

# Parada óptima en procesos de Lévy

Facundo Oliú Eguren.

Tutor: Ernesto Mordecki.

Centro de matemática.  
Facultad de Ciencias.  
Universidad de la República.  
Uruguay.

12 de mayo de 2020

# Índice general

|                                                                         |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Procesos de Lévy.</b>                                             | <b>5</b>  |
| 1.1. Procesos de Lévy: . . . . .                                        | 5         |
| 1.1.1. Definiciones y propiedades: . . . . .                            | 5         |
| 1.1.2. Ejemplos: . . . . .                                              | 7         |
| 1.2. Variables con distribución infinitamente divisibles . . . . .      | 8         |
| <b>2. Descomposición de Lévy-Khintchine y de Lévy Itô.</b>              | <b>20</b> |
| 2.1. Descomposición de Lévy-Itô (directo) . . . . .                     | 20        |
| 2.1.1. Medidas de Poisson aleatorias . . . . .                          | 21        |
| 2.1.2. Funcionales en medidas de Poisson aleatorias: . . . . .          | 25        |
| 2.1.3. Martingalas cuadrado integrables . . . . .                       | 29        |
| 2.1.4. Prueba del teorema de descomposición de Lévy-Itô: . . . .        | 35        |
| 2.2. Recíproco de Lévy-Itô . . . . .                                    | 36        |
| 2.3. Descomposición de Lévy Khintchine . . . . .                        | 52        |
| <b>3. Estudio de supremos e ínfimos de un proceso de Lévy</b>           | <b>54</b> |
| 3.1. Introducción . . . . .                                             | 54        |
| 3.2. Propiedades de la función característica y teorema de Wiener-Hopf: | 55        |
| 3.2.1. Base teórica . . . . .                                           | 55        |
| 3.2.2. Subordinación de procesos de Lévy . . . . .                      | 57        |
| 3.2.3. Medidas Potenciales . . . . .                                    | 62        |
| 3.2.4. Poisson Compuesto . . . . .                                      | 65        |
| 3.2.5. Demostración de Wiener-Hopf . . . . .                            | 71        |
| 3.3. Ejemplos . . . . .                                                 | 78        |
| <b>4. El problema de parada óptima</b>                                  | <b>84</b> |
| 4.1. Introducción . . . . .                                             | 84        |
| 4.1.1. Propiedades de la función de valor . . . . .                     | 85        |
| 4.1.2. Existencia de Solución . . . . .                                 | 86        |
| 4.2. Ejemplos . . . . .                                                 | 89        |
| 4.2.1. McKean . . . . .                                                 | 89        |
| 4.3. Problemas de parada óptima con soluciones unilaterales . . . .     | 93        |
| 4.3.1. Teorema de verificación . . . . .                                | 93        |
| 4.3.2. Polinomios promediantes . . . . .                                | 95        |

|                                                             |            |
|-------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.3. Ejemplos . . . . .                                   | 96         |
| <b>5. Problemas de parada óptima bilaterales.</b>           | <b>102</b> |
| 5.1. Introducción . . . . .                                 | 102        |
| 5.2. Representación de funciones r-excesivas . . . . .      | 103        |
| 5.3. Teorema de verificación en el caso bilateral . . . . . | 105        |
| 5.3.1. Teorema de verificación. . . . .                     | 106        |
| 5.4. Pegado suave . . . . .                                 | 108        |
| 5.5. Poisson compuesto: . . . . .                           | 110        |
| 5.5.1. Propiedades del candidato: . . . . .                 | 111        |
| 5.5.2. Existencia de candidato . . . . .                    | 116        |

## Agradecimientos:

Agradezco especialmente a mi tutor Ernesto Mordecki no solo por su calidad profesional sino también humana.

A mi familia, Manuela, Beatriz, José y Felipe.

## Prefacio:

Entre los problemas de estadística y probabilidad, la investigación de la teoría estocástica de control óptimo empezó entre 1940 y 1950. Uno de los aspectos de esta teoría es que en contraste con el análisis clásico, el número de observaciones no está fijo y el tiempo en que las observaciones son terminadas es aleatorio y definido por el observador.

En esta tesis se trabajará con procesos de Lévy. En este contexto ya se han resuelto varios de los problemas, en los cuales es un requerimiento necesario para detener las observaciones que el proceso en ese tiempo sea positivo (véase [Shiryaev(2008)] , [Christensen et al.(2013)], [Mordecki(2002a)] , [Mordecki(2002b)], [Mordecki and Mishura(2016)], [Mordecki and Salminen(2007)], [Peskir and Shiryaev(2006)], etc.).

El aporte de la tesis es un nuevo método que sirve para resolver problemas en el caso en que dicho requerimiento no es necesario y la resolución de un problema de parada óptima de este tipo (que se denomina bilateral). Este se basa en el estudio de las propiedades de la función obtenida al retirar las observaciones en un tiempo óptimo (inspirado en [Bertoin(1996)] y [Mordecki and Mishura(2016)]). Más precisamente, bajo algunas condiciones dicha función se puede representar como suma de integrales con respecto a la medida del máximo y el ínfimo del proceso detenidos en un tiempo exponencial independiente del proceso. Sin embargo no es totalmente conocido cuando existe dicha representación, lo interesante es que en el problema de parada óptima propuesto, no necesariamente había dicha representación (que en esta tesis se prueba que hay).

A continuación se da una breve guía de lectura de la tesis:

- Los primeros tres capítulos pueden saltarse si el lector ya posee conocimiento de los procesos de Lévy (esencialmente se trabaja con el teorema de representación de Lévy-Itô y la factorización de Wiener-Hopf).
- El cuarto capítulo trata problemas de parada óptima ya conocidos, aunque el lector posea conocimiento de los problemas de parada óptima es recomendable que lea los teoremas de verificación ya que luego se adaptan en el siguiente capítulo para nuevos casos.
- El quinto capítulo trata los problemas de parada óptima llamados bilaterales, para los cuales actualmente no hay mucha literatura.

# Capítulo 1

## Procesos de Lévy.

### 1.1. Procesos de Lévy:

Este trabajo se centra en una clase de procesos estocásticos llamados procesos de Lévy, por ello en este primer capítulo se los define, se ilustran varios ejemplos, se los relaciona con las distribuciones infinitamente divisibles y se estudia la representación de Lévy-Itô. Esta introducción, en la cual se definen los procesos de Lévy se basa en el primer capítulo de [Kyprianou(2006)] (las imágenes fueron también extraídas del libro).

#### 1.1.1. Definiciones y propiedades:

Se comienza recordando dos procesos de suma importancia:

**Definición 1.1.1.** *Un movimiento Browniano es un proceso real  $B = \{B_t : t \geq 0\}$  definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que cumple:*

- i)  $B(., \omega)$  es continua  $\omega$ -casi seguramente.
- ii)  $\mathbb{P}(B_0 = 0) = 1$
- iii)  $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  tiene la misma distribución que  $B_{t-s}$ .
- iv)  $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $B_t - B_s$  es independiente a  $\{B_u : u \leq s\}$
- v)  $\forall t > 0$ ,  $B_t$  tiene distribución gaussiana centrada con varianza  $t$ .

**Definición 1.1.2.** *Un Proceso de Poisson con intensidad  $\lambda > 0$  es un proceso positivo  $N = \{N_t : t \geq 0\}$  definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que cumple:*

- i)  $N(., \omega)$  es continua por derecha con límites a izquierda  $\omega$ -casi seguramente.
- ii)  $\mathbb{P}(N_0 = 0) = 1$ .

- iii)  $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $N_t - N_s$  tiene la misma distribución que  $N_{t-s}$ .
- iv)  $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $N_t - N_s$  es independiente a  $\{N_u : u \leq s\}$ .
- v)  $\forall t > 0$ ,  $N_t$  tiene distribución de Poisson con parámetro  $\lambda t$ .

Ambos procesos tienen caminos continuos por derecha con límites a izquierda, inician en el origen y tienen incrementos estacionarios e independientes. Es por esto que surge la pregunta de cuan rica es la familia que cumple dichas propiedades, la cual se llamará procesos de Lévy.

**Definición 1.1.3.** *Un Proceso de Lévy es un proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$  definido en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  que cumple:*

- i)  $X(., \omega)$  es continua por derecha con límites a izquierda  $\omega$ -casi seguramente.
- ii)  $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$ .
- iii)  $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  tiene la misma distribución que  $X_{t-s}$ .
- iv)  $\forall 0 \leq s \leq t$ ,  $X_t - X_s$  es independiente a  $\{X_u : u \leq s\}$ .

En toda la tesis, a menos que se diga lo contrario, cuando se habla de un proceso de Lévy se asume que el espacio de probabilidad es  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  y se denota  $\mathbb{E}$  a la esperanza. En diferentes partes de la tesis se usarán tres notaciones para los procesos de Lévy:  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ ,  $X$  o  $X(t)$  de acuerdo a cual sea la más cómoda para el tema que se éste tratando. Se trabajará con tiempos de parada, se procede a definirlos.

**Definición 1.1.4.** *Dado un espacio de probabilidad con filtración  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$ , se dice que una variable aleatoria  $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  es un tiempo de parada si*

$$\{\tau \leq s\} \in \mathcal{F}_s \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

y

$$\{\tau = \infty\} \in \bigcup_t^{\infty} \mathcal{F}_t$$

**Definición 1.1.5.** *Un proceso estocástico  $X$  en un espacio de probabilidad con filtración  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  cumple la propiedad fuerte de Markov si para todo tiempo de parada  $\tau$*

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_{\tau+s} \in B} \mid \mathcal{F}_\tau) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{X_{\tau+s} \in B} \mid \sigma(X_\tau)).$$

### 1.1.2. Ejemplos:

A continuación, se presentan otros procesos de Lévy que no son ni el Movimiento Browniano estándar, ni el Proceso de Poisson.

**Definición 1.1.6. Movimiento Browniano Lineal.** Sea  $B = \{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano,  $a \in \mathbb{R}$  y  $\sigma > 0$ , se dice que el proceso  $X = \{X_t : t \geq 0\}$   $X_t = at + \sigma B_t$  es un Movimiento Browniano lineal con varianza  $\sigma^2$  y drift  $a$ .

Dados  $0 \leq s < t < \infty$ , notando que  $\sigma B_t + at$  tiene la misma distribución que  $\sigma(B_t - B_s) + a(t-s) + \sigma B_s + as$  es inmediato que  $X$  es un proceso de Lévy.

**Definición 1.1.7. Proceso de Poisson compuesto.** Sea  $N_t$  un proceso de Poisson( $\lambda$ ) y  $\{\xi_i : i \geq 1\}$  una sucesión i.i.d de variables aleatorias independientes a  $N$  y con distribución en común  $F$ . Sea  $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ . Se dice que  $\{X_t : t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson compuesto con parámetro  $\lambda > 0$  y variable asociada  $\xi$  (se define  $\sum_{i=k}^l \xi_i := 0 \forall k > l$ ).

Chequear i) y ii) de la definición 1.1.3 es inmediato, iii) y iv) se deducen al notar que para  $0 \leq s < t < \infty$ :

$$X_t = X_s + \sum_{i=N_s+1}^{N_t} \xi_i.$$

**Definición 1.1.8. Inversa Gaussiana** Sea  $B = \{B_t : t \geq 0\}$  un movimiento Browniano. Se define  $X_s = \tau_s$ , siendo el tiempo de primer pasaje a  $s \geq 0$ ; esto es:

$$\tau_s = \inf\{t > 0 : B_t + bt > s\}$$

En primer lugar, para hablar de tiempos de parada se debe hablar de una filtración. En esta tesis la filtración siempre será:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0, O), \quad \mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_t), \quad O \text{ la familia de conjuntos } \mathbb{P} \text{ nulos,}$$

A continuación se prueba que cumple los cuatro requerimientos para que sea un proceso de Lévy:

i) La continuidad de los caminos  $\{B_t + bt : t \geq 0\}$  asegura la continuidad de límites por derecha. Por otro lado al ser  $\tau_s \leq \tau_t \forall s < t$  se puede afirmar que los límites por izquierda existen casi seguramente.

ii)  $\tau_0 = 0$  casi seguramente por definición.

iii) y iv) Dados  $0 \leq s < t < \infty$ . Se define el proceso  $\bar{X}$  dado por:

$$\bar{X}_t = X_{\tau+t} - X_\tau, \quad t \geq 0,$$

el cual es independiente a  $\mathcal{F}_\tau$  y tiene la misma ley de  $X$  (1.2.2) (esto se demuestra más adelante).

Entonces se deduce que el proceso  $\{B_{\tau_s+t} + b(\tau_s + t) - s\}$  es igual en ley a  $B_t$  y por ende (las siguientes igualdades son en ley):

$$\tau_{t-s} = \inf\{u : B_{\tau_s+u} + b(\tau_s + u) - s > t - s\} = \tau_t - \tau_s,$$

entonces:

$$\tau_t = \tau_s + \bar{\tau}_{t-s}$$

siendo  $\bar{\tau}_{t-s}$  copia independiente a  $\tau_{t-s}$ .

## 1.2. Variables con distribución infinitamente divisibles

Se introduce un tipo de variables que luego se verá, que están íntimamente relacionadas con los procesos de Lévy.

**Definición 1.2.1.** *Se dice que una variable aleatoria real  $\Theta$  tiene distribución infinitamente divisible si para cada  $n = 1, 2, \dots$  existen  $\Theta_{1,n}, \dots, \Theta_{n,n}$  variables i.i.d tal que:*

$$\Theta \stackrel{d}{=} \Theta_{1,n} + \dots + \Theta_{n,n}.$$

Para ver que una variable aleatoria es infinitamente divisible basta chequear ciertas propiedades del exponente característico como se verá en breve. Recordando que el exponente característico de una variable aleatoria  $\Theta$  es la función  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  definida como:

$$\Psi(u) = -\log(\mathbb{E}(e^{iu\Theta})) = -\log(\psi(u)). \quad (1.1)$$

Siendo  $\psi$  la función característica, (en toda la tesis se usa esta notación).

Para que tenga sentido la definición debe cumplirse que  $\psi(u) \neq 0 \ \forall \ \mathbb{R}$ . En los ejemplos de este capítulo, que son los usados en la tesis (sin contar las combinaciones lineales de ellos), se encuentra explícitamente la función  $\psi$  y se ve que es efectivamente distinta a cero. El próximo resultado clásico (basado en el teorema 1 del capítulo 2 de [Petrov(1975)]) muestra que la definición siempre tiene sentido.

**Teorema 1.2.1.** *Toda variable aleatoria real  $\Theta$  con distribución infinitamente divisible cumple que su función característica es distinta a cero en todos los reales.*

**Observación 1.2.1.** *Una variable aleatoria real  $\Theta$  es infinitamente divisible si  $\forall \ n \geq 1$  existe  $\Psi_n$  exponente característico de una variable aleatoria tal que  $n\Psi = \Psi_n$ .*

**Observación 1.2.2.** Sea  $X$  un proceso de Lévy,  $t > 0$ . Entonces la variable aleatoria  $X_t$  es infinitamente divisible y el exponente característico de  $X_t$  (al cual en toda la tesis se denominará  $\Psi_t$ ) cumple que:

$$\Psi_t(\theta) = t\Psi_1(\theta). \quad (1.2)$$

Demostración:

$$X_t =^d X_{\frac{t}{n}} + (X_{\frac{2t}{n}} - X_{\frac{t}{n}}) + \cdots + (X_t - X_{(n-1)\frac{t}{n}})$$

Usando que los incrementos son estacionarios e independientes, queda probado que es infinitamente divisible. Por otro lado si  $t = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ :

$$\begin{aligned} m\Psi_1(\theta) &= -\log(\mathbb{E}(e^{i\theta \sum_{j=1}^m X_{jt} - X_{(j-1)t}})) = \\ &= -\log(\mathbb{E}(\exp(i\theta(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (X_{t(j-1)+\frac{tk}{n}} - X_{t(j-1)+\frac{t(k-1)}{n}})))) = \\ &= -n \log(\mathbb{E}(\exp(i\theta(\sum_{j=1}^m (X_{t(j-1)+\frac{t}{n}} - X_{t(j-1)})))) = n\Psi_{\frac{m}{n}}(\theta) \\ &\Rightarrow \Psi_t(\theta) = t\Psi_1(\theta). \end{aligned}$$

Si  $t \notin \mathbb{Q}$ , se toma  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $t_k \notin \mathbb{Q} \forall k$ ,  $t_k \searrow t$  y se usa el teorema de convergencia dominada (se toma decreciente para hacer uso de la continuidad por derecha de  $\mathbb{E}(e^{i\theta X_t})$ ).

De ahora en adelante se define  $\Psi(\theta) := \Psi_1(\theta)$ .

□

**Teorema 1.2.2.** Sea  $\tau$  un tiempo de parada y  $X$  un proceso de Lévy definido en un espacio de probabilidad cuya filtración  $\{\mathcal{F}_t\}$  está definida como

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^0, O), \quad \mathcal{F}_t^0 = \sigma(X_t), \quad O \text{ la familia de conjuntos } \mathbb{P} \text{ nulos}$$

entonces el proceso  $\bar{X}$  dado por:

$$\bar{X}_t = X_{\tau+t} - X_\tau, \quad t \geq 0,$$

es independiente a  $\mathcal{F}_\tau$  y tiene la misma ley que  $X$  (por ende cumple la ley fuerte de Markov).

Demostración:

En primer lugar se define

$$\Psi(u) = -\log(\mathbb{E}(e^{iuX_1})) \quad (1.3)$$

Como las distribuciones finito-dimensionales determinan la ley de un proceso de Lévy, basta probar que para cualquier  $0 \leq v_1 \leq u_1 \leq v_2 \leq u_2 \leq \dots \leq v_n \leq u_n < \infty$  y  $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp(\sum_{j=1}^n i\theta_j(X_{\tau+u_j} - X_{\tau+v_j}))\mathbf{1}_H) \\ &= \exp(-\sum_{j=1}^n \Psi(\theta_j)(u_j - v_j))\mathbb{P}(H). \end{aligned}$$

Se probará solo para el caso  $n = 2$  (el razonamiento general es análogo). De esta manera, hay que probar que para cualquier  $0 \leq v \leq u \leq s \leq t < \infty$ ,  $H \in \mathcal{F}_\tau$  y  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(X_{\tau+t} - X_{\tau+s}) + i\theta_2(X_{\tau+u} - X_{\tau+v}))\mathbf{1}_H) \\ &= \exp(-\Psi(\theta_1)(t-s) - \Psi(\theta_2)(u-v))\mathbb{P}(H). \end{aligned}$$

Para ello se define la sucesión de tiempos de parada  $\{\tau^n\}$  como:

$$\tau^n = k2^{-n} \text{ si } (k-1)2^{-n} < \tau \leq k2^{-n}, \quad \tau^n = 0 \text{ si } \tau = 0.$$

Luego, usando que los incrementos son estacionarios y que  $H \cap \{\tau^n = k2^{-n}\} \in \mathcal{F}_{k2^{-n}}$  se deduce

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(X_{\tau^n+t} - X_{\tau^n+s}) + i\theta_2(X_{\tau^n+u} - X_{\tau^n+v}))\mathbf{1}_H) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(X_{\tau^n+t} - X_{\tau^n+s}) + i\theta_2(X_{\tau^n+u} - X_{\tau^n+v}))\mathbf{1}_{H \cap \{\tau^n = k2^{-n}\}}) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{H \cap \{\tau^n = k2^{-n}\}} \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(X_{\tau^n+t} - X_{\tau^n+s}) + i\theta_2(X_{\tau^n+u} - X_{\tau^n+v})) \mid \mathcal{F}_{k2^{-n}})) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(\exp(i\theta_1 X_{t-s} + i\theta_2 X_{u-v}))\mathbb{P}(H \cap \{\tau^n = k2^{-n}\}) \\ & \quad \exp(-\Psi(\theta_1)(t-s) - \Psi(\theta_2)(u-v))\mathbb{P}(H). \end{aligned}$$

Se prosigue a usar un truco estándar llamado converger al límite. Las trayectorias de  $X$  son casi seguramente continuas por derecha y  $\tau^n \searrow \tau$  cuando  $n$  tiende a infinito, por ende  $X_{\tau^n+s} \rightarrow X_{\tau+s}$  casi seguramente para todo  $s \geq 0$  cuando  $n$  tiende a infinito. Luego por el teorema de convergencia dominada

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(X_{\tau+t} - X_{\tau+s}) + i\theta_2(X_{\tau+u} - X_{\tau+v}))\mathbf{1}_H) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(X_{\tau^n+t} - X_{\tau^n+s}) + i\theta_2(X_{\tau^n+u} - X_{\tau^n+v}))\mathbf{1}_H) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-\Psi(\theta_1)(t-s) - \Psi(\theta_2)(u-v))\mathbb{P}(H) \\
&= \exp(-\Psi(\theta_1)(t-s) - \Psi(\theta_2)(u-v))\mathbb{P}(H),
\end{aligned}$$

mostrando que  $\bar{X}$  es independiente a  $\mathcal{F}_\tau$  en  $\{\tau < \infty\}$  y tiene la misma ley que  $X$  (y por ende es un proceso de Lévy).

□

De aquí en adelante siempre que se haga referencia a un proceso de Lévy, su filtración será la de este teorema.

A continuación se estudian los exponentes característicos de los procesos de Lévy antes mencionados y se chequea que fijado un tiempo positivo, tienen distribución infinitamente divisible viendo que  $\forall n \geq 1$  existe un exponente característico  $\Psi_n$  tal que  $\Psi(u) = n\Psi_n(u)$ .

**Ejemplo 1.2.1. *Proceso de Poisson:***

Sea  $X$  un proceso de Poisson con intensidad  $\lambda > 0$ , entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{i\theta N_t}) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{i\theta k} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t(1-e^{i\theta})} = (e^{-\lambda t(1-e^{i\theta})\frac{1}{n}})^n \\
&\Rightarrow \Psi(\theta) = \lambda(1 - e^{i\theta}).
\end{aligned}$$

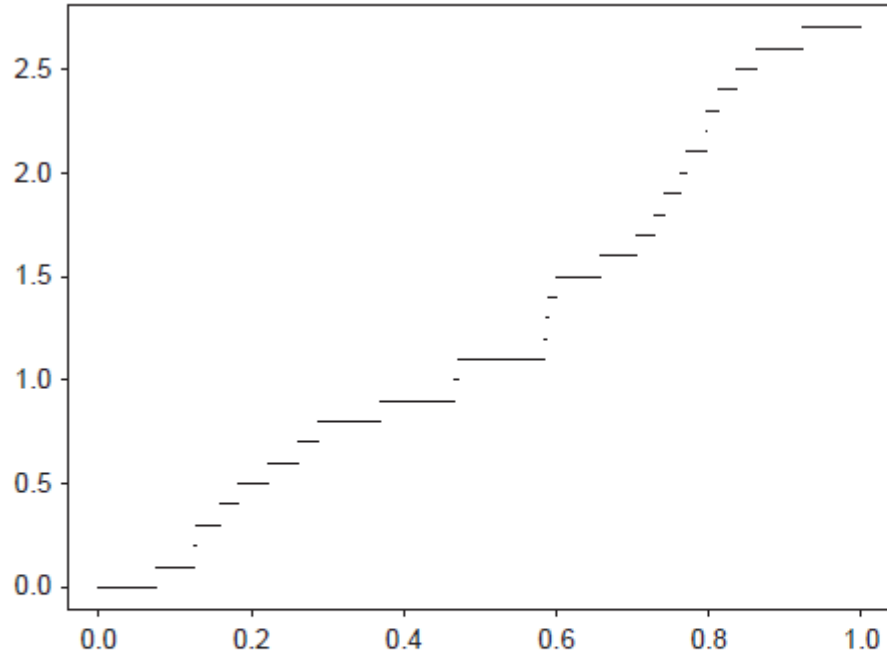


Figura 1.1: muestra de un proceso de Poisson .

**Ejemplo 1.2.2. *Proceso de Poisson compuesto:***

Sea  $X$  un Proceso de Poisson compuesto con intensidad  $\lambda > 0$  y variable asociada  $\xi$  con distribución  $F$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{i\theta \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i}) &= \sum_{n \geq 0} \mathbb{E}(e^{i\theta \sum_{i=1}^n \xi_i}) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} dF(dx) \right)^n e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = \\ &= \left( e^{-\lambda \frac{t}{n} \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x}) dF(x)} \right)^n \Rightarrow \Psi(\theta) = \lambda \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x}) dF(dx). \end{aligned}$$

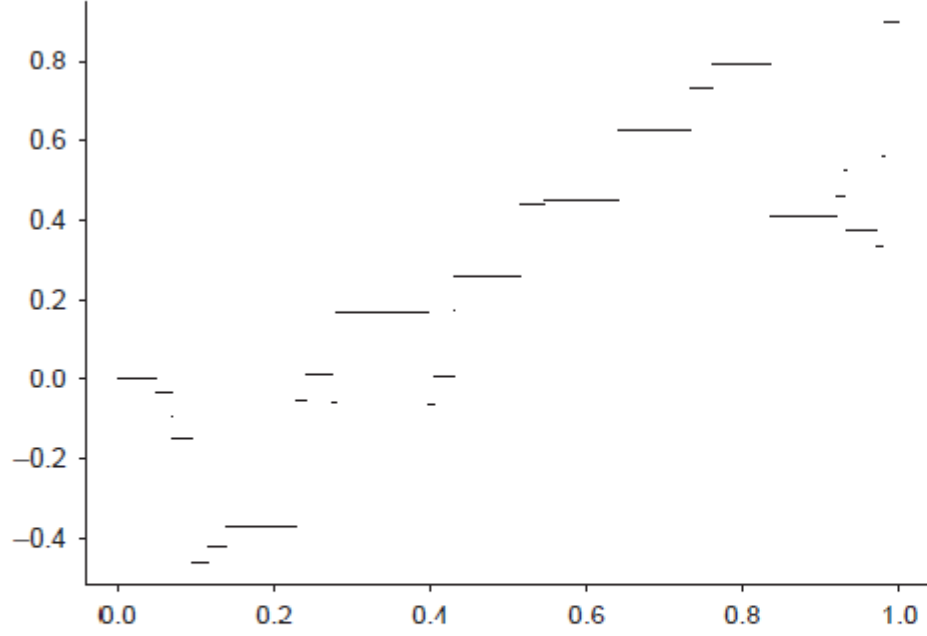


Figura 1.2: muestra de un proceso de Poisson compuesto.

**Ejemplo 1.2.3. *Movimiento Browniano lineal:***

Sea  $X$  un movimiento Browniano lineal con varianza  $\sigma > 0$  y drift  $a \in \mathbb{R}$ . Primeramente se observa que  $X_t$  es una variable Gaussiana centrada en  $at$ , entonces:

$$\mathbb{E}(e^{iX_t\theta}) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-at)^2}{2\sigma^2}} dx = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + i\theta at} = (e^{-\frac{1}{2}(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2\theta^2 + i\theta \frac{at}{n}})^n$$

$$\Rightarrow \Psi(\theta) = \frac{\sigma^2\theta^2}{2} - i\theta a.$$

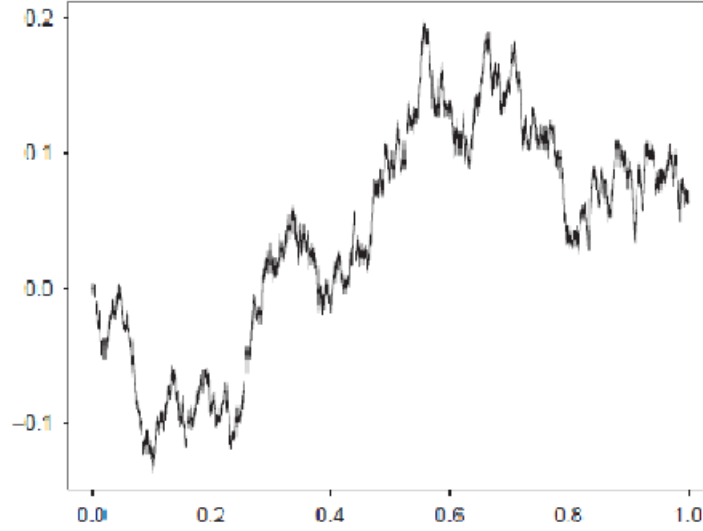


Figura 1.3: muestra de un movimiento Browniano Estándar.

**Ejemplo 1.2.4. Inversa Gaussiana con varianza 1:**

Sea  $X$  la inversa Gaussiana de  $\{B_t + bt; t \geq 0\}$ . A continuación se prueba que:

$$\Psi_s(\theta) = s(\sqrt{-2i\theta + b^2} - b)$$

- En primer lugar, se observa que  $\forall \lambda > 0$ ,  $\{e^{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}\}$  es martingala. Probar esto es estándar (multiplicar y dividir  $e^{\lambda(B_s - \frac{s\lambda^2}{2})}$  y usar que  $\mathbb{E}(e^{\lambda B_t}) = e^{\frac{t\lambda^2}{2}}$ )
- Se deduce usando teorema de muestreo opcional de Doob (usando convergencia dominada) que:

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbb{E}(e^{\lambda B_{\tau_s} - \frac{1}{2}\lambda^2 \tau_s}) = \mathbb{E}(e^{-(\frac{1}{2}\lambda^2 + b\lambda)\tau_s + s\lambda}) \\ &\Rightarrow e^{-s\lambda} = \mathbb{E}(e^{-(\frac{1}{2}\lambda^2 + b\lambda)\tau_s}). \end{aligned}$$

- Al considerar  $q = \frac{\lambda^2}{2} + b\lambda$  se deduce

$$\mathbb{E}(e^{-q\tau_s}) = \exp(-s(\sqrt{b^2 + 2q} - b)). \quad (1.4)$$

Al sustituir  $q$  por  $-i\theta$  queda finalizada prueba. Sin embargo para poder hacer esto es necesario extender la función a la semirrecta imaginaria negativa.

- Se estudia ambos términos de 1.4. La función de la igualdad a la derecha puede extenderse a los números de la forma  $a-i\theta$  quedando analítica. La de la izquierda de la igualdad, también considerando que la distribución de  $\tau_s$  puede obtenerse de la distribución del máximo del movimiento Browniano. Finalmente tomando los límites  $a \rightarrow 0$  se concluye que puede sustituirse en 1.4  $q$  por  $-i\theta$ .

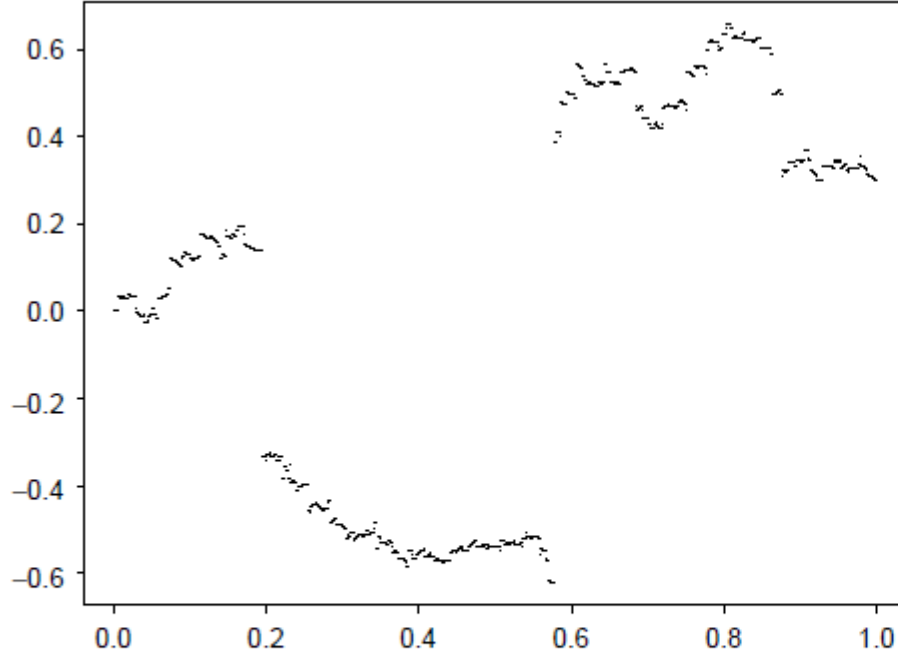


Figura 1.4: muestra de una inversa gaussiana con  $|c| < \alpha$

**Ejemplo 1.2.5. *Proceso Gamma:***

Para  $\alpha$  y  $c$  positivos se define la medida de probabilidad:

$$\mu_{\alpha,c}(dx) = \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\alpha x} dx$$

Concentrada en  $(0, \infty)$ . Se observa que cuando  $c = 1$  es la distribución exponencial. Se tiene que:

$$\int_0^\infty e^{i\theta x} \mu_{\alpha,c}(dx) = \frac{1}{(1 - \frac{i\theta}{\alpha})^c} = \left( \frac{1}{(1 - \frac{i\theta}{\alpha})^{\frac{c}{n}}} \right)^n$$

Y por ende es infinitamente divisible.

Demostración:

En primer lugar, se recuerda que

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Hay que probar que

$$\int_0^\infty e^{i\theta x} \frac{\alpha^c}{\Gamma(c)} x^{c-1} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{(1 - \frac{i\theta}{\alpha})^c}, \quad (1.5)$$

lo que es equivalente a probar que

$$\int_0^\infty x^{c-1} e^{-x(1 - \frac{i\theta}{\alpha})\alpha} dx = \frac{\alpha^{-c} \Gamma(c)}{(1 - \frac{i\theta}{\alpha})^c}. \quad (1.6)$$

Para probar la desigualdad se consideran:

i)  $R > \epsilon > 0$ ,  $w = (1 - (\frac{i\theta}{\alpha}))\alpha$ .

ii)

$$f : \mathbb{C} - [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = z^{c-1} e^{-z}.$$

iii)

$$\gamma_1(z) : (\epsilon, R) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \gamma_1(z) = z.$$

iv)

$$\gamma_2(z) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_2(z) = Rwz + (1 - z)R.$$

v)

$$\gamma_3(z) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_3(z) = (1 - z)Rw + z(\epsilon)(1 - i\frac{\theta}{\alpha}).$$

vi)

$$\gamma_4(z) : (0, 1) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \gamma_4(z) = (1 - z)(\epsilon)(1 - i\frac{\theta}{\alpha}) + z\epsilon.$$

vii)

$$\int_0^\epsilon x^{c-1} e^{-x(1 - \frac{i\theta}{\alpha})\alpha} dx.$$

Utilizando el teorema de Cauchy se deduce

$$0 = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4} f(z) dz.$$

Se observa que también se cumple

$$0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\epsilon x^{c-1} e^{-x(1 - \frac{i\theta}{\alpha})\alpha} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^1 \gamma_2(z) dz = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \gamma_4(z) dz,$$

entonces

$$\int_0^\infty x^{c-1} e^{-x(1 - \frac{i\theta}{\alpha})\alpha} dx = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_\epsilon^R \gamma_3(z) = \frac{\alpha^{-c} \Gamma(c)}{(1 - \frac{i\theta}{\alpha})^c} dz,$$

□

Por otro lado el exponente característico es:

$$\Psi(\theta) = i\theta\left(-\int_0^1 x\Pi(dx)\right) + \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{|x|<1} \Pi(dx)), \quad (1.7)$$

donde  $\Pi(dx) = cx^{-1}e^{-\alpha x}dx$ .

Demostración:

$\Psi(\theta) = -\log(\mathbb{E}(e^{i\theta X_1})) = -\log \frac{1}{(1-\frac{i\theta}{\alpha})^c} = c \log(1 - \frac{i\theta}{\alpha})$ . Luego sustituyendo 1.7 se obtiene la igualdad.

□

Del exponente característico se deduce que  $\Gamma_t$  tiene densidad  $\mu_{\alpha,ct}$ .

Es importante resaltar que no se demostró que el proceso gamma es un proceso de Lévy, sino que el exponente característico es de la forma 1.7, con el teorema de Lévy-Itô se verá que tener un exponente característico de este tipo implica ser proceso de Lévy.

Cada vez que se hable de una distribución Gamma, se refiere a un proceso Gamma en tiempo 1.

**Observación 1.2.3.** *La suma de  $n$  copias independientes de variables exponenciales de parámetro  $\lambda$  es una variable  $\Gamma(\lambda, n)$ . La demostración se basa en comparar el exponente característico de dicha distribución Gamma con el de una variable  $\lambda$ -exponencial, el cual es  $\frac{\lambda}{\lambda - i\theta}$ .*

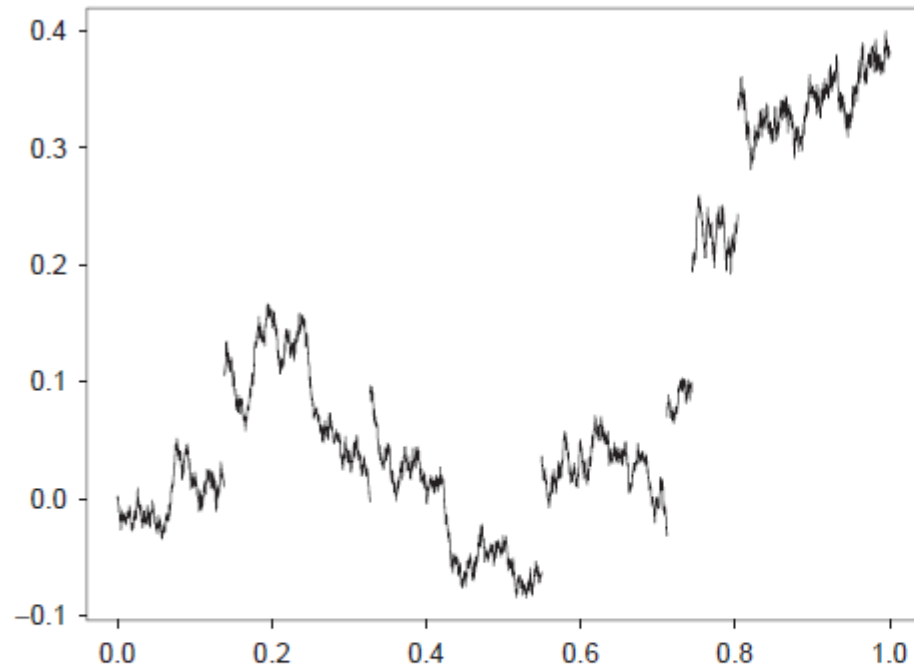


Figura 1.5: muestra de la suma independiente de un proceso Browniano estándar y un proceso de Poisson compuesto.

## Capítulo 2

# Descomposición de Lévy-Khintchine y de Lévy Itô.

Las dos preguntas naturales a hacerse son ¿qué forma tienen las distribuciones infinitamente divisibles y si todas las distribuciones infinitamente divisibles se corresponden a un proceso de Lévy?.

### 2.1. Descomposición de Lévy-Itô (directo)

En esta sección, basada en los primeros cuatro capítulos de [Kyprianou(2006)], se contesta la segunda pregunta ; para ello se prueba que hay una clase de distribuciones infinitamente divisibles que se corresponden inequívocamente a la suma de tres procesos de Lévy.

