



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Steering en estados Gaussianos de dos modos

Influencia del exceso de ruido en estados comprimidos de la luz producidos experimentalmente

Eugenia Benech Charbonnier

Programa de Posgrado en Física  
Facultad de Ciencias, Facultad de Ingeniería  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay  
Setiembre de 2020



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Steering en estados Gaussianos de dos modos

Influencia del exceso de ruido en estados comprimidos de la luz producidos experimentalmente

Eugenia Benech Charbonnier

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Directores:

Dr.Sc. Prof. Adriana Auyanet

Dr.Sc. Prof. Arturo Lezama

Montevideo – Uruguay

Setiembre de 2020

Benech Charbonnier, Eugenia

Steering en estados Gaussianos de dos modos / Eugenia Benech Charbonnier. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, Facultad de Ingeniería, 2020.

X, 89 p. 29, 7cm.

Directores:

Adriana Auyuanet

Arturo Lezama

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Física, 2020.

Referencias bibliográficas: p. 84 – 89.

1. Steering cuántico, 2. Vacío comprimido, 3. Estados Gaussianos, 4. Compresión por autorrotación de la polarización, 5. Rubidio. I. Auyuanet, Adriana, Lezama, Arturo, . II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Física. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

---

Dr.Sc. Ing. Prof. Raúl Donangelo

---

Dr. Prof. Daniel Ariosa Dupont

---

Ph.D. Prof. Silvia Viola Kusminsky

---

Ph. D. Prof. Antonio Zelaquett Khoury

---

Dr.Sc. Prof. Arturo Lezama Astigarraga

Montevideo – Uruguay  
Setiembre de 2020

A mi hija, Sofía

# Agradecimientos

Agradezco a la Comisión académica de Postgrado por la financiación de mi beca de maestría, y a los integrantes del Grupo de Espectroscopía Láser por su apoyo y paciencia.

Quisiera también agradecer especialmente a Lorenzo Lenci y Cecilia Stari por su colaboración durante los últimos meses de trabajo, y a Milka Charbonnier, por corregir mi redacción.

## RESUMEN

En esta tesis se presenta el estudio de las condiciones necesarias para detectar el fenómeno de Steering en los estados Gaussianos de dos modos obtenidos al hacer incidir sobre un divisor de haz (BS) un estado comprimido y el vacío. Se utilizó el formalismo de la matriz de covarianza y el cálculo simpléctico para hallar las condiciones para detectar Steering. En particular, se determinaron los valores mínimos de pureza y compresión del estado comprimido inicial.

Se encontró que todos los estados que superan un cierto nivel de compresión -dependiente del coeficiente de transmisión del BS- son dirigibles independientemente de su pureza.

El modelo teórico se puso a prueba experimentalmente. Se generaron estados de vacío comprimido por el mecanismo conocido como “autorrotación de la polarización” [1] en vapor de Rubidio, obteniendo hasta 2,3 dB de compresión. Para producir estados entrelazados se hizo incidir los estados comprimidos en un divisor de haz junto con el vacío. Se reconstruyó la matriz de covarianza del estado de dos modos generado de esta forma a partir de la detección de las varianzas de los parámetros de Stokes y la determinación del nivel de ruido del vacío.

Se proponen en esta tesis tres métodos distintos para determinar el nivel de ruido de vacío, dos de los cuales no requieren la realización de medidas independientes del estado estudiado. Se presenta un análisis comparativo de los tres métodos.

Las matrices de covarianza se analizaron de acuerdo con el modelo estudiado teóricamente encontrando Entrelazamiento pero no Steering. Los resultados experimentales son consistentes con las previsiones teóricas, se discuten las dificultades encontradas para la puesta de manifiesto del Steering.

Palabras claves:

Steering cuántico, Vacío comprimido, Estados Gaussianos, Compresión por autorrotación de la polarización, Rubidio.

## ABSTRACT

This thesis presents a study of the conditions needed to detect Steering on Gaussian states generated by combining a squeezed Gaussian state with vacuum on a beam splitter (BS). To obtain the requirements for Steering, symplectic formalism on the covariance matrix was applied. Specifically, the minimum necessary values of purity and squeezing of the initial state were determined.

As a result, it was found that if the amount of squeezing surpasses a certain threshold – dependent on the transmittance of the BS- all possible states are steerable, regardless of their purity.

This theoretical modelling was tested experimentally. Squeezed vacuum states were generated by the mechanism known as *polarization self-rotation* [1] on  $^{87}\text{Rb}$  vapour, reaching up to 2.3 dB of squeezing. To obtain entangled states, the squeezed states were combined with vacuum on a BS. Then the covariance matrix of the resulting two-mode Gaussian state was reconstructed by means of detecting the variances of Stokes parameters, and establishing the vacuum noise level.

This thesis proposes three methods to determine vacuum noise level, two of them not requiring independent measurements besides those necessary to measure the state fluctuations. A comparative analysis of the three methods is presented.

Covariance matrixes were studied according to the theoretical model proposed; as a result, Entanglement was found, but not Steering. The results were consistent with the theoretical predictions. Finally, we comment on the difficulties found on the search for Steering.

Keywords:

Quantum Steering, Squeezing, Gaussian states, Squeezing via polarization self-rotation, Rubidium.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
1.1	Motivación y objetivos . . . . .	1
1.2	¿Qué es el Steering? . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Formalismo</b>	<b>5</b>
2.1	Modos del campo electromagnético . . . . .	5
2.2	Estados puros y estados mezcla . . . . .	7
2.3	El espacio de fase . . . . .	8
2.4	Squeezing . . . . .	9
2.5	Correlaciones cuánticas . . . . .	10
2.5.1	No localidad de Bell . . . . .	11
2.5.2	Entrelazamiento . . . . .	12
2.5.3	Steering . . . . .	13
2.6	La matriz de covarianza . . . . .	14
2.6.1	Transformaciones simplécticas e invariantes simplécticos	16
2.6.2	Entrelazamiento . . . . .	20
2.6.3	Steering . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Steering en estados Gaussianos de dos modos</b>	<b>24</b>
3.1	Situación considerada y parametrizaciones . . . . .	24
3.1.1	Primera parametrización: estado comprimido con ruido extra . . . . .	26
3.1.2	Segunda parametrización: ruido independiente en ambas cuadraturas . . . . .	31
3.1.3	Tercera parametrización: estado genérico . . . . .	32
3.1.4	Mezcla con un estado térmico . . . . .	34
3.2	Conclusiones . . . . .	36

<b>4</b>	<b>Experimento</b>	<b>39</b>
4.1	Antecedentes . . . . .	39
4.1.1	Autorrotación de la polarización . . . . .	40
4.2	Parámetros de Stokes . . . . .	42
4.3	Fluctuaciones cuánticas en parámetros de Stokes . . . . .	43
4.4	Matriz de covarianza de los parámetros de Stokes . . . . .	46
4.5	Montaje . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Resultados obtenidos</b>	<b>54</b>
5.1	Método 1: medidas de vacío . . . . .	56
5.2	Método 2: resolver la relación de intensidades entre Alice y Bob	62
5.3	Método 3: fijación del mínimo autovalor simpléctico . . . . .	71
5.4	Errores experimentales . . . . .	76
5.5	Comparación de los tres métodos . . . . .	78
<b>6</b>	<b>Conclusiones finales</b>	<b>82</b>
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>84</b>

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Motivación y objetivos

Durante los años 2010 a 2015 el Grupo de Espectroscopía Láser (GEL) del Instituto de Física de la Facultad de Ingeniería investigó la generación de estados comprimidos de la luz mediante autorrotación de la polarización en vapor de Rubidio. Durante estas investigaciones se logró generar estados Gaussianos de vacío comprimido, reconstruir las matrices de covarianza de estados de dos modos, y detectar Entrelazamiento. Se encontró que, para detectar Entrelazamiento, era suficiente con reconstruir la matriz de covarianza del estado generado al separar un estado comprimido en un divisor de haz (BS).

Una vez constatado que era posible detectar Entrelazamiento, nos preguntamos si, con el mismo montaje, sería posible detectar otras correlaciones cuánticas más restrictivas; en particular elegimos investigar el Steering. El proceso que genera compresión también genera exceso de ruido en la cuadratura anticomprimida, por lo que cabía preguntarse cómo afectaba el exceso de ruido al Steering.

Esto nos llevó a formular las siguientes preguntas:

- ¿Es posible detectar Steering en el estado de dos modos generado al incidir un estado de vacío comprimido en un divisor de haz?
- En caso afirmativo, ¿es posible hacerlo con los estados comprimidos logrados mediante autorrotación de la polarización en vapor de Rubidio?

Para responder la primera pregunta realizamos un estudio teórico de las condiciones requeridas para la existencia de Steering en esa clase de estados de

dos modos, utilizando el formalismo simpléctico; encontramos que es posible detectar Steering, pero existen límites en la Pureza y compresión del estado inicial, que dependen de las características del divisor de haz. Categorizamos todos los estados posibles según su pureza y compresión.

Para responder la segunda pregunta regresamos al montaje experimental anterior, consiguiendo estados comprimidos y entrelazados. Implementamos dos nuevos métodos para determinar el nivel de ruido del vacío. No detectamos Steering, pero los estados obtenidos eran muy cercanos a los límites teóricos hallados; otro método de generación de estados comprimidos que llevara a más compresión o menos exceso de ruido en la cuadratura anticomprimida podría dar resultados positivos.

## 1.2. ¿Qué es el Steering?

El Steering es un tipo de correlación entre las distribuciones estadísticas de medidas en estados bipartitos. La palabra *steering* fue utilizada por primera vez en el contexto de la Mecánica Cuántica por E. Schrödinger en 1935 [2] para describir el fenómeno por el que las medidas en una parte de un estado no separable parecían condicionar los resultados de las medidas en la otra parte:

*“ It is rather discomfoting that the theory should allow a system to be steered or piloted into one or the other type of state at the experimenter’s mercy in spite of his having no access to it”.*

Existirá Steering cuando la probabilidad de obtener un determinado resultado de una cierta medida realizada en un sistema (Bob) esté condicionada por el resultado de una medida realizada en otro sistema (Alice) con el cual no existe ninguna interacción <sup>1</sup>. El concepto de Steering fue formalizado en 2007 por Wiseman, Jones y Doherty [5]. Comparado con el Entrelazamiento o el teorema de la no localidad de Bell de 1964 [6], es muy reciente.

A partir del trabajo de Wiseman *et al* otros autores han definido el Steering desde el punto de vista de la información [7] o como recurso [8]. Un cuantificador del Steering para estados Gaussianos bajo medidas Gaussianas fue formalizado

---

<sup>1</sup>En el caso ideal de la demostración de Steering los sistemas están causalmente separados. Los experimentos que tratan de realizar este caso ideal pueden llegar a ser extremadamente complejos, ver por ejemplo [3] para la demostración de Steering y [4] para la demostración de la no localidad de Bell.

en 2015 por Kogias *et al* [9]; y el estudio de Steering en estados Gaussianos bajo medidas no Gaussianas fue presentado por S. W. Ji *et al* en 2016 [10].

El Steering surge como un concepto intermedio al Entrelazamiento y la no localidad de Bell. La diferencia entre ellos reside en cuáles sistemas nos permitimos utilizar la Mecánica Cuántica para predecir las probabilidades de los resultados de una cierta medida.

Consideremos primero el caso del entrelazamiento. Tenemos dos sistemas que pertenecen a Alice y Bob, y no interactúan entre sí. Alice y Bob confían en la Mecánica Cuántica y la utilizan para interpretar los resultados de medidas en sus sistemas, por lo que pueden (por separado) conocer los estados cuánticos de sus sistemas. Si demuestran que la probabilidad de que el sistema de uno de ellos esté en un cierto estado depende del estado del otro, entonces sus sistemas comparten un estado entrelazado.

En el caso de la no localidad de Bell, partimos de la misma situación pero ni Alice ni Bob confían en la Mecánica Cuántica. Ellos sólo cuentan con las probabilidades de obtener ciertos resultados al realizar una medida. Si encuentran una medida en el sistema de Alice y una medida en el sistema de Bob para las que puedan demostrar que la probabilidad de obtener cierto resultado en el sistema de uno está condicionada a los resultados obtenidos por el otro, entonces ambos sistemas compartirán un estado no local.

En el concepto de Steering, Bob confía en la Mecánica Cuántica y la utiliza para interpretar los resultados de sus medidas; Bob no confía en Alice para que haga lo mismo, por lo que ella sólo conoce sobre su sistema las probabilidades de obtener ciertos resultados al realizar una determinada medida. Existirá Steering cuando sea posible demostrar que la probabilidad de que el sistema de Bob esté en un cierto estado depende de los resultados de las medidas de Alice.

Una característica del Steering que lo hace interesante es que no es simétrico entre los sistemas que relaciona. Es un concepto direccionado: el sistema no confiable (Alice) dirige al sistema confiable (Bob). Esta falta de simetría lo ha vuelto un concepto muy útil en el procesamiento de información cuántica, porque cubre naturalmente los casos en que los instrumentos de medida de uno de los actores no están bien caracterizados o no son confiables [11].

Dado que el Steering es un concepto menos restrictivo que la no localidad de Bell, su primera comprobación experimental fue la primera comprobación experimental concluyente de la no localidad, realizada en 1981 por A. Aspect,

P. Grangier y G. Roger midiendo la correlación entre las polarizaciones lineales de fotones emitidos en pares por átomos de Sodio [12]. Una demostración experimental concluyente de Steering, específicamente, fue lograda en 2012 por D. Smith *et al* utilizando pares de fotones, también entrelazados en polarización [13].

El Steering ha sido estudiado también en estados Gaussianos. En 2012, Handchen *et al* demuestran Steering en estados Gaussianos partiendo de un estado con 10,2 dB de compresión generado mediante conversión paramétrica descendente (*parametric down conversion*) [14]; otros estudios de Steering en estados Gaussianos pueden encontrarse en [15] y [16]. Hasta el momento, siempre que se ha detectado Steering en la familia de estados Gaussianos, ha sido partiendo de niveles de compresión mayores a los logrados por el GEL, por lo que resulta relevante nuestra pregunta acerca de cuál es el nivel mínimo de compresión necesario. No conocemos ningún estudio anterior sobre el efecto del exceso de ruido en la cuadratura anticomprimida sobre el Steering.

## Contenido de esta tesis

Este documento está organizado de la siguiente forma: en el capítulo 2 se presenta un resumen de los conceptos necesarios para la lectura de la tesis; el capítulo 3 contiene el estudio teórico de las condiciones necesarias para la existencia de Steering en estados Gaussianos bajo un modelo sencillo de detección; el capítulo 4 detalla el montaje experimental utilizado para la obtención de estados comprimidos y la detección de las matrices de covarianza de los estados en los que buscábamos Steering; el capítulo 5 presenta el análisis de los resultados obtenidos según tres modalidades distintas de determinación del nivel de ruido del vacío; y finalmente el capítulo 6 presenta una visión global del trabajo y las conclusiones finales.

# Capítulo 2

## Formalismo

### 2.1. Modos del campo electromagnético

Un modo del campo electromagnético (EM) es un campo vectorial  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  normalizado que es solución de las ecuaciones de Maxwell en el vacío [17].

Dado un modo cualquiera se puede construir una base ortonormal de modos  $\vec{f}_m(\vec{r}, t)$ , y cualquier campo clásico complejo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  se puede escribir en esa base:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_m \varepsilon_m \vec{f}_m(\vec{r}, t). \quad (2.1)$$

Las partes real e imaginaria de la amplitud  $\varepsilon_m$  del modo  $m$  son las cuadraturas  $X_m$  y  $P_m$

$$\varepsilon_m = X_m + iP_m. \quad (2.2)$$

Una de las bases de modos posible es la base de las ondas planas monocromáticas  $\vec{u}_m$

$$\vec{u}_m = \vec{\epsilon}_m e^{i(\vec{k}_m \cdot \vec{r} - \omega_m t)} \quad (2.3)$$

donde la suma es sobre el vector de onda  $\vec{k}$  y el versor de polarización  $\hat{\epsilon}$ , y la frecuencia  $\omega_m$  es  $\omega_m = c|\vec{k}_m|$ .

En Mecánica Cuántica hemos de pasar del campo vectorial  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  al operador campo  $\hat{E}(\vec{r}, t)$ . Una forma de hacerlo es partiendo de los operadores de cuadraturas.

Para cada modo se definen los operadores de cuadraturas adimensionados  $p$ ,  $q$ , pertenecientes a un espacio de Hilbert, de forma que cumplan las relacio-

nes de conmutación:

$$[q, q] = [p, p] = 0, \quad (2.4a)$$

$$[q, p] = i. \quad (2.4b)$$

Los operadores de cuadraturas de modos ortogonales conmutan.

En función de los operadores de cuadraturas, el Hamiltoniano para el campo EM en el modo es

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (q^2 + p^2), \quad (2.5)$$

y el espacio de Hilbert que mencioné anteriormente corresponde al generado por el Hamiltoniano.

A partir de los vectores de cuadraturas, se definen los operadores de aniquilación y creación  $a$ ,  $a^\dagger$  que representan respectivamente la aniquilación o creación de un fotón en el modo, y el operador número  $n$  cuyo valor esperado es el número de fotones en el modo correspondiente.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (q + ip) \quad (2.6)$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (q - ip) \quad (2.7)$$

$$n = a^\dagger a. \quad (2.8)$$

En función de ellos el Hamiltoniano adquiere la elegante forma

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.9)$$

$$H = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.10)$$

Cualquier operador campo se puede expandir en una base ortonormal de modos. Por ejemplo en la base de ondas planas (2.3)

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sum_l \varepsilon_l^{(1)} a_l \vec{u}_l(\vec{r}, t). \quad (2.11)$$

Aquí  $\varepsilon_l^{(1)} = \sqrt{\frac{\hbar\omega_l}{2\varepsilon_0}}$  es el campo eléctrico de un fotón [18].

Para campos de frecuencia y polarización definida (monomodo) los autoestados del Hamiltoniano serán también autoestados del operador  $n$ . Estos autoestados del Hamiltoniano (y de  $n$ ) forman una base del espacio de Hilbert, llamada la *base de autoestados de Fock*  $\{|n\rangle\}$ . Para casos multimodo, dicha base se extiende a la base de la segunda cuantización  $\{|n_1, n_2, \dots\rangle\}$ , base de los estados número, donde los índices van sobre todos los pares  $\{\vec{k}, s\}$ .

Los estados número son ortogonales entre sí, y los operadores creación y aniquilación actúan sobre ellos sumando un fotón o restando un fotón en el modo correspondiente.

$$a_j |n_1, n_1, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j} |n_1, n_1, \dots, n_j - 1, \dots\rangle \quad (2.12)$$

$$a_j^\dagger |n_1, n_1, \dots, n_j, \dots\rangle = \sqrt{n_j + 1} |n_1, n_1, \dots, n_j + 1, \dots\rangle. \quad (2.13)$$

El estado de vacío se denomina  $|\{0\}\rangle = |0_1, 0_2, \dots, 0_j, \dots\rangle$ ; todos los estados pueden obtenerse a partir de él usando los operadores de creación

$$|\{n_j\}\rangle = \prod_j \frac{(a_j^\dagger)^{n_j}}{\sqrt{n_j!}} |\{0\}\rangle, \quad (2.14)$$

y cualquier estado de campo se podrá escribir en esta base [19].

## 2.2. Estados puros y estados mezcla

Hasta ahora se ha trabajado exclusivamente con *kets*. Un ket es un vector en el espacio de Hilbert que describe un estado puro: si se conoce el ket que describe un sistema se conoce toda la información disponible sobre él.

Un sistema también puede estar en un ensamble estadístico de estados; en ese caso está en un estado mezcla.

Los estados mezcla no pueden ser descritos por un ket. Para incluir la posibilidad de estados mezcla se usa la formulación del *operador densidad*, cuya representación es la *matriz densidad* [20].

Dado un sistema en un ensamble de estados puros  $\{|P_i\Psi_i\rangle\}$ , es decir un conjunto de estados puros normalizados  $|\Psi_i\rangle$  con probabilidad  $P_i$ , su operador densidad  $\rho$  es:

$$\rho = \sum_i P(|\Psi_i\rangle) |\Psi_i\rangle \langle \Psi_i|. \quad (2.15)$$

El operador densidad es hermítico, semidefinido positivo, y cumple  $Tr(\rho) = 1$  [21].

El operador densidad también puede describir estados puros; en ese caso el ensamble tiene un sólo elemento, con probabilidad 1.

La Pureza  $\mu$  es un cuantificador de qué tan parecido a un estado puro es el estado descrito por una matriz densidad. Vale 1 para estados puros, 0 para estados máximamente mezclados, y se define de la siguiente manera:

$$\mu = Tr(\rho^2). \quad (2.16)$$

### 2.3. El espacio de fase

En la sección anterior, se describía a los sistemas como operadores en el espacio de Hilbert; en esta sección veremos su descripción en el espacio de fase.

El espacio de fase queda definido por los operadores de cuadraturas. Sean  $\{Q, P\} \in \mathbb{R}$  los autovalores de  $q$  y  $p$ . A lo largo de esta sección, para mayor claridad, mayúsculas representarán valores posibles de resultados de medidas y minúsculas representarán operadores. Para un modo, la representación del espacio de fase es el plano complejo de  $\alpha = (Q + iP) / \sqrt{2}$ ;  $\alpha$  son los autovalores del operador aniquilación en ese modo  $a$ .

La descripción de un estado en este espacio es alguna de sus distribuciones de cuasi-probabilidad definidas en el plano  $\alpha$  [22], [23]. En esta tesis hemos elegimos usar la descripción de la función de Wigner.

La función de Wigner es una densidad de cuasi-probabilidad; fue la primera en ser definida en 1932 por E.P. Wigner [24]. Se la denomina densidad de *cuasi-probabilidad* porque funciona como una densidad de probabilidad en el plano  $\{Q, P\}$ , pero puede no cumplir con las propiedades de una densidad de probabilidad por tomar valores negativos.

La función de Wigner para un estado de matriz densidad  $\rho$  se define de la siguiente forma:

$$W(Q, P) = \frac{1}{2\pi} \int \left\langle Q + \frac{X}{2} \left| \rho \right| Q - \frac{X}{2} \right\rangle e^{iPX} dX. \quad (2.17)$$

La integral en  $P$  de la función de Wigner de un estado es la densidad de probabilidad de mediciones del operador  $q$  en ese estado, y viceversa. Esta propiedad no es compartida por otras funciones de cuasiprobabilidad.

La función de Wigner también es útil para obtener los valores esperados de operadores. Si un operador  $G(p, q)_W$  es Weyl (simétrico) en  $p$  y  $q$  se cumple que:

$$\langle G(p, q)_W \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} G(P, Q)_W W(P, Q) dP dQ. \quad (2.18)$$

Cuando un estado tiene una función de Wigner Gaussiana también serán Gaussianas sus distribuciones de probabilidad para los operadores  $p$  y  $q$  (la integral de una función Gaussiana de dos variables en una de ellas es también Gaussiana). A los estados que tienen este tipo de distribución se les llama estados Gaussianos.

Cualquier distribución estadística Gaussiana de una sola variable queda completamente determinada si se conocen su valor medio y su varianza; para estados de más de una variable es necesario conocer sus primeros y segundos momentos.

Los momentos de un operador son los valores esperados de sus potencias:  $\langle q \rangle$  es el primer momento de  $q$ ,  $\langle q^2 \rangle$  el segundo momento y así sucesivamente.

El vector de primeros momentos es el valor esperado del vector de cuadraturas  $R$ , que contiene todos los operadores de cuadraturas de un sistema. Para un estado monomodo  $R = (q, p)$ , para estados de  $n$  modos  $R = (q_1, q_2, \dots, q_n, p_1, p_2, \dots, p_n)$ ; el orden puede variar.

Para un estado dado los segundos momentos de los operadores  $q, p$  en orden Weyl están contenidos en su matriz de covarianza, se definirá en la sección 2.6.

## 2.4. Squeezing

Si dos operadores  $A, B$  cualesquiera satisfacen la regla de conmutación  $[A, B] = iC$ , el principio de incertidumbre de Heisenberg establece que

$$\langle (\Delta A)^2 \rangle \langle (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} | \langle C \rangle |^2, \quad (2.19)$$

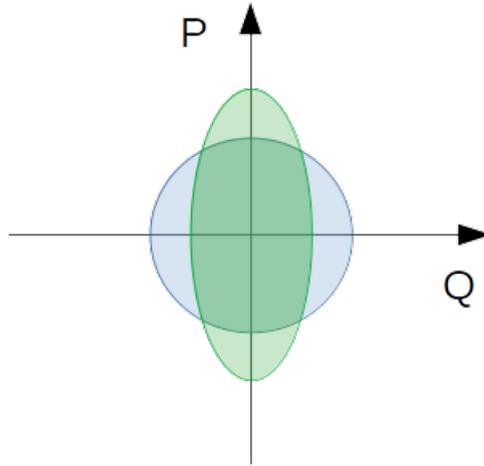
donde  $(\Delta A)^2 = A^2 - \langle A \rangle^2$  [18].

Un estado está comprimido (*squeezed*) si se cumple que el valor medio

de uno de los operadores  $A$  o  $B$  es menor a  $1/2 | \langle C \rangle |$ . Claramente el otro operador debe ser mayor a  $1/2 | \langle C \rangle |$  para que se cumpla la condición anterior.

Si elegimos  $A$  y  $B$  para que sean los operadores de cuadraturas  $q$  y  $p$ , entonces  $C \equiv 1$ . Un estado estará comprimido en una cuadratura cuando, para alguna elección de los ejes de cuadraturas, la varianza de ese operador sea menor a  $1/2$  [25].

Para estados de vacío, y para la familia de los estados coherentes, la varianza en ambas cuadraturas es  $1/2$  independientemente de la elección de ejes [19]. Los estados Gaussianos comprimidos, es decir, aquellos para los que la varianza de una de sus cuadraturas es menor a  $1/2$  son los únicos estados Gaussianos no clásicos [26],[19]; serán el recurso que usaremos para generar Entrelazamiento y otras posibles correlaciones cuánticas (ver figura 2.1).



**Figura 2.1:** Representación esquemática en el espacio de fase del estado de vacío (azul) y un estado de vacío comprimido en la cuadratura  $q$  (verde).

## 2.5. Correlaciones cuánticas

Consideremos un sistema de dos partes, de dos niveles cada una, es decir dos Qbits. Este tipo de sistema podría representar dos átomos con dos niveles de energía, o la polarización de dos fotones.

Los estados  $|\phi\rangle$  o  $|\psi\rangle$

$$|\phi\rangle = |0\rangle_A |1\rangle_B \quad (2.20)$$

$$|\psi\rangle = \frac{|0\rangle_A |0\rangle_B + |1\rangle_A |1\rangle_B}{\sqrt{2}}. \quad (2.21)$$

son estados posibles del sistema. Ambos son estados puros.  $|\phi\rangle$  es separable en la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}_A \otimes \{|0\rangle, |1\rangle\}_B$  y  $|\psi\rangle$  no lo es: está entrelazado.

Estados entrelazados son aquellos que no pueden escribirse como el producto de un estado en el subsistema A y un estado en el subsistema B. Para el estado  $|\psi\rangle$ , una medida en el subsistema A que lo proyecte en el estado  $|0\rangle_A$  proyectará al sistema B en  $|0\rangle_B$ , aunque durante el proceso de medida no se haya interactuado con el sistema B de ninguna forma.

