

TESIS

**Teoremas de punto fijo para
cubrimientos ramificados de
superficies**

ALEJO GARCÍA

ORIENTADORA: DRA. JULIANA XAVIER

MAESTRÍA EN MATEMÁTICA
FACULTAD DE CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Basta el conocimiento de un hecho para percibir en el acto
una serie de actos confirmatorios, antes insospechados.

JORGE LUIS BORGES - El Aleph.

RESUMEN

Un conocido resultado de Brouwer afirma que cualquier homeomorfismo del plano que preserva orientación y no tiene puntos fijos, tiene conjunto no errante vacío. En particular, un compacto invariante implica la existencia de un punto fijo. En este trabajo damos condiciones suficientes para que cubrimientos ramificados de grado 2 del plano tengan un punto fijo, a saber:

- . Un compacto totalmente invariante, que no separa el punto crítico de su imagen.
- . Un compacto invariante con un entorno conexo U , tal que $T(U \cup f(U))$ no contiene el punto crítico ni su imagen.
- . Un continuo invariante, tal que el punto crítico y su imagen pertenecen a la misma componente conexa de su complemento.

ABSTRACT

A well-known result from Brouwer states that any orientation preserving homeomorphism of the plane with no fixed points has an empty non-wandering set. In particular, an invariant compact set implies the existence of a fixed point. In this paper we give sufficient conditions for degree 2 branched covering maps of the plane to have a fixed point, namely:

- . A totally invariant compact subset, such that it does not separate the critical point from its image
- . An invariant compact subset with a connected neighbourhood U , such that $T(U \cup f(U))$ does not contain the critical point nor its image.
- . An invariant continuum, such that the critical point and its image belong to the same connected component of its complement.

ÍNDICE

1. Introducción	5
1.1. Contexto histórico	5
1.2. Motivación	7
1.3. Plan de Trabajo	8
1.4. Dos ejemplos simples	9
2. Preliminares	12
2.1. Superficies	12
2.2. Endomorfismos	12
2.3. Dedazos	13
2.4. Espacios de cubrimiento	13
2.5. Curvas y foliaciones	14
2.6. Conjugación grosera	14
2.7. Cubrimientos ramificados	14
3. Teoría de Brouwer y arcos de traslación	15
3.1. Brouwer en el disco	15
3.2. Arcos de traslación	16
3.3. Brouwer en el plano	17
3.4. Teorema de Cartwright-Littlewood	20
3.5. Aplicaciones: Cubrimientos ramificados de la esfera	22
4. Cubrimientos del anillo	24
4.1. Porqué el anillo	24
4.2. Teoría de Nielsen	24
4.3. Semiconjugaciones	27
4.4. Conectores	31
4.5. Teoremas de completitud	35
4.6. Ejemplos y contraejemplos	37
5. Resultados originales	43
5.1. El buen dedazo	43
5.2. Las pruebas	48
5.3. Margen para mejoras	49
Referencias	49

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Contexto histórico. El origen de la dinámica de superficies se sitúa en la dinámica clásica, teniendo como caso fundacional al *problema de los tres cuerpos*, estudiado por Poincaré, que reduce algunas configuraciones del problema al estudio de la dinámica twist y conservativa del anillo. Al día de hoy se utilizan herramientas desarrolladas en sus trabajos, en particular en los tres tomos de [P892], publicados a fines del siglo XIX. Una recopilación de las técnicas utilizadas y sus aplicaciones puede ser encontrada en [Che12].

Problema de los tres cuerpos. Caso de juguete. Considérese la siguiente situación: se tienen dos cuerpos de masa m (a los que llamaremos *grandes*) moviéndose con rapidez constante a lo largo de una circunferencia de radio r situada en un plano horizontal, en puntos diametralmente opuestos. Se tiene un tercer cuerpo de masa despreciable respecto a m (al que llamaremos *cuerpo pequeño*), situado en el centro de la circunferencia, con velocidad v , solamente en el eje vertical. Se *pone a andar* el sistema con la Ley de Gravitación Universal (nótese que el cuerpo de masa despreciable no ejerce fuerzas sobre los otros dos cuerpos). Por comodidad asumiremos que la Constante de Atracción Universal es igual a 1.

Sean t_0 y v_0 respectivamente, el tiempo inicial y la velocidad inicial del cuerpo pequeño. Observamos que este sistema es autónomo, es decir, el comportamiento del cuerpo pequeño no depende del tiempo inicial. La primera pregunta que surge es: *¿existe una velocidad inicial $\hat{v}$ para la cual el cuerpo pequeño no vuelva a su posición inicial, es decir, escape del pozo gravitacional de los cuerpos grandes?* La respuesta a esta pregunta es afirmativa, y puede verificarse que esta *velocidad de escape* cumple $\hat{v} = \sqrt{2/r}$. Para velocidades iniciales $v_0 < \hat{v}$, el cuerpo vuelve a su posición inicial luego de transcurrido un tiempo t_v , que depende solamente de su velocidad inicial. Por conservación de la energía, sabemos que en ese instante tendrá velocidad v_0 (en sentido opuesto). Por la simetría del problema, podemos tomar la velocidad del cuerpo pequeño al pasar por el centro de la circunferencia como si siempre fuera positiva (apuntando hacia arriba). Observemos además que, como los cuerpos grandes se mueven con velocidad constante, podemos intercambiar la noción de tiempo por la de *ángulo* (posición de uno de los cuerpos grandes con respecto a un punto fijo de la circunferencia). Podemos entonces expresar el tiempo módulo 2π .

Dadas entonces dos condiciones iniciales t, v , con $t \in \mathbb{S}^1$, $v < \hat{v}$ (obsérvese que el conjunto de condiciones iniciales es un anillo abierto A), podemos definir un *mapa de retorno* $\Phi : A \rightarrow A$, con

$$\Phi(t, v) = (t + t_v, v).$$

Este mapa preserva el radio, y es además una rotación en cada una de las circunferencias centradas en el origen. El punto clave reside en que la tiempo de retorno t_v tiende a infinito cuando v tiende a $\hat{v}$ (ver Figura).

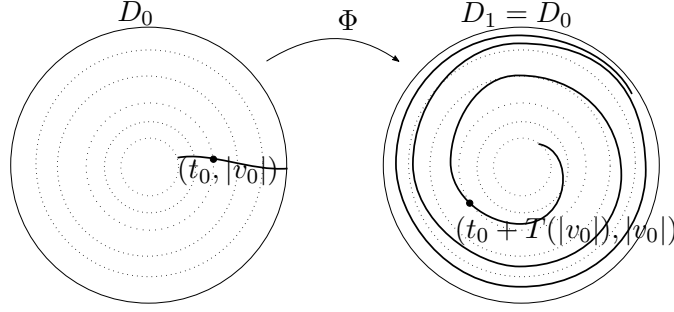


FIGURA 1. Mapa de retorno inducido en el anillo abierto

Lo que acabamos de construir muestra cómo reducir el estudio cualitativo de un problema de dinámica continua (una ecuación diferencial autónoma en este caso), a uno de dinámica discreta, en una dimensión menor.

Para el estudio de algunas ecuaciones diferenciales no autónomas, podemos reducir el problema al estudio de dinámica de superficies induciendo mapas de retorno en el flujo extendido asociado (ver, por ejemplo, [Pir19]).

Dinámica topológica plana. La existencia de puntos fijos y periódicos para mapas continuos del plano es un fenómeno ampliamente estudiado. Un teorema clave para el desarrollo de esta área es publicado por Brouwer en 1912: [Brou12]

Teorema 1.1 (Brouwer, 1912). *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un homeomorfismo que preserva orientación, tal que $\text{Fix}(f) = \emptyset$. Entonces todo punto es errante.*

Probaremos este resultado en la Sección 3. En la misma sección probamos también, que la existencia de un compacto K invariante para el homeomorfismo f , (es decir, $f(K) = K$), implica la existencia de algún punto no errante, por lo que implica también la existencia de al menos un punto fijo (ver Corolario 3.9).

Este resultado puede verse como el *caso de juguete* de una pregunta abierta hoy día en dinámica topológica plana: *Si una función continua lleva un continuo plano en sí mismo, ¿es segura la existencia de un punto fijo en el continuo?* [Ste35]

Cartwright y Littlewood resuelven el caso más inocente, al demostrar el siguiente resultado (ver [CL51]):

Teorema 1.2 (Cartwright-Littlewood, 1951). *Sea f un homeomorfismo del plano que preserva orientación. Supongamos que existe un continuo X , invariante por f , que no separa el plano. Entonces f tiene un punto fijo en X .*

Una prueba elegante del mismo resultado es dada dos décadas después por Brown en [Bro77], y será incluida en la Sección 3.

Bell generaliza este resultado para la clase de homeomorfismos, y anuncia en 1984 que el teorema puede extenderse a la familia de mapas holomorfos (ver también [Aki99]) -observar que estos mapas son un caso particular de *cubrimientos ramificados* del plano (ver Sección 2 por definiciones). Kuperberg extiende el teorema previo para homeos que revierten orientación, debilitando las hipótesis: el teorema funciona aunque el continuo separe el plano ([Kup91]):

Teorema 1.3 (Kuperberg, 1991). *Sea f un homeomorfismo del plano que revierte orientación.*

Si X es un compacto conexo, invariante por f , entonces existe un punto fijo de f , contenido en X .

Más aún, si alguna de las componentes acotadas del complemento de X son invariantes, entonces f tiene al menos dos puntos fijos en X .

Si bien lo usaremos como ingrediente en resultados que presentaremos más adelante, no daremos la prueba de este Teorema puesto que centraremos nuestro estudio en mapas que preservan orientación.

Observación 1.4. *El Teorema de Kuperberg no funciona si el homeomorfismo preserva orientación: cualquier rotación no trivial tiene circunferencias invariantes, y ningún punto fijo en ellas.*

Más recientemente, el teorema de Cartwright-Littlewood fue extendido a todos los cubrimientos ramificados que preservan orientación, por Fokkink, Mayer, Oversteegen y Tymchatyn, en 2007 (ver [FMOT07]).

1.2. Motivación. Existen dos preguntas que fueron de carácter fundamental en el desarrollo de este trabajo. La primera en orden cronológico es una conjetura de Pugh y Shub, que sirvió de motivación inicial y propició el estudio de técnicas que usaremos en los resultados originales.

1.2.1. La tasa. En un artículo publicado en 2012 ([PSh12]), Pugh y Shub estudian endomorfismos de la esfera $\mathbb{S}^2$, y buscan encontrar condiciones que les permitan asegurar crecimiento exponencial de órbitas periódicas, mayor o igual al grado del endomorfismo.

Esta tasa exponencial de crecimiento fue bautizada por Iglesias, Portela, Rovella y Xavier en el 2014 (ver [IPRX16.2]):

Definición 1.5. *Sea f un endomorfismo de la esfera $\mathbb{S}^2$, de grado d . Diremos que tiene la tasa si*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(\#\text{Fix}(f^n)) \geq \log d.$$

En [PSh12] se realiza la siguiente pregunta: *Existe un $r \geq 1$ tal que cualquier endomorfismo de clase C^r de la esfera, tiene la tasa?*

Si el endomorfismo es solamente C^0 , entonces la respuesta es negativa: basta tomar el mapa que en coordenadas polares se ve como $(\rho, \theta) \mapsto (2\rho, 2\theta)$,

que es de grado dos pero tiene únicamente dos órbitas periódicas (0 e ∞ que de hecho son puntos fijos).

Por otro lado, si el mapa es racional la respuesta es positiva: Michael Shub probó en 1978 (ver [Shu78]) que estos mapas de la esfera tienen *la tasa*.

Surge naturalmente la siguiente pregunta: ¿qué pasa si tomamos un mapa racional y lo componemos con un pequeño *dedazo*? ¿Es persistente la tasa a pequeñas perturbaciones con alguna regularidad, para mapas racionales de la esfera?

Consideremos el siguiente ejemplo: tomamos el mapa $m_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, con $m_2(z) = z^2$, y lo extendemos a la esfera $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, fijando ∞ (podemos hacerlo puesto que m_2 es propio). Es fácil ver que este mapa tiene *la tasa*: m_2^q tiene $2^q - 1$ puntos fijos en el círculo de radio 1. Sea ahora ξ una perturbación $\mathcal{C}_0$ de tamaño ε (es decir $d(\xi(z), z) \leq \varepsilon$, para todo z), con $\varepsilon < 1$, y tal que $\xi(0) \neq 0$. Es una pregunta hoy abierta, si el mapa $f = \xi \circ m_2$, tiene la tasa.

1.2.2. Alcance del Teorema de Brouwer. Motivados por la pregunta de Pugh y Shub, en primera instancia intentamos encontrar condiciones suficientes en cubrimientos ramificados de la esfera, para asegurar la presencia de la tasa (tomamos técnicas y resultados de [FMOT07], [BO09], [IPRX16], [IPRX16.2], [IPRX16.3]). Ante la falta de respuestas, nos hicimos una pregunta un tanto más naïf: ¿qué condiciones de recurrencia en la dinámica, para un cubrimiento ramificado del plano, implican la existencia de un punto fijo?

El Teorema 1.1 resuelve esta interrogante de forma completa para la familia de homeomorfismos que preservan orientación. Lo que estamos intentando hacer entonces es adaptar este resultado a una familia más grande de funciones, y en particular nos centramos en la pregunta: ¿para qué familia de endomorfismos del plano, la existencia de un compacto invariante implica la de un punto fijo?

1.3. Plan de Trabajo. A lo largo de este trabajo, procuramos encontrar condiciones suficientes para la existencia de puntos fijos en mapas continuos del plano. Recordemos que el teorema de Brouwer tiene como corolario la siguiente afirmación: *Un homeo del plano que preserva orientación, con un compacto invariante, tiene un punto fijo*. Nos interesa entender para qué familia de mapas continuos del plano es cierta esta afirmación.

Centraremos nuestro estudio en la familia de cubrimientos ramificados. Por un Teorema de Stoilow (ver [Why42]), sabemos que esta familia coincide con la de mapas del plano *abiertos y ligeros*, que tiene una definición mucho más laxa *a priori* (ver Sección 2 por definiciones.)

Son tres los resultados originales que probaremos a lo largo de este trabajo, si bien todos pueden verse como aplicación de la misma construcción propia, a saber, un homeo del plano con propiedades interesantes. A esta construcción le llamaremos *el buen dedazo*.

Para facilitar la notación, dado un compacto K del plano, llamaremos $T(K)$ a la unión de K con las componentes conexas acotadas de su complemento.

Los resultados que probaremos son los siguientes:

Teorema 1.6 (G, 2019). *Sea f un cubrimiento ramificado de grado 2 del plano, y $c \in \text{Crit}(f)$. Supongamos que existe un conjunto compacto K con $f^{-1}(K) = K$, y tal que c y $f(c)$ están en la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$.*

Entonces $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Teorema 1.7 (G, 2019). *Sea f un cubrimiento de grado 2 del plano, con un conjunto K compacto invariante (no necesariamente totalmente invariante). Supongamos que existe U entorno conexo de K , tal que $T((U) \cup f(U))$ no contiene a c ni a $f(c)$.*

Entonces $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$.

Teorema 1.8 (G, 2019). *Sea f un cubrimiento ramificado de grado ± 2 del plano, con un continuo invariante, tal que no separa c de $f(c)$.*

Entonces f tiene un punto fijo en $T(K)$.

La hoja de ruta para probar estos resultados es la siguiente. Utilizamos la Sección 2 para introducir todas las definiciones elementales y la notación que utilizaremos a lo largo del trabajo. En las siguientes dos secciones se prueban resultados que se usarán como herramientas en la demostración de los Teoremas: la Sección 3 está dedicada a la Teoría de Brouwer en dinámica topológica plana, mientras que la Sección 4 trabaja con dinámica de cubrimientos del anillo. En la última Sección desarrollamos el trabajo original: damos un bosquejo, construimos *el buen dedazo* y demostramos los tres Teoremas.

Como forma de motivación, presentamos a continuación dos contraejemplos a la existencia de puntos periódicos (y de cualquier tipo de recurrencia) en cubrimientos ramificados del plano, uno de ellos de quien escribe.

1.4. Dos ejemplos simples. Observemos que cualquier polinomio del plano complejo es en particular un cubrimiento ramificado. Si además el grado del polinomio p es mayor que uno, entonces el mapa tiene puntos de todos los períodos: para cada q entero positivo, basta encontrar las raíces de $p^q - \text{Id}$. Sin embargo, esto no se generaliza para el resto de la familia: Blokh y Oversteegen dan un contraejemplo en 2009 ([BO09]). Las nociones relativas a cubrimientos ramificados se encuentran en la Sección 2.

Proposición 1.9 (Blokh-Oversteegen, 2009). *Existe un cubrimiento ramificado del plano, de grado dos, con $\text{Per}(f) = \emptyset$.*

Demostración: Usaremos alternativamente coordenadas polares (ρ, θ) y coordenadas cartesianas (x, y) . Vamos a construir el mapa $f = f_2 \circ f_1$, donde

$$f_1(\rho, \theta) = (\rho, 2\theta), \quad f_2(x, y) = (x + T(y), y).$$

Tenemos entonces que f_2 es una traslación en las horizontales, que depende de la altura y . Imponemos $T > 0$, $T(y) = T(-y)$. Para construir una T que evite la existencia de fijos para f , hallamos los $\hat{z} = (\hat{\rho}, \hat{\theta}) \in \mathbb{C}$ tales que z y $f_1(z)$ tienen la misma altura. Tenemos entonces que $\sin(\hat{\theta}) = \sin(2\hat{\theta})$ de donde $\theta \in \{0, \pi/3, \pi, -\pi/3\}$.

Tomando $\text{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, definamos $A = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Arg}(z)| < \pi/3\}$, $B = \{z \in \mathbb{C} : \pi/3 \leq \text{Arg}(z) \leq 2\pi/3\}$. Observamos que $\{A, -A, B, -B\}$ es una partición del plano (ver Figura 2).

Si tomamos $\hat{z}$ con $|\text{Arg}(\hat{z})| = \pi/3$, y con altura s , tenemos que la distancia entre z y $f_1(z)$ es $2|s|/\sqrt{3}$. Definamos entonces $T(y) = (2|y|/\sqrt{3}) + 1$. Como $f(\hat{z})$ está a la derecha de $\hat{z}$, tenemos que $\text{Fix}(f) = \emptyset$.

