



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



# Identificación de parámetros en el modelo piezoeléctrico a partir de medidas de impedancia eléctrica

TESIS PRESENTADA A LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA POR

Mariana del Castillo Larumbe

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS  
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
MAGISTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Nicolás Pérez ..... Universidad de la República

TRIBUNAL

Dra. Alina Aulet ..... Universidad de la República

Dr. Martín Rocamora ..... Universidad de la República

Dr. Ronny Carbonari ..... Universidade Federal do ABC

DIRECTOR ACADÉMICO

Dr. Nicolás Pérez ..... Universidad de la República

Montevideo  
miércoles 12 agosto, 2020

*Identificación de parámetros en el modelo piezoeléctrico a partir de medidas de impedancia eléctrica*, Mariana del Castillo Larumbe.

ISSN 1688-2806

Esta tesis fue preparada en L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X usando la clase iietesis (v1.1).

Contiene un total de 99 páginas.

Compilada el miércoles 12 agosto, 2020.

<http://iie.fing.edu.uy/>

I have no special talent. I am only passionately curious.

ALBERT EINSTEIN

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Agradecimientos

Agradezco a mi director Académico y de Tesis, el Dr. Nicolás Pérez, por su apoyo y guía a lo largo de estos años. También a la Dr. Lorena Pardo, por abrirme las puertas de su laboratorio durante mi pasantía en Madrid.

Los datos simulados para llevar adelante este trabajo fueron obtenidos usando ClusterUY (site: <https://cluster.uy>), por lo que doy las gracias al Centro Nacional de Supercomputación.

Agradezco a el “JECS Trust” por la beca para asistir al “Winter School on Advanced Characterization of Piezoceramics”, en Cercedilla, Madrid, donde además participe del congreso “Piezo2017” presentando un póster.

Agradezco a la Comisión Académica de Posgrado, por la beca de finalización 2019, sin la cual este trabajo no habría sido posible. También al comité organizador de Khipu 2019, por darme la oportunidad de asistir a este congreso.

Quiero agradecer también a todos mis colegas en el Instituto de Ingeniería Eléctrica, por hacer de este un lugar excepcional para trabajar.

Quiero agradecer a todos mis amigos, especialmente a Mariana, por ser incondicional, mi referente en todo, y mi cable a tierra. También a Francisco, por prestar ese oído tan necesario, y estar siempre para un café.

A Rodrigo, le agradezco la paciencia infinita durante estos años, y en especial los últimos meses, pero sobre todo le agradezco la compañía, y la complicidad.

Finalmente, doy gracias también por el apoyo constante a mi familia, sin el cual no hubiera llegado jamás tan lejos.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

*a Dina*

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Resumen

Las cerámicas piezoeléctricas son componentes fundamentales para la construcción de transductores eléctricos, entre otras aplicaciones. La incorporación de estos materiales requiere diseñar sistemas electromecánicos que permitan aprovechar el efecto piezoeléctrico, de acuerdo a la aplicación deseada.

En la actualidad, estos sistemas son diseñados con ayuda de programas de simulación que permiten anticipar el comportamiento del producto final. Para ello, es necesario conocer en detalle las propiedades de los materiales involucrados, por lo que su caracterización es muy importante.

Existen variadas técnicas que atacan el problema de identificar los parámetros del modelo lineal de estas cerámicas. Muchas de estas técnicas se basan en la medida experimental de la curva de impedancia eléctrica y fueron analizadas en el desarrollo de esta tesis. Se aplicó una técnica de optimización basada en elementos finitos al estudio del envejecimiento en cerámicas. Estos resultados fueron publicados en la revista "Advances in Applied Ceramics".

Como aporte a la solución del problema, se resolvió implementar un nuevo abordaje utilizando redes neuronales. El objetivo fue probar el concepto de utilizar dichas redes para los parámetros más sensibles del modelo, de forma de obtener una solución aproximada que se refina posteriormente. Se diseñó y entrenó una red neuronal de convolución para la resolución de este problema sobre datos sintéticos, simulados con un algoritmo de elementos finitos. El entrenamiento se realizó para un caso particular de geometría y solo para algunos de los parámetros del modelo.

En este manuscrito se presentan los fundamentos básicos para la comprensión de las temáticas abordadas, la implementación del trabajo realizado, y los resultados obtenidos. También se incluyen conclusiones y trabajo a futuro sobre la técnica con aprendizaje automático.

La técnica desarrollada en el marco de esta tesis presenta resultados alentadores en cuanto a la posibilidad de usar estos sistemas para resolver el problema inverso en la caracterización de cerámicas. Se obtuvieron parámetros que reproducen las curvas con errores menores al 0,1%, y los errores en cada parámetro (de los estudiados) dan por debajo del 0,5% en media.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Abstract

Piezoelectric ceramics are a fundamental piece for the contrucción of electrical transducers among other applications. To use the piezoelectric effect according to one's application a complex electromechanical design is needed. Nowadays simulation software is used to aid with this design. For these programs to emulate the final product behaviour it is imperative to know the material properties of all the elements that make up the system. Thus the characterization of these materials becomes of great importance.

It is possible to find in literature a variety of techniques for the identification of linear model parameters of piezoelectric ceramics. Some of these methodologies are based on the analysis of the experimental impedance curve and therefore are discussed through the development of this thesis. One of the said techniques is applied in a case study regarding the aging effect. The results of that work were published in "Advances in Applied Ceramics" Journal.

As a contribution to the solution of this problem, a new approach was implemented using neural networks. The objective was to test the concept of using these networks, thus it was done for only the most sensitive parameters of the model in order to obtain an approximate solution that would be refined later. A convolution neural network was designed and trained to solve this problem on simulated synthetic data with a finite element algorithm. The training was carried out for a particular case of geometry.

This manuscript presents the fundamentals for the understanding of the covered topics, the implementation of the work done, and the obtained results. Conclusions and future work for the machine learning technique are also included.

The developed technique within the framework of this thesis presents encouraging results regarding the possibility of using these systems to solve the inverse problem in ceramics characterization. Parameters that reproduce the curves with errors less than 0,1% were obtained, and the errors in each parameter (of those studied) are below 0,5% on average.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Tabla de contenidos

<b>Agradecimientos</b>	<b>5</b>
<b>Resumen</b>	<b>9</b>
<b>Abstract</b>	<b>11</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Descripción del Problema . . . . .	2
1.3. Enfoque elegido . . . . .	3
1.4. Organización del documento . . . . .	4
<b>2. Caracterización de Cerámicas Piezoeléctricas</b>	<b>5</b>
2.1. Efecto piezoeléctrico y ecuaciones constitutivas . . . . .	5
2.2. Caracterización a partir de medidas de impedancia eléctrica . . . . .	8
2.2.1. Modelo eléctrico . . . . .	8
2.2.2. Clasificación de los Modos de Resonancia . . . . .	9
2.2.3. Técnicas de optimización basadas en Métodos de Elementos Finitos . . . . .	10
2.2.4. Caso de estudio sobre el envejecimiento de cerámicas . . . . .	14
2.3. Métodos de caracterización que utilizan Algoritmos de Redes Neuronales . . . . .	16
<b>3. Fundamentos de Aprendizaje Automático</b>	<b>17</b>
3.1. Redes Neuronales . . . . .	18
3.1.1. Redes de Convolución . . . . .	22

## Tabla de contenidos

<b>4. Técnica implementada</b>	<b>25</b>
4.1. Definición y alcance del problema . . . . .	26
4.1.1. Base de Datos . . . . .	26
4.1.2. Elección de Geometría . . . . .	27
4.1.3. Estudio de Convergencia FEM . . . . .	28
4.2. Desarrollo . . . . .	28
4.2.1. Generación de datos simulados . . . . .	29
4.2.2. Diseño de Arquitectura de Red . . . . .	30
<b>5. Resultados</b>	<b>33</b>
5.1. Estudio sobre envejecimiento . . . . .	33
5.2. Resultados obtenidos con Red de Convolución Implementada . . .	34
5.3. Resultados sobre otras muestras . . . . .	37
<b>6. Conclusiones</b>	<b>39</b>
6.1. Caso de estudio sobre el envejecimiento de Cerámicas Piezoeléctricas	40
6.2. Técnica basada en Redes Neuronales . . . . .	41
6.3. Trabajos futuros . . . . .	42
<b>A. Gráficas de Resultados</b>	<b>43</b>
A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test . . . . .	43
A.1.1. Muestras del conjunto de Test . . . . .	43
A.1.2. Otras Muestras . . . . .	54
<b>B. Manejo de Datos</b>	<b>65</b>
<b>C. Ciclo de entrenamiento</b>	<b>69</b>
<b>Referencias</b>	<b>71</b>
<b>Glosario</b>	<b>78</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>78</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>80</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En el presente capítulo se introduce el problema tratado durante el desarrollo de esta tesis. Se describe la motivación para abordar esta temática, con detalles del enfoque elegido. También se describe la organización del documento.

### 1.1. Motivación

El efecto piezoeléctrico es el fenómeno que relaciona la deformación mecánica con la polarización eléctrica. De esta forma tenemos materiales que se deforman frente a un campo eléctrico y que a su vez generan una diferencia de potencial eléctrico al deformarse [1].

Materiales piezoeléctricos son utilizados en una gran variedad de dispositivos electrónicos y electromecánicos. Algunos ejemplos de aplicaciones donde los encontramos son: transductores de ultrasonido para uso médico e industrial, motores y actuadores, acelerómetros, dispositivos de ultrasonido de potencia para procesos químicos y sistemas de detección de anomalías en sólidos. Para poder ser usados en todas estas aplicaciones los componentes piezoeléctricos precisan un sistema de conexionado y acople, tanto eléctrico como mecánico, que se adapte a la funcionalidad deseada [2]. En la práctica, es necesario diseñar sistemas complejos donde el elemento piezoeléctrico es una parte de los mismos.

El uso de herramientas de diseño asistido por computadora, conocido por sus siglas en inglés CAD, para sistemas electromecánicos es una práctica común en la industria. Estas herramientas permiten incorporar al diseño las características particulares de los materiales a utilizar, de manera de obtener un modelo del dispositivo y su comportamiento esperado luego de la construcción. Sin embargo, es necesario un conocimiento de las características de los materiales que permita al software (que implementa algún método de simulación computacional), modelar el comportamiento. Como consecuencia de esto, la precisión en el modelado final estará limitada por el conocimiento de los materiales involucrados.

## Capítulo 1. Introducción

Los materiales homogéneos e isotrópicos, como por ejemplo metales, plásticos o cerámicas convencionales, son caracterizados por dos constantes elásticas independientes. En cambio, los materiales más complejos son anisotrópicos y por lo tanto requieren mayor cantidad de constantes para representar completamente su comportamiento. En materiales piezoeléctricos, en particular, según la simetría del material podríamos precisar hasta cuarenta y cinco constantes independientes: veintiuna elásticas, dieciocho piezoeléctricas y seis dieléctricas, para representarlos completamente [3]. En el caso más simple y ampliamente utilizado en la industria, donde el material es axisimétrico con polarización en el eje axial, hay que determinar diez parámetros para obtener el modelo. Estos son, cinco constantes elásticas, tres piezoeléctricas y dos dieléctricas. En el caso de considerar la atenuación debido a las pérdidas mecánicas del material estos se modelan como números complejos [4].

### 1.2. Descripción del Problema

La determinación de los parámetros del modelo no es simple, ya que se tiene un sistema con varios grados de libertad que se encuentran acoplados en la solución de la dinámica del sistema.

La técnica tradicional y aceptada en el estándar [5] utiliza modelos simplificados unidimensionales para resolver el problema. Esta solución da un punto de partida razonable para muchas aplicaciones. Sin embargo con el desarrollo de métodos computacionales de cálculo como los elementos finitos [6] [7] [8], la importancia de contar con modelos más ajustados se hace evidente.

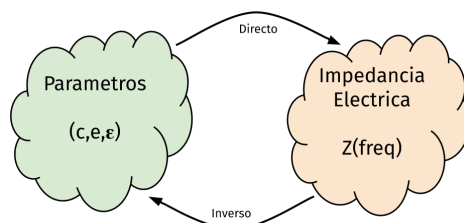
Tenemos entonces las herramientas de simulación altamente especializadas, que permiten la construcción de dispositivos a partir de estas cerámicas en particular, pero no pueden utilizarse en toda su potencia porque no hay un conocimiento preciso del material. Este problema es general, no hay fabricantes que den información exacta sobre sus materiales, solo existen valores aproximados [9].

No obstante, el método de elementos finitos (Finite Element Method, FEM) abrió una oportunidad para el ajuste numérico del modelo [10] [11] [12] [13] [14]. Generalmente, como primer paso se tiene una curva de impedancia eléctrica experimental, medida con un analizador o puente de impedancias directamente en la cerámica. Por otra parte, puede realizarse una simulación de elementos finitos que reproduzca la curva de impedancia para una cerámica dada su geometría, densidad y constantes constitutivas. A partir de esto se implementa un método de optimización que ajusta los parámetros del modelo hasta minimizar el error entre la curva de los datos experimentales y la curva de los datos numéricos [9].

Esta técnica para identificar los parámetros del modelo piezoeléctrico, se basa en la minimización de la diferencia entre la curva de impedancia experimental y una curva de impedancia obtenida mediante un algoritmo que implementa FEM. La caracterización de estos materiales presenta un desafío, ya que involucra con-

### 1.3. Enfoque elegido

ceptos físicos de la mecánica de los sólidos, medidas en laboratorio de magnitudes eléctricas y mecánicas, y el manejo de técnicas de optimización numérica, así como también un conocimiento a priori de cómo influyen los parámetros del modelo en la forma de la impedancia eléctrica.



En la actualidad existe un método que logra obtener un juego de veinte constantes (diez parámetros complejos) que al introducirlas en un algoritmo de FEM es capaz de reproducir la curva de impedancia eléctrica obtenida en el laboratorio para una cerámica dada. No obstante, el ajuste final obtenido depende fuertemente de conocer un conjunto de parámetros “cercano” para utilizar como condición inicial. De esta forma, la técnica tiene dos etapas, una de las cuales requiere cierto conocimiento sobre la sensibilidad de la forma de las curvas estudiadas al variar los parámetros. Esto se puede resumir como conocimiento previo o experiencia en el uso de la técnica, lo que hace que sea necesario contar con un experto para el caso de querer caracterizar nuevos materiales o geometrías. Otro de los problemas de esta técnica, es que cada paso de ajuste en el algoritmo requiere una simulación FEM de la curva entera, lo que hace que sea un proceso lento y demandante en cuanto a recursos computacionales.

Recapitulando, el objetivo de estas técnicas de identificación es determinar los parámetros del modelo piezoeléctrico, que en el caso de cerámicas axisimétricas serán diez constantes complejas. Dicha identificación se realiza a partir de la curva de impedancia eléctrica. Sabemos cómo resolver el problema de obtener la curva de impedancia a partir de los parámetros del modelo. Queremos resolver el problema inverso.

### 1.3. Enfoque elegido

En los últimos años han resurgido con resultados prometedores, los modelos de Redes Neuronales Artificiales (Artificial Neural Network, ANN). Estos modelos presentan gran potencial en cuanto a la habilidad de aproximar funciones continuas sobre conjuntos compactos de  $\mathbb{R}^n$  [15]. Tienen además la ventaja de que pueden obtener el modelo de aproximación a partir de conjuntos de datos conocidos.

El problema inverso de determinar los parámetros a partir de la curva de impedancia es altamente no lineal y mal condicionado. Por lo tanto parece un problema adecuado para buscar una solución mediante técnicas de aprendizaje automático. Para entrenar cualquier modelo de redes neuronales artificiales lo principal es con-

## Capítulo 1. Introducción

tar con suficientes datos que nos permitan ajustar el modelo. Cuántos datos serán suficientes depende entre otras cosas de cual sea el modelo elegido.

La lógica de trabajo es la siguiente, dado que para cualquier conjunto conocido de parámetros (constantes del material) podemos obtener la curva de impedancia simulada mediante el algoritmo FEM, es posible usar estas simulaciones para generar una base de datos de curvas de impedancia y sus correspondientes constantes constitutivas. Luego, utilizaremos estos datos como conjunto sobre el que entrenar y validar nuestro modelo de ANN y obtendremos una función que, usando como entrada la curva de impedancia, devuelva los valores de los parámetros. De esta manera, en vez de tener un algoritmo elaborado para cada nueva curva, tendremos un algoritmo rápido, simple y pre-entrenado, que aplique a una familia de cerámicas.

Esta idea se podría generalizar para distintas geometrías y materiales, siempre y cuando se cuente con un software que permita simular las curvas de impedancia eléctrica.

### 1.4. Organización del documento

El presente documento describe el trabajo realizado para la comprensión del problema tratado y la implementación propuesta. El capítulo 2 presenta algunos detalles sobre el modelo físico de los materiales estudiados y la nomenclatura utilizada para su descripción. Se presenta además el estado del arte en cuanto a su caracterización, profundizando en particular en la técnica de caracterización mediante el análisis de curvas de impedancia descrita en [16] y [17]. Por último, se presenta un caso de aplicación de esta técnica, al estudio del envejecimiento de cerámicas piezoeléctricas.

En el capítulo 3 se presentan algunos conceptos básicos sobre las redes neuronales artificiales. Se detallan sobre todo los aspectos relacionados a los modelos implementados. En el capítulo 4 se explicitan finalmente todos los detalles de la solución final propuesta, las condiciones particulares que aplican en este caso y las consideraciones de diseño realizadas para su implementación.

En el capítulo 5 se presentan los resultados obtenidos, tanto en la etapa de estudio previo de la técnica de optimización con elementos finitos como en la propuesta que utilizo redes neuronales. En el trabajo previo se realizó un estudio sobre el envejecimiento de las cerámicas con la técnica de optimización descrita en el capítulo 2. A partir de estos resultados se publicó el artículo “Methodology to evaluate variations in piezoelectric constants after aging process” en la revista “Advances in Applied Ceramics” [18]. Como segunda parte se detallan los primeros resultados obtenidos con la red neuronal entrenada. El documento termina con las conclusiones sobre el trabajo realizado y propuesta de trabajo a futuro presentadas en el capítulo 6. Se incluye además un glosario de términos utilizados para referencia del lector.

## Capítulo 2

# Caracterización de Cerámicas Piezoeléctricas

El objetivo de este capítulo es presentar los modelos físicos que rigen el fenómeno de la piezoelectricidad, con particular énfasis en la aplicación concreta al caso de estudio. También se intentará hacer un recuento de técnicas numéricas utilizadas para la caracterización de estos materiales. Finalmente se presenta un caso de estudio aplicando una de las técnicas en particular.

### 2.1. Efecto piezoeléctrico y ecuaciones constitutivas

El efecto piezoeléctrico puede ser descrito como un acoplamiento entre las propiedades mecánicas y eléctricas de un material. Es decir, una deformación mecánica produce un campo eléctrico en el sólido y a su vez, la aplicación de una diferencia de voltaje en la superficie genera una deformación del material. Este efecto fue descubierto a finales del siglo XIX. Dado que los primeros experimentos fueron realizados sobre cristales de cuarzo y sal de Rochelle, en los comienzos la piezoelectricidad se asociaba con las estructuras cristalinas y clases de simetrías propias de los cristales. Más tarde, ya entrado el siglo XX, la búsqueda de materiales más eficientes para la construcción de transductores piezoeléctricos llevó al descubrimiento de las cerámicas piezoeléctricas.

El comportamiento mecánico de los materiales es descrito a partir de dos magnitudes tensoriales: el tensor de deformaciones  $S_{i,j}$  y el tensor de tensiones  $T_{i,j}$ . Ambos son tensores simétricos con lo cual admiten la notación de Voigt, donde pasamos de la representación matricial de nueve valores cada uno, a una representación vectorial de seis dimensiones,  $S_p$  y  $T_p$  respectivamente. Este documento seguirá las pautas definidas en el estándar IEEE [5] en cuanto a la notación para las definiciones de las ecuaciones constitutivas. En la tabla 2.1 se muestra la conversión de índices para la notación matricial y la vectorial.

## Capítulo 2. Caracterización de Cerámicas Piezoeléctricas

Índices Tensoriales	Índices Vectoriales
11	1
22	2
33	3
32 = 23	4
13 = 31	5
21 = 12	6

Tabla 2.1: Relación de notación entre tensores y vectores

Las ecuaciones constitutivas para las cerámicas piezoeléctricas, son las que relacionan las constantes mecánicas  $T_p$  y  $S_p$  con el campo eléctrico  $E_i$  y el desplazamiento eléctrico  $D_i$ . Hay cuatro posibles combinaciones de ecuaciones constitutivas, dependiendo de cuáles variables sean elegidas como independientes. En este caso, las variables independientes son la deformación y el campo eléctrico. Esta elección es adoptada en el estándar de la IEEE y además es útil para la formulación de FEM. Una expresión general de estas ecuaciones constitutivas es:

$$T_p = T_p(S, E), \quad p = 1 \dots 6 \quad (2.1)$$

$$D_i = D_i(S, E), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

Para pequeñas deformaciones y pequeños campos eléctricos, las ecuaciones (2.1) y (2.2) se pueden linearizar, dando lugar a las clásicas ecuaciones constitutivas en el rango lineal [1]:

$$T_p = c_{pq}^E S_q - e_{kp} E_k, \quad q = 1 \dots 6 \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

$$D_i = \varepsilon_{ik}^S E_k + e_{iq} S_q, \quad q = 1 \dots 6 \quad k = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Donde las constantes  $c_{pq}^E$ ,  $\varepsilon_{ik}^S$  y  $e_{kp}$  forman las matrices de coeficientes: elásticos  $c^E$ , dieléctricos  $\varepsilon^S$  y piezoeléctricos  $e$ , respectivamente. A su vez, los superíndices hacen referencia a la variable que permanece constante en cada caso: campo eléctrico ( $E$ ) y deformación ( $S$ ).

La matriz de constantes piezoeléctricas representa la interacción entre las variables mecánicas y eléctricas. En este caso las derivadas parciales son iguales y entonces se omite el superíndice [1]:

$$e_{kp} = -\left(\frac{\partial T_p}{\partial E_k}\right)_S = \left(\frac{\partial D_k}{\partial S_p}\right)_E. \quad (2.5)$$

Las cerámicas luego de sinterizadas son sometidas a un proceso de polarización para lograr un efecto piezoeléctrico global. De esta manera el material resultante es polarizado en la dirección de acción del campo aplicado durante este proceso. Es entonces posible reducir el número de constantes independientes debido a la simetría presente, ya que tenemos un eje de polarización e isotropía en el plano

## 2.1. Efecto piezoeléctrico y ecuaciones constitutivas

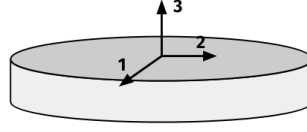


Figura 2.1: Nomenclatura de ejes sobre cerámica cilíndrica con polarización en el eje axial.

perpendicular a este. Estas cerámicas pertenecen al grupo de simetría  $6mm$  en cristales. En la figura 2.1 se muestra un ejemplo de la nomenclatura utilizada para los ejes sobre una cerámica cilíndrica, con polarización en la dirección axial.

