



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Coherencia, Entrelazamiento y Discordia: Correlaciones cuánticas en sistemas bipartitos

Juan Diego Young Eguren

Programa de Posgrado en Física  
Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay  
Febrero de 2020





UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Coherencia, Entrelazamiento y Discordia: Correlaciones cuánticas en sistemas bipartitos

Juan Diego Young Eguren

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Física, Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Director:

Dra. Adriana Auyanet

Montevideo – Uruguay

Febrero de 2020



Young Eguren, Juan Diego

Coherencia, Entrelazamiento y Discordia: Correlaciones cuánticas en sistemas bipartitos / Juan Diego Young Eguren. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ingeniería, Facultad de Ciencias, 2020.

XIV, 127 p. 29, 7cm.

Director:

Adriana Auyuanet

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Física, 2020.

Referencias bibliográficas: p. 115 – 119.

1. Qubit, 2. Entrelazamiento, 3. Discordia, 4. Coherencia, 5. Estados de Bell, 6. Estados X.  
I. Auyuanet, Adriana, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Física. III. Título.



INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

---

Dr. Raúl Donangelo

---

Dr. Alejandro Romanelli

---

Dr. Julio Fernández

---

Dr. Horacio Failache

---

Dra. Adriana Auyuanet

Montevideo – Uruguay  
Febrero de 2020





## RESUMEN

Existen diferentes tipos de correlaciones cuánticas, las cuales describen distintos aspectos de los sistemas cuánticos multipartitos. Hasta hoy día no está entendida cuál es la interrelación existente entre todas esas correlaciones. La Coherencia, por ser manifestación del principio de superposición, es una correlación que subyace al Entrelazamiento y a la Discordia. Al día de hoy, se ha relacionado a la Coherencia con el Entrelazamiento y con la Discordia por separado y de la siguiente manera: dado un estado de varias partes con una Coherencia dada, se determinó la cantidad de Entrelazamiento que se puede crear a partir de dicho estado y uno auxiliar. Se realizó un estudio análogo con la Discordia. Sin embargo, no se conoce ninguna relación que involucre en simultáneo a estas tres correlaciones cuando están presentes en un estado cuántico.

En esta tesis hallamos ecuaciones que relacionan la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia cuando el estado cuántico interactúa con su medio ambiente. Estudiamos la interrelación entre dichas correlaciones y en particular la necesidad de la presencia de Coherencia para la existencia del Entrelazamiento y la Discordia.

El trabajo se hizo en etapas, comenzando con sistemas de dos qubits en una familia de estados particular, que permite un tratamiento analítico: los estados Diagonales de Bell. Luego se generalizaron los resultados a una familia de estados cuánticos más grande (que incluye a los estados Diagonales de Bell): los estados X. Se logró obtener ecuaciones que vinculan las distintas correlaciones, de a pares, y las tres en simultáneo, para todos los canales de ruido trabajados. También hallamos una ecuación que vincula la Coherencia de los estados X con la de un estado general de dos qubits. Por último, también se demostró lo dicho al principio: que para estas familias de estados estudiadas, la Coherencia es la correlación fundamental, gracias a la cual existe tanto la

Discordia como el Entrelazamiento.

Palabras claves:

Qubit, Entrelazamiento, Discordia, Coherencia, Estados de Bell, Estados X.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Nociones básicas</b>	<b>5</b>
2.1	Qubit . . . . .	5
2.2	Dos qubits . . . . .	6
2.2.1	Estados X . . . . .	7
2.3	Evolución de un sistema de qubits . . . . .	9
2.3.1	Representación de Kraus . . . . .	10
2.3.2	Ruido cuántico . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Correlaciones</b>	<b>13</b>
3.1	Entrelazamiento . . . . .	13
3.1.1	Medición del Entrelazamiento . . . . .	16
3.1.2	Concurrencia . . . . .	17
3.2	Discordia cuántica . . . . .	19
3.2.1	Teoría de Información Clásica . . . . .	19
3.2.2	Discordia cuántica . . . . .	20
3.3	Coherencia cuántica . . . . .	23
3.3.1	Coherencia clásica y Coherencia cuántica . . . . .	23
3.3.2	Estados incoherentes y operaciones incoherentes . . . . .	24
3.3.3	Medidas de Coherencia . . . . .	25
3.4	Geometría de los estados diagonales de Bell . . . . .	26
3.5	Medidas geométricas para correlaciones cuánticas . . . . .	27
3.5.1	Definición . . . . .	27
3.5.2	Norma traza y norma de Hilbert-Schmidt . . . . .	28
3.5.3	Medidas geométricas del Entrelazamiento . . . . .	29
3.5.4	Medida geométrica de la Discordia . . . . .	30
3.5.5	Medida geométrica de la Coherencia . . . . .	31

<b>4</b>	<b>Relaciones dinámicas para estados Bell Diagonal</b>	<b>33</b>
4.1	Expresión analítica de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia . . . . .	33
4.1.1	Expresiones analíticas en Hilbert Schmidt . . . . .	33
4.1.2	Expresiones en Trace Norm . . . . .	34
4.2	Evolución bajo canales de ruido . . . . .	35
4.2.1	Evolución de las correlaciones en la norma de Hilbert Schmidt . . . . .	36
4.2.2	Evolución de las correlaciones en norma Traza . . . . .	40
4.3	Relaciones dinámicas . . . . .	44
4.4	Relaciones dobles . . . . .	45
4.4.1	Relaciones entre la Coherencia y el Entrelazamiento . . . . .	45
4.4.2	Relación entre la Coherencia y Discordia . . . . .	48
4.5	Relaciones dinámicas triples . . . . .	51
4.5.1	Relaciones dinámicas en Hilbert Schmidt . . . . .	51
4.5.2	Relaciones dinámicas en Trace Norm . . . . .	55
4.6	Dependencia paramétrica . . . . .	59
4.6.1	Curvas para Hilbert Schmidt . . . . .	59
4.6.2	Curvas para Trace Norm . . . . .	64
<b>5</b>	<b>Relaciones dinámicas para estados X</b>	<b>69</b>
5.1	Expresión analítica de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para estados X . . . . .	69
5.1.1	Expresiones analíticas usando Trace Norm . . . . .	70
5.2	Regiones de existencia para Estados X . . . . .	71
5.2.1	Deformación del Tetrahedro para distintos valores fijos de $s$ y $c$ . . . . .	71
5.2.2	Deformación del octaedro de Entrelazamiento cero . . . . .	74
5.2.3	Regiones de Discordia para Estados X . . . . .	75
5.2.4	Existencia para distintos valores de $r_1$ , $r_2$ y $r_3$ , en el plano $s - c$ . . . . .	78
5.3	Evolución bajo canales de ruido para estados X . . . . .	79
5.3.1	Evolución de las correlaciones usando Trace Norm . . . . .	80
5.4	Relaciones dinámicas . . . . .	91
5.4.1	Relaciones triples . . . . .	91
5.5	Dependencia paramétrica . . . . .	99

5.5.1	Curvas en Phase Damping . . . . .	99
5.5.2	Curvas para Bit Flip . . . . .	101
5.5.3	Curvas para Depolarizing . . . . .	103
5.6	Condiciones de Coherencia, Entrelazamiento y Discordia cero . .	105
<b>6</b>	<b>Estados generales de dos qubits</b>	<b>109</b>
6.1	Estados de dos qubits . . . . .	109
6.2	Relación entre la Coherencia de un estado general de dos qubits y sus Coherencias parciales . . . . .	110
<b>7</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>113</b>
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>115</b>
	<b>Apéndices</b>	<b>121</b>
0.1	Variación de las regiones de Discordia al variar $s$ . . . . .	123
0.2	Evolución en Phase Damping . . . . .	124
0.3	Evolución en Bit Flip . . . . .	126
0.4	Evolución en Depolarizing . . . . .	127



# Capítulo 1

## Introducción

La miniaturización de componentes electrónicos no podrá perpetuarse indefinidamente, ya que a partir de los pocos nanómetros [1] el efecto túnel (efecto por el cual una partícula es capaz de atravesar una barrera de potencial mayor que su energía cinética) comienza a ser no despreciable, imposibilitando así la computación clásica. Esto implica que la velocidad de procesamiento de las computadoras tradicionales tiene un límite no muy lejano [2]. La alternativa que queda para seguir mejorando la capacidad de análisis y procesamiento de datos es recurrir a un nuevo paradigma de computación: la computación cuántica.

En computación clásica, el bit es la unidad mínima de información. Un estado de dos niveles es representado por los valores 0 o 1, que en las computadoras tradicionales es causado mediante diferencias de potencial: potencial nulo el estado 0, potencial positivo el estado 1. En Teoría de la Información, el bit es definido como un estado de dos niveles: base y excitado.

En computación cuántica el bit de información es sustituido por el “quantum bit”: el qubit [3]. El mismo posee las características del bit clásico (ser un estado con dos niveles), así como las propiedades que brinda la mecánica cuántica: la capacidad de existir en estados superpuestos.

El uso del qubit permite además disponer de sistemas con correlaciones cuánticas (en contraposición del bit, que solo permite correlaciones clásicas). De estas correlaciones cuánticas, la más conocida es sin lugar a dudas el Entrelazamiento [4, 5], que será definido en la sección 3.1. Cuando un estado de dos o más partes está entrelazado es imposible describirlo de manera aislada, es decir, describir individualmente cada uno de sus subsistemas. Es necesario

entonces una función de onda que describa al sistema globalmente, ya que no puede ser fraccionado sin perder sus características. Las ramificaciones de esta propiedad son varias, pero la más importante es cómo la observación de uno de los subsistemas permite predecir el estado del otro subsistema al ser medido. La definición de Entrelazamiento fue introducida por Schrödinger [6], y posteriormente la comunidad científica se percató de su importancia y utilidad (pese a tener algunos detractores como el mismísimo Albert Einstein [7]), pudiéndose utilizar para aumentar la velocidad computacional [8], para la Criptografía [9] y como recurso para diversas aplicaciones como la Teletransportación cuántica [10].

Luego del Entrelazamiento aparecieron otras correlaciones como la Discordia Cuántica, de la cual se hablará en la sección 3.2. La misma fue introducida por Olliver y Zurek, y nace a partir de dos definiciones de la Información Mutua, que clásicamente son iguales [11, 12], pero presentan diferencias cuando tratamos con estados cuánticos. El caso paradigmático de su aplicación es el de DQC1 (Deterministic quantum computation with one pure qubit) [11], en el cual se utiliza un qubit en un estado puro, y un registro de  $n$  qubits completamente mezclados para calcular la traza de un operador unitario en tiempo polinómico. En dicho experimento, está demostrado que el Entrelazamiento necesario es arbitrariamente bajo [13], de lo cual se desprendió que debía de haber otro fenómeno cuántico en acción, siendo este la Discordia. En 2010 Ferraro [14] demostró que todos los estados cuánticos tienen Discordia no nula, restandole un poco de importancia a la misma, ya que eso implica que en cierta medida, todos los estados cuánticos poseen dicho recurso.

Más recientemente la Coherencia Cuántica [15] ha sido foco de atención, debido a que su definición desde sus orígenes clásicos se encuentra en el centro mismo del fenómeno de interferencia. Como el fenómeno de superposición está en el corazón mismo de la Mecánica Cuántica, esta no puede liberarse de un estudio detallado de la Coherencia. En este paradigma cuántico, la Coherencia está compuesta por los valores no nulos fuera de la diagonal de las matrices densidad, donde se originan cuánticamente los fenómenos de interferencia. Aún no hay consenso sobre cómo cuantificar la Coherencia [16, 17], pero varios autores han trabajado sobre el tema, y sobre la posibilidad de utilizar dicha correlación como un recurso [18, 19]. De la Coherencia se hablará en la sección 3.3.

Existen múltiples trabajos vinculando las distintas correlaciones entre si,



ya sea el Entrelazamiento con la Discordia [18, 20], el Entrelazamiento con la Coherencia [19], y la Discordia con la Coherencia [21]. En este trabajo se busca profundizar en el estudio de las relaciones entre las correlaciones mencionadas anteriormente. El objetivo es encontrar relaciones dinámicas analíticas entre ellas.

Nos limitaremos a trabajar con dos conjuntos de estados: Los estados Bell Diagonal primero, y luego a un conjunto más amplio: Los estados X.

Los estados Bell Diagonal fueron introducidos por E.Rains [22] y desde entonces han sido ampliamente estudiados debido a que es posible hallar expresiones analíticas para el Entrelazamiento según distintos cuantificadores [23, 24, 25]. Además, como son capaces de ser definidos en función de tres únicos parámetros, permiten así una representación geométrica tridimensional. Dicha posibilidad permite el desarrollo del estudio de las correlaciones desde un punto de vista geométrico [5]. De esta manera es fácil calcular distancias entre estados, o distancias entre subconjuntos de estados con diferentes características, ya sea estados entrelazados, estados coherentes, o estados clásicos.

El nacimiento de este enfoque geométrico genera una nueva variable a la hora de hacer los estudios, que es la elección de la norma. Se han propuesto múltiples candidatos, siendo la Norma Traza [16, 17], y la norma de Hilbert Schmidt [26], las más mencionadas en la literatura.

Los estados X son un subconjunto de estados de dos qubits más amplio (ya que los estados Bell Diagonal están contenidos dentro de los mismos), y son de importancia ya que según [27], los mismos pueden convertirse en cualquier estado general de dos qubits mediante rotaciones pertinentes. No obstante los estados X presentan dificultades a la hora de analizarlos, sobre todo al analizar su región de existencia y su distribución de estados separables [28]. Esto se debe a que ahora, en vez de tres parámetros para definir cualquier estado, hacen falta 5. Esto complica la representación geométrica, pero es posible hacerlo fijando los valores de los nuevos dos parámetros. No obstante, dicha limitación modifica la forma de la región volumétrica posible para los estados existentes, y cambia también las distintas regiones donde las correlaciones valen cero.

Concebir a las correlaciones cuánticas como recursos utilizables en el procesamiento, el almacenamiento y la comunicación de la información debe ser enmarcado en el estudio de los sistemas cuánticos abiertos. Esto se debe a que los sistemas físicos no se encuentran aislados del entorno, y su interacción con el medio causa decoherencia [29] (fenómeno de transformación de un estado

cuántico en clásico) que destruye eventualmente cualquier correlación cuántica formada [30].

Aún se discute cuál es el rol y la utilidad de las distintas correlaciones, y cada día se descubren nuevas e interesantes aplicaciones de las mismas, como aplicaciones en superconductores [31], o en el comportamiento de materiales ferromagnéticos y antiferromagnéticos [32]. Las diversas relaciones entre ellas aún no se comprenden del todo, haciendo que la Teoría de la Información Cuántica sea un área en constante cambio y desarrollo.

Este trabajo se encuentra dividido de la siguiente manera:

La primera parte es esta sección de introducción (Capítulo 1), seguida por las nociones básicas para comprender esta tesis (Capítulo 2).

En la tercera parte se tratan las correlaciones cuánticas: Entrelazamiento, Discordia y Coherencia, y como estas serán analizadas desde un punto de vista geométrico (Capítulo 3).

En el Capítulo 4 se trabaja con los estados diagonales de Bell. Se estudia la evolución de sus correlaciones desde un punto de vista geométrico, y se estudian las diferentes regiones del espacio de estados y sus características. Para ello trabajamos con los canales Bit Flip, Phase Flip (o Phase Damping), y Depolarizing. Las normas utilizadas para las medidas geométricas fueron la norma de Hilbert Schmidt, y la norma Traza.

En el Capítulo 5 se estudian los estados-X, siendo un caso más complejo y amplio que los estados de Bell. Al igual que en el Capítulo 2, se estudia la evolución de sus correlaciones, y se buscan relaciones dinámicas entre las mismas.

El capítulo 6 trata brevemente a los estados generales de dos qubits, y se mencionan resultados obtenidos que los involucran.

En la última parte (Capítulo 7), se discuten las conclusiones alcanzadas tras este trabajo.

# Capítulo 2

## Nociones básicas

### 2.1. Qubit

Un qubit es un estado cuántico de dos niveles. Un estado puro de un qubit puede ser escrito de la forma:

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \quad (2.1)$$

Siendo  $\alpha$  y  $\beta$  números complejos, cuyos módulos al cuadrado determinan la probabilidad de que el estado se encuentre en el estado fundamental o el excitado, respectivamente.  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  son los elementos de la llamada “base computacional” (la base canónica en Información Cuántica).

El estado 2.1 puede escribirse de forma polar de la siguiente manera:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle \quad (2.2)$$

Asimismo pueden definirse los estados mezcla, que son una mezcla estadística de los estados puros. Los mismos están definidos de la siguiente manera:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.3)$$

Con  $p$  entre 0 y 1.

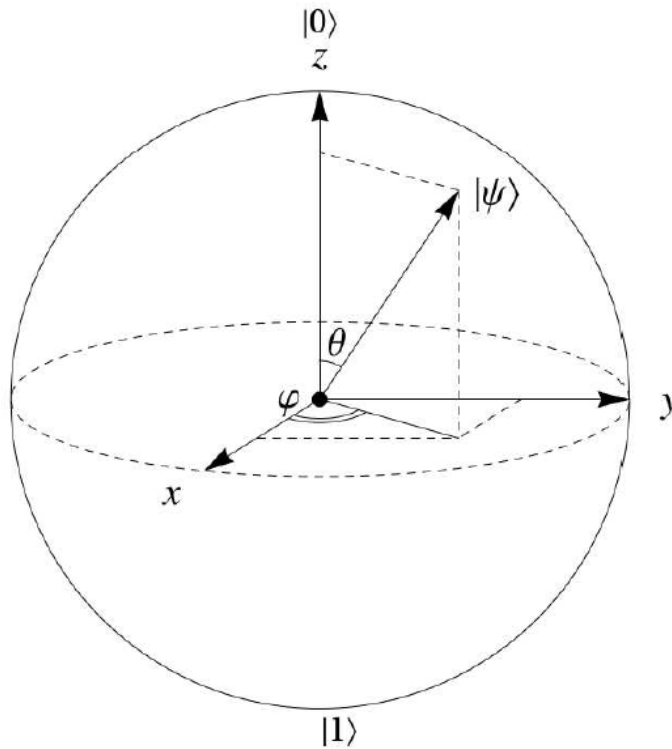
Esto permite una representación en la llamada “esfera de Bloch”. La esfera de Bloch es una esfera de radio uno en la cual “habitan” los estados de dos partes eq. (2.1). En el centro de la misma se encuentra el estado maximamente mezclado: ( $\rho = \frac{1}{2} |\psi_1\rangle \langle \psi_1| + \frac{1}{2} |\psi_2\rangle \langle \psi_2|$ ), y en la superficie los estados puros.

Se puede definir un vector  $\vec{r}$  de componentes  $r_1, r_2, r_3$  (llamado de aquí en más “vector de correlación”) que determina la posición de los estados en la esfera, con la ayuda de las matrices de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

Quedando así la representación definida por la siguiente ecuación:

$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{I}_2 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma}) \quad (2.5)$$



**Figura 2.1:** Representación de Bloch de un qubit.

Cabe destacar que a lo largo del eje  $z$  se encuentran los estados de la base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ .

## 2.2. Dos qubits

Un sistema de dos qubits viene dado por el producto tensorial de dos sistemas de un qubit:

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{ij} |i\rangle_A |j\rangle_B \quad (2.6)$$

Siendo  $|i\rangle, |j\rangle$  una base de un espacio de Hilbert  $\mathcal{H}^{AB} = \mathcal{H}^A \otimes \mathcal{H}^B$  respectivamente.

Para este trabajo será muy útil la expresión de la matriz densidad en función de las matrices de Pauli. Según [33], un estado general de dos qubits puede ser parametrizado utilizando 15 parámetros dados por los vectores tridimensionales  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  y  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , y la matriz de entradas  $r_{ij}$ :

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \vec{a} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \vec{b} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{i,j=1}^3 r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) \quad (2.7)$$

Dicha expresión puede simplificarse mediante transformaciones unitarias para que el último término sume en un solo índice [34]:

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \vec{c} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{i=1}^3 r_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) \quad (2.8)$$

Dónde  $\vec{s}$  y  $\vec{c}$  son los transformados de los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  luego de aplicar las transformaciones unitarias que diagonalizan  $r_{ij}$ .

Esta es la expresión general, en función de las matrices de Pauli más simple posible, quedando en función de 9 parámetros independientes.

### 2.2.1. Estados X

Los estados X son un caso particular de los estados de dos qubits. Son de particular interés ya que son los estados en los cuales se centrará el trabajo, y asimismo tienen una importante propiedad: todo estado de dos qubits puede ser reescrito (mediante transformaciones unitarias locales que preserven el Entrelazamiento) en un estado X, y viceversa [27, 35]. De esta manera puede afirmarse que los resultados obtenidos pueden generalizarse a estados generales de dos qubits, transformación unitaria mediante. Los estados X tienen entradas distintas de cero únicamente en su diagonal y antidiagonal:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Su forma sencilla simplifica enormemente las cuentas, sobre todo a la hora de hallar valores propios, los cuales adquieren la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \frac{1}{2} \left[ (\rho_{11} + \rho_{44}) + \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2} \right] \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[ (\rho_{11} + \rho_{44}) - \sqrt{(\rho_{11} - \rho_{44})^2 + 4|\rho_{14}|^2} \right] \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[ (\rho_{22} + \rho_{33}) + \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2} \right] \\ \lambda_3 &= \frac{1}{2} \left[ (\rho_{22} + \rho_{33}) - \sqrt{(\rho_{22} - \rho_{33})^2 + 4|\rho_{23}|^2} \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Para escribir dichos estados en función de las matrices de Pauli, es suficiente con elegir los vectores  $\vec{s}$  y  $\vec{c}$  con componentes exclusivamente en la dirección  $z$ . De esta forma la ecuación (2.8) queda:

$$\rho_X = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + s_3 \sigma_3 \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes c_3 \sigma_3 + \sum_{i=1}^3 r_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) \quad (2.11)$$

Dentro de los estados X existe un subconjunto de estados de interés que son llamados los estados Bell diagonal. Existen varias formas de definirlos, la más sencilla de esas es imponer que los vectores  $\vec{s}$  y  $\vec{c}$  valgan cero:

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \sum_{i=1}^3 r_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) \quad (2.12)$$

Esto causa, en su expresión matricial, que la primera y última entrada de la diagonal sean iguales, así como la segunda y la tercera:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{41} & 0 & 0 & \rho_{11} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

## 2.3. Evolución de un sistema de qubits

La evolución de un sistema cuántico cerrado viene dada por la ecuación de Schrödinger [6]. La misma puede ser reescrita para operadores de la siguiente manera:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = \hat{H}U(t, t_0) \quad (2.14)$$

Siendo  $\hat{H}$  el operador Hamiltoniano y  $U$  el operador evolución. El operador evolución es aquel que traslada a un estado puro del instante  $t_0$  al  $t$ :

$$U(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle = |\Psi(t)\rangle \quad (2.15)$$

En caso de un Hamiltoniano independiente del tiempo, el operador evolución queda:

$$U(t, t_0) = \exp \left[ -\frac{i\hat{H}(t - t_0)}{\hbar} \right] \quad (2.16)$$

En el formalismo de la matriz densidad, podemos decir que la evolución viene dada por:

$$\mathcal{E}(\rho) = U\rho U^\dagger \quad (2.17)$$

Siendo  $\mathcal{E}(\rho)$  la matriz densidad evolucionada.

En el caso de los sistemas abiertos, se puede realizar un procedimiento similar. El ambiente, y el sistema en cuestión pueden ser considerados como los componentes de un sistema total más grande:

$$\rho_{tot} = \rho_S \otimes \rho_A \quad (2.18)$$

Siendo  $S$  el sistema de interés y  $A$  el ambiente.

Este sistema total es cerrado, por lo cual su evolución es unitaria. No obstante, lo que es de interés es el sistema  $\rho_S$ , por lo tanto, para obtener su evolución individual basta con trazar parcialmente en el ambiente:

$$\mathcal{E}(\rho_S) = Tr_A [U(\rho_S \otimes \rho_A)U^\dagger] \quad (2.19)$$

Desarrollando la expresión de la traza esto se puede escribir como:

$$\mathcal{E}(\rho_S) = \sum_k \langle e_k | [U(\rho_S \otimes \rho_A)U^\dagger] | e_k \rangle \quad (2.20)$$

Si consideramos el estado del ambiente como un estado puro  $\rho_A = |0\rangle\langle 0|_A$ , la ecuación anterior queda:

$$\mathcal{E}(\rho_S) = \sum_k \langle e_k | [U(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_A)U^\dagger] | e_k \rangle \quad (2.21)$$

$$\mathcal{E}(\rho_S) = \sum_k \langle e_k | U |0\rangle_A \rho_S \langle 0|U^\dagger | e_k \rangle \quad (2.22)$$

Definiendo  $\hat{M}_k = \langle e_k | U |0\rangle$  se obtiene la representación de Kraus de un operador:

$$\mathcal{E}(\rho_S) = \sum_k M_k \rho_S M_k^\dagger \quad (2.23)$$

### 2.3.1. Representación de Kraus

Los operadores de Kraus son un “mapa de operadores”. Es decir, son operadores que actúan sobre otros operadores. Estos mapas  $\mathcal{E}$  cumplen una serie de propiedades que garantizan que mapean matrices densidad en otras matrices densidad [36]:

1.  $\mathcal{E}$  es lineal y convexo:

$$\mathcal{E}\left(\sum_i p_i \rho_i\right) = \sum_i p_i \mathcal{E}(\rho_i) \quad (2.24)$$

2. Preserva la traza y la hermiticidad de  $\rho$ :

$$\text{Tr}(\mathcal{E}(\rho)) = 1 \quad (2.25)$$

$$\mathcal{E}(\rho)^\dagger = \mathcal{E}(\rho) \quad (2.26)$$

3.  $\mathcal{E}$  es completamente positivo:

$$\mathcal{E} \otimes \mathbb{I} : \mathcal{H}_i \otimes \mathcal{H}_M \ni \rho_i \rightarrow \rho_f \in \mathcal{H}_f \otimes \mathcal{H}_M \quad (2.27)$$



Habiendo desarrollado las bases del formalismo de los operadores de Kraus, se pueden ver ahora algunos ejemplos de operadores y como los mismos actúan sobre el sistema.

### 2.3.2. Ruido cuántico

Los efectos del “ruido cuántico” son representados por canales que modifican el estado del sistema. El término canal es un sinónimo de los operadores de Kraus, así que el término se usará indistintamente. Hay varios tipos de ruido, los cuales serán descritos a continuación.

El primero de ellos es el canal **bit flip**, que simula que un qubit invierta su estado con cierta probabilidad  $p$ . Es decir que, con dicha probabilidad, se produce el siguiente cambio:

$$|0\rangle \rightarrow |1\rangle \quad (2.28)$$

$$|1\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (2.29)$$

En este caso, los operadores de Kraus vienen dados por:

$$M_1^{bf} = \sqrt{1 - \frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2^{bf} = \sqrt{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

El siguiente caso es el del “**phase flip**”. Representa el cambio de fase del qubit en un factor de  $\pi$ , es decir:

$$|0\rangle \rightarrow |0\rangle \quad (2.31)$$

$$|1\rangle \rightarrow -|1\rangle \quad (2.32)$$

Sus operadores de Kraus son:

$$M_1^{pf} = \sqrt{1 - \frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2^{pf} = \sqrt{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

El canal phase flip es también llamado **phase damping** (en principio se creían que eran distintos, pero luego se demostró que son iguales [36]).

El siguiente es el canal “**bit-phase flip**” corresponde al caso en que ambos

errores ocurren a la vez. Este tipo de error produce el cambio:

$$|0\rangle \rightarrow i|1\rangle \quad (2.34)$$

$$|1\rangle \rightarrow -i|0\rangle \quad (2.35)$$

Los operadores de Kraus correspondientes son:

$$M_1^{bpf} = \sqrt{1 - \frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M_2^{bpf} = \sqrt{\frac{p}{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Por último, el canal “**Depolarizing**” describe la posibilidad de que ocurran todos los errores ya mencionados en simultáneo con idéntica probabilidad  $p/3$ . Su nombre proviene de que el resultado de dicha operación resulta en la despolarización del estado.

En este caso los operadores de Kraus son 4 y vienen dados por:

$$M_0^d = \sqrt{1 - p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_1^d = \frac{p}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2^d = \frac{p}{3} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3^d = \frac{p}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

# Capítulo 3

## Correlaciones

Existen varios tipos de correlaciones, en este trabajo serán de interés el Entrelazamiento, la Discordia, y la Coherencia.

### 3.1. Entrelazamiento

Supongamos que tenemos el siguiente estado:

$$|\psi_{Bell}\rangle = \frac{|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2}{\sqrt{2}} \quad (3.1)$$

Si realizo una medición a lo largo de  $z$  sobre el primer qubit, obtendré el resultado 0 con probabilidad  $1/2$ , y el resultado 1 con probabilidad  $1/2$ . No obstante, una vez que haya obtenido cualquiera de los dos resultados, cuando realice una medición sobre el segundo qubit (también en  $z$ ), en este obtendré el mismo resultado que en el primero. Esto se debe a la forma del estado: Si obtuve el resultado 0, el estado de mi sistema luego de la medición será  $|00\rangle$ , si obtuve el resultado 1, será  $|11\rangle$ . Este tipo de estado se llama “estado entrelazado”, ya que la medida de un subsistema condiciona el resultado de la medida en el otro subsistema.

En un comienzo el Entrelazamiento fue estudiado exclusivamente como parte de los fundamentos de la física. Schrödinger en su trabajo de 1935 [4] establece que es el Entrelazamiento la cualidad fundamental de la mecánica cuántica que lo separa de la física clásica. Asimismo postula un ejemplo similar al de arriba, diciendo que en el caso de un estado entrelazado “el conocimiento global del sistema no necesariamente incluye el mejor conocimiento posible de cada una de sus partes, pese a que estas pueden estar completamente separadas

y por lo tanto a pesar de que pueden estar completamente separados y, por lo tanto, virtualmente capaces de ser mejor conocidos”.

Con el avance de la información cuántica, el enfoque operacional que se le dio al Entrelazamiento cambió de forma: se creó la teoría del Entrelazamiento como recurso [5]. En la misma se considera al Entrelazamiento como un recurso que puede ser consumido para realizar ciertas tareas en computación cuántica.

Para definir una teoría de recursos hace falta definir dos cosas: Los estados que posean ese recurso (“resource states”), y las operaciones que dejen invariable dicho recurso (“free operations”).

### Estados con recurso: Estados entrelazados

Un estado cuántico puro está entrelazado si el mismo no se puede escribir en forma de producto en ninguna base:

$$|\psi\rangle \neq |\phi_A\rangle \otimes |\phi_B\rangle \quad (3.2)$$

Por ejemplo, el estado (3.3) no está entrelazado:

$$|\psi_{sep}\rangle = |0\rangle_A |0\rangle_B = |0_A 0_B\rangle \quad (3.3)$$

Sin embargo, el estado (3.4) si lo está:

$$|\psi_{ent}\rangle = \frac{|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

Lo mismo puede definirse para el caso de matrices densidad  $\rho$ .

Un estado mezcla está entrelazado si para cualquier base producto:

$$\rho \neq \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \quad (3.5)$$

### Operaciones libres: Operaciones locales y comunicación clásica (LOCC)

Dado un sistema bipartito  $\rho_{AB}$ , una operación local es una transformación unitaria que actúa exclusivamente sobre  $A$  o sobre  $B$ .

Suponiendo que el estado se encuentre en:

$$\rho = \rho^S \otimes |E_0^A\rangle \langle E_0^A| \otimes |E_0^B\rangle \langle E_0^B| \quad (3.6)$$

Donde  $|E_0^A\rangle \langle E_0^A| \otimes |E_0^B\rangle \langle E_0^B|$  es el estado inicial del ambiente, que se consi-

dera sin pérdida de generalidad que se encuentra en un estado puro. Aplicando la evolución unitaria de Schrödinger, el nuevo estado sería:

$$\rho' = (U_A \otimes U_B)\rho(U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger) \quad (3.7)$$

De tal manera que  $U_A$  ( $U_B$ ) es una transformación unitaria en  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_{E_A}$  ( $\mathcal{H}_B \otimes \mathcal{H}_{E_B}$ ), con  $\mathcal{H}_i$  el espacio de Hilbert asociado al subsistema  $i$ , y  $\mathcal{H}_{E_i}$  el espacio de Hilbert asociado al ambiente del subsistema  $i$ .

Aplicando la traza parcial en el ambiente se obtiene el sistema evolucionado. Expresado en función de los operadores de Kraus queda:

$$\Phi_{loc} = \sum_{i,j} (M_i^A \otimes M_j^B)\rho_{AB}(M_i^A \otimes M_j^B)^\dagger \quad (3.8)$$

Dónde los  $M_i^A, M_i^B$  son los operadores de Kraus que actúan sobre cada qubit.

El tipo de operación recién descrita se dice local, lo cual es equivalente a pedir que bajo su acción los subsistemas evolucionen independientemente uno del otro. No obstante, para estudiar el Entrelazamiento hace falta definir un nuevo tipo de operación más particular: Las operaciones locales en conjunto con comunicación clásica (LOCC).

Suponiendo un sistema de dos partes, las operaciones locales serían las operaciones que se pueden efectuar en el laboratorio sobre cada una de las partes por separado. La comunicación clásica sería la transmisión clásica de información, ya sea una llamada telefónica entre los laboratorios, o cruzar a la otra habitación y comentar los resultados si los experimentos se realizaban en habitaciones contiguas.

En función de la suma de operadores estas operaciones pueden escribirse como:

$$\Phi_{LOCC} = \sum_i (M_i^A \otimes M_i^B)\rho_{AB}(M_i^A \otimes M_i^B)^\dagger \quad (3.9)$$

La diferencia entre 3.8 y 3.9 es que la suma se realiza en las operaciones locales  $i$  y  $j$ , y en el caso de las LOCC solamente en  $i$ . Esto se debe a que en las operaciones locales no hay ningún tipo de intercambio de información entre los subsistemas, y por lo tanto no se correlacionan clásicamente. En el caso de las LOCC, lo que hace  $B$  va a depender de lo que hace  $A$ , ya que hay

intercambio clásico de información, por lo tanto no son independientes uno del otro y se pueden escribir con el mismo subíndice.