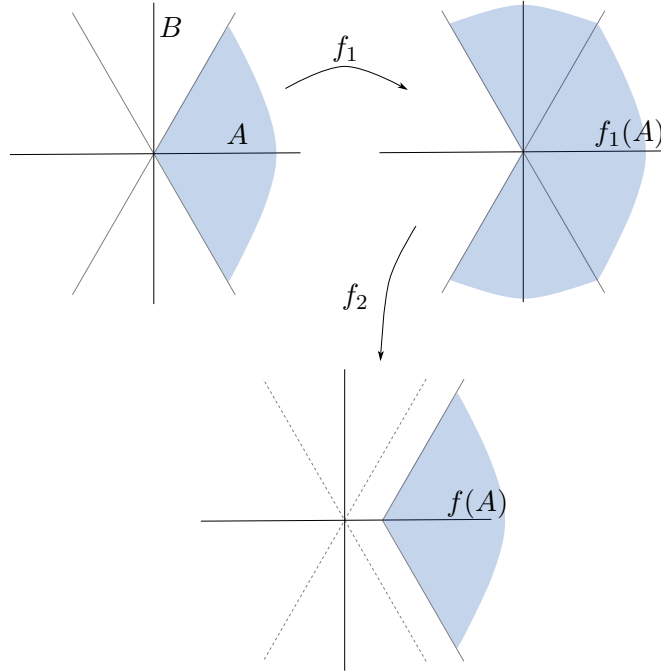


FIGURA 2. Cubrimiento ramificado de Blokh-Oversteegen, grado 2. $\Omega(f) = \emptyset$

Veamos ahora que f tampoco tiene puntos periódicos. Es fácil ver esto para los $z \in A$: si z está en el eje horizontal, $f(z) = z + 1$. En caso contrario, usamos que $f_1(A) \subset A$, y que f_2 preserva horizontales, para concluir que $|\text{Im}(f(z))| > |\text{Im}(z)|$. Más aún, existe una función creciente $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, tal que

$$|\text{Im}(f(z))| \geq |\text{Im}(z)| + h(|\text{Im}(z)|), \quad (1)$$

de donde $\lim_{m \rightarrow \infty} |\text{Im}(f^m(z))| = \infty$, por lo que no existen puntos periódicos en A . Si $z \in -A$, entonces $f(z) \in A$, y razonamos de la misma forma. En particular, si existe m tal que $f^m(z) \in A$, entonces z no puede ser periódico.

Veamos entonces que todos los puntos $z \in (B \cup -B)$ cumplen esta propiedad. Para ello, supongamos por contradicción que existe un z en esa región, tal que $f^m(z) \in (B \cup -B)$. De forma contraria a los puntos de A , tenemos que $|\operatorname{Im}(f(z))| \leq |\operatorname{Im}(z)|$, de donde $\{f^m(z)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ tiene una subcesión m_k tal que $f^{m_k}(z) \rightarrow w \in \partial B$. Pero esto es una contradicción, puesto que $f(\partial B) \subset A$. $\square$

Observación 1.10. *Para este cubrimiento f , se tiene que $\Omega(f) = \emptyset$.*

Demostración. Probamos en la construcción del ejemplo, que los puntos del eje horizontal son errantes, y para los demás puntos de $z \in A$, la ecuación (1) nos asegura que también lo son. Por último, probamos también que todo punto tiene un iterado futuro en A , por lo que también es errante. $\square$

Observación 1.11. *Podemos poscomponer este cubrimiento con una simetría en el eje horizontal, para obtener un cubrimiento ramificado de grado -2 , sin puntos periódicos*

Veamos hora que esta técnica puede ser generalizada modificando sutilmente el argumento de la prueba, para construir cubrimientos ramificados del plano de cualquier grado, que no tengan puntos periódicos.

Proposición 1.12 (G,2019). *Existe f cubrimiento ramificado del plano, para cualquier grado $n \in \mathbb{Z}$, tal que $\operatorname{Per}(f) = \emptyset$.*

Demostración: Asumamos $n > 0$ sin pérdida de generalidad (en caso contrario poscomponemos el mapa que construyamos con una simetría respecto al eje horizontal). El procedimiento tiene el mismo espíritu que el de la proposición anterior: nuevamente construimos $f = f_2 \circ f_1$, donde

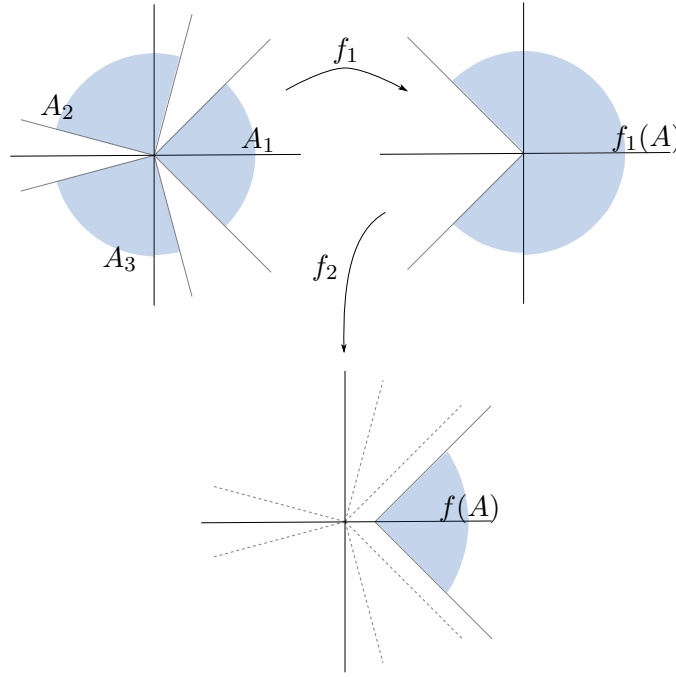
$$f_1(\rho, \theta) = (\rho, n\theta); \quad f_2(x, y) = (x + T(Y), y).$$

Si tomamos $X = \{z \in \mathbb{C}^* : |\operatorname{Arg}(z)| < \pi/(n+1)\}$, vemos que $f_1(X) = \mathbb{C}^* \setminus -\overline{X}$. Queremos f_2 de forma que $f(\overline{X}) \subset X$: para ello basta tomar $T(y) = 2|y|/\operatorname{tg}(\frac{\pi}{n+1}) + 1$. Definamos ahora la familia de conjuntos $\{A_k\}_{1 \leq k \leq n}$, las k preimágenes de $f_1(X)$, ordenadas en sentido antihorario, de forma tal que $A_1 = X$ (ver Figura 3). Sean $\{B_k\}_{1 \leq k \leq n}$ las k componentes de $\mathbb{C}^*$ que restan, siendo $\overset{\circ}{B}_k$ la región delimitada entre $\overline{A_k}$ y $\overline{A_{k+1}}$. Sea $A = \bigcup A_k$, $B = \bigcup B_k$.

Veamos ahora que f no tiene puntos periódicos. Observamos primero que el 0 es errante, puesto que $f|_{\mathbb{R}}$ es una traslación. Para $z \in \mathbb{C}^*$, separamos en dos casos: $z \in A$ y $z \in B$.

Observación 1.13. *Sea $z = (\rho, \theta)$. Si $z \in \overline{A}$, entonces $|f(z)| > |z|$, puesto que f_1 preserva la norma. Análogamente, si $f(z) \in B$, entonces $|f(z)| < |z|$.*

Si $z \in A$, entonces $f^m(z) \in A_1, \forall m \geq 1$. Como en la proposición anterior, existe una función creciente $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, tal que si $z \in A_1$, $|f(z)| \geq |z| + h|z|$, de donde la norma es crece estrictamente y además $\lim_{m \rightarrow \infty} |f^m(z)| = \infty$, por lo que z es errante. Lo mismo aplica si existe $m \geq 1$ tal que $f^m(z) \in A$.

FIGURA 3. Generalización del ejemplo [BO] para grado $n = 3$

Supongamos entonces que tenemos z tal que $f^m(z) \in B$; $\forall m \geq 0$. Tenemos entonces por la observación 1.13 que la norma decrece a lo largo de la órbita, de donde tenemos una subsucesión convergente $f^{m_k}(z)$ a un punto $w \in B$, con $|f(w)| = |w|$. Pero en ese caso tendríamos que $f(w) \in A$, lo cual es una contradicción. $\square$

2. PRELIMINARES

2.1. Superficies. A lo largo de este trabajo, una *superficie* S será una variedad topológica orientable, de dimensión dos. Diremos que S es respectivamente un *plano*, *anillo* o *esfera* si es homeomorfa a $\mathbb{C}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ o $\mathbb{S}^2$. Un conjunto $U \subset S$ será un *disco* si es homeomorfo a $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Para facilitar notación, definiremos $m_k; \overline{m}_k : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como los mapas tales que $m_k(z) = z^k$; $\overline{m}_k(z) = \overline{z}^k$.

2.2. Endomorfismos. Todos los mapas considerados en este trabajo son continuos. Diremos además que un mapa $f : S \rightarrow S$ entre superficies es un *endomorfismo* cuando es sobreyectivo.

Cuando trabajemos con endomorfismos del anillo A , definiremos el *grado* de ese endomorfismo como la acción inducida en el primer grupo de homología $\mathcal{H}_1(A)$, que es $\mathbb{Z}$ puesto que el anillo retrae por deformación en el círculo. Para cubrimientos ramificados de la esfera de dimensión dos, miraremos la acción inducida en el segundo grupo de homología, $\mathcal{H}_2$ (sabemos

que el n -ésimo grupo de homología de la esfera de dimensión n , es igual a $\mathbb{Z}$).

2.3. Dedazos. Introducimos la siguiente definición para simplificar notación en el futuro:

Definición 2.1. Sea V una región conexa de una superficie S , $U \subset V$ un disco. Diremos que $h : S \rightarrow S$ es un dedazo soportado en U si es un homeomorfismo tal que:

- . $h|_U$ es conjugado a la traslación $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $T(z) = z + 1$.
- . $h|_{U^c} = \text{Id}$.

Observación 2.2. Dadas dos n -uplas de puntos $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ incluidas en un disco $U \subset S$, existe un dedazo h , soportado en U y sin puntos fijos en esa región, tal que $h(x_i) = y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$.

2.4. Espacios de cubrimiento. Todo el contenido brindado en esta subsección puede ser encontrado en la Sección 1.3 de [Hat02].

Dadas dos superficies S y $\tilde{S}$, diremos que $\tilde{\pi} : \tilde{S} \rightarrow S$ es una proyección de cubrimiento si todo punto $z \in S$ tiene un entorno U del tipo *pila de discos*, es decir, tal que $\tilde{\pi}^{-1}(U)$ es una unión disjunta de discos de $\tilde{S}$ de forma que la proyección restringida a cada uno de esos discos es un homeomorfismo. En estas condiciones diremos que $\tilde{S}$ es un *cubrimiento* de S , y será el *cubrimiento universal* si $\tilde{S}$ es simplemente conexa. Sabemos en este contexto que $\tilde{S}$ es única a menos de homeomorfismos. Cuando sea evidente que hablamos del mapa $\tilde{\pi}$, haremos abuso de notación y diremos que $\tilde{\pi}$ es un *cubrimiento*.

En este trabajo nos interesará cubrir $\mathbb{S}^2$ con *pinchaduras*, es decir, $S = \mathbb{S}^2 \setminus K$, donde K es un subconjunto compacto, que no separa la esfera. En este contexto, el cubrimiento universal será siempre topológicamente un plano, gracias al Teorema de Uniformización (ver, por ejemplo, [Mar11]). En el caso particular en que $S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es un anillo, tomaremos $\tilde{S} = \mathbb{C}$ y la proyección de cubrimiento será $\tilde{\pi} : \mathbb{C} \rightarrow S$, dada por $\tilde{\pi}(x, y) := (e^{-y} \cos(2\pi x), e^{-y} \sin(2\pi x))$. Tendremos en ese caso la transformación de cubrimiento $T \in \text{Homeo}^+(\tilde{S})$, definida por $T(x, y) := (x + 1, y)$.

Si tenemos $f : S \rightarrow S$ un endomorfismo, y $\tilde{S}$ es el cubrimiento universal de S , entonces podemos tomar $F : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ levantado de f como un mapa que cumple $f\tilde{\pi} = \tilde{\pi}F$ (sabemos que F es único a menos de poscomponer con una transformación de cubrimiento). Observemos que para el caso del anillo A , y la proyección de cubrimiento que dimos recién, tenemos que el levantado es un homeomorfismo del plano $\tilde{A}$ (notemos que $\tilde{A}$ es simplemente conexo), que cumple $F(x + 1, y) = F(x, y) + (d, 0)$, siendo d el grado de f . Esto último se debe a que la imagen por f de una curva esencial, cerrada y simple (ver Subsección a continuación), le da d vueltas a uno de los fines del anillo.

2.5. Curvas y foliaciones.

Definición 2.3. *Dados dos puntos $p, p' \in S$, un camino o curva de p a p' será una función continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow S$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = p'$. Diremos que el camino es simple si γ es inyectiva, y cerrado si $p = p'$.*

Diremos que γ es respectivamente un *segmento*, *recta*, *círculo* si su imagen es homeomorfa a $[0, 1]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$. Si γ es una curva en el anillo, diremos que es *esencial* si su imagen no es homtópicamente nula.

Definición 2.4. *Dada una superficie S , Una foliación topológica orientada $\mathcal{F}$ es una partición de S en subvariedades de dimensión 1 tal que para todo $p \in S$, existe un entorno U_p y un homeomorfismo $h : U_p \rightarrow (-1, 1) \times (-1, 1)$ que preserva orientación y manda $\mathcal{F}$ en la partición por rectas verticales, orientadas de abajo a arriba.*

2.6. Conjugación grosera. Recordamos la noción clásica de conjugación dinámica entre dos mapas f y g .

Definición 2.5. *Dados dos mapas $f : A \rightarrow A$, $g : B \rightarrow B$, diremos que son (dinámicamente) conjugados si existe un homeomorfismo $h : A \rightarrow B$, tal que $h \circ f = g \circ h$.*

Esta definición nos dice esencialmente que los mapas f y g son dinámicamente *el mismo mapa*, visto en lugares distintos.

Introduciremos ahora una noción más débil de conjugación entre mapas:

Definición 2.6. *Sea U un subconjunto de $\mathbb{C}$, $c \in U$, y tomemos $f : U \rightarrow \mathbb{C}$. Diremos que f es groseramente conjugada a m_k si existen foliaciones $\mathcal{F}$ en $U \setminus \{c\}$, $\mathcal{F}'$ en $f(U) \setminus \{f(c)\}$, y dos homeomorfismos $\phi : U \rightarrow \mathbb{D}$, $\phi' : f(U) \rightarrow \mathbb{D}$ que preserven orientación, tales que tanto $\mathcal{F}$ como $\mathcal{F}'$ son mapeadas a la foliación radial en $\mathbb{D}$, y tales que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & f(U) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi' \\ \mathbb{D} & \xrightarrow{m_2} & \mathbb{D} \end{array}$$

Observemos que, en este caso, no explicitamos nada sobre la dinámica en cada uno de los *radios*, de donde esta noción es estrictamente más débil que la conjugación dinámica.

2.7. Cubrimientos ramificados.

Definición 2.7. *Un cubrimiento ramificado $f : S \rightarrow S$ es un mapa que es homeomorfismo local en todos los $p \in S$, salvo por finitos puntos, que serán denominados puntos críticos del cubrimiento.*

Afirmación 2.8. *Debido a la finitud del conjunto de puntos críticos, podemos deducir que cada uno de ellos tiene un entorno V tal que $f|_V$ es groseramente conjugada a m_k , o a $\bar{m}_k$, para algún $k \in \mathbb{Z}^+$.*

Demostración. Sea c un punto crítico de f , y tomemos V un entorno de $f(c)$ del tipo *pila de discos*, es decir, de forma tal que cada componente conexa U_α de $f^{-1}(U)$, contenga a lo más un punto crítico. Sea U_c la componente que contiene a c . Podemos asumir sin pérdida de generalidad que V es una bola centrada en $f(c)$, $V = B(f(c), r)$.

Sea $z \in \partial V$, tomemos $\gamma : [0, 1] \rightarrow \partial V$ la curva que recorre ∂V partiendo desde z , en sentido antihorario. Para cada $t \in [0, 1]$, tomemos R_t el radio desde $f(c)$ hasta $\gamma(t)$ (notemos que podemos definir R_t en todo $\mathbb{R}$, extendiendo la asignación de forma periódica.) Sea w una de las preimágenes de $f^{-1}(z)$, que tenemos en U_c , y sea S_0 la preimagen de R_0 que conecta c con w . Observemos que S_0 es un segmento, puesto que f es homeo local en todo $U_c^* = U_c \setminus \{c\}$.

De nuevo, como $f|_{U_c^*}$ es un cubrimiento, podemos tomar $\eta : [0, 1] \rightarrow \partial U_c$ el levantado de la curva γ que comienza en w , y luego definir S_t como la preimagen de R_t que termina en $\eta(t)$. Repetimos este proceso hasta obtener $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\eta(0)$.

Para obtener la conjugación grosera entre f y m_k tomamos $\{S_t\}_{t \in [0, k]}$, $\{R_t\}_{t \in [0, 1]}$, como las foliaciones que mapearemos a la foliación radial en $\mathbb{D}$ (para V , basta definir ϕ' como una homotecia). Por la construcción que hicimos, alcanza mandar las k preimágenes de R_t en los k rayos $\phi(S_{n+t})$ tales que m_k de estos rayos sea $\phi'(R_t)$. $\square$

En ese contexto, la *multiplicidad* de un punto crítico será $k - 1$ o $-(k - 1)$, cuando el mapa sea localmente groseramente conjugado a m_k o $\overline{m_k}$, respectivamente. Definiremos $\text{Crit}(f)$ como el conjunto de puntos críticos de f . Cada punto que no es la imagen de un punto crítico tiene el mismo número de preimágenes d . Debido a la finitud del conjunto de puntos críticos, deducimos que el *grado* de f es d para el caso en el que f preserve orientación, y $-d$ para el caso en el que revierte (esta noción de grado coincide con la que dimos previamente para endomorfismos de la esfera). Si $\text{Crit}(f) = \emptyset$, diremos que f es un *cubrimiento* a secas.

A modo de ejemplo, cualquier polinomio complejo $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de grado n es un cubrimiento ramificado del plano, donde el conjunto de puntos críticos coincide con las raíces de la derivada del polinomio. Dado que estamos frente a un mapa propio, podemos extenderlo a la esfera $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$ y obtener $\overline{p} : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, que tiene a ∞ como punto crítico de multiplicidad $n - 1$.

3. TEORÍA DE BROUWER Y ARCOS DE TRASLACIÓN

3.1. Brouwer en el disco. Consideremos el disco $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. El teorema clásico de Brouwer en el disco establece que:

Teorema 3.1 (Brouwer en el disco, 1912). *Si $f : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \overline{\mathbb{D}}$ es continua, entonces f tiene un punto fijo. Es decir, existe $x \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $f(x) = x$.*

Demostración. Supongamos por contradicción que existe un mapa continuo f tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathbb{D}$. Por lo tanto, podemos definir s_x la semirrecta que tiene origen en $f(x)$ y pasa por x , y luego definir $h(x)$ como el punto de intersección entre s_x y $\partial\mathbb{D}$. Llamémosle γ_x al segmento que va desde x hasta $h(x)$, parametrizado por longitud de arco. Observemos que, si $x \in \partial\mathbb{D}$, entonces $h(x) = x$, en cuyo caso γ_x es el camino trivial.

