UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
Facultad de Ciencias Económicas y de Administración
Licenciatura en Estadística

CONDICIONES ÓPTIMAS DE REASEGURO

Paula Bouza - Micaela Mondino

Tutores:

Sergio Barszcz
Marco Scavino

Montevideo, Noviembre 2008.

Agradecimientos

A nuestros tutores Sergio Barszcz y Marco Scavino por su apoyo, sugerencias realizadas y tiempo dedicado.

A Compañía Cooperativa de Seguros Surco y a sus integrantes por su apoyo y colaboración.

A nuestros compañeros, amigos y familiares por apoyarnos en la parte técnica (Latex!!!), y en la anímica!!!

Índice general

Parte I

Introducción y Marco Teórico

Capítulo 1
Introducción

El objetivo del presente trabajo es investigar métodos para encontrar retenciones óptimas de reaseguro para la compañía de seguros.

Una compañía de seguros emite pólizas (contratos) por las cuales se compromete a pagar al asegurado una cantidad menor o igual a la pérdida financiera si el evento aleatorio cubierto por la póliza ocurre (siniestro). Por la promesa contenida en la póliza el asegurado paga un cierto importe (premio o primas).

No siempre la compañía de seguros está en condiciones de hacerse cargo de los riesgos asumidos en su totalidad, en ese caso tiene la necesidad de contratar reaseguro transfiriendo parte del riesgo, en tal situación la compañía de seguros pagará primas a la compañía de reaseguro.

La decisión de aumentar o disminuir la cesión de un determinado riesgo, involucra el análisis de algunas variables que se ven alteradas y que influyen en el problema, como ser: la distribución de las pérdidas, los cambios en el patrimonio mínimo exigido, la fluctuación de los ingresos por primas, la variación de la probabilidad de ruina, etc.

El problema planteado es determinar "cuanto" reaseguro debe contratar la compañía de seguros, es decir cuanto riesgo debe retener y cuanto riesgo debe ceder al reasegurador, de modo de optimizar sus resultados económicos.

Se utilizará para el estudio la información de cada riesgo asegurado y los datos de siniestralidad históricos de la cartera de seguros de vida individual.

Capítulo 2
Marco Teórico

2.1. Seguros de Vida

El seguro de vida protege a las personas por las pérdidas económicas que pueden sufrir a consecuencia de accidentes, enfermedades o fallecimiento.
El seguro de vida es un contrato por el cual la compañía de seguros se compromete a pagar a los beneficiarios nombrados por el asegurado una cantidad igual a la suma asegurada (beneficio) definida en la póliza si el fallecimiento de éste ocurre (siniestro) dentro del plazo estipulado en el contrato, por la promesa contenida en la póliza el asegurado paga un cierto importe (premio) a la compañía de seguros.

Los riesgos principales a los cuales está expuesto el ser humano pueden dividirse en grandes grupos:

- Riesgo de fallecimiento o supervivencia
- Riesgo de enfermedad o invalidez
- Riesgo de vejez

Tipos de Seguros de Vida

Para el evento de fallecimiento o supervivencia existen diferentes tipos de seguros tradicionales como ser:

- Temporarios
- Dotales Puros
- Vida Entera
- Dotales Mixtos

También existen en el mercado de seguros productos modernos como son las pólizas de Vida y Retiro comúnmente llamadas Vida Universal.

Seguros Temporarios
Los seguros temporarios aseguran la vida de las personas durante un período limitado de tiempo estipulado en el contrato.
Si la persona fallece dentro de dicho período, la compañía abona el capital asegurado a sus beneficiarios, si la persona no fallece el contrato termina y expiran los deberes y derechos de ambas partes asegurado y asegurador.

Seguros Dotales Puros
Los seguros dotales puros también son coberturas limitadas a un período de tiempo, a diferencia del seguro temporario no pagan la indemnización en caso de fallecimiento, sino que pagan un capital al final del plazo del seguro si y solo si el asegurado sobrevive a dicho momento.

Seguros de Vida Entera
Los seguros de vida entera comprometen a la compañía de seguros al pago de un determinado capital en el momento del fallecimiento de la persona cuya vida se asegura cualquiera sea el momento en que éste ocurra.
Desde el punto de vista del riesgo, ya no estamos frente a un hecho aleatorio de si el capital asegurado se pagará o no, aquí hay certeza que el capital se pagará, lo que se desconoce es cuando.

Seguros Dotales Mixtos
Los seguros dotales mixtos son la combinación de un seguro temporario y un seguro dotal puro, prevee un monto a pagar al momento de la muerte del asegurado si esta ocurre dentro del plazo del seguro y una suma a pagar a la sobrevivencia del asegurado al final del seguro.

Seguros de Vida y Retiro
Los seguros de vida y retiro combinan dos importantes elementos, protección y ahorro. En general están compuestos por un seguro de vida temporario y una cuenta individual de ahorro para el asegurado. En este tipo de seguros a medida que se pagan las primas una porción es destinada al pago del seguro de vida y el resto se vuelca a la cuenta individual de ahorro generando intereses.
Este tipo de pólizas son muy flexibles porque permiten al titular de la póliza cubrir sus cambiantes necesidades financieras, por ejemplo cambiar el valor de la suma asegurada, retirar dinero de su cuenta, modificar el importe de sus primas, etc.

En todos los tipos de seguros antes presentados la obligación del asegurado es pagar el premio de acuerdo a la forma estipulada en el contrato de seguro.

En nuestro estudio nos concentraremos en los seguros de vida que protegen a las personas del riesgo de fallecimiento.

2.2. Contratos de Reaseguro

Definición de Reaseguro

Así como las personas contratan seguros para transferir sus riesgos, las compañías de seguros también pueden adquirir seguros para traspasar sus riesgos. A este tipo de operación se la denomina reaseguro.
La existencia del reaseguro se debe a las mismas causas que dan vida al seguro, el traspaso de los efectos económicos adversos de los riesgos contratados en la póliza, en este caso, del asegurador al reasegurador.
El Código Civil alemán en su artículo 779 lo define de la siguiente manera: "El reaseguro es el seguro del riesgo asumido por los aseguradores".

Contrato de Reaseguro

Es el contrato efectuado entre dos partes, una llamada compañía cedente (asegurador) y otra el reasegurador, por medio del cual, la primera conviene en ceder y el segundo en aceptar una cantidad fija de un riesgo o de un número mayor de riesgos, de acuerdo con los términos convenidos.

Clasificación general de Contratos de Reaseguro

Existen distintos tipos de contratos de reaseguro, una posible clasificación es la siguiente[1]:

1. *Contratos Obligatorios*
   - Contratos proporcionales
   - Contratos no proporcionales

2. *Contratos Facultativos*

[1]Los siguientes párrafos están basados en el texto de José A. Benito Rivero, ver [12]

Detallamos a continuación las principales características de ellos:

Reaseguros proporcionales
En estos tipos de contratos, primas y siniestros se reparten entre el asegurador directo y el reasegurador en la misma proporción.
Son contratos proporcionales los Cuota Parte y los de Excedente.

Contrato Cuota Parte
Mediante los contratos llamados de cuota parte, la aseguradora cedente se compromete a reasegurar un porcentaje fijo, previamente pactado, de todos los riesgos que suscriba de un determinado ramo, reteniendo de propia cuenta el porcentaje restante. Por su parte, los reaseguradores quedan obligados a aceptar dicho porcentaje cedido, lo que significa que tanto el reasegurador como la compañía de seguros participan cada uno en las primas y siniestros en la misma proporción que han aceptado y retenido respectivamente. Por lo tanto se crea una conjunción de intereses entre ambas partes, lo que incita al reasegurador a prestar la mayor asistencia técnica posible a sus cedentes, ya que la mejor o peor política de suscripción de su reasegurada le repercutirá inmediata y automáticamente.

Contrato de Excedente
La modalidad más usada de contrato proporcional es el llamado contrato de excedente, porque a través del mismo la aseguradora cede al reasegurador la parte de las sumas aseguradas que exceden su propia retención y es proporcional, porque ambas partes participan en las primas y en los siniestros en la misma relación que han retenido y aceptado respectivamente. En este tipo de contrato la aseguradora retiene por cuenta propia un importe fijo sobre cada póliza y cede al reasegurador el excedente de cada póliza a partir de dicho importe.

Reaseguros no proporcionales
Así como los contratos proporcionales se establecen conforme a las sumas o límites asegurados basándose en los valores establecidos en la póliza de seguros, los contratos no proporcionales ignoran este concepto y se fundamentan en el de la siniestralidad del reasegurado, computando de diversas formas la importancia de los siniestros, o bien en forma aislada o bien tomados en conjunto sobre una determinada cartera de seguros o según determinados acontecimientos.

En este tipo de contrato, no existe una relación fija determinada según la cual primas y siniestros han de ser repartidos entre el asegurador directo y el reasegurador.
A los contratos no proporcionales se les denomina de manera genérica reaseguro de Exceso de Pérdida y su principio fundamental es que el reasegurador se compromete a indemnizar a la compañía de seguros todos los siniestros o grupos de siniestros cuyos importes sobrepasen la cuantía o prioridad previamente fijada en el contrato.
Son contratos no proporcionales por ejemplo:

1. *Exceso de Pérdida Operativa*
   Este contrato ofrece protección al asegurador contra siniestros que sobrepasen una determinada cantidad (prioridad) aunque corresponda a una sola póliza, es decir protege al asegurado riesgo a riesgo.

2. *Exceso de Pérdida de Cúmulos o de Catástrofes*
   Su cobertura funciona contra la acumulación resultante de varios siniestros causados por un mismo evento y que afecten a más de una póliza. No es necesario que el evento sea de carácter catastrófico, es suficiente con que el siniestro afecte a dos o más pólizas para que opere el contrato.

3. *Exceso de Siniestralidad o Stop Loss*
   Mediante este tipo de contrato el asegurador establece un límite de siniestralidad global (prioridad) que está dispuesto a soportar a lo largo del ejercicio para un determinado ramo de seguro, corriendo a cargo del reasegurador el exceso de siniestralidad que se produzca por encima de la prioridad. En algunos casos la cobertura del reasegurador por encima de la prioridad es ilimitada, en otros el reasegurador pone un límite máximo de cobertura a partir del cual la responsabilidad vuelve al asegurador.

Facultativo
El reaseguro facultativo reune dos características fundamentales que lo diferencian del llamado reaseguro obligatorio, estas son:

a) se suele efectuar sobre riesgos aislados, nominados y detallados individualmente

b) como su nombre lo indica, el asegurador tiene la facultad para decidir libremente si ofrece o no un riesgo y que cantidad del mismo quiere ofrecer en reaseguro; y el reasegurador, también es libre de aceptar o rechazar la oferta

2.3. Capital Mínimo y Margen de Solvencia

El objetivo fundamental de la supervisión de seguros consiste en mantener un mercado asegurador estable, eficiente, y equitativo para el beneficio y protección de los asegurados. Para lograr este objetivo, los supervisores necesitan establecer mecanismos adecuados para velar que las compañías de seguros cumplan en tiempo y en forma con las obligaciones derivadas de los contratos de seguros que celebren.[2] Asimismo, los supervisores necesitan llevar a cabo medidas preventivas para evitar futuros problemas financieros y mitigar, en caso de que éstos se presenten, las consecuencias económicas que puedan generar. Dentro de estos mecanismos, el margen de solvencia es una herramienta fundamental para la supervisión de la situación financiera de las compañías de seguros, y por ende, para la protección de los intereses de los asegurados.

Los criterios generales respecto al establecimiento y determinación del margen de solvencia, dependen de la naturaleza de cada mercado, así como de las políticas públicas que rigen al sector asegurador en cada país.

La Superintendencia de Seguros y Reaseguros es el agente regulador del mercado de seguros en la República Oriental del Uruguay. Esta ha comenzado a funcionar en forma efectiva el 1° de julio de 1994, de acuerdo a lo establecido por la Ley 16.426 del 14 de octubre de 1993, donde se desmonopolizaba legalmente la actividad aseguradora.

Definiciones y criterios generales de Solvencia

Solvencia

La solvencia, de manera general, se refiere a la capacidad financiera de una empresa para hacer frente a sus obligaciones en tiempo y en forma, y puede conceptuarse como la suficiencia de los activos sobre los pasivos asumidos.

Requerimiento Mínimo de Capital

Debido a la naturaleza de los riesgos, en una compañía de seguros no es posible predecir totalmente la experiencia en siniestralidad, aún con el empleo adecuado y eficiente de técnicas actuariales y estadísticas.

[2] La presente Sección está basada en el material armado por la A.S.S.A.L., ver [1]

No obstante que una prima de riesgo sea calculada con los parámetros más conservadores, ésta puede ser insuficiente debido a las desviaciones sobre los valores esperados. Para absorber estas posibles desviaciones, las autoridades supervisoras en el mundo han establecido la necesidad de requerir a las compañías de seguros una determinada cantidad de recursos adicionales, lo que constituye el "Requerimiento Mínimo de Capital", referido también como "Capital o Fondo Mínimo de Garantía". En este contexto, se puede definir al Requerimiento Mínimo de Capital como el nivel o monto mínimo de recursos patrimoniales que las compañías de seguros deben mantener para responder a variaciones adversas por lo que respecta a la totalidad de sus obligaciones y responsabilidades asumidas.

Margen de Solvencia

Cuando una compañía de seguros cuenta con un nivel de recursos por lo menos mayor al nivel mínimo requerido, se considera que mantiene un margen de solvencia.
Si los recursos de la aseguradora caen por debajo del nivel requerido de capital, la autoridad supervisora podrá contar con el tiempo suficiente para determinar las medidas necesarias que recuperen la estabilidad de la situación financiera de la compañía, y si las medidas correctivas no resultan exitosas, podrá tomar otras medidas para proteger en la mayor medida posible los intereses de los asegurados.

En nuestro país las exigencias sobre capital mínimo y margen de solvencia están reguladas en la recopilación de Normas de Seguros y Reaseguros en el LIBRO I (Requisitos de funcionamiento de las empresas de Seguros y Reaseguros), TÍTULO III (Capital Mínimo) ver **Anexo A**.

Clasificación de Riesgos

Existen diversas clasificaciones de los riesgos a los que generalmente se encuentran expuestas las compañías de seguros. La clasificación establecida por la Unión Europea, divide los riesgos en tres grandes rubros:

-Riesgos técnicos
-Riesgos de inversión
-Riesgos no técnicos

En el presente trabajo el análisis sobre margen de solvencia o capital mínimo será con el objetivo de controlar los riesgos técnicos, algunos ejemplos de ellos son: riesgo de desviación, riesgo de prima insuficiente, riesgo de reaseguro, etc.

2.4. Tabla de Mortalidad

Una tabla de mortalidad publicada usualmente contiene tabulaciones, para las edades individuales, de las funciones de sobrevida. En la enorme mayoría de las tablas de mortalidad se analiza la evolución de la mortalidad de un grupo inicial año a año.[3]

Cada país publica tablas que corresponden a su población general, en Uruguay el Instituto Nacional de Estadística construye en cada censo, aproximadamente cada 10 años, la tabla de mortalidad correspondiente.

También existen tablas de mortalidad construidas para otro tipo de poblaciones, poblaciones selectas, como ser tablas para asegurados, para rentistas, para ciertas profesiones, etc.

Definimos algunas de las funciones que integran las tablas de mortalidad:

- l_x: Función de superviviencia

  La función de supervivencia es aquella que nos da el número de personas que de un grupo inicial dado, llegan con vida exactamente a una determinada edad x. Si, como ocurre generalmente, consideramos como edad inicial de la tabla de mortalidad a la edad 0 diremos que el tamaño del grupo inicial al que está referida la tabla es precisamente l_0. La función es, una función esencialmente decreciente. Para ello basta considerar que el tamaño del grupo va disminuyendo por el número de muertes que en él se producen hasta que a una determinada edad ya no quedan más sobrevivientes. Llamaremos w a aquella edad a la cual ya no queda ningún sobreviviente.

- d_x: Número de muertes

  d_x representa el número de personas del grupo inicial que mueren después de cumplir la edad x y antes de cumplir la edad x+1. Puede ser calculado como la diferencia entre el número de personas que llegaron con vida exactamente a la edad x (l_x) y el número de personas que llegaron con vida exactamente a la edad x+1 (l_{x+1}). Entonces:

$$d_x = l_x - l_{x+1}$$

[3]La presente Sección está basada en el texto de la Cátedra de Estadística I, ver [4]

- q_x: Probabilidad de muerte

  La probabilidad de que una persona de x años fallezca en los próximos t años la notaremos como ${}_tq_x$. Dicha probabilidad puede ser calculada en términos de la función l_x:

$${}_tq_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

  Podemos calcular también la probabilidad de que una persona de edad x sobreviva t años: ${}_tp_x$ utilizando el complemento de la probabilidad anterior.

  La tabla de mortalidad contiene tabulaciones de la probabilidad de muerte para cada edad x, para el caso particular cuando t=1 (valor que se puede omitir en la notación) resulta:

  q_x: probabilidad que una persona de edad x muera antes de la edad x+1

  p_x: probabilidad que una persona de edad x sobreviva a la edad x+1

2.5. Tests no Paramétricos

Dentro de los tests no paramétricos existen pruebas específicas para testear dos muestras utilizando estadísticos lineales de rangos.[4] En este contexto, bajo el problema de las dos muestras, tenemos que:

$$(X_1,....,X_m) \sim \mathrm{F}$$
$$(Y_1,\ ....,Y_n) \sim \mathrm{G}$$

Estadístico lineal de rangos:

$$T = \sum_{i=1}^{m} \psi(R(X_i))$$

donde:
ψ=(ψ_1,...,ψ_{m+n}) es un vector de m+n componentes

$R(X_i) = \sum_{h=1}^{m} 1_{(X_h \leq X_i)} + \sum_{j=1}^{n} 1_{(Y_j \leq X_i)}$ es el rango de X_i

[4] La presente Sección está basada en las Notas para el curso de Estadística No Paramétrica de Enrique M. Cabaña, ver [3]

El rango de X_i denota el lugar que ocupa X_i en el conjunto de observaciones de las dos muestras luego de ordenarlas de menor a mayor.
Cuando los elementos del conjunto de las dos muestras son todos diferentes, el conjunto de sus rangos es 1,2,...m+n. Cuando esto no ocurre, el conjunto de los rangos contiene números repetidos (hay empates), y hay entonces números entre 1 y m-1 que no son rangos de ningún elemento. Una de las posibles soluciones a los empates es asignar el rango promedio al subconjunto de las observaciones que están empatadas.

Para el problema de las dos muestras se plantea la prueba con hipótesis nula de igualdad entre F y G.

En estas pruebas las regiones críticas son de la forma T≤constante, T≥constante o la unión de ambas, con constantes adecuadas en cada una de las desigualdades. En cualquiera de los casos, para el nivel α deseado la obtención de la constante c_α que cumple la propiedad P(T $\leq c_\alpha) = \alpha$ o P(T $\geq c_\alpha) = \alpha$ o la combinación de ambas, se puede hallar por simulación y también por el cálculo exacto de la distribución de T bajo la hipótesis nula cierta.

Existen pruebas que son sensibles a detectar cambios de posición y otras cambios de dispersión, la diferencia entre ellas está en los coeficientes ψ_i que se emplean en cada una de estas pruebas.

Pruebas de posición

En estas pruebas nos interesa detectar especialmente las alternativas de desplazamiento relativo de la distribución de las X respecto de la de las Y.

Los coeficientes ψ_i monótonos son adecuados para detectar alternativas de desplazamiento de una muestra respecto de la otra.

La prueba de hipótesis que se plantea es:

Hipótesis nula: H_0) F=G
Hipótesis alternativa: H_1) F(x)=G(x - δ), para alguna constante δ

Cuando se cumpla la alternativa con $\delta > 0$, las X estarán desplazadas hacia la derecha de las Y. En ese caso, las variables con rangos pequeños serán mayoritariamente Y, y los rangos grandes corresponderán a las X.
La prueba de hipótesis asociada a esta alternativa tendrá una región crítica de la forma T$\leq c_\alpha$ con c_α tal que la P(T$\leq c_\alpha$) $= \alpha$, donde α es el nivel de la prueba.

Prueba de Wilcoxon
Se trata de una prueba sensible a desplazamientos relativos de las dos distribuciones.

El estadístico utilizado es:

$$W = \sum_{i=1}^{m} R(X_i)$$

que tiende a dar resultados significativamente grandes cuando las X están desplazadas hacia la derecha de las Y, e inversamente, significativamente pequeños cuando están desplazadas hacia la izquierda. Los valores posibles de W van desde un mínimo de

$$\sum_{i=1}^{m} i = \frac{1}{2}m(m+1)$$

hasta el máximo

$$\sum_{i=n+1}^{m+n} i = mn + \frac{1}{2}m(m+1)$$

.

Este estadístico es de la forma

$$T = \sum_{i=1}^{m} \psi(R(X_i)) \text{ con } \psi_j = j.$$

Pruebas de dispersión

En estas pruebas se estudiará los cambios en la concentración o dispersión de dos distribuciones en ausencia de desplazamientos relativos. El interés por ejemplo es poner de manifiesto cuando las X están concentradas en el centro, y las Y desplazadas hacia los extremos, lo que indicaría que las X están más concentradas que las Y, o viceversa. El estadístico T resulta sensible a estos comportamientos cuando los coeficientes ψ crecen (o bien decrecen) desde el centro a los extremos.

Prueba de Klotz y de Ansari-Bradley
Estos estadísticos son apropiados para contrastar hipótesis de diferencias en el parámetro de dispersión entre F y G.

Como otros estadísticos de rango lineales, se construyen como sumatoria de los pesos obtenidos por una de las muestras (X) en la muestra ordenada de tamaño m+n.

Lo que caracteriza a cada uno de estos estadísticos (Klotz y Ansari-Bradley) es el vector de pesos que utiliza.
En el caso del estadístico de Klotz, el vector ψ_i asigna pesos decrecientes a cada posición obtenida en la muestra ordenada de tamaño m+n hasta llegar a m+n/2 (m+n par) o m+n/2 +1 (m+n impar) y luego pesos crecientes hasta la posición m+n, simétricos en relación a los asignados hasta la mitad de la muestra.
De esta manera, si la muestra X proviene de una distribución con parámetro de dispersión de menor valor que la de la muestra Y, tenderá a ocupar posiciones más cerca del centro de la muestra ordenada. En este caso, debería esperarse valores del estadístico cercanos al mínimo del recorrido del estadístico (H1: $\sigma_x \leq \sigma_y$). Y en caso que X provenga de una distribución más dispersa que Y, se esperan valores del estadístico cercanos al valor máximo del recorrido del estadístico (H1: $\sigma_x \geq \sigma_y$).
En el caso del estadístico de Ansari-Bradley, la asignación de pesos es inversa, asignando a las posiciones centrales de la muestra ordenada m+n los valores mayores. Por tanto, se esperan valores cercanos al máximo del estadístico cuando X proviene de una distribución menos dispersa que Y (H1: $\sigma_x \leq \sigma_y$). Y por el contrario, cuando X es más dispersa que Y, se espera que el estadístico tome valores cercanos al mínimo (H1: $\sigma_x \geq \sigma_y$).

Los vectores de pesos ψ_i correspondientes son:

$$\textbf{Klotz}: \psi_i = (\phi^{-1}(R(x_i)/m + n + 1))^2$$

con: $1 \leq i \leq m + n$, ϕ: función de distribución N(0,1)

$$\textbf{Ansari-Bradley}: min(R(x_i); n + m + 1 - R(x_i))$$

2.6. Modelo de Riesgo Individual a Corto Plazo

Denotamos con S la variable aleatoria "monto de las pérdidas anuales" de un portafolio de riesgos en estudio.[5]

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Donde cada X_i es la variable aleatoria que corresponde al monto de la pérdida de la póliza i , y n es el número de riesgos asegurados en la cartera en estudio.

