Efecto Hall
Monografía del curso "Medidas Eléctricas"

Leonardo Pujadas - Matías Valdés *
Tutor: Andrés Merello
Facultad de Ingeniería - UdelaR

22 de junio de 2012

Resumen

En el presente artículo se estudia el fenómeno físico denominado Efecto Hall; comenzando con una introducción teórica de dicho fenómeno, y luego estudiando los sensores de efecto Hall, sus aplicaciones principales, ventajas y desventajas. También se realiza una breve introducción al fenómeno conocido como efecto Hall Cuántico. Finalmente, como ejemplo de aplicación, se presenta, construye y analiza, un instrumento que permite medir ángulos con un sensor de efecto Hall de salida lineal.

Palabras clave: Efecto Hall, Efecto Hall Cuántico, Medida de Ángulos, Sensor Hall.

1. Introducción

Dado un material por el que se pueda establecer una corriente eléctrica, y que se encuentre sometido a un campo magnético, el efecto Hall permite relacionar la corriente y el campo magnético, con la aparición de una diferencia de potencial en el material, en función de algunas de las propiedades de composición y tamaño de este. Esto permite caracterizar al material en términos de conducción eléctrica, y tiene además diversas aplicaciones como sensor de corriente, campo magnético, y cualquier magnitud que pueda ser convertida a una corriente o campo magnético.

*matiasvd@gmail.com

2. Reseña Histórica

El efecto Hall fue descubierto en el año 1879 por el físico estadounidense Edwin Herbert Hall (1855-1938), mientras trabajaba en su tésis doctoral. Lo notable de este descubrimiento, el cual involucra una explicación en términos de portadores de carga, es que se realizó 18 años antes del descubrimiento del electrón.

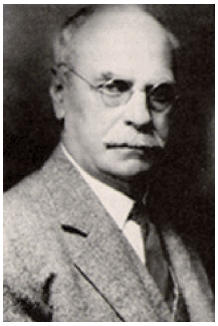

Figura 1: Edwin Herbert Hall (Wikimedia.org).

Un siglo más tarde, Klaus von Klitzing (1943, Alemania), partiendo del descubrimiento de Hall, desarrolló la teoría del denominado efecto Hall cuántico, lo que le valió el premio Nobel de física en 1985.

3. Efecto Hall

El efecto Hall es un fenómeno electromagnético. Para describirlo se considera el sistema de la Figura 3, conformado por un material conductor de ancho d y espesor z.

Figura 2: Klaus von Klitzing.

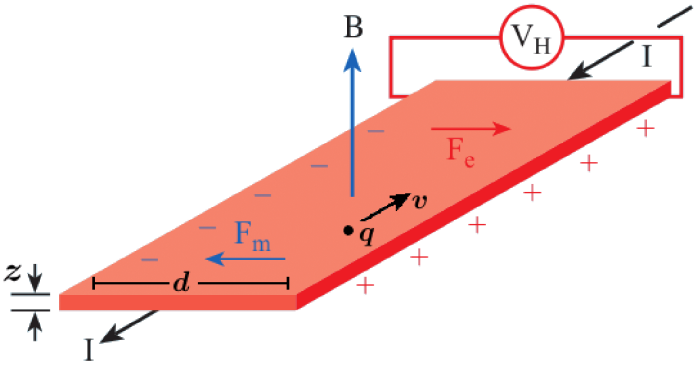

Figura 3: Efecto Hall en un conductor [4].

Por este material se hace circular una corriente I constante, a la vez que se lo somete a un campo magnético $\vec{B}$ constante, que lo atraviesa perpendicularmente.

Se asume que las cargas móviles q son negativas. Inicialmente dichas cargas experimentan una fuerza magnética perpendicular a la corriente y al campo magnético (fuerza de Lorentz):

$$\vec{F}_m = q\left(\vec{v} \wedge \vec{B}\right).$$

Dicha fuerza produce un desplazamiento de las cargas hacia el borde «izquierdo» del material conductor. Esto genera una diferencia de potencial, y su consiguiente campo eléctrico, en el mismo sentido que la fuerza magnética. Este campo eléctrico ejerce sobre las cargas una fuerza eléctrica que se opone a la fuerza magnética:

$$\vec{F}_e = q\vec{E}.$$

El sistema evoluciona hasta llegar al equilibrio entre estas dos fuerzas:

$$qv\vec{B} = q\vec{E} \Rightarrow v\vec{B} = \vec{E}.$$

El campo eléctrico se puede relacionar con la diferencia de pontecial V_H que aparece entre los extremos del material conductor, de la siguiente forma:

$$E = \frac{V_H}{d}.$$

A su vez, si se denota por n a la densidad de portadores de carga del material por unidad de volumen, y A la sección del material, la velocidad v de los portadores de carga verifica:

$$I = nqvA.$$

Con estas tres últimas ecuaciones, y teniendo en cuenta que $A = z \times d$, se obtiene la siguiente expresión para la diferencia de potencial:

$$V_H = \frac{IB}{nqz}.$$

Esta ecuación relaciona la diferencia de potencial con la corriente I, el campo magnético B y las características del material conductor. En particular, midiendo el voltaje Hall V_H, y conociendo la corriente I, el campo magnético B, y las dimensiones físicas del material, se puede determinar la densidad de portadores de carga del material conductor:

$$n = \frac{IB}{V_H qz}.$$

Se define el coeficiente de Hall como:

$$R_H = \frac{1}{nq}.$$

Este es una característica del material utilizado. Debido a que en los materiales semiconductores la densidad de portadores de carga n es sensiblemente menor que en los conductores, y dado que esta es inversamente proporcional a R_H y V_H, el efecto Hall es más notorio en los materiales semiconductores. Es por esto que los dispositivos comerciales basados en el efecto Hall suelen usar materiales semiconductores.

4. Sensores de Efecto Hall

Los sensores magnéticos convierten señales magnéticas en señales eléctricas, para ser procesadas

por circuitos electrónicos. En particular los sensores de efecto Hall se valen de dicho efecto para obtener una diferencia de potencial V_H, que es directamente proporcional al campo magnético B que excita al sensor, y/o a la corriente I que circula por este.

4.1. Principales Ventajas

Entre las principales ventajas de este tipo de sensores, se destacan: son dispositivos de estado sólido, lo cual les brinda larga vida de funcionamiento; frecuencia de funcionamiento relativamente alta (100kHz); no tienen partes móviles; compatibilidad con otros circuitos electrónicos; amplio márgen de temperatura (-40C a +125C); buena repetibilidad.

4.2. Tipos de Salida

Los sensores de efecto Hall se clasifican según su tipo de salida en: lineales (analógicos) o digitales.

4.2.1. Salida Lineal (analógica)

En este tipo de sensor la salida consiste en el voltaje V_H obtenido en las expresiones teóricas anteriores amplificado. Es decir que el voltaje de salida es del tipo

$$V_{\text{out}} = kB.$$

La Figura 4 muestra un esquema eléctrico de un sensor Hall con salida lineal.

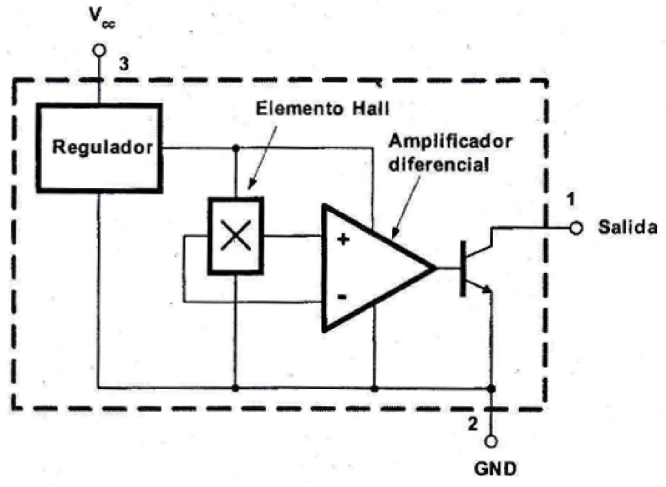

Figura 4: Sensor de efecto Hall de salida lineal. [1][Capítulo 17: Sensores de efecto Hall]

4.2.2. Salida Digital

En este caso se incorpora un comparador a la salida del sensor lineal, para obtener una salida digital binaria. Esto se muestra en la Figura 5.