El Entrelazamiento es la correlación cuántica más estudiada. Además del Entrelazamiento también son importantes el Steering (sobre el que trata esta tesis) y la no localidad de Bell.

Se definirá a continuación Entrelazamiento, Steering y no localidad de Bell como tareas, siguiendo el trabajo de Wiseman, Jones y Doherty [5].

### 2.5.1. No localidad de Bell

En el caso de la no localidad de Bell, consideremos una tarea con tres participantes: Alice, Bob y Charlie.

Alice y Bob pueden preparar un estado bipartito compartido entre ellos todas las veces que quieran. Cada vez que lo preparan, cada uno hace una medida en su parte; no pueden comunicarse entre ellos luego de preparar el estado. Su tarea es convencer a Charlie de que el estado que preparan está entrelazado.

Charlie acepta la Mecánica Cuántica como correcta pero desconfía de Alice y Bob. Si las correlaciones entre sus medidas se pueden explicar por un modelo de variables aleatorias locales desconocidas (modelos *local hidden variable* LHV), Charlie no se va a convencer de que el estado está entrelazado.

Por otro lado, si no se pueden explicar las correlaciones que encuentran mediante LHV, Charlie deberá aceptar que el estado está entrelazado, y Alice y Bob habrán logrado demostrar que su estado es no local.

### 2.5.1.1. Formulación matemática

Sea  $D_\alpha$  el conjunto de todos los observables en el espacio de Hilbert de Alice, y  $M_\alpha \subseteq D_\alpha$  el conjunto de medidas proyectivas que Alice puede hacer. Llamamos  $A$  a un elemento de  $D_\alpha$ , y  $\lambda(A)$  al conjunto de autovalores de  $A$   $\{a\}$ . La probabilidad de que Alice obtenga el resultado  $a$  al hacer la medida  $A$  en un sistema con matriz densidad  $\rho$  es  $P(a|A; \rho)$ , y  $\Pi_a^A$  es el proyector tal que  $A\Pi_a^A = a\Pi_a^A$ . Para Bob se definen análogamente todos estos elementos, de modo que la probabilidad conjunta de obtener los resultados  $a$  en las medidas de Alice y  $b$  en las medidas de Bob es:

$$P(a, b|A, B; \rho) = \text{Tr}[(\Pi_a^A \otimes \Pi_b^B)\rho]. \quad (2.22)$$

En un experimento se muestra que un estado viola la condición de localidad de Bell cuando y sólo cuando *no se cumpla* que existan una variable local oculta  $\xi$  y distribuciones de probabilidad normalizadas  $\{\wp(a|A, \xi), \wp(b|B, \xi)\wp_\xi\}$  tales que para todo  $a \in \lambda(A)$ ,  $b \in \lambda(B)$ ,:

$$P(a, b|A, B; \rho) = \sum_{\xi} \wp(a|A, \xi)\wp(b|B, \xi)\wp_\xi. \quad (2.23)$$

Decimos que un estado es Bell no local si existe un conjunto de medidas  $M_\alpha \times M_\beta$  que permite que se viole la condición (2.23).

### 2.5.2. Entrelazamiento

Un estado mezcla está entrelazado cuando *no puede* escribirse de la siguiente forma:

$$\rho = \sum_{\xi} \sigma_\xi \otimes \varrho_\xi \wp_\xi; \quad (2.24)$$

$\sigma_\xi \in D_\alpha$  y  $\varrho_\xi \in D_\beta$  son matrices densidad que representan algún estado cuántico de los subsistemas A y B (correspondientes a Alice y Bob), dependientes de la variable  $\xi$  que tiene distribución de probabilidad  $\wp_\xi$ .

En una definición análoga a la anterior, Alice y Bob tienen conjuntos de medidas que pueden realizar. Se convencerán de que su estado está entrelazado cuando no puedan predecir la distribución conjunta de probabilidad de sus medidas a través de los resultados que obtuvieron independientemente.

El estado  $\rho$  está entrelazado sii *no se cumple* que existan una variable local oculta  $\xi$  y una distribución de probabilidad  $\wp_\xi$  tales que para todo  $a \in \lambda(A)$ ,  $b \in \lambda(B)$  en  $D_\alpha, D_\beta$

$$P(a, b|A, B; \rho) = \sum_{\xi} P(a|A, \sigma_\xi)P(b|B, \varrho_\xi)\wp_\xi. \quad (2.25)$$

### 2.5.3. Steering

En el caso del Steering tenemos una tarea con dos participantes, Alice y Bob. Alice prepara un estado entrelazado bipartito y le envía una parte a Bob, puede hacerlo cuantas veces quiera.

La tarea de Alice es convencer a Bob de que el estado está entrelazado. Bob acepta que la Mecánica Cuántica describe los resultados de las medidas que él hace, pero no confía en Alice. Si las correlaciones entre los resultados de las medidas de Bob y las de Alice pueden explicarse mediante un modelo en el que el estado de Bob está definido independientemente de las medidas de Alice, aunque sea desconocido para él (modelos *local hidden state* LHS), Alice no logrará convencerlo.

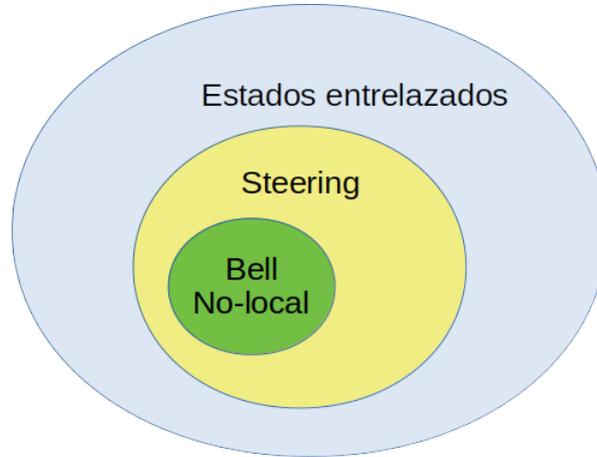
Si, al contrario, ningún modelo LHS puede explicar las correlaciones entre sus medidas, Bob se verá obligado a aceptar que comparten un estado entrelazado. Alice logrará su cometido si diferentes resultados en sus medidas generan diferentes distribuciones estadísticas para las medidas de Bob. Cuando esto suceda diremos que Alice puede *dirigir* a Bob, o que el estado es *dirigible*.

#### 2.5.3.1. Formulación matemática

Podemos decir que las medidas de Alice  $M_\alpha$  sobre el estado común  $\rho$  dirigen el estado de Bob sii no se cumple que existan una variable local oculta  $\xi$  y una distribución de probabilidad  $\wp_\xi$  tales que para todo resultado de las medidas de Alice puede realizar  $a \in \lambda(A)$  y todo valor esperado de un observable en el espacio de Hilbert de Bob  $b \in \lambda(B)$ , para todos  $A \in M_\alpha, B \in D_\beta$  tengamos

$$P(a, b|A, B; \rho) = \sum_{\xi} \wp(a|A, \xi)\wp(b|B, \rho_\xi)\wp_\xi. \quad (2.26)$$

Comparando esta condición con las condiciones que se deben violar para que exista Entrelazamiento (2.25), y no localidad de Bell (2.23), podemos concluir que el Steering es un concepto intermedio entre el Entrelazamiento



**Figura 2.2:** Si un estado es Bell no-local, dicho estado es también dirigible y está entrelazado; pero el recíproco no se cumple.

y la no localidad, siendo la no localidad el más restrictivo de los tres (ver figura 2.2); y que mientras éstos son simétricos entre las partes (Alice y Bob), el Steering actúa desde Alice hacia Bob.

Para el caso de estados puros los tres conceptos son equivalentes. En 1991 Gisin [27] demuestra la equivalencia entre Entrelazamiento y no localidad para el caso de estados puros, y también demuestra que esa equivalencia sólo se da para estos estados. Como el Steering es un concepto intermedio entre ellos, los tres coinciden para estados puros, y sólo para estados puros.

## 2.6. La matriz de covarianza

Para un estado de  $n$  modos el vector de cuadraturas  $R$  se construye con los  $2n$  operadores  $p_j$  y  $q_j$  en orden  $R = (q_1, p_1, q_2, p_2, \dots, \dots, q_n, p_n)$ . En esta notación las relaciones de conmutación son

$$[R_k, R_l] = i\Omega_{k,l}, \quad (2.27)$$

donde  $\Omega$  es la matriz simpléctica, definida de la siguiente forma:

$$\Omega = \bigoplus_{k=1}^n \omega, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

El vector de primeros momentos se calcula tomando el valor esperado de  $R$ :  $\langle R \rangle = Tr[\rho R]$ .

La matriz de covarianza  $\sigma$  se define a partir del vector  $R$

$$\sigma_{kl} \equiv [\sigma]_{kl} = \frac{1}{2} \langle R_k R_l + R_l R_k \rangle - \langle R_k \rangle \langle R_l \rangle. \quad (2.29)$$

Todos los operadores cuyos valores esperados la componen son Weyl (simétricos), de forma que los valores esperados se puedan calcular utilizando la propiedad (2.18) de la función de Wigner.

Como ejemplo, para un estado de un solo modo la matriz de covarianza es:

$$\sigma = \begin{pmatrix} \Delta q^2 & \Delta qp \\ \Delta pq & \Delta p^2 \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

donde  $\Delta qp = \frac{1}{2} \langle qp + pq \rangle - \langle p \rangle \langle q \rangle$ .

Para estados de dos modos se puede escribir la matriz de covarianza en forma de matriz de bloques

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

donde  $A$  es la matriz de covarianza de un modo, digamos el de Alice;  $B$  es la matriz de covarianza del otro;  $C$  contiene todos los términos que incluyen cuadraturas de ambos modos (por ejemplo  $\Delta q_{ApB}$ ) y se dice que contiene las *correlaciones* entre ellos.

Las relaciones de incertidumbre entre los operadores de  $R$  imponen restricciones en la matriz de covarianza, que sólo representará un sistema físico si se cumple

$$\sigma + \frac{i}{2} \Omega \geq 0. \quad (2.32)$$

Esta condición implica que  $\sigma$  debe ser definida positiva [28].

### 2.6.1. Transformaciones simplécticas e invariantes simplécticos

En el espacio de fase, nos interesan las operaciones que, aplicadas a un vector de cuadraturas o una matriz de covarianza, generen otro vector de cuadraturas o matriz de covarianza. Para que eso suceda deben preservar las relaciones de conmutación entre los  $R_k$  cumpliendo con la condición (2.32).

A las transformaciones que preservan las relaciones de conmutación (2.27) se les llama *transformaciones simplécticas*.

Si tenemos una transformación  $S$  que actúa sobre los vectores de cuadraturas

$$S : R \longrightarrow R' := SR \quad (2.33)$$

y que cumple (2.27), entonces  $S$  debe preservar la matriz simpléctica. (2.28)

$$S\Omega S^T = \Omega. \quad (2.34)$$

El conjunto  $S$  de matrices cuadradas reales de tamaño  $2n$  ( $S \in M(2n, \mathbb{R})$ ) que satisfacen (2.34), junto con el producto matricial, forman el *grupo real simpléctico*. Los elementos de este grupo son las *transformaciones simplécticas* o *canónicas*.

$$S_p(2n, \mathbb{R}) := \{S \in M(2n, \mathbb{R}) : S\Omega S^T = \Omega\}. \quad (2.35)$$

Las transformaciones simplécticas en el espacio de fase corresponden en el espacio de Hilbert a transformaciones unitarias que preservan la gaussianidad (*unitarias Gaussianas*). Estas transformaciones unitarias, en dos modos, corresponden a las generadas por Hamiltonianos bilineales y siempre se pueden descomponer en operadores de Squeezing de un modo, y operadores correspondientes a operaciones pasivas (aquellas que pueden ser implementadas por métodos de óptica lineal: espejos, BS, láminas de onda, etc.) [29].

En particular las transformaciones simplécticas locales

$$S = \bigoplus_{k=1}^n S_k \in S_p(2, \mathbb{R}) \oplus \dots \oplus S_p(2, \mathbb{R}) \quad (2.36)$$

corresponden a transformaciones unitarias Gaussianas locales

$$U(S) = \bigotimes_{k=1}^n U_k. \quad (2.37)$$

Cada matriz en  $S_p(2, \mathbb{R})$  se puede expresar como el producto entre rotaciones

$$R(\phi) := \begin{pmatrix} \sin \phi & -\cos \phi \\ \cos \phi & \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

y matrices de Squeezing

$$D(\xi) := \begin{pmatrix} \xi^{1/2} & 0 \\ 0 & \xi^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.39)$$

A las cantidades y propiedades que no varían bajo transformaciones simplécticas se les llama invariantes simplécticos. Todos los invariantes simplécticos son por definición independientes de la elección de ejes de cuadraturas. Por ejemplo, que la matriz de covarianza sea definida positiva es un invariante simpléctico.

En estados de más de un modo se puede distinguir entre invariantes simplécticos globales -que no cambian ante transformaciones simplécticas de todo el estado- y locales -que no cambian ante transformaciones simplécticas que afectan sólo a una parte del estado, por ejemplo sólo a un modo.

El teorema de Williamson establece que las matrices definidas positivas pueden ser diagonalizadas por transformaciones simplécticas.

*Teorema de Williamson:* Para cada  $V \in M(2n, \mathbb{R})$  definida positiva, existe una matriz simpléctica  $S \in S_p(2n, \mathbb{R})$  tal que:

$$SVS^T = \begin{pmatrix} \nu_1 & & & & \\ & \nu_1 & & & \\ & & \dots & & \\ & & & \nu_n & \\ & & & & \nu_n \end{pmatrix} := W > 0 \quad (2.40)$$

donde  $W$  es la *forma de Williamson* de  $V$ , y los valores  $\{\nu_1, \dots, \nu_n\}$  son sus *autovalores simplécticos*, o su *espectro simpléctico*.

Los autovalores simplécticos se pueden calcular sin tener que hacer la diagonalización simpléctica porque son los autovalores usuales de la matriz  $|i\Omega V|$ .

La forma de Williamson es única excepto por permutaciones [30].

Las matrices de covarianza para estados de dos modos están en el conjunto  $S(4, \mathbb{R})$ , y tienen sólo dos autovalores simplécticos que llamaremos  $\{\nu_-, \nu_+\}$ , siendo  $\nu_-$  el menor de los dos. Escribiendo la matriz de covarianza en forma de matriz de bloques, los autovalores se pueden calcular en función de los determinantes.

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$A, B \in S(2, \mathbb{R})$  y  $C \in M(2, \mathbb{R})$ .

$$\nu_{\pm} = \sqrt{\frac{\Delta(\sigma) \pm \sqrt{\Delta(\sigma)^2 - 4 \det(\sigma)}}{2}}, \quad (2.42)$$

donde  $\Delta(\sigma) = \det(A) + \det(B) + 2\det(C)$ .

Los determinantes de A, B y C son invariantes simplécticos locales, el determinante de  $\sigma$  y  $\Delta(\sigma)$  son invariantes simplécticos globales.

### 2.6.1.1. Representación de estados físicos

¿Cómo evaluar si una matriz es una matriz de covarianza que corresponde a un estado físico? Tiene que respetar las relaciones de conmutación entre los operadores de cuadraturas (2.32). Para un estado de dos modos la condición  $\sigma + \frac{i}{2}\Omega \geq 0$  reescrita en función de los autovalores simplécticos es [28]

$$\sigma > 0, \nu_- \geq 1/2 \quad (2.43)$$

o, usando la expresión (2.42) para el autovalor simpléctico  $\nu_-$ ,

$$\sigma > 0, \det(\sigma) \geq 1, \Delta(\sigma) \leq 1 + 4\det(\sigma). \quad (2.44)$$

### 2.6.1.2. Pureza

En el espacio de Hilbert se define la Pureza como  $\mu(\rho) = \text{Tr}(\rho^2)$ . Para calcularla en función de invariantes simplécticos usamos la siguiente propiedad de la función de Wigner.

Sean  $O_1$  y  $O_2$  dos operadores con representaciones de Wigner  $W_1 W_2$

$$Tr[O_1 O_2] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int W_1(X - \langle R \rangle), W_2(X - \langle R \rangle) d^{2n} X, \quad (2.45)$$

donde  $X$  es el vector de variables  $X \equiv (Q_1, Q_2, \dots, Q_n, P_1, P_2, \dots, P_n)$ .

La función de Wigner del operador densidad de un estado Gaussiano de  $n$  modos es [22]

$$W_\rho = \frac{e^{(X-\langle R \rangle)\sigma(X-\langle R \rangle)}}{\pi^n \sqrt{\det(\sigma)}}. \quad (2.46)$$

Si usamos la propiedad anterior generalizada a dos modos para hallar la Pureza tenemos

$$\mu = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int W_\rho^2 d^{2n} X \quad (2.47)$$

$$\mu = \left(\frac{1}{2\pi^2 \det(\sigma)}\right)^n \int e^{2(X-\langle R \rangle)\sigma(X-\langle R \rangle)} d^{2n} X \quad (2.48)$$

y obtenemos que la Pureza  $\mu$  sólo depende del determinante de la matriz de covarianza: [31]

$$\mu(\rho) = \frac{1}{2^n \sqrt{\text{Det}(\sigma)}}. \quad (2.49)$$

### 2.6.1.3. Fidelidad de Uhlmann

La Fidelidad es un cuantificador de cuán similares son los estados que representan dos operadores densidad. Dadas dos matrices densidad  $\rho_1, \rho_2$  la fidelidad de Uhlmann entre ellos  $\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2)$  es

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \left(Tr[(\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1})^{1/2}]\right)^2. \quad (2.50)$$

La fidelidad vale 1 cuando las matrices densidad  $\rho_1, \rho_2$  corresponden al mismo operador densidad. Tiene la ventaja de que es independiente de la base que se elija para la matriz densidad.

Para estados Gaussianos, dicha fidelidad puede calcularse a partir de las matrices densidad y los vectores de primeros momentos. La solución para es-

tados de un modo fue obtenida en 1997 por H. Scutaru [32]; P. Marian y T. Marian lograron la generalización para más modos en 2012 [33].

En el caso particular de dos modos, la fidelidad entre los estados de matrices densidad  $\rho_1, \rho_2$  con matrices de covarianza  $\sigma_1, \sigma_2$  y vectores de primeros momentos  $\bar{R}_1, \bar{R}_2$  es:

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = Tr[\rho_1 \rho_2] \left( \sqrt{\chi} + \sqrt{\chi - 1} \right) \quad (2.51)$$

donde  $\chi = 2\sqrt{\mathcal{A}} + 2\sqrt{\mathcal{B}} + \frac{1}{2}$ ,

$$\mathcal{A} = \frac{\det(\Omega \sigma_1 \Omega \sigma_2 - \mathbb{I}_4/4)}{\det(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad (2.52)$$

$$\mathcal{B} = \frac{\det(\sigma_1 + i\Omega/2) \det(\sigma_2 + i\Omega/2)}{\det(\sigma_1 + \sigma_2)} \quad (2.53)$$

y la traza del producto de las matrices densidad es

$$Tr[\rho_1 \rho_2] = \frac{\exp\left(-\frac{1}{2} (\bar{R}_1 - \bar{R}_2)^T (\sigma_1 + \sigma_2)^{-1} (\bar{R}_1 - \bar{R}_2)\right)}{\sqrt{\det(\sigma_1 + \sigma_2)}} \quad (2.54)$$

## 2.6.2. Entrelazamiento

Para el caso de estados Gaussianos de dos modos, una matriz de covarianza representa un estado entrelazado cuando satisface [28]

$$2\sqrt{\det(A) \det(B)} + (\det(C))^2 \leq 4\det(\sigma) + \det(A) \det(B). \quad (2.55)$$

Es necesario elegir un cuantificador para el Entrelazamiento de un estado. En esta tesis usamos la Negatividad Logarítmica [34], pero otras opciones podrían ser el Entrelazamiento de Formación [35], [36], la Entropía Cuántica Relativa [37], o el Entrelazamiento *Squashed* [38], por mencionar algunas.

El *teorema fundamental del procesamiento de la Información Cuántica* [37] establece que no se puede crear Entrelazamiento mediante procedimientos que involucren sólo operaciones locales y comunicación clásica (LOCC). En este contexto, LOCC significa operaciones locales independientes, u operaciones lo-

cales en un subsistema condicionadas a la comunicación, por métodos clásicos, de los resultados de operaciones locales realizadas previamente en el otro.

Una función que cuantifique el Entrelazamiento debe cumplir dos condiciones: que sea cero en estados separables (que pueden crearse mediante protocolos LOCC), y que no crezca ante estas operaciones.

La Negatividad Logarítmica  $LN(\rho)$  cumple estas condiciones y además es muy sencilla de calcular:

$$LN(\rho) = \log (Tr(\tilde{\rho})) , \quad (2.56)$$

donde  $\tilde{\rho}$  es la traspuesta parcial de la matriz densidad  $\rho$ , esto es, la matriz que se obtiene al trasponer la submatriz correspondiente a uno de los subsistemas.

La condición para que un estado Gaussiano sea separable es que la matriz de covarianza asociada a  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{\sigma}$  represente un estado físico (en el sentido de la sección 2.6.1.1). La interpretación de esta condición es que la existencia del estado resultante no se ve afectada por transformaciones de simetría locales.

Como fue mencionado anteriormente, para que una matriz sea una matriz de covarianza debe cumplirse que todos sus autovalores simplécticos sean mayores a  $1/2$ . Entonces, una forma de cuantificar qué tan entrelazado está un estado, es por cuánto se desvía de esta condición, o sea, cuánto vale el menor autovalor simpléctico de la matriz traspuesta parcial.

Para un estado Gaussiano de dos modos llamaremos  $\{\tilde{\nu}_-, \tilde{\nu}_+\}$  a los autovalores simplécticos de  $\tilde{\sigma}$ . La Negatividad Logarítmica en el formalismo simpléctico depende sólo de  $\tilde{\nu}_-$  [39]:

$$LN(\sigma) = \max \{0, -\log 2\tilde{\nu}_-\} . \quad (2.57)$$

Nótese que  $\{\tilde{\nu}_-, \tilde{\nu}_+\}$  son invariantes simplécticos, por lo que la Negatividad Logarítmica es independiente de la elección de la base de cuadraturas, como corresponde a un cuantificador del Entrelazamiento.

Escribiendo  $\tilde{\nu}_-$  en función de los determinantes de las submatrices de (2.41) tenemos

$$LN(\sigma) = \max \left\{ 0, -\log \left( \sqrt{2 \left[ \tilde{\Delta} - \sqrt{\tilde{\Delta}^2 - 4 \det(\sigma)} \right]} \right) \right\} \quad (2.58)$$

donde  $\tilde{\Delta} = \det(A) + \det(B) + 2\det(C)$ .

### 2.6.3. Steering

En un estado Gaussiano, Alice tendrá la capacidad de dirigir a Bob realizando medidas Gaussianas en su subsistema si se viola la condición [40]:

$$\sigma_{AB} + \frac{i}{2}(0_A \otimes \Omega_B) \geq 0. \quad (2.59)$$

Las medidas Gaussianas son aquellas que pueden implementarse mediante transformaciones simplécticas seguidas de detección de los operadores de cuadraturas [41].

Escribiendo la condición anterior en forma matricial como en (2.41) se ve que es equivalente a dos condiciones:

$$A > 0 \quad (2.60a)$$

$$B - C^T A^{-1} C + \frac{i}{2} \Omega_B \geq 0. \quad (2.60b)$$

La matriz  $M_\sigma^B \equiv B - C^T A^{-1} C$  es el complemento de Schur de A en la matriz de covarianza  $\sigma$  [42].

La primer condición debe cumplirse siempre, porque A es la matriz de covarianza del estado de Alice, y por tanto es positiva. La segunda condición es igual a (2.32) aplicada a la matriz  $M_\sigma^B$ . Por lo que  $\sigma$  es un estado en el que Alice puede dirigir a Bob si el complemento de Schur de A no es una matriz de covarianza.

Anteriormente explicamos cómo utilizar los autovalores simplécticos para corroborar que una matriz sea o no una matriz de covarianza. La condición para que el estado no sea dirigible es que todos los autovalores simplécticos de  $M_\sigma^B$  sean mayores o iguales a 1/2.

Llamaremos  $\bar{\nu}_j^B$  a los autovalores simplécticos de  $M_\sigma^B$ . Se cuantifica cuán dirigible es  $\sigma$  por cuánto son menores a 1/2

$$G^{A \rightarrow B} = \max \left\{ 0, - \sum_{j: \bar{\nu}_j^B < 1/2} \log(2\bar{\nu}_j^B) \right\}. \quad (2.61)$$

Esta cantidad, definida en [9] es invariante ante transformaciones simplécticas y es cero si el estado no es dirigible bajo operaciones Gaussianas. Queda la

posibilidad de que sí sea dirigible bajo transformaciones no Gaussianas, pero no se consideran en este cuantificador.

En el caso particular de estados de dos modos,  $M_\sigma^B$  tiene un sólo autovalor simpléctico:  $\bar{v}^B = \sqrt{\det(M_\sigma^B)}$ . Por la definición del complemento de Schur  $\det(\sigma) = \det(A)\det(M_\sigma^B)$ , y (2.61) se simplifica a

$$G^{A \rightarrow B} = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \log \left( \frac{4\det(A)}{\det(\sigma)} \right) \right\}. \quad (2.62)$$

$G^{A \rightarrow B}$  es convexa, monótona decreciente bajo operaciones cuánticas (que no se pueden realizar mediante LOCC) sobre Alice, y aditiva:

$$G^{A \rightarrow B}(\sigma_{AB}^1 \otimes \sigma_{AB}^2) = G^{A \rightarrow B}(\sigma_{AB}^1) + G^{A \rightarrow B}(\sigma_{AB}^2). \quad (2.63)$$

Un estudio sobre el Steering de estados Gaussianos mediante medidas no Gaussianas, que no están consideradas en (2.61), ni en la condición (2.59) fue realizado en 2016 por Ji, Lee *et al.* [10] Estados no dirigibles bajo medidas Gaussianas pueden ser dirigibles mediante medidas no Gaussianas. En esta tesis no consideraremos estas medidas porque no corresponden a las detecciones que podríamos realizar en nuestro laboratorio.