El modelo supone las variables aleatorias X_i independientes, y no considera el valor tiempo del dinero.

Conociendo las distribuciones individuales de cada una de las variables aleatorias X_i, la distribución de S puede ser calculada aplicando convolución.
Una solución alternativa al cálculo analítico de la distribución de S, es aproximarla mediante la distribución empírica resultante de aplicar el método de simulación Montecarlo.

2.7. Modelos de Optimización de Reaseguro

El objetivo de los modelos propuestos es investigar la demanda y la necesidad de reaseguro en el negocio riesgoso de seguros.

En el modelo 1 se intentará optimizar las retenciones de reaseguro a través del análisis de índices con el fin de balancear los resultados económicos de la compañía, tomando en cuenta para ello la aversión al riesgo, la debilidad financiera y las potenciales fluctuaciones en los resultados.

En el modelo 2 se intentará optimizar reaseguro maximizando el retorno del capital en riesgo.

[5]La presente Sección está basada en el texto de N. Bowers, H. Gerber, J. Hickman, D. Jones y C. Nesbitt, ver [2]

2.7.1. Optimización utilizando probabilidad de ruina

Este primer método desarrolla una alternativa para el cálculo de los porcentajes de retención, retenciones proporcionales, de cada póliza o de la cartera en su totalidad. Se plantean algunos índices que permiten medir el nivel de retención óptimo para la compañía.[6]
El nivel y la composición de las retenciones están influenciadas por varios elementos internos y externos a la compañía. Los factores más importantes son: regulación de solvencia, capacidad aseguradora, poder financiero, voluntad corporativa para tomar riesgos, protección de catástrofes, balancear los resultados, tradición, composición del portafolio, el mercado de reaseguro.
Este método se restringirá a los criterios técnicos de balance de resultados para reducir la suceptibilidad de la compañía a la pérdida financiera.

Entonces, el nivel de retención para la compañía dependerá de:

- el desequilibrio del portafolio bruto (portafolio sin reaseguro)
- la debilidad en la posición financiera de la compañía
- la aversión al riesgo de la compañía

El desequilibrio del portafolio bruto está relacionado con las potenciales fluctuaciones en el resultado del año. La compañía deberá soportar luego de reasegurar (portafolio neto de la compañía) las posibles fluctuaciones en el portafolio neto.

La noción de "debilidad financiera" de una compañía podría sugerir el ratio: "premios netos/reserva de capital", de acuerdo a los criterios de solvencia aplicados en general. Sin embargo, este ratio depende de las siguientes variables: ganancia o pérdida esperada dentro del premio original, precio de cobertura reasegurada y reservas técnicas. Entonces, con el fin de simplificar, se trabajará directamente con los premios brutos.

Cuando una compañía actúa conservadoramente o se prepara para tomar riesgos depende de la confianza de sus directores, o más precisamente, que voluntad tienen de poner su "capital operando necesariamente" bajo riesgo, a esto se lo define en seguros como "aversión al riesgo".

[6] La presente subsección está basada en la publicación de J. Friedlos, H. Schmitter y E. Straub, ver [5]

Mientras por un lado las 3 variables "desequilibrio en el negocio bruto", "debilidad financiera" y "aversión al riesgo por parte de la compañía" caracterizan el requerimiento de reaseguros; por otro lado el ratio beneficio-costo del programa de reaseguro debería calcularse.

Para cuantificar el nivel de retención absoluta es necesario primero definir y cuantificar las variables que están en juego:

Requerimiento de reaseguro

El cual determina decisivamente la retención, puede ser determinado como:

$$\text{potencialesfluctuaciones} \times \text{debilidadfinanciera} \times \text{aversiónalriesgo}$$

Potenciales fluctuaciones en el resultado
Se utiliza como medida el ratio entre la varianza de las pérdidas sobre el premio puro al cuadrado. Si bien, la medida acostumbrada en estos casos es la varianza, acá se la relativizó ponderándola con el premio puro.

$$\frac{Var[S]}{E^2[S]}$$

donde:
S = monto de las pérdidas sin reaseguro para el año
E[S]= premio puro

Debilidad financiera
Se define como el ratio entre el promedio de la pérdida esperada del portafolio (premio puro) y el capital necesario para operar en esa rama (fondos de capital). Los fondos de capital son suficientes cuando una compañía de acuerdo con su aversión al riesgo está preparada y puede comprometerse en el peor escenario que se pueda presentar con sus obligaciones.

$$\text{Debilidad financiera} = \frac{E[S]}{u}$$

donde: u = capital necesario para operar en el negocio

Aversión al riesgo de la compañía
La menor tolerancia a la probabilidad de ruina para el negocio, es la mayor aversión al riesgo de la compañía. Es complejo determinar una tolerancia razonable a la probabilidad de ruina, ya que depende de factores subjetivos.
El término ruina es incorrectamente elegido porque es aplicado a la situación donde los fondos "capital en riesgo + ganancia acumulada" son insuficientes para cubrir las pérdidas de los reclamos de un portafolio dado. Sin embargo, esto no significa que la compañía entera llegue a la quiebra.

$$\text{Aversión al riesgo} = \frac{-ln\epsilon}{2}$$

donde:
ϵ = tolerancia a la probabilidad de ruina

Beneficio/Costo

El requerimiento de reaseguro representa un lado de la ecuación, el otro lado está ocupado por una cuantificación del ratio beneficio/costo de la cobertura de reaseguro en cuestión.
El *costo de la cobertura de reaseguro* podría en consecuencia estar reflejado en el ratio premio cobrado sobre premio retenido luego de reasegurar. Su *beneficio* se plasma en la reducción de las fluctuaciones en los resultados, expresado en el ratio varianza del resultado sin reaseguro sobre varianza del resultado luego de reasegurar.

El programa de reaseguro más simple consiste en un reaseguro cuota parte con cargas de seguridad iguales para el asegurador y el reasegurador. Sobre la base de esta situación simple, se expresa la ecuación:

$$\textbf{Requerimiento de reaseguro} = \frac{\textbf{Beneficio de la cobertura de reaseguro}}{\textbf{Costo cobertura de reaseguro}}$$

y se despeja el porcentaje retenido

$$Porcentaje\ retenido = a = \frac{1}{Requerimiento\ de\ reaseguro}$$

Hasta acá se trabajó con la situación más simple, pero de acuerdo a la teoría del riesgo, la situación es más compleja porque la carga del reasegurador no se corresponde con el costo original, etc.

2.7.2. Optimización maximizando el retorno del capital en riesgo

Muchos estudios de optimización de reaseguros en la literatura actuarial clásica asumen que el objetivo es minimizar la probalidad de ruina. Este método presenta limitaciones desde el punto de vista de la teoría moderna para integrar el manejo del riesgo.[7]

Se presentará un método alternativo utilizando el enfoque de maximizar el retorno del capital en riesgo.

Para un período dado, se requiere un nivel de solvencia fijo que depende de dos variables: el capital en riesgo aportado por los accionistas de acuerdo a los riesgos asumidos por la compañía y el reaseguro contratado.

El método intenta controlar dichas variables maximizando el retorno del capital en riesgo, para ello se plantean dos alternativas de modelos:

1. Modelo A: El capital en riesgo es independiente de la estrategia de reaseguro y es requerido un valor mínimo de capital en riesgo determinado desde el comienzo ignorando futuras estrategias de reaseguro.

2. Modelo B: El nivel mínimo requerido de capital en riesgo es reducido tomando en cuenta la estrategia de reaseguro.

Definiciones previas

- S - variable aleatoria que representa el monto de todos los reclamos agregados
- $F_S(s)$ - distribución de S con $s \geq 0$
- $\alpha \in [0{,}95; 0{,}99]$ = nivel de probabilidad

[7] La presente subsección está basada en la publicación de Y. Krvavych y M. Sherris, ver [10]

Definición 1: Valor en Riesgo

Dado α, el valor en riesgo (VaR) de un portafolio de seguros con un nivel de confianza α, es dado por el menor s tal que la probabilidad de que las pérdidas excedan s es menor o igual a 1-α.

$$VaR_{\alpha}(s) = inf\,\{s \in R/P(S > s) \leq 1 - \alpha\}$$

Definición 2: Premio

A continuación se detalla la fórmula de cálculo del total de premios cobrados en el período, importe que cobrará la compañía de seguros por hacer frente a la pérdida asegurada. Dicho premio será igual al valor esperado de S, cargado con un coeficiente de seguridad θ.

$P = (1 + \theta)E(S)$ donde $\theta > 0$ coeficiente de recargo del riesgo

Definición 3 : Capital en riesgo

Definimos u al capital en riesgo, corresponde al capital necesario para operar en el negocio, definido de la siguiente manera:

$u \geq u_{min}$

$u_{min} = VaR_{\alpha}(s) - (1 + \theta)E(S)$

Definición 4 : Tasa de retorno del capital en riesgo

La tasa de retorno de capital se calculará como la tasa de incremento entre el valor esperado del capital en riesgo al final del período (luego de cobrar los premios y hacer frente a las indemnizaciones) y el capital en riesgo al inicio del período.

$\varphi(u)=\frac{E(max[0,u+P-S])}{u} - 1$

Definición 5 : Variable aleatoria pérdida del reaseguror

Llamaremos J a la variable aleatoria que representa el monto de la pérdida del riesgo asumida por el reasegurador. La variable aleatoria J es función de la variable aleatoria S y dependerá de la opción de reaseguro contratada.

$$J = J_{a,b,c}(s)$$

donde:
a: es el porcentaje retenido en un reaseguro cuota parte
b: es el capital retenido de cada póliza en un reaseguro de excedente
c: es la prioridad de un reaseguro de stop loss

Definición 6 : Variable aleatoria pérdida retenida

Luego de tomar reaseguro la variable aleatoria que representa la pérdida retenida por la compañía de seguros será:

$$I = I_{a,b,c}(s) = S - J$$

Investigaremos la demanda de reaseguro que maximice $\varphi(u)$, utilizando los modelos que se definen a continuación:

MODELO A - Usando ambas variables de control: capital en riesgo y reaseguro.

maximizar: $1 + \varphi(u; a, b, c) = \frac{E \max\left\{0, u + P_{a,b,c} - (S-J)\right\}}{u}$

sujeto a: $u \geq u_{\text{mín}}$; $a \in [0,1]$; $b \in [0,\infty)$; $c \in [0,\infty)$

Donde:

- $u_{\text{mín}} = VaR_\alpha(s) - P = VaR_\alpha(s) - (1+\theta)E(S)$ y es independiente de la opción de reaseguro.
- $P_{a,b,c}$ es el premio retenido por la cedente después de tomar reaseguro:
$P_{a,b,c} = P - (1+\eta)E[J] = (1+\theta)E(S) - (1+\eta)E[(S-I)]$
donde $\eta > 0$ es la carga de seguridad del reasegurador

MODELO B - Usando una sola variable de control: reaseguro.

maximizar: $1 + \varphi(a, b, c) = \frac{E\,\text{máx}\left\{0, u_{\text{mín}}(a,b,c) + P_{a,b,c} - (S-J)\right\}}{u_{\text{mín}}(a,b,c)}$

sujeto a: $a \in [0, 1]$; $b \in [0, \infty)$ $c \in [0, \infty)$

Donde:

- $u_{\text{mín}}(a, b, c)$ es el capital mínimo exigido para el riesgo retenido, el que depende de la opción de reaseguro
- $u_{min}(a, b, c) = VaR_{\alpha}(I) - P_{a,b,c}$
- $VaR_{\alpha}(I) = inf\ \{i \in R/P(I > i) \leq 1 - \alpha\}$

Parte II

Metodología y Resultados

Capítulo 3

Descripción de los datos

Para el estudio se utilizará la cartera de **seguros de vida individual**, dicha cartera está compuesta por seguros tradicionales del tipo temporarios y vida entera, un gran porcentaje de seguros modernos del tipo de vida y retiro, y seguros bajo el nombre de otros planes que son combinación de seguros temporarios con vida entera.

Plan	**N° Pólizas**
Vida entera	204
Temporarios	442
Vida y retiro	1.792
Otros	228
Total	**2.666**

Cuadro 3.1: *Cantidad de pólizas aseguradas según tipo de plan*

A los efectos de este estudio todas las pólizas serán consideradas de riesgo anual independientemente del tipo de plan.

3.1. Datos históricos de la cartera

1. *Datos sobre las pólizas aseguradas*
   Se cuenta con los datos de cada póliza (fecha de nacimiento, sexo, suma asegurada) para las carteras de asegurados al 1° de enero de cada año, desde 1998 hasta el 2007.

A continuación se presenta el resumen de la evolución de dicha cartera de seguros durante los años:

Año	N° Asegurados	Capital Asegurado (Valores en U$S)
1998	1.695	42.856.152,79
1999	2.308	61.692.845,85
2000	2.737	72.756.349,50
2001	2.821	76.767.906,09
2002	2.912	79.965.689,74
2003	2.372	61.985.083,04
2004	2.280	57.849.190,01
2005	2.410	60.245.521,23
2006	2.467	60.428.553,46
2007	2.666	63.387.687,49

Cuadro 3.2: *Evolución de la cartera de vida individual*

2. *Datos de siniestralidad*
   Además se dispone de la experiencia siniestral de los 10 años (período 1998-2007), con detalle de la información para cada uno de los siniestros ocurridos (edad al fallecimiento, sexo, monto del siniestro, fecha de ocurrencia).
   A continuación se presenta el número de muertes ocurridas en cada año calendario y el monto total de indemnización pagada en el respectivo año:

Año	N° Muertes	Monto indemnizado (Valores en U$S)
1998	1	50.000,00
1999	5	156.198,34
2000	4	91.108,80
2001	3	78.941,78
2002	2	37.900,00
2003	2	49.454,58
2004	1	3.000,00
2005	5	58.649,82
2006	3	33.363,10
2007	2	43.277,81

Cuadro 3.3: *Datos de siniestralidad*

3.2. Datos de la cartera vigente al 1/1/2007

Para realizar la optimización de reaseguro se trabajará con la foto de la cartera vigente al 1° de enero del 2007, dado que estas serán las pólizas expuestas al riesgo durante el período en estudio.
A continución se presenta el perfil de dicha cartera:

1. *Edad y sexo de los asegurados*

Franjas Edad	**Masculino**	**Femenino**	**Total**	**Porcentaje Franja**
0-9	7	3	10	0,38 %
10-19	21	13	34	1,28 %
20-29	85	29	114	4,28 %
30-39	510	195	705	26,44 %
40-49	806	347	1.153	43,25 %
50-59	362	165	527	19,77 %
60-69	78	26	104	3,90 %
70-79	11	8	19	0,71 %
Total	**1.880**	**786**	**2.666**	**100,00 %**

Cuadro 3.4: *Número de asegurados según sexo y franjas de edad*

Se puede observar que la cartera está claramente concentrada en personas de edades entre 30 y 60 años, usual en las carteras de seguros de vida individual, ya que en estas edades es que existen las mayores necesidades de seguros de vida. Si observamos la concentración por género vemos que es una cartera altamente masculinizada con un 70,52 % de hombres.

A continuación presentamos la estadística descriptiva de la edad de los asegurados:

Mínimo	**1er Cuartil**	**Mediana**	**Media**	**3er Cuartil**	**Máximo**
1,00	38,00	43,00	43,43	49,00	77,00

Cuadro 3.5: *Edad de los asegurados*

2. *Sumas aseguradas (Valores en U$S)*

Franjas Sumas Aseguradas	**N° Asegurados**	**Porcentaje Franja**
1-10.000	818	30,68 %
10.001-20.000	846	31,73 %
20.001-30.000	479	17,97 %
30.001-40.000	146	5,48 %
40.001-50.000	274	10,28 %
50.001-60.000	24	0,90 %
60.001-70.000	23	0,86 %
70.001-80.000	21	0,79 %
80.001-90.000	3	0,11 %
90.001-100.000	22	0,83 %
110.001-300.000	10	0,38 %
Total	**2.666**	**100,00 %**

Cuadro 3.6: *Número de asegurados según franjas de capitales asegurados (U$S)*

Si analizamos la cartera vemos que las sumas aseguradas están concentradas en capitales menores o iguales a U$S 30.000.

A continuación presentamos la estadística descriptiva de las sumas aseguradas donde se observa que la suma asegurada promedio es de U$S 23.780 y la suma asegurada máxima es de U$S 297.100:

Mínimo	**1er Cuartil**	**Mediana**	**Media**	**3er Cuartil**	**Máximo**
300	10.000	20.000	23.780	30.000	297.100

Cuadro 3.7: *Sumas aseguradas (Valores en U$S)*

Capítulo 4

Distribución empírica de N y S

Para todo estudio de optimización de reaseguro se necesitará como insumo principal conocer la distribución de la variable aleatoria que describe el monto de las pérdidas en el período en estudio, en nuestro caso dicho período será de un año por lo que se utilizarán modelos de corto plazo.
Notaremos N a la variable aleatoria "Número de muertes anuales del portafolio" y S a la variable aleatoria "Monto de las pérdidas anuales del portafolio".
Para determinar la distribución de estas variables aletorias se aplicará simulación Montecarlo obteniéndose una aproximación mediante su distribución empírica.
Dada las características del estudio de corto plazo no se tomará en cuenta el valor tiempo del dinero, dicho de otra manera, no se realizarán actualizaciones financiares de los montos.

4.1. Simulación de la distribución de N y S

Para aproximar la distribución de N y S mediante simulación Montecarlo se considerará el "Modelo de riesgo individual a corto plazo":

N: número de reclamos ocurridos en el período en estudio

$$N = 1_1 + 1_2 + ... + 1_n$$

donde:
1_i = variable aleatoria Bernoulli de parámetro q_i, donde 1=muere y 0=vive
n = número de riesgos asegurados

S: monto total de reclamos durante el período en estudio

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

donde:
$X_i = sa_i * 1_i$= monto de reclamo de la póliza i
sa_i = suma asegurada de la póliza i

Previo a la simulación es necesario conocer la o las distribuciones de las variables aleatorias X_i = monto del reclamo de cada póliza individual.
En el caso de las pólizas de vida individual la experiencia de siniestros es muy poca para poder caracterizar la distribución de las X_i, por lo cual se estimaron dichas distribuciones recurriendo a la tabla de mortalidad, asignándole a cada vida la probabilidad de muerte que surge de dicha tabla según edad y sexo del asegurado.

Los pasos a seguir en cada iteración de la simulación se detallan a continuación:

1. *Asignación de probabilidad de muerte*
   A cada póliza asegurada se le asigna la probabilidad de muerte q_i que surge de la tabla de mortalidad de acuerdo a su edad y sexo. Esto significa que a cada X_i le asignamos una distribución Bernoulli con parámetro q_i.

2. *Número aleatorio*
   Se asigna un número aleatorio con distribución Uniforme (0,1) para cada póliza ($aleat_i$).

3. *Simulación de cada muerte*
   Para cada vida se compara la probabilidad de muerte con el número aleatorio, si $aleat_i$ es menor que q_i, se genera una muerte.

4. *Obtención de N*
   Sumando las muertes obtenidas en una iteración se obtiene una observación de N.

5. *Obtención de S*
   Sumando los capitales asegurados de las muertes obtenidas se tiene una observación de S.

El procedimiento anterior para una iteración se repite un número suficientemente grande de veces de modo de lograr la convergencia de la simulación.
El resultado es un vector N que contiene las 10.000 observaciones de la variable aleatoria, a partir del cual se construye su distribución empírica.
De la misma manera se construye la distribución empírica de la variable aleatoria S= Monto de las pérdidas del período en estudio.
Este procedimiento sería válido si conociéramos la tabla de mortalidad que realmente se ajusta a la mortalidad de nuestros asegurados.
Para poder determinar cual es la tabla de mortalidad adecuada primariamente realizaremos un testeo usando la siniestralidad real.

4.2. Determinación de la Tabla de Mortalidad

Nuestro objetivo es encontrar la tabla de mortalidad adecuada para la población de asegurados, recurriendo para ello a la experiencia siniestral.
Como punto de partida se considerarán las tablas de mortalidad uruguayas publicadas por el Intituto Nacional de Estadística (I.N.E.) para el año 2004, últimas disponibles.
Dichas tablas representan la mortalidad de la población uruguaya en su conjunto.
Nuestra población en estudio representa un grupo selecto de dicha población por las características socioeconómicas de los contratantes de una póliza de seguro de vida y porque dichos contratantes fueron aceptados para suscribir su póliza desde el punto vista del riesgo.
Por este motivo, habría que aplicar un coeficiente de rebaja a las tablas antes mencionadas de modo de poder utilizarlas para nuestro grupo de personas.
Se investigará también con tablas de otros países y tablas de poblaciones selectas.

4.2.1. Aproximación de la Tabla de Mortalidad

La primera aproximación a realizar es comparar los siniestros ocurridos con los siniestros esperados en un período de tiempo definido.

A continuación se detallan las fórmulas de cálculo de los siniestros esperados utilizando una tabla de mortalidad dada.

El número de siniestros esperados N se puede calcular de la siguiente manera:

$$N = \mathit{1}_1 + \mathit{1}_2 + ... + \mathit{1}_n$$

$$\text{E(N)}=\sum_{i=1}^{n} E(\mathit{1}_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i$$

Aplicando el supuesto de vidas independientes también podemos calcular la varianza del número de muertes de la siguiente manera:

$$\text{Var(N)}=\sum_{i=1}^{n} Var(\mathit{1}_i) = \sum_{i=1}^{n} q_i(1-q_i)$$

Análogamente se calcula esperanza y varianza para la variable aleatoria S:

$$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

$$\text{E(S)}=\sum_{i=1}^{n} E(sa_i * \mathit{1}_i) = \sum_{i=1}^{n} sa_i * E(\mathit{1}_i) = \sum_{i=1}^{n} sa_i * q_i$$

$$\text{Var(S)}=\sum_{i=1}^{n} Var(sa_i * \mathit{1}_i) = \sum_{i=1}^{n} (sa_i)^2 * Var(\mathit{1}_i) = \sum_{i=1}^{n} (sa_i)^2 * q_i(1-q_i)$$

La comparación entre siniestros ocurridos y esperados se puede realizar utilizando el número de siniestros ocurridos y la esperanza de N o el monto de siniestros pagados y la esperanza de S.

Dichos ratios se presentan a continuación:

$$\text{Ratio 1} = \frac{\textit{número de muertes ocurridas}}{E(N)}$$

$$\text{Ratio 2} = \frac{\textit{montos pagados}}{E(S)}$$

Si bien el ratio 1 es el que interesa a los efectos de determinar la tabla de mortalidad adecuada, también se considera el ratio 2 que incorpora la variabilidad de las sumas aseguradas por los individuos.