Finalmente, para estos materiales tendremos diez constantes independientes, correspondiendo dos de ellas a constantes dieléctricas, tres piezoeléctricas y cinco elásticas. Sí además modelamos las pérdidas de energía en el material considerando cada constante como un valor complejo [4], la caracterización final consta de veinte constantes diferentes. Las matrices resultantes entonces para las constantes elásticas, dieléctricas y piezoeléctricas tienen la siguiente forma respectivamente:

$$\begin{bmatrix} c_{11} + j\bar{c}_{11} & c_{12} + j\bar{c}_{12} & c_{13} + j\bar{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} + j\bar{c}_{12} & c_{11} + j\bar{c}_{11} & c_{13} + j\bar{c}_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} + j\bar{c}_{13} & c_{13} + j\bar{c}_{13} & c_{33} + j\bar{c}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} + j\bar{c}_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} + j\bar{c}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} + j\bar{c}_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} + j\bar{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} + j\bar{e}_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} + j\bar{e}_{31} & e_{31} + j\bar{e}_{31} & e_{33} + j\bar{e}_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} + j\bar{\varepsilon}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{11} + j\bar{\varepsilon}_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} + j\bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

Donde:  $c_{66} = \frac{c_{11} - c_{12}}{2}$  y  $\bar{c}_{66} = \frac{\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}}{2}$ .

En las matrices (2.6), (2.7) y (2.8) las barras están para poder hacer referencia a la parte real de la constante y la parte imaginaria de manera independiente.

Las propiedades de estas cerámicas dependen fuertemente del proceso de fabricación, desde la composición química y la calidad de estos componentes hasta el propio proceso de sinterización y polarización. Es por esta razón que existen distintos valores de parámetros incluso para cerámicas del mismo fabricante y con el mismo aparente proceso de fabricación.

## 2.2. Caracterización a partir de medidas de impedancia eléctrica

Existen variadas técnicas para la caracterización de materiales piezoeléctricos. En esta sección se tratan solo algunas de estas. Se eligieron técnicas basadas en el análisis de la curva de impedancia eléctrica.

### 2.2.1. Modelo eléctrico

Desde el punto de vista eléctrico, en un circuito lineal el voltaje y la amplitud están relacionados por la impedancia eléctrica  $Z$ . Ante un voltaje sinusoidal de frecuencia angular  $\omega$ , la corriente será también una onda sinusoidal con la misma frecuencia angular. Si bien el fenómeno de la resonancia en un material piezoeléctrico involucra magnitudes tanto eléctricas como mecánicas, es posible representar todo el sistema electromecánico desde sus terminales eléctricos por medio de una impedancia equivalente.

La impedancia eléctrica es función de la frecuencia angular, coincide en módulo con el cociente entre los módulos de tensión y corriente. El desfase estará dado por la relación entre las fases de ambas ondas sinusoidales. La parte real de la impedancia es la resistencia ( $R$ ) y la imaginaria la reactancia ( $X$ ). Entonces la expresión cartesiana de la impedancia se puede escribir como:

$$Z = R + jX. \quad (2.9)$$

Además, el inverso de  $Z$  es la admitancia, que es también un número complejo  $Y$ , donde la parte real se conoce como conductancia ( $G$ ) y la parte imaginaria como susceptancia ( $B$ ):

$$Y = G + jB. \quad (2.10)$$

La impedancia eléctrica es una magnitud relativamente sencilla de relevar incluso en rangos grandes de frecuencia. Es por esta razón que es de interés desarrollar métodos de caracterización de las propiedades constitutivas a partir de estas curvas.

Existen modelos eléctricos, como el de *Van Dyke* [19], donde se modela el comportamiento de la cerámica con un circuito equivalente compuesto de un Condensador en paralelo a la serie de Resistencia, Condensador y Bobina. Estos modelos son ampliamente aceptados y son utilizados para ajustar el modelo en el rango de frecuencias cercanas a uno de los modos de resonancia de las cerámicas. Sin embargo, no logran ajustar la curva de impedancia en todo el rango de frecuencias. En la figura 2.2 se ilustra el equivalente de Van Dyke y su correspondiente modelo en frecuencia.

También existen modelos electromecánicos, como los desarrollados por *Mason* [20] que vinculan las constantes constitutivas con las variables del modelo electromecánico.

## 2.2. Caracterización a partir de medidas de impedancia eléctrica

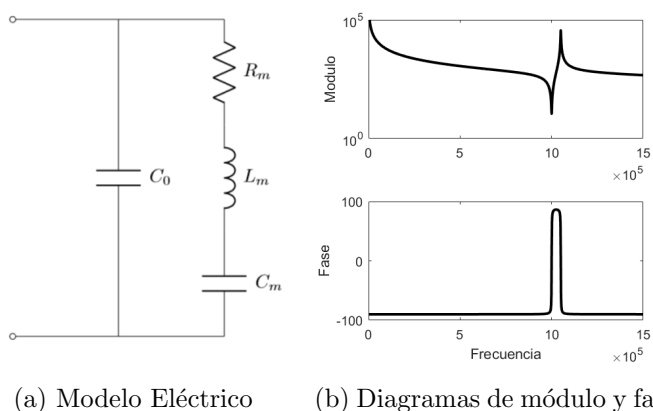


Figura 2.2: Circuito equivalente de Van Dyke y análisis en frecuencia de la impedancia

Resultados de estas técnicas aplicadas en particular al caso de las cerámicas son descriptas con mayor detalle por *Peréz et al* en [9]. Lo principal a destacar es que si bien estas técnicas permiten determinar valores teóricos para algunos parámetros, no son capaces de reproducir toda la forma de la impedancia eléctrica, y en particular obtener los valores del juego completo de parámetros.

### 2.2.2. Clasificación de los Modos de Resonancia

Observando la curva en módulo de la impedancia eléctrica se pueden distinguir distintos modos de resonancia según el origen físico de los patrones de vibración. En la figura 2.3 se pueden observar estos modos. Los  $RAm_i$  corresponden a los modos radiales,  $Em$  es el modo de borde o “edge”, los  $Cm$  son modos acoplados entre los radiales y el modo espesor y  $THm$  es el modo de resonancia del espesor [9].

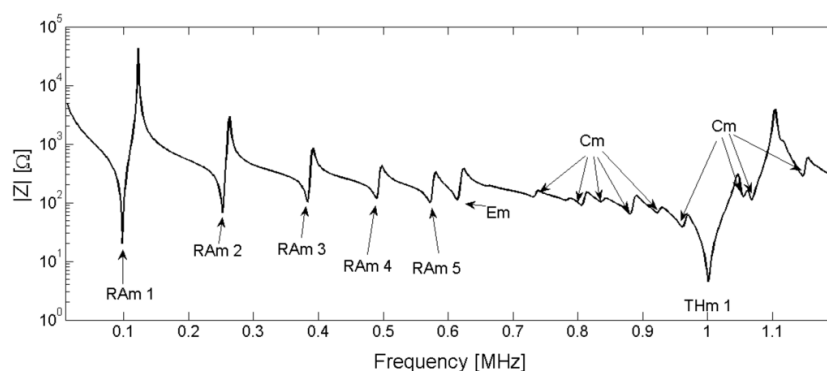
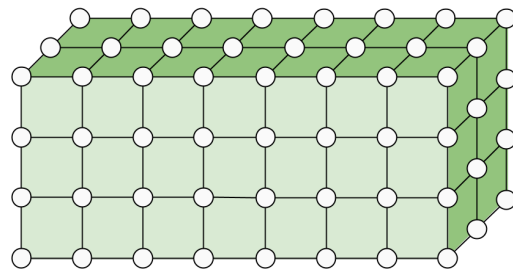


Figura 2.3: Modos de Resonancia en una cerámica Pz27 (20 mm diámetro y 2 mm espesor). Imagen obtenida de [9]

### 2.2.3. Técnicas de optimización basadas en Métodos de Elementos Finitos

Los algoritmos que implementan Métodos de Elementos Finitos, lo que hacen es descomponer el cuerpo del material en pequeños bloques o elementos y resolver las ecuaciones dinámicas que modelan el comportamiento del sólido de manera local, teniendo en cuenta las condiciones de borde impuestas por los bloques adyacentes, y los límites del sólido.



Para pequeñas deformaciones el comportamiento de las cerámicas puede ser expresado como un sistema lineal en derivadas parciales. La estructura del material es dividida en elementos, donde cada elemento tiene un set de puntos nodales para los cuales la solución es computada. Las magnitudes físicas involucradas en otros puntos pueden ser interpoladas a partir de las solución en estos nodos.

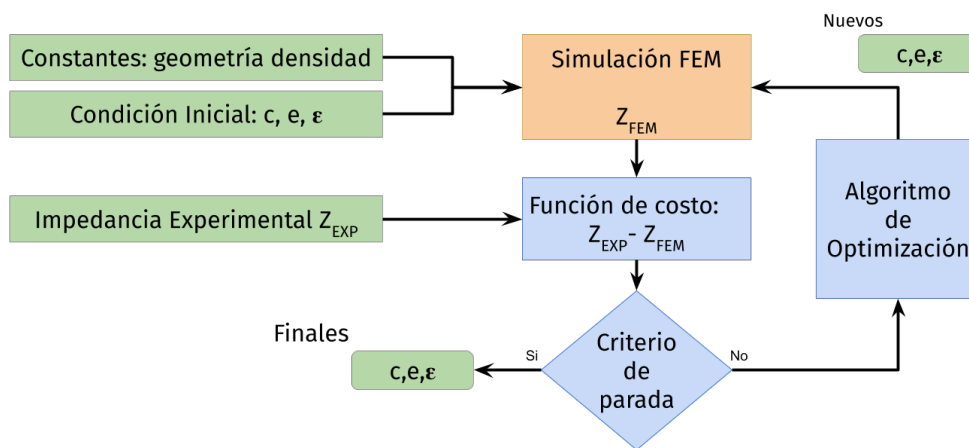


Figura 2.4: Diagrama de proceso de optimización utilizado en técnicas basadas en FEM.

En una técnica de optimización basada en FEM, las constantes de las matrices (2.6), (2.7) y (2.8) son obtenidas minimizando la distancia entre la curva experimental y la curva obtenida mediante el algoritmo FEM. Esto es realizado según el esquema mostrado en la figura 2.4. La simulación FEM necesita datos de la geometría de la pieza y valores iniciales de las constantes del modelo piezoeléctrico para generar  $Z_{fem}$ . Luego, esta impedancia es comparada con la obtenida

## 2.2. Caracterización a partir de medidas de impedancia eléctrica

experimentalmente mediante una función de costo. Existe un criterio de parada que en función de el resultado obtenido decide si la solución es buena o si continua el proceso de optimización. Entonces, se aplica alguna técnica de optimización para elegir nuevos valores de las constantes del modelo piezoeléctrico (utilizando la evaluación de la función de costo) y continuar de esta manera con el ciclo.

Todas las técnicas de optimización numérica, más allá de como los implementen en cada caso particular, comparten los siguientes pasos:

1. Condiciones Iniciales
2. Cálculo FEM
3. Función de error
4. Algoritmo de Optimización
5. Condición de parada

En problemas de optimización no convexa, como estos, la elección de la condición inicial juega un rol fundamental en las posibilidades de éxito del algoritmo. El algoritmo de cálculo de FEM podría ser perfectamente software comercial, o elaborado específicamente para el problema particular, pero no debería presentar a priori ventajas en cuanto a la habilidad o no del algoritmo de alcanzar una solución aceptable. Pues se asume que el algoritmo FEM elegido es capaz de simular bien el comportamiento del material. En cuanto a la función de error y la elección del algoritmo de optimización propiamente, son cuestiones típicas de cualquier problema de optimización, así como también lo es el elegir cuando o como dejar de optimizar y dar por acabado el ajuste.

Todos los algoritmos de optimización basados en FEM requieren un set de parámetros constitutivos iniciales a partir de los cuales comenzar el proceso. Una opción es utilizar información provista por el fabricante (si la hubiera) o datos reportados para alguna cerámica de similares características. En general las primeras simulaciones con este tipo de datos se apartan notablemente de los datos experimentales. Si los recursos computacionales y los tiempos de cálculo de FEM no fueran una condicionante, se podría intentar optimizar desde ese punto, perturbando aleatoriamente los parámetros iniciales para obtener distintas condiciones de partida y así seguir intentando hasta alcanzar una condición de parada. Una mejor opción es intentar partir de una condición inicial más cercana a la curva experimental, ya que cuanto más cerca esté la condición inicial de la experimental menor es la posibilidad de caer en un mínimo local diferente al de la solución buscada.

En el estándar de la IEEE [5] se pueden encontrar guías de como obtener sets de parámetros a partir de muestras del mismo material con geometrías particulares. Estas técnicas han tenido en el correr de los años sucesivas mejoras. *Pardo y Berbol* [21] en su revisión describen esta metodología en detalle.

## Capítulo 2. Caracterización de Cerámicas Piezoeléctricas

Otra alternativa es utilizar un análisis de sensibilidad de acuerdo a lo descrito por *Peréz et al* en [16] y [17]. Este análisis permite estudiar como varía la frecuencia de los distintos modos de vibración al variar los parámetros constitutivos. En los trabajos citados se explicita el análisis tanto para la parte real como la imaginaria del parámetro. Con esta información es posible implementar una estrategia de aproximación que permita acercar la curva simulada a la experimental para un posterior refinamiento utilizando optimización numérica clásica.

Como se puede observar en la figura 2.5, las frecuencias de resonancia de los distintos modos de vibración presentes en las curvas de impedancia coinciden con la frecuencia de los máximos (locales) correspondientes en las curvas de conductancia ( $G$ ). Análogamente para las antirresonancias y los máximos en la curva de resistencia ( $R$ ). Es por estos motivos que el análisis de sensibilidad se realiza sobre estas curvas, representando la evolución de la ubicación en frecuencia de los máximos en cada caso.

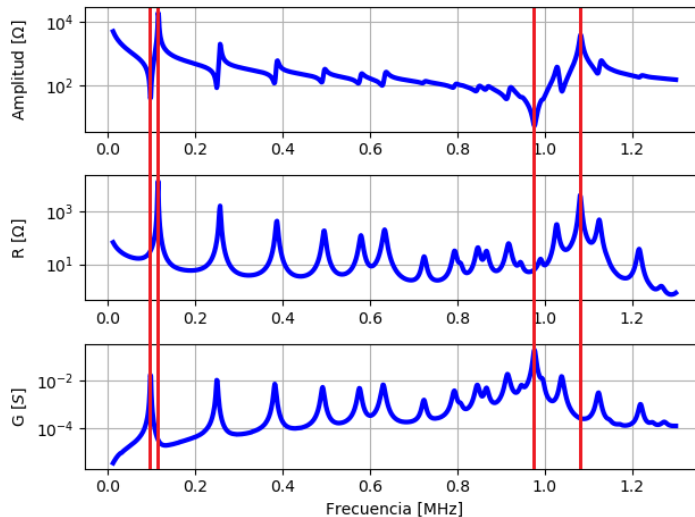


Figura 2.5: Frecuencia de modos de Resonancia y Antirresonancia en curvas de Impedancia, Conductancia y Resistencia.

Para estudiar la sensibilidad de la curva con respecto a un parámetro, se calculan sucesivas simulaciones FEM variando solo la parte real del parámetro a estudiar. Luego, se pueden observar las variaciones en la forma de la curva debido a ese parámetro. La figura 2.6 se puede observar un ejemplo de este análisis. De los estudios de sensibilidad se desprende qué parámetros afectan más a qué modos y cuáles no parecen influenciar tanto su frecuencia. Teniendo en cuenta que lo que se busca en esta etapa es una buena condición inicial para el algoritmo de optimización, se buscará una estrategia de aproximación que tome en cuenta la información de la sensibilidad. El objetivo es acercar ambas curvas moviendo solo la parte real de los parámetros más sensibles. Es importante destacar que el mismo estudio se puede realizar para la parte imaginaria de los parámetros, pero

## 2.2. Caracterización a partir de medidas de impedancia eléctrica

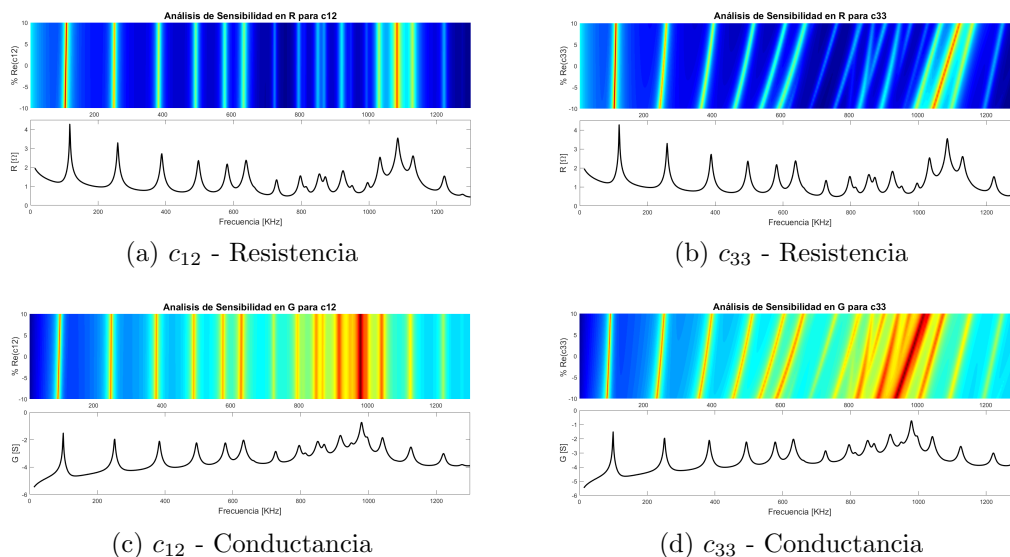


Figura 2.6: Estudio de Sensibilidad para dos parámetros,  $c_{12}$  y  $c_{33}$ .

su efecto en la frecuencias de los modos es despreciable [9]. Luego de este proceso se utilizan los parámetros obtenidos para lanzar el algoritmo de refinamiento. Los resultados de aplicar este método para una cerámica PZ27 de 20 mm de radio y 2 mm de espesor se pueden observar en la figura 2.7.

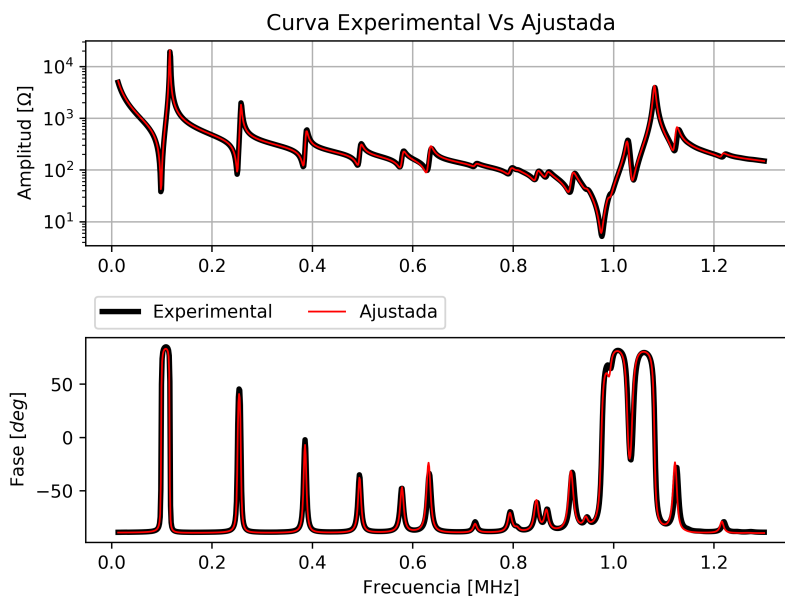


Figura 2.7: Resultado obtenido para una cerámica real mediante la técnica de *Peréz et al.*

Estas técnicas, son computacionalmente muy costosas, ya que cada paso de las distintas etapas de aproximación requiere de la aplicación del algoritmo FEM. Es

## Capítulo 2. Caracterización de Cerámicas Piezoeléctricas

por este motivo que se restringe el análisis a cerámicas piezoeléctricas con simetría de revolución, con el objetivo de reducir el costo computacional. Dada la simetría, el modelo se reduce a uno bidimensional y debido a las condiciones de borde se puede simular un cuarto de la sección transversal de la pieza y reducir así los tiempos requeridos [9].

### 2.2.4. Caso de estudio sobre el envejecimiento de cerámicas

La técnica de *Pérez et al* comentada en 2.2.3, y descrita con mayor detalle en [16] y [17], logra el ajuste de las curvas de resonancia para un rango amplio de frecuencias. Este enfoque permite no solo la obtención de los parámetros constitutivos del material, sino que también es capaz de caracterizar pequeñas variaciones sobre muestras similares. Esto podría ser usado para la mejora del proceso productivo, rastreando por ejemplo el efecto de modificar cierto aspecto de este proceso sobre las características del material obtenido.

Uno de los objetivos del estudio presentado en esta sección es verificar si los resultados hallados con esta metodología tienen la precisión suficiente para detectar variaciones pequeñas en el material. El otro objetivo es determinar el efecto del paso del tiempo sobre los parámetros del modelo.

Luego de la sinterización, las cerámicas presentan polarización espontánea en su estructura interna, con un valor promedio prácticamente nulo. Estas son entonces sometidas a un proceso de polarización, que implica calentar el material, mientras que al mismo tiempo se le aplica un campo eléctrico en la dirección en la que se desea polarizarlo. De esta manera se obtiene la polarización macroscópica. Debido a las interacciones microscópicas de los dipolos que componen el material, este pierde su polarización macroscópica con el paso del tiempo, incluso sin ser sometido a campos eléctricos ni fuerzas externas. A este efecto se lo conoce con el nombre de envejecimiento (“Aging”).

Los efectos del envejecimiento son ampliamente conocidos, especialmente para cerámicas comerciales como las PZT [22] [23]. Estas cerámicas son muy estables y presentan pocos cambios incluso después de algunos años. En los últimos años se están desarrollando cerámicas sin plomo de acuerdo a las recomendaciones ambientales. La información sobre el envejecimiento de estos materiales nuevos es limitada. Sin embargo es un campo importante de estudio, ya que refiere a la estabilidad del material según el paso del tiempo. Es por eso que se busca una técnica para medir este efecto en materiales nuevos. Como primer aproximación se evaluará la técnica en cerámicas Pz27 de *Ferropem*.

Un conjunto de discos de cerámica, con polarización en la dirección del espesor fue evaluado luego de cinco años sin uso. Por lo tanto los efectos discutidos en este trabajo se deben solo a la despolarización espontánea. Dado que las diferencias observadas en las curvas son pequeñas, solo se utilizó una geometría para este estudio con la intención de reducir la variabilidad de los resultados.