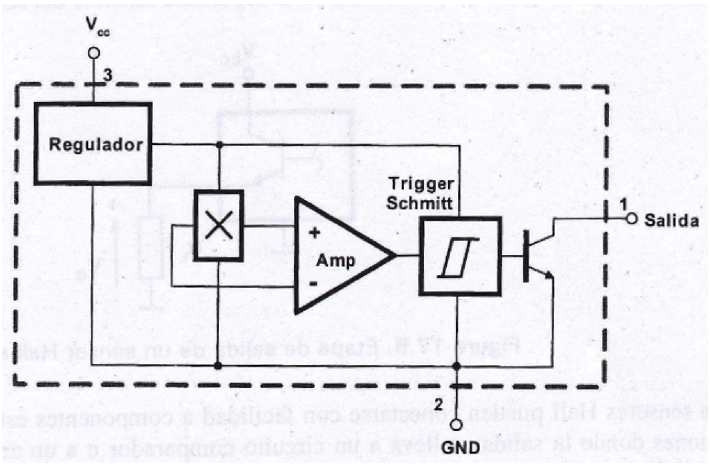

Figura 5: Sensor de efecto Hall de salida digital. [1][Capítulo 17: Sensores de efecto Hall]

Dentro de los sensores con salida digital se distinguen dos tipos:

1. Bipolar - Su salida se activa mediante la presencia de un polo magnético sur (positivo) y se desactiva mediante la presencia de un polo magnético norte (negativo). Si no hay campo magnético presente, la salida mantiene el último estado alcanzado.

2. Unipolar - La salida se activa mediante la presencia de un polo sur. En otro caso la salida está desactivada.

4.3. Principales Aplicaciones

4.3.1. Mediciones de Corriente

Para realizar mediciones de corriente con los sensores de efecto Hall, se mide el campo magnético inducido por la corriente del conductor en un material ferromagnético que lo rodea. Este sistema se observa en la Figura 6.

La corriente y el campo magnético se relacionan

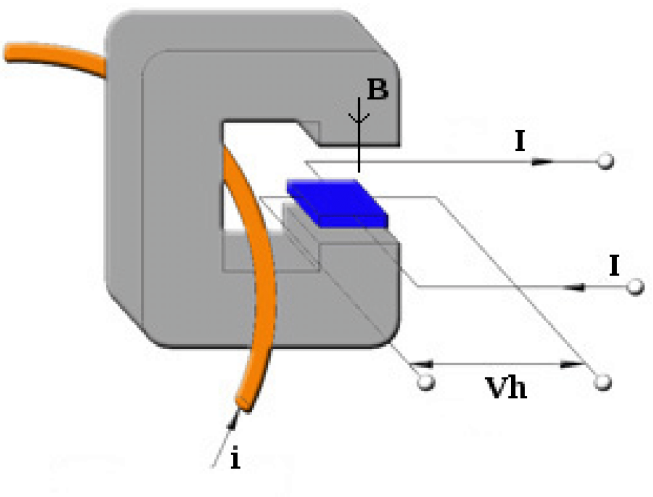

Figura 6: Medida de una corriente i con un sensor de efecto Hall.

de la siguiente forma[1]:

$$B = \frac{\mu i}{2\pi r}.$$

Por lo tanto, el voltaje obtenido en el sensor será:

$$V_H = R_H I B = \left(\frac{R_H \mu I}{2\pi r}\right) i.$$

Se obtiene así una medida indirecta de la corriente del conductor.

Como ventajas de este método tenemos que no es necesario abrir el circuito para realizar la medida, y que el circuito de medida se encuentra eléctricamente aislado del sistema a medir. Además permite medir corrientes DC; lo cual no es posible con otro de los métodos usuales de medida de corriente, como el de intercalar un transformador de medida, ya que el transformador no responde a componentes de DC.

4.3.2. Otras Aplicaciones

Entre otras posibles aplicaciones de los sensores de efecto Hall, destacan [1][Capítulo 17]: Motores DC sin escobillas ("brushless"); Medida de velocidad; Interruptor sin contactos; Medida de posición; Medida de intensidad de campos magnéticos (magnetómetros, gaussímetros o teslámetros); Medida de potencia; Multiplicador de señales. En particular son muy utilizados en la industria automotriz.

[1]Suponiendo material ferromagnético no saturado (en zona lineal) y de geometría circular de radio r.

5. Efecto Hall Cuántico

En 1980 Klaus von Klitzing descubrió el llamado efecto Hall Cuántico [6], que la valió el premio Nóbel de física en 1985. El efecto Hall Cuántico se observa cuando los portadores de carga de un material semiconductor son obligados a moverse en las dos dimensiones de un plano, en condiciones extremas de baja temperatura (alrededor de $4K = -269^oC$) e intensos campos magnéticos (al menos 10T) [2]. En este caso el cociente

$$R_{HQ} = \frac{V_H}{I},$$

denominado "Resistencia Hall Cuántica", no varía linealmente con B, como se obtuvo en secciones anteriores, sino que adopta valores discretos, como se muestra en la Figura 7.