**Teorema 2.1.1. Teorema de descomposición de Lévy-Itô** Sean  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$  y una medida  $\Pi$  concentrada en  $\mathbb{R} - \{0\}$  que satisface :

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty \text{ (toda medida que cumpla estas condiciones se le llama}$$

medida de Lévy),

entonces existe un espacio de probabilidad con tres procesos de Lévy independientes  $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}$  donde  $X^{(1)}$  es un movimiento Browniano lineal con parámetros  $a, \sigma \geq 0$ ,  $X^{(2)}$  es un proceso de Poisson compuesto y  $X^{(3)}$  es una martingala cuadrado integrable que cumple casi seguramente tener una cantidad de saltos numerable (se entiende que un conjunto finito es numerable) en cada intervalo de tiempo. Además se cumple que el exponente característico de

$X = X^{(1)} + X^{(2)} + X^{(3)}$  es:

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}) \Pi(dx) \quad \forall \theta \in \mathbb{R} \quad (2.1)$$

Denotando  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  a cada sumando. La idea es encontrar procesos de Lévy  $X^1, X^2, X^3$  cuyo exponente característico sea  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  respectivamente.

**Lema 2.1.1. forma explícita de  $X^1$  y  $X^2$**

- i)  $X_t^1 = \sigma B_t - at$ ,  $t \geq 0$  ( $B$  un movimiento browniano).
- ii)  $X_t^2$  es un proceso de poisson compuesto con parámetro  $\Pi(\mathbb{R} - (-1, 1))$  y variable asociada  $\xi$  cuya distribución está dada por la medida  $\Pi(dx)/\Pi(\mathbb{R} - (-1, 1))$  concentrada en  $\{x : |x| \geq 1\}$  (a menos que  $\Pi(\mathbb{R} - (-1, 1)) = 0$ , en ese caso  $X^2 = 0$ ).

La demostración es simplemente usar los ejemplos 1.2.2 y 1.2.3 con los parámetros de las hipótesis.

□

La siguiente observación permite visualizar la idea que  $X^3$  consiste en una suma de procesos de Poisson compuestos con drift independientes.

**Observación 2.1.1. descomposición de  $\Psi^3$**

Sea  $\lambda_n = \Pi(\{x : 2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}\})$  y  $F_n(dx) = \frac{\Pi(dx)}{\lambda_n}$

$$\begin{aligned} & \int_{0 < |x| < 1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x) \Pi(dx) = \\ & \sum_{n \geq 0} \lambda_n \int_{2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}} (1 - e^{i\theta x}) F_n(dx) + i\theta \lambda_n \left( \int_{2^{-(n+1)} \leq |x| < 2^{-n}} x F_n(dx) \right). \end{aligned}$$

Para poder formalizar esta idea se necesita trabajar con medidas de Poisson aleatorias y convergencias de martingalas. Dichos temas se estudian en las dos siguientes subsecciones.

### 2.1.1. Medidas de Poisson aleatorias

Dado un proceso de Poisson compuesto de parámetro  $\lambda$  (el cual puede tener drift)

$$X_t = dt + \sum_{i=1}^{N_t} \zeta_i, \quad t \geq 0,$$

la idea es definir una medida boreliana que cuente los saltos que hubieron en el conjunto a medir (por ende es una medida aleatoria). Para esto se usan las notaciones:

$$T_i = \inf\{t : N_t \geq i\}$$

$$\text{Dado } A \in \mathfrak{B}[0, \infty] \times \mathfrak{B}(\mathbb{R} - \{0\}), \quad N(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(T_i, \xi_i) \in A}.$$

Se observa que en este caso  $N_t$  y  $N$  representan cosas distintas.

**Lema 2.1.2.** *Dado  $k \geq 0$ . Si  $A_1, \dots, A_k$  son conjuntos disjuntos en  $\mathfrak{B}[0, \infty] \times \mathfrak{B}(\mathbb{R} - \{0\})$ , entonces  $N(A_1), \dots, N(A_k)$  son variables de Poisson mutuamente independientes con parámetros  $\lambda_i = \lambda \int_{A_i} dt \times F(dx)$ , respectivamente. Además  $\mathbb{P}$  casi seguramente  $N : \mathfrak{B}[0, \infty] \times \mathfrak{B}(\mathbb{R} - \{0\}) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  es una medida.*

Demostración:

La ley de  $(T_1, \dots, T_n)$  condicionada al evento  $\{N_t = n\}$  es la misma ley que una muestra ordenada de la distribución uniforme en  $[0, t]$ . Se procede a probar esta afirmación: se supone que  $\{S_i : i = 1, \dots, n\}$  son variables independientes y exponencialmente distribuidas con parámetro  $\lambda$ . La densidad conjunto de  $(S_1, \dots, S_n)$  está dada por  $\lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \dots + s_n)}$  para  $s_1 > 0, \dots, s_n > 0$ . Como los tiempos de espera de un proceso de Poisson son variables exponenciales del mismo parámetro se deduce que en ley se da la igualdad:

$$(T_1 = S_1, T_2 = S_1 + S_2, \dots, T_n = S_1 + \dots + S_n).$$

Y (usando cambio de variable estándar en  $\mathbb{R}^n$ ) se deduce para  $A \in \mathcal{B}([0, \infty)^n)$ :

$$\mathbb{P}((T_1, \dots, T_n) \in A, N_t = n) = \int_{(t_1, \dots, t_n) \in A} \mathbf{1}_{(t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n)} \lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_1 \dots dt_n,$$

entonces (por definición de esperanza condicional):

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}((T_1, \dots, T_n) \in A \mid N_t = n) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(N_t = n)} \int_{(t_1, \dots, t_n) \in A} \mathbf{1}_{(t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n)} \lambda^n e^{-\lambda t_n} dt_1 \dots dt_n \\ &= \frac{n!}{t^n} \int_{(t_1, \dots, t_n) \in A} \mathbf{1}_{(t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n)} e^{-\lambda t_n} dt_1 \dots dt_n. \end{aligned}$$

Como la densidad de una distribución de  $n$  muestras independientes tiene densidad  $\frac{1}{t^n}$  y hay  $n!$  formas de ordenarlas se concluye la afirmación.

Luego usando que  $\{\xi_i, i = 1, \dots, n\}$  es una sucesión i.i.d de variables independientes a  $N_t$  se deduce que condicionando al evento  $\{N_t = n\}$  los vectores aleatorios  $\{(T_i, \xi_i) : i = 1, \dots, n\}$  forman  $n$  variables aleatorias con la distribución en común  $t^{-1} ds \times F(dx)$  en  $[0, t] \times \mathfrak{B}(\mathbb{R} - \{0\})$  (se recuerda que  $\xi$  tiene distribución  $F$  y que por la  $T_i$  tiene distribución uniforme).

De esta manera usando la condición  $\{N_t = n\}$  y que  $N(A) = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{((T_i, \xi_i) \in A)}$  (bajo la misma condición), se deduce que  $N(A)$  es una variable aleatoria  $\text{Bin}(n)$  con probabilidad de éxito  $\int_A t^{-1} ds \times F(dx)$ .

Se trata ahora de llegar a un resultado más general: tomando  $A_1, \dots, A_k$ , tal que  $A_i \in \mathfrak{B}[0, t] \times \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  disjuntos (de manera que el evento de tener un salto en un conjunto sea independiente de tener un salto en otro), se considera la  $k$ -upla  $(N(A_1), \dots, N(A_k))$ . Se considera  $A_0 = \{[0, t] \times \mathbb{R}\} - \{A_1 \cup \dots \cup A_k\}$ ,  $\sum_{i=1}^k n_i \leq n$ ,  $n_0 = n - \sum_{i=1}^k n_i$  y  $\lambda_0 = \int_{A_0} \lambda ds \times F(dx) = \lambda t - \lambda_1 - \dots - \lambda_k$ , entonces  $(N(A_1), \dots, N(A_k))$  es un vector multinomial de ley:

$$P(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k \mid N_t = n) = \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_k!} \prod_{i=0}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_t}\right)^{n_i}$$

Integrando en la condición se obtiene:

$$\begin{aligned} P(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k) &= \sum_{n \geq \sum_{i=1}^k n_i} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \frac{n!}{n_0! n_1! \dots n_k!} \prod_{i=0}^k \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_t}\right)^{n_i} = \\ &= \sum_{n \geq \sum_{i=1}^k n_i} e^{-\lambda_0} \frac{(\lambda_0)^{(n - \sum_{i=1}^k n_i)}}{(n - \sum_{i=1}^k n_i)!} \prod_{i=0}^k \left(e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{n_i}}{n_i!}\right) = \prod_{i=0}^k e^{-\lambda_i} \frac{(\lambda_i)^{n_i}}{n_i!} \end{aligned}$$

Quedando probado que  $N(A_1), \dots, N(A_k)$  son independientes Poisson.

En el caso de que el horizonte de tiempo no sea finito se escribe a cada  $A_i$  como unión numerable de conjuntos de horizonte finito y usando que el límite de Poisson es Poisson se concluye la prueba. Hay detalles técnicos en este argumento que el perímetro puede tender a infinito y la preservación de la independencia de conjuntos disjuntos en el límite.

Para resolver el primer detalle, en el perímetro infinito queda un Poisson con parámetro infinito (en el límite) lo cual para esta tesis es una variable de Poisson. En segundo lugar, la independencia se deduce tomando límites en las probabilidades y notando que las igualdades se mantienen en el límite.

Que  $N$  sea una medida casi seguramente es inmediato después de probar la independencia.

□

Se dice que  $N$  como medida casi segura es una medida aleatoria en  $([0, \infty] \times (\mathbb{R} - \{0\}), \mathfrak{B}[0, \infty] \times \mathfrak{B}(\mathbb{R} - \{0\}), \lambda \int_{\bullet} dt \times F(dx))$ . A continuación se define medida aleatoria de Poisson en un contexto más general:

**Definición 2.1.1. Medida aleatoria de Poisson.** En lo que sigue se asume que  $(S, \mathcal{S}, \eta)$  es un espacio de medida sin átomos,  $\sigma$ -finito arbitrario (donde  $S$  es el espacio,  $\mathcal{S}$  la sigma-álgebra y  $\eta$  la medida).

Sea  $N : \mathcal{S} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\infty\}$  de manera que la familia  $\{N(A) : A \in \mathcal{S}\}$  son variables aleatorias definidas en el espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Entonces a  $N$  se le llama medida aleatoria de Poisson en  $(S, \mathcal{S}, \eta)$  (o medida de Poisson aleatoria en  $\mathcal{S}$  con intensidad  $\eta$ ) si:

- i) Para conjuntos disjuntos  $A_1, \dots, A_n$  en  $\mathcal{S}$ , las variables  $N(A_1), \dots, N(A_n)$  son independientes.
- ii) Para todo  $A \in \mathcal{S}$ ,  $N(A)$  es una variable de Poisson con parámetro  $\eta(A)$  (puede valer infinito).
- iii)  $\mathbb{P}$  casi seguramente  $N$  es una medida.

Cuando  $\eta(A) = \infty$  se entiende a  $N(A)$  como la variable infinita casi seguramente. Cuando  $\eta(A) = 0$  se entiende a  $N(A)$  como la variable nula.

**Teorema 2.1.2. Existencia de medida aleatoria de Poisson.** Para  $(S, \mathcal{S}, \eta)$  bajo las hipótesis de la definición 2.1.1 existe una medida aleatoria de Poisson.

Demostración:

La prueba es similar a 2.1.2.

Primero se supone que la medida del espacio es finita; esto es  $\eta(S) < \infty$ . Sea  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  (usando el espacio producto) donde las variables  $N, v_1, v_2, \dots$  son independientes,  $N$  es Poisson con parámetro  $\eta(S)$  y  $v_i$  tiene distribución  $\frac{\eta(dx)}{\eta(S)}$  en  $S$ . Para cada  $A \in \mathcal{S}$  se define:

$$N(A) = \sum_{i=1}^N \mathbf{1}_{(v_i \in A)}.$$

De esta manera  $N(S) = N$ .

Cada sumando es  $\mathcal{F}$  medible, por ende lo es la variable aleatoria  $N(A)$ . Luego, condicionando a  $N = n$  para  $A \in \mathcal{F}$ ,  $N(A)$  es una variable  $Bin(n)$  con probabilidad de éxito  $\frac{\eta(A)}{\eta(S)}$ . Integrando en la condición de la misma manera que en lema 2.1.2 se obtiene que para  $A_1, \dots, A_k$  disjuntos:

$$P(N(A_1) = n_1, \dots, N(A_k) = n_k) = \prod_{i=1}^k e^{-\eta(A_i)} \frac{\eta(A_i)^{n_i}}{n_i!}$$

Para enteros no negativos  $n_1, \dots, n_k$ , esto prueba que se cumplen los tres items de la definición 2.1.1.

Se pasa al caso en que  $(S, \mathcal{S}, \eta)$  es un espacio de medida  $\sigma$ -finito, de manera que  $\exists B_1, B_2, \dots$  disjuntos, tal que  $\eta(B_i) < \infty \forall i$  y  $\cup B_i = S$ . Se define  $\eta_i(A) = \eta(A \cap B_i) \forall A \in \mathcal{S}$ . Con la primera parte de la demostración se obtiene  $\forall i$  un espacio de medida  $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i)$  con una medida aleatoria de Poisson asociada  $N_i$  en  $(B_i, \mathcal{S} \cap B_i, \eta_i)$ . Se define:

$$N(\bullet) = \sum_{i \geq 1} N(\bullet \cap B_i).$$

El objetivo es probar que esta función es una medida aleatoria de Poisson en  $S$  con intensidad  $\eta$  en el espacio de probabilidad:

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = \prod_{i \geq 1} (\Omega_i, \mathcal{F}_i, \mathbb{P}_i).$$

Primero que nada se prueba que  $\mathbb{P}$  casi seguramente es una medida. Para ello tomando  $A_1, A_2, \dots$  disjuntos:

$$\begin{aligned} N\left(\bigcup_{j \geq 1} A_j\right) &= \sum_{i \geq 1} N_i\left(\bigcup_j A_j \cap B_i\right) = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} N(A_j \cap B_i) = \\ &= \sum_{j \geq 1} \sum_{i \geq 1} N(A_j \cap B_i) = \sum_{j \geq 1} N(A_j). \end{aligned}$$

Quedando probado que es una medida casi seguramente.

Por otro lado se sabe que  $\forall i \geq 1$ ,  $N_i(A \cap B_i)$  es Poisson de parámetro  $\eta_i(A \cap B_i)$ . Luego como la serie de Poisson es una Poisson con parámetro de la suma se deduce que  $N(A)$  es Poisson distribuida con parámetro  $\eta(A)$ .

Queda solamente probar que si  $A_1, \dots, A_k$  conjuntos pertenecientes a  $\mathcal{S}$  son disjuntos, entonces las variables  $N(A_1), \dots, N(A_k)$  son  $\mathbb{P}$  independientes. Esto se deduce de ser límite de variables independientes.

□

Por la construcción de la medida aleatoria de Poisson se deducen dos resultados:

**Corolario 2.1.1.** *Sea  $N$  una medida aleatoria de Poisson (construída como en el teorema 2.1.2) en  $(S, \mathcal{S}, \eta)$ . Entonces para todo  $A \in \mathcal{S}$ ,  $N(\bullet \cap A)$  es una medida de Poisson aleatoria en  $(S \cap A, \mathcal{S} \cap A, \eta(\bullet \cap A))$ . Más aún, si  $A, B \in \mathcal{S}$  y son disjuntos, entonces  $N(\bullet \cap A)$  y  $N(\bullet \cap B)$  son independientes. Esto es por construcción en el caso de espacio finito y tomando límites para el  $\sigma$ -finito.*

**Corolario 2.1.2.** *Sea  $N$  una medida aleatoria de Poisson (construída como en el teorema 2.1.2) en  $(S, \mathcal{S}, \eta)$  entonces el soporte de  $N$  es  $\mathbb{P}$  casi seguramente numerable, si además  $\eta(S) < \infty$ , el soporte de  $N$  es  $\mathbb{P}$  casi seguramente finito. Esto se deduce de como quedo construída  $N$  para el caso de espacio con medida finita y usando la  $\sigma$ -finitud en el caso más general.*

### 2.1.2. Funcionales en medidas de Poisson aleatorias:

Bajo las notaciones de la subsección anterior ahora tiene sentido hablar "P-casi seguramente" de:

$$\int_S f(x) N(dx),$$

siendo  $f : S \rightarrow [0, \infty)$ . Se extiende a funciones con codominio en toda la recta simplemente pidiendo que la parte positiva o la negativa tengan integral finita. Usando el corolario 2.1.2 la integral va a ser igual en ley a:

$$\sum_{v \in \Upsilon} f(v) m_v.$$

Donde  $\Upsilon$  es el soporte de  $N$  (numerable con probabilidad uno).

El siguiente teorema es el más importante de la subsección y es clave para la prueba del teorema de representación de Lévy-Itô.

**Teorema 2.1.3.** *Sea  $N$  una medida aleatoria de Poisson en  $(S, \mathcal{S}, \eta)$ . Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible.*

i) *Entonces:*

$$X = \int f(x)N(dx), \quad (2.2)$$

*es casi seguramente absolutamente convergente si y solamente si:*

$$\int_S (1 \wedge |f(x)|)\eta(dx) < \infty.$$

ii) *Cuando se cumple la condición i) vale que (tomando  $\mathbb{E}$  esperanza con respecto a  $\mathbb{P}$ ):*

$$\mathbb{E}(e^{i\beta X}) = \exp\left(-\int_S (1 - e^{i\beta f(x)})\eta(dx)\right) \quad (2.3)$$

*para todo  $\beta \in \mathbb{R}$ .*

iii) *Además*

$$\mathbb{E}(X) = \int_S f(x)\eta(dx) \text{ si } \int_S |f(x)|\eta(dx) < \infty \quad (2.4)$$

y

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_S (f(x))^2\eta(dx) + \left(\int_S f(x)\eta(dx)\right)^2 \text{ si } \int_S (f(x))^2\eta(dx) < \infty. \quad (2.5)$$

Primero se prueba i y ii para funciones positivas.

Demostración i):

La idea es el viejo truco de definir una función simple como aquella de la forma:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i \mathbf{1}_{A_i}(x), \quad (2.6)$$

donde  $f_i$  es una constante y  $\{A_i : i = 1, \dots, n\}$  son conjuntos disjuntos de  $\mathcal{S}$  cuya unión mide  $\eta$  finito. Por definición esas funciones cumplen:

$$X = \sum_{i=1}^n f_i N(A_i).$$

En este caso,  $X$  es finito con probabilidad uno ya que  $N(A_i)$  es Poisson con distribución con parámetro  $\eta(A_i) < \infty$ . Ahora tomando  $\theta > 0$  se tiene que (se recuerda que para un Poisson de parámetro  $\lambda > 0$  se cumple  $\mathbb{E}(e^{-\theta X}) = \exp(-\lambda(1 - e^{-\theta}))$ );

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta X}) &= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(e^{-\theta f_i N(A_i)}) = \prod_{i=1}^n \exp(-(1 - e^{-\theta f_i})\eta(A_i)) = \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^n (1 - e^{-\theta f_i})\eta(A_i)\right).\end{aligned}$$

Como  $1 - e^{-\theta f(x)} = 0$  en  $S - (A_1 \cup \dots \cup A_n)$  se concluye que:

$$\mathbb{E}(e^{-\theta X}) = \exp\left(-\int_S (1 - e^{-\theta f(x)})\eta(dx)\right).$$

En el caso  $f$  no negatia y arbitraria, se toma  $\{f_n\}_{n \geq 1}$  sucesión creciente puntualmente de funciones simples tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  en sentido puntual. Como  $N$  es casi seguramente una medida  $\sigma$ -finita, el teorema de convergencia monótona implica que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n N(dx) = \int f(x) N(dx) = X \text{ casi seguramente.}$$

Usando el teorema de convergencia acotada y luego el teorema de convergencia monótona:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{-\theta X}) &= \mathbb{E}(\exp(-\theta \int f(x) N(dx))) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\exp(-\theta \int f_n N(dx))) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\int_S (1 - e^{-\theta f_n(x)})\eta(dx)\right) = \exp\left(-\int_S (1 - e^{-\theta f(x)})\eta(dx)\right) \quad (2.7)\end{aligned}$$

El primer elemento de la igualdad es cero si y solamente si  $P(X = \infty) = 1$  (en otro caso es mayor a cero). La tercera igualdad implica que esto sucede si y solamente si  $\int_S (1 - e^{-\theta f(x)})\eta(dx) = \infty \forall \theta$  y en otro caso es finita sin importar  $\theta$ .

En el caso  $\mathbb{P}(X = \infty) < 1$  se cumple por lo dicho que  $\int_S (1 - e^{-\theta f(x)})\eta(dx) < \infty, \forall \theta > 0$ . Con el teorema de convergencia monótona se tiene que:

$$\lim_{\theta \searrow 0} \int_S (1 - e^{-\theta f(x)})\eta(dx) = 0$$

$\Rightarrow \lim_{\theta \searrow 0} \mathbb{E}(e^{-\theta X}) = 0$  usando nuevamente convergencia dominada se concluye:

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 0.$$

De esta manera se probó que  $\mathbb{P}(X < \infty) = 1 \Leftrightarrow \int_S (1 - e^{\theta f(x)}) \eta(dx) < \infty \forall \theta > 0$ .

El siguiente paso es chequar que son equivalentes :

$$\int_S 1 - e^{-\theta f(x)} \eta(dx) < \infty \forall \theta > 0, \quad (2.8)$$

$$\int_S (1 \wedge f(x)) \eta(dx) < \infty. \quad (2.9)$$

Esto se debe a que en el conjunto  $[0, \infty)$ ,  $1 - e^{-\theta y} \leq 1 \wedge \theta y \leq (1 \vee \theta)(1 \wedge y)$ .  
Entonces  $\forall \theta > 0$ :

$$\int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) \eta(dx) \leq (1 \vee \theta) \int_S (1 \wedge f(x)) \eta(dx)$$

Por un lado si

$$\begin{aligned} & \int_S (1 - e^{-\theta f(x)}) \eta(dx) < \infty \\ \Rightarrow & \int_{S \cap f \leq 1} (1 - e^{-\theta f(x)}) \eta(dx) + \int_{S \cap f > 1} (1 - e^{-\theta f(x)}) \eta(dx) < \infty. \end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int_{S \cap f > 1} (1 - e^{-\theta f(x)}) \eta(dx) \geq \int_{S \cap f > 1} (1 - e^{-\theta}) \eta(dx).$$

Y por último la finitud en  $S \cap f \leq 1$  se deduce usando Taylor en  $1 - e^y$  alrededor de cero.

□

Demostración ii):

Se deduce con i) que (2.7) se puede extender a los complejos con parte real no nula (ya que la convergencia es absoluta casi seguramente). Tomando límite  $\theta \searrow 0$  en la igualdad (2.7) queda probado ii).

□

En el caso que  $f$  no sea positiva se consideran  $f^+ = f \vee 0$ ,  $f^- = (-f) \vee 0$ ,  $N_+ = N(\bullet \cap \{x \in S : f(x) \geq 0\})$ ,  $N_- = N(\bullet \cap \{x \in S : f(x) < 0\})$ , con  $X^+$  y  $X^-$  asociadas respectivamente. Por el corolario 2.1.1 se sabe que  $N^+$  y  $N^-$  son medidas de Poisson independientes y por ende  $X^+$  y  $X^-$  también lo son. Luego  $X$  converge si y solamente si lo hacen  $X^+$  y  $X^-$  y considerando i) esto ocurre si y solamente si:

$$\int_S (1 \wedge |f(x)|) \eta(dx) < \infty.$$

Por otro lado usando la independencia:

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X}) = \mathbb{E}(e^{i\theta X_+}) \mathbb{E}(e^{-i\theta X_-}) =$$

$$\exp\left(-\int_{(f>0)} (1 - e^{i\theta f^+(x)})\eta(dx)\right) \exp\left(-\int_{(f<0)} (1 - e^{-i\theta f^-(x)})\eta(dx)\right) =$$

$$\exp\left(-\int_S (1 - e^{i\theta f(x)})\eta(dx)\right),$$

quedando probado ii).

□

Demostración iii):

Solo se demuestra para  $f \geq 0$  (en el caso general se usa el mismo método para extender que en los items i) y ii)).

Se considera bajo la misma notación que (2.6), una función simple  $f$ . Luego por ser  $N(A_i)$  Poisson de parámetro  $\eta(A_i) \forall i = 1, \dots, n$ :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n f_i \eta(A_i).$$

De ahí se procede igual que en i) para probar iii) a funciones positivas (tomando límites y usando teoremas de convergencia).

Para probar la segunda parte es simplemente notar que para las simples vale que:

$$f^2(x) = \sum_{i=1}^n f_i^2 \mathbf{1}_{A_i}(x),$$

Por otro lado:

$$X^2 = \sum_{i,j=1}^n f_i f_j N(A_i) N(A_j)$$

(usando que las variables multiplicándose son indep. si  $i \neq j$ )

$$\Rightarrow E(X^2) = \sum_{i=1}^n f_i^2 (\eta(A_i) + \eta(A_i)^2) + \sum_{i \neq j}^n f_i f_j \eta(A_i) \eta(A_j) =$$

$$\sum_{i=1}^n f_i^2 (\eta(A_i)) + \sum_{i,j}^n f_i f_j \eta(A_i) \eta(A_j) = \int_S f(x)^2 \eta(dx) + \left( \int_S f(x) \eta(dx) \right)^2.$$

□

### 2.1.3. Martingalas cuadrado integrables

El siguiente paso es usar las identidades del teorema 2.1.3 en  $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), dt \times \Pi(dx))$  donde  $\Pi$  es una medida concentrada en  $\mathbb{R} - \{0\}$ . En particular se necesitan estudiar las propiedades de convergencias de integrales ya que  $X^3$  del teorema 2.1.1 se obtendrá asintóticamente. Las integrales a estudiar serán del tipo:

$$\int_{[0,t]} \int_B x N(ds \times dx), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

**Lema 2.1.3.** Sea  $N$  una medida de Poisson aleatoria en  $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}, dt \times \Pi(dx))$  donde  $\Pi$  es una medida concentrada en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tal que  $0 < \Pi(B) < \infty$ . Entonces:

$$X_t := \int_{[0,t]} \int_B x N(ds \times dx), \quad t \geq 0, \quad (2.10)$$

es un proceso de Poisson compuesto con parámetro  $\Pi(B)$  y  $\xi$  con distribución  $\Pi(B)^{-1} \Pi(dx) |_B$ .

Demostración:

En primer lugar se observa que como  $\Pi(B) < \infty$  por el corolario 2.1.2,  $N$  casi seguramente tiene soporte finito y por ende  $X_t$  puede escribirse como la suma de finitos puntos para todo  $t > 0$ . Por ende  $X_t$  es continua por derecha con límites a izquierda y obviamente se inicializa en cero. Luego  $\forall 0 \leq s < t < \infty$

$$X_t - X_s = \int_{(s,t]} \int_B x N(ds \times dx).$$

Esta resta es independiente a  $\{X_u : u \leq s\}$ , esto se debe  $N(\bullet \cap U)$  es una medida independiente a  $N(\bullet \cap V)$  si  $V \cap U = \emptyset$ . Por otro lado usando (2.3) del teorema 2.1.3 ii) se tiene que  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ :

$$\mathbb{E}(e^{i\theta X_t}) = \exp(-t \int_B (1 - e^{i\theta x}) \Pi(dx)).$$

Usando los incrementos independientes:

$$\mathbb{E}(e^{i\theta(X_t - X_s)}) = \frac{\mathbb{E}(e^{i\theta X_t})}{\mathbb{E}(e^{i\theta X_s})} = \exp(-(t-s) \int_B (1 - e^{i\theta x}) \Pi(dx)) = \mathbb{E}(e^{i\theta X_{t-s}}).$$

Ergo los incrementos son estacionarios. Finalmente por la unicidad del exponente característico se concluye que es un proceso de Poisson compuesto cuyos sumandos  $\xi$  tienen distribución de parámetro  $\Pi(B)^{-1} \Pi(dx) |_B$ .

□

**Lema 2.1.4.** Sean  $N$  y  $B$  bajo las notaciones del lema anterior y además se cumple  $\int_B |x| \Pi(dx) < \infty$ , entonces:

i) El proceso de Poisson compuesto con drift

$$M_t = \int_{[0,t]} \int_B x N(ds \times dx) - t \int_B x \Pi(dx), \quad t \geq 0, \quad (2.11)$$

es una  $\mathbb{P}$ -martingala con respecto a la filtración

$$\mathcal{F}_t = \sigma\{N(A) : A \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\}, \quad t > 0$$

ii) Si además,  $\int_B x^2 \Pi(dx) < \infty$  entonces  $M_t$  es una martingala cuadrado integrable.

Demostración de i):

En Primer lugar notar que el proceso  $M = \{M_t : t \geq 0\}$  es adaptado a la filtración  $\{\mathcal{F}_t : t \geq 0\}$ . Esto se debe a que el segundo sumando es determinístico y el primero se puede ver como límite de variables aleatorias simples que están en la  $\sigma$ -álgebra. Luego para todo  $t > 0$  se cumple que:

$$\mathbb{E}(|M_t|) \leq \mathbb{E}\left(\int_{[0,t]} \int_B |x| N(ds \times dx) + t \int_B |x| \Pi(dx)\right)$$

El segundo sumando es finito por hipótesis y el primero por el teorema 2.1.3 iii). Luego se usa corolario 2.1.1 para ver que  $M$  tiene incrementos estacionarios independientes y de esta manera se deduce que para todo  $0 \leq s < t < \infty$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_t - M_s \mid \mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}(M_{t-s}) = \\ \mathbb{E}\left(\int_{[s,t]} \int_B x N(ds \times dx)\right) - (t-s) \int_B x \Pi(dx) &= 0 \end{aligned}$$

La última igualdad se deduce del teorema 2.1.3 iii).

□

Demostración de ii):

Se usa de nuevo el teorema 2.1.3 para ver que:

$$\mathbb{E}\left((M_t + t \int_B x \Pi(dx))^2\right) = t \int_B x^2 \Pi(dx) + t^2 \left(\int_B x \Pi(dx)\right)^2$$

Por otro lado, por ser  $\{M_t\}$  martingala debe ser  $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0) = 0$ .

$$\Rightarrow \mathbb{E}(M_t^2) = t \int_B x^2 \Pi(dx) < \infty$$

( $E(M_0) = 0$  porque todo proceso de Lévy, como el Poisson, se inicializa en cero).

□

Estos dos lemas son cruciales para la prueba de la descomposición de Lévy-Itô, los cuales se aplicarán a conjuntos de la forma  $B_\epsilon := (-1, -\epsilon) \cup (\epsilon, 1)$  para todo  $\epsilon \in (0, 1)$ . Además se demostró que los sumandos de la serie en 2.1.1 forman una martingala para la filtración dada en el mismo lema.

El siguiente paso será estudiar el comportamiento de  $B_\epsilon$  cuando  $\epsilon \searrow 0$ . Para ello, en primer lugar se repasa teoría de martingalas:

Se asume de ahora en adelante que para  $T > 0$ , el cuarteto  $(\Omega, \mathcal{F}^*, \{\mathcal{F}_t^* : t \in [0, T]\}, \mathbb{P})$  es un espacio de probabilidad con filtración que cumple que  $\mathcal{F}_t^* = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s^*$ .

**Definición 2.1.2.** Para un  $T > 0$ , se define  $\mathcal{M}_T^2 = \mathcal{M}_T^2(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^* : t \in [0, T]\}, \mathbb{P})$  el espacio de las  $\mathbb{P}$ -martingalas reales con respecto a la filtración dada en el período  $[0, T]$ , continuas por derecha, con media cero, cuadrado integrables.

**Observación 2.1.2.** Se recuerda que toda martingala cuadrado integrable con respecto a la filtración  $\{\mathcal{F}_t^* : t \geq 0\}$  tiene una versión  $M'$  continua por derecha. O sea que  $\mathbb{P}(\{\exists t \in [0, T] : M'_t \neq M_t\}) = 0$ .

**Lema 2.1.5.** Bajo las hipótesis anteriores  $\mathcal{M}_T^2$  es un espacio de  $\mathcal{L}^2(\Omega)$  con el producto interno definido por:

$$\langle M, N \rangle = \mathbb{E}(M_T N_T).$$

Demostración:

Lo único no inmediato es que  $\langle M, M \rangle = 0$  implica  $M = 0$  y que el espacio es completo. En primer lugar que por la desigualdad maximal de Doob, para todo  $M \in \mathcal{M}_T^2$ :

$$\mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq T} M_s^2) \leq 4\mathbb{E}(M_T^2).$$

Luego usando que  $M$  es continua por derecha se tiene que  $M_t = 0$  para todo  $t \in [0, T]$  con probabilidad uno.

Para ver que toda sucesión de cauchy converge se toma  $\{M^n : n = 1, 2, \dots\}$  una sucesión de Cauchy. Se considera el espacio de Hilbert  $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$  con el producto interno  $\langle f, g \rangle = \mathbb{E}(fg)$ . Luego, existe  $M_T$  en este espacio que satisface:

$$(\mathbb{E}(M_T^n - M_T))^{\frac{1}{2}} \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Usando la observación 2.1.2 se define la martingala  $M$ , versión continua por derecha:

$$M = \mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_t^*) \quad \forall t \in [0, T],$$

por definición:

$$\|M^n - M\| \rightarrow 0$$

Claramente  $M$  es una martingala  $\mathcal{F}_t^*$ -adaptada y por la desigualdad de Jensen es cuadrado integrable:

$$\mathbb{E}(M_t^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_T \mid \mathcal{F}_t^*)^2) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(M_T^2 \mid \mathcal{F}_t^*)) = \mathbb{E}(M_T^2),$$

que es finito.

□

**Teorema 2.1.4. Martingala con numerables saltos.** Sea  $N$  una medida de Poisson aleatoria en  $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), dt \times \Pi(dx))$  con  $\Pi$  una medida concentrada en  $\mathbb{R} - \{0\}$  y  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  tal que  $0 < \Pi(B) < \infty$ . Si además que  $\int_{(-1,1)} x^2 \Pi(dx) < \infty$ . Para todo  $\epsilon \in (0, 1)$  se define la martingala:

$$M_t^\epsilon = \int_{[0,t]} \int_{B_\epsilon} x N(ds \times dx) - t \int_{B_\epsilon} x \Pi(dx), \quad t \geq 0, \quad (2.12)$$

donde  $B_\epsilon = (-1, -\epsilon) \cup (\epsilon, 1)$ ,  $\epsilon \in (0, 1)$ . Sea  $\mathcal{F}_t = \sigma\{N(A) : A \in \mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ ,  $t \geq 0$ . Se considera  $\mathcal{F}_t^*$  la completación de  $\bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$  con los conjuntos nulos de  $\mathbb{P}$ . Entonces existe una martingala  $M = \{M_t : t \geq 0\}$  que cumple:

- i) Para todo  $T > 0$  existe una sucesión determinística  $\{\epsilon_n^T : n = 1, 2, \dots\}$  con  $\epsilon_n^T \searrow 0$  en la cual:

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq s \leq T} (M_s^{\epsilon_n^T} - M_s)^2 = 0) = 1. \quad (2.13)$$

- ii) La martingala es adaptada a la filtración  $\{\mathcal{F}_t^* : t \geq 0\}$ .
- iii) Tiene trayectorias continuas por derecha con límites a izquierda casi seguramente.
- iv) Tiene numerables (pueden ser cero) discontinuidades en  $[0, T]$  casi seguramente.
- v) Tiene incrementos estacionarios e independientes.

Demostración i):

Sea  $0 < \eta < \epsilon < 1$  y  $T > 0$ . Se define  $M^\epsilon$  como en las hipótesis del teorema. Se observa que:

$$\begin{aligned} ||M^\epsilon - M^\eta|| &= \\ \mathbb{E}((M_T^\epsilon - M_T^\eta)^2) &= \mathbb{E}((\int_{[0,T]} \int_{\eta \leq |x| < \epsilon} x N(ds \times dx))^2) = \\ \int_{(-\infty, \infty)} \int_{\eta \leq |x| < \epsilon} \mathbf{1}_{(0 \leq t \leq T)} x \Pi(dx) \times dt &= T \int_{\eta \leq |x| < \epsilon} x^2 \Pi(dx) \end{aligned}$$

En la tercera igualdad se uso (2.5) del teorema 2.1.3 y la norma usada es la definida para  $\mathcal{M}_T^2$ .

Luego, usando que  $\int_{(-1,1)} x^2 \Pi(dx) < \infty$  se deduce que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} ||M^\epsilon - M^\eta|| = 0$  y por ende  $\{M^\epsilon : 0 < \epsilon < 1\}$  es una familia de Cauchy en  $\mathcal{M}_T^2$ . Como dicho espacio es de Hilbert se deduce que existe una martingala  $M = \{M_s : s \in [0, T]\} \in \mathcal{M}_T^2$  tal que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} ||M - M^\epsilon|| = 0.$$

Usando la desigualdad maximal de Doob:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} (M_s - M_s^\epsilon)^2 \right) \leq 4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|M - M^\epsilon\| = 0.$$

Se prueba ahora que la martingala encontrada no depende de  $T$ . Para ello se toma  $0 < T' < T$ , luego:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T'} (M_s^\epsilon - M_{s,T'})^2 \right) = 0.$$

Y también:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T'} (M_s^\epsilon - M_{s,T})^2 \right) \leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T} (M_s^\epsilon - M_{s,T})^2 \right) = 0.$$

Luego sumando y restando  $M_s^\epsilon$  y usando la desigualdad de Minkowski ( $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ ) se obtiene que:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T'} (M_{s,T'} - M_{s,T})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T'} (M_s^\epsilon - M_{s,T'})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \mathbb{E} \left( \sup_{0 \leq s \leq T'} (M_s^\epsilon - M_{s,T})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 0 \end{aligned}$$

De esta manera dados  $T > T'$ , se deduce que  $\mathbb{P}(\exists 0 \leq s \leq T' : |M_{s,T'} - M_{s,T}| \neq 0) = 0$ . Como  $T$  es arbitrario la martingala  $M = \{M_t, t \geq 0\}$  está bien definida.

De esta manera, para  $M_{\cdot,T}$  existe sucesión  $\epsilon_n^T$  que cumple i) y que es única para todos los  $T' < T$  concluyendo i).

□

Demostración de ii):

Fijado  $0 < t < T$ . Claramente  $M_t^{\epsilon_n^T}$  es  $\mathcal{F}_t^*$ -medible, usando (2.13) y tomando límite en  $n$  se deduce que  $M_t$  es  $\mathcal{F}_t^*$ -medible

□

Demostración de iii) y iv):

Por (2.13) se deduce que existe una subsucesión (haciendo argumento diagonal) uniformemente convergente en intervalos finitos. El resultado se deduce de que las funciones Cád-lág (continuas por derecha, con límite a izquierda) en intervalos cerrados son cerradas bajo la norma del supremo.

iv) se deduce inmediatamente de que las funciones Cád-lág tienen numerables discontinuidades (se entiende el caso en que no hayan discontinuidades como también un caso de numerables discontinuidades).