# Capítulo 3

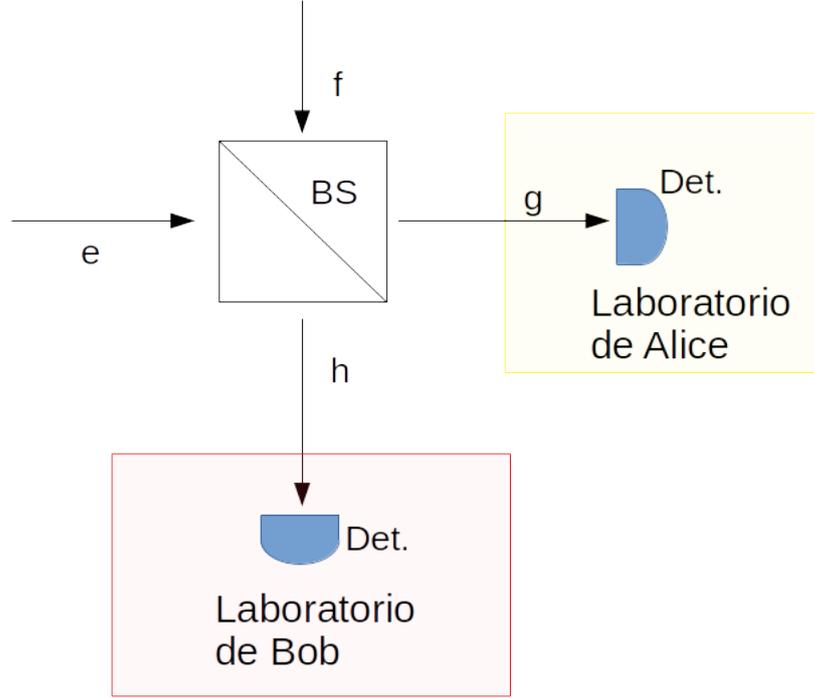
## Steering en estados Gaussianos de dos modos

En el caso de estados Gaussianos de dos modos, los estados no clásicos son los estados generados a partir de estados comprimidos de uno o dos modos y operaciones simplécticas. Son los únicos estados Gaussianos de dos modos en los que puede existir Entrelazamiento o Steering. Por trabajos anteriores ([43][44]) sabíamos que podíamos generar estados de hasta 3dB de compresión. ¿Es suficiente para tener estados dirigibles? ¿Cómo afecta al Steering el ruido en la cuadratura anti-comprimida? Ya que no todos los estados entrelazados son dirigibles, ¿cuál es el límite?, ¿es posible conocerlo?

Para comenzar a responder a estas preguntas decidimos calcular explícitamente el Steering en un modelo simplificado de nuestro montaje.

### 3.1. Situación considerada y parametrizaciones

Partimos de una situación muy sencilla: un estado Gaussiano incide sobre un divisor de haz (BS por sus iniciales en inglés) como muestra la figura 3.1. ¿Es posible detectar Steering entre las dos salidas del BS?



**Figura 3.1:** Modelo a estudiar. Un estado comprimido en el modo  $e$ , y vacío en el modo  $f$  inciden en un BS. ¿Existe Steering entre las salidas en modos  $g$  y  $h$ ?

La matriz de covarianza a la entrada del BS corresponde a un estado Gaussiano arbitrario en el modo  $e$ , y vacío en el modo  $f$ , en un estado separable.

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ c^* & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Como la elección de cuadraturas para el modo  $e$  es arbitraria y el vacío es simétrico en las variaciones de sus cuadraturas no hay pérdida de generalidad en asumir que la matriz  $\sigma_{in}$  es diagonal ( $c = 0$ ). En el espacio de fase, pasar por el BS corresponde a aplicar la transformación simpléctica que llamaré  $S$ :

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\mathbf{I}_2 & \sin(\theta)\mathbf{R}(\phi) \\ -\sin(\theta)\mathbf{R}(\phi) & \cos(\theta)\mathbf{I}_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{I}_2$  es la matriz identidad en dimensión 2,  $\mathbf{R}(\phi)$  es una matriz de rotación de ángulo  $\phi$  que caracteriza el posible desfase entre los modos de salida

introducido por el BS, y  $\theta$  es el parámetro que caracteriza su transmitancia  $T$  y reflectancia  $R$  [22].

$$T = \cos^2(\theta) \quad (3.3)$$

$$R = \sin^2(\theta) \quad (3.4)$$

El desfase entre los modos  $g$  y  $h$  no tiene efecto sobre el Steering ni el Entrelazamiento por lo que de ahora en más asumiremos  $\phi = 0$  para simplificar.

La matriz de covarianza que representa los modos  $g$  y  $h$  a la salida del BS es:

$$\sigma_{out} = S^\dagger \sigma_{in} S, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{out} = \begin{pmatrix} A & C \\ C^\dagger & B \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

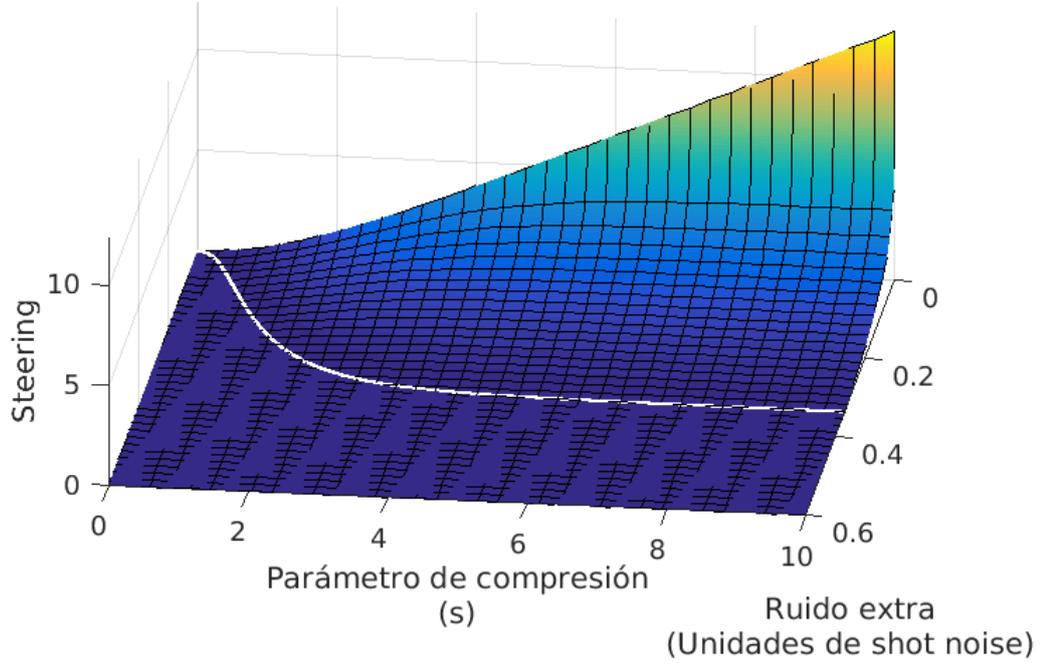
$A$  y  $B$  son las matrices de covarianza de los modos  $g$  y  $h$ ;  $C$  contiene las correlaciones entre los dos modos.  $A, B, C$  son matrices simétricas complejas de dimensión 2.

Conociendo la matriz  $\sigma_{out}$  es posible calcular si Alice es capaz de dirigir a Bob y/o Bob a Alice usando el cuantificador de Steering para estados Gaussianos presentado en el capítulo anterior:

$$G^{A \rightarrow B} = \max \left\{ 0, \frac{1}{2} \log \left( \frac{4 \det(A)}{\det(\sigma_{out})} \right) \right\}. \quad (3.7)$$

### 3.1.1. Primera parametrización: estado comprimido con ruido extra

La primera caracterización que usamos para el estado inicial tiene origen experimental. Al estudiar las medidas de estados comprimidos generados en trabajos anteriores de nuestro grupo ([43], [44]) aparece en la cuadratura anti-comprimida más ruido que el correspondiente a un estado comprimido puro de la misma compresión. Nuestra primera suposición fue que el proceso por el que se obtenían los estados comprimidos, además de generar Squeezing, generaba ruido extra  $\varepsilon$  simétrico en ambas cuadraturas.



**Figura 3.2:** Parametrización 1. Steering en función del Squeezing y el ruido agregado, para un BS 50:50. La línea blanca marca donde se hace cero.

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-s} + \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^s + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

A partir de esta matriz de covarianza determinamos  $\sigma_{out}$  y calculamos el Steering de  $A \rightarrow B$  usando la ecuación (3.7). Si graficamos el Steering de  $A \rightarrow B$  en este caso obtenemos la figura 3.2.

En la figura 3.2 se puede ver que el Steering es más sensible al ruido que al nivel de compresión, aunque parte de este efecto proviene de que la no clasicidad del estado depende linealmente del ruido pero exponencialmente del parámetro  $s$  debido a la parametrización elegida.

Podemos buscar la frontera entre los estados dirigibles y los no dirigibles, igualando el determinante del estado global con el del estado reducido al subsistema A, o -visto de otra forma- igualando las Purezas del estado global y el estado que tiene Alice. Recordamos que la Pureza de un estado de dimensión  $2n$  con matriz de covarianza  $\rho$  es:  $\mu(\rho) = \frac{1}{2^n \sqrt{\text{Det}(\sigma)}}$

Si reescribimos (3.7) sustituyendo los determinantes por las Purezas tenemos

$$G^{A \rightarrow B} = \max \left\{ 0, \log \left( \frac{\mu(\sigma_{out})}{\mu(A)} \right) \right\}. \quad (3.9)$$

Sólo tenemos estados dirigibles de Alice en Bob cuando el estado reducido es más puro que el estado total. Nótese que la Pureza del estado total no es afectada por la transformación del BS, y para el caso en que el estado en el modo  $f$  es vacío, dicha Pureza es igual a la Pureza del estado inicial en el modo  $e$ .

La frontera se alcanza cuando las Purezas son iguales. Resolviendo  $4\det(A) = \det(\sigma_{out})$  para el ruido extra obtenemos

$$\varepsilon_F = \left( -\cosh(s) + \frac{T}{T+1} + \left[ \cosh(s)^2 + \left( \frac{T}{T+1} \right)^2 - \frac{2T}{T+1} \right]^{1/2} \right)^{-1}, \quad (3.10)$$

donde el subíndice  $F$  refiere al valor en la *frontera*. En figura 3.3 pueden verse ejemplos de (3.10) para distintos valores de la transmitancia BS ( $T$ ), y la figura 3.4 muestra el comportamiento de la frontera al variar la transmitancia.

Para el caso particular en que el BS es 50:50, graficado en la figura 3.5, (3.10) se simplifica a

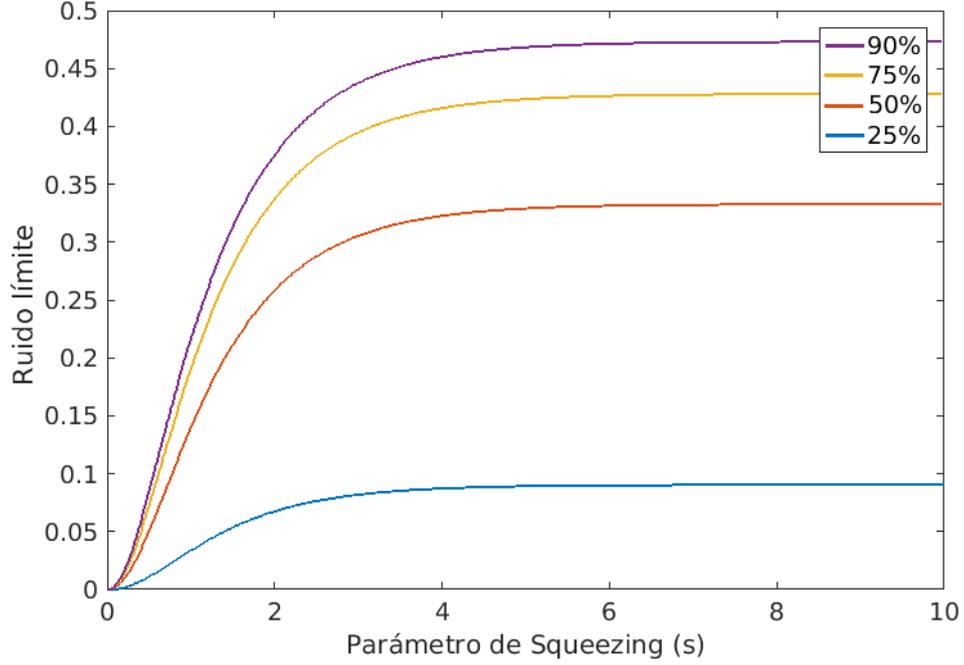
$$\varepsilon_F = -\cosh(s) + \frac{1}{3} + \left( \frac{\cosh(2s)}{2} - \frac{1}{18} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Nos interesa saber cuánto ruido podría soportar el estado antes de perder el Steering, suponiendo que pudiéramos comprimir arbitrariamente el estado inicial. Para esto tomamos el límite cuando  $s$  tiende a infinito de la expresión (3.10), que corresponde al caso ideal de máxima compresión, y obtenemos la siguiente expresión que depende de la transmitancia:

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon_F = \frac{T}{T+1}. \quad (3.12)$$

Este límite tiende a 1/3 en el caso de un BS 50:50, tiende a 1/2 para el caso en que toda la luz es transmitida a Alice y cae a 0 cuando toda la luz es reflejada hacia Bob.

Si se hacen los cálculos para el Steering de Bob en Alice en lugar de Alice en Bob, obtenemos las mismas expresiones sustituyendo la transmitancia  $T$



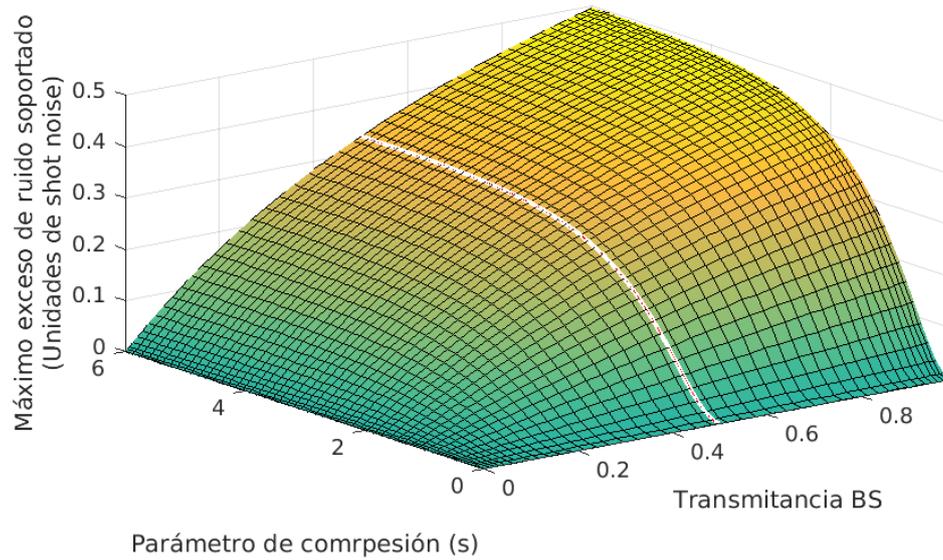
**Figura 3.3:** Parametrización 1. Frontera entre estados con y sin Steering de Alice a Bob, para distintos valores de la transmitancia.

por la refractancia R:

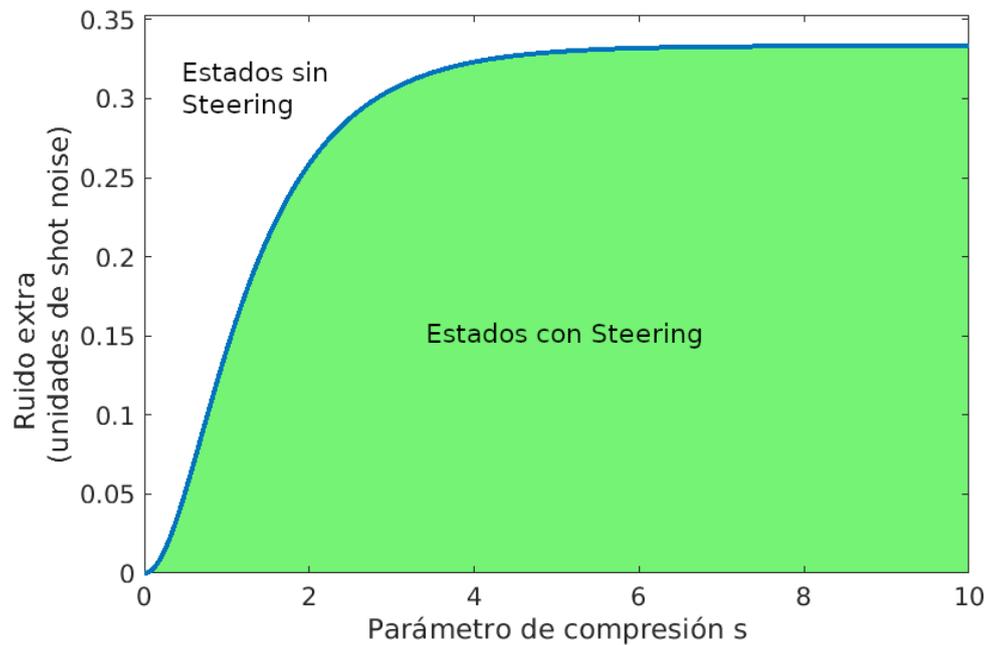
$$\varepsilon_F^{B \rightarrow A} = \left( -\cosh(s) + \frac{R}{R+1} + \left[ \cosh(s)^2 + \left( \frac{R}{R+1} \right)^2 - \frac{2R}{R+1} \right]^{1/2} \right)^{-1}, \quad (3.13)$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \varepsilon_F^{B \rightarrow A} = \frac{R}{R+1}. \quad (3.14)$$

Si se quiere Steering en ambas direcciones es ideal utilizar un BS 50:50 (como se podía pensar intuitivamente), pero si se quiere detectar Steering en una sola dirección es conveniente enviar la mayor parte de la luz hacia la parte que al medir debería modificar la otra. Cuanto más luz tenga Alice, más fácil le será modificar la estadística de los resultados de Bob.



**Figura 3.4:** Parametrización 1. Variación de la frontera entre estados con y sin Steering de Alice a Bob al variar la transmitancia. La línea blanca marca un BS 50:50.



**Figura 3.5:** Parametrización 1. Frontera entre estados dirigibles y no dirigibles, para un BS 50:50.

### 3.1.2. Segunda parametrización: ruido independiente en ambas cuadraturas

En un segundo modelo evaluamos la posibilidad de que la fuente del ruido no fuera simétrica en las cuadraturas.

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-s} + \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & e^s + \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Este modelo también nos habilita a discutir el problema de que estamos atribuyendo al estado un nivel de compresión mayor al que podemos detectar. Bajo el modelo anterior, cualquier estado podría tener cierto nivel de compresión al que luego se le agrega ruido; incluso podemos parametrizar de esta forma estados como los estados térmicos, que son totalmente clásicos, lo que resulta inadecuado ya que la compresión es nuestra referencia de no-clasicalidad.

Para evitar sobreparametrizar, y considerar sólo la compresión que efectivamente se podría detectar, tomamos  $\varepsilon_1 = 0$ , y abandonamos los subíndices.

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^s + \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

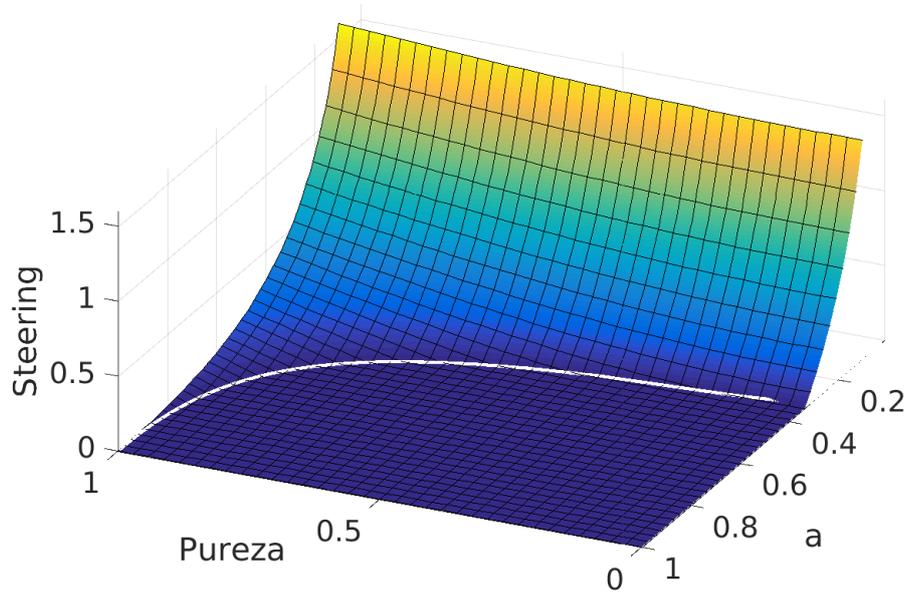
La frontera tras la que el Steering se pierde es

$$\varepsilon_F = \frac{\cos^2(e^s - 2 + e^{-s})}{e^s - T + e^s T} \quad (3.17)$$

que para el caso de un BS 50:50 se simplifica a

$$\varepsilon_F = \frac{(e^s - 1)^2}{3 - e^s}. \quad (3.18)$$

Por definición  $\varepsilon \geq 0$ ; entonces para que (3.18) tenga solución es necesario que  $e^s < 3$ . Volvemos a obtener la misma condición que en la parametrización anterior: el estado es dirigible independientemente del valor del ruido cuando la varianza de la cuadratura comprimida es menor a  $1/3$ . Una segunda conclusión a la que podemos llegar en este caso es que, dado un cierto valor de ruido, o sea un cierto valor en la cuadratura anti-comprimida, siempre existe un valor



**Figura 3.6:** Parametrización 3. Steering para un BS 50:50, en función de la varianza de la cuadratura comprimida y de la Pureza del estado inicial. La línea blanca marca la frontera.

de  $s$  pasado el cual el estado es dirigible.

### 3.1.3. Tercera parametrización: estado genérico

En una tercera parametrización, decidimos volver a la forma genérica de (3.1), con la salvedad que tomamos el estado diagonal (sin pérdida de generalidad como expliqué anteriormente).

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Al calcular explícitamente el Steering de  $A \rightarrow B$  usando  $\sigma_{out}$  en (3.7) obtenemos

$$G^{A \rightarrow B} = \max \left\{ 0, \frac{\log((1 + (1/a - 1)R)(1 + (1/b - 1)R))}{\log(2)} \right\}. \quad (3.20)$$

Tendremos estados dirigibles cuando el término dentro del logaritmo sea mayor a 1, para que el logaritmo sea positivo. Ahora bien,  $R$  es siempre positivo y menor a 1, entonces  $(1 + (1/b - 1)R)$  es siempre positivo y está entre 0 y 1 porque  $b \geq 1$ , mientras que  $(1 + (1/a - 1)R)$  es siempre mayor a 1 porque  $0 \leq a < 1$  (sabemos que los estados clásicos,  $a \geq 1$ , no son dirigibles).

Elegimos parametrizar los resultados en función de la varianza de la cuadratura anti-comprimida  $a$  y Pureza del estado inicial  $\mu = 1/(4\sqrt{\det(\sigma_{in})})$  porque ambas tienen una interpretación clara: cuán no clásico y cuán puro es nuestro estado.

Resolviendo (3.9) para  $\sigma_{out}$  tenemos

$$G^{A \rightarrow B} = \max \left\{ 0, \frac{\log((1 + (1/a - 1)R)(1 + (\mu^2 a - 1)R))}{\log(2)} \right\}. \quad (3.21)$$

El Steering en esta parametrización se puede ver en la figura 3.6.

Cuando el estado es puro ( $\mu = 1$ , o en los parámetros anteriores  $\varepsilon = 0$ ) la ecuación anterior pasa a

$$G_{puros}^{A \rightarrow B} = \max \left\{ 0, \frac{\log((1 + (1/a + a - 2)R - R^2))}{\log(2)} \right\} \quad (3.22)$$

Como  $R - R^2$  es siempre positivo, la condición para tener Steering se reduce a  $1/a + a > 2$ , que siempre se cumple cuando  $a$  es positivo y distinto de 1. Por lo tanto, en el caso de estados puros, basta con que sean no clásicos ( $a < 1$ ) para que sean dirigibles.

Como se mencionó en la sección 2.5, los conceptos de Entrelazamiento, Steering, y no localidad de Bell son equivalentes para estados puros [27], [5].

El valor de la Pureza en la frontera entre estados dirigibles y no dirigibles  $\mu_F$ , se obtiene igualando el segundo término en (3.21) a cero

$$\mu_F = \sqrt{\frac{a - (1 - a)T}{a^2 T + aR}}; \quad (3.23)$$

la superficie frontera está graficada en la figura 3.8. En esta figura la línea blanca marca un BS 50:50, y la línea roja el valor de  $a$  bajo el cual existe Steering independientemente del valor de la Pureza.

Para un BS 50:50 la expresión anterior se reduce a

$$\mu_F = \sqrt{\frac{3a-1}{a(a+1)}}. \quad (3.24)$$

Este caso puede verse en la figura 3.7 para el caso de un BS 50:50. Para que la raíz de la expresión anterior esté definida en el conjunto de los números reales se tiene que cumplir  $a > 1/3$ .

Para que  $\mu_F$  esté definido en los reales para cualquier transmitancia (ver 3.8), se debe cumplir

$$a \geq \frac{T}{1+T}. \quad (3.25)$$

Esta condición de existencia de la frontera es equivalente al límite hallado en el primer modelo para el nivel de ruido externo cuando la compresión tiende a infinito (3.11) y se comporta de igual forma. Vale 1/3 para un BS 50:50, como esperábamos de la ecuación (3.24), tiende a 1/2 cuando toda la luz va hacia Alice y tiende a 0 cuando toda la luz va hacia Bob.

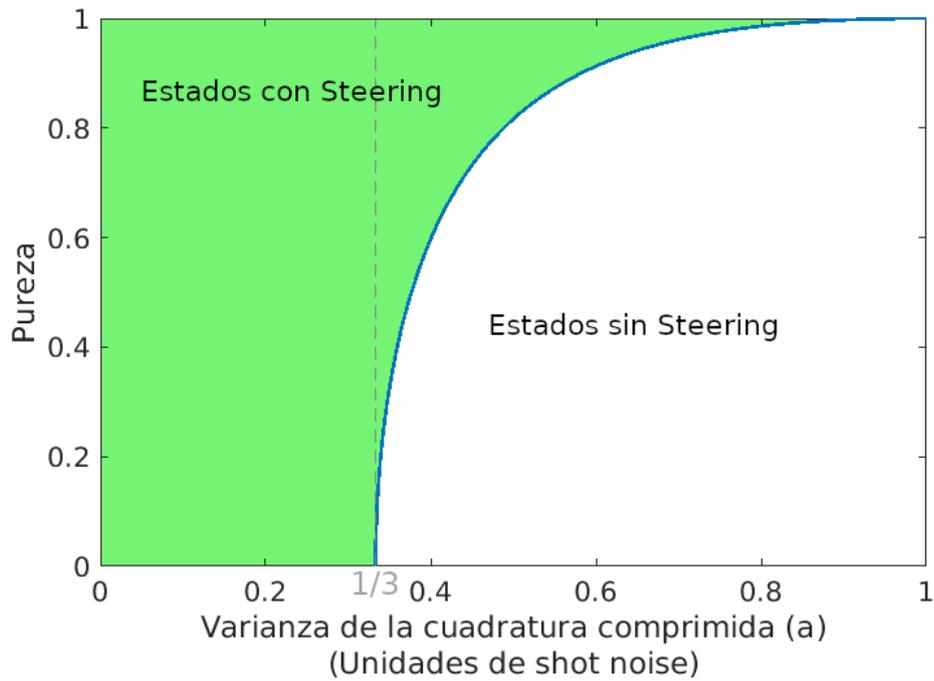
El Steering depende fuertemente del nivel de compresión (es decir de la no-clasicalidad) y débilmente de la Pureza.