## 2.2. Caracterización a partir de medidas de impedancia eléctrica

Se consideró un grupo de diez muestras  $S_1 \dots S_{10}$  de igual espesor (2 mm) e igual diámetro (20 mm). Para cada una de estas muestras se tomaron medidas de impedancia en dos ocasiones, con cinco años de diferencia entre medidas, pero respetando la metodología utilizada. En la figura 2.8 se muestra la curva de impedancia en torno al modo espesor para una de las muestras, comparando la curva original con la envejecida. Se puede apreciar en la figura que los cambios producidos en dicha curva son pequeños luego de cinco años.

En la figura 2.9 se ve el resultado de utilizar el algoritmo de optimización basado en FEM para ajustar la curva experimental para una de las diez muestras. Se utilizó como función de error la siguiente expresión:

$$error = 100 \frac{\sum_{\omega_1}^{\omega_N} (|Z_1(\omega_i)| - |Z_2(\omega_i)|)^2}{\sum_{\omega_1}^{\omega_N} |Z_1(\omega_i)|^2}. \quad (2.11)$$

En la tabla 2.2 se muestran los resultados de evaluar el error entre la curva original y la envejecida para cada muestra. De los datos se desprende que no todas las muestras tienen las mismas variaciones. Por esta razón, se espera que la evolución en los parámetros presente una dispersión similar.

Muestra	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
Error	0,86	0,14	0,34	1,55	0,31	0,34	0,36	0,06	0,86	1,40

Tabla 2.2: Cambios en la curva de impedancia debido al envejecimiento

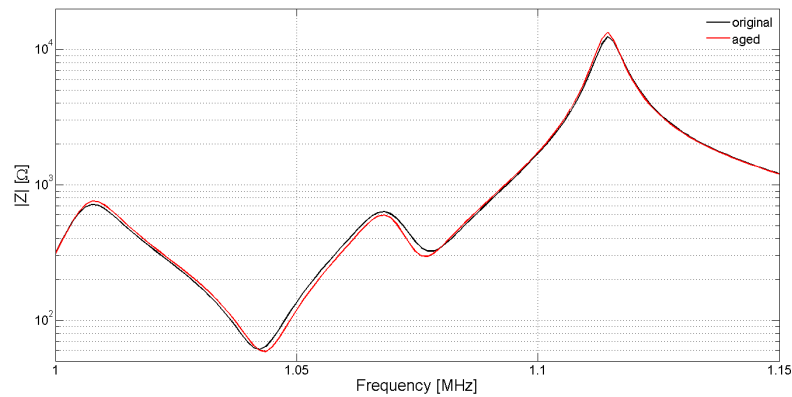


Figura 2.8: Ejemplo de los cambios en  $\|Z\|$  debido al envejecimiento. Para apreciar mejor las diferencias se muestra en torno al modo espesor.

## Capítulo 2. Caracterización de Cerámicas Piezoeléctricas

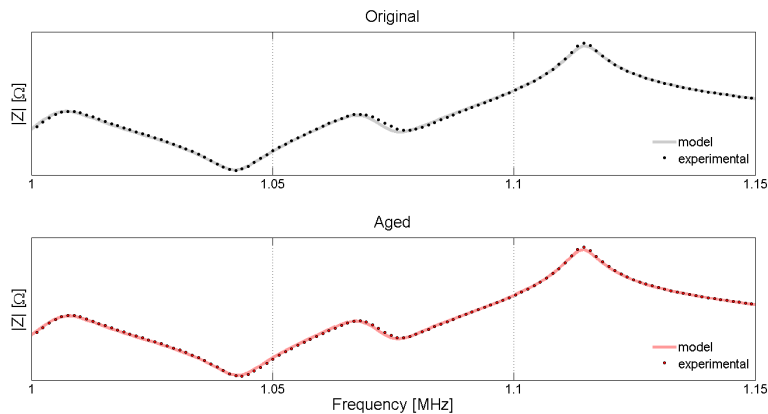


Figura 2.9: Ejemplo de la curva experimental y la curva modelada para una cerámica en su versión original y envejecida.

### 2.3. Métodos de caracterización que utilizan Algoritmos de Redes Neuronales

Existen algunos trabajos realizados en el área de caracterización de materiales utilizando algoritmos de redes neuronales. Incluso algunos autores utilizan estos algoritmos para aproximar la solución al problema inverso. Sin embargo no se encontraron trabajos específicos sobre la caracterización de cerámicas piezoeléctricas.

*Araujo et al* en [24] comparan el desempeño de una red neuronal completamente conectada con una técnica de gradiente en la tarea de caracterizar una placa compuesta, usando como entrada a la red las frecuencias de los modos de vibración libre medidas en las placas.

En cambio *Hoole* [25], *Hacib et al* [26] y *Han et al* [27], proponen técnicas de redes neuronales completamente conectadas entrenadas en base a las simulaciones de FEM para problemas electromagnéticos, como solución al problema inverso.

## Capítulo 3

# Fundamentos de Aprendizaje Automático

Este capítulo tiene el cometido de introducir algunos conceptos relacionados a la temática de aprendizaje automático<sup>1</sup>, en particular de Redes Neuronales Artificiales. Sin embargo, no pretende ser más que una guía descriptiva de los aspectos de esta temática que serán utilizados en la solución particular implementada en este trabajo y descrita en el capítulo 4.

El campo del reconocimiento de patrones tiene que ver con el descubrimiento automático de regularidades en los datos a partir del uso de algoritmos computacionales y con el uso de estas regularidades para tomar acciones específicas, como por ejemplo, clasificar datos en diferentes categorías [28]. Lo que diferencia a los algoritmos de ML de otros tipos de algoritmos es la capacidad de extraer autónomamente información sobre el problema que intentan resolver, a partir de patrones en los datos [29].

Un ejemplo de este tipo de aprendizaje es cuando dado un conjunto de puntos o coordenadas en el plano (obtenidas experimentalmente), intentamos ajustar un modelo matemático que definimos a priori. El ejemplo más sencillo sería una recta. Encontrar la recta que mejor aproxima a estos puntos es aprender de los datos. Este problema puede resolverse mediante mínimos cuadrados, lo que devuelve una solución analítica. Para ML los problemas de interés son aquellos que, o bien no es posible escribir una solución analítica, o bien hacerlo es muy difícil para humanos. Es importante aclarar que el fin de estos algoritmos es tener una solución al problema, y no el proceso de aprendizaje.

Los datos o patrones son representados computacionalmente por un conjunto de características; la habilidad y experiencia del diseñador a la hora de elegir

---

<sup>1</sup>La expresión aprendizaje automático, como traducción del inglés Machine Learning (ML), no es una traducción literal; es solo uno de los nombres aceptados para hacer referencia a este campo de estudio. Otra expresión conocida es el Reconocimiento de Patrones.

## Capítulo 3. Fundamentos de Aprendizaje Automático

qué características son relevantes para un determinado problema, son claves en el desempeño de estos algoritmos.

El resultado de correr un algoritmo de aprendizaje automático puede ser expresado como una función  $g(x)$  que toma un dato  $x$  como entrada y genera la salida  $y$ . Las dimensiones de  $x$  e  $y$  dependen del modelo implementado y del problema particular y son decididos durante la etapa de entrenamiento.

Considerando a  $X$  como el espacio de entrada, que representa todos los posibles valores de la entrada  $x$ . De igual manera,  $Y$  es el espacio de salida, que representa todos los posibles valores de  $y$ . Entonces, podemos asumir que hay una función  $f$  que mapea esos dos espacios,  $f : X \rightarrow Y$ , tal que  $y = f(x)$ , pero que es desconocida. En este contexto, existe un conjunto de datos (típicamente usados para entrenamiento, pero que se podrían usar validación o test) que se puede denominar  $D$ , que está conformado por las parejas de entrada y salida  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \dots (x_n, y_n)$ .

La tarea del algoritmo de aprendizaje es encontrar una función  $g : X \rightarrow Y$  que aproxima a la función objetivo  $f$ , que asumimos que existe. Podemos además definir  $H$  como el conjunto de hipótesis  $h$  que manejamos como posibles funciones que mapean  $X$  en  $Y$ ,  $h : X \rightarrow Y$ . Con esta nomenclatura, uno elige una de esas funciones  $h$  a partir del entrenamiento y a la función elegida le llama  $g$ .

Una vez entrenado el modelo, este puede ser usado para predecir el valor de  $y$  incluso para valores de  $x$  nunca vistos. A esto se le llama capacidad de generalización de un modelo. En general es común que el conjunto de entrenamiento contenga ejemplos que no abarcan el espacio completo de posibles valores de entrada, con lo cual, esta característica es uno de los objetivos principales en el reconocimiento de patrones.

Las aplicaciones donde los conjuntos de entrenamiento están compuestos de los vectores de entrada  $x_i$  y las salidas esperadas para esos vectores  $y_i$ , son conocidas como problemas de aprendizaje supervisado. Ejemplos de esto son la clasificación y la regresión. En la clasificación el problema es decidir a qué categoría  $y$  corresponde cada  $x$ . En la regresión en cambio la salida toma valores continuos.

### 3.1. Redes Neuronales

El término “Redes Neuronales” se usa para describir una familia de algoritmos utilizados ampliamente en el campo de reconocimiento de patrones. El nombre tiene su origen en investigaciones que intentan modelar mediante expresiones matemáticas, el comportamiento de sistemas biológicos de representación y procesamiento de información. A pesar de las ramificaciones de dichas investigaciones, los modelos actuales utilizados en ML ya no pretenden emular a los sistemas biológicos.

Las redes más conocidas por sus capacidades prácticas son las Feed Forward Network (FFN). El nombre de estos modelos hace referencia al flujo de información

entre las distintas etapas de procesamiento; en este caso implica que toda la información fluye desde la entrada  $X$  a la salida  $y$ , por lo que no hay realimentación entre etapas.

En ML cuando hablamos de modelo nos referimos a la familia de funciones sobre las que se busca la solución. Luego la solución obtenida es una de esas funciones que se eligió a través del proceso de entrenamiento, típicamente ajustando los parámetros del modelo.

En el caso de redes neuronales, esta función está basada en la composición de funciones afines  $k$  con funciones de Activación  $a$ . Cada una de estas composiciones es llamada neurona o perceptrón. La cantidad y tamaño de estos elementos, y el tipo de activaciones son lo que hace a la arquitectura del modelo elegido.

De esta manera podemos hablar de un modelo de capas (de ahí el nombre de perceptrón multicapa), donde cada capa  $i + 1$  recibe de la capa anterior el resultado de aplicar la Activación y la función afín. En la ecuación (3.1) se puede ver la expresión de cada capa, donde  $z_i$  es la salida de la capa  $i$ . En este sistema  $z$  y  $b$  son vectores y  $W$  una matriz de dimensiones compatibles. El ancho de la capa, o cantidad de elementos en  $W$  se conoce como número de neuronas de la capa.

$$\begin{cases} k_i &= z_{i-1}^T W_i + b_i \\ z_i &= a(k_i(z_{i-1})) \\ z_0 &= X \end{cases} \quad (3.1)$$

En la figura 3.1 se puede observar un ejemplo de una FFN, de dos capas con cuatro y tres neuronas respectivamente y una capa de salida de dimensión dos. Esta estructura donde toda la capa  $i$  depende de la salida completa de la capa  $i - 1$  es llamada red neuronal completamente conectada. Entonces, una vez elegido el modelo y a partir de pares de vectores conocidos  $x$ ,  $y$ , se ajustan los valores de  $w_{ij}$  y  $b_i$ .

Para poder entrenar estos modelos es necesario tener una medida de la diferencia entre la salida del modelo y la salida deseada. A esta diferencia se le llama función de costo o error<sup>2</sup> entre el valor objetivo de salida  $y_i$  y el valor obtenido según el modelo  $g(x_i)$ . Esta función se elige de acuerdo al problema particular, y es fundamental para el entrenamiento.

También es necesario elegir las funciones de activación a utilizar. Existen distintas funciones de activación, pero la idea general de estas es introducir no linealidades en el modelo. Estas funciones se aplican elemento a elemento en una determinada capa, por lo que son funciones de  $\mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ . En la figura 3.2 se puede observar la respuesta para algunas de estas funciones.

El algoritmo más extendido para entrenar FFN para aprendizaje supervisado es “backpropagation”. En este algoritmo se calcula, de forma eficiente el gradiente de la función de costo respecto a los pesos de la red. Esto permite ajustar los

---

<sup>2</sup>También referido habitualmente como “loss”, por su nombre en inglés.

### Capítulo 3. Fundamentos de Aprendizaje Automático

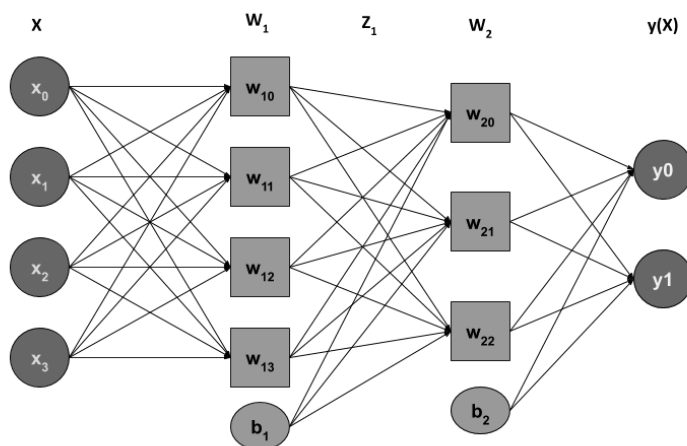


Figura 3.1: Ejemplo de Red Neuronal: Feed-Forward y Completamente Conectada.

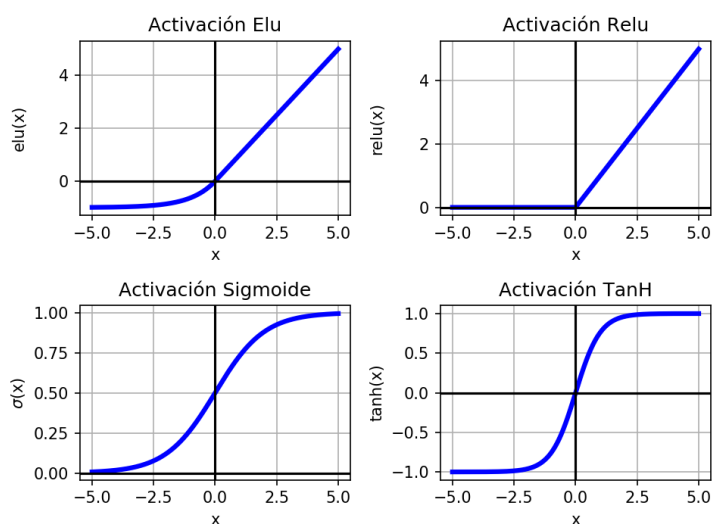


Figura 3.2: Funciones de activación

parámetros en el sentido en el que el gradiente de la función de costos decrece, para así minimizar la función de costo. Lo que se denomina gradiente descendente. Existe una familia de algoritmos usados para entrenar redes neuronales de esta forma y que son denominados genéricamente como métodos de descenso por gradiente.

Esto quiere decir en pocas palabras que se mide el error entre lo deseado y lo obtenido, y luego se actualizan los parámetros en función de ese error, en el sentido contrario al que crece la función de error. Estos métodos aplicados a FFN están descritos con mayor detalle por *Bishop* [28] y *Goodfellow et al* [29]. Es importante destacar sin embargo, que las no linealidades introducidas por las funciones de Activación, hacen que la función de error sea no convexa. Esto implica que, el

### 3.1. Redes Neuronales

proceso de entrenamiento iterativo simplemente reducirá el valor del error a algún mínimo local, pero no existen garantías sobre la convergencia del algoritmo de entrenamiento. Lo que es peor, el mínimo encontrado dependerá directamente de los valores iniciales para los parámetros del modelo. Estos aspectos son campos activos de investigación y nuevas metodologías siguen siendo desarrolladas para paliar estos inconvenientes.

Un aspecto fundamental a la hora de implementar un modelo de ML es elegir las características o “features” con las que describir a los datos. Estas características serán la información de entrada del modelo. Las mismas deben ser seleccionadas no solo de acuerdo al tipo de datos sino como también a la tarea específica a resolver. Un ejemplo de esto es la descripción de personas para decidir si son propensos a tener una cierta enfermedad. Está claro que hay muchas métricas por las que uno puede describir a una persona, pero el nombre a priori no parecería ser relevante a la hora de diagnosticar a un paciente, como sí podría ser la edad o el peso. Sobre este aspecto existen también muchos autores que se han dedicado a mejorar el proceso de extracción de características.

Sin embargo, en los últimos años, gracias en parte al gran poder de cómputo de los sistemas informáticos han surgido otros modelos de FFN. Un ejemplo de esto son las “Deep Neural Networks”, o redes neuronales profundas, cuyo nombre hace referencia a la cantidad de capas presentes en el modelo. Estas redes proponen arquitecturas más complejas desde el punto de vista de la cantidad de parámetros; pretenden con esto eliminar la necesidad de realizar una etapa de extracción de características independiente. Es decir que en este tipo de modelos, las primeras capas serán las encargadas de resolver el problema de la extracción de características. La principal ventaja es que estos modelos se entrenan como una unidad por lo que las características aprendidas serán realmente relevantes para la tarea a resolver.

Uno de los problemas de simplemente aumentar en profundidad las redes es el aumento exponencial en la cantidad de parámetros, lo cual implica que para poder entrenar este modelo hagan falta muchos más datos que en arquitecturas menos profundas. Una forma de entender esto último es pensar en la tarea de ajustar puntos en el plano a una curva dada; si la curva es muy compleja en su descripción y se entrena con pocos puntos, sería muy fácil obtener un modelo que ajuste exactamente esos puntos y entonces perdería capacidad de generalizar para nuevos datos. Podemos pensar por ejemplo en puntos que corresponden a una recta con un cierto nivel de ruido, pero si intentáramos ajustar esos puntos con un modelo de polinomio de grado 10. En este ejemplo conseguiríamos probablemente un ajuste exacto para los puntos de entrenamiento, pero entonces perderíamos la capacidad de ajustar correctamente la recta, que es el modelo original. Este problema es conocido con el nombre “Overfitting” o sobreajuste y es fundamental intentar evitarlo, ya que un sobreajuste a los datos de entrenamiento hará que el modelo pierda capacidad de generalización [30].

Una forma de evitar el sobreajuste a los datos de entrenamiento es ir controlando el progreso midiendo el error sobre un conjunto de datos diferente (validation)

## Capítulo 3. Fundamentos de Aprendizaje Automático

al que entrenamos (training). De esta manera se deja de entrenar el modelo cuando las mejoras en el conjunto de entrenamiento no se reflejan en el conjunto de Validación. Esto es conocido como “early stopping”. También existen otros mecanismos como ser, agregar un término regularizador a la función de costo que penaliza el crecimiento en magnitud de los parámetros del problema, o agregar “drop-out” [31]. Este último, refiere a apagar aleatoriamente un porcentaje de las neuronas durante el entrenamiento, y ha demostrado muy buenos resultados en cuanto a la regularización.

Gracias al teorema de aproximación universal [15], se sabe que con una red arbitrariamente grande (puede ser poco profunda y muy ancha o muy profunda con capas menos anchas) es posible representar cualquier función deseada, independientemente de cual sea esta. Sin embargo, este no da garantías en cuanto a la capacidad del algoritmo de entrenamiento de aprender esta función.

### 3.1.1. Redes de Convolución

Las redes de convolución, conocidas por el acrónimo de su nombre en inglés Convolutional Neural Network son particularmente útiles para procesar datos donde la información espacial es importante, como por ejemplo en imágenes (2D) o en señales temporales (1D). El elemento básico descriptivo de una red de convolución es similar al de las redes FFN visto anteriormente, con la particularidad de que en lugar de tener una operación afín en cada capa sustituimos la misma por una llamada convolución, que si bien no coincide estrictamente con la definición matemática de convolución el concepto es el mismo [32].

En la figura 3.3 se muestra el ejemplo de como se calcula la convolución para el caso de una dimensión. Se superpone el núcleo, con una parte de la entrada, se hace un producto termino a termino y el resultado es sumado para dar lugar al valor de la salida. Luego se mueve el núcleo y se repite la operación. El tamaño del núcleo de la convolución en este tipo de capas es uno de los *hiperparámetros* de diseño. En el caso de la figura este es de tamaño tres. Es importante notar que en el caso de la convolución, el tamaño de la salida depende de la relación entre el tamaño de la entrada y el tamaño del núcleo (kernel), así como también del factor del “stride”. El stride especifica el intervalo en el que se desplaza la ventana de convolución sobre la entrada. Es posible obtener salidas de igual tamaño al de la entrada rellenado alrededor de la señal; esto es conocido como “padding”. El stride y el padding también son hiperparámetros de diseño en las capas de convolución.

Las redes de convolución son muy usadas hoy en día, como primeras capas de redes profundas, ya que por sus propiedades son adecuadas para la extracción de características. A las salidas de las capas de convolución se las llama “feature maps”, o mapas de características.

Lo usual es que estas redes intercalen las capas de convolución con capas, de Pooling. Existen distintos tipos de Pooling. En la figura 3.4 se muestran el *Max-Pooling* y el *Avg-Pooling*. Las capas de pooling actúan locamente sobre ventanas de

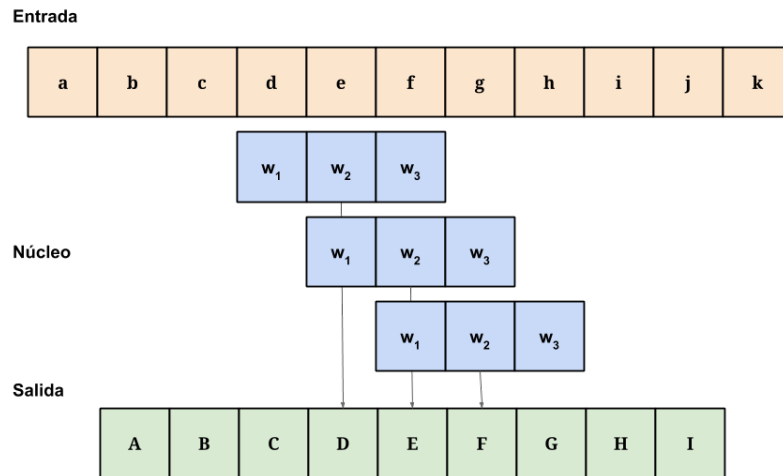


Figura 3.3: Convolución en una dimensión.

tamaño fijo, dado por un hiperparámetro de diseño de capa. En el caso de Max-Pooling se elige el valor mayor presente en la ventana. Para el caso de Avg-Pooling se hace el promedio de valores. El propósito de estas capas es agregar invarianza espacial a los modelos y además permiten reducir la cantidad de parámetros necesarios en distintas profundidades de la red. Finalmente, todas las redes de convolución terminan con algunas capas de red totalmente conectadas antes de la salida.