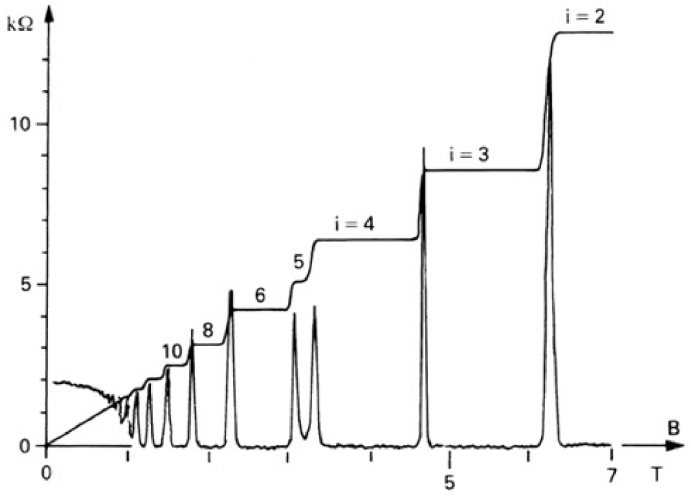

Figura 7: Variación de R_{HQ} con la intensidad del campo magnético $\vec{B}$. (Utiliza lanotación i en lugar de la n de este texto).

En cada "escalón" esta resistencia no depende del campo magnético, por lo que para su medida no es necesario conocer el valor de dicho campo con gran precisión. El valor que toma R_{HQ} en cada escalón está dado por una combinación de constantes universales:

$$R_{HQ} = \frac{h}{ne^2},\ n = 1, 2, 3, \ldots; \qquad (1)$$

[2]En 2007 se publicaron trabajos documentando la observación del efecto Hall cuántico en el grafeno a temperatura ambiente [11, 12].

donde h es la constante de acción de Planck, e la carga eléctrica del electrón, y n un número entero que caracteriza cada escalón de Hall. [3] Se observa además que la "Resistencia Hall Cuántica" no depende de las propiedades específicas del material.

El efecto Hall cuántico ha permitido establecer un patrón de resistencia, basado en la medida de la denominada constante de von Klitzing [14]:

$$R_K = \frac{h}{e^2} = 25812{,}807572(95)\ \Omega.$$

Esta se puede obtener con una incertidumbre relativa del orden de 10^{-9}. Actualmente se utiliza como resistencia eléctrica patrón en laboratorios de todo el mundo.

5.1. Efecto Hall Cuántico Fraccionario

En 1982, dos años después del descubrimiento del Efecto Hall Cuántico, Horst Ludwig Störmer (1949, Alemania), Daniel Tsui (1939, China) y Arthur Gossard (1935, EEUU), por entonces investigadores de los Laboratorios Bell de EEUU, descubrieron lo que hoy se conoce como Efecto Hall Cuántico Fraccionario [7]. Esto es: observaron que en ciertas condiciones especiales, la resistencia R_{HQ} viene dada por la ecuación (1), pero reemplazando n por números racionales no enteros.

Figura 8: Robert Laughlin, Horst Ludwig Störmer y Daniel Tsui (Wikimedia.org).

En 1983 Robert Laughlin (1950, EEUU) logró explicar el fenómeno observado [8]. Esto llevó a que, en 1998, Störmer, Tsui y Laughlin, obtuvieran el Premio Nobel de Física por el descubrimiento y la explicación del Efecto Hall Cuántico Fraccionario [9].

[3] $h = 6,62606876(52) \times 10^{-34} J.s$ y $e = 1,602176462(63) \times 10^{-19} C$ [14]. La cifra entre paréntesis corresponde a la desviación estándar en las dos cifras menos significativas.

6. Aplicación

Como aplicación del efecto Hall, se pretende diseñar un instrumento que permita medir ángulos dentro de cierto rango, mediante el uso de un sensor de efecto Hall con salida lineal. Para validar el instrumento diseñado, se lo compara con las medidas obtenidas mediante un semicírculo.

6.1. Sensor Hall A1302

El sensor utilizado es el A1302 de la marca Allegro. Este se obtiene en la plaza local por un valor aproximado de 13 dólares, en un encapsulado ultramini SIP (tipo transistor) de 3 pines (Figura 9).