□

Demostración de v):

Convergencia uniforme casi segura uniforme en intervalos acotados implica convergencia en medida (en este caso convergencia en distribución) en intervalos acotados bajo la misma sucesión. Luego dados  $0 \leq u \leq v \leq s \leq t \leq T < \infty$ ,  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ , usando convergencia dominada:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(M_v - M_u))) \exp(i\theta_2(M_t - M_s)) = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(M_v^{\epsilon_n^T} - M_u^{\epsilon_n^T})) \exp(i\theta_2(M_t^{\epsilon_n^T} - M_s^{\epsilon_n^T})) = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(M_{v-u}^{\epsilon_n^T})) \mathbb{E}(\exp(i\theta_2(M_{t-s}^{\epsilon_n^T})) = \mathbb{E}(\exp(i\theta_1(M_{v-u})) \mathbb{E}(\exp(i\theta_2(M_{t-s}))) \end{aligned}$$

□

#### 2.1.4. Prueba del teorema de descomposición de Lévy-Itô:

Finalmente se procede a probar el teorema de descomposición de Lévy-Itô: Como se indicó en el lema 2.1.1 se toma  $X^1$  movimiento Browniano con drift:  $X_t^1 = \sigma B_t - at$  en un espacio de probabilidad  $(\Omega^\sharp, \mathcal{F}^\sharp, \mathbb{P}^\sharp)$ .

Bajo las notaciones del teorema 2.1.2, existe un espacio de probabilidad al cual se denotará como  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$  en el cual se construye una medida de Poisson aleatoria  $N$  en  $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), dt \times \Pi(dx))$ . Luego se define:

$$X_t^2 = \int_{[0,t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx), \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

Se observa que por el lema 2.1.3 este proceso es un proceso de Poisson compuesto con parámetro  $\Pi(\mathbb{R} - (-1, 1))$  y saltos con distribución  $\Pi(\mathbb{R} - (-1, 1))^{-1} \Pi(dx) \mid_{\mathbb{R} - (-1, 1)}$  (en caso en que el divisor mida cero se lo toma como el proceso nulo).

El siguiente paso es definir de forma similar para todo  $1 > \epsilon > 0$ :

$$X_t^{(3,\epsilon)} = \int_{[0,t]} \int_{\epsilon \leq |x| < 1} x N(ds \times dx) - t \int_{\epsilon \leq |x| < 1} x \Pi(dx), \quad t \geq 0. \quad (2.15)$$

Análogamente se define a  $X^{3,\epsilon}$  como proceso nulo en el caso que  $\Pi(\{\epsilon < x < 1\}) = 0$ . Usando el teorema 2.1.3 ii) se obtiene el exponente característico para dicho proceso:

$$\Psi^{3,\epsilon}(\theta) = \int_{\epsilon \leq |x| < 1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x) \Pi(dx). \quad (2.16)$$

Ahora usando teorema 2.1.4 existe un proceso de Lévy que también es martingala cuadrado integrable definido en  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*)$ , para el cual  $X^{3,\epsilon}$  casi seguramente converge uniformemente en  $[0, T]$  (tomando subsucesión adecuada). Usando convergencia dominada se obtiene:

$$\Psi^3(\theta) = \int_{|x|<1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x) \Pi(dx). \quad (2.17)$$

Finalmente al ser  $[0, t] \times \mathbb{R} - (-1, 1)$  y  $[0, t] \times (-1, 1)$ , usando el corolario 2.1.1 se deduce que  $X^2$  y  $X^3$  son independientes.

De esta manera se define el proceso:

$$X_t = X_t^1 + X_t^2 + X_t^3, t \geq 0, \quad (2.18)$$

en el espacio:

$$(\Omega, \mathcal{P}, \mathbb{P}) = (\Omega^\sharp, \mathcal{F}^\sharp, \mathbb{P}^\sharp) \times (\Omega^*, \mathcal{F}^*, \mathbb{P}^*).$$

El cual tiene incrementos independientes y trayectorias continuas por derecha con límites a izquierda (ya que cada sumando se comporta de esta forma) y su exponente característico es:

$$\Psi(\theta) = \Psi(\theta)^1 + \Psi(\theta)^2 + \Psi(\theta)^3 = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}) \Pi(dx). \quad (2.19)$$

□

## 2.2. Recíproco de Lévy-Itô

Esta segunda parte se basa en los primeros cuatro capítulos de [Applebaum(2009)]

**Teorema 2.2.1. Lévy-Itô recíproco.** *Para todo proceso de Lévy existe un trío  $(a, \sigma, \Pi)$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $\Pi$  es una medida concentrada en  $\mathbb{R} - \{0\}$  que satisface  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$  de manera que  $\forall \theta \in \mathbb{R}$ :*

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}) \Pi(dx). \quad (2.20)$$

**Definición 2.2.1.** *Bajo la notación del teorema 2.2.1 se dice que la medida  $\Pi$  es una medida de Lévy y que  $(a, \sigma, \Pi)$  es un triplete generador.*

La demostración se basa en probar que la función que cuenta los saltos mayores o iguales a 1 es un proceso de Poisson con cierto parámetro (cuyo valor depende del conjunto en el cual se cuentan los saltos), se procede a construir una medida de Poisson aleatoria con dicho parámetro. Luego se toma una martingala como en el teorema 2.1.4 con esta medida de Poisson y se divide al proceso en

un proceso con saltos chicos, grandes y una parte continua.

Aplicando Lévy-Itô se obtiene que el conjunto de distribuciones infinitamente divisibles son un conjunto más grande o igual al de las asociadas a un proceso de Lévy (ya que solo quedarían aquellas cuyo exponente característico son de la forma dada en el teorema 2.1.1). En realidad, son el mismo conjunto, esto es el teorema de descomposición de Lévy-Khintchine.

Para formalizar estas ideas, el primer paso es definir lo que es un salto.

**Definición 2.2.2.** Sea  $X$  un proceso de Lévy, se define  $\triangle X(t) = X(t) - X(t^-) \forall t \geq 0$  (definiendo  $X(0^-) := 0$ ).

El siguiente teorema de esta subsección es una herramienta que luego será útil y ayuda a entender los procesos  $\triangle X(t)$ .

**Teorema 2.2.2.** Si  $N$  es un proceso de Lévy creciente casi seguramente y es tal que  $\triangle N(t)$  toma valores en  $\{0, 1\} \forall t \geq 0$ , entonces  $N$  es un proceso de Poisson.

Demostración:

Sea la sucesión  $\{T_n\}_{n \geq 0}$  de tiempos de parada definida recursivamente como  $T_0 = 0$  y  $T_n = \inf\{t > T_{n-1} : N(t) - N(t_{n-1}) \neq 0\}$ . Entonces para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$T_n - T_{n-1} = \inf\{t > 0 : N(t + T_{n-1}) - N(T_{n-1}) \neq 0\}.$$

Por la propiedad de Markov fuerte 1.2.2 se deduce que la sucesión  $(T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots)$  es i.i.d. Luego

$$\mathbb{P}(T_1 > s+t) = \mathbb{P}(N(s) = 0, N(t+s) - N(s) = 0) = \mathbb{P}(T_1 > s)\mathbb{P}(T_1 > t). \quad (2.21)$$

Además como  $N(0) = 0$ ,  $\triangle N(t) \in \{0, 1\}$  y  $N$  es continua por derecha casi seguramente:

$$t \rightarrow \mathbb{P}(T_1 > t) \text{ es continua en cero.}$$

Más aún, de la continuidad en cero y de (2.21), se deduce que el mapa es continuo en cualquier  $u > 0$  (se supone que el proceso no es el proceso  $\infty$ , sino el teorema es trivial). La única familia de funciones decrecientes, continuas, que comienzan en cero y con la propiedad (2.21) es la de funciones de la forma  $\mathbb{P}(T_1 > t) = e^{-\lambda t}$ .  $\lambda$  está dado por la ecuación:

$$\mathbb{P}(N(t) = 0) = \mathbb{P}(T_1 > t) = e^{-\lambda t}.$$

Inductivamente, se asume que

$$\mathbb{P}(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!};$$

entonces

$$\mathbb{P}(N(t) = n+1) = \mathbb{P}(T_{n+2} > t, T_{n+1} \leq t) = \mathbb{P}(T_{n+2} > t) - \mathbb{P}(T_{n+1} > t). \quad (2.22)$$

Usando la observación 1.2.3 y reescribiendo  $T_{n+1}$  como

$$T_{n+1} = T_1 + (T_2 - T_1) + \cdots + (T_{n+1} - T_n),$$

se deduce que  $T_{n+1}$  distribución gamma con densidad

$$f_{T_{n+1}}(x) = e^{-\lambda x} x^n \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \quad \text{con soporte en los números positivos.}$$

Luego la cuenta que hay que hacer en 2.22 es una resta de integrales. Para poder realizarla simplemente hay que hacer un cambio de variable  $u = t + s$  y aprovechar que la densidad integra uno. Probada la inducción se deduce el teorema. □

Se procede a formalizar la idea de saltos de un tamaño dado.

**Definición 2.2.3.** Dado  $X$  un proceso de Lévy y  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$ , se define:

$$N(t, A) = \#\{0 \leq s \leq t : \Delta X(s) \in A\} = \sum_{0 \leq s \leq t} \mathbf{1}_A(\Delta X(s)). \quad (2.23)$$

Se observa que la definición tiene sentido ya que los procesos de Lévy son continuos por derecha casi seguramente.

**Definición 2.2.4.** Se dice que  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$  está acotado por debajo si  $0 \neq \overline{A}$ .

**Lema 2.2.1.** Si  $A$  es un conjunto acotado por debajo, entonces  $N(t, A) < \infty \forall t \geq 0$ .

Demostración:

Se define  $\{T_n^A\}$  como  $T_1^A = \inf\{t > 0 : \Delta X(t) \in A\}$  y para  $n > 1$ ,  $T_n^A = \inf\{t > T_{n-1}^A : \Delta X(t) \in A\}$ . Como  $X$  tiene trayectorias cadlág se deduce que  $T_1^A > 0$  casi seguramente (sino no habría continuidad en el origen ya que  $A$  está acotado por debajo). Se supone que existe un conjunto de probabilidad positiva donde existe el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n^A = T^A < \infty,$$

entonces en dicho conjunto  $\nexists \lim X(t)_{t \nearrow T^A}$  ya que  $X$  tiene una cantidad no finita de saltos mayores en módulo a la cota de  $A$ . Esto contradice que los límites por izquierda existan casi seguramente. □

El siguiente teorema determina una función cuyo dominio son los borelianos y codominio los reales no negativos. Se probará luego que es la medida de Lévy  $\Pi$ . En el siguiente se encuentra una versión de  $N(t, A)$  de manera que sea un proceso de Lévy. Esto es: un proceso  $Y$  tal que  $\mathbb{P}(\sup |Y(t) - N(t, A)| \neq 0) = 0$ . No se pone una definición aparte porque es la única vez que se usará en la tesis.

**Teorema 2.2.3.**

- i) Si  $A$  es acotado por debajo, entonces existe una versión de  $\{N(t, A), t \geq 0\}$  tal que  $\{N(t, A), t \geq 0\}$  es un proceso de Poisson, cuyo parámetro se denominará de aquí en adelante  $\Pi$ .
- ii) Si  $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$  son disjuntos, entonces las variables  $N(t, A_1), \dots, N(t, A_m)$  son independientes (tomando la versión Cád-lág).

Demostración de i):

Una vez probado que es un proceso de Lévy, usando el teorema 2.2.2 se deduce que es un proceso de Poisson.

En primer lugar se aprecia que  $N(0, A) = 0$  casi seguramente por definición. Se procede a verificar que los incrementos son independientes, para ello sean  $0 \leq s < t < \infty, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . Se observa que  $N(t, A) - N(s, A) \geq n$  si y solo si existen  $s < t_1 < \dots < t_n \leq t$  tal que

$$\Delta X(t_j) \in A \quad (1 \leq j \leq n).$$

Se observa  $\{\Delta X(t_j) \in A\} \in \sigma(\{X_u, u > s\})$ , luego usando que  $X$  es un proceso de Lévy se deduce que es un conjunto independiente a los conjuntos de la forma:

$$\Delta X(u) \in A \quad (0 \leq u \leq s).$$

Quedando probado que los incrementos son independientes.

Que son estacionarios se deduce inmediatamente al ver que la ley de  $X(t) - X(t^-)$  es igual que  $X(s) - X(s^-)$  por ser un proceso de Lévy.

Resta probar que tiene trayectorias continuas por derecha con límites por izquierda.

Si no existe límite por izquierda en un punto  $t$ , como  $N(s, A)$  es creciente, debe ser que  $N(t, A) = \infty$ . Usando que  $A$  está acotado por debajo existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $\epsilon > 0$  existe  $s \in (t - \epsilon, t)$  tal que  $|\Delta X_s| > \delta$ . Esto implica que no existe límite por izquierda en  $t$  lo cual sucede con probabilidad cero.

El mismo razonamiento sirve para probar la existencia de límites por derecha, para concluir la continuidad por derecha, se considera un conjunto donde existe el límite por izquierda y derecha y también el proceso  $X$  es continuo por derecha. Al usar la monotonía de  $N(t, A)$  se concluye que en ese conjunto de probabilidad uno la función debe ser continua por derecha.

□

Demostración de ii):

En primer lugar se cumple que  $\Delta X(u) \in A$  si y solamente si existe  $a \in A$  para el cual para todo  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que:

$$0 < u - w < \delta \Rightarrow |X(w) - X(u) - a| < \epsilon$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(N(t, A_1) = n_1, \dots, N(t, A_m) = n_m) = \\ & \mathbb{P}(\{\exists t_1^1, \dots, t_{n_1}^1 \text{ tq. } \triangle X(t_j^1) \in A_1\} \cap \dots \cap \{\exists t_1^m, \dots, t_{n_m}^m \text{ tq. } \triangle X(t_j^m) \in A_m\}) = \\ & \mathbb{P}(\{\exists t_1^1, \dots, t_{n_1}^1 \text{ tq. } \lim_{w \nearrow t_j^1} |X(t_j^1) - X(w)| \in A_1\} \cap \dots \\ & \cap \{\exists t_1^m, \dots, t_{n_m}^m \text{ tq. } \lim_{w \nearrow t_j^m} |X(t_j^m) - X(w)| \in A_m\}) \end{aligned}$$

Como los límites son una propiedad local se deduce que vale la independencia.

□

**Observación 2.2.1.** La función  $M : (\mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow \mathbb{Z}^+$  definida como:

$$M([0, t] \times A) = N(t, A) - N(s, A)$$

es una medida de Poisson aleatoria definida en  $([0, \infty) \times \mathbb{R}, \mathcal{B}[0, \infty) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}), \text{Leb}(ds) \times \Pi(dx))$ .

En realidad  $\Pi$  está definida en  $\mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\})$  pero se puede extender tomando  $\Pi(\{0\}) = 0$ .

Este resultado es consecuencia innmediata del teorema 2.2.3.

**Como solo se usará esta  $M$  de ahora en adelante para que no haya confusión con las martingalas se la denotara como  $N$ .**

Se procede a formalizar la idea de proceso de Lévy con saltos acotados.

**Definición 2.2.5.** Sea  $X$  un proceso de Lévy se define  $Y$  como (si  $Y$  aparece en la tesis se referirá a este proceso):

$$Y(t) = X(t) - \int_{[0, t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx) \quad \forall t \geq 0. \quad (2.24)$$

$Y$  el proceso centrado:

$$\bar{Y}(t) = Y(t) - \mathbb{E}(Y(t)). \quad (2.25)$$

**Observación 2.2.2.** Usando el lema 2.1.3), las siguientes observaciones permiten ver que se cumplen:

i)

$$\int_{[0, t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx), \quad t \geq 0. \quad (2.26)$$

es un proceso de Poisson compuesto de parámetro  $\Pi(\{x \geq 1\})$  y distribución de saltos:  $\frac{\Pi(dx)}{\Pi(\{x \geq 1\})}$  restringida a  $\{x \geq 1\}$

ii)

$$\mathbb{E}(Y(t)) = \mathbb{E}(X(t)) - t \int_{|x| \geq 1} x \Pi(dx) \quad (2.27)$$

El próximo teorema sirve para estudiar los momentos de  $Y$

**Teorema 2.2.4.** *Sea  $X$  un proceso de Lévy, si existe  $C > 0$  tal que  $\Delta X(t) < C \forall t$  casi seguramente. Entonces  $\mathbb{E}(|X(t)|^m) < \infty$  para todo  $m \in \mathbb{N}$ .*

Demostración

Sea  $C > 0$  como en la hipótesis. Se considera la sucesión de tiempos de paradas  $\{T_n, n \in \mathbb{N}$  como  $T_1 = \inf\{t \geq 0, |X(t)| > C\}$  y, para  $n > 1$ ,  $T_n = \inf\{t > T_{n-1}, |X(t) - X(T_{n-1})| > C\}$ . En un primer caso se supondrá que  $T_1 < \infty$ . Se observa por definición que  $|\Delta X(T_n)| \leq C$  y que  $T_{n+1} - T_n = \inf\{t \geq 0 : |X(t + T_n) - X(T_n)| > C\}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . En primer lugar se prueba que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_n)| \leq 2nC \quad (2.28)$$

Esto se prueba por inducción. El caso base  $n = 1$ :

$$\sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_1)| = |X(T_1)| \leq |\Delta X(T_1)| + |X(T_1-)| \leq 2C.$$

Se supone ahora que la desigualdad vale para cierto  $n$ , fijado  $\omega \in \Omega$ , en el caso en que el supremo de  $|X(s \wedge T_{n+1})|$  se alcanza en el intervalo  $[0, T_n(\omega))$  el resultado se deduce de la desigualdad en la hipótesis inductiva. En el caso en que  $[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)]$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq s < \infty} |X(s \wedge T_{n+1})(\omega)| &= \sup_{T_n(\omega) \leq s \leq T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega)| \leq \\ &\sup_{T_n(\omega) \leq s \leq T_{n+1}(\omega)} |X(s)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + |X(T_n)(\omega)| \\ &\leq |X(s)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \leq \\ &|X(T_{n+1})(\omega) - X(T_{n+1}-)(\omega)| + |X(T_{n+1}-)(\omega) - X(T_n)(\omega)| + 2nC \leq \\ &2(n+1)C \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la propiedad fuerte de Markov, se deduce que para todo  $n \geq 2$ ,  $T_n - T_{n-1}$  son independientes a  $\mathcal{F}_{T_{n-1}}$  y dicha diferencia tiene la misma ley que  $T_1$ . De esta manera:

$$\mathbb{E}(e^{-T_n}) = \mathbb{E}(e^{-T_1} e^{-(T_2-T_1)} \dots e^{-(T_n-T_{n-1})}) = (\mathbb{E}(e^{-T_1}))^n = a^n.$$

Usando este resultado, el teorema 2.28 y la desigualdad de Chebyshev:

$$\mathbb{P}(|X(t)| \geq 2nC) \leq \mathbb{P}(T_n < t) \leq e^t \mathbb{E}(e^{-T_n}) = e^t a^n.$$

Finalmente:

$$\int_{|x| \geq 2nC} |x|^m dF_{X(t)}(dx) = \sum_{r=n}^{\infty} \int_{2rC \leq |x| < 2(r+1)C} |x|^m dF_{X(t)}(dx) \leq$$

$$(2C)^m e^t \sum_{r=n}^{\infty} (r+1)^m a^r < \infty.$$

En el caso que exista un conjunto de probabilidad positiva en el cual  $T_1 = \infty$ , se observa que:

$$\mathbb{E}(|X(t)|^m \mathbf{1}_{T_1=\infty}) \leq C^m \mathbb{P}(T_1 = \infty) < \infty$$

Separando en sucesos se deduce para el caso general que el momento  $m$ -ésimo es finito.

□

**Corolario 2.2.1.** *Se deduce que  $\bar{Y}$  es una martingala cádlág centrada cuadrado integrable.*

El siguiente paso es dividir a  $\bar{Y}$  en la suma independiente de un proceso Browniano y otro proceso de saltos, sin embargo para probar la independencia se requiere una definición y teorema previo.

**Definición 2.2.6.** *Dados  $a < b$ ,  $g$  un mapa cádlág en  $[a, b]$  sea  $\mathcal{P} = \{a = t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b\}$  una partición de  $[a, b]$ , se define la variación de  $g$  mediante:*

$$V_g = \sup_{\mathcal{P} \text{ partición}} \sum_{i=1}^n |g(t_{i+1}) - g(t_i)|.$$

**Proposición 2.2.1.** *Sean  $M_j$ ,  $j = 1, 2$  dos martingalas cádlág con  $M_j(0) = 0$  casi seguramente. Si para algún  $j$ ,  $M_j$  es cuadrado integrable y para  $k \neq j$  se cumple que para todo  $t \geq 0$  vale que  $\mathbb{E}((V_{M_k(t)})^2) < \infty$  entonces:*

$$\mathbb{E}(M_1(t)M_2(t)) = \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} (\triangle M_1(s) \triangle M_2(s))\right).$$

(Por ser ambas cádlág la expresión tiene sentido).

Demostración:

Se supondra que  $M_1 \in L^2$  y que  $M_2$  tiene variación cuadrado integrable. Sea  $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_m = t\}$  una partición de  $[0, t]$ , entonces:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_1(t)M_2(t)) &= \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{m-1} \mathbb{E}((M_1(t_{i+1}) - M_1(t_i))(M_2(t_{j+1}) - M_2(t_j))) = \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}((M_1(t_{i+1}) - M_1(t_i))(M_2(t_{i+1}) - M_2(t_i))). \end{aligned}$$

Y por ende

$$\mathbb{E}(M_1(t)M_2(t)) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathbb{E}((M_1(t_{i+1}) - M_1(t_i))(M_2(t_{i+1}) - M_2(t_i))). \quad (2.29)$$

Ahora, sea  $(\mathcal{P}^n, n \in \mathbb{N})$  una sucesión de particiones cuya norma tiende a cero. Se afirma que casi seguramente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_n=0}^{m_n-1} \mathbb{E}((M_1(t_{i_n+1}) - M_1(t_{i_n}))(M_2(t_{i_n+1}) - M_2(t_{i_n}))) = \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} (\Delta M_1(s) \Delta M_2(s))\right). \quad (2.30)$$

Usando estos dos resultados (2.29) y (2.30) queda probada la tesis. Resta probar que vale (2.30). Sea  $A = \{t_n\}$  el conjunto de puntos de discontinuidad de las martingalas. En primer lugar se estudia los puntos de las particiones intersectados con  $A^c$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i_n=0}^{m_n-1} |(M_1(t_{i_n+1}) - M_1(t_{i_n}))(M_2(t_{i_n+1}) - M_2(t_{i_n}))| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{0 \leq i \leq m_n-1} |(M_1(t_{i_n+1}) - M_1(t_{i_n}))V_{\mathcal{P}_n}(M_2)| = 0 \text{ casi seguramente.}$$

Quedando solo los puntos de discontinuidad de la partición en el límite casi seguramente. Resta ver que en esos puntos la serie converge y que se esta en las hipótesis del teorema de convergencia dominada.

Fijado  $\epsilon > 0$ , sea  $\delta = \{\delta_n\}$  tal que:

$$\max\{|M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n)|, |M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)|\} < \frac{\epsilon}{K 2^n},$$

donde

$$K = 2 \sup_{0 \leq s \leq t} |M_1(s)| + 2 \sup_{0 \leq s \leq t} |M_2(s)|$$

Se considera  $S(\delta)$  definido como:

$$S(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} ((M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n))(M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)) - \Delta M_1(t_n) \Delta M_2(t_n)),$$

sumando y restando  $\Delta(M_1(t_n))(M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n))$  se deduce que:

$$|S(\delta)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |(M_1(t_n) - M_1(t_n - \delta_n) - \Delta M_1(t_n))| |M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n)| + \sum_{n=1}^{\infty} |M_2(t_n) - M_2(t_n - \delta_n) - \Delta M_2(t_n)| |\Delta M_1(t_n)| \leq$$

$$2\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_1(s)| + \sup_{0 \leq s \leq t} |M_2(s)|\right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{K2^n} < \epsilon.$$

Ergo la resta tiende a cero casi seguramente. Para aplicar convergencia dominada y así poder concluir el teorema se observa que para cada  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\left| \sum_{i_n=0}^{m_n-1} |(M_1(t_{i_n+1}) - M_1(t_{i_n}))(M_2(t_{i_n+1}) - M_2(t_{i_n}))| \leq 2 \sup_{0 \leq s \leq t} |M_1(s)| V_{M_2}(t).$$

Integrando el segundo término:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_1(s)| V_{M_2}(t)\right) \leq \mathbb{E}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |M_1(s)|^2\right) + \mathbb{E}(|V_{M_2}(t)|^2) \leq$$

$$4\mathbb{E}(|M_1(t)|^2) + \mathbb{E}(|V_{M_2}(t)|^2) < \infty,$$

en donde se usó la desigualdad de martingalas de Doob.

□

**Lema 2.2.2.** *Sea  $X$  un proceso de Lévy,  $A$  un conjunto acotado por debajo y  $M$  una martingala cuadrado integrable cádlag continua en los tiempos de llegada:*

$$T_1^A = \inf\{t > 0 : \triangle X(t) \in A\}$$

$$T_n^A = \inf\{t > T_{n-1}^A : \triangle X(t) \in A\} \quad \forall n > 1,$$

*se cumple que  $M$  es ortogonal a cualquier proceso en  $\mathcal{M}_A$ , siendo este conjunto:*

$$\mathcal{M}_A := \left\{ \int_{[0,t]} \int_A f(x) N(ds \times dx) - t \int_A f(x) \Pi_A(dx), \quad f \in L^2(A, \Pi_A) \right\},$$

*siendo  $\Pi_A$  la restricción de  $\Pi$  al conjunto  $A$ .*

*Demostración.*

El resultado solo se probará para  $f(x) = x$  ya que es el único caso que interesa en la tesis. Para dicho caso, usando el lema 2.1.4 se deduce que el proceso es una martingala cuadrado integrable que se inicializa en 0 casi seguramente. Luego denotando a este proceso  $Y$ , usando la proposición 2.2.1 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(t)M(t)) &= \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} (\triangle Y(s) \triangle M(s))\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{E}\left(\sum_{0 \leq s \leq t} (\triangle Y(T_i) \triangle M(T_i))\right) = 0. \end{aligned}$$

Es igual a cero por ser continua  $M$  en esos tiempos de parada.

□

En este momento, hay suficiente base teórica para dividir a  $\bar{Y}$  en dos sumandos independientes.

**Teorema 2.2.5.** *Para todo  $t \geq 0$ :*

$$\bar{Y}(t) = Y_c(t) + Y_d(t), \quad (2.31)$$

donde  $Y_c$  y  $Y_d$  son procesos de Lévy independientes,  $Y_c$  tiene trayectorias continuas casi seguramente.

Demostración:

Se define una sucesión  $\{M^\epsilon\}$  de martingalas como en la ecuación 2.12 del teorema 2.1.4 ( $B_\epsilon = (-1, -\epsilon) \cup (\epsilon, 1)$ ):

$$M_t^\epsilon = \int_{[0,t]} \int_{B_\epsilon} x N(ds \times dx) - t \int_{B_\epsilon} x \Pi(dx), \quad t \geq 0.$$

Se supone que  $\bar{Y} - M^\epsilon$ ,  $M^\epsilon$  son independientes. Probar esto necesita un par de lemas que se demostrarán luego.

El lector puede estar tentado a decir que por el teorema 2.1.4 el proceso tiene subsucesión convergente en  $L^2$  a un proceso de Lévy, sin embargo no se está en las hipótesis del teorema ya que no se sabe si  $\Pi$  es una medida de Lévy. Por ende hay que probar que la martingala efectivamente converge en  $L^2$  a un proceso de Lévy en alguna subsucesión. Una vez probada la convergencia en  $L^2$  se toma una subsucesión que cumple la ecuación (2.13) del teorema 2.1.4 (existe porque la resta al cuadrado converge en  $L^1$ ). Luego es simplemente notar que ii), iii), iv) del teorema 2.1.4 solo usa i). Por ende solo hay que probar que converge en  $L^2$ .

Para ello se consideran  $\{\epsilon_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $\epsilon_n \searrow 0$  y para cada natural  $m$ :

$$B_m = \{x \in \mathbb{R}, \epsilon_{m+1} \leq |x| < \epsilon_m\}$$

$$M_{B_m}(t) := \int_{[0,t]} \int_{x \in B_m} x N(ds \times dx)$$

Como son conjuntos disjuntos,  $M_{B_m}$  son martingalas cuadrado integrables, ortogonales entre si, ergo:

$$\mathbb{E}(|M^{\epsilon_n}(t)|^2) = \sum_{m=1}^n \mathbb{E}(|M_{B_m}(t)|^2) \quad (2.32)$$

Por otro lado, como se asumió independencia :

$$Var(|\bar{Y}(t)|) = Var(|\bar{Y}(t) - M^{\epsilon_n}(t)|) + Var(|M^{\epsilon_n}(t)|),$$

por ende:

$$\mathbb{E}(|M^{\epsilon_n}(t)|^2) = Var(|M^{\epsilon_n}(t)|) \leq Var(|\bar{Y}(t)|). \quad (2.33)$$

Usando ambos resultados 2.32 y 2.33 se deduce que para todo  $t \geq 0$ , la sucesión  $\{\mathbb{E}(M^{\epsilon_n}(t)^2)\}$  es creciente y acotada y por ende convergente en  $L^2$ . Se observa que por la desigualdad de Doob (este razonamiento se usó antes):

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq t} (M(s) - M^\epsilon(s))^2) \leq 4 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|M(t) - M^\epsilon(t)\| = 0.$$

Y por ende también converge uniformemente en intervalos acotados casi seguramente. Se define el límite como  $Y_d$ , por lo mencionado antes, es un proceso de Lévy, martingala y cuadrado integrable.

De esta manera, se define  $Y_c$  como el límite en  $L^2$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{Y} - M^{\epsilon_n}. \quad (2.34)$$

Como es un límite en  $L^2$  (y uniforme en intervalos acotados casi seguramente) se deduce (asumiendo la independencia de  $\bar{Y} - M^\epsilon$ ,  $M^\epsilon$ ) que  $Y_c$  e  $Y_d$  son independientes.

Resta probar que  $Y_c$  es un proceso continuo. Para ello se supone por absurdo que existe un  $b > 0$  y un tiempo de parada  $T$  que cuenta la primera discontinuidad tal que  $\mathbb{P}(|\Delta Y_c| > b) > 0$ . Entonces por la proposición 2.2.1:

$$0 \neq \mathbb{E}(Y_c \cdot (\int_{[0,t]} \int_{|x|>b} xN(ds \times dx) - t \int_{|x|>b} x\Pi(dx))).$$

Donde también se usó que el integrando es una martingala cuadrado integrable debido al lema 2.1.4. Por otro lado, tomando  $\epsilon_n < b$ , usando el lema 2.2.2 y por definición de  $\bar{Y}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}((\bar{Y} - M^{\epsilon_n}) \cdot (\int_{[0,t]} \int_{|x|>b} xN(ds \times dx) - t \int_{|x|>b} x\Pi(dx))) = 0.$$

Llegando a un absurdo porque el límite del sumando izquierdo es el mismo que el de la primera integral. Se observa que  $b$  puede ser menor a uno, pero esto no impide usar el lema 2.2.2, ya que por construcción  $\bar{Y} - M^{\epsilon_n}$  tiene discontinuidades de a lo sumo tamaño  $\epsilon_n < b$ .

□

**Corolario 2.2.2.** *La medida  $\mu$  definida anteriormente es una medida de Lévy y además*

$$\mathbb{E}(|Y_d(1)|^2) = \int_{x<1} |x^2| d\Pi(x).$$

Demostración:

En primer lugar se observa que

$$\int_{(-1,1)^c} 1\Pi(dx) = \Pi((-1,1)^c). \quad (2.35)$$

Luego por el lema 2.2.1 se deduce que su medida es finita.  
Por otro lado

$$\mathbb{E}(|M^{\epsilon_n}(1)|^2) = \int_{(-1, -\epsilon_n) \cup (\epsilon_n, 1)} x^2 N(dx \times ds) = \int_{(-1, -\epsilon_n) \cup (\epsilon_n, 1)} x^2 \Pi(dx),$$

donde se usó (2.5) del teorema 2.1.3. Como el límite cuando  $n \rightarrow \infty$  del sumando a la izquierda existe,  $\Pi$  no tiene átomo en cero y usando 2.35 se concluye que:

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) d\Pi(x) < \infty.$$

Ya que, al usar (2.5) del teorema 2.1.3 :

$$\infty > \mathbb{E}(|Y_d(1)|^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(|M^{\epsilon_n}(1)|^2) = \int_{|x| \leq 1} |x^2| d\Pi(x).$$

□

Se procede a probar la afirmación de independencia, para ello se necesitarán dos lemas.

**Lema 2.2.3.** *Si  $X$  es un proceso de Lévy con exponente característico  $\Psi$ , entonces para todo  $u \in \mathbb{R}$  se cumple que  $M_u = \{M_u(t), t \geq 0\}$  es una martingala compleja con respecto a la filtración  $\mathcal{F}^X = \{\sigma(X(s), s \leq t)\}_t$ , donde:*

$$M_u(t) = \exp(iuX(t) + t\Psi(u)).$$

Demostración

En primer lugar como el exponente característico se define como:

$$\Psi(u) = -\log(\mathbb{E}(e^{iuX(1)})),$$

la esperanza existe porque el término aleatorio es acotado. Luego:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_u(t) \mid \mathcal{F}_s^X) &= \mathbb{E}(\exp(iu(X(t) - X(s) + X(s)) + (t - s + s)\Psi(u)) \mid \mathcal{F}_s^X) = \\ &= \mathbb{E}(\exp(iuX(s) + s\Psi(u)) \exp(iu(X(t) - X(s)) + (t - s)\Psi(u)) \mid \mathcal{F}_s^X) = \\ &= M_u(s) \mathbb{E}(\exp(i(X(t) - X(s))) \exp((t - s)\Psi(u)) = M_u(s) \end{aligned}$$

Donde en la segunda igualdad se usó que tiene incrementos independientes y en la tercera que son estacionarios.

□

Ahora es posible demostrar la afirmación.

**Proposición 2.2.2.** *Bajo la notación del teorema 2.2.5, los procesos  $\bar{Y} - M^{\epsilon_n}$  y  $M^{\epsilon_n}$  son independientes.*

Demostración:

$\bar{Y} - M^{\epsilon_n}$  y  $M^{\epsilon_n}$  son dos martingalas centradas, más por el teorema 2.2.4 son martingalas centradas, cuadrado integrables y procesos de Lévy. Se consideran  $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$  y:

$$M_1(t) = \exp(i(u_1(\bar{Y} - M^{\epsilon_n})) + t\Psi_1(1)),$$

$$M_2(t) = \exp(iM^{\epsilon_n} + t\Psi_2(1)).$$

Siendo  $\Psi_1, \Psi_2$  los exponentes característicos de cada proceso. Por el lema 2.2.3 ambos son martingalas, más aún  $M_1$  es cuadrado integrable y  $M_2$  tiene variación cuadrática integrable en intervalos finitos por lema 2.1.3.

Luego usando la proposición 2.2.1 se obtiene que:

$$\mathbb{E}(M_1(s)M_2(s)) = 0.$$

Esto es simplemente por el lema 2.2.2. Por otro lado  $0 \leq s \leq t < \infty$  y se observa que:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(M_1(t)M_2(s)) &= \mathbb{E}(M_1(s)M_2(s)) + \mathbb{E}((M_1(t) - M_1(s))M_2(s)) \\ &= \mathbb{E}((M_1(t) - M_1(s))M_2(s)) = 0. \end{aligned}$$

Entonces como  $u_1, u_2$  son arbitrarios se deduce que  $\bar{Y}(t) - M^{\epsilon_n}(t)$  y  $M^{\epsilon_n}(t)$  son variables independientes.

□

Es un resultado conocido que el único proceso de Lévy centrado con trayectorias continuas es el movimiento Browniano, se procede a demostrar este resultado.

**Teorema 2.2.6.**  $Y_c$  es un movimiento Browniano.

Demostración:

Lo que hay que probar es que  $\exists \sigma > 0$  tal que  $X(t) \sim N(0, \sigma^2 t) \forall t > 0$ , para ello basta probar que el exponente característico vale

$$\Psi_t(u) = u^2 \sigma^2 \frac{t}{2}.$$

Se observa en primer lugar que por el teorema 2.2.4 existen todos los momentos de  $Y_c$  y como es un proceso de Lévy centrado:

$$\psi_t(u) = \mathbb{E}(\exp(iuY_c(t))) = \exp(-t\Psi(u)) \quad (2.36)$$

Como  $\mathbb{E}(Y_c^k) = i^{-k}(\mathbb{E}(e^{itY_c}))^{(k)}|_{t=0}$ , se deduce que  $\Psi \in C^\infty(\mathbb{R})$  y se deduce que  $\Psi'(0) = 0$ . Se obtiene para  $m \geq 2$

$$\mathbb{E}(Y_c(t)^m) = a_1 t + \dots + a_{m-1} t^{m-1}, \quad a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}. \quad (2.37)$$

Sea  $\mathcal{P} = \{0 = t_0 < \dots < t_n = t\}$  una partición de  $[0, t]$  y solo en esta prueba se define  $\Delta Y_c(t) := Y_c(t_j) - Y_c(t_j)$  para cada  $0 \leq j \leq n-1$ . Sumando y restando y luego usando el teorema de Taylor de orden dos :

$$\mathbb{E}(\exp(iuY_c(t)) - 1) = \mathbb{E}\left(\sum_{j=0}^{n-1} (\exp(iuY_c(t_{j+1}))) - (\exp(iuY_c(t_j)))\right) =$$

$$\mathbb{E}(I_1(t)) + \mathbb{E}(I_2(t)) + \mathbb{E}(I_3(t)).$$

Donde

$$I_1(t) = iu \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)} \Delta Y_c(t_j), \quad (2.38)$$

$$I_2(t) = -\frac{u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} e^{iuY_c(t_j)} (\Delta Y_c(t_j))^2, \quad (2.39)$$

$$I_3(t) = -\frac{u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} ((\exp(iu(Y_c(t_j) + \theta_j \Delta Y_c(t_j)))) - \exp(iuY_c(t_j))) (\Delta Y_c(t_j))^2. \quad (2.40)$$

Con  $0 < \theta_j < 1$ . Usando que los incrementos son independientes se deduce que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{iuY_c(t_j)} \Delta Y_c(t_j)) &= \mathbb{E}(e^{iuY_c(t_j)}) \mathbb{E}(\Delta Y_c(t_j)) = 0 \\ \Rightarrow \mathbb{E}(I_1(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Por otro lado usando la notación que se escribió el polinomio de 2.37,  $\mathbb{E}(Y_c(t)^m)$  en el caso  $m = 1$  y definiendo por comodidad  $\sigma^2 := a_1$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_2(t)) &= -\frac{u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(\exp(iuY_c(t_j))) \mathbb{E}((\Delta Y_c(t_j))^2) = \\ &= -\frac{\sigma^2 u^2}{2} \sum_j \psi_{t_j}(u) (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Haciendo tender a cero la norma de la partición, la expresión anterior queda de la forma:

$$-\frac{\sigma^2 u^2}{2} \int_0^t \psi_s(u) ds.$$

El siguiente paso es probar que  $\mathbb{E}(I_3)$  tiende a cero cuando disminuye la norma de la partición. Una vez probado esto se deduce que

$$\mathbb{E}(\exp(iuY_c(t)) - 1) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} \sum_j \psi_{t_j}(u) (t_{j+1} - t_j)$$

$$\Rightarrow \psi_t(u) - 1 = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} \int_0^t \psi_s(u) ds.$$

Esto define una ecuación diferencial (con  $u$  fijo) con condición inicial  $\psi_0(u) = 1$  cuya única solución es:

$$\psi_t(u) = e^{-\sigma^2 t u^2 \frac{1}{2}},$$

que corresponde al exponente característico del movimiento Browniano  $\sigma^2 B_t$  concluyendo el teorema.