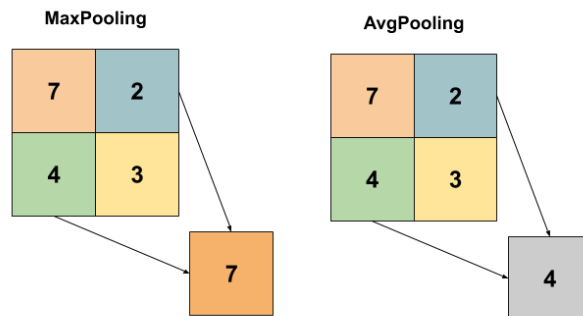


Figura 3.4: Ejemplos de pooling en 2 dimensiones.

Una de las principales consideraciones de diseño en cuanto a estos problemas es determinar la arquitectura de la red. Cuántas capas, de qué tipo y forma y cómo estarán conectadas entre ellas.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Capítulo 4

## Técnica implementada

El material de estudio son las cerámicas piezoeléctricas, y como se vio en el capítulo 2, existen técnicas que intentan obtener sus propiedades a partir de la medida de la impedancia eléctrica de la cerámica. La curva obtenida depende, no solo de los parámetros constitutivos del material, sino también de la geometría y la densidad de la cerámica que estamos estudiando. Para ajustar el modelo se parte de unos parámetros conocidos (por ejemplo de una cerámica similar, o si los hubiere los declarados por el fabricante), y medidas del tamaño y densidad de la cerámica obtenidas experimentalmente. A partir de estos datos se obtiene una curva mediante el algoritmo FEM y se compara con la curva experimental. Según el resultado de esa comparación, y de acuerdo al análisis de sensibilidad, se modifican los parámetros más sensibles del modelo dejando inalterados los demás. Luego se vuelve a repetir la simulación y el ajuste mientras las curvas se sigan aproximando. Una vez concluido este ajuste primario, se utilizan los valores finales como condición inicial para un algoritmo de optimización numérica, como por ejemplo el método de *Nelder Mead* [33]. Este será el encargado de realizar la minimización final sobre el espacio de los diez parámetros complejos.

Estas técnicas implican ejecutar un algoritmo de FEM en cada paso de ajuste para ambas etapas. Esto hace que el proceso sea costoso desde el punto de vista computacional y conlleve tiempos largos de cómputo para el algoritmo completo. Además, el tiempo de ejecución crece con el número de elementos y cantidad de puntos seleccionados.

Entonces, la idea de este trabajo es explorar la posibilidad de sustituir la primera etapa de esta técnica iterativa de ajuste de curvas. Se propone un algoritmo entrenado que resuelva el problema inverso, de obtener las constantes del modelo a partir de la curva de impedancia eléctrica para los parámetros más sensibles. El principal inconveniente de las Redes Neuronales, es que para entrenar buenos modelos, se necesitan muchísimos datos de un conjunto significativo de muestras. En nuestro caso, tenemos un generador de datos de entrenamiento que es el algoritmo de FEM. Lo que no tenemos es una ecuación matemática que nos permita resolver el problema inverso. Entonces, en teoría, podríamos construir una base de curvas

## Capítulo 4. Técnica implementada

de impedancia simuladas con las que entrenar una función que nos permita resolver el problema inverso. Es decir, derivar los parámetros constitutivos a partir de la curva de impedancia. Luego es posible utilizar el algoritmo entrenado para obtener los parámetros constitutivos a partir de curvas de impedancia experimentales.

Este capítulo presenta las consideraciones de diseño, el trabajo realizado durante la primera aproximación al problema de obtener, mediante redes neuronales, una función que tome como entrada la curva de impedancia (o algunas características de esta) y devuelva los parámetros constitutivos del material.

### 4.1. Definición y alcance del problema

Considerando la complejidad del problema y la alta dimensión en la que viven los datos y usando de ejemplo la técnica del Dr. Pérez descripta en [16], se entrenó un algoritmo con el objetivo de obtener solo cinco de los parámetros más sensibles, análogamente a la primera etapa de dicha técnica. Esto tiene varias ventajas: en primer lugar acota el problema a una dimensión menor y a su vez permitiría sustituir esta parte de la técnica con el nuevo algoritmo para luego seguir con la optimización numérica original.

En el desarrollo de este trabajo se consideraron únicamente cerámicas pertenecientes a la clase de simetría 6mm, polarizadas en la dirección del espesor. La caracterización utilizada asume además, que el material es homogéneo e isotrópico, sin grietas ni defectos de fabricación en el cuerpo de la cerámica. Los parámetros serán considerados independientes de la temperatura y la frecuencia. Es importante aclarar que durante el desarrollo de este trabajo se utilizaron solamente datos sintéticos obtenidos mediante simulación.

Se parte de un algoritmo FEM implementado en matlab explicado en [17], que dados los 10 parámetros complejos y los datos geométricos de la cerámica devuelve un valor de impedancia (compleja) para cada valor de frecuencia de un vector elegido arbitrariamente. Se utiliza este algoritmo para simular curvas con distintos parámetros, luego con estas curvas se entrena el modelo elegido, y se verifica su funcionamiento.

Las constantes que deseamos encontrar para el material en esta etapa son:  $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{44}$ ,  $e_{33}$ . Estos parámetros forman parte de las matrices 2.6 y 2.7.

#### 4.1.1. Base de Datos

Entrenar una ANN, requiere datos que sean significativos para la tarea a resolver, no solo en cantidad sino en cuanto al tipo de datos. Por ejemplo, si queremos un algoritmo para identificar pacientes con cierta enfermedad a partir de datos clínicos, probablemente el color de ojos no sea tan relevante como si pueden ser el peso y la altura de la persona. Con este objetivo se generaron mediante el algo-

## 4.1. Definición y alcance del problema

ritmo de FEM curvas sintéticas (es decir que no corresponden a medidas tomadas experimentalmente de cerámicas reales) variando las constantes del modelo. Para esto fue necesario elegir con qué criterio y en qué espacio variar los parámetros de entrada del algoritmo, para obtener luego las curvas.

En primer lugar, el interés fundamental de este trabajo está en probar el concepto de aproximar este problema de ajuste para el caso de las cerámicas. Por esta razón se tomaron durante todas las simulaciones fijos los parámetros geométricos y de densidad de la cerámica, así como el tamaño de la grilla para los elementos del método y el vector de frecuencias.

### 4.1.2. Elección de Geometría

Durante el desarrollo del caso de estudio presentado en el capítulo 2, se trabajó con datos experimentales de una familia de cerámicas. De ese trabajo se tienen los datos para diez muestras por cada geometría en seis tamaños distintos de la misma cerámica, con lo cual, elegir una de estas permitiría escalar el sistema y eventualmente probarlo con alguna curva experimental.

Observando los modos presentes en las curvas de impedancia y con ayuda de la experiencia del Dr. Pérez, se eligió trabajar con la cerámica Pz27 de 20 mm de diámetro y 2 mm de espesor. Se usaron los parámetros obtenidos por el Dr. Pérez como datos iniciales, a partir de los cuales generar la base de datos. En la tabla 4.1, se pueden observar estos valores de referencia.

Nombre	Real	Imaginaria	
$c_{11}$	$1,181e^{11}$	$5,6e^8$	$N/m^2$
$c_{12}$	$7,490e^{10}$	$3,5e^7$	$N/m^2$
$c_{13}$	$7,380e^{10}$	$2,4e^7$	$N/m^2$
$c_{33}$	$1,104e^{11}$	$4,7e^8$	$N/m^2$
$c_{44}$	$2,027e^{10}$	$3,6e^8$	$N/m^2$
$e_{15}$	11,2	-0,0390	$C/m^2$
$e_{31}$	-5,1	0,0003	$C/m^2$
$e_{33}$	16,0	-0,1000	$C/m^2$
$\epsilon_{11}$	$8,7084e^{-9}$	$-5,310e^{-13}$	$C^2/Nm^2$
$\epsilon_{33}$	$7,3455e^{-9}$	$-9,735e^{-11}$	$C^2/Nm^2$

Tabla 4.1: Datos iniciales para generar base de datos

Además, emulando la forma de trabajo de *Pérez et al* [16], se mantendrá fija la parte compleja de las constantes constitutivas, variando solo la parte real. Sin embargo es preciso introducir algún valor aquí, para poder simular las curvas en el algoritmo FEM provisto. Se eligió mantener el valor de estos parámetros constantes e iguales a los de la curva de partida. Se utilizó un vector de frecuencias de mil puntos que va de 13 kHz a 1,3 MHz, donde están relevadas las cerámicas experimentalmente. De esta manera se podría aplicar el algoritmo a estos datos.

## Capítulo 4. Técnica implementada

### 4.1.3. Estudio de Convergencia FEM

Uno de los parámetros claves en las simulaciones de FEM, es la cantidad de elementos en la que queremos dividir la pieza a simular. A mayor cantidad de elementos más se ajustará la simulación al comportamiento real de la cerámica. Sin embargo, al crecer este número crece el costo computacional de la simulación. Previo a generar la base de curvas para el entrenamiento se realizó un estudio de convergencia sobre la geometría elegida para encontrar el número de elementos a partir del cual ya no se observan cambios apreciables en la curva obtenida. El procedimiento es bastante simple; consiste en simular la curva con exactamente los mismos parámetros y sobre el mismo vector de frecuencias, variando solamente la cantidad de elementos de la grilla, observando luego las curvas obtenidas. Cuando se utilizan pocos elementos las variaciones son grandes, pero a medida que crece la cantidad de elementos y por ende estos se achican, las variaciones en las curvas obtenidas empiezan a ser imperceptibles. El objetivo de este análisis es elegir una cantidad de elementos que permitieran a los datos simulados ser comparados eventualmente con curvas reales. Es importante mencionar que siempre existe un compromiso entre la cantidad de elementos del modelo y los tiempos de cómputo requeridos para simularlos. El resultado de este análisis, fue que para la geometría elegida, una resolución de treinta elementos en el espesor es suficiente para reproducir la curva original.

Este aspecto es relevante cuando se trabaja con cerámicas reales, como en el caso del estudio de envejecimiento. Para el entrenamiento de la red, se trata de un problema sintético que en principio no sería relevante. Sin embargo, cuando se quiera aplicar la red a un problema real si lo será.

## 4.2. Desarrollo

En esta sección se describen las tareas de generación de datos, diseño y elección de arquitectura de red y de su entrenamiento. Se exploraron distintas arquitecturas de red sobre los primeros datos, mientras en paralelo se continuaba con la generación de más datos.

En una primera etapa se generaron *1.5 millones* de curvas, variando los diez parámetros y no solo los cinco que quiero ajustar, con la idea de introducir aleatoriedad en la forma de las curvas que vería la red (como una especie de ruido) y a su vez, generar una base de datos que ya pueda servir en una segunda etapa para expandir el modelo. Sin embargo, al intentar ajustar solo cinco de los parámetros los resultados no fueron muy buenos. Sin embargo se entiende que la base de datos por si sola es valiosa, y que con la experiencia ganada permitirá seguir avanzando.

### 4.2.1. Generación de datos simulados

Se desarrolló un código en matlab que tomando como partida la cerámica planteada en 4.1.2 varía la parte real de las cinco constantes deseadas en un entorno del  $\pm 10\%$  del valor original, utilizando una función aleatoria con distribución uniforme. Luego se realiza la simulación utilizando FEM y se genera un archivo *.mat* con toda la información potencialmente necesaria para entrenar la red, e incluso alguna extra que podría ser útil en una etapa posterior de validación de la técnica. Se simularon *800 mil* curvas distintas con este procedimiento. En la figura 4.1 se muestran superpuestas las curvas obtenidas para diez muestras elegidas al azar. En la tabla 4.2 se muestran los valores de la parte real de los parámetros que varían de una curva a la otra.

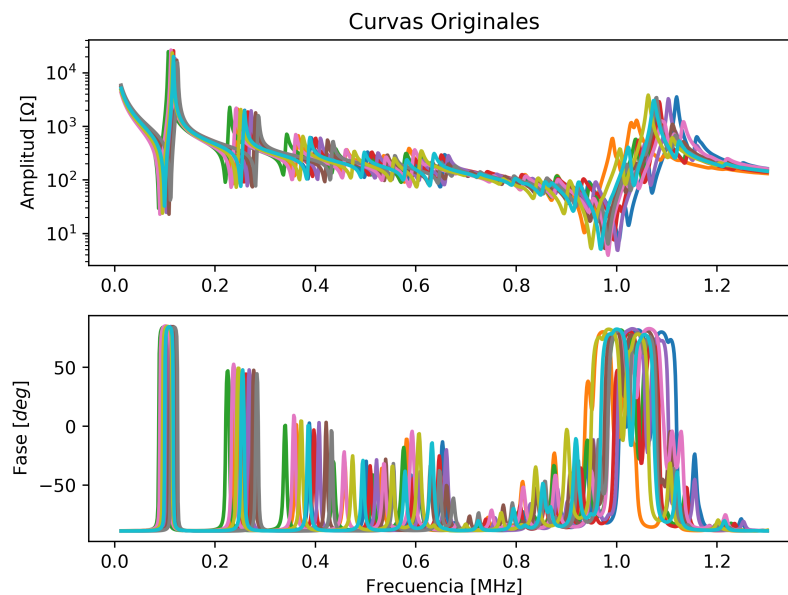


Figura 4.1: Ejemplos del dataset Módulo y fase. Cada color representa un conjunto distinto de parámetros constitutivos

Lograr generar estas curvas fue posible gracias al uso del Centro Nacional de Supercomputación: ClusterUy.

La generación de las curvas es un proceso computacionalmente muy costoso. Las primeras simulaciones se realizaron en un computador personal y se requería un día para obtener 1000 curvas. Para facilitar la generación de curvas fue necesario recurrir a los recursos computacionales del ClusterUy. Si bien esto permitió generar las curvas en muchísimo menos tiempo, familiarizarse con el uso del cluster insumió cerca de dos meses de trabajo. Esto fue debido en parte a la falta de experiencia en este tipo de sistemas y a la falta de soporte específico para matlab.

El resultado de esto es un código funcional y escalable que permite generar

## Capítulo 4. Técnica implementada

curvas y que con pocas modificaciones sería capaz de hacerlo para otras geometrías o parámetros. Además de dos bases de datos que permitirían variados estudios.

Curva	$c_{11}$ $10^{10}N/m^2$	$c_{13}$ $10^{10}N/m^2$	$c_{33}$ $10^{10}N/m^2$	$c_{44}$ $10^{10}N/m^2$	$e_{33}$ $C/m^2$
711294	11,592	7,4423	11,762	2,2295	16,669
728014	12,294	7,7884	10,136	1,9654	14,408
728816	10,746	7,6869	10,964	2,1668	15,597
748296	12,383	7,6406	11,547	2,0201	14,456
760689	12,686	7,5740	11,489	2,1766	16,009
772244	12,530	6,8653	10,841	1,9364	16,763
781589	11,766	7,9499	10,967	1,8258	17,480
781740	12,546	6,6539	11,038	1,9625	15,863
790064	11,736	7,3057	10,202	2,0811	16,622
791435	11,703	7,1628	10,697	2,0881	16,145

Tabla 4.2: Valores de Constantes para Curvas graficadas

### 4.2.2. Diseño de Arquitectura de Red

Para el desarrollo de los algoritmos aprendizaje automático se utilizó el lenguaje Python, en particular se usaron las librerías de Tensorflow [34] y Keras [35]. Estas librerías permiten diseñar, entrenar y evaluar algoritmos de redes neuronales. Además, se escribió una librería para el manejo de los datos, que permite el entrenamiento sobre un conjunto grande de datos sin saturar la memoria RAM del sistema.

En un principio se hicieron pruebas, intentando extraer características de las curvas, con un enfoque tradicional, inspirando las características utilizadas en los trabajos previos sobre esta problemática. Se extrajeron las posiciones en frecuencia de los modos de resonancia y antirresonancia para los primeros Radiales y para el modo de Espesor. Estas se utilizaron en redes neuronales completamente conectadas con resultados cercanos al 4% de error porcentual por parámetro.

También se intentó utilizar en redes completamente conectadas el vector completo de Amplitud en un caso, de Conductancia  $G$  y Resistencia  $R$  en otro. En estas primeras etapas no se contaba con todos los datos sino solo un conjunto reducido.

Con las distintas arquitecturas de red completamente conectada el mejor desempeño obtenido fue de 3% de error absoluto promedio para el que ajustó peor de los parámetros, y de 2,3% en el que se obtuvo mejor resultado.

Luego, se comenzó a indagar en redes de convolución. En particular, se empezó por probar con redes de convolución sobre el par de vectores  $R$  y  $G$ , con distintas combinaciones de arquitecturas. Se obtuvieron similares resultados que

los obtenidos utilizando directamente el vector de Amplitud en una CNN de similares características, con lo cual se eligió este como dato de entrada. El vector de amplitudes se obtiene de cerámicas experimentales directamente con un analizador de impedancias, por lo cual nos resultó apropiado utilizarlo como entrada al sistema.

En cuanto a la arquitectura elegida, se realizaron distintas pruebas con los datos para explorar el funcionamiento de los componentes de la red. En esta etapa se buscaba alguna arquitectura que lograra bajar los errores porcentuales para los 5 parámetros de manera similar. Indagando en arquitecturas de convolución de 1-D y teniendo en cuenta lo que ya sabemos de las señales estudiadas se probaron algunas variaciones de la arquitectura final. En particular, sabemos de nuestras señales que la información de interés está muy localizada en algunos tramos de la señal, además, las formas que queremos reconocer son muy similares. Finalmente se implementó una red con tres capas de convolución-1D, con funciones de Activación intercaladas con capas de Dropout, una capa de re-dimensionado “flatten”, luego dos capas de red completamente conectada también intercaladas con Dropout, y finalmente activaciones lineales para cada una de las 5 salidas. En cuanto a los hiperparámetros elegidos, se realizó una búsqueda pseudo aleatoria. Manualmente se modificaron las combinaciones de hiperparámetros con el objetivo de mejorar el desempeño de la arquitectura. Esto se repitió secuencialmente para todas las elecciones, es decir: El tamaño de las capas, núcleos y pasos de aplicación. El método de gradiente utilizado y sus hiperparámetros. El coeficiente de dropout. La elección no es sencilla, pero se determinó experimentalmente que con los parámetros elegidos la función de costo alcanzaba valores muy pequeños en las primeras 10 Épocas.

En figura 4.2 se puede ver un esquema de la red implementada, donde para las capas de convolución se muestra el tamaño de los núcleos, la cantidad de estos y el Stride con el que son aplicados. También en la figura se incluyeron las activaciones de las distintas capas y el valor elegido para Dropout.

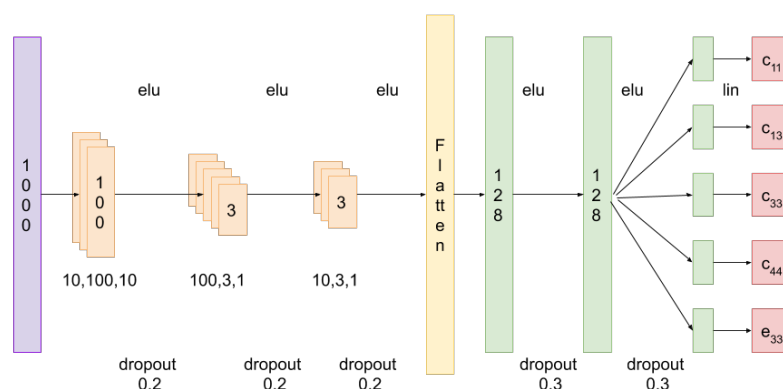


Figura 4.2: Red implementada.

La función de Activación elegida para esta implementación se puede observar

## Capítulo 4. Técnica implementada

en la figura 4.3. Se conoce con el nombre de Exponential Linear Unit (ELU) [36] y se define de acuerdo a la ecuación:

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ \alpha(e^x - 1) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Se eligió esta función de activación por mostrar mejor desempeño en la arquitectura elegida, algunas de las otras funciones de activación estudiadas son mencionadas en el capítulo 3. Como función de costo se utilizó el error cuadrático medio, Mean Squared Error (MSE), y para evaluar el modelo se utiliza el error medio absoluto porcentual, Mean Absolute Percentage Error (MAPE). Los valores de las constantes constitutivas fueron re-escalados para mejorar la robustez del algoritmo. Esto se realizó dividiendo el valor de el parámetro real por una constante fija para todos los datos, en cada constante. Los valores de escalado fueron  $11e^{10}$  para  $c_{11}$  y  $c_{33}$ ,  $7e^{10}$  para  $c_{13}$ ,  $2e^{10}$  para  $c_{44}$  y 16 para  $e_{33}$ . No se realizó normalización ninguna sobre el vector de datos.

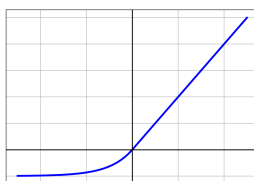


Figura 4.3: Comportamiento de ELU

En todas las capas se utilizó una inicialización de pesos aleatoria con distribución normal “He-Normal” [37] para los núcleos. Además, en todos los casos se inicializaron los bias constantes iguales a cero. Finalmente se entrenó la red utilizando el algoritmo de optimización “Adam” [38]. Es importante mencionar que en esta etapa no se incluyeron capas de Pooling, ya que en este caso la información de localización en el vector de datos es relevante para el problema planteado.

# Capítulo 5

## Resultados

En este capítulo se resumen primero los resultados obtenidos en el trabajo introducido en el capítulo 2 sobre envejecimiento. Luego se presentan los resultados obtenidos para la red neuronal entrenada.

### 5.1. Estudio sobre envejecimiento

Aplicando la técnica de optimización basada en FEM se obtuvieron dos sets de valores de constantes constitutivas  $P_i$  para cada muestra del grupo estudiado. Estos sets corresponden a los valores originales y a los obtenidos luego del envejecimiento. Como forma de resumir la información se presenta solo el valor medio y la desviación estándar ( $\sigma$ ) para cada parámetro en el conjunto original y en el conjunto envejecido. En la tabla 5.1 se muestran estos valores, así como también las diferencias ( $\Delta$ ) entre los parámetros de las muestras luego del envejecimiento. Los valores de  $\Delta$  y  $\Delta(\%)$  están calculados, para cada parámetro de acuerdo a las ecuaciones 5.1 y 5.2.