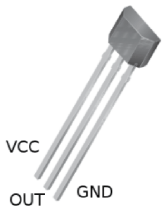

Figura 9: Sensor de efecto Hall A1302 [3].

La salida de este sensor es un voltaje comprendido entre 0V y Vcc. Esta varía linealmente respecto a la componente perpendicular $B_\perp$ del campo magnético incidente. Se verifica además que cuando $B_\perp$ es nula, la salida es $\frac{V_{cc}}{2}$. En la Tabla 1 se resumen algunas de la características más importantes del sensor utilizado.

6.2. Diseño del Sistema

El sistema diseñado consiste de una parte mecánica y una parte eléctrica.

6.2.1. Sistema Mecánico

Esta parte se compone de un semicírculo graduado, al cuál se le ha colocado un tornillo por su centro

	Mín	Típ	Máx	Unidades
Voltaje V_{CC}	4.5	-	6	V
Corriente I_{CC}	-	-	11	mA
Ancho de banda	-	20	-	kHz
Resistencia salida	-	2	5	Ohm
Linealidad	-	-	$\pm 2{,}5$	%
Simetría	-	-	$\pm 3{,}0$	%
Salida con $B_\perp = 0$		$\frac{V_{cc}}{2}$		V
Sensibilidad	1.0	1.3	1.6	$\frac{mV}{G}$

Cuadro 1: Características principales del sensor A1302, para $V_{cc} = 5V$ [3].

[4]. A su vez, en un extremo de este tornillo se coloca un cable que hace las veces de "fiel", y en el otro extremo un imán permanente. Tanto el fiel como el imán son solidarios al eje. El sensor se coloca frente al imán como se aprecia en la Figura 10.

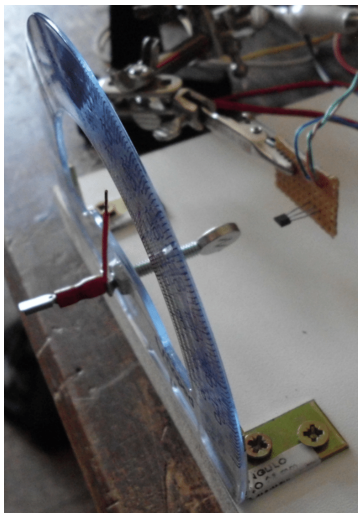

Figura 10: Sistema mecánico utilizado.

6.2.2. Sistema Eléctrico

El circuito eléctrico utilizado para medir el voltaje del sensor Hall, se muestra en la Figura 11.

Este circuito se basa en un divisor de tensión, en cuya salida se obtiene idealmente un voltaje $\frac{V_{cc}}{2}$. Este valor coincide con la salida del sensor cuando $B_\perp = 0$ (punto medio de operación del sensor). Esto permite

[4]El semicírculo no forma parte del instrumento que se pretende dieñar. Se utiliza únicamente como instrumento de referencia para validar el instrumento diseñado.

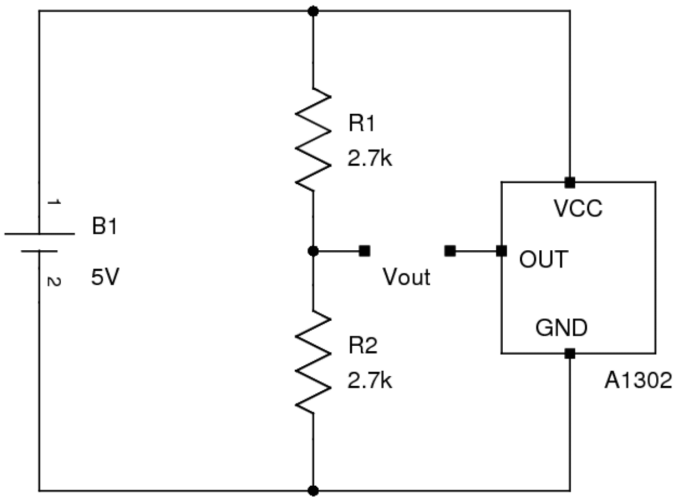

Figura 11: Circuito eléctrico utilizado

trabajar en la escala de 200mV del voltímetro, obteniendo así una mayor resolución en la variación del voltaje de salida.

Para alimentar el circuito se utilizó una fuente regulada de 5V DC, del Laboratorio de Medidas Eléctricas del Instituto de Ingeniería Eléctrica (IIE). El voltímetro utilizado fue el CDM 250.