Bajo operaciones locales los subsistemas evolucionan independientemente, por lo tanto un estado separable se mantiene separable, y un estado producto se mantiene producto.

Las correlaciones que existían antes de la operación no cambian, por lo que no es posible crear correlaciones a partir de un estado separable, únicamente por medio de operaciones locales.

Sin embargo, un estado producto en general no se mantiene como un producto bajo la acción de una operación LOCC:

$$\Phi_{LOCC}(\rho_A \otimes \rho_B) = \sum_i (M_i^A \rho_A M_i^{A\dagger}) \otimes (M_i^B \rho_B M_i^{B\dagger}) = \sum_i p_i \rho_A^i \otimes \rho_B^i \quad (3.10)$$

Por lo que las correlaciones clásicas si pueden variar bajo acción de operaciones LOCC. Sin embargo, un estado separable se mantiene separable bajo la acción de estas operaciones. Por lo tanto, no puede generarse entrelazamiento a partir de dichas operaciones, por lo que no se pueden generar estados entrelazados a partir de LOCC. De esta manera se definen las operaciones libres necesarias para crear una teoría de recursos del Entrelazamiento.

### 3.1.1. Medición del Entrelazamiento

Una vez definidas los “estados recursos” y “operaciones libres” es posible determinar un cuantificador del Entrelazamiento como una función que va de las matrices densidad a los reales positivos:

$$E(\cdot) \quad / \quad E(\rho) \in \mathbb{R} \quad (3.11)$$

Con esto en mente, podemos buscar una forma de definir la cantidad de Entrelazamiento que tiene un estado, y ser capaces de medir qué tan entrelazado puede estar un estado respecto al otro. Los postulados requeridos para definir dicha medida son los siguientes [5]:

- **Monotonía**

$E$  no debe crecer bajo operaciones LOCC:

$$\forall \{\Phi_{LOCC}, \rho\} \quad : \quad E(\Phi_{LOCC}(\rho)) \leq E(\rho) \quad (3.12)$$

Esta primera condición implica que  $E$  es invariante bajo transformaciones unitarias, o sea que es independiente del cambio de base.

- **Nula para estados separables:** Los estados separables deben tener Entrelazamiento nulo:

$$E(\rho_{sep}) = 0 \quad (3.13)$$

Estas dos propiedades son las fundamentales de las medidas de Entrelazamiento. Hay algunos requisitos adicionales que no aparecen en todas las definiciones. A continuación se mencionan algunas de ellos:

- **Convexa:** Para todo estado  $\rho_1$  y  $\rho_2$ , y  $p \in [0, 1]$  se debe cumplir:

$$pE(\rho_1) + (1 - p)E(\rho_2) \geq E(p\rho_1 + (1 - p)\rho_2) \quad (3.14)$$

- **Aditiva:** El Entrelazamiento de  $n$  copias de un estado  $\rho$  es igual a  $n$  veces el Entrelazamiento de  $\rho$ :

$$E(\rho^n) = nE(\rho) \quad (3.15)$$

con  $\rho^n = \rho \otimes \rho \otimes \dots \otimes \rho$   $n$  veces.

- **Subaditiva:** Se expresa para dos estados  $\rho_A, \rho_B$  como:

$$E(\rho_A \otimes \rho_B) \leq E(\rho_A) + E(\rho_B) \quad (3.16)$$

- **Continua:** Continuidad para todo estado  $\rho$  y  $\sigma$ .

$$E(\rho) - E(\sigma) \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad \|\rho - \sigma\| \rightarrow 0 \quad (3.17)$$

### 3.1.2. Concurrencia

Todos los axiomas presentados permiten definir buenos cuantificadores para el Entrelazamiento. Para los estados mezcla se define la Concurrencia.

#### Concurrencia de estado puro:

La Concurrencia de un estado puro fue definida por Wootters [37], y vale:

$$C(\psi) = |\langle \psi | \tilde{\psi} \rangle| \quad (3.18)$$

siendo  $|\tilde{\psi}\rangle = \sigma_2 \otimes \sigma_2 |\psi^*\rangle$  (con  $|\psi^*\rangle$  el conjugado de  $|\psi\rangle$  en la base computacional) quedando:

$$C(\psi) = |\langle \psi | \sigma_2 \otimes \sigma_2 |\psi^*\rangle| \quad (3.19)$$

**Concurrencia de estado mezcla:** Se define a la concurrencia  $C(\rho_{AB})$  para un sistema bipartito  $\rho_{AB}$  de dos qubits como:

$$C(\rho_{AB}) = \min_{p_i, |\psi_i\rangle} \sum_{i:A,B} p_i C(\rho_i) \quad (3.20)$$

Haciéndose la minimización a lo largo de todas las descomposiciones posibles de  $\rho_i$  en estados puros:  $\rho_i = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$

Dicho problema de minimización fue resuelto para el caso de dos qubits [37], dando el resultado:

$$C(\rho_{AB}) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \quad (3.21)$$

donde  $\lambda_i$  son los valores propios de  $\rho\tilde{\rho}$  en orden decreciente con  $\tilde{\rho} = (\sigma_2 \otimes \sigma_2)\rho^*(\sigma_2 \otimes \sigma_2)$

Los valores singulares son las raíces cuadradas de los valores propios, que en caso de los estados-X son:

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_{1\pm}} &= \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} \pm |\rho_{14}| \\ \sqrt{\lambda_{2\pm}} &= \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} \pm |\rho_{23}| \end{aligned} \quad (3.22)$$

Y se verifica que para valores particulares de los elementos de matriz hay solamente dos posibilidades para el mayor valor de la raíz de los autovalores,  $\sqrt{\lambda_{1+}}$  o  $\sqrt{\lambda_{2+}}$ . Entonces, este tipo de estados poseen una concurrencia que queda explicitada por:

$$C(\rho_X) = 2 \max\{0, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, |\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\} \quad (3.23)$$



## 3.2. Discordia cuántica

El Entrelazamiento no es el único recurso explotable a la hora de aprovechar las ventajas que nos brinda la mecánica cuántica. Existen otras correlaciones, como la mencionada en esta sección: la Discordia.

La Discordia fue la primera correlación introducida luego del Entrelazamiento. La Discordia demostró ser un recurso esencial para la preparación remota de estados cuánticos [38], la cual es una variante de la teleportación cuántica, así como para la discriminación de estados cuánticos y para el protocolo DQC1 (“Deterministic quantum computation with one pure qubit”)[39].

Para comprender bien los orígenes de la Discordia y definir un buen cuantificador, hace falta recurrir a la teoría de la información clásica.

### 3.2.1. Teoría de Información Clásica

#### Entropía de Shannon:

Considerando una variable aleatoria discreta  $X$ , con resultados posibles  $\{x\}$ , es necesario expresar el valor de la información ganada al conocer el valor de la variable  $X$ . Se define así pues la Entropía de Shannon:

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log p(x) \quad (3.24)$$

#### Entropía conjunta:

En el caso de tener dos variables aleatorias discretas  $X$  e  $Y$  (cada una con su respectivo set de resultados  $\{x\}$  e  $\{y\}$ ), la distribución de probabilidad conjunta queda expresada como  $P(X = x, Y = y) = p(x, y)$ . Generalizando la ecuación anterior a:

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log p(x, y) \quad (3.25)$$

#### Entropía condicional:

La entropía condicional surge de la necesidad de saber la posibilidad de observar el evento  $y_i$  dado que el evento  $x_i$  ya fue observado. Dicha probabilidad viene dada por la fórmula de Bayes:

$$P(Y = y|X = x) = p_x(y) = \frac{p(x, y)}{p(x)} \quad (3.26)$$

definiéndose así la entropía condicional:

$$H(Y|X) = - \sum_{x,y} p(x,y) \log p_x(y) \quad (3.27)$$

La entropía condicional puede interpretarse como la incertidumbre de  $X$  dado un valor particular de  $Y$ , promediado por todos los valores posibles de  $Y$ .

**Información Mutua:**

Clasicamente se define la información Mutua entre dos variables  $X$  e  $Y$  como:

$$I(X : Y) = H(X) + H(Y) - H(X, Y) \quad (3.28)$$

Es evidente mediante dicha expresión, que la información mutua es una medida de la información total que se posee de los dos subsistemas. El termino restando elimina la información superpuesta en  $X$  e  $Y$ .

**Información Mutua (expresión alternativa):**

Utilizando que:

$$\begin{aligned} H(Y|X) &= H(X, Y) - H(X) \\ H(X|Y) &= H(Y, X) - H(Y) \end{aligned} \quad (3.29)$$

y la ecuación 3.28, la información mutua se puede escribir de forma alternativa:

$$J(X : Y) = H(Y) - H(Y|X) = H(X) - H(X|Y) \quad (3.30)$$

La importancia de estas expresiones se debe a que la igualdad entre  $I(X : Y)$  y  $J(X : Y)$  se cumple clasicamente, pero no es así para su contraparte cuántica. Esto será explorado en la próxima sección.

### 3.2.2. Discordia cuántica

Para comenzar a hablar de Discordia cuántica, es necesario redefinir todos los conceptos de la sección anterior con su análogo cuántico.

**Entropía de Von Neumann:**

El procedimiento es intuitivo: Cambiar las probabilidades clásicas de distribución, por matrices densidad. De esta forma, la Entropía de Shannon se convierte en la Entropía de Von Neumann [36]:

$$S(\rho) = -Tr(\rho \log(\rho)) \quad (3.31)$$

**Entropía conjunta cuántica:**

De la misma manera, se define la Entropía conjunta cuántica para un sistema de dos partes  $A$  y  $B$ :

$$S(A, B) = -Tr(\rho^{AB} \log(\rho^{AB})) \quad (3.32)$$

**Entropía condicional cuántica:**

Se define de la misma manera, pero con  $S$  en vez de  $H$ :

$$S(A|B) = S(A, B) - S(B) \quad (3.33)$$

**Información Mutua cuántica:**

Lo mismo ocurre con la Información mutua:

$$I(A : B) = S(A) + S(B) - S(A, B) \quad (3.34)$$

**Información Mutua cuántica (expresión alternativa):**

En el caso de la expresión alternativa de la Información mutua, su expresión en función de las matrices densidad no es trivial.

$$J(A : B) = S(B) - S(B|A) \quad (3.35)$$

El problema radica en el último término:  $S(B|A)$ , ya que conocer el estado en mecánica cuántica implica medirlo. Por lo tanto, los posibles resultados  $a_i$  van a depender del tipo de medida que se realizó. De esta forma,  $S(B|A)$  puede escribirse como:

$$S(\rho_B|\{\Pi_i^A\}) = \sum_i p(a_i) S(\rho_{B|\Pi_i^A}) \quad (3.36)$$

Por lo tanto, la expresión de la Información mutua queda:

$$J(A : B)_{\{\Pi_i^A\}} = S(\rho_B) - S(\rho_B|\{\Pi_i^A\}) \quad (3.37)$$

Donde  $\Pi_i^A$  son medidas proyectivas realizadas sobre  $A$ , tal que  $\sum_i \Pi_i^A = \mathbb{I}$ .

Para obtener la información máxima disponible contenida entre  $A$  y  $B$ , se maximiza entre todas las posibles medidas:

$$J(A : B) = \max_{\{\Pi_i^A\}} J(A : B)_{\{\Pi_i^A\}} = S(\rho_B) - \min_{\Pi_i^A} S(\rho_B | \{\Pi_i^A\}) \quad (3.38)$$

Definidas ambas expresiones, es posible hablar, ahora si, de la Discordia cuántica [11]:

$$D(A|B) = I(A : B) - J(A : B) = S(\rho_B) - S(\rho_{AB}) + \min_{\{\Pi_i^B\}} S(\rho_A | \{\Pi_i^B\}) \quad (3.39)$$

Dado que en mecánica clásica las cantidades  $I(A : B)$  y  $J(A|B)$  coinciden, la discrepancia entre las mismas debe de ser por fenómenos cuánticos.

Por lo tanto, puede decirse que un estado es cuántico si:

$$I(A : B) \neq J(A|B) \quad (3.40)$$

Algunas propiedades relevantes de la Discordia son:

- Es una cantidad no negativa:  $D(A|B) \geq 0$ .
- Se anula si y solo si el sistema cuántico no se ve perturbado por medidas locales.
- Es monótona bajo la aplicación de mapas completamente positivos que preservan la traza:  $\Phi_{CPPT}$

$$D(\rho) = D(\Phi_{CPPT}(\rho)) \quad (3.41)$$

- Es invariante bajo transformaciones unitarias locales.
- Los estados con Discordia nula son separables.

El mayor problema a la hora de computar con exactitud la Discordia radica en la optimización necesaria para la expresión de  $J(A|B)$ , ya que hay que maximizar en el conjunto de todas las medidas posibles. La dificultad es tal que no se ha encontrado una expresión analítica exacta para estados generales de dos qubits, ni siquiera para estados X. Dicha expresión analítica se logró solamente para el subconjunto de los estados diagonales de Bell [40].

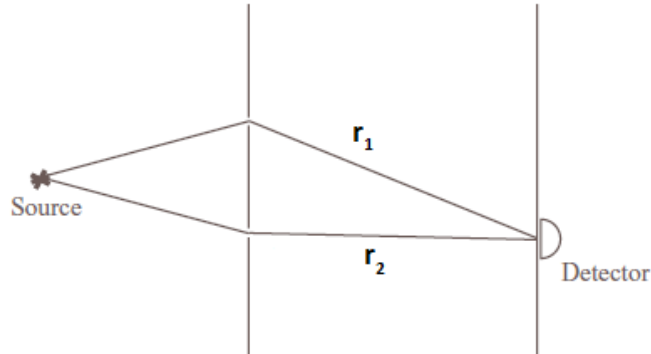
### 3.3. Coherencia cuántica

Al igual que en la Mecánica Clásica, la Coherencia cuántica se origina debido al fenómeno de superposición. Salvo que esta vez, en lugar de tratarse de superposición de ondas, se trata de superposición entre estados. La Coherencia es una de las correlaciones más tardías que se introdujo formalmente [15], aunque su concepto se viene mencionando desde los orígenes mismos de la Mecánica Cuántica [6].

#### 3.3.1. Coherencia clásica y Coherencia cuántica

El concepto de Coherencia nace del experimento de doble rendija. El campo en la pantalla, en un momento  $t$  puede ser escrito como la superposición de dos campos que recorrieron distintas trayectorias luego de pasar la rendija:

$$E(\vec{r}, t) = K_1 E(\vec{r}_1, t_1) + K_2 E(\vec{r}_2, t_2) \quad (3.42)$$



**Figura 3.1:** Experimento de doble rendija.

Siendo  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2$ ) la distancia recorrida por los campos y  $t_i$  el tiempo que tardo en llegar a la pantalla. Los factores  $K_i$  son factores geométricos complejos que dependen del ancho de la rendija y la distancia a la pantalla.

Para calcular la intensidad de dicho campo total se toma el promedio temporal del campo:

$$I = \langle |E(\vec{r}, t)|^2 \rangle = |K_1|^2 \langle |E(\vec{r}_1, t_1)|^2 \rangle + |K_2|^2 \langle |E(\vec{r}_2, t_2)|^2 \rangle + 2\text{Re}(K_1^* K_2 \langle E(\vec{r}_1, t_1)^* E(\vec{r}_2, t_2) \rangle) \quad (3.43)$$

El valor medio del último término de la suma anterior normalizado es llamado “coherencia de primer orden”

$$\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = \frac{\langle E(\vec{r}_1, t_1)^* E(\vec{r}_2, t_2) \rangle}{\sqrt{|E(\vec{r}_1, t_1)|^2 |E(\vec{r}_2, t_2)|^2}} \quad (3.44)$$

Análogamente se define la Coherencia para el caso cuántico. En este caso, en vez de medir intensidades, interesa medir amplitudes de probabilidad. Supongamos un estado:

$$|\psi\rangle = \alpha |\psi_0\rangle + \beta |\psi_1\rangle \quad (3.45)$$

Si queremos medir el valor medio de un operador  $\hat{A}$ , dicho estado:

$$\langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle = |\alpha|^2 \langle \psi_0 | \hat{A} | \psi_0 \rangle + |\beta|^2 \langle \psi_1 | \hat{A} | \psi_1 \rangle + 2\text{Re}(\alpha^* \beta \langle \psi_0 | \hat{A} | \psi_1 \rangle) \quad (3.46)$$

El factor  $\langle \psi_0 | \rho | \psi_1 \rangle$  es el debido a la superposición, por lo tanto el responsable de la Coherencia cuántica. Asimismo, extendiendo el resultado a dimensión mayor a dos, puede verse que los términos que generan Coherencia son aquellos que se encuentran fuera de la diagonal:  $\langle \psi_i | \rho | \psi_j \rangle$ .

Con esto en mente, pueden buscarse cuantificadores de Coherencia.

### 3.3.2. Estados incoherentes y operaciones incoherentes

Al igual que en la teoría de recursos presentada para el Entrelazamiento, en el caso de la Coherencia es posible definir a la misma a partir de los estados que no poseen Coherencia. Dichos estados son los que (fijada una base) son escritos de la siguiente manera:

$$\rho_{inc} = \sum_{j=1}^d c_j |j\rangle \langle j| \quad (3.47)$$

Nótese la primera diferencia fundamental con el Entrelazamiento y la Discordia: la Coherencia es dependiente de la base.

En analogía con el caso del Entrelazamiento, es necesario definir un tipo de operaciones que no produzcan Coherencia de la nada, es decir, las operaciones incoherentes:

Dichas operaciones son tales que:

$$M_k \mathcal{I} M_k^\dagger \subset \mathcal{I} \quad (3.48)$$

Siendo  $\mathcal{I}$  el conjunto de los estados incoherentes,  $M_k$  los operadores de Kraus.

### 3.3.3. Medidas de Coherencia

Según Baumgratz [15] estas son las propiedades que un buen cuantificador de Coherencia  $C$  debe cumplir:

1.  $C$  debe anularse para todos los estados incoherentes:

$$C(\rho_{in}) = 0 \quad \forall \rho_{in} \in \mathcal{I} \quad (3.49)$$

2.  $C$  debe ser monótona bajo operaciones incoherentes, completamente positivas, que preserven la traza:  $\Phi_{ICPPT}$

$$C(\rho) \geq C(\Phi_{ICPPT}(\rho)), \quad \forall \Phi_{ICPPT} \quad (3.50)$$

3. también deben ser monótonas bajo medidas selectivas en promedio, es decir, operaciones bajo las cuales se retienen los resultados de una medida y por lo tanto permiten una subselección según esos resultados:

$$C(\rho) \geq \sum_k p_k C(\rho_k) \quad (3.51)$$

donde  $\rho_k$  viene dado por  $\rho_k = \frac{M_k \rho M_k^\dagger}{p_k}$ , y se debe cumplir para todo  $\{M_k\}$ .

4. Por último, también es necesario que la Coherencia no disminuya bajo mezcla de estados cuánticos, es decir:

$$\sum_k p_k C(\rho_k) \geq C\left(\sum_k p_k \rho_k\right) \quad (3.52)$$

para todo conjunto de estados  $\{\rho_k\}$  y todo  $p_k \geq 0$  tal que  $\sum_k p_k = 1$ .

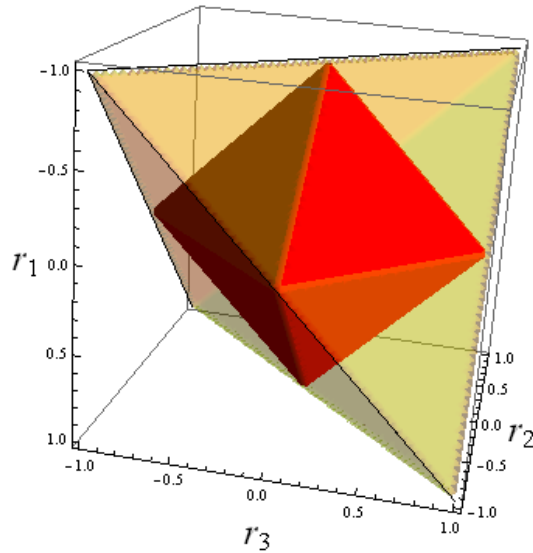
En este trabajo utilizaremos dos cuantificadores de Coherencia. La norma  $l_1$  de la Coherencia, y la norma  $l_2$  (o de Hilbert-Schmidt) de la Coherencia. Ambas serán desarrolladas en la sección 3.5.5.

### 3.4. Geometría de los estados diagonales de Bell

Recordando la expresión de los estados diagonales de Bell 2.12:  $\rho_{BD} = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_4 + \sum_i r_i \sigma_i \otimes \sigma_i)$  puede verse que hay solo 3 parámetros independientes, lo cual permite representar los estados en un espacio tridimensional. La positividad del operador  $\rho$  acota las regiones de existencia. Dicha región se obtiene imponiendo restricciones a los valores propios de  $\rho$  en función de los distintos  $r_i$ .

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 1 - r_1 - r_2 - r_3 \geq 0 \\
 \lambda_2 &= 1 - r_1 + r_2 + r_3 \geq 0 \\
 \lambda_3 &= 1 + r_1 - r_2 + r_3 \geq 0 \\
 \lambda_4 &= 1 + r_1 + r_2 - r_3 \geq 0
 \end{aligned}
 \tag{3.53}$$

Lo cual resulta en que los estados permitidos se encuentran dentro del tetraedro de la figura 3.2.



**Figura 3.2:** Representación tridimensional de los estados de Bell. Dentro del tetraedro amarillo que delimita la región de existencia puede verse en rojo el octaedro que delimita los estados separables.

El octaedro de estados separables es definido mediante la imposición de que la Concurrencia sea cero 3.23:



$$\begin{aligned}
|\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}} &\leq 0 \\
|\rho_{23}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}} &\leq 0
\end{aligned}
\tag{3.54}$$

El cambio de variable que lleva a los valores  $\rho_{ij}$  a  $r_i$  es el siguiente:

$$\begin{aligned}
\rho_{11} = \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1 + r_3) \\
\rho_{22} = \rho_{33} &= \frac{1}{4}(1 - r_3) \\
\rho_{14} = \rho_{41}^* &= \frac{1}{4}(r_1 - r_2) \\
\rho_{23} = \rho_{32}^* &= \frac{1}{4}(r_1 + r_2)
\end{aligned}
\tag{3.55}$$

Escrito en función de los parámetros  $r_i$  estas restricciones quedan:

$$\begin{aligned}
|r_1 + r_2| - |1 + r_3| &\leq 0 \\
|r_1 - r_2| - |1 - r_3| &\leq 0
\end{aligned}
\tag{3.56}$$

que delimitan el octaedro de la figura 3.2.

## 3.5. Medidas geométricas para correlaciones cuánticas

### 3.5.1. Definición

Una medida geométrica de determinada correlación cuántica  $\mathcal{C}$  es la mínima distancia del estado a tratar, al subconjunto de estados  $\Omega$  para los cuales  $\mathcal{C}$  se anula:

$$\mathcal{C} = \min_{\sigma \in \Omega} d(\rho, \sigma)
\tag{3.57}$$

Para realizar dicho cálculo hace falta definir dos cosas: cuál es el subconjunto de estados que anula la correlación, y cuál va a ser la norma que induce la métrica  $d$  utilizada.

Los subconjuntos de interés ya han sido mencionados antes. En el caso del Entrelazamiento, son todos los estados separables, en el caso de la Coherencia, son los estados incoherentes, en el caso de la Discordia, los estados clásicos-clásicos que serán mencionados en la sección 3.5.4.

Las restricciones impuestas sobre las medidas de correlaciones geométricas, se traducen por medio de restricciones exigidas a las distancias utilizadas. Por ejemplo, para imponer que el conjunto de estados cumpla con la distinguibilidad (es decir, dada una distancia  $d$ ,  $d(\rho, \sigma) = d(\mathcal{M}(\rho), \mathcal{M}(\sigma))$  siendo  $\mathcal{M}$  una operación unitaria aplicada sobre  $\rho$  y  $\sigma$ ), es imprescindible que la distancia sea contractiva bajo mapas  $\Phi_{CPPT}$  y que preserve la traza. Por lo tanto, para todo estado  $\rho$  y  $\sigma$ , toda operación  $\Phi_{CPPT}$  verifica:

$$d(\rho, \sigma) \geq d(\Phi_{CPPT}(\rho), \Phi_{CPPT}(\sigma)) \quad (3.58)$$

Esto quiere decir que la medida geométrica de correlaciones asociada a  $d$  es contractiva bajo operaciones cuánticas locales.

### 3.5.2. Norma traza y norma de Hilbert-Schmidt

En este trabajo utilizaremos principalmente las normas Schatten- $p$ , que son definidas para cierto operador  $A$  como:

$$\|A\|_p = [Tr(\sqrt{A^\dagger A})^p]^{p^{-1}} = \left(\sum_i |\lambda_i|^p\right)^{p^{-1}} \quad (3.59)$$

Donde  $\lambda_i$  son los valores propios de  $A$ , es decir, la raíz cuadrada de sus valores propios. Con  $p = 1$  se obtiene la llamada Norma Traza:

$$\|A\|_1 = Tr\sqrt{AA^\dagger} \quad (3.60)$$

Con  $p = 2$  se obtiene la Norma de Hilbert-Schmidt:

$$\|A\|_2 = \sqrt{Tr(AA^\dagger)} \quad (3.61)$$

Se mencionan estas dos normas ya que van a ser las que serán utilizadas en este trabajo. Cabe mencionar también que la norma de Hilbert-Schmidt no cumple la contractividad para todos los canales, ni para todas las correlaciones. Para esas situaciones, dicha norma será descartada y no será utilizada.

Por último, un dato de fundamental importancia para este trabajo, es que

para dos estados diagonales de Bell  $\rho_{BD}$  y  $\sigma_{BD}$ , con vectores de correlación respectivos  $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$  y  $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)$ , la distancia de Hilbert-Schmidt entre ellos se puede escribir como [41]:

$$d_2(\rho_{BD}, \sigma_{BD}) = \text{Tr}(\rho_{BD} - \sigma_{BD})^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (r_i - l_i)^2 = \frac{1}{4} \|\vec{r} - \vec{l}\|_2^2 \quad (3.62)$$

Resultado que simplificará enormemente las cuentas a realizar, además de otorgarle un evidente significado geométrico.

### 3.5.3. Medidas geométricas del Entrelazamiento

El Entrelazamiento se anula para estados separables. Por lo tanto es posible definir una medida geométrica del mismo para cierta métrica, en función del estado separable más cercano:

$$E(\rho) = \min_{\rho_{sep} \in \mathcal{S}} d(\rho, \rho_{sep}) \quad (3.63)$$

Donde  $\mathcal{S}$  es el conjunto de los estados separables. Así pues, para la Norma Traza queda:

$$E_{Tr}(\rho) = \min_{\rho_{sep} \in \mathcal{S}} \|\rho - \rho_{sep}\|_1 = \min_{\rho_{sep} \in \mathcal{S}} \text{Tr}|\rho - \rho_{sep}| \quad (3.64)$$

Esto ya fue calculado por Feldman [42] y da el siguiente resultado:

$$E(\rho)_{Tr} = 2 \text{máx}\{0, |\rho_{14}| - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}, |\rho_{32}| - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}\} \quad (3.65)$$

Y para Hilbert-Schmidt:

$$E_{HS}(\rho) = \min_{\rho_{sep} \in \mathcal{S}} \|\rho - \rho_{sep}\|_2^2 = \min_{\rho_{sep} \in \mathcal{S}} \text{Tr}((\rho - \rho_{sep})^2) \quad (3.66)$$

Lo cual, recordando la ecuación (3.62), basta con calcular la distancia del estado al octaedro. Esto se puede hacer recordando que en el espacio de estados, el estado en cuestión puede ser representado mediante un único vector  $\vec{r}$ , y el octaedro no es otra cosa que los distintos planos conformados por  $|r_1| + |r_2| + |r_3| - 1 = 0$ . Quedando entonces:

$$E_{HS}(\rho) = \frac{1}{3} (|r_1| + |r_2| + |r_3| - 1)^2 \quad (3.67)$$

### 3.5.4. Medida geométrica de la Discordia

La Discordia cuántica, para medidas realizadas sobre el subsistema  $A$ , se anula para los estados “cuánticos-clásicos” (q-c) [43] [44]. Estos estados son aquellos que en el primer subsistema se encuentran en una mezcla estadística de estados cuánticos, y en el segundo subsistema son diagonal en alguna base. Dichos estados tienen la forma:

$$\rho_{qc} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes |i\rangle \langle i|^B \quad (3.68)$$

Donde  $|i\rangle^B$  son estados ortogonales del espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_B$ ,  $\rho_i^A$  son estados en  $\mathcal{H}_A$ , y las probabilidades  $p_i$  no negativas suman 1.

La medida de Von Neumann correspondiente, realizada en el subsistema  $B$ , que no perturba el estado total está dada por los operadores de medida  $\Pi_i^B = |i\rangle \langle i|^B$ .

Análogamente, un estado clásico-cuántico (c-q) tiene la forma:

$$\sum_i p_i |i\rangle \langle i|^A \otimes \rho_i^B \quad (3.69)$$

Estos estados no se ven perturbados por una medida de Von Neumann local realizada sobre el subespacio  $A$ , con operadores de medida  $\Pi_i^A = |i\rangle \langle i|^A$ .

Por lo tanto, si las medidas se realizan sobre los dos subsistemas, los estados no perturbados por ellas son un subconjunto de los anteriores. Se trata de los estados clásicos-clásicos, aquellos que en ambos subsistemas son diagonales en alguna base.

Para estados generales de dos qubits, la Discordia geométrica con la norma de Hilber-Schmidt toma la forma [43]:

$$D_{HS} = \frac{1}{4} (\|\vec{b}\|_2^2 + \|R\|_2^2 - k_{max}) \quad (3.70)$$

donde  $b_i = Tr(\rho \sigma_i \otimes \mathbb{I})$ ,  $R$  es el tensor de correlación, cuyos elementos se encuentran dados por  $r_{ij} = Tr(\rho \sigma_i \otimes \sigma_j)$  y  $k_{max}$  es el máximo valor de la matriz  $\vec{b}\vec{b}^T + RR^T$ .

En el caso de los estados diagonales de Bell, los estados de Discordia cero se encuentran contenidos dentro de los ejes coordenados [43] [45]. Por lo tanto, para hallar el valor geométrico de la Discordia (ya sea mediante Hilbert Schmidt o mediante norma Traza) basta con calcular la distancia al eje

coordenado más cercano al estado a tratar.

La norma Traza para estados X permitió hallar una forma analítica demostrada en [46]:

$$D(\rho) = \begin{cases} \frac{|r_1|}{2}, & \text{si } r_1^2 - r_3^2 + x^2 < 0. \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 \max(r_3^2, r_2^2 + x^2) - r_2^2 \min(r_3^2, r_1^2)}{\max(r_3^2, r_2^2 + x^2) - \min(r_3^2, r_1^2) + r_1^2 - r_2^2}}, & \text{si } r_1^2 - r_3^2 + x^2 \geq 0. \end{cases} \quad (3.71)$$

con  $r_i$  las entradas del vector de Bloch mencionado en 2.5. y  $x = 2(\rho_{11} + \rho_{22}) - 1$

Este resultado se simplifica para los estados de Bell a:

$$D_{Tr}(\rho_{BD}) = \frac{|r_{int}|}{2} \quad (3.72)$$

Donde  $r_{int}$  es el valor intermedio de los módulos  $|r_i|$ .

### 3.5.5. Medida geométrica de la Coherencia

Similar a lo realizado con el Entrelazamiento, la Coherencia se anula para los estados incoherentes. Por lo tanto también es posible definir una medida geométrica de la misma en función del estado separable más cercano:

$$C(\rho) = \min_{\rho_{inc} \in \mathcal{I}} d(\rho, \rho_{inc}) \quad (3.73)$$

El problema se reduce entonces a hallar el estado incoherente más cercano, el cual no es otro que la misma matriz ( $\rho$ ), pero con todos los elementos fuera de la diagonal igualados a cero [15]. En el caso de la Coherencia se utilizará la norma  $l_p$ , ya que según Swapan [47], con  $p = 1$  esta es equivalente a la norma traza para el conjunto de estados que vamos a tratar (estados diagonales de Bell, y estados X). La ventaja de la norma  $l_p$  es que tiene una expresión analítica muy fácil de manipular:

$$\|A\|_{l_p} \equiv \left( \sum_{i,j} |A_{i,j}|^p \right)^{1/p} \quad (3.74)$$

Por lo tanto,  $C(\rho)_{l_1}$  queda:

$$C(\rho)_{l_1} = \min_{\rho_{inc} \in \mathcal{I}} \|\rho - \rho_{inc}\| = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |\rho_{i,j}| \quad (3.75)$$

En el caso de la norma de Hilbert Schmidt la Coherencia queda:

$$C_{l_2}(\rho) = \min_{\rho_{inc} \in \mathcal{I}} \|\rho - \rho_{inc}\|_2^2 = \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} |\rho_{i,j}|^2 \quad (3.76)$$

Pero debe mencionarse que  $C_{l_2}$  no cumple todas las propiedades exigidas a la Coherencia [15], violando en particular la propiedad 3 de monotonicidad bajo medidas selectivas para algunos estados (No obstante, veremos más adelante que para el subconjunto de estados con el que trabajaremos, la norma de Hilbert Schmidt se comporta adecuadamente).

Para el caso de los estados X, la Coherencia según la norma  $l_1$  queda:

$$C_{l_1} = |\rho_{14}| + |\rho_{32}| + |\rho_{41}| + |\rho_{23}| \quad (3.77)$$

Y como  $\rho_{14} = \rho_{41}$  y  $\rho_{32} = \rho_{23}$ , queda:

$$C_{l_1} = 2(|\rho_{14}| + |\rho_{32}|) \quad (3.78)$$

Para Hilbert Schmidt queda:

$$C_{HS} = 2(\rho_{14}^2 + \rho_{32}^2) \quad (3.79)$$

# Capítulo 4

## Relaciones dinámicas para estados Bell Diagonal

En este capítulo se buscará una relación funcional entre el Entrelazamiento, la Discordia, y la Coherencia. Para ello estudiaremos la evolución de los qubits sometidos a canales de ruido en busca de una forma de relacionar analíticamente las expresiones geométricas de las distintas correlaciones, para las diferentes normas.