	$c_{11}$ $10^{10}N/m^2$	$c_{12}$ $10^{10}N/m^2$	$c_{13}$ $10^{10}N/m^2$	$c_{33}$ $10^{10}N/m^2$	$c_{44}$ $10^{10}N/m^2$	$-e_{31}$ $c/m^2$	$e_{15}$ $c/m^2$	$e_{33}$ $c/m^2$	$\varepsilon_{11}/\varepsilon_0$	$\varepsilon_{33}/\varepsilon_0$
$\bar{ori}$	12,021	7,457	7,446	11,354	2,143	5,002	11,380	16,425	1034	854
$\sigma_{ori}$	0,078	0,060	0,053	0,048	0,017	0,117	0,267	0,126	50,9	12,40
$\sigma_{ori}(\%)$	0,65	0,80	0,71	0,42	0,79	2,33	2,34	0,77	4,92	1,45
$\bar{env}$	12,038	7,474	7,456	11,357	2,139	5,006	11,281	16,468	1009	862
$\sigma_{env}$	0,066	0,047	0,052	0,049	0,011	0,075	0,173	0,117	40,0	11,85
$\sigma_{env}(\%)$	0,55	0,63	0,70	0,43	0,51	1,50	1,53	0,71	3,96	1,38
$\hat{\Delta}$	0,017	0,019	0,010	0,003	0,004	0,004	0,099	0,043	25	8
$\hat{\Delta}(\%)$	0,19	0,39	0,13	0,11	0,28	1,16	1,3	0,30	2,71	0,90
$\sigma_{\Delta}$	0,016	0,024	0,009	0,014	0,007	0,059	0,125	0,056	19,7	4,2

Tabla 5.1: Valores medios ( $\bar{P}$ ) y desviación estandar ( $\sigma_P$ ) para las propiedades del material en las muestras originales (ori), y las envejecidas (env).

$$\Delta = |P_{ori} - P_{env}| \quad (5.1)$$

## Capítulo 5. Resultados

$$\Delta(\%) = 100 \frac{|P_{ori} - P_{env}|}{|P_{ori}|} \quad (5.2)$$

Las desviaciones estándar, obtenidas del set de diez muestras, representan las variaciones en los parámetros debidas al proceso de fabricación y no a la estimación numérica. Como se puede ver en la figura 2.9, ambas curvas se ajustan bien por este método; las diferencias entre el modelo obtenido y los datos experimentales en ambos casos son menores que el 1% como se puede ver en la tabla 5.2. Sin embargo, estas diferencias son del mismo orden de magnitud que las diferencias obtenidas entre las curvas originales y las envejecidas.

Muestra	$S_1$	$S_2$	$S_3$	$S_4$	$S_5$	$S_6$	$S_7$	$S_8$	$S_9$	$S_{10}$
$Error_{ori}$	0,12	0,52	0,50	0,13	0,35	0,31	0,17	0,33	0,31	0,29
$Error_{env}$	0,30	0,70	0,81	1,2	0,35	0,45	0,23	0,25	0,75	1,56

Tabla 5.2: Errores entre la curva simulada y la curva experimental para las curvas ajustadas.

## 5.2. Resultados obtenidos con Red de Convolución Implementada

Finalmente se entrenó la red elegida durante 220 épocas. La evolución de las variables de costo y de error es extremadamente lenta luego de las primeras 10 épocas, sin embargo nunca se dejó de mejorar tanto en entrenamiento como en validación, por lo que se podría seguir entrenando la red. En total se utilizaron  $6 \times 10^5$  muestras para entrenamiento,  $1 \times 10^5$  para validación (tanto para la elección de la arquitectura como para el control durante el entrenamiento), se dejaron otras  $1 \times 10^5$  que solo se usaron en la etapa final de evaluación del algoritmo implementado (Test).

Dado que el modelo elegido tiene cinco salidas, fue posible seguir la evolución de cada uno de los parámetros constitutivos elegidos durante el entrenamiento. Los valores finales obtenidos sobre el conjunto de Validación y Test respectivamente se pueden observar en la tabla 5.3. Recordar que como función de costo se utilizó MSE y como métrica de evaluación el MAPE.

	$c_{11}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$e_{33}$
$MSE_{VAL}(10^{-2})$	0,5118	0,4542	0,3144	0,5789	0,5866
$MAPE_{VAL}$	0,4779	0,4317	0,3144	0,5734	0,5867
$MSE_{TEST}(10^{-2})$	0,5099	0,4550	0,3156	0,5782	0,5852
$MAPE_{TEST}$	0,4760	0,4325	0,3154	0,5724	0,5851

Tabla 5.3: Evaluación de algoritmo en espacio de parámetros

A su vez, para algunas de las muestras del conjunto de Test, elegidas al azar, se obtuvo el vector de parámetros constitutivos aproximados y se utilizó este para

## 5.2. Resultados obtenidos con Red de Convolución Implementada

generar la curva correspondiente por medio del algoritmo de FEM. En las figuras 5.1 y 5.2 se muestran algunos ejemplos de estas curvas junto con la curva original, para su comparación. Los diagramas de Resistencia y Conductancia correspondientes a estas mismas muestras fueron incluidos en el anexo A. Se incluyen también las gráficas de las demás curvas elegidas.

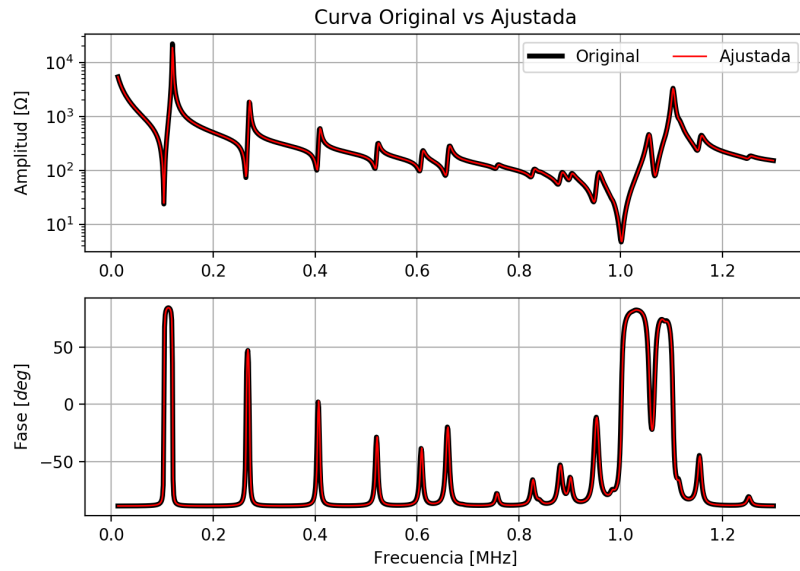


Figura 5.1: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 760689

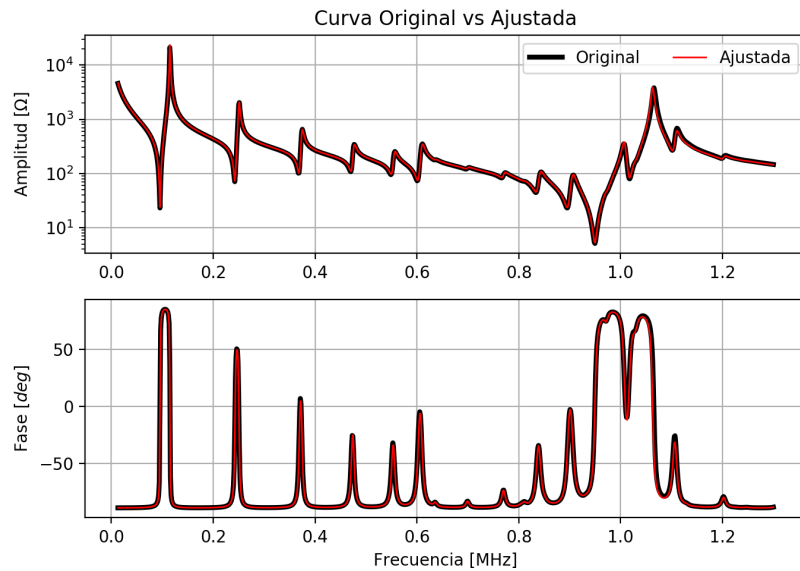


Figura 5.2: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 790064

Es importante destacar que este análisis se realizó solo para algunas de las

## Capítulo 5. Resultados

muestras del conjunto. Esto se determinó así debido a los tiempos de cómputo del algoritmo de FEM.

Además, para estas curvas se computó el error porcentual entre curvas con la formula (2.11). El resultado de este cálculo se puede observar en la tabla 5.4 para cada muestra. Dentro del conjunto de datos generados las muestras elegidas para el conjunto de Test son las correspondientes a la numeración 700000 – 799999.

Curva	711294	728014	728816	748296	760689
Error %	0,0326	0,0428	0,0277	0,0060	0,0082
Curva	772244	781589	781740	790064	791435
Error %	0,0174	0,0804249	0,00364	0,00984	0,0079

Tabla 5.4: Error entre curvas Original y Ajustada

También se calculó el error porcentual obtenido en la estimación de cada parámetro para cada una de estas curvas, los resultados se muestran en la tabla 5.5.

Curva	$c_{11}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$e_{33}$
711294	0,0043	0,0058	0,0042	0,0109	0,0006
728014	0,0042	0,0025	0,0041	0,0117	0,0214
728816	0,0150	0,0055	0,0050	0,0067	0,0003
748296	0,0002	0,0025	0,0005	0,0085	0,0033
760689	0,0051	0,0034	0,0017	0,0002	0,0018
772244	0,0010	0,0006	0,0051	0,0017	0,0032
781589	0,0020	0,0030	0,0042	0,0024	0,0055
781740	$5,053 \times 10^{-5}$	0,0029	0,0033	0,0004	0,0114
790064	0,0010	0,0014	0,0014	0,0015	0,0141
791435	0,0021	0,0017	0,0032	0,0005	0,0047

Tabla 5.5: Errores porcentuales en el espacio de los parámetros para las curvas analizadas.

### 5.3. Resultados sobre otras muestras

Se realizaron pruebas sobre la base de datos generada con los 10 parámetros elegidos al azar. El objetivo era probar el desempeño de la red sobre una muestra cuyas constantes  $c_{12}$ ,  $e_{31}$ ,  $e_{15}$ ,  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{33}$  fueran desconocidas.

Se procedió de igual manera que con los datos de test. Se evaluó el modelo sobre  $1 \times 10^5$  muestras, obteniendo los valores de desempeño en el espacio de parámetros que se muestra en la tabla 5.6. También se evaluó el error entre algunas de las curvas, obteniendo los resultados de la tabla 5.7.

	$c_{11}$	$c_{13}$	$c_{33}$	$c_{44}$	$e_{33}$
$MSE(10^{-2})$	1,4099	1,3969	0,3798	0,8398	2,6067
$MAPE$	1,3174	1,3292	0,3796	0,8314	2,6158

Tabla 5.6: Evaluación en muestras con todos los Parámetros aleatorios

En las figuras 5.3 y 5.4 se muestran algunos ejemplos de estas curvas junto con la muestra original, para su comparación. Los diagramas de Resistencia y Conductancia correspondientes a estas mismas muestras fueron incluidos en el anexo A. Se incluyen también las gráficas de las demás curvas elegidas.

Curva	1400433	1400608	1400699	1401032	1401263
Error %	0,09090	0,0959	0,0597	0,0295	0,1028
Curva	1402581	1402831	1405139	1406747	1408070
Error %	0,2329	0,0999	0,0742	0,1946	0,0640

Tabla 5.7: Error entre curvas Original y Ajustada, en muestras con todos los Parámetros aleatorios

## Capítulo 5. Resultados

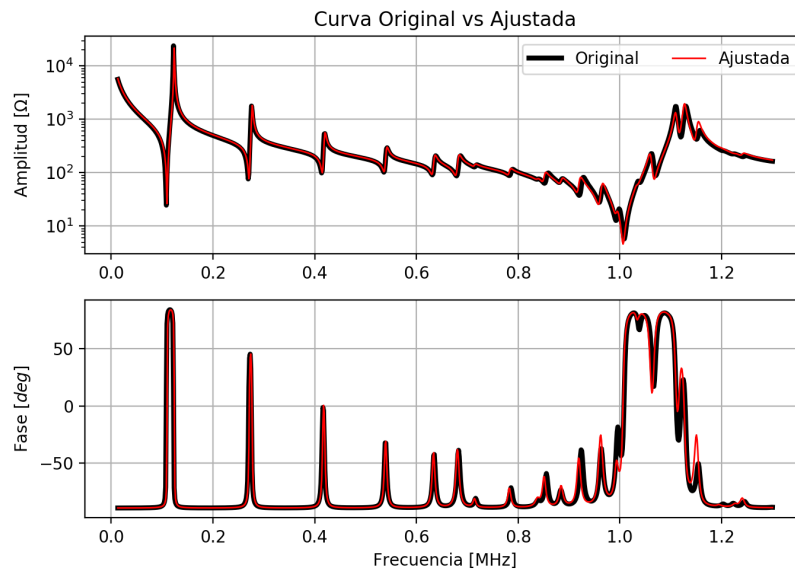


Figura 5.3: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400608, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

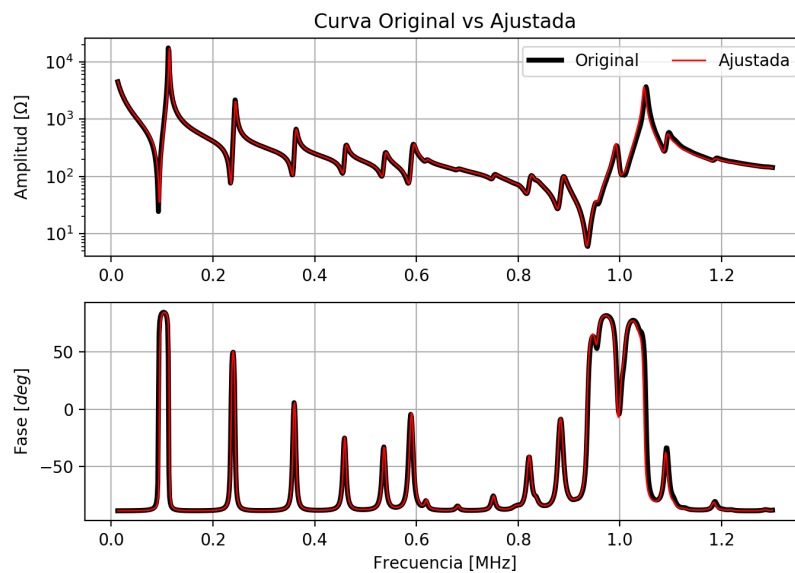


Figura 5.4: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1408070, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

# Capítulo 6

## Conclusiones

El desarrollo del trabajo constó de diferentes etapas. Primero se realizó una etapa de aproximación al problema. Se estudió el fenómeno de la piezoelectricidad y en particular los modelos involucrados en cerámicas piezoeléctricas axisimétricas polarizadas. Luego fue necesario comprender distintas técnicas de aproximación al problema de caracterización. Esto conllevó también la interiorización con la temática de los elementos finitos y sus aplicaciones.

La aplicación de la técnica de *Peréz et al* [16] [17] al caso del envejecimiento permitió comprender todos los elementos involucrados en la temática y definir los siguientes pasos. A su vez, la pasantía en el laboratorio CSIC de Madrid con la Dr Lorena Pardo y la asistencia al congreso *Piezo2017* y escuela de invierno asociada, fueron experiencias formativas que permitieron entender mejor la temática. Además, se presentó un póster con los resultados del trabajo en dicho congreso y se publicó el artículo [18] en *Advances in Applied Ceramics*.

Finalmente se decidió abordar el problema con algoritmos de aprendizaje automático. Para esto fue necesario acotar el problema y definir un caso particular de estudio. Esto se hizo en base a la experiencia del Dr. Peréz. La finalidad de acotar el problema es hacer una prueba de concepto en plazos razonables para una tesis de Maestría.

Se eligió entonces intentar sustituir solo la primera etapa de aproximación a la curva de la técnica de *Peréz et al*. De esta manera, sería posible sustituir esa parte de la técnica en una solución completa.

Se generaron las curvas para entrenar el algoritmo de Convolutional Neural Network (CNN). Para esto fue necesario aprender como utilizar el Centro Nacional de Supercomputación, ClusterUy, debido a los tiempos de cómputo involucrados. Es importante aclarar que para obtener una red que pudiera en un futuro ser aplicada a curvas obtenidas de cerámicas reales, se entendió que era necesario generar la curvas del conjunto de entrenamiento utilizando una buena resolución en el algoritmo Finite Element Method (FEM). Por los mismos motivos se trabajó con vectores de frecuencia de mil puntos.

## Capítulo 6. Conclusiones

Se diseñó y entrenó una CNN de tres capas de convolución y dos capas completamente conectadas. La red entrenada toma como entrada el vector de módulo de amplitud de mil puntos y tiene cinco salidas, una por parámetro elegido.

Se evaluó el desempeño de la red obtenida en el espacio de los parámetros. También se simularon las curvas para los valores obtenidos, comparando así los resultados en la curva de impedancia.

A continuación se discuten los aspectos más relevantes de los dos enfoques abordados en este trabajo de tesis, a saber, el estudio de envejecimiento de cerámicas y la solución del problema de estimación de parámetros constitutivos a partir de las curvas de impedancia.

### 6.1. Caso de estudio sobre el envejecimiento de Cerámicas Piezoeléctricas

El desarrollo del trabajo de envejecimiento permitió familiarizarse con el problema estudiado y con la técnica de optimización basada en Métodos de Elementos Finitos para el cálculo de las curvas simuladas. Para esto fue necesario comprender la física involucrada en el fenómeno de la piezoelectricidad, así como los modelos utilizados.

De los resultados de ese trabajo se concluye que si bien la técnica permite buenas aproximaciones y es capaz de detectar diferencias tan pequeñas como las mostradas en el caso de estudio, no parece razonable concluir demasiado en cuanto a la magnitud del envejecimiento en sí de las muestras estudiadas, ya que las diferencias entre ambas curvas (original y envejecida) son similares a las diferencias entre el modelo obtenido con la optimización y la curva experimental. Sin embargo se entendió que los objetivos se cumplieron en cuanto a la evaluación del método propuesto y a la experiencia ganada. Se espera además que en casos de aplicación de cerámicas que hayan sido sometidas a algún tipo de estrés por uso regular, las diferencias sean mayores. Es claro que en este caso la técnica deberá ser evaluada nuevamente.

Para el material estudiado, los parámetros del modelo presentan baja dispersión entre muestras de un mismo set. La fuente de mayor error para el ajuste de los parámetros es el modelo FEM utilizado, ya que asume discos perfectos y homogéneos. Sin embargo las cerámicas reales no son homogéneas y pueden presentar aberraciones geométricas. De esto se desprende que la fuente de error más importante está probablemente en las hipótesis del modelo y no en la técnica.

A modo de resumen, para las variaciones detectadas en este set de cerámicas, podemos dividir los parámetros en dos categorías diferentes: si el valor medio del cambio para un parámetro específico es mayor o igual que la desviación estándar, entonces se concluye que una variación debido al envejecimiento es detectada, de lo contrario, no es posible concluir nada sobre este en particular. Con este criterio, las

constantes elásticas  $C_{11}$  y  $C_{13}$  aumentan, mientras que las dieléctricas se acercan entre si, es decir  $\varepsilon_{33}$  crece cuando  $\varepsilon_{11}$  decrece.

## 6.2. Técnica basada en Redes Neuronales

Se simularon dos sets de datos diferentes con muestras de curvas de impedancia eléctrica y los parámetros constitutivos que corresponden a cada muestra.

En cuanto a la técnica implementada, se logró diseñar, implementar y entrenar por completo un algoritmo de Red de Convolución que permite aproximar el problema inverso de la obtención de parámetros. En este caso se limitó el trabajo a la obtención de la parte real de cinco parámetros de los mas sensibles, elegidos de acuerdo al estudio de sensibilidad.

La red neuronal se entrenó sobre seiscientas mil curvas y se validó durante el entrenamiento sobre cien mil. Luego se realizó la evaluación final de la función obtenida sobre un segundo conjunto de cien mil muestras nunca vistas por el algoritmo. En este último caso se obtuvieron resultados comparables a los del conjunto de validación por lo que se concluye que no hay sobreajuste a los datos de entrenamiento.

Los valores de error absoluto promedio obtenidos son buenos, si consideramos que las muestras están generadas en un espacio de dimensión cinco, con un radio de 10 % de variación en torno al valor de la curva de referencia.

Las curvas de impedancia obtenidas del ajuste realizado se ven en la mayoría de los casos superpuestas a las originales con pequeñas diferencias. El error medido entre las curvas es muy pequeño para los casos en los que se realizó este análisis. En particular, de los diez casos observados solo uno está por encima del 0,05 % de error, e incluso en este caso está por debajo del 0,1 %. De las restantes hay tres muestras cuyo error está por debajo del 0,01 %.

Se realizaron además evaluaciones de la función sobre muestras generadas variando la parte real de las diez constantes constitutivas. En este caso, se evaluó el desempeño del algoritmo sobre cien mil curvas, de estas características, obteniendo valores medios peores en todos los casos que para el conjunto de test, siendo los errores medios absolutos para todos los parámetros menores al 3 %. En particular, el menor MAPE obtenido fue para  $c_{33}$  del 0,4 % mientras que el mayor fue para  $e_{33}$  con 2,6 %.

### 6.3. Trabajos futuros

Durante el desarrollo de este documento ya se mencionaron algunas de las posibilidades de nuevos trabajos a partir de lo desarrollado aquí. El objetivo de esta sección es recopilar posibles pasos a seguir para continuar con esta línea de trabajo.

Una forma de extender el trabajo realizado hasta este momento es evaluar el desempeño de la red obtenida sobre curvas experimentales de cerámicas reales. Esto se podría realizar para cerámicas de la misma geometría.

Otra forma de ampliar estos resultados es aplicar alguna de las técnicas existentes a problemas sintéticos de las mismas características y comparar los resultados en cuanto a las curvas finales obtenidas. Esto se podría hacer incluso sobre algunas de las curvas ya generadas.

También puede ser interesante ajustar curvas (simuladas) cuyos parámetros no estén dentro del rango de entrenamiento. Es decir, generar curvas a partir de constantes constitutivas cuya parte real se encuentre a un radio mayor al 10%, y evaluar el desempeño del algoritmo sobre estas.

Finalmente, los resultados encontrados son alentadores en cuanto a buscar una red que permita resolver el problema completo para los diez parámetros, la ventaja aquí es que ya se cuenta con una base de datos para intentarlo, al menos para la parte real de los mismos.

# Apéndice A

## Gráficas de Resultados

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

#### A.1.1. Muestras del conjunto de Test

En esta sección se presentan los gráficos obtenidos para algunas muestras seleccionadas al azar.

Muestra	Módulo y Fase	R y G
711294	A.1	A.2
728014	A.3	A.4
728816	A.5	A.6
748296	A.7	A.8
760689	A.9	A.10
772244	A.11	A.12
781589	A.13	A.14
781740	A.15	A.16
790064	A.17	A.18
791435	A.19	A.20

Estas muestras fueron generadas de igual forma que las utilizadas para entrenar la Red. Es decir, tomando valores al azar para la parte real de las constantes de interés ( $c_{11}$ ,  $c_{13}$ ,  $c_{33}$ ,  $c_{44}$ ,  $e_{33}$ ) en un entorno del valor de la curva de referencia y dejando el resto de las constantes del modelo fijas.