Definamos ahora una familia de mapas continua a un parámetro $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$, tal que $f_t(x) = \gamma_x(t)$. Tenemos entonces que:

- $f_0 = \text{Id}$,
- $f_t|_{\partial\mathbb{D}} = \text{Id}$ para todo $t \in [0, 1]$.
- $\text{Im}(f_1) = \partial\mathbb{D}$.

Tenemos entonces que la isotopía $\{f_t\}$ es un retracto por deformación entre el disco y su borde. Sabemos que el disco es simplemente conexo. Tomemos entonces cualquier curva cerrada η en $\partial\mathbb{D}$, y una homotopía g_t que la trivialice dentro del disco. Luego, basta construir la homotopía $g'_t = f_1 \circ g_t$, y observar que g'_t es una homotopía en $\partial\mathbb{D}$, que lleva η a un único punto. Pero esto es una contradicción, ya que sabemos que el grupo fundamental del círculo es no trivial. $\square$

Este resultado se debe tanto a la compacidad como a la topología del disco: en el disco abierto se pueden construir ejemplos de funciones continuas sin puntos fijos, y también en el anillo compacto.

Proposición 3.2. *Existen homeomorfismos del disco abierto sin puntos fijos.*

Demostración. Observamos que el disco abierto es homeomorfo al plano $\mathbb{C}$, y tomemos h cualquier homeomorfismo entre ambos espacios. Tomemos luego $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una traslación (donde todo es errante), y definamos $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ como $f = h \circ g \circ h^{-1}$. El resultado se deduce de que f y g tienen dinámicas conjugadas. $\square$

Observación 3.3. *Para el caso del anillo compacto, basta tomar cualquier rotación no trivial para ver que el Teorema de Brouwer no aplica.*

3.2. Arcos de traslación. Presentaremos una herramienta que usaremos en la prueba del Teorema 1.1, y que será fundamental en la construcción de *el buen dedazo* (ver Proposición 5.1). Esta noción fue introducida por Brouwer en [Brou12], y luego utilizada por Fathi en [Fat84] para dar una prueba simple del Teorema (la misma que daremos en esta Sección).

Definición 3.4. *Sea f un cubrimiento ramificado de la superficie S . Diremos que un camino γ en S , entre los puntos x e y es un arco de traslación, si se cumple que:*

- $y = f(x)$,
- $\gamma \cap f(\gamma) \subset \{x, f(x)\}$.

Lema 3.5. *Si f no tiene puntos fijos, entonces por todo punto pasa un arco de traslación.*

Demostración. Tomemos una métrica cualquiera en S (podemos traer la usual desde el disco hipérbolico si así lo queremos). Sea $z \in S$ un punto de la superficie, con $f(z) \neq z$. Sabemos que $f^{-1}(f(z))$ es un conjunto cerrado pues f es continua, y además $z \notin f^{-1}(f(z))$, de donde la distancia entre z y su conjunto de preimágenes es positiva.

Sea $B_r(p)$ la bola de radio r , centrada en p . Definimos

$$\hat{r} = \sup\{r > 0 : B_r(f(z)) \cap f^{-1}(B_r(f(z))) = \emptyset\}.$$

Por construcción, tenemos que la intersección entre $\overline{B_{\hat{r}}(f(z))}$ y su preimagen, es no vacía y está contenida en el borde de ambas. Sea entonces $y \in \partial B_{\hat{r}}(f(z)) \cap \partial f^{-1}(B_{\hat{r}}(f(z)))$, y tomemos x una preimagen de y que esté en el borde de $f^{-1}(B_{\hat{r}}(f(z)))$ (podemos tomarla puesto que y no es punto fijo).

Por último, basta tomar γ cualquier camino entre x e y , que pase por z , y tal que su interior esté contenido en $f^{-1}(B_{\hat{r}}(f(z)))$, y verificar que es un arco de traslación. $\square$

3.3. Brouwer en el plano. Dedicaremos esta subsección a probar el Teorema 1.1, a saber: *si un homeomorfismo del plano que preserva orientación carece de puntos fijos, entonces el conjunto no errante es vacío.* A lo largo de esta Subsección, f notará un homeomorfismo del plano que preserva orientación.

Probaremos el contrarrecíproco: la existencia de un punto no errante implica la de punto fijo. La demostración que daremos es de Albert Fathi. Primero veremos el caso particular donde f tiene un punto periódico de período 2. Luego, probaremos que si f no tiene puntos fijos y tiene una órbita periódica, entonces podemos perturbar el mapa y obtener una órbita de período 2, sin cambiar el conjunto de puntos fijos. Por último, veremos que el mismo argumento funciona para pasar de una f con un punto no errante a otra con una órbita periódica, nuevamente sin cambiar el conjunto de puntos fijos.

Lema 3.6. *Si $f \in \text{Homeo}^+(\mathbb{C})$, y existe un punto periódico para f , de período 2, entonces $\text{Fix}(f) \neq \emptyset$.*

Demostración. Tomemos $x \in \mathbb{C}$, con $x \neq f(x)$, $x = f^2(x)$. Consideremos la compactificación del plano con un punto al infinito y observemos que f se extiende a un mapa $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ fijando ∞ , pues un homeomorfismo del plano es *propio*. Consideramos a su vez el anillo abierto $\mathbb{A} = \mathbb{S}^2 \setminus \{x, f(x)\}$ y $f : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$.

Sea $X \subset \mathbb{A}$ un anillo esencial cerrado lo suficientemente grande como para que la composición de f con la retracción h de $\mathbb{A}$ sobre X , tenga los mismos puntos fijos que f y coincida con f en un entorno de los puntos fijos. Observemos que podemos tomar X con estas propiedades, puesto que $f|_A$ intercambia los fines, luego basta eliminar de A , pequeños entornos de sus dos fines.

Haciendo abuso de notación, seguimos llamando a este mapa f , de manera que ahora $f : X \rightarrow X$ es una función continua (no un homeomorfismo) y

X es un anillo cerrado. Notemos que para probar el teorema, es suficiente probar que f tiene al menos dos puntos fijos en el interior de X (uno no basta, pues recordemos que ∞ es punto fijo de f , que no está en el plano).

Sea $\tilde{X}$ el cubrimiento universal de X , que es una banda infinita $\mathbb{R} \times [0, 1]$, y tomemos $F : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ un levantamiento de f . Observemos ahora que, como f preserva orientación e intercambia los fines de A , se tiene que $F(x+1) = F(x) - 1$ para todo $x \in \tilde{X}$. Compactificando $\tilde{X}$ con dos puntos $-\infty$ y ∞ , de manera que $D = \tilde{X} \cup \{-\infty, \infty\}$ sea homeomorfo a un disco cerrado, podemos entonces extender F de forma continua a D poniendo $F(\infty) = -\infty$, $F(-\infty) = \infty$.

Recordando que los bordes de X se intercambian por F , obtenemos que $F|_{\partial D}$ no tiene puntos fijos. Sin embargo, aplicando el teorema de Brouwer en el disco, sabemos que existe $\tilde{z} \in \tilde{X}$ tal que $F(\tilde{z}) = \tilde{z}$, de donde $f(z) = z$, siendo $\tilde{z}$ un levantado de z .

Ahora bien, utilizando el mismo razonamiento, existe $w \in \tilde{X}$ tal que $(F+1)(w) = w$. Basta probar que z y w no se proyectan al mismo punto de X . Si así fuera, existiría $k \in \mathbb{Z}$ tal que $w = z + k$. Por lo tanto

$$w = (F+1)(w) = (F+1)(z+k) = F(z) - k + 1 = z - k + 1.$$

Obtenemos entonces $z + k = z - k + 1$, de donde $k = 1/2$, lo cual es una contradicción, puesto que k era entero. $\square$

Utilizando arcos de traslación, es fácil probar que si f tiene un punto periódico de cualquier período, se puede perturbarla sin alterar el conjunto de puntos fijos, para lograr que tenga un punto periódico de período exactamente 2:

Lema 3.7. *Supongamos que f tiene un punto periódico z de período $q > 2$, y que además $\text{Fix}(f) = \emptyset$. Entonces existe $g \in \text{Homeo}^+(\mathbb{C})$ tal que*

- . $\text{Fix}(g) = \emptyset$,
- . g tiene un punto periódico de período 2.

Demostración. Definiremos el homeomorfismo $g = h \circ f$, donde h será una perturbación que construiremos a continuación. Usamos el Lema 3.5 y tomamos γ un arco de traslación que pase por z . Sean x y $f(x)$ los extremos de este arco de traslación. Podemos asumir $f^2(x) \neq x$, en caso contrario tomamos $g = f$ y queda probado lo que queremos.

Tenemos entonces que $\gamma \cap f(\gamma) = f(x)$. De la misma forma, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que $f^{n-1}(\gamma) \cap f^n(\gamma) = f^n(x)$.

Sabemos que $z \in \gamma \cap f^q(\gamma)$. Definamos entonces $\Gamma = \gamma \cdot f(\gamma) \cdot \dots \cdot f^q(\gamma)$, y sea η el sub-arco de Γ que va desde $f^{q-1}(z)$ hasta $f^q(z) = z$.

Tomaremos U en pequeño entorno de η , y afirmamos que existe h un dedazo soportado en U (ver Definición 2.1), con las dos siguientes propiedades:

- . $h(f^{q-1}(z)) = z$,
- . $\text{Fix}(h \circ f) = \text{Fix}(f) = \emptyset$.

La primer propiedad no es otra cosa que la Observación 2.2. Para ver que h puede cumplir simultáneamente la segunda propiedad, basta observar

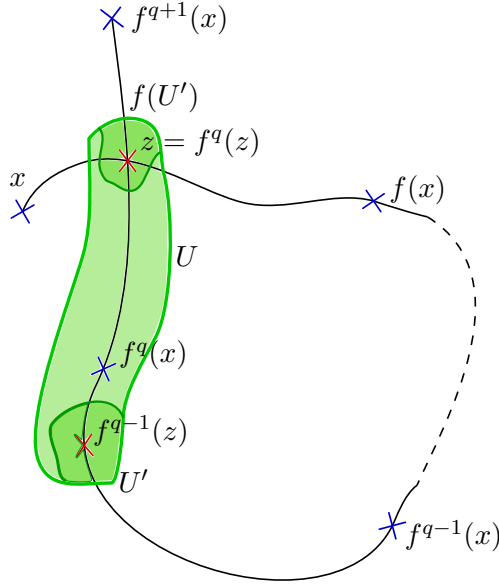


FIGURA 4. La perturbación h está soportada en el disco U , y mantiene invariante el conjunto de puntos fijos de f .

que si $w \in \text{Fix}(h \circ f) \setminus \text{Fix}(f)$, entonces $w \in U$, pero también $f(w) \in U$. Si bien $U \cap f^{-1}(U)$ no es vacío pues en particular contiene a $f^{q-1}(z)$, sabemos que esta intersección está contenida en un pequeño entorno U' de $f^{q-1}(z)$, si tomamos U suficientemente pequeño. Tomando finalmente h de forma que $h(f(U')) \cap U = \emptyset$, tenemos la segunda propiedad, y queda probado el resultado. $\square$

Veamos que, con un argumento similar, podemos pasar de la existencia de un punto no errante a la existencia de una órbita periódica, *sin tocar el conjunto de puntos fijos*. Con este último Lema concluimos la demostración del Teorema 1.1.

Lema 3.8. *Si $\text{Fix}(f) = \emptyset$, pero $\Omega(f) \neq \emptyset$, entonces existe $g \in \text{Homeo}^+(\mathbb{C})$ tal que*

- . $\text{Fix}(g) = \emptyset$.
- . $\text{Per}(g) \neq \emptyset$.

Demostración. Tomemos $z \in \Omega(f)$, $z \neq f(z)$. Podemos tomar entonces U pequeño entorno de z , y un $q > 1$, tal que $f^q(U) \cap U \neq \emptyset$, y además $f^j(U) \cap U = \emptyset$, para todo $1 \leq j \leq q-1$.

Como hicimos en el Lema anterior, construiremos $g = h \circ f$, donde h será un dedazo soportado en U . Para ello, tomemos $x \in U \cap f^q(U)$, $y = f^{-q}(x) \neq x$. Observemos que $y \in U$, y tomemos h un dedazo soportado en U , tal que $h(x) = y$. Como U es un disco libre (a saber, $U \cap f(U) = \emptyset$), tenemos que $\text{Fix}(h \circ f) = \text{Fix}(f) = \emptyset$. Además, como $h \circ f(f^j(y)) = f^{j+1}(y)$, para todo

$1 \leq j \leq q - 2$, tenemos que y es un punto periódico de período q para el homeomorfismo $h \circ f$, lo que concluye la demostración. $\square$

Corolario 3.9. *Si f es un homeomorfismo del plano que preserva orientación, y tiene un compacto invariante X , entonces f tiene al menos un punto fijo.*

Demostración. Alcanza con probar que el conjunto no errante es no vacío, y aplicar el Teorema que acabamos de probar. Sea $x \in X$. Como X es invariante, la órbita de x es un subconjunto infinito y acotado de $\mathbb{C}$ por lo que acumula en algún lugar. Por último, basta observar que cualquier punto de acumulación de esta órbita pertenece al conjunto no errante. $\square$

3.4. Teorema de Cartwright-Littlewood. Presentamos a continuación la prueba del Teorema de Cartwright-Littlewood (*si un homeomorfismo del plano que preserva orientación tiene un continuo relleno invariante, entonces tiene un punto fijo en el continuo*, ver 1.2), que usaremos en la Sección 5.

Daremos una prueba simple, publicada por Brown en 1977. Antes de eso, veremos que al Teorema *no le sobran hipótesis*:

Es necesario que X sea acotado. El punto fijo puede estar *en el infinito*: como contraejemplo sin esta hipótesis, basta tomar una traslación en las horizontales y ver que cualquier recta horizontal X es un invariante conexo sin fijos.

Es necesario que X sea cerrado. El fijo puede estar en cualquier lugar donde X acumule: pensar por ejemplo en el tiempo 1 del flujo inducido por un dipolo magnético, tenemos infinitos círculos invariantes con un único punto fijo común. El punto es que, si eliminamos el punto fijo de cualquiera de estos círculos, obtenemos un conjunto X acotado conexo invariante sin puntos fijos.

Es necesario que X sea conexo. En caso contrario, basta tomar como conjunto X , cualquier órbita periódica de cardinal mayor que 1.

Es necesario que X sea relleno. Para tener un contraejemplo sin esa hipótesis, considérese una rotación centrada en el origen. Tenemos infinitas circunferencias invariantes sin puntos fijos.

Ahora sí, la prueba:

Demostración del Teorema 1.2 Supongamos que no existen puntos fijos de f en el compacto X . Como $\Omega(f) \neq \emptyset$, por el Teorema 1.1, se tiene que $\text{Fix}(f) = Y \neq \emptyset$. Podemos entonces restringir la dinámica a la componente U de $\mathbb{C} \setminus Y$ que contiene a X . En cualquier caso, el cubrimiento universal $\tilde{U}$ de U , es un plano. Luego $f|_U$ se levanta a $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$, siendo $\tilde{\pi} : \tilde{U} \rightarrow U$ la proyección de cubrimiento correspondiente. Como X no separa el plano, tenemos que está contenido en un disco de U , de donde cada una de las

componentes conexas de $\tilde{\pi}^{-1}(X)$ es homeomorfa a X . Dado un punto $z \in X$, elegimos dos puntos $\tilde{z}$ y $\tilde{f}(\tilde{z})$ levantados de z y $f(z)$ respectivamente, que estén en la misma componente conexa $\tilde{X}$ de $\tilde{\pi}^{-1}(X)$. Tomando entonces $\tilde{f}_0$ levantado de F , de forma tal que $\tilde{f}_0(\tilde{z}) = \tilde{f}(\tilde{z})$, tenemos que $\tilde{f}_0$ fija la componente $\tilde{X}$, de donde, de nuevo por Brouwer, tenemos que $\tilde{f}_0$ tiene un punto fijo $\tilde{w}$. Pero entonces tendríamos que $\tilde{\pi}(\tilde{w}) \in \text{Fix}(f)$; $\tilde{\pi}(\tilde{w}) \notin Y$, lo cual es una contradicción. $\square$

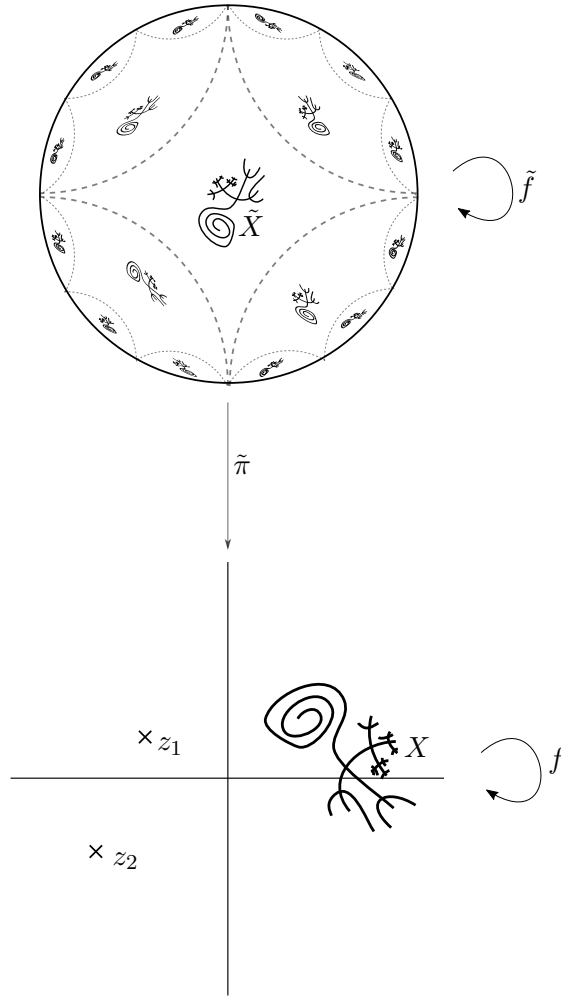


FIGURA 5. Ejemplo para $\#Y = 2$. Observar que basta que los fijos estén en la componente no acotada del complemento de X .