### 4.1. Expresión analítica de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia

Recordamos como puede ser escrito un estado Bell diagonal [2.12](#):

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_4 + \sum_i r_i \sigma_i \otimes \sigma_i) \quad (4.1)$$

Las tres correlaciones pueden ser definidas y calculadas en función del vector  $\vec{r}$ . A continuación se muestran sus expresiones para las distintas normas.

#### 4.1.1. Expresiones analíticas en Hilbert Schmidt

El valor del Entrelazamiento en la norma de Hilbert Schmidt viene dado por el valor de la distancia euclideana al octaedro [4.2](#) (ver [3.2](#)):

$$E(\rho) = \frac{1}{3}(|r_1| + |r_2| + |r_3| - 1)^2 \quad (4.2)$$

El valor de la discordia viene dado por 4.3:

$$D(\rho) = \text{mín}[D_1, D_2, D_3] \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= r_2^2 + r_3^2 \\ D_2 &= r_1^2 + r_3^2 \\ D_3 &= r_1^2 + r_2^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

El valor de la Coherencia viene dado por la distancia al eje  $z$ :

$$C(\rho) = \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (4.5)$$

#### 4.1.2. Expresiones en Trace Norm

El valor del Entrelazamiento en la norma Traza puede obtenerse realizando el cambio de variable 3.55 en la expresión de la Concurrencia 3.23:

$$E(\rho) = \frac{1}{2} \text{máx}[0, |r_1 + r_2| + |1 - r_3|, |r_1 - r_2| - |1 - r_3|] \quad (4.6)$$

De aquí en más se utilizará una única expresión con  $\pm$  para representar la concurrencia:  $|r_1 \pm r_2| \pm (1 - r_3)$

El valor de la Discordia viene dado por 3.72:

$$D(\rho) = \text{int}[|r_1|, |r_2|, |r_3|] \quad (4.7)$$

Y para la Coherencia basta realizar el cambio de variable 3.55 en 3.78:

$$C(\rho) = \frac{1}{2}(|r_1 - r_2| + |r_1 + r_2|) \quad (4.8)$$

Que es lo mismo que:

$$C(\rho) = \text{máx}(|r_1|, |r_2|) \quad (4.9)$$



## 4.2. Evolución bajo canales de ruido

De las expresiones anteriores vemos que las correlaciones dependen de la evolución de  $\vec{r}$ . Para obtener la expresión de la matriz densidad sometida a los canales de ruido, es necesario calcular la evolución de  $\rho$ :

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) & 0 & 0 & r_1(0) - r_2(0) \\ 0 & 1 - r_3(0) & r_1(0) + r_2(0) & 0 \\ 0 & r_1(0) + r_2(0) & 1 - r_3(0) & 0 \\ r_1(0) - r_2(0) & 0 & 0 & 1 + r_3(0) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

La matriz evolucionada, usando el formalismo de los operadores de Kraus (2.23) quedará:

$$\rho(p) = \sum_{i,j=0}^2 M_i \otimes M_j \rho(0) M_i \otimes M_j \quad (4.11)$$

Comenzando con el canal **Phase Flip**, cuyos operadores de Kraus vienen dados por (2.33), la matriz evolucionada es:

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) & 0 & 0 & (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & 1 - r_3(0) & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 1 - r_3(0) & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

Por lo tanto, bajo la acción de Phase Damping, los estados de Bell evolucionan de forma que dos de las entradas del vector  $\vec{r}$  se ven multiplicadas por un factor  $(p-1)^2$ :

$$\vec{r}' = r_1(p-1)^2 \hat{i} + r_2(p-1)^2 \hat{j} + r_3 \hat{k} \quad (4.13)$$

De forma análoga puede repetirse el procedimiento para los canales restantes, obteniéndose bajo **Bit Flip**:

$$\vec{r}' = r_1 \hat{i} + r_2(p-1)^2 \hat{j} + r_3(p-1)^2 \hat{k} \quad (4.14)$$

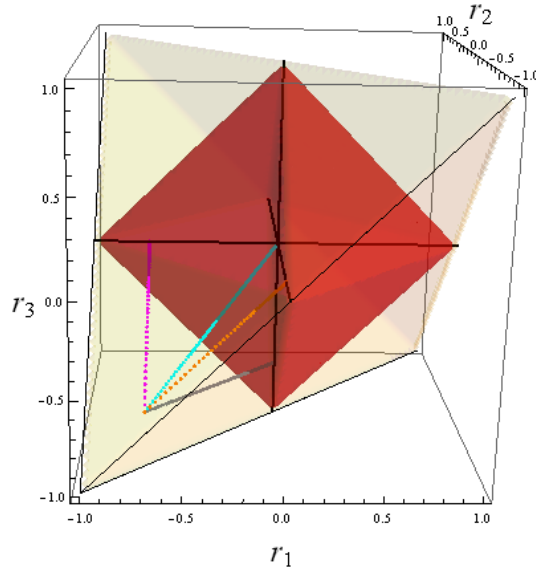
Bajo **Bit Phase Damping**:

$$\vec{r}' = r_1(p-1)^2 \hat{i} + r_2 \hat{j} + r_3(p-1)^2 \hat{k} \quad (4.15)$$

Y bajo **Depolarizing**:

$$\vec{r}' = r_1(p-1)^2\hat{i} + r_2(p-1)^2\hat{j} + r_3(p-1)^2\hat{k} \quad (4.16)$$

En la figura 4.1 puede verse la evolución mediante los distintos canales de ruido, representada en el espacio de estados correspondiente.



**Figura 4.1:** Tetrahedro de la región de existencia y Octaedro de estados separables con la evolución de un estado según Phase Damping (gris), Bit Flip (naranja), Bit Phase Flip (magenta) y Depolarizing (celeste)

#### 4.2.1. Evolución de las correlaciones en la norma de Hilbert Schmidt

Recordamos las tres correlaciones:

$$E(\rho) = \frac{1}{3}(|r_1| + |r_2| + |r_3| - 1)^2 \quad (4.17)$$

$$C(\rho) = \frac{1}{2}\sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (4.18)$$

$$D(\rho) = \text{mín}[D_1, D_2, D_3] \quad (4.19)$$

con

$$\begin{aligned}
D_1 &= r_2^2 + r_3^2 \\
D_2 &= r_1^2 + r_3^2 \\
D_3 &= r_1^2 + r_2^2
\end{aligned} \tag{4.20}$$

A continuación veremos la evolución de las tres correlaciones para distintos canales de ruido. Será excluído el canal Bit Phase Flip, ya que su comportamiento es idéntico al del Bit Flip, a menos de intercambiar  $r_1$  por  $r_2$ .

### Phase Damping

En Hilbert Schmidt la Discordia se calcula como:  $D(p) = \text{mín}[D_1, D_2, D_3]$ . Bajo Phase Damping, los diferentes  $D_i$  evolucionan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
D_1 &= r_2^2(p-1)^4 + r_3^2 \\
D_2 &= r_1^2(p-1)^4 + r_3^2 \\
D_3 &= (r_1^2 + r_2^2)(p-1)^4
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Por lo tanto, si  $D_3$  comienza siendo mínimo, seguirá siendo mínimo. Esto ocurre cuando  $|r_3| > |r_1|$  o  $|r_3| > |r_2|$ . Esto es lo que se ve en la figura 4.2a.

Por otro lado, en la figura 4.2b tenemos que  $|r_3| < |r_2|, |r_1|$ , por lo que  $D_3$  no comienza siendo mínimo. Pero como su valor disminuye más rápidamente que el de  $D_1$  o  $D_2$ , para  $p > 1 - \sqrt{\frac{r_3}{r_j}}$  (donde  $j = 1, 2$ )  $D_3$  se convierte en mínimo, viéndose un cambio en la concavidad de la Discordia.

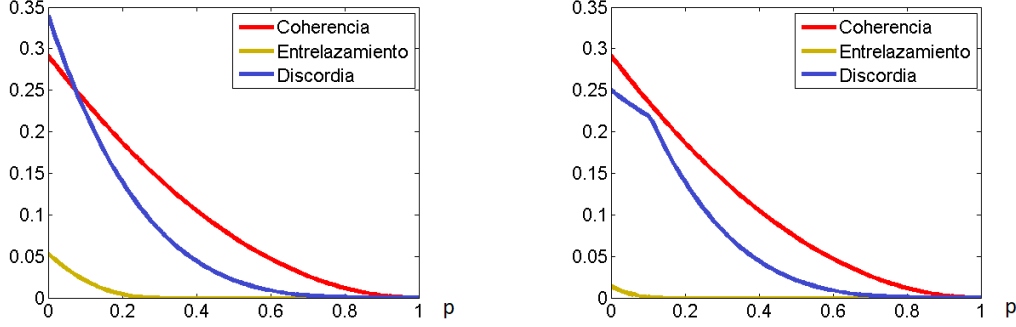
La expresión del Entrelazamiento en Phase Damping es:

$$E(p) = \frac{1}{3}(|r_1|(p-1)^2 + |r_2|(p-1)^2 + |r_3| - 1)^2 \tag{4.22}$$

Esto es la distancia al octaedro. Una vez que el estado se encuentra dentro del mismo, el Entrelazamiento sufre muerte súbita, pasando a valer cero. Esto ocurre eventualmente para todo estado suficientemente evolucionado, ya que los estados tienden a evolucionar hacia los ejes completamente clásicos, y para alcanzarlos es inevitable pasar por el octaedro de Entrelazamiento cero.

La Coherencia disminuye monotonamente y alcanza el valor 0 una vez que  $p = 1$ :

$$C(p) = \frac{1}{2}(1-p)^2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (4.23)$$



(a) Valores iniciales  $r_1 = 0.6$ ,  
 $r_2 = 0.1$ ,  $r_3 = -0.6$

(b) Valores iniciales  $r_1 = 0.6$ ,  
 $r_2 = 0.3$ ,  $r_3 = -0.2$

**Figura 4.2:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Phase damping. El parámetro de evolución es  $p$ , la probabilidad de cambio en el estado ambiente, la cual es condicionada por el sistema.

## Bit Flip

El caso de Bit Flip para la Discordia es prácticamente idéntico al de Phase Damping, ya que los distintos  $D_i$  se comportan de forma idéntica, a menos de cambiar  $D_3$  con  $D_1$ . Presenta un quiebre en la Discordia cuando  $D_1$  comienza siendo máximo, es decir si  $|r_1| > |r_3|, |r_2|$ . Esto se ve en la figura 4.3b. Las distintas entradas de la Discordia valen:

$$\begin{aligned} D_1 &= (r_2^2 + r_3^2)(p-1)^4 \\ D_2 &= r_1^2 + r_3^2(p-1)^4 \\ D_3 &= r_1^2 + r_2^2(p-1)^4 \end{aligned} \quad (4.24)$$

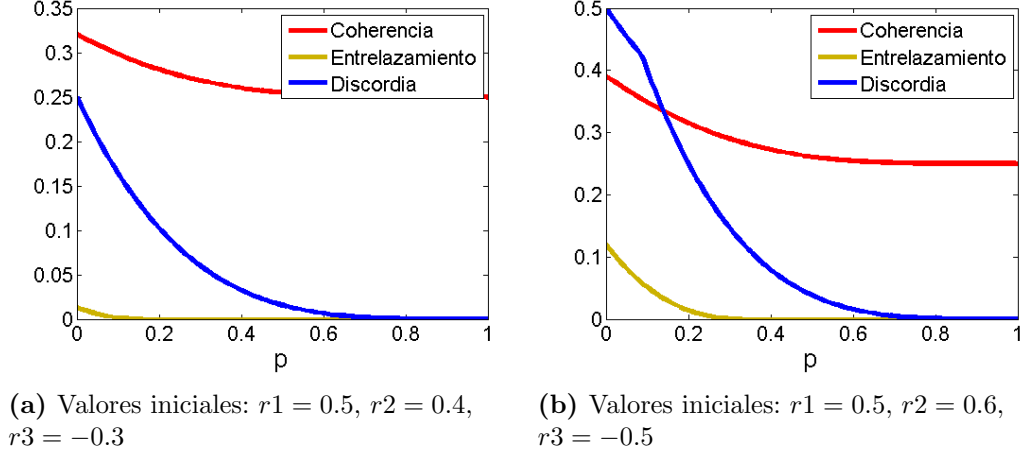
El Entrelazamiento vale:

$$E(p) = \frac{1}{3} \left( |r_1| + |r_2|(p-1)^2 + |r_3|(p-1)^2 - 1 \right)^2 \quad (4.25)$$

Por lo que se comporta igual que en Phase Damping.

La diferencia es en la Coherencia, ya que en vez de converger a cero a medida que  $p$  crece, esta converge al valor  $\frac{|r_1|}{2}$  ya que su expresión es:

$$C(p) = \frac{1}{2} \sqrt{r_1^2 + r_2^2 (p-1)^4} \quad (4.26)$$



(a) Valores iniciales:  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 0.4$ ,  $r_3 = -0.3$

(b) Valores iniciales:  $r_1 = 0.5$ ,  $r_2 = 0.6$ ,  $r_3 = -0.5$

**Figura 4.3:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip.

## Depolarizing

Bajo Depolarizing los distintos  $D_i$  evolucionan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} D_1 &= (r_2^2 + r_3^2)(p-1)^4 \\ D_2 &= (r_1^2 + r_3^2)(p-1)^4 \\ D_3 &= (r_1^2 + r_2^2)(p-1)^4 \end{aligned} \quad (4.27)$$

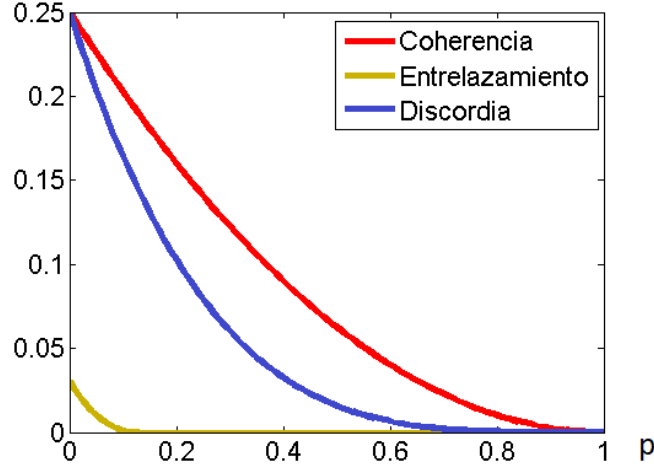
Por lo cual, aquel que comience siendo el menor, continuará siendo menor. De esta manera no ocurren cambios en la concavidad de la Discordia.

El Entrelazamiento se comporta de manera similar al caso de Phase Damping. La única diferencia radica en un decaimiento más acentuado ya que  $r_3$  también disminuye con  $(p-1)^2$ :

$$E(p) = \frac{1}{3} \left( (|r_1| + |r_2| + |r_3|)(p-1)^2 - 1 \right)^2 \quad (4.28)$$

La Coherencia se comporta exactamente igual al caso de Phase Damping (4.23) ya que esta no depende de  $r_3$  en ninguna medida:

$$C(p) = \frac{1}{2} (1-p)^2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \quad (4.29)$$



**Figura 4.4:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Depolarizing, con condiciones iniciales:  $r_1 = 0.2$ ,  $r_2 = 0.7$ ,  $r_3 = 0.4$

#### 4.2.2. Evolución de las correlaciones en norma Traza

Recordamos la expresión de las tres correlaciones:

$$E(\rho) = \frac{1}{2} \max[0, |r_1 \pm r_2| \pm |1 - r_3|] \quad (4.30)$$

$$D(\rho) = \text{int}[|r_1|, |r_2|, |r_3|] \quad (4.31)$$

$$C(\rho) = \max(|r_1|, |r_2|) \quad (4.32)$$

A continuación veremos la evolución de las tres correlaciones para distintos canales de ruido. Nuevamente será excluido el canal Bit Phase Flip por la misma razón que en la sección anterior.

#### Phase Damping

En Trace Norm, bajo el canal Phase Damping la Discordia tiene la forma:

$$D(p) = \text{int}\left[|r_1|(p-1)^2, |r_2|(p-1)^2, |r_3|\right] \quad (4.33)$$

Donde “int” quiere decir el valor intermedio. En la figura 4.5a  $|r_3| < |r_i| < |r_j|$  (con  $i, j = 1, 2$ ), por lo que el valor intermedio comienza siendo  $r_i$  para

$p_i > 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_i|}}$ , luego pasa a ser  $r_3$  (por eso se mantiene constante), y por último  $r_j$ , para  $p_j > 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_j|}}$  (evidentemente  $p_i > p_j$ ).

En la figura 4.5b  $|r_i| < |r_3| < |r_j|$ , por lo que el valor intermedio comienza siendo  $r_3$  y luego pasa a ser  $r_j$ , para  $p'_j > 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_j|}}$ .

En la figura 4.5c  $|r_i| < |r_j| < |r_3|$ , por lo que el valor intermedio siempre es  $r_j$ .

El Entrelazamiento en Trace Norm bajo Phase Damping tiene la forma:

$$E(p) = \frac{1}{2} \text{máx}[0, |r_1 \pm r_2|(p-1)^2 \pm |1-r_3|] \quad (4.34)$$

En dónde el símbolo  $\pm$  proviene de la expresión de la Concurrencia (3.23). El  $+$  proviene de la condición  $|\rho_{14} - \sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}|$  y el  $-$  de  $|\rho_{23} - \sqrt{\rho_{11}\rho_{44}}|$

Esto delimita a las regiones con Entrelazamiento cero como aquellas adentro del octaedro, siendo coherente con el planteo de la norma de Hilbert Schmidt, por lo que aquí también hay muerte súbita de Entrelazamiento.

La Coherencia en Trace Norm bajo Phase Damping tiene la forma:

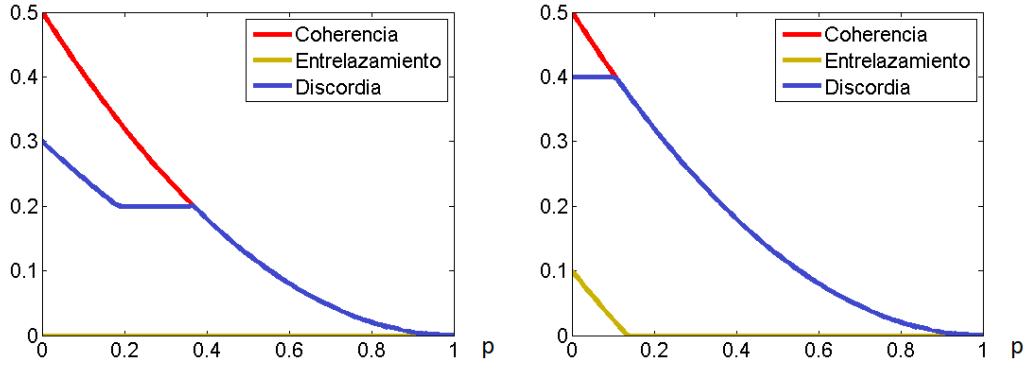
$$C(p) = \frac{1}{2} (|r_1 - r_2| + |r_1 + r_2|)(p-1)^2 \quad (4.35)$$

Esto es igual a:

$$C(p) = \text{máx}(|r_1|, |r_2|)(p-1)^2 \quad (4.36)$$

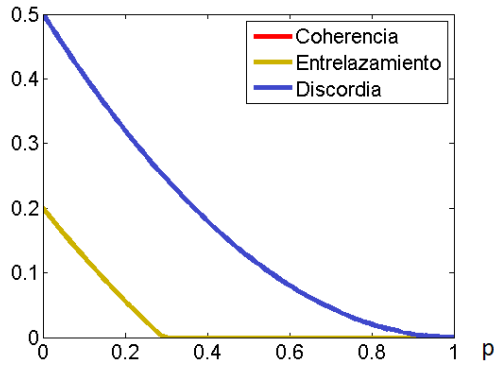
La cual a su vez es igual al valor intermedio de la Discordia, por lo que  $D = C$  para  $p > 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_i|}}$  con  $r_i > r_j$ , ya que para esa región:

$$C(p) = r_i(p-1)^2 = \text{int} \left[ |r_1|(p-1)^2, |r_2|(p-1)^2, |r_3| \right] = D(p) \quad (4.37)$$



(a) Condiciones iniciales:  $r_1 = 0.4$ ,  
 $r_2 = 0.3$ ,  $r_3 = -0.2$

(b) Condiciones iniciales:  $r_1 = 0.5$ ,  
 $r_2 = 0.3$ ,  $r_3 = -0.4$



(c) Condiciones iniciales:  $r_1 = 0.4$ ,  
 $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = -0.6$

**Figura 4.5:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Phase damping.

## Bit Flip

En Bit Flip la Discordia no presenta diferencias significativas:

$$D(p) = \text{int}[|r_1|, |r_2|(p-1)^2, |r_3|(p-1)^2] \quad (4.38)$$

El Entrelazamiento tampoco, ya que sigue valiendo cero en las regiones dentro del octaedro, y disminuyendo monotonamente:

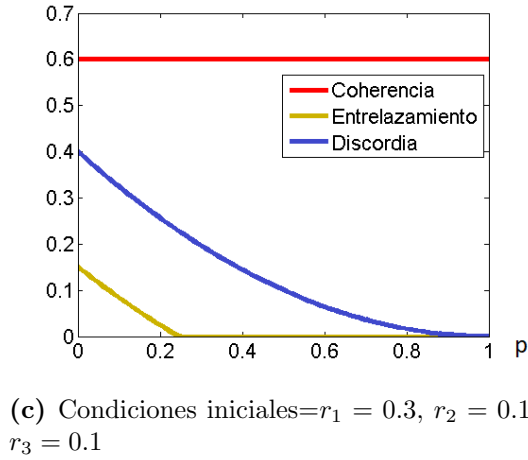
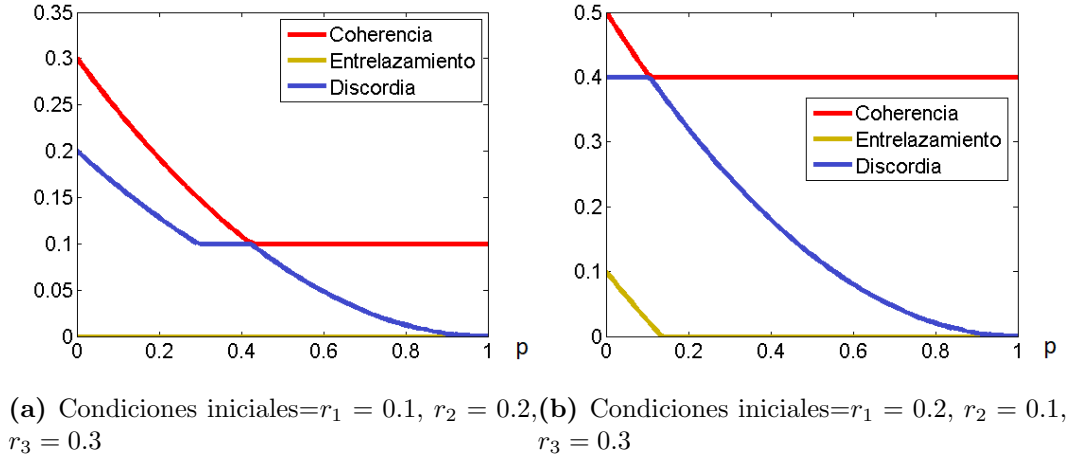
$$E(p) = \frac{1}{2} \text{máx}[0, |r_1 \pm r_2(p-1)^2| \pm |1 - r_3(p-1)^2|] \quad (4.39)$$

La diferencia nuevamente se encuentra en la Coherencia, ya que la misma en vez de irse a cero a medida que  $p$  se aproxima a 1, esta es igual a  $r_1$ , ya que su expresión es:



$$C(p) = \frac{1}{2}(|r_1 - r_2(p-1)| + |r_1 + r_2(p-1)|) \quad (4.40)$$

Como puede verse, en el caso de Bit Flip el comportamiento de las correlaciones es muy similar al de Phase Damping.



**Figura 4.6:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip.

### Depolarizing

Al igual que en Trace Norm, bajo Depolarizing la Discordia tiene la siguiente expresión:

$$D(p) = \text{int}[|r_1|, |r_2|, |r_3|](p-1)^2 \quad (4.41)$$

El valor de  $r_i$  que comience siendo intermedio lo será para todo  $p$ , no

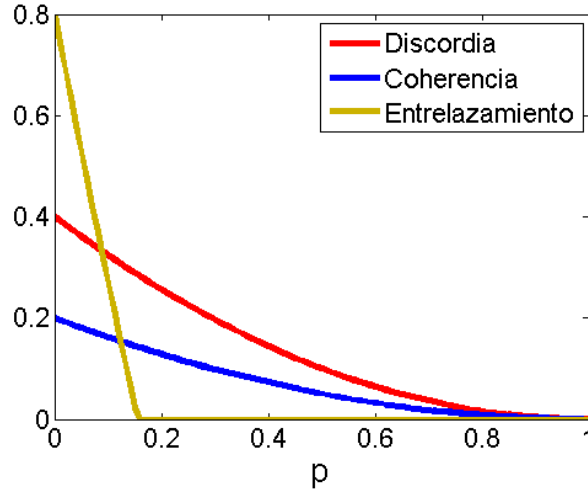
habrá cambios en la concavidad.

El Entrelazamiento no presenta mayores sorpresas:

$$E(p) = \frac{1}{2} \max[0, |r_1 \pm r_2|(p-1)^2 \pm |1 - r_3(p-1)^2|] \quad (4.42)$$

Por otro lado, por la misma razón que en el caso de Phase Damping, La Coherencia y la Discordia son iguales para todo  $p$ :

$$C(p) = \frac{1}{2} (|r_1 - r_2| + |r_1 + r_2|)(p-1)^2 \quad (4.43)$$



**Figura 4.7:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Depolarizing, con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.4$ ,  $r_2 = 0.3$ ,  $r_3 = 0.7$

### 4.3. Relaciones dinámicas

En 2010 Stretslav [18] mostró que una medida de Von Neumann en una parte de un sistema de varias partes, inevitablemente crea Entrelazamiento entre el aparato de medida y el sistema, si el estado tiene Discordia distinta a cero. En los años subsiguientes se hallaron aún más relaciones entre el Entrelazamiento y la Discordia [48], y también comenzaron a hallarse vínculos similares entre el Entrelazamiento y la Coherencia [19]. En la siguiente sección de la tesis, utilizaremos el modelo mencionado en las partes anteriores para obtener relaciones explícitas entre las correlaciones.

Recordando las expresiones para las correlaciones (4.2-4.5), puede despejarse el parámetro de evolución  $p$  en una de ellas y sustituirse en otra (siempre

y cuando estemos hablando del mismo canal y la misma norma) y obtener una expresión analítica que relacione dos o tres correlaciones.

En primera instancia nos interesa encontrar relaciones dobles entre las correlaciones, dígase Coherencia y Entrelazamiento, así como Coherencia y Discordia (Entre el Entrelazamiento y Discordia ya se ha realizado en trabajos anteriores [42]).

Dentro de las mismas nos interesa particularmente los vínculos entre la Coherencia y la Discordia para aquellas regiones con Entrelazamiento cero, la Coherencia con Entrelazamiento para aquellas regiones con Discordia constante, y los vínculos entre las tres correlaciones para toda región en que sea posible vincularlas.

## 4.4. Relaciones dobles

En esta sección se buscarán las relaciones entre la Coherencia y el Entrelazamiento, así como entre la Coherencia y la Discordia.

### 4.4.1. Relaciones entre la Coherencia y el Entrelazamiento

#### *Para Hilbert Schmidt*

El procedimiento es el siguiente: se despeja el parámetro  $p$  de la ecuación de la Coherencia, y se sustituye en la expresión del Entrelazamiento. Quedando bajo **Phase damping**:

$$E = [(|r_1| + |r_2|) \frac{2C}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} + |r_3| - 1]^2 \quad (4.44)$$

Bajo **Depolarizing**:

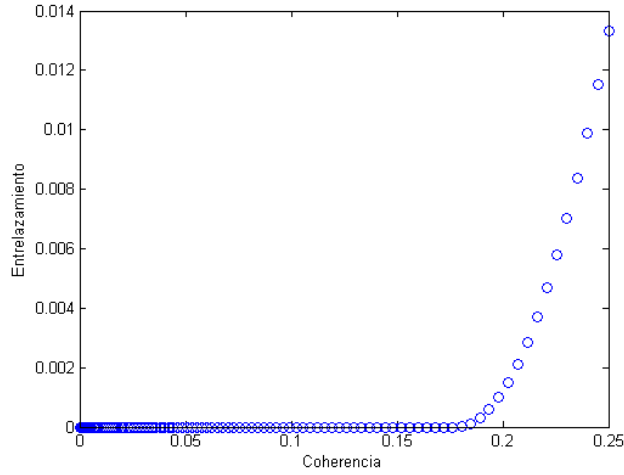
$$E = [(|r_1| + |r_2| + |r_3|) \frac{2C}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} - 1]^2 \quad (4.45)$$

Y bajo **Bit Flip**:

$$E = [ |r_1| + (|r_2| + |r_3|) \sqrt{\frac{4C^2 - r_1^2}{r_2^2}} - 1 ]^2 \quad (4.46)$$

Es posible graficar Entrelazamiento 4.22 vs Coherencia 4.23 haciendo variar

los valores de  $p$  en las ecuaciones originales, por ejemplo en el caso de phase damping queda:



**Figura 4.8:** Entrelazamiento en función de la Coherencia en la norma de Hilbert Schmidt, bajo la acción del canal Phase Damping. Con  $r_1 = 0.5, r_2 = 0, r_3 = 0.136$ .

El resto de los canales se comportan de la misma manera.

***Para Trace Norm***

Se puede hacer lo mismo para la norma traza y cada uno de los canales, quedando:

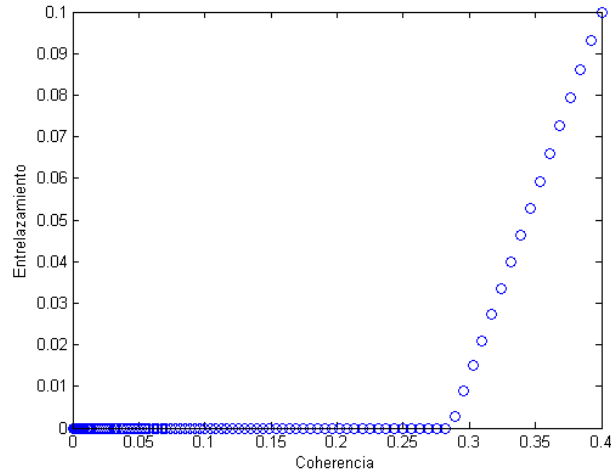
Para **Phase Damping**:

$$E = \text{máx} \left[ 0, \frac{C|r_1 \pm r_2|}{|r_1 + r_2| + |r_1 - r_2|} - \frac{|1 \pm r_3|}{2} \right] \quad (4.47)$$

Para **Depolarizing**:

$$E = \text{máx} \left[ 0, \frac{C}{|r_1 + r_2| + |r_1 - r_2|} (|r_1 \pm r_2| \mp Cr_3) - \frac{1}{2} \right] \quad (4.48)$$

También se puede escribir Entrelazamiento 4.34 en función de Coherencia 4.43:



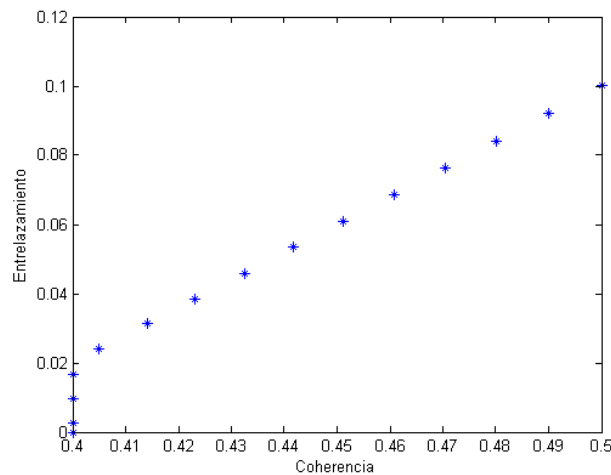
**Figura 4.9:** Entrelazamiento en función de la Coherencia en Trace Norm, bajo la acción del canal Phase Damping. Con  $r_1 = 0.4, r_2 = -0.3, r_3 = 0.5$ .

Excepto bit flip, el resto de los canales se comportan de igual manera.

En el caso de **Bit Flip** hace falta diferenciar dos casos. En la región del espacio en que  $r_1$  es mayor que  $r_2$  no hay vínculo, ya que  $C = \max[r_1, r_2(p-1)^2]$ . Sin embargo, para  $r_2(p-1)^2 > r_1$  existe el siguiente vínculo:

$$E = \max \left[ 0, \frac{1}{2} \left( |r_1 \pm C| - \left| 1 \pm \frac{r_3}{r_2} C \right| \right) \right] \quad (4.49)$$

La gráfica correspondiente es:



**Figura 4.10:** Entrelazamiento en función de la Coherencia en Trace Norm, bajo la acción del canal Bit Flip. Con  $r_1 = -0.4, r_2 = 0.5, r_3 = 0.3$ .

En este caso la Coherencia no se hace cero ya que converge al valor de  $r_1$ , y

se pierde el vínculo antes de que el Entrelazamiento sea cero. Hay menos puntos que en las otras gráficas ya que los faltantes se encuentran todos superpuestos en  $(0.4, 0)$ .

Este comportamiento ocurre para todos los puntos  $r_2 > r_1$ . En los puntos  $r_1 > r_2$  la Coherencia es constante y el Entrelazamiento disminuye, como lo que pasa en la gráfica luego del quiebre en  $(0.4, 0.02)$ .