### 3.1.4. Mezcla con un estado térmico

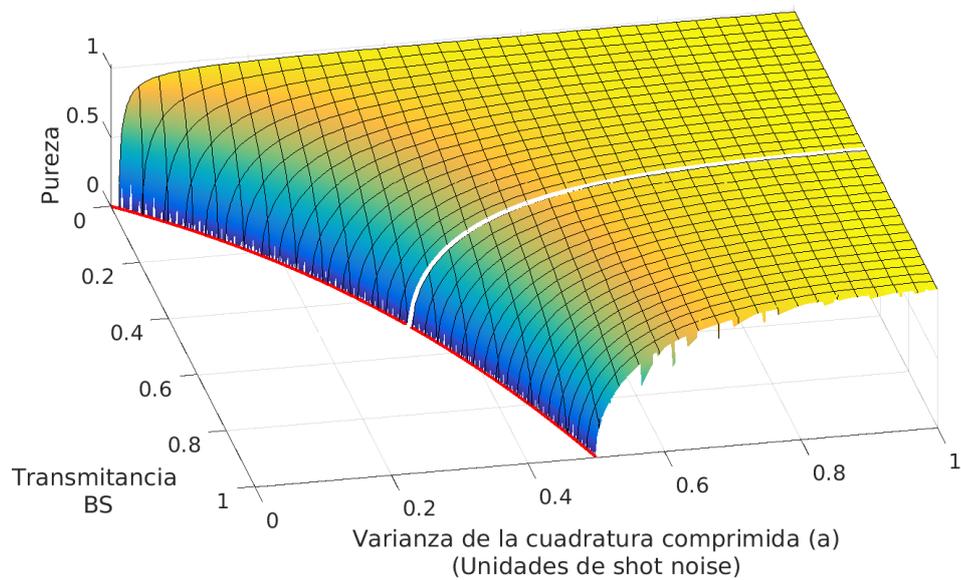
Como una variación del modelo planteado (ver figura 3.1), veremos qué sucede si, en lugar de vacío, lo que incidiera en nuestro BS fuese un estado térmico. Esta sección está inspirada en el estudio del Entrelazamiento entre las salidas de un BS en el que inciden un estado de vacío comprimido y un estado térmico [31].

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2n+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2n+1 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

donde  $n$  (entero) es el número medio de fotones del estado térmico [22]. De aquí en más utilizaremos la variable  $d$ :  $d = 2n + 1$ , para simplificar las expresiones de los límites; y consideraremos sólo el caso de un BS 50:50 para reducir el número de variables.



**Figura 3.7:** Parametrización 3. Frontera entre estados dirigibles y no dirigibles, para un BS 50:50. Nótese el comportamiento cuando la varianza vale  $1/3$ .



**Figura 3.8:** Parametrización 3. Frontera entre estados con y sin Steering de Alice a Bob, variando con la transmitancia del BS. La línea blanca marca un BS 50:50, la línea roja el valor de  $a$  bajo el cual la existencia de Steering es independiente de la Pureza.

En este caso el límite en la Pureza depende de la varianza de la cuadratura comprimida y de  $n$ , volviendo al caso anterior cuando  $n = 0$  ( $d = 1$ ).

La Pureza mínima del estado global necesaria para que exista Steering es

$$\mu_F = \sqrt{\frac{4ad^2 - d - a}{ad^3(a + d)}}. \quad (3.27)$$

En este caso, para que el estado sea dirigible independientemente de la Pureza, se tiene que cumplir que

$$a \leq \frac{d}{4d^2 - 1} \quad (3.28)$$

que corresponde a los valores de  $a$  para los que  $\mu_F$  de (3.27) no está definido en los reales.

Siempre existe algún valor máximo de  $a$  que cumple (3.28), pero disminuye a medida que aumenta  $d$ . Cuánto más ruido térmico agreguemos en nuestro BS, más comprimido deberá estar nuestro estado de entrada para que exista Steering, por lo tanto será más difícil de detectar en laboratorio.

El valor de  $a$  para el que se cumple la igualdad en (3.28) se puede ver en la figura 3.10; tiende a cero asintóticamente en  $d$ .

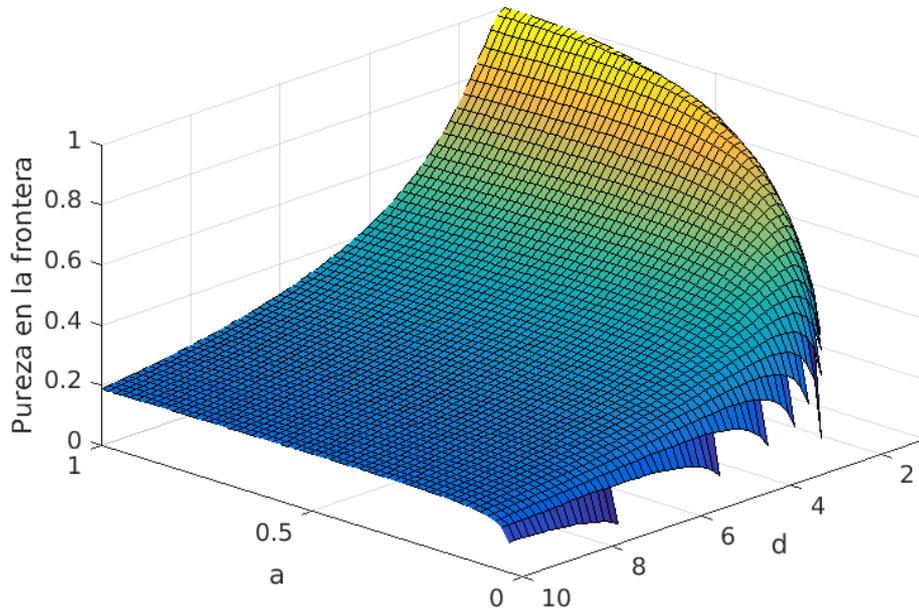
## 3.2. Conclusiones

En general, lo que vemos en todos los modelos es que, si la varianza en la cuadratura comprimida del estado inicial vale menos de  $\frac{T}{1+T}$  de la varianza del vacío (1/3 para el ejemplo del BS 50:50), el estado será dirigible independientemente de la Pureza o del valor de la varianza en la cuadratura anti-comprimida.

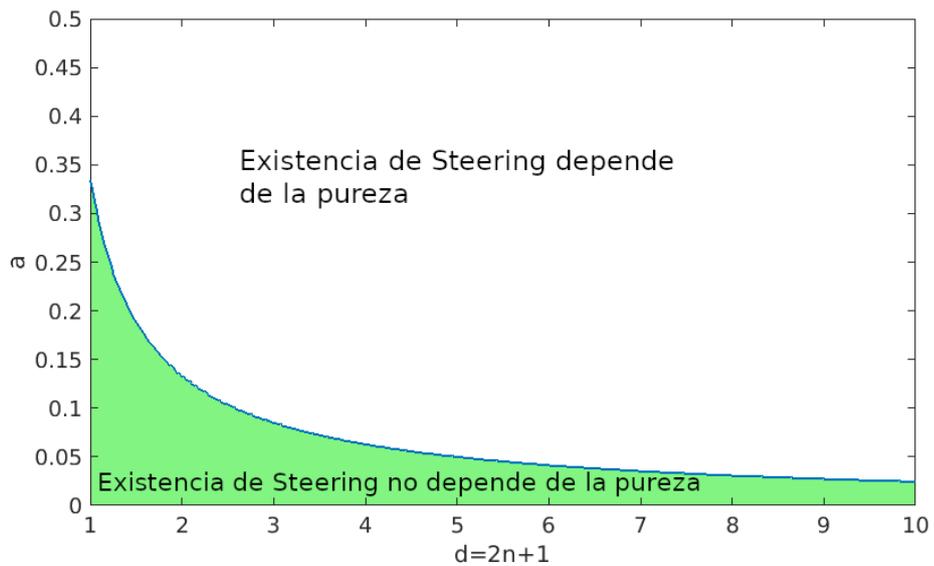
Para el caso 50:50 el factor 1/3 corresponde también al nivel máximo de pérdidas ópticas que soporta el Steering entre las salidas de un BS 50:50 sobre el que inciden un estado comprimido y el vacío [45]. Es curioso que se repita este factor; no hemos hallado aún si tiene alguna interpretación física más profunda, ni conexión directa entre este resultado y el nuestro.

Estados Gaussianos no dirigibles por medidas Gaussianas, pueden ser dirigibles por medidas no Gaussianas [10]. Las fronteras entre estados dirigibles y no dirigibles halladas sólo aplican para medidas Gaussianas.

La presencia de ruido térmico o de ruido en la cuadratura anti-comprimida, siempre actúa en detrimento del Steering, como cabría esperar, pero para ni-



**Figura 3.9:** Frontera entre estados dirigibles y no dirigibles, para un BS 50:50, en el caso de un estado térmico. Los estados dirigibles están sobre la superficie frontera.



**Figura 3.10:** El valor de  $a$  bajo el cual la existencia de Steering deja de depender de la Pureza disminuye con  $d$ .

veles de compresión altos aún es posible encontrarlo.

Para detectar Steering en una sola dirección, es conveniente que el subsistema que ha de dirigir al otro tenga la mayor parte de la luz. Tuvimos esto en cuenta en nuestro montaje experimental, que describiré en el capítulo siguiente, eligiendo un BS 90:10.

# Capítulo 4

## Experimento

### 4.1. Antecedentes

Habíamos visto en la sección 2.4 el concepto de estados comprimidos, en particular el caso de estados Gaussianos comprimidos en cuadraturas, para los que la varianza de una de sus cuadraturas era menor a la varianza de las cuadraturas del vacío. Cumpliendo con el principio de incertidumbre de Heisenberg, la varianza de la otra cuadratura debe ser mayor.

La diferencia de intensidades entre dos haces de luz de la misma frecuencia estará comprimida cuando su varianza sea menor al nivel cuántico estándar de ruido; cuando esto sucede las variaciones en la diferencia de fases estarán anticomprimidas, pero la detección de diferencias de fase es un problema experimental mucho más difícil que la detección de intensidades.

El nivel cuántico estándar corresponde al nivel del ruido del vacío, que es un estado no comprimido para el que las variaciones de sus operadores provienen de la incertidumbre cuántica y no de fuentes clásicas de ruido (los estados coherentes también cumplen esta condición). Cuando existe compresión en la diferencia de intensidad entre dos haces se dice que tienen compresión de intensidad relativa (RIS) [46] [47].

RIS se observa al medir diferencias de intensidades entre estados no clásicos, y éstos se obtienen mediante interacciones no lineales de la luz con un medio. Dos de los métodos con los que se ha tenido más éxito en la detección de RIS son: conversión paramétrica descendente en cristales no lineales  $\chi^{(2)}$ , mediante el que se han obtenido hasta 9,7 dB de compresión [47]; y mezcla de cuatro ondas en un vapor atómico  $\chi^{(3)}$  [48], mediante el cual se han obtenido hasta

9,2 dB de compresión [49]. Recientemente la investigación se ha enfocado en campos gaussianos entrelazados en más de dos modos. [17].

Las medidas de compresión en cuadraturas por detección homodina balanceada son un tipo de RIS. También se puede encontrar RIS entre dos polarizaciones ortogonales de un mismo haz; en ese caso el operador cuya varianza está comprimida es uno de los parámetros de Stokes de la polarización y se dice que el campo está comprimido en polarización [50], [51].

Se han generado campos comprimidos en polarización mediante varios métodos: propagación en fibras ópticas [52], [53]; mezclando dos modos con compresión en sus cuadraturas en un divisor de haz polarizado [54]; mediante la interacción de luz polarizada con átomos fríos dentro de una cavidad óptica [51], [55]; y mediante el pasaje de un haz linealmente polarizado a través de una celda de vapor atómico [56], [57], [43], [44]. A éste último proceso se le llama *compresión por autorrotación de la polarización* (PSR); PSR también es un proceso de cuatro ondas  $\chi^{(3)}$ .

#### 4.1.1. Autorrotación de la polarización

La autorrotación de la polarización es un fenómeno por el que, cuando luz polarizada elípticamente atraviesa un medio no lineal, la polarización cambia rotando la elipse que la caracteriza. El ángulo de rotación depende de la elipicidad de la polarización, el espesor óptico del medio y la intensidad de la luz.

En un vapor atómico en resonancia con la frecuencia de la luz, los átomos pueden absorber un fotón en una polarización circular y emitir en la otra. Los niveles atómicos de energía degenerados tienen distintos corrimientos de sus energías por el efecto Stark dinámico, esto hace que procesos de emisión en las distintas polarizaciones tengan diferentes desintonías, y por tanto distintas probabilidades de ocurrir. Como las probabilidades de estos procesos no son simétricas se modifican las intensidades relativas de las dos componentes llevando a un cambio de la orientación de la polarización elíptica resultante. [58]

En el caso de luz polarizada linealmente no hay una rotación de la polarización. Pero el mismo efecto cambia las variaciones del vacío en la polarización orthogonal, pudiendo generar compresión bajo las condiciones adecuadas, mediante la emisión conjunta de fotones en esta polarización. [1]

En los experimentos considerados la luz acopla uno de los estados fundamentales del  $^{87}\text{Rb}$  ( $5^2S_{1/2}$ ,  $F=2$ ) con los dos estados hiperfinos  $F'=1$  y  $F'=2$  del estado  $5^2P_{1/2}$  de Rb. Para discutir la esencia de este mecanismo consideramos un modelo simplificado donde limitamos a dos el degeneramiento del estado fundamental e ignoramos los degeneramientos en los estados excitados.

Consideramos un átomo de tres niveles, un estado base degenerado ( $|g\rangle$ ,  $|c\rangle$ ) y dos estados excitados  $|e\rangle$  y  $|d\rangle$ . El campo intenso acopla los estados base con los estados excitados, se definen  $|g\rangle$ , y  $|c\rangle$  como los estados acoplados por el campo intenso con los dos estados excitados:  $|g\rangle$  con  $|e\rangle$  y  $|c\rangle$  con  $|d\rangle$ ; por lo tanto las transiciones cruzadas ( $|g\rangle$  con  $|d\rangle$  y  $|c\rangle$  con  $|e\rangle$ ) corresponden a la polarización ortogonal a la del campo incidente.

Puede darse un proceso de cuatro fotones: dos fotones de polarización lineal son absorbidos, y dos fotones emitidos en la polarización ortogonal, como se muestra en el diagrama 4.1. [56]

La generación de compresión es siempre consecuencia de procesos de absorción y emisión de pares de fotones, para el caso de compresión de dos modos ( $a$  y  $b$ ) el operador Squeezing ( $S(\xi)$ ) [19]:

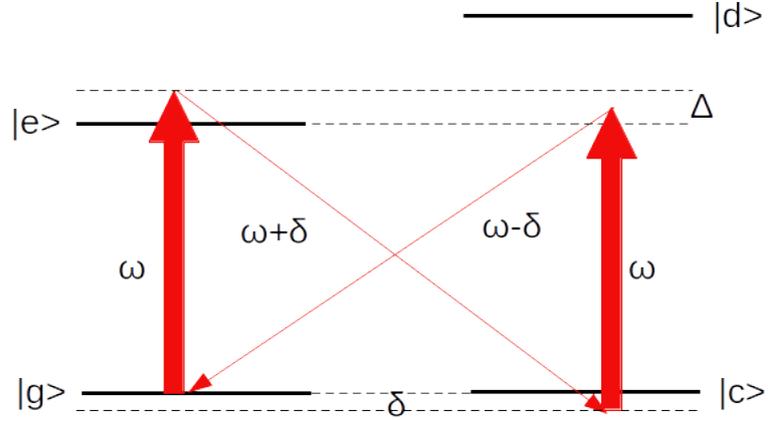
$$S(\xi) = \exp(\xi^*ab - \xi a^\dagger b^\dagger) \quad (4.1)$$

depende de la absorción y emisión conjunta de pares de fotones, uno en cada modo.

Volviendo al proceso del diagrama 4.1, la frecuencia  $\delta$  puede ser cualquiera; al realizar el experimento se elige en qué frecuencia detectar la varianza de las cuadraturas, la frecuencia elegida determina el valor de  $\delta$ . No todas las frecuencias posibles presentarán compresión.

Al cambiar la desintonía ( $\Delta$ ) entre el campo intenso y la transición atómica cambiará la probabilidad de que sucedan estos procesos de cuatro fotones; para ciertos valores de desintonía e intensidad transiciones en la polarización ortogonal resultan resonantes, la frecuencia de estas transiciones resonantes determinará el valor de  $\delta$  más favorable para la detección. [56].

El grupo de espectroscopía láser investigó anteriormente la compresión en parámetros de Stokes, en luz comprimida generada mediante PSR [43], y la caracterización de estos estados comprimidos mediante su matriz de covarianza, hallando también Entrelazamiento [44]. En estos trabajos se obtuvo un máximo cercano a 3 dB de compresión. Se retoman en esta tesis el montaje y



**Figura 4.1:** Proceso de cuatro fotones en la transición D1 del  $^{87}\text{Rb}$ .  $\omega$  frecuencia del campo intenso,  $\Delta$  desintonía del campo respecto de la transición,  $\delta$  diferencia de frecuencia entre los fotones absorbidos y emitidos.

los métodos utilizados en el segundo trabajo.

## 4.2. Parámetros de Stokes

Sean los operadores  $a_x$  y  $a_y$  los operadores de destrucción en dos modos de polarización lineal ortogonales  $\hat{e}_x$  e  $\hat{e}_y$  del láser que se propaga en la dirección  $\hat{e}_z$ . Llamaremos  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  a las polarizaciones lineales a  $45^\circ$  respecto a estas  $\hat{e}_1 = (\hat{e}_x + \hat{e}_y)/\sqrt{2}$  y  $\hat{e}_2 = (\hat{e}_x - \hat{e}_y)/\sqrt{2}$ ; sus operadores de aniquilación correspondientes son:  $a_{1(2)} = (a_x \pm a_y)/\sqrt{2}$ ; y llamaremos  $\hat{e}_+$  y  $\hat{e}_-$  a las polarizaciones circulares en sentido antihorario  $\hat{e}_+ = (\hat{e}_x + i\hat{e}_y)/\sqrt{2}$  y horario  $\hat{e}_- = (\hat{e}_x - i\hat{e}_y)/\sqrt{2}$ , de operadores de aniquilación  $a_{\pm} = (a_x \pm ia_y)/\sqrt{2}$ .

La polarización se puede describir en función de los parámetros de Stokes  $S_i$  [59]:

$$S_1 = a_x^\dagger a_x - a_y^\dagger a_y = n_x - n_y, \quad (4.2a)$$

$$S_2 = a_x^\dagger a_y + a_y^\dagger a_x = n_1 - n_2, \quad (4.2b)$$

$$S_3 = i(a_y^\dagger a_x - a_x^\dagger a_y) = n_+ - n_-. \quad (4.2c)$$

Estos tres parámetros de Stokes obedecen las mismas relaciones de conmutación que los operadores de momento angular

$$[S_i, S_j] = 2i\varepsilon_{ijk}S_k. \quad (4.3)$$

Generalizando, definimos polarizaciones elípticas ortogonales parametrizadas por un ángulo  $\theta$  en sentido antihorario y horario:  $\hat{e}_{+\theta} = (\hat{e}_x + e^{i\theta}\hat{e}_y)/\sqrt{2}$  y  $\hat{e}_{-\theta} = (\hat{e}_x - e^{i\theta}\hat{e}_y)/\sqrt{2}$  (ver la figura 4.2 <sup>1</sup>); el ángulo determina la excentricidad de las elipses, para  $\theta = 0$  son polarizaciones lineales, y para  $\theta = \pi/2$  son las polarizaciones circulares horaria y antihoraria; los ejes mayores de las elipses que los vectores de polarización de los campos proyectan sobre el plano XY son siempre ortogonales entre sí y coinciden con la dirección  $\hat{e}_1$  para la polarización antihoraria y  $\hat{e}_2$  para la horaria.

Para las polarizaciones elípticas los operadores de aniquilación son  $a_{\theta\pm} = (a_x \pm e^{i\theta}a_y)/\sqrt{2}$ . En el caso  $\theta = 0$  coinciden con  $a_{1(2)}$ , y en el caso  $\theta = \pi/2$  con  $a_{\pm}$ . El parámetro de Stokes generalizado correspondiente  $S_\theta$

$$S_\theta = S_2 \cos(\theta) + S_3 \sin(\theta) = n_{\theta+} - n_{\theta-} \quad (4.4)$$

coincide a su vez con  $S_2$  para  $\theta = 0$ , con  $S_3$  para  $\theta = \pi/2$ .

### 4.3. Fluctuaciones cuánticas en parámetros de Stokes

La relación de conmutación entre parámetros de Stokes generalizados de distintos ángulos es

$$[S_\theta, S_{\theta'}] = 2iS_1 \sin(\theta - \theta'). \quad (4.5)$$

Puede verse en (4.2) y (4.4) que medir cualquier parámetro de Stokes es medir la diferencia entre las intensidades de dos polarizaciones ortogonales, para el caso de  $S_\theta$  la polarizaciones elípticas definidas por el ángulo  $\theta$ .

Como el campo que incide sobre los átomos es intenso y polarizado linealmente (identificaremos su polarización con  $\hat{e}_x$ ), asumimos que las fluctuaciones de  $a_x$  son pequeñas respecto de su valor medio:  $a_x \simeq \langle a_x \rangle = \alpha$ . Asumimos

---

<sup>1</sup>Esta imagen está animada, si no puede ver la animación intente abrir el pdf con otro programa o contáctese a [ebenech@fing.edu.uy](mailto:ebenech@fing.edu.uy).

**Figura 4.2:** Polarizaciones elípticas horaria y antihoraria de ángulo  $\theta$ .

también que el valor esperado de  $a_y$  es cero  $|\alpha| \gg \langle a_y \rangle \simeq 0$ . Bajo estas aproximaciones reescribimos los parámetros de Stokes

$$S_1 \simeq |\alpha|^2, \quad (4.6a)$$

$$S_2 \simeq \alpha a_y + \alpha^* a_y^\dagger, \quad (4.6b)$$

$$S_3 \simeq i(\alpha a_y^\dagger - \alpha^* a_y), \quad (4.6c)$$

$$S_\theta \simeq \alpha^* a_y e^{-i\theta} + \alpha a_y^\dagger e^{i\theta}. \quad (4.6d)$$

Las relaciones de conmutación entonces son

$$[S_\theta, S_{\theta'}] = 2i|\alpha|^2 \sin(\theta - \theta'). \quad (4.7)$$

Para el caso de  $\{S_2, S_3\}$  o cualquier par de operadores separados  $\pi/2$

$$[S_\theta, S_{\theta+\pi/2}] = 2i|\alpha|^2. \quad (4.8)$$

Esta relación de conmutación es muy similar a la relación entre los operadores de cuadraturas (2.4), por lo cual definimos operadores nuevos  $X(\theta) \equiv S_\theta/(\sqrt{2}|\alpha|)$  y  $P(\theta) \equiv S_{\theta+\pi/2}/(\sqrt{2}|\alpha|)$ , que sí tienen la misma relación de conmutación y por lo tanto deben cumplir la misma relación de incertidumbre de Heisenberg que los operadores de cuadraturas  $q, p$ :

$$\Delta X(\theta) \Delta P(\theta) \geq \frac{1}{4}. \quad (4.9)$$

Para medir  $X(\theta)$  y  $P(\theta)$  se deben medir la diferencia de intensidad entre las polarizaciones elípticas de ángulo  $\theta$  y entre las polarizaciones elípticas de ángulo  $\theta + \pi/2$  (es decir, medir  $S_\theta$  y  $S_{\theta+\pi/2}$ ), y determinar el valor de  $|\alpha|$ . En la práctica, para medir los parámetros de Stokes se separaron las componentes en las dos polarizaciones elípticas del ángulo que se quería medir en el momento, se las hizo incidir sobre dos fotodiodos y se midió la varianza de la diferencia entre las señales de estos dos detectores. Para determinar el valor de  $|\alpha|$  se utilizaron tres métodos que se detallarán en el próximo capítulo.

Se habrá logrado compresión cuando, para algún valor de  $\theta$ , la varianza de ese operador de Stokes cumpla  $\Delta X(\theta) < 1/2$ , es decir, sea menor a la varianza del ruido del vacío [44].

Con la suposición de un campo incidente intenso y de polarización lineal

que hicimos anteriormente, el parámetro de Stokes  $S_\theta$  en (4.6d) es proporcional a una de las cuadraturas del campo en la polarización  $\hat{e}_y$ .

Tomando  $\alpha = |\alpha|e^{i\gamma}$  es posible reescribir  $S_\theta$  como

$$S_\theta \simeq |\alpha| (a_y e^{-i(\theta+\gamma)} + a_y^\dagger e^{i(\theta+\gamma)}). \quad (4.10)$$

Pero  $q(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_y e^{i\zeta} + a_y^\dagger e^{-i\zeta})$  es una cuadratura generalizada del campo en  $\hat{y}$ .

Desde este punto de vista, el proceso de medidas de los parámetros de Stokes  $X(\theta)$  es igual a la medición de la cuadratura  $q(\theta + \gamma)$  por el método de detección homodina balanceada [19], utilizando el campo intenso en  $\hat{e}_x$  como oscilador local.

La detección de los parámetros de Stokes se realiza según el montaje de la figura 4.5, y se detallará más adelante en la sección 4.5.

## 4.4. Matriz de covarianza de los parámetros de Stokes

En la sección 2.6 se vio la definición de la matriz de covarianza.

En este caso se trata de un estado de dos modos, por lo que la matriz de covarianza es

$$\sigma = \begin{pmatrix} \Delta X_a^2 & \Delta X_a P_a & \Delta X_a X_b & \Delta X_a P_b \\ \Delta P_a X_a & \Delta P_a^2 & \Delta P_a X_b & \Delta P_a P_b \\ \Delta X_b X_a & \Delta X_b P_a & \Delta X_b^2 & \Delta X_b \Delta P_b \\ \Delta P_b X_a & \Delta P_b P_a & \Delta P_b X_b & \Delta P_b^2 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Para dos operadores cualesquiera  $Y, Z$   $\Delta YZ = \frac{1}{2} \langle YZ + ZY \rangle - \langle Y \rangle \langle Z \rangle$ .

Asumiremos que nuestro estado es Gaussiano, porque fue comprobado en [44] que las fluctuaciones temporales de los parámetros de Stokes en las frecuencias de su detección tenían una estadística Gaussiana, y hemos utilizado el mismo montaje. Cuando un estado es Gaussiano su matriz de covarianza y vector de primeros momentos lo definen completamente.

Con las suposiciones de un campo intenso en la polarización vertical y vacío en la polarización horizontal de la sección anterior, todas las polarizaciones elípticas tienen la misma intensidad  $|\alpha|^2/2$ . El parámetro de Stokes  $S_\theta$  es entonces la resta entre los operadores número en dos campos de la misma intensidad, por lo que su valor esperado es cero para cualquier valor de  $\theta$ .