Análisis utilizando tabla de mortalidad de la población uruguaya 2004

Como primer paso se calculan los ratios utilizando las tablas de mortalidad del año 2004 al 100 %, obteniéndose los siguientes resultados:

Año	**N° muertes ocurridas**	**N° muertes esperadas (E(N))**	**Ratio 1 (porcentaje)**
1998	1	3,97	25,21
1999	5	5,85	85,44
2000	4	7,83	51,07
2001	3	8,51	35,24
2002	2	9,25	21,62
2003	2	7,64	26,19
2004	1	7,69	13,00
2005	5	8,55	58,48
2006	3	9,74	30,80
2007	2	10,79	18,53
TOTAL	**28**	**79,83**	**35,08**

Cuadro 4.1: *Ratio 1: utilizando tabla de mortalidad uruguaya 2004*

Año	**Indemnizaciones pagadas**	**Indemnizaciones esperadas (E(S))**	**Ratio 2 (porcentaje)**
1998	50.000,00	101.989,74	49,02
1999	156.198,34	151.670,46	102,99
2000	91.108,80	188.067,44	48,44
2001	78.941,78	209.329,92	37,71
2002	37.900,00	228.092,01	16,62
2003	49.454,58	171.318,98	28,87
2004	3.000,00	166.265,06	1,80
2005	58.649,82	182.829,18	32,08
2006	33.363,10	201.999,50	16,52
2007	43.277,81	219.724,62	19,70
TOTAL	**601.894,23**	**1.821.286,90**	**33,05**

Cuadro 4.2: *Ratio 2: utilizando tabla de mortalidad uruguaya 2004*

Analizando el resultado del primer cuadro podemos ver que la siniestralidad ocurrida representa el 35,08 % de la siniestralidad esperada usando las tablas de mortalidad uruguayas del 2004. Dicho de otra manera, si solo midiéramos por valores esperados el coeficiente que aplicaríamos a las tablas sería el 35,08 %, el que devuelve el ratio de mortalidad observada sobre esperada igual a 1.

Esto nos muestra que nuestra población de asegurados es selecta respecto a la población general del Uruguay, si bien esto es esperable dada las características de nuestros asegurados, un porcentaje de este orden resulta sumamente bajo.
Por otro lado si observamos el ratio 2 que incorpora la variabilidad de las sumas aseguradas, el porcentaje a aplicar sería 33,05 %, lo que indica una rebaja aún mayor de las tablas de mortalidad, esto puede estar explicado porque los fallecimientos ocurridos fueron de montos asegurados más bajos que la suma asegurada promedio.

Análisis con tablas de otras poblaciones

Considerando muy bajo el coeficiente que se debe aplicar a las tablas uruguayas para que reflejen la mortalidad de nuestra población, se decide investigar con tablas de otras poblaciones.
Se realiza un estudio comparativo con distintas tablas de poblaciones que a priori se consideran con tasas de mortalidad menores a la uruguaya.
Algunas de las tablas de poblaciones totales consideradas fueron las siguientes: Alemania, Suiza y Chile.
Del análisis surge que la más conservadora de las tablas es la de Alemania y de todas maneras nuestra población de asegurados se comporta según valores esperados al 37 % de la misma.

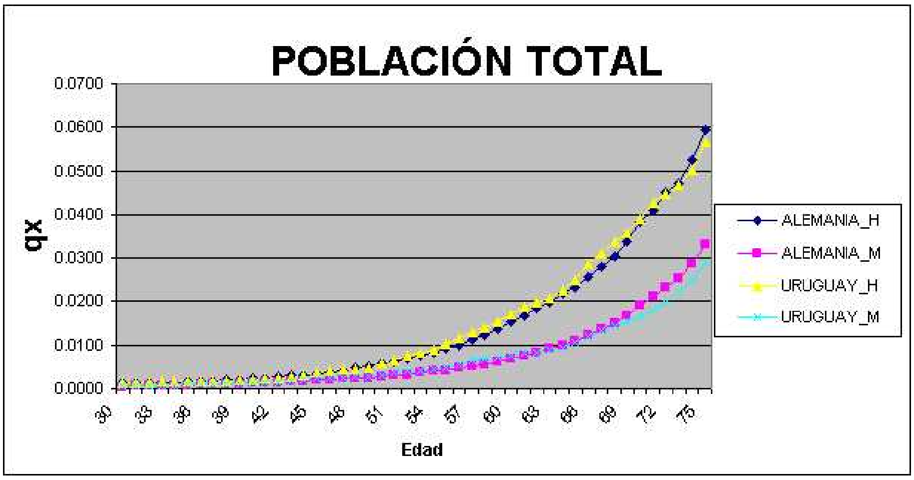

Figura 4.1: *Población total de Uruguay y Alemania*

El ajuste que se debe hacer a dichas tablas de poblaciones totales sigue siendo sumamente grande, por lo que se decide analizar tablas de poblaciones selectas.

Análisis con tablas de poblaciones selectas

Se han buscado tablas de poblaciones selectas como ser: tablas construidas específicamente para asegurados de Alemania, Suiza, México y Chile, como también la tabla construida para la Caja Notarial uruguaya.
Comparando gráficamente estas tablas se puede observar que la tabla de asegurados de Alemania es la más conservadora (menos mortal) de todas.

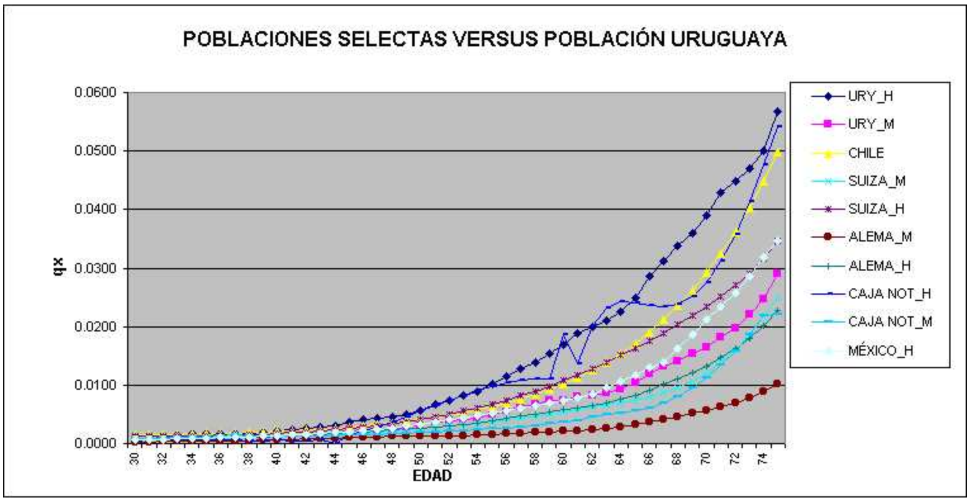

Figura 4.2: *Poblaciones selectas versus población uruguaya*

Se decide tomar la tabla de mortalidad de asegurados de Alemania y ajustarla a nuestra cartera de asegurados de acuerdo a la experiencia siniestral.

Este ajuste requerirá que la siniestralidad esperada se comporte igual a la ocurrida para la experiencia de los 10 años, para ello se corregirá el número de muertes ocurridas y el número de muertes esperadas llevándolas al tamaño de cartera del 2007.

El coeficiente que se obtiene es 78,1 %, lo que significa, que se podrían calcular tasas de mortalidad de la siguiente manera:

$$q_x = q_x \text{ asegurados Alemania } * \ 0{,}781$$

A continuación se calcula el ratio 1 utilizando la tabla de asegurados de Alemania al 100 %:

Año	N° muertes ocurridas	N° muertes esperadas (E(N))	Ratio 1 (porcentaje)
1998	2	3,07	65,19
1999	6	3,29	182,19
2000	4	3,59	111,33
2001	3	3,77	79,53
2002	2	3,94	50,78
2003	2	3,99	50,17
2004	1	4,14	24,15
2005	6	4,31	139,23
2006	3	4,67	64,25
2007	2	4,92	40,65
TOTAL	**31**	**39,69**	**78,10**

Cuadro 4.3: *Ratio 1: utilizando tabla de asegurados de Alemania*

Finalmente se calcula el ratio 1 con la tabla recortada al 78,10 % donde se puede verificar el ajuste realizado:

Año	N° muertes ocurridas	N° muertes esperadas (E(N))	Ratio 1 (porcentaje)
1998	2	2,40	83,47
1999	6	2,57	233,28
2000	4	2,81	142,54
2001	3	2,95	101,84
2002	2	3,08	65,02
2003	2	3,11	64,24
2004	1	3,23	30,92
2005	6	3,37	178,28
2006	3	3,65	82,27
2007	2	3,84	52,05
TOTAL	**31**	**31,00**	**100,01**

Cuadro 4.4: *Ratio 1: con la tabla obtenida para la población en estudio*

Presentamos a continución la tabla de mortalidad obtenida para las edades más importantes de nuestra cartera:

HOMBRES				**MUJERES**			
	q_x		q_x		q_x		q_x
30	0,00069821	**40**	0,00093564	**30**	0,00015776	**40**	0,00048578
31	0,00072945	**41**	0,00099968	**31**	0,00023196	**41**	0,00055685
32	0,00077631	**42**	0,00108871	**32**	0,00027882	**42**	0,00061699
33	0,00083020	**43**	0,00118790	**33**	0,00030147	**43**	0,00066932
34	0,00086613	**44**	0,00130896	**34**	0,00031552	**44**	0,00072555
35	0,00086847	**45**	0,00145578	**35**	0,00033193	**45**	0,00079506
36	0,00087082	**46**	0,00159246	**36**	0,00035067	**46**	0,00087238
37	0,00087316	**47**	0,00171898	**37**	0,00037098	**47**	0,00091924
38	0,00087550	**48**	0,00184004	**38**	0,00039597	**48**	0,00093876
39	0,00089425	**49**	0,00196500	**39**	0,00043189	**49**	0,00094657

Cuadro 4.5: *Tabla obtenida para la población en estudio*

4.2.2. Testeo de la Tabla de Mortalidad obtenida

A efectos de testear la distribución de N que se obtiene aplicando la tabla de mortalidad alemana de asegurados al 78,10 % con los datos observados se utilizarán procedimientos no paramétricos.
Se cuenta con 10 datos de experiencia siniestral (número de muertes anuales en 10 años) corregidos al tamaño de cartera del 2007.

A continuación se presenta dicho vector:

N real=(2, 6, 4, 3, 2, 2, 1, 6, 3, 2)

A la distribución de dicho vector la denotamos F.

El vector N real se contrasta con un vector N teórico de 10 observaciones que se obtiene aplicando simulación Montecarlo según detalle en el **punto 4.1**, utilizando la tabla de mortalidad elegida.

La distribución del vector teórico la denotamos G.

Prueba de Wilcoxon

N real = (x_1, x_2,..., x_m) m=10
N teórico = (y_1, y_2,..., y_n) n=10

Hipótesis nula: H_0) F=G
Hipótesis alternativa: H_1) F$\neq$ G

Estadístico lineal de rangos utilizado:

$$W = \sum_{i=1}^{i=10} R(x_i)$$

donde:
$R(x_i)$ indica el rango de la observación x_i, para los rangos empatados se utiliza el rango promedio

Región crítica del test para un nivel de significación α=0,05:
rechazo la hipótesis nula si W$\geq$132 y W$\leq$78

Para validar el resultado del test, tomaremos un número grande de muestras teóricas de la variable aleatoria N de tamaño 10 y testearemos la muestra real contra cada una de las muestras teóricas simuladas.

Se realiza el test para 1.000 muestras de tamaño 10 encontrándose que se acepta la hipótesis nula en 965 de ellas, lo que equivale a un porcentaje de error de solo el 3,5 %.

Como conclusión podemos decir que las distribuciones de F y G son iguales en cuanto al parámetro de posición. Esto significa que la distribución teórica obtenida mediante simulación de las muertes de nuestros asegurados se comporta como la experiencia siniestral.

Pruebas de cambio de dispersión

A continuación se realizarán pruebas para contrastar hipótesis en el parámetro de dispersión entre F y G, en ausencia de desplazamientos relativos, de acuerdo a lo testeado en el punto anterior (Prueba de Wilcoxon).
Los tests a utilizar serán los de Klotz y Ansari-Bradley, ambos trabajan con estadísticos de rangos lineales que se construyen también como sumatoria de los pesos obtenidos para una de las muestras, en la muestra ordenada de tamaño m+n. Lo que caracteriza a cada uno de ellos es el vector de pesos que utilizan. En el caso del estadístico de Ansari-Bradley, se asignan a las posiciones centrales de la muestra ordenada m+n los valores mayores y para el caso del estadístico de Klotz, la asignación de pesos es inversa.
Aquí también, para validar el resultado de los tests, tomaremos un número grande de muestras teóricas de la variable aleatoria N de tamaño 10 y testearemos la muestra real contra cada una de las muestras teóricas simuladas.

Prueba de Ansari-Bradley
N real = (x_1, x_2,..., x_m) m=10
N teórico = (y_1, y_2,..., y_n) n=10

Hipótesis nula: H_0) $\sigma_x = \sigma_y$
Hipótesis alternativa: H_1) $\sigma_x \neq \sigma_y$

Estadístico lineal de rangos utilizado:

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{m} min(R(x_i); n + m + 1 - R(x_i))$$

donde:
$R(x_i)$ indica el rango de la observación x_i, para los rangos empatados se utiliza el rango promedio

Región crítica del test para un nivel de significación α=0,05:
rechazo la hipótesis nula si T≥68 y T≤42

Se realiza el test para 1.000 muestras de tamaño 10 encontrándose que se acepta la hipótesis nula en 994 de ellas, lo que equivale a un porcentaje de error de solo el 0,6 %.

Prueba de Klotz
N real = $(x_1, x_2, ..., x_m)$ m=10
N teórico = $(y_1, y_2, ..., y_n)$ n=10

Hipótesis nula: $H_0)\ \sigma_x = \sigma_y$
Hipótesis alternativa: $H_1)\ \sigma_x \neq \sigma_y$

Estadístico lineal de rangos utilizado:

$$\mathrm{T} = \sum_{i=1}^{m} (\phi^{-1}(R(x_i)/m + n + 1))^2$$

donde:
ϕ es la función de distribución N(0,1)
$R(x_i)$ indica el rango de la observación x_i, para los rangos empatados se utiliza el rango promedio

Región crítica del test para un nivel de significación α=0,05:
rechazo la hipótesis nula si T$\geq$1134 y T$\leq$375

Se realiza el test para 1.000 muestras de tamaño 10 encontrándose que se acepta la hipótesis nula en 989 de ellas, lo que equivale a un porcentaje de error de solo el 1,1 %.

Como conclusión podemos decir que las distribuciones de F y G tienen la misma dispersión, como lo muestran ambas pruebas (Klotz y Ansari-Bradley).
Esto significa que la distribución teórica obtenida mediante simulación de las muertes de nuestros asegurados se comporta como la experiencia siniestral en cuanto a dispersión.

Como resultado general de esta sección, podemos concluir que la tabla de mortalidad se ajusta a la mortalidad real.

4.3. Resultado final de la distribución de N y S

Luego de obtenida la tabla de mortalidad se tomará la cartera de seguros de vida vigentes al 1° de enero del 2007 y se aplicará el método de simulación Montecarlo para obtener las distribuciones completas de las variables aleatorias N y S.
Previo a la construcción de las distribuciones debemos determinar la cantidad de iteraciones que realizaremos en la simulación, para ello estudiaremos la convergencia.

Convergencia de la simulación

Se estudia la convergencia del método observando los cambios en los resultados al variar el número de observaciones.
Se observa en el cuadro a continuación que al agregar iteraciones los cambios en los parámetros no son significativos, por lo que se decide de modo de optimizar el tiempo de cálculo trabajar con 10.000 iteraciones.

N° iteraciones	Percentil 1 %	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Percentil 99 %	Var(N)	SD(N)
100	0,00	2,00	3,00	3,79	5,00	10,00	4,05	2,01
500	0,00	2,00	4,00	3,76	5,00	9,00	3,78	1,94
1.000	0,00	3,00	4,00	3,92	5,00	10,00	4,04	2,01
3.000	0,00	2,00	4,00	3,81	5,00	9,00	4,01	2,00
5.000	0,00	2,00	4,00	3,83	5,00	9,00	3,82	1,95
7.000	0,00	2,00	4,00	3,89	5,00	9,00	4,00	2,00
10.000	0,00	2,00	4,00	3,85	5,00	9,00	3,87	1,97
50.000	0,00	2,00	4,00	3,84	5,00	9,00	3,87	1,97
100.000	0,00	2,00	4,00	3,85	5,00	9,00	3,83	1,96

Cuadro 4.6: *Convergencia - Variable aleatoria N*

N° iteraciones	Percentil 1 %	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Percentil 99 %	Var(S)	SD(S)
100	0	45.130	69.230	80.900	103.000	331.638	3.552.663.797	59.604
500	0	40.880	73.030	81.910	111.000	254.357	3.017.417.074	54.931
1.000	0	43.830	74.750	82.830	109.300	250.425	3.215.682.424	56.707
3.000	0	40.790	72.080	81.650	111.000	262.313	3.286.638.591	57.329
5.000	0	41.340	72.630	82.000	110.000	252.043	3.020.178.228	54.956
7.000	0	41.260	72.420	82.850	111.500	268.225	3.224.434.653	56.784
10.000	0	41.200	73.430	82.980	113.000	259.981	3.187.325.032	56.456
50.000	0	41.000	72.000	82.210	111.000	259.516	3.190.530.586	56.485
100.000	0	41.100	72.800	82.140	111.000	257.034	3.113.873.610	55.802

Cuadro 4.7: *Convergencia - Variable aleatoria S*

Distribución de N y S

Se realizaron las 10.000 iteraciones de la simulación obteniéndose las distribuciones empíricas de N y S que se presentan a continuación:

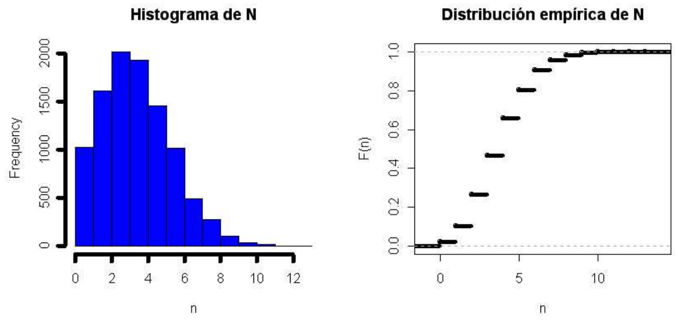

Figura 4.3: *Histograma y Distribución empírica de N*

Mínimo	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Máximo	Var(N)	SD(N)
0,00	2,00	4,00	3,85	5,00	13,00	3,87	1,97

Cuadro 4.8: *Variable aleatoria N = Número de muertes anuales*

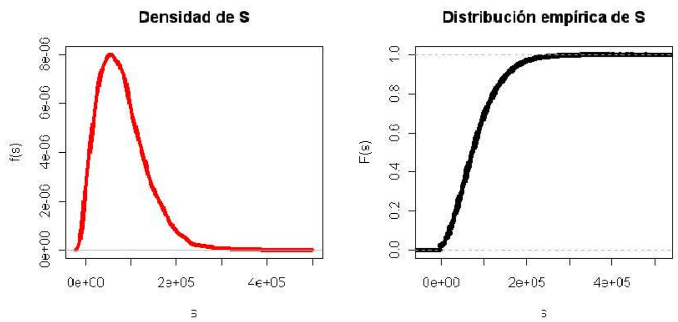

Figura 4.4: *Densidad y Distribución empírica de S*

Mínimo	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Máximo	Var(S)	SD(S)
0	41.200	73.430	82.980	113.000	472.900	3.187.325.032	56.456,4

Cuadro 4.9: *Variable aleatoria S = Monto de Indemnizaciones anuales (U$S)*

Capítulo 5

Optimización de reaseguro

El objetivo de este trabajo es determinar cual de los tipos de reaseguros es el óptimo.

Previo al cálculo de los distintos métodos para optimizar reaseguro se estudiará como cambia el comportamiento de la variable aleatoria $S =$ "monto de las pérdidas del período" luego de contratar reaseguro.

5.1. Análisis de los cambios en la distribución de S al incorporar reaseguro

Llamamos I a la variable aleatoria "monto de las pérdidas retenidas por la compañía de seguros" y J a la variable aleatoria "monto de las pérdidas cedidas al reasegurador".

$$\text{Donde: } S = I + J.$$

A continuación se detallan dichas variables para los distintos tipos de reaseguros que serán utilizados en nuestro estudio:

Reaseguro proporcional - Cuota Parte

Una cobertura de reaseguro proporcional cuota parte es aquella en donde el riesgo de cada póliza individual se reparte de manera proporcional entre reasegurador y asegurador.

Para cada póliza individual tenemos la variable aleatoria X_i para el total del riesgo asegurado, luego de tomar reaseguro cuota parte queda:

Riesgo retenido por la compañía para cada póliza:

$$I_i = aX_i \text{ si } 0 \leqslant a \leqslant 1$$

Riesgo asumido por el reasegurador para cada póliza:

$$J_i = (1-a)X_i \text{ si } 0 \leqslant a \leqslant 1$$

Para obtener la variable aleatoria pérdida anual del reasegurador sumamos para todas las pólizas obteniendo:

$$J = (1-a)X_1 + (1-a)X_2 + ... + (1-a)X_n = (1-a)S$$

donde:
$S = X_1 + X_2 + ... + X_n$

En el caso del reaseguro cuota parte la proporción retenida a aplicable a cada póliza puede ser aplicada sobre la variable aleatoria S directamente según se detalla a continuación:

Pérdida del asegurador luego de tomar un reaseguro cuota parte:

$$I = aS$$

Pérdida del reasegurador luego de aceptar un reaseguro cuota parte:

$$J = (1-a)S$$

Reaseguro proporcional - Excedentes

Una cobertura de reaseguro proporcional de excedentes es aquella en donde sobre cada riesgo individual la compañía retiene el monto asegurado hasta un determinado valor b, el resto del riesgo es cedido al reasegurador.

Para cada póliza individual la variable aleatoria que describe el monto total del riesgo es:

$X_i = sa_i * \mathit{1}_i$= monto del reclamo de la póliza i
sa_i = suma asegurada de la póliza i
$\mathit{1}_i$ = variable aleatoria Bernoulli de parámetro q_i, donde 1=muere y 0=vive

El riesgo asumido por el reasegurador para cada póliza es:

$$J_i = \begin{cases} 0 \text{ si } sa_i \leqslant b \text{ y } b \in [0, \infty) \\ (sa_i - b)\mathit{1}_i \text{ si } sa_i > b \text{ y } b \in [0, \infty) \end{cases}$$

Si la suma asegurada de la póliza supera el límite de retención b, se cederá al reasegurador la suma asegurada deduciendo el importe b, si la suma asegurada de la póliza es menor o igual que b la cesión será nula.

El riesgo retenido por la compañía para cada póliza es:

$$I_i = \begin{cases} sa_i\mathit{1}_i \text{ si } sa_i \leqslant b \text{ y } b \in [0, \infty) \\ b\mathit{1}_i \text{ si } sa_i > b \text{ y } b \in [0, \infty) \end{cases}$$

Visto desde el punto de vista de la compañía, si la suma asegurada es menor o igual que b la compañía de seguros retiene todo el riesgo y si la suma asegurada es mayor que b la retención será de un importe b, o sea el riesgo asumido por cada póliza será a lo sumo de un monto igual a b.

Para obtener la variable aleatoria, pérdida anual del reasegurador y pérdida anual retenida por la compañía podemos sumar para todas las pólizas obteniendo:

$$J = \sum_i J_i$$

$$I = \sum_i I_i$$

Reaseguro no proporcional - Stop Loss

El reaseguro de stop loss, es un reaseguro que funciona sobre la cartera total en su conjunto, en este caso no se aplica proporción sobre cada riesgo sino que se protege a la compañía sobre la pérdida anual total S.