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

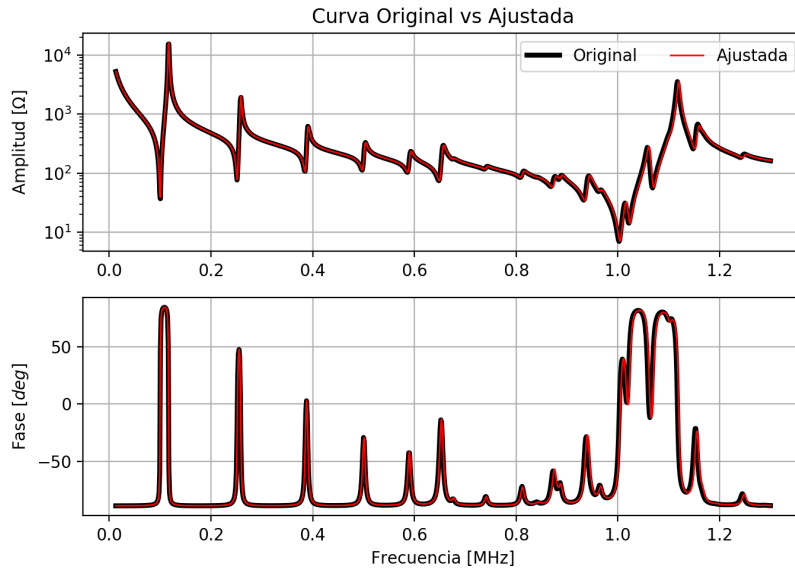


Figura A.1: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 711294

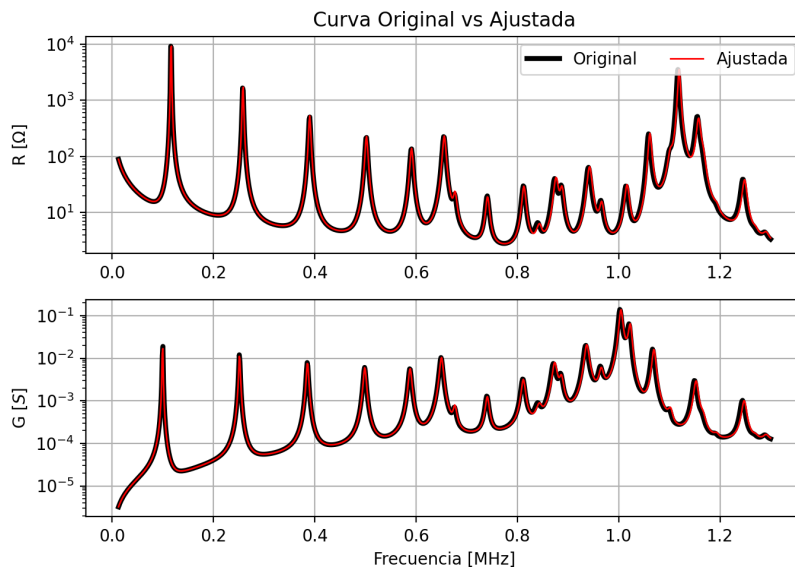


Figura A.2: Ejemplos de Resultados R y G curva 711294

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

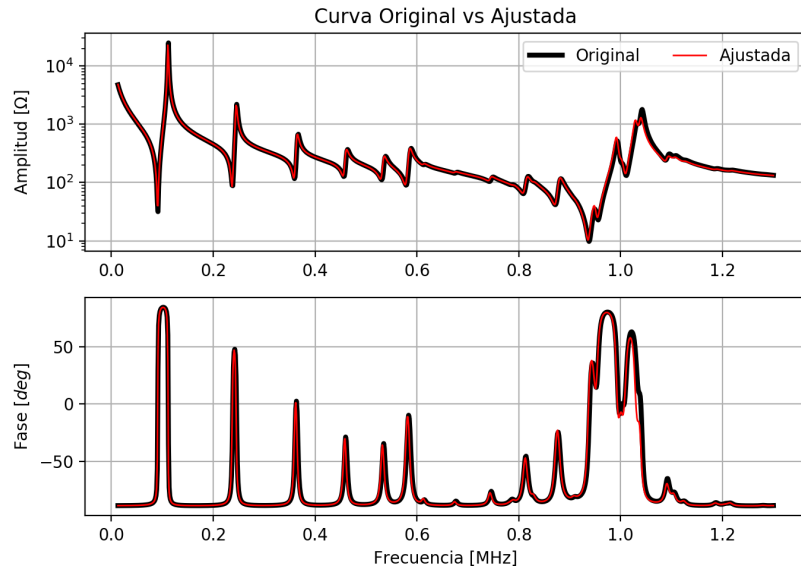


Figura A.3: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 728014

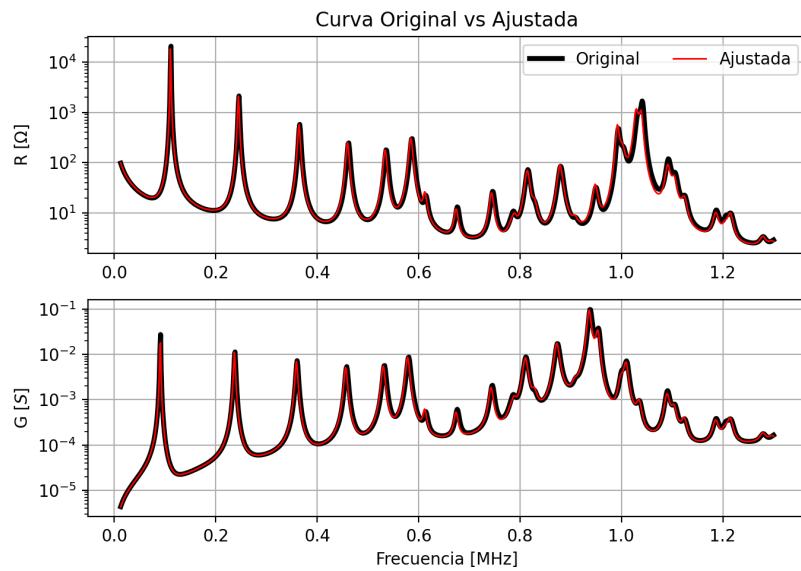


Figura A.4: Ejemplos de Resultados R y G curva 728014

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

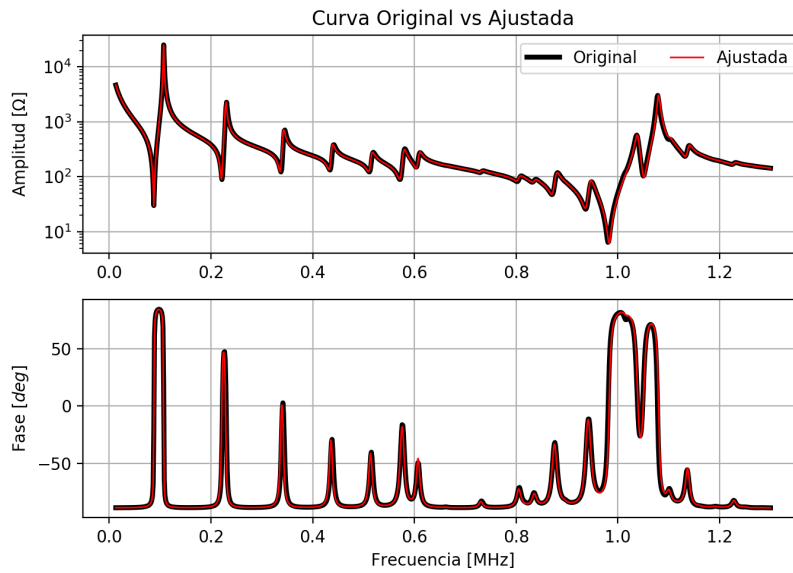


Figura A.5: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 728816

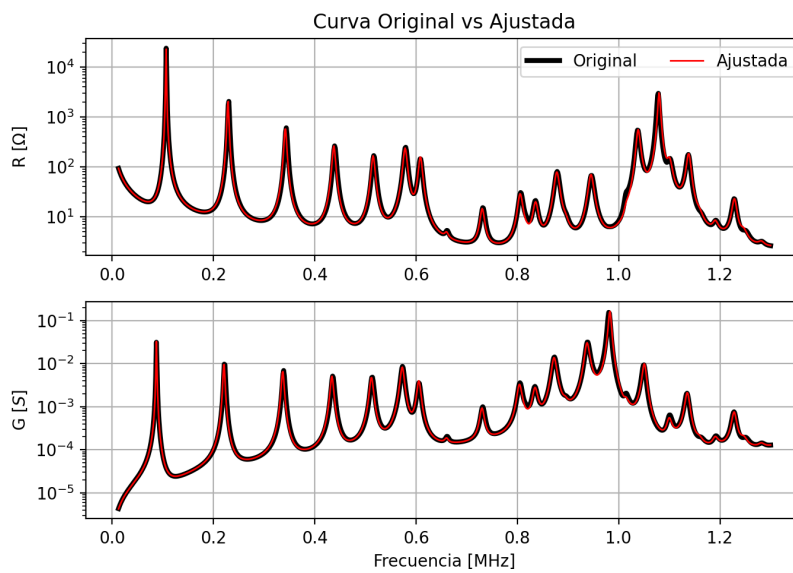


Figura A.6: Ejemplos de Resultados R y G curva 728816

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

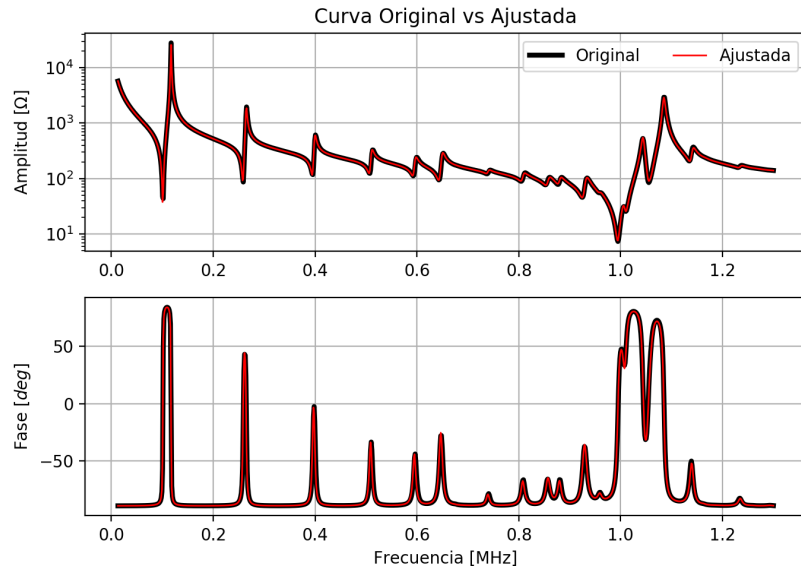


Figura A.7: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 748296

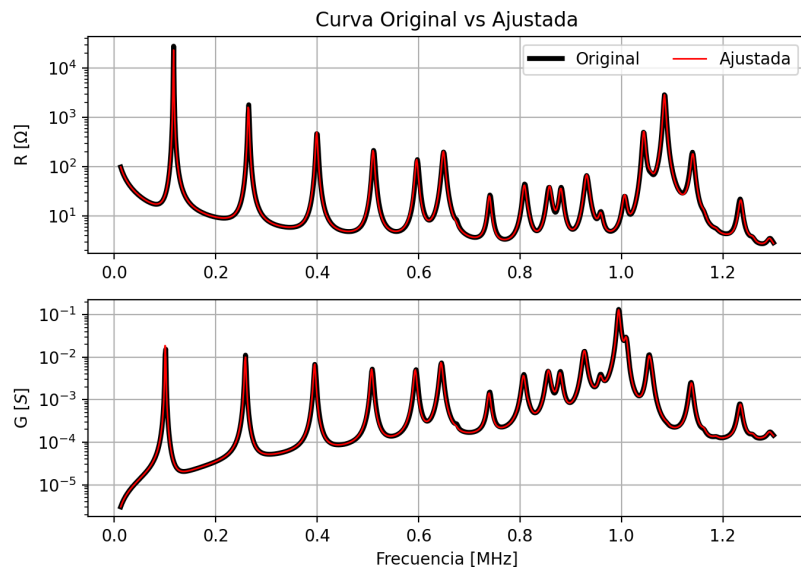


Figura A.8: Ejemplos de Resultados R y G curva 748296

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

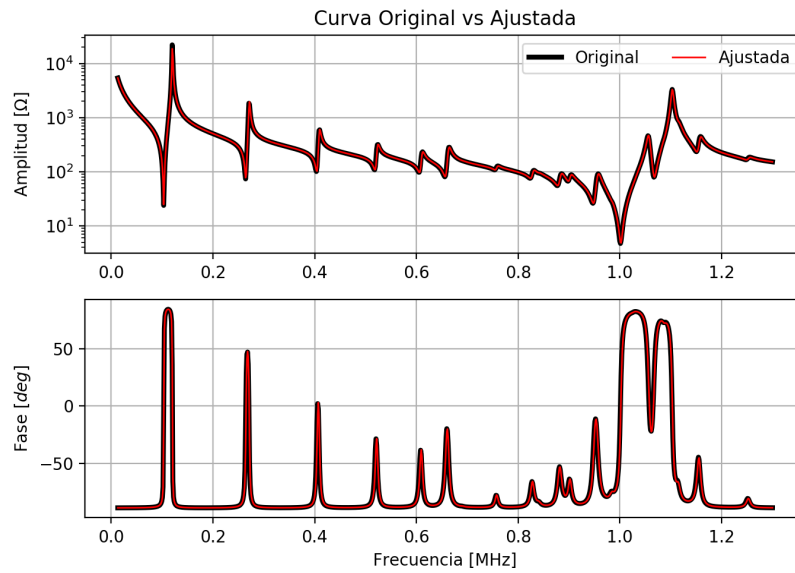


Figura A.9: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 760689

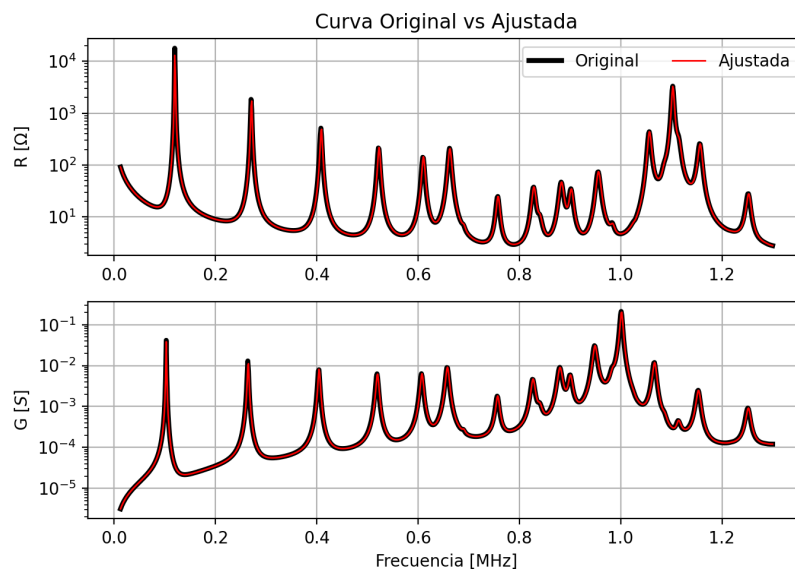


Figura A.10: Ejemplos de Resultados R y G curva 760689

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

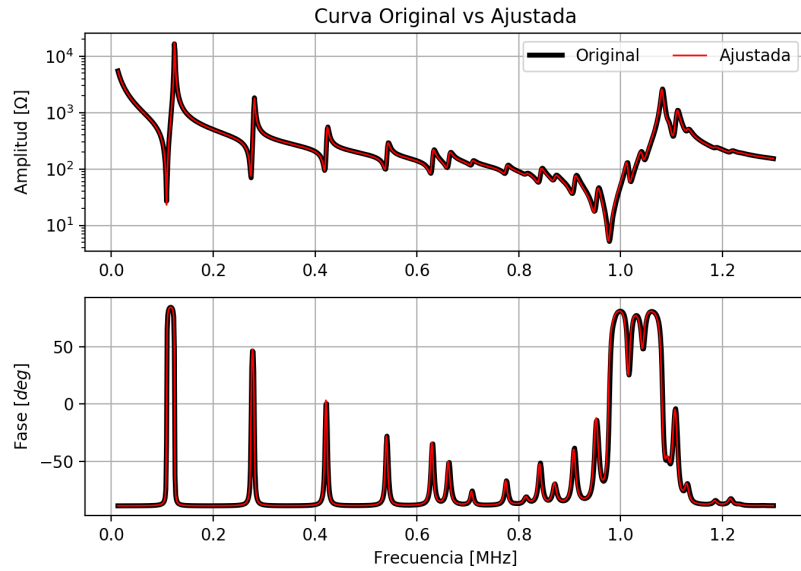


Figura A.11: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 772244

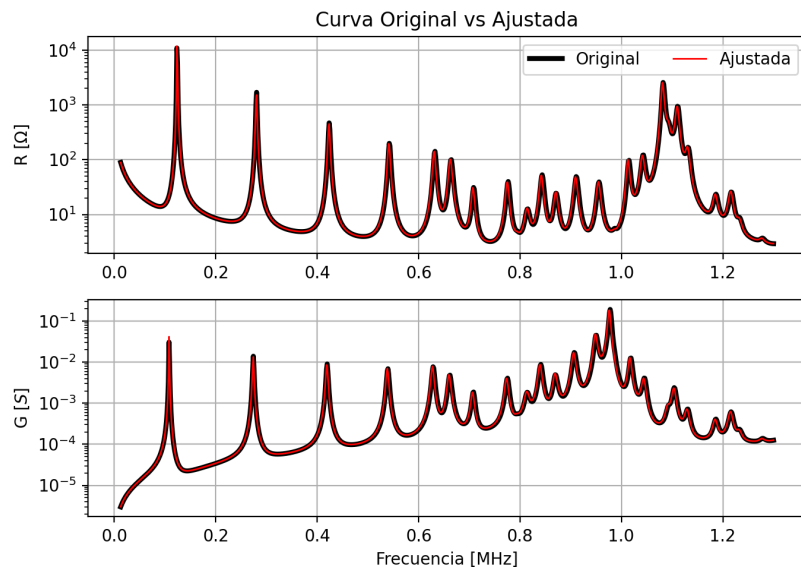


Figura A.12: Ejemplos de Resultados R y G curva 772244

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

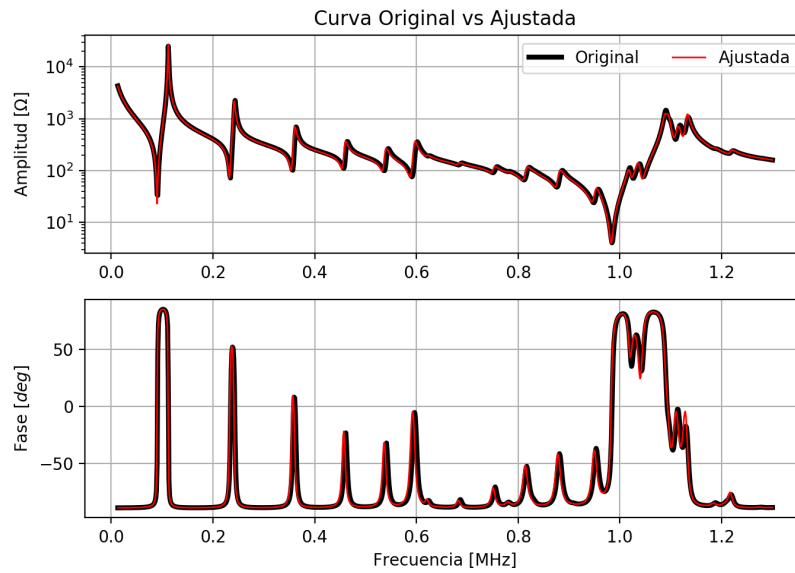


Figura A.13: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 781589

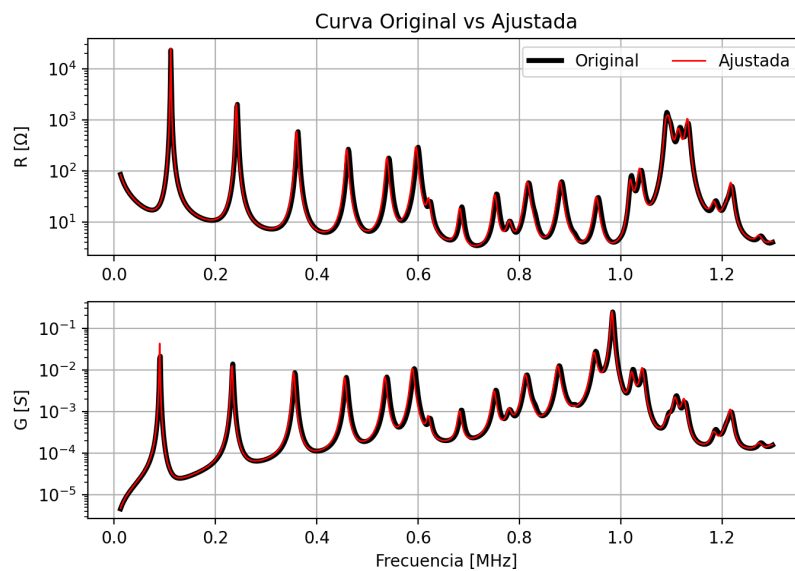


Figura A.14: Ejemplos de Resultados R y G curva 781589

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

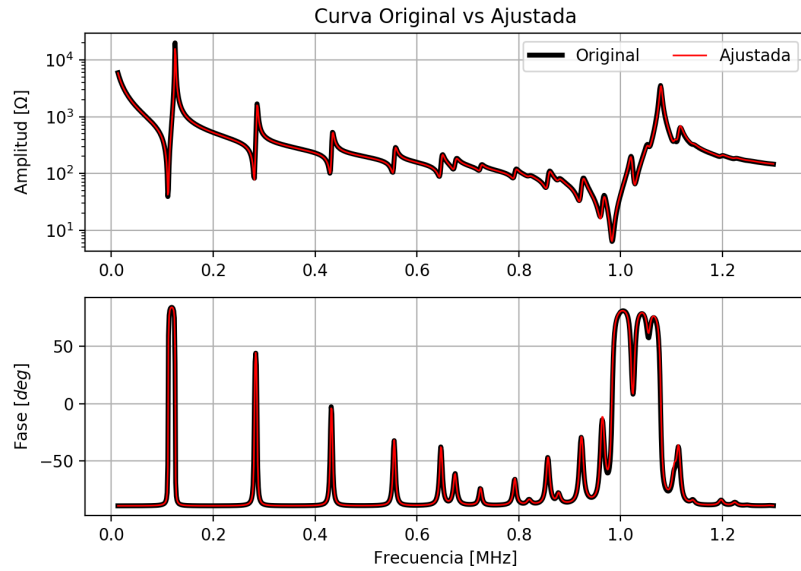


Figura A.15: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 781740

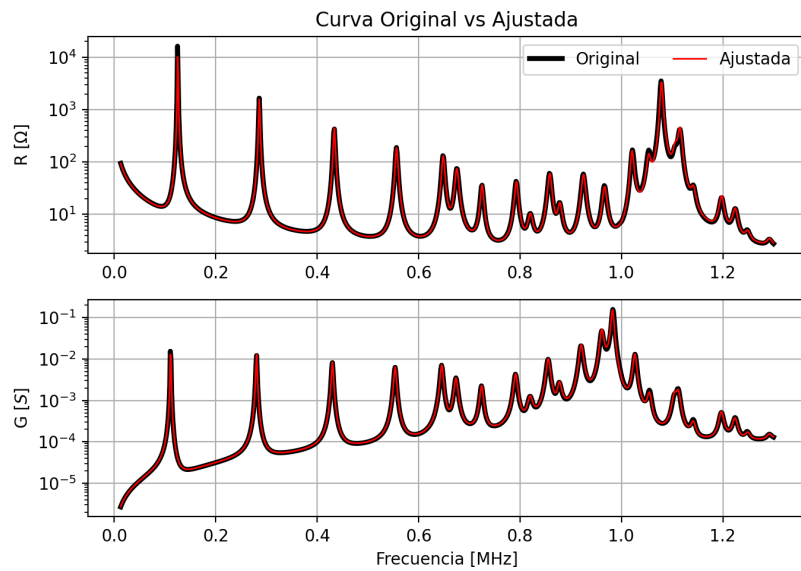


Figura A.16: Ejemplos de Resultados R y G curva 781740

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

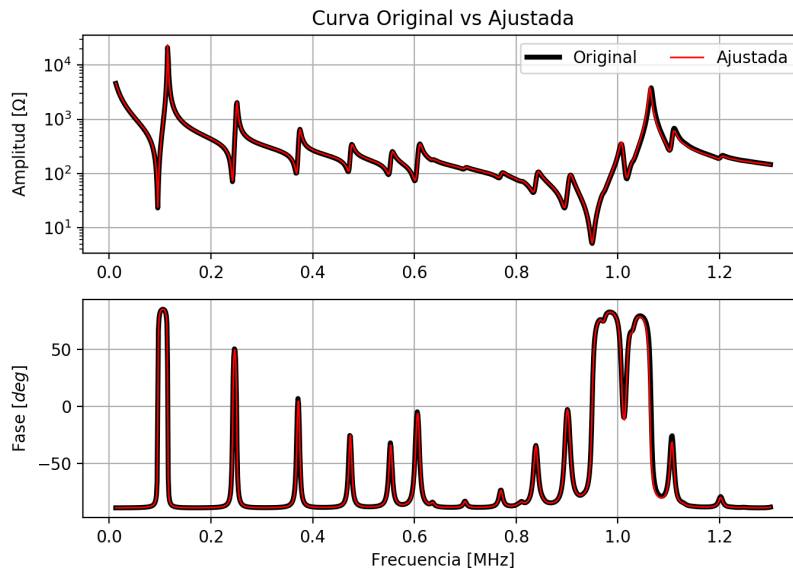


Figura A.17: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 790064

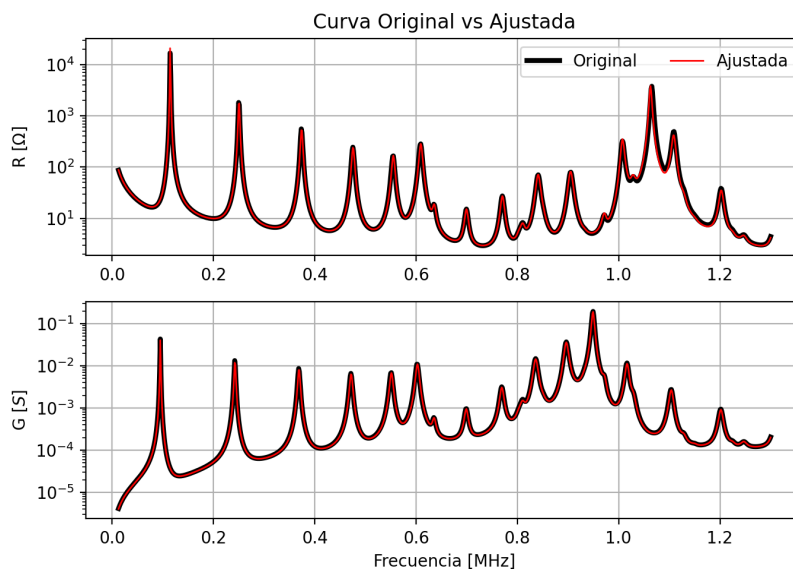


Figura A.18: Ejemplos de Resultados R y G curva 790064

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

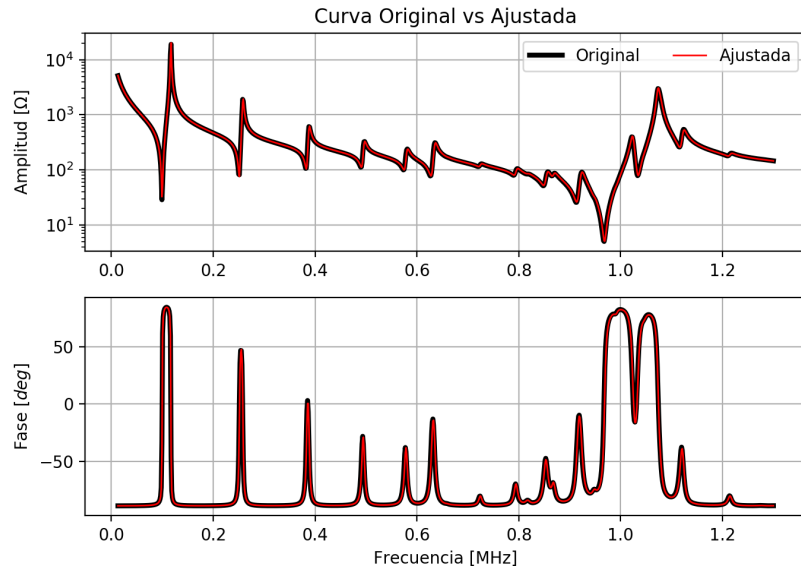


Figura A.19: Ejemplos de Resultados M3dulo y fase, curva 791435

