



UNIVERSIDAD DE LA REÚBLICA
FACULTAD CIENCIAS ECONÓMICAS Y ADMINISTRACIÓN

Estimación de la Brecha de Producto mediante Filtros Lineales

Ignacio Alvarez - Natalia da Silva

Informe Final de Pasantía
Para obtener el título de *Licenciado en Estadística*
Tutora: Ec. Silvia Rodriguez
Fecha: Marzo 2008

Resumen

La estimación de la brecha de producto es un problema complejo, hay varias metodologías para estimarla sin que sea claro cuál de ellas es la más adecuada. En este trabajo la brecha de producto se asocia con el componente cíclico del IVF del PIB y se estima dicho componente utilizando distintos filtros lineales. El objetivo principal del trabajo es estimar la brecha de producto utilizando distintos filtros lineales y obtener medidas que permitan comparar y evaluar dichas técnicas.

El análisis espectral aporta una perspectiva muy rica para describir las propiedades de los filtros utilizados y describir las características de los ciclos estimados. Además se estiman intervalos de confianza para la señal cíclica utilizando técnicas de remuestreo aplicadas a series temporales.

Índice general

| | |
|---|-----------|
| 1. Introducción | 4 |
| 2. Antecedentes y Objetivos | 6 |
| 2.1. Conceptos Iniciales | 6 |
| 2.1.1. Brecha de Producto | 7 |
| 2.1.2. Métodos de Estimación | 8 |
| 2.2. Objetivos | 10 |
| 2.3. Antecedentes | 10 |
| 3. Extracción de Señales | 13 |
| 3.1. Componentes Inobservables | 13 |
| 3.2. Método TRAMO-SEATS | 15 |
| 4. Dominio de la Frecuencia | 19 |
| 4.1. Periodicidades en una Serie de Tiempo | 19 |
| 4.2. Representación espectral de una serie | 21 |
| 4.3. Espectro Poblacional | 23 |
| 4.4. Función de Transferencia | 26 |
| 4.5. La Estimación del Espectro Poblacional | 28 |

| | |
|--|-----------|
| 5. Filtros Lineales | 37 |
| 5.1. Descripción de un Filtro en el Dominio de las Frecuencias | 37 |
| 5.2. Filtro Pasa Banda Ideal | 39 |
| 5.2.1. El Problema de Optimización | 41 |
| 5.2.2. Algunas Propiedades Deseables | 43 |
| 5.3. Filtros de Respuesta Finitos | 44 |
| 5.3.1. El Filtro de Baxter y King | 44 |
| 5.3.2. El Filtro de Christiano y Fitzgerald | 47 |
| 5.4. Filtros de Respuesta Infinita | 49 |
| 5.4.1. Filtro Butterworth | 50 |
| 5.4.2. Filtro Holdrick Prescott | 51 |
| 5.4.3. Un Filtro Tipo Tangente | 53 |
| | |
| 6. Bootstrap Para Series de Tiempo | 56 |
| 6.1. Técnicas de Remuestreo General | 56 |
| 6.2. Remuestreo en Series de Tiempo | 57 |
| | |
| 7. Comparación de Ciclos | 61 |
| 7.1. Modelo Especificado para el IVFPIB | 61 |
| 7.2. Filtros Utilizados | 63 |
| 7.3. Efecto Distorsivo | 67 |
| 7.4. Ciclos Estimados | 69 |
| 7.4.1. Espectros de los Ciclos | 73 |
| | |
| 8. Intervalos de Confianza | 76 |
| 8.1. Construcción del Intervalo | 76 |
| 8.2. Intervalos Estimados | 78 |

| | |
|--|------------|
| 8.3. Significación del Ciclo | 81 |
| 8.4. Errores de Revisión | 82 |
| 9. Síntesis | 86 |
| 9.1. Comparación de Filtros | 87 |
| 9.2. Comparaciones de los Ciclos | 88 |
| 9.3. Intervalos de Confianza | 88 |
| 9.4. Comentarios Finales | 90 |
| A. Anexo de Datos | 96 |
| B. Anexo de Resultados | 97 |
| C. Anexo de Código | 102 |
| C.1. Ciclos estimados | 102 |
| C.2. Espectro de los ciclos | 103 |
| C.3. Intervalos | 105 |
| C.4. Figuras | 107 |

Capítulo 1

Introducción

Durante el año 2007 los autores de este documento participaron en un estudio de la Comisión Económica Para América Latina (CEPAL), cuyo objetivo era estimar la Brecha de Producto de la Economía Uruguaya tanto sectorial como agregada. El resultado de dicho estudio está desarrollado en tres publicaciones de la oficina: *Métodos Univariados para la Estimación de la Brecha de Producto en Uruguay: Parte I*, *Métodos Univariados para la Estimación de la Brecha de Producto en Uruguay: Parte II* y *Estimación de la Brecha de Producto Sectorial*. Este trabajo supone una continuación de la línea de investigación comenzada en CEPAL. Se toman como base algunos de los resultados obtenidos en las publicaciones antes mencionadas, y se profundiza el análisis.

El estudio del ciclo económico y la extracción del componente cíclico es relevante tanto desde una perspectiva teórica, así como para evaluar los efectos de las políticas macroeconómicas a través del estudio de los patrones de crecimiento de la economía.

El ciclo permite distinguir los efectos estructurales de aquellos cambios relativos a la coyuntura. En tal sentido cuando se pretende estudiar la evolución de largo plazo de algún fenómeno económico se debe tomar en cuenta el componente cíclico para no distorsionar el análisis con efectos de corto plazo. A su vez cuando el análisis se centra en el estudio de la coyuntura económica el componente cíclico describe las oscilaciones de corto y mediano plazo.

Más específicamente existen dos ámbitos donde este concepto adquiere notoria importancia: el monetario y el fiscal. En primer lugar tener una medición del componente cíclico (utilizado como brecha de producto) permite tener una guía sobre la existencia de presiones inflacionarias y de esta forma es útil para la definición de políticas monetarias. En segundo lugar el producto potencial permite aislar el efecto del ciclo sobre las cuentas fiscales y así identificar el resultado fiscal.

La estimación del componente cíclico en series económicas es un problema complejo. Existen muchas metodologías para realizar dicha estimación que arrojan resultados diferentes y aún no está resuelto cuál de ellas es la más adecuada.

El análisis espectral aporta una perspectiva muy rica cuando se analizan series económicas y se quiere estimar uno o varios componentes inobservables. En particular el dominio de la frecuencia permite trabajar cómodamente en la extracción de señales. En este trabajo se utilizará principalmente este enfoque, aunque cuando el problema lo requiera se hará mención al dominio del tiempo.

El objetivo de este trabajo es extraer la señal cíclica con distintas metodologías y obtener medidas que permitan comparar y evaluar dichas técnicas. El análisis se realiza sobre los datos Índice de Volumen Físico del PIB (IVFPIB) uruguayo entre el primer trimestre del año 1975 y el segundo trimestre del año 2007.

Para cumplir con este objetivo se utilizarán distintos filtros lineales para extraer el componente cíclico del PIB, y dicho ciclo se utiliza como aproximación a la brecha de producto para la economía uruguayo en el período analizado. Se obtienen medidas que describen las propiedades estadísticas de los ciclos estimados y se construyen intervalos de confianza para cada ciclo.

La estructura de este trabajo es la siguiente:

Los dos capítulos siguientes introducen los conceptos necesarios para comprender el problema que se analiza, en el capítulo 2 se plantean objetivos y antecedentes del trabajo y en el 3 se describe el problema de la extracción de señales.

Los capítulos 4, 5 y 6 conforman el marco teórico del trabajo. Los primeros dos describen los conceptos generales del análisis de las series de tiempo en el dominio de la frecuencia y la teoría de los filtros lineales, donde se analizan los filtros utilizados. Por último en 6 se describen algunas técnicas de bootstrap para el caso de series temporales que son la base teórica para la construcción de intervalos de confianza del ciclo estimado.

Los capítulos 7 y 8 son dedicados a los resultados y por último en el capítulo 9 se presenta la síntesis de los principales resultados obtenidos.

Capítulo 2

Antecedentes y Objetivos

En este capítulo se describen los conceptos iniciales necesarios para el estudio de la estimación de la brecha de producto a través de filtros lineales. Se comienza por determinar lo que se entiende por brecha de producto y las distintas metodologías de estimación.

Esto permite contextualizar los métodos de estimación que se utilizan en el trabajo teniendo en cuenta el conjunto de técnicas que no se tratarán aquí. Posteriormente, se presentan los principales objetivos del trabajo y una revisión de antecedentes en la estimación de la brecha de producto en la economía uruguaya.

2.1. Conceptos Iniciales

En el análisis económico, en particular cuando se analizan variables macroeconómicas, no necesariamente se realiza sobre los datos originales ya que los mismos contienen oscilaciones que no son de interés para el análisis y pueden distorsionar la interpretación de los resultados.

Las series de tiempo pueden desagregarse en distintos componentes, y según el objetivo del análisis algunos de estos componentes serán de interés y otros no. Estos componentes no son directamente observables, por lo que deben ser estimados.

El problema de extraer un componente de interés a partir de datos observados es conocido como *Extracción de Señales* y se le llama "señal" a dicho componente.

Los componentes de una serie temporal se asocian con fluctuaciones de distinta duración. Se distinguen las fluctuaciones tendenciales o de largo plazo, oscilaciones con duración mayor a un año, aquellas fluctuaciones menores a un año con mucha regularidad y por último las fluctua-

ciones de comportamiento errático que no aportan información. Estos componentes se conocen como: tendencia, ciclo, estación e irregular, respectivamente.

En este trabajo la señal de interés es el componente cíclico y se analizan distintas herramientas para la extracción del mismo. Sin embargo, es posible utilizar las mismas herramientas para extraer otro componente de interés, como la tendencia.

2.1.1. Brecha de Producto

El ciclo económico está asociado con los movimientos de la actividad económica agregada en su dinámica de corto plazo. Una definición para el ciclo económico ampliamente referenciada en la literatura económica es la formulada por Burns y Mitchell en 1946.

La misma ha influido tanto en la medición como en lo que se entiende por ciclo económico, en particular Burns y Mitchell entienden por ciclo¹:

...”Los ciclos económicos son un tipo de fluctuaciones encontradas en la actividad económica agregada de las naciones que organizan su trabajo en empresas de negocio. Un ciclo consiste en expansiones que ocurrieron aproximadamente al mismo tiempo en muchas de las actividades económicas, seguidas generalmente de recesiones, contracciones, y reactivaciones que se fusionan en la fase de expansión del ciclo siguiente; esta secuencia de cambios es recurrente pero no periódica; la duración de los ciclos económicos varía entre más de un año y diez o doce años”...

El ciclo económico no es el componente cíclico de una variable particular, si no que recoge los movimientos cíclicos comunes de un conjunto de variables macroeconómicas. Es decir, existe una relación directa entre los componentes cíclicos de las variables macroeconómicas, y lo que se definió anteriormente como ciclo económico.

La extracción del componente cíclico tiene varias aplicaciones en el análisis económico. En este trabajo las técnicas son aplicadas sobre la serie de índice de volumen físico del producto agregado del Uruguay (PIB)².

El ciclo del PIB **no** es el ciclo económico, pero tiene importancia sustantiva en sí mismo. Debido a que generalmente se toma como ciclo de referencia para la caracterización de las fluctuaciones

¹Definición extraída de [21]

²EL PIB representa el valor total de la producción de la economía en su conjunto descontados los el valor de los usos intermedios. Otra forma de describirlo es como la suma de los bienes finales e intermedios sin contar aquellos que son importados. EL IVFPIB es un índice construido por el Banco Central del Uruguay que describe la evolución de la producción en términos físicos.

de la economía en su conjunto.

Changny y Döpke presentan en [7] una discusión sobre la definición de la brecha de producto. La diferencia entre el PIB observado de la economía y su nivel "potencial" de largo plazo es conocida como la brecha de producto. Dicho nivel potencial puede definirse de distintas maneras. En su formulación original, Okun define el producto potencial como el nivel de producción que puede alcanzarse en una situación de pleno empleo. En las últimas décadas este concepto se ha ido modificando y se asocia el producto potencial con el mayor nivel de producto que la economía puede alcanzar sin generar presión inflacionaria.

En este trabajo, la brecha de producto se asocia con las fluctuaciones de corto o mediano plazo de la serie de IVFPIB, y por esta razón es estimada a través del componente cíclico del IVFPIB, que se constituye en la principal señal de interés a lo largo del trabajo.

Además la brecha de producto constituye un indicador utilizado para predecir las presiones inflacionarias. Una brecha de producto positiva, es decir un nivel de producción por encima del producto potencial, tiende a presionar los precios al alza.

Esto puede visualizarse en una curva de Philips, de la forma

$$\pi_{t+1} = \pi_t + \beta(y_t - y_t^*)$$

donde π_t representa la inflación, y_t el producto y y_t^* el producto potencial.³ Esta relación debe tomarse con especial cuidado y aquí se plantea a modo de ejemplo.

Existen muchas metodologías para calcular el producto potencial de un país, pero dado que es una variable inobservable, no es posible conocer con precisión la magnitud de los errores asociados con estimaciones de la brecha de producto, y por lo tanto determinar cuál es el mejor método.

2.1.2. Métodos de Estimación

Existen distintos métodos para la estimación del producto potencial, los mismos se pueden resumir en tres grandes grupos:

1. Métodos no Estructurales

Están basados en métodos estadísticos, y no en modelos económicos. La principal ventaja

³La formulación original de la curva de Philips vincula inflación con la tasa de desempleo. Pero puede suponerse que un nivel de empleo por encima del "natural" provoca que la producción se encuentre por encima de su nivel potencial

de éstos es su simplicidad y requieren de poca información para la estimación ya que son univariados. Dentro de este grupo se pueden distinguir dos subcategorías.

En primera instancia, se encuentran los que construyen modelos estadísticos para la serie de referencia, por ejemplo la metodología basada en modelos ARIMA propuesta por Maravall implementada en TRAMO-SEATS (en adelante se hará referencia a esta como la metodología TRAMO SEATS), los modelos de componentes inobservables o la descomposición de Beveridge y Nelson.

La segunda subcategoría son los filtros lineales que representan herramientas estadísticas diseñadas para extraer algún componente de interés, entre ellos se encuentran el filtro de Holdrick-Prescott o el filtro de Baxter-King, entre otros.

Recientemente se han implementado versiones multivariadas de este tipo de métodos, que buscan incorporar elementos de la estructura económica sin llegar a desarrollar un modelo económico.

2. Métodos Estructurales

Estos métodos se basan en una teoría económica específica y su principal desventaja es que requieren mucha información además de ser difícil su obtención. Dentro de este método se encuentra la estimación del producto potencial a través de la especificación de una función de producción; los vectores autorregresivos estructurales o el uso de la ley de Okun.

3. Métodos directos

Consisten en la elaboración de encuestas a empresas para obtener información sobre la capacidad utilizada. Requieren de mucha información en forma continua por lo que son costosas.

En este trabajo se utilizan únicamente métodos no estructurales univariados y en particular se estima el componente cíclico con los siguientes filtros lineales:

- Holdrick - Prescott propuesto en [18]
- Baxter - King propuesto en [3]
- Christiano - Fitzgerald propuesto en [8]
- Butterworth propuesto por Pollock en [29]

2.2. Objetivos

Como se mencionó en la sección anterior el componente cíclico del producto es inobservable. Esto permite que coexistan muchas maneras distintas para estimarlo, sin que sea claro cuál de ellas es la más adecuada. No es posible realizar un test de ajuste para las distintas estimaciones del ciclo ya que no existen datos en la realidad con los cuales contrastar.

Teniendo en cuenta la utilidad del ciclo para evaluar y diseñar las políticas económicas, es necesario tener criterios que permitan evaluar y comparar las distintas estimaciones del mismo. Además es sumamente importante, desde un punto de vista estadístico, tener alguna medida de precisión sobre la estimación puntual. Esto se puede obtenerse a partir de la determinación de un rango de valores "confiables" en torno a la estimación puntual.

Los objetivos generales del trabajo son: **extraer la señal cíclica del PIB uruguayo entre 1975-2007**, para lo cual se utilizan distintos filtros lineales como estimación alternativa para el ciclo; **implementar herramientas que permitan comparar los distintos métodos para la extracción de la señal cíclica en una serie temporal**, lo que supone estudiar las propiedades de los ciclos estimados con cada uno de los métodos utilizados, y por último **construir intervalos de confianza para los ciclos estimados** vistos como una medida de precisión de la estimación del componente cíclico.

Analizar la teoría estadística permite explicitar las características teóricas del ciclo y comprender el funcionamiento de los filtros lineales. En este sentido, el *análisis espectral* de las series temporales es útil para describir las propiedades teóricas de los filtros, así como entender el vínculo entre filtros lineales y la extracción del ciclo.

También es posible explicitar las propiedades de la señal cíclica estimada y obtener medidas relativas al ajuste, la estabilidad y el efecto distorsivo de los filtros empleados.

Los intervalos de confianza dan una idea de la precisión de la estimación y permiten responder la importante pregunta sobre si el ciclo es *significativamente* distinto de cero, ya sea por encima o por debajo de la tendencia. La estimación de los mismos se realiza basado en técnicas de remuestreo, que son descritas en el capítulo 6.

2.3. Antecedentes

Como se mencionó en la introducción, este trabajo supone la continuación de trabajos previos realizados por CEPAL dentro del convenio de cooperación con el gobierno uruguayo. Durante el año 2007 Rodríguez, Alvarez y da Silva elaboraron tres documentos ([35], [36] y [37]) que

consistieron en los insumos básicos del presente trabajo.

En [35] se analizan distintas metodologías de descomposición, y el efecto que tiene sobre la señal cíclica estimada con el filtro Hodrick-Prescott, en [36] se aplican, además de Hodrick-Prescott, los filtros de Baxter-King y Christiano-Fitzgerald, y por último en [37] se estima la brecha de producto en algunos sectores productivos.

La revisión de antecedentes para Uruguay permitió relevar una serie de investigaciones que con objetivos y períodos de análisis diferentes utilizan una variedad de metodologías para la estimación del producto potencial o la brecha de producto.

Carbajal et al [6] estiman el producto potencial y la brecha de producto siguiendo distintas métodos con datos trimestrales que van desde el primer trimestre del año 1975 hasta el cuarto trimestre del año 2006. Utilizaron un método basado en el ajuste de una función de producción de tipo Cobb-Douglas, la descomposición basada en modelos ARIMA seguida del filtro Hodrick-Prescott y un tercer método de descomposición basada en modelos estructurales.

Theoduloz [41] estima el producto potencial, utilizando una función de producción de tipo Cobb-Douglas a partir de datos de PIB anuales para el período 1978-2003. Se estima la brecha a nivel agregado y para los distintos sectores productivos.

Rodríguez y Badagián [38] obtienen diversas estimaciones del ciclo, utilizando un enfoque univariado a partir de datos trimestrales del índice de volumen físico del PIB entre 1980.01 y 2004.01. Se aplica un método de descomposición basado en modelos ARIMA [20] conjuntamente con la aplicación del filtro Hodrick-Prescott. Un segundo método basado en modelos estructurales, y adicionalmente se obtiene la señal cíclica mediante la aplicación del filtro de Baxter y King [3].

Badagián [2] aplica un enfoque univariado para la estimación del ciclo en base a datos trimestrales de 1980.01 a 2002.03. Aplica un método empiricista (X-11 ARIMA) y dos métodos de descomposición basados en modelos: el método basado en modelos ARIMA [20] y el método basado en modelos estructurales. Posteriormente, en los dos primeros aplica el filtro de Hodrick-Prescott a dos componentes (series desestacionalizada y tendencia-ciclo) para estimar brecha y producto potencial, en tanto en el tercer método el ciclo es un resultado de la propia metodología aplicada. Adicionalmente, estima el ciclo aplicando el filtro de Baxter y King [3].

Bucacos [5] estima el producto potencial y la brecha de producto mediante el ajuste de una función de producción de tipo Cobb-Douglas con datos anuales correspondientes al período 1960-1999. Alternativamente a los datos anuales del PIB le aplica el filtro Hodrick-Prescott (1980). Asimismo, utilizando datos trimestrales para el período 1975.04 a 2000.02 estima la tendencia segmentada, encontrando quiebres tanto en la ordenada como en la pendiente.

Kamil y Lorenzo [21] realizan una descripción del ciclo macroeconómico en la economía uruguaya

entre 1975-1994. La metodología de estimación está basada en modelos ARIMA [20] conjuntamente con la aplicación del filtro Hodrick-Prescott.

Capítulo 3

Extracción de Señales

En este capítulo se presenta el problema de la extracción de señales en el contexto de series de tiempo económicas. Esto significa explicitar cuales son los componentes inobservables de las series temporales y cuales de estos componentes son de interés en este trabajo.

El objetivo específico del capítulo es introducir los insumos que se utilizarán en el resto del trabajo desde la aproximación de la modelización ARIMA para luego comenzar el desarrollo teórico del análisis espectral.

Se definen los componentes inobservables de las series temporales y se describe la metodología de descomposición TRAMO-SEATS que es la utilizada en la modelización del Índice de Volumen Físico del PIB de la economía Uruguaya.

3.1. Componentes Inobservables

La noción de descomponer una serie observada en varios componentes no observados data del siglo XVII con los intentos de determinar la posición de los planetas. En el contexto económico, Pearson (1919 Review of Economic Studies) propone la descomposición de la serie económica en cuatro componentes.

En el contexto de la extracción de señales, una serie de tiempo se piensa como la agregación de un conjunto de señales ortogonales que son inobservables. Es decir, el proceso estocástico $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ puede ser descompuesto en cuatro componentes: la tendencia, el ciclo, la estación y por último el componente irregular. La relación entre $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$ y sus componentes puede ser de distintas maneras: las dos más comunes son la aditiva y la multiplicativa.

$$\begin{array}{ll}
\textit{Aditiva} & Y_t = T_t + C_t + S_t + I_t \\
\textit{Multiplicativa} & Y_t = T_t C_t S_t I_t
\end{array}$$

El vínculo entre la extracción de señales y el análisis en el dominio de la frecuencia, surge desde la definición de los componentes, ya que cada componente es asociado a un rango de frecuencia particular.

- **Tendencia:** T_t Es el componente asociado a las oscilaciones de baja frecuencia representando los movimientos de largo plazo o estructurales del fenómeno estudiado.
- **Ciclo:** C_t Es un componente de tipo oscilante que se caracteriza por ser un movimiento recurrente en torno a la tendencia que se repiten cada varios años, aunque no necesariamente de forma periódica. Recoge las fluctuaciones de mediano plazo de la serie, aunque existen distintas definiciones de este componente, que lo vinculan con frecuencias que son menores a las del componente estacional y mayores a las de la tendencia.
- **Estación:** S_t El componente estacional, es el asociado al comportamiento regular de la serie en las frecuencias correspondientes a períodos de un año y medio, es decir que recoge las características regulares de corto plazo de la serie.
- **Irregular:** I_t Tiene una estructura aleatoria y contiene oscilaciones no sistemáticas. Es el asociado a las frecuencias más altas y recoge los comportamientos inesperados del proceso a analizar.

Esta descomposición, permite realizar un mejor análisis de los fenómenos económicos, al brindar al analista una herramienta para aislar las diferentes causas de variación de una serie. Por ejemplo, una descomposición de este tipo permite observar el estado de una economía, reconociendo tanto los efectos estacionales como el punto en el ciclo en donde se encuentra en un momento determinado.

La señal más importante a lo largo del trabajo es la señal cíclica ya que el ciclo del IVFPIB se entiende como una medida de la brecha de producto.

Algunos de los filtros lineales que se utilizan, se aplican directamente sobre la serie de IVFPIB. Sin embargo, en otros filtros es necesario extraer primero otra señal para luego aplicar el filtro y extraer el ciclo. Para esto se utiliza una metodología que permite extraer la señal Tendencia-Ciclo (TC) y la Serie Ajustada de estación (SA).

En términos de la descomposición aditiva se puede plantear que $TC = T + C$ y $SA = T + C + I$, la metodología que se utiliza para esta descomposición es TRAMO-SEATS. A continuación se describen sus principales características.

3.2. Método TRAMO-SEATS

El procedimiento TRAMO-SEATS permite realizar el ajuste estacional de la misma. TRAMO está basado en los trabajos de Gómez y Maravall. Por otro lado SEAT realiza el ajuste estacional propiamente dicho, este se basa en los trabajos de Burman (1980) y Hilman y Tiao (1982)¹.

TRAMO (Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observations, and Outliers) es una herramienta para la estimación, predicción y la interpolación de modelos de regresión con valores faltantes y errores ARIMA lo que permite la modelización de diferentes tipos de valores anómalos o "outliers".

En Tramo se realiza el ajuste previo a los datos para luego aplicar el ajuste estacional, para que la serie preajustada pueda ser interpretada como la realización de un proceso estocástico lineal. Este proceso tiene en cuenta varios aspectos que es necesario modelar: el efecto de los datos faltantes, las observaciones atípicas y el efecto calendario.

El primer paso es trabajar con una serie que sea estacionaria en media y en varianza. Por lo tanto antes de estimar el modelo ARIMA, es necesario determinar si la serie de tiempo tiene varianza acotada o no. Esto es necesario para determinar si el modelo se correrá en nivel o se aplicará alguna transformación al mismo. En esta metodología se consideran dos opciones, trabajar con el modelo en logaritmos o en nivel. Tramo divide la serie en submuestras (índexadas por i) y estima para cada submuestra i una regresión del rango sobre la media.

$$r_i^{rango} = \epsilon_0 + \epsilon_i^{medio} + \nu_i$$

Si $\epsilon_1 >$ a un valor predeterminado entonces se aplica el logaritmo a la serie, y se trabaja en nivel en caso contrario. Si con el modelo anterior no es posible determinar el modelo, se utiliza el criterio de información de Schwartz (SBC)².

Luego que se decide trabajar con el modelo en nivel o en logaritmos, se pasa a la etapa de identificación de las variables de regresión. Dada $Y_t = X'\beta + Z_t$ hay que identificar el componente X . Estos regresores determinísticos se pueden clasificar de tres formas. En primer lugar los *Efectos*

¹La metodología TRAMO-SEATS fue programada por Gómez y Maravall (1997)

² $T \ln(SSE) + n \ln(T)$, donde T es el número de observaciones, SSE es el cuadrado de los residuos de la regresión.

Calendario que son fechas específicas en el calendario en que la serie tiene un comportamiento especial. Esta metodología considera el Efecto Pascua, días laborables, días del mes y efecto del año bisiesto. En el caso de series trimestrales el más importante es el efecto pascua. Por otro lado se tienen los *Efectos Especiales* en que se consideran casos en que es necesario intervenir la serie para captar eventos exógenos que no pueden ser recogidos por el modelo, como por ejemplo cambios de base, desastres naturales, etc. Finalmente se tienen los *Valores Atípicos*, que a diferencia de los anteriores son de naturaleza aleatoria, el programa identifica y estima tres tipos de valores atípicos y cada uno se incluye de manera diferente en el modelo, ellos son:

1. Aditivos: Son cambios repentinos que afectan un momento particular pero no tiene efecto en las observaciones siguientes.
2. Cambios de Nivel: Son cambios repentinos que tienen efecto permanente en el nivel de la serie.
3. Cambio Transitorio: Saltos repentinos cuyos efectos decaen en el tiempo.

Luego que están determinadas las variables de regresión se selecciona el modelo ARIMA. Se determina el orden de integración y los órdenes de los polinomios autorregresivos y de media móvil. Este modelo puede a la vez ser especificado por el usuario pero se deben considerar los criterios de la tabla 3.1

Cuadro 3.1: Restricciones para la selección de modelos

| | | |
|-----|------------|------------|
| AR | $p \leq 3$ | $p \leq 1$ |
| MA | $q \leq 3$ | $Q \leq 1$ |
| Dif | $d \leq 2$ | $D \leq 1$ |

Una vez especificado el modelo, el programa TRAMO:

1. Estima por máxima verosimilitud (o mínimos cuadrados condicionados o incondicionados) todos los parámetros del modelo seleccionado (de regresión y del modelo ARIMA general).
2. Detecta y corrige observaciones anómalas o outliers de tipo aditivo, transitorios y de cambio de nivel.
3. Proporciona predicciones de las series con su correspondiente error cuadrático medio.

4. Interpola los valores faltantes de forma óptima y calcula los errores cuadráticos medios. TRAMO dispone de una opción que realiza el tratamiento de outliers y la identificación del modelo ARIMA automáticamente.

SEATS (Signal Extraction in ARIMA Time Series) es un programa para la estimación de componentes no observados en series temporales, siguiendo el método denominado basado en modelos ARIMA. Se estiman y se obtienen predicciones de la tendencia, el componente estacional, el componente irregular y los componentes cíclicos. TRAMO proporciona a SEATS la serie original, los efectos no estocásticos que ha estimado, la serie linealizada (corregida por los efectos detectados por TRAMO), y el modelo ARIMA estimado. SEATS identifica los modelos que corresponden a cada componente y en segundo lugar se estiman los componentes utilizando un filtro lineal que se basa en el modelo identificado para cada componente en la etapa 1.

