^{\frac{d}{2}-1} \Gamma(1 - d/2) + x^2 p_\mu p_\nu \Delta^{\frac{d}{2}-2} \Gamma(2 - d/2) \right\} \\ &= \frac{1}{m^2} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\delta_{\mu\nu}}{2 - d} \Delta + x^2 p_\mu p_\nu \right\} \Delta^{\frac{d}{2}-2}. \end{aligned}$$

De manera similar se llegan a los resultados para I_1 e I_2 ,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 dx \delta_{\mu\nu} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Delta^{\frac{d}{2}-2}, \\ I_2 &= -\frac{1}{m^2} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ \frac{\delta_{\mu\nu}}{2 - d} \Delta(m = 0) + x^2 p_\mu p_\nu \right\} \Delta^{\frac{d}{2}-2}(m = 0). \end{aligned}$$

De esta manera, se obtiene la siguiente expresión para el diagrama:

$$\begin{aligned}
& N(g_C^B)^2 \delta^{ac} p_\mu p_\nu (I_1 + I_2 + I_3) \\
&= N(g_C^B)^2 \delta^{ac} p_\mu p_\nu \frac{\Gamma(2 - d/2)}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^1 dx \left\{ \Delta^{\frac{d}{2}-2} \left(\delta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \left[\frac{\delta_{\mu\nu}}{2-d} \Delta + x^2 p_\mu p_\nu \right] \right) - \right. \\
&\quad \left. \frac{\Delta(m=0)^{\frac{d}{2}-2}}{m^2} \left(\frac{\delta_{\mu\nu}}{2-d} \Delta(m=0) + x^2 p_\mu p_\nu \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

En esta tesis se calculan, al igual que éste, otros tres diagramas más, dos con vértices con tres patas externas y un vértice con cuatro. El ejemplo analizado es uno de los más sencillos. Por ello utilizaré un programa desarrollado en Mathematica por la integrante de nuestro grupo, Marcela Peláez, que se encuentra basado en un código anterior de Matthieu Tissier. En él se introduce la expresión del diagrama obtenida a partir de las reglas de Feynman y devuelve el resultado correspondiente con una estructura similar de la ecuación (2.8).

2.3.2. Diagramas

En esta sección presentaremos los restantes diagramas utilizados en este trabajo con su correspondiente representación integral y su respectivo resultado. Además explicaremos brevemente algunas de las simplificaciones más relevantes.

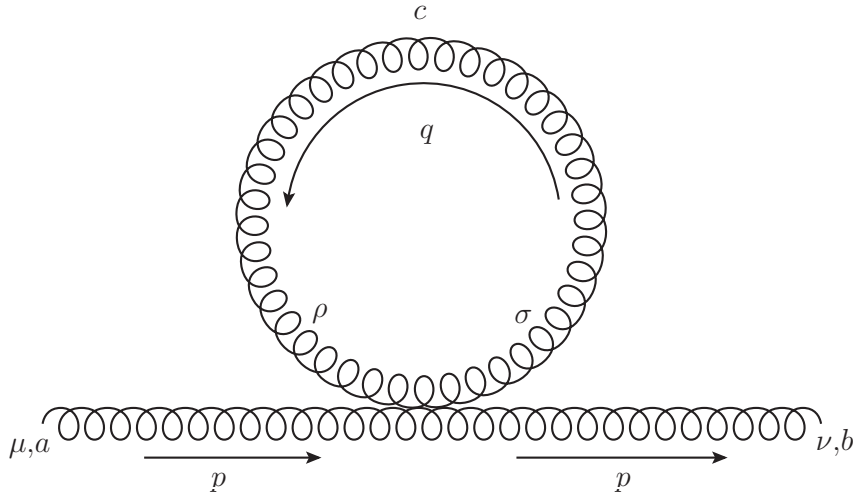


Figura 2.8: Diagrama renacuajo o tadpole.

El diagrama de la figura 2.8 es la corrección del propagador del gluón con un loop de gluones caracterizado por un vértice de cuatro gluones. Cuando aplicamos

las reglas de Feynman a este diagrama obtenemos:

$$\begin{aligned}
D_{\text{tadpole}} &= -\frac{4 \times 3}{4!} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\delta^{c'c''} P_{\sigma\rho}^\perp(q)}{q^2 + m^2} (g_A^B)^2 \left[f^{eab} f^{ec'c''} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) \right. \\
&\quad \left. + f^{eac'} f^{ebc''} (\delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma} - \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) + f^{eac''} f^{ec'b} (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\nu} \delta_{\sigma\rho}) \right] \\
&= -\frac{(g_A^B)^2 N (d-1)^2}{(4\pi)^{d/2} d} m^{d-2} \Gamma(1-d/2) \delta^{ab} \delta^{\mu\nu}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Aquí también utilizamos algunas propiedades para la constante de estructura: $f^{ijj} = 0$, $f^{ijk} = -f^{ikj}$ y $f^{ijk} f^{ijl} = N \delta^{kl}$. Cabe mencionar que el signo negativo proviene de la existencia de un sólo vértice, siendo necesario introducir el término $\frac{(-1)^1}{1!}$. A su vez, contamos con un $1/4!$ por el vértice de cuatro gluones y un factor combinatorio que proviene de contar las posibilidades de unir las distintas patas entre sí. Usando que $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ obtenemos

$$D_{\text{tadpole}} = \frac{(g_A^B)^2 N 2(d-1)^2}{(4\pi)^{d/2} d(d-2)} m^{d-2} \Gamma(2-d/2) \delta^{ab} \delta^{\mu\nu}. \tag{2.10}$$

La ventaja de esta expresión radica en que luego consideramos $d = 4 - \epsilon$, y al aplicarlo a $\Gamma(2-d/2)$ obtendremos $\Gamma(\epsilon/2)$. El desarrollo de $\Gamma(x)$ en $x = 0$ es más sencillo de esta manera y lo utilizaremos al tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$.

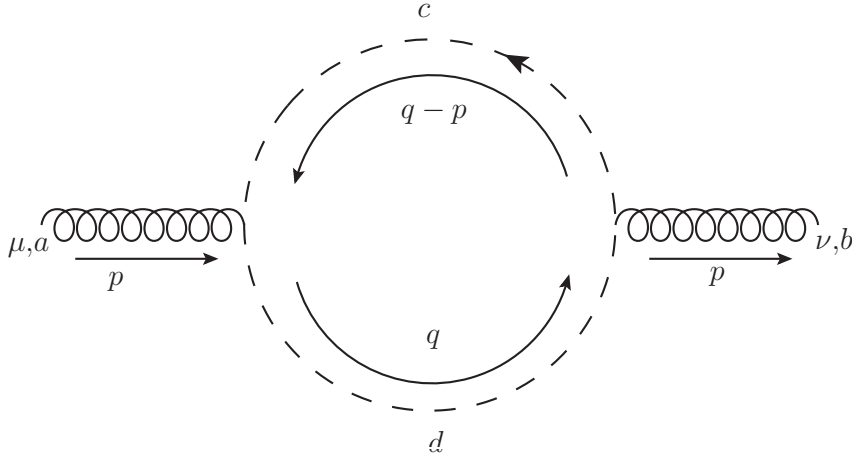


Figura 2.9: Sunset de fantasmas.

El diagrama de la figura 2.9 corresponde a la corrección del propagador del gluón con un loop de fantasmas. Luego de aplicar las reglas de Feynman, la expresión del diagrama puede leerse como:

$$D_{\text{sunset-fantasma}} = -\frac{2}{2!} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{\delta^{c'c''}}{(q-p)^2} \frac{\delta^{d'd''}}{q^2} \left(-ig_C^B f^{ac'd'}(-q_\mu) \right) \left(-ig_C^B f^{bd''c''} [-(q-p)_\nu] \right),$$

donde el signo de menos viene por la existencia de un loop fermiónico. Efectuando

las mismas operaciones que en la sección anterior se obtiene,

$$\begin{aligned} D_{\text{sunset-fantasma}} &= -\frac{N(g_C^B)^2 \delta^{ab}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(1-d/2)}{2} \left\{ \delta_{\mu\nu} + (d-2) \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right\} \int_0^1 dx [p^2 x(1-x)]^{d/2-1} \\ &= \frac{N(g_C^B)^2 \delta^{ab}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{d-2} p^{d-4} ((d-2)p_\mu p_\nu + p^2 \delta_{\mu\nu}) \frac{\Gamma^2(d/2)}{\Gamma(d)} \end{aligned}$$

en donde en el último paso utilizamos la fórmula

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx \underset{a,b > -1}{=} \frac{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)}{\Gamma(a+b+2)}.$$

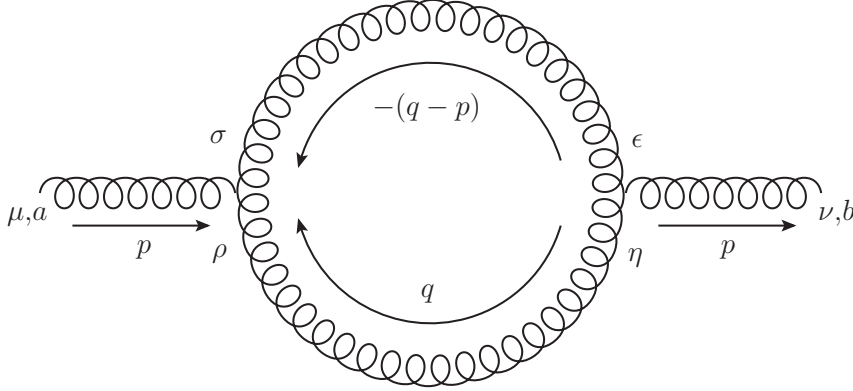


Figura 2.10: Diagrama con 1 loop gluónico o sunset de gluones.

El diagrama de la figura 2.10 es el más complicado debido a las dos estructuras tensoriales aportadas por los dos vértices de tres gluones. El diagrama representa la siguiente integral

$$\begin{aligned} D_{\text{sunset-gluón}} &= 6 \times 3 \times 2 \left(\frac{1}{3!} \right)^2 \frac{(-1)^2}{2!} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \left(\frac{\delta^{c'c''}}{(q+p)^2 + m^2} P_{\epsilon\sigma}^\perp(q+p) \right) \left(\frac{\delta^{d'd''}}{q^2 + m^2} P_{\rho\eta}^\perp(q) \right) \\ &\quad \times i g_A^B f^{ac'd'} [(-q+p)_\mu \delta_{\sigma\rho} + (q-p)_\sigma \delta_{\rho\mu} + (p - (-q+p))_\rho \delta_{\mu\sigma}] \\ &\quad \times i g_A^B f^{bc''d''} [((q+p)_\nu \delta_{\epsilon\eta} + (-q - (-p))_\epsilon \delta_{\eta\nu} + (-p - (q+p))_\eta \delta_{\nu\epsilon}]. \end{aligned}$$

Haciendo algunas simplificaciones con las constantes de estructura y las proyecciones como $(q+p)_\epsilon P_{\epsilon\sigma}^\perp(q+p) = 0$ ó $q_\rho P_{\rho\eta}^\perp(q) = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} D_{\text{sunset-gluón}} &= \frac{N(g_A^B)^2 \delta^{ab}}{2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} [(2q+p)_\mu \delta_{\sigma\rho} + 2p_\sigma \delta_{\rho\mu} - 2p_\rho \delta_{\mu\sigma}] \\ &\quad \times [(2q+p)_\nu \delta_{\epsilon\eta} + 2p_\epsilon \delta_{\eta\nu} - 2p_\eta \delta_{\nu\epsilon}] \frac{P_{\epsilon\sigma}^\perp(q+p)}{(q+p)^2 + m^2} \frac{P_{\rho\eta}^\perp(q)}{q^2 + m^2}. \end{aligned}$$

Luego de hacer el truco de Feynman reiteradas veces y la integral de momentos el diagrama se lee

$$\begin{aligned}
D_{\text{sunset-gluón}} = & \frac{N(g_A^B)^2 \delta^{ab} \Gamma(2-d/2)}{2(4\pi)^{d/2}} \int_0^1 d^d x \left\{ \frac{4p^2(\Delta_0^{d/2} + \Delta_1^{d/2} - 2\Delta_2^{d/2})}{(d-2)dm^4} \right. \\
& + 4p^2 \Delta_1^{d/2-2} \left(2 + \frac{p^2}{m^2}(2x^2 - 2x + 1) \right) - 8\Delta_1^2 \frac{p^4}{m^2} \Delta_2^{d/2} + (2-d) \left[(d-1)\Delta_1^{d/2-1} \right. \\
& - \frac{p^4}{m^4} \left((2x^2 - 2x + 1)\Delta_2^{d/2-1} - (x-1)^2 \Delta_1^{d/2-1} \right) + \frac{p^4}{m^4} (x-1)^2 \Delta_0^{d/2-1} \\
& \left. \left. + \frac{3p^2}{m^2} (\Delta_1^{d/2-1} - \Delta_2^{d/2-1}) \right] \right\} \delta_{\mu\nu} + \frac{N(g_A^B)^2 \delta^{ab} \Gamma(2-d/2)}{8(4\pi)^{d/2} m^4} \int_0^1 d^d x \left\{ \frac{32(\Delta_0^{d/2} + \Delta_1^{d/2} - 2\Delta_2^{d/2})}{(d-2)d} \right. \\
& - \frac{(d-2)}{x-1} \left[-(x-1) \left(\Delta_1^{d/2-1} (8m^2 + p^2(-20x^2 + 4x + 3)) - 2\Delta_2^{d/2-1} (4m^2 - 5p^2(1-2x)^2) \right) \right. \\
& - 3p^2(x-1)\Delta_0^{d/2-1} - 4(5x-1)\Delta_0^{d/2} \left. \right] + 4 \frac{1}{\Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 x^2} \left[\Delta_2^2 \Delta_3^2 x^2 \Delta_1^{d/2} (m^4(d(1-2x)^2 - 4x^2 \right. \\
& + 4x - 9) + m^2 p^2(-4x^2 + 4x - 3) + p^4(1-2x)^2 x^2) - \Delta_1^2 p^2 \Delta_2^{d/2} \\
& \left. \left. \times (\Delta_2^2(m^2(1-4x^2) + p^2(8x^4 - 16x^3 + 14x + 1)) - 2\Delta_3^2 x^3(2m^2 + 3p^2)) + \frac{(1-2x)^2 \Delta_0^{d/2}}{(x-1)^2} \right] \right\} p_\mu p_\nu,
\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
\Delta_0 &= p^2(1-x)x \\
\Delta_1 &= m^2 + p^2(1-x)x \\
\Delta_2 &= m^2x + p^2(1-x)x \\
\Delta_3 &= m^2 + p^2(1-x).
\end{aligned}$$

Al hacer la sustitución de $d = 4 - \epsilon$ y simplificando algunos términos obtenemos

$$\begin{aligned}
D_{\text{sunset-gluón}} = & \frac{N(g_A^B)^2 \delta^{ab}}{32\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \int_0^1 d^d x \left\{ \frac{2p^2(\Delta_0^2 + \Delta_1^2 - 2\Delta_2^2)}{m^4} \right. \\
& + 4p^2 \left(1 - \frac{\epsilon}{2} \log(\Delta_1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right) \left(2 + \frac{p^2}{m^2}(2x^2 - 2x + 1) \right) - 8\Delta_1^2 \frac{p^4}{m^2} \Delta_2^2 - 4 \left[3\Delta_1 \right. \\
& - \frac{p^4}{m^4} \left((2x^2 - 2x + 1)\Delta_2 - (x-1)^2 \Delta_1 \right) + \frac{p^4}{m^4} (x-1)^2 \Delta_0 + \frac{3p^2}{m^2} (\Delta_1 - \Delta_2) \left. \right] \left. \right\} \delta_{\mu\nu} \\
& + \frac{N(g_A^B)^2 \delta^{ab}}{64\pi^2 m^4} \left(\frac{2}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \right) \int_0^1 d^d x \left\{ 4(\Delta_0^2 + \Delta_1^2 - 2\Delta_2^2) \right. \\
& - \frac{2}{x-1} \left[-(x-1) \left(\Delta_1(8m^2 + p^2(-20x^2 + 4x + 3)) - 2\Delta_2(4m^2 - 5p^2(1-2x)^2) \right) \right. \\
& - 3p^2(x-1)\Delta_0 - 4(5x-1)\Delta_0^2 \left. \right] + 4 \frac{1}{\Delta_1^2 \Delta_2^2 \Delta_3^2 x^2} \left[\Delta_2^2 \Delta_3^2 x^2 \Delta_1^2 (m^4(4(1-2x)^2 - 4x^2 \right. \\
& + 4x - 9) + m^2 p^2(-4x^2 + 4x - 3) + p^4(1-2x)^2 x^2) - \Delta_1^2 p^2 \Delta_2^2 \\
& \left. \left. \times (\Delta_2^2(m^2(1-4x^2) + p^2(8x^4 - 16x^3 + 14x + 1)) - 2\Delta_3^2 x^3(2m^2 + 3p^2)) + \frac{(1-2x)^2 \Delta_0^2}{(x-1)^2} \right] \right\} p_\mu p_\nu.
\end{aligned}$$

Si tomamos el límite $\epsilon \rightarrow 0$ vamos a ver divergencias en los tres diagramas. En el ejemplo anterior podemos apreciar esto en el término $2/\epsilon$. Este problema es solucionado al renormalizar la teoría. En la sección siguiente explicaremos cómo lo hacemos.