#### 4.4.2. Relación entre la Coherencia y Discordia

Se realizan los cálculos de la parte anterior pero ahora para la Discordia en lugar del Entrelazamiento.

***Para Trace Norm***

Relación para **Phase Damping**:

Como la Discordia es:

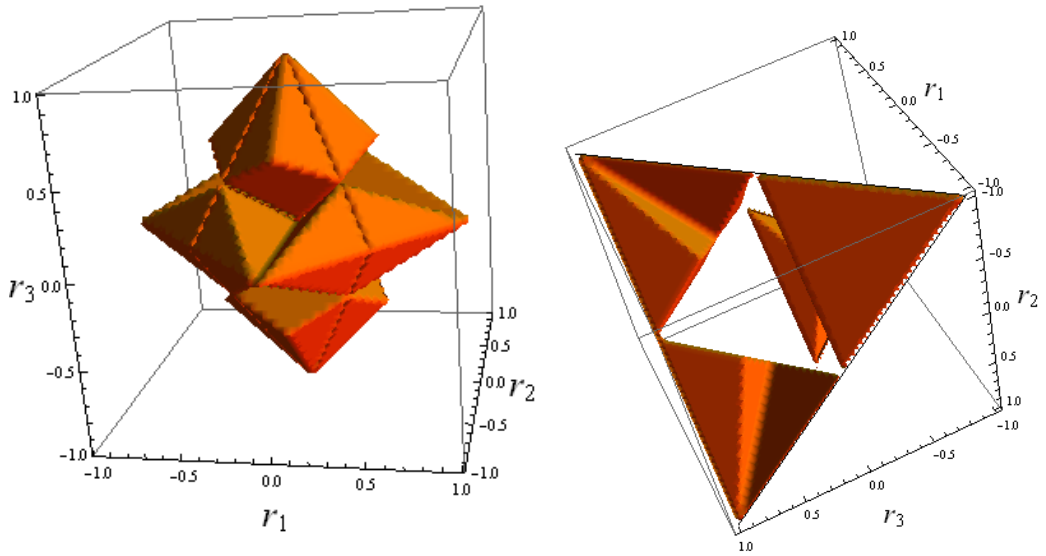
$$D = \text{int}(r_1(p-1)^2, r_2(p-1)^2, r_3) \quad (4.50)$$

Sólo podrá haber vínculos en caso de que  $r_1$  o  $r_2$  sean los valores intermedios. Si el valor intermedio es  $r_3$ , no habrá dependencia con el parámetro  $p$  volviéndose imposible de despejar.

En función de la Coherencia queda:

$$D = \frac{2|r_i|}{|r_1 + r_2| + |r_1 - r_2|} C \quad (4.51)$$

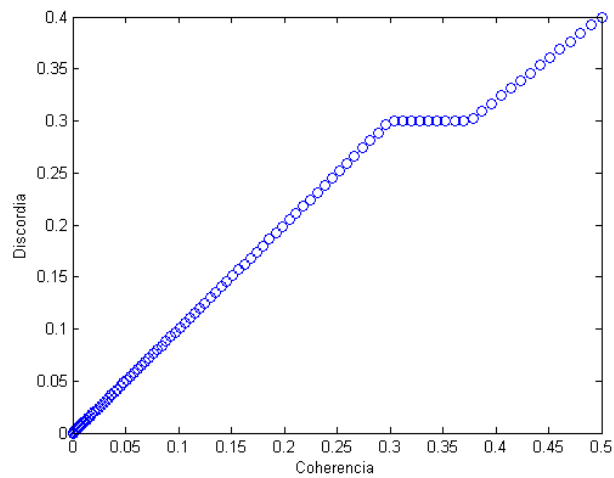
Dónde  $r_i = r_1, r_2$ , dependiendo de cual sea el intermedio. Estas regiones pueden verse en [4.11](#):



(a) Parte con vínculo dentro del octaedro      (b) Parte con vínculo fuera del octaedro

**Figura 4.11**

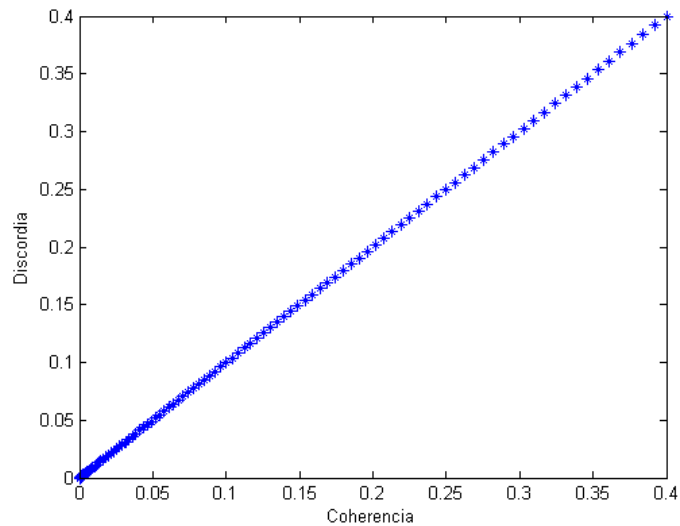
Haciendo variar  $p$ , se puede graficar la Discordia [4.33](#) en función de la Coherencia [4.35](#):



**Figura 4.12:** Discordia en función de la Coherencia para Trace Norm, bajo el canal phase damping.

La parte de la curva constante es cuando atraviesa una de las regiones “huecas” de la figura anterior.

La relación para **Depolarizing** es igual pero  $r_i$  puede ser cualquiera de los tres valores, esto implica que no haya regiones de Discordia constante. El vínculo entre la Coherencia y la Discordia tiene la forma:



**Figura 4.13:** Discordia en función de la Coherencia para Trace Norm, bajo el canal depolarizing.

La gráfica es una recta de pendiente uno, pues ambas magnitudes son iguales en todo momento.



## 4.5. Relaciones dinámicas triples

Así como es posible obtener relaciones entre las correlaciones de a pares, es posible hacerlo también para las tres correlaciones. Para hacerlo despejamos  $(1 - p)^x$  de la ecuación del Entrelazamiento y  $(1 - p)^{2-x}$  la Coherencia, y lo sustituimos en la ecuación de la Discordia. El parámetro  $x$  sería el peso relativo que le asociamos a las correlaciones. El mismo lo elegiremos como  $x = 1$  de forma que se despeja  $(1 - p)$  de cada una de las ecuaciones, dándole un peso equitativo a cada correlación.

### 4.5.1. Relaciones dinámicas en Hilbert Schmidt

#### Phase Damping

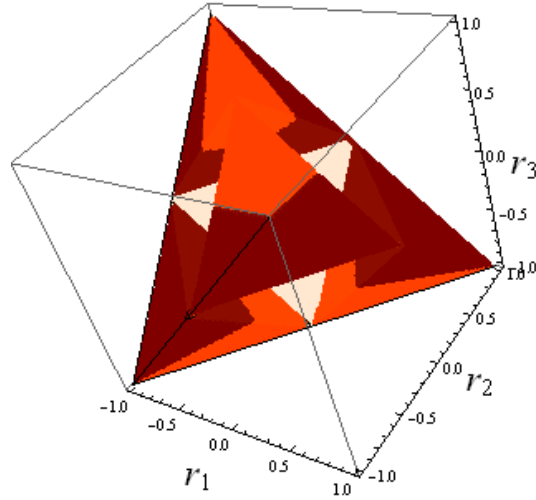
Fuera del octaedro unidad, cuando  $r_3 > r_1, r_2$  ( $D_3$  es el mínimo) el vínculo entre la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia es:

$$D = 16 \left[ \frac{|r_1| + |r_2|}{(\sqrt{3E} - |r_3| + 1)\sqrt{r_1^2 + r_2^2}} \right]^2 C^4 \quad (4.52)$$

cuando  $r_1 > r_3$  o  $r_2 > r_3$ :

$$D = 16r_i^2 \left[ \frac{|r_1| + |r_2|}{(r_1^2 + r_2^2)(\sqrt{3E} - |r_3| + 1)} \right]^2 C^4 + r_3^2 \quad (4.53)$$

con  $r_i = r_2$  si  $r_1 > r_2, r_3$ , o con  $r_i = r_1$  si  $r_2 > r_1, r_3$ .



**Figura 4.14:** Fuera del octaedro la dependencia entre la Coherencia, Entrelazamiento y Discordia, en la parte clara, tiene la forma de la ecuación: 4.52, en la parte oscura: 4.53

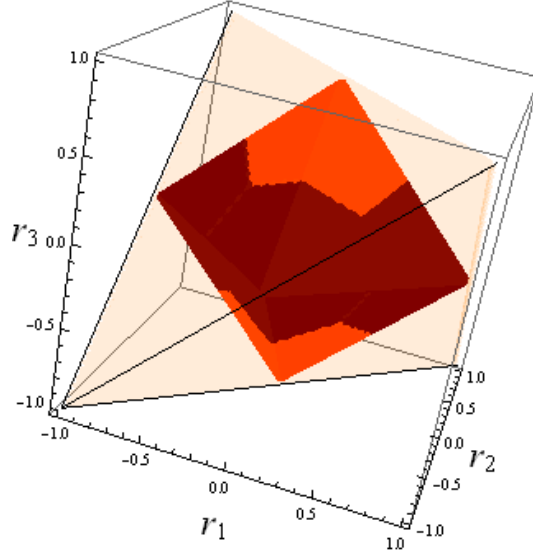
Dentro del octaedro no hay Entrelazamiento. Cuando  $r_3 > r_1, r_2$ , el vínculo entre la Coherencia y la Discordia es:

$$D = 4C^2 \quad (4.54)$$

Cuando  $r_1 > r_3$  o  $r_2 > r_3$ :

$$D = \frac{4r_i^2}{r_1^2 + r_2^2} C^2 + r_3^2 \quad (4.55)$$

Con  $r_i = r_2$  si  $r_1 > r_2, r_3$ , o con  $r_i = r_1$  si  $r_2 > r_1, r_3$ .



**Figura 4.15:** Octaedro con Entrelazamiento cero. en la región clara la dependencia entre la Coherencia y Discordia tiene la forma de la ecuación: 4.54, en la parte oscura: 4.55

### Depolarizing

Fuera del octaedro, el vínculo entre la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia es:

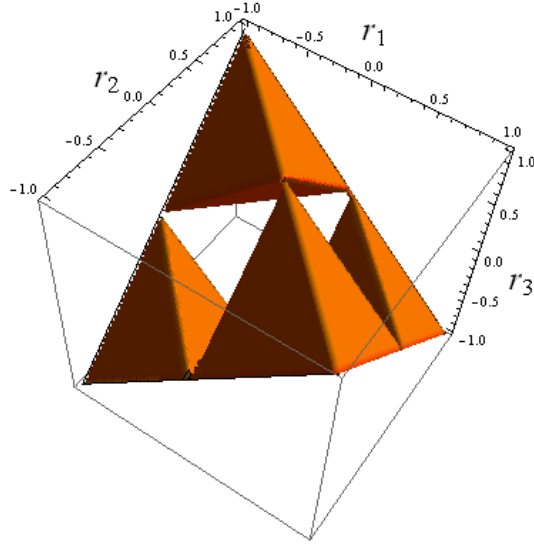
$$D = \left[ \frac{4(|r_1| + |r_2| + |r_3|)}{(r_1^2 + r_2^2)(\sqrt{3E} + 1)} \right]^2 C^4 \min[r_2^2 + r_3^2, r_1^2 + r_3^2, r_1^2 + r_2^2] \quad (4.56)$$

Por lo tanto si  $r_i > r_j, r_3$  ( $D_1$  es mínimo) la Discordia queda:

$$D = \left[ \frac{4(|r_1| + |r_2| + |r_3|)}{(r_1^2 + r_2^2)(\sqrt{3E} + 1)} \right]^2 (r_j^2 + r_3^2) C^4 \quad (4.57)$$

Si  $r_3 > r_1, r_2$  ( $D_3$  es mínimo):

$$D = \left[ \frac{4(|r_1| + |r_2| + |r_3|)}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}(\sqrt{3E} + 1)} \right]^2 C^4 \quad (4.58)$$



**Figura 4.16:** En la región naranja exterior al octaedro la relación entre la Coherencia, Entrelazamiento y Discordia tiene la forma: 4.59.

Dentro del octaedro no hay Entrelazamiento, y el vínculo entre la Coherencia y la Discordia es:

$$D = \frac{4C^2}{r_1^2 + r_2^2} \min[r_2^2 + r_3^2, r_1^2 + r_3^2, r_1^2 + r_2^2] \quad (4.59)$$

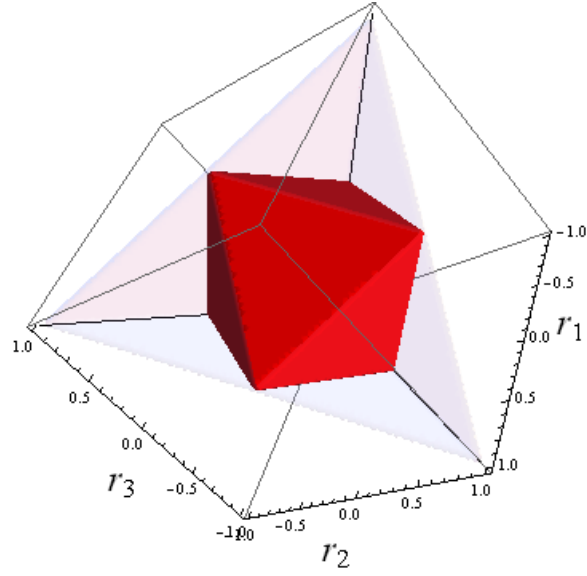
Por lo tanto si  $r_i > r_j, r_3$  ( $D_1$  es mínimo) la Discordia queda:

$$D = \frac{r_j^2 + r_3^2}{r_1^2 + r_2^2} 4C^2 \quad (4.60)$$

Si  $r_3 > r_1, r_2$  ( $D_3$  es mínimo):

$$D = 4C^2 \quad (4.61)$$

(Nótese que esta expresión es idéntica al caso de Phase Damping).



**Figura 4.17:** Octaedro con Entrelazamiento cero, la relación entre la Coherencia y la Discordia es: [4.61](#)

## 4.5.2. Relaciones dinámicas en Trace Norm

### Phase Damping

Fuera del octaedro hay dos regiones diferenciadas. Una en que la Discordia es constante (ya que  $|r_3|$  es el valor intermedio y este no cambia con  $p$  en Phase Damping) y no presenta vínculo con la Coherencia y el Entrelazamiento:

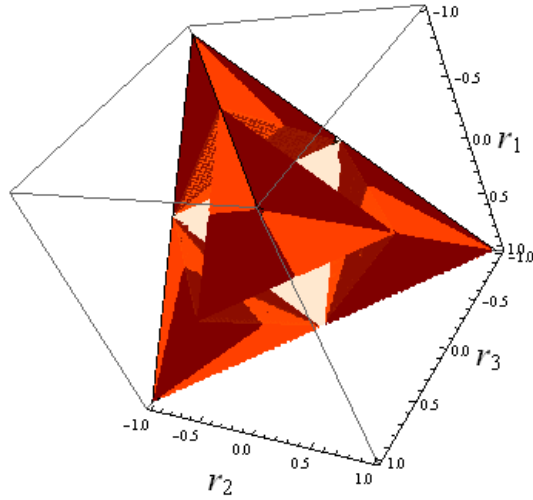
$$E = \text{máx} \left[ \frac{|r_1 \pm r_2|}{|r_1 + r_2| + |r_1 - r_2|} C - \frac{r_3 \pm 1}{2} \right] \quad (4.62)$$

La maximización es entre el símbolo de + y de -.

Otra en la que hay vínculo entre las tres correlaciones es:

$$E = \text{máx} \left[ \frac{2|r_i||r_1 \pm r_2|}{(|r_1 - r_2| + |r_1 + r_2|)^2} \frac{C^2}{D} - \frac{r_3 \pm 1}{2} \right] \quad (4.63)$$

Donde  $r_i$  puede ser  $r_1$  o  $r_2$  dependiendo de cual sea el intermedio.

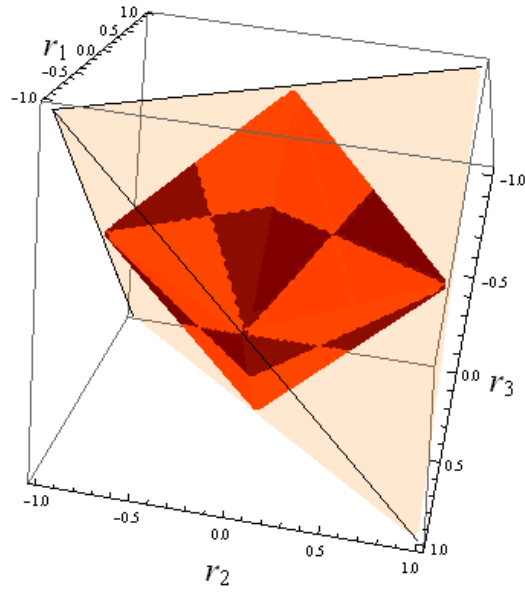


**Figura 4.18:** En la región clara la dependencia entre la Coherencia y el Entrelazamiento tiene la forma de la ecuación: 4.62, en la región oscura el vínculo entre las tres correlaciones es: 4.63

Dentro del octaedro no hay Entrelazamiento. La Discordia puede ser constante en algunas regiones, siendo por lo tanto independiente de la Coherencia (dichas regiones se estudiarán en profundidad en la siguiente sección). Sin embargo hay regiones dentro del octaedro en que el vínculo entre Coherencia y Discordia es:

$$D = \frac{2|r_i|}{|r_1 + r_2| + |r_1 - r_2|} C \quad (4.64)$$

donde  $r_i$  puede ser  $r_1$  o  $r_2$  dependiendo de cual sea el intermedio.



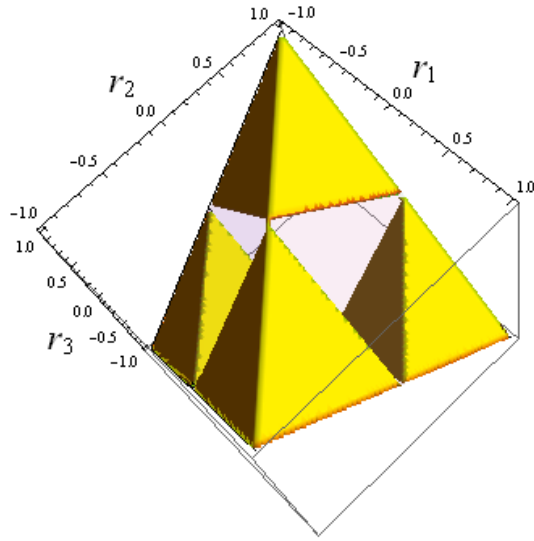
**Figura 4.19:** Octaedro con Entrelazamiento cero. en la región clara la dependencia entre la Coherencia y Discordia tiene la forma de la ecuación: 4.51, en la parte oscura la Discordia es constante.

### Depolarizing

Fuera del octaedro unidad el vínculo entre las tres correlaciones es:

$$E = \text{máx} \left[ \frac{2|r_i|(|r_1 \pm r_2| \mp r_3)}{(|r_1 - r_2| + |r_1 + r_2|)^2} \frac{C^2}{D} - \frac{1}{2} \right] \quad (4.65)$$

Dónde  $r_i = r_1, r_2, r_3$  dependiendo de cual sea el intermedio.



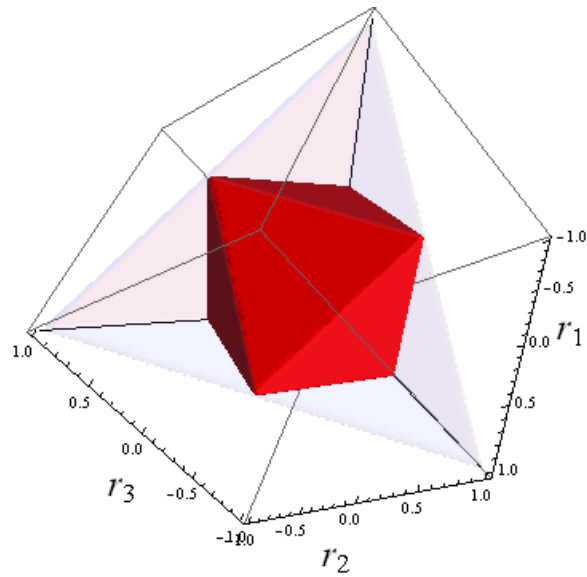
**Figura 4.20:** En la región amarilla y marrón la dependencia entre las tres correlaciones es dada por la ecuación 4.65.

Dentro del octaedro unidad no hay Entrelazamiento, el vínculo entre la Coherencia y la Discordia es:

$$D = \frac{2|r_i|}{|r_1 + r_2| + |r_1 - r_2|} C \quad (4.66)$$

Dónde  $r_i$  puede ser  $r_1, r_2, r_3$  dependiendo de cual sea el intermedio.





**Figura 4.21:** Octaedro con Entrelazamiento cero, la relación entre la Coherencia y la Discordia es: [4.66](#)

## 4.6. Dependencia paramétrica

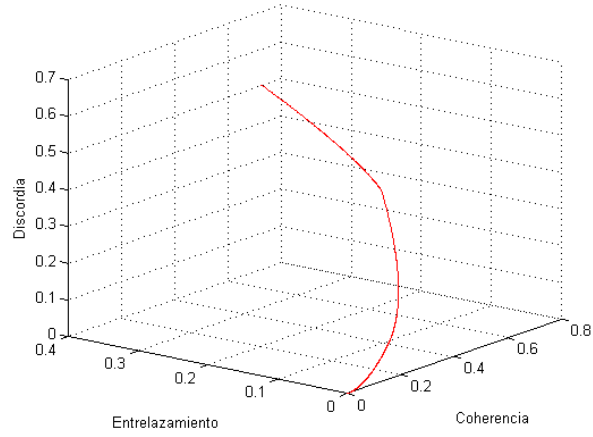
Las relaciones dinámicas entre las tres correlaciones pueden ser graficadas una en función de las otras eliminando el parámetro  $p$  de las ecuaciones. El resultado es una curva en  $\mathbb{R}^3$

### 4.6.1. Curvas para Hilbert Schmidt

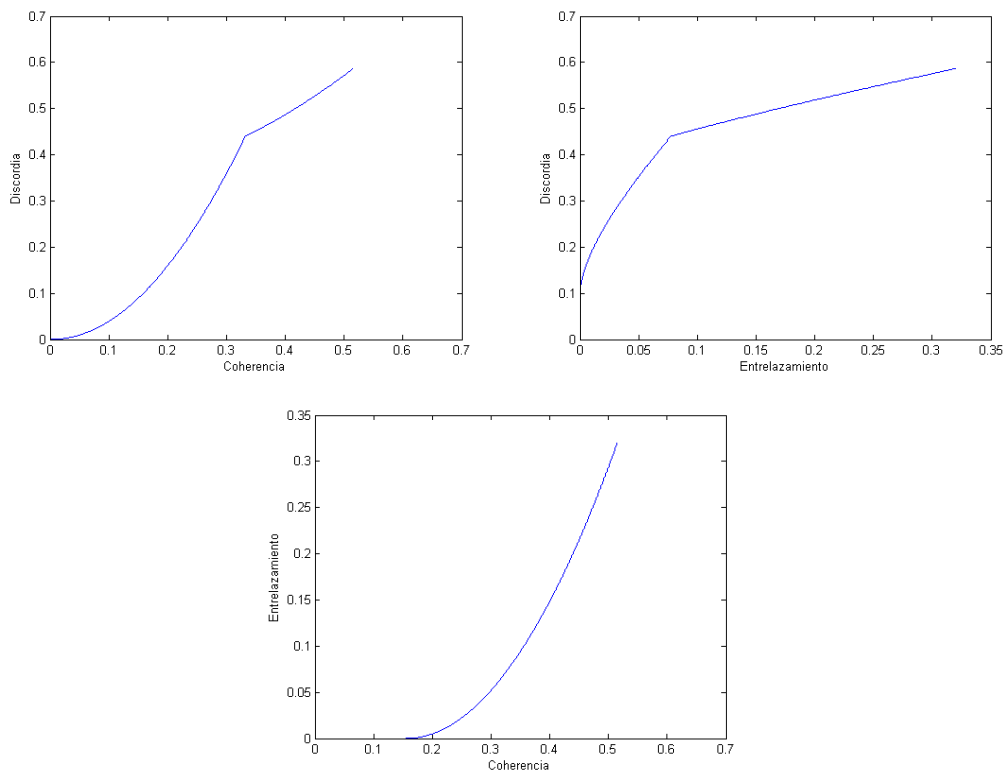
A continuación se graficarán las curvas tridimensionales que forman las correlaciones al variar  $p$ .

#### Phase Damping

En la figura [4.22](#) Puede verse el quiebre que sufre la evolución de un estado, al igual que en la figura [4.2b](#). En las figuras [4.23](#) puede verse como las relaciones con el Entrelazamiento presentan muerte súbita.



**Figura 4.22:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Phase Damping en Hilbert Schmidt

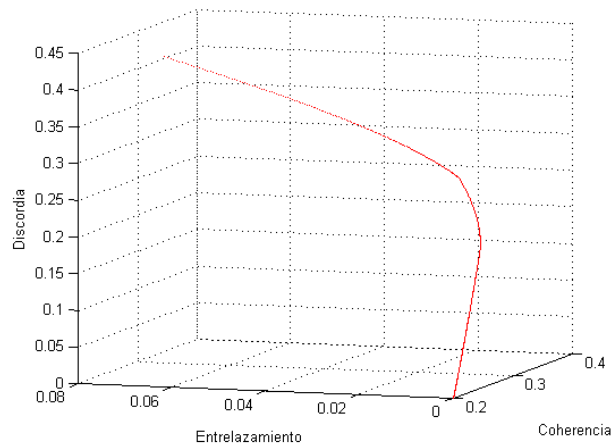


**Figura 4.23:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 0.58$

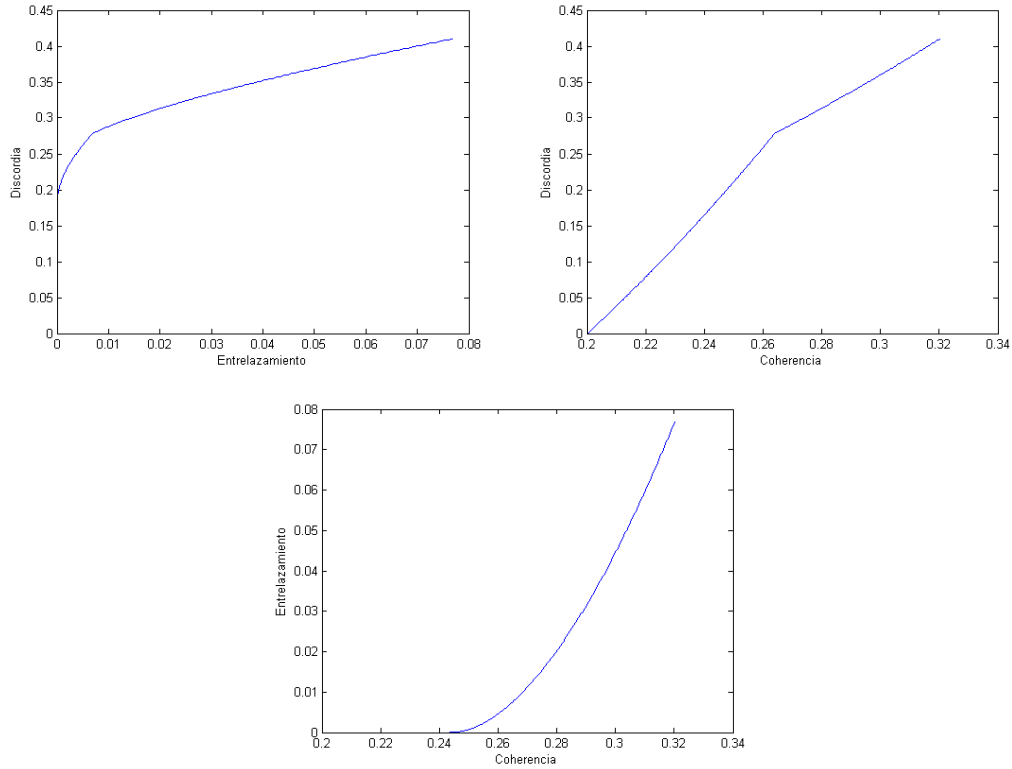
Las gráficas de evolución muestran como puede haber tanto Coherencia como Discordia, sin la necesidad de que haya Entrelazamiento. No obstante, la inexistencia de Coherencia implica la inexistencia de Discordia (lo cual es razonable, ya que el estado evoluciona hacia el eje  $z$ , donde tanto la Coherencia como la Discordia se hacen cero).

### Bit Flip

En Bit Flip ocurre lo mismo que en Phase Damping. En la figura 4.24 puede verse como hay un único quiebre, al igual que en la figura 4.3b. Por otro lado en las figuras 4.25 también puede verse como hay un único quiebre, y en las curvas de Entrelazamiento puede apreciarse la muerte súbita.



**Figura 4.24:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Phase Damping en Trace Norm

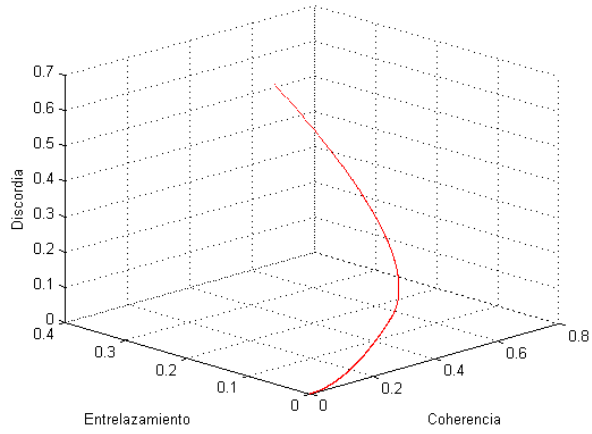


**Figura 4.25:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.4$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 0.58$

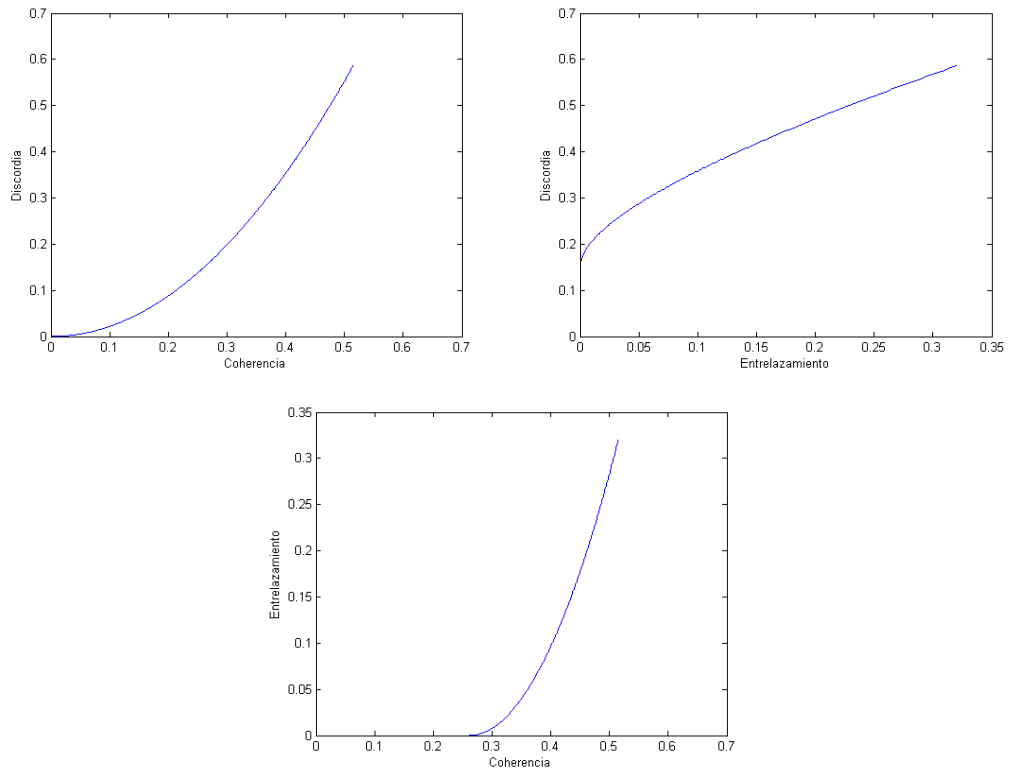
En este conjunto de figuras puede verse nuevamente que puede haber tanto Discordia como Coherencia en caso de que no haya Entrelazamiento. No obstante como la evolución del canal es hacia el eje  $x$ , y la Coherencia se hace cero a lo largo del eje  $z$ , puede verse como pueden existir estados sin Discordia pero con Coherencia, la cual converge al valor  $|r_1|$  según muestra la ecuación 4.40.

## Depolarizing

En la figura 4.26 puede verse como la curva que relaciona las tres correlaciones se comporta suavemente, a menos de una sección continua de valor cero debido a la muerte súbita del Entrelazamiento. Se comporta según lo visto en la figura 4.4. Lo mismo ocurre en 4.27 al verse las relaciones de a pares.