Se pretende medir la matriz de covarianza de nuestro estado, para los operadores  $X(\theta)$ ,  $P(\theta)$  de Alice y de Bob. Para cada uno de ellos la matriz de covarianza es:

$$\sigma_{a(b)} = \begin{pmatrix} \Delta X_\theta^2 & \Delta X_\theta X_{\theta+\pi/2} \\ \Delta X_{\theta+\pi/2} X_\theta & \Delta X_{\theta+\pi/2}^2 \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Los elementos de la diagonal son simplemente las varianzas de las fluctuaciones en la diferencia en intensidad entre las polarizaciones elípticas ortogonales para  $\theta$  y  $\theta + \pi/2$ .

Los elementos fuera de la diagonal pueden reescribirse en función de dos términos independientes utilizando simples relaciones trigonométricas:

$$\Delta X_\theta X_{\theta+\pi/2} = \frac{\Delta X_{\theta+\pi/4}^2 - \Delta X_{\theta-\pi/4}^2}{2}. \quad (4.13)$$

Faltan los términos dependientes de ambos subsistemas

$$\sigma = \begin{pmatrix} & \Delta X_a X_b & \Delta X_a P_b \\ & \Delta P_a X_b & \Delta P_a P_b \\ \Delta X_b X_a & \Delta X_b P_a & \\ \Delta P_b X_a & \Delta P_b P_a & \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

que son todos de la forma

$$\Delta Y_a Z_b = \frac{\Delta S_{\theta_a} S_{\theta'_b}}{|\alpha_a| |\alpha_b|}. \quad (4.15)$$

A éstos los reescribimos usando la identidad:

$$\Delta S_{\theta_a} S_{\theta'_b} = \frac{1}{4} [\Delta (S_{\theta_a} + S_{\theta'_b})^2 - \Delta (S_{\theta_a} - S_{\theta'_b})^2], \quad (4.16)$$

obteniendo

$$\Delta Y_a Z_b = \frac{\Delta (S_{\theta_a} + S_{\theta'_b})^2 - \Delta (S_{\theta_a} - S_{\theta'_b})^2}{4|\alpha_a| |\alpha_b|}. \quad (4.17)$$

Por lo tanto los términos dependientes de ambos subsistemas pueden obtenerse midiendo las varianzas de la suma y resta de los parámetros de Stokes en Bob y Alice, y las amplitudes de los campos de ambos  $|\alpha_a|$  y  $|\alpha_b|$ .

## 4.5. Montaje

En la figura 4.3 puede verse el diagrama general del montaje experimental. Un láser de diodo es amplificado y filtrado en polarización. Luego, con el láser polarizado linealmente, se lo hace incidir sobre una celda de  $^{87}\text{Rb}$  (calentada mediante una resistencia) cuya temperatura se mantiene constante. Después de la celda la señal se divide mediante un BS en dos brazos que llamamos Alice y Bob, y en cada uno se implementa la detección de parámetros de Stokes. Las señales de ambos, su suma, o su resta, son enviadas a un analizador de espectro. A continuación vemos cada paso en detalle.

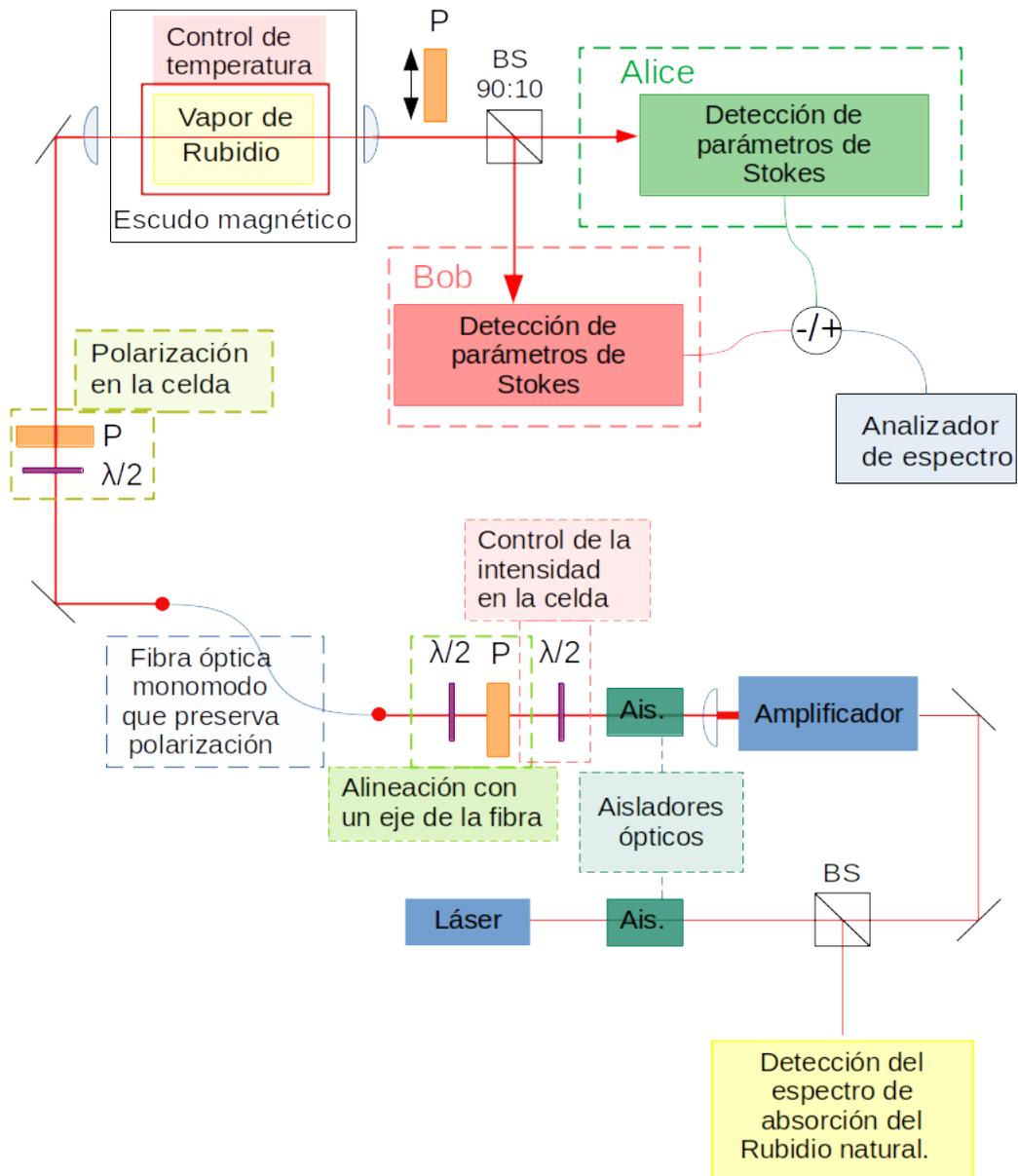
Nuestra fuente es un láser de diodo de cavidad extendida de 795 nm de longitud de onda. Un piezoeléctrico en la cavidad, que modifica su largo, permite controlar la frecuencia del láser, la cual se varió en un intervalo de 4 GHz en torno a la transición hiperfina  $F2 \rightarrow F'2$  entre los niveles  $5^2S_{1/2}$  y  $5^2P_{1/2}$  (llamada línea D1) del  $^{87}\text{Rb}$ . El láser es dividido y una parte es utilizada para medir el espectro de absorción saturada de una celda de Rubidio natural con el objeto de conocer su frecuencia. El espectro obtenido se puede ver en la figura 4.4

La señal principal del láser es amplificada mediante un diodo amplificador tras el cual se obtienen típicamente 100 mW de potencia; aisladores ópticos evitan que cualquier reflejo ingrese en el amplificador o la cavidad del láser. Una lámina de media onda y un polarizador permiten alinear la polarización del haz con el eje de una fibra monomodo que preserva la polarización; la fibra mantiene la polarización lineal del haz y actúa como un filtro de los modos espaciales.

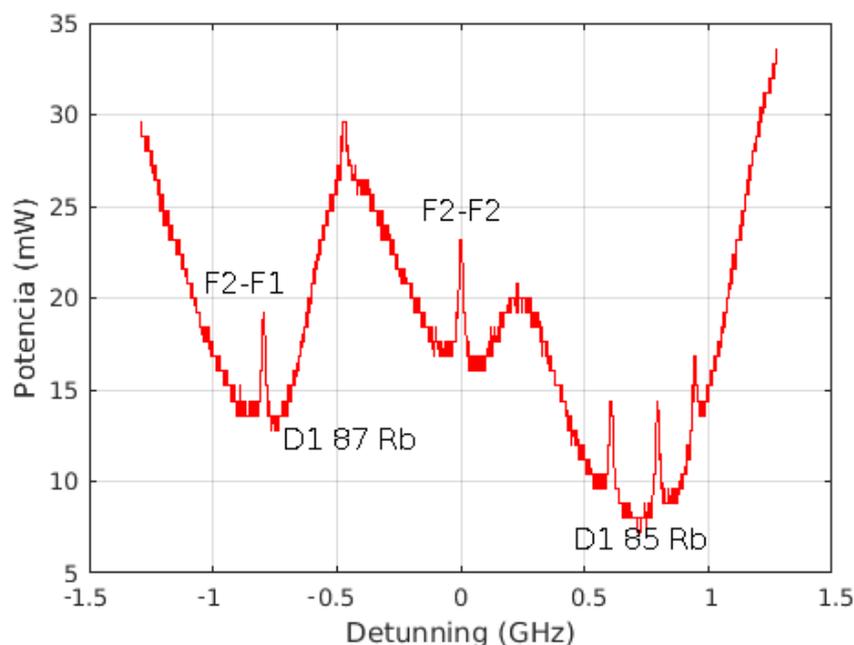
A la salida de la fibra óptica la potencia máxima disponible es de 50 mW; luego de la fibra otra lámina de media onda transforma la polarización en vertical, y se corrige cualquier desviación con un nuevo polarizador. El haz se enfoca con una lente de 30 cm dentro de una celda de vapor de  $^{87}\text{Rb}$  de 5 cm de largo, cerca del centro de la misma.

La celda es calentada por una resistencia alimentada por una fuente de corriente continua; está colocada dentro de tres capas de metal que la aíslan magnéticamente, y su temperatura se monitorea mediante dos termistores colocados los puntos caliente y frío de la celda. Luego de la celda una segunda lente recolima el láser.

Se debe evitar en lo posible cualquier birrefringencia introducida por la



**Figura 4.3:** Esquema del montaje experimental utilizado. . Referencias: BS divisor de haz, PBS divisor de haz polarizado, P polarizador,  $\lambda/2$  lámina de media onda,  $\lambda/4$  lámina de cuarto de onda, (-) y (+) resta y suma de las señales electrónicas, Det. (detectores) fotodiodos, Ais. aisladores ópticos



**Figura 4.4:** Espectro de absorción saturada del Rubidio natural utilizado como referencia de frecuencia.

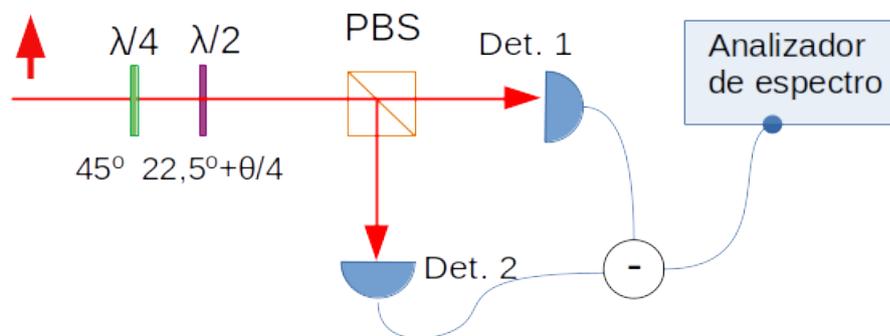
celda para mantener la polarización. Para comprobar que no existía un efecto significativo de modificación de la polarización, se colocó un polarizador ortogonal a la salida de la celda y se midió que la extinción del láser fuera del orden de 1/1000 de la intensidad total.

Un divisor de haz (BS) 90:10 <sup>1</sup> separa el láser en las señales para Alice y Bob respectivamente. En cada brazo se implementa un montaje de detección de parámetros de Stokes, cuyo diagrama puede verse en la figura 4.5.

Para detectar los parámetros de Stokes se modifica la polarización del láser de modo tal que un divisor de haz polarizado (PBS) separa las componentes en las dos polarizaciones elípticas ortogonales de un cierto ángulo. Las salidas del PBS inciden sobre dos detectores de fotodiodo idénticos de alta eficiencia cuántica ( $\sim 90\%$ ) Finalmente, la diferencia entre las señales de ambos detectores es enviada a un analizador de espectro.

La resta entre la señales alternas de ambos detectores de Alice y entre las de los detectores de Bob se realizó en un circuito electrónico construido para ese fin por el GEL. Las señales generadas por estos circuitos (las señales-resta)

<sup>1</sup>ThorLabs BSN11 de entre 700 y 1100 nm



**Figura 4.5:** Montaje experimental utilizado para la medición de los parámetros de Stokes. El haz linealmente polarizado pasa por una lámina de  $\lambda/4$  con el eje a  $45^\circ$  de la dirección de la polarización, y luego por una lámina  $\lambda/2$  con su eje a  $45^\circ$  más un ángulo  $\theta/4$  variable. Después de ambas láminas el PBS separa las componentes de la polarización vertical y horizontal, que inciden sobre dos detectores iguales. La resta de las señales de los detectores se envía a un analizador de espectro. En el detector 1 (pol. vertical) incide la componente correspondiente a la polarización elíptica de ángulo  $\theta$  horaria del haz original y en el 2 la antihoraria. Los ejes principales de las elipses de las polarizaciones están orientados a  $45^\circ$  de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  y a  $90^\circ$  entre sí, por lo que la intensidad en ambos detectores es la misma.

se enviaban a otro similar que permitía sumarlas o restarlas. Los tres tenían un ancho de banda de 20 MHz, por lo que eran confiables en la frecuencia 2,7MHz en la que se analizaron los espectros.

Para detectar el parámetro de Stokes correspondiente a un ángulo  $\theta$  se coloca primero una lámina de cuarto de onda con su eje rápido a  $\pi/4$  radianes de la dirección de la polarización lineal del haz, y a continuación una lámina de media onda con su eje rápido en ángulo  $\pi/8 + \theta/4$  respecto de la polarización. Esta combinación hace que el PBS separe el haz en sus componentes en las polarizaciones elípticas de ángulo  $\theta$  horaria y antihoraria, cuyos ejes están orientados a  $45^\circ$  de  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  y a  $90^\circ$  entre sí, por lo que su diferencia es el parámetro de Stokes (ver (4.4)). El PBS está alineado con la polarización del haz en la celda, y el eje de la primera lámina está a  $45^\circ$  de la dirección de la polarización, por lo que la intensidad en ambas salidas del PBS es la misma.

En el analizador de espectro se detectaron las fluctuaciones a 2,7 MHz (por ser la frecuencia con mayor compresión), con un ancho de banda de 3 kHz, y una resolución de 300 kHz. El tiempo de adquisición se ajustó según la señal que modulaba el piezoeléctrico que definía la frecuencia del láser. Se tomaron los promedios de 20 adquisiciones.

La señal de los fotodiodos depende de la potencia total que incide sobre ellos. Si el tamaño del frente de onda de los haces cambia durante la propagación, por ejemplo por errores en la colimación, la potencia total que incide sobre el área del detector puede cambiar. Para evitar diferencias en las intensidades detectadas debido a este efecto, cada par de detectores se colocó a la misma distancia del PBS y se focalizó la luz en los detectores con lentes.

Se obtuvo la matriz de covarianza de los parámetros de Stokes tomando las varianzas para los parámetros de Stokes en Alice y Bob (bloqueando la luz del otro en cada caso) de ángulos  $\theta_0$ ,  $\theta_0 + \pi/2$ ,  $\theta_0 - \pi/4$ , y  $\theta_0 + \pi/4$ ; el valor de  $\theta_0$  cambia la base en la que se escribe la matriz de covarianza, pero no el estado representado. Se midieron la suma y resta de las señales de Alice y Bob, para obtener las covarianzas entre sus parámetros de Stokes (ver (4.16) y la figura 4.3); las covarianzas se tomaron para las combinaciones ángulo en Alice-ángulo en Bob  $\{\theta_0, \theta_0\}$ ,  $\{\theta_0, \theta_0 + \pi/2\}$ ,  $\{\theta_0 + \pi/2, \theta_0\}$ , y  $\{\theta_0 + \pi/2, \theta_0 + \pi/2\}$ .

Elijiendo el parámetro de Stokes para el que se detectaba más compresión en Alice, se optimizaron la posición del foco (manteniéndolo cerca del centro de la celda), la temperatura de la celda, y la potencia del haz para obtener el máximo nivel de Squeezing, siendo los valores óptimos  $42^\circ$  C en el punto frío

de la celda y 30 mW de potencia.

Las medidas obtenidas en el analizador de espectro son proporcionales a las varianzas de los parámetros de Stokes, que son a su vez proporcionales a las de las cuadraturas; para obtener medidas de las varianzas en las cuadraturas es necesario conocer esta constante de proporcionalidad. Como la varianza del vacío es  $1/2$ , determinar esta constante de proporcionalidad corresponde a conocer la varianza que leería el instrumento en una medida con el mismo campo intenso y vacío en la cuadratura ortogonal.

Por la relación de los parámetros de Stokes con las cuadraturas (4.10), las constantes de proporcionalidad del párrafo anterior serán, a su vez, proporcionales a la intensidad del campo para medidas de varianzas y al producto de las amplitudes para medidas de covarianza.

Llamaremos  $\beta$  a las constantes de proporcionalidad entre las medidas realizadas y las cuadraturas. La relación entre las varianzas de las cuadraturas de Alice y los resultados de las medidas correspondientes será  $\beta_a \propto |\alpha_a|^2$ ; la relación entre las varianzas de las cuadraturas de Bob y sus medidas será  $\beta_b \propto |\alpha_b|^2$ ; y la relación entre las covarianzas de las cuadraturas de ambos y las medidas correspondientes será  $\sqrt{\beta_a \beta_b} \propto |\alpha_a| |\alpha_b|$ . Para obtener los valores de  $\beta_a$  y  $\beta_b$  se utilizaron tres métodos distintos que se detallan en el próximo capítulo.

# Capítulo 5

## Resultados obtenidos

Se obtuvieron 10 juegos de las varianzas y covarianzas de los parámetros de Stokes necesarias en distintos días; para cada juego se reconstruyó la matriz de covarianza, y se calcularon la Negatividad Logarítmica, la Pureza y el Steering. Nos referiremos a estas matrices como las *matrices de covarianza medidas*.

Se descartaron las matrices que no cumplían con el principio de incertidumbre de Heisenberg, según el criterio de (2.44). Ligeras variaciones en la alineación y temperatura de los átomos generaban cambios en el nivel de compresión detectado en cada día. De aquí en más se analiza el juego de datos que presenta menos matrices no físicas.

En todos los casos, para comparar los resultados obtenidos con los esperados se construyó lo que llamaremos *matriz de covarianza inferida*: la matriz de covarianza global que el estado tendría si se asume que el estado inicial antes del BS tiene la forma

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

el BS es ideal y las medidas en el subsistema de Alice son correctas.

El estado cuya matriz de covarianza construimos  $\sigma_{out}$ , se relaciona con  $\sigma_{in}$  mediante la transformación simpléctica que representa el BS  $S$ :

$$\sigma_{out} = S^T \sigma_{in} S. \quad (5.2)$$

Para un BS de transmitancia  $T$  y refractancia  $R$ , su matriz simpléctica  $S$

es:

$$S = \begin{pmatrix} t & 0 & r & 0 \\ 0 & t & 0 & r \\ -r & 0 & t & 0 \\ 0 & -r & 0 & t \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

donde  $t^2 = T$  la transmitancia del BS y  $r^2 = R$  su reflectancia. Se asumirá  $t$  y  $r$  reales sin pérdida de generalidad, por los mismos motivos que en 3.1.

Podemos escribir  $\sigma_{out}$  en matrices de bloques como se vió en el capítulo 2. En esta notación la matriz de covarianza de Alice es A:

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Ta + R & 0 \\ 0 & Tb + R \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

y la de Bob es B,

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Ra + T & 0 \\ 0 & Rb + T \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Las matrices de covarianza de Alice y de Bob medidas se diagonalizaron para llevarlas a la forma de (5.4) y (5.5). Se obtuvieron  $a$  y  $b$  a partir de las medidas de Alice en (5.4), y sustituyendo estos valores en  $\sigma_{out}$  se construyó la matriz inferida.

La transmitancia y reflectancia del BS para la longitud de onda y polarización utilizada eran de 81 % y 19 % [60], pero ajustando los autovalores de Bob de la matriz inferida a las medidas de Bob se halló que el BS tenía una transmitancia efectiva de 85 % (reflectancia 15 %) y se decidió continuar con ese valor para el análisis de los datos.

Es necesario conocer la relación de proporcionalidad entre las lecturas de los instrumentos y la matriz de covarianza para poder reconstruirla; esta relación depende de la amplitud de las señales ( $\alpha$  en (4.8)) y la ganancia de los instrumentos utilizados.

La varianza de los operadores  $X$  y  $P$  de (4.9) para el vacío debe ser 1/2 por definición, por lo que las medidas de las varianzas de parámetros de Stokes del vacío deben ser  $\Delta S = |\alpha|^2/2$ . La ganancia de la detección de Alice y Bob será el factor de proporcionalidad entre el valor leído en el analizador de espectro y la varianza del parámetro de Stokes medido.

Llamaremos  $g_a$  a la ganancia de Alice, de forma que el factor de propor-

cionalidad entre las medidas de los instrumentos en Alice y su matriz de covarianza será  $\beta_a = g_a |\alpha_a|^2$ , con  $\alpha_a$  la amplitud del campo en Alice; análogamente, para Bob, la ganancia será  $g_b$  y la relación de proporcionalidad será  $\beta_b = g_b |\alpha_b|^2$ ; para las medidas en ambos sistemas la relación de proporcionalidad será  $\sqrt{\beta_a \beta_b} = \sqrt{g_a g_b} |\alpha_a| |\alpha_b|$ .

Presentamos tres métodos para obtener  $\beta_a$  y  $\beta_b$ : por medidas del ruido de vacío, por la relación entre las cuadraturas de Alice y de Bob, y por el valor del mínimo autovalor simpléctico. Las últimas dos tienen la ventaja de no requerir medidas adicionales a las de la señal del estado cuya matriz de covarianza queremos reconstruir.

En todo este capítulo se tomará como origen de la escala de frecuencia a la transición  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  de la línea D1 del  $^{87}\text{Rb}$ , a 377 105, 205 GHz, y los ejes de frecuencia se graficarán en función de la desintonía (*detuning*) respecto de esta transición.

## 5.1. Método 1: medidas de vacío

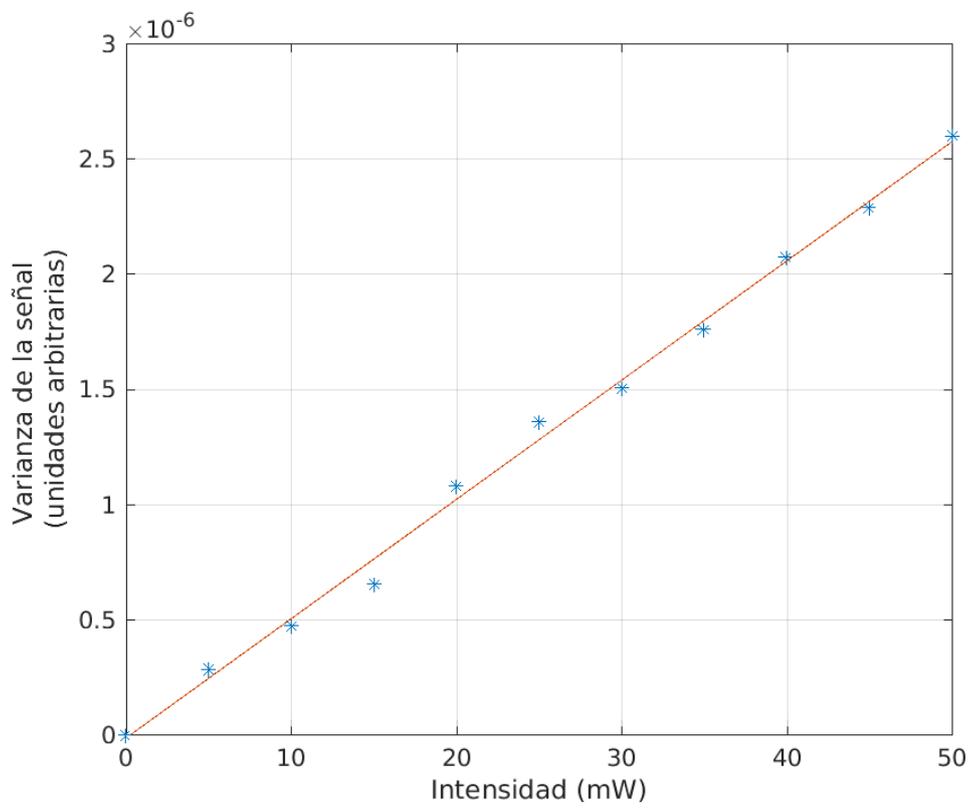
Para obtener medidas del nivel cuántico estándar de ruido, se colocó un polarizador después de la celda de vapor atómico y antes de la detección. Este polarizador bloquea la polarización horizontal, imponiendo campos coherentes iguales en los modos cuyas intensidades se restan. Para cada medida de parámetro de Stokes de la señal se tomó una medida de nivel estándar de ruido utilizando el polarizador.

Para comprobar que la señal con el polarizador correspondía al vacío, se verificó que el nivel de ruido era proporcional a la intensidad, como puede verse en la figura 5.1. Si el ruido de la señal detectado fuera de origen clásico la varianza de la señal sería cuadrática respecto de la intensidad. Se comprobó que hasta intensidades de 50 mW, la relación entre intensidad y nivel de ruido era lineal, con un coeficiente de correlación de  $r = 0,998$ .

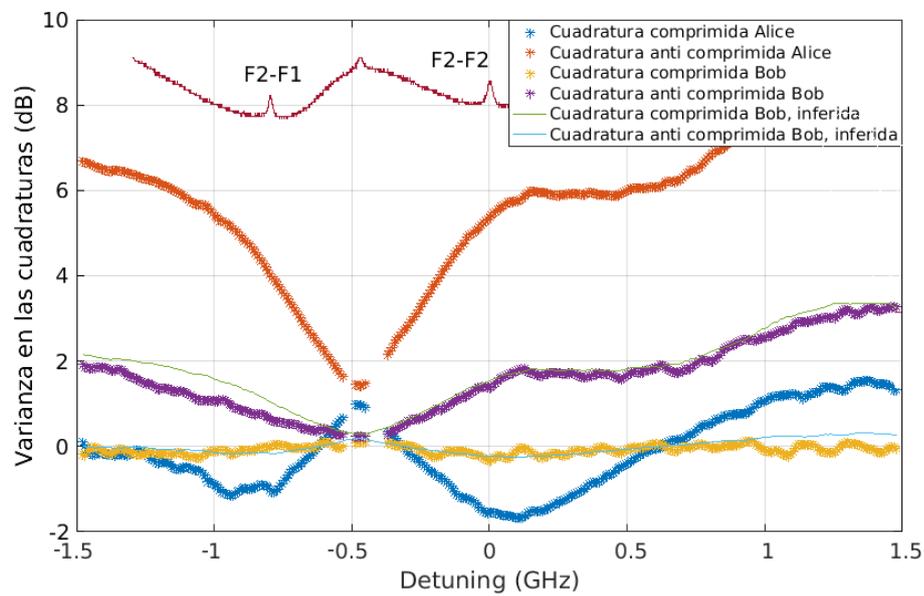
El polarizador introducía una pérdida del 13 % de la intensidad; tomando esto en consideración se renormalizaron las medidas de las variaciones del vacío para que correspondieran a una intensidad 13 % mayor (la intensidad detectada en las medidas de parámetros de Stokes).