2.4. Renormalización

Al introducir las interacciones a la teoría aparecen divergencias ultravioletas. Nuestra manera de lidiar con ellas es el método de renormalización. Básicamente consiste en redefinir o re-normalizar las variables que describen la teoría. En la Teoría Cuántica de Campos (QFT en inglés) la renormalización surge debido a nuestras limitaciones a la hora de saber lo que sucede a escalas de energías muy grandes o, lo que es lo mismo, distancias muy pequeñas. Muchas de las QFT que los físicos usan para describir el universo no abarcan cualquier rango de energías pero han demostrado una gran consistencia con los experimentos en determinados rangos energéticos.

Una ilustración sencilla que describe el objetivo de este procedimiento es la del apantallamiento de la carga eléctrica en un dieléctrico. Si a éste se le coloca una carga positiva Q fija dentro del mismo se generará una polarización alrededor del mismo. Supongamos que el efecto de la polarización termina a un radio D , tomando como centro la carga introducida. Las cargas más distantes sentirán una carga $q < Q$, reduciendo su valor aparente. Si por alguna razón no podemos acceder a distancias menores que D , se puede pensar en una teoría que tome la carga q con la restricción de que no podamos explicar lo que pasa a distancias menores que D . Algo similar ocurre en la teoría con los campos, las constantes de acoplamiento y la escala de energía.

Al calcular explícitamente los términos del desarrollo perturbativo (diagramas de Feynman) de una función de Green, como puede ser el propagador del fantasma o del gluón, surgen divergencias ultravioletas. Estos infinitos están íntimamente relacionados con lo que sucede a escalas de energías muy grandes y donde la teoría puede estar fallando. Como sabemos que a escalas de energías moderadas la teoría presenta una gran concordancia con los experimentos, nos gustaría redefinir o renormalizar los campos y constantes en función de lo medido en las escalas accesibles. Muchas veces estas nuevas redefiniciones absorben los infinitos que aparecen en la teoría. Este método es el llamado renormalización.

Para poder renormalizar y así eliminar los infinitos es conveniente tratar de explicitar la dependencia de las funciones de correlación en las escalas ultravioletas. Existen varios métodos para lograrlo, es decir, para regularizar la teoría. Si bien cada uno puede llevar a cálculos intermedios muy diferentes, todos ellos deben llegar a resultados idénticos luego de la renormalización. Algunos procedimientos de regularización son: regularización dimensional, regularización de Pauli-Villars, regularización en la red y la introducción de un corte ultravioleta en la integral de momentos. En esta tesis usamos la regularización dimensional ya que preserva las simetrías de Lorentz y de gauge.

La regularización dimensional consiste en calcular los diagramas de Feynman como una función de la dimensión del espacio, d , que por lo general se traduce en

hacer la siguiente sustitución: $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d}$. Vale la pena mencionar que esta regularización fue la que empleamos a la hora de calcular los propagadores a un loop. Al final de cuentas debemos obtener, para cualquier cantidad observable, un valor físico consistente y sin elementos arbitrarios en el límite $d \rightarrow 4$. Como sabemos que para $d = 3$ las integrales son regulares en QCD, nos aproximaremos a $d = 4$ desde valores de menor dimensión. Redefinimos d tal que $d = 4 - \epsilon$, para luego tomar el límite $\epsilon \rightarrow 0$. A continuación podemos ver un ejemplo genérico:

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + \Delta)^n} = \frac{\Gamma(n - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \Delta^{d/2 - n}. \quad (2.11)$$

Una característica importante de la regulación dimensional es que anula las posibles divergencias cuadráticas imponiendo que $\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} = 0$, que coincide con la ecuación (2.11) al imponer que $n = 1$, $\Delta = 0$ y $d = 4 - \epsilon$,

$$\int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{q^2} = \frac{\Gamma(\epsilon/2 - 1)}{(4\pi)^{2 - \epsilon/2}} \Delta^{1 - \epsilon/2} \Big|_{\Delta=0} = 0. \quad (2.12)$$

Esta nueva definición no genera ningún problema en nuestros cálculos y la razón se debe a que en la QCD no hay divergencias de este tipo. Si bien en las etapas intermedias del cálculo pueden aparecer, debido a uno u otro diagrama, al final de cuentas éstas se cancelarán.

Para entender mejor el tema de la regularización conviene trabajar con la regularización por medio de un corte en la escala de energías, Λ , que sirve como límite superior en las integrales. Este corte es de carácter ultravioleta pero su valor exacto no es conocido. Si bien esta regularización rompe con la simetría gauge, es un buen ejemplo para observar el procedimiento y la lógica de la renormalización. Consideremos por ejemplo, una cantidad física $F(x)$ la cual podemos desarrollar perturbativamente usando como parámetros de desarrollo las constantes de acoplamiento. Como resultado obtendremos una serie de términos que se representarán gráficamente como los diagramas de Feynman. Podemos analizar un ejemplo particular y sencillo en donde sólo hay una constante de acoplamiento g_Λ y cuyo primer orden es g_Λ :

$$F(x) = g_\Lambda + g_\Lambda^2 F_1(x) + g_\Lambda^3 F_2(x) + \dots \quad (2.13)$$

donde $F_1(x)$ puede ser

$$F_1(x) = \alpha \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + x^2)^2},$$

siendo α constante y por lo tanto diverge.

Aquí entra en juego la regularización, al hacer la sustitución $\int d^4 q \rightarrow \int^\Lambda d^4 q$ obtenemos

$$F_{1,\Lambda}(x) = \alpha \int_{0 < |q| < \Lambda} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2 + x^2)^2} \quad \text{con } |q| < \Lambda,$$

eliminando así la divergencia ultravioleta a cambio de introducir un valor arbitrario, Λ . Definimos

$$F_\Lambda(x) = g_\Lambda + g_\Lambda^2 F_{1,\Lambda}(x) + g_\Lambda^3 F_{2,\Lambda}(x) + \dots$$

Si asumimos que la cantidad física es conocida a una cierta escala de energía arbitraria μ_0 entonces podemos redefinir las constantes de acoplamiento y los campos de forma tal de absorber este nuevo parámetro Λ . El conjunto de ecuaciones que parametriza nuestra teoría y redefine nuestros parámetros se llama: esquema de renormalización. En nuestro ejemplo, éste podría ser

$$F(\mu) = g_R, \quad (2.14)$$

ya que aquí tenemos sólo una constante de acoplamiento. Necesitaremos tantas ecuaciones como parámetros libres tengamos.

El vínculo entre la constante de acoplamiento g_Λ y la constante renormalizada g_R está dado por el factor de renormalización Z_g con $g_\Lambda = Z_g g_R$. Este factor contendrá al parámetro Λ .

Luego de obtener g_R , queda únicamente escribir $F(x)$ en función de ésta. Mediante el esquema de la ecuación (2.14) y la ecuación (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned} g_\Lambda &= g_R - g_\Lambda^2 F_{1,\Lambda}(\mu) + \mathcal{O}(g_\Lambda^3) \\ &= g_R - g_R^2 F_{1,\Lambda}(\mu) + \mathcal{O}(g_R^3) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por lo tanto, sustituyendo g_Λ de (2.15) en la ecuación (2.13), obtenemos

$$F(x) = g_R + g_R^2 \underbrace{(F_{1,\Lambda}(x) - F_{1,\Lambda}(\mu))}_{\text{Finito}} + \mathcal{O}(g_R^3) \quad (2.16)$$

Debido a que cualquier observable físico a energías mucho menores a Λ no puede ser sensible a este parámetro, se toma el límite $\Lambda \rightarrow \infty$ y se busca que el resultado converja a uno con sentido físico. Podemos resumir los pasos de la siguiente manera:

$$F(x, g_\Lambda) \rightarrow F(x, g_\Lambda, \Lambda) \rightarrow F_\Lambda(x, g_R, \mu) \xrightarrow{\Lambda \rightarrow \infty} F(x, g_R, \mu) \quad (2.17)$$

En donde el último valor es finito, logrando así circunvalar los infinitos que aparecían primeramente. Vemos de esta manera que al reparametrizar la teoría en función de una cantidad, como lo es g_R , logramos llevarla a un desarrollo insensible a la escala ultravioleta.

2.4.1. Características generales del esquema de renormalización

Para obtener tanto $\Gamma_{AA}^{(2)R}$ como $\Gamma_{\bar{C}C}^{(2)R}$ tenemos que renormalizar la teoría. Para ello debemos elegir un esquema de renormalización. Es decir, definir las constantes de acoplamiento y la masa.

Para poder renormalizar este modelo debemos a priori fijar 6 variables a una determinada escala de energía μ_0 . En nuestra teoría éstos son: la renormalización del campo bosónico A , la renormalización del campo de fantasmas C , el cuadrado de la masa del gluón m^2 , la constante de acoplamiento del vértice con cuatro gluones g_{AAAA} , la de tres gluones g_{AAA} y la constante de acoplamiento para el vértice que involucra un fantasma, un antifantasma y un gluón $g_{C\bar{C}A}$. Para simplificar la notación emplearemos la sustitución de $g_{AAA} = g_A$ y $g_{C\bar{C}A} = g_C$. En este trabajo supondremos

con el fin de simplificar nuestros cálculos que la diferencia entre la constante de acoplamiento entre cuatro gluones y la de tres gluones es de un orden mayor al trabajado aquí. Consecuentemente, podremos tomar $g_{AAAA} = g_{AAA}$. Para todos los esquemas se deben definir las siguientes funciones:

$$\begin{aligned} & \Gamma_{AA}^{\perp R}(p, -p) \quad \Gamma_{AA}^{\parallel R}(p, -p) \quad \Gamma_{CC}^R(p, -p) \\ & \Gamma_{CC}^R(p, q, r) \quad \Gamma_{AAA}^R(p, q, r) \quad \Gamma_{AAAA}^R(p, q, r, s) \end{aligned} \quad (2.18)$$

En donde, por ejemplo, $\Gamma_{AA}^{\perp}(p)$ y $\Gamma_{AA}^{\parallel}(p)$ se definen a partir de $\Gamma_{A_\mu A_\nu}(p) = P_{\mu\nu}^{\perp}(p)\Gamma_{AA}^{\perp} + P_{\mu\nu}^{\parallel}(p)\Gamma_{AA}^{\parallel}$, con $P_{\mu\nu}^{\perp}(p) := \delta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$ y $P_{\mu\nu}^{\parallel}(p) := \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}$ siendo los proyectores transversales y longitudinales, respectivamente.

Cada uno de los elementos de (2.18) representa una suma de diagramas, en nuestro caso, hasta primer orden. Para caracterizarlos es necesario elegir una configuración cinemática, es decir, definir los momentos de las patas externas. La razón de que exista esta arbitrariedad en la configuración cinemática proviene de que las constantes de acoplamientos desnudas no dependen de los mismos. Por ende, cuando uno define un vértice, es decir, una constante de acoplamiento, debe definir todos sus constituyentes: la forma y su configuración cinemática.

Equivalentemente a (2.18), se podría elegir definir los siguientes factores:

$$\begin{aligned} & Z_A, \quad Z_C, \quad Z_{m^2}, \\ & Z_{g_C}, \quad Z_{g_A}, \quad Z_{g_{AAAA}}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Los factores que aparecen en (2.19) son los llamados factores de renormalización que nos permitirán renormalizar la teoría absorbiendo las divergencias. Algunos ejemplos:

$$\left. \begin{aligned} g^B &= Z_g g^R & A_{a\mu}^B &= \sqrt{Z_A} A_{a\mu}^R \\ c_a^B &= \sqrt{Z_C} c_a^R & (m^B)^2 &= Z_{m^2} m^2 \end{aligned} \right\} \text{Factores de renormalización} \quad (2.20)$$

En nuestro trabajo tomamos las constantes de acoplamiento correspondientes a los vértices de tres y cuatro gluones como iguales. Dicho de otra manera, $Z_{g_{AAA}} = Z_{g_{AAAA}} = Z_{g_A}$ o lo que es lo mismo, la constante de acoplamiento del vértice de cuatro gluones (g_{AAAA}) es igual a la constante de acoplamiento del vértice de tres gluones (g_{AAA}). Por ende en nuestro caso debemos fijar sólo 5 normalizaciones.

2.4.2. Elección del esquema de renormalización

Como se dijo previamente, existe una libertad a la hora de elegir el esquema de renormalización. A saber, qué funciones fijar y cómo hacerlo. Nosotros elegimos tomar el esquema introducido por Axel Weber et al en [38], el cual es una reformulación del presentado en [36], que a los efectos presentes resulta más cómodo. En el mismo se define el valor tanto de la componente perpendicular como de la paralela del vértice a determinada escala. Una de las ventajas de este esquema es que permite

evitar la presencia del polo de Landau, [36]. Por esta razón, nos referiremos a este esquema como: infrared safe longitudinal (IS-l).

A la par, además de seleccionar 5 funciones, nos limitaremos a una cierta configuración cinemática para el vértice de tres gluones y para el del fantasma-antifantasma-gluón. El vértice de gluones, expuesto en 2.11, lo tomaremos con uno de los momentos entrantes igual a cero. El vértice restante, visible en 2.12, lo tomaremos con el momento entrante del fantasma nulo. Lo dicho anteriormente se evidencia en las figuras 2.11 y 2.12 con ambos momentos $r = 0$ llevados a cero. A su vez, estos vértices serán los que nos definan las constantes de acoplamiento g_A y g_C :

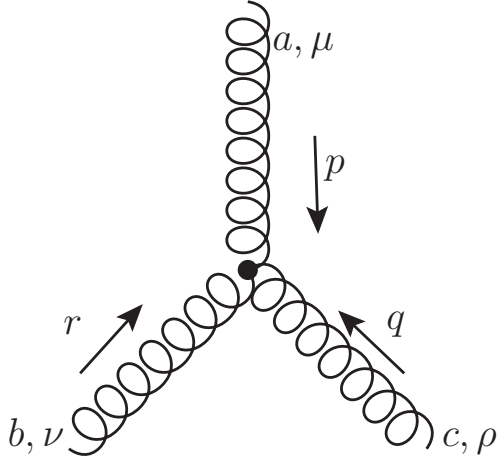


Figura 2.11: Vértice de interacción de tres gluones.

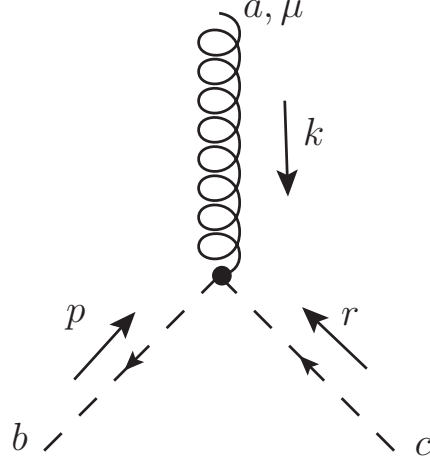


Figura 2.12: Vértice de interacción gluón, antifantasma y fantasma.

Las cinco funciones correspondientes al esquema IS-l, una vez fijada la configuración cinemática, son:

$$\Gamma_{AA}^{R,\perp}(p = \mu_0) = m^2 + \mu_0^2 \quad (2.21a)$$

$$\Gamma_{CC}^R(p = \mu_0) = \mu_0^2 \quad (2.21b)$$

$$\Gamma_{AA}^{R,\parallel}(p = \mu_0) = m^2 \quad (2.21c)$$

$$\Gamma_{ACC}^{(3)R}(\mu_0, -\mu_0, 0) = -if^{abc}g_C^R p_\mu \quad (2.21d)$$

$$\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)R}(\mu_0, -\mu_0, 0) = -if^{abc}g_A^R(p_\mu\delta_{\nu\rho} - 2p_\nu\delta_{\mu\rho} + p_\rho\delta_{\mu\nu}) \quad (2.21e)$$

Las ecuaciones presentes en (2.21) pueden ser combinadas con las definiciones de los factores de renormalización, (2.20), para obtener los mismos en función de la escala de energía a la cual se fijó el esquema, μ_0 , y las constantes de acoplamiento

renormalizadas. El resultado de esta acción puede ser observado a continuación.

$$Z_{m^2} = 1 + \left(\frac{m^2 + \mu_0^2}{m^2 \mu_0^2} \Sigma_{AA\parallel}^{1loop}(p = \mu_0) - \frac{1}{\mu_0^2} \Sigma_{AA\perp}^{1loop}(p = \mu_0) \right) \quad (2.22a)$$

$$Z_A = \frac{m^2}{Z_{m^2} m^2 - \Sigma_{AA\parallel}^{1loop}(p = \mu_0)} \quad (2.22b)$$

$$Z_C = \frac{\mu_0^2}{\mu_0^2 - \Sigma_{C\bar{C}\parallel}^{1loop}(p = \mu_0)} \quad (2.22c)$$

$$Z_{g_C} = \frac{1}{\sqrt{Z_A Z_C}} \quad (2.22d)$$

$$Z_{g_A} = \frac{Z_{g_C} g_C^R}{g_A^R} \quad (2.22e)$$

A partir de ahora asumiremos que todas las constantes están renormalizadas a menos que se especifique lo contrario mediante el supraíndice B .