**Figura 4.26:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Depolarizing en Hilbert-Schmidt

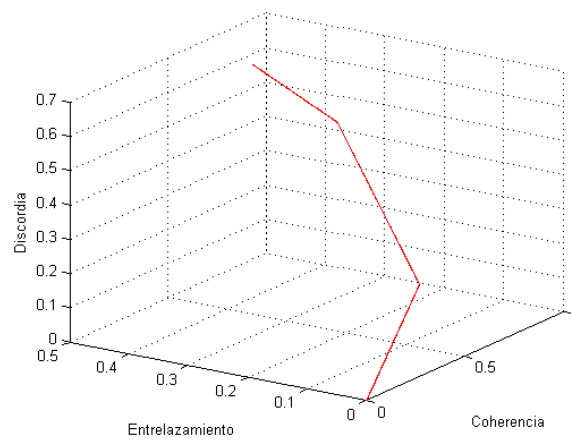


**Figura 4.27:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 0.58$

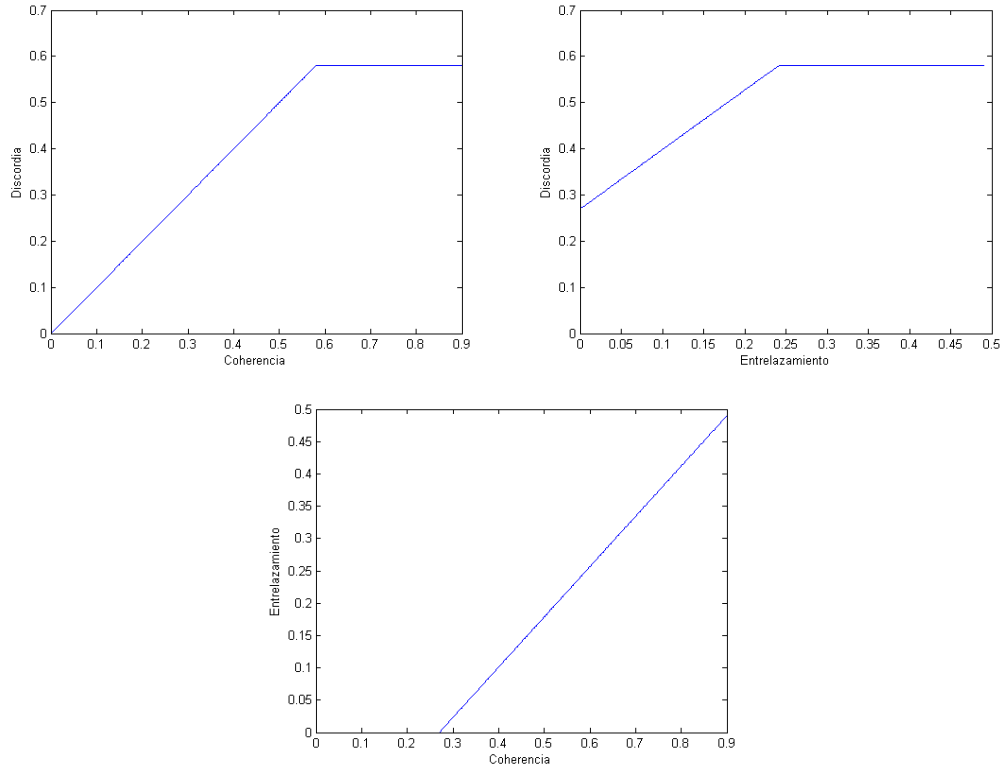
## 4.6.2. Curvas para Trace Norm

### Phase Damping

En el caso de Trace Norm la relaciones se vuelven más interesanes debido a los dos quiebres que presenta la Discordia, para recordar los mismos basta ver la figura 4.5a. En la misma se ven los mismos quiebres que presenta la figura 4.28, que también se ven reflejados en las figuras de a pares 4.29.



**Figura 4.28:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Phase Damping en Trace Norm

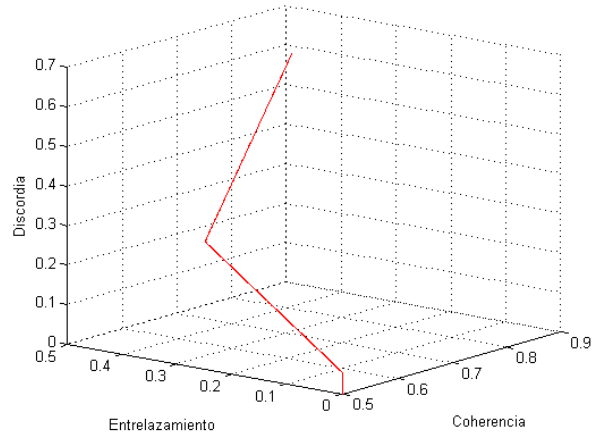


**Figura 4.29:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 0.58$

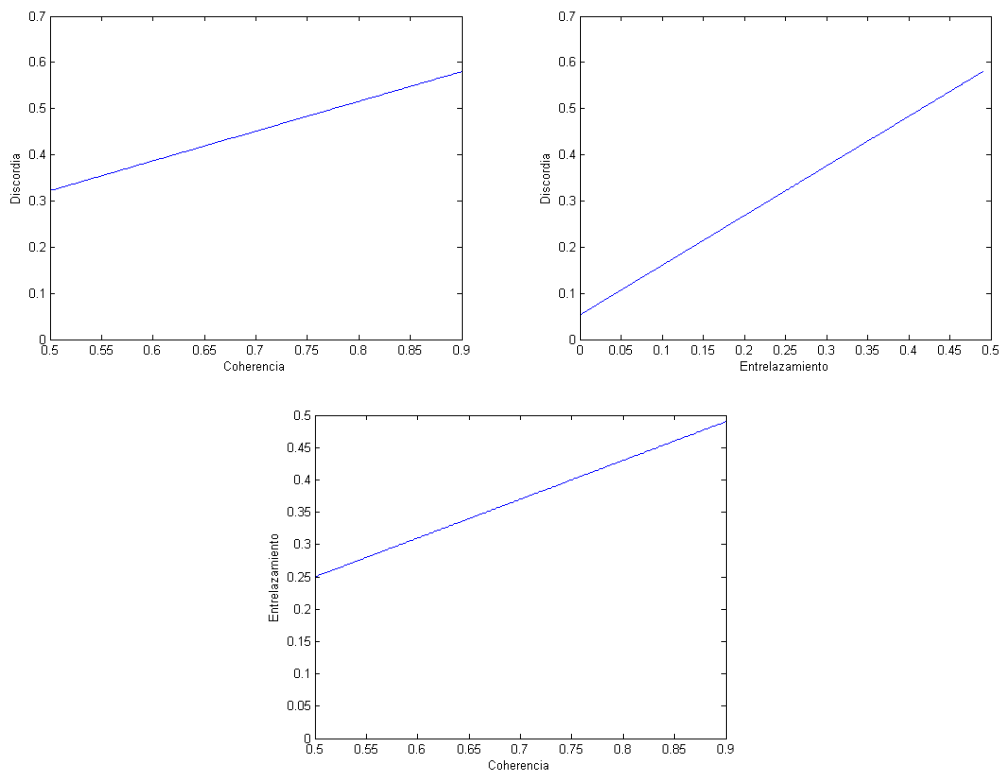
Los mismos resultados para Hilbert Schmidt se pueden ver en el caso de la norma Traza. Puede haber tanto Coherencia como Discordia si el Entrelazamiento es cero, y en el caso para Phase Damping, la Discordia y Coherencia se hacen cero en el mismo lugar, lo cual indicaría que la presencia de la Coherencia implica Discordia.

### Bit Flip

En Bit Flip pueden verse los múltiples quiebres que sufren las correlaciones como ya vimos en 4.6. Dichos quiebres se ven en 4.30 y en las figuras de a pares 4.31



**Figura 4.30:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Phase Damping en Trace Norm



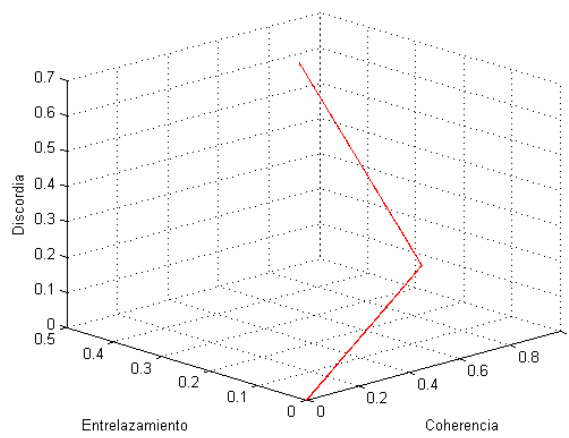
**Figura 4.31:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 0.58$



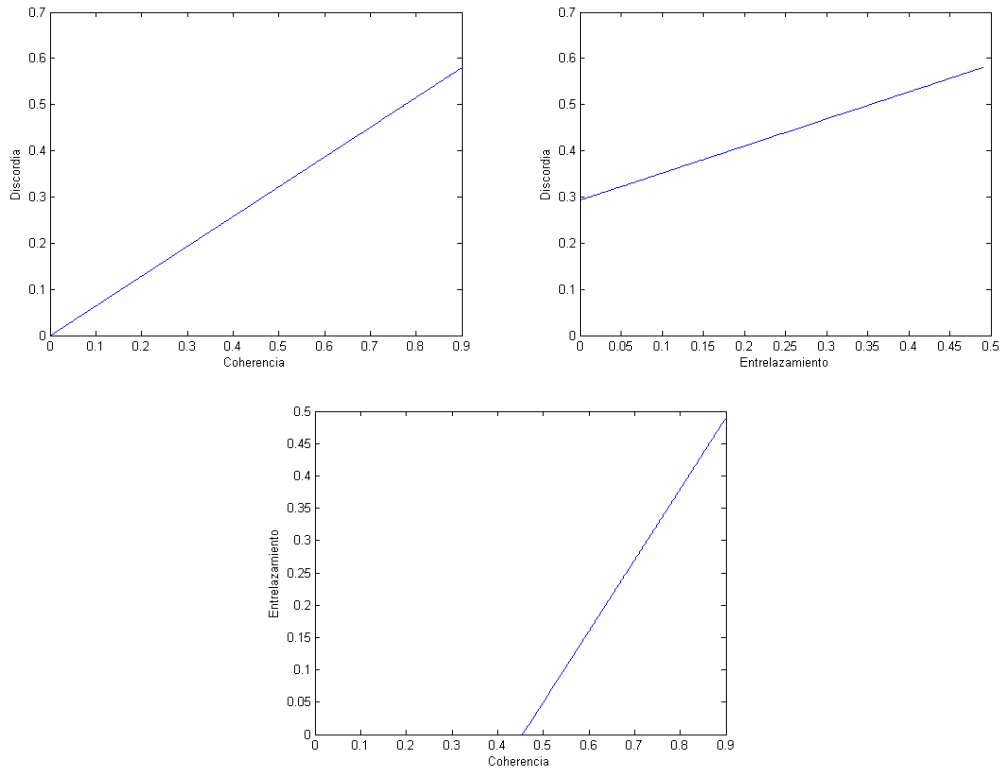
Nuevamente similar a lo que ocurre en Hilbert Schmidt, existen estados con Coherencia y Discordia distintas a cero, pero con Entrelazamiento nulo. Así como también puede haber estados sin Discordia pero con Coherencia.

### Depolarizing

Al igual que en las demás, basta referirse a 4.7 para comparar los resultados. El quiebre se debe a la muerte súbita del Entrelazamiento.



**Figura 4.32:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Depolarizing en Trace Norm



**Figura 4.33:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 0.58$

Por último, el caso del canal Depolarizing no presenta casi diferencias con Hilbert Schmidt, salvo que en este caso la Discordia y Coherencia no son exactamente iguales, pese a ser proporcionales.

# Capítulo 5

## Relaciones dinámicas para estados X

A continuación se realizará el mismo estudio que hicimos en el capítulo anterior para estados de Bell, pero esta vez a estados más generales. Los estados en cuestión son llamados “estados X” debido a la forma que tiene su matriz densidad asociada, la cual posee ceros fuera de la diagonal y antidiagonal, formando una X. Dichos estados requieren un análisis más detallado de la existencia, pues los mismos no tienen una representación tridimensional, ya que hacen falta 5 variables para describirlos. Fuera de eso, en este capítulo se realizará el mismo procedimiento que en el capítulo anterior.

### 5.1. Expresión analítica de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para estados X

Un estado general de dos qubits puede ser escrito como [2.8](#):

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_4 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes \vec{c} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{j=1}^3 r_j \sigma_j \otimes \sigma_j) \quad (5.1)$$

A diferencia de los estados Bell diagonal que son regidos por tres parámetros  $(r_1, r_2, r_3)$ , para crear estados generales falta incluir seis parámetros adicionales  $\vec{s} = (s_1, s_2, s_3)$  y  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ .

Para obtener estados X basta con considerar  $\vec{s}_X = (0, 0, s_3)$  y  $\vec{c}_X = (0, 0, c_3)$ .

Por lo que la ecuación anterior queda:

$$\rho = \frac{1}{4}(\mathbb{I}_4 + s_3 \cdot \sigma_3 \otimes \mathbb{I} + \mathbb{I} \otimes c_3 \cdot \sigma_3 + \sum_{j=1}^3 r_j \sigma_j \otimes \sigma_j) \quad (5.2)$$

De aquí en más se le llamará  $s$  a  $s_3$ , y  $c$  a  $c_3$ . El rango en el que pueden variar estos valores será estudiado en la sección 5.2.4.

Los elementos de la matriz densidad  $\rho_{i,j}$  expresados en función de los nuevos parámetros  $r_i$  y también a  $s$  y  $c$ , tienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= \frac{1}{4}(1 + r_3 + s + c) & \rho_{22} &= \frac{1}{4}(1 - r_3 + s - c) \\ \rho_{33} &= \frac{1}{4}(1 - r_3 - s + c) & \rho_{44} &= \frac{1}{4}(1 + r_3 - s - c) \\ \rho_{14} = \rho_{41} &= \frac{1}{4}(r_1 - r_2) & \rho_{23} = \rho_{32} &= \frac{1}{4}(r_1 + r_2) \end{aligned} \quad (5.3)$$

En esta sección trabajaremos únicamente con la Trace Norm, ya que Hilbert Schmidt no es siempre contractiva en estados X [41].

### 5.1.1. Expresiones analíticas usando Trace Norm

En Trace Norm, la expresión del Entrelazamiento viene dada nuevamente por la concurrencia 3.23, como ya lo analizamos en 3.65:

$$E = 2 \max [0, |r_1 \pm r_2| - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)}] \quad (5.4)$$

La Discordia viene dada por 3.71:

$$D = \frac{|r_1|}{2} \iff r_3^2 > r_1^2 + s^2 \quad (5.5)$$

o:

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) - r_2^2 \min(r_3^2, r_1^2)}{\max(r_3^2, r_2^2 + s^2) - \min(r_3^2, r_1^2) + r_1^2 - r_2^2}} \iff r_3^2 < r_1^2 + s^2 \quad (5.6)$$

Por último, la expresión de la Coherencia es:

$$C = \text{máx}(|r_1|, |r_2|) \quad (5.7)$$

## 5.2. Regiones de existencia para Estados X

Como los estados diagonales de Bell dependen exclusivamente de los tres parámetros del vector  $\vec{r}$ , la representación geométrica es posible ya que al ser solo tres parámetros, los mismos pueden representarse en el espacio.

Los estados X requieren 5 parámetros para ser descritos. Esto dificulta el estudio de la región de existencia, ya que para visualizarla en un diagrama tridimensional hace falta fijar al menos dos de ellos.

Para realizar dicho análisis hace falta recurrir a la condición de positividad de  $\rho$  3.54 que llevado a los parámetros  $\vec{r}$ ,  $s$  y  $c$  se traduce en:

$$\begin{aligned} |r_1 - r_2| &\leq \sqrt{(1 + r_3 + s + c)(1 + r_3 - s - c)} \\ |r_1 + r_2| &\leq \sqrt{(1 - r_3 + s - c)(1 - r_3 - s + c)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

A continuación se realizará el estudio para  $s$  y  $c$  fijos. En la sección 5.2.4 se repetira el procedimiento dejando fijo  $\vec{r}$ .

### 5.2.1. Deformación del Tetrahedro para distintos valores fijos de $s$ y $c$

Fijando los valores de  $s$  y  $c$ , podemos ver cómo la región de existencia es modificada. Para el caso  $s = c = 0$  se recuperan los estados de Bell y el Tetrahedro estudiado en el capítulo anterior.

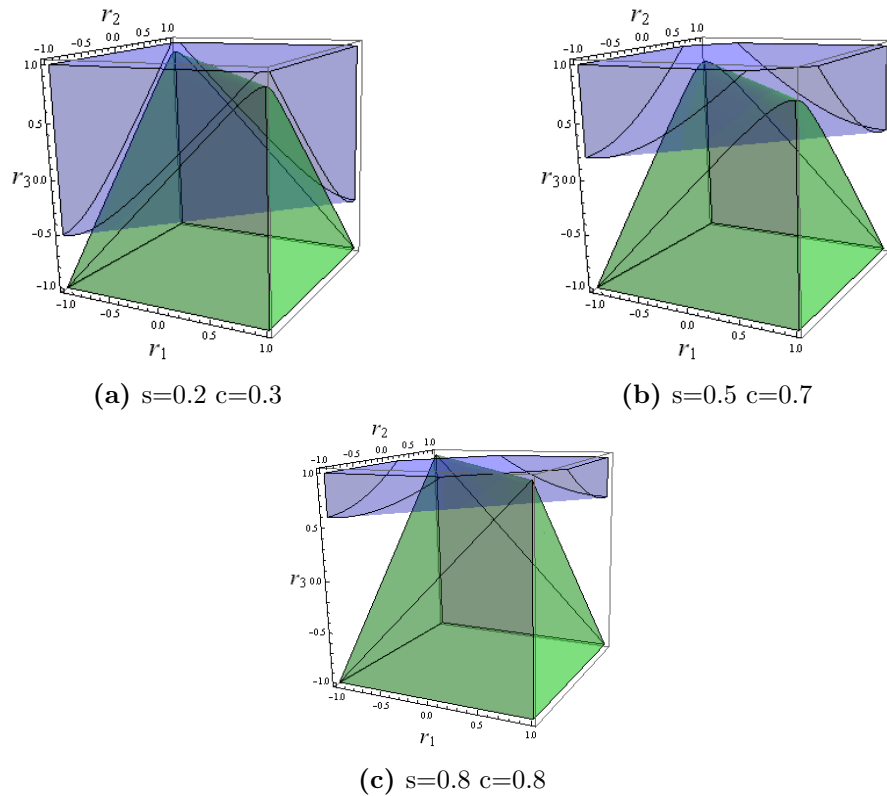
Para contemplar los cambios en la región de existencia es más sencillo referirse a las ecuaciones 5.8 de la siguiente manera:

$$(1 + r_3)^2 - (r_1 - r_2)^2 \geq (c + s)^2 \quad (5.9)$$

$$(1 - r_3)^2 - (r_1 + r_2)^2 \geq (c - s)^2 \quad (5.10)$$

Ambas regiones se ven representadas en la figura 5.1. La intersección es la región de existencia de los estados X. Cuanto mayor sea el valor de  $s$  o  $c$

más difícil es de cumplir la condición 5.9, ya que una de las dos condiciones implicará que el lado izquierdo de la desigualdad sea mayor a un número grande, limitando así la región de existencia. Por otro lado, cuanto mayor sea el valor absoluto de  $s$  y  $c$ , más difícil es de cumplir la condición 5.10. Por lo tanto, cuanto mayor sea el valor de  $s$  y  $c$  más pequeña será la región de existencia.

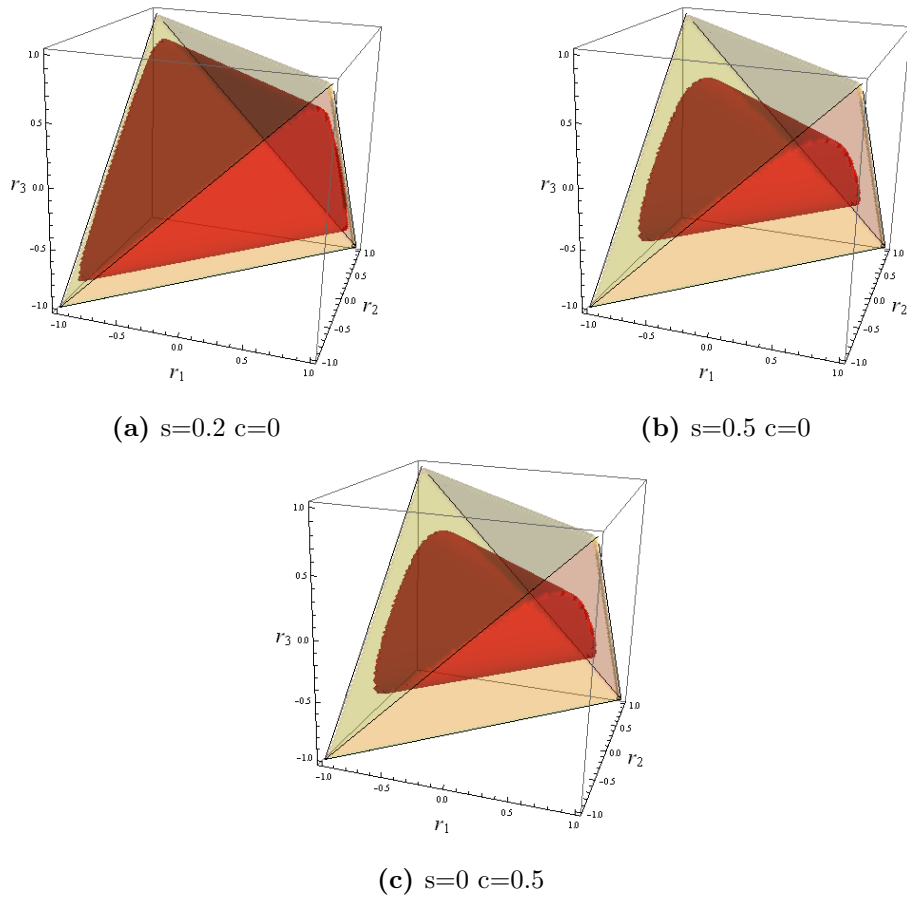


**Figura 5.1:** En verde la región delimitada por 5.9, en azul la delimitada por 5.10.

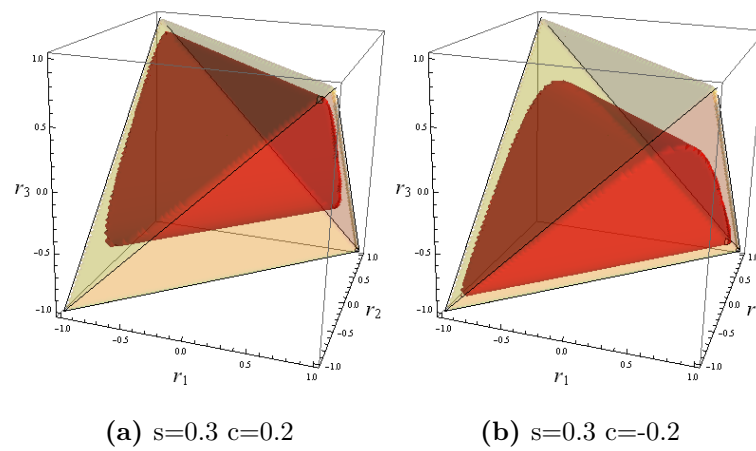
La simetría en las expresiones 5.9 y 5.10 permite cambiar  $s$  o  $c$  libremente y obtener el mismo resultado. Por lo tanto, en la figura 5.2 se puede ver el cambio en la región de existencia con los valores de  $s$  y  $c$ , dejando como referencia el tetrahedro de los estados de Bell.

En caso de cambiar  $s$  por  $-s$ , o  $c$  por  $-c$  se obtiene la misma región pero simetrizada respecto al origen (fig.:5.3).

Cabe destacar que el volumen de existencia para los estados X nunca es mayor que el de los estados de Bell.



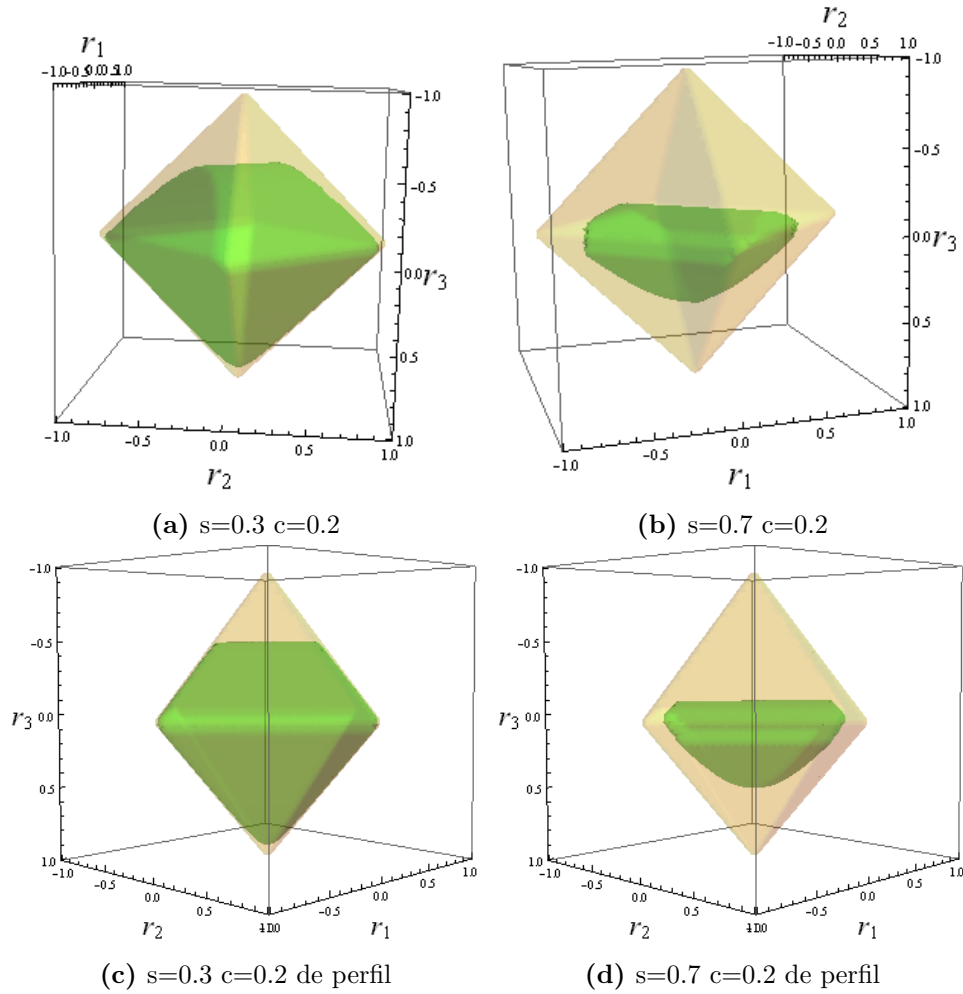
**Figura 5.2:** En rojo el tetrahedro deformado para distintos valores de  $s$  y  $c$ .



**Figura 5.3:** En rojo el tetrahedro deformado para  $s$  fijo.

## 5.2.2. Deformación del octaedro de Entrelazamiento cero

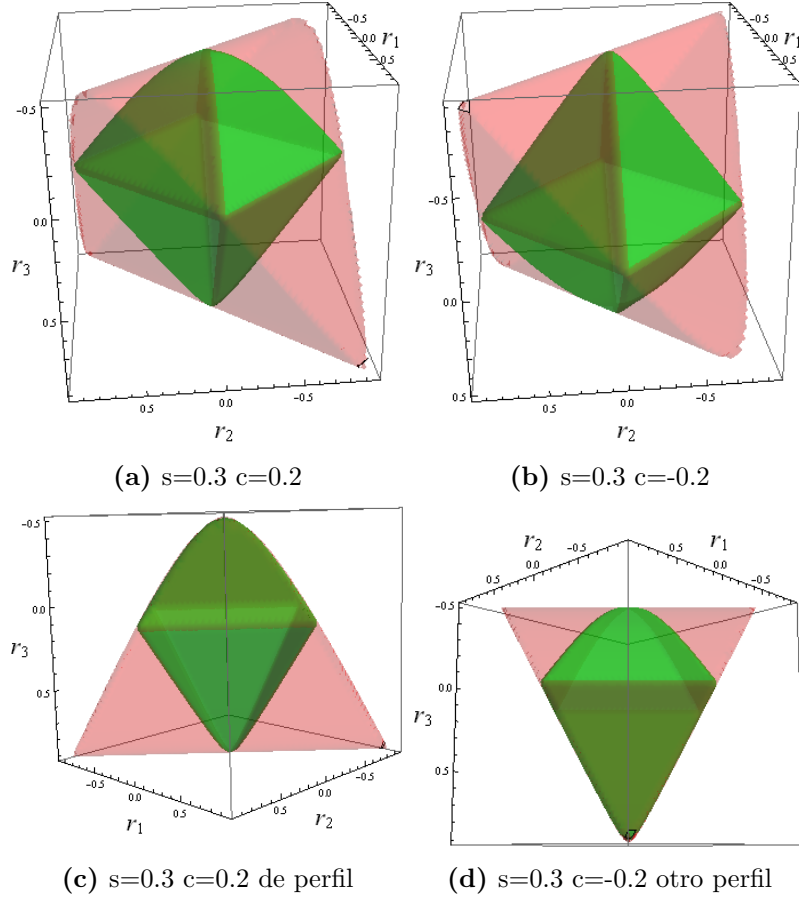
Cabe preguntarse qué ocurre con el octaedro que delimitaba la región con Entrelazamiento cero, pero esta vez para el caso de los estados X.



**Figura 5.4:** En amarillo el octaedro de Entrelazamiento cero para estados diagonales de Bell, en verde el octaedro deformado para los estados X.

La respuesta es que el octaedro se deforma de manera tal que ahora queda delimitado por la nueva región de existencia. La región que lo define sigue siendo la misma, pero ahora con nuevas restricciones impuestas por  $s$  y  $c$ .





**Figura 5.5:** En verde el octaedro de Entrelazamiento cero deformado, en rojo la región de existencia.

### 5.2.3. Regiones de Discordia para Estados X

En el caso de los estados X la Discordia puede ser dividida en múltiples partes, dependiendo de cuales máximos y mínimos predominen en la ecuación 5.6, o de cual condición se cumpla: si  $r_3^2 > r_1^2 + s^2$  o  $r_3^2 < r_1^2 + s^2$ . Esto define un total de 5 volúmenes distintos:

1.  $r_3^2 > r_1^2 + s^2$
2.  $r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_3^2 \cap \min(r_1^2, r_3^2) = r_3^2$
3.  $r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_3^2 \cap \min(r_1^2, r_3^2) = r_1^2$
4.  $r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_2^2 + s^2 \cap \min(r_1^2, r_3^2) = r_3^2$
5.  $r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_2^2 + s^2 \cap \min(r_1^2, r_3^2) = r_1^2$

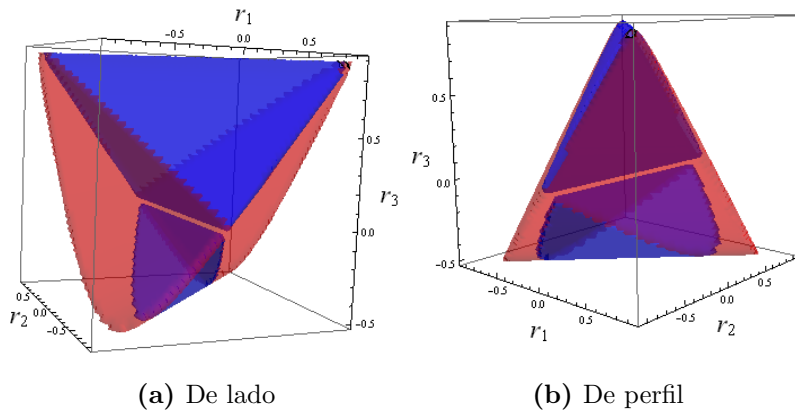
Pero basta sustituir estos resultados en la ecuación 5.6 para ver que en los volúmenes (1), (3) y (5) la Discordia tiene la misma expresión:

$$D = \frac{|r_1|}{2} \quad (5.11)$$

Y además, la unión de las regiones (1), (3) y (5) da como resultado el volumen:

$$|r_3| > |r_1| \quad (5.12)$$

De aquí en más será llamado **Región 1**:

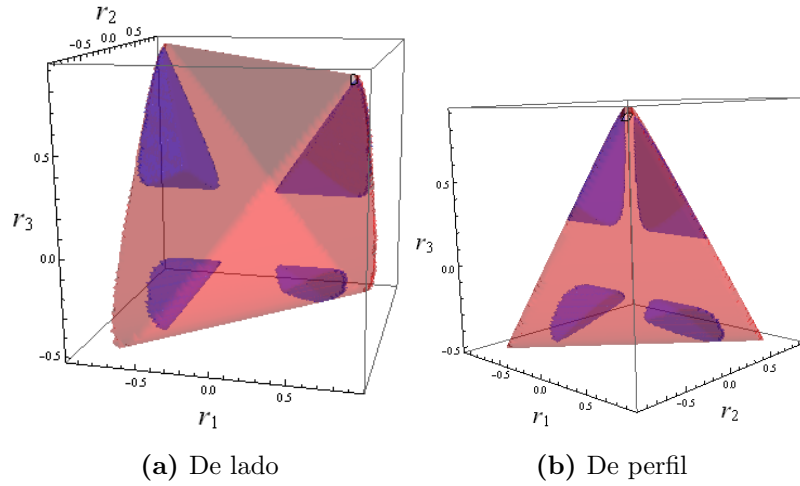


**Figura 5.6:** En rojo la región de existencia, en azul la Región 1, con  $s = 0.2$ .

En el volumen definido por (2) la Discordia toma el valor:

$$D = \frac{|r_3|}{2} \quad (5.13)$$

De aquí en más será llamado **Región 2**, y tiene la forma:

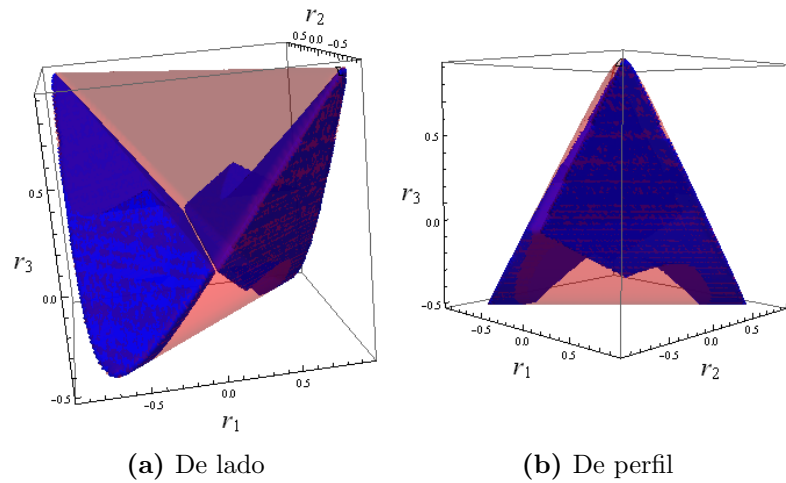


**Figura 5.7:** En rojo la Región 2, con  $s = 0.2$ .

y en el volumen (4) la Discordia tiene el valor:

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 r_2^2 - r_2^2 r_3^2 + r_1^2 s^2}{r_1^2 + r_3^2 + s^2}} \quad (5.14)$$

De aquí en más será llamado **Región 3**:

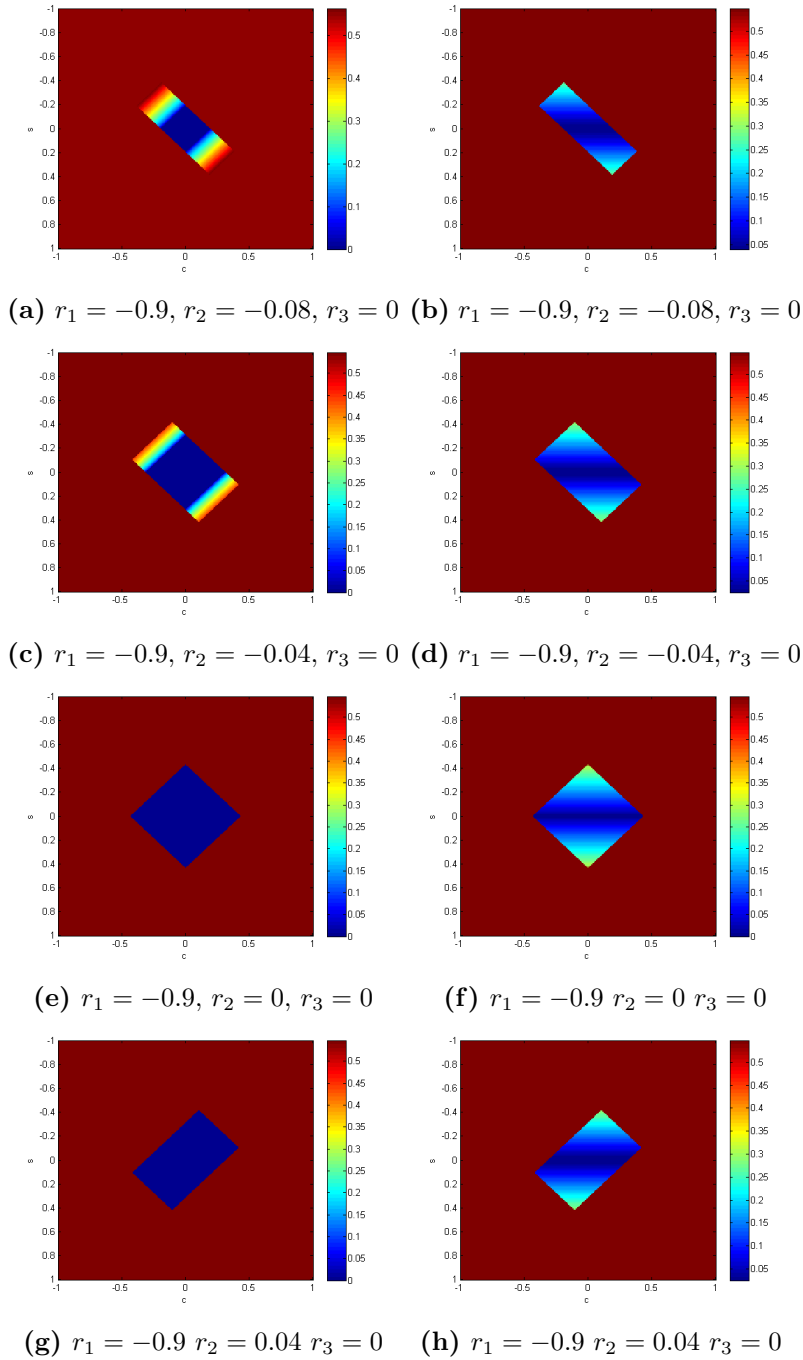


**Figura 5.8:** En rojo la Región 3, con  $s = 0.2$ .

El cambio en el valor de  $s$  modifica la forma de las distintas regiones de Discordia, pero sin alterar sus propiedades (ver 0.1).