De este modo  $\beta_a$  se obtuvo como el valor de las medidas con polarizador en Alice por 1/0,87 y  $\beta_b$  las medidas con polarizador en Bob por 1/0,87.

Para ambas matrices (medida e inferida) se calcularon los valores de las



**Figura 5.1:** El nivel de ruido del vacío es directamente proporcional a la intensidad de la señal.



**Figura 5.2:** Método 1. Varianza en las cuadraturas comprimida y anticomprimida en dB respecto del nivel de ruido del vacío en función del detuning respecto a la transición  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  de la línea D1 del  $^{87}\text{Rb}$ . Las líneas continuas muestran las varianzas de las cuadraturas de Bob en la matriz inferida (por construcción, las cuadraturas comprimida y anticomprimida de Alice son iguales en la matriz de covarianza experimental y la inferida). Arriba, en rojo oscuro, el espectro de absorción saturada del Rubidio natural, como referencia de frecuencia.

varianzas de las cuadraturas comprimida y anti comprimida de Alice y Bob diagonalizando sus respectivas matrices de covarianza ( $A$  y  $B$ ); se calcularon el Entrelazamiento, el Steering y la Pureza.

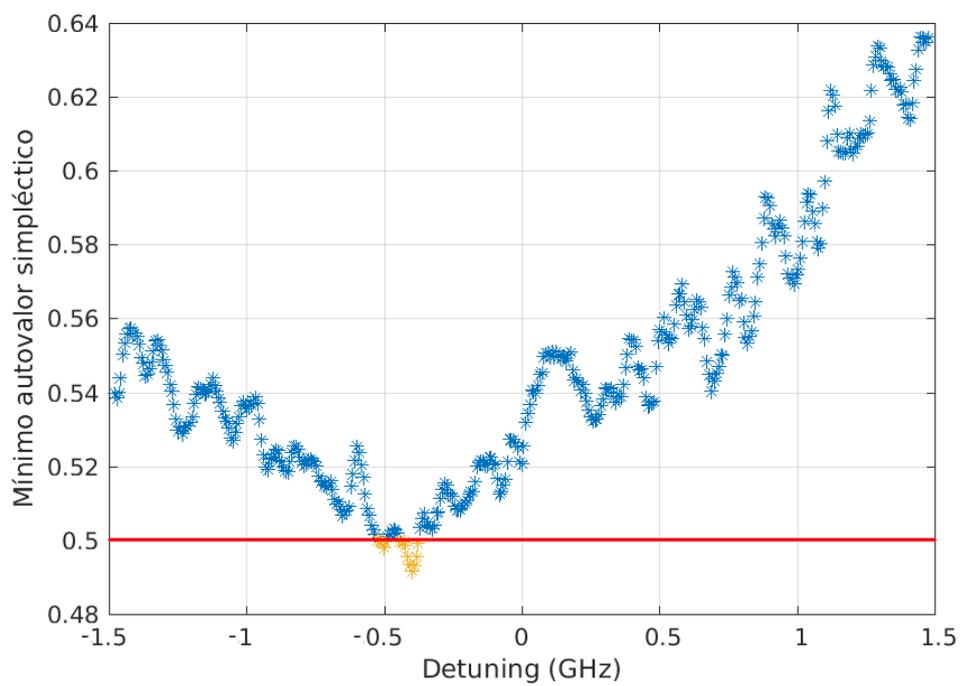
La figura 5.2 muestra las varianzas de las cuadraturas comprimida y anti-comprimida para Alice y Bob. El máximo valor de compresión obtenido para Alice fue de 2 dB, y para Bob de 0,6 dB. En la medida que se muestra en la figura, la compresión máxima para Alice es de 1,6 dB, y para Bob 0,3 dB, que corresponde a una compresión de 2,0 dB respecto del nivel de ruido del vacío antes del BS. El punto en que las varianzas de las cuadraturas se acercan entre sí es aproximadamente la frecuencia media entre las transiciones  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  y  $F = 2 \rightarrow F' = 1$ . Las regiones de mayor compresión suceden a 0,1 GHz de la transición  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  y a -0,9 GHz de la transición  $F = 2 \rightarrow F' = 1$ .

Las varianzas de las cuadraturas, el nivel de compresión obtenido, y las frecuencias en las que se lo encontró coinciden con los trabajos anteriores del grupo [43] [44] y el modelo teórico utilizado para estimarlo [56].

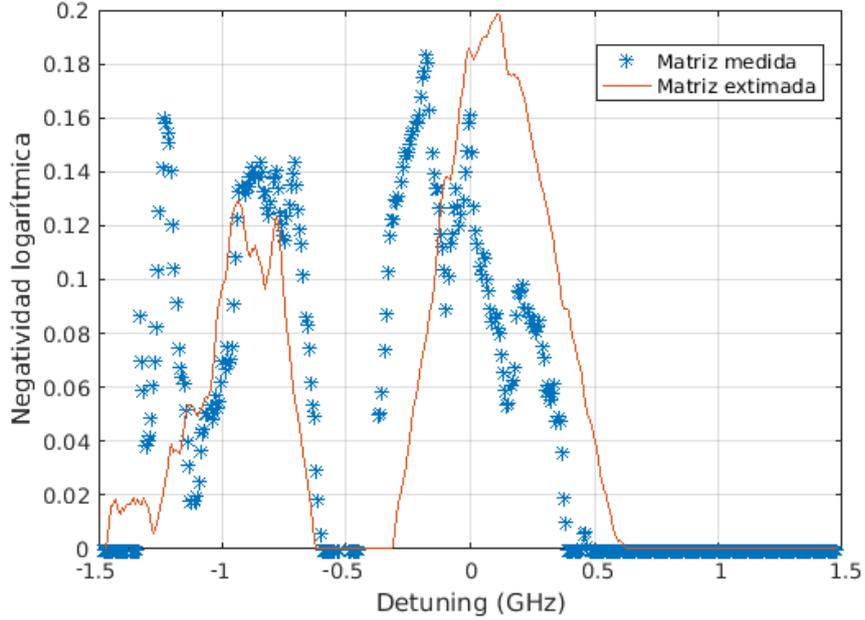
La condición para que una matriz represente la matriz de covarianza de un estado físico es que cumpla el principio de incertidumbre de Heisenberg; esto se refleja en que su mínimo autovalor simpléctico sea mayor o igual a  $1/2$  (ver (2.43)). Debido al ruido en las señales experimentales es esperable que algunas de las medidas no cumplan este criterio. En la figura 5.3 se muestra el mínimo autovalor simpléctico para las matrices de covarianza medidas. El mínimo autovalor simpléctico para la matriz inferida es siempre -por su construcción- igual a  $1/2$ . El comportamiento de la matriz medida se acerca más al esperado cuando hay menos ruido en la señal del Rubidio, es decir cuando el valor de la cuadratura anticomprimida es menor.

La figura 5.4 muestra el Entrelazamiento, cuantificado mediante la Negatividad Logarítmica para las matrices de covarianza medidas e inferidas. Existe Entrelazamiento en las frecuencias en que hay compresión en Alice y en Bob; la matriz inferida sólo tiene en cuenta las medidas de Alice. Si se observa la figura 5.4, parece haber una desviación en frecuencia entre el Entrelazamiento inferido y el medido; esto proviene de la diferencia entre las medidas de la cuadratura comprimida de Bob y su valor inferido (ver figura 5.2). En frecuencias para las que se encontró compresión en Alice pero no en Bob, existirá Entrelazamiento en la matriz inferida, pero no en la medida.

También se calculó la Pureza para las matrices medidas e inferidas, como



**Figura 5.3:** Método 1. Mínimo autovalor simpléctico para la matriz de covarianza en función del detuning respecto a las transiciones D1 del  $^{87}\text{Rb}$ . Sólo se aceptan las matrices obtenidas como matrices de covarianza con sentido físico cuando este valor es mayor o igual a  $1/2$ , por lo que se descartaron las medidas que están por debajo de ese valor, marcadas en amarillo.



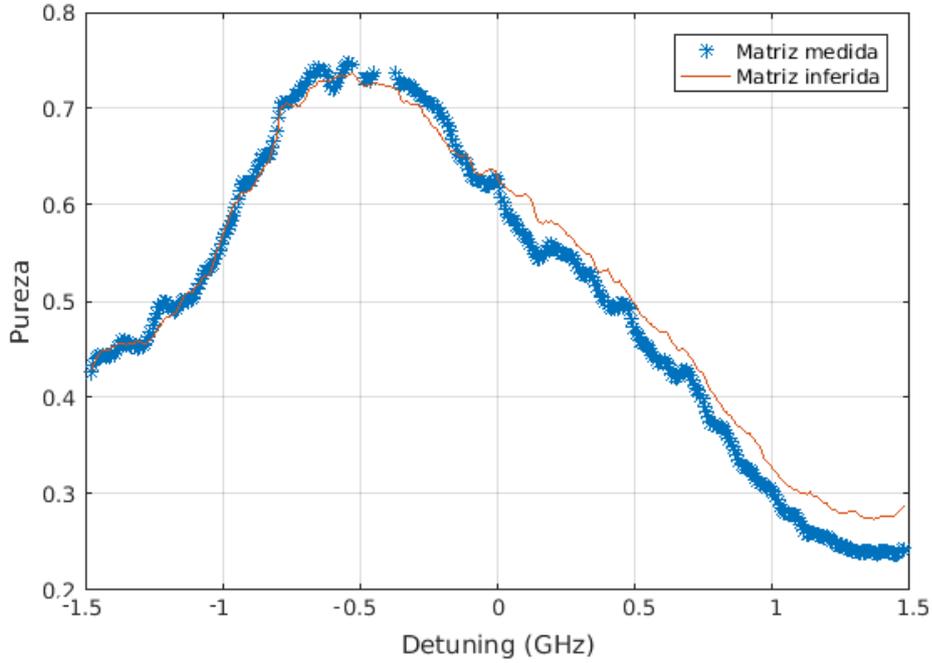
**Figura 5.4:** Método 1. Entrelazamiento en función del detuning respecto a la transición D1 del Rb, para la matriz experimental (puntos azules) y la inferida (línea roja).

puede verse en la figura 5.5. El valor máximo de Pureza obtenido fue  $\mu = 0,75$  coincidiendo con el punto en que la distancia entre los autovalores es mínima. Los estados que estamos estudiando son la combinación de un estado Gaussiano generado por la interacción con Rubidio y el vacío; el vacío siempre es puro, por lo que toda disminución en la Pureza viene del estado Gaussiano. Coincide lo esperado que el punto de mayor Pureza suceda cuando las varianzas de las cuadraturas anticomprimidas de Alice y Bob son menores.

Al calcular el Steering, comprobamos que éste no existía para ninguna de las medidas obtenidas. En la figura 5.6, se grafican los datos en función de su Pureza y del valor de  $a$  en (5.1) inferido a partir de las medidas en Alice, junto con la frontera entre estados dirigibles y no dirigibles para un BS 85:15. Las medidas no están en la zona correspondiente a estados dirigibles.

Para estudiar qué tan acorde a nuestro modelo eran los datos obtenidos se calculó la fidelidad entre la matriz inferida y la matriz medida. La fidelidad de Uhlmann entre dos operadores densidad es [61]

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = (\text{Tr}[\sqrt{\rho_1 \rho_2 \sqrt{\rho_1}}])^2. \quad (5.6)$$



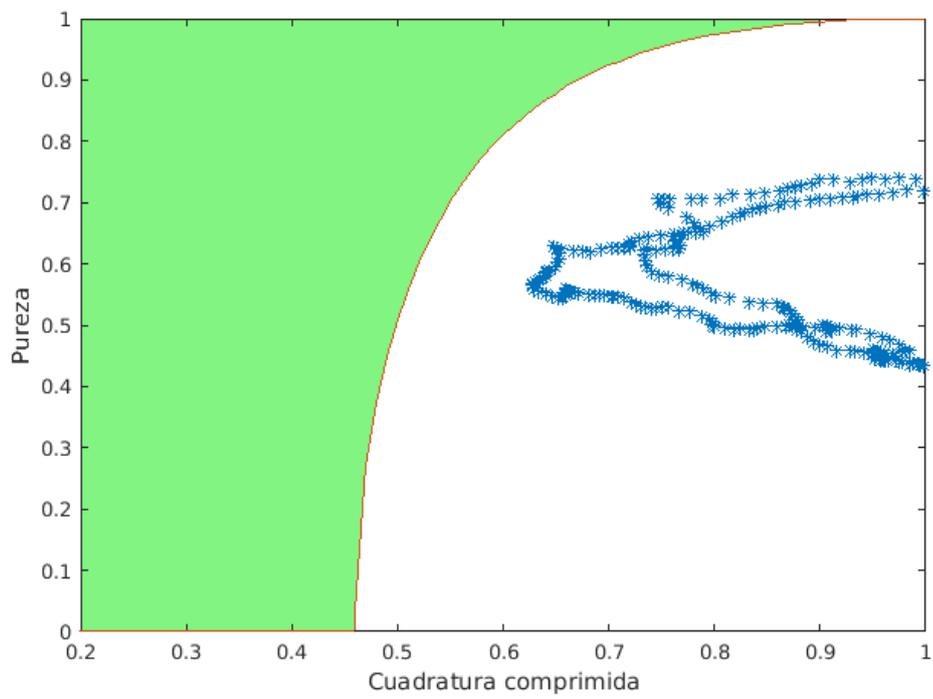
**Figura 5.5:** Método 1. Pureza en función del detuning respecto a la transición D1 del  $^{87}\text{Rb}$ .

Las matrices de covarianza medida e inferida se compararon utilizando (2.51), que es la fidelidad entre estados Gaussianos de dos modos [33]. En la figura 5.7, puede verse la fidelidad entre las matrices de covarianza medidas e inferidas.

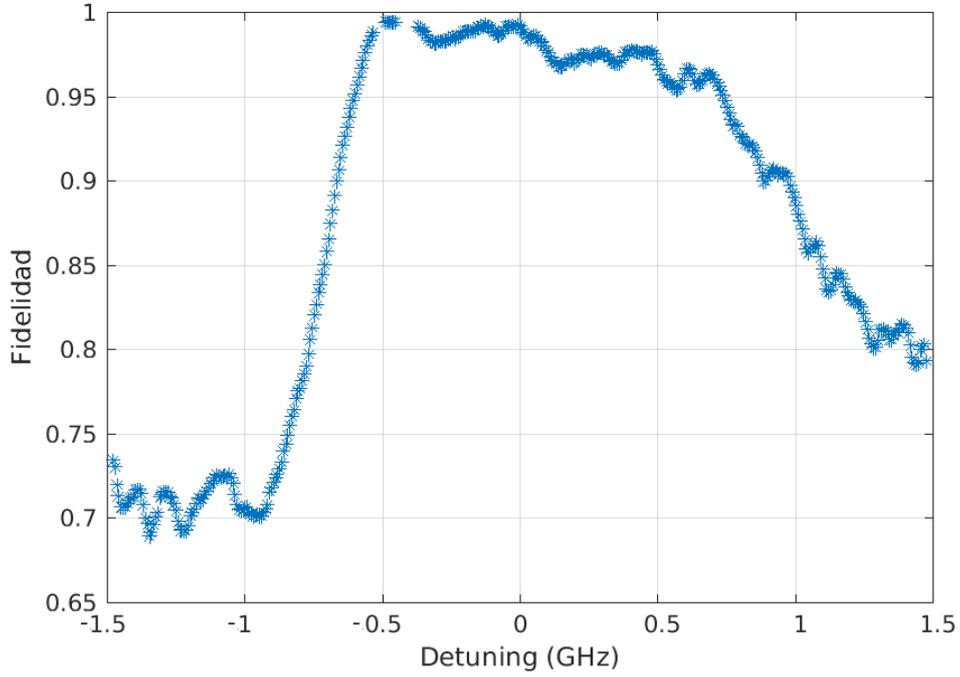
La fidelidad es máxima en el área de compresión cercana a  $F = 2 \rightarrow F' = 2$  y desciende abruptamente antes de -0,5 GHz de detuning. Comparando con el valor de las varianzas de las cuadraturas comprimida y anticomprimida de Bob en la figura 5.2 se ve que se alejan del valor inferido luego del punto en que las varianzas se aproximan entre sí en -0,5 GHz; esta diferencia en las cuadraturas medidas e inferidas es el motivo de la abrupta caída de la fidelidad.

## 5.2. Método 2: resolver la relación de intensidades entre Alice y Bob

Tomando en cuenta que una de las entradas del BS es vacío y que su transmitancia y reflectancia no son iguales, es posible obtener valores para  $\beta_a$  y  $\beta_b$  sin necesidad de medidas adicionales a las de los parámetros de Stokes de



**Figura 5.6:** Método 1. Datos en función de la Pureza y el valor inferido  $a$  para la cuadratura comprimida. Se puede ver que los datos obtenidos están en la región de estados no dirigibles (indicada en blanco).



**Figura 5.7:** Método 1. Fidelidad entre las matrices de covarianza medidas e inferidas en función de la frecuencia.

la señal.

Volvamos a nuestro modelo en que el estado inicial es un estado Gaussiano cualquiera y el vacío

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

y sea  $|\alpha|^2$  la intensidad de la polarización vertical del campo incidente.

Llamaremos  $A_-$ ,  $A_+$ ,  $B_-$  y  $B_+$  a las varianzas de los parámetros de Stokes para Alice (A) y Bob (B) en las polarizaciones elípticas cuyas varianzas de los parámetros de Stokes del estado Gaussiano inicial eran  $a$  y  $b$  respectivamente:

$$A_- = \frac{|\alpha|^2 T}{2} (aT + R) \quad (5.8a)$$

$$A_+ = \frac{|\alpha|^2 T}{2} (bT + R) \quad (5.8b)$$

$$B_- = \frac{|\alpha|^2 R}{2} (aR + T) \quad (5.8c)$$

$$B_+ = \frac{|\alpha|^2 R}{2} (bR + T). \quad (5.8d)$$

Como no conocemos qué polarizaciones son éstas, obtenemos  $A_-$ ,  $A_+$ ,  $B_-$  y  $B_+$  hallando los autovalores menor y mayor de las matrices de covarianza de parámetros de Stokes reducidas de Alice y Bob  $V_A$  y  $V_B$ :

$$V_A = \begin{pmatrix} \Delta S_\theta^2 & \Delta S_\theta S_{\theta+\pi/2} \\ \Delta S_{\theta+\pi/2} S_\theta & \Delta S_{\theta+\pi/2}^2 \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

$$V_B = \begin{pmatrix} \Delta S_\theta^2 & \Delta S_\theta S_{\theta+\pi/2} \\ \Delta S_{\theta+\pi/2} S_\theta & \Delta S_{\theta+\pi/2}^2 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

Es posible resolver el sistema de ecuaciones (5.8) para obtener  $a$ ,  $b$  y  $\alpha$ .

En nuestro caso la matriz que podemos reconstruir de las mediciones no es la matriz de covarianzas de parámetros de Stokes, porque depende de las ganancias de los dos sistemas de detectores. Llamaremos  $V'$  a la matriz obtenida de las mediciones (sin tener en cuenta las constantes  $\beta$ ), y  $A'_-$ ,  $A'_+$ ,  $B'_-$  y  $B'_+$  a los valores obtenidos al diagonalizar las submatrices correspondientes a Alice y Bob. El sistema que debemos resolver es

$$A'_- = \frac{g_a |\alpha|^2 T}{2} (aT + R) = \frac{\beta_a}{2} (aT + R) \quad (5.11a)$$

$$A'_+ = \frac{g_a |\alpha|^2 T}{2} (bT + R) = \frac{\beta_a}{2} (bT + R) \quad (5.11b)$$

$$B'_- = \frac{g_b |\alpha|^2 R}{2} (aR + T) = \frac{\beta_b}{2} (aR + T) \quad (5.11c)$$

$$B'_+ = \frac{g_b |\alpha|^2 R}{2} (bR + T) = \frac{\beta_b}{2} (bR + T). \quad (5.11d)$$

donde utilizamos que la intensidad en Alice  $|\alpha_a|^2$  es  $|\alpha|^2 T$ , y la intensidad en Bob  $|\alpha_b|^2$  es  $|\alpha|^2 R$ .

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$\beta_a = \frac{R}{(T^2 - R^2)} \left( \frac{A'_+ B'_- - A'_- B'_+}{B'_+ - B'_-} \right) \quad (5.12a)$$

$$\beta_b = \frac{T}{(T^2 - R^2)} \left( \frac{A'_+ B'_- - A'_- B'_+}{A'_+ - A'_-} \right). \quad (5.12b)$$

Ambos dependen del inverso de la diferencia entre las varianzas de las cuadraturas, por lo que el resultado no es válido cuando la diferencia es cero o se acerca a cero (ver figura 5.2). Se puede obtener un valor adecuado para la normalización promediando lejos de -0,5 GHz, donde las varianzas de las cuadraturas se aproximan. En particular, promediamos en la región donde esperábamos tener compresión, por ser nuestra área de interés.

Obtuvimos valores distintos para  $\beta_b/\beta_a$  y  $R/T$ , lo que indica una diferencia en la ganancia de los pares de detectores, coherentemente con los resultados de las medidas de vacío realizadas con el polarizador; la diferencia de ganancia entre los detectores era un factor de 3,5 aproximadamente. Los valores obtenidos tienen una diferencia relativa respecto de las medidas de vacío realizadas con el polarizador del 5,0% para Alice y del 2,5% para Bob, teniendo en cuenta la corrección por pérdida de intensidad en el polarizador.

Si se resuelve el sistema (5.11) para  $a$  y  $b$ , las soluciones también dependen del inverso de las diferencias entre las varianzas de las cuadraturas, por lo que tienen el mismo problema cerca de -0,5 GHz. Una manera de evitar este problema es utilizar los valores de  $\beta_a$  y  $\beta_b$  obtenidos en el paso anterior, y las varianzas de las cuadraturas de Alice, para obtener  $a$  y  $b$  de (5.11). Al igual que en la sección anterior consideramos las medidas en Alice más confiables, porque al tener mayor intensidad son menos susceptibles al ruido:

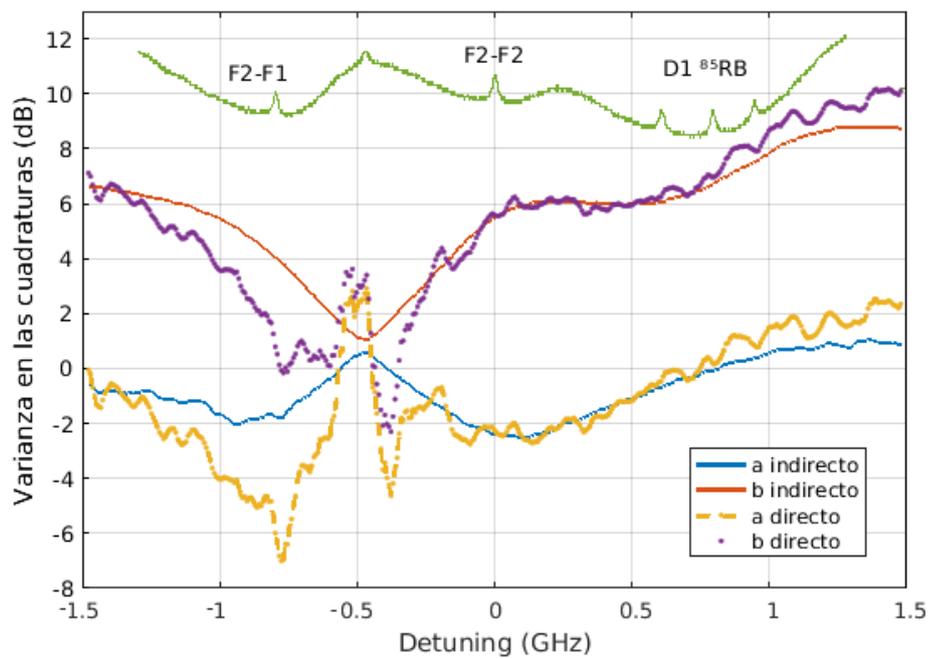
$$a = \frac{2A'_-}{\beta_a T} - \frac{R}{T} \quad (5.13a)$$

$$b = \frac{2A'_+}{\beta_a T} - \frac{R}{T}. \quad (5.13b)$$

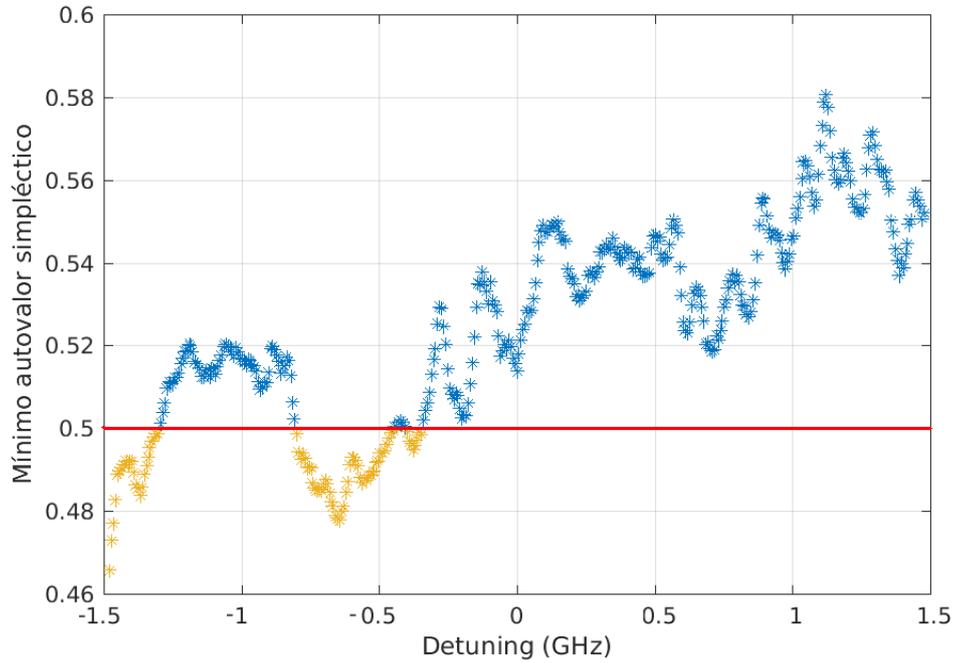
En la figura 5.8 se comparan los valores obtenidos para  $a$  y  $b$  resolviendo (5.11), y mediante (5.13) con los valores promediados de  $\beta_a$  y  $\beta_b$ . Resulta claro que la resolución del sistema falla para las frecuencias en que los autovalores se acercan entre sí.