Modelo para Componentes

La metodología consiste en factorizar el modelo ARIMA de la serie corregida por efectos determinísticos, en modelos de tipo ARIMA para cada componente de la siguiente forma:

$$\phi_j(L)C_{jt} = \theta_j(L)\epsilon_{jt}$$

donde j representa los distintos componentes de la serie, que pueden ser la tendencia, el componente estacional, el ciclo y por último el irregular, y deben cumplir los siguientes requisitos:

1. La agregación de los componentes debe replicar al modelo identificado para la serie linealizada $Z_t = \sum_j C_{jt}$
2. El modelo utilizado debe replicar las características asociadas a cada componente.

Los supuestos en los que se sustenta la descomposición de la serie de tiempo son los siguientes:

- los componentes no observables están incorrelacionados
- Con respecto a la estructura de los modelos de los coeficientes, se supone que:

Las innovaciones, ϵ_{tj} de los modelos de los componentes son variables aleatorias normalmente distribuidas, con media cero y varianza σ_j^2 .

Ningún par de polinomios $\{\phi_j(L), \theta_j(L)\}$ comparten la misma raíz.

- Los diferentes polinomios $\phi_j(L)$ no comparten raíces unitarias.

Los polinomios que intervienen en el modelo de la serie original pueden ser factorizados en base a sus raíces. SEATS asigna cada uno de los factores a los componentes inobservables, dependiendo de la raíz. Por ejemplo si el modelo presenta una diferencia regular $(1 - L)$ este factor es asignado al componente de tendencia, y de forma similar para cada uno de los componentes.

Capítulo 4

Dominio de la Frecuencia

Este capítulo comienza con algunas definiciones básicas y luego se presentan los conceptos necesarios para comprender el análisis de series temporales en el dominio de la frecuencia.

Se realiza una introducción a las periodicidades vistas a partir de funciones seno y coseno en diferentes frecuencias. Esto implica precisar como intervienen las periodicidades en el estudio de series de tiempo económicas y la relación entre las periodicidades y el concepto de frecuencia.

4.1. Periodicidades en una Serie de Tiempo

En el estudio de series de tiempo se puede asociar la variabilidad de la misma con distintas periodicidades. Los fenómenos macroeconómicos, que son vistos en un alto nivel de agregación, en general pueden ser descompuestos en varios componentes; cada uno asociado a un período determinado. En este sentido en las ciencias económicas es muy común distinguir los efectos de largo plazo de aquéllos de corto plazo, ó las causas coyunturales y las estructurales de los objetos de estudio específicos. Este tipo de descomposición puede plantearse en términos de periodicidades.

La descomposición de la variabilidad de la serie en sus periodicidades caracteriza el análisis de series temporales desde el dominio de la frecuencia, el cual se desarrollará en las secciones siguientes de este capítulo. Lo que interesa en este momento es estudiar de qué manera se pueden representar las distintas periodicidades que intervienen en este tipo de análisis.

En la figura 4.1 se pueden ver los gráficos de la función $\text{sen}(wt)$ para tres valores distintos de w , y donde t puede representar el tiempo. Esta es una función "periódica", es decir que se repite cada cierto período, por esta razón es útil como ejemplo para ayudar a definir los conceptos de

Sen(w t) en distintas frecuencias

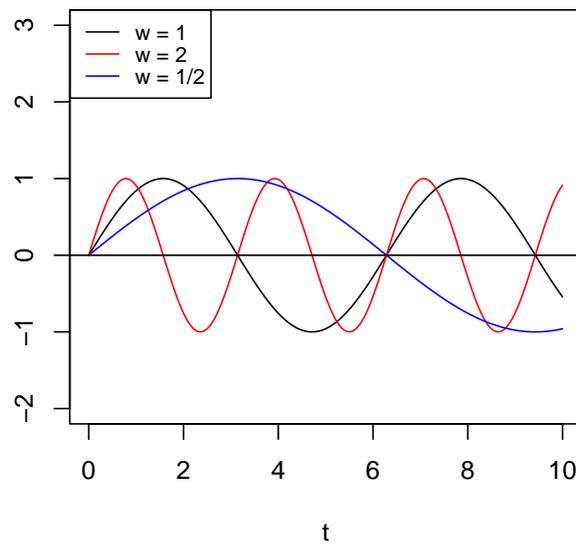


Figura 4.1: Senos con diferentes frecuencias

período, frecuencia y la relación entre ambos. Es notorio que las funciones dibujadas pueden asociarse con periodicidades distintas, cuando $w = 1/2$ el gráfico muestra movimientos mas "lentos" y corta una sola vez el eje horizontal. En el otro extremo si $w = 2$ el $\text{sen}(2t)$ es la que corta más veces el eje horizontal.

El período de la función se define como la distancia entre dos máximos relativos consecutivos, por ejemplo $\text{sen}(t)$ tiene un período $p = 2\pi$, lo que implica que $\text{sen}(t) = \text{sen}(2\pi t)$ para todo t , Se puede ver que el período está vinculado al valor de w . El término w es llamada frecuencia; su relación con el período (como fue definido recién) es $p = \frac{2\pi}{w}$.

En la figura 4.1 puede verse la relación inversa entre p y w , por ejemplo cuando $w = 2$ el período es menor o de otro modo los máximos relativos de $\text{sen}(2t)$ son más próximos entre si. El período de $\text{sen}(2t)$ es $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ y por eso hay tres máximos relativos en el intervalo de 0 a 3π .

La relación anterior entre período y frecuencia se aplica en términos generales y no sólo para la función seno, es importante ya que en muchos casos los resultados del análisis espectral pueden interpretarse de mejor manera en términos de períodos sobre todo en aplicaciones económicas.

4.2. Representación espectral de una serie

Una serie temporal consiste en una sucesión de variables aleatorias indizadas en el tiempo $\{Y_t\}_{t=0}^{\infty}$. Consideradas en forma conjunta estas variables conforman un proceso estocástico.

Para el análisis estadístico de las series de tiempo se debe estudiar la estructura estocástica del proceso generador de los datos, lo que permite describir las propiedades de interés del fenómeno de estudio.

Hay dos enfoques equivalentes para analizar las series temporales en forma univariada. Por un lado el análisis en el dominio del tiempo, que tiene como base el estudio de las correlaciones del proceso. Cada modelo define una estructura de autocorrelaciones particular, las herramientas claves son las funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial. En este enfoque se construyen modelos paramétricos que pueden ser del tipo autoregresivos AR(p) o de medias móviles MA(q). En segundo lugar el análisis de las series se puede hacer en el dominio de la frecuencia, y en este caso la base teórica del enfoque es el análisis de las series de Fourier, y la herramienta clave es el espectro poblacional de la serie. Este enfoque parte de la base de ver el proceso como una combinación de fluctuaciones de diferente amplitud y duración. En particular el dominio de la frecuencia permite trabajar cómodamente en la extracción de señales.

En ambos enfoques es fundamental el supuesto sobre la estacionariedad de la serie, ya que el mismo permite hacer inferencia estadística. Como en las series de tiempo cada observación proviene de una variable aleatoria distinta, la inferencia estadística descansa sobre la estructura de dependencia que hay entre ellas. Por esta razón es necesario imponerle a la serie cierta estabilidad.

Existen dos tipos de estacionariedad, en sentido estricto (o fuerte) y en sentido débil (o amplio). En el primer caso se supone que la distribución de las variables aleatorias es la misma a través del tiempo. Mientras que la estacionariedad en sentido débil requiere sólo que las variables tengan esperanza común, y autocovarianzas que no dependan del tiempo. En términos matemáticos:

Estacionariedad Fuerte

$$Y_t \sim Y_k \quad \forall t, k \quad (4.1)$$

Estacionariedad Débil

$$E(Y_t) = \mu \quad \forall t \quad (4.2)$$

$$E(Y_t - \mu)(Y_{t+k} - \mu) = \gamma_k \quad \forall t \quad (4.3)$$

Es importante resaltar que la estacionariedad fuerte implica la débil, ya que si la distribución de las variables es la misma en el tiempo, los momentos también lo son.

Uno de los principales resultados del análisis de Fourier es que cualquier función definida en un intervalo finito de reales, puede ser aproximada por una suma ponderada de funciones seno y coseno en las frecuencias armónicas crecientes. En el caso de una muestra con T observaciones que conforman una serie de tiempo Y_t el resultado de Fourier permite expresar dicha serie como en la ecuación 4.4.

$$Y_t = \sum_{j=0}^n \alpha_j \cos(w_j t) + \beta_j \sin(w_j t) \quad (4.4)$$

- $w_j = w_1 j$ con $w_1 = \frac{2\pi}{T}$ es la frecuencia fundamental.
- $n = \frac{T}{2}$ si T es par, y $n = \frac{T-1}{2}$ cuando es impar.
- Los coeficientes α_j y β_j son los llamados coeficientes de Fourier.

La representación de Fourier es el fundamento del *teorema de representación espectral*, que es el análogo del teorema de Wold pero en el dominio de la frecuencia y constituye la pieza teórica fundamental del análisis. La analogía con el teorema de Wold es que ambos brindan una manera de representar cualquier proceso que sea estacionario.

La ecuación 4.4 está planteada en términos determinísticos, pero para utilizar esta herramienta en la modelización de procesos estocásticos, es necesario incorporarle aleatoriedad. Más concretamente, el teorema de representación establece que si Y_t es un proceso estocástico estacionario en covarianza, el mismo puede ser representado como en la ecuación 4.5.

$$Y_t = \mu + \int_0^\pi \alpha(w) \cos(wt) + \delta(w) \sin(wt) dw \quad (4.5)$$

Donde $\alpha(w)$ y $\delta(w)$ son procesos estocásticos indizados en la frecuencia w que tienen media cero con incrementos independientes e incorrelacionados entre sí.

Estos dos procesos definen las características estocásticas de Y_t . Sin embargo en este trabajo, el análisis espectral de las distintas series se realiza basado en el Espectro Poblacional de la serie y no sobre estos procesos estocásticos.

4.3. Espectro Poblacional

El Espectro Poblacional es una herramienta fundamental para el estudio de series temporales en el dominio de la frecuencia, y el *Teorema de representación espectral* es la base para definirlo. En este sentido es necesario considerar, a partir de la secuencia de autocovarianzas γ_j , el concepto de función generatriz de autocovarianzas, la ecuación 4.6 muestra su forma de cálculo.

$$g_y(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \gamma_j z^j \quad (4.6)$$

Cuando la generatriz de autocovarianzas es evaluada en un escalar complejo $z = e^{-iw}$ y se divide por el factor 2π , el resultado es el espectro poblacional del proceso.

$$S_y(w) = \frac{1}{2\pi} g_y(e^{-iw}) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \gamma_0 + 2 \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \cos(wj) \right\} \quad (4.7)$$

En $S_y(w)$ se resume la variabilidad del proceso que generó la secuencia y_t , de la misma forma que en el dominio del tiempo este rol es jugado por la función de autocovarianzas. Por su forma de construcción, el espectro verifica las siguientes propiedades:

- Si γ_j constituyen las autocovarianzas de un proceso débilmente estacionario, entonces $S_y(w)$ es una función de valores reales, continua y no negativa.
- El espectro es simétrico respecto de $w = 0$, debido a que $\cos(wt) = \cos(-wt)$. Esto implica que $S_y(w) = S_y(-w)$.
- El espectro es una función periódica respecto a w con período 2π . Esto implica que el conocimiento de $S_y(w)$ para los $w \in [0, \pi]$ es suficiente para conocer el espectro en cualquier valor de w .

Interpretación del Espectro

Para entender la importancia y el significado del espectro es interesante considerar la relación entre $S_y(w)$ (desde el dominio de la frecuencia) y γ_j (dominio del tiempo). Dicha relación está representada en la ecuación 4.8 que conforma la tesis principal del teorema Wiener-Kinchine para procesos estacionarios.

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_y(w) e^{-iwj} dw = \gamma_j \quad (4.8)$$

La ecuación 4.8 muestra que la variabilidad de la serie está resumida en el espectro, en particular dice que a partir de $S_y(w)$ es posible obtener las autocovarianzas de la serie. Por otro lado ecuación 4.7 define el espectro poblacional de la serie como una función de γ_j . En conjunto, ambas ecuaciones determinan la existencia de una relación biyectiva entre el espectro poblacional y la estructura de autocovarianzas, y por lo tanto determinan la equivalencia entre el dominio del tiempo y el dominio de la frecuencia para el estudio de series de tiempo.

Si se considera el caso particular cuando $j = 0$, se puede ver que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_y(w) = \gamma_0 \quad (4.9)$$

Es decir que la variabilidad total de la serie es igual al área bajo el espectro poblacional. Además, como el espectro es siempre no negativo, la integral de $S_y(w)$ entre w_a y w_b puede ser interpretada como la porción de varianza explicada por periodicidades de frecuencias entre w_a y w_b . Así, utilizando el espectro poblacional es posible descomponer la serie en componentes vinculados a periodicidades con distinto rango de frecuencias. Esto vincula al análisis espectral de la serie con la teoría de extracción de señales.

Si se considera el caso de un proceso ruido blanco, es decir una secuencia ϵ_t de variables aleatorias iid, con media cero y varianza constante $V(\epsilon_t) = \sigma^2$, la secuencia de autocovarianzas $\gamma_j = 0$ para todo $j > 0$ y $\gamma_0 = \sigma^2$. Utilizando la ecuación 4.7 el resultado es que

$$S_{\epsilon}(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi}$$

El espectro poblacional es constante a lo largo de todas las frecuencias como lo muestra el gráfico 4.3. Esto puede interpretarse como que todas las frecuencias tienen el mismo peso para explicar la variabilidad de un proceso ruido blanco.

En el caso que se trabaje con un proceso MA(1):

$$\begin{aligned} y_t &= \epsilon_t + \theta\epsilon_{t-1} \\ \gamma_0 &= (\theta^2 + 1)\sigma^2 \\ \gamma_1 &= \theta\sigma^2 \\ \gamma_i &= 0 \quad \forall i > 1 \end{aligned}$$

Con la anterior estructura de autocovarianzas el espectro poblacional queda definido de la sigu-

iente manera:

$$S_y(w) = \frac{\sigma^2}{2\pi} (\theta^2 + 2\cos(w)\theta + 1)$$

En el gráfico 4.3 se puede observar que la pendiente del espectro poblacional depende del signo del parámetro, y en el caso que θ es positivo las frecuencias bajas son las que explican en mayor medida la variabilidad del proceso. En cambio cuando el valor de θ es negativo los resultados se invierten. Para ver el sentido que tiene la forma del espectro se debe recordar que las frecuencias bajas están asociadas a períodos más largos, en el primer caso los períodos largos explican la mayor parte de la variabilidad de la serie, mientras que en el segundo caso la mayor variabilidad está explicada con los períodos de más corto plazo, por lo que el proceso va a presentar un comportamiento más "inestable".

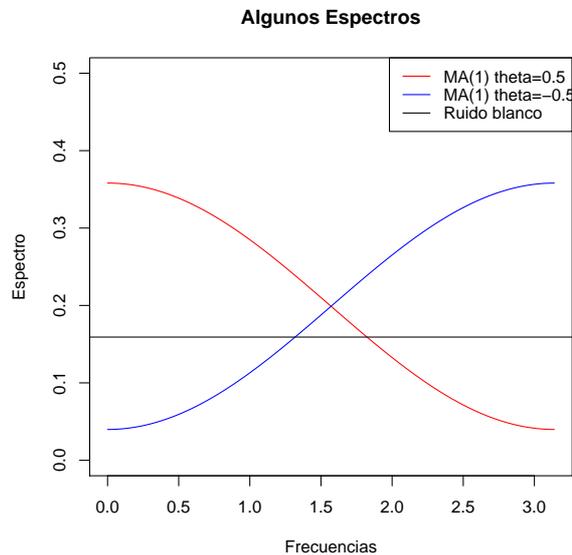


Figura 4.2: Espectro de un MA(1) con $\theta = 0,5$, MA(1) con $\theta = -0,5$ y un Ruido Blanco con $\sigma^2 = 1$

El espectro también es útil para identificar características del proceso generador de los datos, por ejemplo si el mismo presenta tendencia y/o estacionalidad.

En el primero de los casos el valor del espectro en $w = 0$ tiende a infinito y por esto, la forma de espectro será como la del gráfico 4.3. Por otro lado en el caso que la serie presente estacionalidad

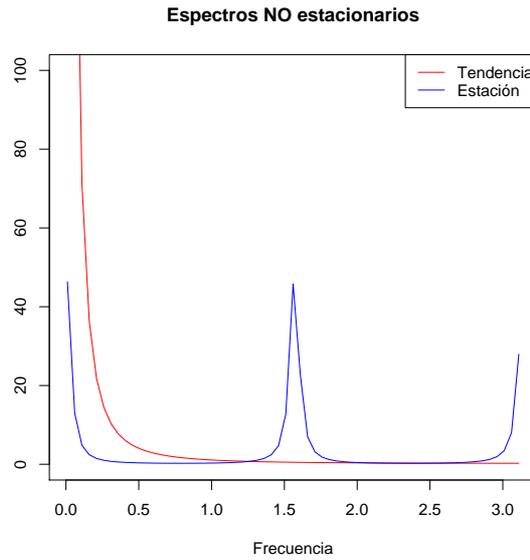


Figura 4.3: Espectros no Estacionarios

estacionaria el espectro tendrá un pico en la frecuencia estacional (por ejemplo en $w = \frac{\pi}{2}$ para series trimestrales).

4.4. Función de Transferencia

En esta sección se describe otra importante utilidad del espectro poblacional, que consiste en el análisis del efecto de la aplicación de un filtro lineal a un proceso estocástico.

En términos generales un filtro lineal tiene la siguiente estructura $h(L) = \sum_j h_j L^j$ donde L es el operador de retardos. Si se piensa en la representación de Wold de un proceso ARMA(p,q) estacionario,

$$Y_t = \Psi(L)\epsilon_t$$

se puede ver que todos los ARMA(p,q) constituyen la aplicación de un filtro $\Psi(L)$ a un proceso ruido blanco. El análisis espectral permite vincular la relación del espectro de un ruido blanco con un ARMA(p,q).

Sea X_t el resultado de aplicar el filtro lineal $h(L)$ a la proceso Y_t , esto se puede presentar como $X_t = h(L)Y_t$. La relación entre el espectro poblacional de X_t y Y_t es:

$$S_x(w) = h(e^{-iw})h(e^{iw})S_y(w) = f(w)S_y(w) \quad (4.10)$$

La función $f(w)$ es la llamada función de transferencia, la misma permite analizar el efecto del filtro $h(L)$ sobre la serie Y_t , observando que $f(w) = \frac{S_x}{S_y}$ se puede interpretar que si $f(w_a) > 1$ el filtro aumenta el peso de la frecuencia w_a , reducirá el peso en aquellas frecuencias donde la función de transferencia sea menor que la unidad y en el caso que $f(w_a) = 0$ el filtro anula el peso de esta frecuencia.

Un filtro ampliamente conocido y utilizado es el operador de primera diferencia regular $\Delta(Y_t) = Y_t - Y_{t-1}$. Esto es lo mismo que decir que a Y_t se le aplicó el filtro lineal $(1 - L)$.

La función de transferencia se obtiene como $f_{\Delta}(w) = (1 - e^{-iw})(1 - e^{iw})$ y operando se obtiene la expresión de la ecuación 4.11. Si en lugar del operador diferencia regular se considera el operador de primera diferencia estacional para series trimestrales, $\Delta^4(Y_t) = Y_t - Y_{t-4}$ y se realiza el mismo análisis se obtiene la función 4.12.

$$f_{\Delta}(w) = 2(1 - \cos(w)) \quad (4.11)$$

$$f_{\Delta^4}(w) = 2(1 - \cos(4w)) \quad (4.12)$$

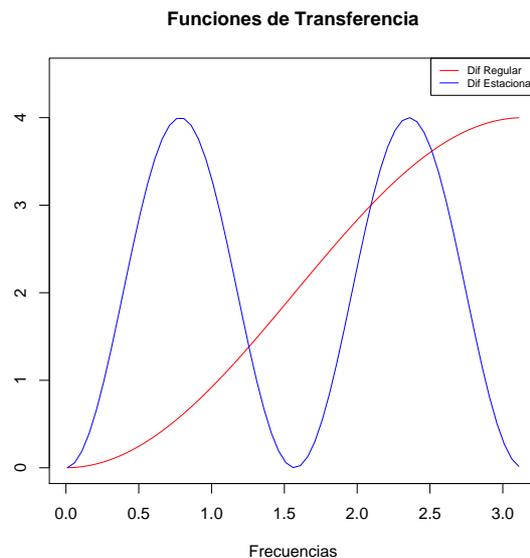


Figura 4.4: Funciones de Transferencia

Ambas funciones se muestran en el gráfico 4.4 donde se observa que hay frecuencias que son realizadas por el filtro y otras que ven su peso disminuido. Considerando la primera diferencia

regular, es importante destacar que el filtro anula la frecuencia $w = 0$ lo que es esperable ya que este filtro es usualmente utilizado para remover la tendencia de la serie.

De igual forma la primera diferencia estacional anula la frecuencia $w = \frac{\pi}{2}$, que es la asociada a un período 4 equivalente a un año en series trimestrales.

Ahora bien, a pesar que estos filtros son diseñados para eliminar el peso de las frecuencias mencionadas, incorporan distorsiones adicionales a la serie original. El análisis espectral permite ver que otros efectos (aparte de los buscados) son incorporados a la serie al aplicar estos filtros.

En particular cuando se utiliza la primera diferencia regular, se aumenta el peso de las frecuencias más altas y por lo tanto provoca que el proceso filtrado sea más ruidoso que el original. Mientras que cuando se aplica la primer diferencia estacional, se realza la frecuencia $w = \frac{\pi}{4}$ que se asocia a un período de 8 trimestres. Es importante considerar estos efectos ya que, cuando se analiza la serie filtrada, se pueden confundir las características de los datos con los efectos introducidos por el filtro que no son propios del proceso. En el siguiente capítulo se estudiará el diseño de filtros óptimos que intentan minimizar los efectos no deseados de la operación de filtrado.

4.5. La Estimación del Espectro Poblacional

En las secciones anteriores se describió cómo el espectro poblacional $S_y(w)$ representa la porción de la varianza de Y_t que puede ser atribuido a distintas frecuencias w , así como la importancia del espectro en la aplicación de un filtro lineal. En esta sección se describirán las distintas formas de estimar el espectro poblacional dada una muestra y_1, y_2, \dots, y_T .

La estimación del espectro no es trivial, por lo que existen diferente maneras de hacerlo y tiene puntos de contacto con la estimación de la densidad de una variable aleatoria a partir de un conjunto de datos. En términos generales, la estimación del espectro muestral se puede realizar de distintas formas: periodograma muestral, estimación paramétrica, estimación no paramétrica.

A continuación se describen brevemente cada una de ellas aunque en el resto del trabajo se utiliza únicamente un método paramétrico.

El Periodograma Muestral

La forma más directa en que el espectro poblacional puede ser estimado es a partir de las autocovarianzas de la ecuación 4.3. Primero se obtienen la autocovarianzas muestrales y luego se incluyen en la ecuación 4.7; el resultado se conoce como el periodograma muestral $\hat{S}_y(w)$.

$$\hat{S}_y(w) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^{T-1} \hat{\gamma}_j \cos(wj) \right\} \quad 0 \leq w \leq \pi \quad (4.13)$$

Fuller (1976) determina la distribución asintótica del cociente entre el periodograma y el espectro poblacional, $S_y(w)$, cuando $w \neq 0$ y un tamaño muestral T suficientemente grande. Formalmente establece que

$$\frac{2\hat{S}_y(w)}{S_y(w)} \xrightarrow{d} \chi^2(2)$$

Si se considera $\lambda \neq w$, la convergencia en distribución anterior se mantiene $\frac{2\hat{S}_y(\lambda)}{S_y(\lambda)} \xrightarrow{d} \chi^2(2)$ y además es aproximadamente independiente de la ecuación anterior.

Para ver las propiedades del periodograma como estimador del espectro se debe tener en cuenta que toda variable aleatoria que se distribuye $\chi^2(2)$ tiene esperanza 2 entonces el periodograma es un estimador asintóticamente insesgado para el espectro. Sin embargo la varianza del estimador no depende de T y por lo tanto no proporciona un estimador consistente del espectro para una frecuencia dada. El estimador no es más preciso a medida que se incrementa el tamaño de la muestra ya que aumenta el número de autocovarianzas a estimar. En concreto la varianza de una $\chi^2(2)$ es 4 y por lo tanto el desvío del periodograma es igual al valor del espectro.

$$E \left(\frac{2\hat{S}_y(w)}{S_y(w)} \right) \cong 2 \Rightarrow E(\hat{S}_y(w)) \cong S_y(w)$$

$$\frac{4V(\hat{S}_y(w))}{S_y(w)^2} \cong 4 \Rightarrow \sqrt{V(\hat{S}_y(w))} \cong S_y(w)$$

La última ecuación tiene al menos dos consecuencias importantes que descartan al periodograma como estimador. Primero que los intervalos de confianza son muy amplios y carecen de sentido como tales, y en segundo lugar que al tener mucha varianza en cada w el periodograma muestral es sumamente irregular y presenta muchos picos que no corresponden al proceso.

Estimación no Paramétrica

La estimación no paramétrica del espectro se construye a partir del periodograma muestral $\hat{S}_y(w)$ promediando sus valores más cercanos a w . Para cada w se promedian los valores del periodograma en frecuencias en el entorno de w , el estimador esta determinado por la amplitud del rango utilizado para promediar y los ponderadores de cada valor. La estructura de los ponderadores constituyen el núcleo de *kernel* sobre el que se basa la estimación.

Se comienza por definir un conjunto de frecuencias $B = \{\lambda \in (w_{j-m}, w_{j+m})\}$ de largo $L = 2m+1$ y centrada en w que constituye el rango sobre el que se realiza el promedio.

Este tipo de estimadores esta basado en dos supuestos básicos. Primero se supone que $S_y(w)$ es relativamente constante en las frecuencias que pertenecen a la banda B . En segundo lugar, a partir del resultado de Fuller ya mencionado, se plantea que $\hat{S}_y(w)$ y $\hat{S}_y(\lambda)$ son aproximadamente independientes en muestras grandes si $w \neq \lambda$.

A partir de estas condiciones $S_y(w)$ es estimado mediante un promedio ponderado de los valores de $\hat{S}_y(\lambda)$ para los $\lambda \in B$. El hecho de promediar variables aproximadamente independientes reduce la variabilidad por lo que debería proporcionar un mejor estimador del espectro que el periodograma muestral. Así el nuevo estimador de $S(w_j)$ queda como sigue:

$$S_y^*(w_j) = \sum_{h=-m}^m k(w_{j+h}, w_j) \hat{S}_y(w_{j+h})$$

Los términos $k(w_{j+h}, w_j)$, denominados ponderadores de *kernel* asignan cuál es el peso relativo de cada frecuencia, y cumplen que $\sum_{h=-m}^m k(w_{j+h}, w_j) = 1$. La formulación de estos ponderadores es muy general ya que permite que los ponderadores cambien para cada w_j aunque es más común que un conjunto de ponderadores no dependa de j , y por otro lado el término h indica la distancia de cada frecuencia a la frecuencia de interés w_j , por esta razón en general los ponderadores son decrecientes en h .

Existen diferentes tipos de funciones *kernel*. Una aproximación que se suele utilizar es $k(w_{j+h}, w_j)$ proporcional a $m+1-|h|$ y como $\sum_{h=-m}^m [m+1-|h|] = (m+1)^2$ los ponderadores propuestos son:

$$k(w_{j+h}, w_j) = \frac{m+1-|h|}{(m+1)^2}$$

El kernel utilizado por defecto en R para la estimación del espectro poblacional es el kernel de Daniell modificado. Los ponderadores que conforman este kernel tienen la particularidad de que los extremos de la media móvil en conjunto pesan como una observación¹, es decir si se recuerda que $L = 2m+1$, los ponderadores son $\{\frac{1}{2(L-1)}, \dots, \frac{1}{(L-1)}, \dots, \frac{1}{2(L-1)}\}$, por ejemplo con $m = 1$ $k = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\}$.

También se puede mejorar esta aproximación aplicando de forma recursiva este kernel, retomando el ejemplo anterior se aplica dos veces seguidas este kernel con $m = 1$, el resultado es una media

¹El ponderador de una observación cualquiera se reparte entre los dos extremos.

móvil de largo 5 ($L = 5$) con los siguientes ponderadores:

$$\left\{ \frac{1}{16}, \frac{4}{16}, \frac{6}{16}, \frac{4}{16}, \frac{1}{16} \right\}$$

La elección de m , el parámetro de ancho de la media móvil, en general se basa en criterios subjetivos. Mientras que el periodograma es asintóticamente insesgado, aunque con varianza grande, el estimador del espectro poblacional que se basa en el promedio del periodograma para diferentes frecuencias tiene menor varianza, pero genera algún sesgo.