La ecuación (2.22d) se obtiene mediante el teorema de no renormalización de Taylor (ver apéndice de [26]) y la ecuación (2.22e) se logra tomando en cuenta las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} g_B &= Z_{g_C} g_C, \\ g_B &= Z_{g_A} g_A, \\ g_B &= g_A^B = g_C^B. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En nuestro código utilizamos las ecuaciones (2.22), salvo la (2.22e) la cual será sustituida por la ecuación (2.21e). A su vez, para obtener las Σ^{1loop} , que codifican la suma de todos los diagramas a 1 loop utilizados, aplicamos programación simbólica como se mencionó anteriormente.

Podemos escribir las funciones de correlación desnudas en función de los campos renormalizados y los factores de renormalización. A continuación podemos ver como ejemplo a la función de correlación a tres puntos para el gluón:

$$\begin{aligned} \langle \Omega | A_\mu^B A_\nu^B A_\rho^B | \Omega \rangle &= Z_A^{3/2} \langle \Omega | A_\mu^R A_\nu^R A_\rho^R | \Omega \rangle = \\ \langle \Omega | A_\mu^B A_{\mu'}^B | \Omega \rangle \langle \Omega | A_\nu^B A_{\nu'}^B | \Omega \rangle \langle \Omega | A_\rho^B A_{\rho'}^B | \Omega \rangle \Gamma_{A_{\mu'} A_{\nu'} A_{\rho'}}^{(3)B} &= \\ Z_A^{3/2} \langle \Omega | A_\mu^R A_{\mu'}^R | \Omega \rangle \langle \Omega | A_\nu^R A_{\nu'}^R | \Omega \rangle \langle \Omega | A_\rho^R A_{\rho'}^R | \Omega \rangle \Gamma_{A_{\mu'} A_{\nu'} A_{\rho'}}^{(3)R} &= \\ Z_A^{3/2} Z_A^{-1} \langle \Omega | A_\mu^B A_{\mu'}^B | \Omega \rangle Z_A^{-1} \langle \Omega | A_\nu^B A_{\nu'}^B | \Omega \rangle Z_A^{-1} \langle \Omega | A_\rho^B A_{\rho'}^B | \Omega \rangle \Gamma_{A_{\mu'} A_{\nu'} A_{\rho'}}^{(3)B} &= \\ Z_A^{-3/2} \langle \Omega | A_\mu^B A_{\mu'}^B | \Omega \rangle \langle \Omega | A_\nu^B A_{\nu'}^B | \Omega \rangle \langle \Omega | A_\rho^B A_{\rho'}^B | \Omega \rangle \Gamma_{A_{\mu'} A_{\nu'} A_{\rho'}}^{(3)R}. \end{aligned}$$

A partir de este último desarrollo se deduce el vínculo entre la función gamma desnuda y la renormalizada para tres gluones. A continuación podemos observarlo junto con la dependencia de momentos, implícita en el desarrollo

$$\Gamma_{A_{\mu'} A_{\nu'} A_{\rho'}}^{(3)R}(p, q, r) = Z_A^{3/2} \Gamma_{A_{\mu'} A_{\nu'} A_{\rho'}}^{(3)B}(p, q, r). \quad (2.24)$$

Se puede encontrar de forma análoga el correspondiente vínculo para la función gam-

ma de dos gluones, de dos fantasmas o del vértice del gluón-fantasma-antifantasma:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{A_\mu' A_{\nu'}}^{(2)R}(p, -p) &= Z_A \Gamma_{A_\mu' A_{\nu'}}^{(2)B}(p, -p), \\
\Gamma_{C\bar{C}}^{(2)R}(p, -p) &= Z_C \Gamma_{C\bar{C}}^{(2)B}(p, -p), \\
\Gamma_{A\bar{C}\bar{C}}^{(3)R}(k, q, r) &= Z_C \sqrt{Z_A} \Gamma_{A\bar{C}\bar{C}}^{(3)B}(k, q, r).
\end{aligned}
\tag{2.25}$$

2.4.3. Parte divergente de los factores de renormalización Z

Aquí se presentan los resultados para la parte divergente de los factores de renormalización. Se debe tener en cuenta que se realizó la sustitución $d \rightarrow 4 - \epsilon$.

$$\begin{aligned}
Z_C &= 1 + \frac{3g_C^2 N}{32\epsilon\pi^2} + \mathcal{O}(g^4), \\
Z_{m^2} &= 1 - \frac{34g_A^2 N + g_C^2 N}{96\epsilon\pi^2} + \mathcal{O}(g^4), \\
Z_A &= 1 + \frac{25g_A^2 N + g_C^2 N}{96\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(g^4).
\end{aligned}
\tag{2.26}$$

A continuación, si reescribimos las ecuaciones (2.26) sin tomar en cuenta la diferenciación de las constantes de acoplamiento, obtenemos:

$$\begin{aligned}
Z_C &= 1 + \frac{3g^2 N}{32\epsilon\pi^2} + \mathcal{O}(g^4) \\
Z_{m^2} &= 1 - \frac{35g^2 N}{96\epsilon\pi^2} + \mathcal{O}(g^4) \\
Z_A &= 1 + \frac{13g^2 N}{48\pi^2\epsilon} + \mathcal{O}(g^4)
\end{aligned}
\tag{2.27}$$

Las expresiones presentes en (2.27) coinciden con los datos extraídos de [36].

2.5. Definición de las constantes de acoplamiento g_C y g_A

Las dos últimas ecuaciones que conforman el esquema de renormalización ((2.21d) y (2.21e)) son a su vez las definiciones de g_C y g_A . En esta sección entraremos en detalle en la obtención de estas cantidades.

Constante de acoplamiento g_C :

Para obtener la definición de g_C utilizaremos la función de correlación a tres puntos gluón-fantasma-antifantasma, representada a través del diagrama (o vértice) presente en la figura 2.12. Definiremos esta constante de acoplamiento al imponer que el vértice coincida con la expresión a orden árbol al ser evaluada en la escala de energía μ_0 . En este caso surge una gran simplificación al irse todos los diagramas de primer orden o superior debido a la elección cinemática. La razón se manifiesta al observar la forma de los diagramas de orden uno o superior, la cual puede observarse en la figura 2.13.

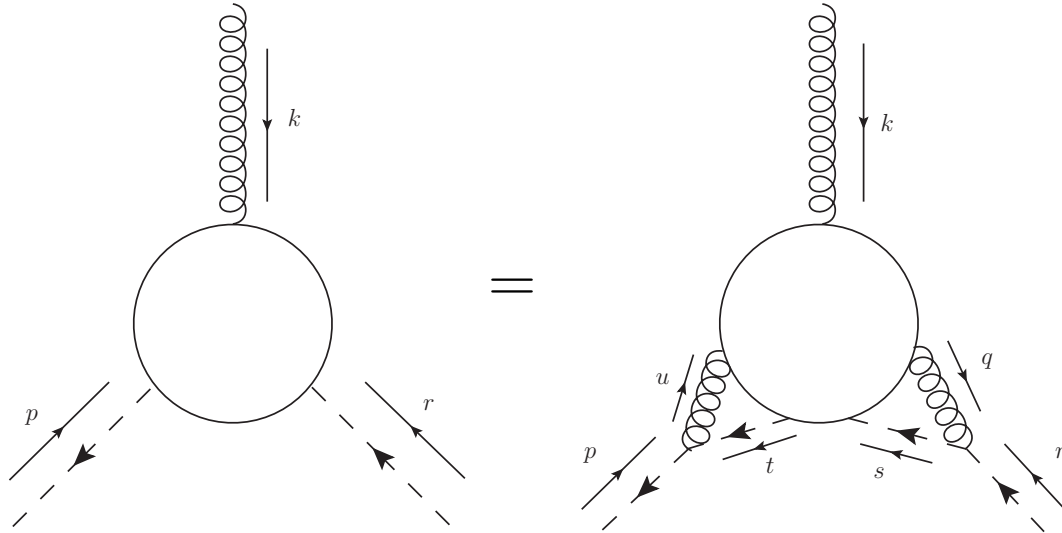


Figura 2.13: Forma genérica de los diagramas de primer o mayor orden para el vértice de gluón-fantasma-antifantasma.

Al introducir la restricción cinemática, imponiendo que el momento del fantasma entrante r sea igual a cero, el vértice conectado a la pata externa del fantasma se modifica de forma tal que el gluón del mismo posee el mismo momento q que el antifantasma. Este cambio podemos verlo en la figura 2.14.

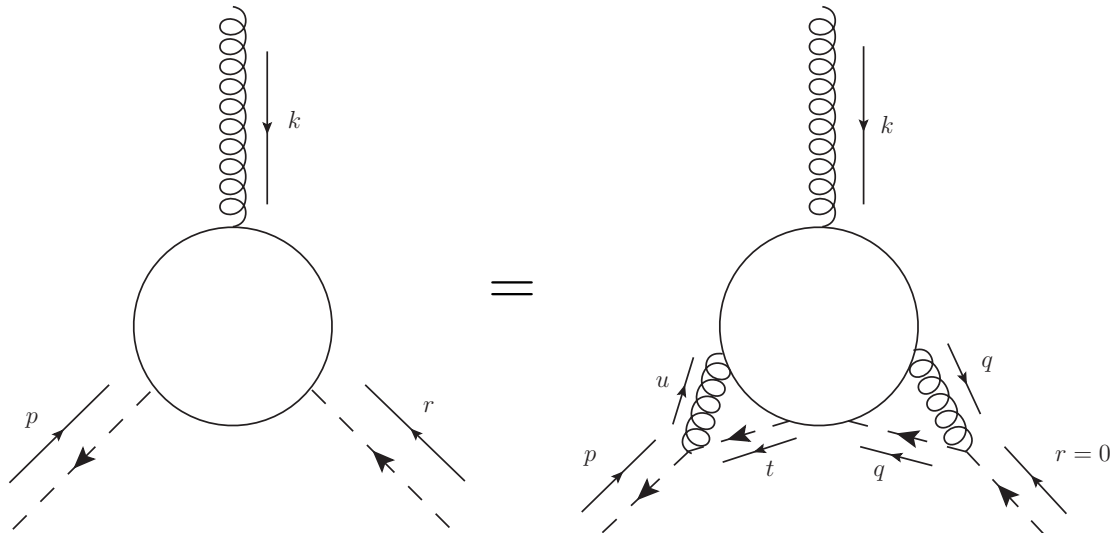


Figura 2.14: Forma genérica de los diagramas de primer o mayor orden para el vértice de gluón-fantasma-antifantasma con la restricción cinemática en la pata externa correspondiente al fantasma.

Con el propósito de mostrar que todos los diagramas de orden igual o superior a 1 loop se anulan nos focalizaremos en el análisis de tan sólo el vértice de tres patas gluón-fantasma-antifantasma correspondiente a la pata externa del fantasma, visible en la parte inferior derecha de la figura 2.14. En la figura 2.15 se ve el zoom de este término con el fin de analizar cada elemento en mayor detalle:

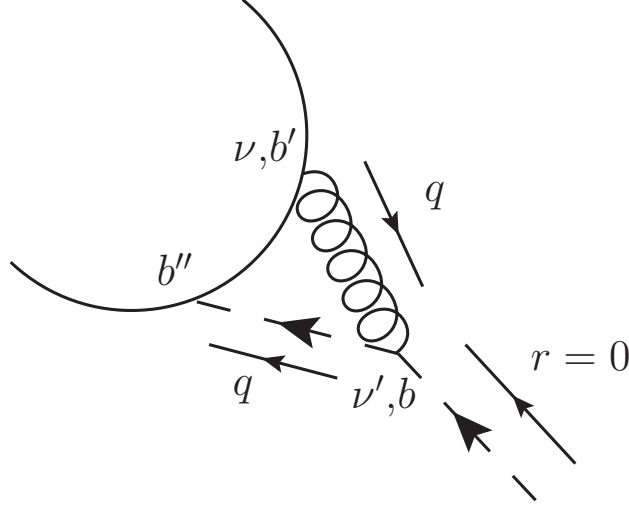


Figura 2.15: Zoom del diagrama de tres vértices correspondiente a la pata externa del fantasma.

La contribución del vértice visible en la figura 2.15 multiplica a cada elemento del desarrollo perturbativo de orden mayor o igual a uno. Dentro de esta contribución se encuentra el producto del proyector transversal correspondiente al gluón, $P^\perp(q)$, con el momento del antifantasma de dicho vértice, q . Este producto, por definición, es nulo. Por lo tanto, tenemos:

$$\left(\frac{\delta^{bb'}}{q^2 + m^2} P_{\nu\nu'}^\perp(q) \right) \left(-ig_C q_\nu f^{b'bb''} \right) = 0.$$

Al imponer la restricción cinemática en el vínculo entre el vértice gluón-fantasma-antifantasma desnudo y renormalizado, obtenemos

$$\Gamma_{AC\bar{C}}^{(3)R}(k, -k, r = 0) = Z_C \sqrt{Z_A} \Gamma_{AC\bar{C}}^{(3)B}(k, -k, r = 0).$$

Luego, procedemos a sustituir la definición dada por el esquema IS-1, ver ecuación (2.21d), obteniendo

$$\begin{aligned} -if^{abc} k_\mu g_C^R &= \Gamma_{AC\bar{C}}^{(3)R}(k, -k, r = 0) \\ &= Z_C \sqrt{Z_A} (-ig_C^B f^{abc} k_\mu + \underbrace{1 \text{ loop} + \dots}_{= 0, \text{ cuando } r = 0}), \end{aligned}$$

con $k = \mu_0$.

De lo que se concluye:

$$g_C^R = Z_C \sqrt{Z_A} g_C^B, \quad (2.28)$$

y por ende se concluye que

$$Z_C \sqrt{Z_A} Z_{g_C} = 1. \quad (2.29)$$

El resultado expuesto en (2.29) es el del teorema de no renormalización de Taylor, [34], el cual se prueba mediante el razonamiento expuesto en esta sección.

Constante de acoplamiento g_A :

Para obtener la definición de la constante de acoplamiento entre gluones se procede de manera similar a cuando obtuvimos g_C . En esta oportunidad tomaremos la función de correlación de tres campos gluónicos, representada a través del diagrama presente en la figura 2.11. Al evaluar esta función de correlación a la escala de energía μ_0 impondremos que la misma coincida con la expresión a orden árbol. Es decir,

$$\begin{aligned} \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{tree\ level} &= -i f^{abc} g_A^R (p_\mu \delta_{\nu\rho} - 2p_\nu \delta_{\mu\rho} + p_\rho \delta_{\mu\nu}), \\ &\Rightarrow \\ -i f^{abc} g_A^R (p_\mu \delta_{\nu\rho} - 2p_\nu \delta_{\mu\rho} + p_\rho \delta_{\mu\nu}) &= \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)R}(p, -p, 0) \\ &= Z_A^{\frac{3}{2}} \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)B}(p, -p, 0). \end{aligned}$$

La diferencia es que aquí no contamos con la simplificación anterior y todos los diagramas van a contribuir. Como estamos trabajando hasta orden g^2 los diagramas a tomar en cuenta, y contenidos en $\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)B}(p, -p, 0)$, son:

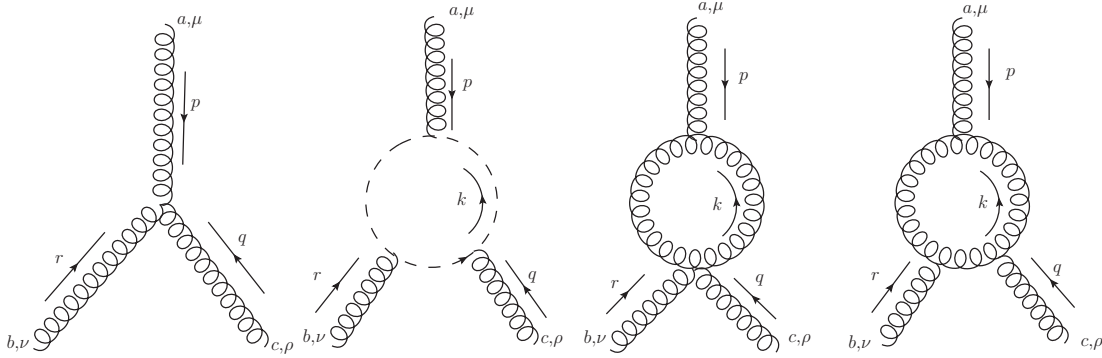


Figura 2.16: Diagramas que contribuyen a la función de correlación a tres puntos de tres gluones.