Corolario 3.10. *En el contexto del Teorema anterior, Si X separa el plano, entonces podemos asegurar que existe un punto de fijo de f , en $T(X)$.*

Demostración. Supongamos nuevamente por contradicción, que no existen puntos fijos de f en $T(X)$. Sabemos que $T(X)$ es un compacto conexo pues X lo es, y es relleno por definición. Basta **ver** entonces que $T(X)$ es un conjunto invariante, y aplicarle el Teorema que probamos recién. Sabemos que las componentes conexas del complemento se mandan por f unas en otras, pues X es invariante. Observando que f es un mapa propio por ser un homeomorfismo, tenemos que $f^{-1}(T(X))$ es un conjunto acotado, de donde la componente no acotada del complemento de X , que coincide con $T(X)^C$, es invariante. Pero entonces $T(X)$ es también invariante, lo que concluye la prueba. $\square$

El resultado que presentamos a continuación será un ingrediente de la demostración del Teorema 1.7, y es probado por Le Calvez en [LeC07]. En su demostración utilizamos la misma técnica que presentamos en el Teorema de Cartwright-Littlewood.

Lema 3.11. *Sea f un homeomorfismo del plano que preserva orientación, con un compacto invariante K . Sea U un entorno conexo de K . Entonces f tiene un punto fijo en $V = T(U \cup f(U))$.*

Demostración. Sabemos que f tiene al menos un punto fijo, por el Teorema 1.1. Supongamos por contradicción que ninguno de ellos está en $V = T(U \cup f(U))$. Tomemos $S = \mathbb{C} \setminus \text{Fix}(f)$. Dado que $\text{Fix}(f)$, es un cerrado invariante, podemos restringir f al subconjunto S . Observemos que $\text{Fix}(f)$ no separa K , puesto que $\text{Fix}(f) \subset V^C$, de donde f preserva la componente conexa de que contiene a K . Asumimos entonces, sin pérdida de generalidad, que S es conexo.

Tomamos entonces $\tilde{S}$ el cubrimiento universal de S , que es un plano. Dado que V es simplemente conexo, toda componente conexa de $\tilde{\pi}^{-1}(V)$ es homeomorfa a V . Por la misma razón, para cualquier levantado $\tilde{f} : \tilde{S} \rightarrow \tilde{S}$ de f , y $\tilde{V}$ cualquier componente conexa de $\tilde{\pi}^{-1}(V)$, tenemos que $\tilde{f}(\tilde{V})$ intersecta exactamente una componente conexa de $\tilde{\pi}^{-1}(V)$.

Por lo tanto, si $\tilde{K}$ es el levantado de K contenido en $\tilde{V}$, podemos tomar un levantado $\tilde{f}_0$ de f tal que $\tilde{f}_0(\tilde{V})$ solo intersecta $\tilde{V}$, teniendo entonces que $\tilde{f}_0(\tilde{K}) = \tilde{K}$. Por el Corolario 3.9, obtenemos que $\tilde{f}_0$ tiene un punto fijo, lo cual es una contradicción. $\square$

3.5. Aplicaciones: Cubrimientos ramificados de la esfera. Recordamos que el objetivo final de este trabajo es dar condiciones suficientes para que ciertos cubrimientos ramificados del plano tengan puntos fijos. Observemos que todo cubrimiento ramificado del plano se puede extender a la esfera fijando ∞ , puesto que estamos frente a mapas que son propios.

Daremos a continuación, un resultado sobre dinámica de cubrimientos ramificados de la esfera.

Observación 3.12. *Todo polinomio $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es un cubrimiento ramificado del plano, que se extiende de forma natural a la esfera $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, teniendo a ∞ como punto crítico fijo, totalmente invariante.*

Teorema 3.13. *Sea f un cubrimiento ramificado de grado d de la esfera, con $|d| > 1$. Supongamos que existe U simplemente conexo, tal que*

- $\overline{U}$ no tiene ningún valor crítico, y
- $f^{-1}(U) \subset U$.

Entonces f^k tiene al menos $|d|^k$ puntos fijos en U .

Demostración. Como f no tiene valores críticos en U , tenemos que $f^{-1}(U)$ tiene d componentes conexas $U_1, U_2, \dots, U_d$, cada una de ellas mapeándose por f homeomórficamente en U . Análogamente, $f^{-1}(U_1)$ tiene d componentes, $U_{11} \subset U_1, U_{12} \subset U_2; \dots; U_{1d} \subset U_d$ (y lo mismo para los demás $f^{-1}(U_j)$).

Razonando de la misma forma un montón de veces, tenemos que

$$\bigcap_{k \in \mathbb{Z}^+} f^{-k}(U) = K = \bigcup_{\alpha \in I} K_\alpha$$

es un *Cantor Gordo*, a saber:

- Tiene no numerables componentes conexas.
- Cada una de ellas es un compacto conexo, que no separa el plano.

Por como construimos el conjunto, tenemos que podemos indexar las componentes de forma que *se porten bien con la dinámica*: le podemos asociar de forma natural a cada componente, una sucesión de dígitos entre 1 y d , $S(k_\alpha) = \{a_1, \dots, a_n, \dots\}$, tal que $S(f(K_\alpha)) = \{b_n\}$, con $b_k = a_{k+1}$, para todo $k \geq 1$ (es decir, el mapa inducido en las sucesiones es el shift unilateral).

Supongamos primero que $d > 1$. Dado $k \geq 1$, tenemos que existen d^k componentes de K fijas para f^k (tantas como sucesiones k -periódicas por el shift). Más aún, en un entorno conexo suficientemente pequeño de cualquiera de estas componentes C , el mapa es un homeomorfismo local, que puede ser extendido a todo el plano. Aplicamos entonces el Teorema de Cartwright-Littlewood para obtener un punto fijo de ese mapa nuevo, situado en C . Tenemos entonces d^k puntos fijos, uno para cada una de las d^k componentes k -periódicas. Observando que éstos son también puntos fijos de f , puesto que los mapas que construimos eran extensiones del mapa original f , se concluye lo que buscamos.

Para el caso en el que $d < 1$, tenemos que f revierte orientación. Luego, para los iterados pares aplicamos el mismo razonamiento que usamos recién. Para los iterados impares razonamos de forma análoga, salvo que utilizamos el Teorema de Kuperberg (ver Teorema 1.3). $\square$

Observación 3.14. *Si tenemos un polinomio p en $\overline{\mathbb{C}}$, y las imágenes de los puntos críticos están fuera del Julia Relleno K , entonces podemos encontrar un entorno U de K suficientemente pequeño, que cumpla las hipótesis del*

Teorema 3.13, concluyendo así que p tiene la tasa. (Para el este caso dentro de los polinomios, se sabe además que el conjunto de Julia queda totalmente desconexo)

4. CUBRIMIENTOS DEL ANILLO

4.1. Porqué el anillo. Dedicaremos esta sección a resultados de dinámica de cubrimientos del anillo, que se usarán en las pruebas de los Teoremas 4.38 y 4.39. Estos Teoremas brindan condiciones suficientes para el crecimiento exponencial de órbitas periódicas en cubrimientos del anillo. En particular aseguran la existencia de puntos fijos, de donde serán fundamentales en las demostraciones de los resultados de la Sección 5: luego de construir *el buen dedazo* al cominezo de esa Sección, transformaremos un problema de cubrimientos ramificados del plano en uno de cubrimientos del anillo.

Observación 4.1. *Si X es un compacto conexo que no separa el plano, entonces por el teorema de clasificación de superficies tenemos que $\mathbb{C} \setminus X$ es un anillo abierto.*

Recordamos para esta Sección la definición de *grado* de un cubrimiento del anillo, a saber: la imagen del 1 por la acción inducida en el primer grupo de homología, $\mathcal{H}_1(A)$. A su vez, salvo mención explícita, tomaremos como anillo $A = \mathbb{S}^1 \times (0, 1)$, y como su cubrimiento universal al plano $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$.

Definición 4.2. *Sea A un anillo. Diremos que $X \subset A$ es inessential, si está conteido en un disco de A . En caso contrario, diremos que X es esencial.*

Comenzamos con un caso de juguete del Teorema del Teorema 4.38:

Proposición 4.3. *Sea f un cubrimiento del anillo, con un compacto conexo invariante K , que además es inessential. Entonces $\text{Fix}(f) = \emptyset$.*

Demostración. Sea $\tilde{A}$ el cubrimiento universal de A , que es un plano. Observemos que los levantados de K siguen siendo conexos al ser K inessential, luego basta tomar F un levantado de f que fije una de las componentes de $\tilde{K}$, y usar el Teorema 1.2 para obtener un punto fijo de F , que también es punto fijo de f . $\square$

Presentamos ahora herramientas de la Teoría de Nielsen para endomorfismos del anillo. Estos resultados se encuentran probados en [IPRX16.2].

4.2. Teoría de Nielsen.

Definición 4.4. *Sea $f : A \rightarrow A$ un endomorfismo. Para $p, q \in \text{Fix}(f)$, diremos que son equivalentes Nielsen si existe una curva γ de p a q tal que $f(\gamma)$ es homotópica a γ , a extremos fijos.*

Observación 4.5. *Recordemos que para un cubrimiento del anillo f de grado d , si F es su levantado al cubrimiento universal, entonces tenemos que $F(x + 1, y) = F(x, y) + (d, 0)$.*

Para puntos periódicos, diremos que son *equivalentes Nielsen* si lo son como puntos fijos de f^k , para algún $k \in \mathbb{Z}^+$. Si esto es cierto para algún iterado de f , entonces lo es para cualquier iterado que fije ambos puntos periódicos:

Lema 4.6. *Sean $p, q \in \text{Fix}(f)$, y γ de p a q tal que $f^k(\gamma) \sim \gamma$, para algún $k > 0$. Entonces $f(\gamma) \sim \gamma$.*

Demostración: Sea $\tilde{p}$ un levantado de p , y $\tilde{f}$ el levantado de f que fija p . Sea $\tilde{\gamma}$ el levantado de γ que empieza en $\tilde{p}$, y llamemos $\tilde{q}$ al otro extremo de $\tilde{\gamma}$. Si suponemos que $f(\gamma)$ no es homotópica a γ , entonces tenemos que $\tilde{f}(\tilde{q}) = \tilde{q} + l$, con $l \neq 0$. Pero entonces, por la Observación anterior, obtenemos que $\tilde{f}^k(\tilde{q}) = \tilde{q} + \sum_{i=0}^{k-1} l d^i \neq \tilde{q}$, de donde $\tilde{f}^k(\gamma)$ no puede ser homotópica a γ . $\square$

La *idea fuerza* de esta teoría es distinguir los puntos fijos de un mapa del anillo, dependiendo de cuánto están girando (o avanzando, si miramos un levantado de f en el cubrimiento universal.) Como todos los levantados de f son el mismo a menos de poscomponer con una transformación de cubrimiento (traslación horizontal), vemos que esta noción no depende del levantado de f que estemos tomando. Así:

Observación 4.7. *Dos puntos $p, q \in \text{Fix}(f)$ son equivalentes Nielsen sii para cualquier $\tilde{f}$ levantado de f , existen dos levantados $\tilde{p}, \tilde{q}$ de p y q respectivamente, tales que $\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{p} = \tilde{f}(\tilde{q}) - \tilde{q}$. -A saber, los puntos avanzan lo mismo en el levantado-.*

Observación 4.8. *Dado un levantado F del cubrimiento f , tenemos que todos los demás levantados $\tilde{f}$ se pueden escribir como $\tilde{f} = F + r$, con $r \in \mathbb{Z}$. Más aún, nos bastará tomar $1 \leq r \leq d-2$: en caso contrario, existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $F(\tilde{p}) - \tilde{f}(\tilde{p} - j) = j$ para todo $\tilde{p} \in \tilde{A}$, de donde F y $\tilde{f}$ son esencialmente el mismo levantado.*

Observación 4.9. *Si cambiamos el levantado que habíamos tomado de $\tilde{p}$ por $\tilde{p} + l$, por la Observación 4.5 tendremos que $\tilde{f}(\tilde{p} + l) = \tilde{f}(\tilde{p}) + ld$, de donde $\tilde{f}(\tilde{p} + l) - (\tilde{p} + l) = \tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{p} + l(d-1)$. De forma que esta diferencia está bien definida módulo $(d-1)$.*

Obtenemos entonces lo siguiente:

Corolario 4.10. *$p, q \in \text{Fix}(f)$ son equivalentes Nielsen sii, para cualquier levantado de f , se tiene que $\tilde{f}(\tilde{p}) - \tilde{p} \equiv \tilde{f}(\tilde{q}) - \tilde{q} \pmod{(d-1)}$.*

Corolario 4.11. *Si f es un mapa de grado d , entonces existen $|d-1|$ clases de Nielsen realizables por puntos fijos de f .*

Razonando de la misma forma, y viendo los puntos periódicos de período k como fijos de f^k , tenemos que tienen $|d^k-1|$ posibles clases de Nielsen. Observemos que una clase de Nielsen puede tener puntos de distintos períodos. En estas condiciones tenemos que:

Definición 4.12. *El período de una clase de Nielsen es el menor de los períodos de los puntos periódicos que la integran*

Así, llamaremos $N_k(f)$ al cardinal del conjunto de clases de Nielsen de período k . Introducimos ahora una noción que será clave en lo que resta de la Sección.

Definición 4.13. *Sea f un cubrimiento del anillo, de grado d . Diremos que f es completa si $N_k(f) = N_k(m_d)$, para todo k entero positivo.*

Si bien la cantidad de clases de Nielsen de período k resulta molesta de calcular aún para el mapa z^d , lo que sí sabemos es que dado un entero k , la suma de los cardinales de las clases de Nielsen de períodos divisores de k es igual a la cantidad de clases de Nielsen de puntos fijos para $m_d^k = m_{d^k}$, a saber, $|d^k - 1|$. En este sentido, el siguiente lema allana el terreno:

Lema 4.14. *f es completa sii $N_1(f^j) = N_1(m_d^j)$, para todo j entero positivo.*

Demostración: El directo se deduce de la definición de completitud para f . Para el recíproco, asumimos que $N_1(f^j) = N_1(m_d^j)$ para todo j , y procedemos por inducción. Tenemos de forma automática que $N_1(f) = N_1(m_d)$. Supongamos entonces que $N_k(f) = N_k(m_d)$ para todo $k < k_0$, y veamos que $N_{k_0}(f) = N_{k_0}(m_d)$. Para ello, basta observar que

$$\sum_{k|k_0} N_k(f) = N_1(f^{k_0}) = N_1(m_d^{k_0}) = \sum_{k|k_0} N_k(m_d),$$

lo que -recordando la hipótesis inductiva- concluye la demostración. $\square$

Corolario 4.15. *Si f es completa, tenemos que f^k tiene al menos $|d^k - 1|$ puntos fijos. En particular, f tiene la tasa.*

La completitud de un mapa f , no solo nos dice que f^k tiene tantos puntos fijos como m_d^k en el círculo, sino que además establece que tenemos un punto fijo para cada posible número de rotación (es decir, para todo $k \geq 1$, $j \in [0, \dots, d^k - 2]$, y $\tilde{f}_k$ levantado de f^k , se cumple que existe un punto $(x, y) \in \tilde{A}$ tal que $F_k(x, y) = (x, y) + (j, 0)$). Más aún, esta última noción, además de ser mucho más cómoda de trabajar, es equivalente a la completitud del mapa:

Lema 4.16. *f es completa sii para todo levantado $\tilde{f}_k$ de f^k , se tiene que $\text{Fix}(\tilde{f}) \neq \emptyset$.*

Demostración: Sea f un mapa del anillo, y tomemos F un levantado cualquiera de f al cubrimiento universal. Observemos que F^k es un levantado de f^k .

Sabemos que f es completa si y solamente si tenemos al menos un punto fijo para cada clase de Nielsen y cada potencia de f , es decir, para cada k entero positivo y j entre 0 y $d^k - 2$, existe un punto $\tilde{q}$ en el cubrimiento universal tal que $F^k(\tilde{q}) - \tilde{q} = j$. Solo resta observar que cualquier levantado $\tilde{f}_k$ de f^k se puede ver como $\tilde{f}_k(\tilde{q}) = F^k(\tilde{q}) - j$, lo cual concluye la prueba. $\square$

Observemos que puede ocurrir que f no sea completa, pero que exista k_0 para el cual $N_k(f) > N_k(m_d)$. (Para que esto se cumpla, necesariamente tiene que existir k' divisor de k tal que $N_{k'}(f) > N_{k'}(m_d)$). Mostramos al final de esta sección un ejemplo de esto (4.43), que puede ser encontrado en [IPRX16.2].

4.3. Semiconjugaciones. Los resultados intermedios que daremos a continuación, son ingredientes de la demostración del Teorema 4.38.

Lema 4.17. *Sea f un mapa del anillo abierto, de grado d , con $|d| > 1$, K un compacto invariante para f , $\tilde{\pi}$ la proyección desde el cubrimiento universal, y $\tilde{K} = \tilde{\pi}^{-1}(K)$. Sea además F un levantado de f al cubrimiento universal. Entonces existe $H_F : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$H_F \circ F(x, y) = d \cdot (H_F(x, y)).$$

Esto es, H_F semiconjuga la dinámica por F , con la del mapa $x \mapsto dx$ en $\mathbb{R}$.

Demostración. Sea X el espacio de los mapas H de $\tilde{K}$ en $\mathbb{R}$ que cumplen que $H(x+1, y) = H(x, y) + 1$. Tomando como métrica la distancia del supremo $\delta(H, H') = \{\sup_{\tilde{k} \in \tilde{K}} |H'(\tilde{k}) - H(\tilde{k})|\}$, y recordando que la intersección de $\tilde{K}$ con un dominio fundamental es un conjunto compacto del cubrimiento universal, tenemos que la distancia entre dos operadores H, H' queda bien definida, y que además el espacio X es completo con esta métrica.