Para estudiar las propiedades asintóticas de S_y^* se debe exigir una condición adicional para el conjunto de ponderadores, cuando $\frac{m}{n} \rightarrow 0$ y $m, n \rightarrow \infty$, entonces debe cumplirse:

$$\sum_{h=-m}^m k^2(w_{j+h}, w_j) \rightarrow 0$$

Bajo las condiciones anteriores

- $E(S_y^*(w_j)) \rightarrow S_y(w_j)$
- $(\sum_{h=-m}^m k^2(w_{j+h}, w_j))^{-1} V(S_y^*(w_j)) \rightarrow S_y^2(w_j)$
- $\frac{2L_h S_y^*(w_j)}{S_y(w_j)} \sim \chi_{2L_h}^2$

Donde $L_h = (\sum_{h=-m}^m k^2(w_{j+h}, w_j))^{-1}$. Las condiciones anteriores indican que S_y^* es un estimador asintóticamente insesgado, consistente y que reduce la varianza respecto al periodograma muestral. La última de las condiciones permitirá construir intervalos de confianza del estimador.

El sesgo de este estimador proviene del supuesto de que el espectro es constante en las frecuencias consideradas en la media móvil, por lo que la severidad del sesgo depende de la rapidez con que desciende el espectro poblacional y del tamaño del ancho de banda.

Una forma de elegir m podría basarse en los gráficos del espectro estimado usando diferentes valores de dicho parámetro y hacer un juicio subjetivo de cuáles son los valores más plausibles.

Otra forma de presentar el estimador $S_y^*(w)$ de manera que su expresión sea similar a la del periodograma y considerando $k_j^* = \left[\frac{\text{sen}(vj)}{vj} \right]$, es la siguiente:

$$S_y^*(w) = (2\pi)^{-1} \left\{ \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^{T-1} k_j^* \hat{\gamma}_j \cos(wj) \right\}$$

Escrito de esta forma se observa que el periodograma muestral es un caso particular del estimador

de *kernel* en el que $k_j^* = 1$. Los ponderadores k_j^* no pueden ser mayores que uno en valor absoluto, con lo que el estimador del espectro planteado subpondera las autocovarianzas $\hat{\gamma}_j$'s en relación al periodograma muestral.

Un estimador del espectro bastante popular utiliza la función *kernel* de Barlett modificando la que está dada por

$$k^* = \begin{cases} 1 - \frac{j}{q+1} & j = 1, 2 \dots q \\ 0 & \text{para } j > q \end{cases}$$

El estimador de Barlett es entonces

$$\hat{S}_y(w) = (2\pi)^{-1} \left\{ \hat{\gamma}_0 + 2 \sum_{j=1}^q \left[1 - \frac{j}{(q+1)} \right] \hat{\gamma}_j \cos(w_j) \right\}$$

Las autocovarianzas de orden mayor a q son tratadas como si fueran cero o como si Y_t fuera un proceso MA(q).

Estimación Paramétrica

Las opciones anteriores para estimar el espectro poblacional no suponen ninguna característica sobre el proceso generador de los datos. Una manera alternativa es especificar un modelo para los datos, estimar los parámetros de dicho modelo y estimar el espectro suplantando los parámetros por sus estimaciones en la fórmula teórica del espectro.

La técnica de estimación espectral autorregresiva desarrollada por Parzen (1974) y Akaike (1969) se basa en identificar un modelo AR(p) y estimar sus parámetros, luego

$$\hat{S}_y(w) = \frac{\hat{\sigma}_\epsilon^2}{2\pi} \frac{1}{|1 - \hat{\phi}_1(e^{-iw}) - \dots - \hat{\phi}_p(e^{-ipw})|^2} \quad (4.14)$$

Esto se conoce como el estimador autorregresivo del espectro, el valor de p puede ser obtenido utilizando el criterio de Akaike para la selección de modelos. Se debe tener en cuenta que no es necesario que la serie siga un proceso tipo AR, ya que los procesos estocásticos estacionarios tienen representación AR(∞) y este puede ser aproximado por un proceso autorregresivo de orden finito.

La distribución asintótica del estimador de la ecuación 4.14 ha sido estudiada por Berk (1974) que bajo ciertas condiciones muestra que el estimador espectral autorregresivo es insesgado, consistente y asintóticamente normal. Permitiendo obtener intervalos de confianza para el valor

del espectro, definiendo $C = \sqrt{\frac{2p}{n}}$ y $z_{\alpha/2}$ el valor que acumula $\alpha/2$ de probabilidad en una normal típica se establece que:

$$\frac{\hat{S}_y(w)}{1 + Cz_{\alpha/2}} \leq S_y(w) \leq \frac{\hat{S}_y(w)}{1 - Cz_{\alpha/2}}$$

Por otro lado Akaike (1974) propone un método similar pero ajustando un modelo ARMA(p,q)

$$y_t = \mu + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \theta_2 \epsilon_{t-2} + \dots + \theta_q \epsilon_{t-q}$$

donde ϵ_t es un ruido blanco con varianza σ^2 .

Primero se estiman los parámetros del modelo por máxima verosimilitud y se obtiene

$$\hat{\phi}_1 \dots \hat{\phi}_p \dots \hat{\theta}_1 \dots \hat{\theta}_q, \hat{\sigma}^2, \hat{\mu}$$

En segundo lugar hay que incorporar los parámetros estimados en la siguiente expresión del espectro para un modelo general ARMA(p,q):

$$S_y(w) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 + \theta_1(e^{-iw}) + \dots + \theta_q(e^{-iqw})}{1 - \phi_1(e^{-iw}) - \dots - \phi_p(e^{-ipw})} \right) \left(\frac{1 + \theta_1(e^{iw}) + \dots + \theta_q(e^{iqw})}{1 - \phi_1(e^{iw}) - \dots - \phi_p(e^{ipw})} \right) \sigma^2 \quad (4.15)$$

Si el modelo está correctamente especificado, los estimadores obtenidos por máxima verosimilitud antes especificados serán próximos a los verdaderos valores a medida que el tamaño de la muestra se incrementa, por lo que la estimación del espectro poblacional puede tener esta misma propiedad. La estimación del espectro poblacional puede ser sensible a la sobreparametrización, por lo que hay que tener cuidado en no elegir ni p ni q muy grandes.

Ambos métodos al basarse en un modelo teórico, el espectro estimado tiende a ser más suave que por las técnicas no paramétricas, aún si el modelo está incorrectamente especificado, si las autocovarianzas del verdadero proceso se encuentran cercanas a las de una especificación ARMA(p,q) este procedimiento debería proporcionar una útil estimación del espectro poblacional.

Elección del Método

De los distintos métodos de estimación del espectro que han sido descritos el único que es posible descartar para aplicaciones prácticas es el que está basado en el periodograma muestral. El periodograma puede usarse con fines exploratorios para dar una primer idea del espectro del proceso, pero visto como estimador presenta demasiada variabilidad.

Tanto las técnicas no paramétricas de suavización del periodograma como las técnicas paramétri-

cas basadas en aproximaciones con procesos AR pueden ser útiles y no es claro si una de ellas es mejor que la otra.

En el primer caso, como no se supone ningún modelo para los datos no se corre el riesgo de obtener una estimación fuertemente sesgada por error en el modelo, pero la cantidad de valores que se pueden estimar depende del tamaño de la muestra.

La aproximación del proceso con algún tipo de AR tiene implícito el error de dicha aproximación, sin embargo muchas veces el modelo usado en la estimación del espectro aproxima razonablemente bien a los datos. Además una vez que se cuenta con una estimación de este tipo es muy sencillo obtener nuevos puntos estimados del espectro poblacional, sin importar el tamaño de la muestra (claro que si la muestra es muy pequeña la estimación será de menor calidad).

Como ejercicio se simularon dos procesos para estimar su espectro con los distintos métodos reseñados, en la figura 4.5 se muestran las estimaciones del espectro de un proceso ruido blanco de varianza igual a la unidad.

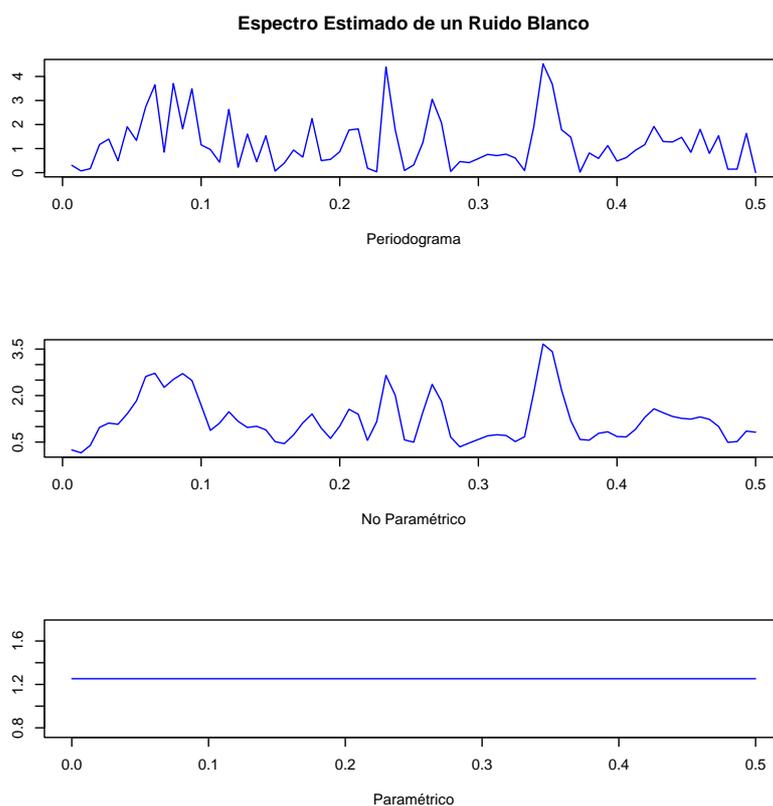


Figura 4.5: Métodos de estimación del espectro. Ruido Blanco con $\sigma = 1$

Se pueden realizar varios comentarios:

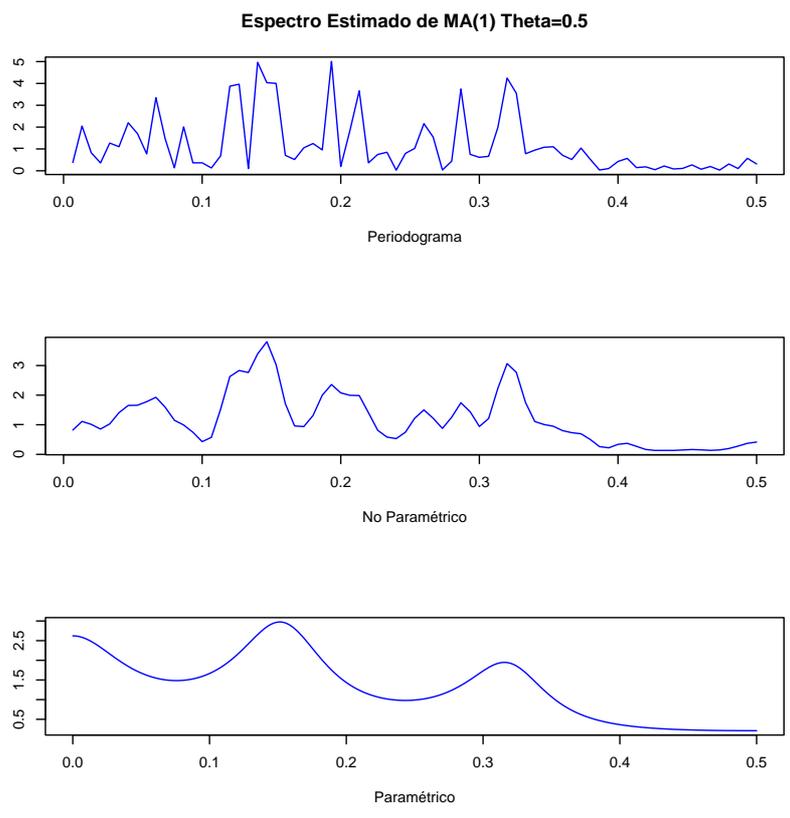


Figura 4.6: Métodos de estimación del espectro. MA(1) con $\theta = 0,5$ y $\sigma = 1$

- La estimación que conserva mejor la estructura del espectro es claramente el método paramétrico, esto se debe a que el proceso pertenece a la clase de modelos que el método considera (es un AR de orden 0) por lo que no presenta errores en la elección del modelo.
- El intervalo de frecuencias no llega hasta π sino que se detiene en el valor $1/2$. Esto se debe a que el R busca la escala que permite una estimación más ajustada del espectro, las frecuencias entre $[0, 1/2]$ pueden reescalarsse para que cubran el intervalo $[0, \pi]$.
- Las tres estimaciones están centradas en 1 y no en $\frac{1}{2\pi}$ como es esperable ya que este es el valor del espectro teórico del proceso. Esto se debe al reescalado mencionado en el ítem anterior, si las frecuencias llegan hasta $1/2$, la "altura" del espectro debe ser igual a 1 para mantener el área incambiada.

Por otro lado se prueba con un proceso de tipo MA(1), es importante ya que ahora el método paramétrico no puede elegir el modelo exacto porque sólo prueba con modelos tipo AR. Los resultados se muestran en la figura 4.5, y pueden compararse con el espectro teórico de un MA(1) con $\theta = 0,5$ y $\sigma = 1$ que se presentó en la figura 4.3 teniendo en cuenta que las escalas son distintas.

En este segundo caso, los resultados son similares al anterior pues el método que logra una estructura más similar al verdadero espectro es la estimación paramétrica, aunque en este caso es visible el efecto que tiene la aproximación a través de modelos tipo AR.

En suma, si bien no se pretende realizar un estudio profundo sobre las distintas maneras de estimación del espectro poblacional, se concluye que los ejemplos recién mencionados el método paramétrico mostró una mejor performance. Además con este método es posible tener una mayor cantidad de valores del espectro estimado, en los ejemplos se utilizó un tamaño de muestra $T = 150$ y esto da lugar a 75 valores del periodograma y la estimación no paramétrica, mientras que el método paramétrico arroja 500 valores estimados del espectro.

En el resto del trabajo, se estimarán los espectros de las señales cíclicas que surjan de los distintos filtros, para estudiar sus propiedades estadísticas y por esta razón es importante contar con una cantidad alta de valores estimados. Es por estas razones que se utilizará el método paramétrico para estimar los espectros de los ciclos.

Capítulo 5

Filtros Lineales

En el capítulo anterior se hizo una descripción en términos generales sobre los filtros lineales y el efecto de su aplicación a un proceso, visto a través de la función de transferencia.

En este capítulo se pretende profundizar en el análisis de los filtros lineales, haciendo hincapié en la descripción de las propiedades de los filtros en el dominio de las frecuencias. Se describen algunos filtros que pueden construirse para obtener la señal cíclica, los efectos que tienen los filtros sobre la serie a la que se les aplica y por último el diseño óptimo de los mismos.

5.1. Descripción de un Filtro en el Dominio de las Frecuencias

En términos generales se puede pensar que una operación de filtrado está representada por una combinación lineal de los datos Y_t para lograr extraer cada valor de la serie filtrada X_t , esta operación puede tener una estructura tipo ARMA como sigue:

$$X_t = \frac{\delta(L)}{\gamma(L)} Y_t = \sum_j \psi_j Y_{t-j} = \Psi(L) Y_t \quad (5.1)$$

La serie de ψ_j representa el efecto que tiene un cambio en una unidad de Y_t en la serie filtrada; la misma es llamada función de respuesta al impulso. Esta secuencia puede ser finita o infinita, y puede involucrar valores futuros y presentes de Y_t . Esto da lugar a la primera distinción entre los filtros lineales, por un lado los filtros de respuesta al impulso finita por otro los que tienen una respuesta al impulso infinita.

En el primer caso $\gamma(L) = 1$ por lo que este tipo de filtro puede ser interpretado directamente como una media móvil finita. Cuando el denominador sea un polinomio de rezago el filtro resultante

tendrá respuesta infinita al impulso. Las raíces de $\gamma(z^{-1}) = 0$ deben caer dentro del círculo unidad para que el filtro sea estable.

La descripción de la función de respuesta al impulso constituye una manera de trabajar con los filtros lineales desde el dominio del tiempo. Para trabajar en el dominio de las frecuencias se utiliza la transformación de Fourier que tiene a los ψ_j como coeficientes, esto es:

$$\Psi(w) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j e^{-iwj}$$

Esta función resume las características del filtro. Es la llamada función de respuesta a la frecuencia (en adelante función de respuesta) donde w representa la frecuencia medida en radianes que se encuentra en el intervalo $[-\pi, \pi]$, y i es la unidad imaginaria.

Todo filtro lineal presenta dos efectos fundamentales al ser aplicados a una serie de tiempo. En primer lugar puede modificar la importancia de alguna (o todas) frecuencia en la descomposición de la variabilidad, y por otra parte puede modificar el momento de tiempo donde una frecuencia determinada era relevante.

El primer tipo de efecto fue mencionado en el capítulo anterior al analizar los operadores de primera diferencia, tanto regular como estacional. Estos efectos se visualizan en la función de ganancia que se vincula con la mencionada función de transferencia. Los efectos del segundo tipo afectan el momento del tiempo en que una frecuencia importa, y pueden verse en la función de fase. Ambos efectos en conjunto están contenidos en la función de respuesta que puede descomponerse como se muestra en la siguiente ecuación.

$$\Psi(w) = |\Psi(w)|e^{i\theta(w)} \tag{5.2}$$

Donde $|\Psi(w)| = \sqrt{\Psi(w)\overline{\Psi(w^{-1})}}$ representa el módulo de $\Psi(w)$ que es la función de ganancia del filtro lineal y $\theta(w) = \text{Arg}(\Psi(w)) = \text{Arctan} \left\{ \frac{\Psi^{im}(w)}{\Psi^{re}(w)} \right\}$ representa la función de fase, que mide el ángulo que forma el vector w con el eje real en el plano complejo. La función $\Psi(w)$ es una función de variable compleja y la ecuación anterior representa su expresión en términos polares, mientras que tanto la función de ganancia como la de fase son funciones a valores reales.

Para diseñar un filtro en el dominio de la frecuencia se tiene como base la función de respuesta a la frecuencia ya que esta es la que determina las características del mismo. Por lo que se busca construir funciones de ganancia y de fase que sean óptimas en algún sentido.

En el resto del capítulo, los distintos filtros analizados constituyen distintas maneras de aproximarse al óptimo.

El criterio de optimalidad se basa en la distancia al llamado *filtro ideal* el cuál también está definido en términos de su función de respuesta.

Elementos de un Filtro

Todo filtro está compuesto por una banda de paso, que es aquella que está formada por las frecuencias que el filtro debe conservar y la banda de parada que está compuesta por las frecuencias que se busca anular. Por otro lado, el límite entre la banda de paso y la banda de parada se llama frecuencia de corte.

La definición de la banda de paso determina distintos tipos de filtros, cuando el rango de interés está formado por las frecuencias menores que una frecuencia de corte w_a se define el filtro paso-bajo. Por el contrario cuando el interés recae sobre las frecuencias mayores que w_b se denomina filtro de paso-alto y en el caso en que la banda de paso sea el intervalo (w_a, w_b) lo que se define es un filtro pasa banda.

Estos tres tipos de filtros están vinculados entre sí, y la construcción de cualquiera de ellos puede lograrse a través de una combinación de los otros dos. Por lo demás, y dado que los componentes inobservables de una serie están asociados a un rango de frecuencias, se puede asociar el filtro de paso bajo con la extracción de la tendencia, y el filtro de pasa banda con la extracción del componente cíclico. La desestacionalización de una serie puede asociarse con un filtro que tenga como banda de parada algunas frecuencias aisladas.

Como en este trabajo el interés principal recae en la extracción del componente cíclico, en la sección siguiente se describirá el filtro pasa banda ideal.

5.2. Filtro Pasa Banda Ideal

Un filtro pasabanda ideal es aquél que dada una serie Y_t , logra extraer solamente las frecuencias $w \in (w_a, w_b)$ es decir que es un filtro que tiene una función de respuesta como en la ecuación 5.3 en la que la fase es igual a cero y la ganancia es uno para las $w \in (w_a, w_b)$ y cero para las frecuencias que no pertenecen a ese intervalo.

$$\Psi(w) = \begin{cases} \Psi(w) = 1 & \forall w \in (w_a, w_b) \\ \Psi(w) = 0 & \forall w \notin (w_a, w_b) \end{cases} \quad (5.3)$$

El concepto de filtro ideal es la base para las distintas aproximaciones. Todos los filtros estudiados en este capítulo tienen como objetivo diseñar una función de respuesta de tal forma de ser lo

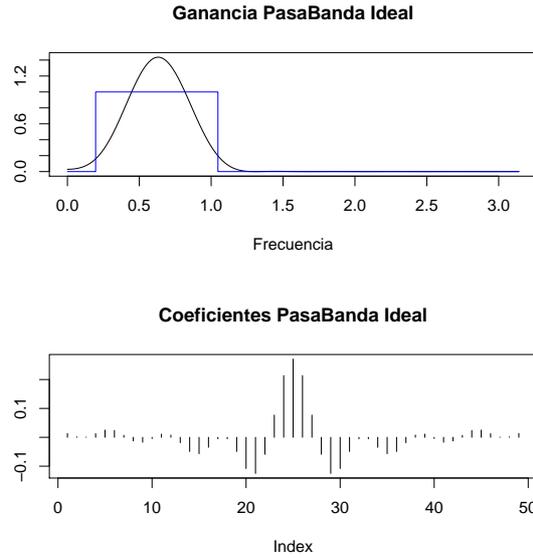


Figura 5.1: Coeficientes y Ganancia del Filtro Ideal

más similar posible a la de la ecuación 5.3. Por lo tanto en el contexto de la estimación de los componentes inobservables de una serie, el filtro ideal define el componente que se pretende estimar.

Por ejemplo en el caso que Y_t esté compuesta como se describe en la sección 3 (descomposición aditiva o multiplicativa), un filtro lineal cuyo objetivo es extraer el componente cíclico \hat{C}_t buscando la mayor aproximación al C_t definido por el filtro ideal con $w_a = \frac{2\pi}{32}$ y $w_b = \frac{2\pi}{6}$.

A partir de la función de respuesta definida en la ecuación 5.3 se pueden obtener los coeficientes ψ_j y de esta forma poder aplicar el filtro. Esto se logra con la inversa de la transformada de Fourier que es como sigue:

$$\psi_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Psi(w) e^{iwj} dw \quad (5.4)$$

En el caso del filtro pasa banda:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi(w) e^{iwj} dw = \int_{-w_b}^{-w_a} e^{iwj} dw + \int_{w_a}^{w_b} e^{iwj} dw$$

A partir de lo cual se pueden obtener los coeficientes del filtro ideal.

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j} \quad (5.5)$$

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \frac{w_b - w_a}{\pi} \\ \psi_j &= \frac{\text{sen}(w_b j) - \text{sen}(w_a j)}{\pi j} \quad \forall j \neq 0\end{aligned}\tag{5.6}$$

Las ecuaciones anteriores hacen evidente que para cada valor de la serie filtrada, se van a necesitar infinitos valores, ya que los coeficientes están definidos para todo j . Por otro lado se puede ver que a medida que j aumenta los coeficientes disminuyen, ya que el numerador está acotado mientras que el denominador aumenta. Esto implica que para obtener X_t los valores que tienen mayor peso en la serie original son los cercanos al momento t .

5.2.1. El Problema de Optimización

La implementación de un filtro ideal no es posible ya que para ello se requieren infinitos datos que en la práctica no están disponibles. Por lo que para la construcción de un filtro se tendrán que realizar aproximaciones y en tal sentido se diferencian dos grandes métodos para aproximar a $\Psi(L)$. El primero de ellos consiste en aproximar la secuencia de infinitos ψ_j con una serie finita, esto tiene sentido ya que cuando j aumenta ψ_j tiende a cero. En segundo lugar se encuentran los métodos que en vez de truncar la suma infinita de ψ_j incorporan una estructura recursiva. En las dos siguientes secciones se desarrollará en profundidad estos dos tipos de aproximaciones.

Más allá del método empleado, siguiendo el planteo de Schleicher (2003), el problema a resolver puede plantearse como sigue. Sea X_t el resultado de aplicar el filtro ideal de pasabanda en determinadas frecuencias de corte, es decir que $X_t = \Psi(L)Y_t$, y sea \hat{X}_t el resultado de aplicar un filtro aproximado a la misma serie original. Lo que se busca es minimizar el error cuadrático medio entre la serie filtrada por el filtro ideal y la serie filtrada por un filtro aproximado. A partir del teorema de representación espectral se puede plantear la relación entre el error cuadrático medio y las funciones de respuesta del filtro ideal y el aproximado.

$$\begin{aligned}E[X_t - \hat{X}_t]^2 &= \left\| X(e^{iw}) - \hat{X}_t(e^{iw}) \right\|^2 \\ E[X_t - \hat{X}_t]^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \Psi(e^{iw}) - \hat{\Psi}_t(e^{iw}) \right|^2 S_y(w) dw\end{aligned}\tag{5.7}$$

Como todas las aproximaciones intentan captar la forma de un filtro ideal, van a existir dos puntos críticos en todas ellas. El primero se da en la banda de parada, donde en general las aproximaciones presentan pequeñas oscilaciones alrededor del cero dejando pasar frecuencias que agregan ruido a la señal filtrada, a este se le llama leakage. En segundo término alrededor

de las frecuencias de corte se presenta un intervalo de transición entre la banda de paso y la banda de parada que es deseable que sea mínimo.

Siguiendo a Pedersen en [26] se pueden obtener medidas de los efectos distorsionantes de un filtro. Esto sucede en la medida que la función de respuesta no coincide con la del filtro ideal, considerando la función de fase y ganancia la distorsión puede modificar la importancia de cada frecuencia o desplazar dicha frecuencia en el tiempo.

Dentro de los efectos vinculados a la ganancia, típicamente se pueden distinguir dos situaciones; que el filtro permita pasar frecuencias que pertenecen a la señal que se quiere estimar o que modifique la importancia de frecuencias que deben pasar sin ser modificadas. El primer caso se denomina efecto *Leackage* y el segundo *Compresión* ambos pueden resumirse en la diferencia entre la función de ganancia del filtro ideal, $\Psi(w)$ y la del filtro aproximado $\hat{\Psi}(w)$, esto es:

$$LC = 2 \int_w |\hat{\Psi}(w) - \Psi(w)|dw \quad (5.8)$$

Si bien LC da cuenta de la diferencia entre las funciones de ganancia, no considera completamente el efecto distorsionante aún si se trata de filtros simétricos. Esto se debe a que el efecto distorsivo de un filtro depende de su función de ganancia y del espectro poblacional de la serie que se quiere filtrar, ya que aunque un filtro se aproxime muy mal al filtro ideal, la distorsión en la serie filtrada será baja si en dichas frecuencias la serie original tiene un espectro cercano a cero. Esto puede verse en la ecuación 5.7 de la sección anterior en que se muestra que la diferencia entre la señal cíclica ideal y la estimada depende de la serie original a través de su espectro.

En Pedersen [26] se deriva una medida del efecto distorsivo de un filtro, teniendo a $X_t = \Psi(L)Y_t$ como la serie filtrada con el filtro ideal y $\hat{X}_t = \hat{\Psi}(L)Y_t$ la serie filtrada con un filtro aproximado. Se puede estudiar la diferencia entre X_t y \hat{X}_t a partir de sus espectros.

$$2 \int_0^\pi |S_{\hat{X}}(w) - S_X(w)|dw = 2 \int_0^\pi |\hat{\Psi}(w)S_Y(w) - \Psi(w)S_Y(w)|dw$$

Luego tomando factor común en la ecuación anterior se logra obtener Q que mide el efecto distorsivo de un filtro. Esta medida es interesante ya que puede ser calculada en la práctica, sin embargo en el caso en que se trabaje con series que tienen raíces unitarias el espectro no esta bien definido y sólo puede calcularse una aproximación de Q .

$$Q = 2 \int_0^\pi |\hat{\Psi}(w) - \Psi(w)|S_Y(w)dw \quad (5.9)$$

5.2.2. Algunas Propiedades Deseables

Se ha mencionado que los filtros tipo paso bajo, paso alto y pasa banda están relacionados entre sí. En Pollock [29] se presenta una metodología para diseñar en forma conjunta un filtro tipo paso bajo y uno tipo paso alto, para lo que primero establece algunas propiedades deseables que deben cumplir ese par de filtros. En este apartado se describen dichas propiedades ya que son útiles para describir las propiedades de los filtros en general. Se deja para más adelante el diseño concreto propuesto por Pollock (que se describe en la sección 5.4).