Lo que hacemos para simplificar cálculos es proyectar estas igualdades con el producto de dos proyectores transversales $P_{\mu\alpha}^\perp(p) P_{\rho\beta}^\perp(p)$. Además escribimos $\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)B}(p, -p, 0)$ de forma genérica:

$$\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)B} = A(p^2)(p_\rho \delta_{\mu\nu} + p_\mu \delta_{\nu\rho}) + B(p^2)p_\nu \delta_{\rho\mu} + C p_\mu p_\nu p_\rho$$

Que al ser proyectado, obtenemos

$$\Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)B} P_{\mu\alpha}^\perp(p) P_{\rho\beta}^\perp(p) = B(p^2) p_\nu P_{\alpha\beta}^\perp(p)$$

Juntando todas las ecuaciones anteriores proyectadas, llegamos a:

$$\begin{aligned} -i f^{abc} g_A^R (-2p_\nu P_{\alpha\beta}^\perp(p))|_{p=\mu} &= \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)R}(p, -p, 0) P_{\mu\alpha}^\perp(p) P_{\rho\beta}^\perp(p)|_{p=\mu} \\ Z_A^{\frac{3}{2}} \underbrace{(-i f^{abc} B^B(p^2) p_\nu P_{\alpha\beta}^\perp(p))|_{p=\mu}}_{\text{Calculado en Mathematica}} &= Z_A^{\frac{3}{2}} \Gamma_{A_\mu^a A_\nu^b A_\rho^c}^{(3)B}(p, -p, 0) P_{\mu\alpha}^\perp(p) P_{\rho\beta}^\perp(p)|_{p=\mu} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g_A^R = \frac{-Z_A^{\frac{3}{2}}}{2} B^B(\mu^2, g_A, g_C) \quad (2.30)$$

Es menester aclarar que el cálculo de estos diagramas se logró modificando el programa que sirvió para este mismo cálculo pero sin la diferenciación de las constantes de acoplamiento presente en [27].

Verificación de la parte divergente de la función B

La función $B(\mu, g_A, g_C)$ proviene del vértice de tres gluones y es proporcional a g_A^B . Combinando la ecuación que define a la constante de acoplamiento entre gluones renormalizada, (2.30), junto con el teorema de no renormalización de Taylor, (2.29) y el vínculo entre la constante de acoplamiento desnuda y renormalizadas para el gluón, $g_A^B = Z_{g_A} g_A^R$, tenemos:

$$\begin{aligned} B &= -\frac{2Z_C}{Z_A} g_A^B = -2g_A^B(1 + \delta Z_C)(1 - \delta Z_A) + \mathcal{O}(g^5) \\ &= -2 \left(g_B + \left[\frac{3}{2} - \frac{13}{3} \right] \frac{Ng_B^3}{16\pi^2\epsilon} \right) + \mathcal{O}(g^5). \end{aligned} \quad (2.31)$$

En donde δZ_A y δZ_C se refiere a la contribución a primer orden del desarrollo del factor de renormalización Z_A y Z_C , respectivamente, en la escala UV. A su vez, se utilizó que a esta escala de energías las constantes de acoplamiento cumplen con la igualdad $g_A^B = g_C^B = g^B$. Dando finalmente

$$B_{div} = \frac{17}{48} \frac{Ng_B^3}{\pi^2\epsilon}. \quad (2.32)$$

Resultado que concuerda con nuestros datos extraídos del programa utilizando Mathematica.

2.6. Problemas encontrados

Siempre se tuvo presente a nivel conceptual que las constantes de acoplamiento g_C y g_A no son independientes una de otra, éstas se vinculan a través de la constante de acoplamiento g_B como se muestra en las ecuaciones (2.23). En particular, éstas son iguales en el UV.

Al no imponer esta condición en nuestros cálculos de los diagramas nos topamos con algunas dificultades. Éstas se expresan en algunos términos que parecen diverger cuadráticamente cuando la escala de energías va a infinito, pero podemos apreciar que son proporcionales a $(g_C^B)^2 - (g_A^B)^2$. Por lo tanto sabemos que al final de cuentas deberían ser estrictamente nulos. Éstos se hubieran eliminado sin nuestra intervención al realizar la suma de los diagramas debido a la condición que cumplen estas constantes en el UV.

Por ejemplo, un término que es estrictamente cero pero que, sin embargo, lo podemos apreciar en nuestros cálculos de la función gamma para el gluón es

$$\frac{N\mu^2(g_C^2 - g_A^2)}{384\pi^2} \left(\frac{12}{\epsilon} + 12 + 6\gamma_E + 6\log(\mu^2) - 6\log(4\pi) \right). \quad (2.33)$$

Sabemos que este problema surge en el propagador del gluón y no del fantasma ya que este último no cuenta con acoples de gluones entre ellos, por lo que interviene únicamente el acople entre fantasmas y gluones. Por ende, el término (2.33) cuenta sólo con contribuciones del propagador del gluón. En particular, al fijar el esquema de renormalización, podemos observar que este inconveniente surge de la parte longitudinal (o paralela) del mismo.

La forma en que solucionamos esto fue separando los términos que sabemos que deberían haberse cancelado. Para lograr este cometido tomamos el límite ultravioleta de la contribución longitudinal de la suma de diagramas que aportan al propagador del gluón hasta orden 1 loop. Las constantes de acoplamiento serán iguales aquí, y por ende, todos los términos que contengan una resta entre estas dos constantes deberán cancelarse. Esto último debemos imponerlo restando estos términos al propagador longitudinal.

2.7. Resultados sin grupo de renormalización

En esta sección veremos, utilizando la regularización dimensional y condiciones de renormalización a la escala de 1GeV, los resultados con y sin la diferenciación de las constantes de acoplamiento.

En las figuras 2.17 y 2.18 podemos apreciar los resultados tomando $g_C = g_A = g$ para todos los valores de energía, mientras que en las figuras 2.19 y 2.20 vemos los resultados diferenciando estas constantes de acoplamiento.

Para cuantificar la precisión de los resultados comparamos los datos obtenidos variando nuestros parámetros (g_A , g_C , m^2) con los brindados por las simulaciones numéricas. Este procedimiento es complicado debido a que son tres variables independientes. Con el fin de obtenerlas se optimizó el factor de forma del fantasma, ya que no existen constantes de acoplamientos entre gluones para los diagramas a un loop que aportan al mismo. Mediante este procedimiento se obtuvo la masa del gluón, m , y la constante de acoplamiento entre fantasmas y gluones, g_C , que mejor ajustan a los datos experimentales. Para hallar el valor de g_A se fijó una de estas constantes y se variaron las otras dos; se fijó tanto g_C como m . Los datos que mejor ajustaron comparando los dos casos fueron los tomados como óptimos. Cada uno de estos procedimientos fue realizado siguiendo el ejemplo de [27].

Para el caso en el que las constantes de acoplamiento no fueron separadas vemos que los parámetros que mejor ajustan son $m = 0,5\text{GeV}$ y $g = 4,5$. En relación al otro caso, encontramos que los valores que mejor ajustan son $m = 0,5\text{GeV}$, $g_C = 4,7$ y $g_A = 4,2$.

Los resultados han mejorado muy poco para el factor de forma del fantasma, o lo que es parecido, el propagador fantasma. Sin embargo, veremos que luego de introducir el grupo de renormalización estos resultados serán notoriamente mejorados para todas las energías.

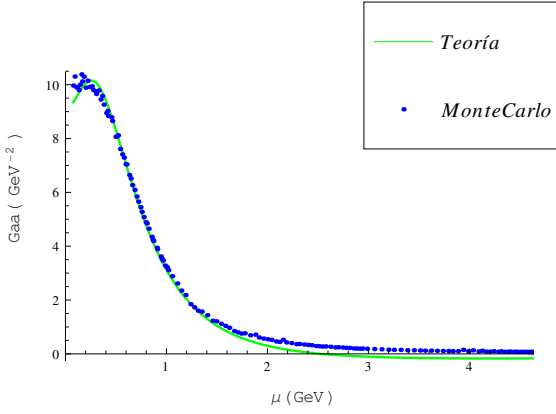


Figura 2.17: Propagador del gluón sin diferenciar las constantes de acoplamiento.
Con: $m = 0,5\text{GeV}$ y $g = 4,5$.

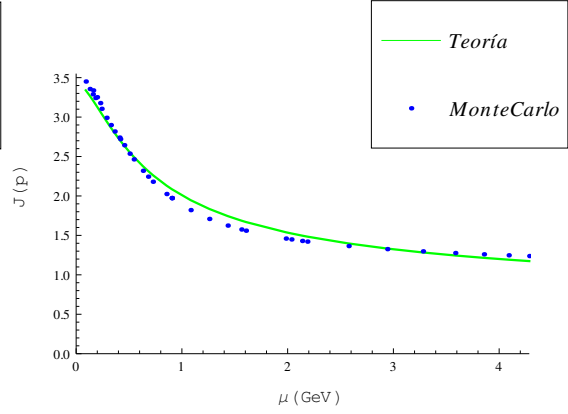


Figura 2.18: Factor de forma del fantasma sin diferenciar las constantes de acoplamiento.
Con: $m = 0,5\text{GeV}$ y $g = 4,5$.

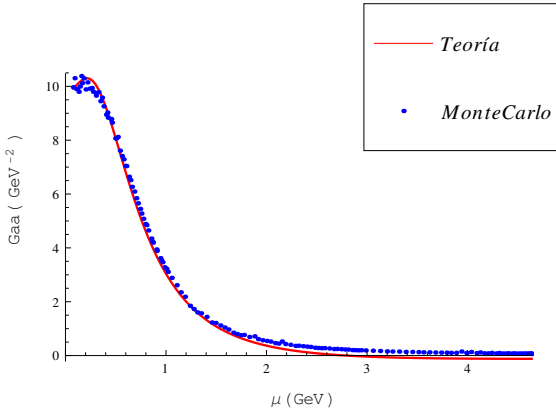


Figura 2.19: Propagador del gluón diferenciando las constantes de acoplamiento. Con: $m = 0,5\text{GeV}$, $g_C = 4,7$ y $g_A = 4,2$.

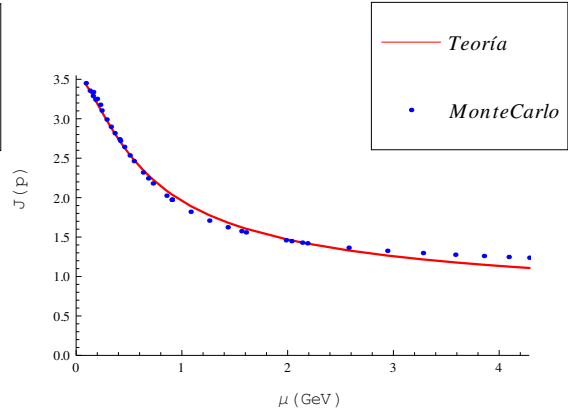


Figura 2.20: Factor de forma del fantasma diferenciando las constantes de acoplamiento. Con: $m = 0,5\text{GeV}$, $g_C = 4,7$ y $g_A = 4,2$.

Si bien las constantes de acoplamiento en el UV son iguales salvo diferencias de orden g^3 , en este análisis no se tomó en cuenta esto, ya que los valores de las mismas se fijan para todo rango de energías. Para tomar en cuenta la dependencia que las constantes de acoplamiento tienen con la energía, μ , se deben respetar los efectos del grupo de renormalización, lo que será objeto del próximo capítulo.

Capítulo 3

Resultados

En este capítulo mostraremos los principales resultados de esta tesis. Comenzaremos haciendo una breve descripción del grupo de renormalización el cual será utilizado para mejorar los resultados ya presentados en el capítulo anterior, con la salvedad de que aquí fijaremos los parámetros a la escala de energía 10GeV y no a 1GeV. En segunda instancia mostraremos los comportamientos dominantes en el límite IR y UV para las cantidades analizadas. Finalmente compararemos nuestros resultados con los datos de las simulaciones numéricas y trabajos anteriores.

3.1. Grupo de renormalización

Anteriormente vimos que el método de renormalización implica fijar las constantes a una escala de energías fijada arbitrariamente. Ésta se fija generalmente en el rango de energías en donde los experimentos son llevados a cabo. Instrumentos colosales como el LHC, del inglés Gran Colisionador de Hadrones (Large Hadron Collider), trabajan a energías de 7TeV por partícula. Esta energía se distribuye en el choque y las sucesivas desintegraciones por lo que cuanta más energía tengamos al principio más procesos serán posibles. En nuestro trabajo, si bien se compara con datos de simulaciones numéricas cuya escala típica es del orden de 1GeV, querríamos tomar como referencia la escala de energía a $\mu_0 = 10\text{GeV}$ para analizar utilizando el grupo de renormalización. A esta energía fijamos el esquema de renormalización pues se espera que allí la teoría de perturbaciones usual esté muy controlada y la masa del gluón sea despreciable.

Para pasar de una escala a otra, queremos entender cómo cambian nuestras constantes de acoplamiento al variar la escala de energía. El grupo de renormalización logra dar respuesta a esta interrogante.

Pasamos ahora a dar una idea intuitiva de este método. Con este fin, partimos de un lagrangiano el cual contiene varias constantes de acoplamiento a las que llamamos constantes de acoplamiento desnudas. El hecho de llamarlas constantes es un abuso de lenguaje con una justificación histórica en la que se creían que éstas no variaban. Al utilizar la regularización que contiene un corte en las energías, Λ , observaremos que éstas dependerán del corte, es decir, $g_i(\Lambda)$. Debido a que el valor del corte

es arbitrario cabe preguntarnos qué pasará con las constantes de acoplamiento al disminuir este valor por un factor $b > 1$, es decir, qué sucede al realizar la siguiente transformación

$$g_i(\Lambda) \rightarrow g_i\left(\frac{\Lambda}{b}\right). \quad (3.1)$$

Nuestro lagrangiano, y por ende nuestra física, puede ser representado por un punto en el espacio multidimensional que tenga por ejes las constantes de acoplamiento; las cuales variarán de acuerdo al corte, Λ , tomado. En este espacio apreciaremos una curva la cual llamaremos flujo del grupo de renormalización. En la figura 3.1 podemos ver un ejemplo de un flujo de la teoría aquí trabajada aunque sin la diferenciación en las constantes de acoplamiento. La misma fue extraída de [31].

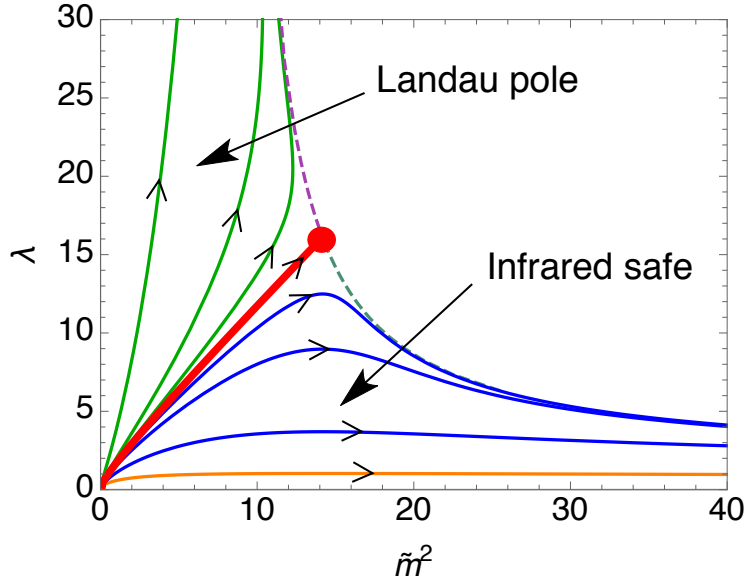


Figura 3.1: Representación del flujo del grupo de renormalización de la teoría trabajada aquí.

Para entender mejor cómo se obtienen estas curvas se considera un caso particular a modo de ejemplo. El mismo consiste en una teoría escalar con una constante de acoplamiento desnuda g_B . A su vez, con el fin de visualizar mejor el procedimiento, se toma en cuenta la regularización que introduce un corte en el espacio de momentos.