La resolución del sistema de ecuaciones sin promediar también falla en la segunda región de compresión. En esta región las medidas obtenidas para Alice y Bob no parecen corresponderse unas con otras, al igual que se vio en la sección anterior.

Se calculó el mínimo autovalor simpléctico para ambos juegos de matrices de covarianza. En el caso de la matriz teórica el mínimo autovalor simpléctico es 1/2 por construcción, y todas las matrices representan estados físicos; para



**Figura 5.8:** Método 2. Varianza de las cuadraturas anticomprimida y comprimida del estado Gaussiano antes del BS calculadas mediante los valores promediados de  $\beta_a$  y  $\beta_b$  en rojo y azul; calculadas resolviendo el sistema (5.11) en púrpura y amarillo. Arriba, en verde, el espectro de absorción saturada del Rubidio natural, como referencia de frecuencia.



**Figura 5.9:** Método 2. Mínimo autovalor simpléctico para la matriz medida (azul) e inferida (rojo) en función del detuning. El mínimo autovalor de la matriz inferida es  $1/2$  por construcción. Las matrices medidas para las que el autovalor está por debajo de  $1/2$ , marcadas en amarillo, se consideran no físicas y se descartan.

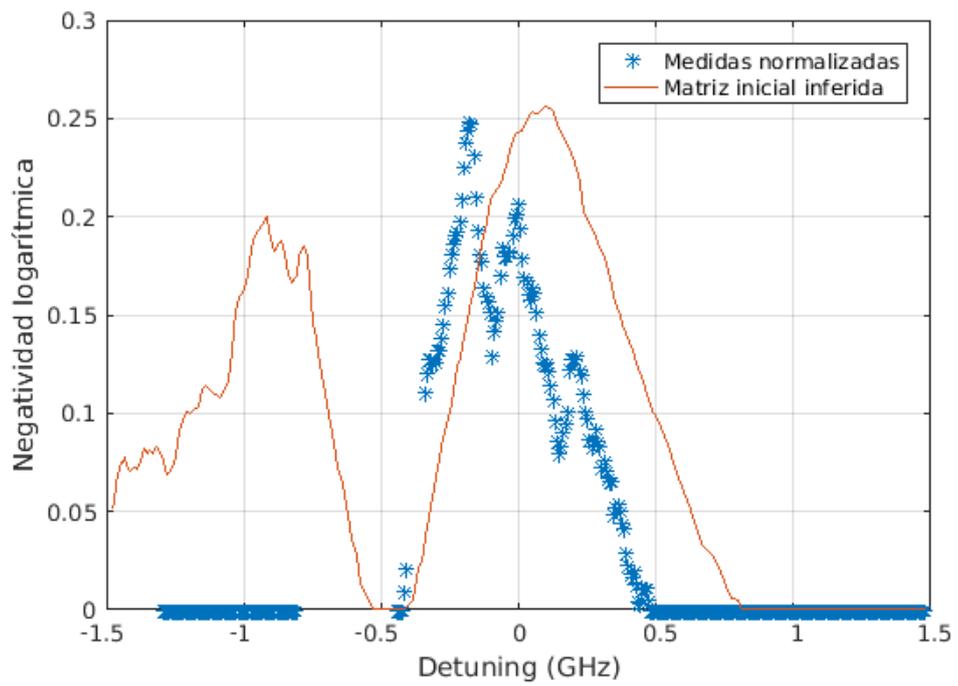
las matrices medidas algunos autovalores fueron menores a  $1/2$  y estas matrices fueron descartadas.

En la figura 5.10 se muestra la Negatividad logarítmica calculada para los datos, con los valores promediados de  $\beta_a$  y  $\beta_b$ , y se compara con la misma cantidad calculada a partir de la matriz teórica y los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos en (5.13). Las partes en blanco corresponden a matrices descartadas.

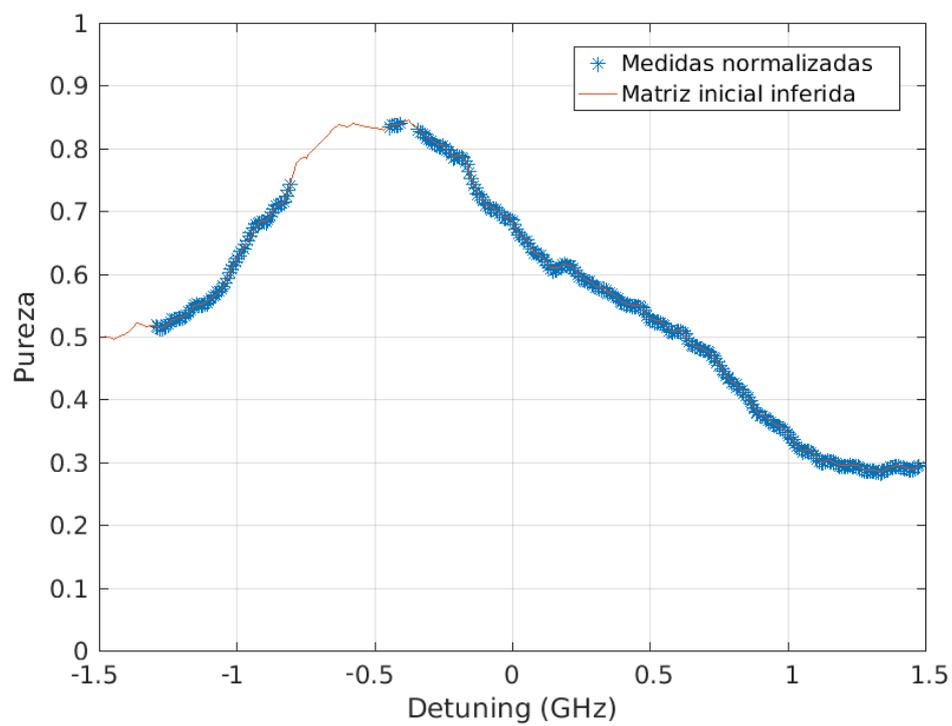
En la figura 5.11, mostramos la Pureza calculada para la normalización obtenida y la matriz teórica. Por cómo se obtuvieron  $\beta_a$  y  $\beta_b$ , los dos métodos han de llegar al mismo resultado. El valor máximo de Pureza obtenido es 0,85, que tiene una diferencia relativa del 10 % respecto del valor obtenido utilizando las medidas con el polarizador como normalización.

A pesar de las diferencias en los valores de Pureza y compresión obtenidos mediante este método, tampoco se encontró Steering en estos casos.

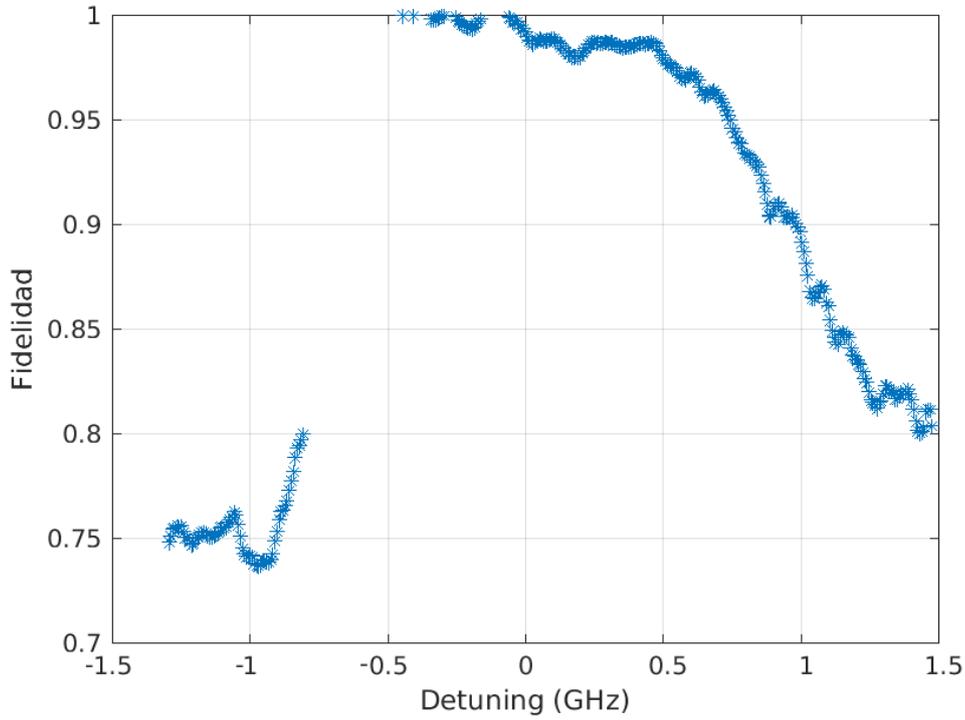
Para evaluar cuán similares eran las medidas obtenidas al modelo teórico, nuevamente calculamos la fidelidad entre ellas, como se puede ver en la figura



**Figura 5.10:** Método 2. Entrelazamiento calculado para las matrices de covarianza medidas (azul) e inferidas (rojo) en función del detuning.



**Figura 5.11:** Método 2. Pureza en función del detuning. La Pureza coincide para las matrices de covarianza medidas (azul) e inferidas (rojo). En los casos de frecuencias sin datos de las matrices medidas, ello se debe a que se descartaron por no representar estados físicos.



**Figura 5.12:** Método 2. Fidelidad entre las matrices de covarianza medidas (azul) e inferidas (rojo) en función del detuning.

5.12. Se llega a obtener una fidelidad de 1 entre 0 y -0,5 GHz de detuning. La forma de la fidelidad es muy similar a la obtenida en la normalización anterior, teniendo una diferencia promedio de 0,01 que se mantiene constante (a excepción de ruido) hasta los -0,8 GHz de detuning, cuando aumenta hasta 0,15 siguiendo la pendiente que puede verse tanto en 5.7 como en 5.12.

### 5.3. Método 3: fijación del mínimo autovalor simpléctico

Una tercera opción considerada para normalizar los datos sin necesidad de medidas adicionales fue imponer que el mínimo autovalor simpléctico valiera  $1/2$ . Como los autovalores simplécticos son invariantes ante la transformación del BS, y una de las entradas del mismo es el vacío, el mínimo autovalor simpléctico del estado a la salida del BS debe ser el autovalor simpléctico del vacío,  $1/2$ .

Este método requiere que la relación entre  $\beta_a$  y  $\beta_b$  sea conocida, es decir, que sean conocidas la transmitancia del BS y la razón entre las ganancias de los detectores. Por el momento volvemos a las expresiones originales  $\beta_a = g_a|\alpha|^2T$  y  $\beta_b = g_b|\alpha|^2R$ .

Si tenemos la matriz de covarianza del estado a la salida del BS:

$$\sigma_{out} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

El mínimo autovalor simpléctico  $\nu_-$  de  $\sigma_{out}$  depende de su determinante y de los determinantes de A, B, y C.

$$\nu_- = \sqrt{\frac{\Delta(\sigma) - \sqrt{\Delta(\sigma)^2 - 4 \det(\sigma)}}{2}}, \quad (5.15)$$

donde  $\Delta(\sigma) = \det(A) + \det(B) + 2\det(C)$ .

Como el BS es una transformación simpléctica, los autovalores simplécticos de  $\sigma_{out}$  son los mismos que los de  $\sigma_{in}$ ,

$$\sigma_{in} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.16)$$

por lo que  $\nu_- = 1/2$  y  $\nu_+ = \frac{\sqrt{ab}}{2}$ .

La matriz reconstruida a partir de las mediciones  $V'$ :

$$V' = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g_a|\alpha|^2TA & \sqrt{g_a g_b RT}|\alpha|^2C \\ \sqrt{g_a g_b RT}|\alpha|^2C^T & g_b|\alpha|^2RB \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A' & C' \\ C'^T & B' \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

aunque no necesariamente está expresada en estos mismos ejes.

El mínimo autovalor simpléctico es entonces

$$\nu_- = \frac{1}{2|\alpha|^2} \left( \Delta' + \sqrt{[\Delta']^2 - 4 \frac{\det(V')}{g_a^2 g_b^2 T^2 R^2}} \right)^{1/2}, \quad (5.18)$$

$$\Delta' = \frac{\det(A')}{g_a^2 T^2} + \frac{\det(B')}{g_b^2 R^2} + \frac{2\det(C')}{g_a g_b TR}; \quad (5.19)$$

imponiendo que valga 1/2 obtenemos una expresión para  $|\alpha|^2$ :

$$|\alpha|^2 = \left( \Delta' + \sqrt{[\Delta']^2 - 4 \frac{\det(V')}{g_a^2 g_b^2 T^2 R^2}} \right)^{1/2}. \quad (5.20)$$

En nuestro caso conocíamos los valores de  $T$  y  $R$  pero no los de  $g_a$  y  $g_b$ , aunque sí la razón entre ellos  $g_r = g_b/g_a$ . Elegimos entonces la descripción  $\beta_a = T|\alpha|^2$  y  $\beta_b = g_r R|\alpha|^2$  (somos libres de hacerlo porque  $|\alpha|$  no está determinado independientemente de las ganancias). Remplazando en la expresión anterior obtenemos:

$$\beta_a = T \left( \Delta' + \sqrt{[\Delta']^2 - 4 \frac{\det(V')}{g_r^2 T^2 R^2}} \right)^{1/2}, \quad (5.21)$$

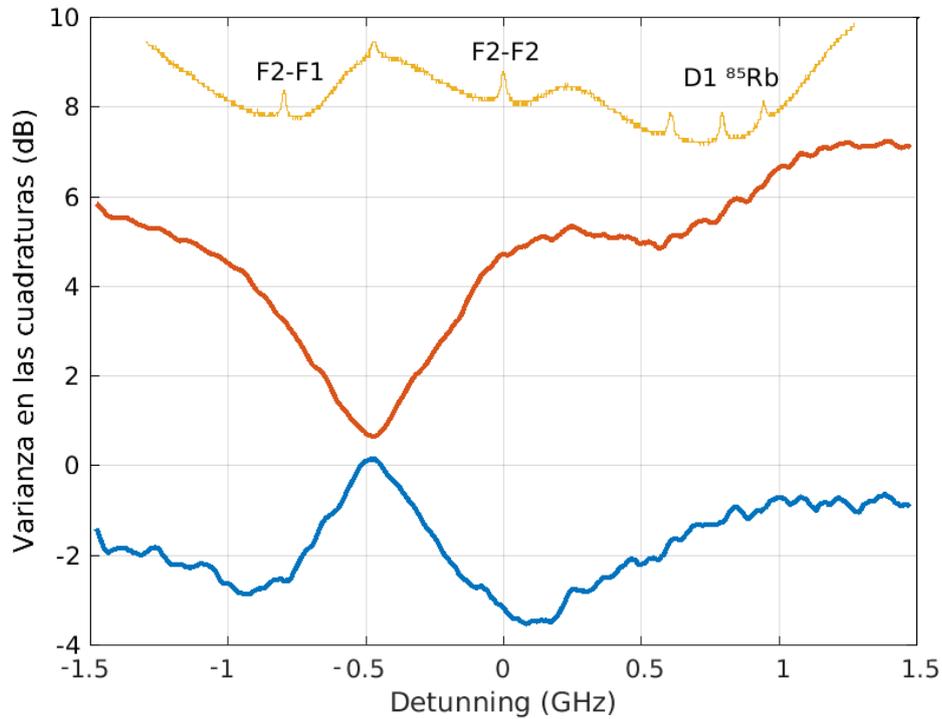
$$\beta_b = g_r R \left( \Delta' + \sqrt{[\Delta']^2 - 4 \frac{\det(V')}{g_r^2 T^2 R^2}} \right)^{1/2}, \quad (5.22)$$

$$\text{con: } \Delta' = \frac{\det(A')}{T^2} + \frac{\det(B')}{g_r^2 R^2} + \frac{2\det(C')}{g_r T R}. \quad (5.23)$$

Este método impone un mínimo autovalor simpléctico constante, y supone que la matriz medida corresponde a una matriz similar a  $\sigma_{out}$ . Considerando los mínimos autovalores simplécticos calculados para los datos por los métodos anteriores, que no son constantes y sólo se acercan a  $1/2$  en el entorno de  $-0,5$  GHz, y el comportamiento de la fidelidad entre las matrices medidas y las inferidas que decae abruptamente luego de  $-0,5$  GHz, este método no nos daría un valor constante para la normalización, y sólo daría resultados similares a los medidos en el caso de las medidas entre  $0,7$  GHz y  $-0,5$  GHz, cuando la fidelidad se mantiene con menos de  $0,5\%$  de error relativo respecto del valor esperado 1.

Una ventaja de este método es que todas las matrices de covarianza generadas cumplirán necesariamente con el principio de incertidumbre (representarán estados físicos), y representarán el estado a la salida del BS sobre el que inciden un estado Gaussiano y el vacío. Una desventaja es que, por estos mismos motivos, el mínimo autovalor simpléctico no servirá como indicador de errores en la medición, por ejemplo en la selección de ángulos de los parámetros de Stokes.

Calculando los valores para  $a$  y  $b$  a partir de las medidas de Alice con el valor de  $\beta_a$  obtenido como en los métodos anteriores, se llega a los valores mostrados en la figura 5.13. Estos valores son similares a los obtenidos con los métodos anteriores, pero a está comprimido para todas las frecuencias, y



**Figura 5.13:** Método 3. a y b calculados a partir de las medidas de Alice en función de la frecuencia (en dB respecto del ruido del vacío). Arriba, en amarillo, el espectro de absorción saturada del Rubidio natural, como referencia de frecuencia.

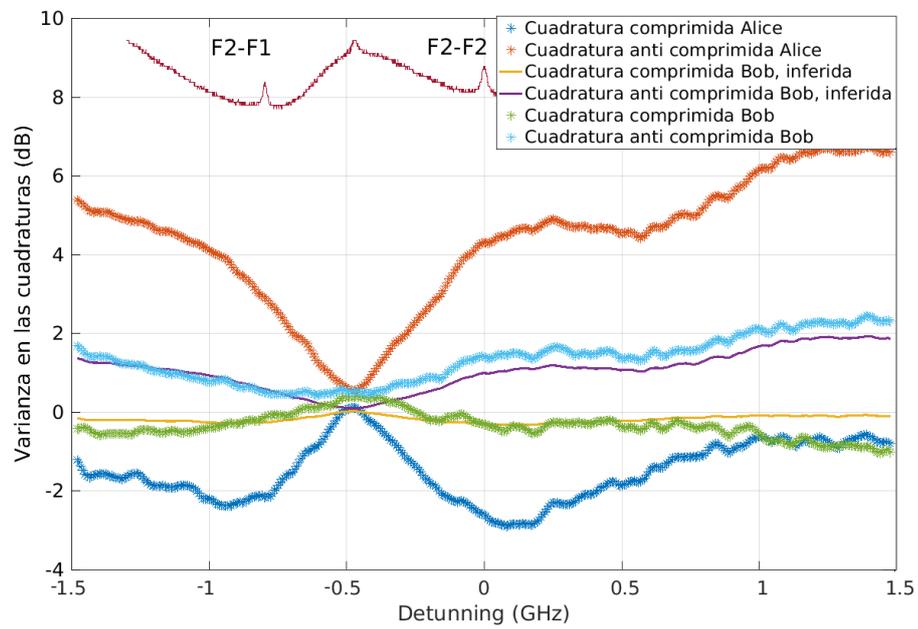
el máximo nivel de compresión es 3,5 dB, casi 1,5 dB mayor a los obtenidos anteriormente.

Al comparar los valores de las varianzas en las cuadraturas de Alice y Bob para las matrices de covarianza medidas e inferidas, en la figura 5.14 se ve que las cuadraturas de Alice y las cuadraturas inferidas de Bob tienen un comportamiento similar al esperado en vista de los resultados anteriores, pero de nuevo ambos tienen compresión para todas las frecuencias, algo que no esperábamos encontrar.

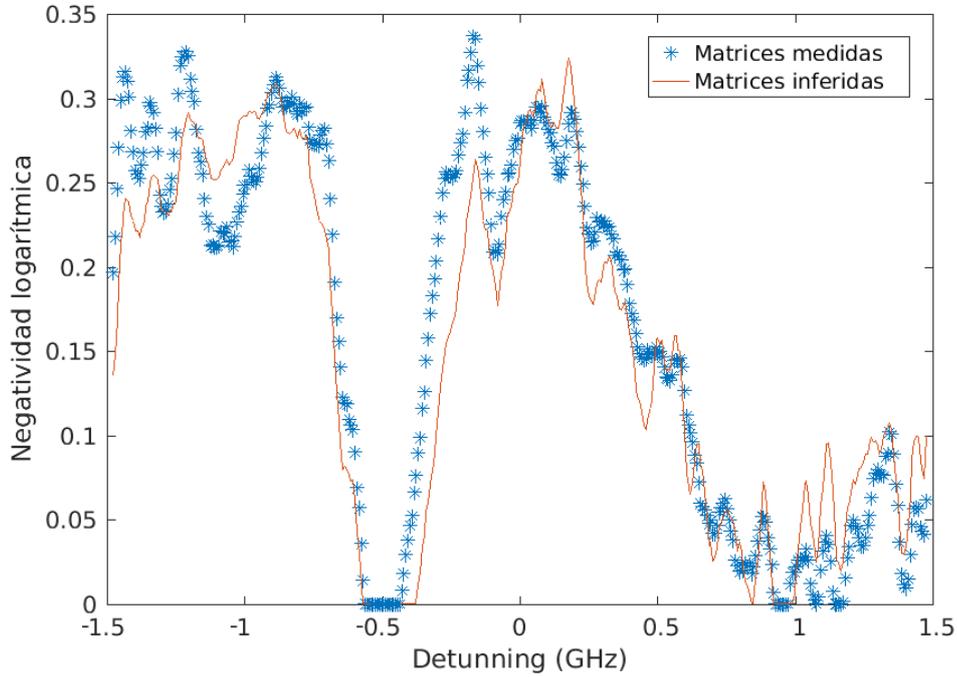
Esta presencia de compresión para todas las frecuencias se refleja en más matrices de covarianza que presentan Entrelazamiento, graficado en la figura 5.15.

La Pureza, mostrada en la figura 5.16 también es mayor mediante este método, y tiene menor distancia relativa entre las matrices medidas e inferidas: 0,4% en promedio sobre todas las frecuencias.

Como en los casos anteriores, comparamos las matrices de covarianza me-



**Figura 5.14:** Método 3. Varianza en las cuadraturas de Alice y Bob para las matrices medidas e inferidas en dB respecto del ruido del vacío, en función de la frecuencia. Arriba, en rojo oscuro, el espectro de absorción saturada del Rubidio natural, como referencia de frecuencia.



**Figura 5.15:** Método 3. Entrelazamiento, cuantificado mediante la Negatividad Logarítmica, para las matrices medidas e inferidas, en función de la frecuencia.

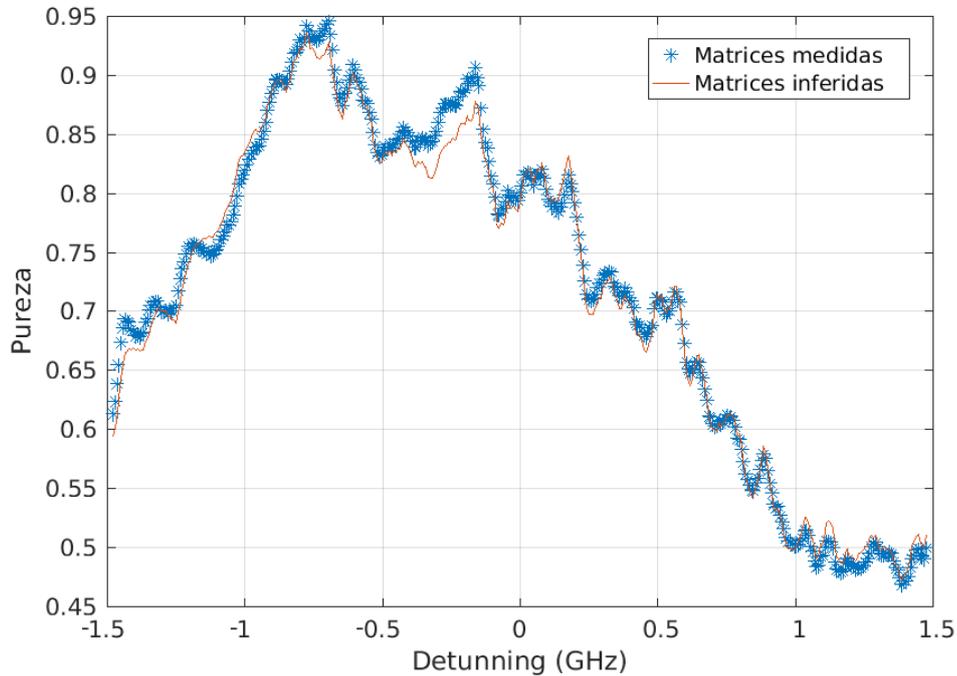
medidas e inferidas mediante la fidelidad entre ellas (figura 5.17). La fidelidad sigue el comportamiento de los casos anteriores, por lo que concluimos que la caída después de  $-0,5$  GHz refleja un error en la medición, y no un efecto de la definición de los  $\alpha$ .

Por último, con estos valores de  $\beta_a$  y  $\beta_b$  encontramos Steering de Alice en Bob para las frecuencias menores, entre  $-0,7$  GHz y  $-1,5$  GHz. Puede verse en la figura 5.18.

Las frecuencias para las que los estados son dirigibles coinciden con las frecuencias para las que la fidelidad es baja (cerca a  $0,73$ ), por lo que no es confiable forzar el mínimo autovalor simpléctico para que coincida con su valor esperado. Como además, no se encontró Steering por los métodos anteriores para ninguna frecuencia, consideramos que estos resultados son espurios.

## 5.4. Errores experimentales

En los primeros dos métodos de análisis implementados, el error relativo entre los valores calculados para las matrices de covarianza medidas e inferidas

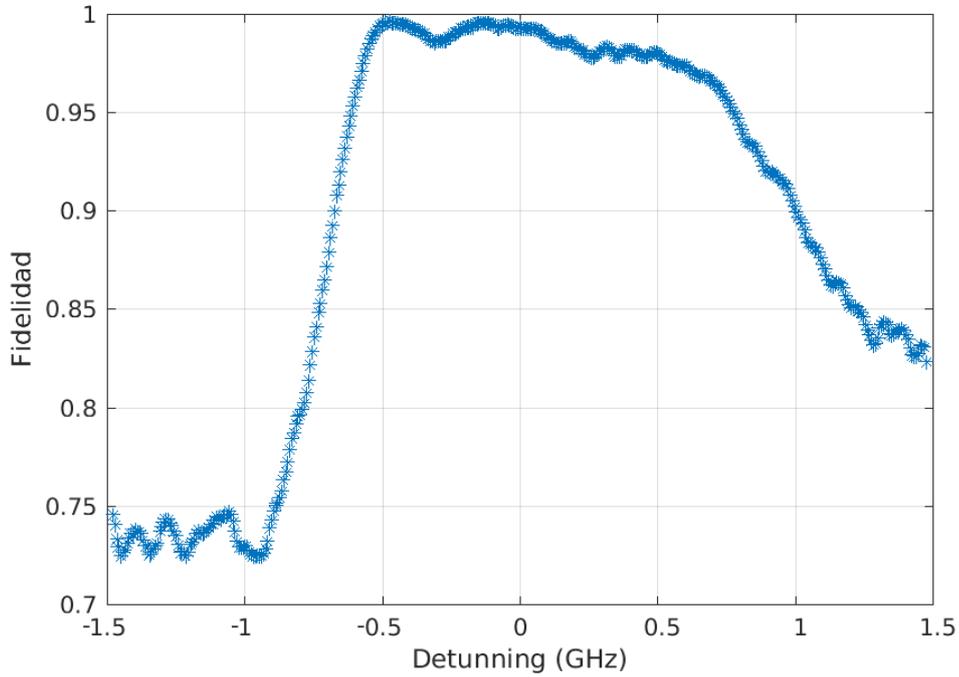


**Figura 5.16:** Método 3. Pureza para las matrices medidas e inferidas en función de la frecuencia.

aumenta al alejarse de la región de mayor compresión. Creemos que esto proviene de errores en la determinación del ángulo  $\theta$  que identifica al parámetro de Stokes medido, por las causas que se detallan a continuación.