Por ende solo resta estudiar  $\mathbb{E}(I_3(t))$ . Para ello, para cada  $\alpha > 0$  se define:

$$B_\alpha = \max_{0 \leq j \leq n-1} \sup_{t_j \leq u \leq v \leq t_{j+1}} |Y_c(v) - Y_c(u)| \leq \alpha,$$

y se observa usando que  $|e^{iy} - 1| \leq 2$ , que:

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}((I_3(t)) \mathbf{1}_{B_\alpha^c})| &\leq \frac{u^2}{2} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{E}(|e^{iuY_c(t)}| 2(\Delta Y_c(t_j))^2) \leq \\ u^2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{B_\alpha^c} (\Delta Y_c(t_j)(\omega))^2 d\mathbb{P}(\omega) &\leq u^2 (\mathbb{P}(B_\alpha^c)^{\frac{1}{2}}) (\mathbb{E}(\sum_{j=0}^{n-1} \Delta Y_c(t_j)^2))^{\frac{1}{2}} = \\ u^2 (\mathbb{P}(B_\alpha^c)^{\frac{1}{2}}) (\mathbb{E}(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \Delta Y_c(t_j)^2 \Delta Y_c(t_i)^2))^{\frac{1}{2}} &= \\ u^2 (\mathbb{P}(B_\alpha^c)^{\frac{1}{2}}) \times \\ (\sum_{i \neq j}^{n-1} a(t_{j+1} - t_j) a(t_{i+1} - t_i) + \sum_{i=0}^{n-1} a(t_{i+1} - t_i)^2 + a_3(t_{i+1} - t_i)^3)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(I_3(t) \mathbf{1}_{B_\alpha}) &\leq u^2 \sum_{j=0}^{n-1} \int_{B_\alpha} (\Delta Y_c(t_j)(\omega))^2 d\mathbb{P}(\omega) \leq \\ u^2 \alpha \sum_{j=0}^{n-1} \int_{B_\alpha} |\Delta Y_c(t_j)| &\leq u^2 \alpha \mathbb{E}(Y_c(t)). \end{aligned}$$

Se considera una sucesión de particiones  $\{\mathcal{P}^n\}$  cuya norma tiende a cero y denotando  $I_k^n$ ,  $k \in \{1, 2, 3\}$  a los respectivos  $I_k$  de cada partición. En primer lugar se observa que casi seguramente:

$$\max_{0 \leq j \leq n-1} \sup_{t_j \leq u \leq v \leq t_{j+1}} |Y_c(v) - Y_c(u)| \leq \alpha \rightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Usando convergencia dominada se deduce que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}((B_\alpha^n)^c) = 0$  Luego:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}((I_3(t)) \mathbf{1}_{B_\alpha^c})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{at} u^2 \mathbb{P}((B_\alpha^n)^c) = 0.$$

Por otro lado

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(I_3^n(t) \mathbf{1}_{B_\alpha}) \leq u^2 \alpha \mathbb{E}(Y_c(t)),$$

y como  $\alpha$  es g nerico se deduce que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(I_3^n(t)) = 0.$$

Concluyendo el teorema.

□

### Finalmente se muestra que vale el recíproco de Lévy-It :

Dado  $X$  un proceso de Lévy, recordando que

$$Y(t) = X(t) - \int_{[0,t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx) \quad \forall t \geq 0,$$

$$\bar{Y}(t) = Y(t) - \mathbb{E}(Y(t)).$$

Además, usando el teorema 2.2.5 Para todo  $t \geq 0$ :

$$\bar{Y}(t) = Y_c(t) + Y_d(t).$$

Siendo ambos procesos independientes, luego

$$X(t) = \int_{[0,t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx) + Y_c(t) + Y_d(t) + \mathbb{E}(Y(t)).$$

Por la definición 2.2.2:

$$X(t) = \int_{[0,t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx) + Y_c(t) + Y_d(t) + \mathbb{E}(X(t)) - t \int_{|x| \geq 1} x d\Pi(x).$$

Se definen entonces:

$$b := (\mathbb{E}(X(1)) - \int_{|x| \geq 1} x \Pi(dx)),$$

$$\begin{aligned} Z(t) &:= \int_{[0,t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx) + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,t]} \int_{B_{\epsilon^n}} x N(ds \times dx) - t \int_{B_{\epsilon^n}} x \Pi(dx) = \\ &\int_{[0,t]} \int_{|x| \geq 1} x N(ds \times dx) + \int_{[0,t]} \int_{|x| < 1} x N(ds \times dx) - t \int_{|x| < 1} x \Pi(dx). \end{aligned}$$

Usando que los dos primeros sumandos de  $Z$  son independientes y el teorema 2.1.3 ii)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{i\theta Z}) &= \exp\left(-\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} \Pi(dx))\right) \times \exp\left(-i\theta t \int_{B_{\epsilon^n}} x \Pi(dx)\right) \\ \Rightarrow \Psi_Z(\theta) &= \left(\int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} \Pi(dx))\right) + (it \int_{|x|<1} x \Pi(dx)) = \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta \mathbf{1}_{|x|<1}) \Pi(dx)\end{aligned}$$

Con exactamente el mismo argumento esgrimido en la prueba de que  $Y_c$  y  $Y_d$  son independientes se deduce que  $Y_c$  y  $Z$  son independientes. Usando esto:

$$\Psi_X(\theta) = \Psi_{Y_c}(\theta) + \Psi_Z(\theta) - i\theta = \frac{\sigma^2 \theta^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta \mathbf{1}_{|x|<1}) \Pi(dx) - i\theta.$$

□

Caracterizados todos los procesos de Lévy se finaliza la sección relacionando los procesos de Lévy con las variables aleatorias con distribución infinitamente divisible.

## 2.3. Descomposición de Lévy Khintchine

Para finalizar la introducción se muestra que todas las variables con distribución infinitamente divisible tienen exponente característico como en el teorema 2.1.1.

**Teorema 2.3.1.** *Si  $\mu$  es una medida de probabilidad en  $\mathbb{R}^d$  infinitamente divisible, entonces existe un proceso de Lévy  $X$  tal que  $\mu$  es la ley de  $X(1)$ .*

Este teorema requiere conocimiento de semigrupos de convolución debilmente continuos, no se usará en la tesis pero contesta la primera pregunta del capítulo, la prueba puede encontrarse en los dos primeros capítulos de [Applebaum(2009)].

**Teorema 2.3.2. Teorema de Lévy-Khintchine:** *Una variable tiene distribución infinitamente divisible con exponente característico  $\Psi$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} \mu(dx) = e^{-\Psi(\theta)}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

*Si y solamente si existe un trío  $(a, \sigma, \Pi)$  donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma \geq 0$  y  $\Pi$  es una medida concentrada en  $\mathbb{R} - \{0\}$  que satisface  $\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty$  y que cumple:*

$$\Psi(\theta) = ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x \mathbf{1}_{(|x|<1)}) \Pi(dx) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

Demostración:

Se deduce inmediatamente de los teoremas 2.3.1 y 2.2.1.

□

**Corolario 2.3.1.** *Usando el teorema 2.3.2 se obtiene que todo exponente característico de una variable con distribución infinitamente divisible es de la forma (reorganizando sumandos):*

$$\begin{aligned}\Psi(\theta) = & (ia\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2) + (\Pi(\mathbb{R} - (-1, 1)) \int_{|x| \geq 1} (1 - e^{i\theta x}) \frac{1}{\Pi(\mathbb{R} - (-1, 1))} \Pi(dx)) \\ & + \int_{0 < |x| < 1} (1 - e^{i\theta x} + i\theta x) \Pi(dx) \quad \forall \theta \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

*Para algún trío  $(a, \sigma, \Pi)$  satisfaciendo las mismas propiedades del teorema.*

Un corolario interesante de este teorema y el recíproco de Lévy-Itô es que se puede deducir el directo de Lévy Ito de una forma no constructiva. Para ello se toma una variable con distribución infinitamente divisible, se le asocia un proceso de Lévy y finalmente se descompone al exponente característico.

## Capítulo 3

# Estudio de supremos e ínfimos de un proceso de Lévy

### 3.1. Introducción

En el prefacio se mencionó informalmente que se buscaba la mejor estrategia para detener las observaciones. Más específicamente esa estrategia da una función de valor  $V$ , en un problema de parada óptima la función toma la forma:

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_x(e^{-r\tau} g(X_\tau)) \quad r > 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad g \geq 0,$$

donde  $\mathcal{M}$  son los tiempos de parada. Se busca encontrar  $V$  y  $\tau$  que realicen el supremo. En los últimos dos capítulos se tratará más exhaustivamente estos problemas.

En la tesis se utilizarán dos métodos para resolver este tipo de problemas.

Uno de ellos, se basa en que bajo ciertas hipótesis, la función  $V$  puede ser representada como una integral que depende de los extremos del proceso de Lévy detenido en un tiempo exponencial  $e(r)$  independiente al proceso. de parámetro  $r$  y resolver el problema se vuelve encontrar las funciones  $Q_*$  y  $Q^*$  que cumplan:

$$V(x) = \mathbb{E}_x(Q^*(M_r) + Q_*(I_r)),$$

siendo:

$$M_r := \sup_{0 \leq t \leq e(r)} X(t), \quad I_r := \inf_{0 \leq t \leq e(r)} X(t), \quad \text{siendo } e(r) \text{ independiente a } X.$$

Y para encontrar el tiempo de parada óptimo se deberá estudiar las raíces de estas funciones.

El segundo, es el llamado pegado suave, el cual se basa en utilizar que bajo ciertas hipótesis la función  $V$  es suave. Este método, es más clásico y en el siguiente capítulo se expondrán ejemplos.

De esta manera, para poder aplicar el primer método mencionado, resulta esencial conocer la ley de los extremos. Por ende, en esta sección se probará la factorización de Wiener-Hopf, la cual dice:

$$r(r + \Psi(z))^{-1} = \rho_r^+(z)\rho_r^-(z) \quad r > 0, \quad z \in \mathbb{R}$$

Siendo

$$\rho_r^+(z) = \mathbb{E}(\exp(i\theta M_r)), \quad \rho_r^-(z) = \mathbb{E}(\exp(i\theta I_r))$$

En el último capítulo se utilizará la factorización para resolver problemas donde el soporte de  $g$  no sea solamente la semirrecta positiva y no se cumpla el pegado suave.

Este capítulo se basa principalmente en los capítulos 4, 8 y 9 de [Sato(1999)].

## 3.2. Propiedades de la función característica y teorema de Wiener-Hopf:

El objetivo principal de este capítulo es probar el teorema, para ello se requiere conocimiento de la teoría potencial y la teoría de subordinación. Antes de tratar esos temas se procede a dar una base teórica necesaria.

### 3.2.1. Base teórica

Notación: por comodidad, para un proceso de Lévy  $X$  se define  $\mu^t := \mathbb{P}_{X(t)}$ . Para trabajar con los extremos será útil definir los siguientes procesos estocásticos:

**Definición 3.2.1.**

$$M(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} X(s), \quad I(t) = \inf_{0 \leq s \leq t} X(s),$$

Los procesos  $M, I, -X$  son respectivamente llamados proceso supremo, proceso ínfimo y proceso reflejado de  $X$ .

También se define la primer llegada al máximo antes de un tiempo fijo:

$$\Lambda_t(\omega) = \inf\{s \in [0, t] : X(s)(\omega) \vee X(s^-)(\omega) = M(t)(\omega)\}$$

□

Se probará primero el teorema de Wiener-Hopf para procesos de Poisson compuestos y luego se demostrará que se pueden hacerlos converger a un proceso de Lévy genérico. Es necesario tener antes una batería de lemas que sirvan para controlar las convergencias.

**Lema 3.2.1.** *Fijado  $t \in (0, \infty)$ . Sea  $\{Z_j(s) : s \in [0, t]\}$ ,  $j = 1, 2, \dots$  una sucesión de procesos estocásticos independiente entre sí y  $S_0(s) = 0$ ,  $S_n(s) = \sum_{j=1}^n Z_j(s)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Si para cada  $j$ , la función  $Z_j \in \mathbf{D}([0, t], \mathbb{R})$  casi seguramente (tiene trayectorias Càd-làg casi seguramente). Entonces, para todo  $\epsilon > 0$  y  $n$ ,*

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} (\sup_{0 \leq s \leq t} |S_j|) > 3\epsilon) \leq 3 \max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |S_j| > \epsilon).$$

Demostración:

Se puede asumir que  $\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |S_j| > \epsilon) < \frac{1}{3}$  ya que en otro caso el lema es trivial.

Por comodidad en la demostración si  $X$  es un proceso estocástico, al supremo  $(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s)|)$  se lo denotará (solo en la demostración) como  $\|X\|$  (es una seminorma).

Sea  $M_0 = 0$  y  $M_k = \max_{1 \leq j \leq k} \|S_j\|$  para  $k \geq 1$ . Sea  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $A_k = \{M_{k+1} \geq a + b > \|S_k\|\}$  para  $k \geq 1$ . Entonces  $A_1, \dots, A_n$  son eventos disjuntos y además  $\{M_n > a + b\} = \bigcup_{k=1}^n A_k$ . De esta manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|S_n\| > a) &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap \{\|S_n\| > a\}) \geq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k \cap \{\|S_n - S_k\| \leq b\}) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k) \mathbb{P}(\|S_n - S_k\| \leq b) \geq \mathbb{P}(M_n > a + b) \min_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(\|S_n - S_k\| \leq b), \end{aligned}$$

donde se usa que las variables son independientes.

Ahora, tomando  $a = \epsilon$  y  $b = 2\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|S_n\| > \epsilon) &\geq \mathbb{P}(M_n > 3\epsilon) \min_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(\|S_n - S_k\| \leq 2\epsilon) \\ &= \mathbb{P}(M_n > 3\epsilon) (1 - \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(\|S_n - S_k\| > 2\epsilon)) \geq \\ &\quad \mathbb{P}(M_n > 3\epsilon) (1 - 2 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(\|S_k\| > \epsilon)), \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad se usó la desigualdad triangular en la seminorma.

Como se asumió que  $\max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |S_j| > \epsilon) < \frac{1}{3}$ , se deduce que:

$$\frac{1}{3} \mathbb{P}(M_n > 3\epsilon) \leq \mathbb{P}(\|S_n\| > \epsilon) \leq \max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} |S_j| > \epsilon).$$

□

Es una prueba con cotas bastantes groseras pero es todo lo que se necesitará. Se procede a buscar una cota para el máximo de suma de variables aleatorias independientes. La idea es usar el lema anterior usando el truco que una variable aleatoria es un proceso estocástico con trayectorias Càd-làg si se considera que las trayectorias son constantes en el tiempo.

**Lema 3.2.2.** Sean  $Z_1, \dots, Z_n$  variables aleatorias independientes en  $\mathbb{R}$  tal que  $\mathbb{E}((Z_j)^2) < \infty$  y  $\mathbb{E}(Z_j) = 0$  para cada  $j$ . Sea  $S_j = Z_1 + \dots + Z_j$ . Entonces:

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| > \epsilon) \leq \frac{3^3}{\epsilon^2} \mathbb{E}((S_n)^2) \quad \forall \epsilon > 0$$

Demostración:

Definiendo  $Z_j(s) := Z_j$  para todo  $s \in [0, t]$  y usando el lema 3.2.1 se obtiene que:

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| > 3\epsilon) \leq 3 \max_{1 \leq j \leq n} \mathbb{P}(|S_j| > \epsilon).$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|S_j| > \epsilon) &\leq \frac{1}{\epsilon} \text{Var}(S_j) = \frac{1}{\epsilon} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^j Z_i\right) = \frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{i=1}^j \text{Var}(Z_i)\right) \leq \\ &\frac{1}{\epsilon} \left(\sum_{i=1}^n \text{Var}(Z_i)\right) = \frac{1}{\epsilon} \text{Var}(S_n) = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}(S_n^2), \end{aligned}$$

entonces:

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| > 3\epsilon) \leq \frac{3}{\epsilon^2} \mathbb{E}(S_n^2),$$

reemplazando  $3\epsilon$  por  $\epsilon$  se deduce el resultado. □

De nuevo esta desigualdad es grotesca y en realidad puede reemplazarse el  $3^3$  por 1 en el término de la derecha (es lo que se llama Desigualdad de Kolmogorov).

### 3.2.2. Subordinación de procesos de Lévy

La subordinación es una transformación de un proceso estocástico a otro mediante un cambio de tiempo aleatorio por un proceso de Lévy creciente (al que se le llama subordinador) independiente del proceso original. Se dice que el nuevo proceso es subordinado al original. La teoría de subordinación aparece en contextos más generales, como procesos de Markov.

La teoría de subordinación es interesante en sí, además en la demostración de Wiener-Hopf cumple un propósito crucial ya que primero se probará el teorema para procesos de Poisson y luego se utilizará la teoría de subordinación para extender el resultado.

En esta subsección, cada vez que se denote a un proceso de la forma  $Z = \{Z(t)\}$  se asumirá que es un proceso de Lévy y que para casi todo  $\omega$  la función en la recta real  $Z(t)(\omega)$  es creciente.

Se comienza con un teorema que será luego más útil, para su demostración se requerirán dos lemas.

**Teorema 3.2.1.** Sea  $Z = \{Z(t) : t \geq 0\}$  un subordinador (un proceso de Lévy creciente en  $\mathbb{R}$ ) con medida de Lévy  $\rho$ , drift  $\beta_0$  y  $\mathbb{P}_{Z(1)} = \lambda$ ,  $\mathbb{P}_{Z(t)} = \lambda^t$ . O sea:

$$\mathbb{E}(e^{-uZ(t)}) = e^{-t\Psi_Z(iu)} = \int_{[0,\infty)} e^{-us} \lambda^t(ds), \quad u \geq 0,$$

donde, para todo número complejo  $w$  con  $\text{Re}(w) \leq 0$  vale que:

$$-\Psi_Z(-iw) = w\beta_0 + \int_{(0,\infty)} (e^{ws} - 1)\rho(ds). \quad (3.1)$$

Además:

$$\beta_0 \geq 0 \text{ y } \int_{(0,\infty)} (1 \wedge s)\rho(s) < \infty. \quad (3.2)$$

Sea  $X$  un proceso de Lévy generado por el trío  $(A, \eta, \gamma)$  en el sentido que

$$\Psi(\theta) = \frac{1}{2}A\theta^2 - i\gamma\theta - \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta x} - 1 - i\theta x \mathbf{1}_{|x|<1}(x)\eta(dx)$$

y sea  $\mu = \mathbb{P}_{X(1)}$ ,  $\mu^t = \mathbb{P}_{X(t)}$ . Si  $X$  y  $Z$  son proceso independientes. Se define:

$$Y(t) = X(Z(t)(\omega))(\omega), \quad t \geq 0$$

Entonces se cumple:

i)

$$Y = \{Y(t) : t \geq 0\} \text{ es un proceso de Lévy.} \quad (3.3)$$

ii)

$$\mathbb{P}(Y(t) \in B) = \int_{[0,\infty)} \mu^s(B) \lambda^t(ds), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad (3.4)$$

iii) El trío generador  $(A^\sharp, \nu^\sharp, \gamma^\sharp)$  de  $Y$  (en el mismo sentido que el de la hipótesis) es de la forma:

$$A^\sharp = \beta_0 A, \quad (3.5)$$

$$\nu^\sharp(B) = \beta_0 \eta(B) + \int_{(0,\infty)} \mu^s(B) \rho(ds), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\}), \quad (3.6)$$

$$\gamma^\sharp = \beta_0 \gamma + \int_{(0,\infty)} \rho(ds) \int_{|x|<1} x \mu^s(dx). \quad (3.7)$$

Para la demostración se necesitará un par de lemas previos.

**Lema 3.2.3.** Sea  $X = \{X(t)\}$  un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}$  generado por el triplete  $(A, \nu, \gamma)$ . Para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $C = C(\epsilon)$  tal que para cualquier  $t$ ,

$$\mathbb{P}(|X(t)| > \epsilon) \leq Ct. \quad (3.8)$$

Además existen  $C_1$  y  $C_2$  tales que para cualquier  $t > 0$ ,

$$\mathbb{E}(|X(t)|^2; |X(t)| \leq 1) \leq C_1 t, \quad (3.9)$$

$$\mathbb{E}(|X(t)|; |X(t)| \leq 1) \leq C_2 t^{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Demostración:

Sea  $D = \{x : |x| \leq 1\}$ . Se consideran los procesos de Lévy independientes  $X_1$  y  $X_2$  generados por los tríos  $(A, \nu_D, \gamma)$  y  $(0, \nu_{D^c}, 0)$  respectivamente (la independencia se da porque  $D$  y su complemento son disjuntos). Luego  $X = X_1 + X_2$ . Además, por el teorema 2.2.4 (usando que el proceso es estacionario y considerando  $\triangle X(0)$ ), vale que  $\mathbb{E}(X_1(t)^2) < \infty \forall t \geq 0$ . Luego:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X(t)| > \epsilon) &\leq \mathbb{P}(X_2(t) \neq 0) + \mathbb{P}(X_2(t) = 0, |X_1(t)| > \epsilon) \\ &\leq 1 - e^{-t\nu(D^c)} + \epsilon^{-2}\mathbb{E}(X_1(t)^2) \\ &\leq t(\nu(D^c) + \epsilon^{-2}t\mathbb{E}(X_1(1)^2)) + t\epsilon^{-2}\text{Var}(X_1) = tC. \end{aligned}$$

Quedando probado (3.8).

De forma similar se prueba (3.9) y (3.10):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|X(t)|; |X(t)| \leq 1)^2 &\leq (\mathbb{E}(X(t)^2); |X(t)| \leq 1) \text{ (por la desigualdad de Jensen)} \\ &= \int_0^1 \mathbb{P}(X^2(t) > \alpha) d\alpha \leq \mathbb{P}(X_2(t) \neq 0) + \mathbb{E}(X_1(t)^2) \end{aligned}$$

La prueba se concluye notando que ya se probó que este último término es sub-lineal.

□

**Proposición 3.2.1.** Sean  $X$  e  $Y$  variables aleatorias independientes. Si  $f(x, y)$  es una variable acotada medible en  $\mathbb{R}^2$ , entonces  $g(y) = \mathbb{E}(f(X, y))$  es acotada, medible y además  $\mathbb{E}(f(X, Y)) = \mathbb{E}(g(Y))$ .

Demostración:

Es consecuencia directa del teorema de Fubini-Tonelli.

□

Demostración de teorema 3.2.1: Como  $X(t, \omega)$  es medible respecto a  $\omega$  y continua por derecha respecto a  $t$ , se deduce que  $Y(t)(\omega) = X(Z(t)(\omega))(\omega)$  es una variable aleatoria. Sea  $f(x)$  una función real continua y acotada. Entonces, usando 3.2.1 y la independencia de  $Z$  y  $X$ :

$$\mathbb{E}(f(Y(t))) = \mathbb{E}(g(Z(t))), \text{ siendo } g(s) = \mathbb{E}(f(X(s))) \quad (3.11)$$

Esto no es inmediato ya que en la proposición 3.2.1 se trabaja con variables aleatorias. Por ende se realiza el siguiente argumento de convergencia:

$$\text{Sean } k_n(s) = \sum_{j=1}^{n^2} \left(\frac{j}{n}\right) \mathbf{1}_{[\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n})}(s) \quad \text{y} \quad g_n(s) = \mathbb{E}(f(X_{k_n(s)})). \quad (3.12)$$

Como  $X_{k_n}$  es variable aleatoria independiente a  $Z$ , usando 3.2.1 se tiene que:

$$\mathbb{E}(f(X_{k_n}(Z))) = \mathbb{E}(g_n(Z_t))$$

y al utilizar convergencia dominada se deduce (3.11).

De forma similar para  $0 \leq t_1 < t_2$ ,

$$\mathbb{E}(f(Y_{t_1} - Y_{t_2})) = \mathbb{E}(h(Z_{t_1}, Z_{t_2})) \quad \text{con} \quad h(s_1, s_2) = \mathbb{E}(f(X_{s_2} - X_{s_1})).$$

Como  $Z_t$  es creciente en  $t$  y además  $h(s_1, s_2) = g(s_1 - s_2)$  para  $s_1 \leq s_2$ :

$$\mathbb{E}(f(Y_{t_2} - Y_{t_1})) = \mathbb{E}(g(Z_{t_2} - Z_{t_1})) = \mathbb{E}(g(Z_{t_2-t_1})). \quad (3.13)$$

Se continua inductivamente. Para ello sean  $f_1(x), \dots, f_n(x)$  funciones acotadas continuas y sea  $0 \leq t_1 < \dots < t_n$ . Se define  $g_j(s)$  y  $h_j(s_1, s_2)$  de forma similar para  $f_j(x)$ . Se obtiene,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n f_j(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})\right) = \mathbb{E}(G(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})),$$

donde

$$G(s_1, \dots, s_n) = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n f_j(X_{s_{j+1}} - X_{s_j})\right) \quad \text{con} \quad 0 \leq s_1 \leq s_n.$$

De esta manera:

$$\mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n f_j(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n h_j(Z_{t_j}, Z_{t_{j+1}})\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{j=1}^n g_j(Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j})\right)$$

$$\prod_{j=1}^n \mathbb{E}(g_j(Z_{t_{j+1}} - Z_{t_j})) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}(f_j(Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j})).$$

Por ende al ser  $f$  una función acotada continua se deduce que los incrementos son independientes. Por otro lado usando (3.11) y (3.13) se deduce que también son estacionarios:

$$\mathbb{E}(f(Y_{t_2} - Y_{t_1})) = \mathbb{E}(f(Y_{t_2-t_1}))$$

Por último es por definición que  $Y_0 = 0$  y  $Y_t$  es continua por derecha con límites por izquierda. De esta manera  $Y$  es un proceso de Lévy quedando probado 3.3 . En segundo lugar, para  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) - \{0\}$  se toma  $f(x) = \mathbf{1}_B(x)$  y usando 3.11

$$\mathbb{P}(Y(t) \in B) = \int_{[0, \infty)} \mu^s(B) \lambda^t(ds),$$

quedando probado (3.4).

Para calcular  $A^\sharp$ ,  $\nu^\sharp$  y  $\gamma^\sharp$  en primer lugar se observa (usando Fubini) que para cualquier  $w$  tal que  $\operatorname{Re}(w) \leq 0$ :

$$\mathbb{E}(e^{wZ_t}) = \int_{[0,\infty)} e^{sw} \lambda^t(ds) = e^{-t\Psi_Z(-iw)}. \quad (3.14)$$

Nuevamente usando Fubini:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{izY_t}) &= \int_{(0,\infty)} \mathbb{E}(e^{izX_s}) \lambda^t(ds) = \int_{(0,\infty)} e^{-s\Psi_X(z)} \lambda^t(ds) \\ &= \mathbb{E}(e^{-Z_t\Psi_X(z)}) = \exp(-t\Psi_Z(i(-\log(\psi_\mu(z))))). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Luego por (3.1)

$$-\Psi_Z(-i\log(\psi_\mu(z))) = \beta_0 \log \psi_\mu(z) + \int_{(0,\infty)} (\psi_\mu(z)^s - 1) \rho(ds). \quad (3.16)$$

Se define la medida  $\eta_1$  como  $\eta_1(\{0\}) = 0$  y

$$\eta_1(B) = \int_{(0,\infty)} \mu^s(B) \rho(ds) \text{ para } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\}).$$

Sea  $D = \{x : |x| < 1\}$ . Entonces con el lema 3.2.3 se deducen las desigualdades:

$$\int_D x^2 \eta_1(dx) = \int_{(0,\infty)} \rho(ds) \int_D |x|^2 \mu^s(dx) < \infty,$$

$$\int_{|x|>1} \eta_1(dx) = \int_{(0,\infty)} \mathbb{P}(|X_s| > 1) \rho(ds) < \infty,$$

$$\int_{(0,\infty)} \rho(ds) \left| \int_D x \mu^s(dx) \right| < \infty,$$

entonces, con  $g(z, x) = e^{izx} - 1 - izx \mathbf{1}_D(x)$  vale que,

$$\begin{aligned} \int_{(0,\infty)} (\psi_\mu(z)^s - 1) \rho(ds) &= \int \rho(ds) \int (e^{izx} - 1) \mu^s(dx) \\ &= \int \rho(ds) \int g(z, x) \mu^s(dx) + i \int \rho(ds) \int zx \mathbf{1}_D(x) \mu^s(dx) \\ &= \int g(z, x) \eta_1(dx) + iz \int \rho(ds) \int_D x \mu^s(dx) \end{aligned}$$

Luego usando (3.16) se deduce que:

$$-\Psi_Z(-i\log \psi_\mu(z)) - \beta_0 \log \psi_\mu(z) = \int g(z, x) \eta_1(dx) + iz \int \rho(ds) \int_D x \mu^s(dx)$$

Y de (3.15)

$$\begin{aligned}
-\Psi_Y(z) &= \log(\mathbb{E}(e^{izY})) = \beta_0 \log \psi_\mu(z) + \int g(z, x) \eta_1(dx) + iz \int \rho(ds) \int_D x \mu^s(dx) \\
&= \beta_0 \left(-\frac{1}{2}\right) Az^2 + i\gamma z + \int_{\mathbb{R}} (e^{izz} - 1 - izx) \mathbf{1}_D(x) \eta(dx) + \\
&\quad \int g(z, x) \eta_1(dx) + iz \int \rho(ds) \int_D x \mu^s(dx) \\
&= \beta_0 \left(-\frac{1}{2}\right) Az^2 + iz(\gamma + \int \rho(ds) \int_D x \mu^s(dx)) \\
&\quad + \int g(z, x) \eta_1(dx) + \beta_0 \int_{\mathbb{R}} e^{izz} - 1 - izx \mathbf{1}_D(x) \eta(dx) \\
&= -\frac{1}{2} A^\# \beta_0 + i\gamma^\# z + \int_{\mathbb{R}} e^{izz} - 1 - izx \mathbf{1}_D(x) (d\nu^\#(x)).
\end{aligned}$$

□

### Corolario 3.2.1.

Sea  $Z$  un proceso  $\Gamma$  con medida  $\mu_{q,1}$ ,  $q > 0$ . O sea:

$$\Psi(\theta) = \int_0^\infty (1 - e^{i\theta x}) \frac{e^{-qx}}{x} dx = \log\left(1 - \frac{i\theta}{\alpha}\right). \quad (3.17)$$

Luego del teorema 3.2.1 se deduce que para un proceso de Lévy  $X$ , se cumple para  $Y_t(\omega) := X_{Z_t(\omega)}(\omega)$  que:

$$\mathbb{P}(Y_t \in B) = \frac{q^t}{\Gamma(t)} \int_0^\infty \mathbb{P}(X_s \in B) s^{t-1} e^{-qs} ds. \quad (3.18)$$

En particular si  $X$  es un proceso de Poisson con parámetro  $c > 0$ , entonces para cada  $t > 0$ ,  $Y_t$  tiene distribución binomial negativa con parámetros  $t$  y  $p = \frac{q}{c+p}$ .

### 3.2.3. Medidas Potenciales

En la teoría de procesos de Markov homogéneos, la transformada de Laplace juega un rol importante ya que en cierto sentido suaviza la medida y se conservan las propiedades. En esta subsección se estudia dicha teoría que es interesante en sí y además es útil para el estudio de extremos de los procesos de Lévy.

**Definición 3.2.2.** Sea  $X$  un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}$  con  $\mu = \mathbb{P}_{X_1}$ . La medida  $q$ -potencial  $V^q$  ( $q \geq 0$ ) definida en los borelianos está dada por:

$$V^q(B) = \int_0^\infty e^{-qt} \mu^t(B) dt = \mathbb{E} \left( \int_0^\infty e^{-qt} \mathbf{1}_B(X_t) dt \right). \quad (3.19)$$

La existencia de las integrales viene de la medibilidad de  $X_t(\omega)$  en  $(t, \omega)$  y el teorema de Fubini. La medida 0-potencial se denomina simplemente medida potencial y es escrita como  $V(B)$ . Si  $q > 0$ , entonces la  $q$ -medida potencial tiene masa total de  $\frac{1}{q}$ . Si  $q = 0$  entonces es posible que  $V(B) = \infty$ .

**Observación 3.2.1.** *Una forma intuitiva de ver la medida potencial cuando  $q > 0$  es considerar a una variable exponencial aleatoria independiente al proceso de parámetro  $q$  y considerar el proceso  $X_{e(q)}$  (el proceso de Lévy detenido en el tiempo exponencial). Luego  $V^q$  es la medida:*

$$V^q(B) = \frac{1}{q} \mathbb{P}(X_{e(q)} \in B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

**Observación 3.2.2.** *Otra observación importante que se relacionará luego con el teorema de Wiener-Hopf es el valor de la función característica del proceso detenido en un tiempo exponencial independiente. Con una simple manipulación se prueba que:*

$$\mathbb{E}(e^{iX_{e(q)}\theta}) = \frac{q}{q + \Psi(\theta)}. \quad (3.20)$$

Ya que:

$$\mathbb{E}(e^{iX_{e(q)}\theta}) = \int_0^\infty e^{-qt} q \mathbb{E}(e^{iX_t\theta}) dt = q \int_0^\infty e^{-qt} e^{-t\Psi(\theta)} dt = \frac{q}{q + \Psi(\theta)}.$$

**Teorema 3.2.2.** *Sea  $X$  un proceso de Lévy en  $\mathbb{R}$  con  $\mu = \mathbb{P}_{X_1}$  y sea  $q > 0$ , entonces:*

- i) *La medida de probabilidad  $qV^q$  es infinitamente divisible.*
- ii) *Su medida de Lévy  $\eta_q^\sharp$  está definida por:*

$$\eta_q^\sharp(B) = \int_0^\infty e^{-qt} \mu^t(B) t^{-1} dt, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R} - \{0\}). \quad (3.21)$$

$$\text{iii) } \Psi_{X_{e(q)}}(z) = \int_{\mathbb{R}} 1 - e^{zx} \eta_q^\sharp(dx).$$

**Demostración:**

- i) Se deduce inmediatamente del ejemplo 3.2.1 ya que  $qV^q$  tiene la misma distribución que  $Y_1$  del ejemplo.
- ii) Se deduce de aplicar al mismo ejemplo.
- iii) La componente Gaussiana es cero simplemente porque el drift del subordinador es cero.

Por otro lado, usando la descomposición de Lévy-Itô para acotar la esperanza:

$$\int_0^\infty e^{-rt} t^{-1} \int_{|x|<1} |x| \mu^t(dx) dt < \infty.$$

Luego el drift  $\gamma^\sharp$  se anula con el término lineal de la integral de la medida de Lévy.

□

El próximo teorema es la primera parte del Teorema de Wiener-Hopf, en el se descompone al proceso detenido en un tiempo exponencial independiente en dos factores. Luego se analizarán esos factores.

**Teorema 3.2.3. Factorización de  $rV^r$ .** Sea  $r > 0$  y  $X$  un proceso de Lévy con exponente característico  $\Psi$ . Luego existe un único par de funciones características  $\rho_r^+(z)$  de distribuciones infinitamente divisibles con drift 0, soportadas en  $[0, \infty)$  y  $(-\infty, 0]$  respectivamente que cumplen:

$$i) \quad r(r + \Psi(z))^{-1} = \rho_r^+(z)\rho_r^-(z), \quad z \in \mathbb{R}, \quad (3.22)$$

$$ii) \quad \rho_r^+(z) = \exp\left(\int_0^\infty t^{-1}e^{-rt} \int_{(0,\infty)} (e^{izx} - 1)\mu^t(dx)dt\right), \quad (3.23)$$

$$\rho_r^-(z) = \exp\left(\int_0^\infty t^{-1}e^{-rt} \int_{(-\infty,0)} (e^{izx} - 1)\mu^t(dx)dt\right). \quad (3.24)$$

Demostración:

Recordando que 3.2.2 decía

$$\mathbb{E}(e^{iX_{e(r)}\theta}) = \frac{r}{r + \Psi(\theta)}.$$

Luego usando el teorema 3.2.2, la variable  $X_{e(r)}$  (se recuerda que  $\mu^t = \mathbb{P}_{X_t}$ ) tiene distribución conocida:

$$\eta_r(B) = \int_0^\infty t^{-1}e^{-rt}\mu^t(B)dt \quad \text{para } B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad 0 \notin B, \quad (3.25)$$

$$r(r + \Psi(z))^{-1} = \exp\left(\int_{-\infty}^\infty (e^{izx} - 1)\eta_r(dx)\right), \quad (3.26)$$

entonces solo hay que definir  $\rho_r^+$  y  $\rho_r^-$  como en las hipótesis (se da el producto ya que al ser las semirrectas disjuntas hay independencia de la medida de Lévy). La unicidad es por la unicidad de la representación del exponente característico.

□

De aquí en adelante, cada vez que se mencionen  $\rho_r^+$  o  $\rho_r^-$  se referirá a las funciones definidas en este teorema.

### 3.2.4. Poisson Compuesto

Para probar Wiener-Hopf en este caso, primero se necesitará un lema de caminatas aleatorias que en cierto sentido es el teorema de Wiener-Hopf en el caso discreto. No es raro que las caminatas aleatorias aparezcan en un teorema de Procesos de Poisson Compuestos ya que estos últimos pueden pensarse como el caso continuo de los primeros.