6.2.3. Principio de Funcionamiento

El sistema se basa en que el sensor Hall responde únicamente a la componente perpendicular del campo magnético que incide sobre él. El imán se coloca sobre el eje de giro, de tal forma que cuando la aguja se encuentra vertical, la componente perpendicular del campo magnético que incide sobre el sensor Hall sea nula.

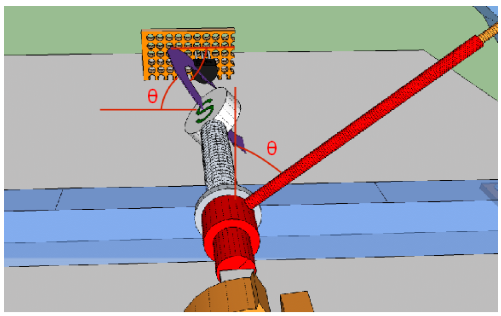

Figura 12: Componente perpendicular del campo magnético al variar el ángulo.

Como se puede apreciar en la Figura 12, al rotar

el eje un ángulo θ, la componente perpendicular del campo magnético que incide sobre el sensor, varía según:

$$B_\perp(\theta) = k_1 \operatorname{sen}(\theta).$$

Como la salida del sensor es directamente proporcional a $B_\perp(\theta)$, se obtiene una salida de la forma:

$$V(\theta) = k_2 \operatorname{sen}(\theta).$$

6.3. Resultados Obtenidos

Utilizando el semicírculo como instrumento patrón de referencia, se tomaron medidas de V_{out} en el rango comprendido entre -90 y +90 grados, variando la posición del fiel cada 5 grados. Dado que se espera obtener una salida sinusoidal, se ajustan los datos obtenidos al siguiente modelo teórico:

$$V(\theta) = V_{\text{pico}} \sin\left(\frac{2\pi}{360}(\theta + \varphi)\right) + V_{\text{offset}}$$

Utilizando el método de mínimos cuadrados no lineal, se obtuvieron los siguientes valores óptimos para los parámetros del modelo: [5]

$$V_p = 158{,}5\text{mV}, \quad V_{\text{off}} = 32{,}02\text{mV}, \quad \varphi = -4{,}221^o.$$

La Figura 13 muestra los datos relevados, junto con el modelo teórico obtenido. Se observa que los datos se ajustan al modelo sinusoidal propuesto.

Una vez que se tiene el modelo teórico, se puede despejar el ángulo θ en función del voltaje V_{out} medido a la salida del sistema:

$$\theta(V) = \frac{360}{2\pi}\left[\arcsin\left(\frac{V - V_{\text{off}}}{V_p}\right)\right] - \phi. \qquad (2)$$

El valor obtenido para los parámetros V_p y V_{off}, no permite invertir la función $V(\theta)$ para $\theta < -80^o$. Por lo tanto, en lo que sigue se utiliza el modelo con $\theta \in [-80^o, +80^o]$.

[5] Se utiliza el comando "leasqr" de GNU/Octave, el cual forma parte del paquete "optim". El comando mencionado realiza el ajuste mediante el algoritmo de Levenberg-Marquardt.

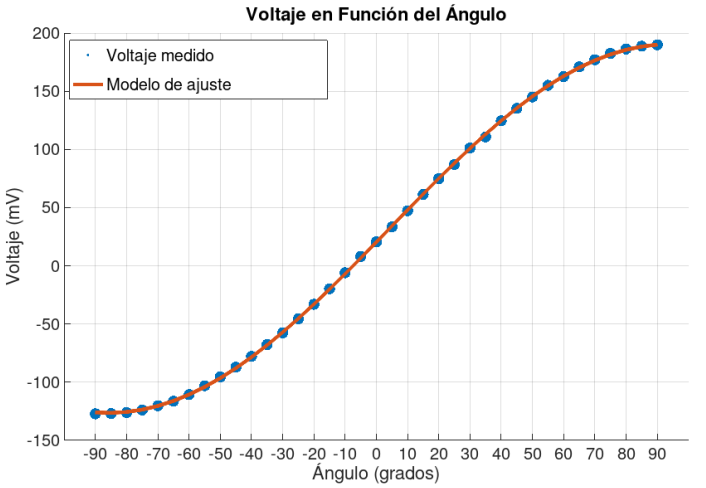

Figura 13: Voltaje V_{out} en función del ángulo (medido en semicírculo).