En lo que sigue, $z = e^{-iw}$, $\Psi_L(z)$ y $\Psi_H(z)$ representan las funciones de respuesta del filtro paso bajo y paso alto respectivamente. Las condiciones son las siguientes:

1. $\Psi_L(z^{-1}) = \Psi_L(z)$, $\Psi_H(z^{-1})\Psi_H(z)$ Neutralidad de Fase
2. $\Psi_L(z) + \Psi_H(z) = 1$ Complementariedad
3. $\Psi_L(-z) = \Psi_H(z)$, $\Psi_H(-z) = \Psi_L(z)$ Simetría
4. $|\Psi_H(1)| = 0$, $|\Psi_H(-1)| = 1$ Condición de paso alto
5. $|\Psi_L(1)| = 1$, $|\Psi_L(-1)| = 0$ Condición de paso bajo

La neutralidad de fase implica que el filtro no presenta efectos de fase. Esto se puede ver teniendo en cuenta que esta condición se cumple cuando $\Psi_L(z) = |\Psi_L(z)|$ lo que determina que $Arg(\Psi(z)) = 0$. El resultado es que la serie filtrada mantiene la estructura temporal de la serie original.

La condición de complementariedad garantiza que la variabilidad total de la serie se reparta entre $\Psi_H(z)$ y $\Psi_L(z)$, y junto con la condición de simetría permiten relacionar directamente los filtros de paso alto y paso bajo en forma coherente. A partir de esta especificación es fácil construir un filtro de pasa banda que puede obtenerse de varias formas, por ejemplo restando dos filtros de paso bajo $\Psi_{PB}(w, w_a, w_b) = \Psi_L(w, w_b) - \Psi_L(w, w_a)$ ó combinando secuencialmente un paso bajo y un paso alto $\Psi_{PB}(w, w_a, w_b) = \Psi_L(w, w_b)\Psi_H(w, w_a)$. Así las condiciones anteriores pueden ser planteadas para el caso de un filtro pasa banda.

Las últimas dos condiciones son importantes y se vinculan con la pureza de la señal filtrada. Para interpretarlas se tiene que ver la relación entre z y w , cuando $z = 1$ $w = 0$ mientras que si $z = -1$ $w = \pi$. Esto es, que un filtro paso bajo en $w = 0$ tiene una función de ganancia que debe valer 1 mientras que cuando la frecuencia es π la función de ganancia debe valer 0. Es decir que si el filtro es de paso bajo la serie filtrada debe estar limpia de todo componente vinculado a las frecuencias altas.

Todo filtro ideal cumple con estas condiciones, por lo que más allá del significado de cada una de ellas, un filtro que cumpla con estas condiciones se aproxima a un filtro ideal. Por lo que la idea de las siguientes secciones es describir filtro de interés teniendo en cuenta cuales de estas condiciones cumple.

5.3. Filtros de Respuesta Finitos

Una forma de estimar la secuencia infinita de ψ_j es tomar sólo una parte de dicha secuencia, aprovechando el hecho que esos coeficientes tienden a cero cuando j aumenta. En términos de la ecuación 5.1 este tipo de filtros tiene $\gamma(L) = 1$, por lo que son filtros de tipo media móvil y su respuesta al impulso es finita. Se puede pensar que esta aproximación significa tomar una "ventana" de la secuencia de ψ_j , los distintos filtros se distinguen en la forma de esa ventana. La función de respuesta de los filtros finitos tiene la siguiente expresión.

$$\Psi_M(w) = \sum_{j=-M1}^{M2} \hat{\psi}_j e^{-iwj} \quad (5.10)$$

Los $\hat{\psi}_j = k_j \psi_j$ por lo que los coeficientes k_j determinan la forma de la ventana. El tamaño de la ventana está determinado por los valores de $M1$ y $M2$ que en su forma más simple son iguales e invariantes en el tiempo.

Existen diversas maneras de elegir estos coeficientes, el tipo de ventana más común es la ventana "rectangular" en la que los k_j son simplemente la unidad cuando $|j| \leq M$ y cero en el resto, y $M = M1 = M2$ invariantes en el tiempo. Esto implica que los coeficientes del filtro aproximado son los mismos que los del filtro ideal pero truncando dicha secuencia. El problema de este tipo de filtros es que para calcular X_t se necesitan datos hasta el momento $t + M$.

En esta sección se describen las características de dos filtros finitos que son comúnmente utilizados en la extracción del ciclo de negocio, primero se estudia el filtro propuesto por Baxter y King, y luego el propuesto por Christiano y Fitzgerald.

5.3.1. El Filtro de Baxter y King

El filtro diseñado por Baxter y King(1995) [3] es filtro de tipo pasa banda de respuesta finita por lo que puede resumirse en un polinomio de rezagos con estructura de media móvil.

El principal objetivo de los autores es que el filtro se aplique directamente sobre los datos originales para obtener el componente cíclico. Además Baxter y King buscan que las propiedades

estadísticas de la serie filtrada no sean afectadas por las características del filtro. Un aspecto importante de este filtro aplicado a las series económicas, es que está diseñado de forma tal que logra remover tanto las tendencias estocásticas como tendencias lineales o cuadráticas en los datos originales; esto es que la aplicación del filtro dé lugar a una serie estacionaria, incluso cuando la serie de entrada es una serie integrada de primer o segundo orden. Ellos consideran que el filtro no debe inducir cambios de fase, es decir, cambios en la serie con respecto a su posición en el tiempo, por ello diseñan un filtro simétrico.

Descripción del Filtro

Como ya se mencionó el filtro BK es un filtro tipo FIR simétrico, su función de respuesta a la frecuencia es como la ecuación 5.10 donde se considera que $M = M1 = M2$ y que $\hat{\psi}_j = \hat{\psi}_{-j}$.

Se puede vincular el filtro BK con el problema de optimización 5.7, de hecho la función de respuesta del filtro BK es la que surge de dicho problema incorporando la condición adicional de que la suma de los coeficientes de la media móvil sumen cero y considerando $S_y(w) = 1$, esto implica que los coeficientes de BK son óptimos en el caso que la serie original sea un ruido blanco.

$$\begin{aligned} \text{Min} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(e^{iw}) - \hat{\Psi}_t(e^{iw})|^2 dw \\ \sum_{-M}^M \psi_j = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Sin considerar la condición adicional antes mencionada (pero si $S_y(w) = 1$), se muestra que la solución consiste en igualar los coeficientes a los primeros M coeficientes del filtro ideal, es decir para los $|j| \leq M$ e igualar a cero los restantes. Esto significa truncar la media móvil infinita del filtro ideal en el valor M que se constituye en una media móvil de largo $2M + 1$.

Considerando la restricción del problema, Baxter y King obtienen los coeficientes de su aproximación a partir de los coeficientes del filtro ideal ψ_j , su expresión es como sigue:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_j &= \psi_j - \bar{\psi}_{2M+1} \quad \forall j \in [-M, M] \\ \bar{\psi}_{2M+1} &= \frac{\sum_{j=-M}^M \psi_j}{2M + 1} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para la aplicación del filtro se deben determinar valores concretos para el parámetro M , y para

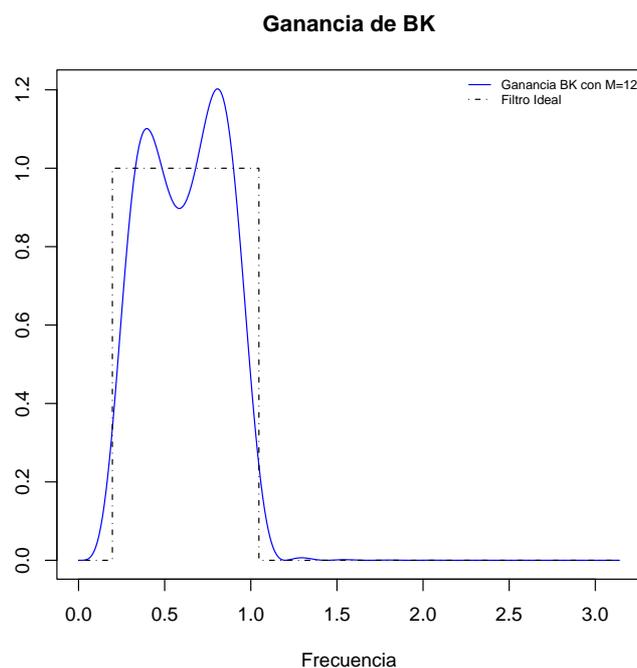


Figura 5.2:

las frecuencias de corte, es decir para las frecuencias mínimas y máximas del componente cíclico. Para series de datos trimestrales, Baxter y King, definen el ciclo con frecuencias correspondientes a períodos entre 6 y 32 trimestres y recomiendan utilizar un valor de $M=12$.

En la figura 5.2 se muestra la función de ganancia del filtro BK con $M = 12$ con el filtro pasa banda ideal. Los efectos distorsivos se observan entre las diferencias de la función de ganancia del filtro BK y el filtro pasa banda ideal, visualmente esta diferencia es más notoria en el componente de compresión que en el componente de leakage. Esto quiere decir que el mayor efecto distorsivo en este caso se da en las frecuencias que pertenecen al intervalo de interés, mientras que para las frecuencias asociadas al componente de tendencia (las más bajas) y las asociadas al componente estacional e irregular (las más altas) el efecto distorsivo es menor.

En términos empíricos, la principal ventaja de este filtro es la estabilidad de la serie resultante. Esto puede ejemplificarse considerando como se calcula el valor del ciclo en el momento t , para calcular BK realiza un promedio ponderado en el que utiliza veinticinco valores de la serie original, desde el momento $t - 12$ hasta el momento $t + 12$. A pesar que se incorporen nuevas observaciones de la serie original, el cálculo anterior se mantiene incambiado, lo que implica que el ciclo estimado con BK no sufre de errores de revisión¹.

¹Se entiende por error de revisión al cambio en el ciclo estimado al incorporar nuevas observaciones.

Por otro lado si $M = 12$, el filtro necesita de 12 observaciones hacia adelante para estimar el ciclo, esto hace que no sea posible tener estimaciones del componente cíclico en tiempo real. Esto constituye su debilidad más importante en lo que refiere al análisis de corto plazo. Para mitigar este problema, se puede extender la serie original prediciendo a más de 12 pasos.

5.3.2. El Filtro de Christiano y Fitzgerald

Otra aproximación al filtro ideal está dada por el filtro definido por Christiano y Fitzgerald (1999) [8] (CF) Este es similar al filtro de BK en el sentido en que puede expresarse como una media móvil finita. El filtro CF se diferencia del BK en su construcción, ya que su derivación se plantea sin considerar restricciones en el problema de optimización ni consideraciones sobre la simetría de los coeficientes.

La función de respuesta a la frecuencia de CF tiene la forma de la ecuación 5.10 pero donde $M1 = t - T$ y $M2 = t - 1$ varían según la posición del dato que se pretende estimar. El valor de la serie filtrada en el momento t se obtiene como sigue:

$$C_t^{cf} = \sum_{j=t-T}^{t-1} \hat{\psi}_j^{cf} Y_t$$

donde Y_t es la serie de entrada de la que se dispone de una muestra de tamaño T , $(y_1, y_2 \dots, y_T)$. Se puede destacar que a diferencia de BK el filtro CF utiliza todos los datos de la muestra para estimar C_t^{cf} lo que tiene como consecuencia que el filtro deba perder su simetría y con ella la propiedad de neutralidad de fase.

Además la función de ganancia no sólo depende de la frecuencia, sino que también depende de la posición que ocupe el dato, por lo que cada dato tiene asociada una función de ganancia, por lo que su representación gráfica debe ser realizada en tres dimensiones, en Iacobucci [19] se muestra la representación de esta función y allí se puede ver que en las posiciones más extremas, deja pasar las frecuencia estacional $w = \pi$.

Debido a que una cantidad de series macroeconómicas presentan espectros similares al de un paseo aleatorio, los autores utilizan esta función para ponderar cada frecuencia en la derivación del filtro. Los coeficientes del filtro, son los que se derivan de resolver el problema de optimización ya mencionado incorporando como ponderación de cada w , el pseudo-espectro de un paseo aleatorio.

$$\begin{aligned} \text{Min } Q_\psi &= \int_{-\pi}^{\pi} |\Psi(e^{iw}) - \hat{\Psi}_t(e^{iw})|^2 f(w) dw & (5.13) \\ \text{donde } f(w) &= \frac{1}{2(1 - \cos(w))} \end{aligned}$$

Christiano y Fitzgerald argumentan que no es necesario incorporar las restricciones que utilizan Baxter y King en la derivación de su filtro ya que el efecto de desfase que se provoca es reducido. Por otro lado ven conveniente ponderar las frecuencias con diferente peso ya que para frecuencias en que la serie de entrada es cercana a cero, la ganancia del filtro no tiene que estar tan próxima al filtro ideal.

La función $f(w)$ es decreciente en w y tiende a infinito cuando $w \rightarrow 0$, así se le otorga mayor peso a las frecuencias bajas.². Resolviendo el problema de minimización anterior se obtienen los coeficientes $\hat{\psi}_j^{cf}$, y su expresión es la siguiente:

$$\hat{\psi}_j^{cf} = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_0 - \sum_{k=0}^{j-1} \psi_k & \text{para } j = t - 1 \\ \psi_j & \text{para } j = t - 2, \dots, T - t - 1 \\ \frac{1}{2}\psi_0 - \sum_{k=j+1}^0 \psi_k & \text{para } j = T - t \end{cases} \quad (5.14)$$

Algunos aspectos del filtro CF deben ser tenidos en cuenta explícitamente pues no surgen directamente de la derivación del mismo. Primero el tratamiento que hace el filtro en caso que la serie original (en este caso el PBI agregado) presente una raíz unitaria. En este caso, ya se mencionó que en CF no hay una restricción que asegure que la serie de salida sea estacionaria, por lo cual la tendencia deberá ser tratada antes de aplicar el filtro.

Otro aspecto a resaltar tiene que ver con los coeficientes de CF. Al observar la expresión del filtro en términos de medias móviles y comparando con BK se puede ver que en el caso del filtro CF se utilizan todos los datos de la serie original, para obtener cada uno de los valores de la serie filtrada. Esto permite que el filtro CF permita obtener valores del ciclo hasta el último dato disponible. Los coeficientes no son constantes en todo momento del tiempo, si no que cambian según el momento en que se encuentre la observación y; dada su forma las ponderaciones más altas multiplican a los valores cercanos al momento t .

Siguiendo a Everts [12], estas dos formas de aproximarse al filtro pasa banda ideal difieren en dos supuestos fundamentales. El primero refiere a la densidad espectral de las variables. Mientras Baxter y King suponen que las variables siguen un proceso estocástico del tipo ruido blanco, Christiano y Fitzgerald suponen un paseo aleatorio.

²En particular $f(w) \leq 1$ cuando $w \geq \arccos(1/2) \approx 1,05$ que equivale a períodos menores a seis trimestres

El segundo supuesto en el que difieren tiene que ver con la simetría de los pesos del filtro, en BK los pesos son simétricos y en CF son asimétricos. Estas dos diferencias dan lugar a tres características disímiles entre los filtros: la diferencia en el supuesto sobre las características del proceso tiene influencia sobre la precisión de la aproximación en lo que tiene que ver con la duración del ciclo y el supuesto respecto a la simetría afecta por un lado la cantidad de datos que quedan disponibles una vez que se filtra la serie original, la aplicación del filtro BK implica la pérdida de los últimos 12 trimestres.

En cambio la aplicación del filtro asimétrico de CF no trae como consecuencia la pérdida de observaciones. Adicionalmente el incumplimiento de la propiedad de simetría determina que el filtro de CF no es capaz de obtener series filtradas estacionarias, si la serie de entrada es integrada; por tanto es necesario aplicar un filtro previo para que remueva la tendencia que contengan los datos, acorde a las características de la misma. Si la tendencia es estocástica se puede aplicar a la serie de entrada el operador diferencia y si la tendencia es lineal determinística, se puede restar para quitar su efecto.

Por otro lado a diferencia de BK este filtro presenta errores de revisión cuando se incorporan nuevos datos, es decir la estimación de el momento t se modifica cuando se incorpora un dato en $t + 1$. Estos errores se concentran sobre el final de la muestra y son especialmente importantes cuando la serie presenta estacionalidad.

5.4. Filtros de Respuesta Infinita

En esta sección se describen algunos de los filtros tipo IIR, cuya característica principal es que la función de respuesta al impulso es distinta de cero para una longitud infinita de valores. Su desarrollo surge en contexto de la ingeniería eléctrica que es uno de los campos donde el filtrado de señales es más comúnmente usado. Estos filtros son de la forma 5.1 y a diferencia de los FIR, $\gamma(L)$ no es la unidad, esto quiere decir que tienen una estructura recursiva. Esta estructura permite que los IIR, con menos cantidad de coeficientes, logra resultados similares a los de los FIR y pierde menor cantidad de datos.

Existen varias familias de filtros con respuesta infinita, por ejemplo los filtros de Chebysheff (tipo 1 y tipo 2), los Butterworth, los Elípticos, entre otros. Es interesante ver que la construcción de todos ellos comienza por la construcción de una función de ganancia con determinadas propiedades. En los últimos años, la familia de filtros Butterworth ha sido adaptada para ser aplicada en el campo de las ciencias económicas por Pollock (1999) y Gomez (1997). Por otro lado Harvey y Trimbur(2001) vinculan los filtros de Butterworth con los modelos de componentes inobservables. Por último el filtro Holdrick Prescott, uno de los más utilizados en economía,

puede verse como un caso particular de los filtro tipo Butterworth.

Por estas razones en lo que sigue se estudiarán los filtros Butterworth, describiendo las características generales de la familia y el caso particular del filtro Holdrick Prescott y el propuesto por Pollock en [29].

5.4.1. Filtro Butterworth

Este filtro de respuesta infinita fue diseñado por Stephen Butterworth en el artículo "On the Theory of Filter Amplifiers" en 1930. Se dividen en dos tipos, los de tipo seno (en lo que sigue BS) y los tipo tangente (en lo que sigue BT). Como se mencionó anteriormente el punto de partida de estos filtros es la función de ganancia. Para describir ambos casos se considerará la construcción de un filtro tipo paso bajo. En la siguiente ecuación se muestra la función de ganancia de ambos filtros.

$$|BS(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\frac{\text{sen}(w/2)}{\text{sen}(w_c/2)}\right]^{2n}} \quad (5.15)$$

$$|BT(w)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\frac{\text{tan}(w/2)}{\text{tan}(w_c/2)}\right]^{2n}} \quad (5.16)$$

La 5.15 muestra el tipo seno y mientras que la 5.16 el tipo tangente; en ambas w_c es la frecuencia de corte y n es un parámetro que regula la velocidad de transición de la banda de paso a la banda de parada.

La ecuación anterior puede ser expresada en función de los polinomios de rezago. Para ello se debe considerar que $L = e^{-iw}$, $\cos^2(w/2) = \frac{1+\cos(w)}{2}$ y por último que $\cos(w) = \frac{e^{iw}+e^{-iw}}{2}$. Partiendo de la expresión del filtro tipo seno mostrada en la ecuación 5.15, primero se define $\lambda = \frac{1}{2\text{sen}(w_c/2)^{2n}}$ que se asocia a la frecuencia de corte w_c y al grado del filtro. A partir de esto puede operarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} |BS(w)|^2 &= \frac{1}{1 + \lambda(2\text{sen}(w/2))^{2n}} \\ \text{sen}^2(w/2) &= 1 - \cos(w/2) = \frac{(1-L)(1-L^{-1})}{4} \\ BS(L) &= \frac{1}{1 + \lambda(1-L)^d(1-L^{-1})^n} \end{aligned} \quad (5.17)$$

La ecuación 5.17 es la expresión del filtro Butterworth de tipo seno en el dominio del tiempo, de forma similar considerando $\lambda = \frac{1}{\tan(w_c\sigma/2)^{2n}}$, se puede obtener la expresión para el filtro tipo tangente, que tiene la siguiente expresión:

$$BT(L) = \frac{(1+L)^n(1+L^{-1})^n}{(1+L)^n(1+L^{-1})^n + \lambda(1-L)^n(1-L^{-1})^n} \quad (5.18)$$

5.4.2. Filtro Holdrick Prescott

Como se mencionó al inicio del capítulo uno de los filtros más utilizados es el Holdrick Prescott que puede ser expresado como un caso particular de los filtros de Butterworth tipo seno. Es un filtro paso bajo, esto quiere decir que la función de ganancia es de la forma mostrada en la ecuación 5.15, y su expresión en el dominio del tiempo es como lo muestra la ecuación 5.17. En ambas expresiones se considera que $n = 2$.

La formulación original del filtro Hodick-Prescott no se realiza en términos de los filtros Butterworth, a partir de una serie temporal finita de largo T , el filtro define el componente de tendencia (T_t) como el que resuelve el siguiente problema de minimización:

$$\min \sum_{t=0}^T (y_t - T_t)^2 + \lambda \sum_{t=0}^T (\Delta T_t - \Delta T_{t-1})^2$$

donde se puede interpretar a λ como un parámetro que regula la suavidad del componente de tendencia, si es muy grande entonces T_t se aproximará a una recta y si es muy pequeño T_t se aproximará a los datos y_t .

Analizando las propiedades del filtro Hodrick-Prescott (HP) imponiendo $\gamma(L) = (1-L)^2$ en la ecuación 5.17 se observa que el filtro no tiene efectos de fase ya que

$$HP(z) = \frac{1}{1 + \lambda\gamma(z)\gamma(z^{-1})} = \frac{1}{1 + \lambda\gamma(z^{-1})\gamma(z)} = HP(z^{-1})$$

Las condiciones de simetría y complementariedad se logran tomando a $1 - HP(z)$ como filtro de paso alto. A partir de su función de ganancia se analizan las dos últimas condiciones, como $G_{HP}(w = 0) = 1$ y $G_{HP}(w = \pi) = \frac{\text{sen}(w_c/2)^2}{1 + \text{sen}(w_c/2)^2}$ se concluye que el filtro HP de paso bajo cumple la condición de paso bajo pero no la de paso alto.

Esto provoca que dicho filtro no sea eficiente en eliminar los componentes correspondientes a las frecuencias altas no deseadas, en otras palabras la señal filtrada con HP puede contener ruido y por eso se recomienda que la serie de input para aplicarlo no sea la serie original sino un

Ganancia HP

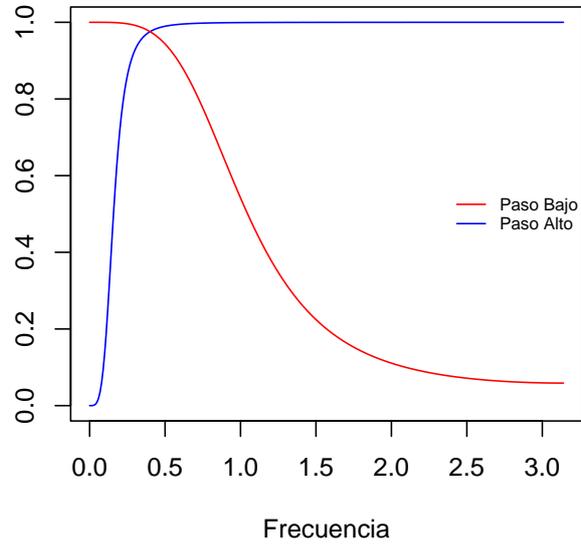


Figura 5.3:

HP Pasa Banda

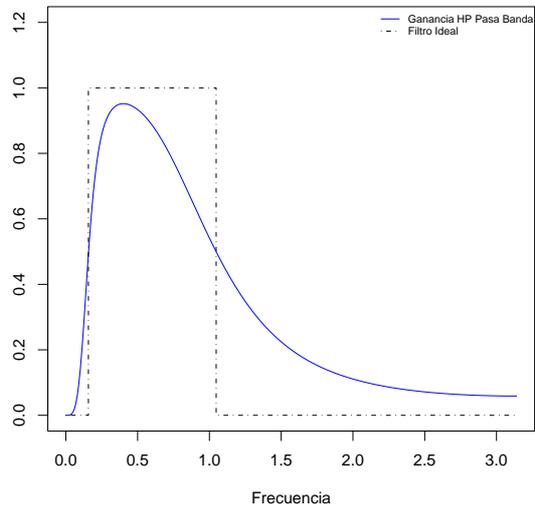


Figura 5.4:

componente que sólo tenga tendencia y ciclo [20].

Las figuras 5.3 y 5.4 ejemplifican esta situación, en la primera figura se muestra la función de ganancia de los filtros HP de paso alto y paso bajo, y en la segunda figura se muestra la ganancia de la versión pasa banda de HP, que se obtiene aplicando en forma secuencial el filtro paso alto y paso bajo antes mencionados. La ganancia de este filtro pasa banda es el producto de las ganancias de los otros dos.

Hay que resaltar que además de la poca eficiencia en el filtrado de las frecuencias altas, se puede ver que atenúa el peso en todas las frecuencias de interés. Tanto en la versión pasabanda como en la versión paso alto.

5.4.3. Un Filtro Tipo Tangente

En su artículo [29] Pollock describe una metodología general con la que diseña un filtro Butterworth de tipo tangente. Su objetivo es adaptar las técnicas de extracción de señales utilizadas en ingeniería eléctrica a datos económicos, aunque el filtro puede ser derivado de la aplicación de la teoría de Weiner-Kolmogorov.

El diseño del filtro está realizado de forma tal que cumpla con todas las condiciones reseñadas en la sección 5.2.2. Con cada una de las propiedades se contruye una parte del filtro.

Se comienza por plantear la aplicación del filtro con estructura ARIMA $\frac{\delta(L)}{\gamma(L)}$ de forma bidireccional. Esto implica que primero, el filtro se aplica "hacia adelante" (porque el filtro se evalúa en L^{-1} y luego el mismo filtro se aplica "hacia atrás" (evaluado en L).

Esta característica asegura la **neutralidad de fase** del filtro ya que los efectos de desfase que se producen cuando el filtro es aplicado "hacia adelante" son compensados por los efectos de aplicarlo "hacia atrás". Tomando como serie de entrada a Y_t y como serie filtrada a X_t , ambos filtros son combinados en único filtro que se expresa como sigue:

$$X_t = \frac{\delta(L)\delta(L^{-1})}{\gamma(L)\gamma(L^{-1})}Y_t$$

Pollock diseña en forma conjunta un filtro paso bajo y uno paso alto, es decir que se contruyen al mismo tiempo dos funciones de ganancia una $\psi_H(L)$ y una $\psi_L(L)$ esto le permite que se cumpla la condición complementariedad, imponiendo que $\gamma(L)\gamma(L^{-1}) = \delta_L(L)\delta_L(L^{-1}) + \lambda\delta_H(L)\delta_H(L^{-1})$. De esta manera

$$\psi_L(z) = \frac{\delta_L(L)\delta_L(L^{-1})}{\gamma(L)\gamma(L^{-1})} \quad \psi_H(z) = \lambda \frac{\delta_H(L)\delta_H(L^{-1})}{\gamma(L)\gamma(L^{-1})}$$

se asegura que $\psi_H(L) + \psi_L(L) = 1$, que constituye la condición de **complementariedad**. Para asegurar la condición de **simetría** se debe imponer que $\delta_L(L) = \delta_L(-L)$ y $\delta_H(L) = \delta_H(-L)$.

Resta determinar la forma de los polinomios $\delta_L(L)$ y $\delta_H(L)$, que se utilizan para definir un filtro de paso bajo y uno de paso alto. Para cumplir la condición de paso alto la ganancia ψ_L debe anularse en $w = \pi$ y ser la unidad en $w = 0$, y por otro lado la ganancia ψ_L debe anularse en $w = 0$ y ser igual a la unidad en $w = \pi$.

Imponiendo que $\delta_L(L) = (1 + L)^n$ y $\delta_H(L) = (1 - L)^n$ se verifican las propiedades recién mencionadas, asegurando las condiciones de **paso alto** y **paso bajo**. Además el filtro queda totalmente especificado, su expresión en términos de polinomio de rezago es como sigue:

$$\psi_L(z) = \frac{\delta_L(L)\delta_L(L^{-1})}{\delta_L(L)\delta_L(L^{-1}) + \lambda\delta_H(L)\delta_H(L^{-1})} \quad (5.19)$$

$$\psi_H(z) = \lambda \frac{\delta_H(L)\delta_H(L^{-1})}{\delta_L(L)\delta_L(L^{-1}) + \lambda\delta_H(L)\delta_H(L^{-1})} \quad (5.20)$$

La función de ganancia de este filtro es como la expresada en la ecuación 5.16, la misma tiene dos parámetros de ajuste, n y w_c , esto le da mayor flexibilidad a este filtro respecto al HP. La frecuencia de corte w_c está determinada por el rango de las frecuencias de interés, mientras que el orden del filtro n regula la tasa de transición de la banda de paso a la banda de parada.

Respecto del orden del filtro, se debe tener en cuenta que cuando el filtro de paso alto ψ_H se utiliza para filtrar una serie integrada y se pretende obtener como resultado una serie estacionaria, n tiene que ser mayor (o igual) que la cantidad de raíces unitarias de la seire.

En la figura 5.5 se muestra la función de ganancia para el filtro de BW paso alto y paso bajo, mientras que en la figura 5.6 se muestra la función de ganancia para el filtro pasa banda que se obtiene aplicando recursivamente los antes mencionados.