**Lema 3.2.4.** *Sea  $\{S_n\}$  una caminata al azar en  $\mathbb{R}$  y se define:*

$$L_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad H_n = \min\{m : 0 \leq m \leq n, S_m = L_m\},$$

$$T = \min\{n > 0 : S_n > 0\}, \quad D = \min\{n > 0 : S_n \geq 0\},$$

$$\bar{T} = \min\{n > 0 : S_n < 0\} \quad \bar{D} = \min\{n > 0 : S_n \leq 0\},$$

donde  $H_n$  representa el primer momento en el cual se alcanza el máximo de la caminata en  $\{0, \dots, n\}$  (las demás definiciones son más claras).

Sean  $\zeta, \nu, u, v \in \mathbb{C}$  con  $|\zeta| < 1$ ,  $|\nu| \leq 1$ ,  $\operatorname{Re}(u) \leq 0$ ,  $\operatorname{Re}(v) \geq 0$  y  $r \in \mathbb{R}$ . Se definen:

$$f_\zeta^+(u) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uS_n}; S_n > 0)\right),$$

$$f_\zeta^-(v) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uS_n}; S_n < 0)\right),$$

$$c_\zeta = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \mathbb{P}(S_n = 0)\right),$$

entonces se cumple :

$$i) \quad (1 - \zeta \mathbb{E}(e^{irS_1}))^{-1} = c_\zeta f_\zeta^+(ir) f_\zeta^-(ir), \quad (3.27)$$

$$ii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uS_n}; \bar{D} > n) = f_\zeta^+(u), \quad (3.28)$$

$$iii) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uS_n}; D > n) = f_\zeta^-(u), \quad (3.29)$$

$$iv) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uS_n}; \bar{T} > n) = c_\zeta f_\zeta^+(u), \quad (3.30)$$

v)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uS_n}; T > n) = c_\zeta f_\zeta^-(u), \quad (3.31)$$

vi)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uL_n + v(S_n - L_n)} \nu^{H_n}) = c_\zeta f_{\zeta\nu}^+(u) f_\zeta^-(v) \\ & = (1 - \zeta)^{-1} \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\zeta\nu)^n \mathbb{E}(e^{uS_n} - 1; S_n > 0)\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \mathbb{E}(e^{vS_n} - 1; S_n < 0) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n (\nu^n - 1) \mathbb{P}(S_n > 0). \end{aligned} \quad (3.32)$$

Demostración:

En primer lugar:

$$\begin{aligned} (1 - \zeta \mathbb{E}(e^{irS_1}))^{-1} &= \exp(-\log(1 - \zeta \mathbb{E}(e^{irS_1}))) \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \mathbb{E}(e^{irS_n})\right) = c_\zeta f_\zeta^+(ir) f_\zeta^-(ir), \end{aligned}$$

quedando probado i).

Sea  $S_n - S_{n-1} = Z_n$ . Como  $(Z_1, \dots, Z_m)$  y  $(Z_m, \dots, Z_1)$  tienen la misma distribución:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(e^{uS_m}; \overline{D} > m) = \mathbb{E}(e^{uS_m}; S_1 > 0, \dots, S_m > 0) \\ & = \mathbb{E}(e^{uS_m}; Z_m > 0, Z_m + Z_{m-1} > 0, \dots, Z_m + Z_{m-1} + \dots + Z_1 > 0) \\ & = \mathbb{E}(e^{uS_m}; S_m > S_k \text{ para } k = 0, 1, \dots, m-1). \end{aligned}$$

Más aún, para  $0 \leq m \leq n$ , como  $(Z_1, \dots, Z_{n-m}) = (Z_{m+1}, \dots, Z_n)$  en distribución (usando la propiedad fuerte de Markov):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(e^{vS_{n-m}}; T > n - m) = \mathbb{E}(e^{vS_{n-m}}; S_1 \leq 0, \dots, S_{n-m} \leq 0) = \\ & \mathbb{E}(e^{v(Z_{m+1} + \dots + Z_n)}; Z_{m+1} \leq 0, Z_{m+1} + Z_{m+2} \leq 0, \dots, Z_{m+1} + \dots + Z_n \leq 0) \\ & = \mathbb{E}(e^{v(S_n - S_m)}; S_j \leq S_m \text{ para } j = m+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Por comodidad a los lados izquierdos de las ecuaciones en (3.28) y (3.31) se los denominará  $g_\zeta(u)$  y  $h_\zeta(v)$  respectivamente. Luego:

$$g_{\zeta\eta}(u) h_\zeta(v) = \sum_{m=0}^{\infty} (\zeta\eta)^m \mathbb{E}(e^{uS_m}; \overline{D} > m) \sum_{n=m}^{\infty} \zeta^{n-m} \mathbb{E}(e^{vS_{n-m}}; T > n - m)$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \zeta^n \eta^m \mathbb{E}(e^{uS_m}; \bar{D} > m) \mathbb{E}(e^{vS_{n-m}}; T > n-m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \zeta^n \eta^m \mathbb{E}(e^{uS_m+v(S_n-S_m)}; B_{n,m}) = (*)
\end{aligned}$$

donde  $B_{n,m} = \{S_m > S_k \text{ para } k = 0, \dots, m-1 \text{ y } S_m \geq S_j \text{ para } j = m+1, \dots, n\}$  (se usa que en la caminata los incrementos son i.i.d.).

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \sum_{m=0}^n \eta^m \mathbb{E}(e^{uL_n+v(S_n-L_n)}; H_n = m) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{uL_n+v(S_n-L_n)} \eta^{H_n}),$$

entonces, si se prueban (3.28) y (3.31), queda probada la primera igualdad de (3.32). Para ello, en primer lugar, se toma  $\eta = 1$ ,  $u = v = ir$ ,  $r \in \mathbb{R}$  y usando (3.27) se obtiene:

$$g_\zeta(ir)h_\zeta(ir) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{irS_n}) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta \mathbb{E}(e^{irS_1}))^n = c_\zeta f_\zeta^+(ir) f_\zeta^-(ir).$$

Se observa que cuando se fija  $\zeta$  con  $|\zeta| < 1$ , las funciones  $f_\zeta^+(u)$  y  $g_\zeta(u)$  son continuas en  $\{u : \operatorname{Re}(u) \leq 0\}$  (simplemente se debe a que las exponenciales están quedando con exponentes negativos) y acotadas y analíticas en  $\{u : \operatorname{Re}(u) < 0\}$ . Análogamente, las funciones  $f_\zeta^-(v)$  y  $h_\zeta(v)$  son continuas en  $\{v : \operatorname{Re}(v) \geq 0\}$  y acotadas y analíticas en  $\{v : \operatorname{Re}(v) > 0\}$ . Lo único no trivial de probar es la analicidad, se procede a probar que  $f_\zeta^+(u)$  es analítica en el semiplano  $\{\operatorname{Re}(v) < 0\}$ . Para ello, se observa que  $\mathbb{E}(e^{uS_n}; S_n > 0)$  es analítico (esto es usando convergencia dominada) y el límite uniforme de funciones acotadas analíticas es uniforme. La analicidad de los demás términos se demuestra de la misma forma. Por otro lado para  $|\zeta| < 1$ :

$$|f_\zeta^+(u)| \geq \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} |\zeta|^n\right) = 1 - |\zeta| > 0.$$

Y si  $|\zeta| < \frac{1}{2}$ :

$$|h_\zeta(v)| \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |\zeta|^n = \frac{1 - 2|\zeta|}{1 - |\zeta|} > 0.$$

De esta manera, si  $|\zeta| < \frac{1}{2}$ :

$$\frac{g_\zeta(ir)}{f_\zeta^+(ir)} = c_\zeta \frac{f_\zeta^-(ir)}{h_\zeta(ir)}$$

Para  $r \in \mathbb{R}$ . La igualdad muestra que el cociente de ambas funciones analíticas valen lo mismo en la recta imaginaria. Por ende, la función (teorema de Morera) pegada es analítica en todo el plano y acotada y por ello constante. Tomando

$u \rightarrow \infty$  en la recta real positiva, por la construcción de las funciones se deduce que la constante es 1.

De esta manera:

$$g_\zeta(u) = f_\zeta^+(u) \text{ y } h_\zeta(v) = c_\zeta f_\zeta^-(v).$$

Para  $|\zeta| < \frac{1}{2}$ . Entonces (3.28), (3.31) y la primera igualdad de (3.32) se cumplen para  $|\zeta| < \frac{1}{2}$ . Usando esto y que las funciones, tomando como variable a  $\zeta$  son analíticas en el disco  $\{\zeta : |\zeta| < 1\}$  (por ser serie absolutamente convergente de analíticas) se deduce que son iguales en todo el disco quedando probado (3.28) y (3.31). Se observa que (3.29) y (3.30) se deducen cambiando  $S_n$  por  $-S_n$ . Solo queda probar la segunda igualdad de (3.32). En primer lugar se observa que

$$1 - \zeta = \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n\right)$$

de esta manera:

$$\begin{aligned} c_\zeta^{-1} \exp\left(-\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\zeta \eta)^n \mathbb{P}(S_n > 0)\right) \\ = -\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \mathbb{P}(S_n < 0) - \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\zeta^n - (\zeta \eta)^n) \mathbb{P}(S_n > 0). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la tercera igualdad de *vi*) se concluye el teorema.

□

Se procede a probar el teorema de Wiener-Hopf para el caso en que el proceso es un Poisson Compuesto.

**Teorema 3.2.4. Factorización en el caso de Poisson compuesto:** Sea  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$  un proceso de Poisson compuesto,  $r > 0$ , entonces,  $\forall z \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \mathbb{R}$  y  $p \geq 0$ :

i)

$$r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM(t)}) dt = r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{iz(X(t)-I(t))}) dt = \rho_r^+(z) \quad (3.33)$$

ii)

$$r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izI(t)}) dt = r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{iz(X(t)-M(t))}) dt = \rho_r^-(z) \quad (3.34)$$

iii)

$$\begin{aligned} r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM(t)+iwI(t)}) dt &= r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM(t)+iw(X(t)-M(t))}) dt \\ &= \rho_q^+(z) \rho_r^-(w) \end{aligned} \quad (3.35)$$

iv)

$$\begin{aligned}
& r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM(t)+iw(X(t)-M(t))-p\Lambda_t}) dt \\
&= \rho_r^+(z) \rho_r^-(w) \exp\left(\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} (e^{-pt} - 1) \mathbb{P}(X(t) > 0) dt\right) \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Observar que el último item no se probará en el caso general.

Demostración:

Como  $X$  es un proceso de Poisson compuesto:

$$\Psi(z) = \int_{|x|>0} (1 - e^{izx}) \eta(dx) \quad \text{con } 0 < c = \eta(\mathbb{R}) < \infty.$$

Se considera la medida  $\sigma = c^{-1}\eta$ . Sea  $\{S_n\}$  una caminata aleatoria con  $\sigma$  la distribución de  $S_1$  y un proceso de Poisson  $Z$  con parámetro  $c$  tal que  $\{S_n\}$  y  $\{Z(t)\}$  son independientes. Por construcción se obtiene que en distribución  $X(t) = S_{Z(t)}$ . Sean  $0 < J_1 < J_2 < \dots$  los tiempos de los saltos de  $\{Z(t)\}$  (y por ende de  $\{X(t)\}$ ). Sea  $J_0 = 0$ . Entonces como los incrementos del proceso de Lévy son independientes, se deduce que  $\{J_n\}$  cumple la propiedad de la pérdida de memoria y por ende tiene distribución exponencial con parámetro  $c$ .

Las identidades 3.33, 3.34 y 3.35 se deducen de 3.36 y de tomar el proceso dual  $\{\bar{X}(t)\}$  en lugar de  $\{X(t)\}$ . Más aún, se deduce que  $I_{e(r)} \sim X_{e(r)} - M_{e(r)}$  considerando el proceso dual  $-X$ .

Por ende solo hay que probar la segunda igualdad 3.36.

Se definen los procesos auxiliares:

$$L_n = \max_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad H_n(x) = \min\{m : 0 \leq m \leq n, S_m = L_n\}.$$

Sea  $z \in \mathbb{R}$ ,  $w \in \mathbb{R}$ ,  $p \geq 0$ . Si  $J_n \leq t < J_{n+1}$ , entonces  $X(t) = S_n$ ,  $M(t) = L_n$ , y además  $\Lambda_t = J_{H_n}$  ya que  $X$  es constante entre los saltos. Se deduce que  $\Lambda_t$  es medible en este caso. Luego:

$$\begin{aligned}
& r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM(t)+iw(X(t)-M(t))-p\Lambda_t}) dt \\
&= \sum_{n=0}^\infty r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izL_n+iw(S_n-L_n)-pJ(H_n)}; J_n \leq t < J_{n+1}) dt. \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Usando que  $r \int_{J_n}^{J_{n+1}} e^{-rt} dt = e^{-rJ_n} - e^{-rJ_{n+1}}$ :

$$(3.37) = \sum_{n=0}^\infty \sum_{m=0}^n \mathbb{E}(e^{izL_n+iw(S_n-L_n)-pJ_m} (e^{-rJ_n} - e^{-rJ_{n+1}}); H_n = m). \quad (3.38)$$

Como los tiempos de saltos son independientes a los tamaños de saltos:

$$(3.38) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \mathbb{E}(e^{izL_n + iw(S_n - L_n)}; H_n = m) \mathbb{E}(e^{-pJ_m}(e^{-rJ_n} - e^{-rJ_{n+1}})). \quad (3.39)$$

Por otro lado, usando que los tiempos de saltos son exponenciales y que  $m \leq n$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-pJ_m}(e^{-rJ_n} - e^{-rJ_{n+1}})) = \\ (\frac{c}{r+p+c})^m \zeta^{n-m} - (\frac{c}{r+p+c})^m \zeta^{n+1-m} = \frac{r}{r+c} \zeta^n \eta^m, \end{aligned}$$

donde  $\zeta = \frac{c}{r+c}$  y  $\eta = \frac{r+c}{r+p+c}$ . Entonces:

$$(3.39) = \frac{r}{r+c} \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n \mathbb{E}(e^{izL_n + iw(S_n - L_n)} \eta^{H_n}). \quad (3.40)$$

De esta manera, se puede utilizar la ecuación 3.32 del lema 3.2.4:

$$(3.40) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} (\eta \zeta)^n \mathbb{E}(e^{izS_n} - 1; S_n > 0)) \times$$

$$\exp(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \mathbb{E}(e^{iwS_n} - 1; S_n < 0) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n (\eta^n - 1) \mathbb{P}(S_n > 0)). \quad (3.41)$$

Por otro lado, por el teorema 3.2.3 vale que:

$$\begin{aligned} \rho_{r+p}^+(z) \rho_r^-(w) \exp(\int_0^{\infty} t^{-1} e^{-rt} (e^{-pt} - 1) \mathbb{P}(X(t) > 0) dt) = \\ \exp(\int_{(0, \infty)} (e^{izx} - 1) \nu_{p+r}(dx)) \times \\ \exp(\int_{(-\infty, 0)} (e^{izx} - 1) \nu_r(dx) + \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-rt} (e^{-pt} - 1) \mathbb{P}(X(t) > 0) dt). \end{aligned}$$

Se recuerda que

$$\nu_r(B) = \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-rt} \mu^t(B) dt \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \quad 0 \notin B.$$

Luego, como  $X$  es Poisson compuesto y  $\sigma = c^{-1}\nu$ , definiendo a  $\sigma^n$  como la  $n$ -ésima convolución de  $\sigma$ , vale que:

$$\nu_r(B) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-rt-ct} (n!)^{-1} (ct)^n \sigma^n(B) dt = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \sigma^n(B).$$

de esta manera:

$$\int_{(-\infty, 0)} (e^{izx} - 1) \nu_r(dx) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n \int_{(-\infty, 0)} (e^{izx} - 1) \sigma^n(dx), \quad (3.42)$$

$$\int_{(0, \infty)} (e^{izx} - 1) \nu_{r+p}(dx) = n^{-1} (\zeta \eta)^n \int_{(0, \infty)} (e^{izx} - 1) \sigma^n(dx). \quad (3.43)$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-rt} (e^{-pt} - 1) \mathbb{P}(X(t) > 0) dt \\ &= \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-rt} (e^{-pt} - 1) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ct} (n!)^{-1} (ct)^n \mathbb{P}(S_n > 0) dt \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \zeta^n (\eta^n - 1) \mathbb{P}(S_n > 0). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Finalmente, con las tres ecuaciones (3.42), (3.43) y (3.44) se concluye que:

$$\begin{aligned} (3.41) &= \int_{(-\infty, 0)} (e^{izx} - 1) \nu_r(dx) \\ &\times \int_{(0, \infty)} (e^{izx} - 1) \nu_{r+p}(dx) \times \int_0^{\infty} t^{-1} e^{-rt} (e^{-pt} - 1) \mathbb{P}(X(t) > 0) dt. \end{aligned}$$

Concluyendo la demostración. □

Lo que se procede a hacer es aproximar procesos de Lévy por procesos de Poisson compuestos que es un resultado interesante en sí mismo y además permitirá extender el teorema al caso general.

### 3.2.5. Demostración de Wiener-Hopf

Para generalizar el resultado, se procede a probar que para un proceso de Lévy, existe una sucesión de procesos de Poisson Compuestos que convergen suficientemente bien para extender el teorema al caso general.

**Lema 3.2.5.** *Si  $Z = \{Z(t)\}$  es un proceso de Poisson con parámetro 1, entonces:*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq u} |t - n^{-2} Z(n^2 t)| = 0, \forall u \geq 0\right) = 1.$$

Demostración:

Por el teorema 3.2.1  $n^{-2}Z(n^2t)$  es un proceso de Lévy que cumple  $\mathbb{E}(n^{-2}Z(n^2t)) = t$  con varianza finita y por ende,  $t - n^{-2}Z(n^2t)$  es un proceso de Lévy centrado con varianza finita. Fijado  $u \geq 0$  y  $\epsilon > 0$  y usando que los incrementos son independientes y reescribiendo al proceso de la forma

$$u - n^{-2}Z(n^2u) = \sum_{i=1}^m \left( u \frac{i}{m} - n^{-2}Z(n^2u \frac{i}{m}) \right) - \left( u \frac{i-1}{m} - n^{-2}Z(n^2u \frac{i-1}{m}) \right),$$

y al utilizar el lema 3.2.2 se deduce que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq m} \left| \sum_{i=1}^j \left( u \frac{i}{m} - n^{-2}Z(n^2u \frac{i}{m}) \right) - \left( u \frac{i-1}{m} - n^{-2}Z(n^2u \frac{i-1}{m}) \right) \right| > \epsilon) \\ \leq \frac{3^3}{\epsilon^{-2}} \mathbb{E}((u - n^{-2}Z(n^2u))^2) = 3^3 \epsilon^{-2} \text{Var}(n^{-2}Z(n^2u)). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando que el drift es continuo y que  $n^{-2}Z(n^2t)$  es constante a trozos casi seguramente se deduce que:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq m} \left| \sum_{i=1}^j \left( u \frac{i}{m} - n^{-2}Z(n^2u \frac{i}{m}) \right) - \left( u \frac{i-1}{m} - n^{-2}Z(n^2u \frac{i-1}{m}) \right) \right| > \epsilon) = \\ \mathbb{P}(\sup_{t \leq u} |t - n^{-2}Z(n^2t)| > \epsilon). \end{aligned}$$

De estos dos resultados se deduce que

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq u} |t - n^{-2}Z(n^2t)| > \epsilon) \leq 3^3 \epsilon^{-2} \text{Var}(n^{-2}Z(n^2u)) = 3^3 \epsilon^{-2} n^{-2} u.$$

Tomando  $\epsilon_n \rightarrow 0$  de manera que  $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n^{-2} n^{-2} < \infty$ , con el lema de Borel-Cantelli se concluye

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq u} |t - n^{-2}Z(n^2t)| > \epsilon_n \text{ para infinitos } n) = 0.$$

Como los conjuntos, al variar el  $u$  son decrecientes en probabilidad, tomando  $u_i = i$  e intersectando los conjuntos obtenidos de medida total queda probado el lema. □

Se procede a aproximar en el caso en el cual el proceso es un Movimiento Browniano Lineal con drift.

**Lema 3.2.6.** *Se supone que  $X$  es un proceso de Lévy no nulo con trayectorias continuas. Sea  $Z$  un proceso de Poisson con parámetro 1 independiente a  $X$ . Sea  $X^n(t) = X(n^{-2}Z(n^2t))$  para  $n = 1, 2, \dots$ . Entonces  $\{X^n\}$  es una sucesión de procesos de Poisson compuestos que satisfacen:*

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq u} |X(t) - X^n(t)| = 0, \forall u \geq 0) = 1$$

Demostración:

En primer lugar se observa que como  $X$  tiene trayectorias continuas casi seguramente, una vez probado que  $X^n$  es un proceso de Poisson compuesto  $\forall n \in \mathbb{N}$  se deduce del lema 3.2.5 que vale la convergencia. Por ende, lo que resta hacer es probar que  $X^n$  es un proceso de Poisson Compuesto.

En primer lugar, que sea proceso de Lévy es consecuencia directa del teorema 3.2.1.

En segundo lugar,  $X^n$  es casi seguramente una función constante a trozos. Es un resultado conocido que el único proceso de Lévy constante a trozos es el Proceso de Poisson Compuesto. Se procede a probarlo.

Se utiliza la notación del primero capítulo, o sea el proceso está definido por el trío  $(\sigma, \Pi, a)$  (siendo  $\sigma$  la varianza Browniana,  $\Pi$  la medida de Lévy y  $a$  el drift lineal).

Como el proceso puede verse como suma de tres procesos independientes, si uno no es constante a trozos, el proceso no lo será. De esto, se deduce que  $\sigma = 0$  y  $a = 0$ .

Luego, usando el lema 2.1.3 solo resta probar que  $\Pi(\mathbb{R}) < \infty$ . Se supone por absurdo que no es el caso, como

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (1 \wedge x^2) \Pi(dx) < \infty,$$

entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Pi(\{1 \geq |x| \geq \epsilon\} - \{0\}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{(1 \geq |x| \geq \epsilon) - \{0\}} 1 \Pi(dx) = \infty.$$

Luego, recordando que  $N(t, (1 \geq |x| \geq \epsilon) - \{0\}) = \#\{X(s) - X(s^-) \in \{x; 1 \geq |x| \geq \epsilon\} - \{0\}\}$  tiene distribución Poisson  $t\Pi(\mathbb{R} - (-\epsilon, \epsilon))$  deduce que:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}\left(\sup_{0 \leq s \leq t} |X(s) - X(s^-)| > \epsilon\right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \exp(-t\Pi(\mathbb{R} - (-\epsilon, \epsilon))) = 0.$$

Y por ende casi seguramente cualquier trayectoria tiene una variación no nula en cualquier intervalo alrededor de 0. Esto es absurdo porque es constante a trozos.

□

Finalmente se aproxima para el caso general.

**Lema 3.2.7.** *Sea  $X$  un proceso no nulo y  $Z$  es un proceso de Poisson con parámetro 1 independiente a  $X$ . Entonces existe una sucesión de procesos de Poisson compuestos  $X^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , expresables por  $X$  y  $Z$  tal que:*

$$\mathbb{P}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq u} |X(t) - X^n(t)| = 0, \forall u \geq 0\right) = 1.$$

Demostración:

Por el teorema de Lévy-Itô, usando la notación del teorema 2.2.5, tomando la sucesión  $\{\epsilon^n\}$  de la misma forma, el proceso  $X$  se puede escribir como:

$$X(t) = Y_c(t) + bt + \int_{[0,t]} \int_{|x| \geq 1} xN(ds \times dx) +$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{[0,t]} \int_{\epsilon^n < |x| < 1} xN(ds \times dx) - t \int_{\epsilon^n < |x| < 1} x\Pi(dx) \right)$$

Por comodidad se define  $X^\sharp := Y_c(t) + bt$ , donde la convergencia es uniforme en intervalos acotados casi seguramente. Sea  $\{k_m\}$  una sucesión positiva creciente que tiende a  $\infty$ , la cual se definirá a posteriori. Se define:

$$X^m(t) = X^\sharp(k_m^{-2}Z_{k_m^2}t) - k_m^{-2}Z_{k_m^2}t \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x\Pi(dx) +$$

$$\int_{[0,t]} \int_{\frac{1}{m} < |x| < \infty} xN(ds \times dx)$$

Por el lema 3.2.6 se deduce que el sumando es un proceso de Poisson y como cada sumando de la descomposición de Lévy Ito es independiente se deduce que el sumando del primer renglón es independiente al del segundo. Por último, usando el lema 2.1.3 se deduce que la integral del segundo renglón es también un proceso de Poisson compuesto.

De esta manera  $\{X^m\}$  es una sucesión de procesos de Poisson compuestos y se tiene que:

$$X(t) - X^m(t) = W_1 + W_2 + W_3,$$

siendo

$$W_1(t) = X^\sharp(t) - X^\sharp(k_m^{-2}Z_{k_m^2}t), \quad W_2(t) = -(t - k_m^{-2}Z_{k_m^2}t) \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x\Pi(dx),$$

$$W_3(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{[0,t]} \int_{\epsilon^n < |x| \leq \frac{1}{m}} xN(ds \times dx) - t \int_{\epsilon^n < |x| \leq \frac{1}{m}} x\Pi(dx) \right).$$

En primer lugar, por el lema 3.2.6  $W_1$  tiende uniformemente a cero cuando  $m \rightarrow \infty$  en intervalos acotados casi seguramente.

En segundo lugar,  $W_3$  tiende a cero cuando  $m \rightarrow \infty$  ya que la construcción dada en el teorema 2.2.5 la integral converge de esta forma cuando  $n \rightarrow \infty$ .

En tercer lugar, usando el lema 3.2.2:

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq u} |W_2| > \delta_m) \leq 3^3 \delta_m^{-2} \left( \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x\Pi(dx) \right)^2 k_m^{-2} u.$$

Ya que  $(t - k_m^{-2}Z_{k_m^2}t)$  es la diferencia de un Proceso de Poisson y su esperanza (se usa que la distribución es infinitamente divisible para aplicar el lema ).

Tomando  $k_m$  de manera que

$$k_m^{-2} \left( \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x\Pi(dx) \right)^2 \leq n^{-2} \text{ y } \delta_m = m^{-\frac{1}{4}}. \quad (3.45)$$

Con el lema de Borel-Cantelli se obtiene que  $\sup_{t \leq u} |W_2| \rightarrow 0$  casi seguramente.

Finalmente, como cada  $W_i$  tiende a cero:  $|X(t) - X^n(t)|$  tiende uniformemente a cero en intervalos acotados casi seguramente.

□

**Teorema 3.2.5. Teorema de Wiener-Hopf:** Sea  $X = \{X(t) : t \geq 0\}$  un proceso de Lévy. Entonces,  $\forall z \in \mathbb{R}, w \in \mathbb{R}$  y  $p \geq 0$ :

$$i) \quad \mathbb{E}(e^{iX_{e(r)\theta}}) = r(r + \Psi(z))^{-1} = \rho_r^+(z)\rho_r^-(z), \quad z \in \mathbb{R}. \quad (3.46)$$

$$ii) \quad \rho_r^+(z) = \mathbb{E}(e^{izM_r}), \quad (3.47)$$

$$\rho_r^-(z) = \mathbb{E}(e^{izI_r}). \quad (3.48)$$

Demostración:

El primer ítem fue probado en el teorema 3.2.3.

En el caso que  $X$  sea nulo, el teorema es trivial. En el caso en que  $X$  sea un proceso de Poisson se probó el resultado en el teorema 3.2.4.

Para el caso restante, se define  $Z$  un proceso de Poisson con parámetro 1, independiente a  $X$ . Luego se define la sucesión de procesos  $X^n$  como en el lema 3.2.7. Se denota  $M^n$  el supremo de  $X^n$ , a sus factores de Wiener Hopf como  $\rho_r^{n+}$  y  $\rho_r^{n-}$  y la distribución de  $X^n(1)$  como  $\mu_n$ .

Como

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \leq u} |X(t) - X^n(t)| = 0, \forall u \geq 0) = 1,$$

se deduce que:

$$\mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} M^n(t) = M(t), \forall t \geq 0) = 1.$$

Ya que si el complemento tuviera probabilidad positiva, existiría un conjunto con medida positiva donde los supremos hasta algún  $t$  fijo difieren en cierto valor positivo, lo cual contradice la primera igualdad.

Entonces, para  $z, w \in \mathbb{R}$  usando convergencia dominada, continuidad de la exponencial y la ecuación 3.35 del teorema 3.2.4:

$$\begin{aligned} \rho_r^{n+}(z)\rho_r^{n-}(w) &= \\ r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM^n(t) + iw(X^n(t) - M^n(t))}) dt &= \\ \rightarrow r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM(t) + iw(X(t) - M(t))}) dt &= \end{aligned}$$

Por otro lado, usando los teoremas 3.2.4 y 3.2.3

$$\rho_r^{n+}(z) = r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM^n(t)}) dt = r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{iz(X^n(t) - I^n(t))}) =$$

$$= \exp\left(\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \int_{(0,\infty)} (e^{izx} - 1) \mu_n^t(dx) dt\right)$$

Y además

$$\begin{aligned} \rho_r^{n-}(w) &= r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{iwI^n(t)}) dt = r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{iw(X^n(t) - M^n(t))}) \\ &= \exp\left(\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \int_{(-\infty,0)} (e^{izx} - 1) \mu_n^t(dx) dt\right). \end{aligned}$$

Luego, si es válido que :

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \int_{(0,\infty)} (e^{izx} - 1) \mu_n^t(dx) dt\right) \\ \rightarrow \exp\left(\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \int_{(0,\infty)} (e^{izx} - 1) \mu^t(dx) dt\right), \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \exp\left(\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \int_{(-\infty,0)} (e^{iw x} - 1) \mu_n^t(dx) dt\right) \\ \rightarrow \exp\left(\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \int_{(-\infty,0)} (e^{iw x} - 1) \mu^t(dx) dt\right), \end{aligned} \quad (3.50)$$

se deduce que:

$$\rho_r^+(z) \rho_r^-(w) = r \int_0^\infty e^{-rt} \mathbb{E}(e^{izM(t) + iw(X(t) - M(t))}) dt.$$

Y tomando  $z = 0$  o  $w = 0$  se concluye el teorema.

Por ende, basta probar (3.49) y (3.50). Solo se probará (3.49) .

Es equivalente a probar (tomando logaritmo de ambos lados y restándolos) que:

$$\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \mathbb{E}((e^{izX^n(t)} - 1) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X^n(t)) - (e^{izX(t)} - 1) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(X(t))) dt \rightarrow 0.$$

Como

$$|(e^{izx} - 1) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) - (e^{izy} - 1) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(y)| \leq |z| |x - y|,$$

basta probar que:

$$\int_0^\infty t^{-1} e^{-rt} \mathbb{E}|X(t) - X^n(t)| dt \rightarrow 0. \quad (3.51)$$

Para ello, se estudia las cotas de  $\mathbb{E}|X(t) - X^n(t)|$ .

Usando la misma notación del lema 3.2.7:

$$X(t) - X^n(t) = W_1 + W_2 + W_3,$$

siendo

$$W_1(t) = X^\sharp(t) - X^\sharp(k_m^{-2}Z_{k_m^2 t}), \quad W_2(t) = -(t - k_m^{-2}Z_{k_m^2 t}) \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x \Pi(dx)$$

$$W_3(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_{[0,t]} \int_{\epsilon^n < |x| \leq \frac{1}{m}} x N(ds \times dx) - t \int_{\epsilon^n < |x| \leq \frac{1}{m}} x \Pi(dx) \right)$$

En primer lugar (recordando que el proceso  $X^\sharp(t) = \sigma B(t) + bt$ , siendo  $B$  un movimiento Browniano):

$$\mathbb{E}(|t - k_n^{-2}Z(k_n^2 t)|) \leq (\text{Var}(k_n^{-2}Z(k_n^2 t)))^{\frac{1}{2}} = (k_n^{-2}t)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.52)$$

Donde se usó la desigualdad de Jensen. Por otro lado, usando también que  $\{Z(t)\}$  y  $\{B(t)\}$  son independientes:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|B(t) - B(k_n^{-2}Z(k_n^2 t))|) &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}(|B(t) - B(k_n^{-2}Z(k_n^2 t))|) \mathbb{P}(Z(k_n^2 t) = j) \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} |t - k_n^{-2}j|^{\frac{1}{2}} \mathbb{P}(Z(k_n^2 t) = j) = \mathbb{E}(|t - k_n^{-2}Z(k_n^2 t)|^{\frac{1}{2}}) \\ &\leq (\text{Var}(k_n^{-2}Z(k_n^2 t)))^{\frac{1}{4}} = (k_n^{-2}t)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Estas cotas ((3.52) y (3.53)) sirven para darle una cota a  $W_1$ :

$$\mathbb{E}|W_1| = \mathbb{E}|X^\sharp(t) - X^\sharp(k_m^{-2}Z_{k_m^2 t})|$$

$$\leq \mathbb{E}|\sigma B(t) - \sigma B(k_n^{-2}Z(k_n^2 t))| + |b| \mathbb{E}|t - k_n^{-2}Z(k_n^2 t)| \leq \sigma(k_n^{-2}t)^{\frac{1}{4}} + |b|(k_n^{-2}t)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.54)$$

Además, las cotas obtenidas (3.52), (3.53) y (3.54) también sirven para darle una cota a  $\mathbb{E}|W_2|$ :

$$\mathbb{E}|W_2| = \mathbb{E}|-(t - k_m^{-2}Z_{k_m^2 t}) \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x \Pi(dx)| \leq (k_n^{-2}t)^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x \Pi(dx) \right|. \quad (3.55)$$

En tercer lugar, se acota  $\mathbb{E}|W_3|$ :

$$\mathbb{E}|W_3| \leq (\text{Var}(W_3))^{\frac{1}{2}} = (t \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} x^2 \Pi(dx))^{\frac{1}{2}}.$$

Juntando las tres desigualdades (3.53), (3.54) y (3.55) se deduce:

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}|X(t) - X^n(t)| \\ &\leq \sigma(k_n^{-2}t)^{\frac{1}{4}} + |b|(k_n^{-2}t)^{\frac{1}{2}} + (k_n^{-2}t)^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\frac{1}{m} < |x| \leq 1} x \Pi(dx) \right| + (t \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} x^2 \Pi(dx))^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Como se eligió  $k_n$  en 3.45 que satisfaga  $k_n \rightarrow \infty$  y  $k_n^{-1} \left| \int_{\frac{1}{n} < |x| \leq 1} x \Pi(dx) \right| \rightarrow 0$  se deduce 3.51. Resta probar 3.50, la prueba es análoga cambiando de lugar a  $(0, \infty)$  con  $(-\infty, 0)$ .

□

**Corolario 3.2.2.** *Bajo las notaciones del capítulo, sea  $\overline{M}_{e(r)}$  una copia independiente de  $M_{e(r)}$ , se deduce que  $X_{e(r)} \sim I_{e(r)} + \overline{M}_{e(r)}$ .*

**Corolario 3.2.3.** *Utilizando el teorema (3.2.3) se deduce que la factorización de Wiener-Hopf es única en el sentido que si  $X$  es un proceso de Lévy,  $\rho_r^-$  y  $\rho_r^+$  son funciones características de variables con distribución infinitamente divisible las cuales se corresponden a un proceso de Lévy no positivo y no negativo respectivamente y se cumple*

$$\mathbb{E}(e^{iX_{e(r)}\theta}) = r(r + \Psi(z))^{-1} = \rho_r^+(z)\rho_r^-(z), \quad z \in \mathbb{R}$$

Entonces  $\rho_r^-$  y  $\rho_r^+$  son los factores de Wiener-Hopf.

### 3.3. Ejemplos

El teorema de Wiener-Hopf dice que la información del proceso detenida en un tiempo exponencial independiente es la misma que la información del supremo y el ínfimo detenidos en tiempos exponenciales independientes del mismo parámetro.

Una idea útil para encontrar ejemplos es factorizar  $r + \Psi(\theta)$  y notar que  $z = i\theta$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$  raíz de la expresión

$$r + \Psi(z)$$

es positivo si y solamente si es polo del factor de Hopf positivo (en otro caso será del negativo).

#### Ejemplo 3.3.1. *Movimiento Browniano:*

En este caso  $\Psi(\theta) = \frac{\theta^2}{2}$ . Por ende:

$$\mathbb{E}(e^{iX_{e(r)}u}) = \frac{r}{r + \Psi(u)} = \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r} - iu} \frac{\sqrt{2r}}{\sqrt{2r} + iu}.$$

El primer factor es la función característica de una variable con distribución exponencial y el segundo es la función característica de una variable con distribución exponencial negativa.