En primer lugar, la elección de parámetros de Stokes dependía de la elección de ángulos en las láminas de media onda. Un error en el ángulo elegido implica tomar ejes no ortogonales para la reconstrucción de las elipses de incertidumbre de los modos de Alice y Bob. El error generado por estas variaciones en ángulo aumenta cuanto más excéntrica sea la elipse, por lo que su efecto será más notorio al alejarnos de  $-0.5$  GHz, el punto en que las varianzas de las cuadraturas son más similares entre sí.

En segundo lugar, si las láminas de media onda y cuarto de onda fuesen ideales, y sobre la lámina de cuarto de onda incidiera un haz polarizado linealmente a  $45^\circ$  de su eje, el balance de intensidades en los detectores no debería cambiar al rotar la lámina de media onda. En nuestro caso sí variaba; el balance era sensible a pequeños cambios en el ángulo entre los planos de las láminas, y entre éstos y el haz incidente; la variación dependía además de la frecuencia. En la figura 5.19 se muestra un ejemplo de las intensidades en los dos detecto-



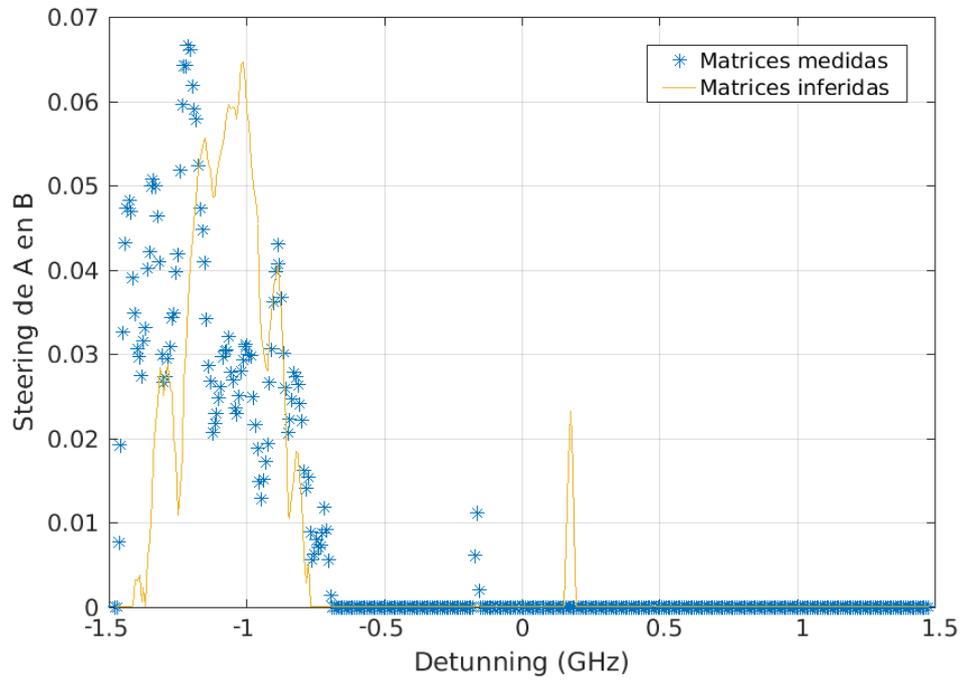
**Figura 5.17:** Método 3. Fidelidad entre las matrices medidas e inferidas en función de la frecuencia.

res de Alice. La alineación de las láminas se optimizó para la región de mayor compresión, por lo que, de nuevo, esperamos mayores errores de detección al alejarnos del intervalo entre -0,5 GHz y 0,3 GHz.

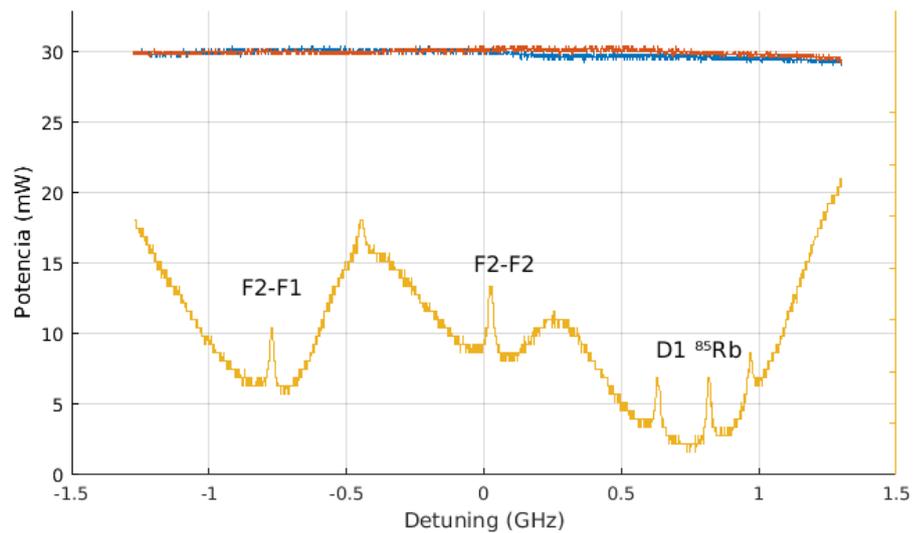
## 5.5. Comparación de los tres métodos

En la figura 5.20 se comparan los valores de  $\beta_a$  y  $\beta_b$  obtenidos por todos los métodos implementados. Los valores obtenidos por el método 2 (resolución del sistema de ecuaciones (5.11)) se acercan a los obtenidos por el método 1 (medidas de ruido de vacío) en la región de compresión (entre -0,7 GHz y -0,3 GHz); los valores obtenidos al promediar en esa región tienen un error relativo del 5% y 2,5% respectivamente, como se mencionó anteriormente. Este método falla en torno a -0,5 GHz cuando las varianzas de las cuadraturas se aproximan entre sí, como se esperaba desde un primer momento.

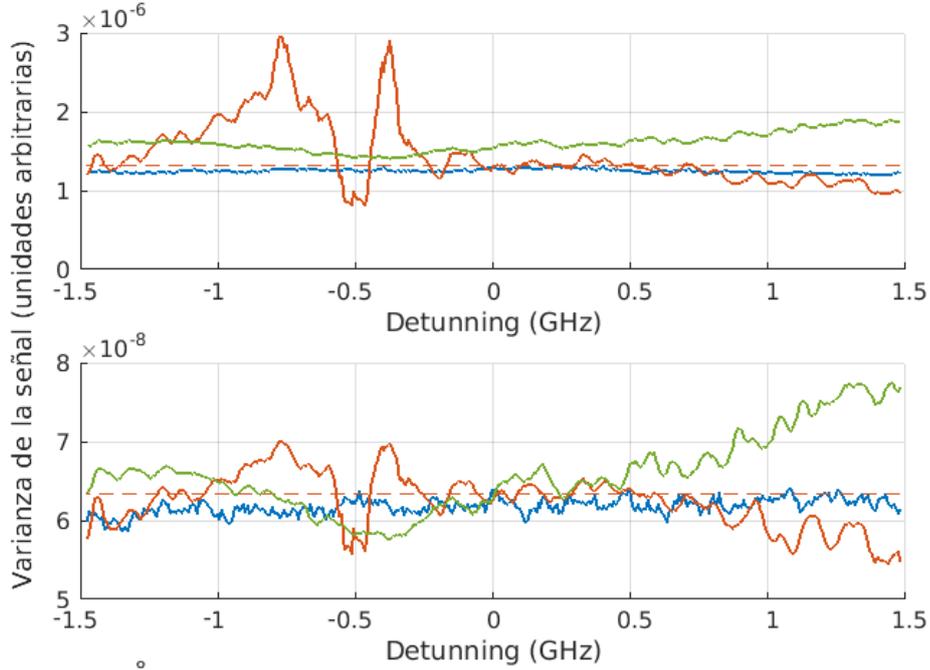
En el método 3 para  $\beta_a$  y  $\beta_b$  (son iguales a menos de una constante de proporcionalidad), la diferencia entre los valores máximos y mínimos obtenidos es 30% del valor medido. Esta variación es menor a la del método 2, pero a diferen-



**Figura 5.18:** Método 3. Steering de Alice en Bob para las matrices medidas e inferidas en función de la frecuencia.



**Figura 5.19:** El balance de intensidades entre ambos detectores de Alice (rojo y azul) varía con la frecuencia. El espectro de absorción del Rubidio natural (amarillo) se muestra como referencia de las frecuencias.



**Figura 5.20:**  $\beta_a$  (arriba) y  $\beta_b$  (abajo) en función de la frecuencia por todos los métodos calculados. 1-Medidas de ruido de vacío (azul), 2-balance de intensidades (rojo), promedio del valor obtenido por 2-balance de intensidades (rojo-punteado) y 3-fijación del mínimo autovalor simpléctico (verde).

cia de éste, no había una región para la que supiéramos que el método fallaría independientemente de los errores experimentales, por lo que no teníamos un motivo previo por el que promediar en un cierto rango de frecuencias. En el mejor de los casos posibles, si promediamos en la región de mayor compresión de Alice, motivados por los errores experimentales cometidos, el valor obtenido para  $\beta_a$  tiene un error relativo del 29% respecto del obtenido por el método 1, y 30% para  $\beta_b$ . Son valores grandes, y más si se tiene en cuenta que para el método 2, estos mismos errores relativos eran del 5% y 2,5% respectivamente.

Para los tres métodos la fidelidad cayó abruptamente para frecuencias menores a -0,5 GHz. Suponemos que se debe a una mala medición de los parámetros de Stokes por los motivos detallados en la sección anterior, principalmente por los problemas de alineación de las láminas de media onda y cuarto de onda.

Las ventajas y desventajas de cada método son las siguientes:

- Método 1. Son las medidas más confiables, porque fijan el límite de ruido del vacío desde una referencia externa. Sus debilidades radican en que es

necesario realizar más medidas para tener las referencias, y la correcta justificación de que estas mediciones correspondan al vacío. Es sensible a errores en la determinación de los parámetros de Stokes a través del mínimo autovalor simpléctico.

- Método 2. Tomando el promedio en la región de mayor compresión, éste método recupera los valores del método 1 con un 5% de error sin necesidad de medidas adicionales. También es sensible a errores en la determinación de los parámetros de Stokes a través del mínimo autovalor simpléctico. La debilidad principal de este método es que falla cuando los autovalores se aproximan entre sí, y es necesario justificar adecuadamente la elección de cuáles valores se promedian y cuáles se descartan.
- Método 3. Todas las matrices de covarianza obtenidas mediante este método cumplen con el principio de incertidumbre de Heisenberg, y representan un estado que antes del BS corresponde a un estado Gaussiano y el vacío. Al igual que el método 2, no requiere medidas adicionales. No es sensible a errores en la determinación de los parámetros de Stokes, y no recupera los valores del método 1 (aún promediando, el error relativo es del 30%). Además falla al sobreestimar la compresión y las correlaciones que investigábamos.

# Capítulo 6

## Conclusiones finales

En el marco de esta tesis estudiamos el fenómeno de Steering en un subconjunto de los estados Gaussianos. Deseábamos averiguar si existía Steering en los estados entrelazados observados experimentalmente por el grupo en investigaciones anteriores.

El Steering es una correlación más fuerte que el Entrelazamiento y por tanto más restrictiva; concluimos que es posible construir estados dirigibles con un sistema sencillo de un estado comprimido y un BS, pero se necesitan niveles de compresión y pureza mayores a los alcanzados hasta el momento mediante autorrotación de la polarización en  $^{87}\text{Rb}$ .

El estudio teórico de las condiciones necesarias para la detección de Steering, y su evolución bajo la pérdida de Pureza (presencia de estados mezcla) encontró límites sencillos para el Steering, y produjo un mapeo de todos los estados posibles dentro de nuestro modelo. Si bien este estudio está restringido a un tipo de montaje -un estado comprimido incide con vacío en un BS-, sus resultados no dependen del método implementado para obtener los estados comprimidos ni del montaje de detección posterior al BS.

Nuestro mapeo de los estados dirigibles y no dirigibles permitiría, en otras investigaciones, descartar métodos para la generación vacío comprimido que no permitan alcanzar los niveles de compresión y Pureza necesarios.

En cuanto al trabajo experimental, se generaron estados comprimidos por autorrotación de la polarización en Rubidio, se obtuvieron las matrices de covarianza de estados Gaussianos de dos modos, se observó la existencia de compresión y Entrelazamiento, y se analizó la posibilidad de Steering comprobando que los niveles de Pureza y compresión alcanzables no eran suficientes

para su detección.

Aún está abierto el debate sobre cuál es la forma ideal de obtener el nivel de referencia para el vacío. En esta tesis presentamos dos métodos alternativos, innovando en la determinación del nivel de ruido del vacío, además del tradicional mediante medidas de las variaciones de las cuadraturas del vacío.

Los tres métodos implementados presentan ventajas y desventajas. El método de determinación de  $\beta_a$  y  $\beta_b$  por medidas de vacío (método 1) no depende de las mediciones de la señal, por lo que ofrece una referencia externa, pero requiere realizar más medidas. El método 2, utilizando la diferencia en intensidad de Alice y Bob, tiene la ventaja de no requerir medidas externas, y replica los resultados de las medidas con polarizador con un 5% de error relativo. El método 3, que fija el valor del mínimo autovalor simpléctico, además de no requerir más medidas, asegura que todas las matrices obtenidas sean físicas y que representen la mezcla de un estado Gaussiano y el vacío, pero no es sensible a errores de medición en las matrices de covarianza (en nuestro caso por la identificación de los parámetros de Stokes); tuvo un error relativo del 30% respecto del método 1 y sobreestimó los valores de todas las cantidades de interés de nuestra investigación: compresión, Entrelazamiento y Steering.

En caso de seguir en la búsqueda de estados dirigibles, podemos concluir no se pueden alcanzar en las condiciones del experimento realizado. Pensando en alternativas, una podría ser cambiar el método utilizado para generar estados comprimidos por uno que permita mayor compresión; otra posibilidad: hacer incidir dos estados comprimidos en el BS en lugar de un estado comprimido y el vacío ajustando cuidadosamente la diferencia de fases.

# Referencias bibliográficas

- [1] A. B. Matsko, I. Novikova, G. R. Welch, D. Budker, D. F. Kimball, and S. M. Rochester. Vacuum squeezing in atomic media via self-rotation. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 66(4):10, oct 2002.
- [2] E. Schrödinger. Discussion of Probability Relations between Separated Systems. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 31(4):555–563, 1935.
- [3] Nora Tischler, Farzad Ghafari, Travis J. Baker, Sergei Slussarenko, Raj B. Patel, Morgan M. Weston, Sabine Wollmann, Lynden K. Shalm, Varun B. Verma, Sae Woo Nam, H. Chau Nguyen, Howard M. Wiseman, and Geoff J. Pryde. Conclusive Experimental Demonstration of One-Way Einstein-Podolsky-Rosen Steering. *Physical Review Letters*, 121(10):100401, sep 2018.
- [4] Dominik Rauch, Johannes Handsteiner, Armin Hochrainer, Jason Gallicchio, Andrew S. Friedman, Calvin Leung, Bo Liu, Lukas Bulla, Sebastian Ecker, Fabian Steinlechner, Rupert Ursin, Beili Hu, David Leon, Chris Benn, Adriano Ghedina, Massimo Cecconi, Alan H. Guth, David I. Kaiser, Thomas Scheidl, and Anton Zeilinger. Cosmic Bell Test Using Random Measurement Settings from High-Redshift Quasars. *Physical Review Letters*, 121(8), aug 2018.
- [5] H. M. Wiseman, S. J. Jones, and A. C. Doherty. Steering, Entanglement, Nonlocality, and the EPR Paradox. *Physical Review Letters*, 98(14), dec 2006.
- [6] J. S. Bell. On the Einstein Podolsky Rosen paradox. *Physics Physique Fizika*, 1(3):195–200, nov 1964.
- [7] Ana Belén Sainz, Leandro Aolita, Nicolas Brunner, Rodrigo Gallego, and Paul Skrzypczyk. Classical communication cost of quantum steering. *Physical Review A*, 94(1):1–7, 2016.

- [8] Marco Piani and John Watrous. Necessary and sufficient quantum information characterization of Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Physical Review Letters*, 114(6):1–6, 2015.
- [9] Ioannis Kogias, Antony R. Lee, Sammy Ragy, and Gerardo Adesso. Quantification of gaussian quantum steering. *Physical Review Letters*, 114(6), 2015.
- [10] Se Wan Ji, Jaehak Lee, Jiyong Park, and Hyunchul Nha. Quantum steering of Gaussian states via non-Gaussian measurements. *Scientific Reports*, 6(1):1–7, jul 2016.
- [11] Roope Uola, Ana C.S. Costa, H. Chau Nguyen, and Otfried Gühne. Quantum steering. *Reviews of Modern Physics*, 92(1):015001, mar 2020.
- [12] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via Bell’s theorem. *Physical Review Letters*, 47(7):460–463, aug 1981.
- [13] Devin H. Smith, Geoff Gillett, Marcelo P. De Almeida, Cyril Branciard, Alessandro Fedrizzi, Till J. Weinhold, Adriana Lita, Brice Calkins, Thomas Gerrits, Howard M. Wiseman, Sae Woo Nam, and Andrew G. White. Conclusive quantum steering with superconducting transition-edge sensors. *Nature Communications*, 3(1):1–6, jan 2012.
- [14] Vitus Händchen, Tobias Eberle, Sebastian Steinlechner, Aiko Sambrowski, Torsten Franz, Reinhard F. Werner, and Roman Schnabel. Observation of one-way Einstein-Podolsky-Rosen steering. *Nature Photonics*, 6(9):596–599, jun 2012.
- [15] Kai Sun, Xiang Jun Ye, Jin Shi Xu, Xiao Ye Xu, Jian Shun Tang, Yu Chun Wu, Jing Ling Chen, Chuan Feng Li, and Guang Can Guo. Experimental Quantification of Asymmetric Einstein-Podolsky-Rosen Steering. *Physical Review Letters*, 116(16):160404, apr 2016.
- [16] Yin Cai, Yu Xiang, Yang Liu, Qiongyi He, and Nicolas Treps. Versatile Multipartite Einstein-Podolsky-Rosen Steering via a Quantum Frequency Comb. oct 2019.
- [17] Claude Fabre and Nicolas Treps. Modes and states in Quantum Optics. dec 2019.

- [18] Claude Cohen-Tannoudji, Jacques. Dupont-Roc, and Gilbert. Grynberg. *Photons and atoms : introduction to quantum electrodynamics*. Wiley, 1989.
- [19] Christopher Gerry and Peter Knight. *Introductory Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2<sup>o</sup> edition, oct 2004.
- [20] U. Fano. Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques. *Reviews of Modern Physics*, 29(1):74–93, jan 1957.
- [21] Michael A. Nielsen and Isaac L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2010.
- [22] Wolfgang P. Schleich. *Quantum Optics in Phase Space*. Wiley, feb 2001.
- [23] S. Olivares. *Quantum optics in the phase space*, volume 203. 2012.
- [24] E. Wigner. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium. *Physical Review*, 40(5):749–759, jun 1932.
- [25] Suhail Zubairy. Quantum Squeezing. *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics*, 7(5):156, 2005.
- [26] Mark Hillery. Classical pure states are coherent states. *Physics Letters A*, 111(8-9):409–411, oct 1985.
- [27] N Gisin. Bell’s inequality holds for all non-product states. Technical Report 5, 1991.
- [28] Stefano Pirandola, Alessio Serafini, and Seth Lloyd. Correlation matrices of two-mode bosonic systems. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 79(5):1–10, 2009.
- [29] J. Eisert and M. B. Plenio. Introduction to the basics of Entanglement theory in continuous-variable systems. *International Journal of Quantum Information*, 01(04):479–506, dec 2003.
- [30] Maurice de. Gosson. *Symplectic geometry and quantum mechanics*. Birkhäuser Verlag, 2006.
- [31] M. G. A. Paris, F. Illuminati, A. Serafini, and S. De Siena. Purity of Gaussian states: measurement schemes and time-evolution in noisy channels. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 68(1):9, apr 2003.

- [32] H Scutaru. Fidelity for displaced squeezed thermal states and the oscillator semigroup. Technical report, 1997.
- [33] Paulina Marian and Tudor A. Marian. Uhlmann fidelity between two-mode Gaussian states. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 86(2), aug 2012.
- [34] M. B. Plenio. The logarithmic negativity: A full entanglement monotone that is not convex. *Physical Review Letters*, 95(9), may 2005.
- [35] Charles H. Bennett, David P. DiVincenzo, John A. Smolin, and William K. Wootters. Mixed-state entanglement and quantum error correction. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 54(5):3824–3851, nov 1996.
- [36] William K. Wootters. Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits. *Physical Review Letters*, 80(10):2245–2248, sep 1997.
- [37] V. Vedral and M. B. Plenio. Entanglement Measures and Purification Procedures. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 57(3):1619–1633, jul 1997.
- [38] Matthias Christandl and Andreas Winter. “Squashed Entanglement” - An Additive Entanglement Measure. *Journal of Mathematical Physics*, 45(3):829–840, aug 2003.
- [39] G. Vidal and R. F. Werner. Computable measure of entanglement. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 65(3):1–11, feb 2002.
- [40] S. J. Jones, H. M. Wiseman, and A. C. Doherty. Entanglement, Einstein-Podolsky-Rosen correlations, Bell nonlocality, and steering. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 76(5):052116, nov 2007.
- [41] Jaromír Fiurášek. Gaussian Transformations and Distillation of Entangled Gaussian States. *Physical Review Letters*, 89(13):137904, sep 2002.
- [42] Fuzhen Zhang. *The Schur Complement and Its Applications*. Springer-Verlag, 2005.
- [43] S. Barreiro, P. Valente, H. Failache, and A. Lezama. Polarization squeezing of light by single passage through an atomic vapor. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 84(3):033851, sep 2011.

- [44] P. Valente, A. Auyuanet, S. Barreiro, H. Failache, and A. Lezama. Experimental characterization of the Gaussian state of squeezed light obtained via single passage through an atomic vapor. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 91(5):1–7, 2015.
- [45] Tobias Eberle, Vitus Händchen, Jörg Duhme, Torsten Franz, Reinhard F. Werner, and Roman Schnabel. Strong Einstein-Podolsky-Rosen entanglement from a single squeezed light source. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 83(5), mar 2011.
- [46] Sheng Feng and Olivier Pfister. Quantum interference of ultrastable twin optical beams. *Physical Review Letters*, 92(20):203601, may 2004.
- [47] Julien Laurat, Laurent Longchambon, Claude Fabre, and Thomas Coudreau. Experimental investigation of amplitude and phase quantum correlations in a type II optical parametric oscillator above threshold: from nondegenerate to degenerate operation. *Optics Letters*, 30(10):1177, may 2005.
- [48] M. Jasperse, L. D. Turner, and R. E. Scholten. Relative intensity squeezing by four-wave mixing with loss: an analytic model and experimental diagnostic. *Optics Express*, 19(4):3765, feb 2011.
- [49] Quentin Glorieux, Luca Guidoni, Samuel Guibal, Jean-Pierre Likforman, and Thomas Coudreau. Quantum correlations by four-wave mixing in an atomic vapor in a non-amplifying regime: a quantum beam splitter for photons. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 84(5), nov 2011.
- [50] Natalia Korolkova, Gerd Leuchs, Rodney Loudon, Timothy C. Ralph, and Christine Silberhorn. Polarization squeezing and continuous-variable polarization entanglement. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 65(5):523061–5230612, aug 2001.
- [51] Vincent Josse, Aurelien Dantan, Laurent Vernac, Alberto Bramati, Michel Pinard, and Elisabeth Giacobino. Polarization squeezing with cold atoms. *Physical Review Letters*, 91(10), apr 2003.
- [52] L. Boivin and H. A. Haus.  $\chi^{(3)}$  squeezed vacuum generation without a Sagnac interferometer. *Optics Letters*, 21(2):146, jan 1996.

- [53] Ch. Silberhorn, P. K. Lam, O. Weiss, F. Koenig, N. Korolkova, and G. Leuchs. Generation of Continuous Variable Einstein-Podolsky-Rosen Entanglement via the Kerr Nonlinearity in an Optical Fibre. *Physical Review Letters*, 86(19):4267–4270, mar 2001.
- [54] Warwick P. Bowen, Roman Schnabel, Hans A. Bachor, and Ping Koy Lam. Polarization Squeezing of Continuous Variable Stokes Parameters. *Physical Review Letters*, 88(9):4, feb 2002.
- [55] Vincent Josse, Aurelien Dantan, Alberto Bramati, Michel Pinard, and Elisabeth Giacobino. Continuous variable entanglement using cold atoms. *Physical Review Letters*, 92(12), jun 2003.
- [56] Eugeny E. Mikhailov, Arturo Lezama, Thomas W. Noel, and Irina Novikova. Vacuum squeezing via polarization self-rotation and excess noise in hot Rb vapors. In *Journal of Modern Optics*, volume 56, pages 1985–1992. Taylor and Francis Group, oct 2009.
- [57] Imad H. Agha, Gaétan Messin, and Philippe Grangier. Generation of pulsed and continuous-wave squeezed light with  $^{87}\text{Rb}$  vapor. *Optics Express*, 18(5):4198, mar 2010.
- [58] S. M. Rochester, D. S. Hsiung, D. Budker, R. Y. Chiao, D. F. Kimball, and V. V. Yashchuk. Self-rotation of resonant elliptically polarized light in collision-free rubidium vapor. *Physical Review A - Atomic, Molecular, and Optical Physics*, 63(4):1–10, mar 2001.
- [59] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Willey & Sons, Inc., 3 edition, 1999.
- [60] ThorLabs Inc. UV Fused Silica Broadband Plate Beamsplitters (Coating: 700 - 1100 nm). [https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup\\_id=4808&pn=BSN11](https://www.thorlabs.com/newgrouppage9.cfm?objectgroup_id=4808&pn=BSN11).
- [61] A. Uhlmann. The “transition probability” in the state space of a  $*$ -algebra. *Reports on Mathematical Physics*, 9(2):273–279, apr 1976.