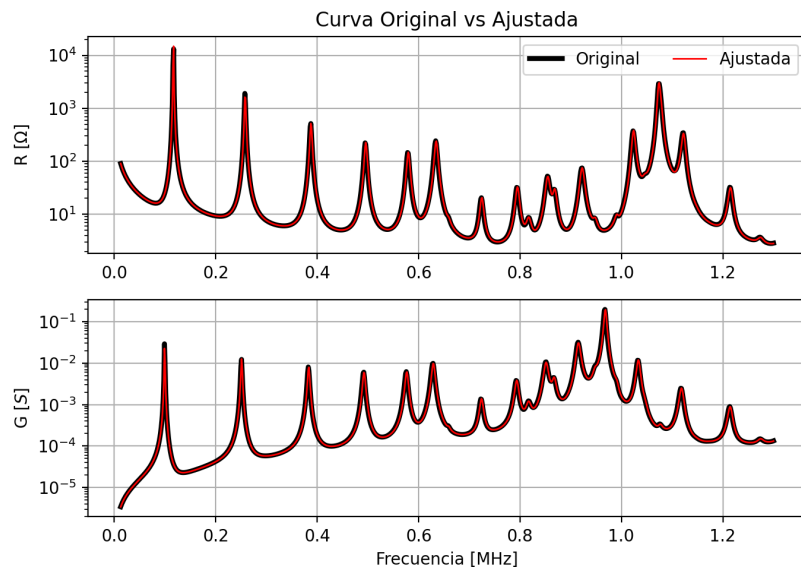


Figura A.20: Ejemplos de Resultados R y G curva 791435

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

### A.1.2. Otras Muestras

En esta sección se presentan los gráficos obtenidos para algunas muestras seleccionadas al azar.

Muestra	Módulo y Fase	R y G
1400433	A.21	A.22
1400608	A.23	A.24
1400699	A.25	A.26
1401032	A.27	A.28
1401263	A.29	A.30
1402581	A.31	A.32
1402831	A.33	A.34
1405139	A.35	A.36
1406747	A.37	A.38
1408070	A.39	A.40

Estas muestras fueron generadas tomando distintos valores para la parte real de las diez constantes constitutivas del modelo. Sin embargo, a la hora de simular las curvas del resultado de ajuste, se utilizaron los valores de la curva de referencia. Ninguna muestra generada de esta manera se utilizó para el entrenamiento de la red.

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

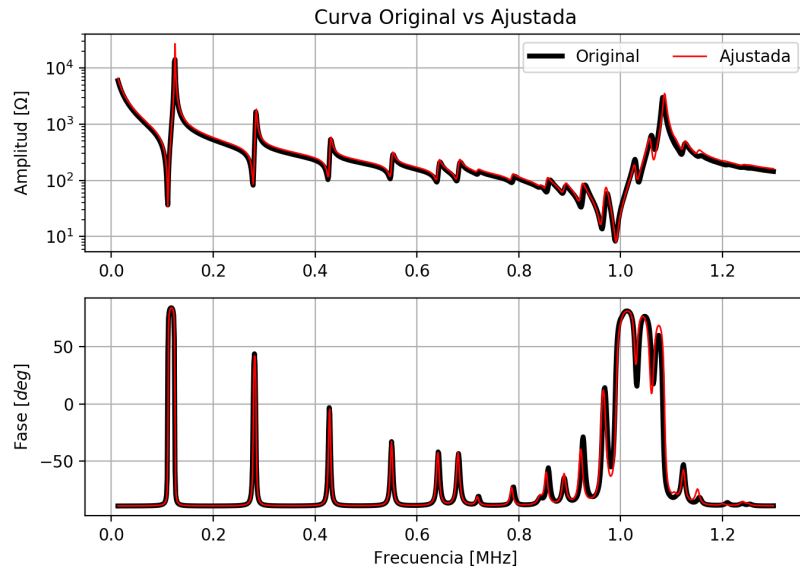


Figura A.21: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400433, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

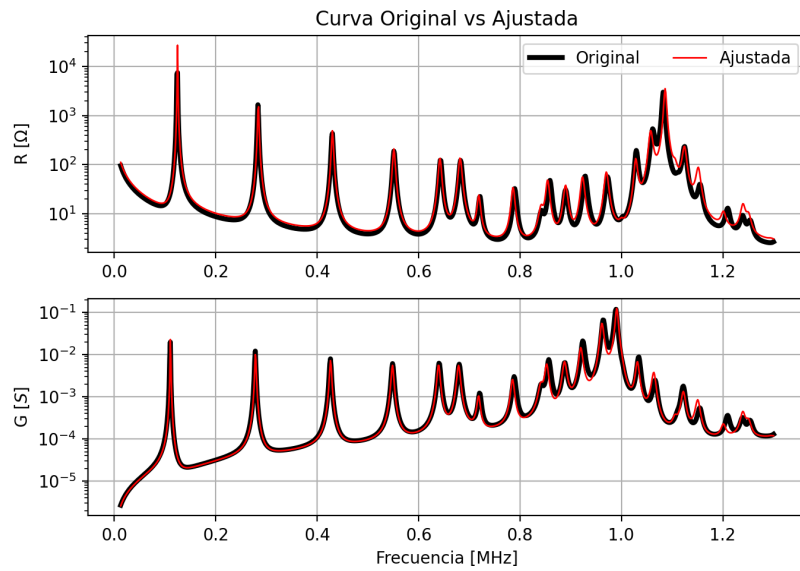


Figura A.22: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1400433, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

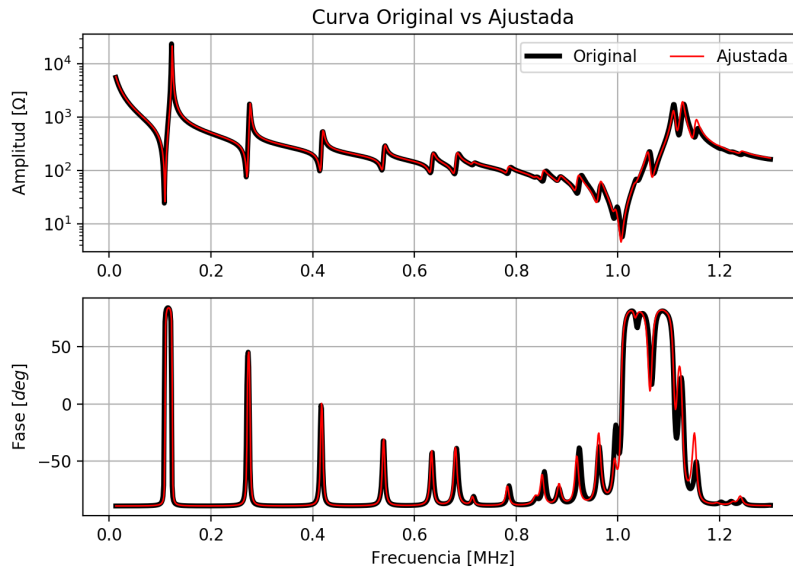


Figura A.23: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400608, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

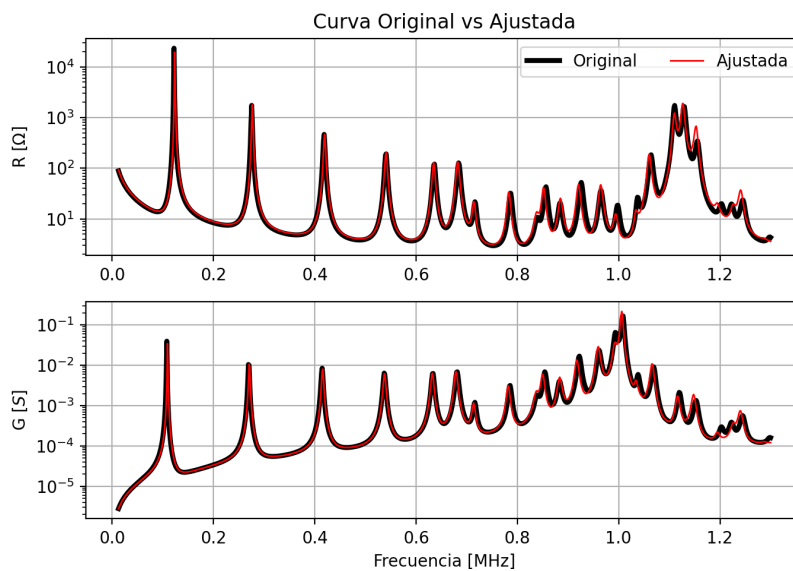


Figura A.24: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1400608, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

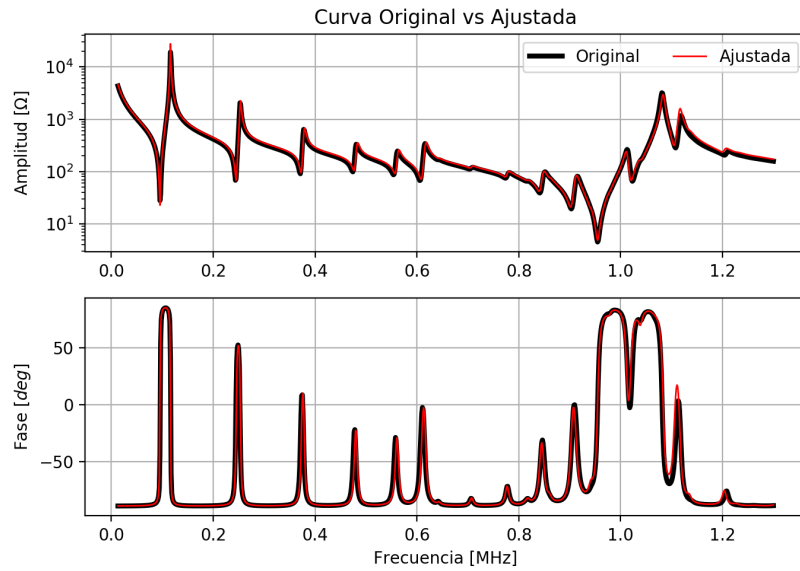


Figura A.25: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400699, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

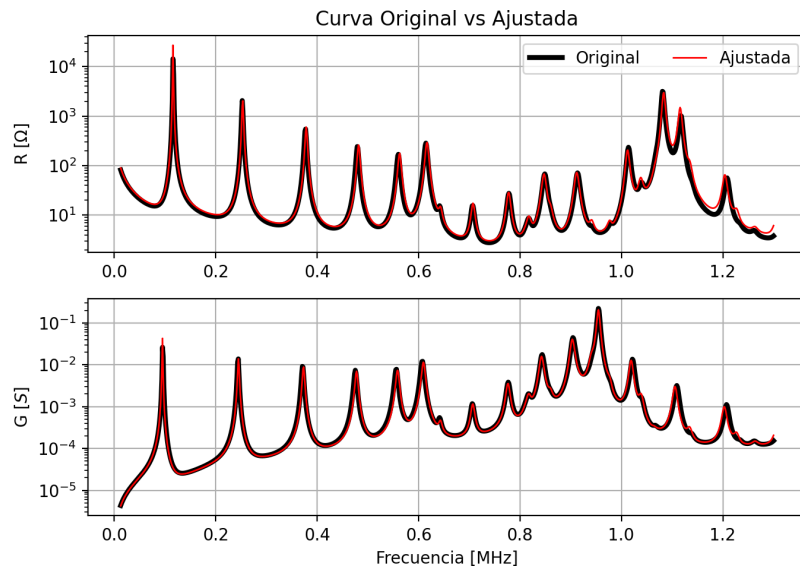


Figura A.26: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1400699, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

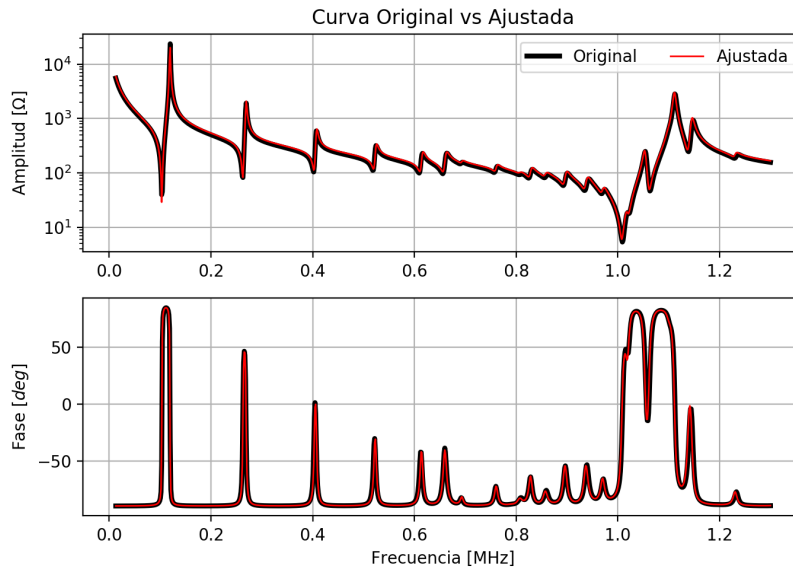


Figura A.27: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1401032, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

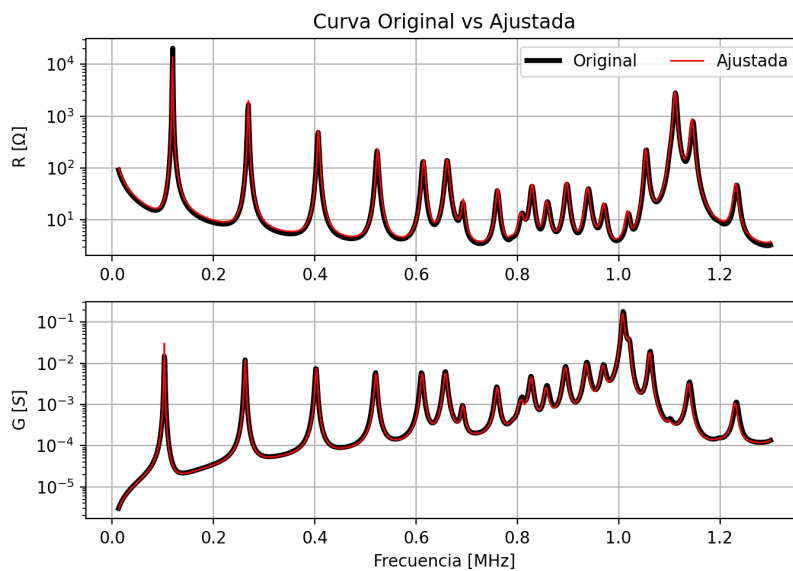


Figura A.28: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1401032, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

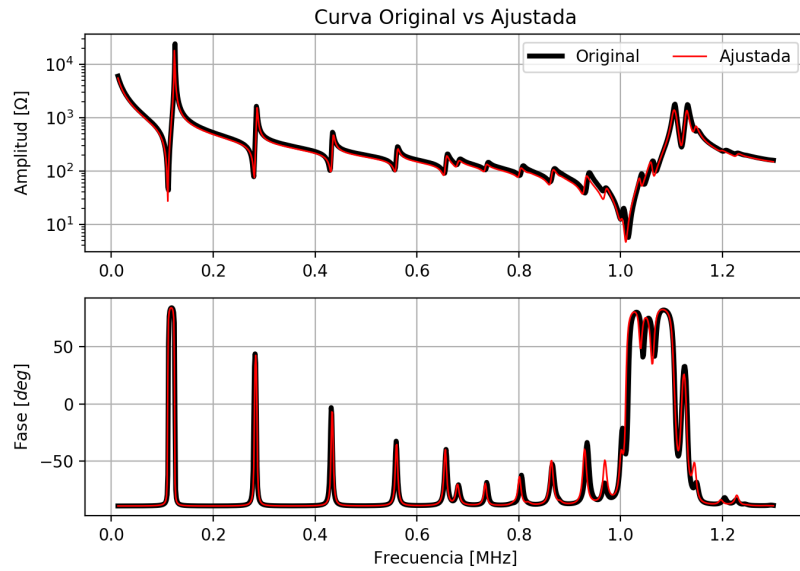


Figura A.29: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1401263, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

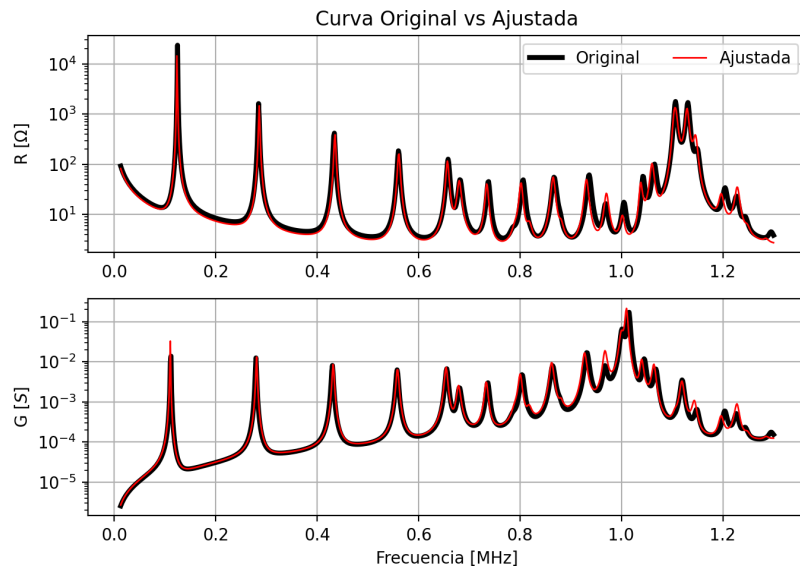


Figura A.30: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1401263, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