Las constantes de acoplamiento adimensionadas, una vez renormalizadas a una escala de energía μ , van a tener una dependencia de la siguiente forma:

$$g_R = G\left(g_B, \frac{\mu}{\Lambda}\right). \quad (3.2)$$

Aquí se supuso las masas del problema despreciables respecto de μ . Debido a que la escala de energía en donde se fija el esquema es arbitraria podemos fijarla a una escala de energía μ' , obteniendo así

$$g_{R'} = G\left(g_B, \frac{\mu'}{\Lambda}\right). \quad (3.3)$$

Podemos extraer una expresión para el corte Λ de la ecuación (3.2). Al introducir la misma en la ecuación (3.3) podemos eliminar el corte, Λ , y obtener una relación entre g_R y g'_R

$$g_{R'} = f \left(g_R, \frac{\mu'}{\mu} \right). \quad (3.4)$$

Si ahora pasamos a derivar la ecuación (3.4) obtenemos

$$\frac{dg_{R'}}{d\mu'} = \partial_z f(g_R, z) \frac{1}{\mu} \Big|_{z=\frac{\mu'}{\mu}} \quad (3.5)$$

A su vez, al imponer que $\mu' = \mu$ y despejando podemos definir la función β de la siguiente manera:

$$\mu \frac{dg_R}{d\mu} = \beta(g_R), \quad (3.6)$$

con

$$\beta(g_R) = \partial_z f(g_R, z) \Big|_{z=1}. \quad (3.7)$$

La ecuación diferencial (3.6), usualmente conocida como ecuación de Callan-Symanzik ([9], [32], [33]), nos dará la evolución de la constante de acoplamiento. Bajo un razonamiento similar, habiendo definido las funciones de correlación conectadas como

$$F_R^{(n)} = \langle \Omega | T \Phi_R(x_1) \dots \Phi_R(x_n) | \Omega \rangle_C, \quad (3.8)$$

utilizando las ecuaciones que vinculan los campos a través de los factores de renormalización (2.20), dándonos

$$F_R^{(n)} = Z^{-\frac{n}{2}} F^{(n)} = Z^{-\frac{n}{2}} \langle \Omega | T \Phi(x_1) \dots \Phi(x_n) | \Omega \rangle_C, \quad (3.9)$$

y tomando en cuenta que la función de correlación desnuda no depende de la escala μ , es decir,

$$\mu \frac{dF_B(g_B)}{d\mu} = 0, \quad (3.10)$$

obtenemos la ecuación del grupo de renormalización de Gell-Mann Low ([19]), que expresada en el espacio de momentos queda:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{n}{2} \gamma + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} \right) F_{C,R}^{(n)}(\{p\}, \mu, g(\mu)) = 0. \quad (3.11)$$

Con

$$\gamma(g) = \mu \frac{d \log Z}{d\mu} \Big|_{g_B}. \quad (3.12)$$

A partir de este momento, pasaremos de una teoría escalar a una teoría de gauge con los campos A , c y \bar{c} . Esto implica cambiar la ecuación (3.11) por

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{2}(n_A \gamma_A + n_C \gamma_C) + \beta_g \frac{\partial}{\partial g} \right) \Gamma_R^{(n_A, n_C)}(\{p\}, \mu, g(\mu)) = 0. \quad (3.13)$$

Donde

$$\begin{aligned} \gamma_C(g) &= \mu \left. \frac{d \log Z_C}{d \mu} \right|_{g_B}, \\ \gamma_A(g) &= \mu \left. \frac{d \log Z_A}{d \mu} \right|_{g_B}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para nuestro trabajo la función que utilizamos en (3.13) es la función vértice, Γ . En adelante dejaremos implícito que la misma se refiere a la función gamma de diagramas conectados. Luego de ser obtenida podremos calcular el propagador del gluón y el factor de forma del fantasma de forma sencilla.

El número $n = n_A + n_C$ representa la cantidad de campos que aparecen en la función de correlación, siendo n_A el número de campos gluónicos y n_C el número de campos fantasmas. Se extrae de esta ecuación diferencial la siguiente solución, la cual vincula la función gamma en el punto de referencia μ_0 con un punto arbitrario de energías μ :

$$\Gamma_R^{(n)}(\{p\}, \mu, g(\mu)) = z_A(\mu)^{\frac{n_A}{2}} z_C(\mu)^{\frac{n_C}{2}} \Gamma_R^{(n)}(\{p\}, \mu_0, g(\mu_0)). \quad (3.15)$$

En la ecuación (3.15) tomamos la escala de energía μ_0 como el punto de referencia para resolver la ecuación diferencial (3.13) y

$$\begin{aligned} \log(z_A(\mu)) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_A(g(\mu')), \\ \log(z_C(\mu)) &= \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu'}{\mu'} \gamma_C(g(\mu')). \end{aligned} \quad (3.16)$$

En (3.15) $g(\mu)$ es la solución de la ecuación (3.6). Con esto uno logra describir cómo cambia la apariencia de la teoría bajo la redefinición de la escala de renormalización. Podemos generalizar aún más este caso introduciendo una diferenciación entre las constantes de acoplamiento entre gluones y entre éstos y los fantasmas, g_A y g_C respectivamente. Con dichas constantes pasamos de nuestra ecuación (3.13) a la siguiente:

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{2}(n_A \gamma_A + n_C \gamma_C) + \beta_{g_A} \frac{\partial}{\partial g_A} + \beta_{g_C} \frac{\partial}{\partial g_C} \right) \Gamma_R^{(n_A, n_C)}(\{p\}, \mu, g_A(\mu), g_C(\mu)) = 0. \quad (3.17)$$

Generando un cambio en la dependencia de las ecuaciones (3.16) y (3.14) de forma tal que $g(\mu)$ pasa a ser $(g_A(\mu), g_C(\mu))$. Donde las ecuaciones $g_A(\mu)$ y $g_C(\mu)$ son halladas mediante la función beta como vemos a continuación:

$$\begin{aligned} \mu \frac{d g_A}{d \mu} &= \beta_A(g_A, g_C), \\ \mu \frac{d g_C}{d \mu} &= \beta_C(g_A, g_C). \end{aligned} \quad (3.18)$$

3.2. Funciones β

En los casos que nos interesan, es importante también explorar el régimen en que $\mu \approx m$. Las ecuaciones del grupo de renormalización se pueden generalizar tomando en cuenta la presencia de la masa.

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \frac{1}{2}(n_A \gamma_A + n_C \gamma_C) + \beta_{g_A} \frac{\partial}{\partial g_A} + \beta_{g_C} \frac{\partial}{\partial g_C} + \beta_{m^2} \frac{\partial}{\partial m^2} \right) \Gamma_R^{(n_A, n_C)} = 0, \quad (3.19)$$

donde

$$\Gamma_R^{(n_A, n_C)} = \Gamma_R^{(n_A, n_C)}(\{p\}, \mu, g_A, g_C, m^2). \quad (3.20)$$

La expresión completa de las funciones β para $\frac{m}{\mu}$ arbitrario es muy larga. La misma surge del cálculo a 1 loop realizado en Mathematica.

Partiremos del sistema de ecuaciones diferenciales siguiente,

$$\begin{aligned} \mu \frac{dg_A}{d\mu} &= \beta_{g_A} \left(g_A, g_C, \frac{m^2}{\mu^2} \right), \\ \mu \frac{dg_C}{d\mu} &= \beta_{g_C} \left(g_A, g_C, \frac{m^2}{\mu^2} \right), \\ \mu \frac{dm^2}{d\mu} &= \beta_{m^2} \left(g_A, g_C, \frac{m^2}{\mu^2} \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

para poder encontrar el comportamiento de g_A , g_C y m en función de la energía, μ . Una vez obtenida la solución podremos calcular el propagador gluónico y el factor de forma del fantasma para luego poder compararlos con los datos de las simulaciones. En el proceso se debe fijar el valor que tienen estas variables a una determinada escala de energía, es decir, fijar un punto en el espacio de soluciones. Repetiremos este proceso variando estos valores iniciales a fin de obtener aquellos que mejor ajusten nuestro modelo con los datos de las simulaciones numéricas.

Las funciones β pueden ser reescritas a través de las ecuaciones (2.20) que vinculan las constantes renormalizadas con las desnudas. Por ende, utilizando que

$$(m^B)^2 = Z_{m^2} m^2, \quad g_A^B = Z_g g_A^R, \quad g_C^B = Z_g g_C^R, \quad (3.22)$$

y las definiciones de g_A y g_C presentes en las ecuaciones (2.30) y (2.28) respectivamente; tenemos que

$$\beta_{g_C} = \mu \frac{d(Z_C \sqrt{Z_A} g_C^B)}{d\mu} = \mu g_C^B \left(\sqrt{Z_A} \frac{dZ_C}{d\mu} + Z_C \frac{\sqrt{Z_A}}{d\mu} \right) = g_C \left(\gamma_C + \frac{1}{2} \gamma_A \right), \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \beta_{g_A} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} Z_A^{3/2} \gamma_A g_A^B B^B(\mu^2, g_A, g_C) + Z_A^{3/2} g_A^B \mu \frac{dB^B(\mu^2, g_A, g_C)}{d\mu} \right) \\ &= \frac{3}{2} \gamma_A g_A + g_A \mu \frac{d \log(B^B(\mu^2, g_A, g_C))}{d\mu}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\beta_{m^2} = \mu \frac{dm^2}{d\mu} \Big|_{Bare} = \mu \frac{Z_{m^2}^{-1}}{d\mu} (m^B)^2 = -\mu \frac{(m^B)^2}{Z_m} \frac{d \log Z_{m^2}}{d\mu} = -m^2 \gamma_{m^2}. \quad (3.25)$$

En estas ecuaciones se utilizó el parámetro B^B definido en (2.30).

Una vez obtenidas las tres funciones β tendremos un sistema de ecuaciones diferenciales con el que podemos hallar la dependencia entre las constantes de acoplamiento y μ . Tendremos tres incógnitas: g_A , g_C y m^2 junto con tres ecuaciones que, reescritas, nos quedan:

$$\begin{cases} \beta_{g_C} = g_C^B \left(\gamma_C + \frac{1}{2}\gamma_A \right) \\ \beta_{g_A} = \frac{3}{2}\gamma_A g_A + g_A \mu \frac{d \log(B^B(\mu^2, g_A, g_C))}{d\mu} \\ \beta_{m^2} = -m^2 \gamma_{m^2} \end{cases} \quad (3.26)$$

3.2.1. Vínculo entre g_{A0} y g_{C0}

Podemos disminuir la cantidad de parámetros libres explicitando la relación entre las constantes de acoplamiento a una escala de energía grande ($\mu_0 \approx 10\text{GeV}$). En este punto fijamos nuestros valores iniciales del sistema de ecuaciones diferenciales. Esta relación es exacta para $\mu \gg m$ y tomamos 10GeV como una buena aproximación a ese límite. Contamos con las relaciones dadas por análisis dimensional (una vez despreciada m):

$$\begin{cases} g_A = g_B + f_A \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) g_B^3 + \mathcal{O}(g_B^5), \\ g_C = g_B + f_C \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) g_B^3 + \mathcal{O}(g_B^5). \end{cases} \quad (3.27)$$

Estas pueden ser escritas de otra forma:

$$\begin{cases} g_A = g_B + f_A \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) g_A^3 + \mathcal{O}(g_A^5), \\ g_C = g_B + f_C \left(\frac{\mu}{m} \right) g_C^3 + \mathcal{O}(g_C^5). \end{cases} \quad (3.28)$$

De esto se concluye:

$$\begin{cases} g_B = g_C - f_C \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) g_C^3 + \mathcal{O}(g_C^5), \\ g_A = g_C + \left(f_A \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) - f_C \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) \right) g_C^3 + \mathcal{O}(g_C^5). \end{cases} \quad (3.29)$$

Como g_A y g_C son constantes renormalizadas, ambas tienen límite para $\Lambda \rightarrow \infty$. Esto implica que $f_A \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right) - f_C \left(\frac{\mu}{\Lambda} \right)$ tiene límite para $\Lambda \rightarrow \infty$. Por razones dimensionales, su resta, debe ser un número. El resultado correspondiente, extraído de la definición de g_A y g_C en Mathematica, nos muestra que:

$$g_A = g_C + \frac{37N}{384\pi^2} g_C^3. \quad (3.30)$$

La diferencia entre las constantes desnudas y las renormalizadas diverge. La forma en que lo hacen está dentro de las funciones f_A y f_C . El hecho de que la ecuación (3.30) no depende de μ ó Λ es una consecuencia directa de que ambas funciones, f_A y f_C , divergen de igual forma.

Con la relación entre estas constantes de acoplamiento se puede obtener, en $SU(3)$ y

a la escala de energía $\mu_0 = 10\text{GeV}$, que entre las mismas hay una diferencia del 8,2% al tomar a $g_C = 1,676$. El valor que asumimos en este análisis para g_C proviene de los resultados obtenidos más adelante. Con la relación (3.30) sólo se necesita fijar dos constantes: m y g_C ; obteniendo g_A mediante el vínculo.

3.2.2. Resultados en el límite ultravioleta

Los resultados para las funciones β de g_A y g_C en el UV, es decir para las escalas de energías que cumplan con la condición $\mu \gg m$, son,

$$\begin{aligned}\beta_{g_A}^{UV}(g_C, g_A) &= \frac{N}{192\pi^2}(-42g_A^3 - 3g_Ag_C^2 + g_C^3) + \mathcal{O}(g^5), \\ \beta_{g_C}^{UV}(g_C, g_A) &= -\frac{Ng_C}{192\pi^2}(25g_A^2 + 19g_C^2) + \mathcal{O}(g^5).\end{aligned}$$

Al ser impuesta la condición característica del régimen UV, esto es $g_A = g_C + \mathcal{O}(g_C^3)$, llegamos a las ecuaciones presentes a continuación en (3.31). En donde también se simplificó la notación imponiendo que la constante de acoplamiento sea únicamente g .

$$\begin{aligned}\beta_{g_A}(g) &= -\frac{11g^3N}{48\pi^2} + \mathcal{O}(g^5), \\ \beta_{g_C}(g) &= -\frac{11g^3N}{48\pi^2} + \mathcal{O}(g^5).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Satisfactoriamente, este resultado no sólo concuerda con la libertad asintótica sino que con la universalidad de la función β a un loop. Esta propiedad asegura que la forma de esta función no depende de la elección del esquema de renormalización. Ver capítulo 2 de [39].

3.2.3. Resultados en el límite infrarrojo

El rango de energías considerado IR abarca las energías tales que $\mu \ll m$. Las funciones β en este rango son,

$$\begin{aligned}\beta_{g_C}^{IR}(g_C, g_A) &= \frac{N}{192\pi^2}(3g_A^2g_C - g_C^3) + \mathcal{O}(g^5), \\ \beta_{g_A}^{IR}(g_C, g_A) &= \frac{N}{192\pi^2}(9g_A^3 - 3g_Ag_C^2 + g_C^3) + \mathcal{O}(g^5), \\ \beta_{m^2}^{IR}(g_C, g_A) &= \frac{Nm^2}{96\pi^2}(3g_A^2 - g_C^2) + \mathcal{O}(g^5).\end{aligned}$$

Este sistema puede ser reescrito utilizando la definición de la función β presente en la ecuación (3.6) junto a la definiciones $t = \log\left(\frac{\mu}{\bar{\mu}}\right)$ con $\bar{\mu}$ una constante arbitraria, $y = \frac{g_C^3}{g_A}$ y restringiéndonos al caso SU(3), para dar el siguiente sistema válido sólo

en el IR:

$$\begin{aligned}\frac{1}{g_C^2} \frac{dg_C^2}{dt} &= \frac{1}{m^2} \frac{dm^2}{dt} \\ \frac{dg_C}{dt} &= \frac{g_C}{64\pi^2} (3g_A^2 - g_C^2) \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{y} \right) &= \frac{1}{(8\pi)^2}\end{aligned}\tag{3.32}$$

Utilizando la última ecuación del sistema (3.32) obtenemos la relación

$$g_A = \frac{g_C^3 t}{(8\pi)^2}.\tag{3.33}$$

Al sustituir la relación (3.33) en la segunda ecuación del sistema (3.32) llegamos a una ecuación no homogénea:

$$\frac{dg_C}{dt} = \frac{g_C^3}{(8\pi)^2} \left(\frac{3g_C^4 t^2}{(8\pi)^4} - 1 \right).\tag{3.34}$$

Recordando que estamos interesados en escalas de energías cercanas a cero resultando que $t < 0$ y con el fin de hacer la ecuación (3.34) homogénea definimos $\lambda = g_C(-t)^\alpha$ con $\alpha = \text{constante}$, llegando al valor $\alpha = 1/2$. Al introducir la definición $x = \log|t|$, obtenemos:

$$\partial_x \lambda = \lambda \left(-\frac{1}{2} + \frac{3\lambda^6}{(8\pi)^6} - \frac{\lambda^2}{(8\pi)^2} \right).\tag{3.35}$$

Como la ecuación diferencial (3.35) es homogénea en x , cuando $x \rightarrow \infty$, es decir, para energías muy pequeñas, $\lambda \rightarrow \text{constante}$. Podemos hallar los puntos fijos para λ imponiendo que $\partial_x \lambda = 0$, esto se traduce a resolver la siguiente ecuación algebraica, a la cual le fue introducida el cambio de variable $\sigma = \frac{\lambda^2}{(8\pi)^2}$

$$\frac{1}{2} + \sigma - 3\sigma^3 = 0.\tag{3.36}$$

Numéricamente podemos encontrar la única raíz real y positiva, obteniendo así

$$\begin{aligned}g_C^{IR} &= \frac{21,7093\dots}{\sqrt{-t}}, \\ g_A^{IR} &= \frac{g_C^3 t}{64\pi^2} = \frac{-(21,7093\dots)^3}{64\pi^2 \sqrt{-t}} = -\frac{16,198}{\sqrt{-t}}.\end{aligned}\tag{3.37}$$

Como verificación podemos observar que al imponer la aproximación de que las constantes de acoplamiento sean iguales a primer orden obtenemos para la función β_{g_c} :

$$\beta_{g_c} = \frac{g^3 N}{96\pi^2}\tag{3.38}$$

Esta coincide con el límite infrarrojo de la función β_g hallada para el esquema infrared safe en [26].

3.3. Comparación con simulaciones numéricas

Para poder mostrar los resultados y cómo los comparamos con las simulaciones numéricas es necesario hacer una pausa para explicar, al menos aproximadamente, qué son éstas y cómo pueden generar las curvas que nos darán el comportamiento de nuestros propagadores.

La base en la cual se realizan los cálculos es un volumen finito y una red discreta caracterizadas por sitios separados una distancia a junto con las respectivas uniones entre sí; ver figura 3.2.