Se puede ver que a este filtro supera el problema de HP en lo que tiene que ver con las frecuencias más altas, no obstante las frecuencias que pertenecen al rango de interés ven disminuidas su importancia.

Ganancia de BW

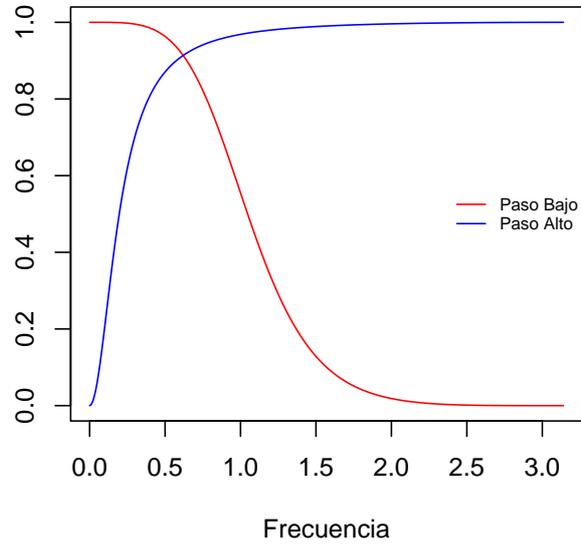


Figura 5.5: Ganancias del filtro BW

BW Tangente Pasa Banda

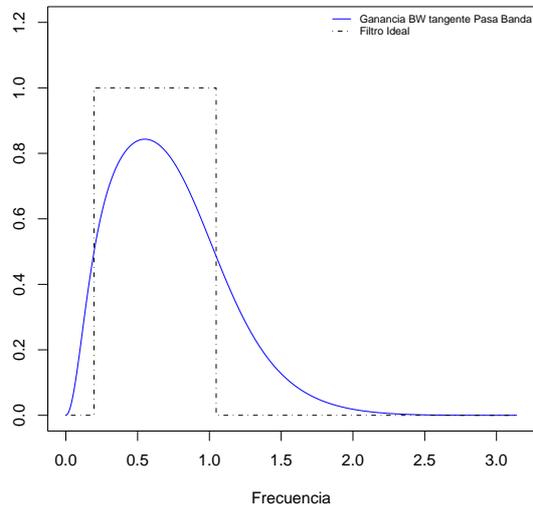


Figura 5.6: Ganancia de BW pasa banda

Capítulo 6

Bootstrap Para Series de Tiempo

Este capítulo tiene como objetivo ser el marco conceptual para la construcción de intervalos de confianza para la señal cíclica estimada. Como no se dispone de una medida de la variabilidad de los filtros, la misma se obtiene basada en técnicas de remuestreo.

Se describe en términos generales las técnicas de bootstrap, y luego las diversas metodologías para aplicar bootstrap a una serie de tiempo. Se comentan tres aproximaciones para realizar bootstrap en series de tiempo: el remuestreo basado en modelos, el remuestreo en bloques y el remuestreo basado en máxima entropía.

6.1. Técnicas de Remuestreo General

Las técnicas de remuestreo surgen con los trabajos de Efron en 1979 quién define las bases conceptuales que sustentan las técnicas estadísticas basadas en simulaciones. Estas técnicas pueden utilizarse para obtener estimaciones de sesgo, variancia y otras propiedades de los estadísticos en situaciones complejas. El contexto en que se desarrolla este tipo de aplicaciones puede presentarse como sigue:

- Y_1, Y_2, \dots, Y_n iid con $Y_1 \sim F$
- θ es el parámetro de interés
- T es un estadístico utilizado para estimar θ

En esta situación el problema consiste en estudiar las propiedades de la distribución del estadístico T , para lo cual hay dos grandes caminos.

En el primero se cuenta con un modelo paramétrico para la función de distribución F , es decir que existe ϕ tal que $F = F(\phi, y)$. En este caso el parámetro de interés $\theta = h(\phi)$. A partir de un estimador de ϕ , se obtiene una estimación para la distribución de los datos, $\hat{F} = F(\hat{\phi}, y)$. En el caso que no se disponga de un modelo para la distribución F , esta puede ser estimada con la distribución empírica de los datos. Esto es, $\hat{F} = F_n(y) = \frac{1}{n} \sum I_{y_i \leq y}$. Esta es una aproximación no paramétrica del problema.

El estadístico T es una función de los datos y por lo tanto sus propiedades estocásticas dependen de F . Así por ejemplo el sesgo del estadístico se expresa como $\beta = b(F) = E(T/F) - \theta$. Esta cantidad debe ser estimada ya que tanto θ como F son desconocidos, lo que se logra sustituyendo θ por $T(y_1, \dots, y_n) = t$ y F por \hat{F} . Se debe tener en cuenta que $b(F)$ puede ser cualquier otra característica de la distribución de T .

Entonces se quiere calcular $B = b(\hat{F}) = E(T/\hat{F}) - t$ como estimador de β . Se puede notar que el estimador del sesgo tiene la misma forma funcional pero evaluada sobre \hat{F} en lugar de la verdadera distribución.

En muchas situaciones el cálculo de $b(\hat{F})$ puede ser muy complejo, ya sea porque la función $b(\cdot)$ involucra momentos de mayor orden, cuando el tamaño de la muestra es pequeño o cuando está basado en la distribución empírica. Es aquí donde aparece la utilidad de las técnicas de remuestreo, que se basan en construir una aproximación de \hat{F} que simplifica el cálculo de $b(\cdot)$.

Las aproximaciones se obtienen a partir de simular el conjunto de datos, una simulación de los datos consiste en $Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*$ donde cada $Y_i^* \sim \hat{F}$ y son independientes entre si. Entonces se simulan R conjuntos de datos distintos y en cada uno de ellos se calcula $T^* = T(Y_1^*, Y_2^*, \dots, Y_n^*)$ obteniéndose una secuencia T_1^*, \dots, T_R^* que provienen de la distribución de T/\hat{F} .

De esta manera, continuando con el ejemplo del sesgo de T , se puede calcular la estimación de $B = b(\hat{F})$ con B_R , donde

$$B_R = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R T_r^* - t$$

6.2. Remuestreo en Series de Tiempo

En el caso del remuestro con datos independientes e idénticamente distribuidos recién comentado, la construcción de las réplicas es relativamente sencilla. Es decir, el objetivo es obtener $Y_i^* \sim \hat{F}$, para lo que cada dato observado debe tener igual probabilidad de ser seleccionado por lo que esto se logra con una MAS con reposición de los datos.

En cambio si los datos tienen una estructura de dependencia, el esquema anterior no puede ser

aplicado. A continuación se describen algunos métodos para obtener réplicas en el caso de datos con dependencia temporal.

Remuestreo Basado en Modelos

Esta metodología consiste en ajustar un modelo ARIMA $Y_t = \psi(L)\epsilon_t$ a los datos, obtener los residuos del modelo ajustado $\hat{\epsilon}_t = (\hat{\psi}(L))^{-1}Y_t$ y con ellos generar una nueva serie. Para ello se sorteja una muestra aleatoria simple con reposición de $\hat{\epsilon}_t$, y a partir de esa muestra se obtiene una réplica de la serie original. Esta es la forma más directa de obtener un conjunto de variables independientes e idénticamente distribuidas en donde se puede aplicar la técnica tradicional de bootstrap. De forma esquemática es posible representar este método de la siguiente manera:

1. A partir de $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ se estima un modelo ARIMA y se obtiene $\hat{\psi}(L)$ y $\hat{\epsilon}_t$
2. Se realiza una muestra aleatoria simple con reposición de los residuos del modelo estimado, obteniéndose $\{e_1^b, e_2^b, \dots, e_T^b\}$ que es un conjunto del mismo tamaño de la serie original donde pueden existir valores repetidos.
3. Se construyen réplicas del modelo ajustado calculando $y_t^b = \hat{\psi}(L)e_t^b$.
4. Para $b \in 1, 2, \dots, B$ se repiten los pasos 2 y 3.

La principal ventaja de este método es que se le puede aplicar a cualquier serie que sea modelable con un ARIMA. Esta metodología arroja buenos resultados cuando el proceso generador de los datos es el modelo ARIMA utilizado para construir las réplicas. Los problemas de este método surgen cuando el modelo ARIMA no es correcto ó cuando las réplicas del modelo no son estacionarias.

Remuestreo Basado en Bloques

El segundo método de remuestreo construye bloques de la serie original de tal forma que sean independientes, y luego el remuestreo es aplicado sobre los bloques. Para la construcción de los bloques no es necesaria la estimación de un modelo, por lo que es un método no paramétrico.

Los bloques se pueden construir solapados o no solapados. A partir de $\{y_1, y_2, \dots, y_T\}$ los bloques no solapados de tamaño h son

$$z_1 = (y_1, y_2, \dots, y_h), \quad z_2 = (y_{h+1}, y_{h+2}, \dots, y_{2h}), \quad z_{T/h} = (y_{T-h}, y_{T-h+1}, \dots, y_T)$$

es decir la serie original se particiona en T/h bloques de observaciones consecutivas que no se solapan entre si. Por otro lado los bloques solapados son

$$z_1 = (y_1, y_2, \dots, y_h), \quad z_2 = (y_2, y_3, \dots, y_{h+1}), \quad z_{T-h+1} = (y_{T-h}, y_{T-h+1}, \dots, y_T)$$

En este caso se obtienen $T - h + 1$ bloques, cada bloque de tamaño h repite $h - 1$ observaciones del bloque anterior.

Una vez que los bloques son construidos se sortea una muestra simple con reposición de bloques de tamaño T/h , con la que se construye una réplica de la serie original concatenando los bloques sorteados. Esto se repite B veces. Si la serie es estacionaria la dependencia entre observaciones disminuye a medida que la distancia entre ellas aumenta, la idea de estos métodos es que la dependencia de la serie esté contenida al interior de los bloques para tratarlos como intercambiables.

Esto motiva que el tamaño de los bloques sea suficientemente grande como para captar la dependencia de la serie. Por otro lado como el objetivo es tener una gran cantidad de estimaciones distintas del parámetro de interés (en este trabajo la señal cíclica), es necesario contar con muchas réplicas distintas de la serie original. Pero la cantidad de réplicas a su vez está limitada por el número de bloques, esto apunta a que el tamaño de los bloques sea pequeño para poder tener muchas réplicas distintas. Los dos efectos antes mencionados deben ser tenidos en cuenta para la definición del tamaño del bloque.

Existen muchas variantes para la construcción de los bloques, entre ellas la combinación del método basado en réplicas de modelos y bootstrap en bloques. Dicho método consiste en obtener los residuos de un modelo ARIMA y luego construir las réplicas de los residuos con bloques. Otra forma es que el tamaño de cada bloque sea aleatorio, esto permite obtener réplicas que son estacionarias cosa que no sucede con el esquema de bloques simples.

Remuestreo Basado en Máxima Entropía

Esta técnica es presentada en H.D Vinod [42], la misma se basa en considerar el criterio de máxima entropía para la construcción de las réplicas bootstrap. Este método es útil ya que no se necesita definir un modelo, además de que no es necesario tener una serie estacionaria para su implementación.

La entropía es definida como la esperanza de la información de Shannon, como sigue:

$$H = E(-\log f(x))$$

Se imponen las condiciones para que $f(x)$ sea una función de densidad y que además maximice H .

Primero se ordenan los datos y se define $z_t = 0,5(x_{(t)} + x_{(t+1)}) \forall t = 1, 2, \dots, T - 1$ que son los puntos intermedios entre dos estadísticos de orden sucesivos. Posteriormente se construyen intervalos de forma tal que cada intervalo contenga a un único estadístico de orden. En este sentido el primer y último intervalo son $I_1 = (-\infty, z_1)$ y $I_T = (z_{T-1}, \infty)$, mientras que los

intervalos intermedios se definen como $I_k = (z_{k-1}, z_k) \forall k = 1, 2, \dots, T - 1$.

Los intervalos antes mencionados son importantes, ya que son utilizados para construir la densidad de entropía empírica. En particular esta función es:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{m_1} \exp\left(\frac{x - z_1}{m_1}\right) & x \in I_1 \\
 f(x) &= \frac{1}{m_T} \exp\left(\frac{z_{T-1} - x}{m_T}\right) & x \in I_T \\
 f(x) &= \frac{1}{z_k - z_{k-1}} & x \in I_k
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

donde $m_1 = 0,75x_{(1)} + 0,25x_{(2)}$, $m_T = 0,75x_{(T)} + 0,25x_{(T-1)}$ y $m_k = 0,25x_{(k-1)} + 0,50x_{(k)} + 0,25x_{(k+1)}$. Con esto se puede calcular la distribución de máxima entropía a partir de los datos, en el artículo de Vinod se cita a Kagan (1973) y Theil-Laitinen(1980) como antecedentes para el cálculo de estas funciones. Luego se sortean valores provenientes de la distribución de máxima entropía para construir muestras de la muestra ordenada, y finalmente se reordena cada réplica para recuperar el orden original de los datos.

Capítulo 7

Comparación de Ciclos

En este capítulo y el siguiente se presentan los principales resultados del trabajo. Para comenzar se presenta el ajuste de un modelo ARIMA para el IVFPIB, la extracción del componente Tendencia Ciclo y la serie desestacionalizada con la metodología TRAMO-SEATS.

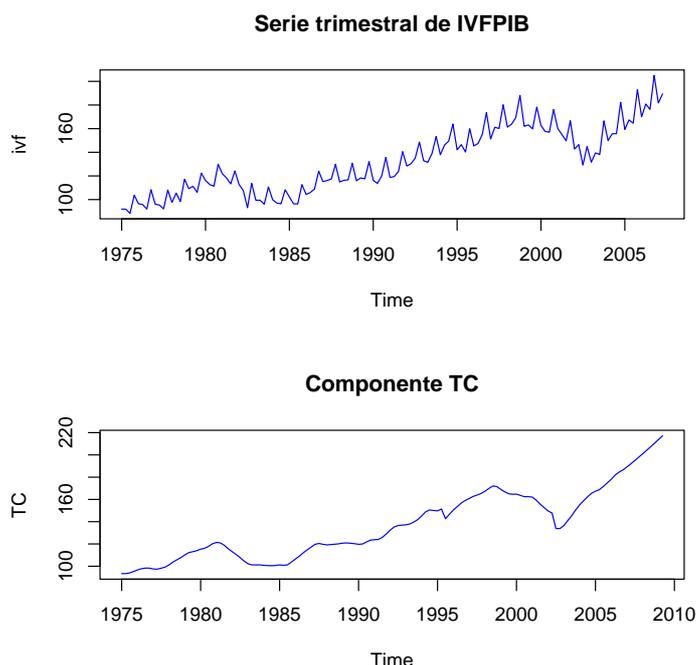
Luego se realiza la estimación del componente cíclico del PIB agregado para cada uno de los filtros considerados en el documento y se calculan medidas para medir las características de los ciclos estimados y evaluar el ajuste de los filtros utilizados. Por último en el capítulo siguiente se muestra una primera aproximación al cálculo de intervalos de confianza para el ciclo estimado.

Se debe destacar que tanto la serie de IVFPIB utilizada, el modelo ARIMA para el IVFPIB y la descomposición del mismo por TRAMO-SEATS son tomados del trabajo realizado con Rodriguez en ??, ?? y??.

7.1. Modelo Especificado para el IVFPIB

A los efectos de estimar la brecha de producto y el producto potencial se trabajó con la serie trimestral de Índice de Volumen Físico del Producto Bruto Interno (IVFPBI) para el período 1975.01-2007.02, cuya fuente primaria es el Banco Central del Uruguay (BCU). La misma se presenta en la figura 7.1 junto con el componente TC estimado con TRAMO-SEATS.

A fin de poder utilizar una serie larga, se toma la serie de IVFPBI desde su primera publicación trimestral. El empalme que se utiliza es el publicado en Ponce (2004). El autor utiliza el método de la tasa de variación. Se aplica la variación trimestre contra igual trimestre del año anterior y si existen más de dos bases con información superpuesta, se respetan las variaciones de las series de base más cercana en el tiempo, completándose con las de base anterior.



La serie que se utiliza en este trabajo se obtiene tomando los valores publicados en Ponce (2004) hasta el cuarto trimestre del 2002 y la misma se extiende con las variaciones interanuales de la serie de IVFPBI de las Cuentas Nacionales con revisión en el año 1988 y base en 1983.

Para la modelización del IVFPBI se utilizó la identificación automática del programa TRAMO y la estimación del componente Tendencia-Ciclo (TC) y de la Serie Desestacionalizada (SA) se realizó con el programa SEATS y ambas rutinas están implementadas en el programa Demetra. Para la especificación del modelo ARIMA se aplicó una transformación logarítmica a la serie. Se incluyó una variable auxiliar que modele el efecto de la semana de turismo y la serie original fue diferenciada con un operador de diferencia regular de orden 1 y con un operador de diferencia estacional de orden 1.

El modelo es un ARIMA (0,1,0)(0,1,1) con tres valores atípicos fechados en 1982.03 (outlier aditivo), 1995.03 (outlier de cambio transitorio) y 2002.03 (outlier cambio transitorio). La variable modelada es $y_t = \log(IVFPBI_t)$ y la formulación analítica sería la siguiente:

$$(1 - L)(1 - L^4)y_t = (1 - \theta^4 L)\epsilon_t + \alpha_1 Tur_t + \alpha_2 I_{82,3}^{AO} + \alpha_3 I_{95,3}^{TC} + \alpha_4 I_{02,3}^{TC} \quad (7.1)$$

donde Tur_t es la variable de regresión que recoge el efecto de la caída en el IVFPBI en los

Cuadro 7.1: Parámetros estimados del modelo ARIMA

| | |
|------------------|---------|
| $\hat{\theta}^4$ | -0.4641 |
| $\hat{\alpha}_1$ | -0.0026 |
| $\hat{\alpha}_2$ | -0.097 |
| $\hat{\alpha}_3$ | 0.0194 |
| $\hat{\alpha}_4$ | -0.0862 |
| $\hat{\sigma}$ | 0.02 |

primeros o segundos trimestres del año, dependiendo de que la semana de turismo ocurra en marzo o en abril. $I_{82,3}^{AO}$ es una variable indicadora, que modeliza el efecto de un dato atípico de tipo aditivo ocurrido en el tercer trimestre de 1982. Las variables $I_{95,3}^{TC}$ y $I_{02,3}^{TC}$ son variables indicadoras que modelan los efectos de datos atípicos de tipo cambio transitorio que ocurren en el tercer trimestre de 1995 y 2002 respectivamente. Por último el parámetro *sigma* representa el desvío estándar estimado de ϵ_t .

El modelo se utiliza para realizar proyecciones del IVFPIB y poder mitigar los errores al final de la muestra de los filtros lineales estirando la serie original, y también para realizar su descomposición a fin de obtener el componente TC y el SA. Estos componentes se utilizan como series de entrada para algunos de los filtros usados en el trabajo. En particular se utiliza TC para HP y SA para CF. En este sentido, es importante conocer como se distribuye entre los componentes el efecto de los regresores que se incorporan en el modelo estimado. El efecto de Tur_t se asigna al componente estacional. Los valores atípicos de cambio de nivel al componente TC y los valores atípicos de tipo aditivo y tipo cambio transitorio se asignan al componente irregular. Esto implica que si el ciclo estimado se obtiene a partir del componente TC, este no recoge los efectos de los valores atípicos de 1995 y 2002 lo que no parece adecuado.

Para incorporar esos efectos en el componente TC se realiza la estimación de otro modelo en el que no se permite que el programa identifique valores atípicos de tipo cambio transitorio, sólo cambios de nivel y aditivos. El modelo estimado con esta restricción es muy similar al anterior; también es un ARIMA(0,1,0)(0,1,1) en logaritmos con $\theta^4 = -0,47$. El efecto de Tur_t es el mismo que en el caso anterior y el cambio es que en el tercer trimestre de 1995 y 2002 se identifican valores atípicos tipo cambio de nivel. Respecto a la descomposición de la serie el único efecto se da en el componente TC ya que el SA es el mismo en ambos modelos.

7.2. Filtros Utilizados

A partir de la presentación teórica de los filtros realizada en el capítulo 5, aquí se describe la forma concreta en que se aplican, es decir, se explicitan los valores utilizados de los parámetros

en cada filtro, justificando su elección.

Baxter King

El filtro BK se aplica sobre los datos originales sin necesidad de prefiltrarlos. Es un filtro de tipo FIR como se mencionó en 5.3. Los parámetros a ser fijados, son el rango que constituye la banda de paso (que es lo que define al ciclo) y el largo de la media móvil. Respecto a la banda de paso, se toma como período mínimo para el componente cíclico 6 trimestres y como máximo 32.

Para el análisis de sensibilidad ante cambios de M Baxter y King analizan el desvío, así como el efecto de leakage y compresión ante variaciones en el largo de la media móvil, para lo cuál utilizan los coeficientes de correlación serial. Basados en sus resultados recomiendan $M = 12$ cuando se trabaja con series trimestrales.

Para elegir el valor del tamaño de la media móvil M , se parte de la recomendación de los autores y se observan las diferencias al cuadrado al reducir el valor de M . Estas diferencias se calculan siempre respecto al ciclo obtenido con $M = 12$ como sigue:

$$\sum_{i=1}^T (C_t^M - C_t^{12})^2 \quad (7.2)$$

Cuadro 7.2: Sensibilidad de M

| M | Dif Cuad | Dif cuad prom |
|----------|-----------------|----------------------|
| 4 | 1649,75 | 15,56 |
| 6 | 627,73 | 5,92 |
| 8 | 504,92 | 4,76 |
| 10 | 89,55 | 0,84 |
| 14 | 26.86 | 0.25 |
| 16 | 19.81 | 0.19 |
| 18 | 29.73 | 0.28 |
| 20 | 107.62 | 1.01 |

En la tabla 7.2 se muestran las diferencias antes descritas. El objetivo es ver si alguno de los ciclos obtenidos con $M \neq 12$ es cercano al propuesto por Baxter King.

Lo que se observa, es que en el único caso con $M < 12$ en el que las diferencias promedios son menores a la unidad, es con $M = 10$. Si se observan las variaciones de las diferencias al cuadrado, hay una variación del 80% al pasar de un ciclo obtenido con $M = 10$ a uno con $M = 8$, lo que representa la mayor variación para los ciclos obtenidos.

Trabajando con $M = 10$ se ganan dos datos al principio y al final de la serie comparado con $M = 12$, lo que no justifica utilizar un largo distinto del recomendado.

En resumen en este trabajo se utilizará $p_l = 6$, $p_u = 32$ y $M = 12$ como parámetros del filtro BK.

Christiano Fitzgerald

Este filtro fue descrito en la sección 5.3. Para su aplicación es necesario definir la amplitud de la banda de paso, y se debe indicar si la serie tiene o no, una raíz unitaria. Este filtro está diseñado para ser aplicado a los datos originales. Sin embargo Reijer en [33] y [34] recomienda utilizar como datos de entrada la serie desestacionalizada, ya que la misma disminuye la variabilidad del filtro, cuando nuevos datos son incorporados, es decir reducen los errores de revisión.

Los resultados empíricos muestran que el ciclo estimado con la serie original y la serie desestacionalizada es el mismo, la diferencia surge cuando se le agregan nuevos datos a la serie de entrada, en ese caso los ciclos con cada uno de los datos tiene un resultado distinto, donde el trabajar con datos desestacionalizados muestra mayor estabilidad en los resultados.

Apoyando lo antes mencionado, se puede observar que la función de ganancia del filtro (ver ??) muestra que algunos valores de la serie no son filtrados de forma eficiente, los mismo se asocian con las frecuencias estacionales. Es por esto que si el peso del componente estacional es importante en la serie de análisis, es necesario trabajar con la serie desestacionalizada.

En este trabajo se estima la señal cíclica en ambos casos, es decir cuando los datos originales son la serie del IVF y cuando los mismos están desestacionalizados.

Al igual que en el filtro BK el mínimo período considerado en el ciclo son seis trimestres y el máximo es treinta y dos trimestres. Finalmente, el IVF presenta una raíz unitaria regular, por lo que el filtro de CF que se aplica debe tenerlo en cuenta.

Hodrick Prescott

Este filtro se describe en la sección 5.4 del trabajo. Como ya se mencionó la ganancia del filtro HP no es igual a cero en la frecuencia $w = \pi$, y esto es relevante porque en el caso en que el espectro de la serie de origen sea importante en esta frecuencia, el ciclo estimado va a tener frecuencias que no forman parte de su definición.

Para evitar esto en [20] se recomienda que la serie de entrada sea prefiltrada, y HP se aplique al componente tendencia-ciclo (TC). Para ello se aplica la metodología de TRAMO SEAT propuesta por Maravall para descomponer la serie. En este trabajo se utiliza esta recomendación.

Para aplicar el filtro HP se debe especificar el valor de λ que es el parámetro de suavización. En

[20] se recomienda para series trimestrales un valor de 1600. A partir de la ecuación 5.17, donde se muestra la ecuación del filtro; se observa que este valor se corresponde con un período de 40 trimestres, es decir ciclos de diez años como máximo.

Además se analizó la sensibilidad del ciclo estimado con HP ante cambios del parámetro λ . En la tabla 7.3 se consideran distintos valores para p_u (límite superior de la banda de paso). Los períodos considerados van desde 8 a 52 trimestres, y se pueden ver las diferencias del ciclo estimado cuando se modifica el parámetro de sensibilidad asociado a cada valor p_u respecto a un $\lambda = 1600$.

$$\sum_{i=1}^T (C_t^{p_u} - C_t^{HP_{1600}}) \quad (7.3)$$

Cuadro 7.3: Ciclos HP con distintos λ

| Período | Diferencias |
|---------|-------------|
| 8 | 2987,8 |
| 12 | 2565,23 |
| 16 | 2070,69 |
| 20 | 1510,82 |
| 24 | 967,29 |
| 28 | 529,02 |
| 32 | 224,51 |
| 36 | 50,68 |
| 40 | 0,33 |
| 44 | 64,81 |
| 48 | 232,11 |
| 52 | 486,63 |

Este cálculo coincide en que $\lambda = 1600$ es consistente con $p_u = 40$, ello implica que los ciclos estimados con HP no son totalmente comparables con los anteriores ya que la definición de ciclo utilizada en el resto considera un $p_u = 32$. Se prefiere mantener el valor 1600 para λ ya que es el recomendado por Hodrick y Prescott.

Butterworth Tipo Tangente

Dentro de los filtros Butterworth se aplica el tipo tangente propuesto por Pollock. Este filtro tiene dos parámetros; la frecuencia de corte que regula que frecuencias pasan y cuales no, y el orden del filtro n que determina la velocidad de la transferencia entre la banda de paso y la banda de parada. El filtro es de tipo paso bajo, por lo que para extraer el ciclo se debe aplicar en

forma secuencial. El procedimiento es similar al usado en HP con la diferencia que aquí siempre se aplica el mismo filtro.

El filtro es sumamente sensible a la elección de n . Su implementación es realizada en el software R donde el valor por defecto es $n = 2$. En [29], [40], se muestran aplicaciones de este filtro y siempre con un valor de n altos, mayores a 7. Además las series a las que se aplica no presentan raíz unitaria regular por lo que el filtro sólo se aplica una vez.

En los antecedentes revisados, y en particular en el artículo de Pollock donde se plantea el filtro, no hay una justificación clara de la elección del orden, excepto la restricción ya mencionada que $n \geq d$ (donde d son las raíces unitarias de la serie). En nuestro caso, la función de R no admite un valor $n > 4$ por lo que para establecer el orden se estudiaron las distintas posibilidades.

El filtro propuesto en [29] es aplicado dos veces de manera secuencial. Primero se aplica con frecuencia de corte $w_c = \frac{2\pi}{6}$ y un orden de $n = 2$, luego al resultado se le aplica nuevamente este filtro con frecuencia de corte $w_c = \frac{2\pi}{32}$ y un orden de $n = 1$.

Los valores de la frecuencia de corte se corresponden con la definición de ciclo utilizada en este documento, mientras que el orden se puede explicar teniendo en cuenta el modelo ARIMA del IVF descrito en 7.1.

En el primer paso, los datos tienen dos raíces unitarias (una regular y otra estacional) y por esta razón el orden del filtro es $n = 2$, se obtienen dos series distintas. Una serie compuesta con tendencia y ciclo que es muy similar a la que se obtiene con la metodología TRAMO-SEATS (ver anexo), y una segunda serie que contiene el residuo de la operación de filtrado. Mirando el espectro de esta última serie (ver anexo) se puede ver que el filtro extrae los componentes estacional e irregular de forma correcta. En esta primera pasada, el resultado del filtro se corresponde con los resultados obtenidos con la descomposición propuesta por Maravall.

Cuando se aplica por segunda vez, la serie tiene una sola raíz unitaria (la estación fue removida en el paso anterior) y entonces el orden del filtro es $n = 1$. Esta elección provoca que el ciclo extraído explique poca variabilidad. Se probaron otros valores para n pero los resultados no son coherentes ya que el ciclo que se obtiene no concuerda con la definición de ciclo utilizada. Por ejemplo para el caso de $n = 2$ el ciclo obtenido presenta una tendencia creciente (ver anexo).