#### Ejemplo 3.3.2. *Poisson Compuesto con saltos exponenciales para ambos lados:*

Se considera el proceso de Poisson compuesto inicializado en  $x$ :

$$X_t = x + \sum_{i=0}^{N_{\lambda(t)}} Y_i^\alpha - \sum_{i=0}^{N_{\gamma(t)}} Z_i^\beta,$$

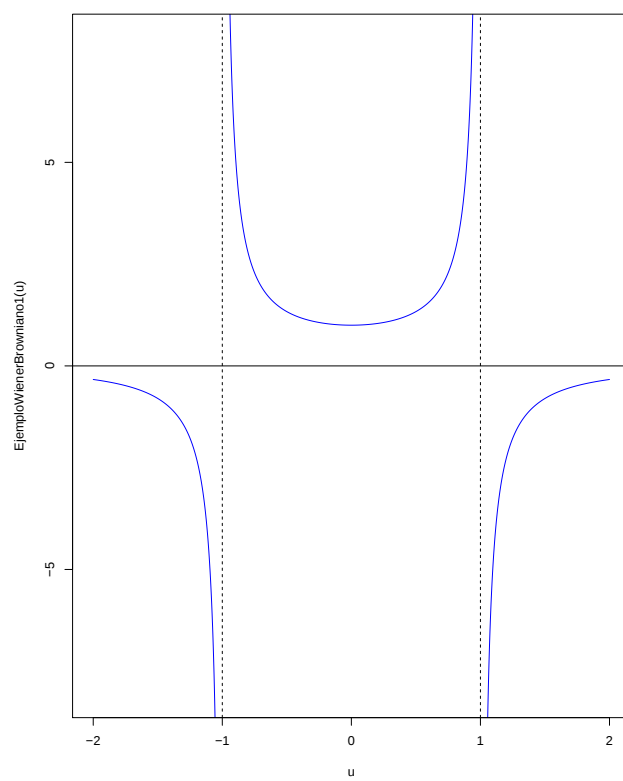


Figura 3.1: Gráfica de  $x \rightarrow \mathbb{E}(e^{xX_{e(r)}})$  con  $r = \frac{1}{2}$ .

siendo  $N_\lambda \simeq \text{Pois}(\lambda)$ ,  $N_\gamma \simeq \text{Pois}(\gamma)$ ,  $Y_i^\alpha \simeq \exp(\alpha)$  y  $Z_i^\beta \simeq \exp(\beta)$  conjunto de variables independientes. En primer lugar, usando 1.2.2 se deduce que

$$\Psi(\theta) = \lambda \int_{(0,\infty)} (1 - e^{i\theta x}) p_Y(x)(dx) + \gamma \int_{(-\infty,0)} (1 - e^{i\theta x}) p_Z(x)(dx).$$

Donde  $p_Y$  y  $p_Z$  son las densidades de  $Y_1^\alpha$  y  $Z_1^\beta$  respectivamente. Usando que son exponenciales (una positiva y otra negativa) se obtiene:

$$\mathbb{E}(e^{\theta i X_{e(r)}}) = \frac{r}{r - \lambda \frac{i\theta}{\alpha - i\theta} + \gamma \frac{i\theta}{\beta + i\theta}}.$$

Sustituyendo  $i\theta$  por  $z$  por comodidad y operando, la expresión queda de la forma:

$$\frac{r}{-r - \lambda - \gamma} (\alpha - z)(\beta + z) \left( z^2 + z \frac{-r\beta + r\alpha - \lambda\beta + \gamma\alpha}{-r - \alpha - \gamma} + \frac{r\alpha\beta}{-r - \lambda - \gamma} \right)^{-1}.$$

Se obtienen dos raíces  $r_1 > 0, r_2 > 0$  que además cumplen que:

$$r_1 < \alpha \text{ y } r_2 < \beta. \quad (3.56)$$

Las cuales tienen la forma:

$$r_1 = \frac{r\alpha + \gamma\alpha}{r + \lambda + \gamma}, \quad -r_2 = \frac{-r\beta - \lambda\beta}{r + \lambda + \gamma}. \quad (3.57)$$

Luego la expresión queda de la forma:

$$\mathbb{E}(e^{\theta i X_{e(r)}}) = \left( \frac{r}{-r - \lambda - \gamma} \right) \left( \frac{\alpha - z}{z - z_1} \right) \left( \frac{\beta + z}{z - r_2} \right).$$

El objetivo ahora es mostrar que los factores de Wiener-Hopf en este caso son una variable exponencial sumada a un átomo en cero (el factor negativo es una exponencial negativa). Para ello se consideran  $\pi$  y  $\bar{\pi}$  (serán los átomos) definidos como:

$$\pi = 1 - \frac{r_1}{\alpha}, \quad \bar{\pi} = 1 - \frac{r_2}{\beta}, \quad (3.58)$$

sustituyendo se obtiene

$$\mathbb{E}(e^{z X_{e(r)}}) = \left( \bar{\pi} \frac{r_2}{r_2 + z} + (1 - \bar{\pi}) \right) \times \left( \pi \frac{r_1}{r_1 - z} + (1 - \pi) \right). \quad (3.59)$$

Para probar que estos son los factores de Hopf se verá que el primer factor es la función característica de una exponencial negativa con átomo y el segundo es la función característica de una exponencial con átomo (teniendo en cuenta el cambio de variable). Por comodidad solo se probará la afirmación del segundo factor.

Se considera una variable  $W_0$  tal que  $W \sim \exp(r_1)$  y una variable bernoulli

independiente a  $W_0$  llamada  $W_1$  que toma valores 0 y 1, con probabilidad de fracaso  $1 - \pi$ . Se define  $W = W_1 W_0$ . Luego

$$\mathbb{E}(e^{i\theta W}) = 1 - \pi + \pi \frac{r_1}{r_1 - i\theta}.$$

De esta manera se encontraron explícitamente los factores de Wiener-Hopf. No es casualidad que en ambos ejemplos no haya drift ni ruido Browniano, se puede probar que esto siempre sucede en la descomposición de Wiener-Hopf. Restaría ver que el proceso corresponde a un proceso de Lévy, esto es una cuenta sencilla que consiste en comparar el exponente característico con el de un proceso gamma y utilizando la igualdad de Frullani:

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{\alpha}} = \exp\left(-\int_0^\infty (1 - e^{zx})x^{-1}e^{-\alpha x}dx\right),$$

para  $z \in \mathbb{C}$  con parte real no positiva y  $\alpha > 0$ .

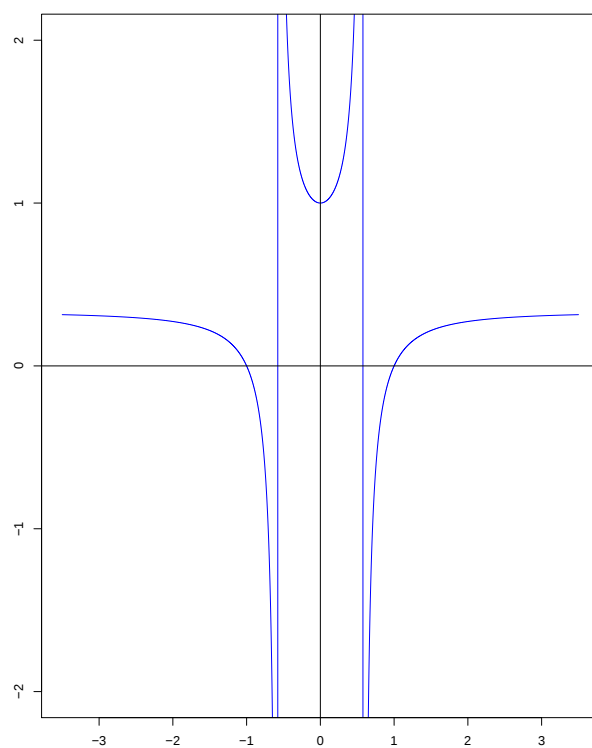


Figura 3.2: Gráfica de  $x \rightarrow \mathbb{E}(e^{xX_{e(r)}})$  con  $r = \frac{1}{2}$ ,  $(\alpha, \lambda, \beta, \gamma, r) = (1, 1, 1, 1, 1)$ .

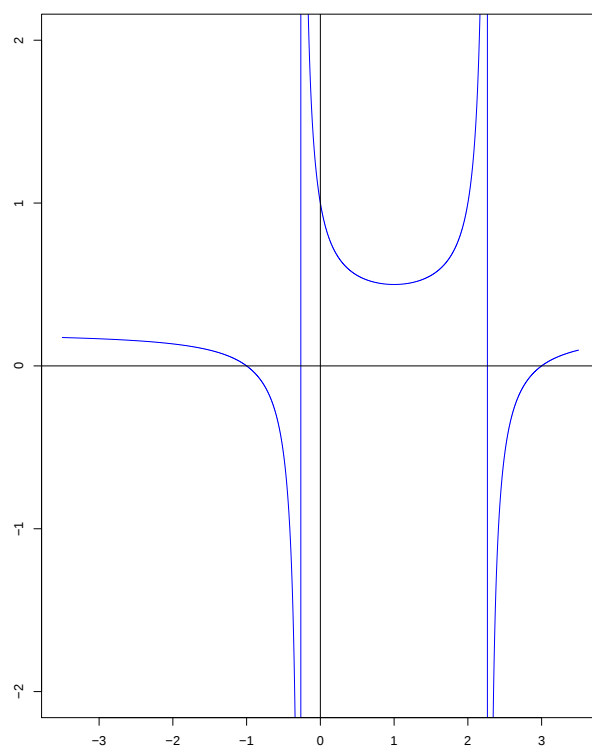


Figura 3.3: Gráfica de  $x \rightarrow \mathbb{E}(e^{uiX_{e(r)}})$  con  $r = \frac{1}{2}$ ,  $(\alpha, \lambda, \beta, \gamma, r) = (3, 1, 1, 3, 1)$ .

## Capítulo 4

# El problema de parada óptima

Este capítulo introduce el problema de parada óptima mostrando ejemplos y métodos conocidos para su resolución.

### 4.1. Introducción

A continuación se da una breve introducción basada en [Peskir and Shiryaev(2006)] y [Borodin(2017)] (de este último solo se extrajeron algunas propiedades del movimiento Browniano).

**Definición 4.1.1.** *Un problema de parada óptima con descuento  $r > 0$  en un espacio de probabilidad filtrado  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$  con el proceso de Lévy  $\{X_t\}$  y función de ganancia  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  medible, consiste en encontrar una función  $V$  llamada función de valor y  $\tau^*$  llamado tiempo óptimo, tal que:*

$$V(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_x(e^{-r\tau} g(X_\tau)) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau^*} g(X_{\tau^*})),$$

donde  $\mathcal{M}$  es el conjunto de tiempos de parada.

Un ejemplo sencillo sería poner  $g = \mathbf{1}_{[0, \infty)}$  y  $X$  un proceso de Lévy cualquiera. En ese caso es obvio que el tiempo de parada óptima es  $\tau = \inf\{t : X_t \geq 0\}$ . Sin embargo, la función  $V$  dependera del proceso.

El objetivo ahora es estudiar algunas de las propiedades que debe cumplir la función de valor, algunas necesarias y suficientes para que una función sea la función de valor.

**Ejemplo 4.1.1.** *Sean  $X_t = t$ ,  $r > 0$ ,  $g(x) = \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$ . En este caso  $\tau_* = \inf\{t : X_t \geq 0\}$  y por ende:*

$$V(x) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}) = e^{rx} \mathbf{1}_{(-\infty, 0)}(x) + \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$$

*Es importante notar que  $V$  no es derivable en 0, este punto se retomará más adelante.*

La propiedad de Markov fuerte es una particularidad esencial de los problemas de parada óptima con procesos de Lévy y será útil para resolver el problema propuesto en el último capítulo de la tesis.

#### 4.1.1. Propiedades de la función de valor

El objetivo ahora es mostrar que la función de valor cuando es alcanzada por una estrategia tendrá la propiedad que no es conveniente (o al menos es indiferente) seguir esperando (lo cual es razonable ya que sino no sería óptima). Esta propiedad se llama excesividad. Se procede a formalizar estas ideas.

**Definición 4.1.2.** *Dado  $r > 0$ , una función  $f$  continua por derecha y con límite a izquierda es  $r$ -excesiva para el proceso de Lévy  $X$  si*

$$\mathbb{E}_x e^{-rt} f(X_t) \leq f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \geq 0.$$

En realidad la definición es para las funciones semicontinuas inferiores pero esto no interesa a esta tesis. De ahora en adelante las funciones de ganancia  $g$  serán todas continuas por derecha y con límite a izquierda a menos que se diga lo contrario.

**Teorema 4.1.1.** *Si existe un tiempo de parada óptima para un problema con descuento  $r > 0$ . Esto es:*

$$V(x) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*} g(X_{\tau_*})).$$

- i) Entonces  $V$  es la mínima función  $r$ -excesiva mayor a  $g$ .
- ii)  $V(X_{\tau_*}) = g(X_{\tau_*})$   $\mathbb{P}_x$ -c.s.
- iii) Sea  $\tau_D = \inf(t : g(X_t) \geq V(X_t))$ , entonces  $\tau_D \leq \tau_*$   $\mathbb{P}_x$ -c.s y es un tiempo de parada óptimo.

Demostración:

Probar que es  $r$ -excesiva es simplemente usar la propiedad de Markov fuerte (teniendo en cuenta que un tiempo constante es un tiempo de parada):

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(e^{-rt} V(X_t)) &= \mathbb{E}_x(e^{-rt} \mathbb{E}_{X_t}(e^{-r\tau_*} g(X_{\tau_*}))) \\ &= \mathbb{E}_x(e^{-rt} \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*} g(X_{\tau_*+t}) \mid \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}_x(e^{-r(t+\tau_*)} g(X_{\tau_*+t})) \leq V(x). \end{aligned} \quad (4.1)$$

En segundo lugar, sea  $F$  otra función  $r$ -excesiva mayor a  $g$ . Entonces:

$$\mathbb{E}_x(e^{-r\tau}g(X_\tau)) \leq \mathbb{E}_x(e^{-r\tau}F(X_\tau)) \leq F(x). \quad (4.2)$$

Como la desigualdad vale para cualquier tiempo se deduce que mayor a  $V$ . Para probar que  $V(X_{\tau_*}) = g(X_{\tau_*})$   $\mathbb{P}_x$ -c.s se supondrá por absurdo que existe un  $x$  tal que  $\mathbb{P}_x(V(X_{\tau_*}) > g(X_{\tau_*})) > 0$ . Entonces

$$V(x) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}g(X_{\tau_*})) < \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}V(X_{\tau_*})) < V(x)$$

Lo cual es absurdo. Para probar iii) primero se observa que la función  $f(x) = \mathbb{E}_x(g(X_{\tau_D}e^{-r\tau_D}))$  es  $r$ -excesiva. En segundo lugar, para probar que es la menor que  $r$ -exesiva mayorante, se supone por absurdo que existe  $\tau^* < \tau_D$  en un conjunto de medida positiva:

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}g(X_{\tau_*})) \leq \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}g(X_{\tau_*})\mathbf{1}_{\tau^* < \tau_D}) + \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}g(X_{\tau_*})\mathbf{1}_{\tau^* \geq \tau_D}) \\ &< \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}V(X_{\tau_*})\mathbf{1}_{\tau^* < \tau_D}) + \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_*}V(X_{\tau_*})\mathbf{1}_{\tau^* \geq \tau_D}) = V(x). \end{aligned}$$

□

Del teorema se deduce la siguiente definición

**Definición 4.1.3.** Al conjunto  $D = \{x : V(x) = g(x)\}$  se le llama *región de parada*.

En el teorema anterior se vió que la primer llegada a la región de parada es un tiempo óptimo, esto muestra que si el proceso comienza en un  $x$  en esa región, una estrategia óptima es retirarse al inicio. Por ende es útil saber la forma del conjunto de parada ya que en este  $V = g$ .

#### 4.1.2. Existencia de Solución

En esta subsección se dan condiciones suficientes para la existencia de una solución. Es trivial encontrar un contraejemplo ( $g(x) = e^{2rx}$ ,  $X_t = t$ ) donde no haya solución.

**Observación 4.1.1.** Si  $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-rt}g(X_t)) = 0$  entonces  $V \leq \infty$

Por ende, de ahora en adelante se pide que  $g$  cumpla esta condición.

**Definición 4.1.4.** Se define el operador  $Q_n$  como:

$$Q_n(g)(x) = \max\{g(x), e^{-2^{-n}}\mathbb{E}_x(g(X_{2^{-n}}))\}$$

**Teorema 4.1.2.** Sea  $X$  un proceso de Lévy,  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  continua por derecha y con límite a izquierda, entonces la función

$$v(x) = \lim_n \lim_N Q_n^N g(x), \quad (4.3)$$

es la mínima función excesiva y mayorante a  $g$  y por el teorema 4.1.1 es la función valor. Siendo  $Q_n^N$  componer  $N$  veces  $Q_n$ .

Demostración:

Este resultado se prueba aproximando en el caso discreto (el cual no se trabajará en la tesis). En dicho caso, donde se denomina  $s$  a la función valor es un resultado conocido que:

$$s(x) = \lim_N Q^N(g(x)).$$

Y además  $s$  es semicontinua inferior. Se considera  $v_n(x) = \lim_N Q_n^N(g)(x)$ , entonces

$$v_n(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}_n} \mathbb{E}_x g(X_\tau)$$

Donde  $\mathcal{M}_n \subseteq \mathcal{M}$  es la clase de tiempos de parada con valores  $k2^{-n}$  tal que

$$\{\tau = k2^{-n}\} \in \sigma\{\omega : X_0, X_{2^{-n}}, \dots, X_{k2^{-n}}\}.$$

Como  $v_{n+1} \geq v_n$  se deduce que  $\lim_n v_n(x)$  existe y se denota  $V(x)$ . Obviamente  $V(x) \geq g(x)$ . Además, al ser un límite creciente de funciones semicontinuas inferiores, es semicontinua inferior. Por otro lado:

$$v_n(x) \geq e^{-rm2^{-n}} \mathbb{E}_x(v_n(X_{m2^{-n}})) \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Tomando  $m = l2^{n-k}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  se deduce que

$$V(x) \geq e^{-rl2^{-k}} \mathbb{E}_x(V(X_{l2^{-k}})).$$

Dado  $t > 0$ , se considera una sucesión binaria racional  $\{t_i\}$  tal que  $t_i \searrow t$ . Luego vale

$$v(x) \geq \liminf_i e^{-rt_i} \mathbb{E}_x(V(X_{e^{-rt_i}})) \geq e^{-rt_i} \mathbb{E}_x(\liminf_i V(X_{e^{-rt_i}})) \geq e^{-rt} \mathbb{E}_x(V(X_t)).$$

Solo resta probar que es la mínima función  $r$ -excesiva. Para ello sea  $u(x)$  otra función  $r$ -excesiva mayor a  $g$ , luego

$$u(x) \geq Q_n^N(u)(x) \geq Q_n^N(g)(x),$$

tomando límite se deduce el resultado.

□

Este teorema no solo prueba la existencia de la función valor, sino que también muestra la relación del caso discreto con el continuo. La existencia de un tiempo óptimo viene a estar dada por la finitud de  $\tau_D$ .

**Ejemplo 4.1.2.** Sean  $r > 0$ ,  $X_t = B_t$  un movimiento Browniano estándar y  $g(x) = x^+$ . Se considera el problema de parada óptima definido por estos tres términos.

En primer lugar se observa que para  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$

$$V((1 - \alpha)x + y\alpha) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_{(1 - \alpha)x + y\alpha}(e^{-r\tau} X_\tau)^+.$$

Luego para  $\tau$  fijo, se toma el tiempo de parada  $\bar{\tau}$  como el tiempo  $\tau$  teniendo en cuenta que el proceso comienza en  $((1 - \alpha)x + y\alpha)$ . De esta manera:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{(1 - \alpha)x + y\alpha}(e^{-r\tau} X_\tau^+) &= \mathbb{E}(e^{-r\bar{\tau}})((X_{\bar{\tau}}) + (1 - \alpha)x + y\alpha))^+ \\ &\leq \mathbb{E}(e^{-r\bar{\tau}})((1 - \alpha)X_{\bar{\tau}}) + (1 - \alpha)x + \alpha X_{\bar{\tau}} + y\alpha))^+ \\ &\leq \mathbb{E}(e^{-r\bar{\tau}})((1 - \alpha)X_{\bar{\tau}}) + (1 - \alpha)x)^+ + \mathbb{E}(e^{-r\bar{\tau}})(\alpha X_{\bar{\tau}} + y\alpha))^+ \leq \alpha V(y) + (1 - \alpha)V(x). \end{aligned}$$

Por ende, en este caso  $V$  es convexa y continua. Usando este hecho que  $\tau_D$  es finito con probabilidad positiva y que la velocidad de  $g$  es constante se deduce que existe un  $x^* > 0$  tal que la función  $V(x) = g(x)$  si  $x > x^*$ . A este fenómeno se le llama pegado continuo. Además, como  $V$  es finito se deduce que existe un  $x^* > 0$  tal que la función  $V(x) = g(x)$  si  $x > x^*$ .  
Luego al tomar  $x < x^*$

$$V(x) = \mathbb{E}_x(B_{\tau_{[x^*, \infty)}}^+ e^{-r\tau_{[x^*, \infty)}}) =$$

$$\mathbb{E}((B_{\tau_{[x^* - x, \infty)}} + x)^+ e^{-r\tau_{[x^* - x, \infty)}}) = x^* \mathbb{E}(e^{-r\tau_{[x^* - x, \infty)}}) = x^* e^{-\sqrt{2r}(x^* - x)}. \quad (4.4)$$

Hay que mostrar que  $V \geq g$

$$V(x) \geq g(x) \Leftrightarrow x^* e^{-\sqrt{2r}(x^* - x)} \geq x$$

$$\Leftrightarrow x^* e^{-\sqrt{2r}(x^*)} \geq x e^{-\sqrt{2r}x}$$

La función  $f(x) = x e^{-\sqrt{2r}x}$  es creciente en los números positivos si  $x = \frac{1}{\sqrt{2r}}$ . Entonces, necesariamente  $x^* = \frac{1}{\sqrt{2r}}$ . En conclusión como queda un único  $x^*$  debe ser el óptimo.

□

La convexidad, el pegado continuo y suave de la función  $V$  son propiedades útiles para encontrarla. Sin embargo, muchas veces es más sencillo usar estas propiedades para encontrar un candidato y usar algún tipo de lema de verificación como el que se verá a continuación.

**Lema 4.1.1.** *Se considera un problema de parada óptima con descuento  $r > 0$ , proceso de Lévy  $X$  y función de ganancia  $g$  bajo las hipótesis habituales. Sean  $\tau^* \in \mathcal{M}$  y  $v^* = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau^*} g(X_{\tau^*}))$ . Entonces el par  $(v^*, \tau^*)$  es solución si*

$$i) \ v^*(x) \geq g(x) \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

ii) El proceso  $\{e^{-rt}v^*(X_t) : t \geq 0\}$  es una supermartingala continua por derecha.

Demostración:

Por definición de  $v^*$  se tiene

$$\sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_x(e^{-r\tau}g(X_\tau)) \geq v^*(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, la propiedad ii) y el teorema de muestreo opcional de Doob (se usa la continuidad por derecha de  $X$ ) se deduce que

$$v^*(x) \geq \mathbb{E}_x(e^{-r(t \wedge \sigma)}v^*(X_{t \wedge \sigma})),$$

luego como  $g$  es no negativa, usando el lema de Fatou y como el limite  $\lim_n e^{-rt}g(X_t) = 0$  c.s vale que

$$\begin{aligned} v^*(x) &\geq \liminf_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}_x(e^{-r(t \wedge \sigma)}g(X_{t \wedge \sigma})) \\ &\geq \mathbb{E}_x(\liminf_{t \rightarrow \infty} e^{-r(t \wedge \sigma)}g(X_{t \wedge \sigma})) = \mathbb{E}_x(e^{-r\sigma}g(X_\sigma)). \end{aligned}$$

Como  $\sigma$  es arbitrario se concluye la igualdad

$$v^*(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_x(e^{-r\tau}g(X_\tau)) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Definición 4.1.5.** Para finalizar, se formalizan las ideas de pegado continuo y suave: sea  $V$  la función de valor de un problema de parada óptima, se dice que hay pegado continuo (suave) en  $x \in \partial D$  (frontera de la región de parada) si  $V$  es continua (derivable) en  $x$ .

**Observación 4.1.2.** El ejemplo 4.1.2 queda trivial si se asume pegado suave en  $x^*$ .

## 4.2. Ejemplos

### 4.2.1. McKean

Este problema de parada óptima, extraído de [Kyprianou(2006)] (capítulo 9), está dado por

$$v(x) = \sup_{\tau \in \mathcal{M}} \mathbb{E}_x(e^{-q\tau}(K - e^{X_\tau})^+). \quad (4.5)$$

Donde  $q$  y  $K$  son positivos.

**Teorema 4.2.1.** La solución al problema de parada óptima está dada por

$$v(x) = \frac{\mathbb{E}((K\mathbb{E}(e^{X_{e(q)}} - e^{x+X_{e(q)}}))^+)}{\mathbb{E}(e^{X_{e(q)}})} \quad X_{e(q)} = \inf_{0 \leq t \leq e(q)} X_t.$$

Y el tiempo de parada óptimo

$$\tau^* = \inf\{t > 0 : X_t < x^*\},$$

donde

$$x^* = \log(K\mathbb{E}(e^{X_{e(q)}})).$$

Demostración:

En primer lugar se observa que la función de ganancia está en las hipótesis usuales pedidas en la tesis. Es razonable pensar que el tiempo de parada óptimo es cuando la función es menor o igual a un punto barrera ya que la función es decreciente. Por ende se hipotetiza que la función de ganancia es de la forma:

$$v_y(x) = \mathbb{E}_x(e^{-q\tau_y^-} (K - e^{X_{\tau_y^-}})^+), \quad (4.6)$$

siendo

$$\tau_y^- = \inf\{t : X_t < y\}$$

Se elegirá un  $y \leq \log K$  adecuado para que la función  $v_y$  esté en las hipótesis del lema 4.1.1.

Afirmación:

$$\mathbb{E}_x(\exp(-\alpha\tau_y^- + \beta X_{\tau_y^-}) \mathbf{1}_{\{\tau_y^- < \infty\}}) = e^{\beta x} \frac{\mathbb{E}(\exp(\beta \underline{X}_{e(\alpha)} \mathbf{1}_{-\underline{X}_{e(\alpha)} > x-y}))}{\mathbb{E}(\exp(\beta \underline{X}_{e(\alpha)}))}. \quad (4.7)$$

Demostración de la afirmación:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(\alpha)} > x-y\}} e^{\beta \underline{X}_{e(\alpha)}}) &= \mathbb{E}(e^{\beta \underline{X}_{e(\alpha)}} \mathbf{1}_{\tau_{y-x}^- < e(\alpha)}) \\ &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tau_{y-x}^- < e(\alpha)} e^{\beta X_{\tau_{y-x}^-}} \mathbb{E}(e^{\beta(\underline{X}_{e(\alpha)} - X_{\tau_{y-x}^-})} \mid \mathcal{F}_{\tau_{y-x}^-})). \end{aligned}$$

Usando la propiedad de Markov fuerte y tomando  $Y$  una copia de  $X$  independiente a  $\mathcal{F}_{\tau_{y-x}^-}$ :

$$\begin{aligned} &= \mathbb{E}(e^{\beta X_{\tau_{y-x}^-}} \mathbf{1}_{\tau_{y-x}^- < \infty} (\mathbf{1}_{\tau_{y-x}^- < e(\alpha)} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\tau_{y-x}^- < e(\alpha)} e^{\beta \underline{Y}_{e(\alpha) - \tau_{y-x}^-}}))) \\ &= \mathbb{E}((e^{\beta X_{\tau_{y-x}^-}} \mathbf{1}_{\tau_{y-x}^- < \infty} \int_{\tau_{y-x}^-}^{\infty} \alpha e^{\beta Y_{t - \tau_{y-x}^-}} e^{-t\alpha} dt)) \\ &= \mathbb{E}((e^{-\alpha\tau_{y-x}^-} e^{\beta X_{\tau_{y-x}^-}} \mathbf{1}_{\tau_{y-x}^- < \infty}) \mathbb{E}(e^{\beta \underline{X}_{e(\alpha)}})). \end{aligned}$$

Juntando los términos de los extremos queda probada la afirmación (teniendo en cuenta que en la afirmación el término a la izquierda usa la medida  $\mathbb{P}_x$ ).

Se procede a utilizar la afirmación en la definición de  $v_y$  separándola en dos sumandos, tomando  $\beta = 0$  en el primero y  $\beta = 1$  en el segundo. Se deduce que:

$$v_y(x) = \frac{\mathbb{E}((K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}} - e^{x+\underline{X}_{e(q)}})\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} > x-y\}}))}{\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}})}. \quad (4.8)$$

A continuación se prueba que dicha función cumple i) y ii) del lema 4.1.1. En primer lugar para probar que  $v_y(x) \geq (K - e^x)^+$  hay que probar que  $v_y(x) \geq 0$  y que  $v_y(x) \geq (K - e^x)$ . De la definición dada en (4.6) se ve claramente que  $v_y(x) \geq 0$ . Por otro lado observando que

$$v_y(x) = (K - e^x) + \frac{\mathbb{E}((e^{x+\underline{X}_{e(q)}} - K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}))\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} \leq x-y\}}))}{\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}})}, \quad (4.9)$$

es suficiente que el segundo término sea positivo y esto se cumple si

$$e^y \geq K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}). \quad (4.10)$$

Resta probar que es una supermartingala. Se observa que en el evento  $\{t < e(q)\}$ , tomando  $I$  una copia independiente de  $\underline{X}_{e(q)}$  y usando la propiedad de pérdida de memoria de la distribución exponencial se deduce que  $\mathbb{E}(\underline{X}_t \wedge (X_t + I) \mid \mathcal{F}_t)$  tiene la misma distribución que  $\mathbb{E}(\underline{X}_{e(q)} \mid \mathcal{F}_t)$ . Por otro lado de 4.8 se puede ver que

$$e^y \leq K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}). \quad (4.11)$$

Usando estos dos últimos resultados se deduce que para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} v_y(x) &\geq \frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{\{t < e(q)\}} \mathbb{E}((K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}} - e^{x+X_t+I})\mathbf{1}_{\{-(-X_t+I) > x-y\}}) \mid \mathcal{F}_t))}{\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}})} \\ &\geq \mathbb{E}(e^{-qt} v_y(x + X_t)) = \mathbb{E}_x(e^{-qt} v_y(X_t)). \end{aligned}$$

Los incrementos independientes estacionarios implican que para  $0 \leq s \leq t < \infty$

$$\mathbb{E}(e^{-rt} v_y(X_t) \mid \mathcal{F}_s) = e^{-rs} \mathbb{E}_{X_s}(e^{-r(t-s)} v_y(X_{t-s})) \leq e^{-rs} v_y(X_s). \quad (4.12)$$

Mostrando que  $\{e^{-qt} v_y(X_t) : t \geq 0\}$  es una  $\mathbb{P}_x$ -supermartingala. Continuidad por derecha de las trayectorias se sigue de las trayectorias de  $X$  y la continuidad por derecha de  $v_y$  que se ve en (4.9).

En conclusión para estar en las hipótesis del lema 4.1.1 se debe tomar  $y = \log(K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}))$  y la región de parada  $D = (\infty, y]$ . Por coherencia con notaciones posteriores a este  $y$  se lo llamará  $x^*$ .

□

Resta estudiar en que casos hay pegado suave y continuo.

**Teorema 4.2.2.** *La función  $v(\log(y))$  es convexa en  $y > 0$  y en particular hay pegado continuo de  $v$  en  $x^*$ . La derivada por derecha en  $x^*$  está dada por  $v'(x^*+) = -e^{x^*} + K\mathbb{P}(\underline{X}_{e(q)} = 0)$ . Por ende el problema de parada óptima tiene pegado suave si y solamente si  $\mathbb{P}(\inf\{t : X_t < 0\} = 0) = 1$ .*

Demostración:

En primer lugar se observa que para un tiempo de parada fijo  $\tau \in \mathcal{M}$ , la expresión  $\mathbb{E}(e^{-q\tau}(K - e^{x+X_\tau})^+)$  es convexa en  $e^x$  y también la función  $(K - ce^x)^+$  cuando  $c > 0$ . Al tomar supremos también quedan convexas y por ende  $v(\log(y))$  es convexa (y continua). Resta establecer condiciones necesarias y suficientes para pegado suave.

Como  $v(x) = K - e^x$  para todo  $x < x^*$ , y de esta manera  $v'(x^*-) = -e^{x^*}$ , se requiere mostrar que  $v'(x^*+) = -e^{x^*}$  para que haya pegado suave. Usando 4.8 y que  $e^{x^*} = K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}})$ , se tiene que:

$$\begin{aligned} v(x) &= -K\mathbb{E}((e^{x-x^*+\underline{X}_{e(q)}} - 1)\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} > x-x^*\}}) \\ &= -K(e^{x-x^*} - 1)\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} > x-x^*\}}) = -K\mathbb{E}((e^{\underline{X}_{e(q)}} - 1)\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} > x-x^*\}}). \end{aligned}$$

Usando primero la definición de  $x^*$  y luego la última igualdad se deduce:

$$\begin{aligned} \frac{v(x) - (K - e^{x^*})}{x - x^*} &= \frac{v(x) + K(\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}) - 1)}{x - x^*} \\ &= -K \frac{e^{x-x^*} - 1}{x - x^*} \mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} > x-x^*\}}) + K \frac{\mathbb{E}((e^{\underline{X}_{e(q)}} - 1)\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} \leq x-x^*\}})}{x - x^*}. \end{aligned}$$

Al primer término se lo llamará  $A_x$  y al segundo  $B_x$ . En primer lugar

$$\lim_{x \rightarrow x^*} A_x = -K\mathbb{E}(e^{\underline{X}_{e(q)}}\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} > 0\}}). \quad (4.13)$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} B_x &= K \frac{\mathbb{E}((e^{\underline{X}_{e(q)}} - 1)\mathbf{1}_{\{-\underline{X}_{e(q)} \leq x-x^*\}})}{x - x^*} = K \int_{0+}^{x-x^*} \frac{e^{-z} - 1}{x - x^*} \mathbb{P}(-\underline{X}_{e(q)} \in dz) \\ &= K \frac{e^{x^*-x} - 1}{x - x^*} \mathbb{P}(0 < -\underline{X}_{e(q)} \leq x-x^*) + \frac{K}{x - x^*} \int_0^{x-x^*} e^{-z} \mathbb{P}(0 < -\underline{X}_{e(q)} \leq z) dz, \end{aligned}$$

ambos sumandos tienden a 0 cuando  $x \rightarrow x^*$ . Por ende  $v'(x^*+) = -e^{x^*} + K\mathbb{P}(-\underline{X}_{e(q)} = 0)$ . De esta manera, para que haya pegado suave  $\mathbb{P}(-\underline{X}_{e(q)} = 0) = 0$  que es equivalente a que  $\mathbb{P}(\inf\{t : X_t < 0\} = 0) = 1$ .

□

### 4.3. Problemas de parada óptima con soluciones unilaterales

En el ejemplo anterior se vió que la función valor depende de la esperanza del ínfimo detenido en un tiempo exponencial cuyo parámetro es el descuento. Que dependa del extremo inferior es razonable ya que la ganancia era una función decreciente. En los ejemplos que se proceden a mostrar se verá que este fenómeno vuelve a ocurrir en funciones monótonas. En el próximo capítulo se darán razones del por qué de dicha representación de la función de valor y se resolverá un problema de parada óptima en un caso donde la función no es monótona. Cuando se habla de problemas con soluciones unilaterales se refiere a que la región de parada es una semirrecta.

Se vuelven a utilizar las notaciones para el máximo y el mínimo detenidos en un tiempo exponencial definidas al inicio del capítulo dos.

Esta sección se basa en el artículo [Mordecki and Mishura(2016)].

#### 4.3.1. Teorema de verificación

Se procede a mostrar el teorema de verificación que se usará en estos ejemplos.

**Teorema 4.3.1.** *Sea  $X$  un proceso de Lévy,  $r > 0$  el descuento y una función de ganancia  $g$  no negativa que además cumple  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ . Sean  $x^* > 0$  y una función no decreciente  $G : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$  con soporte contenido en  $[x^*, \infty)$ . Sea la función*

$$V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad V(x) = \mathbb{E}_x(G(M_{e(r)})) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.14)$$

*Si las condiciones*

$$V(x) \geq g(x) \quad \forall x < x^*, \quad V(x) = g(x) \quad \forall x \geq x^*, \quad (4.15)$$

*se cumplen, entonces  $V$  es la función valor y la región de parada es  $D = [x^*, \infty)$ .*

Al tiempo de llegada a la región de parada se lo llamará  $\tau^*$ . Hay que verificar que se cumplen dos ecuaciones:

$$V(x) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau^*} g(X_{\tau^*})), \quad (4.16)$$

$$V \text{ es } r\text{-excesiva (recordar 4.1.1)}. \quad (4.17)$$

Se necesitarán dos lemas para probar este teorema:

**Lema 4.3.1.** *Se considera  $X, r, g, x^*$  y  $G$  como en el teorema 4.3.1, entonces para todo  $a \geq x^*$  y  $x \in \mathbb{R}$ :*

$$\mathbb{E}_x(G(M_{e(r)}) \mathbf{1}_{\{M \geq a\}}) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_a} g(X_{\tau_a}) \mathbf{1}_{\{\tau_a < \infty\}}), \quad (4.18)$$

*siendo  $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$ . En particular cuando  $a = x^*$  y  $\tau = \tau^*$ :*

$$\mathbb{E}_x(G(M_{e(r)}) \mathbf{1}_{\{M \geq x^*\}}) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau^*} g(X_{\tau^*}) \mathbf{1}_{\{\tau^* < \infty\}}). \quad (4.19)$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(G(M_{e(r)})\mathbf{1}_{\{M_{e(r)} \geq a\}}) &= \mathbb{E}_x(G(\sup_{0 \leq t \leq e(r)} X_t)\mathbf{1}_{\tau_a < e(r)}) \\
&= \mathbb{E}_x(G(X_{\tau_a} + \sup_{\tau_a \leq t \leq e(r)} (X_t - X_{\tau_a}))\mathbf{1}_{\tau_a < e(r)}) \\
&= \mathbb{E}_x((\int_{\tau_a}^{\infty} r e^{-rs} (G(X_{\tau_a} + \sup_{\tau_a \leq t \leq s} (X_t - X_{\tau_a}))) ds) \mathbf{1}_{\tau_a < \infty}) \\
&= \mathbb{E}_x((\int_{\tau_a}^{\infty} r e^{-rs} (G(X_{\tau_a} + \sup_{0 \leq t \leq s - \tau_a} (X_{t+\tau_a} - X_{\tau_a}))) ds) \mathbf{1}_{\tau_a < \infty}) \\
&= \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_a} (\int_0^{\infty} r e^{-rv} (G(X_{\tau_a} + \sup_{0 \leq t \leq v} (X_{t+\tau_a} - X_{\tau_a}))) dv) \mathbf{1}_{\tau_a < \infty})
\end{aligned}$$

Sea  $\tilde{X}$  una copia independiente del proceso  $X$ :

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_a} \mathbb{E}_{X_{\tau_a}} ((\int_0^{\infty} r e^{-rv} (G(\sup_{0 \leq s \leq v} (\tilde{X}_s))) dv) \mathbf{1}_{\tau_a < \infty}) \\
&= \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_a} \mathbb{E}_{X_{\tau_a}} (G(M_{e(r)})) \mathbf{1}_{\tau_a < \infty}) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_a} g(X_{\tau_a}) \mathbf{1}_{\tau_a < \infty}).
\end{aligned}$$

□

**Lema 4.3.2.** Sea  $f(x)$  no negativa y no decreciente,  $r > 0$ , entonces  $h(x) = \mathbb{E}_x(f(M_{e(r)}))$   $x \in \mathbb{R}$  es  $r$ -excesiva.

Demostración:

Sea  $\tilde{X}$  una copia independiente a  $X$ ,

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}_x(e^{-rt} \mathbb{E}_{X_t}(f(Y_{M_{e(r)}}))) &= \mathbb{E}_x(e^{-rt} \mathbb{E}_{X_t}(\sup_{0 \leq s < e(r)} f(Y_s))) \\
&= \mathbb{E}_x(\int_0^{\infty} e^{-r(u+t)} r \mathbb{E}(\sup_{0 \leq s \leq u} f(\tilde{X}_s + X_t)) du) \\
&= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_{X_t}(\int_0^{\infty} e^{-r(u+t)} r \sup_{0 \leq u \leq s} f(\tilde{X}_s) du)) \\
&= \mathbb{E}_x(\mathbb{E}_x(\int_0^{\infty} e^{-r(u+t)} r \sup_{0 \leq s \leq u} f(\tilde{X}_{s+t}) | \mathcal{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}_x(\int_t^{\infty} e^{-rv} r \sup_{0 \leq s \leq v-t} f(X_{s+t}) dv) \\
&= \mathbb{E}_x(\int_t^{\infty} e^{-rv} r \sup_{t \leq w \leq v} f(X_w) dw) \leq \mathbb{E}_x(\int_t^{\infty} e^{-rv} r \sup_{0 \leq w \leq v} f(X_w) dw) \leq h(x).
\end{aligned}$$

□

#### Demostración de teorema 4.3.1

En primer lugar la igualdad (4.16) se cumple por el lema 4.3.1 tomando  $a = x^*$  y notando que en  $\tau^* = \infty$  vale  $g = 0$ . En segundo lugar  $V$  mayor a  $g$  por hipótesis. Por último como  $G$  es creciente, usando el lema 4.3.2 se deduce que  $V$  es  $r$ -excesiva.