Definamos ahora el operador Φ de la siguiente manera:

$$(\Phi(H))(x, y) = \frac{H(F(x, y))}{d}$$

Afirmamos que Φ va de X en X . En efecto, si $h \in X$, entonces

$$\begin{aligned} \Phi(H(x+1, y)) &= \frac{H(F(x+1, y))}{d} = \frac{H(F(x, y) + (d, 0))}{d} \\ &= \frac{H(F(x, y)) + d}{d} = \frac{H(F(x, y))}{d} + 1 = \Phi(H(x, y)) + 1. \end{aligned}$$

Para probar el Lema, necesitamos encontrar un punto fijo del operador Φ . Para ello basta observar que por como definimos la distancia entre dos mapas H, H' , tenemos que $\delta(\Phi(H), \Phi(H')) \leq \delta(H, H')/d$, de donde el operador Φ es una contracción, que tiene un (único) punto fijo, que será nuestro H_F . $\square$

Observación 4.18. *Por la compacidad de la intersección de $\tilde{K}$ con cualquier dominio fundamental, y puesto que $H_F \in X$, tenemos que*

$$\sup\{H(x, y) - x : (x, y) \in \tilde{K}\} < \infty.$$

Demostración. Basta ver que el supremo en cuestión está acotado en un dominio fundamental al ser H Continua en un compacto, y luego utilizar $H(x+1, y) = H(x, y) + 1$ para ver que esa cota funciona como supremo en todo $\tilde{K}$. $\square$

Observación 4.19. *El mapa H_F codifica la velocidad con la que los puntos de $\tilde{K}$ se van a uno de los fines del cubrimiento universal, es decir:*

$$H_F(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1(F^n(x, y))}{d^n}.$$

Demostración. Usando la construcción del Lema 4.17, tenemos para todo n entero positivo que

$$H(x, y) = \frac{H(F^n(x, y))}{d^n}.$$

Con la Observación 4.19, tenemos que $|H(F^n(x, y)) - \pi_1(F^n(x, y))| < M$, de donde dividiendo entre d^n tenemos que

$$H(x, y) - \frac{\pi_1(F^n(x, y))}{d^n} < \frac{M}{d^n}, \quad \forall n \geq 1,$$

lo que concluye la prueba. $\square$

Una vez más, teniendo en cuenta que H_F vive en X , podemos pasarlo al cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$, y obtener lo siguiente:

Corolario 4.20. *Sea f un mapa del anillo abierto, de grado d , con $|d| > 1$, y K un compacto invariante para f . Entonces el mapa $h : A \rightarrow \mathbb{S}^1$ definido como la proyección al cociente del mapa H_F , cumple*

$$h \circ f(k) = m_d \circ h(k),$$

para todo $k \in K$.

Observación 4.21. *Si el cubrimiento f es del anillo cerrado, entonces podemos tomar $K = \bar{A}$ y tenemos automáticamente una semiconjugación global con m_d . Por otro lado, existen ejemplos en el anillo abierto donde no puede existir tal semiconjugación (ver Ejemplo 4.44).*

Damos a continuación otro ingrediente de la prueba del Teorema 4.38:

Lema 4.22. *Sea g un cubrimiento del anillo abierto, K un compacto invariante para g . Entonces existe g' un cubrimiento del anillo cerrado $\bar{A}$, tal que $g|_K = g'|_K$.*

La prueba de este Lema se apoya en dos hechos: la compacidad de K , y el Teorema de Jordan-Schönflies para curvas cerradas simples del plano (ver [ChK15]).

Demostración. Tomemos G levantado de g al cubrimiento universal $\tilde{A}$ del anillo A , y sea $\tilde{K}$ levantado de K .

Al igual que en la prueba del Lema anterior, la compacidad de K implica que la intersección de $\tilde{K}$ con un dominio fundamental es un conjunto compacto, de donde tomando $\tilde{A} \simeq \mathbb{R} \times [0, 1]$, sabemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\tilde{K} \subset V_\varepsilon$, siendo $V_\varepsilon = \{(x, y) \in \tilde{A} : \varepsilon < y < 1 - \varepsilon\}$.

Tomando $\tilde{\tilde{A}} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ el cubrimiento universal del anillo cerrado, afirmamos que existe un mapa G' de $\tilde{\tilde{A}}$ en sí mismo, que satisface:

- $G'(x, y) = G(x, y)$ si $\varepsilon \leq y \leq 1 - \varepsilon$.
- $G'(x + 1, y) = G'(x, y) + (d, 0)$,
- $G'(x, 0) = (dx, 0)$,
- $G'(x, 1) = (dx, 1)$,

Sea R el rectángulo definido por $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \varepsilon$. Por la primera propiedad que le pedimos a G' , basta definirla en R y luego extenderla al resto de la franja horizontal usando la segunda propiedad. Análogamente la definimos en la franja con $1 - \varepsilon \leq y \leq 1$. Las últimas dos propiedades nos dicen como está definida G' en los dos bordes horizontales de R , pasamos ahora a definirla en los dos bordes verticales (basta definirla solo en el de la izquierda: $x = 0$.)

Tomemos $G'(0, 0) = (0, 0)$, $G'(0, \varepsilon) = G(0, \varepsilon)$ y elijamos $\tilde{\gamma}$ una curva simple que una estos dos puntos, y que sea disjunta del conjunto $G'(y = \varepsilon)$. Definamos luego G' en el borde de la derecha, para satisfacer la segunda de las cuatro propiedades. Tenemos entonces un mapa G' que envía el borde del rectángulo R , en una curva cerrada simple. Usando el Teorema de Jordan-Schönflies, sabemos que existe un homeomorfismo H que envía la clausura de la componente acotada del complemento de R , en la clausura de la componente acotada de su imagen, y tal que $H|_{\partial R} = G'|_{\partial R}$ (completamos G' al interior de R). Definiendo $G' = H$ en R , concluimos la prueba. $\square$

Dividiremos la prueba del Teorema 4.38 dependiendo de si el cubrimiento f preserva o revierte orientación. Observemos antes lo siguiente:

Lema 4.23. *Si f es un cubrimiento del anillo de grado d , F es un levantado de f al cubrimiento universal, y $H_F : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ la semiconjugación construida como en el Lema 4.17, entonces*

$$H_{F+1}(x, y) = H_F(x, y) + \frac{1}{d-1}.$$

Demostración. Recordando la observación 4.19, basta probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi_1((F+1)^n(x, y))}{d^n} - \frac{\pi_1(F^n(x, y))}{d^n} = \frac{1}{d-1}.$$

Definamos entonces $a_n(x, y) = \pi_1(F^n(x, y))$, $b_n = \pi_1((F+1)^n(x, y))$. Fijemos $(x, y) = \tilde{K}$. Tenemos por definición que $b_0 = a_0$, $b_1 = a_1 + 1$. Luego, usando que $F((x, y) + (1, 0)) = F(x, y) + (d, 0)$, tenemos que $b_2 = \pi_1((F+1)^2(x, y)) = \pi_1(F(F+1)(x, y)) + 1 = \pi_1(F^2(x, y) + (d, 0)) + 1 = a_2 + (d + 1)$. Razonando de forma inductiva, obtenemos que $b_{n+1} - a_{n+1} = d(b_n - a_n) + 1$, de donde $b_n = a_n + d^{n-1} + \dots + d + 1$. De esta manera,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - a_n}{d^n} = \frac{d^{n-1} + \dots + d + 1}{d^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d^n}{(d-1)d^n} = \frac{1}{d-1},$$

que es lo que queríamos probar. $\square$

Por comodidad, introducimos la siguiente notación:

Definición 4.24. Sea f un cubrimiento del anillo F un levantado de f al cubrimiento universal. Llamaremos

$$\rho_F(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_1(F^n(x, y))/d^n,$$

el número de rotación de (x, y) para F . Observemos que este número de está bien definido para f , módulo $(1/(d-1))$.

Lema 4.25. Si f preserva orientación, y F es un levantado de f tal que $H^{-1}(0) \neq \emptyset$, entonces $\text{Fix}(F) \neq \emptyset$.

Demostración. Comencemos por observar que, dado que f es un cubrimiento, tenemos que F es un homeomorfismo, puesto que $\tilde{A}$ es el cubrimiento universal (ver [Hat02]). Siendo que f preserva orientación, tenemos que $F : \tilde{A} \rightarrow \tilde{A}$ también lo hace. Siendo que $\tilde{A}$ es un plano, basta encontrar un compacto invariante para F , y concluir usando el Teorema 1.1.

Sabemos que $H^{-1}(0)$ es un cerrado invariante para F pues es la preimagen de un punto fijo por el mapa H . Para ver que es compacto recordemos la Observación 4.18, que nos dice que $H^{-1}(0)$ está acotado en la *dirección horizontal* de $\tilde{A}$. La compacidad de K en A nos permite afirmar que existe ϵ tal que $\tilde{K} \subset \{(x, y) \in \tilde{A} : \epsilon \leq y \leq 1 - \epsilon\}$, de donde $\tilde{K}$ también está acotado verticalmente, por lo que es compacto. $\square$

Observación 4.26. Por el Corolario 3.10, el punto fijo que encontramos en el Lema 4.25 pertenece a $T(K)$, pero no necesariamente vive en K (ver la construcción Teorema del 1.2).

Lo que hemos probado hasta ahora puede reescribirse así:

Observación 4.27. Si f tiene un compacto invariante K , y F es un levantado de f para el cual existe $\tilde{k} \in \tilde{K}$ con número de rotación nulo, entonces $\text{Fix}(F) = 0$.

Observemos que la hipótesis de existencia del compacto invariante es *necesaria* (ver Ejemplo 4.40).

Lema 4.28. Si f tiene un continuo esencial invariante K , entonces para cualquier F levantado de f , la semiconjugación asociada H es sobreyectiva.

Demostración. Sea $(x, y) \in \tilde{K}$. Por la construcción de la semiconjugación H en el Lema 4.17, tenemos que

$$H((x, y) + (1, 0)) = H(x, y) + 1. \quad (1).$$

Sea $h : K \rightarrow \mathbb{S}^1$ la proyección al cociente del mapa H (ya vimos que baja). Tomemos U un pequeño entorno de K , que contiene curvas no triviales en A puesto que K es esencial, y extendamos el mapa h a una función $h_U : U \rightarrow \mathbb{S}^1$ continua en todo el entorno. Notemos ahora que, debido a (1), el mapa h_U tiene grado 1. Tomando entonces γ una curva no contractible en U , tenemos que $h_U|_\gamma$ es sobreyectiva, puesto que es continua y tiene grado 1. Eligiendo $\{U_n\}$ una sucesión de ϵ -entornos de K con $\epsilon \rightarrow 0$, tomando $h_{U_n} = h_{U_1}$, y γ_n

curvas como recién, tenemos que $h_{U_n}|_{\gamma_n}$ es también sobreyectivo. Escribamos $h = h_{U_1}$ para simplificar la notación.

Dado $x \in \mathbb{S}^1$, basta tomar $x_n \in \gamma_n$ tal que $h(x_n) = x$. Luego, tomemos una subcesión de $\{x_n\}$ convergente a un punto $k \in K$. Por continuidad, tenemos que $h(k) = x$, de donde $h|_K$ es sobreyectivo. Usando nuevamente (1), tenemos que $H : K \rightarrow \mathbb{R}$ es también sobreyectivo. $\square$

Tenemos todo lo necesario para Demostración del Teorema 4.38, para el caso en el que f preserva orientación; presentamos a continuación las herramientas para el caso en el que revierte.

4.4. Conectores.

Definición 4.29. *Un subconjunto C de un anillo A es un conector si es cerrado, conexo, y acumula en ambas componentes de la frontera de A . Diremos que un conector es trivial cuando no es esencial.*

Observación 4.30. *La preimagen de un conector trivial por un cubrimiento f del anillo, de grado d , son d conectores triviales disjuntos.*

Demostración. Al ser C trivial, podemos incluirlo en un disco U , y obtenemos que $f^{-1}(U)$ son d discos disjuntos $U_1, \dots, U_d$, cada uno de ellos conteniendo una preimagen de C , que tiene que ser un conector trivial puesto que $f|_{U_i}$ es un homeo. $\square$

Lema 4.31. *Exactamente una de las componentes conexas del complemento de un conector trivial C , puede contener conectores.*

Demostración. La existencia se debe a que el conector es trivial: basta ver que podemos incluir C en un disco D y encontrar un conector en su complemento, que contiene al complemento de C .

Para ver la unicidad, basta observar que C es un conjunto conexo: supongamos que dos componentes diferentes del complemento de C tuvieran conectores C_1 y C_2 . Entonces tendríamos que el complemento de $C_1 \cup C_2$ tiene dos componentes conexas, y C tendría puntos en las dos, lo cual contradice la conexión. $\square$

En este contexto, dado un conector C , le llamaremos *componente grande* a la componente de C que contiene conectores.

Definición 4.32. *Dado un cubrimiento f del anillo, diremos que un conector trivial C es libre si $f(C) \cap C = \emptyset$.*

Definición 4.33. *En el mismo contexto, diremos que C es repulsor si*

- . *es invariante por f ,*
- . *existe un entorno U de C tal que $\overline{U} \subset f(U)$,*
- . *todo punto de U tiene una preórbita que converge a C .*

Probaremos ahora el siguiente Lema, que puede ser encontrado en [IPRX16.3]:

Lema 4.34. *Si f es un cubrimiento del anillo, de grado d , con un conector trivial libre, entonces existen $|d - 1|$ conectores repulsivos (en particular invariantes).*

Demostración. Por la Observación 4.30, tenemos que $f^{-1}(C)$ son d conectores triviales disjuntos, a los que llamaremos $C_1, \dots, C_d$ (las tomamos ordenadas de forma anti-horaria). Luego, llamemos D_i a la componente conexa del complemento de $\bigcup_{1 \leq k \leq d} C_k$, cuyo borde tiene puntos de C_i y C_{i+1} (tomamos $C_{d+1} = C_1$). Por el Lema 4.31, tenemos que $\bigcup_{1 \leq k \leq d} D_k$ es igual a la intersección de las *componentes grandes* del complemento de cada uno de los conectores C_i .

Observemos ahora que, como $C_i \cap C = \emptyset$ para todo i , tenemos que C está contenido en algunos de los D_i (asumamos $i = d$ por comodidad). Además, para todo $i : 1 \leq i \leq d$, tenemos que $f(D_i) = A \setminus C$, de donde $\overline{D_i} \subset f(D_i)$, para todo $i \leq d - 1$. Encontraremos ahora un conector invariante adentro de cada una de estas componentes. Para ello, tomemos $D_i^n = \bigcap_{0 \leq k \leq n} f^{-k}(\overline{D_i})$, y luego definamos D_i^* como $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} D_i^n$. Tenemos que D_i^* cumple las siguientes propiedades:

- . Es un cerrado conexo por ser una intersección decreciente de cerrados conexos,
- . Contiene un conector: dado que D_i^n contiene un conector para todo n , podemos tomar una intersección encajada de conectores,
- . Cumple que $f(D_i^*) = D_i^*$.

Esto concluye la prueba para el caso en el que d es positivo. Supongamos ahora que d es negativo, y tomemos $d' = -d$.

Tomemos entonces uno de los conectores invariantes que nos da la construcción que hicimos recién, y llamémosle C_1 . Necesitamos otros d' conectores invariantes para concluir la prueba. Sabemos que $f^{-1}(C_1)$ son d' conectores triviales, a los que llamaremos $C_1, \dots, C_{d'}$ (también ordenadas en sentido anti-horario). Razonando como en la parte anterior, tenemos d' componentes conexas del complemento de la unión de los C_i , que contienen conectores, llamemos D_i a estas componentes, con $1 \leq i \leq d'$. Tenemos que, si $2 \leq i \leq d' - 1$, entonces $C_1 \notin \overline{D_i}$ (ver Figura 6), de donde, usando la misma construcción de recién, podemos encontrar un conector invariante en D_i . Tenemos hasta ahora $d' - 1$ conectores invariantes: C_1 más los $d' - 2$ que acabamos de construir. Nos faltan dos.

Para resolver esto, encontraremos un conector invariante en el interior de D_1 (análogamente hay otro en el interior de $D_{d'}$). Observemos que $f(D_1)$ contiene a D_1 , pero no así a $\overline{D_1}$. Pero ahora, como el grado d es *negativo*, tenemos que la clausura de $f^{-1}(D_1) \cap D_1$ no contiene a C_1 (puesto que $f^{-1}(D_1) \cap D_1$ está incluido en un pequeño entorno de C_2 . Intersectando

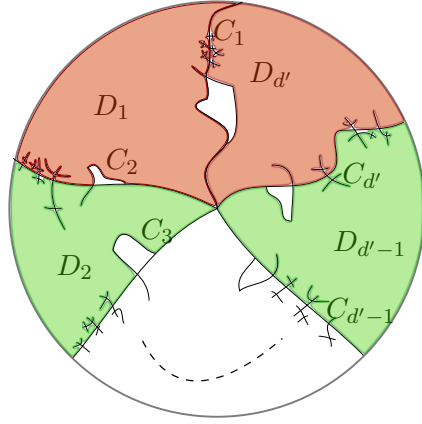


FIGURA 6. Cada uno de los $d' - 2$ discos en verde contiene un conector repulsor

preimágenes como hicimos antes, encontramos los dos conectores invariantes que faltan, teniendo en total $d' + 1 = |d - 1|$, como queríamos. $\square$

Lema 4.35. *Sea f un cubrimiento del anillo, de grado d , y $h : A \rightarrow \mathbb{S}^1$ una semiconjugación global entre f y m_d . Entonces, para todo $z \in \mathbb{S}^1$, existe un conector trivial contenido en $h^{-1}(z)$.*

Demostración. Comencemos tomando $X = A \cup \{N, S\}$ la compactificación del anillo agregando sus dos fines. Sabemos que X es una esfera. Consideraremos en lo que viene, la métrica esférica en X .

Notemos que gracias a la semiconjugación, sabemos que $h^{-1}(z)$ es un conjunto cerrado de A . Lo que buscamos equivale a probar que $K = h^{-1}(z) \cup \{N, S\} \subset X$ contiene un *conector*, a saber, una componente conexa que contiene tanto a N como a S .

Como K es un compacto de X , podemos tomar una sucesión de cubrimientos finitos $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de tal forma que:

- . Cada elemento de $\mathcal{U}_n$ es un disco,
- . $\mathcal{U}_{n+1}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}_n$ (a saber, para todo $U \in \mathcal{U}_{n+1}$, existe $V \in \mathcal{U}_n$ tal que $U \subset V$),
- . La distancia de K al complemento de la unión de los elementos de $\mathcal{U}_n$ es menor o igual que $1/n$.

Sea K_n la unión de los elementos de $\mathcal{U}_n$. Sabemos que si K contiene un conector, entonces todos los K_n también lo contienen. Para el recíproco, supongamos que todos los K_n contienen un conector. Como cada uno de los K_n tiene finitas componentes, podemos tomar una sucesión encajada de conectores $C_n \subset K_n$. Luego, tenemos que $C = \bigcap_{n \geq 0} C_n$ es un conector

contenido en K .

Supongamos que K no tuviera un conector. En ese caso, existe n tal que K_n tampoco contiene un conector. Observemos que K_n es la unión de

finitos discos. Como K_n no contiene un conector, tenemos que la componente conexa de K_n que tiene a S , y la que tiene a N (de nombre K_n^S, K_n^N) son diferentes. Tenemos entonces que $X \setminus \{K_n^S, K_n^N\}$ es un anillo A' . Por último $A' \setminus K_n$ es un anillo menos finitos discos, de donde podríamos tomar una curva $\gamma \subset A$ que no fuera contractible en el anillo A , y tal que $\gamma \cap h^{-1}(z) = \emptyset$. Pero esto es una contradicción, puesto que $h(\gamma) = \mathbb{S}^1$ (recordemos que la semiconjugación h tiene grado 1). $\square$

Corolario 4.36. *Si f es un cubrimiento del anillo, y h es una semiconjugación entre f y m_d , entonces existe un conector trivial invariante en $h^{-1}(1)$ (y análogamente para la preimagen por h de cualquier punto fijo de m_d).*

Demostración. Por el Lema 4.35, sabemos que $h^{-1}(1)$ contiene un conector C . Observemos que es trivial puesto que las preimágenes por h de los demás puntos de $\mathbb{S}^1$ también tienen conectores (si C no fuera trivial separaría el anillo).