### 5.2.4. Existencia para distintos valores de $r_1$ , $r_2$ y $r_3$ , en el plano $s - c$

Es pertinente estudiar para qué valores de  $s$  y  $c$  los estados son físicamente posibles, dado un conjunto de valores de  $\vec{r}$  fijos.



**Figura 5.9:** Valor del Entrelazamiento (izquierda) y Discordia (Derecha) en el plano  $s - c$ . La región roja pertenece a los estados físicamente imposibles.

En la imagen anterior se pueden ver los cambios en el Entrelazamiento y Discordia a medida que varía  $r_2$ , así como los cambios en el tamaño y forma de la región de existencia. La Discordia (5.6), (5.5) solo presenta cambios a medida que varía  $s$  ya que no depende de  $c$ , aumentando junto al valor de dicho parámetro. Por otro lado, el Entrelazamiento es mayor cuanto mayor sean los valores tanto de  $s$  como  $c$ , ya que  $|r_1 \pm r_2| - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)}$  es creciente con  $s$  y  $c$  para los valores de  $r_i$  dentro de la región de existencia, mostrando un crecimiento en dirección transversal. La Coherencia no fue incluida ya que la misma es constante en este plano, pues es independiente de  $s$  y  $c$ .

Como puede verse, la región de existencia se contrae, hasta formar un cuadrado perfecto en  $r_2 = 0$ , y luego vuelve a estirarse hasta volverse una línea y luego desaparecer. Las imágenes seleccionadas son con  $r_1$  y  $r_3$  fijos para que se comprenda más como es modificada la región de existencia a medida que es cambiado  $r_2$ . Dejando fijo  $r_2$  y  $r_3$ , y cambiando  $r_1$  se obtienen resultados similares.

### 5.3. Evolución bajo canales de ruido para estados X

En el caso de los estados X, el vector  $\vec{r}$  evoluciona de la misma forma que en el caso de los estados Bell Diagonal. La diferencia radica en que, excepto para Phase Damping, los parámetros  $s$  y  $c$  se ven multiplicados por un factor  $(p - 1)$ . La forma matricial de un estado X es la siguiente:

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & r_1(0) - r_2(0) \\ 0 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & r_1(0) + r_2(0) & 0 \\ 0 & r_1(0) + r_2(0) & 1 - r_3(0) - s(0) + c(0) & 0 \\ r_1(0) - r_2(0) & 0 & 0 & 1 + r_3(0) - s(0) - c(0) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Aplicando los operadores de Kraus para Phase Damping obtenemos:

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & (r_1(0) - r_2(0))(p - 1)^2 \\ 0 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & (r_1(0) + r_2(0))(p - 1)^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))(p - 1)^2 & 1 - r_3(0) - s(0) + c(0) & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))(p - 1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) - s(0) - c(0) \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Por lo tanto, bajo la acción de phase flip, los estados X evolucionan de

forma que las entradas del vector  $\vec{r}$  se ven multiplicadas por un factor  $(p-1)^2$  de la siguiente manera:

$$\vec{r}' = r_1(p-1)^2\hat{i} + r_2(p-1)^2\hat{j} + r_3\hat{k} \quad (5.17)$$

De forma análoga puede repetirse el procedimiento para los canales restantes, obteniéndose bajo Bit Flip:

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0)x^2 + (s(0) + c(0))x & 0 & 0 & r_1(0) - r_2(0)x^2 \\ 0 & 1 - r_3(0)x^2 + (s(0) - c(0))x & r_1(0) + r_2(0)x^2 & 0 \\ 0 & r_1(0) + r_2(0)x^2 & 1 - r_3(0)x^2 + (-s(0) + c(0))x & 0 \\ r_1(0) - r_2(0)x^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0)x^2 - (s(0) + c(0))x \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

con  $x^2 = (p-1)^2$

Los valores de  $\vec{r}$  cambian de la siguiente manera:

$$\vec{r}' = r_1\hat{i} + r_2(p-1)^2\hat{j} + r_3(p-1)^2\hat{k} \quad (5.19)$$

Y en este caso también cambian los valores de  $s$  y  $c$ :

$$s' = s(p-1) \quad c' = c(p-1) \quad (5.20)$$

Lo mismo puede hacerse para los canales restantes, obteniéndose bajo Bit Phase Flip:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= r_1(p-1)^2\hat{i} + r_2\hat{j} + r_3(p-1)^2\hat{k} \\ s' &= s(p-1) \quad c' = c(p-1) \end{aligned} \quad (5.21)$$

y bajo Depolarizing:

$$\begin{aligned} \vec{r}' &= r_1(p-1)^2\hat{i} + r_2(p-1)^2\hat{j} + r_3(p-1)^2\hat{k} \\ s' &= s(p-1) \quad c' = c(p-1) \end{aligned} \quad (5.22)$$

### 5.3.1. Evolución de las correlaciones usando Trace Norm

A continuación puede verse la gráfica de evolución bajo Phase Damping, Bit Flip, y Depolarizing en Trace Norm para las tres correlaciones.

## Phase Damping

En Phase Damping la Discordia se calcula como 3.71:

$$D(\rho) = \begin{cases} \frac{|r_1|}{2}(p-1)^2 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2(p-1)^4 \max(r_3^2, r_2^2(p-1)^4 + s^2) - r_2^2(p-1)^4 \min(r_3^2, r_1^2(p-1)^4)}{\max(r_3^2, r_2^2(p-1)^4 + s^2) - r_2^2(p-1)^4 \min(r_3^2, r_1^2(p-1)^4) + (r_1^2 - r_2^2)(p-1)^4}} \end{cases} \quad (5.23)$$

ocurriendo el primer caso si:

$$r_1^2(p-1)^4 - r_3^2 + s^2 < 0 \quad (5.24)$$

y el segundo si:

$$r_1^2(p-1)^4 - r_3^2 + s^2 \geq 0 \quad (5.25)$$

Esto ofrece tres posibilidades, dependiendo en cual región de la Discordia nos encontremos.

### Región 1:

La Región 1 viene dada por:

$$|r_3| > |r_1| \quad (5.26)$$

Si recordamos la sección 5.2.3 esto ocurre cuando se cumple en simultáneo:

$$\begin{cases} r_3^2 > r_1^2 + s^2 \\ r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \left( \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_3^2 \right) \cap \left( \min(r_3^2, r_1^2) = r_1^2 \right) \\ r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \left( \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_2^2 + s^2 \right) \cap \left( \min(r_3^2, r_1^2) = r_3^2 \right) \end{cases} \quad (5.27)$$

### Región 2:

La Región 2 viene dada por:

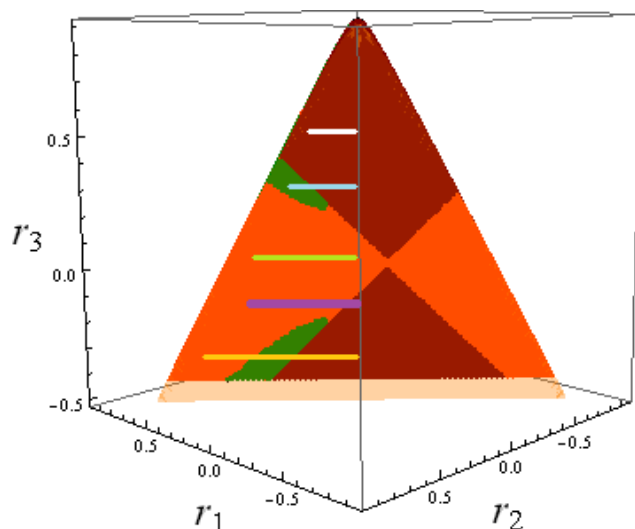
$$r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \left( \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_3^2 \right) \cap \left( \min(r_3^2, r_1^2) = r_3^2 \right) \quad (5.28)$$

### Región 3:

La Región 3 viene dada por:

$$r_3^2 < r_1^2 + s^2 \cap \left( \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_2^2 + s^2 \right) \cap \left( \min(r_3^2, r_1^2) = r_1^2 \right) \quad (5.29)$$

Las regiones no tienen por qué ser atravesadas en orden, eso dependerá de el tipo de canal que actúa. A continuación se muestra una posible evolución de un estado bajo Phase Damping:



**Figura 5.10:** Corte según el plano  $r_1 - r_2 = 0.2$ . En rojo la Región 1, en verde la Región 2, y en naranja la Región 3. La línea amarilla es un estado que evoluciona bajo Phase Damping atravesando las tres regiones. En verde se mantiene siempre en la Región 3. En violeta saltando de la Región 3 a la Región 1. En celeste de la Región 2 a la Región 1. En Blanco se mantiene siempre dentro de la Región 1.

En la figura 5.10 puede verse como el estado puede pasar por las tres regiones en orden descendente: Región 3, Región 2, Región 1 (trayectoria amarilla), saltar de la Región 3 a la Región 1 (trayectoria violeta) permanecer siempre en la Región 3 (trayectoria verde), saltar de la Región 2 a la Región 1 (Trayectoria celeste), o permanecer siempre en la Región 1 (trayectoria blanca) , dependiendo del valor de las condiciones iniciales de  $\vec{r}$ , es decir  $r_1, r_2, r_3$ .

Las Regiones 2 y 3 para Phase Damping se pueden escribir como inecuaciones de la siguiente manera:

$$r_3^2 < r_1^2(p-1)^4 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2 > r_2^2(p-1)^4 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2 < r_1^2(p-1)^4 \quad (5.30)$$



$$r_3^2 < r_1^2(p-1)^4 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2 < r_2^2(p-1)^4 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2 < r_1^2(p-1)^4 \quad (5.31)$$

Por lo tanto para  $\vec{r}$  fijo, el estado se mantendrá en la Región 1 mientras cumpla:

$$p > 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_1|}} \quad (5.32)$$

Esto ocurrirá en la trayectoria blanca de la imagen 5.10.

En este caso la Discordia vale:

$$D = \frac{|r_1|}{2}(p-1)^2 \quad (5.33)$$

El estado estará dentro de la Región 2 mientras cumpla:

$$\begin{cases} p < 1 - \sqrt[4]{\frac{r_3^2 - s^2}{r_1^2}} = p_1 \\ p > 1 - \sqrt[4]{\frac{r_3^2 - s^2}{r_2^2}} = p_2 \\ p < 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_1|}} = p_3 \end{cases} \quad (5.34)$$

Viendo la figura 5.10 queda claro que el estado no siempre atraviesa la Región 2. No la atraviesa cuando la segunda condición de 5.34 para  $p$  es mayor que cualquiera de las otras dos, es decir:

$$p_2 > p_1 \quad \text{o} \quad p_2 > p_3 \quad (5.35)$$

De esta forma el sistema de inecuaciones es incompatible. Esto se cumple en las trayectorias blanca y violeta de la figura 5.10, las cuales no atraviesan la Región 2.

En este caso la Discordia toma el valor constante:

$$D = \frac{|r_3|}{2} \quad (5.36)$$

Estará en la Región 3 mientras cumpla:

$$\begin{cases} p < 1 - \sqrt[4]{\frac{r_3^2 - s^2}{r_1^2}} = p_1 \\ p < 1 - \sqrt[4]{\frac{r_3^2 - s^2}{r_2^2}} = p_2 \\ p < 1 - \sqrt{\frac{|r_3|}{|r_1|}} = p_3 \end{cases} \quad (5.37)$$

Con la Discordia valiendo:

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 r_2^2 (p-1)^8 - r_2^2 r_3^2 (p-1)^4 + r_1^2 s^2 (p-1)^4}{r_1^2 (p-1)^4 + r_3^2 + s^2}} \quad (5.38)$$

Como ejemplo podemos ver el caso del estado con valores iniciales  $r_1 = -0.6, r_2 = 0.4, r_3 = 0.3, s = 0.2, c = 0.3$ . En este caso  $p_1 = 0.3895, p_2 = 0.2523, p_3 = 0.2929$ . Por lo tanto:  $p_1 > p_3 > p_2$ . Esto implica que el estado se encuentra en la Región 3 para  $p < p_2$ , en la Región 2 para  $p_2 < p < p_3$ , y en la Región 1 para  $p > p_3$ . Puede verse en la trayectoria amarilla de la figura 5.10.

Un segundo ejemplo es el caso del estado con valores iniciales  $r_1 = 0.5, r_2 = 0.4, r_3 = -0.1, s = 0.2, c = 0.3$ . En este caso el estado pasa de la Región 2 a la Región 1. Esto ocurre pues  $p_1 = 0.2222, p_2 = -0.0435, p_3 = 0.1972$ . Por lo tanto:  $p_1 > p_3$ , quedando  $p_2$  excluido pues  $p$  nunca alcanza valores negativos. Esto implicará que el estado no está nunca en la Región 3, pues  $p > p_2 \quad \forall p$ . Se encontrará en la Región 2 para  $0 < p < p_3$ , y en la Región 1 para  $p > p_3$ . Puede verse en la trayectoria celeste de la figura 5.10.

El último ejemplo y más sencillo es cuando un estado se encuentra siempre en la misma región. Como por ejemplo  $r_1 = -0.6, r_2 = 0.4, r_3 = 0.7, s = 0.2, c = 0.3$ . En esta situación  $p_1, p_2$  y  $p_3$  son negativos, por lo que se cumple la condición para la Región 1, siendo:  $p > p_3 \quad \forall p$ . Puede verse en la trayectoria blanca de la figura 5.10.

En el caso de que  $r_3^2 - s^2 < 0$ , dando un número complejo, basta con volver a las primeras inecuaciones para las Regiones 2 y 3 (5.30, 5.31) y ver que la que se verifica es la condición para la Región 3, pues  $r_3^2 - s^2 < 0$  en la Región 2 implicaría que  $r_2^2(p-1)^2$  sea menor que cero, y eso no ocurre para ningún  $p$ .

La expresión del Entrelazamiento en Phase Damping es:

$$E = 2 \max \left[ 0, |r_1 \pm r_2| (p-1)^2 - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \right] \quad (5.39)$$

Por lo tanto, la muerte súbita del Entrelazamiento ocurre cuando

$$|r_1 \pm r_2|(p-1)^2 - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} > 0 \quad (5.40)$$

Y despejando en función de  $p$  se obtiene:

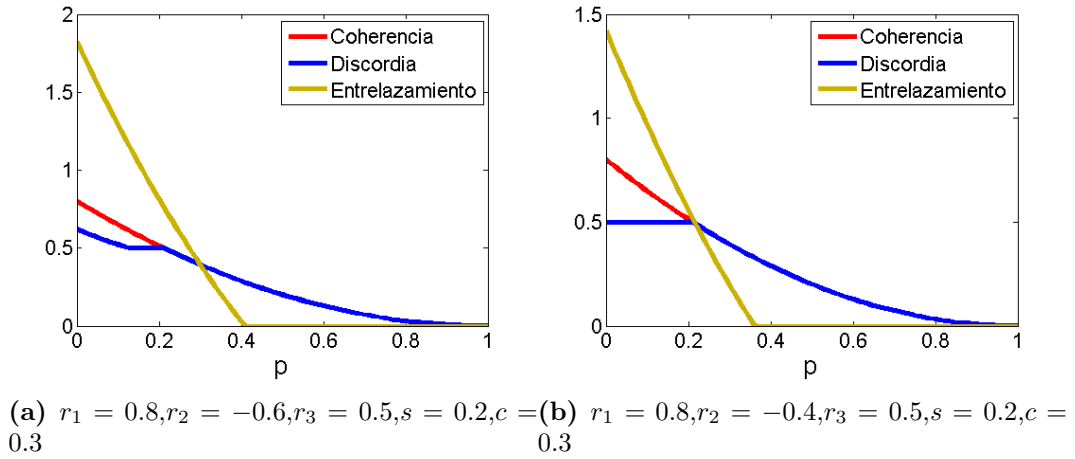
$$p > 1 - \sqrt{\frac{\sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)}}{|r_1 \pm r_2|}} \quad (5.41)$$

El  $\pm$  y  $\mp$  dependen de cual expresión sea máxima en 5.39.

La Coherencia siempre disminuye y alcanza el valor 0 una vez que  $p = 1$ :

$$C = \max(|r_1|, |r_2|)(p-1)^2 \quad (5.42)$$

En la figura 5.11 puede verse como la Discordia sufre quiebres cuando pasa de la Región 3 5.31, se mantiene constante en la Región 2 5.30, y luego ocurre otro quiebre cuando pasa de la Región 2 a la Región 1 5.26.



**Figura 5.11:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Phase damping en función de  $p$ .

## Bit Flip

En Bit Flip la Discordia se calcula como:

$$D(\rho) = \begin{cases} \frac{|r_1|}{2} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 \max(r_3^2(p-1)^4, r_2^2(p-1)^4 + s^2(p-1)^2) - r_2^2(p-1)^4 \min(r_3^2(p-1)^4, r_1)}{\max(r_3^2(p-1)^4, r_2^2(p-1)^4 + s^2(p-1)^2) - r_2^2(p-1)^4 \min(r_3^2(p-1)^4, r_1) + r_1^2 - r_2^2(p-1)^4}} \end{cases} \quad (5.43)$$

Ocurriendo el primer caso si:

$$r_1^2 - r_3^2(p-1)^4 + s^2(p-1)^2 < 0 \quad (5.44)$$

y el segundo si:

$$r_1^2 - r_3^2(p-1)^4 + s^2(p-1)^2 > 0 \quad (5.45)$$

En el caso de Bit Flip (también en Bit Phase Flip, y Depolarizing), no es posible dibujar una evolución como en la figura 5.10, ya que a medida que cambia  $p$ , también cambian  $s$  y  $c$ , modificando la forma del espacio de estados. No obstante, la evolución sería similar a la de Phase Damping, solo que acercándose al eje  $x$  en vez del eje  $z$ .

Esto ofrece tres posibilidades, dependiendo en cual región de la Discordia nos encontremos.

$$|r_3|(p-1)^2 > |r_1| \quad (5.46)$$

$$r_3^2(p-1)^4 < r_1^2 + s^2(p-1)^2 \quad \cap \quad r_3^2(p-1)^2 > r_2^2(p-1)^2 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2(p-1)^4 < r_1^2 \quad (5.47)$$

$$r_3^2(p-1)^4 < r_1^2 + s^2(p-1)^2 \quad \cap \quad r_3^2(p-1)^4 < r_2^2(p-1)^4 + s^2(p-1)^2 \quad \cap \quad r_3^2(p-1)^4 < r_1^2 \quad (5.48)$$

Por lo tanto, el estado se conservará en la Región 1 mientras cumpla:

$$p < 1 - \sqrt{\frac{|r_1|}{|r_3|}} \quad (5.49)$$

Tomando la Discordia un valor constante:

$$D = \frac{|r_1|}{2} \quad (5.50)$$

En la Región 2 mientras cumpla:

$$\begin{cases} p < 1 - \frac{s^2 - \sqrt{s^4 + 4r_3^2 r_1^2}}{2r_3^2} \\ p > 1 - \sqrt{\frac{s^2}{r_3^2 - r_2^2}} \\ p > 1 - \sqrt{\frac{|r_1|}{|r_3|}} \end{cases} \quad (5.51)$$

Tomando el valor:

$$D = \frac{|r_3|}{2}(p-1)^2 \quad (5.52)$$

Y en la Región 3 mientras cumpla:

$$\begin{cases} p > 1 - \frac{s^2 - \sqrt{s^4 + 4r_3^2 r_1^2}}{2r_3^2} \\ p > 1 - \sqrt{\frac{s^2}{r_3^2 - r_2^2}} \\ p > 1 - \sqrt{\frac{|r_1|}{|r_3|}} \end{cases} \quad (5.53)$$

Con la Discordia valiendo:

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 r_2^2 (p-1)^8 - r_2^2 r_3^2 (p-1)^4 + r_1^2 s^2 (p-1)^4}{r_1^2 (p-1)^4 + r_3^2 + s^2}} \quad (5.54)$$

La expresión del Entrelazamiento en Bit Flip es:

$$E = 2 \max \left[ 0, |r_1 \pm r_2(p-1)^2| - \sqrt{(1 \mp r_3(p-1)^2 + s(p-1) + c(p-1))(1 \mp r_3(p-1)^2 - s(p-1) - c(p-1))} \right] \quad (5.55)$$

La condición para muerte súbita es:

$$|r_1 \pm r_2(p-1)^2| > \sqrt{(1 \mp r_3(p-1)^2 + s(p-1) + c(p-1))(1 \mp r_3(p-1)^2 - s(p-1) - c(p-1))} \quad (5.56)$$

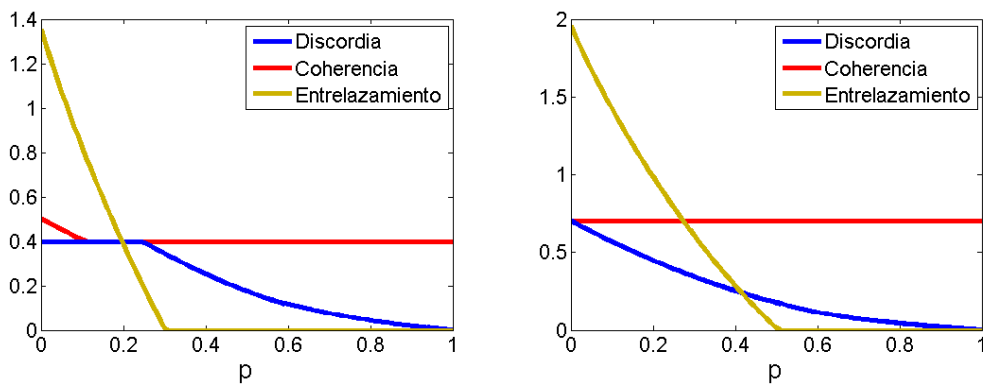
En esta situación, no se puede despejar analíticamente.

La Coherencia puede permanecer constante si  $r_1$  comienza siendo máximo, o disminuir mientras  $r_2(p-1)^2$  es máximo, hasta alcanzar el valor  $r_1$  y luego

permanecer constante.

$$C = \text{máx}(r_1, r_2(p-1)^2) \quad (5.57)$$

En la figura 5.12a puede verse como la Discordia sufre un quiebre cuando pasa de la Región 1 a la Región 3. En la figura 5.12b hay un cambio de la Región 2 a la 3, pero debido al tamaño de la gráfica, el cambio de concavidad es apenas perceptible (alrededor de 0.6)



(a)  $r_1 = 0.4, r_2 = -0.5, r_3 = 0.7, s = 0.2, c = 0.3$  (b)  $r_1 = 0.7, r_2 = -0.5, r_3 = 0.4, s = 0.2, c = 0.4$

**Figura 5.12:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Phase damping.

## Depolarizing

En Depolarizing la Discordia se calcula como:

$$D(\rho) = \begin{cases} \frac{|r_1|}{2}(p-1)^2 \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2(p-1)^6 \text{máx}(r_3^2(p-1)^2, r_2^2(p-1)^2 + s^2) - r_2^2(p-1)^8 \text{mín}(r_3^2, r_1^2)}{(p-1)^4 \text{máx}(r_3^2, r_2^2 + s^2(p-1)^{-2}) - (p-1)^4 \text{mín}(r_3^2, r_1^2) + r_1^2 - r_2^2}} \end{cases} \quad (5.58)$$

Ocurriendo lo primero si:

$$r_1^2(p-1)^2 - r_3^2(p-1)^2 + s^2 < 0 \quad (5.59)$$

y lo segundo si:

$$r_1^2(p-1)^2 - r_3^2(p-1)^2 + s^2 \geq 0 \quad (5.60)$$

Esto nuevamente ofrece tres posibilidades, dependiendo en cual región de la Discordia nos encontremos.

$$|r_3| > |r_1| \quad (5.61)$$

$$r_3^2(p-1)^2 < r_1^2(p-1)^2 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2(p-1)^2 > r_2^2(p-1)^2 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2 < r_1^2 \quad (5.62)$$

$$r_3^2(p-1)^2 < r_1^2(p-1)^2 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2(p-1)^2 < r_2^2(p-1)^2 + s^2 \quad \cap \quad r_3^2 < r_1^2 \quad (5.63)$$

Por lo tanto, el estado se conservará en la Región 1 mientras cumpla 5.61 independientemente de  $p$ , tomando la Discordia un valor constante:

$$D = \frac{|r_1|}{2} \quad (5.64)$$

El estado se encontrará en la Región 2 mientras cumpla:

$$\begin{cases} p < 1 - \sqrt{\frac{s^2}{r_3^2 - r_1^2}} \\ p > 1 - \sqrt{\frac{s^2}{r_3^2 - r_2^2}} \\ |r_3| < |r_1| \end{cases} \quad (5.65)$$

Tomando el valor:

$$D = \frac{|r_3|}{2}(p-1)^2 \quad (5.66)$$

Y en la Región 3 mientras cumpla:

$$\begin{cases} p > 1 - \sqrt{\frac{s^2}{r_3^2 - r_1^2}} \\ p > 1 - \sqrt{\frac{s^2}{r_3^2 - r_2^2}} \\ |r_3| < |r_1| \end{cases} \quad (5.67)$$

Con la Discordia valiendo:

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 r_2^2 (p-1)^8 - r_2^2 r_3^2 (p-1)^4 + r_1^2 s^2 (p-1)^4}{r_1^2 (p-1)^4 + r_3^2 + s^2}} \quad (5.68)$$

La expresión del Entrelazamiento en Depolarizing es:

$$E = 2 \max \left[ 0, |r_1 \pm r_2|(p-1)^2 - \sqrt{(1 \mp r_3(p-1)^2 + s(p-1) + c(p-1))(1 \mp r_3(p-1)^2 - s(p-1) - c(p-1))} \right] \quad (5.69)$$

Siendo la condición paramuerte súbita:

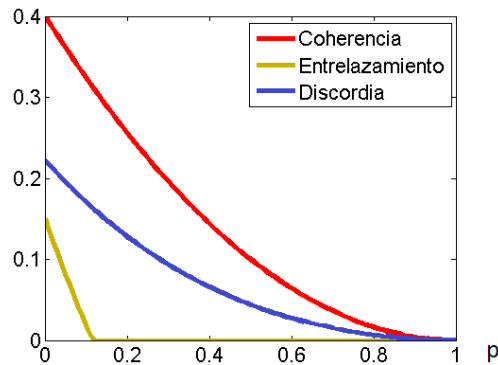
$$|r_1 \pm r_2|(p-1)^2 > \sqrt{(1 \mp r_3(p-1)^2 + s(p-1) + c(p-1))(1 \mp r_3(p-1)^2 - s(p-1) - c(p-1))} \quad (5.70)$$

La Coherencia siempre disminuye y alcanza el valor 0 una vez que  $p = 1$ :

$$C = \max(|r_1|, |r_2|)(p-1)^2 \quad (5.71)$$

En el caso de depolarizing nunca ocurren quiebres en la Coherencia, ya que para  $p = [0, 1]$  aquel valor de  $r_i$  que inicie siendo máximo, continuará siendo máximo, ya que todos disminuyen con  $(p-1)^2$ .

En la figura 5.13 puede verse el tipo de evolución predominante en Depolarizing. En la misma hay un cambio de concavidad (cerca de 0.7) pero es tan leve que no puede verse en esta escala.



**Figura 5.13:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Depolarizing.  $r_1 = 0.4$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = -0.1$ ,  $s = 0.1$ ,  $c = 0$



## 5.4. Relaciones dinámicas

Al igual que en el caso de los estados Bell Diagonal, buscaremos regiones en el espacio de estados en las que puedan escribirse expresiones analíticas de las correlaciones, y relaciones entre ellas. El caso de los estados X es mucho más complejo por una variedad de razones: La primera y más evidente es debido a las formas irregulares que poseen tanto la región de existencia como la región de Entrelazamiento cero. Por otro lado, la complejidad de la expresión del Entrelazamiento y sobre todo de la Discordia hacen mucho más difícil escribir expresiones analíticas, y en algunos casos incluso imposible. Por último, la división en tres zonas de Discordia, aumenta la cantidad de casos a analizar, rompiendo ciertas simetrías que hacen que el canal Bit Phase Flip no pueda ser obviado.

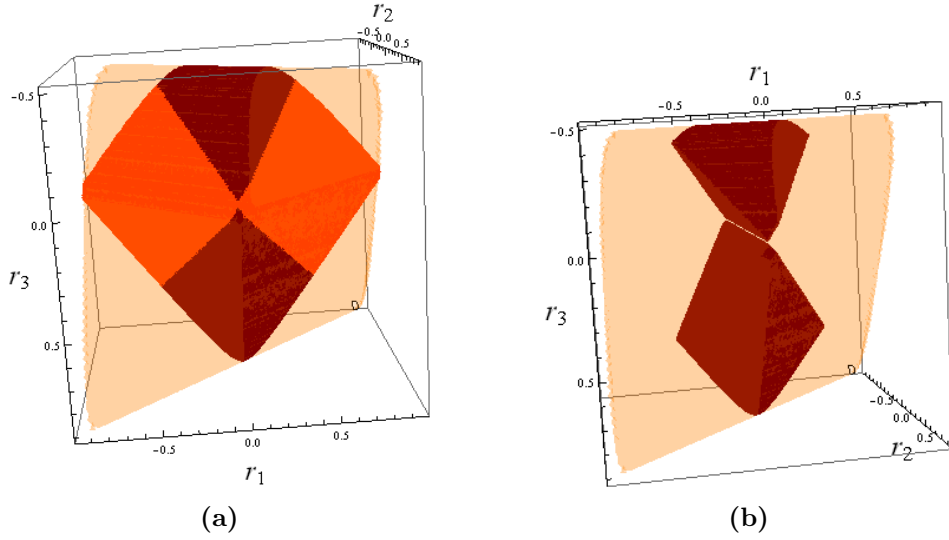
### 5.4.1. Relaciones triples

#### Phase Damping

En Phase Damping, dentro de la región con Entrelazamiento cero, hay dos zonas diferenciadas: Una en la cual la Discordia toma el valor  $D_1 = \frac{|r_1|}{2}(p-1)^2$  (bajo la condición  $|r_3| > |r_1|$ , que llamamos “Región 1”), y otra en la que puede tomar los valores asociados a la Región 2 o la Región 3. Como el canal Phase Damping cambia  $r_1$  en  $r_1(p-1)^2$ , es posible escribir a la Discordia en función de la Coherencia al despejar el parámetro  $p$ . Recordando la expresión de la Coherencia en Phase Damping  $C = \max(r_1, r_2)(p-1)^2$  se obtiene la siguiente relación:

$$C = \max(|r_1|, |r_2|) \frac{2D}{|r_1|} \quad (5.72)$$

Puede verse en la siguiente figura:



**Figura 5.14:** En amarillo claro puede verse la región de existencia, con  $s = 0.2$  y  $c = 0$ . En naranja la región con Entrelazamiento cero, en rojo la región en que se cumple (5.72), en naranja donde no se cumple. La figura 5.14b es la misma que 5.14a pero sin la parte naranja par mayor visibilidad.