7.3. Efecto Distorsivo

Una característica relevante en el análisis de los filtros es el efecto de leakage y compresión que fue descrito en la sección 5.2.1. Es un indicador del grado de distorsión del filtro y se puede resumir como la integral de la diferencia absoluta entre la función de ganancia de un filtro y la

de un filtro ideal. En términos matemáticos se expresa como:

$$LC = 2 \int_w |\hat{\Psi}(w) - \Psi(w)| dw$$

Según Pedersen [26] el efecto distorsivo total de un filtro depende de las características espectrales de la serie a la que se aplica y por eso deben considerarse el espectro de la serie en el cálculo anterior, esto da lugar al indicador Q descrito en la sección 5.2.1. Sin embargo, en este trabajo la serie de entrada presenta raíz unitaria regular por lo que su espectro no está definido. Esto no permite que se dispongan de valores de Q .

Es notorio que el valor de LC no depende la serie utilizada, y por esto no es necesario contar con una estimación del espectro del IVF. Además los resultados de su cálculo son generales para cualquier tipo de serie a la que se le aplique un filtro.

En la tabla 7.3 se muestra su cálculo para los distintos filtros en sus versiones paso alto, paso bajo y pasa banda en caso que corresponda. Para el caso del filtro CF, se tiene un valor del indicador para cada dato de la serie debido a la forma de su función de ganancia.

Para que un filtro sea bueno lo que se pretende es que esta medida de la distorsión sea lo más chica posible, en este sentido si se miran los resultados obtenidos, el filtro de HP en su versión paso alto es el que tiene menor distorsión, mientras que su versión paso bajo presenta la mayor distorsión. Hay que recordar que el filtro HP es ineficiente para eliminar frecuencias altas por lo que esto es coherente con el resultado de que la mayor distorsión se presente en el paso bajo.

Sin embargo a la hora de realizar la comparación entre el resto de los filtros, es necesario tener presente que el filtro de HP es aplicado sobre el componente TC con un filtro paso alto para extraer el ciclo, esto provoca que el efecto distorsivo para el paso bajo no tiene en cuenta la distorsión provocada por la aplicación de la metodología TRAMO SEAT. Por otro lado el filtro BW utilizado en este trabajo es pasa banda y el efecto de leakage y compresión es de 0,87 mientras que para BK es de 0,35

Como se mencionó antes el filtro de Christiano tiene una función de ganancia que da un valor del indicador para cada dato de la serie. El cálculo muestra que casi todos los valores están entre 0,6 y 0,7 salvo los cuatro primeros y últimos valores en los que el leakage es mayor a la unidad (ver anexo).

En resumen, si se consideran los filtros utilizados en el trabajo, el filtro BK provoca una menor distorsión que CF y este a su vez es menor que BW pasa banda . El caso de HP de paso alto

| Filtros | Leack.Comp. |
|---------------------------|--------------------|
| <i>HP_{alto}</i> | 0.12 |
| <i>HP_{bajo}</i> | 0.93 |
| <i>BK</i> | 0.35 |
| <i>BW_{alto}</i> | 0.34 |
| <i>BW_{bajo}</i> | 0.58 |
| <i>HP_{banda}</i> | 1.06 |
| <i>BW_{banda}</i> | 0.87 |

a partir de datos prefiltrados no es claro ya que no se cuenta con una idea clara del efecto distorsivo inherente a TRAMO-SEATS.

7.4. Ciclos Estimados

En este apartado se presentan los ciclos estimados con los filtros descritos hasta aquí, los mismos representan una descomposición aditiva del IVF por lo que los ciclos representan puntos de índice. La figura 7.1 muestra los ciclos que se estiman con filtros tipo FIR, esto es, el filtro BK y el CF aplicado sobre los datos de IVF y sobre la serie desestacionalizada. Por otro lado la figura 7.2 muestra el ciclo estimado por filtro HP con $\lambda = 1600$ y el filtro de Butterworth tipo tangente propuesto por Pollock.

Las estimaciones del ciclo recogen en términos generales la evolución de la economía Uruguay en los últimos treinta años. Se pueden observar los períodos de crecimiento de la segunda mitad de la década del setenta, así como el crecimiento de los años noventa. Por otro lado también se evidencian las crisis económicas de 1982 y 2002, así como el impacto del efecto tequila en la mitad de la década del noventa.

Si se comparan ambas crisis, se puede ver que la crisis del 2002 es más profunda que la del 82. Además la crisis del 2002 tiene una salida rápida mientras que la del 82 perdura más en el tiempo.

A pesar de que los distintos ciclos cuentan una historia similar, se pueden apreciar matices en dicha historia. Por ejemplo en el filtro BW que es el que presenta menor variabilidad ¹, tanto las crisis como los períodos expansivos son menos profundos que en los demás ciclos.

¹Tiene un desvío típico de 3,76 mostrada en la tabla 7.4

Ciclos FIR

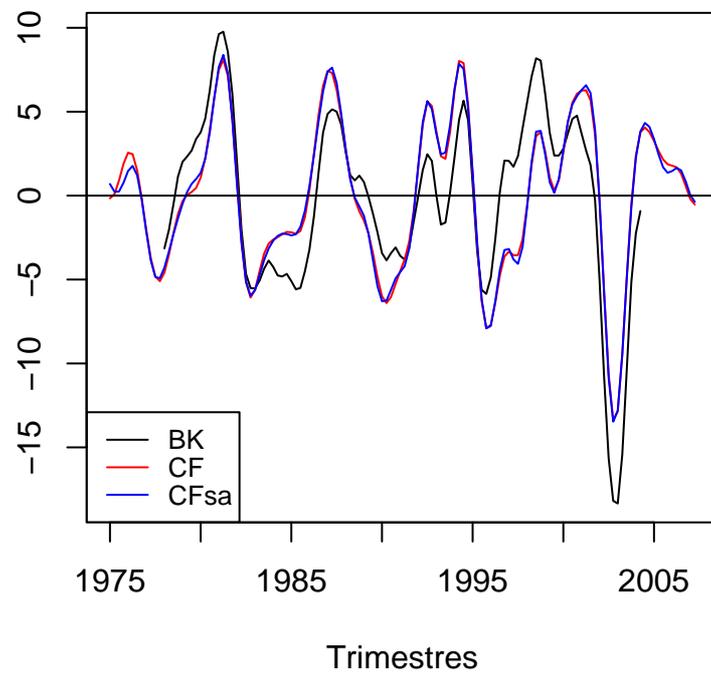


Figura 7.1: Ciclos estimados con CF, CFsa y BK

Ciclos IIR

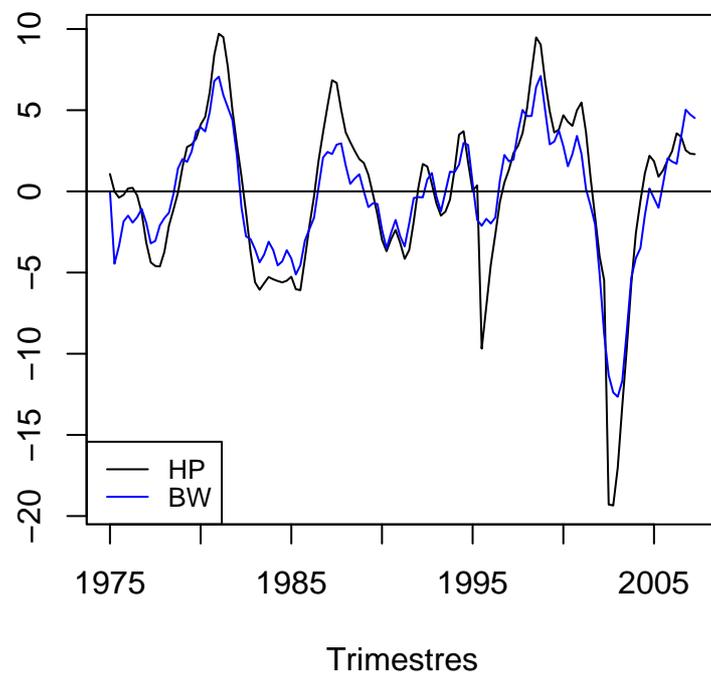


Figura 7.2: Ciclos estimados con HP y BW

En CF la crisis del 82 tiene una magnitud comparable con la caída de principios de los noventa y con el impacto del efecto tequila en 1995. Esto es relativamente distinto en HP, en donde el efecto tequila es más profundo que la crisis del 82 y esta a su vez es de mayor importancia que la fase recesiva de principio de los noventa.

Cuadro 7.4: Descripción de los Ciclos

| Medidas | HP | BK | CF | Cfsa | BW |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-------------|-----------|
| Med. Abs | 3.82 | 4.18 | 3.64 | 3.65 | 2.88 |
| Med. Sup | -4.29 | -4.75 | -3.81 | -3.97 | -3.04 |
| Med. Inf | 3.42 | 3.67 | 3.48 | 3.38 | 2.75 |
| Val. Max | 9.71 | 9.77 | 8.09 | 8.38 | 7.10 |
| Fecha Max | 1981.1 | 1981.2 | 1981.2 | 1981.2 | 1988.4 |
| Val. Min | -19.35 | -18.35 | -13.38 | -13.47 | -12.75 |
| Fecha Min | 2002.4 | 2003.1 | 2002.4 | 2002.4 | 2003.1 |
| Suma | -9.90 | -32.03 | 0.73 | -1.54 | -50.46 |
| Simetría | -1.05 | -0.90 | -0.37 | -0.35 | -0.74 |
| Desvío | 5.12 | 5.42 | 4.48 | 4.50 | 3.76 |

En la tabla 7.4 se presentan las principales estadísticas de resumen de los ciclos obtenidos a partir de los filtros utilizados. Se pueden ver medidas de importancia del ciclo en todo el período. Esto se refleja en la media absoluta de los valores estimados, donde el filtro que presenta un valor mayor es BK seguido de HP. Por otro lado si se considera la media inferior y superior, es decir el promedio dentro de los valores negativos y positivos respectivamente, todos los filtros indican que el ciclo del IVFPIB es mayor cuando es negativo que cuando es positivo.

La suma de todos los valores del ciclo a lo largo del período permite tener una descripción de la simetría de los ciclos estimados, que se complementa con el coeficiente de simetría. El filtro CF muestra que los valores del mismo casi se compensan y su coeficiente de simetría es el más cercano a cero. Inversamente, el resto de los filtros presentan una suma total negativa siendo BW el que tiene un valor más extremo. Asimismo el coeficiente de simetría es negativo llegando a -1 en el caso de HP.

Esto indica que el ciclo estimado presenta asimetría negativa en tres de los cuatro filtros utilizados mientras que el filtro CF resulta en un ciclo casi simétrico.

El otro aspecto que se puede ver en la tabla 7.4 son los valores máximos y mínimos de cada ciclo, así como el momento en el que suceden. Aquí existe coincidencia en todos los filtros, tanto en las fechas en que se dan el máximo y el mínimo como en el valor máximo que se alcanza. Hay

diferencias en el valor que toma el ciclo en la crisis de 2002, en HP y BK el valor del mínimo es cercano a 20 puntos del índice mientras que los demás presentan un valor cercano a 13.

En la tabla 7.5 se muestra la duración promedio de los ciclos estimados expresada en trimestres. Excepto en BW, los ciclos estimados muestran una duración promedio mayor cuando están por encima de la tendencia que cuando están por debajo.

Cuadro 7.5: Duración Promedio de los Ciclos Estimados

| Filtros | HP | BK | CF | Cfsa | BW |
|----------------|-----------|-----------|-----------|-------------|-----------|
| Arriba | 9.375 | 11.2 | 11.5 | 10 | 10.5 |
| Abajo | 8.43 | 8.33 | 10.67 | 9.143 | 11.2 |

El filtro de CF calculado tanto con la serie original como con la serie desestacionalizada, es el que presenta una duración promedio mayor por encima de cero, en torno a 11 trimestres, mientras que el filtro de HP es el que presenta una duración promedio menor que el resto de los filtros por encima de la tendencia en torno a 9 trimestres.

Por último se estudiaron las correlaciones y las correlaciones cruzadas entre los ciclos estimados. Respecto de las correlaciones, las mismas son altas en todos los casos lo que es esperable ya que se está estimando el mismo componente por distintos métodos. En las correlaciones cruzadas el máximo siempre se encuentra en el momento actual, o sea que los ciclos están sincronizados ninguno presenta adelantos o rezagos respecto de los demás. Estos valores se muestran en el anexo.

7.4.1. Espectros de los Ciclos

Otra manera de estudiar las propiedades de los ciclos es a través del espectro de cada uno de ellos. El estudio de los mismos permite visualizar dos aspectos fundamentales en el análisis de los filtros. En primer lugar permite ver, dentro del rango de frecuencia de interés, cuales son las más relevantes en la economía Uruguaya a través del pico más grande del espectro. En segundo lugar da una idea de la pureza del componente cíclico, la que se puede medir a través de la proporción de varianza explicada por las frecuencias consideradas en el ciclo.

El espectro del ciclo fue calculado utilizando el método paramétrico de aproximación con polinomios autoregresivos descripta en la sección 4.5.²

²La estimación paramétrica de los espectros ajusta distintos polinomios autorregresivos, en el caso de BK se ajusta un AR(12), para CF utiliza un AR(20), para HP el polinomio es un AR(3) y por último para BW es modelado con un AR(9).

En el gráfico 7.4.1 se muestran los espectros para el ciclo estimado con los filtros BK, CFsa, HP y BW (CF se muestra en el anexo).

En todos los casos se puede ver que hay una frecuencia que explica la mayor parte de la variabilidad, esta es representada por el máximo del espectro. Teniendo en cuenta este máximo, en los casos de BK, HP y BW el pico del espectro corresponde a la frecuencia vinculada a un período de 31 trimestres mientras que en el caso de CF el pico se corresponde con un período de 25 trimestres (tanto si se aplica sobre los datos originales o sobre la SA). Estos picos se corresponden con las distancias entre los máximos relativos en el ciclo, indica que el ciclo estimado con CF es más corto que con el resto de los ciclos. Como se mencionó anteriormente el área bajo el

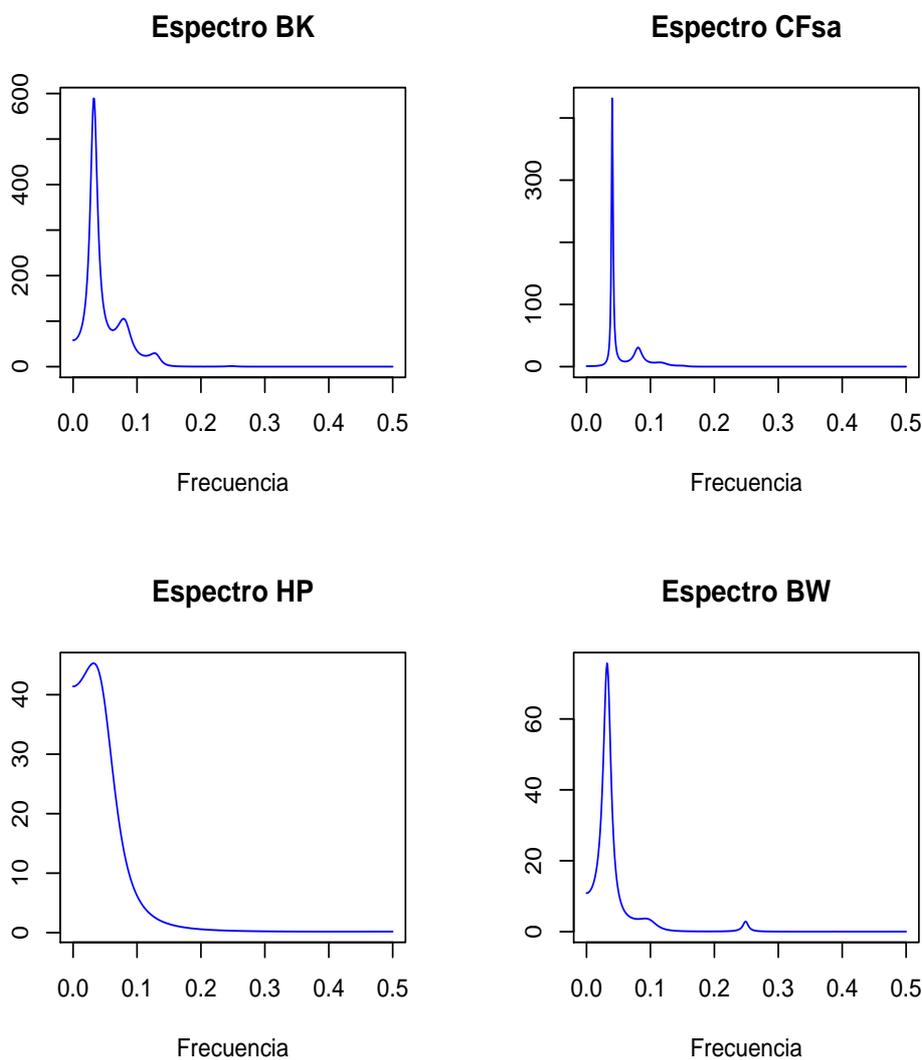


Figura 7.3: Espectros de los Ciclos Estimados

espectro entre dos frecuencias consideradas, es la variabilidad de la serie que es explicada por ese intervalo de frecuencias. La variabilidad de un ciclo puro o ideal tendría que estar explicada sólo por las frecuencias que se consideraron en la definición de ciclo, en nuestro caso $w_l = 2\pi/6$ y $w_u = 2\pi/40$ para el caso del filtro HP y $w_l = 2\pi/6$ y $w_u = 2\pi/32$ para el resto de los filtros considerados.

Para tener una medida de la pureza de los filtros, se descompone la variabilidad del ciclo estimado en tres partes. Esto se logra integrando el espectro en intervalos de frecuencias cada uno de ellos asociado a un componente de la serie. El área dentro del intervalo $(0, 2\pi/32)$ mide la variabilidad asociada con la tendencia³, el intervalo $(2\pi/32, 2\pi/6)$ se asocia con el ciclo y las frecuencias mayores a $2\pi/6$ corresponden a los componentes estacional e irregular.

Es deseable que la mayor parte de la variabilidad del ciclo estimado corresponda al área bajo las frecuencias que definen el ciclo. La proporción de varianza explicada por frecuencias en $(2\pi/32, 2\pi/6)$ se toma como medida de pureza del ciclo estimado.

En la tabla 7.6 se muestra la proporción de variabilidad asociada a cada componente ⁴, donde se aprecia que en todos los casos la mayor variabilidad está explicada por las frecuencias que corresponden al ciclo. Además las frecuencias más altas asociadas a los componentes estacionales e irregulares tienen muy poco peso en la señal estimada del ciclo.

En la tabla 7.6 ⁵ se puede observar que la señal más pura es la de CF ya que casi el 100 % de la variabilidad del ciclo estimado corresponde a frecuencias que pertenecen a la banda de paso. Por otro lado en los restantes filtros, la descomposición de su variabilidad tiene una estructura similar. La proporción que se corresponde con el componente estacional e irregular es cercana al 3 % en los restantes filtros, mientras que el peso de las frecuencias asociadas a la tendencia representa un 30 % para HP y BK y un 40 % para BW.

Cuadro 7.6: Descomposición de la Variabilidad de los Ciclos

| Filtro | Tendencia | Ciclo | Menor a 6 | Total |
|---------------|------------------|--------------|------------------|--------------|
| BK | 0,317 | 0,680 | 0,003 | 16,56 |
| CFsa | 0,022 | 0,972 | 0,001 | 2,88 |
| HP | 0,305 | 0,666 | 0,029 | 3,36 |
| BW | 0,401 | 0,570 | 0,029 | 1,89 |

³En el caso de HP es $(0, 2\pi/40)$

⁴Para el cálculo de la integral se utiliza la función *sintegral()* que realiza una aproximación numérica con la regla de Simpson. La variabilidad total puede no coincidir con el cálculo de la tabla 7.4 ya que son dos estimaciones distintas.

⁵El espectro del ciclo estimado con CF sobre los datos es idéntico el de CFsa y por eso no aparece en la tabla

Capítulo 8

Intervalos de Confianza

Para tener una herramienta que permita evaluar cuando los ciclos estimados son significativamente distintos de cero, se construyen intervalos de confianza. En esta sección se describirá como se construyen dichos intervalos sobre la base de réplicas bootstrap explicadas en el capítulo 6.

Se debe tener en cuenta que los resultados que se presentan aquí son una primera aproximación al tema, y no se encontraron referencias de aplicaciones a nivel nacional. Es necesario profundizar en el estudio de estas técnicas ya que no es trivial la construcción de intervalos de confianza para el ciclo estimado.

De todas maneras, a modo exploratorio, se presentan los intervalos de confianza estimados para cada uno de los ciclos.

8.1. Construcción del Intervalo

En términos generales para construir un intervalo de confianza para el componente cíclico es necesario tener una gran cantidad de réplicas del mismo. Luego de tener las réplicas en cada momento del tiempo se obtiene el percentil 2,5 y el 97,5. Las series formadas por cada percentil representan los límites inferior y superior del intervalo.

El sentido de construir réplicas del componente cíclico es estimar una "distribución empírica", para lo cual es necesario tener la mayor cantidad de valores posibles que este puede adoptar.

En lo que sigue se comentarán algunas opciones para la construcción de réplicas y se analizarán sus ventajas e inconvenientes para el caso de análisis.

Para obtener las réplicas del ciclo se pueden considerar en principio dos caminos.

En primer lugar se obtienen réplicas de la serie original y luego se aplica alguno de los filtros lineales para obtener el componente cíclico de cada una de las réplicas de la serie.

Un inconveniente de este método es que no todos los filtros tiene la misma serie de entrada. En el caso de HP la serie de entrada es el componente de tendencia-ciclo, el CFsa tiene como base la serie desestacionalizada, y tanto BK como BW se aplican a los datos. Esta característica puede representar un problema, ya que las propiedades estadísticas de cada una de las series es diferente. De esta forma las diferencias en los intervalos pueden no deberse a los filtros propiamente dichos, si no a las diferencias entre las series originales que son replicadas.

Otro inconveniente que se presenta, es que la serie original con la que se está trabajando no es estacionaria, por lo que las técnica de remuestreo por bloques no se pueden aplicar directamente sobre los datos. Además a pesar de que la metodología de descomposición TRAMO-SEAT estima un modelo para cada componente, no se utilizará en este trabajo las técnicas de remuestreo basadas en modelos.

Por otro lado el método de remuestreo basado en máxima entropía puede ser aplicado a series no estacionarias. Por esta razón este método de construcción de los intervalos de confianza es atractivo a pesar de sus inconvenientes a la hora de comparar los resultados. La diferencia en las series de entrada utilizada en cada caso puede distorsionar el análisis, pero este problema escapa al cálculo del intervalo de confianza, está presente en cualquier comparación que se haga entre los ciclos estimados.

En segundo lugar una vez estimado el ciclo se pueden construir las réplicas remuestreando directamente de este. Así se evita el problema de tener distintas series para replicar, por otro lado como el ciclo es un componente estacionario se puede aplicar la técnica de remuestreo en bloques. Sin embargo como en este trabajo no se utilizan los modelos ARMA para el ciclo, no se aplican las técnicas de remuestreo basadas en modelos. Pero el principal problema es que se está aplicando el filtro una única vez por lo que todas las réplicas dependen del ciclo estimado.

En síntesis en lo que sigue, se calculan intervalos de confianza para los cuatro filtros utilizados de dos formas distintas. Aplicando remuestreo en bloques solapados a los ciclos estimados y aplicando remuestreo de máxima entropía a series de entrada (ya sea TC, SA o los datos).

En el trabajo de Gallego y Johnson [14] se estiman los componentes cíclicos de las economías del G7 mediante los filtros de Holdrick Prescott y Christiano Fitzgerald, y luego se construyen intervalos de confianza con la metodología de remuestreo por bloques. Los intervalos de confianza que se obtienen son relativamente constantes en el tiempo, formando una banda en torno al cero. En este trabajo se utilizó el remuestreo por bloques, de forma de construir réplicas de los ciclos. Los resultados obtenidos son similares a los vistos en el trabajo antes mencionado.

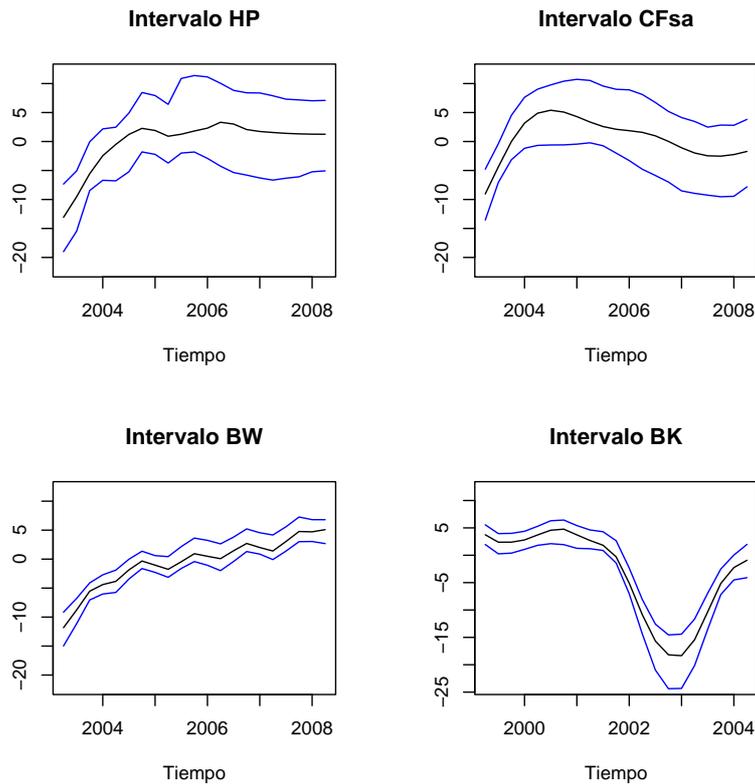


Figura 8.1: Intervalos por Máxima Entropía

En los intervalos construidos de esta manera la estimación puntual del ciclo no siempre pertenece al intervalo. Esta no es una característica deseable, si se pretende tener un rango de valores posibles para el ciclo estimado, lo que constituye el principal objetivo de un intervalo de confianza. En este sentido no se profundiza más en el análisis de los resultados que se muestran en el anexo.

Como se mencionó anteriormente también se aplicaron las técnicas de remuestreo basadas en máxima entropía aplicadas sobre las series originales. Los intervalos que resultan tienen las características de los intervalos tradicionales, dan una banda de confianza para la serie estimada.

8.2. Intervalos Estimados

En lo que sigue se presentan y analizan intervalos de confianza obtenidos a partir de réplicas basadas en máxima entropía de la serie original.

La figura 8.2 muestra los intervalos para los ciclos estimados a partir del segundo trimestre del

2003 ¹, no aparece el ciclo estimado por CF ya que es muy similar al estimado con CFsa y por lo tanto los intervalos tiene la misma forma pero los primeros presentan una menor amplitud.

En los cuadros 8.1 y se muestran los intervalos de confianza al 95 % y las estimaciones puntuales para los ciclos estimados excepto los de BK que se muestran en el cuadro 8.2 debido a que corresponden a otro momento del tiempo.

Cuadro 8.1: Intervalos de Confianza y Estimación Puntual de HP y BW

| Trimestre | HP inf | HP sup | Ciclo HP | BW inf | BW sup | Ciclo BW |
|------------------|-----------------|-----------------|-------------------|---------------|---------------|-----------------|
| 2007 | -6.167 | 8.319 | 1.729 | 0.844 | 4.605 | 2.003 |
| 2007.25 | -6.949 | 8.168 | 1.556 | -0.086 | 4.323 | 1.400 |
| 2007.5 | -7.356 | 7.603 | 1.408 | 1.493 | 5.548 | 3.038 |
| 2007.75 | -6.126 | 6.871 | 1.319 | 3.106 | 7.093 | 4.765 |
| 2008 | -5.294 | 6.940 | 1.266 | 3.093 | 6.775 | 4.708 |
| 2008.25 | -4.536 | 6.967 | 1.253 | 2.484 | 6.854 | 5.086 |
| Trimestre | CFsa inf | CFsa sup | Ciclo CFsa | CF inf | CF sup | Ciclo CF |
| 2007 | -7.881 | 4.552 | -1.079 | -2.595 | 2.383 | -0.603 |
| 2007.25 | -9.015 | 3.499 | -1.980 | -3.711 | 1.805 | -1.703 |
| 2007.5 | -9.229 | 2.745 | -2.466 | -5.198 | 1.833 | -2.734 |
| 2007.75 | -9.053 | 2.550 | -2.523 | -5.523 | 1.594 | -3.072 |
| 2008 | -8.959 | 2.975 | -2.251 | -4.980 | 1.285 | -2.301 |
| 2008.25 | -8.265 | 3.552 | -1.711 | -5.082 | 2.384 | -0.566 |

Tanto en la figura como en las tablas puede observarse que los intervalos presentan amplitudes distintas, al menos en el período considerado. Para estudiar mejor este aspecto de los intervalos se calcula la amplitud del intervalo a lo largo de todo el ciclo estimado. La amplitud es obtenida como la diferencia entre el valor superior y el valor inferior en cada trimestre. Lo que se observa es que los intervalos del ciclo correspondiente a los filtros de HP y CFsa son más amplios que los que corresponden a CF, BW y BK.