Gracias a la semiconjugación, tenemos que o bien C es invariante ($f(C) \subset C$) y concluimos la prueba, o bien $f(C)$ está incluido en otra de las componentes conexas de $h^{-1}(1)$. En ese caso C es libre, por lo que el Lema 4.34 nos asegura que existe un conector invariante en $h^{-1}(1)$, que es lo que queríamos probar $\square$

Recordemos que, para el caso del anillo cerrado, podemos tomar como compacto invariante $K = \overline{A}$, y tenemos conjugación global de forma automática. Tenemos además la siguiente consecuencia del Lema 4.35.

Corolario 4.37. *Si f es un cubrimiento del anillo cerrado, y h es una semiconjugación global entre f y m_d , entonces para todo $z \in \mathbb{S}^1$, se tiene que $h^{-1}(z)$ es un conector trivial que no separa el anillo.*

Demostración. Sea $z \in \mathbb{S}^1$, $X = h^{-1}(z)$. Por el Lema anterior, sabemos que $h^{-1}(z)$ contiene un conector trivial. Probaremos entonces que es conexo, y que no separa el anillo. Recordemos que, por la construcción del Lema 4.17, la semiconjugación h viene del pasaje al cociente de una semiconjugación del cubrimiento universal del anillo a $\mathbb{R}$. La clave para las dos propiedades que queremos probar está en la Observación 4.19.

La existencia de un conector en la preimagen de cada punto por la semiconjugación, implica que X no separa los fines del anillo. Supongamos ahora que existe una componente acotada del complemento de X , a la que llamaremos U . Tomando $\tilde{X}$ un levantado de X al cubrimiento universal, podemos tomar $\tilde{U}$ levantado de U , componente acotada del complemento de $\tilde{X}$. La Observación 4.19 nos dice que la tasa exponencial de escape de los puntos de $\tilde{X}$ es congruente con z , módulo 1. Como F es un homeomorfismo del cubrimiento universal de $\overline{A}$, tenemos que todos los puntos de $\tilde{U}$ tienen la misma velocidad de escape que los de $\tilde{U}$, de donde $U \subset h^{-1}(z)$, por lo que X es relleno. Razonando de forma análoga, podemos ver que X es también conexo, lo que concluye la prueba. $\square$

4.5. Teoremas de completitud. Queremos probar dos resultados que brindan condiciones suficiente para la completitud de cubrimientos del anillo (ver Definición 4.13). y que son ingredientes fundamentales en la Sección 5. Recordemos que, por el Corloario 4.15, si f es completa entonces f^n tiene al menos $d^n - 1$ puntos fijos (y en particular tiene *la tasa*).

Teorema 4.38 (Iglesias, Portela, Rovella, Xavier, 2016.). *Sea f un cubrimiento del anillo de grado d , con $|d| > 1$, con un compacto conexo esencial invariante.*

Entonces f es completa. Además, f^n tiene al menos $|d^n - 1|$ puntos fijos en $T(K)$.

Teorema 4.39 (Iglesias, Portela, Rovella, Xavier, 2016). *Sea f un cubrimiento del anillo que preserva orientación, de grado d , con $|d| > 1$, tal que existe un compacto totalmente invariante.*

Entonces f es completa.

Para simplificar la notación, dado un cubrimiento f del anillo con un compacto invariante K :

- . F será un levantado al cubrimiento universal,
- . $\tilde{K}$ el levantado de K ,
- . H_F la semiconjugación asociada al levantado F . Cuando no exista ambigüedad sobre qué levantado $\tilde{f}$ del cubrimiento f estmaos tomando, escribiremos $H = H_F$.

El Teorema 4.38. Separamos la prueba del Teorema en dos casos, dependiendo de si el cubrimiento f preserva o revierte orientación.

Caso 1: f preserva orientación. Debido al Lema 4.16, basta probar que todo levantado de f^n tiene un punto fijo, para cualquier n entero positivo. Observando que K es un continuo esencial invariante para f^n , podemos usar el Lema 4.28 para ver que $H_{F_n} : \tilde{K} \rightarrow \mathbb{R}$ es sobreyectivo para todo levantado F_n de f^n . En particular, $H_{F_n}^{-1}(0) \neq \emptyset$, de donde por el Lema 4.25 tenemos que F_n tiene al menos un punto fijo, lo que concluye la demostración. $\square$

Caso 2: f revierte orientación. Separaremos la demostración en dos sub-casos.

2.A. f preserva los fines del anillo A . Nuevamente usaremos el Lema 4.16, y probaremos que todo levantado de f^n tiene un punto fijo.

Observemos que, si n es par, entonces f^n preserva orientación y estamos en el caso 1. Para n impar, tomando F_n levantado de f^n , tenemos que es un homeomorfismo del plano $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$, que revierte orientación, y fija los fines superior e inferior de $\tilde{A}$. Por el Lema 4.22, podemos extender F_n a un homeomorfismo del mismo nombre, de la banda cerrada $\bar{\tilde{A}} = \mathbb{R} \times [0, 1]$ preservando la dinámica en $\tilde{K}$. Extendemos luego este homeomorfismo a la

compactificación $X = \bar{\tilde{A}} \cup \{-\infty, \infty\}$, que es un disco cerrado. Siendo que F_n preserva los fines y revierte orientación, tenemos que F_n intercambia los puntos $-\infty, \infty$.

Extendemos ahora el homomorfismo F_n del disco cerrado X a todo el plano $\mathbb{C}$. Observemos que, si bien $\tilde{K}$ puede no ser conexo como subconjunto de $\tilde{A}$, tenemos que $\bar{K} = \tilde{K} \cup \{-\infty, \infty\}$ es un compacto conexo como subconjunto de X (de hecho es arcoconexo: todo par de puntos puede unirse por un camino que pasa por ∞). Por el Teorema 1.3, tenemos un punto fijo en el continuo invariante $\bar{K}$, y sabemos que no es $-\infty$ ni ∞ , de donde tiene que pertenecer a $\tilde{K}$, lo cual concluye la demostración. $\square$

2.B. f intercambia los fines del anillo A . Procediendo de forma análoga al caso anterior, podemos usar el Lema 4.22 para modificar f en un entorno de los fines, de forma de poder extenderlo a un cubrimiento del mismo nombre del anillo cerrado $\bar{A}$, que intercambie las componentes de borde, y deje intacta la dinámica en K . Observemos que, como f intercambia las componentes de borde, podemos efectuar esta modificación sin cambiar el conjunto de puntos fijos de f .

Ahora, tomando $\bar{A} = K$, usamos el Lema 4.17 para construir una semi-conjugación global h entre f y m_d . Por el Lema 4.35, tenemos al menos un conector trivial invariante en la preimagen de cada uno de los $d - 1$ puntos fijos de m_d . Luego, debido a la semiconjugación, tenemos que cualquier levantado F de f tiene que dejar invariante una componente del levantado de alguno de estos conectores.

Extendiendo F a un homeomorfismo de todo el plano, tenemos por el Teorema 1.3 que F tiene un punto fijo en esa componente. Aplicando este razonamiento para todas las potencias impares de f , y el Caso 1. para las potencias pares, obtenemos el resultado buscado. $\square$

El Teorema 4.39. La demostración de este Teorema utiliza varios de los argumentos que usamos para la demostración del Teorema 4.38

Demostración del Teorema 4.39: Sea K el compacto totalmente invariante para f , esto es, $f^{-1}(K) = K$. Debido al Lema 4.17, sabemos que tenemos una semiconjugación de $h : K \rightarrow \mathbb{S}^1$ tal que $h \circ f = m_d \circ h$.

Por el Lema 4.25, si probamos que esta semiconjugación es sobreyectiva, entonces cualquier levantado F de f al cubrimiento universal tendrá puntos fijos, de donde podremos deducir que f es completa, usando el Lema 4.16.

Sea $X = h(K)$. Afirmamos que, si probamos que $X = m_d^{-1}(X)$, tenemos lo que buscamos. En efecto, iterando hacia atrás el mapa m_d , obtenemos que X es denso en $\mathbb{S}^1$, pero además es un conjunto cerrado, por lo que debe ser todo el círculo. Probemos esta igualdad entre conjuntos, que se debe básicamente al hecho de que h semiconjuga los mapas.

$$\begin{array}{ccc}
\tilde{K} & \xrightarrow{f} & \tilde{K} \\
\downarrow h & & \downarrow h \\
\mathbb{S}^1 & \xrightarrow{m_d} & \mathbb{S}^1
\end{array}$$

1. $X \subset m_d^{-1}(X)$. Sea $x \in X$. Entonces $h^{-1}(x) \in K$. Por definición, tenemos que $x = h(k)$, para algún $k \in K$. Luego, la semiconjugación nos dice que

$$m_d(x) = m_d \circ h(k) = h \circ f(k).$$

Como K es invariante $f(k) = k' \in K$, de donde $m_d(x) = h(k') \in h(K) = X$, por lo que $x \in m_d^{-1}(X)$.

2. $m_d^{-1}(X) \subset X$. Afirmamos en primer lugar que, si $k^1 \neq k^2$, pero $f(k^1) = f(k^2) = k$, entonces $h(k^1) \neq h(k^2)$. Para ello, vayamos al cubrimiento universal, tomemos F levantado de f , $\tilde{k}_0$ levantado de k , y sean $\tilde{k}_i = \tilde{k}_0 + (i, 0)$, con $1 \leq i \leq d-1$. Sabemos entonces que las d preimágenes de k son las proyecciones por el cubrimiento de los puntos $F^{-1}(\tilde{k}_i)$. Ahora, recordando la Observación 4.19, tenemos que $h(F^{-1}(\tilde{k}_i)) = h(F^{-1}(\tilde{k}_0)) + i/d$, que prueba nuestra afirmación.

Tomemos ahora $x \in h(K)$, y veamos que $m_d^{-1}(x) \in h(K)$. Para ello, tomemos $k \in K$ tal que $x = h(k)$. Luego, sean $k^1, \dots, k^d$ las d preimágenes por f del punto k . Sabemos que $\{k^1, \dots, k^d\} \subset K$ puesto que K es totalmente invariante. Por último, usamos la afirmación que hicimos recién para ver que $h(k^1), \dots, h(k^d)$ son d puntos diferentes de $\mathbb{S}^1$, tales que se mandan a x por el mapa m_d , debido a la semiconjugación. Concluimos la demostración observando que el cardinal de $m_d^{-1}(x)$ también es igual a d .

Sea $q \in m_d^{-1}(X) = m_d^{-1}(h(K))$. Entonces q es la imagen por h . $\square$

4.6. Ejemplos y contraejemplos. Dedicaremos esta Subsección a dar ejemplos que ilustren la dinámica de cubrimientos del anillo. Los primeros cuatro pueden ser encontrados en [IPRX16.2]. El último que veremos, publicado en [IPRX16.3], muestra que para un cubrimiento del anillo abierto de grado d , con $|d| > 1$, la semiconjugación global con m_d no está garantizada.

Ejemplo 4.40. *Existe un cubrimiento del anillo, de grado 2, que tiene puntos de número de rotación nulo, pero $\text{Fix}(f) = \emptyset$.*

Construcción. Si tomamos el mapa $f = m_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ restricto al anillo $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, tenemos que es un cubrimiento de grado 2 del anillo abierto, y que deja un rayo invariante. Podemos entonces tomar F levantado de f al cubrimiento universal que fije un levantado de ese rayo, pero sabemos que $\Omega(F) = \emptyset$ puesto que $\Omega(f) = \emptyset$ (el 0 es un atractor global para $\mathbb{D}$). $\square$

El siguiente ejemplo muestra que para cubrimientos del anillo no funciona un análogo del Corolario 3.9, más precisamente

Ejemplo 4.41. *Existe un cubrimiento f del anillo, de grado 2, con un compacto invariante K , y tal que $\text{Per}(f) = \emptyset$.*

Observemos primero que el compacto invariante K tiene que ser inessential, de lo contrario, por el Teorema 4.38, f tiene la tasa. Además, K no puede ser conexo, por la Proposición 4.3. De hecho, en nuestro Ejemplo, el compacto K será un conjunto de Cantor. Usaremos que, para un cubrimiento g del círculo, se cumple que $\overline{\text{Per}(f)} = \Omega(f)$ (ver [IPRX16.3]).

Construcción. Sea A el anillo $(0, +\infty) \times \mathbb{S}^1$. Comenzamos con un homeomorfismo g_1 que tenga un intervalo errante: basta tomar g_1 un *Ejemplo de Denjoy*. Sabemos además que tenemos un conjunto de Cantor K_0 invariante para g_1 , donde no hay puntos periódicos. Sea I un intervalo errante de g_1 . Sea $I_0 \subset I$ un intervalo abierto, y tomemos $h : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ un mapa tal que $h(I_0) = \mathbb{S}^1$, y $h|_{I \setminus I_0} = g_1|_{I \setminus I_0}$. Tomemos ahora el mapa $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, definido de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{si } x \notin I, \\ h(x) & \text{si } x \in I. \end{cases}$$

Tenemos entonces que g es un cubrimiento del círculo, de grado 2, donde K_0 sigue siendo un Cantor invariante, y $g_1(I)$ es un intervalo errante. Además, para cualquier punto $x_I \in I$, tenemos que la órbita futura de x_I acumula en K_1 un conjunto de Cantor que también es invariante, y además $K_1 \cap \text{Per}(g) = \emptyset$.

El ejemplo f que construiremos tiene la forma $f(\rho, \theta) = (\phi(\rho, \theta), g(\theta))$, con una ϕ que construiremos a continuación. Nuestra intención es que $\phi(\rho, \theta) > \rho$ si $\theta \notin K_1$.

Sea $\phi_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $\phi_1(\theta) = \text{dist}(\theta, K_1)$. Tomemos además $\phi_2 : (0, +\infty) \rightarrow (0, \infty)$ que sea creciente, y tenga un único punto fijo en $\rho = 1$. Tomemos ahora $\phi(\rho, \theta) = \rho \cdot \phi_1(\theta) + \phi_2(\rho)$.

Observemos que nuestro mapa f cumple las siguientes propiedades:

- Sea $\phi_\theta(\rho) = \phi(\rho, \theta)$. Entonces, ϕ_θ es estrictamente creciente a menos que $\theta \in K_1$, en cuyo caso tiene un único punto fijo en $\rho = 1$.
- $K = \{1\} \times K_1$ es un compcato invariante para f .

Esto nos dice que $\text{Per}(f) = \emptyset$: observar que si tuviéramos un punto (ρ_0, θ_0) periódico, entonces $\theta_0 \notin K_1$, pero la dinámica en esos rayos por el mapa ϕ es errante. $\square$

El siguiente ejemplo sirve a modo de aplicación directa del Teorema 4.39.

Ejemplo 4.42. *Existe un cubrimiento de grado 2 del anillo A , con un conjunto de Cantor K totalmente invariante ($f^{-1}(K) = K$).*

Construcción. Sea $A = (0, 1) \times \mathbb{S}^1$. Sea $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ como en la Figura (que no dibujé). Observemos que, si $I = [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, entonces $g^{-1}(I)$ son dos intervalos cerrados I_1, I_2 , incluidos en I . Procediendo inductivamente tenemos que

$$\bigcap_{j \geq 1} f^{-j}(I) = K_1,$$

donde K_1 es un conjunto de Cantor totalmente invariante que contiene a $\frac{1}{3}$ y $\frac{2}{3}$, pero no a 0. Observamos entonces que:

- g tiene tres puntos fijos $(0, \frac{1}{3})$ y $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$,
- $\Omega(g) = \{0\} \cup K_1$.

Tomemos entonces $h : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ como en la Figura (que tampoco dibujé), y definamos $f(\rho, \theta) = h(\rho), g(\theta)$. Tenemos entonces que $K = \{1/2\} \times K_1$ es un conjunto de Cantor totalmente invariante para f , como queríamos $\square$

Ejemplo 4.43. *Existe f cubrimiento del anillo, de grado -2 , que no es completa, y tal que $N_2(f) > N_2(m_{-2})$.*

Construcción. Tomemos el anillo $A = \mathbb{S}^1 \times (0, 1)$, y pensemos en nuestro mapa como una composición $f = f_2 \circ f_1$, donde f_1 es un cubrimiento de grado -2 que preserva la segunda coordenada y manda rayos en rayos, y f_2 es un homeomorfismo que preserva la primera coordenada y es creciente en cada rayo. Tenemos entonces:

- $f_1(\theta, \rho) = (f_{11}(\theta), \rho)$,
- $f_2(\theta, \rho) = (\theta, f_{22}(\rho))$.

Más aún, es estrictamente creciente en todos salvo en 4 (a los que llamaremos $r_1, \dots, r_4$), donde la dinámica es como en la figura:

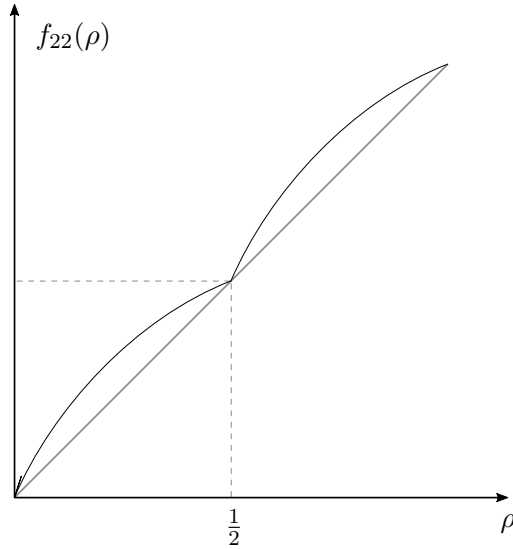


FIGURA 7. Dinámica en cada uno de los rayos

Llamémosle x_i al punto en el rayo x_i tal que $f_2(x_i) = x_i$, y θ_i al ángulo que determina el rayo r_i . Sea luego R_i la región comprendida entre los rayos r_i y r_{i+1} (tomando $r_5 = r_1$). Imponemos que f_1 intercambie los rayos r_1 y r_2 , y fije los rayos r_3 y r_4 .

Además, pedimos:

- $f_1(R_1) = R_1$,
- $f_1(R_2) = R_4 \cup R_3$,
- $f_1(R_3) = R_2 \cup R_1 \cup R_4$,
- $f_1(R_4) = R_3 \cup R_2$.