Fuera de la región de Entrelazamiento cero, se puede escribir una relación que incluye al Entrelazamiento, pero sólo si también se está dentro de la Región 1 de la Discordia:

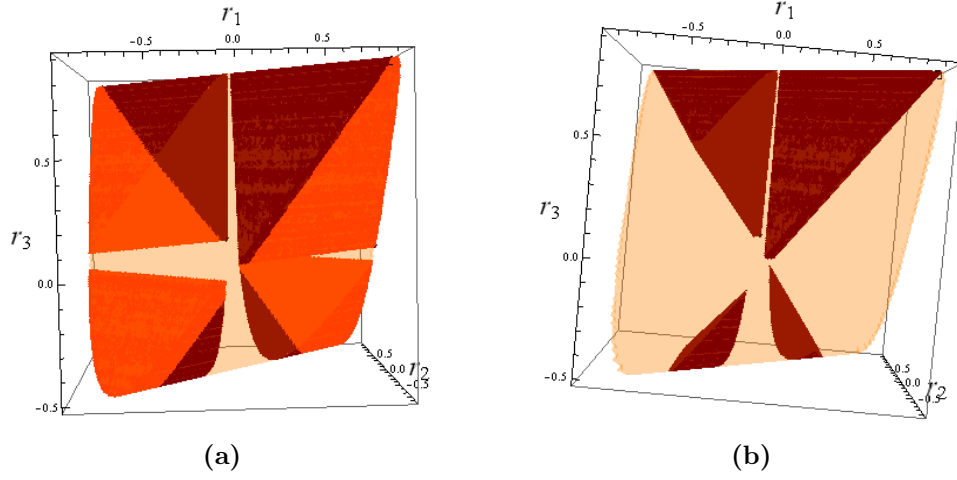
$$E = 2 \text{máx} \left[ 0, |r_1 \pm r_2| \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{r_1 r_i}} \sqrt{DC} - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \right] \quad (5.73)$$

siendo  $r_i$  el máximo entre  $r_1$  y  $r_2$ .

Fuera de la Región 1 puede escribirse una relación entre la Coherencia y el Entrelazamiento:

$$E = 2 \text{máx} \left[ 0, |r_1 \pm r_2| \frac{C}{|r_i|} - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \right] \quad (5.74)$$

Con  $r_i$  el máximo entre  $r_1$  y  $r_2$ .

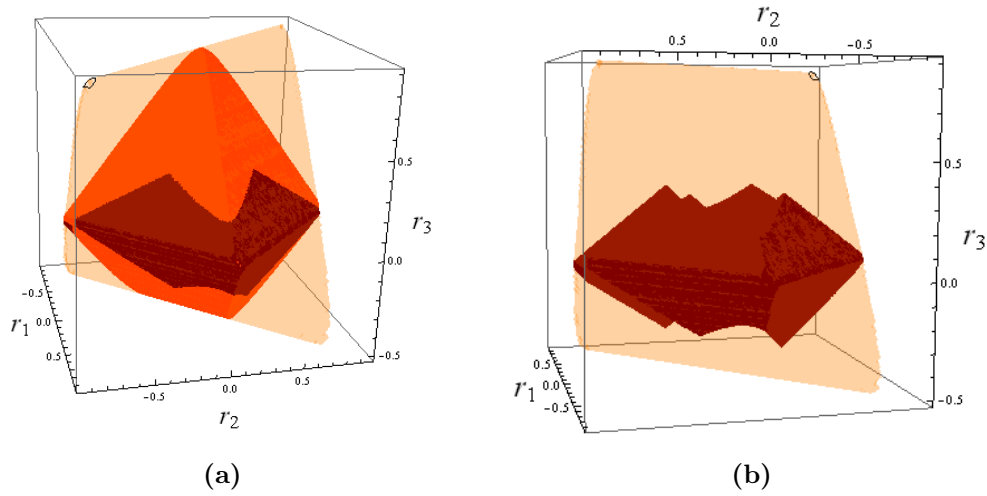


**Figura 5.15:** En amarillo la región de existencia con  $s = 0.2$  y  $c = 0$ . En naranja la región donde se cumple 5.74. En rojo la región en que se cumple 5.73. En 5.15b puede verse mejor la forma que toma la región roja.

Por último, cabe destacar que en la Región 3 esta puede ser relacionada exclusivamente con la Coherencia dentro de la región sin Entrelazamiento, pero no de forma analítica debido a que es imposible despejar el parámetro  $p$ . Su expresión en Phase Damping queda según vimos en el capítulo anterior 5.38:

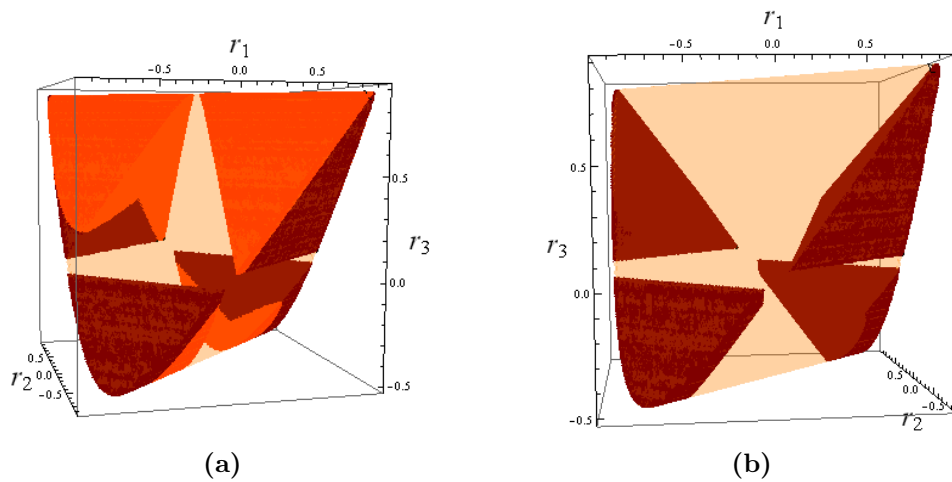
$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 r_2^2 (p-1)^8 - r_2^2 r_3^2 (p-1)^2 + r_1^2 s^2 (p-1)^5}{r_1^2 (p-1)^4 + r_3^2 + s^2 (p-1)^2}} \quad (5.75)$$

La forma del volumen que delimita es el de la figura siguiente:



**Figura 5.16:** En amarillo la región de existencia, con  $s = 0.2$  y  $c = 0$ . En rojo la región en que la Discordia verifica (5.75), en naranja donde no. La figura 5.16b es una versión oblicua de 5.16a en la que puede verse mejor cómo se comporta la región roja dentro de la región sin Entrelazamiento.

También pueden ser relacionadas las tres correlaciones de forma numérica fuera de la región sin Entrelazamiento, tomando la forma de la siguiente imagen:



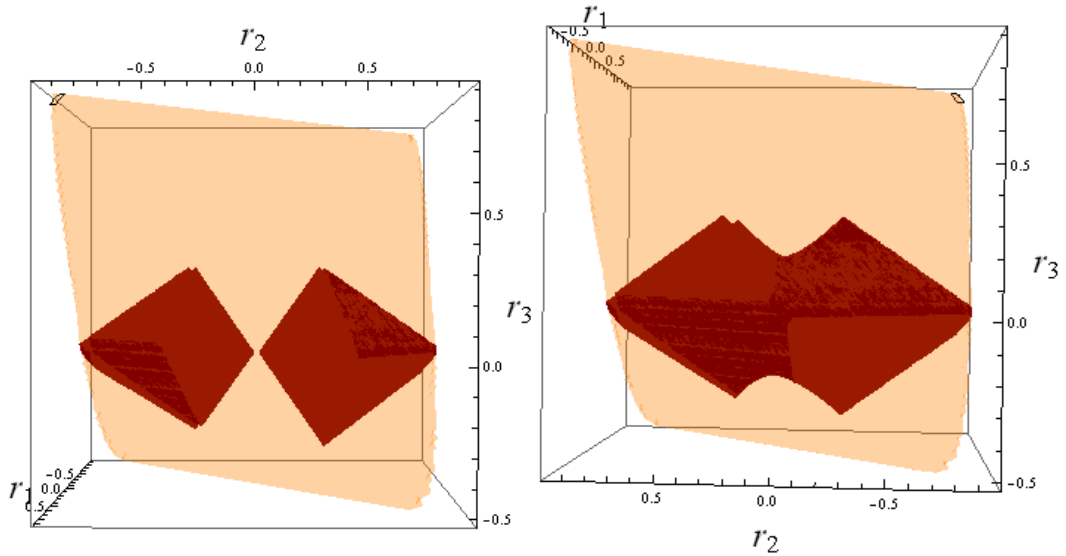
**Figura 5.17:** En amarillo claro la región de existencia, con  $s = 0.2$  y  $c = 0$ . En rojo la región en que la Discordia vale 5.75, en naranja la región en que no.

### Bit Flip

En Bit Flip es la Región 2 la que permitiría relaciones analíticas, debido a tener la forma  $D = \frac{|r_3|}{2}(p - 1)^2$ . Pero como la Coherencia tiene la forma  $C =$

$\max(|r_1|, |r_2|(p-1)^2)$ , para poder relacionarla tiene que cumplirse  $|r_2| > |r_1|$ . Debido a que la Región 2 excluye la posibilidad de que  $|r_2| > |r_1|$ , no pueden vincularse las regiones de esta manera.

No obstante, sí pueden vincularse numéricamente en la Región 3. Las imágenes que se obtienen son casi iguales a las de Phase Damping, ya que es la misma región con la imposición adicional  $|r_2| > |r_1|$ . La única diferencia perceptible está en el volumen rojo dentro de la región sin Entrelazamiento. A continuación una vista del plano  $r_2, r_3$  de dicha región, comparando Bit Flip con Phase Damping:



(a) Región dentro del volumen de Entrelazamiento cero para Bit Flip (b) Región dentro del volumen de Entrelazamiento cero para Phase Damping

**Figura 5.18:** Visión comparativa del plano  $r_2, r_3$  para Bit Flip y Phase Damping dentro del volumen sin Entrelazamiento.

Puede verse cómo la única diferencia se encuentra cerca del origen, ya que en el caso de Bit Flip se excluyen los puntos que no verifican  $|r_2| > |r_3|$ .

### Bit Phase Flip

En el caso de los Estados X vale la pena detenerse en el canal Bit Phase Flip, ya que el mismo no se comporta de forma análoga al Bit Flip. Esto se debe a que su valor de Discordia puede ser tanto  $D_1 = \frac{|r_1|}{2}(p-1)^2$ , como  $D_2 = \frac{|r_3|}{2}(p-1)^2$  y su valor de Coherencia  $C = \max(|r_1|(p-1)^2, |r_2|)$ , rompiendo con la simetría entre  $r_1$  y  $r_2$  que sí había en los estados Bell Diagonal.

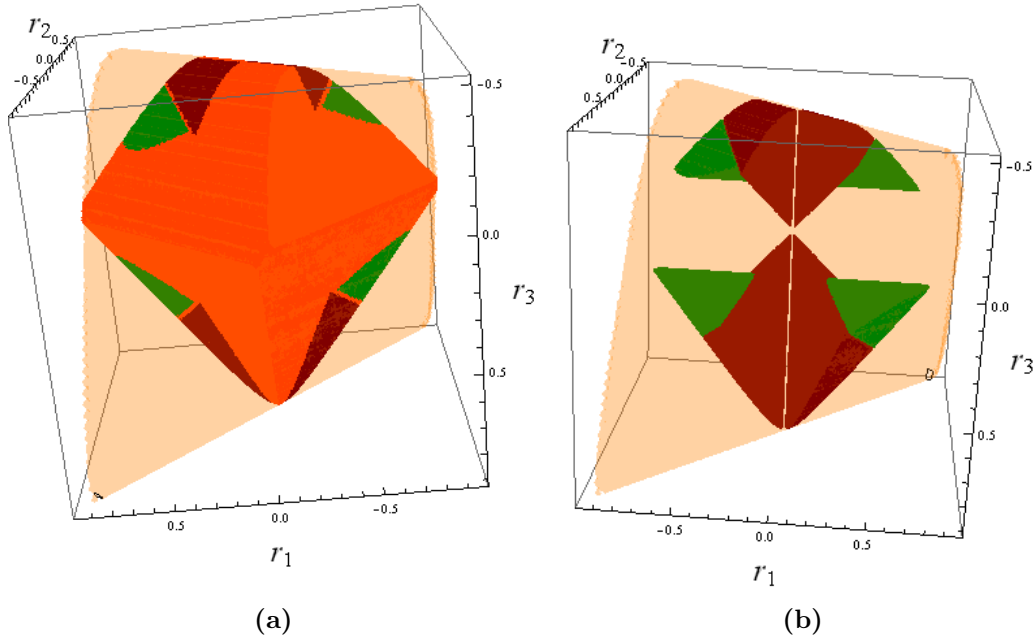
Por lo tanto, dentro de la región con Entrelazamiento cero, se obtienen dos posibles relaciones dependiendo de en cuál región de Discordia nos encontremos. Si estamos en la Región 1 se obtiene:

$$C = \text{máx}(2D, |r_2|) \quad (5.76)$$

Y si estamos en la Región 2 se obtiene:

$$C = \text{máx}\left(\frac{|r_1|}{|r_3|}2D, |r_2|\right) \quad (5.77)$$

Esto se puede ver en la siguiente imagen agregando la condición  $|r_1| > |r_2|$ :

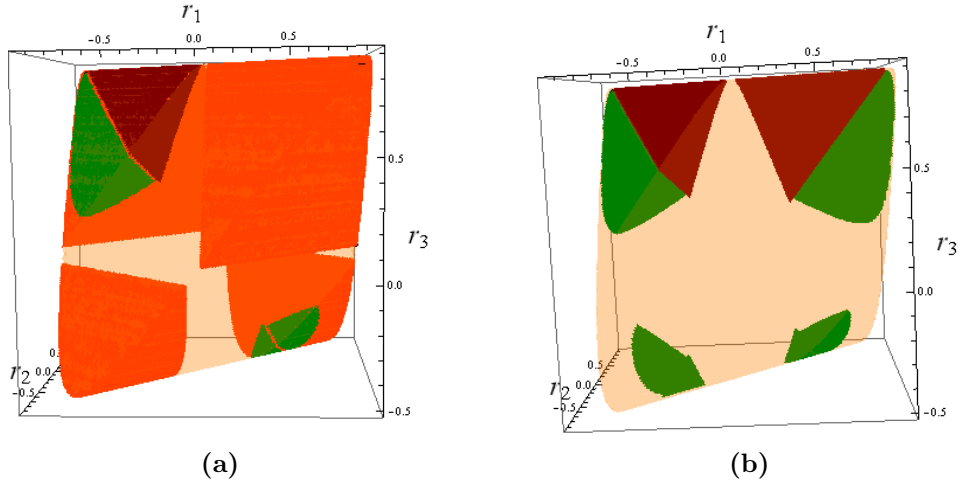


**Figura 5.19:** En amarillo la región de existencia con  $s = 0.2$ ,  $c = 0$ . En rojo la Región 1 de la Discordia, y en verde la Región 2. En el volumen color naranja no pueden vincularse las correlaciones debido a que solo la Coherencia depende de  $p$ .

Por otro lado, fuera de la región con Entrelazamiento cero, puede escribirse la siguiente relación:

$$E = 2 \text{máx} \left[ 0, |r_1 x \pm r_2| - \sqrt{\left(1 \mp r_3 x + (s+c)x^{1/2}\right) \left(1 \mp r_3 x - (s+c)x^{1/2}\right)} \right] \quad (5.78)$$

con  $x = \sqrt{\frac{2CD}{|r_1 r_i|}}$ , y con  $r_i = r_1, r_3$  dependiendo de si nos hallamos en la Región 1, o en la Región 2.

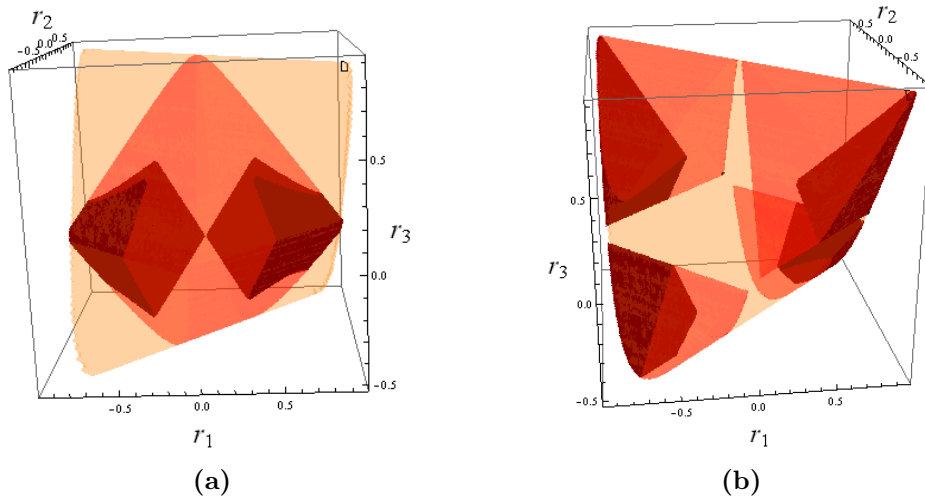


**Figura 5.20:** En amarillo la región de existencia con  $s = 0.2$ ,  $c = 0$ . En rojo la Región 1 de la Discordia, y en verde la Región 2, en ambas se cumple la expresión 5.78. En naranja está contenida la región donde no se cumple 5.78.

Por último cabe mencionar que en la Región 3 no es posible obtener relaciones analíticas debido a la compleja expresión de la Discordia:

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 r_2^2 (p-1)^4 - r_2^2 r_3^2 (p-1)^2 + r_1^2 s^2 (p-1)^2}{r_1^2 (p-1)^4 + r_3^2 (p-1)^4 + s^2 (p-1)^2}} \quad (5.79)$$

No obstante, es posible obtener relaciones numéricas entre las correlaciones. La Región 3 puede verse en las siguientes imagenes:

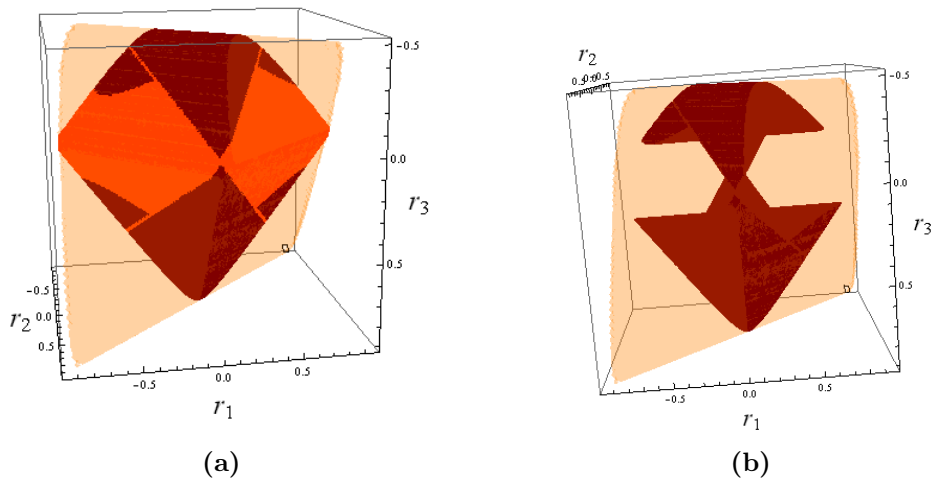


**Figura 5.21:** En amarillo la región de existencia, en rojo oscuro la región en la que se podrían escribir relaciones numéricas usando la ecuación 5.79, en rojo claro donde no.

## Depolarizing

En Depolarizing las relaciones son sencillas de escribir debido a que el factor  $(p - 1)^2$  aparece en todas partes. En la región sin Entrelazamiento, como la Discordia en las regiones 1 y 2 vale  $D = \frac{|r_i|}{2}(p - 1)^2$ , se puede sustituir en la Coherencia cuyo valor es  $C = \max(|r_1|, |r_2|)(p - 1)^2$ , quedando:

$$C = \max(|r_1|, |r_2|) \frac{2D}{|r_i|} \quad (5.80)$$



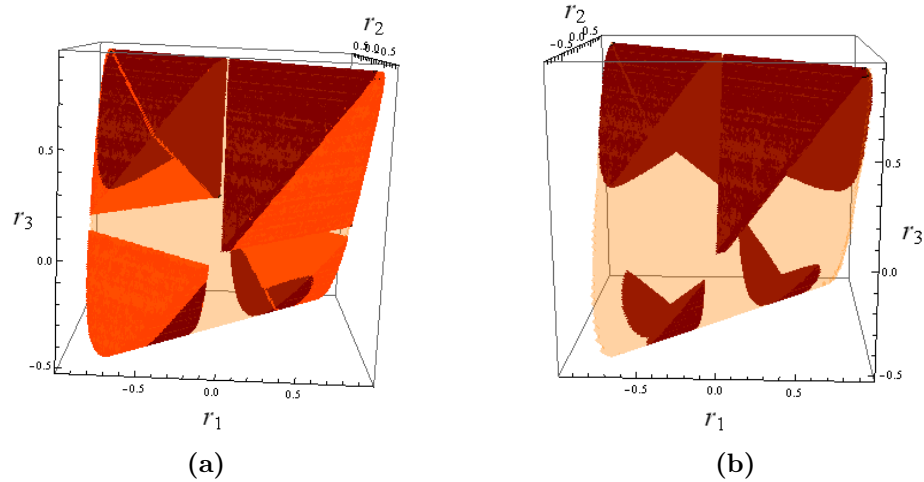
**Figura 5.22:** En amarillo la región de existencia, en rojo la región donde se cumple 5.80, en naranja la región en que solo la Coherencia depende de  $p$ , y por lo tanto no se pueden vincular las correlaciones.

con  $r_i = r_1, r_3$  dependiendo si nos encontramos en la Región 1 o en la Región 2.

En la región con Entrelazamiento puede despejarse  $(p - 1)$  de cada una de ellas en vez de  $(p - 1)^2$  obteniéndose:

$$E = 2 \max \left[ 0, |r_1 \pm r_2|x - \sqrt{\left(1 \mp r_3x + (s + c)x^{1/2}\right)\left(1 \mp r_3x - (s + c)x^{1/2}\right)} \right] \quad (5.81)$$





**Figura 5.23:** En amarillo la región de existencia, en rojo la región en que se vinculan las tres correlaciones cumpliéndose 5.81, en naranja la región en que no se cumple 5.81.

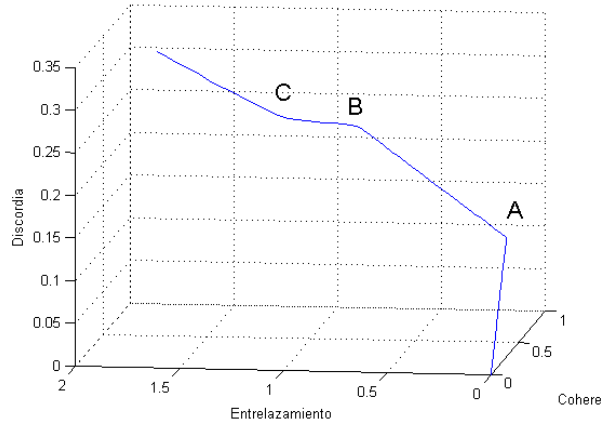
con  $x = \sqrt{\frac{2CD}{|r_i||r_j|}}$ , siendo  $r_i = r_1$  si se trata de la Región 1, y  $r_i = r_3$  si se trata de la Región 2.  $r_j$  es el máximo entre  $r_1, r_2$ .

## 5.5. Dependencia paramétrica

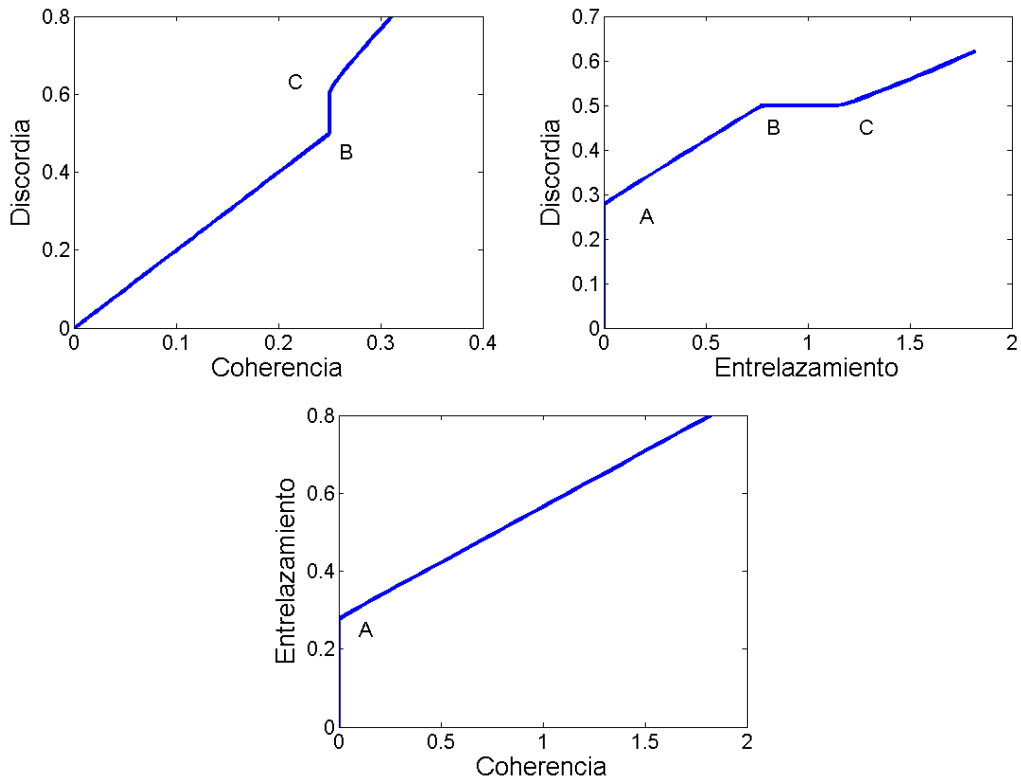
Como se mencionó en la sección anterior, es posible realizar un análisis numérico de las correlaciones, y ver como dependen unas de las otras a medida que varía el parámetro  $p$ , aunque no puedan relacionarse analíticamente. A continuación, al igual que en capítulo 2, se graficarán las distintas correlaciones en una curva tridimensional.

### 5.5.1. Curvas en Phase Damping

Recordando la figura 5.11b, en la figura 5.24 puede verse la curva que forman las tres correlaciones en el espacio. El quiebre (A) se debe a la muerte súbita del Entrelazamiento. El quiebre (B) a cuando la Discordia pasa a la Región 2, la cual es constante en Phase Damping. El quiebre (C) cuando la Discordia alcanza la Región (1)



**Figura 5.24:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Phase Damping en Trace Norm.



**Figura 5.25:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = 0.8, r_2 = -0.6, r_3 = 0.5, s = 0.2, c = 0.3$

Recordando las expresiones de las correlaciones en función de las otras, puede verse como los resultados son los esperados:

$$E = 2 \text{ máx} \left[ 0, |r_1 \pm r_2| \frac{2D}{|r_1|} - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \right] \quad (5.82)$$

(Entrelazamiento en función de la Discordia para la Región 1).

$$C = \text{máx}(|r_1|, |r_2|) \frac{2D}{|r_1|} \quad (5.83)$$

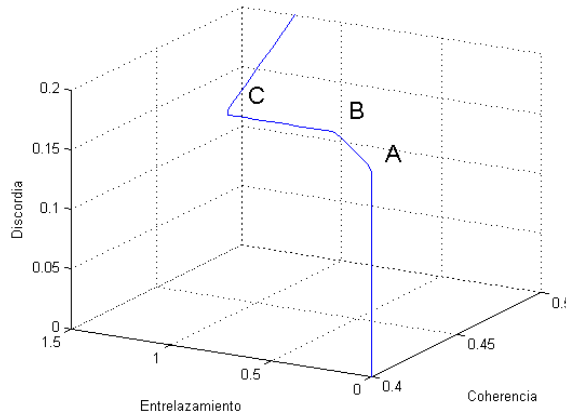
(Coherencia en función de la Discordia para la Región 1).

$$E = 2 \text{ máx} \left[ 0, |r_1 \pm r_2| \frac{C}{|r_i|} - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \right] \quad (5.84)$$

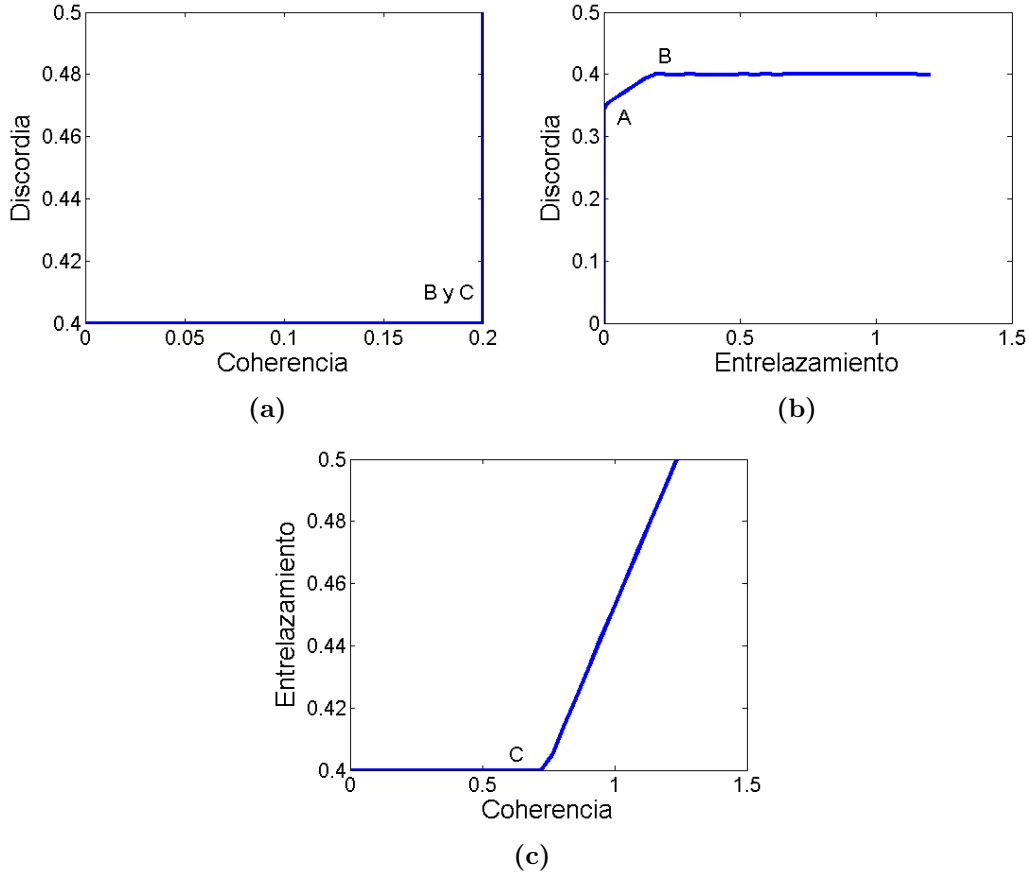
(Entrelazamiento en función de la Coherencia para todo el espacio de estados).

### 5.5.2. Curvas para Bit Flip

En Bit Flip el resultado es similar, aunque las gráficas 5.26 y 5.27 puedan hacer que parezca distinto. El quiebre (A) se debe a la muerte súbita del Entrelazamiento, esto puede verse en la gráfica Discordia-Entrelazamiento 5.27b. Los otros dos quiebres (B) y (C) se deben al cambio en las regiones de la Discordia.



**Figura 5.26:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Bit Flip en Trace Norm.



**Figura 5.27:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = 0.4$ ,  $r_2 = -0.5$ ,  $r_3 = 0.7$ ,  $s = 0.2$ ,  $c = 0.3$ .

Entre la Discordia y la Coherencia no pueden escribirse relaciones analíticas debido a que una es independiente de la otra, como lo muestra la figura 5.27a.

Para el Entrelazamiento y la Discordia, aunque hay dependencia, no pueden escribirse relaciones analíticas ya que no puede despejarse el parámetro  $p$  en la Región 3.