6.3.1. Análisis del Error e Incertidumbre

Se denota por θ_S al ángulo medido en el semicírculo; el cual se toma como instrumento de referencia. Se denota por θ_V al ángulo obtenido con el modelo teórico $\theta(V)$, a partir de los voltajes medidos en el circuito de la Figura 11. El error absoluto es por definición:

$$E = \theta_V - \theta_S.$$

Las incertidumbres en los ángulos θ_S y θ_V se calculan considerando como fuentes de incertidumbre la resolución y exactitud de los instrumentos utilizados para su medida. Aplicando propagación de incertidumbre, y utilizando un factor de cobertura $k = 2$, se obtiene el gráfico de la Figura 14.

La incertidumbre obtenida en el error es siempre superior al valor de ese error (las barras de incertidumbre cortan el eje de 0^o). Esto permite concluir que el sistema diseñado es compatible con el sistema de referencia.

Se debe observar que la sensibilidad del instrumento diseñado varía como $\cos(\theta)$; de tal forma que decrece hacia cero al acercarse a $\pm 90^o$. Esto podría explicar el hecho de que aparezcan errores mayores en las cercanías de $\pm 90^o$.

6.4. Conclusiones

El sistema diseñado cumple con lo esperado teóricamente, por lo que resulta apropiado para medir

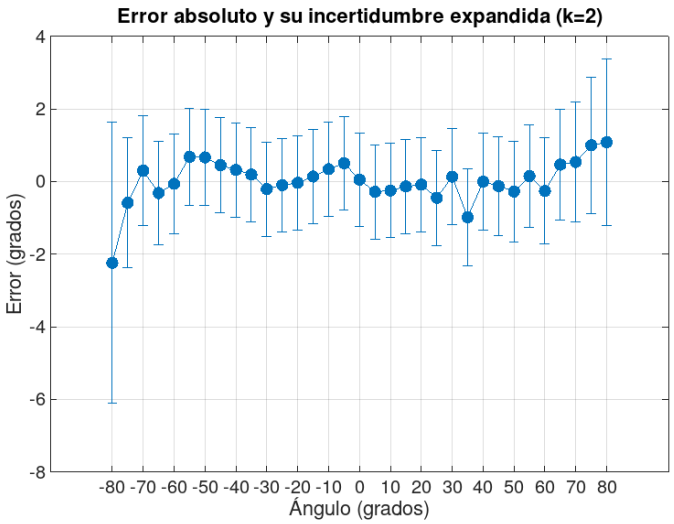

Figura 14: Error absoluto respecto al instrumento patrón semicírculo, junto con su incertidumbre tipo B.

ángulos en el intervalo $[-80^o, +80^o]$. La incertidumbre introducida por el instrumento patrón limita la caracterización de la exactitud del sistema propuesto. Se podría mejorar la caracterización de la precisión del sistema realizando más medidas y contemplando la incertidumbre tipo A.

7. Conclusiones

Los sensores de efecto Hall resultan muy atractivos por su bajo costo y amplio rango de aplicaciones. Una de sus mayores ventajas es que permiten la aislación galvánica y mecánica del objeto de medida. En la aplicación realizada se aprecia claramente que son sensores de fácil implementación. El efecto Hall cuántico es actualmente un área de gran interés en el ambito científico, por lo que es esperable que en los próximos años surjan nuevas aplicaciones basadas en este fenómeno.

8. Anexo - Incertidumbre B

8.1. Voltaje V_{out}

El instrumento propuesto obtiene una medida del ángulo mediante la lectura del voltaje V_{out} del circuito de la Figura 11. Para medir este voltaje se utiliza un voltímetro CDM 250, en su escala de 200mV. En dicha escala se tiene una resolución $\Delta r = 100uV$ (0.100mV), y una exactitud que depende de la lectura:

$$\Delta e = (0{,}5\,\%)\text{ lectura} + (1\text{ digito}).$$

Por lo tanto, el voltaje leído en el voltímetro se modela mediante: $V_{\text{out}} = V + \Delta r + \Delta e$. La inceritdumbre asociada a esta lectura es entonces: [6]

$$\mu_{V_{\text{out}}} = \sqrt{\mu_r^2 + \mu_e^2}, \quad \mu_r = \frac{\Delta_r}{\sqrt{3}}, \quad \mu_e = \frac{\Delta_e}{\sqrt{3}}.$$