En este tipo de reaseguro se denomina prioridad al riesgo que asume la cedente, por lo general el riesgo por encima de la prioridad es cedido al reasegurador hasta un cierto límite marcado en el contrato, si las pérdidas superan dicho límite, el riesgo vuelve a ser responsabilidad de la cedente.

Definimos:

Prioridad $= c$

Límite reasegurador $= d$ con $d > c$

La pérdida bajo riesgo de la aseguradora:

$$I = \begin{cases} S \text{ si } S \leqslant c \\ c \text{ si } c < S \leqslant d \\ c + (S - d) \text{ si } S > d \end{cases}$$

La pérdida asumida por el reasegurador:

$$J = \begin{cases} 0 \text{ si } S \leqslant c \\ S - c \text{ si } c < S \leqslant d \\ d - c \text{ si } S > d \end{cases}$$

En este tipo de contrato en general el límite c es tomado en el entorno de la E(S), o sea en el entorno de los premios cobrados, de modo de que el reaseguro opere cuando las pérdidas superen los premios cobrados, y el límite d puede tender a infinito, o ser dos o tres veces la E(S), eliminando el mayor riesgo de la compañía.

Los tres tipos de reaseguros antes presentados pueden tomarse individualmente o combinarse entre ellos. Por ejemplo se podría tomar un reaseguro cuota parte y luego un reaseguro de stop loss que proteja la pérdida retenida.

Ejemplos

A continuación se mostrará los cambios en las distribuciones de las variables aleatorias J e I para algunos casos de los contratos de reaseguros presentados:

1) No hay reaseguro: I = S
2) Reaseguro cuota parte con a = 0,5
3) Reaseguro de excedente, con una retención por póliza de U$S 20.000
4) Reaseguro de stop loss, con una prioridad de U$S 80.000

A continuación se presenta la estadística descriptiva de la variable aleatoria I para los distintos ejemplos de reaseguro presentados:

	Mínimo	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Máximo
S	0	41.200	73.430	82.980	113.000	472.900
$I_{cuotaparte}$	0	20.600	36.720	41.490	56.500	236.450
$I_{excedente}$	0	32.080	50.000	55.040	73.560	169.800
$I_{stoploss}$	0	40.820	73.190	59.890	80.000	80.000

Cuadro 5.1: *Variable aleatoria I = Pérdidas retenidas (U$S)*

Al observar la varianza para los distintos ejemplos, vemos como acotamos la dispersión del riesgo retenido por cuenta de la compañía a medida que cambiamos el tipo de reaseguro:

	Varianza	Desvío estándar
S	3.187.325.032	56.456,40
$I_{cuotaparte}$	796.831.275	28.228,20
$I_{excedente}$	903.624.761	30.060,35
$I_{stoploss}$	603.841.162	24.573,18

Cuadro 5.2: *Dispersión del riesgo retenido (I)*

Si tomamos un reaseguro cuota parte con una retención del 50 % tanto la esperanza como el desvío estándar disminuyen a la mitad.

En el caso del reaseguro de excedente planteado en el ejemplo conseguimos disminuir el valor esperado al 66 % y el desvío estándar casi a la mitad, esta situación es beneficiosa para la compañía dado que reduce la varianza casi en la misma proporción que el cuota parte pero obtiene ganancias al quedarse con mayor parte del premio. Lo mismo más agudizado se visualiza para el reaseguro de stop loss donde la varianza se reduce aún más y nos quedamos con más premio.

En el gráfico a continuación se visualiza los cambios en la distribución de la variable aleatoria I = monto de la pérdida anual retenida por la compañía de seguros.

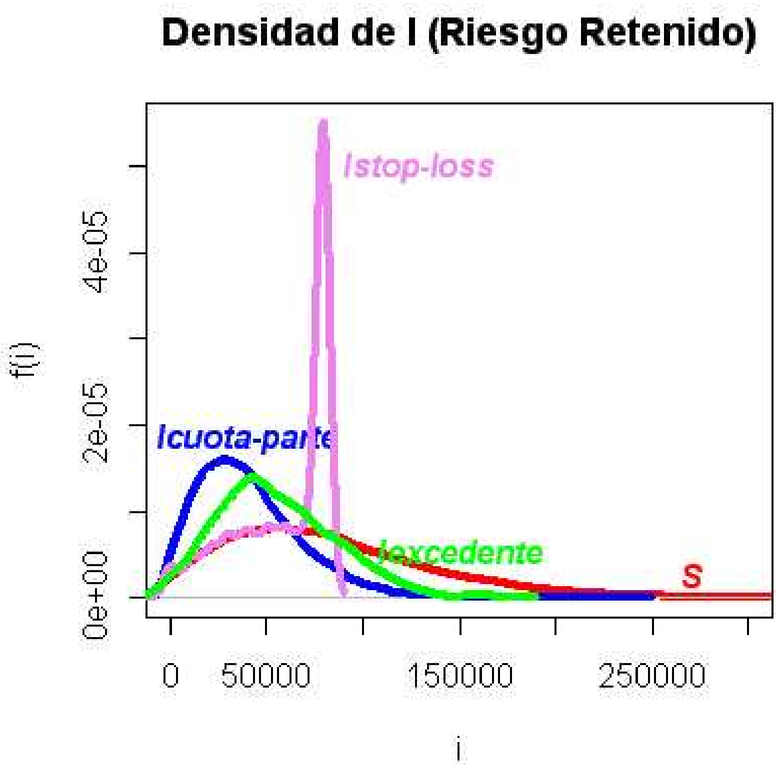

Figura 5.1: *Densidad de I (riesgo retenido)*

5.2. Optimización de reaseguro utilizando probabilidad de ruina

Este primer método es un método tradicional en el cual se considera para la optimización de reaseguro la aversión al riesgo medida a través de la probabilidad de ruina, buscando equilibrar los resultados económicos de la compañía para un reaseguro cuota parte.

El equilibrio que se busca está reflejado en la siguiente ecuación:

$$\textbf{Requerimiento de reaseguro} = \frac{\textbf{Beneficio de la cobertura de reaseguro}}{\textbf{Costo cobertura de reaseguro}}$$

Ratio Beneficio/Costo

El beneficio de la cobertura de reaseguro se define como:

$$\textit{Beneficio} = \frac{Varianza(resultado\ sin\ reaseguro)}{Varianza(resultado\ con\ reaseguro)} = \frac{Var(S)}{Var(I)}$$

donde:
S = monto de la pérdida anual sin reaseguro
I = monto de la pérdida retenida por la compañía = a*S
a = porcentaje retenido por la compañía

$$\text{Beneficio} = \frac{Var(S)}{Var(aS)} = \frac{Var(S)}{a^2 Var(S)} = \frac{1}{a^2}$$

El costo de la cobertura de reaseguro se define de la siguiente manera:

$$\text{Costo} = \frac{Premio\ cobrado}{Premio\ retenido} = \frac{(1+\theta)E(S)}{(1+\theta)E(S) - (1+\eta)E(S-I)}$$

donde:
E(S)= premio puro
θ = carga de seguridad de la compañía de seguros
η = carga de seguridad de la compañía de reaseguros
S - I = monto de la pérdida cedida al reasegurador = (1 - a)* S

El ratio beneficio/costo de la cobertura de reaseguro resultante es:

$$\frac{\text{Beneficio}}{\text{Costo}} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{(1+\theta)E(S) - (1+\eta)E(S-I)}{(1+\theta)E(S)}\right]$$

En el caso particular en que la carga de seguridad del reaseguro es igual a la carga original ($\theta = \eta$) se obtiene:

$$\frac{Beneficio}{Costo} = \frac{1}{a}$$

Requerimiento de reaseguro

El requerimiento de reaseguro se define como:

Requerimiento de reaseguro = potenciales fluctuaciones× debilidad financiera× aversión al riesgo

Una medida de las potenciales fluctuaciones es:

$$\textit{Potenciales fluctuaciones} = \frac{Var[S]}{E^2[S]}$$

Para nuestra población en estudio este índice alcanza un valor de:

$$\textit{Potenciales fluctuaciones} = \frac{3187325032}{(82984,7)^2} = 0,4628394$$

Este índice en sí no tiene un sentido práctico tan claro como la raíz cuadrada de éste, que representa el desvío estándar sobre el valor esperado, o sea la cantidad de veces que la esperanza entra en el desvío.
En este caso, este índice es 0,680323, lo que significa que el desvío estándar es el 68 % de la esperanza.

Por otro lado, una posible medida de la debilidad financiera es:

$$\textit{Debilidad financiera} = \frac{E[S]}{u}$$

donde:
u = capital necesario para operar

El capital mínimo o capital necesario en reserva para operar en el negocio de riesgo puede ser calculado de varias maneras, para este método se va a usar la siguiente fórmula:

$$u_{min} = VaR_{\alpha}(s) - E(S)$$

donde:
$VaR_{\alpha}(s) = \text{ínf}\,\{s \in R / P(S > s) \leqslant 1 - \alpha\}$ con $\alpha = 0,95$

A continuación se presenta el resultado obtenido:

u mín (U$S)	Debilidad financiera
101.470,99	0,8178169

Este índice refleja cuantas veces entra u capital necesario para operar en el negocio en el premio puro, siendo más débil financieramente si este índice es mayor y menos débil si es menor.
Para nuestra población en estudio, de acuerdo a como se calculó el capital mínimo para operar, se observa que el negocio es poco débil financieramente.

Por otro lado, una medida de la aversión al riesgo puede ser:

$$Aversión\ al\ riesgo = \frac{-ln\epsilon}{2}$$

donde:
ϵ = tolerancia a la probabilidad de ruina

A continuación se presentan los resultados para diferentes ϵ:

Probabilidad ruina	Aversión riesgo
0,001	3,453878
0,005	2,649159
0,01	2,302585
0,02	1,956012
0,05	1,497866
0,1	1,151293

Por último, con los tres índices obtenidos anteriormente se calcula el requerimiento de reaseguro para los diferentes ϵ planteados, a continuación se presentan los resultados:

Probabilidad ruina	Aversión riesgo	Requerimiento reaseguro
0,001	3,453877639	1,31
0,005	2,649158683	1,00
0,01	2,302585093	0,87
0,02	1,956011503	0,74
0,05	1,497866137	0,57
0,1	1,151292546	0,44

Este índice refleja el requerimiento de reaseguro y se interpreta como la necesidad de reaseguro, cuanto mayor es el índice mayor es la necesidad de reaseguro, siendo el punto de inflexión entre la necesidad o no de reaseguro el valor 1 de este índice.

Para nuestra población en estudio se puede observar que solo en el caso que la compañía sea extremadamente aversa al riesgo, tolerancia a la probabilidad de ruina de 0,1 %, es que se requeriría reaseguro. Para el resto de las situaciones planteadas, la compañía debería retener el 100 % del negocio no reasegurando nada.

Con los resultados hallados es despejado de la ecuación *Requerimiento=Beneficio/Costo* el porcentaje retenido a.

A continuación se presentan los resultados para distintos valores de θ y η variando la aversión al riesgo:

		Porcentaje	**retenido**
Aversión riesgo	θ=η	θ=0,05 η=0,1	θ=0,1 η=0,2
3,453877639	0,76	0,75	0,74
2,649158683	1,00	1,00	1,00
2,302585093	1,00	1,00	1,00
1,956011503	1,00	1,00	1,00
1,497866137	1,00	1,00	1,00
1,151292546	1,00	1,00	1,00

Cuadro 5.3: *Porcentaje retenido resultante de la optimización*

Como se puede observar en el cuadro anterior el porcentaje retenido debería ser el 100 % del negocio para todos los casos, salvo para el caso en que la compañía sea extremadamente aversa al riesgo, tolerancia a la probabilidad de ruina de 0,1 %, donde se debería retener entre un 74 % y un 76 % del negocio dependiendo de las diferentes situaciones planteadas para las cargas de seguridad de la compañía y del reasegurador.

5.3. Optimización de reaseguro maximizando la tasa de retorno del capital en riesgo

En este segundo método se optimizará el reaseguro maximizando la función $\varphi(u)$ definida como: tasa de retorno del capital en riesgo.

5.3.1. Análisis sin reaseguro

En esta primer etapa se realizará el cálculo de los resultados de $\varphi(u)$, para el caso en que la compañía de seguros retenga por cuenta propia el 100 % del negocio, es decir no existe cesión de reaseguro.

Este primer análisis es realizado de modo de interpretar los resultados de la tasa de retorno del capital en riesgo al variar:

- θ: la carga de seguridad que la compañía aplica sobre el valor esperado de la pérdida para cobrar los premios.

- u: el capital exigido, para que la compañía aseguradora haga frente a las obligaciones asumidas.

Bajo el supuesto de que no hay reaseguro, la compañía se hará cargo de toda la pérdida anual representada por la variable aleatoria S.

A partir de la distribución empírica construida para dicha variable aleatoria se calcula el premio a cobrar (P), el Valor en riesgo (VaR(s)) y el Capital Mínimo exigido:

Premios a cobrar por la aseguradora

P = (1 + θ)E(S)

Donde: E(S) = 82.984,69, es el valor esperado de la pérdida y corresponde al premio puro, y θ es el coeficiente de seguridad con el que se cargan los premios puros.

A continuación se detallan los valores del premio cargado a cobrar para los distintos valores de θ:

θ	**Premio**
0,00	82.984,69
0,01	83.814,54
0,05	87.133,93
0,10	91.283,16
0,20	99.581,63

Valor en Riesgo

El valor en riesgo para un α dado del 95 %, representa el valor s que toma la variable aleatoria de modo de que la probabilidad de que las pérdidas se ubiquen por encima de dicho valor sea menor o igual a 1-α.

$$VaR_{\alpha}(s) = \text{ínf}\,\{s \in R/P(S > s) \leqslant 1 - \alpha\}$$

A continuación se detalla el valor en riesgo hallado:

α	**Valor en riesgo (U$S)**
95 %	184.455,7

Capital Mínimo

El capital mínimo o capital necesario en reserva para operar en el negocio de riesgo puede ser calculado de varias maneras, en nuestro estudio propondremos dos análisis:

a) Calcularlo de manera teórica usando la fórmula a continuación:

$$u_{min} = VaR_{\alpha}(s) - (1+\theta)E(S)$$

Obteniéndose los siguientes resultados para los distintos valores de θ:

θ	**u** mínimo **(U$S)**
0,00	101.470,99
0,01	100.641,14
0,05	97.321,76
0,10	93.172,52
0,20	84.874.05

b) Calcularlo de acuerdo a las exigencias de la Superintendencia de Seguros y Reaseguros:

Según normativa el capital mínimo (u) exigido para operar en el ramo vida es: el máximo entre el margen de solvencia y el capital básico o sea :

u = capital básico = $26.060.426 = U$S 1.085.851 (tipo de cambio = 24)

Vemos al comparar este resultado con el teórico que el capital mínimo (u) exigido para operar en el ramo vida es muy alto para trabajar solamente con una cartera como la de vida individual elegida para el estudio, esto se debe a que el capital en reserva en la compañía corresponde a todos los seguros del ramo vida como ser: seguros colectivos, previsionales, vida crédito, accidentes personales, etc.

En las secciones siguientes de modo de chequear el capital mínimo de la normativa se utilizará el margen de solvencia en vez del capital básico de modo de que represente de alguna manera el riesgo asegurado.

Resultados de $\varphi(u)$ para distintos escenarios

Se calcularán los resultados de $\varphi(u)$ según la siguiente ecuación:

$$\varphi(u) = \begin{cases} \frac{E(m\acute{a}x[0,u+P-S])}{u} - 1 \\ u \geq u_{m\acute{i}n} \end{cases}$$

Donde $\varphi(u)$ representa la tasa de retorno del capital en riesgo u reservado al inicio del período, dicha tasa se calcula como el cociente entre: el capital resultante al final del período y el capital inicial, el capital al final del período se estima como el valor esperado del capital luego de cobrar los premios y pagar los siniestros.

1. Resultados de $\varphi(u)$ al variar θ dejando constante u=$u_{\text{mín}}$

θ	**u mínimo (U$S)**	φ**(u)**
0,00	101.470,99	0,0000
0,01	100.641,14	0,0082
0,05	97.321,76	0,0426
0,10	93.172,52	0,0891
0,20	84.874.05	0,1955

   En el cuadro precedente se observa que para un capital fijo igual al capital mínimo (para cada θ), la tasa de retorno del capital aumenta al aumentar la carga de seguridad θ, la tasa de retorno será nula si no hay carga de seguridad, y será mayor cuanto mayor sea la carga de seguridad.

2. Resultados de $\varphi(u)$ al variar u (capital exigido), dejando constante θ=0,10.

u (U$S)	φ**(u)**
93.173	0,0891
100.000	0,0830
200.000	0,0415
300.000	0,0277
400.000	0,0207
500.000	0,0166
600.000	0,0138

Del análisis del escenario más simple surge que al aumentar la exigencia de capital disminuye la tasa de retorno del capital, o sea la tasa de retorno máxima se alcanza para un θ fijo reservando capital equivalente $u{=}u_{\text{mín}}$.
Los escenarios para capitales por debajo de $u{=}u_{\text{mín}}$ arrojan mayor tasa de retorno, pero no pueden ser considerados, porque son insuficientes para operar en el negocio y ponen en riesgo alto a la compañía.

3. Resultados de $\varphi(u)$ considerando u=capital mínimo exigible según normativa vigente (u = U$S 1.085.851), para distintos valores de θ.

θ	$\varphi(\mathbf{u})$
0,00	0,0000
0,01	0,0008
0,05	0,0038
0,10	0,0076
0,20	0,0153
0,50	0,0382

Dado que el capital mínimo exigido es varias veces mayor que el valor en riesgo deberá aplicarse un coeficiente de seguridad θ muy alto de modo de obtener un rentorno al reservar un capital tan grande para la cartera de seguros en estudio. Se observa que al aplicar un coeficiente de seguridad del 50 % recién se obtiene un rentorno razonable de 3,8 %, es poco posible en el negocio de seguro aplicar cargas tan importantes.
Un estudio más amplio sobre el impacto de la normativa se presenta en la **Sección 5.4**.

4. Análisis resumen de los resultados de $\varphi(u)$ en el negocio sin reaseguro

A continuación presentamos matriz de datos y gráfico con los resultados para la tasa de retorno del capital en riesgo que resume los análisis presentados en los puntos anteriores:

			u			
θ	100.000	200.000	300.000	400.000	500.000	600.000
0,00	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
0,01	0,0083	0,0041	0,0028	0,0021	0,0017	0,0014
0,02	0,0165	0,0083	0,0055	0,0041	0,0033	0,0028
0,05	0,0413	0,0206	0,0138	0,0103	0,0083	0,0069
0,10	0,0825	0,0413	0,0275	0,0206	0,0165	0,0138
0,15	0,1238	0,0619	0,0413	0,0309	0,0248	0,0206
0,20	0,1650	0,0825	0,0550	0,0413	0,0330	0,0275

Cuadro 5.4: $\varphi(u)$ *sin reaseguro*

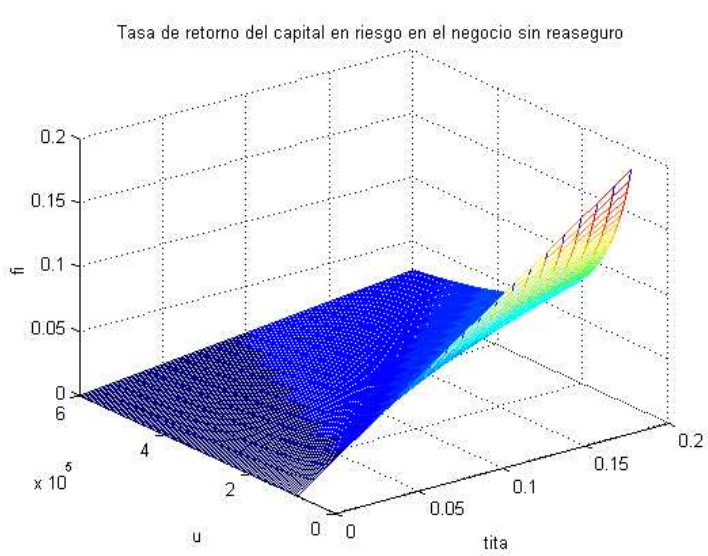

Figura 5.2: $\varphi(u)$ *sin reaseguro*

La tasa de retorno máxima del 16,5 % se obtiene para el máximo θ y el mínimo u ($u \geqslant u_{\text{mín}}$) considerados. Esto es razonable dado que las mayores ganancias se obtienen para la mayor carga de los premios y el mínimo capital reservado para operar en el negocio.

5.3.2. Análisis incorporando reaseguro

Luego de analizar como funcionan nuestras variables sin reaseguro, pasaremos a modelizar la optimización de reaseguro y calcular nuevamente los resultados de $\varphi(u)$ incorporando un reaseguro cuota parte, excedente y otro de exceso de pérdida.

Para ello utilizaremos los modelos presentados en el **punto 2.7.2**:

- **Modelo A**
  El capital en riesgo es independiente de la estrategia de reaseguro, entonces maximizamos usando ambas variables de control: capital en riesgo y reaseguro. En este modelo la decisión de reaseguro, no altera las exigencias de capital mínimo.
- **Modelo B**
  El capital en riesgo es reducido en función de la estrategia de reaseguro, maximizamos usando una sola variable de control: reaseguro. En este modelo el capital mínimo es función de la decisión de reaseguro.

La relación que debe existir entre θ (carga de seguridad que aplica el asegurador) y η (carga de seguridad que aplica el resagurador) debe ser tal que haya posibilidad del negocio de reaseguro.
En el negocio de reaseguro, el reasegurador en general tiene menos información sobre el riesgo asegurado por no tratar directamente en el negocio, por este motivo es que el reasegurador suele cubrirse más con la carga de seguridad y por lo tanto $\eta > \theta$.
Si $\eta < \theta$, incentivaría a las compañías de seguros a asegurar cualquier riesgo sin evaluarlo, ya que transferirían el negocio íntegro al reasegurador y ganarían un porcentaje por la diferencia de cargas de seguridad.

En todo el desarrollo de optimización que sigue se considerará para todos los modelos que θ es mayor que η, o sea el reasegurador aplica una carga de seguridad mayor que la que aplica la compañía de seguros.

El estudio se dividirá en dos partes, en la parte uno se investigará como funciona independientemente cada tipo de contrato de reaseguro y en la segunda parte se realizará la optimización combinándolos.

PARTE I: Contrato de reaseguro único

Se aplicarán los modelos A y B, para cada uno de los tres tipos de contratos presentados, se considerará el caso simplificado de que la compañía elige uno solo de los contratos.

A continuación se detallan los resultados de $\varphi(u)$ para los distintos contratos de reaseguros en ambos modelos y para el caso particular de θ=0,05 y η=0,10.