En la figura 8.2 se pueden ver diagramas de cajas para la amplitud de cada uno de los ciclos, lo que muestra que el filtro BW es el que tiene menor amplitud con un promedio de 2,5, luego los intervalos de BK y CF tienen amplitudes similares con promedios de 4,13 y 4,21 respectivamente.

¹El intervalo construido para BK considera el periodo desde el segundo trimestre del 2001 debido a la pérdida de datos

Cuadro 8.2: Intervalos de confianza y Estimación Puntual para BK

| Trimestre | BK inf | BK sup | Ciclo BK |
|-----------|--------|--------|----------|
| 2003 | -23.8 | -14.27 | -18.35 |
| 2003.25 | -19.81 | -11.66 | -15.43 |
| 2003.5 | -13.25 | -6.89 | -10.34 |
| 2003.75 | -7.17 | -2.49 | -5.16 |
| 2004 | -4.34 | -0.02 | -2.25 |
| 2004.25 | -4.078 | 1.86 | -0.92 |

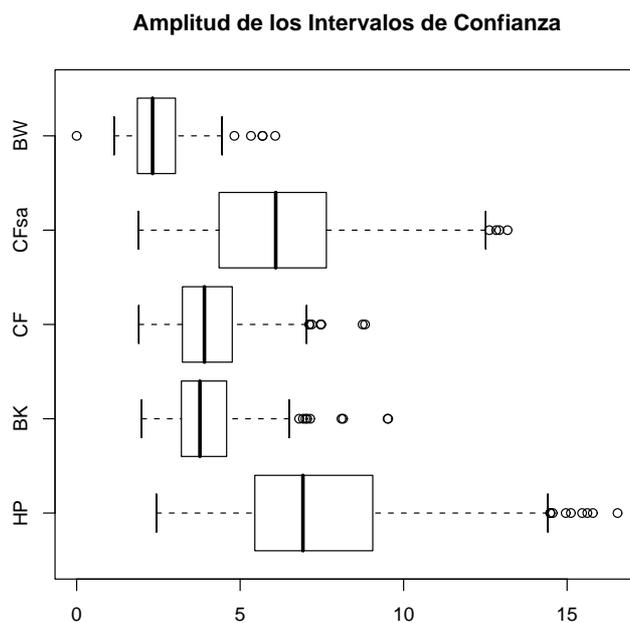


Figura 8.2: Diagramas de cajas

Con respecto a los filtros de CFsa y HP lo que se observa es que la amplitud de los intervalos es mayor que los demás filtros, en el caso de HP la amplitud promedio del intervalo es 7,7 y para CFsa es de 6,4. Es llamativo que a partir de ciclos que aparecen como similares los intervalos correspondientes tengan distintas amplitudes. Además se destaca que la mayor amplitud de los intervalos de HP y CF se verifica en todos los trimestres y no sólo en promedio.

La diferencia en amplitud entre los intervalos correspondientes a CF y a CFsa es particularmente interesante ya que el ciclo estimado en cada caso es prácticamente idéntico. No se tiene una explicación clara de la razón de estas diferencias pero se puede destacar que los intervalos menos amplios son los que corresponden a casos en que el filtro se aplica directamente sobre la serie original.

8.3. Significación del Ciclo

Una de las preguntas fundamentales en el estudio de brecha de producto, es determinar si la misma es o no distinta a la tendencia. En términos estadísticos esto significa determinar si el ciclo estimado es significativamente distinto de cero. Una posible interpretación en el caso que el ciclo estimado esté por encima de la tendencia es decir que la economía presenta presiones inflacionarias. Una herramienta útil para responder la pregunta antes planteada es la construcción de intervalos de confianza.

Los resultados obtenidos muestran que los ciclos estimados con CF y BW son los que tienen intervalos de menor amplitud mientras que en HP y CFsa la amplitud es mayor. En la tabla 8.3 se muestra la proporción de trimestres en los que el ciclo es significativamente distinto de cero para todo el período analizado. Se puede observar que hay dos grupos, por un lado en HP y CFsa el ciclo estimado no es significativo la mitad de las veces.

Por otro lado CF, BK y BW presentan una estructura en donde aproximadamente el 70% de los trimestres el intervalo no contiene al cero.

Si se interpreta el caso donde una brecha positiva significa presión inflacionaria, el hecho que en promedio el ciclo sea significativamente distinto de cero, no implica que las mismas existan, ya que puede ser que el ciclo esté por debajo de la tendencia. En la tercer columna de la tabla 8.3 se muestra la proporción de trimestres que el cero no pertenece al intervalo y que el ciclo es distinto de cero. Los resultados muestran que los ciclos que presentan mayores períodos por encima de la tendencia son BK, CF y BW. Hay que tener en cuenta que en términos generales los filtros no coinciden en la determinación de los periodos con brechas de producto positiva. Sólo en diecinueve trimestres del período analizado hay coincidencia de todas las estimaciones en relación a un ciclo por encima de la tendencia. Los mismos se concentran en tres períodos,

Cuadro 8.3: Proporción de Trimestres que $0 \in IC$

| Filtro | $0 \in IC$ | $0 \notin IC$ | Prop.encima deT |
|---------------|------------|---------------|------------------------|
| HP | 0.5448 | 0.4552 | 0.2239 |
| BK | 0.3158 | 0.6842 | 0.3772 |
| CF | 0.2687 | 0.7313 | 0.3657 |
| CFsa | 0.4701 | 0.5299 | 0.2313 |
| BW | 0.2406 | 0.7594 | 0.3759 |

los seis trimestres anteriores a la crisis de 1982, los cuatro trimestres del año 1987 y un período que abarca desde el segundo trimestre de 1998 hasta el primer trimestre del año 2001.

La crisis de 2002 es el último período en que coinciden las cinco estimaciones del ciclo, todas son negativas y significativas, a partir de aquí la evolución de los ciclos es distinta en términos de su significación.

En el caso de los ciclos estimados por HP y CFsa los resultados indican que desde el primer trimestre de 2004 el intervalo contiene al cero y no hay brecha de producto positiva desde la crisis de 2002. En el caso de CF presenta un período a partir de 2004 de ciclo por encima de la tendencia que termina en el tercer trimestre de 2005. Finalmente, el único filtro que evidencia un ciclo significativamente positivo a partir del cuarto trimestre de 2006 es BW.

8.4. Errores de Revisión

Un problema importante de la estimación de la brecha de producto es la existencia de errores de revisión. Esto significa que la incorporación de nuevos datos modifica la estimación del ciclo en los momentos anteriores al nuevo dato.

Los errores de revisión son una característica relevante para la toma de decisiones de política económica ya que si la señal cambia a medida que nuevos datos son incorporados, pueden tomarse decisiones con los resultados en un momento y cuando se incorpora nueva información los resultados modificados muestran que tal vez las decisiones tomadas no necesariamente fueron las correctas. El hecho de contar con un intervalo de confianza es útil para prevenir este efecto.

En lo que sigue se ejemplifica el efecto de la revisión antes mencionado y luego se muestra como los intervalos de confianza pueden ayudar a contrarrestar dicho efecto. Primero se obtienen estimaciones del ciclo agregando predicciones de a una a la serie original hasta llegar a incorporar ocho predicciones. De esta forma se obtienen ocho ciclos distintos para el período 1975.01-2007.02, y se compara el cambio en la estimación al incorporar cada dato.

Errores de Revisión al Incorporar Predicciones

| HP | | CF | | Cfsa | | BW | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| <i>Dif.130</i> | <i>Dif.134</i> | <i>Dif.130</i> | <i>Dif.134</i> | <i>Dif.130</i> | <i>Dif.134</i> | <i>Dif.130</i> | <i>Dif.134</i> |
| 0 | 16,39 | 0 | 60,78 | 0 | 45,69 | 0 | 35,85 |
| 6,19 | 10,26 | 13,19 | 73,63 | 12,6 | 34,08 | 6,32 | 29,53 |
| 10,74 | 5,74 | 123,02 | 62,58 | 24,86 | 22,12 | 32,19 | 7,38 |
| 14,03 | 2,42 | 29,51 | 56,22 | 36,05 | 10,64 | 26,54 | 9,31 |
| 16,39 | 0 | 60,78 | 0 | 45,69 | 0 | 35,85 | 0 |
| 18,07 | 1,75 | 45,34 | 22,39 | 53,96 | 9,66 | 38,47 | 2,62 |
| 19,24 | 3,03 | 126,93 | 78,35 | 61 | 18,58 | 50,46 | 14,61 |
| 20,04 | 3,95 | 70,08 | 16,78 | 67,39 | 26,95 | 52,45 | 16,6 |
| 20,61 | 4,63 | 79,56 | 25,66 | 72,86 | 34,66 | 55,15 | 19,3 |

En la tabla 8.4 se muestran los cálculos recién descritos sobre la revisión de los ciclos. En primer lugar se debe destacar que no aparecen los cálculos para BK porque este filtro no presenta variaciones en el ciclo estimado cuando se agregan datos nuevos (sean predicciones o no), es decir que el filtro de BK es en este sentido el más estable.

En el resto de los filtros se pueden observar modificaciones al incorporar predicciones. En la tabla 8.4 se calcula para cada ciclo considerado las diferencias respecto del ciclo estimado con 130 datos y en todos los casos, estas son cada vez mayores a medida que se agregan más predicciones. En cambio si las diferencias se calculan respecto del ciclo estimado con 134 datos (Recomendación de Maravall para el filtro HP) las diferencias se atenúan significativamente. Esto quiere decir que el ciclo estimado con 134 datos presenta menores errores de revisión. Se puede ver que HP es el que presenta menor variabilidad al incorporar datos predichos, seguido por BW.

En segundo lugar se utilizaron los intervalos de confianza para contrarrestar el problema de los errores de revisión. Se tomaron los intervalos estimados que contiene la información hasta el segundo trimestre de 2007. Cuando, en diciembre, se publicó el dato del tercer trimestre de 2007 se reestimaron los ciclos con la nueva información disponible. Y se comparó la nueva estimación del ciclo con los intervalos de confianza ya calculados.

La figura 8.3 muestra el ciclo y los intervalos de confianza con los datos hasta el segundo trimestre de 2007 y el nuevo ciclo estimado con los datos hasta el tercer trimestre de 2007.

Los resultados permiten ver que los intervalos de confianza para HP como CFsa contienen a los nuevos ciclos. Esto es un resultado útil para un hacedor de política ya que las conclusiones a las que había arribado antes de conocer el nuevo dato están cubiertas por el intervalo de confianza.

Por otro lado los intervalos construidos para CF y BW no muestran los mismos resultados ya que

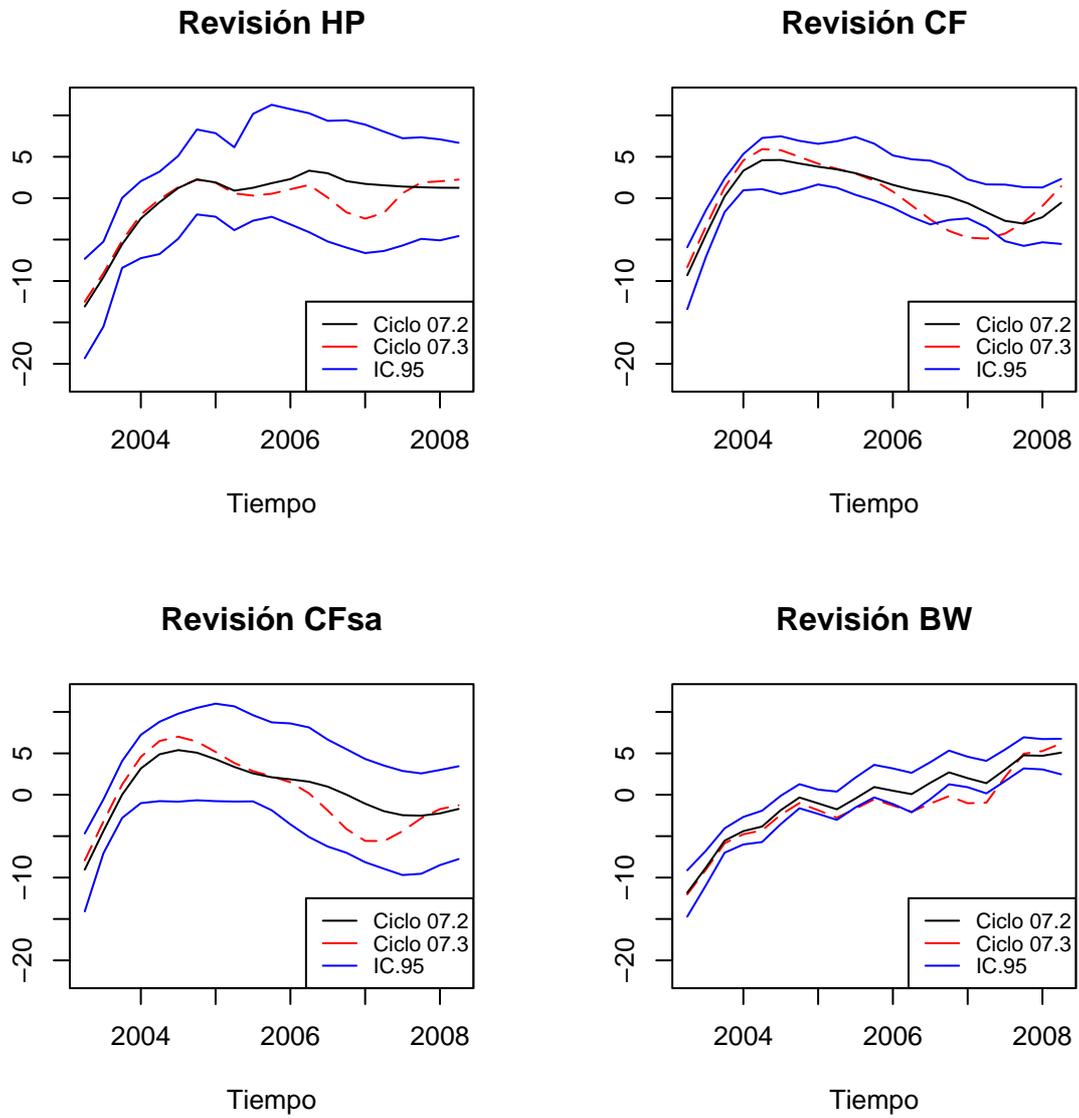


Figura 8.3: Efecto de la revision

en hay algunos trimestres de los ciclos reestimados que caen fuera del intervalo de confianza, en particular la estimación del ciclo para el segundo trimestre de 2007 no pertenece a los intervalos en ninguno de los dos casos. Esto se puede relativizar teniendo en cuenta que la revisión de este último dato fue muy importante, sobre todo si se compara con la revisión que se produce cuando se publica el dato del segundo trimestre de 2007.

Capítulo 9

Síntesis

La estimación del componente cíclico del IVFPIB es una herramienta útil para el análisis de la coyuntura económica ya que es una señal de interés para el diseño y la evaluación de la política macroeconómica.

Al inicio de este trabajo se plantearon varios objetivos. En primera instancia extraer la señal cíclica del PIB en la economía uruguaya entre el año 1975 y 2007. A partir de una serie de IVF trimestral para el PIB, se aplicaron algunos filtros que brindan estimaciones distintas de la señal cíclica.

Los ciclos estimados pueden visualizarse en 7.1 y 7.2. Las estrategias de estimación utilizadas fueron las siguientes:

1. Extraer el componente tendencia-ciclo con la metodología de descomposición TRAMO-SEATS y posteriormente filtrar el mismo con el filtro Holdrick Prescott (HP).
2. Extraer la serie ajustada por estacionalidad con la metodología de descomposición TRAMO-SEATS y posteriormente filtrar dicha serie con el filtro Christiano Fitzgerald (CF).
3. Aplicar el filtro Christiano Fitzgerald sobre la serie de IVFPIB.
4. Aplicar el filtro Baxter-King (BK) sobre la serie de IVFPIB.
5. Aplicar un filtro Butherworth de tipo Tangente (BW) en forma secuencial sobre la serie de IVFPIB.

Como segundo objetivo se planteó la implementación de herramientas que permitan comparar los distintos métodos de estimación de la señal cíclica. Esto fue desarrollado en dos niveles. A

través de una comparación de los filtros en términos teóricos, es decir sin considerar la serie analizada. Un segundo nivel enfocado a la comparación de los ciclos estimados con cada filtro, aquí se tiene en cuenta las características particulares de la serie del IVFPIB trimestral.

9.1. Comparación de Filtros

Para esta comparación se describieron las propiedades de los filtros desde la perspectiva del análisis espectral. Esto implica que los filtros son caracterizados a través de su función de respuesta a la frecuencia, descompuesta en la función de ganancia y la función de fase. Los filtros son vistos como una aproximación al llamado "filtro ideal", y se dividen en los filtros que presentan una respuesta finita (FIR) y los que presentan una respuesta infinita (IIR).

BK es un filtro tipo FIR que puede representarse como una media móvil de largo $2M + 1$. En el caso de $M = 12$, la ganancia del filtro se anula en la frecuencias extremas ($w = 0$ y $w = \pi$) esto indica que es eficiente en remover los componentes estacional e irregular, y el componente de tendencia. Como es una media móvil simétrica no presenta distorsión de fase pero se pierden M datos en los extremos de la serie.

El otro filtro tipo FIR utilizado es CF, que tiene pesos que varían con cada dato. Esto resulta en que tiene una función de ganancia para cada dato de la serie a filtrar, en [19] se muestra la ganancia de CF en tres dimensiones. Con esto se puede ver que el filtro tiene problemas para remover la estación al final de la serie, por lo que es mejor corregir los datos por estacionalidad antes de aplicar el filtro. Es un filtro asimétrico por lo que presenta un efecto de desfase, pero no pierde ningún dato al ser aplicado.

Se muestra el filtro HP como un filtro de la familia de Butterworth tipo seno. Su ganancia es positiva en las frecuencias altas, es decir el filtro no remueve bien los componentes estacional e irregular. Esto puede superarse si el filtro no se aplica sobre los datos originales sino sobre el componente tendencia-ciclo.

Por último se aplicó el filtro BW, que consiste en un filtro de Butterworth tipo tangente adaptado por Pollock. Si bien no tiene los problemas de HP en las frecuencias altas, se presentaron inconvenientes para implementar este filtro ya que el software disponible, R, tiene limitaciones para este filtro.

Para culminar con el análisis basado en las funciones de ganancia, se estudia las diferencias entre las funciones de ganancias y la correspondiente al filtro ideal, a través del cálculo de la medida de leakage y compresión propuesta por Pedersen en [26] que se presenta en la sección 5.2.1.

Los cálculos de LC muestran que el filtro BK provoca una menor distorsión que CF y este a

su vez es menor que BW pasa banda, los valores son 0,35, 0,6¹ y 0,87 respectivamente. El caso de HP de paso alto presenta un LC de 0,12 pero la comparación con los demás no es directa porque se aplica a de datos prefiltrados y no se cuenta con una idea clara del efecto distorsivo inherente a TRAMO-SEATS.

9.2. Comparaciones de los Ciclos

Para comparar los ciclos estimados se utilizaron varias herramientas. En las figuras 7.1 y 7.2 se puede ver que, en términos generales, los ciclos son similares. Que todos representan de igual forma la evolución de la economía uruguaya en lo que tiene que ver con las expansiones y recesiones.

Se realizó un análisis de estadísticas descriptivas de los ciclos, en las que se observa que el ciclo estimado representa entre 3.5 y 4 puntos del IVFPIB en promedio, excepto con el filtro BW en que es menor. Además, los filtros CF y CFsa arrojan como resultado una señal prácticamente simétrica mientras que los demás filtros presentan asimetría negativa. Finalmente los ciclos coinciden en que la duración de las fases recesivas es menor pero con mayor profundidad que los períodos en que el ciclo es positivo.

Una tercer herramienta utilizada para describir los ciclos estimados, es el espectro de cada uno de ellos. Esto permite determinar la duración del ciclo estimado, para lo cual se identifica un "pico" en el espectro para determinar a que período corresponde, esto resulta en que todos los filtro presentan un ciclo con una duración de 31 trimestres salvo CF y CFsa que tienen una duración de 25 trimestres.

Por otro lado, el espectro permite calcular una medida de la pureza del ciclo. Entendida como la proporción de variabilidad explicada por las frecuencias que, en teoría pertenecen a la señal cíclica. En este caso el filtro CF (o CFsa) tiene el valor más alto con un 96 %, y BW presenta el menor valor de pureza.

9.3. Intervalos de Confianza

Teniendo como objetivo fundamental construir una herramienta que permita identificar si el ciclo es significativamente distinto de cero, es decir si se encuentra por encima o por debajo de la tendencia, se construyen intervalos de confianza para los ciclos estimados.

La construcción de los intervalos está basada en obtener réplicas Bootstrap de la serie de entrada

¹El caso de CF presenta un valor de LC para cada dato, con una mediana de 0,6

y luego aplicar el filtro lineal. Para las réplicas se utiliza la metodología propuesta por Vinod en [42]. Los resultados presentados consisten en una primer aproximación al problema, no se hallaron antecedentes para Uruguay y en [14] se obtienen intervalos de confianza para la señal cíclica pero basado en remuestreo por bloques, que no es lo que se aplica en este trabajo.

Los resultados obtenidos muestran que los ciclos estimados con CF y BW son los que tienen intervalos de menor amplitud mientras que en HP y CFsa la amplitud es mayor. El principal resultado de los intervalos se muestra en la tabla 8.3, se puede ver que muchas de las veces en que el ciclo es positivo (negativo) no se puede concluir que el mismo es significativamente distinto de cero. En esta tabla se muestra específicamente la proporción de trimestres en los que el ciclo es significativamente distinto de cero para todo el período analizado.

Se puede observar que hay dos grupos, por un lado en HP y CFsa el ciclo estimado no es significativamente distinto de cero la mitad de las veces. Por otro lado CF, BK y BW presentan una estructura en donde aproximadamente en el 70% de los trimestres el intervalo no contiene al cero.

Este resultado es muy importante y debe ser tenido en cuenta a la hora de utilizar los ciclos estimados ya que es lo que permite dar una medida de la confianza de las estimaciones realizadas.

Hay que tener en cuenta que en términos generales los filtros no coinciden en la determinación de los periodos con brechas de producto positiva. Sólo en diecinueve trimestres del período analizado (134 trimestres) hay coincidencia de todas las estimaciones en relación a un ciclo por encima de la tendencia. Los mismos se concentran en tres períodos, los seis trimestres anteriores a la crisis de 1982, los cuatro trimestres del año 1987 y un período que abarca desde el segundo trimestre de 1998 hasta el primer trimestre del año 2001.

La crisis de 2002 es el último período en que coinciden las cinco estimaciones, todas son negativas y significativas, a partir de aquí la evolución de los ciclos es distinta en términos de su significación.

Aparte de la significación, también se utilizaron los intervalos de confianza para ver el efecto que tienen los errores de revisión.

La figura 8.3 muestra el ciclo y los intervalos de confianza con los datos hasta el segundo trimestre de 2007 y el nuevo ciclo estimado con los datos hasta el tercer trimestre de 2007.

Los resultados permiten ver que los intervalos de confianza para HP como CFsa contienen a los nuevos ciclos. Esto es un resultado útil para un hacedor de política ya que las conclusiones a las que había arribado antes de conocer el nuevo dato están cubiertas por el intervalo de confianza.

Por otro lado los intervalos construidos para CF y BW no muestran los mismos resultados ya que

en hay algunos trimestres de los ciclos reestimados que caen fuera del intervalo de confianza, en particular la estimación del ciclo para el segundo trimestre de 2007 no pertenece a los intervalos en ninguno de los dos casos. Esto se puede relativizar teniendo en cuenta que la revisión de este último dato fue muy importante, sobre todo si se compara con la revisión que se produce cuando se publica el dato del segundo trimestre de 2007.

9.4. Comentarios Finales

Es difícil seleccionar un filtro que sea mejor en todos los aspectos que se tienen en cuenta para la evaluación y la comparación. No obstante, en este apartado se presenta una evaluación final de cada uno de los filtros analizados a lo largo del documento, teniendo en cuenta todas las herramientas utilizadas a lo largo del trabajo.

Baxter King

El filtro BK presenta muy buena performance en varios de los aspectos evaluados. Es un filtro sencillo de aplicar ya que no es necesario contar con un modelo para la serie de entrada, ya que el filtro se aplica directamente sobre los datos. El efecto distorsivo del filtro es bajo y su nivel de pureza es aceptable. Además el filtro no sufre el problema de los errores de revisión, lo que constituye su principal ventaja.

Su mayor inconveniente es la pérdida de datos al final de la serie. BK pierde 12 datos para series trimestrales (usando la recomendación de sus autores) y esto hace que sea de muy difícil aplicación para el análisis de la coyuntura. Habría que proyectar 12 trimestres el IVFPIB para tener una estimación actual del ciclo con BK. Sin embargo, cuando se busque hacer un análisis que no este centrado en la coyuntura (por ejemplo de tipo histórico) este filtro es una alternativa muy atractiva a tener en cuenta.

Butterworth tipo Tangente

Los comentarios finales sobre este filtro son preliminares ya que se presentaron dificultades para la implementación del mismo. Con los resultados de este trabajo, este filtro presenta un bajo nivel de pureza en la señal cíclica estimada y un efecto distorsivo relativamente alto. Por esta razón no es recomendado en este trabajo para la estimación de la señal cíclica.

A pesar de los problemas antes mencionados, el filtro muestra buenos resultados para extraer la señal TC, por lo que puede ser utilizado como alternativa a la descomposición TRAMO SEATS en este aspecto. Este tipo de filtro debe ser analizado con mayor profundidad para poder implementarlo sin dificultades. La principal dificultad para implementar el filtro se basa en que el software utilizado no es lo suficientemente flexible a la hora de definir el orden del filtro

Holdrick Prescott y Cristiano Fitzgerald

Este filtro a diferencia de los anteriores requiere que la serie de entrada sea el componente TC. La pureza es aceptable y el efecto distorsivo es relativamente bajo. Pero hay que tener en cuenta que las medidas calculadas no consideran la distorsión ocasionada para extraer la señal TC.

Los errores de revisión son aceptables en la medida que el nuevo ciclo no sale del intervalo de confianza, aunque la amplitud del intervalo es la más amplia de los filtros analizados.

Respecto a Cristiano Fitzgerald el mismo se aplica sobre los datos aunque es mejor trabajar con la serie SA, para reducir los errores de revisión. Este filtro es el que presenta el mayor coeficiente de pureza, la distorsión es aceptable, aunque en las puntas aumenta considerablemente.

En términos generales para el análisis de coyuntura estos dos filtros brindan estimaciones alternativas del componente cíclico por lo que pueden ser utilizados como complementarios. El prefiltrado de los datos puede realizarse aplicando el filtro BW.

Bibliografía

- [1] BCU (2000)- Cuentas Nacionales. Metodología de las series Revisadas.
- [2] Badagián, A. (2003) - " *Extracción de señales y estimación de ciclos macroeconómicos en los países del Mercosur: un análisis integrado en el dominio del tiempo y de las frecuencias*". Mimeo. Trabajo Monográfico. Licenciatura de Economía. Facultad de Ciencias Económicas y Administración. UdelaR.
- [3] Baxter, M.;King, R. (1995) - " *Measuring Business Cycles Approximate Band-Pass Filters for Economic Time Series*". NBER. Working Paper N° 5022. National Bureau of Economic Research.
- [4] Bógalo, J. y Quilis, E. (2006)- " *Los efectos de calendario desde una perspectiva frecuencial*". Estadística Española. Vol. 48, N° 161. Instituto Nacional de Estadística.
- [5] Bucacos, E. (2001)- " *Tendencia y ciclo en el producto uruguayo*". Revista de Economía. Segunda Época Vol. VIII N°2. Banco Central del Uruguay.
- [6] Carbajal, F; Lanzilotta, B. Llambí, C. Velázquez.C. (2007) - " *La brecha de producto para Uruguay: metodologías para su estimación y su utilidad para el pronóstico de la inflación*". CINVE . Presentado en las XXII Jornadas Anuales de Economía del Banco Central del Uruguay.
- [7] Changy, O.; Döpke, J. (2001) " *Measures of Output Gap in the Euro-Zone: an Empirical Assessment of Selected Methods*", Kiel Working Paper N° 1053.
- [8] Christiano, L.; Fitzgerald, T. (1999) - " *The Band Pass Filter*". NBER. Working Paper N° 7257. National Bureau of Economic Research.
- [9] Conwey, P. y Frame, D. (2000)- " *A spectral analysis of New Zeland output gaps using Fourier and wavelet techniques*". Reseerve Banck of New Zeland.
- [10] Davison, A. y Hinkley, D. (1997) - " *Bootstraps Methods and their application*". Cambridge University Press.