8.2. Modelo $\theta(V)$

Para conocer la incertidumbre en el ángulo θ_V que se obtiene con la medida del voltaje, se realiza propagación de incertidumbre a la expresión del modelo teórico:

$$\theta(V) = \frac{360}{2\pi}\left[\arcsin\left(\frac{(V + \Delta r + \Delta e) - V_{\text{offset}}}{V_{\text{pico}}}\right)\right] - \phi.$$

La incertidumbre en θ_V es entonces:

$$\mu_{\theta_V} = \left|\frac{\partial\theta}{\partial\Delta r}(V, \Delta r, \Delta e)\right| \sqrt{\mu_r^2 + \mu_e^2};$$

donde la derivada parcial (respecto de Δr o Δe) es:

$$\partial = \frac{360}{2\pi V_p}\left[\cos\left\{\arcsin\left(\frac{(V + \Delta r + \Delta e) - V_{\text{off}}}{V_p}\right)\right\}\right]^{-1}.$$

8.3. Semicírculo

La resolución del semicírculo es: $\Delta r = 1$ grado. Dado que no se tienen datos del fabricante, se asume una exactitud $\Delta e = 0{,}5$ grados. El modelo para la lectura en el semicirculo es:

$$\theta_S = \theta + \Delta r + \Delta e.$$

La incertidumbre en dicha lectura es entonces:

$$\mu_{\theta_S} = \sqrt{\mu_r^2 + \mu_e^2}, \quad \mu_r = \frac{\Delta r}{\sqrt{3}}, \; \mu_e = \frac{\Delta e}{\sqrt{3}}.$$

El efecto de paralaje se considera incluido en la incertidumbre de la resolución μ_r.

[6] La división entre $\sqrt{3}$ surge de asumir una distribución uniforme para Δr y Δe.

8.4. Error Absoluto

El error absoluto entre el ángulo medido con el instrumento propuesto (a través del voltímetro) y el medido con el instrumento patrón (semicírculo), es por definición:

$$E = \theta_V - \theta_S.$$

La incertidumbre asociada a este error es entonces:

$$\mu_E = \sqrt{\mu_{\theta_V}^2 + \mu_{\theta_S}^2}.$$

Referencias

[1] Miguel A. Pérez et. al. (2008). Instrumentación electrónica. Editorial Thomson. Segunda edición.

[2] Daniel Slomovitz. CD Multimedia de Mediciones eléctricas. IEEE Región Latinoamericana. Efecto Hall Cuántico.

[3] Hoja de datos del sensor A1302. Allegro microsystems.

[4] Houari, A. (2007). Useful pedagogical applications of the classical Hall effect. Physics Education, 42(6), 603.

[5] Julian265. Using a universal joint and hall effect sensors to make a joystick - `http://www.mycockpit.org/forums/content.php/88-Hall-Effects-Sensors-to-make-a-joystick` [último acceso: 22.06.2012]

[6] Klitzing, K. V., Dorda, G., & Pepper, M. (1980). New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance. Physical Review Letters, 45(6), 494.

[7] Tsui, D. C., Stormer, H. L., & Gossard, A. C. (1982). Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit. Physical Review Letters, 48(22), 1559.

[8] Laughlin, R. B. (1983). Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations. Physical Review Letters, 50(18), 1395.

[9] Schwarzschild, B. (1998). Physics Nobel Prize goes to Tsui, Stormer and Laughlin for the fractional quantum Hall effect. Physics Today, 51(12), 17-19.

[10] Emilio Méndez (1998). Nóbel de Física. El extraño mundo de la mecánica cuántica. `http://paginaspersonales.deusto.es/abaitua/kanpetzu/recicla/fisica.htm` [último acceso: 22.06.2012]

[11] Novoselov, K. S., Jiang, Z., Zhang, Y., Morozov, S. V., Stormer, H. L., Zeitler, U. & Geim, A. K. (2007). Room-temperature quantum Hall effect in graphene. Science, 315(5817), 1379-1379.

[12] Jiang, Z., Zhang, Y., Tan, Y. W., Stormer, H. L., & Kim, P. (2007). Quantum Hall effect in graphene. Solid state communications, 143(1-2), 14-19.

[13] Electronics Tutorials. Hall Effect Sensor. `http://www.electronics-tutorials.ws/electromagnetism/hall-effect.html` [último acceso: 22.06.2012]

[14] Cardarelli, F. (2003). Encyclopedia of Scientific units, weights and measures: their SI equivalences and origins. Volume 1. Springer.