Modelo A - Reaseguro Cuota Parte

Porcentaje retenido	Premio	Premio cedido	VaR cuota parte	u cuota parte	$\varphi(u)$
0	87.133,93	91.283,16	184.455,7	97.321,76	-0,042634195
0,2	87.133,93	73.026,53	184.455,7	97.321,76	-0,025580517
0,4	87.133,93	54.769,90	184.455,7	97.321,76	-0,008526839
0,6	87.133,93	36.513,27	184.455,7	97.321,76	0,008526839
0,8	87.133,93	18.256,63	184.455,7	97.321,76	0,025580517
1	87.133,93	0,00	184.455,7	97.321,76	0,04263415

Cuadro 5.5: $\varphi(u)$ *con reaseguro cuota parte - Modelo A*

Modelo A - Reaseguro Excedente

b	Premio	Premio cedido	VaR excedente	u excedente	$\varphi(u)$
0	87.133,93	91.283,164	184.455,7	97.321,76	-0,042634195
10.000	87.133,93	52.713,658	184.455,7	97.321,76	-0,006606087
20.000	87.133,93	29.273,899	184.455,7	97.321,76	0,015289193
30.000	87.133,93	16.515,014	184.455,7	97.321,76	0,027207378
40.000	87.133,93	9.814,245	184.455,7	97.321,76	0,033466624
50.000	87.133,93	5.131,782	184.455,7	97.321,76	0,037840553
100.000	87.133,93	1.233,209	184.455,7	97.321,76	0,041482244
Inf	87.133,93	0,000	184.455,7	97.321,76	0,04263419

Cuadro 5.6: $\varphi(u)$ *con reaseguro excedente - Modelo A*

Modelo A - Reaseguro Stop Loss

Prioridad	Premio	Premio cedido	VaR stop loss	u stop loss	$\varphi(u)$
0,0	87.133,93	91.283,1641	184.455,7	97.321,76	-0,04263419
82.984,7	87.133,93	23.825,6916	184.455,7	97.321,76	0,02037841
124.477,0	87.133,93	9.982,7288	184.455,7	97.321,76	0,03330924
165.969,4	87.133,93	4.025,6737	184.455,7	97.321,76	0,03887378
207.461,7	87.133,93	1.716,5965	184.455,7	97.321,76	0,04103071
248.954,1	87.133,93	748,4204	184.455,7	97.321,76	0,04193509
290.446,4	87.133,93	348,3376	184.455,7	97.321,76	0,04230881
331.938,8	87.133,93	151,1465	184.455,7	97.321,76	0,04249301
Inf	87.133,93	0,0000	184.455,7	97.321,76	0,04263419

Cuadro 5.7: $\varphi(u)$ *con reaseguro stop loss - Modelo A*

Observando las salidas para el modelo A concluímos que para cualquiera de los tres tipos de reaseguro considerados, la retención óptima se obtiene sin contratar reaseguro. Esto se debe a que el capital exigido para operar en el negocio que considera este modelo es el capital exigido para el negocio total, el que soporta que las pérdidas del negocio total se ubiquen por debajo de él con un 95 % de probabilidad. La tasa de retorno del capital máxima alcanzada es del 4,26 % para una retención del 100 %.

Modelo B - Reaseguro Cuota Parte

Porcentaje retenido	Premio	Premio cedido	VaR cuota parte	u cuota parte	$\varphi(u)$
0	87.133,93	91.283,16	0,00	4.149,235	-1,00000000
0,2	87.133,93	73.026,53	36.891,14	22.783,739	-0,10926832
0,4	87.133,93	54.769,90	73.782,27	41.418,244	-0,02003578
0,6	87.133,93	36.513,27	110.673,41	60.052,748	0,01381863
0,8	87.133,93	18.256,63	147.564,55	78.687,253	0,03163843
1	87.133,93	0,00	184.455,69	97.321,757	0,04263419

Cuadro 5.8: $\varphi(u)$ *con reaseguro cuota parte - Modelo B*

Modelo B - Reaseguro Excedente

b	Premio	Premio cedido	VaR excedente	u excedente	$\varphi(u)$
0	87.133,93	91.283,164	0,0	4.149,235	-1,00000000
10.000	87.133,93	52.713,658	70.000,0	35.579,729	-0,01806973
20.000	87.133,93	29.273,899	112.000,0	54.139,970	0,02748378
30.000	87.133,93	16.515,014	139.646,5	69.027,560	0,03835960
40.000	87.133,93	9.814,245	154.757,1	77.437,407	0,04206017
50.000	87.133,93	5.131,782	167.967,6	85.965,454	0,04283941
100.000	87.133,93	1.233,209	180.476,4	94.575,644	0,04268673
Inf	87.133,93	0,000	184.455,7	97.321,757	0,04263419

Cuadro 5.9: $\varphi(u)$ *reaseguro excedente - Modelo B*

Modelo B - Reaseguro Stop Loss

Prioridad	Premio	Premio cedido	VaR stop loss	u stop loss	$\varphi(u)$
0,0	87.133,93	91.283,1641	0,0	4.149,235	-1,00000000
82.984,7	87.133,93	23.825,6916	82.984,7	19.676,457	0,10079369
124.477,0	87.133,93	9.982,7288	124.477,0	47.325,841	0,06849776
165.969,4	87.133,93	4.025,6737	165.969,4	82.861,134	0,04565789
207.461,7	87.133,93	1.716,5965	184.455,7	99.038,354	0,04031954
248.954,1	87.133,93	748,4204	184.455,7	98.070,177	0,04161506
290.446,4	87.133,93	348,3376	184.455,7	97.670,095	0,04215792
331.938,8	87.133,93	151,1465	184.455,7	97.472,904	0,04242712
Inf	87.133,93	0,0000	184.455,7	97.321,757	0,04263419

Cuadro 5.10: $\varphi(u)$ *reaseguro stop loss - Modelo B*

De acuerdo a las salidas presentadas, las máximas tasas de retorno del capital obtenidas son las siguientes:

- *Cuota Parte*: 4,26 % para un contrato cuota parte donde se retiene el 100 % del negocio.
- *Excedente*: 4,28 % para un contrato de excedentes donde se retiene U$S 50.000 por póliza.
- *Stop Loss*: 10,08 % para un contrato de stop loss donde la prioridad es la esperanza de la pérdida total= U$S 82.984,70.

En conclusión:

Si comparamos solo los reaseguros proporcionales según muestran los resultados conviene un reaseguro de excedentes.

Al comparar los tres tipos de reaseguros obsevamos que la mayor tasa de retorno se obtiene con un contrato de stop loss con una prioridad en el entorno de la esperanza de la pérdida.

PARTE II: Combinando distintos contratos de reaseguros

En esta sección combinaremos un contrato de stop loss con un contrato cuota parte. A continuación se presentan los resultados de la tasa de retorno del capital para los dos modelos presentados, para el caso particular de θ=0,05 y η=0,10.

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	-0,0426	-0,0426	-0,0426	-0,0426	-0,0426	-0,0426
20.000	-0,0426	-0,0287	-0,0250	-0,0239	-0,0234	-0,0231
40.000	-0,0426	-0,0260	-0,0148	-0,0098	-0,0073	-0,0060
60.000	-0,0426	-0,0256	-0,0106	-0,0009	0,0048	0,0082
80.000	-0,0426	-0,0256	-0,0093	0,0039	0,0130	0,0190
100.000	-0,0426	-0,0256	-0,0088	0,0063	0,0182	0,0269
120.000	-0,0426	-0,0256	-0,0086	0,0074	0,0213	0,0324
Inf	-0,0426	-0,0256	-0,0085	0,0085	0,0256	0,0426

Cuadro 5.11: $\varphi(u)$ *combinando cuota parte y stop loss - Modelo A*

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
20.000	-1,0000	-0,3017	-0,4641	-0,5700	-0,6379	-0,6854
40.000	-1,0000	-0,1090	-0,1003	-0,1061	-0,1124	-0,1187
60.000	-1,0000	-0,1092	-0,0347	-0,0046	0,0347	0,0819
80.000	-1,0000	-0,1093	-0,0214	0,0111	0,0513	0,1023
100.000	-1,0000	-0,1093	-0,0205	0,0119	0,0454	0,0879
120.000	-1,0000	-0,1093	-0,0202	0,0118	0,0373	0,0718
Inf	-1,0000	-0,1093	-0,0200	0,0138	0,0316	0,0426

Cuadro 5.12: $\varphi(u)$ *combinando cuota parte y stop loss - Modelo B*

En el modelo A para el capital u exigido tan grande conviene quedarse con todo el negocio retenido, obteniéndose una tasa de retorno del capital máxima de 4,46 %.
Al mezclar los dos contratos en el modelo B para los valores fijos de u, θ y η considerados, se obtiene la máxima tasa de retorno del 10,23 % con un contrato cuota parte del 100 % de retención y un stop loss de prioridad U$S 80.000.
Estos resultados coinciden con lo estudiado en forma individual.

Las tasas de retorno máximas se pueden observar en los gráficos a continuación:

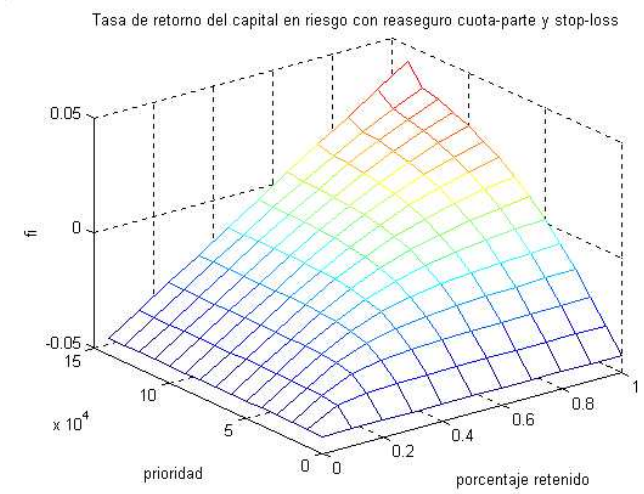

Figura 5.3: $\varphi(u)$ *combinando cuota parte y stop loss - Modelo A*

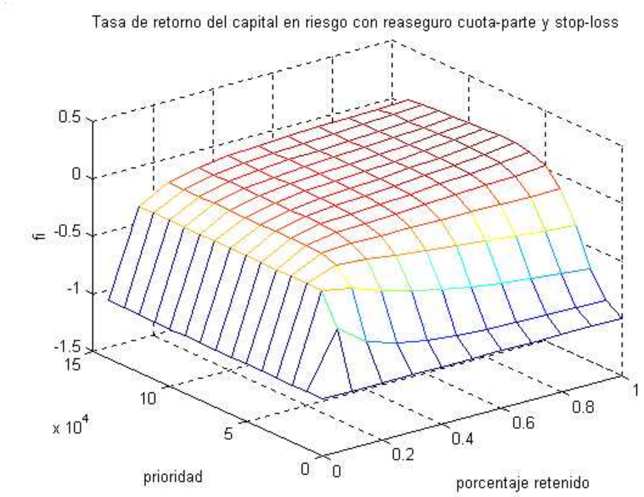

Figura 5.4: $\varphi(u)$ *combinando cuota parte y stop loss - Modelo B*

5.4. Optimización utilizando el margen de solvencia exigido por la Normativa

En esta sección se calculará la tasa de retorno del capital en riesgo utilizando el margen de solvencia exigido por la Superintendencia de Seguros y Reaseguros.

Llamaremos modelo real al modelo de optimización de φ(u) donde consideraremos que el capital necesario para operar en el negocio es el exigido en la normativa, en lugar de utilizar el u mínimo calculado a partir del valor en riesgo como ya fue discutido en secciones anteriores.

Como se vio en los modelos A y B presentados anteriormente el capital mínimo puede ser independiente del reaseguro o depender de él. El modelo real funciona como una combinación de ambos, dado que la normativa exige para el cálculo del margen de solvencia computar el reaseguro hasta un 50 % de cesión, dicho de otra manera, si la compañía retiene menos del 50 % debe constituir capital como si retuviera el 50 %.

Nuestro objetivo en la primera parte es determinar el capital mínimo exigido y compararlo con el u mínimo teórico definido en los modelos anteriores.

La normativa prevee que el capital mínimo exigido sea el máximo entre el capital básico (U$S 1.085.851 al 1/1/2007) y el margen de solvencia:

$$u = \text{Capital mínimo} = \text{máx (Capital básico, Margen de solvencia)}$$

Dado que en nuestro estudio consideramos una porción de la cartera de vida, el capital básico queda muy por encima del margen de solvencia, cuando un capital tan gran es reservado para una cartera de este tipo (pequeña y poco dispersa) conviene retener todo el negocio como ya hemos observado en secciones anteriores. Nuestro interés en esta sección no es ver como opera dicho capital arbitrario sino testear el cálculo del margen de solvencia el que si depende de los riesgos asumidos. Para ello eliminamos el capital básico y suponemos que el capital mínimo exigido es el margen de solvencia.

Margen de solvencia

Con respecto a los seguros de vida la normativa diferencia dos grupos a los efectos del cálculo del margen de solvencia:

1) Los seguros de vida que no generan reserva matemática
2) Los seguros de vida que generan reserva matemática[1]

Margen de solvencia para seguros que no generan reserva matemática

En esta primera etapa se calculará el margen de solvencia bajo el supuesto que ninguno de los seguros de esta cartera genera reserva matemática.
Para el cálculo del margen de solvencia se aplicará la normativa con las aproximaciones que se datallan a continuación:

$$\text{Margen de solvencia} = \text{máx (i, ii)}$$

Donde:
i) Monto calculado en función de Primas: i=a*b*c

a = primas anuales, se calcularán como: a = $(1 + \theta)$E(S)/(1-δ), donde δ=40 % corresponde a los gastos cargados en la prima pura
b = 0,18 hasta 10/6 del capital básico y 0,16 sobre el exceso si lo hubiera
c = porcentaje retenido con un mínimo de 50 %, se calculará como: $E(I)/E(S)$ aplicando el mínimo de 0,5

ii) Monto calculado en función de Siniestros: ii=a*b*c

a = siniestros promedio de los últimos 3 años, se calcularán como: $a = E(S)$
b = 0,26 hasta 7/6 del capital básico y 0,18 sobre al exceso si lo hubiera
c = porcentaje retenido con un mínimo de 50 %, se calculará como: $E(I)/E(S)$ aplicando el mínimo de 0,5

[1]La Reserva Matemática se define como el valor presente actuarial de las obligaciones futuras de la aseguradora menos el valor presente actuarial de las obligaciones futuras del asegurado.

Previamente al cálculo del margen de solvencia presentamos el cálculo de los porcentajes de retención calculados según punto c, para las distintas combinaciones de reaseguro cuota parte y stop loss:

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
20.000	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
40.000	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50	0,50
60.000	0,50	0,50	0,50	0,50	0,56	0,60
80.000	0,50	0,50	0,50	0,55	0,65	0,72
100.000	0,50	0,50	0,50	0,57	0,71	0,82
120.000	0,50	0,50	0,50	0,59	0,75	0,88
Inf	0,50	0,50	0,50	0,60	0,80	1,00

Cuadro 5.13: *Porcentaje de retención computable para el Margen de Solvencia*

En el cuadro el porcentaje resultante para cada combinación de reaseguro se calculó dividendo los siniestros retenidos sobre los siniestros totales, y como se puede observar se aplicó la cota mínima del 0,5; obligatoria en la normativa.

Con los porcentajes obtenidos y aplicando el método detallado anteriormente se obtienen para las distintas opciones de reaseguro los siguiente valores para el margen de solvencia:

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09
20.000	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09
40.000	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09
60.000	13.070,09	13.070,09	13.070,09	13.070,09	14.534,29	15.581,51
80.000	13.070,09	13.070,09	13.070,09	14.273,29	17.046,84	18.908,50
100.000	13.070,09	13.070,09	13.070,09	15.002,56	18.651,23	21.308,55
120.000	13.070,09	13.070,09	13.070,09	15.341,43	19.610,77	22.989,58
Inf	13.070,09	13.070,09	13.070,09	15.684,11	20.912,14	26.140,18

Cuadro 5.14: *Margen de solvencia para seguros sin reserva matemática (U$S)*

A continuación presentamos los u_{min} calculados aplicando valor en riesgo, para las distintas formas de reaseguro:

$$u_{min} = VaR_{\alpha}(I) - (1+\theta)E(I)$$

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	4.149,23	4.149,23	4.149,23	4.149,23	4.149,23	4.149,23
20.000	4.149,23	9.267,07	5.235,23	4.078,09	3.571,79	3.286,46
40.000	4.149,23	23.182,62	14.384,91	8.952,20	6.321,22	4.877,65
60.000	4.149,23	22.841,73	29.908,21	19.502,75	13.394,58	9.737,61
80.000	4.149,23	22.788,47	42.216,01	34.305,99	24.620,60	18.119,54
100.000	4.149,23	22.783,73	41.711,84	51.759,33	39.017,94	29.738,44
120.000	4.149,23	22.783,73	41.534,23	61.249,40	55.667,19	43.868,15
Inf	4.149,23	22.78,73	41.418,24	60.052,74	78.687,25	97.321,75

Cuadro 5.15: u_{min} *usando valor en riesgo (U$S)*

Al comparar los resultados obtenidos para el margen de solvencia y el u_{min} necesario vemos que la normativa es sufienciente para algunas retenciones bajas debido al tope de retención del 50 %, sin embargo para retenciones altas el margen de solvencia exigido por la normativa está muy por debajo del u_{min}.
Los modelos presentados para el cálculo de $\varphi(u)$, estan sujetos a que u sea mayor o igual que u_{min}, de modo de garantizarnos en cierta medida que la probabilidad de ruina sea menor al 5 %, en el caso de calcular la tasa de retorno utilizando el margen de solvencia antes presentado obtendríamos mejores resultados para $\varphi(u)$ pero no estaríamos tomando en cuenta la probabilidad de ruina.
Al levantar la restricción $u > u_{min}$ del modelo deberíamos incorporar alguna medida de la probabilidad de ruina.

A continuación presentamos los valores obtenidos para $\varphi(u)$ utilizando el u=margen de solvencia, con θ=0,05 y η=0,10:

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	-0,3175	-0,3175	-0,3175	-0,3175	-0,3175	-0,3175
20.000	-0,3175	-0,2139	-0,1859	-0,1779	-0,1743	-0,1723
40.000	-0,3175	-0,1933	-0,1104	-0,0726	-0,0543	-0,0443
60.000	-0,3175	-0,1909	-0,0793	-0,0069	0,0320	0,0512
80.000	-0,3175	-0,1905	-0,0690	0,0268	0,0741	0,0980
100.000	-0,3175	-0,1905	-0,0655	0,0409	0,0950	0,1227
120.000	-0,3175	-0,1905	-0,0643	0,0470	0,1059	0,1370
Inf	-0,3175	-0,1905	-0,0635	0,0529	0,1190	0,1587

Cuadro 5.16: $\varphi(u)$ *Modelo real para seguros sin reserva matemática*

Al observar el cuadro vemos que la mayor tasa de retorno es del 15,87 %, valor que se obtiene para una retención total del negocio, al analizar la tasa de retorno hay que ser cuidadoso dado que el margen de solvencia es de U$S 26.140,18 muy por debajo del u_{min} necesario de U$S 97.321,76.

A efectos de poder medir el riesgo asumido al constituir un capital igual al margen de solvencia, muy por debajo del u_{min}, calculamos la probabilidad de que el capital disponible (margen de solvencia + premios retenidos) sea suficiente para hacer frente a las pérdidas ocurridas. Entonces calculamos α tal que:

$$\text{Margen de solvencia} + \text{premios retenidos} = VaR_{\alpha}(I)$$

donde:

$$VaR_{\alpha}(I) = inf\,\{i \in R / P(I > i) \leq 1 - \alpha\}$$

	Porcentaje retenido					
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
20.000	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
40.000	1,00	0,84	0,66	1,00	1,00	1,00
60.000	1,00	0,84	0,72	0,61	1,00	1,00
80.000	1,00	0,84	0,74	0,68	0,63	1,00
100.000	1,00	0,84	0,75	0,71	0,68	0,63
120.000	1,00	0,84	0,75	0,72	0,71	0,67
Inf	1,00	0,84	0,75	0,74	0,75	0,75

Cuadro 5.17: *Niveles de probabilidad* α

Observamos que para los casos de reaseguro en los que el margen de solvencia es mayor que u mínimo la probabilidad de que las pérdidas se comporten por debajo del capital disponible es 1, sin embargo por ejemplo para el caso de la retención total donde la tasa de retorno es del 19,23 % tenemos que la probabilidad de que las pérdidas se comporten por debajo del capital disponible es 0,72; lo que significaría que hay una probabilidad de ruina del 0,28.

Si utilizamos el método de la tasa de retorno del capital en riesgo para analizar retenciones de reaseguro utilizando un capital menor que u mínimo, debemos evaluar la probabilidad de ruina al tomar las decisiones.

Margen de solvencia para seguros que generan reserva matemática

Para los seguros que generan reserva matemática la normativa prevee calcular el margen de solvencia sumando los siguientes conceptos:

a) El 4 % del total de las reservas matemáticas, multiplicado por la relación entre las reservas matemáticas de propia conservación y las totales, topeando dicha relación como mínimo en un 85 %

b) El 3 por mil de los capitales en riesgo, multiplicado por la relación entre capitales en riesgo de propia conservación y los totales, topeando dicha relación como mínimo en un 50 %

Bajo el supuesto de que todas las pólizas generan reserva matemática calculamos el margen de solvencia:

Reservas matemáticas al 1º de Enero de 2007: U$S 459.946,00
Sumas aseguradas totales al 1º de Enero de 2007: U$S 63.387.687,00

a = 0,04*459.946,00 = U$S 18.397,84, bajo el supuesto que las reservas matemáticas son en su totalidad de propia conservación.

b = 0,003*63.387.687,00*M, donde la matriz M representa la relación entre capitales en riesgo de propia conservación y los totales para las distintas opciones de reaseguro.

Si tomamos por ejemplo el negocio sin reaseguro b toma el valor U$S 190.163,06 lo que sumado a a=U$S 18.397,84 da un valor para el margen de solvencia de U$S 208.560,90.

Presentamos a continuación tabla con los valores completos del margen de solvencia para los distintos contratos de reaseguro:

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4
20.000	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4
40.000	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4
60.000	113.479,4	113.479,4	113.479,4	113.479,4	124.131,0	131.749,3
80.000	113.479,4	113.479,4	113.479,4	122.232,4	142.409,2	155.952,3
100.000	113.479,4	113.479,4	113.479,4	127.537,6	154.080,7	173.412,0
120.000	113.479,4	113.479,4	113.479,4	130.002,8	161.061,1	185.641,1
Inf	113.479,4	113.479,4	113.479,4	132.495,7	170.528,3	208.560,9

Cuadro 5.18: *Margen de solvencia para seguros que generan reserva matemática*

Se observa que para todos los ejemplos de reaseguro presentados en el cuadro, el margen de solvencia es mayor que el u mínimo calculado a partir del valor en riesgo, podemos concluir que para esta cartera en particular, la normativa asegura un margen de solvencia que puede hacer frente a las pérdidas con una probabilidad mayor al 95 %.

Es importante destacar que el margen de solvencia resultó suficente en esta cartera en particular, pero no podemos generalizar este resultado, dado que la porción del margen de solvencia que se obtiene haciendo el 3 por mil sobre las sumas aseguradas, es un valor suficiente para una cartera con edad media de 43 años (q_x=1,19 por mil), sin embargo si estuviéramos frente a otro tipo de cartera deberíamos analizarlo de manera individual.

Como ya se ha dicho en secciones anteriores la tasa de retorno disminuye a medida que reservamos capital por encima de u mínimo, lo que se observa en los resultados de φ(u) calculados con el margen de solvencia para seguros con reserva matemática:

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	-0,0366	-0,0366	-0,0366	-0,0366	-0,0366	-0,0366
20.000	-0,0366	-0,0246	-0,0214	-0,0205	-0,0201	-0,0199
40.000	-0,0366	-0,0223	-0,0127	-0,0084	-0,0063	-0,0051
60.000	-0,0366	-0,0220	-0,0091	-0,0008	0,0037	0,0061
80.000	-0,0366	-0,0219	-0,0080	0,0031	0,0089	0,0119
100.000	-0,0366	-0,0219	-0,0075	0,0048	0,0115	0,0151
120.000	-0,0366	-0,0219	-0,0074	0,0055	0,0129	0,0170
Inf	-0,0366	-0,0219	-0,0073	0,0063	0,0146	0,0199

Cuadro 5.19: $\varphi(u)$ *con margen de solvencia para seguros con reserva matemática*

La mayor tasa de retorno obtenida se corresponde con la retención total del negocio y es del 1,99 %, retorno muy por debajo del obtenido en la maximización utilizando u mínimo en el modelo B, donde obtuvimos para la tasa de retorno del capital en riesgo un 10,08 %.