Para El Entrelazamiento y Coherencia se puede escribir la siguiente relación:

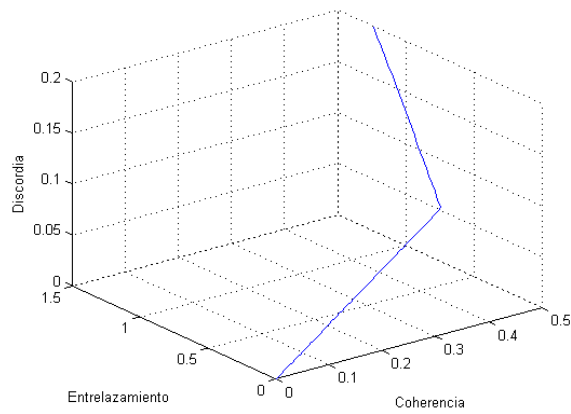
$$E = 2 \max \left[ 0, |r_1 \pm r_2 x| - \sqrt{\left(1 \mp r_3 x + (s + c)x^{1/2}\right) \left(1 \mp r_3 x - (s + c)x^{1/2}\right)} \right] \quad (5.85)$$

Con  $x = \frac{C}{|r_2|}$

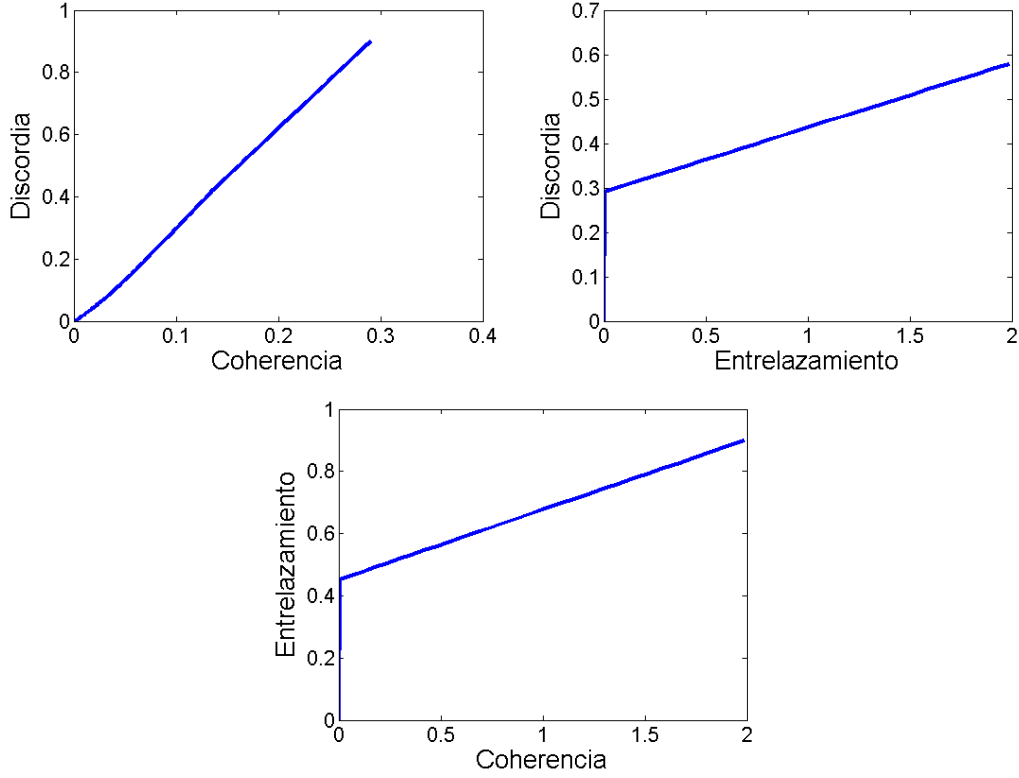
El quiebre (C) se produce cuando el máximo pasa a ser  $r_1$  y la Coherencia se mantiene constante.

### 5.5.3. Curvas para Depolarizing

En Depolarizing, el único quiebre se produce cuando el Entrelazamiento sufre muerte súbita y su valor permanece en cero.



**Figura 5.28:** Curva que relaciona la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia para Depolarizing en Trace Norm.



**Figura 5.29:** Evolución de la Coherencia, el Entrelazamiento y la Discordia bajo Bit Flip. Con condiciones iniciales:  $r_1 = -0.9$ ,  $r_2 = 0.5$ ,  $r_3 = 0.58$ ,  $s = 0.2$ ,  $c = 0.3$

$$E = 2 \text{ máx} \left[ 0, |r_1 \pm r_2| \frac{2D}{|r_i|} - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \right] \quad (5.86)$$

(Entrelazamiento en función de la Discordia para la Región 1 si  $r_i = r_1$ , o Región 2 si  $r_i = r_3$ ).

$$C = \text{máx}(|r_1|, |r_2|) \frac{2D}{|r_i|} \quad (5.87)$$

(Coherencia en función de la Discordia para la Región 1 si  $r_i = r_1$ , o Región 2 si  $r_i = r_3$ ).

$$E = 2 \text{ máx} \left[ 0, |r_1 \pm r_2| \frac{C}{|r_j|} - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \right] \quad (5.88)$$

(Entrelazamiento en función de la Coherencia para todo el espacio de estados, con  $r_j = \text{máx}(r_1, r_2)$ ).

## 5.6. Condiciones de Coherencia, Entrelazamiento y Discordia cero

Es de interés saber cuál de las correlaciones es fundamental, si es que lo es alguna. Esto quiere decir, cuál debe existir para que puedan existir las demás. La forma de estudiar ésto es buscar cuando una correlación se hace cero, y qué repercusiones tiene sobre las otras correlaciones. Por ejemplo, en el caso de la Coherencia:

$$C = \text{máx}(|r_1|, |r_2|), \quad (5.89)$$

Para obtener Coherencia cero es necesario y suficiente:  $r_1 = r_2 = 0$  (supondremos esta condición hasta que se indique lo contrario). Usando la expresión del Entrelazamiento (5.4):

$$E = 2 \text{máx} [0, |r_1 \pm r_2| - \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)}] \quad (5.90)$$

vemos que en cada caso, el máximo de la ecuación del Entrelazamiento siempre es cero, por lo que  $C = 0 \Rightarrow E = 0$ . Análogamente, utilizamos las expresiones obtenidas de la Discordia (5.5):

$$D = \frac{|r_1|}{2} \iff r_3^2 > r_1^2 + s^2 \quad (5.91)$$

Como  $r_1 = 0$ , la expresión de la Discordia queda:

$$D = 0 \iff |r_3| > |s| \quad (5.92)$$

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 \text{máx}(r_3^2, r_2^2 + s^2) - r_2^2 \text{mín}(r_3^2, r_1^2)}{\text{máx}(r_3^2, r_2^2 + s^2) - \text{mín}(r_3^2, r_1^2) + r_1^2 - r_2^2}} \iff r_3^2 < r_1^2 + s^2 \quad (5.93)$$

Como  $r_1 = r_2 = 0$  queda:

$$D = 0 \iff |r_3| < |s| \quad (5.94)$$

Entonces, sea  $r_3$  mayor o menor que  $s$ , la Discordia va a ser cero. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
C = 0 &\Rightarrow E = 0 \\
C = 0 &\Rightarrow D = 0
\end{aligned}
\tag{5.95}$$

Este es un resultado importante, pues implica que si no hay Coherencia, no puede haber ninguna otra de las correlaciones. Esto señala la Coherencia como un recurso fundamental.

Por otro lado, si repetimos el razonamiento para el Entrelazamiento, ya que hay todo un hipervolumen en el espacio de parámetros  $\vec{r}, s, c$ , la única conclusión a la que podemos llegar es que la condición de  $E = 0$  implica:

$$|r_1 \pm r_2| \leq \sqrt{(1 \mp r_3 + s + c)(1 \mp r_3 - s - c)} \tag{5.96}$$

Teniendo en cuenta que éstas son dos condiciones, elevando al cuadrado y reordenando podemos reescribir lo anterior como:

$$\begin{cases}
(r_1 + r_2)^2 \leq (1 - r_3)^2 - (s + c)^2 \\
(r_1 - r_2)^2 \leq (1 + r_3)^2 - (s + c)^2
\end{cases}
\tag{5.97}$$

Estas dos regiones determinan el volumen de intersección de la figura 5.1, dentro del cual puede haber tanto Coherencia como Discordia.

Por último, si repetimos el razonamiento para la Discordia, hay cinco casos que hay que estudiar. Primero diferenciar la situación en que  $r_3^2 > r_1^2 + s^2$ :

$$D = \frac{|r_1|}{2} \iff r_3^2 > r_1^2 + s^2 \tag{5.98}$$

Este será el caso (0), e implica que  $D = 0 \iff r_1 = 0$ .

Para el caso  $r_3^2 > r_1^2 + s^2$ :

$$D = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{r_1^2 \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) - r_2^2 \min(r_3^2, r_1^2)}{\max(r_3^2, r_2^2 + s^2) - \min(r_3^2, r_1^2) + r_1^2 - r_2^2}} \iff r_3^2 < r_1^2 + s^2 \tag{5.99}$$

la condición para que la Coherencia sea cero es:

$$D = 0 \iff r_1^2 \max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_2^2 \min(r_3^2, r_1^2) \tag{5.100}$$

Hay que separar cuatro casos:



1.  $\max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_3^2$  y  $\min(r_3^2, r_1^2) = r_3^2$
2.  $\max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_2^2 + s^2$  y  $\min(r_3^2, r_1^2) = r_3^2$
3.  $\max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_3^2$  y  $\min(r_3^2, r_1^2) = r_1^2$
4.  $\max(r_3^2, r_2^2 + s^2) = r_2^2 + s^2$  y  $\min(r_3^2, r_1^2) = r_1^2$

Sustituyendo cada una en 5.100 queda:

1.  $r_1 = r_2$
2.  $r_3^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}(r_2^2 + s^2)$
3.  $r_1 = r_2$
4.  $s = 0$

Ninguna de estas condiciones implica Coherencia o Entrelazamiento cero.

Podemos concluir que la Coherencia es la más fundamental de las correlaciones. Sin ella no puede haber Discordia ni Entrelazamiento. Por otro lado, tanto la condición de Entrelazamiento cero o Discordia cero, no implican que las otras correlaciones sean cero.

Todo esto va de la mano con lo postulado por Stretslov [19], quién mostró que a partir de un estado coherente era capaz de producir Entrelazamiento, pero que era imposible producirlo a partir de un estado incoherente. Asimismo los resultados concuerdan con los de Ming [21] quién fue el primero en establecer un vínculo entre Coherencia y Discordia, y que la primera no puede existir sin la otra.

Los resultados obtenidos en esta tesis generalizan lo dicho por Stretslov y Ming, para el caso de los estados X.



# Capítulo 6

## Estados generales de dos qubits

### 6.1. Estados de dos qubits

Como vimos en la introducción, un estado general de dos qubits puede ser escrito como 2.7:

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \vec{c} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{i,j=1}^3 r_{ij} \sigma_i \otimes \sigma_j \right) \quad (6.1)$$

Cuya expresión puede simplificarse en 2.8 mediante transformaciones unitarias:

$$\rho = \frac{1}{4} \left( \mathbb{I}_2 \otimes \mathbb{I}_2 + \vec{s} \cdot \vec{\sigma} \otimes \mathbb{I}_2 + \mathbb{I}_2 \otimes \vec{c} \cdot \vec{\sigma} + \sum_{i=1}^3 r_i \sigma_i \otimes \sigma_i \right) \quad (6.2)$$

En forma matricial esto queda escrito de la siguiente manera:

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + r_3 + s_3 + c_3 & c_1 - ic_2 & s_1 - is_2 & r_1 - r_2 \\ c_1 - ic_2 & 1 - r_3 + s_3 - c_3 & r_1 + r_2 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & r_1 + r_2 & 1 - r_3 - s_3 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ r_1 - r_2 & s_1 + is_2 & c_1 + ic_2 & 1 + r_3 - s_3 - c_3 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

Debido a la gran cantidad de parámetros (nótese que ahora hacen falta 9 para describir completamente el estado: las tres componentes de  $\vec{r}$ , las tres de  $\vec{s}$ , y las tres de  $\vec{c}$ ), no es posible obtener una expresión analítica del Entrelazamiento [5] [37]. Debido a esto es que en este trabajo utilizamos un subconjunto de estados más simple, y en particular elegimos los estados X, ya

que Hedemann [27] demostró que todos los estados pueden ser transformados unitariamente en un estado X con el mismo Entrelazamiento.

## 6.2. Relación entre la Coherencia de un estado general de dos qubits y sus Coherencias parciales

Decidimos buscar entonces si existe relación entre la Coherencia de un estado general, y la Coherencia de un estado X. Para ello recordamos que según la norma  $l_1$  la Coherencia es:  $C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{i,j}|$

Por lo que la misma queda:

$$C_{l_1}(\rho) = \frac{1}{2}(|s_1 + is_2| + |s_1 - is_2| + |c_1 + ic_2| + |c_1 - ic_2| + |r_1 - r_2| + |r_1 + r_2|) \quad (6.4)$$

Esto es igual a:

$$C_{l_1}(\rho) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} + \sqrt{s_1^2 + s_2^2} + \text{máx}(r_1, r_2) \quad (6.5)$$

Por otro lado, la traza parcial de  $\rho$  según  $a$  y  $b$  es:

$$Tr_A(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & c_1 - ic_2 \\ c_1 + ic_2 & 1 - c_3 \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

$$Tr_B(\rho) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & 1 - s_3 \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

Sus Coherencias parciales son, por lo tanto:

$$C_{l_1}(\rho_A) = \frac{1}{2}(|c_1 - ic_2| + |c_1 + ic_2|) = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad (6.8)$$

$$C_{l_1}(\rho_B) = \frac{1}{2}(|s_1 - is_2| + |s_1 + is_2|) = \sqrt{s_1^2 + s_2^2} \quad (6.9)$$

La Coherencia de un estado-X en la norma  $l_1$  vimos anteriormente que vale:  $C_X = \text{máx}(r_1, r_2)$  (5.7). Combinando las ecuaciones 6.8, 6.9, 6.5 y 5.7

obtenemos:

$$C_{l_1}(\rho_{AB}) = C_{l_1}(\rho_A) + C_{l_1}(\rho_B) + C_{l_1}(\rho_X) \quad (6.10)$$

Cabe destacar que esto se cumple exclusivamente para la norma Traza.

Nuestro resultado permite relacionar la Coherencia de un estado cualquiera de dos qubits, con la Coherencia de su estado X asociado. Con “estado X asociado”, me refiero a un estado con mismos valores de  $\vec{r}$ , pero cuyos vectores  $\vec{s}$  y  $\vec{c}$  sean paralelos al eje  $z$ . Esto le da una nueva interpretación a la expresión de la Coherencia de un estado X en la norma Traza:  $C_{l_1}(\rho_X)$  cuantifica la Coherencia entre los subsistemas A y B, lo que permite a su vez cuantificar la Coherencia del sistema total.



# Capítulo 7

## Conclusiones

En este trabajo se estudió la evolución del Entrelazamiento, Discordia y Coherencia, de un sistema de dos qubits sometido a diferentes canales de ruido.

### **Estados diagonales de Bell:**

En primera instancia se trabajó con los estados diagonales de Bell, bajo la acción de los canales Phase Damping, Bit Flip, Bit Phase Flip y Depolarizing. Las normas utilizadas fueron la norma Traza y la norma de Hilbert Schmidt.

De esta primera parte se lograron obtener relaciones dinámicas que vinculan las correlaciones entre sí, tanto de a pares, como las tres juntas. Asimismo, se logró diferenciar las zonas del espacio de estados en las cuales cada una de estas relaciones podía ser escrita de forma analítica, para todos los canales, y ambas normas utilizadas.

### **Estados X:**

En segunda instancia se trabajó con estados X, también sometidos a los mismos canales de ruido, pero limitados esta vez al uso de la norma Traza, debido a problemas de contractividad con la norma de Hilbert Schmidt.

En esta segunda parte también se lograron establecer relaciones dinámicas entre las distintas correlaciones, tanto de a pares, como de las tres en simultáneo. Fue realizado un análisis exhaustivo de la región de existencia del espacio de estados, que permitió establecer las diferentes zonas en las cuales cada una de las relaciones dinámicas actúa.

También se demostró que la Coherencia es la correlación fundamental de las consideradas, ya que sin la misma no puede haber Entrelazamiento ni Discordia. Se demostró también que el recíproco no es cierto, y que puede haber Coherencia pese a que no haya Discordia, y que puede haber tanto Coherencia

como Discordia si no hay Entrelazamiento.

Por último se obtuvo una expresión que vincula la Coherencia de un estado general de dos qubits en la norma  $l_1$  (que para el caso de sistemas de dos qubits es equivalente a la norma Traza), con las coherencias parciales de los subsistemas y con la Coherencia del estado  $X$  correspondiente a dicho estado general.

**Trabajos futuros:**

El paso siguiente de este trabajo sería la extensión de estos resultados para sistemas generales de dos qubits. También se podrían extender estos resultados a otras normas, en particular las normas de entropía relativa, que tan habituales son en la bibliografía. Por último, generalizar el estudio a sistemas de dimensión mayor, por ejemplo un qutrit (sistema de 3 qubits).



# Referencias bibliográficas

- [1] Hesameddin Ilatikhameneh, Gerhard Klimeck, and Rajib Rahman. Can Homojunction Tunnel FETs Scale Below 10 nm? *IEEE Electron Device Letters*, 37(1):115–118, jan 2016.
- [2] Gordon E. Moore. Cramming more components onto integrated circuits, Reprinted from *Electronics*, volume 38, number 8, April 19, 1965, pp.114 ff. *IEEE Solid-State Circuits Society Newsletter*, 11(3):33–35, sep 2006.
- [3] Benjamin Schumacher. Quantum coding. *Physical Review A*, 51(4):2738–2747, apr 1995.
- [4] E. Schrödinger. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4):555–563, oct 1935.
- [5] Ryszard Horodecki, Paweł Horodecki, Michał Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*, 81(2):865–942, jun 2009.
- [6] E. Schrödinger. An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules. *Physical Review*, 28(6):1049–1070, dec 1926.
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen. Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? *Physical Review*, 47(10):777–780, may 1935.
- [8] Richard Jozsa and Noah Linden. On the role of entanglement in quantum-computational speed-up. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 459(2036):2011–2032, aug 2003.

- [9] Artur K. Ekert. Quantum cryptography based on Bell’s theorem. *Physical Review Letters*, 67(6):661–663, aug 1991.
- [10] Charles H. Bennett, Gilles Brassard, Claude Crépeau, Richard Jozsa, Asher Peres, and William K. Wootters. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*, 70(13):1895–1899, mar 1993.
- [11] Harold Ollivier and Wojciech H. Zurek. Quantum Discord: A Measure of the Quantumness of Correlations. *Physical Review Letters*, 88(1):017901, dec 2001.
- [12] W.H. Zurek. Einselection and decoherence from an information theory perspective. *Annalen der Physik*, 9(11-12):855–864, nov 2000.
- [13] Animesh Datta, Steven T. Flammia, and Carlton M. Caves. Entanglement and the power of one qubit. *Physical Review A*, 72(4):042316, oct 2005.
- [14] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F. M. Cucchietti, and A. Acín. Almost all quantum states have nonclassical correlations. *Physical Review A*, 81(5):052318, may 2010.
- [15] T. Baumgratz, M. Cramer, and M. B. Plenio. Quantifying coherence. *Physical Review Letters*, 113(14):140401, sep 2014.
- [16] Lian-He Shao, Zhengjun Xi, Heng Fan, and Yongming Li. Fidelity and trace-norm distances for quantifying coherence. *Physical Review A*, 91(4):042120, apr 2015.
- [17] Bin Chen and Shao-Ming Fei. Notes on modified trace distance measure of coherence. *Quantum Information Processing*, 17(5):107, may 2018.
- [18] Alexander Streltsov, Hermann Kampermann, and Dagmar Bruß. Linking Quantum Discord to Entanglement in a Measurement. *Physical Review Letters*, 106(16):160401, apr 2011.
- [19] Alexander Streltsov, Uttam Singh, Himadri Shekhar Dhar, Manabendra Nath Bera, and Gerardo Adesso. Measuring Quantum Coherence with Entanglement. *Physical Review Letters*, 115(2):020403, jul 2015.

- [20] Salvatore Virzì, Enrico Rebufello, Alessio Avella, Fabrizio Piacentini, Marco Gramegna, Ivano Ruo Berchera, Ivo Pietro Degiovanni, and Marco Genovese. Optimal estimation of entanglement and discord in two-qubit states. *Scientific Reports*, 9(1):3030, dec 2019.
- [21] Ming-Liang Hu, Xueyuan Hu, Jieci Wang, Yi Peng, Yu-Ran Zhang, and Heng Fan. Quantum coherence and geometric quantum discord. *Physics Reports*, 762-764:1–100, nov 2018.
- [22] Eric M. Rains. Entanglement purification via separable superoperators. jul 1997.
- [23] Thorsten C. Btschorr, Dietmar G. Fischer, and Matthias Freyberger. Channel estimation with noisy entanglement. *Physics Letters A*, 292(1-2):15–22, dec 2001.
- [24] Frank Verstraete and Michael M. Wolf. Entanglement versus Bell Violations and Their Behavior under Local Filtering Operations. *Physical Review Letters*, 89(17):170401, oct 2002.
- [25] D. G. Bussandri, T. M. Osán, A. P. Majtey, and P. W. Lamberti. Behavior of quantum correlations under nondissipative decoherence by means of the correlation matrix. may 2019.
- [26] Jonas Maziero. Hilbert–Schmidt quantum coherence in multi-qudit systems. *Quantum Information Processing*, 16(11):274, nov 2017.
- [27] Samuel R. Hedemann. Evidence that All States Are Unitarily Equivalent to X States of the Same Entanglement. *ARXIV*, oct 2013.
- [28] Hungsoo Kim, Mi-Ra Hwang, Eylee Jung, and DaeKil Park. Difficulties in analytic computation for relative entropy of entanglement. *Physical Review A*, 81(5):052325, may 2010.
- [29] Maximilian Schlosshauer. Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition. 2007.
- [30] Wojciech Hubert Zurek. Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical. *Reviews of Modern Physics*, 75(3):715–775, may 2003.

- [31] Pierre Fromholz, Giuseppe Magnifico, Vittorio Vitale, Tiago Mendes-Santos, and Marcello Dalmonte. Entanglement topological invariants for one-dimensional topological superconductors. sep 2019.
- [32] A. V. Fedorova, T. Byrnes, and A. N. Pyrkov. Super-quantum discord in ferromagnetic and antiferromagnetic materials. sep 2019.
- [33] U. Fano. Pairs of two-level systems. *Reviews of Modern Physics*, 55(4):855–874, oct 1983.
- [34] Shunlong Luo. Quantum discord for two-qubit systems. *Physical Review A*, 77(4):042303, apr 2008.
- [35] Samuel R. Hedemann. X States of the Same Spectrum and Entanglement as All Two-Qubit States. *Quant. Inf. Process*, 17(293), 2018.
- [36] Michael Nielsen Isaac Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 2000.
- [37] William K. Wootters. Entanglement of formation and concurrence. *Quantum Information and Computation*, 1(1), 2001.
- [38] Borivoje Dakić, Yannick Ole Lipp, Xiaosong Ma, Martin Ringbauer, Sebastian Kropatschek, Stefanie Barz, Tomasz Paterek, Vlatko Vedral, Anton Zeilinger, Časlav Brukner, and Philip Walther. Quantum discord as resource for remote state preparation. *Nature Physics*, 8(9):666–670, sep 2012.
- [39] E. Knill and R. Laflamme. Power of One Bit of Quantum Information. *Physical Review Letters*, 81(25):5672–5675, dec 1998.
- [40] Matthias D. Lang and Carlton M. Caves. Quantum Discord and the Geometry of Bell-Diagonal States. *Physical Review Letters*, 105(15):150501, oct 2010.
- [41] Xiaoting Wang and S. G. Schirmer. Contractivity of the Hilbert-Schmidt distance under open-system dynamics. *Physical Review A*, 79(5):052326, may 2009.
- [42] Virginia Feldman, Jonas Maziero, and A. Auyuanet. Direct-dynamical Entanglement–Discord relations. *Quantum Information Processing*, 16(5):128, may 2017.

- [43] Borivoje Dakić, Vlatko Vedral, and Časlav Brukner. Necessary and Sufficient Condition for Nonzero Quantum Discord. *Physical Review Letters*, 105(19):190502, nov 2010.
- [44] T. Werlang, S. Souza, F. F. Fanchini, and C. J. Villas Boas. Robustness of quantum discord to sudden death. *Physical Review A*, 80(2):024103, aug 2009.
- [45] Benjamin Aaronson, Rosario Lo Franco, and Gerardo Adesso. Comparative investigation of the freezing phenomena for quantum correlations under nondissipative decoherence. *Physical Review A*, 88(1):012120, jul 2013.
- [46] F Ciccarello, T Tufarelli, and V Giovannetti. Toward computability of trace distance discord. *New Journal of Physics*, 16(1):013038, jan 2014.
- [47] Swapan Rana, Preeti Parashar, and Maciej Lewenstein. Trace-distance measure of coherence. *Physical Review A*, 93(1):012110, jan 2016.
- [48] Jonhy S. S. Ferreira, Daví Filenga, Marcio F. Cornelio, and Felipe F. Fanchini. Multipartite monogamous relations for entanglement and discord. *Physical Review A*, 97(1):012328, jan 2018.



# APÉNDICES

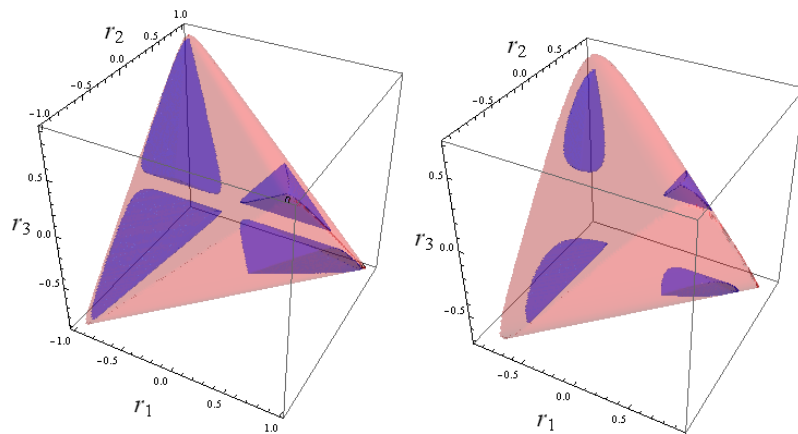




## 0.1. Variación de las regiones de Discordia al variar $s$

Las dos regiones que cambian sustancialmente son la Región 2, y la Región 3. Los cambios en la Región 1 ( $|r_3| > |r_1|$ ) se deben solo a los cambios en la región de existencia.

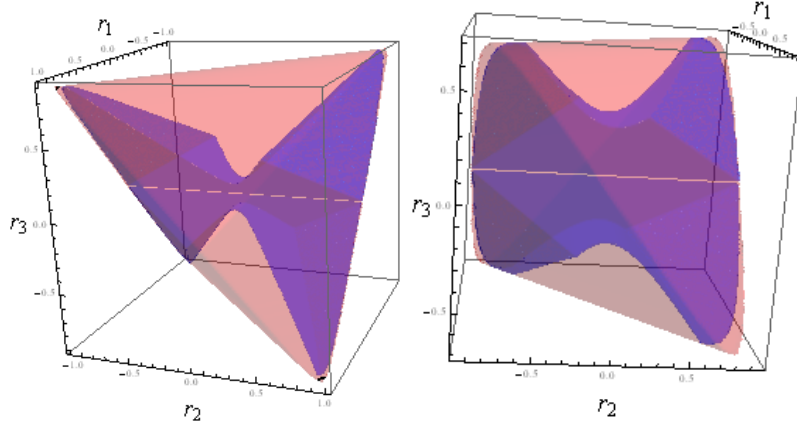
Como cambia la Región 2 puede verse a continuación:



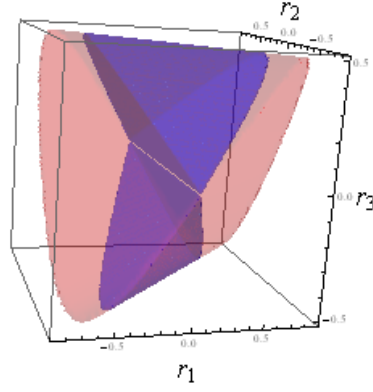
(a) Región 2 de la Discordia con  $s = 0.1$       (b) Región 2 de la Discordia con  $s = 0.5$

**Figura 1:** Cambio en la Región 2 de la Discordia a medida que cambia  $s$ .

Los cambios en la Región 3 son mucho más drásticos en lo que a forma respecta:



(a) Región 3 de la Discordia con  $s = 0.1$  (b) Región 3 de la Discordia con  $s = 0.3$



(c) Región 3 de la Discordia con  $s = 0.5$

**Figura 2:** Cambio en la Región 3 de la Discordia a medida que cambia  $s$ .

## 0.2. Evolución en Phase Damping

En esta sección se calcula la evolución de un estado  $X$  sometido al canal Phase Damping. La forma matricial para dicho estado es [5.15](#):

$$\rho(0) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & r_1(0) - r_2(0) \\ 0 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & r_1(0) + r_2(0) & 0 \\ 0 & r_1(0) + r_2(0) & 1 - r_3(0) - s(0) + c(0) & 0 \\ r_1(0) - r_2(0) & 0 & 0 & 1 + r_3(0) - s(0) - c(0) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Utilizando [3.8](#)

$$\Phi_{loc} = \sum_{i,j} (M_i^A \otimes M_j^B) \rho_{AB} (M_i^A \otimes M_j^B)^\dagger \quad (2)$$

La matriz evolucionada queda:

$$\Phi_{loc} = \sum_{i,j=0}^2 (M_i \otimes M_j) \rho_0 (M_i \otimes M_j) \quad (3)$$

Recordando que  $M^i \otimes M^j = M^{i\ddagger} \otimes M^{j\ddagger}$ .

Los operadores de Kraus para dicho canal ya fueron mencionados en 2.33, y la aplicación de los mismos da por resultado:

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 1 - r_3(0) - s(0) + c(0) & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) - s(0) - c(0) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Las componentes del vector  $\vec{r}$  pueden calcularse como:

$$\begin{aligned} r_1(p) &= Tr(\rho(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1) \\ r_2(p) &= Tr(\rho(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2) \\ r_3(p) &= Tr(\rho(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3) \end{aligned} \quad (5)$$

Para obtener  $s$  y  $c$ :

$$\begin{aligned} s(p) &= Tr(\rho(p)\sigma_3 \otimes \mathbb{I}) \\ c(p) &= Tr(\rho(p)\mathbb{I} \otimes \sigma_3) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\rho(p)\sigma_1 \otimes \sigma_1 = \begin{pmatrix} (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) - s(0) - c(0) \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & 0 \\ 0 & 1 - r_3(0) - s(0) + c(0) & (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\rho(p)\sigma_2 \otimes \sigma_2 = \begin{pmatrix} -(r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & -1 - r_3(0) + s(0) + c(0) \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 1 - r_3(0) + c(0) - s(0) & 0 \\ 0 & 1 - r_3(0) - c(0) + s(0) & (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ -1 - r_3(0) - s(0) - c(0) & 0 & 0 & -(r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\rho(p)\sigma_3 \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & -(r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & -(r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 1 - r_3(0) - s(0) + c(0) & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) - s(0) - c(0) \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\rho(p)\sigma_3 \otimes \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & -(r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & -(r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 1 - r_3(0) + s(0) - c(0) & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\rho(p)\mathbb{I} \otimes \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) & 0 & 0 & -(r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 \\ 0 & -(1 - r_3(0) + s(0) - c(0)) & (r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & 0 \\ 0 & -(r_1(0) + r_2(0))(p-1)^2 & -(1 - r_3(0) + s(0) - c(0)) & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))(p-1)^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0) + s(0) + c(0) \end{pmatrix} \quad (11)$$

Tomando la traza se ve explícitamente que:

$$\begin{aligned} r_1(p) &= r_1(0)(p-1)^2 \\ r_2(p) &= r_2(0)(p-1)^2 \\ r_3(p) &= r_3(0) \\ s(p) &= s(0) \\ c(p) &= c(0) \end{aligned} \quad (12)$$

### 0.3. Evolución en Bit Flip

Para Bit Flip, la forma matricial luego de aplicada la evolución es la siguiente [5.18](#):

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0)x^2 + (s(0) + c(0))x & 0 & 0 & r_1(0) - r_2(0)x^2 \\ 0 & 1 - r_3(0)x^2 + (s(0) - c(0))x & r_1(0) + r_2(0)x^2 & 0 \\ 0 & r_1(0) + r_2(0)x^2 & 1 - r_3(0)x^2 + (-s(0) + c(0))x & 0 \\ r_1(0) - r_2(0)x^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0)x^2 - (s(0) + c(0))x \end{pmatrix} \quad (13)$$

con  $x^2 = (p-1)^2$

Nuevamente, tomando la traza de  $(\rho\sigma_i \otimes \sigma_i)$  se obtiene

$$\begin{aligned} r_1(p) &= r_1(0) \\ r_2(p) &= r_2(0)(p-1)^2 \\ r_3(p) &= r_3(0)(p-1)^2 \\ s(p) &= s(0)(p-1) \\ c(p) &= c(0)(p-1) \end{aligned} \quad (14)$$

Este resultado es completamente análogo para el caso bit-phase-flip

## 0.4. Evolución en Depolarizing

El procedimiento es igual que en los casos anteriores. La forma matricial luego de la evolución es:

$$\rho(p) = \begin{pmatrix} 1 + r_3(0)x^2 + (s(0) + c(0))x & 0 & 0 & r_1(0)(-r_2(0))x^2 \\ 0 & 1 - r_3(0)x^2 + (s(0) - c(0))x & (r_1(0) + r_2(0))x^2 & 0 \\ 0 & (r_1(0) + r_2(0))x^2 & 1 - r_3(0)x^2 + (-s(0) + c(0))x & 0 \\ (r_1(0) - r_2(0))x^2 & 0 & 0 & 1 + r_3(0)x^2 - (s(0) + c(0))x \end{pmatrix} \quad (15)$$

con  $x^2 = (p - 1)^2$

Quedando:

$$\begin{aligned} r_1(p) &= r_1(0)(p - 1)^2 \\ r_2(p) &= r_2(0)(p - 1)^2 \\ r_3(p) &= r_3(0)(p - 1)^2 \\ s(p) &= s(0)(p - 1) \\ c(p) &= c(0)(p - 1) \end{aligned} \quad (16)$$