□

#### 4.3.2. Polinomios promediantes

A continuación, se mostrarán ejemplos de problemas unilaterales cuya función de ganancia sea la parte positiva de un polinomio. Para ello se introducen brevemente los polinomios promediantes.

En esta subsección se trabajan con polinomios de la forma

$$p_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x, \quad (4.20)$$

se asume que  $x = 0$  es raíz de  $p_n(x)$ . La función de ganancia es de la forma

$$g(x) = (p_n(x^+))^+.$$

En realidad esto no es una pérdida de generalidad ya que  $\alpha g(\cdot + x_0)$  tiene solución  $\alpha V(\cdot + x_0)$ .

**Definición 4.3.1.** Se dice que  $P_n$  es un polinomio promediante de  $p_n$  si

$$\mathbb{E}_x(P_n(M_{e(r)})) = p_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Donde

$$P_n(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0. \quad (4.21)$$

**Observación 4.3.1.** Si los primeros  $n$  momentos  $\mu_k = \mathbb{E}(M_{e(r)}^k)$  de  $M_{e(r)}$  son finitos, y se denota  $\mu_0 = 1$ , entonces para (4.21) vale:

$$\sum_{k=0}^n b_k \sum_{l=0}^k C_k^l x^l \mu_{k-l} = \sum_{l=0}^n \left( \sum_{k=l}^n b_k C_k^l \mu_{k-l} \right) x^l.$$

Luego igualando coeficientes de 4.3.1 con (4.20) vale

$$\sum_{k=l}^n b_k C_k^l \mu_{k-l} = a_l, \quad l = n, n-1, \dots, 0. \quad (4.22)$$

Este sistema puede resolverse recursivamente:

$$\begin{aligned} b_n &= 1, \\ b_{n-1} &= a_{n-1} - n\mu_1, \\ b_l &= a_l - \sum_{k=l+1}^n b_k C_k^l \mu_{k-l}, \quad l = n-2, \dots, 0. \end{aligned}$$

**Teorema 4.3.2.** *Bajo las notaciones de esta subsección*

- i) *El polinomio promediante  $P_n(x)$  tiene al menos una raíz positiva.*
- ii) *Si  $x^*$  es la raíz más grande de  $P_n(x)$ , vale que  $p_n(x) \geq 0$  para  $x \geq x^*$  y  $p_n(x) > 0$  para  $x > x^*$ .*
- iii) *Sean*

$$G(x) = P_n(x)\mathbf{1}_{\{x \geq x^*\}}, \quad V(x) = \mathbb{E}_x(G(M_{e(r)})), \quad \tau^* = \inf\{t \geq 0 : X_t \geq x^*\}.$$

*Si  $G$  es no decreciente y  $V(x) \geq g(x)$  cuando  $x \leq x^*$ , entonces el par  $V(x)$ ,  $\tau^*$  es solución al problema de parada óptima.*

**Demostración:**

En primer lugar si  $P_n$  no tiene raíces positivas en los números no negativos, entonces  $P_n(x) > 0$  para todo  $x > 0$  ya que  $p_n(x) \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Luego como  $\mathbb{P}(M_{e(r)} > 0) > 0$ , vale que:  $0 < \mathbb{E}(P_n(M_{e(r)})) = p_n(0) = 0$  lo cual es absurdo (quedando probado i).

La desigualdad ii) se deduce que  $\mathbb{P}_x(M_{e(r)} \geq x^*) = 1$  para  $x \geq x^*$  y que  $p_n(x) = \mathbb{E}_x(P_n(M_{e(r)}))$  (la estricta es sustituyendo  $x^*$  por  $x$ ).

Por último iii) es consecuencia directa del teorema 4.3.1.

□

### 4.3.3. Ejemplos

**Ejemplo 4.3.1** (Caso lineal). *En este caso  $p_n(x) = x^+$*

Usando (4.22) se deduce que

$$P_n(x) = x - \mathbb{E}(M_{e(r)}).$$

En particular si se toma el proceso del ejemplo 3.3.2  $\mathbb{E}(M_{e(r)}) = \frac{\pi}{r_1}$  (se recuerda que el factor  $\pi$  es la probabilidad de no quedarse en cero).

Se estudiará el problema de parada óptima con el mismo proceso para el caso en que  $p_n(x) = |x|$  en el capítulo 4.

Sea  $x \leq x^*$ :

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E}_x((M_{e(r)} - \mathbb{E}(M_{e(r)}))\mathbf{1}_{\{x \geq x^*\}}) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{x \geq x^*\}}(M_{e(r)} - \frac{\pi}{r_1})) \\ &= \pi \int_{x^*-x}^{\infty} (t + x - \frac{\pi}{r_1}) r_1 e^{-r_1 t} dt = \pi \int_{x^*}^{\infty} (u - \frac{\pi}{r_1}) r_1 e^{-r_1(u-x^*)} du \\ &= \pi e^{r_1 x^*} \int_{x^*}^{\infty} (u - \frac{\pi}{r_1}) e^{-r_1 u} du = \pi e^{r_1 x^*} K. \end{aligned}$$

Usando que  $\pi K e^{r_1 x^*} = x^*$  se obtiene que

$$c = \frac{x^*}{\pi e^{r_1 x^*}}.$$

Luego como  $V \geq g$  se deduce que

$$\frac{x^* e^{r_1 x}}{e^{r_1 x^*}} \geq x \quad \forall x \in (0, x^*).$$

Esto solo ocurre si  $x^* = \frac{1}{r_1}$ .

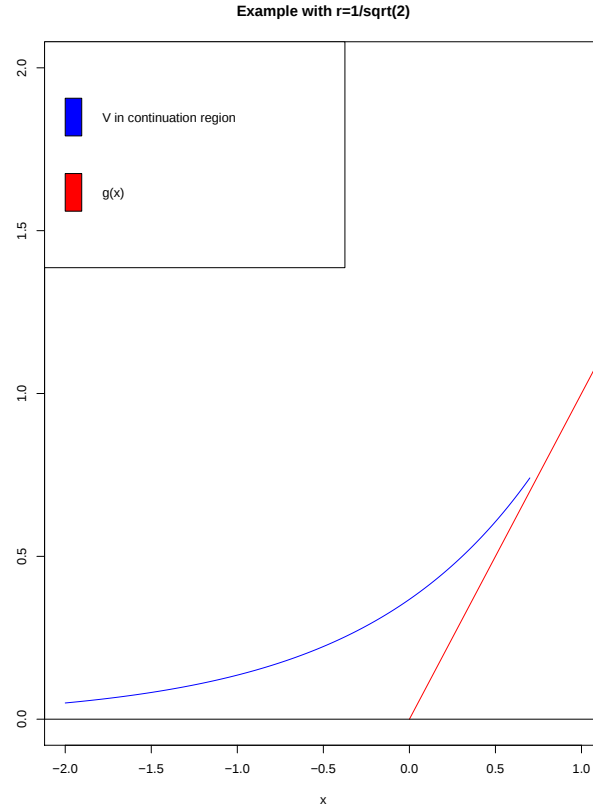


Figura 4.1: Gráficas de  $V(x)$  y  $g(x)$  con  $(\alpha, \lambda, \beta, \gamma, r) = (1, 3, 3, 1, 1)$

**Ejemplo 4.3.2** (Polinomio cuadrático). *En este caso  $p_2(x) = x^2 + ax$*

Recursivamente se obtiene

$$P_2(x) = x^2 + (a - 2\mu_1)x + 2(\mu_1)^2 - \mu_2 - a\mu_1.$$

El polinomio  $p_2$  tiene su raíz más grande

$$x^* = \mu_1 - \frac{a}{2} + \sqrt{\mu_2 + \mu_1^2 + \frac{a^2}{4}} = \mathbb{E}(M_{e(r)}) - \frac{a}{2} + \sqrt{\text{Var}(M_{e(r)}) + \frac{a^2}{4}}.$$

Luego

$$\begin{aligned} V(x) &= \mathbb{E}_x(G(M_{e(r)})) \\ &= \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\{M_{e(r)} \geq x^*\}}(M_{e(r)}^2 + (a - 2\mu_1)M_{e(r)} + 2(\mathbb{E}(M_{e(r)}))^2 - \mathbb{E}(M_{e(r)}^2) - a\mathbb{E}(M_{e(r)}))) \end{aligned}$$

Si el proceso tomado es el movimiento Browniano con descuento  $r = \frac{1}{2}$  se obtiene que

$$V(x) = \mathbf{1}_{\{x > x^*\}}(x^* + ax) + \mathbf{1}_{\{x \leq x^*\}}\mathbb{E}_x(e^{-r\tau^*}((x^*)^2 + ax^*))$$

$$= \mathbf{1}_{\{x > x^*\}}(x^* + ax) + \mathbf{1}_{\{x \leq x^*\}} e^{x-x^*} ((x^*)^2 + ax^*).$$

Donde se usa que la esperanza de la salida de un movimiento browniano es conocida de (1.4).

Para probar que es solución resta ver que en  $x \leq x^*$  se cumple que  $V \geq g$ . Lo cual es equivalente a probar

$$e^{-x^*} ((x^*)^2 + ax^*) \geq e^{-x} (x^2 + ax) \quad \forall 0 \leq x \leq x^*.$$

Observando que la función  $e^{-x}(x^2 + ax)$  es creciente hasta  $1 - \frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}$  se deduce que la desigualdad vale (y es estricta) hasta ese punto que no es otro que  $x^*$  ya que  $M_{e(r)} \sim \exp(\sqrt{2}r)$  según se vió en el ejemplo 3.3.1.

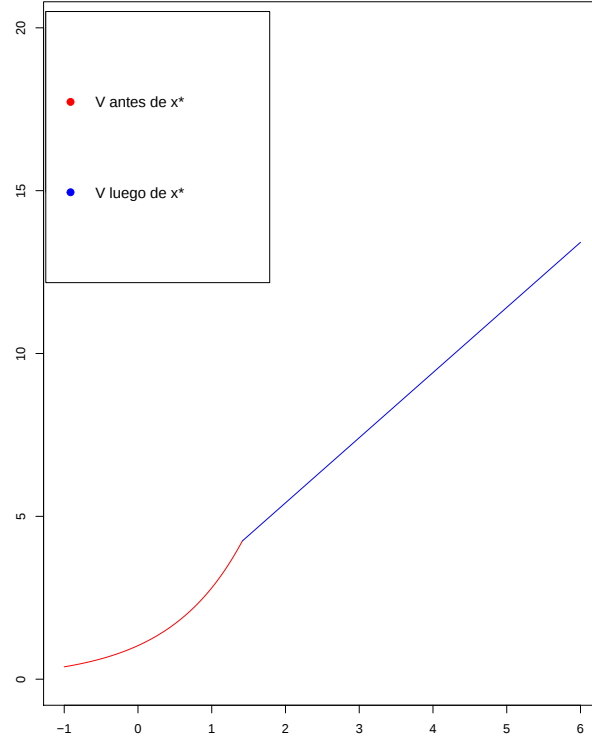


Figura 4.2: Gráficas de  $V(x)$  y  $g(x)$  con  $(\alpha, \lambda, \beta, \gamma, r) = (1, 3, 3, 1, 1)$

**Ejemplo 4.3.3** (Ejemplo trigonométrico). *En este caso  $g(x) = \mathbf{1}_{\{x \geq 0\}}(x + \beta \sin(x))$ .*

Se considera la función

$$G^*(x) = x - \mathbb{E}(M_{e(r)}) + \beta \frac{(\mathbb{E}(\cos(M_{e(r)}))) \sin(x) - (\mathbb{E}(\sin(M_{e(r)}))) \cos(x)}{(\mathbb{E}(\sin(M_{e(r)})))^2 + (\mathbb{E}(\cos(M_{e(r)})))^2}.$$

Se introducen las notaciones

$$\gamma = \sqrt{(\mathbb{E}(\sin(M_{e(r)})))^2 + (\mathbb{E}(\cos(M_{e(r)})))^2} \leq 1,$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\mathbb{E}(\sin(M_{e(r)}))}{\mathbb{E}(\cos(M_{e(r)}))}\right) \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

De esta manera

$$G^*(x) = x - \mathbb{E}(M_{e(r)}) + \frac{\beta}{\gamma} \sin(x - \theta).$$

y  $G^*(0) < 0$  y en el caso que  $\beta \leq \gamma$  se tiene que  $(G^*)'(x) \geq 0$ . Por ende hay una única raíz que se denominará  $x^*$ . Se definen

$$G(x) = \mathbf{1}_{\{x \geq x^*\}} G^*(x), \quad V(x) = \mathbb{E}_x(G(M_{e(r)})).$$

Para probar que es la función valor hay que probar que se cumple (4.15).

Para dar un ejemplo, se supone que el proceso es un proceso de Poisson compuesto con saltos exponenciales como en 3.3.2 pero sin saltos negativos (puede pensarse como un caso particular de este donde el parámetro exponencial negativo es infinito). Bajo las notaciones del ejemplo se deduce que:

$$\mathbb{E}(M_{e(r)}) = \frac{1-\pi}{r_1}, \quad \mathbb{E}(\sin(M_{e(r)})) = \frac{(1-\pi)r_1}{r_1^2+1}, \quad \mathbb{E}(\cos(M_{e(r)})) = \pi + \frac{(1-\pi)r_1^2}{r_1^2+1}.$$

De esta manera,

$$\theta = \arctan\left(\frac{(1-\pi)r_1}{1+r_1^2-(1-\pi)}\right), \quad \gamma = \frac{\sqrt{(1-\pi)^2 r_1^2 + (\pi - r_1^2)^2}}{1+r_1^2}.$$

Finalmente

$$V(x) = \mathbb{E}_x(G(M_{e(r)})) = e^{r_1(x-x^*)}(1-\pi)r_1 \int_0^\infty G(x^*+z)e^{-r_1 z} dz.$$

## Capítulo 5

# Problemas de parada óptima bilaterales.

Este último capítulo trata problemas donde la región de parada es el complemento de un intervalo.

### 5.1. Introducción

Al final del capítulo 3 se mostraron ejemplos donde la función valor se podía representar con el promedio del extremo. En este capítulo se estudiará el problema de parada óptima en el caso en que la función de ganancia  $g$  tenga soporte en valores negativos. Más específicamente, se estudiará el caso en que la región de parada óptima sea el complemento de un intervalo y no una semirrecta. En este caso la representación promediante será también dependiente del ínfimo.

**Definición 5.1.1.** Sea  $V$  una función  $r$ -excesiva, se dice que  $V$  tiene una representación promediante bilateral si existen  $Q^*$  y  $Q_*$  integrables (pueden integrar infinito), no negativas y con soporte en  $[x^*, \infty)$  y  $(-\infty, x_*]$  respectivamente, siendo  $x^* > 0$ ,  $x_* < 0$  tales que

$$V(x) = \mathbb{E}_x(Q^*(M_{e(r)})) + \mathbb{E}_x(Q_* I_{e(r)}).$$

Según el contexto se escribirá  $Q^*$  o  $Q^* \mathbf{1}_{M_{e(r)} \geq x^*}$  para hacer referencia al soporte. Esto es porque en la práctica primero se encuentra una función y luego se la multiplica por la indicatriz. Lo mismo sucede con  $Q_*$ . La subsección de representación de funciones  $r$ -excesivas se basa en [Dynkin(1969)], [Mordecki and Salminen(2007)] y [Bertoin(1996)]. El resto del capítulo en [Mordecki and Oliú(2019)].

**Ejemplo 5.1.1.** Se considera un problema de parada óptima con las hipótesis estándares con el Movimiento Browniano y la función de ganancia  $g(x) = |x|$ .

Con un razonamiento similar a 4.1.2 se deduce que  $V$  es convexa y que debe existir un par  $x_* < 0 < x^*$  tal que la región de parada óptima es  $(x_*, x^*)^c$ . Como es usual, al tiempo de llegada a ese conjunto se le denomina  $\tau^{(x_*, x^*)^c}$ . Luego para  $x \in (x_*, x^*)$

$$\mathbb{E}_x(e^{-r\tau^{(x_*, x^*)^c}} | X_{(x_*, x^*)^c} |) = \mathbb{E}(e^{-r\tau^{(x_* - x, x^* - x)^c}} | X_{(x_* - x, x^* - x)^c} + x |).$$

Por la simetría del proceso y de  $g$  se deduce que  $x_* = -x^*$ . Luego

$$\begin{aligned} V(x) &= x^* \mathbb{E}(e^{-r\tau^{(x_* - x, x^* - x)^c}}) \\ &= x^* \frac{\cosh(x\sqrt{2r})}{\cosh(x^*\sqrt{2r})} \quad \text{ver [BorodinPaavo(1996)] pag. 172,} \end{aligned}$$

entonces para que  $x \leq V(x)$ , es necesario y suficiente que se cumpla

$$\frac{|x|}{\cosh(x\sqrt{2r})} \leq \frac{|x^*|}{\cosh(x^*\sqrt{2r})} \quad \forall x \in (-x^*, x^*)$$

Por ende encontrando el extremo de la función

$$\frac{x}{\cosh(\sqrt{2r}x)}$$

$x^*$  queda inequívocamente determinado.

## 5.2. Representación de funciones r-excesivas

A priori, no hay ningún fundamento del por qué de la existencia de una función promediante bilateral más que la observación de que existen en el caso unilateral. Hay un argumento más profundo basado en la representación de las funciones  $r$ -excesivas como integrales.

Sin embargo, hasta ahora, solo se sabe con certeza que los procesos de Lévy que cumplan

$$\text{la variable } X_{e(r)} \text{ tiene densidad,} \quad (5.1)$$

tienen una representación integral. Se procede a enunciar dichos resultados pero no se los prueba ya que no es el objetivo de la tesis resolver los problemas de parada óptima que cumplen (5.1) porque usualmente tienen suficiente regularidad para ser resueltos por otros métodos (pegado suave por ejemplo).

**Teorema 5.2.1.** *Sea  $V$  una función  $r$ -excesiva para  $X$ , integrable (puede integrar infinito) no negativa. Si además  $X$  cumple (5.1) y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}(e^{-rt} X_t) = 0$ , entonces existe una medida de Radon  $\sigma$  que cumple:*

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}} r^{-1} f_{X_{e(r)}}(y - x) \sigma(dy).$$

Una medida  $\sigma$  es de Radon si es una medida en la  $\sigma$ -álgebra de Borel de un espacio topológico de Hausdorff que cumple:

- para todo  $U$  abierto se cumple que  $\sigma(U) = \sup_{K \subseteq U \text{ compactos}} \sigma(K)$  (ten-  
sa),
- para todo  $B$  boreliano se cumple que  $\sigma(B) = \inf_{U \supseteq B \text{ abiertos}} \sigma(U)$
- y todo punto del espacio tiene un entorno de medida finita.

El teorema 5.2.1 es válido para procesos más generales, la construcción de la medida se encuentra detallada en [Dynkin(1969)] y también en un contexto más particular, de forma más sencilla en [Bertoin(1996)].

**Definición 5.2.1.** *Se dice que una función  $f$  integrable es  $r$ -armónica en  $A$  medible respecto a un proceso  $X$  de Lévy si*

$$f(x) = \mathbb{E}_x(e^{-r\tau_B} X_{\tau_B}).$$

*Para todo  $B$  abierto contenido en  $A$  con clausura compacta, siendo  $\tau_B$  la primer salida del conjunto.*

El siguiente lema es útil para definir el soporte de la medida  $\sigma$ .

**Lema 5.2.1.** *Sea  $V$  la solución de un problema de parada óptima bajo las hipótesis usuales y 5.1 . Si  $V$  es armónica en  $A$ , entonces  $\sigma(A) = 0$ .*

El siguiente lema se basa en la propiedad fuerte de Markov:

**Lema 5.2.2.** *La función  $V$  es armónica en el conjunto de continuación.*

De estos dos lemas puede concluirse un teorema de representación más explícito.

**Teorema 5.2.2.** *Sea  $V$  una función  $r$ -excesiva para  $X$ , integrable (puede integrar infinito) no negativa. Si además  $X$  está en hipótesis del teorema 5.2.1 y el conjunto de continuación es de la forma  $(x_*, x^*)$  entonces:*

$$V(x) = \int_{(-\infty, x_*] \cup [x^*, \infty)} r^{-1} f_{X_{e(r)}}(y - x) \sigma(dy).$$

Este último teorema concluye la subsección, fue hecho por [Mordecki and Salminen(2007)]

**Teorema 5.2.3.** *Si  $X$  cumple (5.1) y  $V$  tiene una representación como en 5.2.2, entonces  $V$  tiene una representación bilateral promediante.*

Demostración

Utilizando el Teorema de Wiener-Hopf se deduce que

$$f_{X_{e(r)}}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{M_{e(r)}}(t) f_{I_{e(r)}}(u-t) dt.$$

Se procede a estudiar el segundo sumando de 5.2.2:

$$\begin{aligned} & \int_{[x^*, \infty)} r^{-1} f_{X_{e(r)}}(y-x) \sigma(dy) \\ &= \int_{[x^*, \infty)} r^{-1} f_{x_{e(r)}}(y-x) \sigma(dy) \\ &= \int_{[x^*, \infty)} r^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} f_{M_{e(r)}}(t) f_{I_{e(r)}}(y-x-t) dt \sigma(dy) \\ &= \int_{[x^*, \infty)} r^{-1} \int_{y-x}^{\infty} f_{M_{e(r)}}(t) f_{I_{e(r)}}(y-x-t) dt \sigma(dy) \\ &= \int_{[x^*, \infty)} r^{-1} \int_{y-x}^{\infty} f_{M_{e(r)}}(t) f_{I_{e(r)}}(y-x-t) dt \sigma(dy) \\ &= \int_{(-\infty, \infty)} r^{-1} \int_{x^*}^{x+t} f_{M_{e(r)}}(t) f_{I_{e(r)}}(y-x-t) \sigma(dy) dt \\ &= \int_{[x^*-x, \infty)} f_{M_{e(r)}}(t) r^{-1} \int_{x^*}^{x+t} f_{I_{e(r)}}(y-x-t) \sigma(dy) dt \\ &= \mathbb{E}_x(Q^*(M_{e(r)}) \mathbf{1}_{M \geq x^*}). \end{aligned}$$

Tomando

$$Q^*(z) := r^{-1} \int_{x^*}^z f_{I_{e(r)}}(y-z) \sigma(dy).$$

Un razonamiento similar con el primer sumando permite concluir el teorema.

□

En la sección que sigue se muestra que hay más casos en los que existe una representación bilateral promediante, la razón de esto es desconocida y puede ser interesante estudiarlo.

### 5.3. Teorema de verificación en el caso bilateral

En esta sección el tiempo óptimo es de la forma  $\tau_* = \inf(t : X_t \notin [x_*, x^*])$ , para resolver estos problemas, se propone una adaptación del teorema de verificación 4.3.1, se buscan  $Q_*$  y  $Q^*$  como se mencionaron en la introducción del capítulo y se prueba que la función encontrada está en las hipótesis del teorema de verificación.

### 5.3.1. Teorema de verificación.

#### Teorema 5.3.1. Verificación en caso bilateral:

Se propone una modificación al teorema 4.3.1 para el caso bilateral. Para  $a < b$  se denota  $\tau_{(a,b)} = \inf\{t : X_t \notin (a,b)\}$ . Sea  $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$  un proceso de Lévy con descuento  $r > 0$  y una función ganancia  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ . Sean  $x^* > 0$ ,  $x_* < 0$  y un par de funciones  $Q^* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  creciente en  $[x^*, \infty)$  y  $Q_* : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  decrecientes en  $[-\infty, x_*)$ .

Sea el tiempo de parada  $\tau_{(x_*, x^*)}$  y la función  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como:

$$V(x) = \mathbb{E}_x(Q^*(M_{e(r)})\mathbf{1}_{M_{e(r)} \geq x^*}) + \mathbb{E}_x(Q_*(I_{e(r)})\mathbf{1}_{I_{e(r)} \leq x_*}).$$

Si se cumplen:

- $V(x) = g(x) \forall x \notin (x_*, x^*)$ .
- $V(x) \geq g(x)$  en otro caso.

Entonces  $V$  es la función del valor y  $\tau_{(x_*, x^*)}$  el tiempo de parada óptimo para el problema  $(X, g, r)$ .

Se usan dos lemas para la demostración del teorema.

**Lema 5.3.1.** Usando las notaciones del teorema anterior:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_x(Q^*(M_{e(r)})\mathbf{1}_{M_{e(r)} \geq x^*}\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}) + \mathbb{E}_x(Q_*(I_{e(r)})\mathbf{1}_{I_{e(r)} \leq x_*}\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}) \\ &= \mathbb{E}_x(g(X_{\tau_{(x_*, x^*)}})\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < \infty}e^{-r\tau_{(x_*, x^*)}}). \end{aligned}$$

Demostración:

Se requiere una afirmación previa:

- $\mathbb{E}_x(Q^*(M_{e(r)})\mathbf{1}_{M_{e(r)} \geq x^*}\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)})$   
 $= \mathbb{E}_x((\mathbb{E}_{X_{\tau_{(x_*, x^*)}}}(Q^*(M_{e(r)})\mathbf{1}_{M \geq x^*}))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}e^{-r\tau_{(x_*, x^*)}}).$
- $\mathbb{E}_x(Q_*(I_{e(r)})\mathbf{1}_{I_{e(r)} \leq x_*}\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)})$   
 $= \mathbb{E}_x((\mathbb{E}_{X_{\tau_{(x_*, x^*)}}}(Q_*(I_{e(r)})\mathbf{1}_{I_{e(r)} \leq x_*}))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}e^{-r\tau_{(x_*, x^*)}}).$

Sumando las igualdades de la afirmación se concluye el lema ya que se puede ver que el lado derecho de la igualdad es:

$$\mathbb{E}_x(g(X_{\tau_{(x_*, x^*)}})\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}e^{-r\tau_{(x_*, x^*)}}).$$

Demostración de la afirmación (solo se demuestra el primer ítem):

Por comodidad se define  $h(x) = Q^*(x)\mathbf{1}_{x \geq x^*}$ . De esta manera:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(Q^*(M_{e(r)})\mathbf{1}_{M_{e(r)} \geq x^*}\mathbf{1}_{(\tau_{(x_*, x^*)} < e(r))}) &= \mathbb{E}_x(h(M_{e(r)})\mathbf{1}_{(\tau_{(x_*, x^*)} < e(r))}) = \\ \mathbb{E}_x(h(X_{\tau_{(x_*, x^*)}} + \sup_{0 \leq t \leq e(r)} (X_t - X_{\tau_{(x_*, x^*)}}))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}) &= (*).\end{aligned}$$

Se observa que el supremo se alcanza luego de  $\tau_{x_*, x^*}$  o  $h$  se anula. Por ende:

$$\begin{aligned}(*) &= \mathbb{E}_x(h(X_{\tau_{(x_*, x^*)}} + \sup_{\tau_{(x_*, x^*)} \leq t \leq e(r)} (X_t - X_{\tau_{(x_*, x^*)}}))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}) = \\ \mathbb{E}_x((\mathbb{E}_{X_{\tau_{(x_*, x^*)}}}(h(\sup_{0 \leq s \leq e(r) - X_{\tau_{(x_*, x^*)}} (Y_s))))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < e(r)}) &= \end{aligned}$$

( $Y_s$  es un proceso i.i.d a  $X_s$ ).

$$\mathbb{E}_x((\mathbb{E}_{X_{\tau_{(x_*, x^*)}}}\left(\int_{\tau_{(x_*, x^*)}}^{\infty} (h(\sup_{0 \leq s \leq u - X_{\tau_{(x_*, x^*)}} (Y_s)))e^{-ru}r \, du\right))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < \infty}) =$$

$$\mathbb{E}_x(e^{-r\tau_{(x_*, x^*)}}(\mathbb{E}_{X_{\tau_{(x_*, x^*)}}}\left(\int_0^{\infty} (h(\sup_{0 \leq s \leq v} (Y_s)))e^{-rv}r \, dv\right))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < \infty}) =$$

(se toma el cambio de variable  $v = t - \tau_{(x_*, x^*)}$ )

$$\mathbb{E}_x(e^{-r\tau_{(x_*, x^*)}}(\mathbb{E}_{X_{\tau_{(x_*, x^*)}}}(h(M_{e(r)}))\mathbf{1}_{\tau_{(x_*, x^*)} < \infty})).$$

□

**Lema 5.3.2.** Sean  $r \geq 0$ ,  $f$  no decreciente y  $g$  no creciente, entonces:

$$h(x) = \mathbb{E}_x(f(M_{e(r)}) + g(I_{e(r)})) \quad (x \in \mathbb{R})$$

es  $r$ -excesiva.

Demostración:

Como  $\sup_{0 \leq t \leq e(r)} g(X_t) = g(I_{e(r)})$ , a) se deduce como en 4.3.2.

□

Demostración de teorema 5.3.1:

Usando el lema 5.3.1 se obtiene que:

$$V(x) = \mathbb{E}_x(Q^*(M_{e(r)})\mathbf{1}_{M_{e(r)} \geq x^*}) + \mathbb{E}_x(Q^*(I_{e(r)})\mathbf{1}_{I_{e(r)} \leq x^*})$$

$$= \mathbb{E}(g(X_{\tau_{(x_*, x^*)}}) \mathbf{1}_{\tau_{(a, b)} < \infty} e^{-r\tau_{(x_*, x^*)}}) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Luego tomando  $x \notin (x_*, x^*)$  se obtiene  $V(x) = g(x)$ . Por otro lado en el intervalo  $V$  mayor a  $g$ , por ende  $V(x) \geq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .

Por último usando el lema 5.3.2 se ve que  $V$  es excesiva, luego  $\forall \tau$  tiempo de parada:

$$V(x) \geq \mathbb{E}_x(e^{-r\tau} V(X_\tau)) \geq \mathbb{E}_x(e^{-r\tau} g(X_\tau)).$$

□

## 5.4. Pegado suave

El siguiente teorema sirve para el caso unilateral y bilateral. Se encuentra aquí porque será útil para el problema que le sigue. En él, se dan condiciones necesarias naturales para el pegado suave que dependen de las funciones promediantes.

**Teorema 5.4.1.** *Sea  $X$  un proceso de Lévy, factor de descuento  $r > 0$ , una función  $g$  no negativa (en este caso no es necesariamente la función de ganancia). Se utiliza la notación de 5.1.1. Si se cumplen*

$$g(x) = \mathbb{E}_x Q^*(M_{e(r)}), \text{ para todo } x \geq x_0,$$

$$Q \in C^2[x_0, \infty) \text{ y se satisfacen}$$

$$|Q''(x)| \leq A e^{\alpha x}, \quad \forall x \geq x_0,$$

para algún  $A > 0$  and algún  $\alpha > 0$ . Y además existe y es finita

$$\mathbb{E} e^{\alpha M_{e(r)}}. \quad (5.2)$$

Entonces la función  $V$  (en este caso no necesariamente la de valor) definida como

$$V(x) = \mathbb{E}_x Q(M_{e(r)}), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

satisface

$$V'(x^*+) - V'(x^*-) = Q'(x^*+) \mathbb{P}(M_{e(r)} = 0). \quad (5.3)$$

y además se cumple

$$V'(x+) - V'(x-) = 0, \quad \text{para } x > x^*. \quad (5.4)$$

Demostración:

Primero se probará (5.3). Se denota  $F_M(y)$  ( $y \geq 0$ ) a la distribución de la función  $M_{e(r)}$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
V'(x^*+) - V'(x^*-) &= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbb{E}[Q^*(x^* + h + M_{e(r)}) + Q^*(x^* - h - M_{e(r)}) - 2Q^*(x^* + M_{e(r)})] \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{[0, \infty)} [Q^*(x^* + h + y) + Q^*(x^* - h - y) - 2Q^*(x^* + y)] dF_M(y) \\
&= \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ [Q^*(x^* + h) + Q^*(x^* - h) - 2Q^*(x^*)] \mathbb{P}(M_{e(r)} = 0) \right. \quad (5.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \int_{(0, h)} [Q^*(x^* + h + y) + Q^*(x^* - h + y) - 2Q^*(x^* + y)] dF_M(y) \quad (5.6) \\
&+ \left. \int_{(h, \infty)} [Q^*(x^* + h + y) + Q^*(x^* - h + y) - 2Q^*(x^* + y)] dF_M(y) \right\}. \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Para computar el límite en (5.5), como  $Q^*(x) = 0$  for  $x \leq x^*$ , se tiene

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} [Q^*(x^* + h) + Q^*(x^* - h) - 2Q^*(x^*)] \mathbb{P}(M_{e(r)} = 0) = (Q^*)'(x^*+) \mathbb{P}(M_{e(r)} = 0).$$

En cuanto a (5.6), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left| \int_{(0, h)} [Q^*(x^* + h + y) + Q^*(x^* - h + y) - 2Q^*(x^* + y)] dF_M(y) \right| \\
&\leq 4 \lim_{h \downarrow 0} \frac{Q^*(x^* + 2h)}{h} \mathbb{P}(0 < M_{e(r)} \leq h) = 8Q^*(x^*)' \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{P}(0 < M_{e(r)} \leq h) = 0.
\end{aligned}$$

Para el término en (5.7), se denota  $x = x^* + y \geq h$ ,

$$\begin{aligned}
|Q^*(x + h) + Q^*(x - h) - 2Q^*(x)| &= \left| \int_x^{x+h} du \int_{u-h}^u (Q^*)''(v) dv \right| \\
&\leq A \int_x^{x+h} du \int_{u-h}^u e^{\alpha v} dv = \frac{A}{\alpha^2} \left( e^{\alpha(x+h)} + e^{\alpha(x-h)} - 2e^{\alpha x} \right).
\end{aligned}$$

Luego, como la esperanza  $\mathbb{E}(e^{\alpha M_{e(r)}}) < \infty$  se tiene que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{(h, \infty)} [Q^*(x^* + h + y) + Q^*(x^* - h + y) - 2Q^*(x^* + y)] dF_M(y) \right| \\
&\leq \frac{A}{\alpha^2} \mathbb{E} \left( e^{x^* + h + M_{e(r)}} + e^{x^* - h + M_{e(r)}} - 2e^{x^* + M_{e(r)}} \right) \\
&\leq \frac{A}{\alpha^2} \left( e^{x^* + h} + e^{x^* - h} - 2e^{x^*} \right) \mathbb{E} e^{\alpha M_{e(r)}}.
\end{aligned}$$

En conclusión:

$$\lim_{h \downarrow 0} \int_{(h, \infty)} [Q^*(x^* + h + y) + Q^*(x^* - h + y) - 2Q^*(x^* + y)] dF_M(y) = 0,$$

concluyendo (5.3). Para verificar (5.4) las misma computaciones son válidas tomando  $x$  en vez de  $x^*$ . La diferencia es que, en el término (5.5), ahora se tiene que

$$\begin{aligned} \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} [Q^*(x + h) + Q^*(x - h) - 2Q^*(x)] \mathbb{P}(M_{e(r)} = 0) \\ = ((Q^*)'(x+) - (Q^*)'(x-)) \mathbb{P}(M_{e(r)} = 0) = 0. \end{aligned}$$

Concluyendo la prueba del teorema. □

Obviamente el teorema funciona con  $Q_*$  (trabajando con el ínfimo). Se pueden repetir de forma análoga las cuentas o notar que  $-X$  es un proceso de Lévy.

**Corolario 5.4.1.** *Si la función  $V$  tiene representación bilateral o unilateral promediante,  $\mathbb{E}(e^{rM_{e(r)}}) < \infty$  y  $Q^*$  es dos veces derivable en  $[x^*, \infty)$  entonces  $\exists V'(x^*) \Leftrightarrow \mathbb{P}(M_{e(r)} = 0) = 0$  o  $(Q^*)'(x^*) = 0$ .*

*Si la representación es bilateral un resultado análogo sucede con  $Q_*$ .*

**Observación 5.4.1.** *En realidad se cumple la equivalencia ([Mordecki(2002a)])*

$$\mathbb{E}e^{\alpha M_{e(r)}} < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}e^{\alpha X_1} < e^r$$

*Que puede ser útil para saber si se está en las hipótesis del pegado suave.*

## 5.5. Poisson compuesto:

Se considera el proceso de Poisson compuesto inicializado en  $x$ :

$$X_t = x + \sum_{i=0}^{N_\lambda(t)} Y_i^\alpha - \sum_{i=0}^{N_\gamma(t)} Z_i^\beta.$$

Siendo  $N_\lambda \simeq \text{Pois}(\lambda)$ ,  $N_\gamma \simeq \text{Pois}(\gamma)$ ,  $Y_i^\alpha \simeq \exp(\alpha)$  y  $Z_i^\beta \simeq \exp(\beta)$ . En esta sección se resuelve el problema de parada óptima para este proceso con  $g(x) = |x|$  y descuento  $r > 0$  encontrando  $Q^*, Q_*$  y se prueba que están en las hipótesis del teorema 5.3.1.

La notación usada es la misma que la de 3.3.2.

A continuación en vez de dar el candidato a solución y probar que está en las hipótesis del teorema de verificación, se muestran las propiedades que debe tener la representación promediante si es que existe. Luego se mostrará que con las propiedades expuestas queda inequívocamente definida y está en las hipótesis del teorema de verificación 5.3.1.

**Definición 5.5.1. Función candidato:** Sean  $x_* < 0$ ,  $x^* > 0$ ,  $Q^* : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $Q_* : (-\infty, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  funciones continuas tales que:

- i)  $V(x) = |x| \quad \forall x \notin (x_*, x^*)$ .
- ii)  $V(x) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{M \geq x^*} Q^*(M)) + \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{I \leq x_*} Q_*(I))$ .
- iii)  $Q^*(x^*) = Q_*(x_*) = 0$ .
- iv)  $|\int_{x^*}^{\infty} Q^*(u) r_1 e^{-r_1(u)} du| < \infty$ .
- v)  $|\int_{-\infty}^{x_*} Q_*(u) r_2 e^{r_2(u)} du| < \infty$ .
- vi)  $Q^*$  derivable en  $(x^*, \infty)$ ,  $Q_*$  derivable en  $(-\infty, x_*)$ .

Se dice que  $V$  es candidato y se denotan

$$c_1 = \int_{x^*}^{\infty} Q^*(u) r_1 e^{-r_1(u)} du, \quad c_2 = \int_{-\infty}^{x_*} Q_*(u) r_2 e^{r_2(u)} du, \quad (5.8)$$

(cuando se refiera a una función candidato se sobreentiende la existencia de  $Q_*$ ,  $Q^*$ ,  $x_*$ ,  $x^*$  y se usan las mismas notaciones).