Margen de solvencia real para la cartera en estudio

Si observamos la composición de la cartera utilizada en el estudio, tenemos un 76 % de pólizas que no generan reserva matemática por el riesgo de muerte, por esta razón podrían ser computadas como pólizas del grupo 1 (pólizas que no generan reserva matemática), sin embargo éstas contienen una cuenta de retiro por la cual generan reserva matemática y por esta razón la compañía debe calcular el margen de solvencia como si fueran del grupo 2 (pólizas que generan reserva matemática); el resto de las pólizas (24 %) son seguros de prima niveladas clásicos que generan reserva matemática y pertenecen claramente al grupo 2.

En conclusión la compañía calculó al 1º de enero del 2007 el margen de solvencia utilizando el método para seguros que generan reserva matemática, y los resultados que se obtienen para el margen de solvencia y la tasa de retorno son los mismos presentados en el punto anterior.

Capítulo 6

Análisis de sensibilidad

En este capítulo se investigará resultados con otras distribuciones y se sensibilizará algunos de los parámetros involucrados.

6.1. Otras distribuciones

Dado que la variable aleatoria S estudiada tiene poca dispersión y los valores absolutos que toma no son altos para una compañía de seguros con un pool de productos, se decide investigar resultados con otras variables aleatorias más dispersas para el modelo que combina reaseguro cuota parte y stop loss y tiene como única variable de control el reaseguro (modelo B), con θ=0,05 y η=0,10.

6.1.1. Distribución Exponencial

Como primer análisis se considerará que nuestra variable aleatoria S se distribuye Exponencial con media igual a 82.984,7, valor que corresponde a la esperanza de la variable aleatoria que se ha estudiado.

$$S_{Exp} \sim Exp(1/\lambda) \text{con} \lambda = 82984,7$$

Dicha variable S_{Exp} es más dispersa que la variable S estudiada anteriormente, con varianza = 6.886.460.434 y desvío estándar = 82.984,7.

Los resultados obtenidos para $\varphi(u)$ con S_{Exp} son:

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
20.000	-1,0000	-0,2668	-0,3545	-0,4258	-0,4826	-0,5288
40.000	-1,0000	-0,0972	-0,1003	-0,1035	-0,1068	-0,1101
60.000	-1,0000	-0,0707	-0,0417	-0,0266	-0,0105	0,0064
80.000	-1,0000	-0,0705	-0,0226	-0,0045	0,0149	0,0341
100.000	-1,0000	-0,0704	-0,0146	0,0028	0,0216	0,0416
120.000	-1,0000	-0,0704	-0,0136	0,0052	0,0225	0,0408
Inf	-1,0000	-0,0704	-0,0125	0,0085	0,0193	0,0259

Cuadro 6.1: *$\varphi(u)$ con reaseguro cuota parte y stop loss para S_{Exp}*

La tasa de retorno del capital máxima es 4,16 %, que se obtiene con un contrato cuota parte del 100 % de retención y un stop loss de prioridad U$S 100.000, este reaseguro tiene una retención mayor que la que obtuvimos en la optimización de S dada la mayor dispersión y el costo de reaseguro.

A los efectos de estudiar estos resultados se presenta un análisis comparativo entre S y S_{Exp}, variables con igual media y distinta varianza. Se toma a ambas variables aleatorias con la misma esperanza de modo de centrar el análisis en los cambios que se producen en los resultados de $\varphi(u)$ al aumentar la varianza.
Según los resultados numéricos de $\varphi(u)$ anteriormente presentados, el aumento en la varianza dejando las demás variables constantes, implica una disminución en la tasa de retorno del capital en este caso pasando la tasa máxima de 10,23 % a 4,16 %.
A efectos de verificar si son razonables estos resultados numéricos presentamos el análisis a continuación:
Para $\varphi(u)$ en el modelo B donde u depende de la retención:

$$\varphi(u) = \frac{u_{retenido} + P_{retenido} - E(I)}{u_{retenido}} - 1 = \frac{P_{retenido} - E(I)}{u_{retenido}}$$

donde:
$u_{retenido}$: capital mínimo retenido por la compañía luego de reasegurar
$P_{retenido}$: premio retenido por la compañía luego de reasegurar
I: riesgo retenido por la compañía luego de reasegurar

Donde $u_{retenido}$ se define como:

$$u_{retenido} = VaR_{retenido} \text{ - } P_{retenido}$$

con valor en riesgo definido como: $VaR_{\alpha}(i) = \text{ínf}\,\{i \in R/P(I > i) \leqslant 1 - \alpha\}$

Entonces,

$$\varphi(u) = \frac{P_{retenido} - E(I)}{VaR_{retenido} - P_{retenido}}$$

Con el fin de comparar los resultados obtenidos para $\varphi(u)$ con S y S_{Exp} se analizará el mismo caso para ambas, una retención del 100 % en el cuota parte y una prioridad de U$S 80.000 en el stop loss, a continuación se presentan los resultados:

	Media	**Desvío estándar**
S	82.984,7	56.456,4
S_{Exp}	82.984,7	82.984,7

	Prioridad	**E(I)**	**E(J)**	**VaR retenido**	**Premio retenido**	**Premio ret - E(I) (numerador)**	**u retenido (denominador)**	$\varphi(u)$
S	80.000	60.026,99	22.957,71	80.000	61.880,45	1.853,46	18.119,55	10,23 %
S_{Exp}	80.000	51.041,08	31.942,71	80.000	51.996,95	954,96	28.003,05	3,41 %

Cuadro 6.2: *Comparación entre S y S_{Exp}*

Entonces concluimos que la tasa de retorno del capital en riesgo disminuye con variables más dispersas, claramente $\varphi(u)_S > \varphi(u)_{S_{\text{Exp}}}$, lo que se explica por el mayor reparto de premio hacia el reasegurador con un costo más caro por la diferencia entre η y θ.

6.1.2. Distribución considerando una cartera mayor

Como segundo análisis se considerará que nuestra variable aleatoria S proviene de una cartera más grande. De modo de aumentar la cartera de una manera que represente la realidad de la emisión, se consideraron todas las pólizas emitidas de los planes de seguro en estudio a lo largo del período 1998-2007, más allá que muchas de estas pólizas no estén vigentes.

De esta manera se obtiene una cartera conformada por 9.307 pólizas, a partir de la cual se simula la distribución de la variable aleatoria pérdidas, la que notaremos como S_1, con $\mathrm{E}(S_1) = 346.793{,}9$ y desvío estándar = 142.168,5. Esta variable aleatoria es menos dispersa que la S original como se puede observar en el índice de fluctuación calculado a continuación:

$$Indice\ de\ fluctuación = \frac{\sigma(S)}{E(S)}$$

Indice de fluctuación de S = 56.456,40/82.984,70 = 0,68

Indice de fluctuación de S_1 = 142.168,5/346.793,9 = 0,41

A continuación se presenta los resultados de $\varphi(u)$ para S_1:

			Porcentaje	**retenido**		
Prioridad	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
0	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000	-1,0000
350.000	-1,0000	-0,1873	-0,0376	0,0219	0,1039	0,3070
400.000	-1,0000	-0,1873	-0,0373	0,0234	0,0749	0,1989
450.000	-1,0000	-0,1873	-0,0371	0,0242	0,0572	0,1406
500.000	-1,0000	-0,1873	-0,0370	0,0247	0,0565	0,1058
550.000	-1,0000	-0,1873	-0,0370	0,0252	0,0576	0,0835
600.000	-1,0000	-0,1873	-0,0370	0,0255	0,0584	0,0770
800.000	-1,0000	-0,1873	-0,0370	0,0262	0,0601	0,0805
Inf	-1,0000	-0,1873	-0,0370	0,0263	0,0611	0,0832

Cuadro 6.3: $\varphi(u)$ *con reaseguro cuota parte y stop loss para una cartera más grande*

Al considerar una cartera con mayor número de pólizas que es menos dispersa se obtiene una mayor tasa de retorno del capital del 30,70 %, el reaseguro óptimo para dicha cartera también se alcanza con un contrato cuota parte del 100 % de retención y un stop loss de prioridad U$S 350.000 valor que se encuentra en el entorno de la esperanza de S_1. En este caso para S_1 obtenemos mejores tasas de retorno del capital que para S, lo que se explica justamente por la menor dispersión de S_1 y además por el mayor ingreso de primas dado la cartera más grande.

Como conclusión general de esta sección podemos decir que la tasa de retorno del capital en riesgo mejora con carteras menos dispersas y viceversa, lo cual es lógico ya que la dispersión implica un mayor riesgo.

6.2. Sensibilización de los parámetros α, θ y η

En esta sección haremos un análisis de sensibilidad de los parámetros de interés involucrados en el estudio α, θ y η. Por un lado sensibilizaremos α y por otro lado analizaremos los cambios en los resultados cambiando a la vez θ y η.

1. ***Variación de*** α

   Hemos definido α como el nivel de probabilidad que permite calcular el valor en riesgo de esta manera:

$$VaR_\alpha(s) = inf\,\{s \in R/P(S > s) \leq 1 - \alpha\}$$

   Un aumento de α implica mayor seguridad y en consecuencia un valor en riesgo mayor. Hasta ahora todos los estudios realizados contemplan α=0,95, dado el significado de dicho parámetro proponemos sensibilizar usando α=0,99 y α=0,90, dado que valores más bajos de 0,90 implican riesgo alto para la compañía ya que el capital reservado para hacer frente a los obligaciones tendría una probabilidad mayor al 10 % de ser insuficiente.

A continuación presentamos como cambian los valores en riesgo del negocio total para los distintos valores de α considerados:

VaR		
90 %	**95 %**	**99 %**
155.493,1	184.455,7	259.981,1

Si se utiliza el modelo A, el cambio en el valor de α influye en los resultados de $\varphi(u)$, ya que el capital requerido para operar es el del negocio total y este depende de los cambios en el valor en riesgo, los resultados de la tasa de retorno del capital varían de la siguinte manera:

$$\begin{aligned} 6{,}07\,\% &\text{ para } \alpha = 0{,}90 \\ 4{,}26\,\% &\text{ para } \alpha = 0{,}95 \\ 2{,}40\,\% &\text{ para } \alpha = 0{,}99 \end{aligned}$$

Si se utiliza el modelo B, el cambio en el valor de α no influye en los resultados de $\varphi(u)$, ya que la máxima tasa de retorno de 10,23 % se alcanza en un seguro de stop loss con prioridad U$S 80.000 y los cambios en el valor en riesgo del negocio total no influyen en el valor en riesgo retenido bajo el contrato óptimo.

2. ***Variación de*** θ ***y*** η

Para sensibilizar los parámetros θ y η, cargas de seguridad que aplican sobre el premio puro el asegurador y reasegurador respectivamente, se considerará el modelo B aplicado a un contrato de stop loss.

Analizando los resultados para distintos niveles de prioridad, se encuentra que para cualquier valor de θ y η, la tasa de retorno del capital máxima se alcanza para una prioridad en el entorno de la esperanza de las pérdidas.
Valores de prioridad inferiores al valor esperado de las pérdidas, si bien pueden alcanzar niveles de retorno del capital mayores, no serán considerados dado que no es usual en los contratos de reaseguros.

A continuación se presentan los valores obtenidos de la tasa de retorno del capital para una prioridad = E(S) = 82.984,7, haciendo variar θ y η:

θ-η	Premio	Premio cedido	VaR stop loss	u stop loss	Ganancia	$\varphi(u)$
0,05-0,10	87.133,93	23.825,6916	82.984,7	19.676,457	1.983,263	0,10079369
0,10-0,20	91.283,16	25.991,6635	82.984,7	17.693,19	3.966,5267	0,22418369
0,10-0,15	91.283,16	24.908,6776	82.984,7	16.610,208	5.049,512	0,30400050
0,15-0,16	95.432,4	25.125,2748	82.984,7	12.677,571	8.982,149	0,7085071

Cuadro 6.4: *Sensibilidad de $\varphi(u)$ al variar θ y η*

En el cuadro anterior se observa que la tasa de retorno del capital es muy sensible a las cargas aplicadas θ y η:

1) Un incremento en θ del 5 %, manteniendo constante la diferencia entre θ y η triplica la tasa de retorno del capital, pasando de 10,07 % al 30,40 %.

2) Un incremento en θ del 5 %, a pesar de estar acompañado de un aumento en la diferencia entre θ y η del 10 %, produce un aumento en $\varphi(u)$, pasando del 10,07 % al 22,41 %.

3) La mayor tasa de retorno del capital se obtiene, con la máxima carga θ, y la mínima diferencia entre θ y η, en nuestros ejemplos cuando θ=0,15 y η=0,16 se obtiene una tasa de retorno del capital del 70,85 %.

Parte III

Conclusiones

Capítulo 7

Conclusiones

Variables N y S

1. Se obtuvo la tabla de mortalidad para modelizar las muertes de la población en estudio a partir de la tabla alemana de asegurados del año 1994, se aplicó un coeficiente de mejora llevando los valores de la tabla al 78,1 %, se presenta a continuación los valores obtenidos para las tasas de mortalidad para las edades relevantes. (Ver **Anexo D** tabla completa).

HOMBRES				MUJERES			
	q_x		q_x		q_x		q_x
30	0,00069821	**40**	0,00093564	**30**	0,00015776	**40**	0,00048578
31	0,00072945	**41**	0,00099968	**31**	0,00023196	**41**	0,00055685
32	0,00077631	**42**	0,00108871	**32**	0,00027882	**42**	0,00061699
33	0,00083020	**43**	0,00118790	**33**	0,00030147	**43**	0,00066932
34	0,00086613	**44**	0,00130896	**34**	0,00031552	**44**	0,00072555
35	0,00086847	**45**	0,00145578	**35**	0,00033193	**45**	0,00079506
36	0,00087082	**46**	0,00159246	**36**	0,00035067	**46**	0,00087238
37	0,00087316	**47**	0,00171898	**37**	0,00037098	**47**	0,00091924
38	0,00087550	**48**	0,00184004	**38**	0,00039597	**48**	0,00093876
39	0,00089425	**49**	0,00196500	**39**	0,00043189	**49**	0,00094657

2. La distribución empírica de la variable aleatoria N = “número de muertes anuales”, se obtuvo mediante simulación Montecarlo utilizando la tabla de mortalidad hallada, detallamos a continuación sus principales características:

Mínimo	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Máximo	Var(N)	SD(N)
0,00	2,00	4,00	3,85	5,00	13,00	3,87	1,97

3. La distribución de la variable aleatoria S = "monto de indemnizaciones anuales", se obtuvo mediante simulación Montecarlo utilizando la tabla de mortalidad hallada, detallamos a continuación sus principales características:

Mínimo	1er Cuartil	Mediana	Media	3er Cuartil	Máximo	Var(S)	SD(S)
0	41.200	73.430	82.980	113.000	472.900	3.187.325.032	56.456,4

Optimización de reaseguro utilizando probabilidad de ruina

En este primer método planteado se consideró para optimizar un reaseguro cuota parte la aversión al riesgo a través de la tolerancia a la probabilidad de ruina, la debilidad financiera y las potenciales fluctuaciones llegándose a las siguientes conclusiones:

Si la aseguradora tiene una aversión al riesgo razonable por ejemplo con tolerancia a la probabilidad de ruina entre el 1 y el 5 %, el reaseguro óptimo se da con una retención del 100 % del negocio.

Sin embargo si la compañía es muy aversa al riesgo por ejemplo si tiene una tolerancia a la probabilidad de ruina del 0,1 % debe retener el 75 % del negocio.

Optimización de reaseguro para tasa de retorno del capital en riesgo

1. *Sin incorporar reaseguro*

   La tasa máxima de retorno del capital en riesgo en el negocio sin reaseguro, para un capital fijo de reserva u se alcanza para el máximo valor de θ que se pueda aplicar en el premio.

   La tasa máxima de retorno para un θ fijo, variando u el capital necesario, se obtiene para el u mínimo calculado como $u_{min} = VaR_{\alpha}(s) - (1+\theta)E(S)$, dicho de otra manera, para valores de u mayores a u mínimo disminuye la tasa de retorno del capital.

2. *Incorporando contratos de reaseguro*

   Al comparar los contratos de reaseguros proporcionales, excedente y cuota parte, se obtuvo el óptimo de reaseguro para un contrato de excedente con una retención de la compañía de U$S 50.000. Para este contrato con los supuestos realizados de α=0,95, θ=0,05, η=0,10 y u= u mínimo retenido (modelo B) obtenemos la tasa de retorno máxima $\varphi(u)$=4,28 %.

   Al incluir en la comparación un contrato de reaseguro no proporcional (stop loss), y comparar los tres contratos observamos que la optimización se alcanza con un reaseguro stop loss con prioridad igual a la pérdida esperada (prioridad= E(S)=82.984,7), en este caso bajo los mismos supuestos para α, θ, η y u, obtenemos $\varphi(u)$=10,08 %.

   Al realizar el estudio combinando varios contratos de reaseguros también se llega a la conclusión que el reaseguro óptimo es el stop loss con prioridad igual a la pérdida esperada.

3. *Resultados usando margen de solvencia de la Normativa*

   Bajo el supuesto de que los seguros no generan reserva matemática, el margen de solvencia previsto en la normativa se encuentra para valores altos de retención muy por debajo de u mínimo calculado a partir del valor en riesgo. En consecuencia no se debe calcular la tasa de retorno dado que el modelo tiene la restricción de utilizar un capital mayor o igual a u mínimo. Si levantamos la restricción y aplicamos el modelo obtenemos tasas más altas de retorno, las que deben ser consideradas conjuntamente con la probabilidad de ruina, dado que hemos perdido la garantía de que el capital alcance para hacer frente a las pérdidas con un 95 % de probabilidad.
   Bajo el supuesto de que los seguros generan reserva matemática, el margen de solvencia previsto en la normativa se encuentra por encima del u mínimo calculado a partir del valor en riesgo. En consecuencia al reservar capital por encima del mínimo necesario encontramos que decrece la tasa de retorno, ubicándose el óptimo para el negocio de retención total en 1,99 %.

4. Analisis de sensibilidad

La mayor influencia en los resultados de $\varphi(u)$ se observa al variar θ y η. La tasa de retorno máxima se obtiene para el mayor θ y la mínima diferencia entre θ y η. Por ejemplo para un valor de θ=15 % y una diferencia del 1 % entre θ y η, bajo el reaseguro de stop loss con prioridad igual a la pérdida esperada se obtiene una tasa de retorno del capital en riesgo del 70,85 %.

Se analizaron los resultados cambiando la distribución de la variable aleatoria que representa las pérdidas, para ello se consideró una distribución Exponencial con igual esperanza y mayor varianza que la distribución de S hallada, dejando todos los demás parámetros constantes, se concluyó que al aumentar la dispersión $\varphi(u)$ disminuye. Si comparamos un contrato de stop loss con prioridad=U$S 80.000 encontramos que la tasa de retorno para S es 10,23 % y para $S_{Exponencial}$ disminuye a 3,41 %.

Por otro lado se analizaron los resultados aumentando el tamaño de la cartera, se consideró la cartera real compuesta por todas las pólizas emitidas (incluyendo las anuladas), la cartera obtenida de 9.307 pólizas resultó ser menos dispersa que la vigente al 1° de enero del 2007, el reaseguro óptimo corresponde al stop loss con prioridad en el entorno del valor esperado de la variable aletaroria (U$S 350.000), arrojando una tasa de retorno del capital en riesgo de 30,70 %.

Bibliografía

[1] A.S.S.A.L - Grupos de Trabajo pertenecientes al Comité Ejecutivo. “Criterios Generales de Solvencia. Margen de Solvencia”. A.S.S.A.L.: Asociación de Superintendentes de Seguros de América Latina, 1999. 27 p.

[2] Bowers, N.; Gerber, H.; Hickman, J.; Jones, D.; Nesbitt, C. Actuarial Mathematics. United States of America: The Society of Actuaries, 1986. 624 p.

[3] Cabaña, Enrique M. “Estadística No Paramétrica. Notas para el curso de la Licenciatura en Estadística”. Facultad de Ciencias Económicas y Administración, Montevideo, 2003. 48 p.

[4] Cátedra de Estadística I. Probabilidad. Fundamentos de teoría. Aplicación al Análisis del Riesgo en fenómenos financieros económicos y actuariales. Montevideo: CECEA, 1992. 560 p.

[5] Friedlos, Jürg; Schmitter, Hans; Straub, Erwin. “Setting retentions”. Swiss Reinsurance Company, 1997. 19 p.

[6] Gil, José Antonio; Heras, Antonio; Vilar, José Luis. Matemática de los seguros de vida. Madrid: Editorial MAPFRE, 1999. 307 P.

[7] Hájek, Jaroslav. “Testing randomness against two samples differing in location”. A Course in Nonparametric Statistics. San Francisco: Holden-Day, 1969. p.40-81.

[8] Kaluszka, Marek. “An extension of Arrow’s result on optimality of a stop loss contract”. Insurance: Mathematics and Economics. 2004, no. 35, p.527-536.

[9] Kaluszka, Marek. “Optimal reinsurance under convex principles of premium calculation”. Insurance: Mathematics and Economics. 2005, no. 36, p.375-398.

[10] Krvavych, Yuriy; Sherris, Michael. “Enhancing insurer value through reinsurance optimization”. Insurance: Mathematics and Economics. 2006, no. 38, p.495-517.

[11] Randles, Ronald H.; Wolfe, Douglas A. “Distribution-free statistics”. Introduction to the Theory of Nonparametric Statistics. New York: John Wiley & Sons, 1979. p.30-60.

[12] Rivero, José A. Benito. El reaseguro. Madrid: Editorial MAPFRE, 2001. 342 p.

[13] Rossani, Argentino. “Estudios de mortalidad”. Trabajo presentado a la II Jornada Actuarial de Estudios Biométricos (Buenos Aires, 2 de junio de 2008). Buenos Aires: Münchener Rück, 2008. 20 p.

[14] Straub, Erwin. Non-Life Insurance Mathematics. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1997. 136 p.

Parte IV

Anexos

Apéndice A

Normativa Superintendencia de Seguros y Reaseguros - B.C.U.