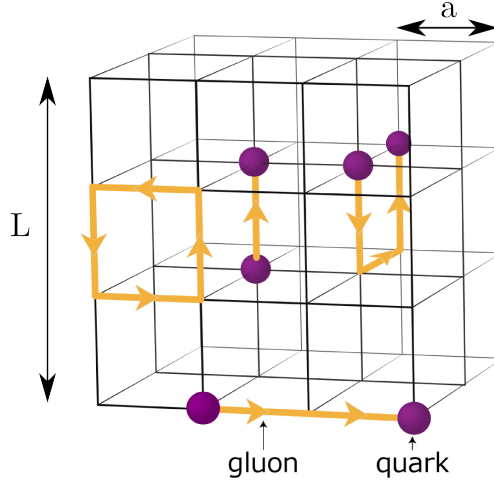


Figura 3.2: Esquema representativo de una red con tres dimensiones.

Como se ve en esta figura, en los sitios se va a definir el campo de los quarks y en las aristas se relaciona con el campo de los gluones, ya que son los que transportan la carga de un lugar a otro. El campo gluónico en la red va a estar representado por

$$U_\mu(n_i, n_t),$$

donde μ denota la dirección de propagación del gluón y (n_i, n_t) se refiere al punto en la red de cuatro dimensiones donde comienza el vínculo.

El campo en la red y en el continuo se vinculan a través de la ecuación

$$U_\mu = e^{iagA_\mu}, \quad (3.39)$$

en donde se coloca a en el exponente para hacerlo adimensionado.

En este espacio, caracterizado por las tres componentes espaciales y una temporal, se van a generar distintas configuraciones. El conjunto de estas configuraciones, llamado ensemble, permite extraer una muestra estadística del elemento $\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle$ con distribución de probabilidad asociada con el lagrangiano (invariante de gauge) de Yang-Mills:

$$\mathcal{L}_{YM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a. \quad (3.40)$$

De forma tal que

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \frac{\int [dU] \mathcal{O}[A] e^{-\mathcal{S}_{YM}}}{\int [dU] e^{-\mathcal{S}_{YM}}}. \quad (3.41)$$

Este elemento será calculado al igual que los valores esperados en Mecánica Estadística. Si bien este no es exactamente el método seguido a la hora de hacer las simulaciones ya que es ineficiente desde el punto de vista de cálculos computacional, la lógica es la misma. Por más información al respecto se puede leer [14].

El procedimiento anterior funciona en la red para operadores no invariantes de gauge. Para fijar el gauge, se parte del ensemble generado al cual se le hace una transformación gauge con un parámetro λ_a . En este trabajo se utilizó el gauge de Landau, éste es el más fácil de fijar en la red y muchas simulaciones se realizan en el mismo. Sabemos que en la teoría fijar el gauge de Landau es igual a establecer la restricción $\partial_\mu A_\mu^a = 0$ para los campos gauge. Se puede ver que esa restricción es equivalente a imponer la configuración extremice:

$$\int d^4x \frac{1}{2} A_\mu^{\lambda,a} A_\mu^{\lambda,a}, \quad (3.42)$$

donde $A_\mu^{\lambda,a}$ es la configuración transformada de gauge a partir de A_μ^a . Si variamos este término en un valor infinitesimal de λ_a obtenemos

$$\delta_\lambda \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu^{\lambda,a} A_\mu^{\lambda,a} = \int d^4x A_\mu^{\lambda,a} \delta_\lambda A_\mu^{\lambda,a} = \int d^4x A_\mu^{\lambda,a} (\partial_\mu \lambda_a + i f^{abc} \lambda^b A_\mu^c).$$

En donde el término que contiene el elemento completamente antisimétrico f^{abc} se anula, por ser $A_\mu^a A_\mu^c$ simétrico. Y el término restante puede ser integrado por partes, eliminando efectos de bordes, para obtener

$$\delta_\lambda \int d^4x \frac{1}{2} A_\mu^{\lambda,a} A_\mu^{\lambda,a} = \int \lambda^a \partial_\mu A_\mu^a \quad (3.43)$$

Por lo tanto, para que sea un extremo se debe cumplir que $\partial_\mu A_\mu^a = 0$.

No necesariamente habrá un mínimo único que extremice la función (3.42) debido a las posibles copias de Gribov. Es por esto que se debe elegir un criterio. Uno de ellos es tomar el parámetro λ tal que genere un mínimo global sobre la expresión $\int d^4x A_\mu^{\lambda,a} A_\mu^{\lambda,a}$.

Teniendo esto en cuenta, la integral de caminos aplicada a un cierto operador (no necesariamente invariante de gauge) pasa de ser expresada en el espacio euclideo continuo como

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \frac{\int [dU] \mathcal{O}[A^\lambda] e^{-\mathcal{S}_{YM}}}{\int [dU] e^{-\mathcal{S}_{YM}}} \quad (3.44)$$

a tomar la forma en el espacio discreto

$$\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle = \frac{\sum_\alpha \mathcal{O}[A_\alpha^\lambda] e^{-\mathcal{S}_{YM,\alpha}}}{\sum_\alpha e^{-\mathcal{S}_{YM,\alpha}}}, \quad (3.45)$$

en donde α denota una cierta configuración de la red y $\mathcal{O}[A_\alpha^\lambda]$ el valor de \mathcal{O} en esa configuración.

3.4. Resultados del sistema de ecuaciones diferenciales

En esta sección presentaremos los resultados para las constantes de acoplamiento obtenidas a través del método del grupo de renormalización. Como dijimos anteriormente, para poder resolver nuestro sistema de ecuaciones diferenciales, es necesario fijar nuestras constantes de acoplamiento. El punto en el cual lo hacemos es en $\mu = 10\text{GeV}$. Los valores que tomamos y con los cuales hemos obtenido las gráficas presentes en esta sección, son: $g_C = 1,676$, $m = 0,254\text{GeV}$ y por ende $g_A = 1,81$ usando la relación (3.30).

Dividiremos la zona de estudio en dos. Una haciendo foco en el IR y la otra en un rango de energías más grande. La razón de focalizar en el IR reside en algunos problemas que nos enfrentamos a la hora de programar. El programa Mathematica no logra, a medida que corre el código, simplificar elementos del denominador. Esto produce singularidades aparentes que de poder simplificarse se cancelarían. Es por esto que para esta zona simplificamos las funciones analíticamente tomando en cuenta que $\mu \ll m$.

3.4.1. En la región infrarroja

Limitándonos a una región dentro de la zona IR que abarca los primeros 10MeV podemos ver, en la gráfica 3.3, el comportamiento de las constantes de acoplamiento entre gluones (en negro), g_A , y entre éstos y los campos fantasmas (en rojo), g_C . Ambas constantes tienden a cero cuando nos movemos a energías cercanas a cero. En el caso de g_A , ésta tiende a cero desde un valor negativo; mientras que g_C lo hace desde valores positivos. Esto es consistente con los resultados cuantitativos obtenidos a partir de las funciones β en el IR, ver ecuaciones (3.37). A su vez, tomando los valores absolutos de estas constantes tenemos que g_C siempre se mantiene superior al valor de g_A en esta zona.

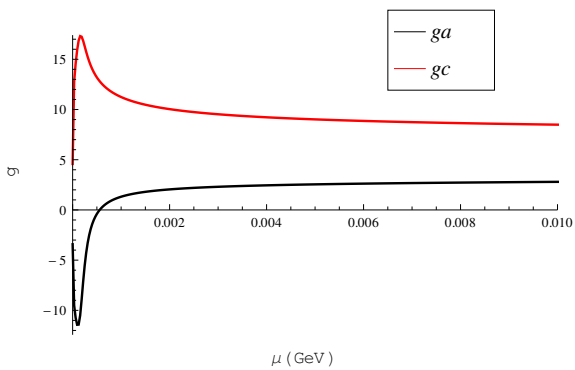


Figura 3.3: Dependencia de g_C y g_A en función de la energía μ .

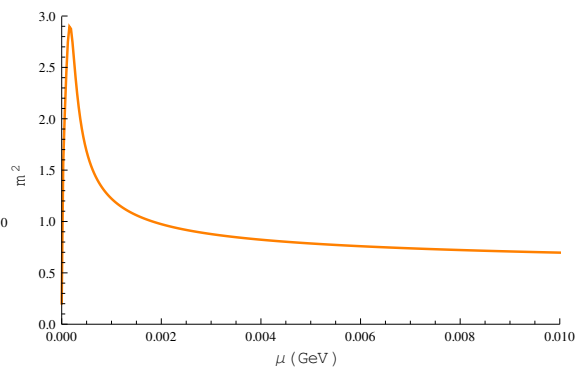


Figura 3.4: Dependencia de m^2 en función de la energía μ .

Gráficos utilizando la condición inicial $m = 0,254\text{GeV}$, $g_C = 1,676$ y $g_A = 1,81$ a $\mu_0 = 10\text{GeV}$ restringiéndonos a la zona IR.

3.4.2. Caso general

Las gráficas presentes en esta subsección corresponden a las constantes de acoplamiento y el parámetro $\tilde{\alpha}$ (definido en (3.46)) para el rango de energías que va de unos pocos MeV a 10GeV. Para las siguientes gráficas no se han tomado simplificaciones a la hora de hallarlas.

En la figura 3.5 podemos observar la dependencia de la constante de acoplamiento g_C en función de la energía μ . La misma comienza a unos pocos MeV por lo que no nos es posible distinguir en ella el momento en el cual decrece hasta converger a cero a medida que la energía tiende a cero, como sí se puede observar en 3.8.

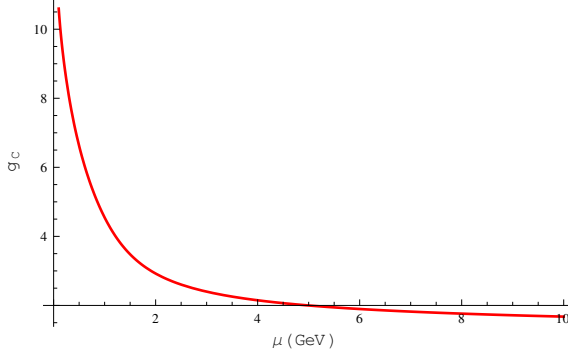


Figura 3.5: Dependencia de g_C en función de μ .

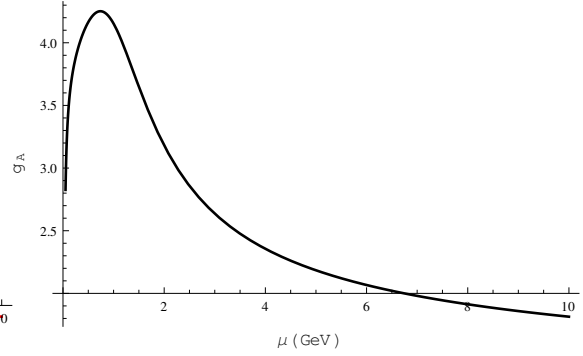


Figura 3.6: Dependencia de g_A en función de μ .

Gráficos utilizando la condición inicial $m = 0,254\text{GeV}$, $g_C = 1,676$ y $g_A = 1,81$ a $\mu_0 = 10\text{GeV}$; restringiendo los momentos hasta 10GeV.

Los valores que toma g_A en la figura 3.6 son los mismos que están presentes en la figuras 3.3 ó 3.8, salvo que en las últimas se focaliza el análisis en la zona IR. En la misma se puede apreciar cómo el valor de g_A pasa de valores positivos a negativos para luego ir convergiendo a cero a medida que disminuimos la energía. Por otro lado, si vamos a valores más grandes de energía podemos observar que g_A pasa de valores inferiores a g_C a superiores al mismo, ver figura 3.8. Analíticamente ocurre lo mismo y podemos observarlo en la relación (3.30), la cual nos explicita cuánto más grande es dicha constante de acoplamiento.

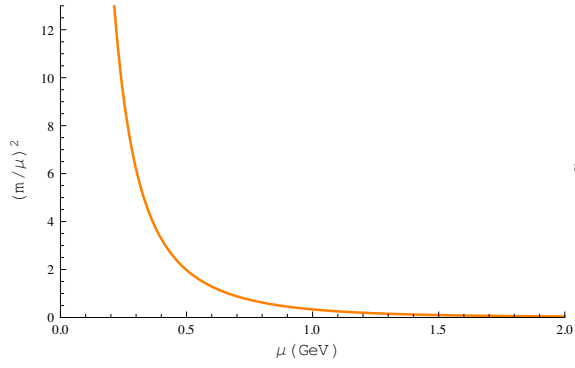


Figura 3.7: Gráfica de $\frac{m^2}{\mu^2}$ en función de μ .

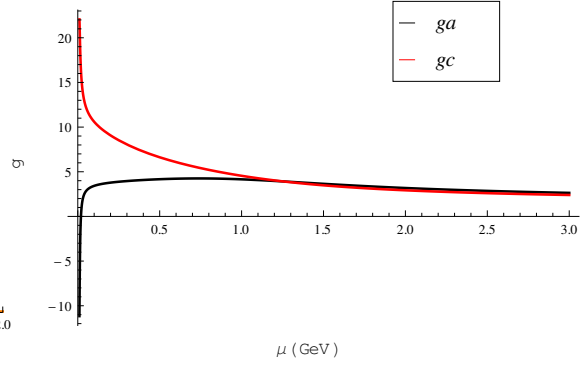


Figura 3.8: Dependencia de g_C y g_A en función de μ .

Gráficos utilizando la condición inicial $m = 0,254\text{GeV}$, $g_C = 1,676$ y $g_A = 1,81$ a $\mu_0 = 10\text{GeV}$; restringiendo los momentos hasta 2 y 3GeV.

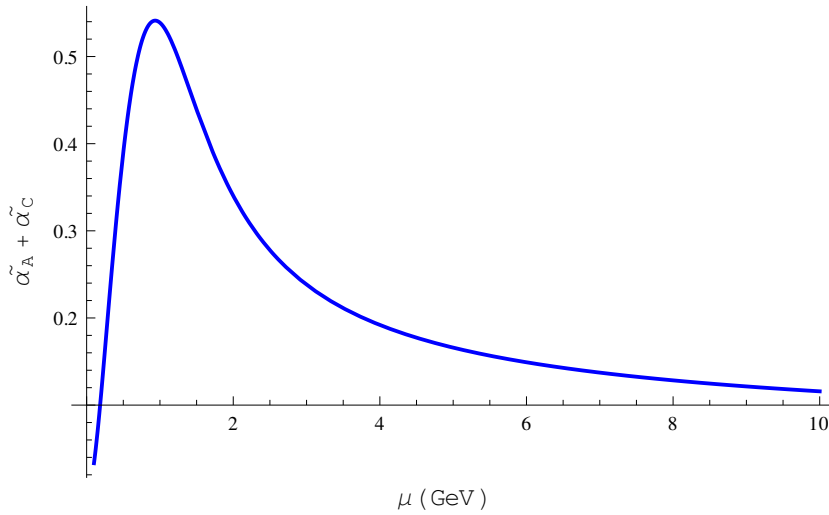


Figura 3.9: Dependencia de $\tilde{\alpha}_T = \tilde{\alpha}_C + \tilde{\alpha}_A$ en función de μ .

La gráfica 3.9 nos muestra la evolución del parámetro perturbativo $\tilde{\alpha}_T$, el cual es explicado en [36] y se define de la siguiente manera:

$$\tilde{\alpha} := \frac{N\alpha(\mu)}{4\pi} \frac{\mu^2}{\mu^2 + m^2(\mu)} = \frac{Ng^2(\mu)}{16\pi^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 + m^2(\mu)}, \quad (3.46)$$

$$\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$$

Éste necesariamente debe permanecer pequeño para todo momento μ con el fin de poder utilizarlo como parámetro perturbativo. En esta gráfica vemos que incluso la suma de los dos parámetros, definidos para g_A y g_C , al ser sumados no superan el valor 0,7. Esto nos permite asegurar que es viable la utilización de un análisis perturbativo en este régimen.

Algunos valores interesantes de estas gráficas son:

| | 0,90GeV | 1GeV | 10GeV |
|--------------------|---------|-------|-------|
| g_C | 4.857 | 4.546 | 1.676 |
| g_A | 4.212 | 4.152 | 1.814 |
| m | 0.606 | 0.580 | 0.254 |
| $\tilde{\alpha}_T$ | 0.540 | 0.539 | 0.116 |

Siendo $\mu = 0,90\text{GeV}$ la energía a la cual la función $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}_C + \tilde{\alpha}_A$ presenta su valor máximo.

3.5. Análisis del polo de Landau

Estudiamos dos formas para observar si hay una presencia del polo de Landau. La primera consta de observar el parámetro perturbativo $\tilde{\alpha}$. La restante, parte de la solución en el UV, la cual no toma en cuenta la masa del gluón, y compara dicha solución en el IR con la obtenida mediante nuestra teoría. En cuanto a la primera, si se da el caso en que el parámetro perturbativo, $\tilde{\alpha}$, se hace muy grande nos estaría indicando la presencia de un polo de Landau. Lo que hacemos para verificar la ausencia del mismo es una gráfica en la cual se muestre el máximo de este factor en función de los valores iniciales de g_C , g_A y m . Vimos que, para los valores iniciales que cumplen que:

$$\frac{(g_C^2(\mu) + g_A^2(\mu))N}{16\pi^2} \frac{\mu^2}{\mu^2 + m^2(\mu)} \lesssim 0,7 \quad \forall \mu;$$

nuestros resultados no presentan polo de Landau. Por el contrario, en el caso donde se supera este valor, el cálculo perturbativo deja de ser válido, y un polo de Landau es posible.