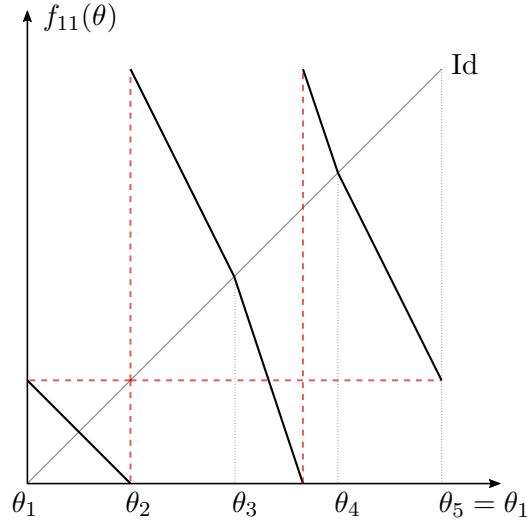


FIGURA 8. Dinámica en los ángulos

Con las condiciones descritas, tenemos que el mapa f tiene a x_3 y x_4 como únicos puntos fijos, y tiene a x_1, x_2 como único ciclo de período 2 (Cualquier otro punto del anillo es errante para f). Puede verificarse fácilmente que x_3 y x_4 no están en la misma clase de Nielsen: de hecho, existe un levantado $\tilde{f}$ de f y dos levantados $\tilde{x}_3$ y $\tilde{x}_4$ de x_3 y x_4 tales que $\tilde{f}(\tilde{x}_4) - \tilde{x}_4 = \tilde{f}(\tilde{x}_3) - \tilde{x}_3 - 1$. De esta forma, concluimos que $N_1(f) = 2$, que es menor que las tres clases de Nielsen de m_{-2} . Por otra parte, es fácil ver que $N_2(f) = 1$ puesto que R_1 es invariante por f , de donde tanto x_1 como x_2 están en la clase de Nielsen *restante* como puntos fijos de f^2 (que tiene grado 4, y por ende tres clases de Nielsen de puntos fijos). Pero sabemos que $N_2(m_{-2}) = 0$ puesto que $N_1(m_{-2}) = 3 = N_1(m_4)$, que es lo que queríamos tener. $\square$

Ejemplo 4.44. *Existe f un cubrimiento del anillo abierto, de grado 2, que no es semiconjugado al mapa $m_2 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$.*

Para clarificar su construcción, daremos primeramente una condición necesaria para la existencia de la semiconjugación. Para simplificar la notación, dada γ una curva cerrada, definiremos

$$j\gamma = \underbrace{\gamma \cdot \gamma \cdots \gamma}_{j \text{ veces}}.$$

Dadas dos curvas γ_1 y γ_2 , anotaremos $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ el *número de intersección algebraico* entre las dos curvas, para los casos en lo que exista. En particular,

lo tenemos bien definido si ambas son lazos, si una es propia y la otra es un lazo, o si ambas están definidas en intervalos compactos pero sus extremos no pertenecen a la otra. Por convención, si tenemos las curvas $c : (0, 1) \rightarrow A$ y $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$, definidas por

$$c(t) = (1, t), \quad \gamma(t) = (e^{2\pi it}, 1);$$

tendremos $c \wedge \gamma = 1$.

Lema 4.45. *Sea f un cubrimiento del anillo de grado d , con $|d| > 1$, y supongamos que existe una semiconjugación global h entre y m_d . Entonces se cumple lo siguiente:*

- (*) *Para cada compacto $K \subset A$, existe un entero positivo C_K , tal que si:*
 - . *$\gamma \subset A$ es una curva esencial cerrada y simple,*
 - . *n es un entero positivo,*
 - . *j es un entero positivo entre 1 y d^{n-1} ,*
 - . *η es una de las d^n componentes conexas de la preimagen de $j\gamma$ por el mapa f^n , con extremos en K .*

entonces $|c \wedge \eta| \leq C_K$.

Demostración. Sea K un compacto del anillo, F un levantado de f al cubrimiento universal, y H la semiconjugación global entre f y m_d . Asumiremos $H(x+1, y) = H(x, y) + (1, 0)$ (el otro caso es análogo). Por la Observación 4.18, sabemos que existe $M_K \geq 0$ tal que

$$\sup\{H(x, y) - x : (x, y) \in \tilde{K}\} \leq M.$$

Sean γ, η, n, j como en (*). Sean $\tilde{\gamma}, \tilde{\eta}, \tilde{K}$, los levantados respectivos de γ, η y K al cubrimiento universal. Afirmamos que $|c \wedge \eta| \leq 2M_K + 2$ (habiendo probado esto, se concluye la prueba tomando $C_K = 2M_K + 2$). Sabemos que los extremos de $\tilde{\eta}$ -a los que llamaremos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) -, están en $\tilde{K}$, el levantado de K . Basta probar que $|x_2 - x_1| \leq 2M_K + 1$. Sabemos que los puntos $F^n((x_1, y_1))$ y $F^n(x_2, y_2)$ son los extremos de un levantado de $j\eta$, de donde tenemos que $|H(F^n(x_2, y_2)) - H(F^n(x_1, y_1))| = j$.

Utilizamos ahora nuestra semiconjugación H , que cumple $HF = dH$. Tenemos entonces que $|d^n(H(x_2, y_2)) - d^n(H(x_1, y_1))| = j \leq d^{n-1}$, de donde $|(H(x_2, y_2)) - (H(x_1, y_1))| \leq 1$. Como los extremos de α están en K , tenemos por la Observación 4.18, que

$$|x_2 - x_1| \leq |x_2 - H(x_2, y_2)| + |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| + |H(x_1, y_1) - x_1| \leq 2M_K + 1,$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

Construcción del Ejemplo 4.44. Construiremos f un cubrimiento del anillo $A = \mathbb{S}^1 \times (0, 1)$ que no cumple la condición necesaria (*) del Lema 4.45, por lo que no puede ser semiconjugado a m_d . Tomemos $\tilde{A} = \mathbb{R} \times (0, 1)$ el cubrimiento universal de A .

Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ una sucesión de reales positivos, con $a_n \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow -\infty$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n \subset A$ el anillo

$\mathbb{S}^1 \times [a_n, a_{n+1}]$. Sea además $\lambda_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ el mapa afín que envía $[a_n, a_{n+1}]$ en $[a_{n+1}, a_{n+2}]$. Definimos entonces para $\omega = (z, \rho) \in A_n$; con $n \leq -1$:

$$f(z, \rho) = (z^2, \lambda_n(\rho)).$$

Queremos definir ahora f en los anillos A_n , con $n \geq 0$. Lo haremos de manera inductiva: supongamos que tenemos el mapa definido hasta el anillo A_{n-2} con $n \geq 1$, diremos cómo extenderlo al anillo A_{n-1} . Usaremos como hipótesis que $f(z, a_k) = (z^2, a_{k+1})$ para todo $k \leq n-1$, de donde tendremos $f(A_n) = a_{n+1}$.

Paso inductivo. Obsérvese que tenemos f^{n-1} definida en A_0 . Afirmamos entonces que podemos tomar α curva en A_0 tal que:

- . Los extremos de α son $(1, a_0)$ y $(1, a_1)$,
- . El levantado $\tilde{\alpha}$ de α al cubrimiento universal tiene extremos $(0, a_0)$ y (n, a_1) .
- . $\beta := f^{n-1}(\alpha)$ es un curva simple.

Para ver que este α efectivamente existe, tomemos $\hat{\alpha}$ que cumpla las primeras dos propiedades, y sea $\hat{\beta} := f^{n-1}(\hat{\alpha})$. Si $\hat{\beta}$ no es simple, podemos tomar β un representante homotópico a extremos fijos incluido en A_{n-1} que sí lo sea, y luego tomar α la componente conexa de la preimagen por f^{n-1} , que empieza en $(1, a_0)$.

Tomemos β' curva en A_{n-1} , disjunta de β y con extremos en $(-1, a_{n-1})$, $(-1, a_n)$. Notemos que la preimagen de β' por f^{n-1} son 2^{n-1} curvas en A_0 , todas disjuntas de α . Sea α' cualquiera de estas curvas. Observemos ahora que existe un levantado $\tilde{\alpha}'$ de α' que empieza en (t, a_0) y termina en $(t+n, a_1)$, con $t \in (0, 1)$. Sea p un punto de α tal que su levantado $\tilde{p} \in \tilde{\alpha}$ tenga la primer coordenada menor que $1/2$. Análogamente, tomamos p' en α' tal que su levantado $\tilde{p}' \in \tilde{\alpha}'$ tenga primera coordenada mayor que n . Observemos que $f^{n-1}(p) \in \beta$, $f^{n-1}(p') \in \beta'$.

Notemos que el complemento de $\beta \cup \beta'$, en anillo A_{n-1} , consiste de dos discos abiertos. Si tomamos el conector s en A_n , definido por $s = \{(1, \rho) : a_n < \rho < a_{n+1}\}$, entonces podemos tomar un homeomorfismo de cada uno de estos dos discos al complemento de s en el anillo A_n , de tal forma que:

- . Se extiendan al borde del anillo A_n como f fue definida anteriormente,
- . Tanto la imagen de β como la de β' sean el conector s ,
- . La imagen de p y de p' sean el mismo punto $q \in s$.

Observamos que estos homeomorfismos inducen un cubrimiento de A_{n-1} en A_n . Tomemos ahora una curva γ esencial, cerrada y simple en A_n , con punto base q . Notemos que para algún $j \in [1, \dots, 2^{n-1}]$, tenemos una preimagen por f^n de la curva $j\gamma$, tal que es una curva $\eta \in A_0$ con extremos p y p' . Pero en ese caso, como la diferencia de las primeras coordenadas de $\tilde{p}'$ y $\tilde{p}$ es mayor que $n-1$, se tiene que si tomamos el conector $c = \{(1, \rho) : a_0 < \rho < a_1\} \subset A_0$, tenemos que $|c \wedge \eta| \geq n-1$. Tomando $K = A_0$ y recordando la notación del Lema 4.45, obtenemos que $C_K \geq n-1$. Pero podemos realizar este procedimiento para valores de n arbitrariamente

grandes, de donde f no cumple la condición (*), lo que concluye la construcción.

5. RESULTADOS ORIGINALES

Dedicaremos esta Sección a las pruebas de los Teoremas 1.6, 1.7, y 1.8, incluyendo la herramienta que desarrollamos para ello:

5.1. El buen dedazo.

Proposición 5.1. *Sea f un cubrimiento ramificado de grado ± 2 del plano, con un compacto invariante K , $c \in \text{Crit}(f)$, y $\text{Fix}(f) = \emptyset$.*

Entonces existe B entorno abierto de K , y un homeomorfismo $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ que preserva orientación, tal que $h|_B = \text{Id}$, y $\text{Fix}(h \circ f) = \{c\}$.

Nuestra intención es construir esta perturbación para obtener un cubrimiento ramificado donde el único punto crítico sea además fijo, y por ende totalmente invariante (obsérvese que es clave para esto, la hipótesis $\deg(f) = \pm 2$). Construiremos un *arco de traslación* que pase por el punto crítico c , de forma similar a como lo hicimos en la Sección (3). Una vez hecho esto, podemos restringir el mapa al complemento del punto crítico, y estudiar entonces la dinámica de un cubrimiento sin ramificaciones, del anillo abierto. En ese contexto usaremos los Teoremas presentados en la Sección 4, para rematar las pruebas.

5.1.1. Bosquejo de demostración, Proposición 5.1. Dado que c es un punto crítico de multiplicidad 1, sabemos que existe un entorno de c , de forma tal que f es localmente groseramente conjugado a $m_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -ver sección 2 por definiciones-. En el Lema 5.2 construimos un entorno U de c con esa propiedad, y tal que $\overline{U} \cap \overline{f(U)} \subset \partial U$. Usamos el Lema 5.3 para controlar la *forma de U* , pudiendo asumir luego que $U = \mathbb{D}$, $c = 0$.

En el Lema 5.4, construimos el soporte V de la perturbación h , que será un entorno de una curva desde c hasta $f(c)$, contenido este último en $U \cap f(U)$ a excepción de *un punto* (recordemos que $U \cap f(U) = \emptyset$). Cambiamos de coordenadas una vez más para que la curva sea un segmento horizontal -con c a la izquierda de $f(c)$ -, y para que todo el entorno V sea vuelva un rectángulo, de forma tal que podamos controlar la dinámica en $f|_V$.

La última parte de la prueba consiste en definir la perturbación en el rectángulo -que será la Identidad en el borde del mismo-, que heurísticamente es la composición de una *contracción vertical* en dirección a la curva, compuesta con un *traslación a izquierda* en las horizontales.

5.1.2. Construcción del dedazo. La única condición que le impondremos a B es que él y sus iterados estén lejos del punto crítico y su imagen; más precisamente, si definimos $B_2 := B \cup f(B) \cup f^2(B)$, entonces necesitamos que:

- $d(c, B_2) > 0$, $d(f(c), B_2) > 0$.

- Tanto c como $f(c)$ pertezcan a la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus B_2$.

Observemos que, como f es continua y K es invariante, siempre podemos encontrar un B como detallamos (basta tomar B_2 cumpliendo esas dos condiciones, y luego tomar B suficientemente pequeño, de forma tal que sus dos primeros iterados estén contenidos en B_2). Para simplificar la notación, definiremos $B_1 := B \cup f(B)$.

El Lema que probaremos a continuación es el primer paso para construir el arco de traslación que pasa por el punto crítico c (ver Definición 3.4).

A lo largo de toda la construcción, tendremos como hipótesis que $\text{Fix}(f) = \emptyset$.

Lema 5.2. *Existe un disco U , que contiene a c , tal que*

- . $d(U, B_1) > 0$.
- . $f|_U$ es groseramente conjugada a m_2 .
- . $\overline{U} \cap \overline{f(U)} \subset \partial U$.

Demostración. Dado que $d(c, B_2) > 0$ podemos tomar un disco U_0 satisfaciendo la primera y la segunda condición. Tomemos una curva $\gamma : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^2$ desde $f(c)$ a c , tal que $d(\gamma, B_2) > 0$. Existe entonces V^ε un entorno de γ , homeomorfo a $[0, 1] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ por el homeomorfismo h^ε , que cumple $d(V^\varepsilon, B_2) > 0$. Definimos $V_t^\varepsilon := h^{\varepsilon^{-1}}([0, t] \times (-\varepsilon, \varepsilon))$, $\tilde{V}_t := V_t^\varepsilon \cup f(U_0)$. Tomemos

$$t_0 = \sup\{t \in [0, 1] : \tilde{V}_t \cap f^{-1}(\tilde{V}_t) = \emptyset\}.$$

Podemos definir entonces $U := f^{-1}(\tilde{V}_{t_0})$, y observar que la intersección deseada para U es no vacía y está incluida en su borde, de donde U satisface la tercera propiedad. Más aún, como $d(V^\varepsilon, B_2) > 0$, obtenemos que U también satisface la primera propiedad (la segunda se satisface de forma automática). $\square$

Lema 5.3. *Módulo un cambio de coordenadas, podemos asumir que $c = 0$, $U = \mathbb{D}$, y que la foliación radial en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ se mapea 2 : 1 por f en una foliación por rectas de $f(U) \setminus f(0)$.*

Demostración. Dado que ∂U es una curva cerrada por simple por construcción, el Teorema de Jordan-Schoenflies ([ChK15]) establece que existe un homeomorfismo $g : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ tal que $g(U) = \mathbb{D}$, $g(\overline{U}^c) = \overline{\mathbb{D}}^c$ (podemos asumir que $g(c) = 0$). Si definimos $f' := g \circ f \circ g^{-1}$, observamos que es dinámicamente conjugada a f , de donde $f'|_{\mathbb{D}} : \mathbb{D} \rightarrow f'(\mathbb{D})$ es groseramente conjugada a m_2 , y obtenemos una foliación por rectas $\mathcal{F}$ en $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ como en el final de la sección 2. Finalmente, podemos conjugar $\mathcal{F}$ a la foliación radial: dado que cada hoja $\phi \in \mathcal{F}$ sale de $\mathbb{D}$, basta tomar el punto de la hoja que está en el borde de $\mathbb{D}$, y definir luego la imagen de la hoja como el rayo que atraviese ese mismo punto. $\square$

Definiremos ahora el dominio de la perturbación, es decir, $V \subset \mathbb{R}^2$ tal que $h|_{\mathbb{R}^2 \setminus V} = \text{Id}$. Comenzamos tomando $U_0 \subset U$ un entorno de c que cumpla las primeras dos propiedades del Lema 5.2

Lema 5.4. *Existe un disco V tal que*

- . $V \cap B_1 = \emptyset$,
- . $V \cap U$ y $V \cap f(U)$ son discos,
- . $U_0 \cup f(U_0) \subset V$,
- . $f(V \cap U) \cap V = f(U_0)$,
- . $f(V \setminus (U \cup f(U))) \cap V = \emptyset$.

Demostración. Sea $z \in \partial U \cap \partial f(U)$ (dado por el Lema 5.2). Tomamos entonces $\hat{z} \in \partial U$ tal que $f(\hat{z}) = z$. Sea γ y $\hat{\gamma}$ respectivamente, los rayos desde z hasta 0, y desde 0 hasta $\hat{z}$, parametrizados por longitud de arco. Definimos γ' como la concatenación $f(\hat{\gamma}) \cdot \gamma$.

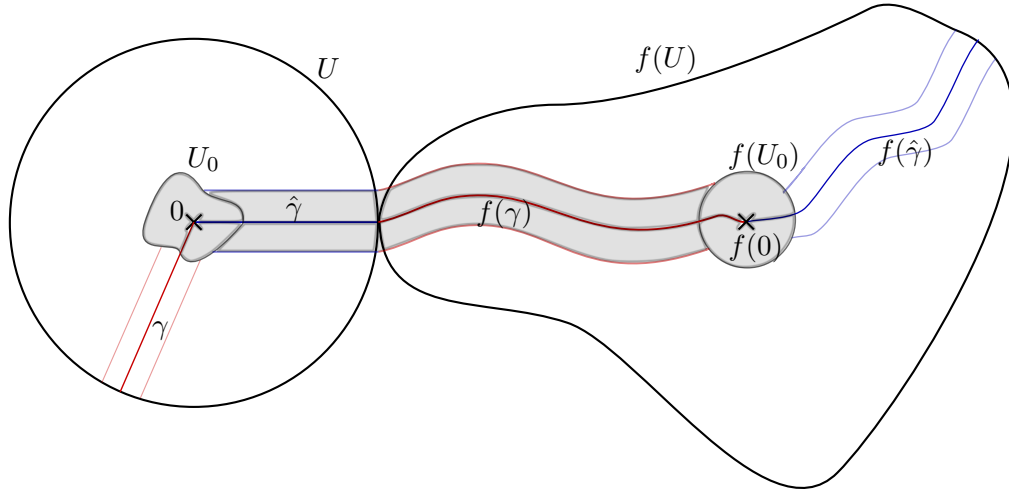


FIGURA 9. La perturbación tiene de soporte el disco coloreado V .