LIBRO I - Requisitos de funcionamiento de las empresas de Seguros y Reaseguros

TÍTULO I - GRUPOS Y RAMAS DE SEGUROS

Artículo 1 (Grupos y Ramas de Seguros) La actividad aseguradora que desarrollen las entidades públicas o privadas, comprendidas en las disposiciones de la Ley No. 16.426 de 14 de octubre de 1993 se dividirá en dos grupos:
I) Seguros Generales: Se aseguran los riesgos de pérdida o daño en las cosas o el patrimonio. Se distinguirán las siguientes Ramas:
- Incendio
- Vehículos Automotores y remolcados
- Robo y riesgos similares
- Responsabilidad Civil
- Caución
- Transporte
- Otros

La Superintendencia de Seguros y Reaseguros podrá establecer asimilaciones de ramas no especificadas, de acuerdo a la naturaleza de las coberturas.
II) Seguros de Vida: Se aseguran los riesgos de las personas, garantizando un capital, una póliza saldada o una renta, para el asegurado o sus beneficiarios, dentro o al término de un plazo.
Se distinguirán los Seguros de Vida No Previsionales y los Seguros de Vida Previsionales. Circular No. 1 18/8/94

Artículo 2 (Asimilación de ramas) Asimilación de ramas no especificadas:
INCENDIO
Daños materiales sobre inmuebles causados por:
Huracanes, tornados, tempestades, granizo y otros fenómenos de la naturaleza.
Precipitación de aviones
Embestida de vehículos
Tumultos, alborotos populares, huelgas
Daños materiales maliciosos
Explosión
Desperfectos eléctricos o electrónicos
Inundaciones
Humo
Terremoto
Rotura de cañerías o desbordamientos
Otros daños derivados del incendio o sus asimilados:
Pérdida de beneficios
Gastos por alquileres y/o arrendamientos
Cese de frío
Remoción de escombros
Desmantelamiento de maquinaria o limpieza de mercadería
Accidentes personales del asegurado
Responsabilidad civil
VEHICULOS AUTOMOTORES y REMOLCADOS
Responsabilidad civil
Hurto
Incendio
Accidentes personales de conductor y ocupantes
TRANSPORTE
Casco marítimo o aéreo
OTROS
Los seguros no comprendidos en la clasificación anterior serán incluidos en esta rama ("Otros") a los efectos de determinar el Capital Mínimo.
Circular No.2 15/9/94

Artículo 2.1 (Convenios de representación en el marco de Acuerdos Internacionales) Para suscribir acuerdos o convenios mutuos de representación en el marco de Acuerdos Internacionales que suscriba la República, a efectos de gestionar la liquidación y pago de siniestros sin asunción de riesgo de seguros, las entidades aseguradoras deben estar autorizadas a operar en cualquier rama del Grupo I "Seguros Generales". Cuando las partes intervinientes establezcan la solidaridad en las obligaciones derivadas de los contratos de seguro alcanzados por el convenio, las entidades aseguradoras deberán estar autorizadas a operar en la rama de seguros que corresponda.
Circular No.61 8/3/2002

TÍTULO III - CAPITAL MINIMO

Artículo 9 (Capital Mínimo. Grupo I) El Capital Mínimo, para poder funcionar en la actividad aseguradora del Grupo I, se fija en el mayor de los dos parámetros que se determinan a continuación:
A) CAPITAL BASICO
El Capital Básico será de $ 11:724.153 (Pesos Uruguayos once millones setecientos veinticuatro mil ciento cincuenta y tres) al 31 de diciembre de 2002. Dicha cifra se actualizará trimestralmente al 31 de marzo, al 30 de junio, al 30 de setiembre y al 31 de diciembre de cada año, en función de la variación del Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística, registrado en el trimestre calendario anterior al que finaliza en la respectiva fecha de actualización.
El Capital Básico indicado se requerirá cualquiera sea la rama en que opere la entidad.
Cuando se propusiera actuar en más de una rama, se exigirá un capital adicional de 1/6 (un sexto) para cada una de las 6 (seis) ramas restantes.
B) MARGEN DE SOLVENCIA
El Margen de Solvencia, será el mayor de los siguientes montos:
i) Monto en función de las primas
a) Se tomarán las primas por seguros directos, reaseguros y retrocesiones activos, emitidas en los 12 (doce) meses anteriores al cierre del período considerado (netas de anulaciones). El importe de cada mes se actualizará al cierre del período en función de la variación del Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística.
Los importes correspondientes a períodos anteriores al 1º de enero de 2003 deberán ajustarse hasta esa fecha utilizando el Índice de Precios al Productor de Productos

Nacionales y a partir de la misma aplicando el Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística.
b) Al monto determinado en a) del presente literal, hasta el equivalente a 10 (diez) veces el Capital Básico para una rama, se aplicará el 18 % (dieciocho por ciento) y al exceso, si lo hubiere, el 16 % (dieciséis por ciento), sumándose ambos resultados.
c) El monto obtenido en b) se multiplicará por el porcentaje resultante de comparar los siniestros y gastos de liquidación pagados netos de recuperos y/o salvatajes y reaseguros pasivos, de los 36 (treinta y seis) meses anteriores al cierre del respectivo período, con los mismos conceptos excepto la deducción por reaseguros pasivos. A estos efectos se considerarán los siniestros y gastos de liquidación por seguros directos, reaseguros y retrocesiones activos. El importe de cada mes se actualizará al cierre del período, de acuerdo con la evolución del Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística. Este porcentaje no podrá ser inferior al 50 % (cincuenta por ciento).
Los importes correspondientes a períodos anteriores al 1º de enero de 2003 deberán ajustarse hasta esa fecha utilizando el Índice de Precios al Productor de Productos Nacionales y a partir de la misma aplicando el Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística.
ii) Monto en función de los siniestros
a) Se sumarán los siniestros pagados (sin deducir los reaseguros pasivos) por seguros directos, reaseguros y retrocesiones activos, durante los 36 (treinta y seis) meses anteriores al cierre del período correspondiente. El importe de cada mes deberá actualizarse al cierre del período, en función de la variación del Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística.
Al importe obtenido se le adicionará el monto de los siniestros pendientes de liquidación por seguros directos, reaseguros y retrocesiones activos (sin deducir los reaseguros pasivos) constituido al final del período de 36 (treinta y seis) meses considerado y se le restará el monto de dicho concepto constituido al comienzo del período en cuestión actualizado al cierre del período en función de la variación del Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística.
La cifra resultante se dividirá entre 3 (tres).
Los importes correspondientes a períodos anteriores al 1º de enero de 2003 deberán ajustarse hasta esa fecha utilizando el Índice de Precios al Productor de Productos Nacionales y a partir de la misma aplicando el Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística.
b) Al monto determinado en a) del presente numeral, hasta el equivalente a 7 (siete)

veces el Capital Básico para una rama se aplicará un porcentaje de 26 % (veintiséis por ciento) y al exceso, si lo hubiere, 23 % (veintitrés por ciento), sumándose ambos resultados.
c) El monto obtenido se multiplicará por el porcentaje indicado en el punto B) i) c) precedente.
Circular No. 70 18/2/2003
Circular No. 1 18/8/94

Artículo 10 (Capital Mínimo. Grupo II) El Capital Mínimo, para poder funcionar en la actividad aseguradora del Grupo II, se fija en el mayor de los dos parámetros que se determinan a continuación:
A) Capital Básico: una cantidad equivalente al Capital Básico para una rama, determinado en el artículo anterior.
Las entidades aseguradoras que deseen suscribir contratos de seguro colectivo de invalidez y fallecimiento y de seguro de retiro para el pago de las prestaciones del régimen de ahorro individual obligatorio (arts. 56 y 57 Ley 16.713) deberán acreditar un Capital Básico adicional de \$ 7:501.836 (Pesos Uruguayos siete millones quinientos un mil ochocientos treinta y seis). Dicha cifra está expresada en valores correspondientes al 31 de diciembre de 2002 y se actualizará trimestralmente al 31 de marzo, 30 de junio, 30 de setiembre y 31 de diciembre de cada año, en función de la variación del Índice de Precios al Consumo elaborado por el Instituto Nacional de Estadística registrado en el trimestre calendario anterior al que finaliza la respectiva fecha de actualización.
B) Margen de Solvencia: la suma de los siguientes resultados:
1) Para los seguros de vida que no generan reservas matemáticas, el importe que resulte de aplicar las reglas establecidas en el punto B) del artículo 9° para los Seguros del Grupo I. A los efectos de la aplicación de lo dispuesto en el literal B) i) c) del referido artículo 9° de la Recopilación de Normas de Seguros y Reaseguros, en el caso en que el capital asegurado sea la obligación de pago de una renta, se deberá computar como siniestro pagado, por única vez y en el mes de denuncia, el valor actual actuarial de las rentas a pagar. En esta situación, los siniestros a cargo del reasegurador se computarán por la fracción del valor actual actuarial a cargo de éste, de acuerdo con el contrato de reaseguro respectivo. Las primas, siniestros y reservas (Literales a) a e) del artículo 20°) correspondientes al Seguro Colectivo de Invalidez y Fallecimiento Previsional se computarán de igual forma que los referidos a los seguros de vida que no generen reserva matemática.

2) Para los seguros de vida que generan reservas matemáticas la suma de:
a) El 4 % (cuatro por ciento) del total de las reservas matemáticas de seguro directo y reaseguro activo y de la reserva de siniestros liquidados a pagar del seguro colectivo de invalidez y fallecimiento (literal a) del artículo 20º), multiplicado por la relación entre las reservas matemáticas de propia conservación y las totales, la cual no puede ser inferior al 85 % (ochenta y cinco por ciento)
b) El 3 (tres) por mil de los capitales en riesgo no negativos multiplicado por la relación existente entre capitales en riesgo de propia conservación y los totales, la que no puede ser inferior al 50 % (cincuenta por ciento).
Circular No. 70 18/2/2003
Circular No. 49 21/7/2000
Circulares Nos. 1, 14, 17, 23, 24 y 42 18/8/94; 12/3/96; 3/4/96; 26/2/97; 4/4/97 y 23/12/98

Artículo 11 (Capital Mínimo. Grupos I y II) El Capital Mínimo, para poder funcionar en las actividades aseguradoras de los Grupos I y II conjuntamente se fija en la suma de los capitales mínimos determinados según lo establecido en los artículos 9 y 10 precedentes.
Circular No. 1 18/8/94

Artículo 12 (Capital Mínimo. Empresas Reaseguradoras) El Capital Mínimo para las empresas reaseguradoras se determinará aplicando lo establecido en el artículo 9° considerando un Capital Básico equivalente a 10 (diez) veces el Capital Básico para una sola rama, independientemente de la cantidad de ramas en que actúe.
Circular No. 1 18/8/94

Artículo 13 (Acreditación de Capital Mínimo) Para acreditar el Capital Mínimo se considerará el Patrimonio Neto. Dicho Patrimonio Neto se determinará deduciendo del Patrimonio Contable las siguientes partidas:

a) La propuesta de distribución de utilidades en efectivo que presente el Directorio a la Asamblea.

b) Los saldos que componen el Capítulo de Intangibles.

c) Otros activos que no constituyan una inversión efectiva. Se entenderá por inversión efectiva aquellos activos que tienen un claro valor de realización o capacidad generadora de ingresos para la sociedad.

d) Los créditos con los titulares del capital social que no resulten de un contrato de seguro o de reaseguro. En caso que los créditos correspondan a inversiones admitidas para cobertura de capital mínimo, obligaciones previsionales o no previsionales, sólo se deducirá el importe que exceda al monto máximo computable para cobertura, conforme a lo establecido en los artículos 27 y 30 de esta Recopilación.

El Patrimonio Neto resultante debe ser mayor al Capital Mínimo que surja de los artículos 9º a 12º precedentes.
Circular No. 83 17/10/05
Circular No. 69 26/11/02
Circulares Nos. 1 y 30 18/8/94 y 11/12/97

Artículo 13.1 (Convenios de representación en el marco de Acuerdos Internacionales) Las empresas que hayan celebrado convenios en las condiciones previstas en el inciso segundo del artículo 2.1 de la presente Recopilación, deberán considerar la parte de premios cedida o aceptada, así como la parte de siniestros y gastos de su responsabilidad, en la determinación del capital mínimo y en la constitución de las reservas técnicas previstas en las disposiciones del Título IV del Libro I.
Circular No. 61 8/3/2002

Apéndice B

Tablas de mortalidad

Tablas población total

- *Uruguay*
  Tabla completa de mortalidad femenina y masculina según edad. Año 2004.
  Fuente: Instituto Nacional de Estadística de Uruguay.

- *Alemania*
  Tabla completa de mortalidad femenina y masculina según edad. Año 1990-92.
  Fuente: Federal Statistical Office - Allgemeine Deutsche Sterbetafel.
  Observación: el volumen de los datos es de la población de Alemania Occidental en el período 1986 a 1990.

Tablas poblaciones selectas

- *México*
  Tabla de mortalidad masculina de asegurados según edad. Año 2000.
  Fuente: Grupo Técnica, S.A. - Estadísticas de la Compañía de Seguros para el período 1995 a 1998.
  Publicación especial de Mexican Asociation of Actuaries (AMA) y Mexican Association of Insurance Institution (AMIS).

- *Chile*
  Tabla de mortalidad de asegurados según edad. Año 1990.
  Observación: no se tiene mucha información de esta tabla, alguna descripción aparece en Society of Actuaries Vol 21 No 1 - 1995, Seminario “Measuring Mortality Risks in Mexico, Chile and Argentina”.

- *Suiza*

  Tabla de mortalidad femenina y masculina de asegurados según edad. Año 1995.

  Fuente: Industry Data of member companies of Union of Private Life Insurers.

  Observación: seguros de vida individual.

- *Alemania*

  Tabla de mortalidad femenina y masculina de asegurados según edad. Año 1994.

  Fuente: Industry table for annuities after 1994, publicada en www.actuary.de, the actuarial website of Cologne Re.

- *Uruguay*

  Tabla de mortalidad femenina y masculina de los afiliados a la Caja Notarial según edad.

	TABLAS DE POBLACIÓN TOTAL			
	URUGUAY 2004 Hombres	URUGUAY 2004 Mujeres	ALEMANIA 1990 Hombres	ALEMANIA 1990 Mujeres
0	0.01659	0.01239	0.0073918	0.0057611
1	0.00180	0.00173	0.0006035	0.0005390
2	0.00085	0.00076	0.0004226	0.0002993
3	0.00049	0.00041	0.0003523	0.0002699
4	0.00034	0.00028	0.0002550	0.0002017
5	0.00031	0.00022	0.0002429	0.0001801
6	0.00028	0.00019	0.0001870	0.0001672
7	0.00028	0.00018	0.0001867	0.0001531
8	0.00026	0.00019	0.0002027	0.0001461
9	0.00022	0.00019	0.0001600	0.0001173
10	0.00020	0.00019	0.0001539	0.0001305
11	0.00020	0.00019	0.0001768	0.0001366
12	0.00024	0.00021	0.0001923	0.0001181
13	0.00030	0.00021	0.0001781	0.0001115
14	0.00039	0.00026	0.0002244	0.0001510
15	0.00047	0.00029	0.0003234	0.0002034
16	0.00057	0.00032	0.0005055	0.0002202
17	0.00070	0.00033	0.0006101	0.0002702
18	0.00082	0.00035	0.0009373	0.0003487
19	0.00094	0.00036	0.0010611	0.0004039
20	0.00103	0.00036	0.0009681	0.0003775
21	0.00110	0.00037	0.0010714	0.0003570
22	0.00116	0.00037	0.0010596	0.0003580
23	0.00122	0.00038	0.0010688	0.0003683
24	0.00129	0.00041	0.0009671	0.0003764
25	0.00136	0.00044	0.0010281	0.0003823
26	0.00140	0.00049	0.0010417	0.0003832
27	0.00140	0.00054	0.0010462	0.0003854
28	0.00135	0.00059	0.0010542	0.0004362
29	0.00131	0.00063	0.0011617	0.0004693
30	0.00129	0.00067	0.0011972	0.0005028
31	0.00133	0.00071	0.0012421	0.0005170
32	0.00139	0.00075	0.0013069	0.0006040
33	0.00161	0.00080	0.0013891	0.0006139
34	0.00163	0.00084	0.0014929	0.0007122
35	0.00169	0.00086	0.0016005	0.0007721
36	0.00174	0.00097	0.0015877	0.0008863
37	0.00182	0.00108	0.0017998	0.0009402
38	0.00181	0.00115	0.0019164	0.0009989
39	0.00193	0.00119	0.0020295	0.0011089
40	0.00211	0.00122	0.0022438	0.0012085
41	0.00237	0.00136	0.0024288	0.0013372
42	0.00253	0.00152	0.0025626	0.0014487
43	0.00274	0.00175	0.0029367	0.0016096
44	0.00311	0.00203	0.0030521	0.0017196
45	0.00361	0.00227	0.0035094	0.0019082
46	0.00405	0.00241	0.0038208	0.0021484
47	0.00427	0.00247	0.0041667	0.0023000
48	0.00451	0.00257	0.0047040	0.0024943
49	0.00494	0.00287	0.0050111	0.0025498
50	0.00564	0.00324	0.0057706	0.0027477
51	0.00666	0.00373	0.0061318	0.0030187
52	0.00740	0.00397	0.0066752	0.0032171
53	0.00827	0.00419	0.0074029	0.0035860
54	0.00895	0.00441	0.0081285	0.0039916
55	0.01028	0.00492	0.0090961	0.0042507
56	0.01144	0.00556	0.0099887	0.0046119
57	0.01286	0.00636	0.0111643	0.0051396
58	0.01384	0.00678	0.0122879	0.0056127
59	0.01542	0.00727	0.0138282	0.0062089
60	0.01695	0.00745	0.0154420	0.0068245

	URUGUAY 2004 Hombres	URUGUAY 2004 Mujeres	ALEMANIA 1990 Hombres	ALEMANIA 1990 Mujeres
61	0.01891	0.00807	0.0168324	0.0075251
62	0.01996	0.00828	0.0184977	0.0082962
63	0.02094	0.00876	0.0199488	0.0090931
64	0.02250	0.00933	0.0217548	0.0100224
65	0.02494	0.01048	0.0232946	0.0110439
66	0.02853	0.01191	0.0256790	0.0122153
67	0.03121	0.01322	0.0279825	0.0135230
68	0.03374	0.01418	0.0305597	0.0150619
69	0.03597	0.01529	0.0337803	0.0168193
70	0.03909	0.01642	0.0381085	0.0192133
71	0.04280	0.01823	0.0408538	0.0211435
72	0.04482	0.01972	0.0449622	0.0233814
73	0.04694	0.02206	0.0472071	0.0252887
74	0.05003	0.02476	0.0524882	0.0285897
75	0.05679	0.02901	0.0594646	0.0330495
76	0.06441	0.03347	0.0655796	0.0370618
77	0.07182	0.03870	0.0718425	0.0420671
78	0.07634	0.04242	0.0785707	0.0472429
79	0.08232	0.04816	0.0866172	0.0531814
80	0.08849	0.05325	0.0953667	0.0606591
81	0.09783	0.06164	0.1054747	0.0688762
82	0.10591	0.06650	0.1163194	0.0778464
83	0.11499	0.07339	0.1276022	0.0881195
84	0.12483	0.07988	0.1375850	0.0989748
85	0.13651	0.09164	0.1513401	0.1103575
86	0.15165	0.10458	0.1631538	0.1234079
87	0.17001	0.12022	0.1765761	0.1367612
88	0.18961	0.13345	0.1907522	0.1524738
89	0.20952	0.14847	0.2009554	0.1664975
90	0.22712	0.16008	1	1
91	0.24919	0.17723		
92	0.26296	0.18940		
93	0.27407	0.20620		
94	0.28069	0.22253		
95	0.30072	0.24909		
96	0.31737	0.27821		
97	0.33045	0.30194		
98	0.33706	0.31192		
99	0.35113	0.31041		
100	1	1		

	TABLAS DE POBLACIONES SELECTAS							
	MÉXICO 2000 Hombres	CHILE 1990	SUIZA 1995 Mujeres	SUIZA 1995 Hombres	ALEMANIA 1994 Mujeres	ALEMANIA 1994 Hombres	CAJA NOTARIAL Hombres	CAJA NOTARIAL Mujeres
0	0,007831	0,001157	0,0015621	0,0030963	0,000059	0,000113		
1	0,00033	0,001158	0,0012181	0,001177	0,000059	0,000113		
2	0,000332	0,00116	0,0009326	0,0008051	0,000059	0,000113		
3	0,000334	0,001161	0,0007009	0,0007193	0,000059	0,000113		
4	0,000336	0,001163	0,0005192	0,0006431	0,000059	0,000113		
5	0,000338	0,001165	0,0003847	0,000577	0,000059	0,000113		
6	0,000341	0,001167	0,0002953	0,0005217	0,000059	0,000113		
7	0,000344	0,001169	0,0002503	0,0004779	0,000059	0,000113		
8	0,000348	0,001172	0,0002457	0,0004462	0,000059	0,000113		
9	0,000351	0,001175	0,0002721	0,0004274	0,000059	0,000113		
10	0,000355	0,001179	0,0003165	0,0004221	0,000059	0,000113		
11	0,00036	0,001183	0,000367	0,0004308	0,000059	0,000113		
12	0,000365	0,001187	0,0004139	0,0004532	0,000059	0,000113		
13	0,000371	0,001192	0,0004516	0,0004962	0,000059	0,000114		
14	0,000377	0,001197	0,00053	0,0005911	0,000059	0,000133		
15	0,000385	0,001203	0,0007348	0,0007715	0,000068	0,000175		
16	0,000392	0,00121	0,0009915	0,0010666	0,000085	0,000235		
17	0,000401	0,001218	0,0011118	0,0014749	0,00011	0,000309		
18	0,000411	0,001226	0,0010447	0,0018876	0,00011	0,000385		
19	0,000422	0,001236	0,000939	0,002177	0,00011	0,000447		
20	0,000434	0,001246	0,0008533	0,0022539	0,000111	0,000511	0,00057	0,00033
21	0,000448	0,001258	0,0007775	0,0021744	0,000111	0,000617	0,0005	0,00038
22	0,000463	0,001272	0,000714	0,0020281	0,000111	0,000777	0,00045	0,00041
23	0,000479	0,001287	0,000668	0,0018632	0,000112	0,000786	0,00042	0,00046
24	0,000498	0,001304	0,0006333	0,0017139	0,000112	0,000795	0,00041	0,0005
25	0,000519	0,001322	0,0006132	0,0015934	0,000112	0,000804	0,00041	0,00055
26	0,000542	0,001343	0,0006047	0,0014966	0,000112	0,000813	0,00042	0,0006
27	0,000568	0,001367	0,0006056	0,001421	0,000113	0,000814	0,00045	0,00065
28	0,000596	0,001393	0,0006148	0,0013651	0,000118	0,000832	0,00047	0,00071
29	0,000628	0,001423	0,0006311	0,001327	0,000143	0,000863	0,0005	0,00077
30	0,000663	0,001456	0,000653	0,001305	0,000202	0,000894	0,00053	0,00083
31	0,000703	0,001493	0,0006792	0,0012974	0,000297	0,000934	0,00055	0,0009
32	0,000747	0,001534	0,0007087	0,0013024	0,000357	0,000994	0,00057	0,00096
33	0,000795	0,001581	0,0007413	0,0013178	0,000386	0,001063	0,00058	0,00102
34	0,00085	0,001633	0,000778	0,0013421	0,000404	0,001109	0,00059	0,00109
35	0,00091	0,001691	0,0008183	0,0013735	0,000425	0,001112	0,00059	0,00115
36	0,000977	0,001756	0,0008626	0,0014106	0,000449	0,001115	0,00058	0,00138
37	0,001052	0,001829	0,0009199	0,0014694	0,000475	0,001118	0,00056	0,00147
38	0,001136	0,00191	0,0009841	0,0015394	0,000507	0,001121	0,00054	0,00138
39	0,001228	0,002002	0,0010554	0,001623	0,000553	0,001145	0,0005	0,00132
40	0,001331	0,002104	0,0011357	0,0017236	0,000622	0,001198	0,00067	0,00129
41	0,001446	0,002218	0,001225	0,001843	0,000713	0,00128	0,0005	0,00128
42	0,001574	0,002346	0,0013235	0,0019837	0,00079	0,001394	0,00049	0,00129
43	0,001716	0,00249	0,0014321	0,0021484	0,000857	0,001521	0,00066	0,00131
44	0,001874	0,00265	0,0015532	0,00234	0,000929	0,001676	0,0001	0,00135
45	0,00205	0,00283	0,0016872	0,0025613	0,001018	0,001864	0,00151	0,00141
46	0,002246	0,003032	0,0018321	0,0028134	0,001117	0,002039	0,00215	0,00148
47	0,002463	0,003257	0,0019884	0,0030975	0,001177	0,002201	0,0029	0,00155
48	0,002706	0,003509	0,0021576	0,0034166	0,001202	0,002356	0,00373	0,00164
49	0,002975	0,003791	0,0023407	0,0037728	0,001212	0,002516	0,00462	0,00174
50	0,003275	0,004107	0,0025366	0,0041663	0,001231	0,002677	0,00553	0,00185
51	0,003609	0,004461	0,0027429	0,0045976	0,001266	0,002831	0,00646	0,00197
52	0,004009	0,004856	0,0029614	0,0050701	0,001324	0,003016	0,00737	0,00209
53	0,00439	0,005299	0,0031958	0,0055866	0,001403	0,003258	0,00823	0,00222
54	0,004803	0,005795	0,0034479	0,0061539	0,001491	0,003555	0,00903	0,00236
55	0,005211	0,00635	0,003719	0,0067769	0,001581	0,0039	0,00973	0,00251
56	0,005628	0,00697	0,0040075	0,0074513	0,00167	0,004274	0,01031	0,00267
57	0,006004	0,007665	0,0043134	0,0081765	0,001766	0,004676	0,01075	0,00286
58	0,006461	0,008442	0,0046428	0,0089587	0,001866	0,005065	0,01101	0,00312
59	0,006932	0,009311	0,0050069	0,0098148	0,001958	0,005422	0,01107	0,00356
60	0,007398	0,010283	0,0054154	0,0107519	0,00206	0,005755	0,01863	0,00377
61	0,007888	0,01137	0,0058241	0,0117456	0,002199	0,006102	0,01372	0,00388
62	0,008369	0,012586	0,0061992	0,0127881	0,002383	0,006496	0,02014	0,00457