En cuanto al restante análisis, cabe mencionar que el polo de Landau surge de la solución de la función β en el ultravioleta, es decir, para $\mu \gg m$. La misma diverge al acercarse a la energía

$$\mu^* = \mu_0 e^{-\frac{1}{\beta_0 g_0^2}} \equiv \Lambda_{QCD}. \quad (3.47)$$

Al momento de observar si existe o no un polo de Landau para nuestro sistema de ecuaciones es necesario observar, a la escala de energía Λ_{QCD} , el vínculo entre m y μ . Si $\mu \gg m$ entonces la solución en el UV es válida y por ende la constante de acoplamiento se vuelve grande y no vale la teoría de perturbaciones. En este caso un polo es posible. Pero si por el contrario $\mu \ll m$, entonces ya no es válida la aproximación utilizada en el UV. En este último caso hay que tomar en cuenta la presencia de la masa que elimina el polo de Landau.

Concluimos que para que no haya polo de Landau se debe satisfacer

$$m(\mu = \Lambda_{QCD}) \gtrsim \Lambda_{QCD}. \quad (3.48)$$

3.6. Otras verificaciones

Es recomendable ir verificando nuestros resultados con otros que ya hayan sido calculados. No contamos con trabajos donde las constantes de acoplamiento para el gluón y el fantasma hayan sido diferenciadas. Sin embargo, una vez obtenida la función que queremos verificar, igualaremos estas constantes para poder comparar su resultado con otros calculados previamente. En este caso tomaremos las funciones $z_A(\mu)$ y $z_C(\mu)$ presentes en (3.15) y definidas en (3.16) para contrastarlas con las halladas en [26].

Para poder comparar estas funciones se resolvió el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \beta_{g_C} = g_C^B \left(\gamma_C + \frac{1}{2} \gamma_A \right), \\ \beta_{m^2} = -m^2 \gamma_{m^2}. \end{cases}$$

tomando como condición $g_A = g_C = 4,1$ y $m_0 = 0,43\text{GeV}$ a $\mu_0 = 1\text{GeV}$. Luego procedimos a hallar $z_A(\mu)$ y $z_C(\mu)$ como muestran las ecuaciones (3.49) extraídas de [26] (ec. 3.19 y 3.20). Fueron tomados esos datos iniciales ya que éstos mismos fueron utilizados para obtener el propagador del gluón y la función de forma J asociada al propagador del fantasma.

$$\begin{cases} z_A(\mu) = \frac{m^4(\mu)g^2(\mu_0)}{m^4(\mu_0)g^2(\mu)} \\ z_C(\mu) = \frac{m^2(\mu_0)g^2(\mu)}{m^2(\mu)g^2(\mu_0)} \end{cases} \quad (3.49)$$

Las funciones se ajustan perfectamente como se ven en la figura 3.10.

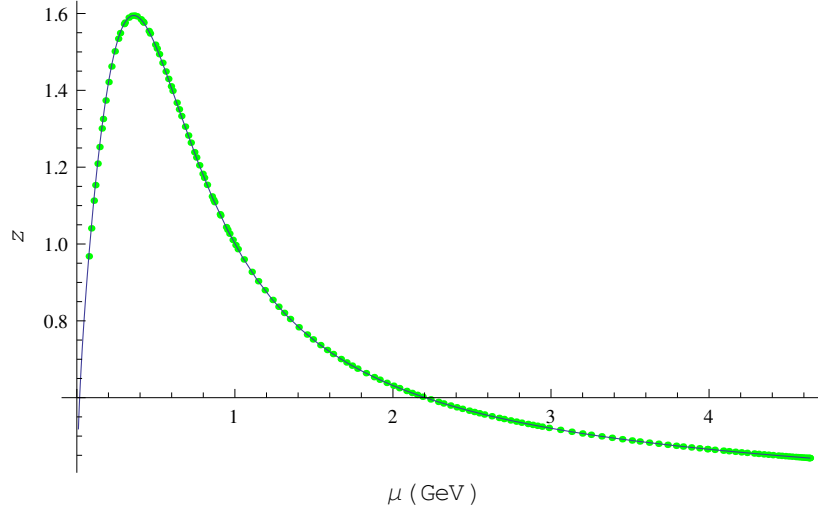


Figura 3.10: Test del cálculo: función $z_A(\mu)$ en función de la energía, μ comparada con el resultados anterior.

Para $z_C(\mu)$ se hizo un cálculo análogo, logrando un ajuste de igual calidad.

3.7. Ajuste de parámetros y errores

Para obtener el propagador del gluón y el factor de forma del fantasma es necesario fijar las condiciones iniciales de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales (3.26). Ya sabemos que el vínculo entre g_C y g_A , presente en la ecuación (3.30), produce que al elegir una de ellas la otra quede fijada. Consecuentemente nos quedan dos grados de libertad en las condiciones iniciales. Elegimos fijar g_C y m , éstas son arbitrarias y su valor afectará la forma de nuestros propagadores. A fin de obtener los resultados que mejor ajusten con los datos numéricos es necesario variar nuestras condiciones iniciales y cuantificar el error. Aquellos valores que den un menor error serán los que tomemos como correctos.

Pero para poder lograr comparar nuestros datos con los de las simulaciones es necesario tomar en cuenta la normalización utilizada. Ambos datos, nuestros valores teóricos y los valores experimentales, se diferencian por un factor multiplicativo constante, que llamamos A . Tendremos uno para los datos del propagador fantasma como para el del gluón. Elegimos el valor de A de forma tal que minimice el error. Se tienen dos series de datos: y_l que corresponden a los encontrados en la red con simulaciones numéricas, e y_t que son los encontrados a partir de nuestra teoría. Para cuantificar el error, usamos la siguiente definición la cual proviene de un promedio entre el error cuadrático relativo y el absoluto siendo el último ponderado con el valor teórico a la escala de 1GeV:

$$\begin{aligned} \text{error}_{\text{abs}}^2 &= \frac{1}{N y_l (1\text{GeV})^2} \sum_{i=1}^N (y_{l_i} - A \times y_{t_i})^2 \\ \text{error}_{\text{rel}}^2 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{(y_{l_i} - A \times y_{t_i})^2}{y_{l_i}^2} \\ \text{error}_{\text{tot}} &= \sqrt{\frac{\text{error}_{\text{abs}}^2 + \text{error}_{\text{rel}}^2}{2}} \end{aligned}$$

Elegimos A de forma tal que minimice el error cuadrático:

$$\begin{aligned} \text{error}^2 &= \sum_{i=1}^N (y_{l_i} - A \times y_{t_i})^2 \\ 2\text{error} \frac{d \text{error}}{d A} &= 2A \sum_{i=1}^N y_{t_i}^2 - 2 \sum_{i=1}^N y_{l_i} y_{t_i} = 0 \\ \Rightarrow A &= \frac{\sum_{i=1}^N y_{l_i} y_{t_i}}{\sum_{i=1}^N y_{t_i}^2} \end{aligned}$$

Estos errores los tomaremos tanto para el propagador del gluón como para el factor de forma del fantasma. Para elegir qué parámetros tomar haremos un compromiso entre los valores óptimos para ambos elementos. A continuación analizaremos los errores para los propagadores en un sector ya reducido del espectro de condiciones iniciales.

3.7.1. Error para los propagadores

En la figura 3.11 podemos observar los errores obtenidos para el propagador del gluón en función de los datos iniciales g_C y m a una escala de 10GeV. Los colores corresponden, de oscuro a claro, errores menores a 7,5 %, 9 %, 10 %, 12,5 % y 15 %. A su vez, en la figura 3.12 podemos observar los errores obtenidos para el factor de forma J del fantasma en función de los datos iniciales g_C y m . Los colores corresponden, de oscuro a claro, a errores menores a 5 %, 7,5 %, 9 %, 10 % y 12,5 %.

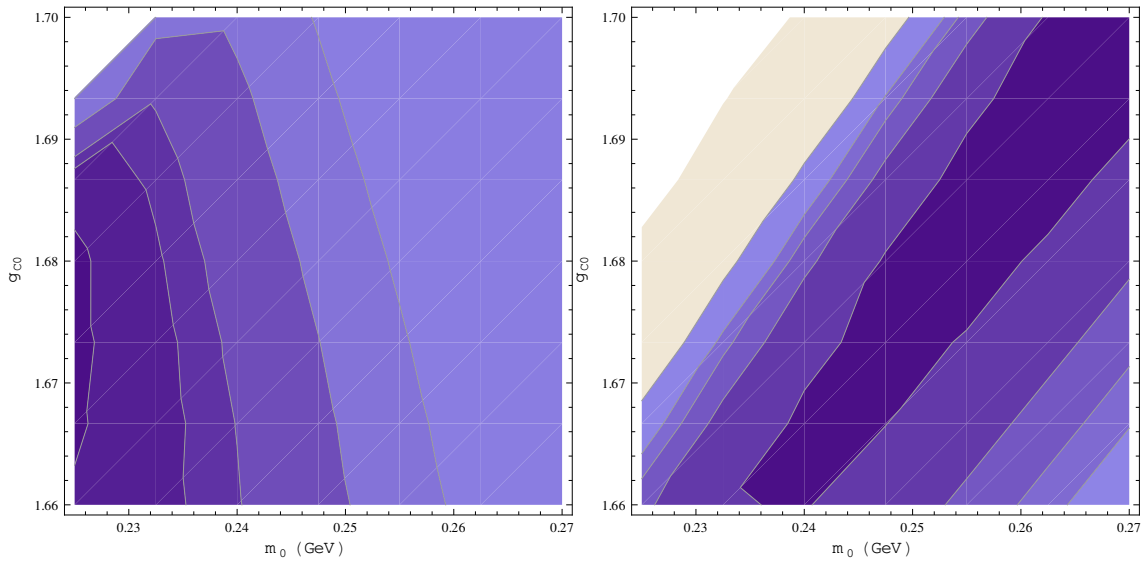


Figura 3.11: Errores del propagador del gluón. De oscuro a claro: 7,5 %, 9 %, 10 %, 12,5 % y 15 %.
 Figura 3.12: Errores del factor de forma del fantasma. De oscuro a claro: 5 %, 7,5 %, 9 %, 10 % y 12,5 %.

Gráficos para diferentes valores iniciales de g_C y m a 10GeV.

Con el fin de obtener una mejor visualización de ambos errores unimos ambas gráficas de errores en la figura 3.13.

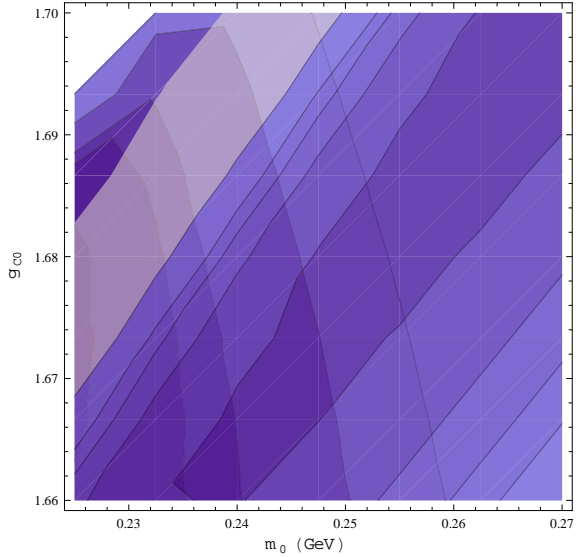


Figura 3.13: Errores del propagador del gluón superpuesto con el del factor de forma del fantasma para diferentes valores iniciales de g_C y m a 10GeV.

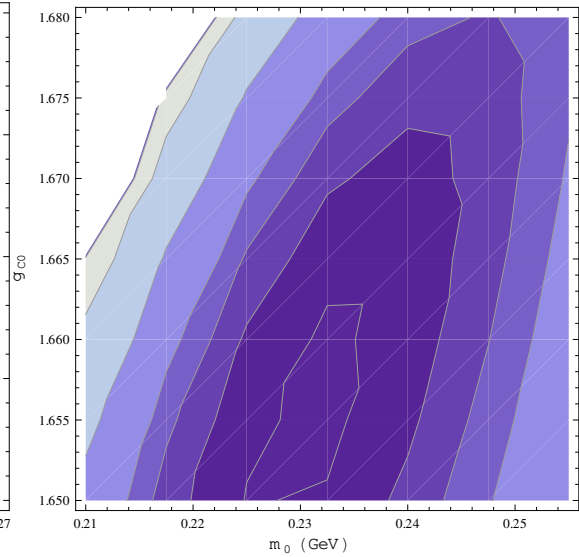


Figura 3.14: Error promedio del factor de forma del fantasma y del propagador del gluón. De oscuro a claro: 7 %, 8 %, 9 %, 10 % y 16,5 %.

La zona donde se minimiza la suma de los errores para el propagador del gluón y el factor de forma del fantasma se sitúa cerca de $g_C = 1,655$ y $m = 0,232\text{GeV}$ a 10GeV, como podemos observar en la figura 3.14. Es por estos valores que fuimos probando para observar cuáles eran los que mejor ajustaban a los valores experimentales. Concluimos que, a 10GeV, los óptimos son: $g_C = 1,676$ y $m = 0,254\text{GeV}$.

3.8. Resultados

A la hora de elegir qué parámetros utilizar debemos hacer un compromiso entre los óptimos para el propagador del gluón y del fantasma. Contamos con las gráficas del propagador del gluón y del factor de forma para el fantasma generadas a través de simulaciones numéricas las cuales se pueden apreciar en azul en la figura 3.16. Estas gráficas fueron obtenidas en simulaciones MonteCarlo con un espaciado de $a^{-1} = 1,1595 \text{ GeV}$, extraídas de [7].

Hay otra propiedad importante observada en las simulaciones numéricas: varios acoplamientos, no sólo no muestran ningún polo de Landau, sino que presentan un parámetro de desarrollo de la teoría de perturbaciones del orden de 0,25 a impulsos pequeños. Si a partir de nuestros datos graficamos estos parámetros obtenemos las gráficas 3.15.

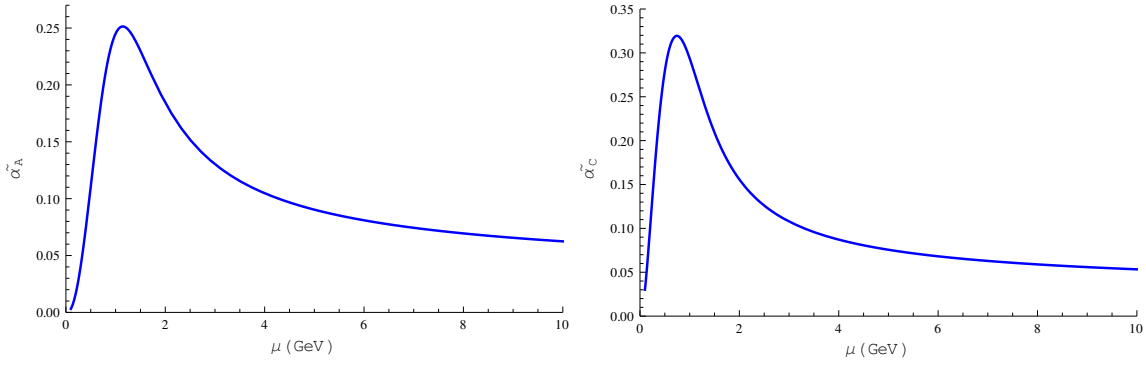


Figura 3.15: Gráfica de $\tilde{\alpha}_A$ y $\tilde{\alpha}_C$ en función de la energía, μ .

A modo de comparación, mostramos resultados obtenidos en un trabajo pasado, [26]. Los mismos se presentan en verde en la figura 3.16 y fueron obtenidos sin la diferenciación de las constantes de acoplamiento. Éstas fueron construidas con los valores $g_A = g_C = 4,1$ y $m = 0,43\text{GeV}$ a una escala de 1GeV , los cuales evolucionan hasta un valor de $g_A = g_C = 1,682$ y $m = 0,213\text{GeV}$ a 10GeV .

Con el fin de obtener un resultado con mayor definición introdujimos la diferenciación de las constantes de acoplamiento, las cuales pueden observarse en rojo en las gráficas 3.16. En las mismas se puede apreciar el propagador del gluón (izquierda) junto con el factor de forma del ghost (derecha) los cuales se generaron con las condiciones iniciales de $g_C = 1,676$, $m = 0,254\text{GeV}$ a una energía de 10GeV .