### 5.5.1. Propiedades del candidato:

**Observación 5.5.1.** Sea  $V$  un candidato, entonces:

- a) Si  $x \geq x^* \Rightarrow V(x) = x = \bar{\pi} c_2 e^{-r_2 x} + \mathbb{E}_x(Q^*(M))$ .
- b) Si  $x \leq x_*$   
 $\Rightarrow V(x) = -x = \pi c_1 e^{r_1 x} + \mathbb{E}_x(Q_*(I))$ .
- c) Si  $x \in (x_*, x^*)$ :  
 $\Rightarrow V(x) = \pi c_1 e^{r_1 x} + \bar{\pi} c_2 e^{-r_2 x}$ .

*Demostración:*

a )

Se observa que  $P_x(M \geq x^*) = 1$  (de ahí el segundo sumando). Por otro lado:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(Q_*(I) \mathbf{1}_{I \leq x_*}) &= \bar{\pi} \int_{-\infty}^{x_* - x} Q_*(t + x) r_2 e^{r_2 t} dt \\ &= \bar{\pi} \int_{-\infty}^{x_*} Q_*(u) r_2 e^{r_2(u-x)} du = \end{aligned}$$

(cambio de variable  $u = t + x$ ).

$$= \bar{\pi} e^{-r_2 x} c_2.$$

b ) Análogo a a).

c ) Misma cuenta con la integral que en a) pero ahora en cada sumando.

□

**Corolario 5.5.1.** Usando que  $V(x_*) = -x_*$ ,  $V(x^*) = x^*$  y que  $V$  es continua:

a )

$$c_1 = \frac{-x_* - x^* e^{r_2(-x_* + x^*)}}{\pi(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})},$$

b )

$$c_2 = \frac{x^* + x_* e^{r_1(-x_* + x^*)}}{\bar{\pi}(-e^{-r_2 x_* + r_1(x^* - x_*)} + e^{-x^* r_2})}.$$

Se procede a encontrar formas explícitas de  $Q$ .

**Lema 5.5.1.** *Forma explícita de  $Q^*$  y  $Q_*$  Si  $V$  es candidato entonces:*

a )

$$Q^*(x) = \frac{x r_1 - \pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_2 + r_1) c_2 e^{-r_2 x}}{-((1 - \pi) r_2 + r_1)},$$

b )

$$Q_*(x) = \frac{-x r_2 - \bar{\pi}}{r_2} + \frac{\pi(r_2 + r_1) c_1 e^{r_1 x}}{-((1 - \bar{\pi}) r_1 + r_2)}.$$

*Demostración (solo de b), a) es análoga):*

Sea  $x < x_*$ , usando la observación 5.5.1:

$$-x = \pi c_1 e^{r_1 x} + \bar{\pi} \int_{-\infty}^0 Q_*(t+x) e^{r_2 t} r_2 dt + (1 - \bar{\pi}) Q_*(x) \Leftrightarrow$$

(tomando  $u = t + x$ )

$$-x - \pi c_1 e^{r_1 x} = \bar{\pi} e^{-r_2 x} \int_{-\infty}^x Q_*(u) e^{r_2 u} r_2 du + (1 - \bar{\pi}) Q_*(x) \Leftrightarrow$$

(definiendo  $F(x) = e^{r_2 x} Q_*(x)$ ).

$$-x - \pi c_1 e^{r_1 x} = \bar{\pi} e^{-r_2 x} \int_{-\infty}^x F(u) r_2 du + (1 - \bar{\pi}) F(x) e^{-r_2 x} \Leftrightarrow$$

$$(-x - \pi c_1 e^{r_1 x} - (1 - \bar{\pi})F(x)e^{-r_2 x}) \frac{e^{r_2 x}}{\bar{\pi} r_2} = \int_{-\infty}^x F(u) du \Leftrightarrow$$

$$(-x - \pi c_1 e^{r_1 x}) \frac{e^{r_2 x}}{\bar{\pi} r_2} - \int_{-\infty}^x F(u) du = \frac{1}{\bar{\pi} r_2} (1 - \bar{\pi}) F(x).$$

Derivando:

$$\frac{1}{\bar{\pi} r_2} (-e^{r_2 x} - x r_2 e^{r_2 x} - \pi c_1 (r_1 + r_2) e^{x(r_1 + r_2)}) - F(x) = \frac{1 - \bar{\pi}}{\bar{\pi} r_2} F'(x) \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{1 - \bar{\pi}} (-e^{r_2 x} - x r_2 e^{r_2 x} - \pi c_1 (r_1 + r_2) e^{x(r_1 + r_2)}) - \bar{\pi} r_2 \frac{1}{1 - \bar{\pi}} F(x) = F'(x).$$

Esto es una ecuación diferencial lineal de primer orden. Resolución de la ecuación:

Se denotan:

$$A(x) = x \bar{\pi} \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})},$$

$$b(x) = \frac{1}{\bar{\pi} r_2} (-e^{r_2 x} - x r_2 e^{r_2 x} - \pi c_1 (r_1 + r_2) e^{x(r_1 + r_2)}),$$

$$G(x) = \int_{x_*}^x e^{A(t)} b(t) dt.$$

Luego la solución que se anula en  $x_*$  es de la forma  $F(t) = e^{-A(t)}(G(t))$ . Resta encontrar forma explícita:

$$G(x) =$$

$$\int_{x_*}^x \left( \frac{1}{(1 - \bar{\pi})} \right) (-e^{t(r_2 + \frac{\bar{\pi} r_2}{(1 - \bar{\pi})})} - t r_2 e^{t(r_2 + \frac{\bar{\pi} r_2}{(1 - \bar{\pi})})} - \pi (r_1 + r_2) c_1 e^{t(r_1 + r_2 + \frac{\bar{\pi} r_2}{(1 - \bar{\pi})})}) dt = (*).$$

Se observa que  $r_2 + \bar{\pi} \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})} = \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})}$ , por ende:

$$(*) = \left( \frac{1}{1 - \bar{\pi}} \right) (-e^{t \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})}} \frac{(1 - \bar{\pi})}{r_2}) \Big|_{x_*}^x - t(1 - \bar{\pi}) e^{t \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})}} \Big|_{x_*}^x +$$

$$\int_{x_*}^x (1 - \bar{\pi}) e^{t \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})}} dt - \frac{\pi(r_2 + r_1) c_1}{r_1 + \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})}} e^{t(r_1 + \frac{r_2}{(1 - \bar{\pi})})} \Big|_{x_*}^x =$$

$$e^{(x(\frac{r_2}{(1-\bar{\pi})}))}(\frac{-1-xr_2}{r_2} + \frac{(1-\bar{\pi})}{r_2} - e^{r_1x} \frac{\pi c_1(r_2+r_1)}{(1-\bar{\pi})r_1+r_2}) + cte.$$

(La constante es la misma función evaluada en  $x_*$ )

Luego como  $(x(\frac{r_2}{(1-\bar{\pi})})) - (x(\frac{r_2\bar{\pi}}{(1-\bar{\pi})})) = r_2x$ :

$$F(x) = e^{xr_2}(\frac{-xr_2-\bar{\pi}}{r_2} - e^{r_1x} \frac{\pi c_1(r_2+r_1)}{(1-\bar{\pi})r_1+r_2}) + cte e^{-x \frac{\bar{\pi}r_2}{(1-\bar{\pi})}}.$$

Como  $F$  es integrable en  $(-\infty, x_*)$  vale que  $cte = 0$ . A primera vista esto es una condición extra que se le pide a una función para que sea candidato, pero en la práctica se pide que  $Q_*$  se anule en  $x_*$ . Entonces:

$$Q_*(x) = (\frac{-xr_2-\bar{\pi}}{r_2} - e^{r_1x} \frac{\pi c_1(r_2+r_1)}{(1-\bar{\pi})r_1+r_2}).$$

Análogamente:

$$Q^*(x) = (\frac{xr_1-\pi}{r_1} - e^{-r_2x} \frac{\bar{\pi}c_2(r_2+r_1)}{(1-\pi)r_2+r_1}).$$

□

**Teorema 5.5.1. Verificación:** Sea  $V$  una función candidato, si además  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  entonces  $V$  es la función de ganancia y  $\tau_{x_*,x^*}$  es un tiempo de parada óptima.

*Demostración:*

Basta ver que  $V$  está en las hipótesis del teorema 5.3.1, para ello solo falta probar que  $V(x) \geq |x| \forall x \in (x_*, x^*)$ .

En primer lugar se observa que  $Q^*$  es creciente en los positivos y  $Q_*$  es decreciente en los negativos (derivar usando el lema 5.5.1), entonces para  $x \in [0, x^*)$ :

$$V(x) = \mathbb{E}_x(Q_*(I)\mathbf{1}_{I \leq x_*}) + \mathbb{E}_x(Q^*(M)\mathbf{1}_{M \geq x^*}) \geq \mathbb{E}_x(Q_*(I)\mathbf{1}_{I \leq x_*}) + \mathbb{E}_x(Q^*(M)) =$$

$$\bar{\pi}c_2e^{-r_2x} + (1-\pi)Q^*(x) + \pi \int_0^\infty Q^*(t+x)e^{-r_1t}r_1dt =$$

$$\begin{aligned} & \bar{\pi}c_2e^{-r_2x} + (1-\pi)(\frac{xr_1-\pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_2+r_1)c_2e^{-r_2x}}{-((1-\pi)r_2+r_1)}) \\ & + \pi \int_0^\infty \frac{(x+t)r_1-\pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_2+r_1)c_2e^{-r_2(x+t)}}{-((1-\pi)r_2+r_1)} dt. \end{aligned}$$

Estudiando el tercer sumando:

$$\begin{aligned}
& \pi \int_0^\infty \frac{(x+t)r_1 - \pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_2 + r_1)c_2 e^{-r_2(x+t)}}{-((1-\pi)r_2 + r_1)} dt = \\
& \pi((-xe^{-r_1 t} |_0^\infty) + (\int_0^\infty t r_1 e^{-r_1 t} dt) \\
& + (\int_0^\infty r_1 e^{-t(r_1+r_2)-r_2 x} \frac{\bar{\pi}(r_1 + r_2)c_2}{-(r_1 + r_2(1-\pi))} dt)) = \\
& \pi(x + \int_0^\infty e^{-r_1 t} dt - \frac{\pi}{r_1} + (r_1 e^{-t(r_1+r_2)-r_2 x} \frac{\bar{\pi}c_2}{(r_1 + r_2(1-\pi))} |_0^\infty)) = \\
& \pi(x - \frac{e^{-r_1 t}}{r_1} |_0^\infty - \frac{\pi}{r_1} - e^{-r_2 x} \frac{\bar{\pi}c_2 r_1}{r_1 + r_2(1-\pi)}) = \\
& \pi(x + \frac{1-\pi}{r_1} - e^{-r_2 x} \frac{\bar{\pi}c_2 r_1}{r_1 + r_2(1-\pi)}).
\end{aligned}$$

De esta manera:

$$\begin{aligned}
V(x) & \geq \bar{\pi}c_2 e^{-r_2 x} + (1-\pi)(\frac{x r_1 - \pi}{r_1} \\
& + \frac{\bar{\pi}(r_2 + r_1)c_2 e^{-r_2 x}}{-((1-\pi)r_2 + r_1)}) + \pi(x + \frac{1-\pi}{r_1} - e^{-r_2 x} \frac{\bar{\pi}c_2 r_1}{r_1 + r_2(1-\pi)}) = \\
& \bar{\pi}c_2 e^{-r_2 x} (1 - \frac{1}{(1-\pi)r_2 + r_1} ((1-\pi)(r_1 + r_2)) + \pi r_1) + \\
& \bar{\pi}c_2 e^{-r_2 x} ((1-\pi)(x - \frac{\pi}{r_1}) + \pi(x + \frac{1-\pi}{r_1})) = \\
& (1-\pi)(x - \frac{\pi}{r_1}) + \pi(x + \frac{1-\pi}{r_1}) = x + (1-\pi)\frac{-\pi}{r_1} + \pi\frac{1-\pi}{r_1} = x
\end{aligned}$$

$\Rightarrow V(x) \geq x \ \forall x \geq 0$ , se prueba de forma análoga que  $V(x) \geq -x \ \forall x \leq 0$ ,

luego  $V$  está en hipótesis del teorema 5.3.1 concluyendo la prueba.

□

Quedo probado que si existe una función de valor con representación promediante bilateral, es única. Resta ver que este candidato es efectivamente solución.

### 5.5.2. Existencia de candidato

Se procede a probar la existencia de un candidato y se propone un método para encontrarlo. A lo largo de esta subsección estarán definidas las siguientes funciones (obviamente haciendo referencia a la observación 5.5.1 y el lema 5.5.1).

**Definición 5.5.2.** *Se definen*

$$\begin{aligned}
 & \blacksquare \\
 & c_1(x_*, x^*) = \frac{-x_* - x^* e^{r_2(-x_* + x^*)}}{\pi(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})}, \quad x_* > 0, x_* < 0, \\
 & \blacksquare \\
 & c_2(x_*, x^*) = \frac{x^* + x_* e^{r_1(-x_* + x^*)}}{\bar{\pi}(-e^{-r_2 x^* + r_1(x^* - x_*)} + e^{-x_* r_2})}, \quad x_* > 0, x_* < 0, \\
 & \blacksquare \\
 & Q^*(x) = \frac{x r_1 - \pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_2 + r_1) c_2 e^{-r_2 x}}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)}, \\
 & \blacksquare \\
 & Q_*(x) = \frac{-x r_2 - \bar{\pi}}{r_2} + \frac{\pi(r_2 + r_1) c_1 e^{r_1 x}}{-((1 - \bar{\pi})r_1 + r_2)}.
 \end{aligned}$$

Es esperable que los puntos  $x^*, x_*$  no se encuentren explícitamente sino que cada uno sea raíz de una función. Sin embargo aprovechando la simetría de  $|x|$  se procede a probar que solo es necesario encontrar una raíz a una función real.

**Lema 5.5.2.** *Se propone una ecuación equivalente a  $Q^*(x) = Q_*(x) = 0$ .*

*Sean  $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\bar{\rho} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidos (el denominador nunca se anula):*

$$\begin{aligned}
 \rho(u) = & \left( \frac{-\pi}{r_1} + e^{r_1 u} u \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right) \left( -1 + \frac{(r_2 + r_1)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \right) \frac{1 + e^{r_1 u}}{1 - e^{u(r_1 + r_2)}})^{-1} \\
 \bar{\rho}(u) = & \left( \frac{-\pi}{r_1} + e^{r_1 u} u \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right) \left( -1 + \frac{(r_2 + r_1)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \right) \frac{1 + e^{r_1 u}}{1 - e^{u(r_1 + r_2)}})^{-1},
 \end{aligned}$$

$$\bar{\rho}(u) =$$

$$\left( \frac{-\pi}{r_1} + e^{r_1 u} u \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right) \left( -1 + \frac{(r_2 + r_1)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \right) \frac{1 + e^{r_1 u}}{1 - e^{u(r_1 + r_2)}})^{-1},$$

entonces:

i)

$$\frac{\pi}{r_1} + \frac{\pi}{r_1} \frac{(r_2 + r_1)(e^{r_1 u}(\frac{r_1 u}{\pi} - 1) - 1)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})} = \rho(u),$$

$$\frac{\bar{\pi}}{r_2} + \frac{\bar{\pi}}{r_2} \frac{(r_1 + r_2)(e^{r_2 u}(\frac{r_2 u}{\bar{\pi}} - 1) - 1)}{-((1 - \bar{\pi})r_1 + r_2)(1 - e^{u(r_2 + r_1)}) + (r_1 + r_2)(1 + e^{r_2 u})} = \bar{\rho}(u)$$

ii)  $\rho(u) \geq 0 \quad \forall u > 0, \quad \bar{\rho}(u) > 0 \quad \forall u > 0,$

iii)  $\exists u_0 > 0$  tq.  $\rho(u_0) + \bar{\rho}(u_0) - u_0 = 0$

iv) para  $u_0$  del item anterior y definiendo  $x^* = \rho(u_0)$ ,  $x_* = -\bar{\rho}(u_0) = -u_0 + \rho(u_0)$  se cumple que  $x^* > 0$ ,  $x_* < 0$ .

Demostración de i):

$$\rho(u) =$$

$$\left( \frac{-\pi}{r_1} + e^{r_1 u} u \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right) \left( -1 + \frac{(r_2 + r_1)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \frac{1 + e^{r_1 u}}{1 - e^{u(r_1 + r_2)}} \right)^{-1} =$$

(factor común en el divisor)

$$= \left( \frac{-\pi}{r_1} + e^{r_1 u} u \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right) \times \left( \frac{-((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right)^{-1} =$$

(factor común en el nominador)

$$\left( \frac{\left( \frac{-\pi}{r_1} \right) (((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})) + (e^{r_1 u} u)(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right) \times$$

$$\left( \frac{-((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})}{((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})} \right)^{-1} =$$

(términos se cancelan)

$$\frac{\left( \frac{-\pi}{r_1} \right) (((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})) + (e^{r_1 u} u)(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})} =$$

(se suma y resta  $\pi(1 + e^{r_1 u})$  en un factor convenientemente)

$$\frac{1}{r_1} \frac{-\pi(((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)})) + (r_1 e^{r_1 u} u + \pi(1 + e^{r_1 u}) - \pi(1 + e^{r_1 u}))(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})} =$$

$$\frac{\pi}{r_1} + \frac{\pi}{r_1} \frac{(r_2 + r_1)(e^{r_1 u} \left( \frac{r_1 u}{\pi} - 1 \right) - 1)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1 + r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})} = \rho(u).$$

La igualdad con  $\bar{\rho}$  se prueba de igual forma.

□

Demostración de ii):

Solo se prueba para  $\rho$  (para  $\bar{\rho}$  la prueba es igual).

$$\begin{aligned}
& \rho(u) > 0 \quad \forall u > 0 \Leftrightarrow \\
& \frac{\pi}{r_1} + \frac{\pi}{r_1 - ((1-\pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1+r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})} > 0 \quad \forall u > 0 \\
& \Leftrightarrow \frac{(r_2 + r_1)(e^{r_1 u}(\frac{r_1 u}{\pi} - 1) - 1)}{-((1-\pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1+r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u})} > -1 \quad \forall u > 0 \\
& \Leftrightarrow (r_2 + r_1)(e^{r_1 u}(\frac{r_1 u}{\pi} - 1) - 1) > \\
& \quad -((1-\pi)r_2 + r_1)(1 - e^{u(r_1+r_2)}) + (r_2 + r_1)(1 + e^{r_1 u}) \quad \forall u > 0 \\
& \Leftrightarrow (e^{r_1 u}(\frac{r_1 u}{\pi} - 1) - 1) > -((\frac{(1-\pi)r_2 + r_1}{(r_2 + r_1)})(1 - e^{u(r_1+r_2)}) + (1 + e^{r_1 u})) \quad \forall u > 0 \\
& \Leftrightarrow e^{r_1 u}(\frac{r_1 u}{\pi}) > (\frac{(1-\pi)r_2 + r_1}{(r_2 + r_1)})(1 - e^{u(r_1+r_2)}) \quad \forall u > 0.
\end{aligned}$$

Lo cual se cumple ya que el término a la derecha es no positivo y el de la izquierda es positivo.

□

Demostración de iii):

Basta probar que:

$$\rho'(0) > \frac{1}{2}, \quad \bar{\rho}'(0) > \frac{1}{2}, \quad \rho(0) = \bar{\rho}(0) = 0, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \rho(u) = \frac{\pi}{r_1}, \quad \text{y} \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\rho}(u) = \frac{\bar{\pi}}{r_2}.$$

Solo se prueba que  $\rho'(0) > \frac{1}{2}$  (lo demás es análogo o se deduce de i) ).

Por comodidad y salud mental del lector se denota:

$$K = \frac{(1-\pi)r_2 + r_1}{r_2 + r_1}.$$

Se recuerda de i) que:

$$\begin{aligned}
\rho(u) &= \frac{\pi}{r_1} + \frac{\pi}{r_1 - \frac{((1-\pi)r_2 + r_1)}{(r_2 + r_1)}(1 - e^{u(r_1+r_2)}) + (1 + e^{r_1 u})} \\
&\Rightarrow \rho'(u) = \\
&\frac{\pi}{r_1} (((r_1 e^{r_1 u}(\frac{r_1 u}{\pi} - 1)) + e^{r_1 u} \frac{r_1}{\pi})) (K(e^{u(r_1+r_2)} - 1) + 1 + e^{r_1 u}) \times (K(e^{u(r_1+r_2)} - 1) + 1 + e^{ur_1})^{-2}
\end{aligned}$$

$$-(K((r_1 + r_2)e^{(r_1+r_2)u}) + r_1 e^{r_1 u})(e^{r_1 u}(\frac{r_1 u}{\pi} - 1) - 1)) \times \\ (K(e^{u(r_1+r_2)} - 1) + 1 + e^{ur_1})^{-2}$$

$$\Rightarrow \rho'(0) = \frac{\pi}{4r_1}((-r_1 + \frac{r_1}{\pi})(2) - (K(r_1 + r_2) + r_1)(-2))$$

$$\Rightarrow \rho'(0) = \frac{\pi}{2r_1}(\frac{r_1}{\pi} + K(r_1 + r_2)) > \frac{1}{2}.$$

□

Demostración de iv : Se deduce de ii) y iii). □

El siguiente lema da sentido a la definición de  $\rho$  y  $\bar{\rho}$ :

**Lema 5.5.3.** *Bajo las notaciones de la sección y el lema anterior se cumple para  $x_* < 0$ ,  $x^* > 0$ :*

- $Q^*(x^*) = 0 \Leftrightarrow \rho(x^* - x_*) = x^*$  (esto es un abuso de notación, al ser  $c_1$  una función,  $Q^*$  depende en realidad de dos variables),
- $Q_*(x_*) = 0 \Leftrightarrow \bar{\rho}(x^* - x_*) = x_*$  (sucede lo mismo).

Demostración: (solo se demuestra el primer ítem)

$$\begin{aligned} Q^*(x^*) = 0 &\Leftrightarrow x^* - \frac{\pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} e^{-r_2 x^*} c_2 = 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= x^* - \frac{\pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} e^{-r_2 x^*} \left( \frac{x^* + x_* e^{r_1(x^* - x_*)}}{e^{-r_2 x^*} - e^{r_1(x^* - x_*) - r_2 x_*}} \right) \frac{1}{\bar{\pi}} \\ \Leftrightarrow 0 &= x^* - \frac{\pi}{r_1} + \frac{(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left( \frac{x^* + x_* e^{r_1(x^* - x_*)}}{1 - e^{r_1(x^* - x_*) + r_2(x_* + x^*)}} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= x^* - \frac{\pi}{r_1} + \frac{(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left( \frac{x^* + (x_* + x^* - x^*) e^{r_1(x^* - x_*)}}{1 - e^{r_1(x^* - x_*) + r_2(-x_* + x^*)}} \right) \\ \Leftrightarrow 0 &= x^* - \frac{\pi}{r_1} + \frac{(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left( \frac{x^*(1 + e^{r_1(x^* - x_*)}) + (x_* - x^*) e^{r_1(x^* - x_*)}}{1 - e^{r_1(x^* - x_*) + r_2(-x_* + x^*)}} \right) \\ \Leftrightarrow x^* &\left( 1 + \frac{(r_1 + r_2)}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left( \frac{(1 + e^{r_1(x^* - x_*)})}{1 - e^{(r_1 + r_2)(x^* - x_*)}} \right) \right) \\ &= \frac{\pi}{r_1} + \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left( \frac{(x_* - x^*) e^{r_1(x^* - x_*)}}{1 - e^{(r_1 + r_2)(x^* - x_*)}} \right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x^* =$$

$$-\left(\frac{\pi}{r_1} + \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left(\frac{(x_* - x^*)e^{r_1(x^* - x_*)}}{1 - e^{(r_1 + r_2)(x^* - x_*)}}\right)\right) \\ \times \left((-1 + \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left(\frac{(1 + e^{r_1(x^* - x_*)})}{1 - e^{(r_1 + r_2)(x^* - x_*)}}\right)\right)\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow x^* =$$

$$\left(-\frac{\pi}{r_1} + \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left(\frac{(-x_* + x^*)e^{r_1(x^* - x_*)}}{1 - e^{(r_1 + r_2)(x^* - x_*)}}\right)\right) \\ \times \left((-1 + \frac{(r_1 + r_2)}{((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left(\frac{(1 + e^{r_1(x^* - x_*)})}{1 - e^{(r_1 + r_2)(x^* - x_*)}}\right)\right)\right)^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \rho(x^* - x_*) = x^*.$$

□

Se procede a ver el significado de  $c_1$  y  $c_2$ , el lector puede revisar (5.8) y suponer que ambos ya están definidos. Sin embargo, dicha ecuación asume la existencia de la integral. En este caso  $c_1$  y  $c_2$  están definidos en 5.5.2.

**Lema 5.5.4.** *Tomando  $Q^*, Q_*, x_*$  y  $x^*$  definidos a partir del  $u_0$  definido en el lema 5.5.2 iii) y definiendo  $V(x) = \mathbb{E}_x(Q^*(M)\mathbf{1}_{M \geq x^*}) + \mathbb{E}_x(Q_*(I)\mathbf{1}_{I \leq x_*}) \forall x \in \mathbb{R}$  se cumple que:*

i)

$$-\infty < \frac{1}{\pi} \int_{x^*}^{\infty} Q^*(t)e^{-r_1 t} r_1 dt = c_1 < \infty, \\ -\infty < \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x_*} Q_*(t)e^{r_2 t} r_2 dt = c_2 < \infty.$$

ii)

$$V(x) = |x| \forall x \notin (x_*, x^*).$$

iii)  $c_1 > 0, c_2 > 0$ .

Demostración i) (solo se prueba la segunda igualdad):

Se recuerda que:

■

$$c_1 = \frac{-x_* - x^* e^{r_2(-x_* + x^*)}}{\pi(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})}, \quad x_* > 0, \quad x_* < 0.$$

■

$$c_2 = \frac{x^* + x_* e^{r_1(-x_* + x^*)}}{\pi(-e^{-r_2 x_* + r_1(x^* - x_*)} + e^{-x^* r_2})} \quad x_* > 0, \quad x_* < 0.$$

■

$$Q_*(x) = \frac{-xr_2 - \bar{\pi}}{r_2} + \frac{\pi(r_2 + r_1)c_1 e^{r_1 x}}{-((1 - \bar{\pi})r_1 + r_2)}.$$

Sean  $C_2 = \int_{-\infty}^{x_*} Q_*(t) e^{r_2 t} r_2 dt$  y  $C_1 = \int_{-\infty}^{x_*} Q_*(t) e^{r_2 t} r_2 dt$ . Desarrollando de forma similar al teorema 5.5.1 se prueba que es una integral convergente finita. Por otro lado sea la ecuación diferencial dada por:

$$\frac{1}{\bar{\pi} r_2} (-e^{r_2 x} - x r_2 e^{r_2 x} - \pi c_1 (r_1 + r_2) e^{x(r_1 + r_2)}) - F(x) = \frac{1 - \bar{\pi}}{\bar{\pi} r_2} F'(x), \quad F(x_*) = 0.$$

Por las operaciones realizadas en el lema 5.5.1 se ve que  $e^{r_2 x} Q_*(x)$  es la solución a dicha ecuación diferencial. Integrando de ambos lados entre  $-\infty$  y  $x_*$ :

$$\begin{aligned} & (-x_* - \pi c_1 e^{r_1 x_*}) \frac{e^{r_2 x_*}}{\bar{\pi} r_2} - \int_{-\infty}^{x_*} F(u) du = \frac{1}{\bar{\pi} r_2} (1 - \bar{\pi}) F(x_*) \\ & \Rightarrow (-x_* - \pi c_1 e^{r_1 x_*}) \frac{e^{r_2 x_*}}{\bar{\pi} r_2} - \int_{-\infty}^{x_*} F(u) du = 0 \\ & \Rightarrow (-x_* - \pi c_1 e^{r_1 x_*}) \frac{e^{r_2 x_*}}{\bar{\pi} r_2} = \int_{-\infty}^{x_*} F(u) du \\ & \Rightarrow (-x_* - \pi c_1 e^{r_1 x_*}) \frac{e^{r_2 x_*}}{\bar{\pi}} = \int_{-\infty}^{x_*} r_2 e^{r_2 u} Q_*(u) du = C_2 \\ & \Rightarrow (-x_* - \pi \frac{-x_* - x^* e^{r_2(-x_* + x^*)}}{\pi(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})} e^{r_1 x_*}) \frac{e^{r_2 x_*}}{\bar{\pi}} = C_2 \\ & \Rightarrow \left( \frac{(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})(-x_*)}{(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})} + \frac{x_* + x^* e^{r_2(-x_* + x^*)}}{(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})} e^{r_1 x_*} \right) \frac{e^{r_2 x_*}}{\bar{\pi}} \\ & \quad = C_2 \\ & \Rightarrow \frac{x_*(e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)}) - x_*(e^{r_1 x_*}) + x_*(e^{r_1 x_*}) + x^*(e^{r_2(-x_* + x^*) + r_1(x_*)})}{\bar{\pi}(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})} e^{r_2 x_*} \\ & \quad = C_2 \\ & \Rightarrow \frac{x_*(e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*) - r_2(-x_* + x^*) - r_1(x_*)}) + x^*}{\bar{\pi}(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} + e^{x_* r_1})} e^{r_2 x_* + r_2(-x_* + x^*) + r_1(x_*)} \\ & \quad = C_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{x_*(e^{r_1 x^* - r_1 x_*}) + x^*}{\bar{\pi}(-e^{r_1 x^* + r_2(x^* - x_*)} - (r_2 x_* + r_2(-x_* + x^*) + r_1(x_*)) + e^{x_* r_1 - (r_2 x_* + r_2(-x_* + x^*) + r_1(x_*))})} \\
&= C_2 \\
&\Rightarrow c_2 = C_2
\end{aligned}$$

□

Demostración ii):

Se deduce de la ecuación diferencial del teorema 5.5.1 y la parte anterior.

□

Demostración iii), solo se prueba  $c_1 > 0$ ):

Razonando como en i) se puede ver que:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (x^* - \bar{\pi}c_2 e^{-r_2 x^*}) \frac{e^{-r_1 x^*}}{\bar{\pi}} \\
\Leftrightarrow c_1 &= (x^* + \bar{\pi}c_2 e^{-r_2 x^*}) \frac{(1 - \pi)r_2 + r_1}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} \left( \frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_2} \right) \frac{e^{-r_1 x^*}}{\bar{\pi}}.
\end{aligned}$$

Además, usando que  $Q^*(x^*) = \frac{x^* r_1 - \pi}{r_1} + \frac{\bar{\pi}(r_2 + r_1)c_2 e^{-r_2 x^*}}{-((1 - \pi)r_2 + r_1)} = 0$ :

$$c_1 = (x^* + (\frac{\pi - x^* r_1}{r_1})(\frac{r_2(1 - \pi) + r_1}{r_1 + r_2})) \frac{e^{-r_1 x^*}}{\bar{\pi}} > 0.$$

□

**Corolario 5.5.2. Finalización del problema:** Tomando  $x^*, x_*$  como el lema anterior se prueba que  $V$  definida como:  $V(x) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{M \geq x^*} Q^*(M)) + \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{I \leq x^*} Q_*(I))$ , es candidato y utilizando el teorema 5.5.1 se deduce que es la función de ganancia y que los óptimos son  $x^*, x_*$ .

Demostración:

Por el lema 5.5.2 iii) y el teorema 5.5.1 solo basta ver que  $V$  es una función candidato. De la definición de candidato iii) y vi) se cumplen por construcción y los otros puntos fueron probados en i) y ii) del lema 5.5.2.

□

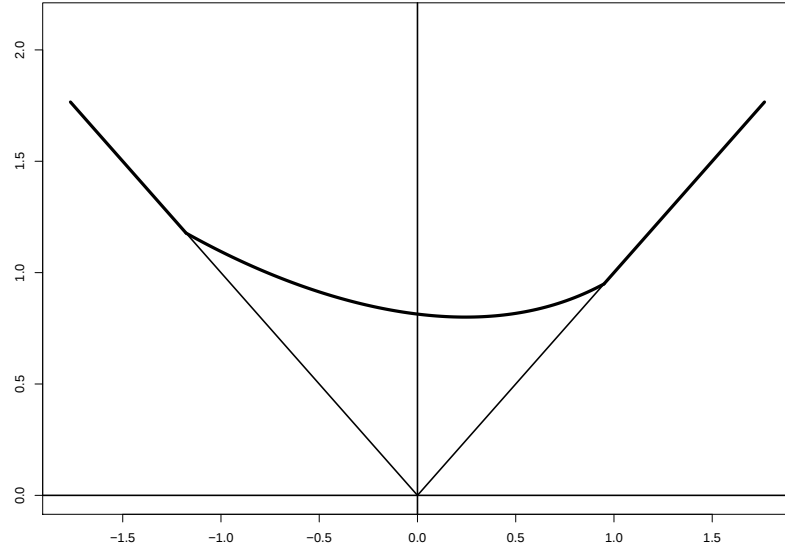


Figura 5.1: Gráficas de  $V(x)$  y  $g(x)$  con  $(\alpha, \lambda, \beta, \gamma, r) = (1, 3, 3, 1, 1)$ .

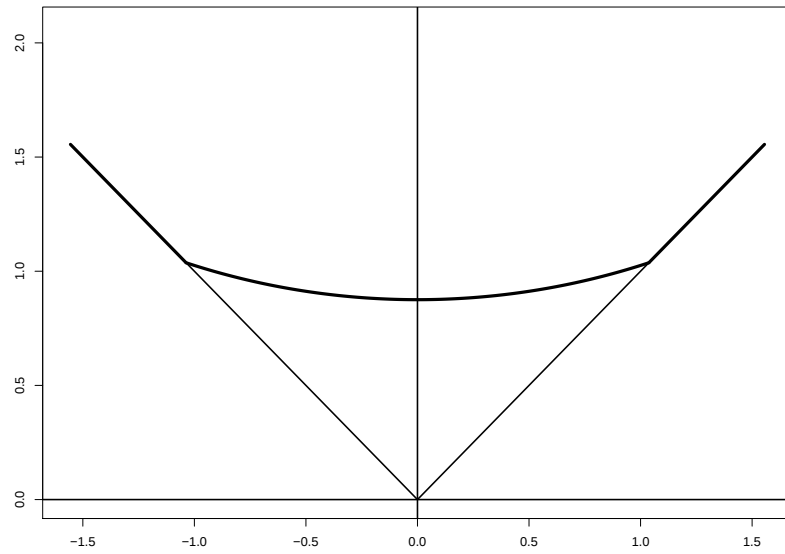


Figura 5.2: Gráficas de  $V(x)$  y  $g(x)$  con  $(\alpha, \lambda, \beta, \gamma, r) = (1, 1, 1, 1, 1)$ .

# Conclusiones y futuros trabajos.

En el caso estudiado bilateral no hay pegado suave como predecía el teorema 5.4.1.

Existe la representación bilateral promediante en más casos de los que se conocen. Probablemente en todos los procesos de Lévy .

El teorema de verificación puede utilizarse en más casos para futuros trabajos, además es de especial interés probar hasta que punto existe la representación integral de las funciones excesivas. Si se llegara a un resultado general se podría concluir que el estudio de problemas de parada óptima bilaterales para procesos de Lévy es equivalente a encontrar la distribución del máximo y mínimo detenidos en un tiempo exponencial independiente al proceso y las funciones  $Q^*$ ,  $Q_*$ . Una idea para probar dicha representación sería dividir el proceso de Lévy en casos:

- Caso en que la distribución de la variable detenida en un tiempo exponencial independiente tenga densidad (se sabe que hay representación, véase [Bertoin(1996)]).
- Caso en que haya un drift o que los saltos sean suficientemente numerosos en algún sentido. Aquí el autor sospecha que con algunas modificaciones a [Dynkin(1969)] es posible encontrar dicha representación.
- Poisson compuesto que ya se vió, que en al menos un caso, si tiene representación integral la función de valor. Este caso debe estudiarse aparte ya que es similar al discreto.
- Si hay otro caso, debe ser rebuscado primero habría que encontrarlo.

# Bibliografía

- [Applebaum(2009)] David Applebaum., Lévy Processes and Stochastic Calculus, Second edition, Cambridge studies in advanced mathematics, 116 Cambridge, (2009).
- [Bertoin(1996)] Bertoin, J., Lévy processes, Cambridge Tracts in Mathematics. 121. Cambridge: Cambridge Univ. Press., (1996).
- [BorodinPaavo(1996)] Andrei N. Borodin., Paavo Salminen Handbook of Brownian Motion-Facts and Formulae, Birkhäuser, (1996).
- [Borodin(2017)] Andrei N. Borodin., Stochastic Processes, Birkhäuser, (2017).
- [Christensen et al.(2013)] Christensen, S., Salminen, P. and Ta, Bao Quoc. Optimal stopping of strong Markov processes. Stochastic Process. Appl. 123, no. 3, (2013), 1138–1159.
- [Dynkin(1969)] E B Dynkin ., The space of exits of a Markov process. Russ. Math. Surv. 24 89 , (1969) .
- [Kyprianou(2006)] Kyprianou, A. E., Introductory lectures on fluctuations of Lévy processes with applications. Springer, (2006).
- [Lewis and Mordecki(2008)] Lewis, A., Mordecki, E. Wiener-Hopf factorization for Lévy processes with negative jumps with rational transforms. *Journal of Applied Probability, Vol 45, Nr. 1.* (2008), 118–134.
- [Mordecki(2002a)] Mordecki, E., Optimal stopping and perpetual options for Lévy processes., Finance Stoch., **6**(4) 473–493, (2002).
- [Mordecki(2002b)] Mordecki, E. Perpetual options for Lévy processes in the Bachelier model. Proceedings of the Steklov Mathematical Institute, **237**, 256–264, (2002).
- [Mordecki and Mishura(2016)] Mordecki, E., and Mishura, Yu., Optimal stopping for Lévy processes with one-sided solutions, SIAM Journal on Control and Optimization, 54(5), (2016), 2553–2567.
- [Mordecki and Oliú(2019)] Mordecki, E., and Oliú, F., Two-sided optimal stopping for Lévy processes, arXiv:1912.08171, (2019).

- [Mordecki and Salminen(2007)] Mordecki, E. and Salminen, P. Optimal stopping of Hunt and Lévy processes. *Stochastics* 79, no. 3-4, (2007), 233–251.
- [Petrov(1975)] Petrov, V. V. Sums of Independent Random Variables. *Stochastic Modelling and Applied Probability*, 8. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.
- [Peskir and Shiryaev(2006)] Peskir, G. and Shiryaev, A. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems Birkh.<sup>a</sup>user Verlag Basel-Boston-Berlin.
- [Sato(1999)] Sato, Ken-Iti, Lévy processes and infinitely divisible distributions. Cambridge University Press, (1999).
- [Shiryaev(2008)] Shiryaev, A. N. Optimal stopping rules. *Stochastic Modelling and Applied Probability*, 8. Springer-Verlag, Berlin, 2008.