	MÉXICO 2000 Hombres	CHILE 1990	SUIZA 1995 Mujeres	SUIZA 1995 Hombres	ALEMANIA 1994 Mujeres	ALEMANIA 1994 Hombres	CAJA NOTARIAL Hombres	CAJA NOTARIAL Mujeres
63	0,009445	0,013946	0,0065927	0,0139084	0,002605	0,006971	0,02321	0,00496
64	0,010558	0,015466	0,007005	0,015062	0,002885	0,007557	0,0242	0,00526
65	0,011714	0,017166	0,0074468	0,0162711	0,003237	0,008293	0,02408	0,00562
66	0,012954	0,019065	0,0079698	0,0175513	0,003661	0,009178	0,0236	0,00615
67	0,013901	0,021186	0,008635	0,0189045	0,004141	0,010137	0,02336	0,00693
68	0,016214	0,023557	0,0095023	0,0203328	0,004637	0,011123	0,02378	0,00802
69	0,018698	0,026204	0,0106307	0,0218384	0,005146	0,012169	0,02514	0,00944
70	0,021132	0,029159	0,0120778	0,0234233	0,005698	0,013316	0,02758	0,01122
71	0,023466	0,032457	0,0139133	0,025106	0,006302	0,014649	0,03115	0,01335
72	0,025797	0,036136	0,0161002	0,02697	0,006994	0,016198	0,03578	0,01583
73	0,028684	0,040239	0,0186565	0,0291147	0,007848	0,018056	0,04133	0,01865
74	0,031768	0,044812	0,0215794	0,0316391	0,00889	0,020216	0,04759	0,02179
75	0,034752	0,049907	0,0248663	0,0346415	0,010096	0,022646	0,05424	0,02212
76	0,037836	0,055578	0,0285157	0,0382196	0,011504	0,025415	0,06082	0,02188
77	0,042005	0,061888	0,0325259	0,0424709	0,0132	0,028511	0,06666	0,02678
78	0,047502	0,068902	0,0368958	0,0474922	0,015135	0,031762	0,07081	0,02848
79	0,052916	0,076694	0,0416247	0,0533799	0,017388	0,03547	0,07184	0,02869
80	0,059014	0,08534	0,0467116	0,0602302	0,020117	0,03977	0,07023	0,02918
81	0,065208	0,094925	0,0521559	0,0677816	0,023237	0,044321	0,08051	0,03179
82	0,072845	0,105537	0,0579572	0,0756701	0,02674	0,04923	0,08436	0,03852
83	0,083968	0,117271	0,064115	0,0839086	0,030737	0,05454	0,09203	0,05164
84	0,093826	0,130226	0,0706289	0,0924972	0,035271	0,060227	0,10326	0,07418
85	0,104498	0,144506	0,0774984	0,1014361	0,040263	0,066281	0,11775	0,08113
86	0,116042	0,160216	0,0847235	0,1107253	0,045997	0,072418	0,13511	0,0941
87	0,128321	0,177463	0,0923037	0,1203649	0,052428	0,078658	0,15466	0,10424
88	0,140999	0,196353	0,1002388	0,1303548	0,059507	0,085141	0,17489	0,11536
89	0,155553	0,216989	0,1085285	0,1406952	0,067171	0,091502	0,19227	0,12764
90	0,169833	0,239466	0,1171726	0,1513858	0,075313	0,098056	0,2106	0,14131
91	0,184991	0,263867	0,1261708	0,1624268	0,083869	0,104216	0,24421	0,15657
92	0,201454	0,290259	0,1355231	0,1738179	0,092315	0,11001	0,26429	0,17363
93	0,220103	0,318687	0,145229	0,1855593	0,100693	0,115695	0,28394	0,19256
94	0,241212	0,349167	0,1552886	0,1976508	0,1089	0,121466	0,30113	0,21307
95	0,268568	0,381678	0,1657013	0,2100923	0,116909	0,127386	0,31229	0,23414
96	0,305424	0,416156	0,1764673	0,2228836	0,124725	0,133438	0,31281	0,2534
97	0,26328	0,452482	0,1875861	0,2360248	0,132466	0,13958	0,30143	0,26727
98	0,466234	0,490478	0,1990577	0,2495156	0,140118	0,145758	0,29365	0,2784
99	0,650743	0,5299	0,2108817	0,2633561	0,147629	0,151914	0,34696	0,33869
100	1	0,57043	0,223058	0,2775459	0,154934	0,158012	1	1
101		0,611677	0,2355863	0,2920851	0,163311	0,164479		
102		0,653177	0,2484665	0,3069733	0,171514	0,170732		
103		0,694402	0,2616983	0,3222107	0,179486	0,17674		
104		0,734772	0,2752815	0,3377968	0,187179	0,182474		
105		0,773679	0,2892156	0,3537315	0,194544	0,187907		
106		0,810508	0,3035008	0,3700147	0,20154	0,193017		
107		1	0,3181364	0,3866462	0,208129	0,197785		
108			0,3331225	0,4036256	0,214281	0,202193		
109			0,3484585	0,420953	0,219967	0,206228		
110			0,3641443	0,4386277	0,225167	0,209878		
111			0,3801795	0,4566499	1	1		
112			0,3965638	0,4750189				
113			0,4132968	0,4937348				
114			0,4303782	0,5127969				
115			0,4478075	0,532205				
116			0,4655844	0,5519587				
117			0,4837083	0,5720575				
118			0,5021789	0,592501				
119			0,5209955	0,6132887				
120			0,5401576	0,6344198				
121			0,5596646	0,6558939				
122			0,5795159	1				
123			0,5997105					
124			0,6144512					
125			0,635135					
126			1					

Apéndice C

Tablas de tests no paramétricos

Tabla de Wilcoxon - Lower Tail

n_A	n_B	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.20
4	4	.	.	10	11	13	14
4	5	.	10	11	12	14	15
4	6	10	11	12	13	15	17
4	7	10	11	13	14	16	18
4	8	11	12	14	15	17	20
4	9	11	13	14	16	19	21
4	10	12	13	15	17	20	23
5	5	15	16	17	19	20	22
5	6	16	17	18	20	22	24
5	7	16	18	20	21	23	26
5	8	17	19	21	23	25	28
5	9	18	20	22	24	27	30
5	10	19	21	23	26	28	32
6	6	23	24	26	28	30	33
6	7	24	25	27	29	32	35
6	8	25	27	29	31	34	37
6	9	26	28	31	33	36	40
6	10	27	29	32	35	38	42
7	7	32	34	36	39	41	45
7	8	34	35	38	41	44	48
7	9	35	37	40	43	46	50
7	10	37	39	42	45	49	53
8	8	43	45	49	51	55	59
8	9	45	47	51	54	58	62
8	10	47	49	53	56	60	65
9	9	56	59	62	66	70	75
9	10	58	61	65	69	73	78
10	10	71	74	78	82	87	93

Tabla de Wilcoxon - Upper Tail

n_A	n_B	0.20	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
4	4	22	23	25	26	.	.
4	5	25	26	28	29	30	.
4	6	27	29	31	32	33	34
4	7	30	32	34	35	37	38
4	8	32	35	37	38	40	41
4	9	35	37	40	42	43	45
4	10	37	40	43	45	47	48
5	5	33	35	36	38	39	40
5	6	36	38	40	42	43	44
5	7	39	42	44	45	47	49
5	8	42	45	47	49	51	53
5	9	45	48	51	53	55	57
5	10	48	52	54	57	59	61
6	6	45	48	50	52	54	55
6	7	49	52	55	57	59	60
6	8	53	56	59	61	63	65
6	9	56	60	63	65	68	70
6	10	60	64	67	70	73	75
7	7	60	64	66	69	71	73
7	8	64	68	71	74	77	78
7	9	69	73	76	79	82	84
7	10	73	77	81	84	87	89
8	8	77	81	85	87	91	93
8	9	82	86	90	93	97	99
8	10	87	92	96	99	103	105
9	9	96	101	105	109	112	115
9	10	102	107	111	115	119	122
10	10	117	123	128	132	136	139

Tabla de Ansari-Bradley - Lower Tail

Tamaño muestras		Nivel α					
m	n	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
6	6	12	13	14	15	16	17
6	7	13	14	15	16	17	18
6	8	13	15	15	17	18	19
6	9	14	15	16	17	19	20
6	10	14	16	17	18	19	21
7	7	17	18	19	20	22	23
7	8	18	19	20	21	23	24
7	9	18	20	21	22	24	25
7	10	19	21	22	23	25	27
8	8	22	24	25	27	28	30
8	9	23	25	26	28	30	31
8	10	24	26	27	29	31	33
9	9	29	31	32	34	36	38
9	10	30	32	33	35	37	39
10	10	36	39	40	42	44	46

Tabla de Ansari-Bradley - Upper Tail

Tamaño muestras		Nivel α					
m	n	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
6	6	30	29	28	27	26	25
6	7	33	31	31	29	28	27
6	8	35	33	33	31	30	29
6	9	38	36	35	34	33	31
6	10	40	38	37	36	35	33
7	7	39	38	37	36	34	33
7	8	42	41	40	38	37	36
7	9	45	43	42	41	39	38
7	10	48	46	45	43	42	40
8	8	50	48	47	45	44	42
8	9	53	51	50	48	47	45
8	10	56	54	53	51	49	47
9	9	61	59	58	56	54	52
9	10	65	63	61	59	57	55
10	10	74	71	70	68	66	64

Tabla de Klotz - Lower Tail

Tamaño muestras		Nivel α					
m	n	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
6	6	70	99	123	152	194	218
6	7	65	97	125	147	177	225
6	8	72	104	116	142	176	226
6	9	71	95	114	147	177	222
6	10	64	93	112	140	178	221
7	7	110	142	163	207	245	291
7	8	108	142	163	199	238	293
7	9	107	139	158	197	236	289
7	10	97	132	158	198	234	287
8	8	145	193	217	257	303	358
8	9	142	183	215	256	298	356
8	10	138	183	208	252	297	354
9	9	184	237	268	315	365	424
9	10	183	232	264	312	361	426
10	10	227	287	321	375	430	496

Tabla de Klotz - Upper Tail

Tamaño muestras		Nivel α					
m	n	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
6	6	723	694	670	641	599	575
6	7	752	733	703	672	641	592
6	8	807	769	737	702	664	606
6	9	838	805	771	730	683	627
6	10	887	828	798	749	702	643
7	7	858	826	805	761	723	677
7	8	903	862	838	793	754	700
7	9	945	901	869	820	776	717
7	10	992	931	901	845	795	734
8	8	1001	953	929	889	843	789
8	9	1046	994	966	917	869	811
8	10	1084	1027	994	941	891	827
9	9	1143	1090	1059	1012	962	903
9	10	1184	1123	1092	1038	984	920
10	10	1283	1223	1188	1134	1079	1013

Apéndice D

Tabla de mortalidad obtenida

TABLA OBTENIDA PARA LA POBLACIÓN EN ESTUDIO			
Hombres			
0		**40**	0.00093564
1	0.00008825	**41**	0.00099968
2	0.00008825	**42**	0.00108871
3	0.00008825	**43**	0.00118790
4	0.00008825	**44**	0.00130896
5	0.00008825	**45**	0.00145578
6	0.00008825	**46**	0.00159246
7	0.00008825	**47**	0.00171898
8	0.00008825	**48**	0.00184004
9	0.00008825	**49**	0.00196500
10	0.00008825	**50**	0.00209074
11	0.00008825	**51**	0.00221101
12	0.00008825	**52**	0.00235550
13	0.00008903	**53**	0.00254450
14	0.00010387	**54**	0.00277646
15	0.00013668	**55**	0.00304590
16	0.00018354	**56**	0.00333799
17	0.00024133	**57**	0.00365196
18	0.00030069	**58**	0.00395577
19	0.00034911	**59**	0.00423458
20	0.00039909	**60**	0.00449466
21	0.00048188	**61**	0.00476566
22	0.00060684	**62**	0.00507338
23	0.00061387	**63**	0.00544435
24	0.00062090	**64**	0.00590202
25	0.00062792	**65**	0.00647683
26	0.00063495	**66**	0.00716802
27	0.00063573	**67**	0.00791700
28	0.00064979	**68**	0.00868706
29	0.00067400	**69**	0.00950399
30	0.00069821	**70**	0.01039980
31	0.00072945	**71**	0.01144087
32	0.00077631	**72**	0.01265064
33	0.00083020	**73**	0.01410174
34	0.00086613	**74**	0.01578870
35	0.00086847	**75**	0.01768653
36	0.00087082	**76**	0.01984912
37	0.00087316	**77**	0.02226709
38	0.00087550	**78**	0.02480612
39	0.00089425	**79**	0.02770207

TABLA OBTENIDA PARA LA POBLACIÓN EN ESTUDIO			
Mujeres			
0		**40**	0.00048578
1	0.00004608	**41**	0.00055685
2	0.00004608	**42**	0.00061699
3	0.00004608	**43**	0.00066932
4	0.00004608	**44**	0.00072555
5	0.00004608	**45**	0.00079506
6	0.00004608	**46**	0.00087238
7	0.00004608	**47**	0.00091924
8	0.00004608	**48**	0.00093876
9	0.00004608	**49**	0.00094657
10	0.00004608	**50**	0.00096141
11	0.00004608	**51**	0.00098875
12	0.00004608	**52**	0.00103404
13	0.00004608	**53**	0.00109574
14	0.00004608	**54**	0.00116447
15	0.00005311	**55**	0.00123476
16	0.00006639	**56**	0.00130427
17	0.00008591	**57**	0.00137925
18	0.00008591	**58**	0.00145735
19	0.00008591	**59**	0.00152920
20	0.00008669	**60**	0.00160886
21	0.00008669	**61**	0.00171742
22	0.00008669	**62**	0.00186112
23	0.00008747	**63**	0.00203451
24	0.00008747	**64**	0.00225319
25	0.00008747	**65**	0.00252810
26	0.00008747	**66**	0.00285924
27	0.00008825	**67**	0.00323412
28	0.00009216	**68**	0.00362150
29	0.00011168	**69**	0.00401903
30	0.00015776	**70**	0.00445014
31	0.00023196	**71**	0.00492186
32	0.00027882	**72**	0.00546231
33	0.00030147	**73**	0.00612929
34	0.00031552	**74**	0.00694309
35	0.00033193	**75**	0.00788498
36	0.00035067	**76**	0.00898462
37	0.00037098	**77**	0.01030920
38	0.00039597	**78**	0.01182044
39	0.00043189	**79**	0.01358003

Apéndice E

Programas en R - Ejemplos

1) PROGRAMA: OBTENCIÓN DE LA DISTRIBUCIÓN EMPÍRICA DE N Y S

```
# Carga datos #
base<- read.table("base-fin.txt", header=TRUE, dec=".")
tablaqx<-read.table("qxalemania.txt", header=TRUE, dec=".")
n<-nrow(base)

# Cálculo de edad#
fecha<-39082 # corresponde a la fecha de cálculo 31/12/2006 expresada en días #
fechacalculo<-vector(mode = "numeric", length = n)
fechacalculo<-rep(fecha,n)
fechanto<-vector(mode = "numeric", length = n)
fechanto<-base[,2]
edad<-round(((fechacalculo-fechanto)/365.25))

# Asigno la qx a cada edad #
qxH<-tablaqx[,2]
qxM<-tablaqx[,3]
sexo<-base[,3]
q<-rep(0,n)
porc=0.781
for (k in 1:n){
 if (sexo[k]>1) q[k]=qxM[edad[k]+1]*porc
 if (sexo[k]<2) q[k]=qxH[edad[k]+1]*porc}

# Bucle de simulación de la distribución de N y S, se realizan R iteraciones #
```

```
sa<-vector(mode = "numeric", length = n)
sa<-base[,4]
R<-10000
N<-rep(0,R) # observ. de la v.a número de siniestros
S<-rep(0,R) # observ. de la v.a. pérdidas totales
for (i in 1:R){
        r<-rep(0,n)
        aleat<-runif(n)
  for (j in 1:n){
  if (q[j]>aleat[j]) r[j]=1}
  N[i]<-sum(r)
monto<-sum(r*sa)
S[i]<-monto}

# Convergencia de simulación de la distribución de N y S, variando iteraciones R #
summary(N)
var(N)
sd(N)
summary(S)
var(S)
sd(S)

# Distribución empírica y gráficos #
plot(density(N),main="Densidad de N",xlab="n",ylab="f(n)",col = "blue",lwd=5)
FnN<-ecdf(N)
plot(FnN,main="Distribución empírica de N",xlab="n",ylab="F(n)",lwd=5)
Fn<-ecdf(S)
plot(density(S),main="Densidad de S",xlab="s",ylab="f(s)",col = "red",lwd=5)
plot(Fn,main="Distribución empírica de S",xlab="s",ylab="F(s)",lwd=5)
```

2) PROGRAMA: TEST DE WILCOXON

```
base<- read.table("base-fin.txt", header=TRUE, dec=".")
tablaqx<-read.table("qxalemania.txt", header=TRUE, dec=".")
n<-nrow(base)

# Cálculo de edad#
fecha<-39082 # corresponde a la fecha de calculo 31/12/2006 expresada en dias#
fechacalculo<-vector(mode = "numeric", length = n)
fechacalculo<-rep(fecha,n)
fechanto<-vector(mode = "numeric", length = n)
fechanto<-base[,2]
edad<-round(((fechacalculo-fechanto)/365.25))

# asigno la qx a cada edad#
qxH<-tablaqx[,2]
qxM<-tablaqx[,3]
sexo<-base[,3]
q<-rep(0,n)
porc=0.76
for (k in 1:n){
 if (sexo[k]>1) q[k]=qxM[edad[k]+1]*porc
 if (sexo[k]<2) q[k]=qxH[edad[k]+1]*porc}

# Bucle de simulación de la distribución de N, se realizan R iteraciones.

L<-1000
B<-rep(0,L)
G<-rep(0,L)
for (t in 1:L){
R<-10
N<-rep(0,R) # observ. de la v.a número de siniestros
for (i in 1:R){
        r<-rep(0,n)
        aleat<-runif(n)
```

```
        for (j in 1:n){
                if (q[j]>aleat[j]) r[j]=1}
        N[i]<-sum(r)}

u1<- N
u2<- rep(1,R)
v1<- c(2,6,4,3,2,2,1,6,3,2)
v2<- rep(2,R)
etiquetas<- c(u2,v2) #etiquetas 2 son datos empíricos y 1 datos simulados
datos<- c(u1,v1)
o <- order(datos)
M<- cbind(etiquetas[o], datos[o])
ran<- M [,2]
rangos<-rank(ran, ties.method = c("average"))
K<- as.matrix(cbind(M[,1], rangos))
eti<-K[,1]
rang<-K[,2]
o <- order(eti)
J<- cbind(eti[o], rang[o])
f=J[11:20,2]
r=sum(f)
B[t]=r
if (r>78)if (r<132) G[t]=1}

porcentajeacierto=sum(G)/L
porcentajeacierto
```

3) PROGRAMA: OPTIMIZACIÓN DE REASEGURO MAXIMIZANDO LA TASA DE RETORNO DEL CAPITAL EN RIESGO - EJEMPLO REASEGURO COMBINADO CUOTA PARTE Y STOP LOSS

```
S<- read.table("S.txt", header=TRUE, dec=".")
alfa=0.05
p=1-alfa
VR=quantile(S,probs=p) #valor en riesgo-valor que acumula un 95%

##Reaseguro PROPORCIONAL CUOTA PARTE
a=c(0,0.2,0.4,0.6,0.8,1) # porcentaje retenido
t=length(a)
R=length(S)
I<-matrix(data = 0, nrow = R, ncol = t, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
J<-matrix(data = 0, nrow = R, ncol = t, byrow = FALSE, dimnames = NULL)

for (j in 1:t){
I[,j]<-S*a[j]
J[,j]<-S-I[,j]}

## Agrego REASEGURO NO PROPORCIONAL - STOP LOSS
prioridad=c(0,20000,40000,60000,80000,100000,120000,Inf)
l=length(prioridad)
MeanI<-matrix(data = 0, nrow = l, ncol = t, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
MeanJ<-matrix(data = 0, nrow = l, ncol = t, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
VRI<-matrix(data = 0, nrow = l, ncol = t, byrow = FALSE, dimnames = NULL)
for (k in 1:l){
Ifin<-I
Jfin<-J
for (j in 1:t){
for (i in 1:R){
        if (Ifin[i,j]>prioridad[k]) Ifin[i,j]<-prioridad[k]}
Jfin[,j]<-S-Ifin[,j]
MeanI[k,j]<-mean(Ifin[,j])
MeanJ[k,j]<-mean(Jfin[,j])
VRI[k,j]<-quantile(Ifin[,j],probs=p)}}
```

```
# CÁLCULO FI MODELO B

tita=0.05 # carga de seguro
premio=(1+tita)*mean(S)# premios totales cobrados
delta=0.10 # coef. seguridad premios reaseguro
premioreas=(1+delta)*MeanJ
premioret=premio-premioreas
ucomb=VRI-premioret  #patrimonio requerido con reaseguro
fi=round(((ucomb+premioret-MeanI)/ucomb)-1,4)

# CÁLCULO FI MODELO A

tita=0.05 # carga de seguro
premio=(1+tita)*mean(S)# premios totales cobrados
delta=0.10 # coef. seguridad premios reaseguro
premioreas=(1+delta)*MeanJ
premioret=premio-premioreas
u=VR-premio  #patrimonio requerido con reaseguro
fi=round(((u+premioret-MeanI)/u)-1,4)
```

Índice de figuras

Índice de cuadros