Para visualizar mejor las mejoras que conlleva tomar en cuenta la diferenciación de las constantes podemos juntar todas las gráficas en una, obteniendo:

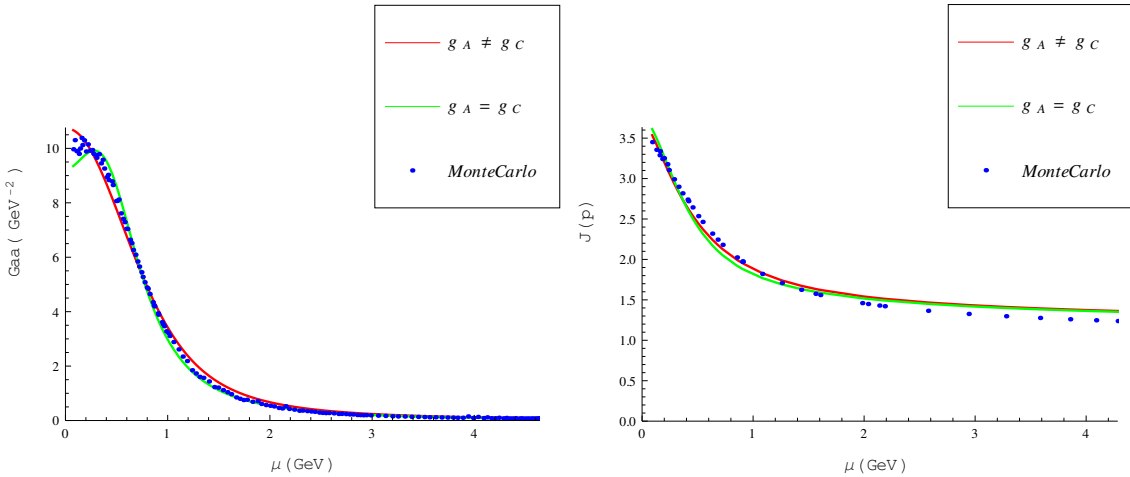


Figura 3.16: Propagador del gluón (izquierda) y factor de forma del fantasma (derecha) en función de la energía μ con datos experimentales (azul) y ajuste teórico con la diferenciación de las constantes de acoplamiento g_C y g_A (rojo).

De esta forma podemos ver que si bien ambos resultados son similares, distinguiendo el acoplamiento entre gluones de entre estos y los fantasmas se logra una

leve mejora focalizada en la zona IR, para valores de energías menores a 1GeV. La zona que va desde cero a 1GeV es la que coincide con la mayor diferencia entre las constantes de acoplamiento g_A y g_C , por lo que es comprensible que la mejora sea mayor en esta zona.

Capítulo 4

Conclusiones

La cromodinámica cuántica es una teoría cuántica de campos que describe a las interacciones fuertes. Como tal, las interacciones dependen de la escala de energía del proceso. En el año 1973, David Gross, Frank Wilczek, y David Politzer, vieron que esta teoría presenta lo que se llama libertad asintótica. Esto implica que las constantes de acoplamiento van a cero cuando la energía aumenta. Como consecuencia, la QCD presenta interacciones pequeñas cuando los impulsos característicos del fenómeno estudiado son grandes respecto al producto de la masa del protón por la velocidad de la luz [21] y [30]. Esto permite calcular estos fenómenos perturbativamente utilizando la QCD y compararlos exitosamente con los datos experimentales.

A pequeños impulsos, la teoría de perturbaciones usual predice que la intensidad de las interacciones crece sin límite (“polo de Landau infrarojo”), lo que vuelve inválido dicho esquema de aproximación. Para poder efectuar cálculos fiables en dicho régimen se utilizan simulaciones MonteCarlo de QCD en una red discreta con un volumen finito [24]. Esto ha permitido comparar la QCD cuantitativamente con los experimentos en todos los regímenes de impulsos. Ahora bien, las cantidades calculables en las simulaciones en la red, en la práctica, son sólo las más simples. Debemos, a partir de éstas, encontrar la teoría que condice con las mismas a fin de poder luego explicar cualquier cantidad que deseemos.

En consecuencia, otro tipo de estudios del comportamiento de QCD en el régimen de pequeños impulsos es necesario y las simulaciones son una guía para desarrollarlos. Entre ellos se encuentran los resultados basados en las igualdades de Dyson-Schwinger [[23],[3], [2]] y el método del grupo de renormalización no perturbativo [22]. Un problema, no siempre tomado en cuenta, consiste en que no se conoce la descripción analítica del lagrangiano fijado gauge en el IR ni, por ende, la herramienta más adecuada para analizar este régimen.

Lo que sabemos con certeza es que las simulaciones numéricas muestran que a pequeños impulsos los gluones presentan un comportamiento similar al de una teoría masiva. De aquí surge la motivación de agregar un término de masa al lagrangiano:

$$\frac{m^2}{2} A_\mu^a A_a^\mu.$$

La idea consiste en modificar el lagrangiano fijado de gauge de QCD agregando una masa para los gluones. Este término podría surgir de la fijación gauge aunque hoy en día no sabemos explicar su origen desde primeros principios. Dicho modelo

[18] fue descartado en los años '70 pues su teoría de perturbaciones parecía mostrar comportamientos patológicos, pero la naturaleza de estas dificultades no es clara a la luz de los resultados recientes de las simulaciones, que muestran un rompimiento de la positividad por parte del propagador del gluón.

Todo lo expuesto anteriormente llevó a uno de mis orientadores Nicolás Wschebor, junto con Matthieu Tissier, a querer investigar el alcance de este simple modelo a la hora de reproducir las funciones de correlación y la posibilidad de lograr un cálculo perturbativo que pudiera ser válido para impulsos arbitrarios. Los cálculos a primer orden de la teoría de perturbación mostraron resultados para el propagador del gluón y del fantasma en excelente concordancia con las simulaciones MonteCarlo, ver [35] y [36]. Luego, dicha técnica fue empleada para calcular otras cantidades que han sido simuladas, por ejemplo las funciones de correlación a tres puntos [27]. Con este modelo, el parámetro perturbativo se modifica obteniendo $\tilde{\alpha}$ el cual se mantiene relativamente pequeño a todas las escalas de energía.

$$\tilde{\alpha} = \frac{N\alpha(\mu)}{4\pi} \frac{\mu^2}{\mu^2 + m^2(\mu)}.$$

El propósito de esta tesis fue mejorar estos resultados teniendo en cuenta que a impulsos pequeños los diferentes acoplamientos no son iguales (tanto en los resultados perturbativos como en las simulaciones). Esto es diferente a lo que ocurre en el régimen de grandes impulsos donde la libertad asintótica entra en juego. Si bien el efecto en los cálculos que introduce esta diferenciación es de segundo orden en teoría de perturbaciones, el cálculo de las funciones de correlación tomando en cuenta este efecto es el próximo paso lógico debido a la dificultad que éste conlleva. Calcular el siguiente orden de perturbación, el cual disminuiría los errores significativamente, es ampliamente más complicado. Sin embargo, este problema está siendo llevado a cabo por mi cotutora, Marcela Peláez, y otros integrantes del grupo. La idea entonces ha sido repetir los cálculos de las funciones de correlación a dos puntos ya calculadas por el grupo, tratando las diferentes constantes de acoplamiento como independientes a pequeños impulsos (pero teniendo en cuenta que tienen el mismo comportamiento a grandes impulsos). Consecuentemente, tendremos un parámetro perturbativo caracterizado por acoplamientos entre gluones, $\tilde{\alpha}_A$, y otro para el acoplamiento entre éstos y los fantasmas, $\tilde{\alpha}_C$.

Podemos observar que la diferencia entre los acoplamientos es significativa para energías menores a 1GeV. Por ende, es comprensible que nuestra mejora sea mayor en este rango. El ajuste correspondiente al propagador del gluón, mejora notoriamente en este rango. Por otra parte, para los demás valores de energía las diferencias son mínimas. Si ahora observamos el factor de forma del propagador tenemos una situación similar. No sólo vemos una mejora, aunque leve, en la zona más IR, sino que también podemos apreciar que más adelante la gráfica tiende a ajustarse aún más a los puntos experimentales. Al igual que para el propagador del gluón, a energías superiores a 1GeV las diferencias son ínfimas.

Un resultado importante fue la obtención del comportamiento de las constante g_A y g_C en función de la energía, el cual es un resultado nuevo. En la zona IR podemos observar, tanto gráfica como analíticamente, cómo ésta pasa de tener un valor mayor a cero a uno menor para luego tender a cero, de mayor a menor energía. El cambio

de signo está relacionado con el cambio del signo del vértice de tres gluones, [27].

Con los resultados obtenidos en este trabajo podemos asegurar que vamos por el buen camino. Observamos que una mejora es producida al incluir la diferenciación entre las constantes de acoplamiento entre gluones y entre éstos y los fantasmas. No es difícil imaginar que la incorporación de las constantes de acoplamiento entre los quarks y los gluones, junto con sus respectivos diagramas contribuyendo a las funciones de correlación, mejorarán aún más nuestra teoría. A su vez, en un plan más ambicioso pero que parece en buena vía se presenta el cálculo completo a dos loops. Quedan algunas preguntas por responder, como por ejemplo, saber cuál abordaje es el correcto en el IR. Dentro del nuestro, aún resta por comprender cuál es el origen de la masa desde primeros principios. Sin embargo, concluimos que con este trabajo dimos un paso más en entender el alcance de nuestro modelo.

Bibliografía

- [1] M. Muller-Preussker A. Schiller A. Sternbeck, E.-M. Ilgenfritz and I.L. Bogolubsky. Lattice study of the infrared behavior of QCD Green's functions in Landau gauge. PoS, LAT2006:076. 2006.
- [2] A.C. Aguilar and A.A. Natale. A Dynamical gluon mass solution in a coupled system of the Schwinger-Dyson equations. *JHEP*, 0408:057, 2004.
- [3] Reinhard Alkofer and Lorenz von Smekal. The Infrared behavior of QCD Green's functions: Confinement dynamical symmetry breaking, and hadrons as relativistic bound states. *Phys.Rept.*, 353:281, 2001.
- [4] Tereza Mendes Attilio Cucchieri and Andre R. Taurines. Positivity violation for the lattice Landau gluon propagator. Phys.Rev., D71:051902. 2005.
- [5] Siegfried Bethke. Experimental Tests of Asymptotic Freedom. (June 2006): 1–38, 2006. doi: 10.1016/j.pnpnp.2006.06.001. URL <http://arxiv.org/abs/hep-ex/0606035> <http://dx.doi.org/10.1016/j.pnpnp.2006.06.001>.
- [6] B. Blossier, Ph Boucaud, M. Brinet, F. De Soto, X. Du, M. Gravina, V. Morenas, O. Pène, K. Petrov, and J. Rodríguez-Quintero. Ghost-gluon coupling, power corrections, and $\Lambda_{\overline{MS}}$ from lattice qcd with a dynamical charm. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 85(3):1–10, 2012. ISSN 15507998. doi: 10.1103/PhysRevD.85.034503.
- [7] I. L. Bogolubsky, E. M. Ilgenfritz, M. Müller-Preussker, and A. Sternbeck. Lattice gluodynamics computation of Landau-gauge Green's functions in the deep infrared. *Physics Letters, Section B: Nuclear, Elementary Particle and High-Energy Physics*, 676(1-3):69–73, 2009. ISSN 03702693. doi: 10.1016/j.physletb.2009.04.076.
- [8] Ph Boucaud, M. Brinet, F. De Soto, V. Morenas, O. Pène, K. Petrov, and J. Rodríguez-Quintero. Three-gluon running coupling from lattice QCD at $N_f = 2 + 1 + 1$: A consistency check of the OPE approach. *Journal of High Energy Physics*, 2014(4):1–8, 2014. ISSN 10298479. doi: 10.1007/JHEP04(2014)086.
- [9] C. G. Callan. Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory. *Phys. Rev. D* 2, 1541–1547, 1970.
- [10] Jorge Casaus, Javier Rodríguez, and Eusebio Sánchez. Cromodinámica Cuántica: el color de los quarks. *Fotón*, 1:11, 2005.

- [11] C. Parrinello Claude W. Bernard and A. Soni. A Lattice study of the gluon propagator in momentum space. *Phys.Rev.*, D49:1585–1593. 1994.
- [12] John M. Cornwall. Positivity violations in QCD. *Mod.Phys.Lett.*, A28:1330035. 2013.
- [13] N. Vandersickel D. Dudal, S.P. Sorella and H. Verschelde. New features of the gluon and ghost propagator in the infrared region from the Gribov-Zwanziger approach. *Phys.Rev.*, D77:071501. 2008.
- [14] C. Davies. *Lattice QCD*. 2002.
- [15] Jan de Boer, Kostas Skenderis, Peter van Nieuwenhuizen, and Andrew Waldron. On the renormalizability and unitarity of the Curci-Ferrari model for massive vector bosons. *Phys. Lett.*, B367:175–182, 1996. doi: 10.1016/0370-2693(95)01455-1.
- [16] Anthony G. Williams Derek B. Leinweber, Jon Ivar Skullerud and Claudio Parrinello. Gluon propagator in the infrared region. *Phys.Rev.*, D58:031501. 1998.
- [17] Sadataka Furui and Hideo Nakajima. What the Gribov copy tells about confinement and the theory of dynamical chiral symmetry breaking. *Phys.Rev.*, D70:094504. 2004.
- [18] R. Ferrari G. Curci. On a Class of Lagrangian Models for Massive and Massless Yang-Mills Fields. *Nuovo Cim.*, A32:151–168. 1976.
- [19] M. Gell-Mann and F. E. Low. *Phys. Rev.* 95 1300, 1954.
- [20] V. N. Gribov. *Nucl. Phys. B* 139. 1978.
- [21] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behaviour of non-abelian gauge theories. 30(26), 1973.
- [22] Nikolaos Tetradis Juergen Berges and Christof Wetterich. Nonperturbative renormalization flow in quantum field theory and statistical physics. *JHEP*, 0408:057, 2002.
- [23] Reinhard Alkofer Lorenz von Smekal and Andreas Hauck. The Infrared behavior of gluon and ghost propagators in Landau gauge QCD. *Phys.Rev.Lett.*, 79:3591–3594, 1997.
- [24] I. Montvay. Cambridge University Press. (26), 1997.
- [25] Derek B. Leinweber Maria B. Parappilly Andre Sternbeck Patrick O. Bowman, Urs M. Heller. Scaling behavior and positivity violation of the gluon propagator in full QCD. *Phys.Rev.*, D76:094505. 2007.
- [26] Marcela Peláez. *Infrared correlation functions in Quantum Chromodynamics*. PhD thesis, Paris U., VI, LPTL, 2015. URL <http://www.bib.fcien.edu.uy/files/etd/if/uy24-64047.pdf>.

- [27] Marcela Pelaez, Matthieu Tissier, and Nicolas Wschebor. Three-point correlation functions in Yang-Mills theory. 2013. doi: 10.1103/PhysRevD.88.125003. URL <http://arxiv.org/abs/1310.2594><http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.88.125003>.
- [28] Marcela Peláez, Matthieu Tissier, and Nicolás Wschebor. Two-point correlation functions of QCD in the Landau gauge. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 90(6), 2014. ISSN 15502368. doi: 10.1103/PhysRevD.90.065031.
- [29] Me Peskin, Dv Schroeder, and E Martinec. An introduction to quantum field theory. *Physics Today*, 1996. URL http://pdfserv.aip.org/PHTOAD/vol_{_}49/iss_{_}2/69_{_}1.pdf.
- [30] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1346. [274(1973)].
- [31] U. Reinosa, J. Serreau, M. Tissier, and N. Wschebor. How nonperturbative is the infrared regime of Landau gauge Yang-Mills correlators? *Physical Review D*, 96(1):40–42, 2017. ISSN 24700029. doi: 10.1103/PhysRevD.96.014005.
- [32] K. Symanzik. Small Distance Behaviour in Field Theory and Power Counting. *Commun. math. Phys.* 18, 227 (1970). *SpringerLink*, 1970.
- [33] K. Symanzik. Small-Distance-Behaviour Analysis and Wilson Expansions. *Commun. math. Phys.* 23, 49 (1971). *SpringerLink*, 1971.
- [34] J. C. Taylor. Ward Identities and Charge Renormalization of the Yang-Mills Field. *Nucl. Phys.*, B33:436–444, 1971. doi: 10.1016/0550-3213(71)90297-5.
- [35] Matthieu Tissier and Nicolás Wschebor. Infrared propagators of Yang-Mills theory from perturbation theory. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 82(10):2–5, 2010. ISSN 15507998. doi: 10.1103/PhysRevD.82.101701.
- [36] Matthieu Tissier and Nicolás Wschebor. Infrared safe perturbative approach to Yang-Mills correlators. *Physical Review D - Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, 84(4):1–16, 2011. ISSN 15507998. doi: 10.1103/PhysRevD.84.045018.
- [37] Johns Hopkins University. Standard Model of Particles and Interactions. <https://www.jhu.edu/>, 2016.
- [38] Axel Weber and Pietro Dall’Olio. Callan-Symanzik approach to infrared Yang-Mills theory. *EPJ Web Conf.*, 80:00016, 2014. doi: 10.1051/epjconf/20148000016.
- [39] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Number v. 2 in The Quantum Theory of Fields 3 Volume Hardback Set. Cambridge University Press, 1995. ISBN 9780521550024. URL <https://books.google.com.uy/books?id=48xXMF1oHxkC>.