Para simplificar la notación, llamemos V^ε a los entornos de γ' (como hicimos con γ en el Lema 5.2); definamos entonces $\gamma'_1 := \gamma'|_{[0, \frac{1}{2}]}$; $\gamma'_2 := \gamma'|_{[\frac{1}{2}, 1]}$. Observemos que existe ε_1 tal que $V^{\varepsilon_1} \cap B_1 = \emptyset$, ya que $d(\gamma', B_1) > 0$.

Dado que $\text{Fix}(f) = \emptyset$, sabemos que $f(z) \neq z$. Obtenemos que z es el único punto de γ' que está fuera de los discos U y $f(U)$, por lo que existe ε_2 tal que $(V^{\varepsilon_2} \setminus (U \cup f(U))) \cap V^{\varepsilon_2} = \emptyset$.

Más aún, tenemos que $f(\gamma'_2) \cap \gamma'_1 = f(c)$, de donde también existe ε_3 tal que $(f(V^{\varepsilon_3} \cap U) \cap V) \subset f(U_0)$. Finalmente, tomando $\varepsilon_0 := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\}$, concluimos que $V = U_0 \cup V^{\varepsilon_0} \cup f(U_0)$ satisface las propiedades que buscamos. $\square$

Observación 5.5. $\text{Fix}(h \circ f) \subset \text{Fix}(f) \cup (V \cap f^{-1}(V))$.

Demostración. Sea w un fijo nuevo, generado por la perturbación h . Como h está soportada en V , tenemos que necesariamente $f(w) \in V$. Pero además tenemos que $h(V) = V$, de donde $h \circ f(w) \in V$, por lo que si w es fijo, implica que $w \in V$. $\square$

Observación 5.6. *Con un nuevo cambio de coordenadas, podemos asumir que:*

- V es el rectángulo $(0, 10) \times (-1, 1)$.
- $U_0 = (0, 2) \times (-1, 1)$, $f(U_0) = (8, 10) \times (-1, 1)$,
- $c = (1, 0)$, $f(c) = (9, 0)$.
- γ' es el segmento entre c y $f(c)$.
- $f|_{U_0}(c + (\rho, \theta)) = (f(c) + (f_1(\rho, \theta), 2\theta))$.
- Si $(x, y) \in U \cap V$, $0 < x' < x$, entonces $(x', y) \in U \cap V$.
- Si $(x, y) \in f(U) \cap V$, $x < x' < 10$, entonces $(x', y) \in f(U) \cap V$.

Observemos que las últimas dos propiedades de la Observación, establecen que tenemos una noción bien definida de *izquierda* y *derecha* dentro del rectángulo, a saber, $U \cap V$ está a la izquierda de $f(U) \cap V$.

Procedemos ahora a construir la perturbación h .

Prueba de la Proposición 5.1: Comenzamos tomando h_1 una perturbación de los rayos de $f(U_0)$, tal que $(h_1 \circ f)|_{U_0}$ sea, restricta a cada rayo, el mapa afín que manda $r_{c,\theta} \cap V$ en $r_{f(c),2\theta} \cap V$. Observemos que esta función puede extenderse como la Identidad al borde de $f(U_0)$, de donde podemos extenderla luego a todo el plano, y obtener $h_1|_{\mathbb{R}^2 \setminus f(U_0)} = \text{Id}$. Observemos que la expansión (o contracción) de $h_1 \circ f$ en cada rayo está acotada uniformemente, más precisamente:

$$h_1 \circ f|_{U_0}(c + (\rho, \theta)) = (f(c) + (h_{11}(\theta)\rho, 2\theta)) : \sqrt{2}^{-1} \leq h_{11}(\theta) \leq \sqrt{2}.$$

Definiremos ahora h_2 , que también es la Identidad fuera de $f(U_0)$, por lo que la definiremos en el cuadrado $(8, 10) \times (-1, 1)$. Heurísticamente, queremos una contracción fuerte hacia la horizontal $y = 0$, pero necesitamos ajustarla para que sea la Identidad en el borde, por lo que la definiremos como un mapa afín a trozos. Imponemos simetría respecto a la recta $x = 9$, y hacemos que preserve verticales, esto es, $h_2(x, y) = (x, h_{22}(x, y))$, donde

$$h_{22}(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{4} & \text{si } \frac{81}{10} \leq x \leq \frac{99}{10}; |y| \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{7y-3}{4} & \text{si } \frac{81}{10} \leq x \leq \frac{99}{10}; |y| > \frac{1}{2}, \\ (10x - 99)y + (100 - 10x)\frac{y}{4} & \text{si } x > \frac{99}{10}; |y| \leq \frac{1}{2}, \\ (10x - 99)y + (100 - 10x)\frac{7y-3}{4} & \text{si } x > \frac{99}{10}; |y| > \frac{1}{2}, \\ (81 - 10x)y + (10x - 80)\frac{y}{4} & \text{si } x < \frac{81}{10}; |y| \leq \frac{1}{2}, \\ (81 - 10x)y + (10x - 80)\frac{7y-3}{4} & \text{si } x < \frac{81}{10}; |y| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Observemos que podemos extenderla como la Identidad al borde de $f(U_0)$.

Finalmente, definimos h_3 soportado en V , preservando horizontales y mandando $f(c)$ en c , de forma similar a como definimos el mapa h_2 .

Sea $h_3(x, y) = (h_{31}(x, y), y)$, con

$$h_{31}(x, y) = \begin{cases} |y|x + (1 - |y|)\frac{x}{9} & \text{si } x \leq 9 \\ |y|x + (1 - |y|)(9x - 80) & \text{si } x > 9 \end{cases}$$

Observemos que también lo podemos extender como la Identidad al borde de V .

Definamos entonces $h := h_3 \circ h_2 \circ h_1$. Solo resta probar:

Lema 5.7. $\text{Fix}(h \circ f) = \{c\}$.

Demostración. Sea $w \in \text{Fix}(h \circ f)$. Comenzamos probando que $w \in f(U_0)$.

Dado que h está soportada en V , tenemos que $w \in (V \cap f^{-1}(V))$. Por el Lema 5.4, $f(V \setminus (U \cup f(U))) \cap V = \emptyset$, de donde $w \in U$ o $w \in f(U)$.

Si $w \in f(U)$, entonces $f(w) \notin f(U)$, por lo que deducimos que $h \circ f(w) = h_3 \circ f(z)$. Más aún, por la última propiedad de la Observación 5.6, y recordando que h_3 preserva horizontales, concluimos que $w \notin \text{Fix}(h_3 \circ f)$. Por otro lado, si $w \in U$, usamos que $f(V \cap U) \cap V = f(U_0)$ (Lema 5.4) para concluir que $w \in U_0$.

Sea $w = (x, y)$. Observemos que necesariamente $w \in h \circ f(U_0)$. Como h_1 y h_2 son biyecciones de $f(U_0)$, obtenemos que $h \circ f(U_0) = h_3 \circ f(U_0)$, y por lo tanto $w \in (U_0 \cap (h_3 \circ f)(U_0))$, de donde $|y| \leq \frac{\sqrt{2}}{8}$. Luego obtenemos $w \in U_1 := [0, 2] \times [-\frac{\sqrt{2}}{8}, \frac{\sqrt{2}}{8}]$. Definamos entonces

$$W_1 := \{(x, y) \in f(U_0) : x \leq \frac{81}{10}\}; W_2 := \{(x, y) \in f(U_0) : x \geq \frac{99}{10}\}.$$

Observemos que:

- $h_1 \circ f(U_1) \subset [8, 10] \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
- $f(U_1) \cap W_1 = \emptyset$.
- $h_3(W_2) \cap U = \emptyset$.

Dado que fuera de las bandas verticales W_1, W_2 , el mapa h_2 divide la altura entre 4 en $f(U_1)$, obtenemos que $h \circ f(U_1) \subset U_2 := [0, 2] \times [-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}]$, por lo que $w \in U_2$.

Procediendo de forma inductiva, definimos $U_n := [0, 2] \times [-\frac{\sqrt{2}^n}{2^{n+2}}, \frac{\sqrt{2}^n}{2^{n+2}}]$, y concluimos que $w \in \bigcap_{n \geq 0} U_n$, de donde $y = 0$.

Además, tenemos que $x \geq 1$ (pues $h_1 \circ f(\rho, \theta) = (\rho, 2\theta)$), por lo que los candidatos w están en el intervalo I de extremos c y $(2, 0)$. Solo resta observar que $f|_I(x, 0) = (9x - 8, 0)$ tiene a $c = (1, 0)$ como único punto fijo, lo que concluye la prueba. $\square$

Observación 5.8. Dado que $V \cap B_1 = \emptyset$, obtenemos que la dinámica en B permanece intacta, es decir, $h \circ f|_B = f|_B$.

Observación 5.9. El único momento en el que utilizamos la hipótesis $\text{Fix}(f) = \emptyset$ es en el Lema 5.4, cuando imponemos que z no sea fijo. Podríamos

intercambiarla entonces por la hipótesis (más debil) “existe una curva de $f(c)$ a c sin puntos fijos de f , contenida en $\mathbb{C} \setminus K$ ”. La prueba funciona exactamente de la misma forma, y en este contexto podemos concluir que $\text{Fix}(h \circ f) \setminus \text{Fix}(f) = \{c\}$. Como estamos buscando puntos fijos de f , cualquiera de las hipótesis es igual de buena.

5.2. Las pruebas. Presentamos finalmente las demostraciones de los Teoremas 1.6, 1.7 y 1.8.

Demostración del Teorema 1.6. La idea es tomar una perturbación h como en la Proposición 5.1. Comenzamos tomando A un entorno suficientemente pequeño de K , de forma que h no modifique la dinámica en K . Tenemos que el punto crítico se vuelve fijo, y no generamos ningún otro punto fijo en el proceso. Dado que $h \circ f$ es de grado 2, tenemos que $(h \circ f)^{-1}(c) = c$, de donde podemos *pinchar* el plano en el punto crítico, y restringir la dinámica a un cubrimiento g del anillo abierto $\mathbb{C} \setminus \{c\}$.

El conjunto K es totalmente invariante para este cubrimiento g , por lo que estamos en las hipótesis del Teorema 4.39, que nos permite inferir que $\text{Fix}(g) \neq \emptyset$. Concluimos entonces que $\{c\}$ está incluido estrictamente en $\text{Fix}(h \circ f)$, lo que concluye la prueba. $\square$

Demostración del Teorema 1.7. Construimos la misma perturbación h como en la Proposición 5.1, pero en este caso tenemos en cuenta no alterar la dinámica en U . Basta observar que, como $U \cup f(U) \subset V$, podemos tomar $B \subset U$ un entorno conexo de K como en la Proposición 5.1.

Tenemos que $h \circ f$ no tiene más puntos fijos que c . Restrinjamos entonces la dinámica de $h \circ f$ al anillo $S = \mathbb{C} \setminus \{c\}$, y tomemos el cubrimiento universal $\tilde{S}$ (que de nuevo es un plano). Como en el Lema 3.11, cualquier levantado $\tilde{V}$ de V es homeomorfo a V (en particular es acotado), por lo que podemos tomar $\tilde{f}_0$ levantado de $h \circ f$ tal que para un levantado $\tilde{K}$ de K , obtenemos que $\tilde{f}_0(\tilde{K}) = \tilde{K}$.

Recordando que $\tilde{f}_0$ es un homeomorfismo de $\tilde{S}$ que preserva orientación, obtenemos que tiene un punto fijo $\tilde{x}$ en $\tilde{V}$, de donde deducimos que $x = \tilde{\pi}(\tilde{x})$ es fijo por $h \circ f$ y pertenece a $V = \tilde{\pi}(\tilde{V})$, por lo que es fijo por f . $\square$

Observación 5.10. Si K es un compacto conexo que no separa el plano, y no contiene a c ni a $f(c)$, las hipótesis del Teorema 1.7 se verifican de forma automática. Dado que K es compacto y f es continua, podemos controlar el tamaño de $U \cup f(U)$ y concluir que el punto fijo que encontramos tiene que estar en K , dando entonces una prueba elemental -para grado 2- de un resultado mencionado en la Sección 1 y publicado en [FMOT07], a saber: un cubrimiento ramificado del plano que preserva orientación, con un conjunto invariante K compacto conexo que no separa el plano, tiene un punto fijo en K .

Demostración del Teorema 1.8. Dividimos la prueba en dos casos:

1. *El punto c pertenece a la componente no acotada de $\mathbb{C} \setminus K$.*

Construimos la perturbación h de la misma forma que en la Proposición 5.1. Pinchamos el plano y vamos al anillo $S = \mathbb{C} \setminus c$. Como en la prueba anterior, podemos tomar un levantado $\tilde{f}_0$ de $h \circ f$ que deja invariante a $\tilde{K}$, un levantado de K . Como en la Demostración previa, esto implica la existencia de un punto fijo para $h \circ f$ diferente de c , y por lo tanto, fijo para f . Por el mismo argumento utilizado en la Observación 5.10, concluimos que el punto fijo está en $T(K)$.

2. *El punto c pertenece a una componente acotada C de $\mathbb{C} \setminus K$.*

Construimos una vez más la perturbación, pinchamos de nuevo el plano y tomamos el anillo $A = \mathbb{C} \setminus c$. Observemos que K es *esencial* en A , luego por el Teorema 4.38, tenemos que $h \circ f|_A$ tiene un punto fijo en $T(K)$, que también es fijo para f . Observemos que en este caso obtenemos un resultado un poco más fuerte: el punto fijo está en realidad en $T(K) \setminus C$ (puede estar en K o en una de las componentes acotadas del complemento, vistas en el anillo A).

Observación 5.11. *Como en el Teorema 1.7, podemos aplicar este resultado cuando K es un compacto conexo invariante que no separa el plano. En el Teorema 1.8, en realidad no necesitamos que K no separe el plano, pero sí tenemos que imponer que c y $f(c)$ pertezcan a la misma componente conexa de $\mathbb{C} \setminus K$.*

5.3. Margen para mejoras. Los resultados demostrados nos llevan de forma natural a nuevas preguntas, a saber:

- ¿Podemos construir la perturbación de tal forma que no altere conjunto de *puntos periódicos* de f ? En ese caso, habremos probado que bajo las Hipótesis del Teorema 1.6, f tiene *la tasa*. Esto es un problema hoy abierto para dinámica de cubrimientos ramificados del plano
- Lo mismo ocurre si tomamos el Teorema 4.39 y mejoramos el resultado para obtener que f tiene *la tasa* en K . Recordamos que la perturbación que construimos, no modifica la dinámica en ese conjunto, por lo que podemos repetir el argumento del cubrimiento universal y encontrar puntos periódicos de F en $\tilde{K}$.
- Podemos ajustar las técnicas utilizadas para el caso en que el grado de f es mayor, y obtener resultados similares? (Esto es bastante audaz *a priori*, dado que la cantidad de puntos críticos puede crecer, lo que nos presenta casos con dinámica más compleja).

REFERENCIAS

- [Aki99] V. Akis; *On the plane fixed point problem*. Topology Proc. 24, (1999), 15-31
 [Bel78] H. Bell; *A fixed point theorem for plane homeomorphisms*. Fund. Math. 100 (1978), 119-128.

- [BO09] A. M. Blokh, L. G. Oversteegen; *A fixed point theorem for branched covering maps of the plane* arXiv:0904.2944v1. (2009)
- [Brou12] L. E. J. Brouwer; *Beweis des ebenen Translationssatzes*. Math. Ann 72 (1912)
- [Bro77] M. Brown; *A short proof of the Cartwright-Littlewood fixed point Theorem*. Proc. Amer.Math. Soc. 65, p.372 (1977)
- [Che12] A. Chenciner; *Poincaré and the three-body problem*. Seminaire Poincaré XVI, 45-133. (2012)
- [ChK15] L. Chen, S. G. Krantz; *A Discrete Proof of The General Jordan-Schoenflies Theorem* arXiv:1504.05263 (2015)
- [CL51] M. L. Cartwright, J. E. Littlewood; *Some fixed point theorems*. Annals of Math. 54, p.1-37 (1951)
- [Fat84] *An orbit closing proof of Brouwers lemma on translation arcs* L'enseignement Mathématique 33, p.315-322 (1987)
- [FMOT07] R. J. Fokkink, J. C. Mayer, L. G. Oversteegen and E. D. Tymchatyn; *The plane fixed point problem*. arXiv:0805.1184v2 (2007)
- [Hat02] A. Hatcher. *Algebraic Topology* Cambridge University Press. (2002)
- [IPRX16] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella, J. Xavier; *Sphere branched coverings and the growth rate inequality*. arXiv:1612.02356v1 (2016)
- [IPRX16.2] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella, J. Xavier; *Periodic points of covering maps of the annulus*. arXiv:1411.5565v2 (2016)
- [IPRX16.3] J. Iglesias, A. Portela, A. Rovella, J. Xavier; *Dynamics of Covering Maps of the Annulus I: Semiconjugacies* arXiv:1402.2317v3 (2016)
- [Kup91] K. Kuperberg; *Fixed points of orientation reversing homeomorphisms of the plane*. Proc. of the American Math. Soc. 112p.223-229, (1991)
- [LeC07] P. Le Calvez; *Pourquoi les points périodiques des homéomorphismes du plan tournent-ils autour de certains points fixes?* Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, Serie 4, Volume 41 no. 1, p. 141-176 (2008)
- [Mar11] D. E. Marshall; *The Uniformization Theorem*, sites.math.washington.edu/ marshall/preprints/uniformizationII.pdf (2011)
- [Pir19] F. Pirán; *Sistemas Hamiltonianos: Integrabilidad clásica y perturbaciones caóticas* mat.edu.uy/biblioteca/monografias-y-tesis/monografias (2019)
- [P892] H. Poincaré; *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Gauthier-Villars, Paris (1892, 1893, 1899). Traducción al inglés con comentarios por D. Goroff; *New Methods of Celestial Mechanics*, American Institute of Physics (1992).
- [PSh12] C. Pugh, M. Shub; *Periodic points on the 2-sphere* arXiv:1210.3717v1 (2012)
- [Ste35] Sternbach; Problem 107 in *The scottish Book: Mathematics from the scottish Café* Birkhauser, Boston. (1935)
- [Why42] G. T. Whyburn; *Analitic Topology*, vol. 28, AMS Coll. Publications, Providence, RI (1942)
- [Shu78] M. Shub; *Alexander cocycles and dynamics*. Asterisque, Societè Math. de France, p. 395-413 (1978)

INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA, FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA, MONTEVIDEO

Email address: alejog@fing.edu.uy