- [11] Espasa, A. y Cancelo, J.R. (1993) - "*Métodos cuantitativos para el análisis de la coyuntura económica*". Editorial Alianza Economía
- [12] Everts, M. (2006)- "*Band Pass Filters*" MPRA Paper N° 2049. Munich Personal Re Pec Archive. <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/2049/>
- [13] Fournier, J. (2000)- "*L' approximation du filtre passe-bande proposée par Christiano et Fitzgerald*" Institut National de la Statistique des Études Économiques.
- [14] Gallego, F y Johnson, Ch. (2001) - "*Teorías y métodos de medición del producto de tendencia: una aplicación al caso de Chile*". Economía Chilena. Vol 4 N°2
- [15] Gómez, V. y Bengoechea, P. (2000)- "*Estimación del Componente Cíclico de las Series Económicas con Filtros Pasabanda: Una Aplicación a los Indicadores de Clima e Índices de Producción Industrial*". Investigaciones Económicas Ministerio de Economía y Hacienda. Vol. XXIV.
- [16] Gómez, V. y Maravall, A. (1996) "*TRAMO (Time Series Regression with ARIMA Noise, Missing Observation, and Outliers) and SEATS (Signal Extraction in ARIMA Time Series) Introduction for the User*".
- harveyHarvey, A y Trimbur, M. (2001)- "*General model-based filters for extracting cycles and trends in economic time series*". Cambridge University, Faculty of Economics and Politics.
- [17] Hamilton, J. (1994)- "*Time Series Analysis*". Princeton University Press.
- [18] Hodrick, R; Prescott, E. (1980)- "*Post War U.S Business Cycles: An Empirical Investigation*". Carnegie Mellon University, Working Discussion Paper 451.
- [19] Iacobucci, A. y Noullez, A. (2005)- "*A Frequency Selective Filter for Short-Length Time Series*". CNRS.
- [20] Kaiser, R y Maravall, A. (1999) - "*Estimation of the business cycle: A modified Hodrick - Prescott filter*". Spanish Economic Review 1.
- [21] Kamil, H. y Lorenzo, F. (1998)- "*Caracterización de las Fluctuaciones cíclicas en la economía uruguaya*". Revista de Economía, Vol.5, N°1, Segunda Época.
- [22] Kranendonk, H.; Bonenkamp, J.; Verbruggen, J. (2004) - "*A Leading Indicator for the Dutch Economy*". CPB Discussion Paper N° 32. Central Bureau of Policy Analysis.
- [23] Masoller, A. (2002)- "*Un Indicador Sintético de actividad económica*". BCU

- [24] Miller, S. (2002)-" *Métodos alternativos para la estimación del PIB potencial: Una aplicación para el caso de Perú*" Estudios Económicos BCRP.
- [25] Paparoditis, E. (1996)-" *A Frequency Domain Bootstrap-Based Method for Checking the Fit of a Transfer Function Model*". Journal of the American Statistical Association, Vol 91, N°436.
- [26] Pedersen, T. (1999) - " *Spectral Analysis, Business Cycles and Filtering of Economic Time Series. A Survey*". Mimeo. Institute of Economics, University of Copenhagen.
- [27] Ponce, J (2004)- " *Una nota sobre empalme y conciliación de series de cuentas nacionales*". Revista de Economía-Segunda Época Vol. XI N°2
- [28] Pollock S. (1999)-" *A Handbook of Time Series Analysis, Signal Processing and Dynamics*". London Academic Press
- [29] Pollock S. (2000)- " *Trend Estimation and De-trending via Rational Square-Wave Filters*". Journal of Econometrics
- [30] Pollock S. (2003)- " *Improved Frequency-Selective Filters*" Computational Statistics and Data Analysis
- [31] Pollock S. (2006) -" *Business Cycles in Time and Frequency*". Lectura disponible en <http://webspaces.qmul.ac.uk/dsgpollock>
- [32] Prioretto, T. y Harvey, A. (2000)-" *A Beveridge-Nelson smoother*". Economic Letters 67.
- [33] Reijer, A. den (2002) - " *International Business Indicators: Measurement and forecasting*". Research Memorandum WO 689, De Nederlandsche Bank.
- [34] Reijer, A. den (2006) - " *The Dutch business cycle: which indicators should we monitor?*". Research Memorandum , De Nederlandsche Bank.
- [35] Rodríguez, S.; da Silva, N. y Álvarez, I. (2007)" *Métodos univariados para la estimación de la brecha de producto en Uruguay: Parte I*"
- [36] Rodríguez, S.; da Silva, N. y Álvarez, I. (2007)" *Métodos univariados para la estimación de la brecha de producto en Uruguay: Parte II*"
- [37] Rodríguez, S.; da Silva, N. y Álvarez, I. (2007)" *Estimación de la brecha de producto sectorial en Uruguay*"
- [38] Rodríguez, S; Badagián, A. (2004) - " *Dinámicas no lineales y ciclos asimétricos en Argentina, Brasil y Uruguay*". Instituto de Estadística (IESTA). Facultad de Ciencias Económicas y Administración. UdelaR.

- [39] Ruth, F. van;Schouten, B.;Wekker, R. (2005) - "*The Statistics Netherland´s Business Cycle Tracer. Methodological aspects;concepts,cycle computaciona and indicator selection*". Mimeo 2005 -MIC-44. Statistics Netherlands. Division of Macroeconomic statistics and publications.
- [40] Schleicher, C. (2003) - "*Essays on the descomposition of economic variables*". Tesis de Doctorado presentada en University of British Columbia.
- [41] Theoduloz, T. (2005)- "*El producto potencial de la economía uruguaya: 1978-2003*". XX JORNADAS ANUALES DE ECONOMÍA
- [42] Vinod, H. (1999)- "*Constructive Ensembles for Time Series in Econometrics and Finance*".

Apéndice A

Anexo de Datos

En este anexo se presentan las principales series estimadas en el trabajo. Para acceder a los datos se debe tomar prestado el CD que se encuentra en biblioteca junto con un ejemplar del documento. En ese disco se pueden encontrar, en formato digital, la serie de IVFPIB utilizada, el resultado de la descomposición basada en modelos, los cinco ciclos y los intervalos de confianza estimados.

Apéndice B

Anexo de Resultados

Aqui se presentan algunos resultados que complementan los que se muestran en el cuerpo del documento.

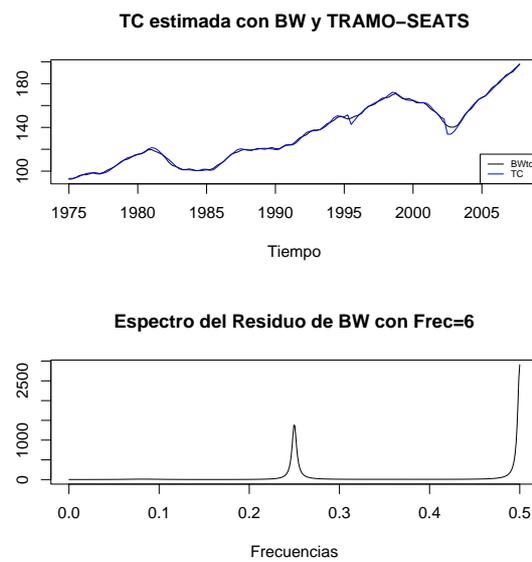


Figura B.1: Aplicacion del filtro BW a los datos

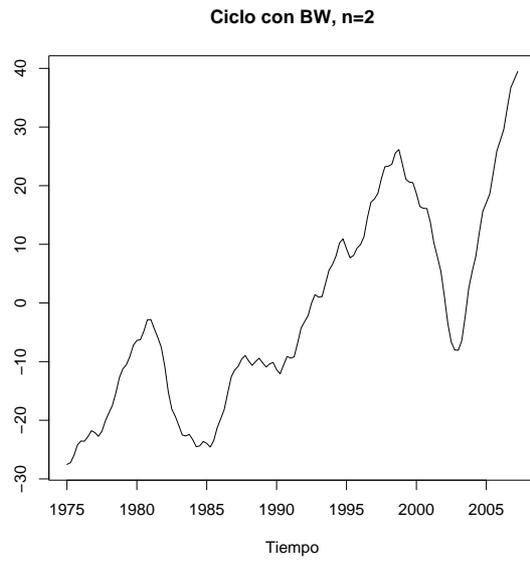


Figura B.2: Filtro BW sobre TC con $n=2$

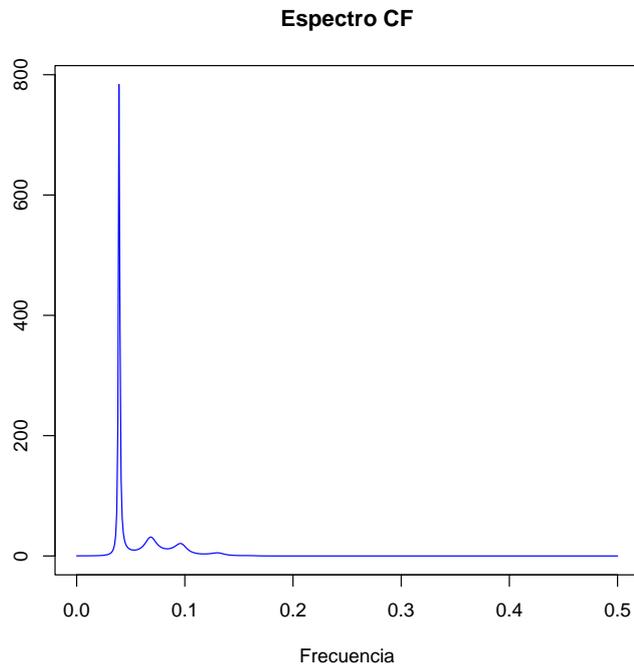


Figura B.3: Espectro del ciclo estimado con CF

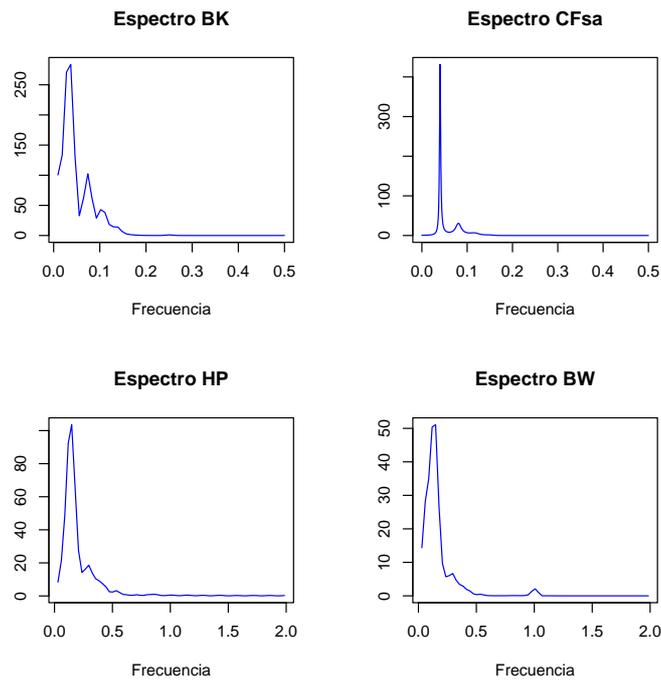


Figura B.4: Estimación no Paramétrica de los Espectros

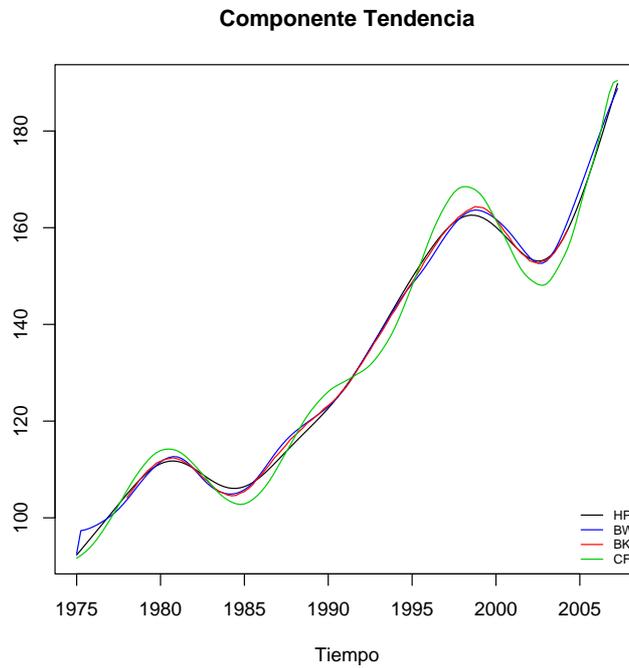


Figura B.5: Tendencias estimadas con los distintos filtros

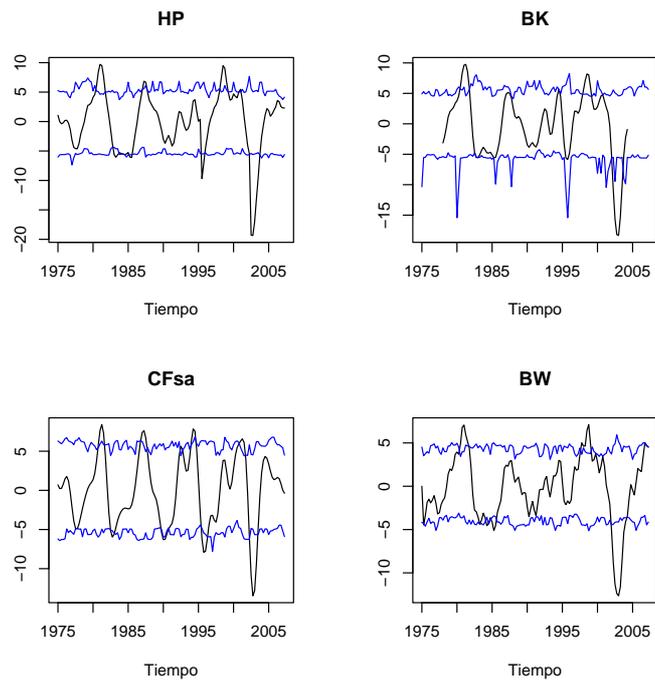


Figura B.6: Intervalos de Confianza utilizando el remuestreo en bloques

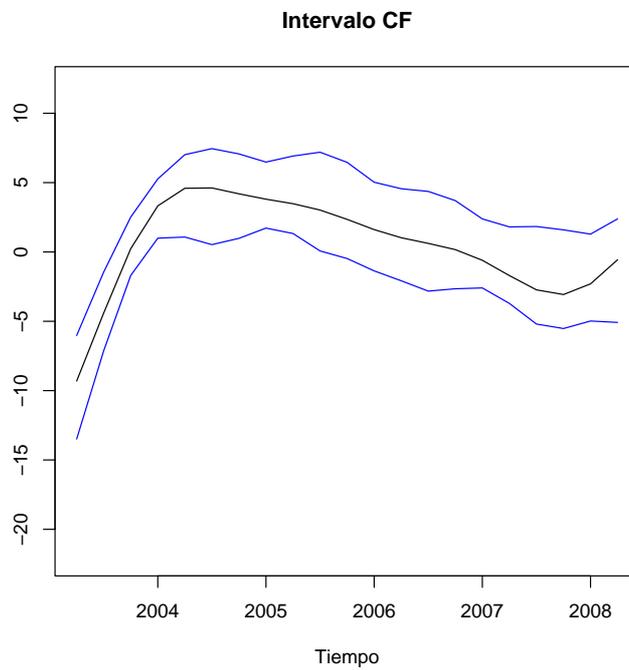


Figura B.7: Intervalo de confianza para CF con remuestreo en maxima entropía

Cuadro B.1: Intervalo de Confianza para la media de cada ciclo

| | HP | BK | CF | Cfsa | BW |
|------------|-----------|-----------|-----------|-------------|-----------|
| Media | -0.08 | -0.30 | 0.01 | -0.01 | -0.39 |
| DS Media | 0.45 | 0.53 | 0.39 | 0.39 | 0.33 |
| Lim Inf IC | -0.97 | -1.35 | -0.77 | -0.79 | -1.04 |
| Lim Sup IC | 0.81 | 0.74 | 0.78 | 0.77 | 0.26 |

Cuadro B.2: Correlaciones entre los ciclos estimados

| | hp1600 | bk32 | cf32 | cf32sa | bw32 |
|--------|---------------|-------------|-------------|---------------|-------------|
| hp1600 | 1 | 0.971 | 0.79 | 0.791 | 0.943 |
| bk32 | 0.971 | 1 | 0.818 | 0.817 | 0.969 |
| cf32 | 0.79 | 0.818 | 1 | 0.999 | 0.697 |
| cf32sa | 0.791 | 0.817 | 0.999 | 1 | 0.697 |
| bw32 | 0.943 | 0.969 | 0.697 | 0.697 | 1 |

Apéndice C

Anexo de Código

En este anexo se presentan los principales programas utilizados en el trabajo en el software R. Se muestra la manera de obtener los ciclos estimados, los intervalos de confianza, los códigos para generar las figuras, las tablas y el resto de los cálculos del documento.

Se utilizaron varias librerías de R, la *mFilter* tiene las funciones para aplicar los filtros lineales utilizados, *Bolstad* permite realizar integrales en forma numérica, *meboot* y *boot* son las librerías usadas para obtener réplicas bootstraps de series temporales.

C.1. Ciclos estimados

Cargamos los datos TC y SA obtenidos luego de aplicar TRAMO-SEATS

```
dat=read.table("tc_proy.txt",header=T)
tc1=ts(dat[,1],frequency=4,star=c(1975,1))
sa=ts(dat[,2],frequency=4,star=c(1975,1))

#Consideramos el TC prohibiendo outliers de tipo LS
tc<-read.table("tc-ls.txt",header=T)
tc<-ts(tc,frequency=4,star=c(1975,1))

#Cargamos datos del IVFPIB y el mismo con proyecciones
pib=read.table("pib75rev.txt",header=T)
pib=ts(pib,frequency=4,star=c(1975,1))
pib16=read.table("pib16proy.txt",header=T)
```

```
pib16=ts(pib16,frequency=4,star=c(1975,1))
library(mFilter)
```

Cálculo de los Ciclos utilizados

```
#Hodrick prescott
hptot2=hpfilter(tc[1:134],freq=1600)
hp1600=ts(hptot2$cycle[1:130],freq=4,start=c(1975,1))

# Baxter King
bktot2=bkfilter(pib16[1:130],pu=32,pl=6,nfix=12)
bk32=ts(bktot2$cycle,freq=4,start=c(1975,1))

#Christiano Fitzgerald
cftot3=cffilter(pib16[1:134],pl=6,pu=32,root=T)
cf32=ts(cftot3$cycle[1:130],freq=4,start=c(1975,1))
cftot2=cffilter(sa[1:134],pl=6,pu=32,root=T)
cf32sa=ts(cftot2$cycle[1:130],freq=4,start=c(1975,1))

# Butterworth
aux1=bwfilter(pib16[1:136],freq=6)
aux2=bwfilter(aux1$trend,freq=32,nfix=1)
bw32=ts(aux2$cycle[1:130],freq=4,start=c(1975,1))

#Estadísticas Descriptivas de los Ciclos estimados
ciclos=data.frame(hp1600,bk32,cf32,cf32sa,bw32)
library(fBasics)
sta=data.frame(apply(ciclos,2,basicStats))
```

C.2. Espectro de los ciclos

Espectros de los ciclos con el método paramétrico

```
par(mfrow=c(2,2))
escf2=spectrum(cf32sa,method="ar",log="no",main="Espectro CFsa",
, xlab="Frecuencia",ylab="",col=4)
eshp=spectrum(hp1600,method="ar",log="no",main="Espectro HP")
```

```

, xlab="Frecuencia", ylab="", col=)
esbk=spectrum(bk32[13:118], method="ar", log="no", main="Espectro BK"
, xlab="Frecuencia", ylab="", col=4)
esbw=spectrum(bw32, method="ar", log="no", main="Espectro BW"
, xlab="Frecuencia", ylab="", col=4)

escf=spectrum(cf32, method="ar", log="no", , xlab="Frecuencia"
, ylab="", main="Espectro CF", col=4)

#Identificación del pico del espectro
m=c(which.max(esbk$spec), which.max(escf$spec),
which.max(escf2$spec), which.max(eshp$spec), which.max(esbw$spec))

pico=c(1/esbk$freq[m[1]], 1/escf$freq[m[2]], 1/escf2$freq[m[3]],
1/eshp$freq[m[4]], 1/esbw$freq[m[5]])
names(pico)<-c("BK", "CF", "CFsa", "HP", "BW")

w1=eshp$freq*(pi/2)
w2=esbk$freq*pi*2

```

Estimación no paramétrica del espectro de los ciclos

```

par(mfrow=c(2,2))
escf=spectrum(cf32, spans=3, log="no")
escf21=spectrum(cf32sa, spans=3, log="no")
eshp=spectrum(hp1600, spans=3, log="no")
esbk=spectrum(bk32[13:118], spans=3, log="no")
esbw=spectrum(bw32, spans=3, log="no")

par(mfrow=c(2,2))
plot(esbk$freq, esbk$spec, type="l", ylab="", xlab="Frecuencia", main="Espectro BK", col=4)
plot(escf2$freq, escf2$spec, type="l", ylab="", xlab="Frecuencia", main="Espectro CFsa", col=4)
plot(eshp$freq, eshp$spec, type="l", ylab="", xlab="Frecuencia", main="Espectro HP", col=4)
plot(esbw$freq, esbw$spec, type="l", ylab="", xlab="Frecuencia", main="Espectro BW", col=4)

```

Cálculos de la integral del espectro

```

library(Bolstad)

```

```
int=c(sintegral(esbk$freq,esbk$spec),
sintegral(escf2$freq,escf2$spec),
sintegral(eshp$freq,eshp$spec),
sintegral(esbw$freq,esbw$spec))
```

#Calculo la parte del espectro que corresponde a la tendencia

```
w2=eshp$freq
int1=c(sintegral(w2[w2<1/32],esbk$spec[w2<1/32]),
sintegral(w2[w2<1/32],escf2$spec[w2<1/32]),
sintegral(w2[w2<1/40],eshp$spec[w2<1/40]),
sintegral(w2[w2<1/32],esbw$spec[w2<1/32]))
```

#Calculo la parte del espectro que se corresponde con el componente cíclico

```
int2=c(sintegral(w2[(w2>1/32)&(w2<1/6)],esbk$spec[(w2>1/32)&(w2<1/6)]),
sintegral(w2[(w2>1/32)&(w2<1/6)],escf2$spec[(w2>1/32)&(w2<1/6)]),
sintegral(w2[(w2>1/40)&(w2<1/6)],eshp$spec[(w2>1/40)&(w2<1/6)]),
sintegral(w2[(w2>1/32)&(w2<1/6)],esbw$spec[(w2>1/32)&(w2<1/6)]))
```

#Calculo la parte del espectro que se corresponde con el componente estacional e irregular

```
int3=c(sintegral(w2[w2>1/6],esbk$spec[w2>1/6]),
sintegral(w2[w2>1/6],escf2$spec[w2>1/6]),
sintegral(w2[w2>1/6],eshp$spec[w2>1/6]),
sintegral(w2[w2>1/6],esbw$spec[w2>1/6]))
```

C.3. Intervalos

Intervalos de confianza con Bloques solapados sobre el ciclo

```
library(boot)

rephp=tsboot(hp1600,R=100,statistic=rep,l=5,sim="fixed")
chp=t(rephp$t)
ichp=t(apply(chp,1,quantile,probs=c(0.1,0.90)))
repbk=tsboot(bk32,R=100,statistic=rep,l=5,sim="fixed")
cbk=t(repbk$t)
icbk=t(apply(cbk,1,quantile,probs=c(0.1,0.90),na.rm=T))
```

```

repcf=tsboot(cf32,R=100,statistic=rep,l=5,sim="fixed")
ccf=t(repcf$t)
iccf=t(apply(ccf,1,quantile,probs=c(0.1,0.90)))
repcfsa=tsboot(cf32sa,R=100,statistic=rep,l=5,sim="fixed")
ccfsa=t(repcfsa$t)
iccfsa=t(apply(ccfsa,1,quantile,probs=c(0.1,0.90)))
repbw=tsboot(bw32,R=100,statistic=rep,l=5,sim="fixed")
cbw=t(repbw$t)
icbw=t(apply(cbw,1,quantile,probs=c(0.1,0.90)))

```

```
ic<-data.frame(ichp,icbk,iccfsa,icbw)
```

```
#Constucción de las réplicas
```

```

btc=meboot(tc[1:138],1000)
reptc=btc$ensemble
bpib=meboot(pib16[1:138],1000)
repib=bpib$ensemble
bsa=meboot(sa[1:138],1000)
repsa=bsa$ensemble

```

```

chp=matrix(0,134,1000)
cbk=matrix(0,134,1000)
ccf=matrix(0,134,1000)
ccfsa=matrix(0,134,1000)
cbw=matrix(0,134,1000)

```

```

for(i in 1:1000){
aux1=hpfilter(reptc[,i],1600)
chp[,i]=aux1$cycle[1:134]
aux2=bkfilter(repib[,i],pl=6,pu=32,nfix=12)
cbk[,i]=aux2$cycle[1:134]
aux3=cffilter(repib[,i],pl=6,pu=32,root=T)
ccf[,i]=aux3$cycle[1:134]
aux4=cffilter(repsa[,i],pl=6,pu=32,root=T)
ccfsa[,i]=aux4$cycle[1:134]
aux5=bwfilter(repib[,i],freq=6)
aux6=bwfilter(aux5$trend,freq=32,nfix=1)

```

```

cbw[,i]=aux6$cycle[1:134]
}

ichp=t(apply(chp,1,quantile,probs=c(0.025,0.975)))
icbk=t(apply(cbk,1,quantile,probs=c(0.025,0.975),na.rm=T))
iccf=t(apply(ccf,1,quantile,probs=c(0.025,0.975)))
iccfsa=t(apply(ccfsa,1,quantile,probs=c(0.025,0.975)))
icbw=t(apply(cbw,1,quantile,probs=c(0.025,0.975)))

ic_1000=data.frame(ichp,icbk,iccf,iccfsa,icbw)
t2=seq(1975,2008.25,0.25)
names(ic_1000)<-c("HP inf","HP sup","BK inf", "BK sup",
"CF inf","Cfsup", "Cfsa inf", "CF sa sup", "BW inf","BW sup")
rownames(ic_1000)=t2

# Salvo intervalos y ciclos

ciclos072<-list(hp1600,bk32,cf32,cf32sa,bw32)
names(ciclos072)<-c("HP72","BK72","CF72", "CF72sa","BW72")

save(ciclos072,ic_1000,file="intervalos.rdata")
write.table(ic_1000,file="intervalo_vinod.txt")

```

C.4. Figuras

```

#Gráfico de los Ciclos IIR HP y BW
plot(hp1600,ylab="", xlab="Trimestres",main="Ciclos IIR")
lines(bw32,col=4)
abline(h=0)
legend("bottomleft",legend=c("HP", "BW"),col=c(1,4),lty=1, cex=0.8)

#Gráfico de los ciclos FIR CF, CFsa y BK
plot(bk32,ylab="", xlab="Trimestres",main="Ciclos FIR")
lines(cf32,col=2)
lines(cf32sa,col=4)
abline(h=0)

```

```
legend("bottomleft",legend=c("BK", "CF", "CFsa"),col=c(1,2,4),lty=1, cex=0.8)
```

```
#Gráfico de la tendencia para "HP", "BW", "BK", "CF"
```

```
plot(tdhp,xlab="Tiempo", ylab="",main="Componente Tendencia");lines(tdbw,col=4);lines(tdbk,  
legend("bottomright",legend=c("HP", "BW", "BK", "CF"),col=c(1,4,2,3),lty=1,  
cex=0.7,bty="n")
```

```
t=seq(2003.25,2008.25,0.25)
```

```
par(mfrow=c(2,2))
```

```
plot(t,hp1600[114:134],ylim=c(-22,12),xlab="Tiempo",ylab="",type="l"  
,main="Intervalo HP")
```

```
lines(t,ichp[114:134,1],col=4)
```

```
lines(t,ichp[114:134,2],col=4)
```

```
plot(t,cf32sa[114:134],ylim=c(-22,12),xlab="Tiempo",ylab="",type="l",main="Intervalo CFsa")
```

```
lines(t,iccfsa[114:134,1],col=4)
```

```
lines(t,iccfsa[114:134,2],col=4)
```

```
plot(t,bw32[114:134],ylim=c(-22,12),xlab="Tiempo",ylab="",type="l",main="Intervalo BW")
```

```
lines(t,icbw[114:134,1],col=4)
```

```
lines(t,icbw[114:134,2],col=4)
```

```
t1=seq(1999.25,2004.25,0.25)
```

```
plot(t1,bk32[98:118],ylim=c(-24,12),xlab="Tiempo",ylab="",type="l",main="Intervalo BK")
```

```
lines(t1,icbk[98:118,1],col=4)
```

```
lines(t1,icbk[98:118,2],col=4)
```