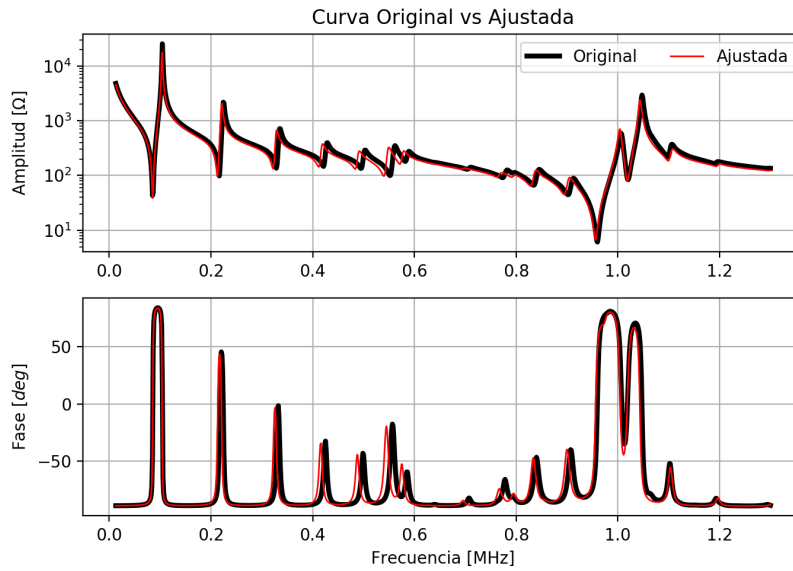


Figura A.31: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1402581, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

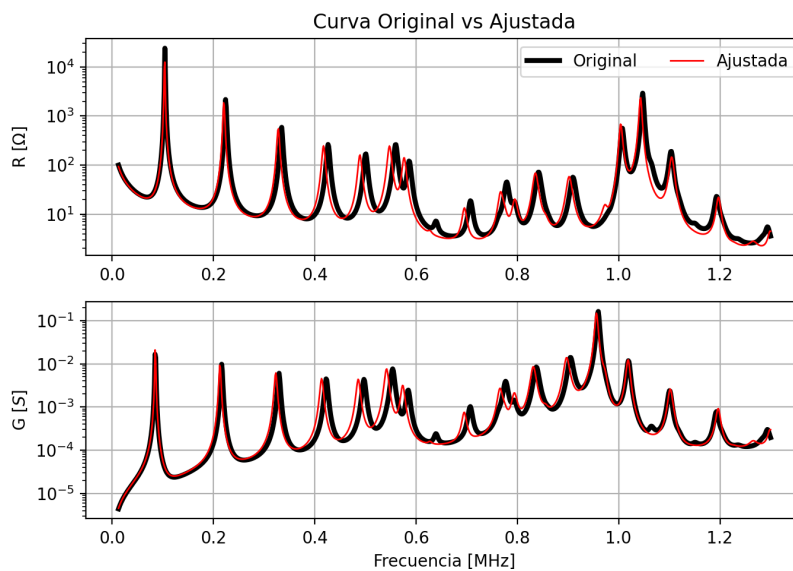


Figura A.32: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1402581, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

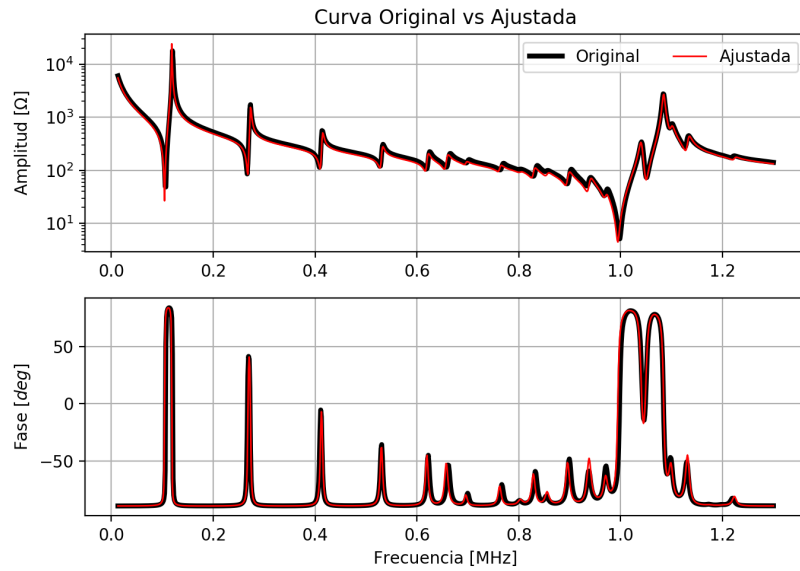


Figura A.33: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1402831, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

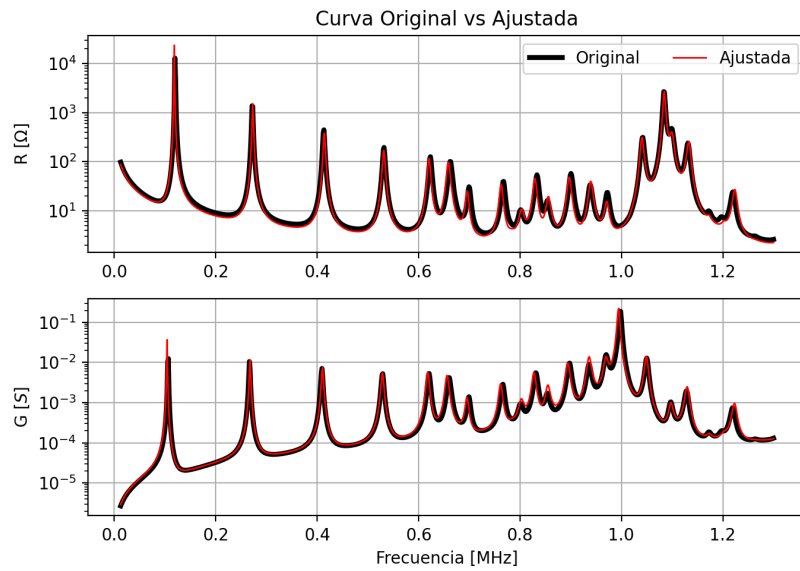


Figura A.34: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1402831, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

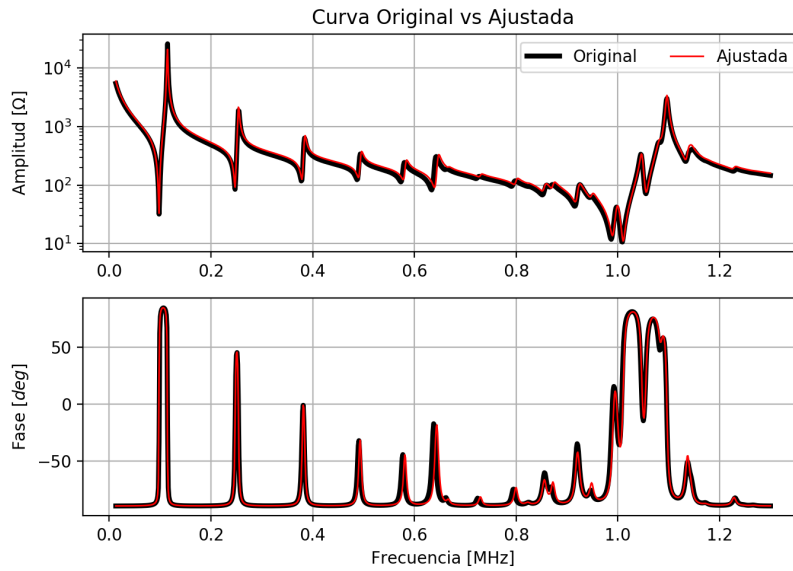


Figura A.35: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1405139, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

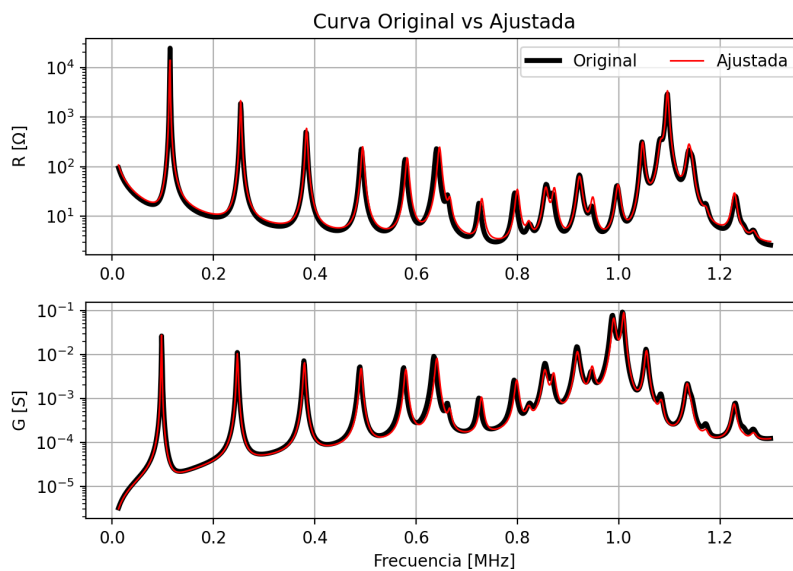


Figura A.36: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1405139, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

### A.1. Curvas obtenidas para muestras del conjunto de Test

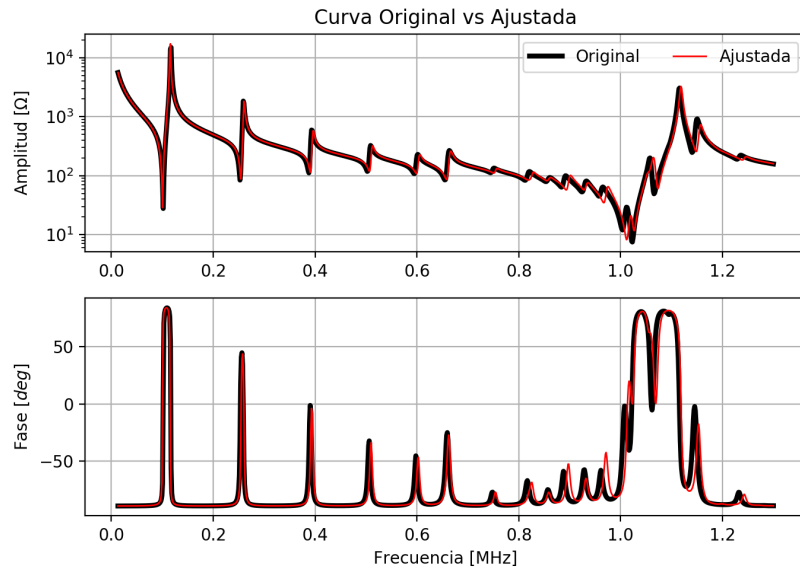


Figura A.37: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1406747, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

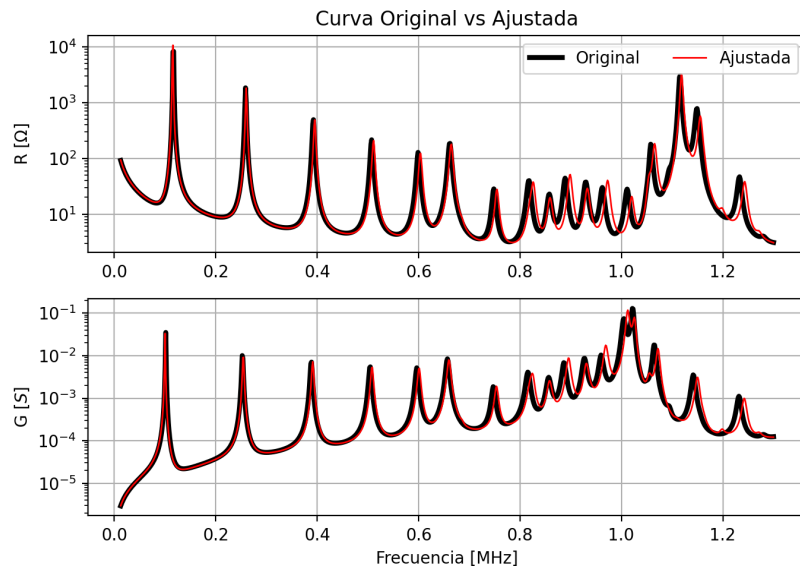


Figura A.38: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1406747, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

## Apéndice A. Gráficas de Resultados

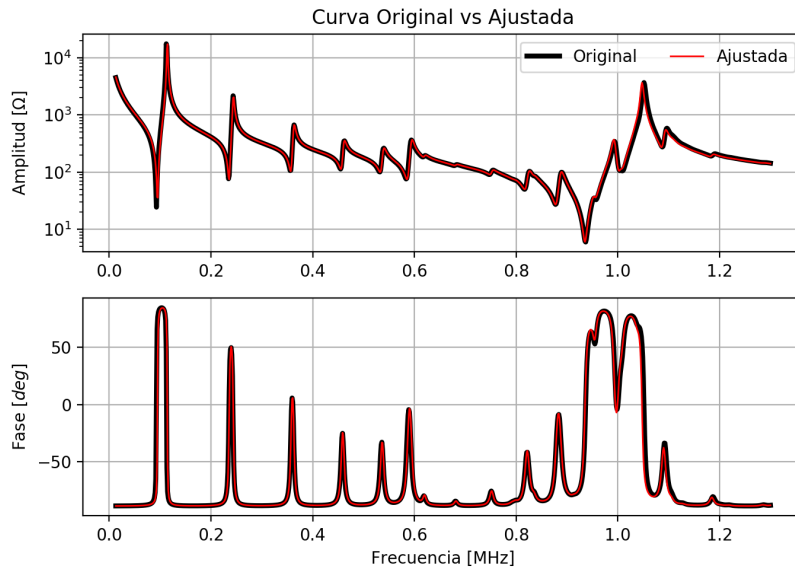


Figura A.39: Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1408070, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

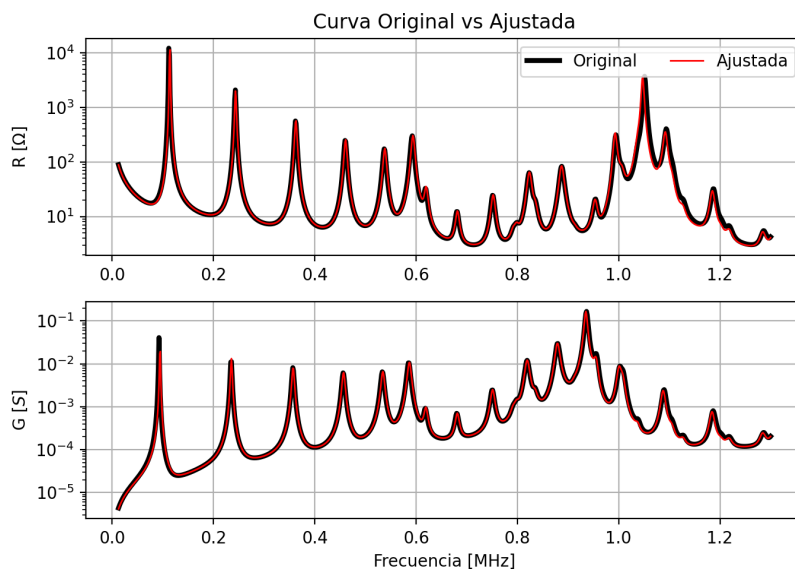


Figura A.40: Ejemplos de Resultados R y G, curva 1408070, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria.

# Apéndice B

## Manejo de Datos

Se construyeron dos datasets, aunque finalmente se utilizó solo uno de ellos para el entrenamiento de la red. Cada muestra en el conjunto de datos corresponde a un vector de 1000 puntos. Este vector se corresponde con el módulo de la impedancia eléctrica para esa muestra. Además, para cada uno de esos datos se almacenan también los 5 valores correspondientes a las constantes constitutivas correspondientes. El par vector amplitud - vector de salidas se almacena en un único archivo.

Las muestras están nombradas con números consecutivos del 0 al 799999. Los nombres corresponden al orden en el que fueron generados los datos. Estos datasets consisten en una biblioteca de archivos, organizados jerárquicamente en directorios de forma tal que cada subdirectororio contenga 100 mil muestras.

Se desarrolló en Python una clase capaz de generar a partir de los archivos individuales batches de datos para el entrenamiento, evaluación y aplicación del algoritmo. Esto, si bien llevó un tiempo de desarrollo, mejoró el desempeño de los algoritmos de entrenamiento en cuanto al tiempo de cómputo. También hizo posible el entrenamiento, ya que la totalidad de los datos ocupa demasiado espacio en memoria para disponer de estos en RAM durante el entrenamiento. El código desarrollado permite elegir el tamaño del batch y realizar un re-sorteo del orden de las muestras al final de cada época, características deseables para este tipo de funciones.

## Apéndice B. Manejo de Datos

```
import numpy as np
from tensorflow import keras

class DataGenerator(keras.utils.Sequence):
    'Generates data for Keras'
    #this class assumes that files are named datos#. and are sorted
    # 'n_sample' samples in data_dir/Da(ID)/
    def __init__(self, list_IDs=[], n_samples=100000, data_dir='./',
                 batch_size=100, dim=(1000, 1), n_outs=5, shuffle=True):
        'Initialization'
        self.dim = dim
        self.batch_size = batch_size
        self.data_dir = data_dir
        self.n_samples=n_samples #per folder
        self.n_outs = n_outs
        self.shuffle = shuffle
        self.list_IDs = list_IDs #Da(ID)
        self.on_epoch_end()

    def __len__(self):
        'Denotes the number of batches per epoch'
        le=(self.n_samples*(len(self.list_IDs)))/self.batch_size
        return int(np.floor(le))

    def __getitem__(self, index):
        'Generate one batch of data'
        # Generate indexes of the batch
        ind = self.indexes[index * self.batch_size:(index + 1)*self.batch_size]
        # Generate data
        X, y = self.__data_generation(ind)
        return X, y

    def on_epoch_end(self):
        'Updates indexes after each epoch'
        self.indexes = np.arange(self.n_samples*(len(self.list_IDs)))
        if self.shuffle == True:
            np.random.shuffle(self.indexes)

    def __data_generation(self, ind):
        'Generates data containing batch_size samples' # X : (n_samples, *dim)
        # Initialization
        X = np.empty((self.batch_size, *self.dim), dtype='float32')
        y = np.empty((self.batch_size, self.n_outs,1), dtype='float32')
        # Find list of IDs
        ID = [self.list_IDs[int(np.floor(k /self.n_samples))] for k in ind]
```

```

# Generate data
for i in range(self.batch_size):
    #print(ID[i], indexes[i])
    if (ID[i] != 0):
        dir = self.data_dir + '/Da' + str(ID[i])
        sample=int(np.mod(indexes[i],self.n_samples))
        file= dir+'{:0>5}'.format(sample)+'.npz'
        arch = np.load(file)
    else:
        dir=self.data_dir + '/Da'+str(ID[i])
        sample=int(np.mod(indexes[i],self.n_samples))
        file=dir+'/datos'+str(sample)+'.npz'
        arch = np.load(file)

    # Store sample
    X[i,:] = np.log10(arch['arr_0'])
    # Store class
    y[i,:] = arch['arr_1']

return X, (y[:,0],y[:,1],y[:,2],y[:,3],y[:,4])

```

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Apéndice C

## Ciclo de entrenamiento

```
import numpy as np
from tensorflow import keras
import h5py
from data_classes import DataGenerator
import matplotlib.pyplot as plt
import os
os.environ['TF_CPP_MIN_LOG_LEVEL'] = '3' # or any {'0', '1', '2'}

#Epocas
epoc = 10
# donde guardar estadísticas de entrenamiento
dirOUT = "history_n.hdf5"
# donde esta el modelo
mimodelo = "Red_nico.h5"
# Recrea el modelo, desde el archivo:
model = keras.models.load_model(mimodelo)

# Parametros Set Datos
params = {'n_samples': 100000,
          'data_dir' : 'AMP',
          'dim': (1000, 1),
          'batch_size': 500,
          'n_outs': 5,
          'shuffle': True}

# Datasets cientos de miles, cuales van a que grupo
train=[1,2,3,4,5,6]
validation=[0]

#Generadores de Datos:
training_generator = DataGenerator(list_IDs=train, **params)
```

## Apéndice C. Ciclo de entrenamiento

```
validation_generator = DataGenerator(list_IDs=validation, **params)

model_history = model.fit(x=training_generator,
                          validation_data=validation_generator, epochs=epoc, verbose=0)

#Guardo el modelo
model.save(mimodelo)
print("modelo guardado")

#Genero Archivo estadísticas de entrenamiento:
f = h5py.File(dirOUT, 'w')
(...)
f.close()

print("historia guardada")

# Plot the loss/error function (one per variable)

print("Ultima loss Train ", model_history.history['loss'][-1])
print("Ultima loss VAL ", model_history.history['val_loss'][-1])

print("Tra ", model_history.history['c11_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['c13_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['c33_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['c44_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['e33_mean_absolute_percentage_error'][-1])
print("Val ", model_history.history['val_c11_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['val_c13_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['val_c33_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['val_c44_mean_absolute_percentage_error'][-1],
      model_history.history['val_e33_mean_absolute_percentage_error'][-1])
```

# Referencias

- [1] T. Ikeda. *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford University Press, 1996.
- [2] R. Lerch. Simulation of piezoelectric devices by two-and three-dimensional finite elements. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 37(3):233–247, 1990.
- [3] D.A. Berlincourt, D.R. Curran, and H. Jaffe. Piezoelectric and piezomagnetic materials and their function in transducers. *Physical Acoustics: Principles and Methods*, 1(Part A):247, 1964.
- [4] R. Holland. Representation of dielectric, elastic, and piezoelectric losses by complex coefficients. *IEEE Transactions on Sonics and Ultrasonics*, 14(1):18–20, 1967.
- [5] ANSI/IEEE. Standard on piezoelectricity. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 43(5):717–, 1996.
- [6] H. Allik and T. JR Hughes. Finite element method for piezoelectric vibration. *International journal for numerical methods in engineering*, 2(2):151–157, 1970.
- [7] M Naillon. Analysis of piezoelectric structures by a finite element method. *Acta Electronica*, 25:341–362, 1983.
- [8] Y Kagawa and T Yamabuchi. Finite element approach for a piezoelectric circular rod. *IEEE Transactions on sonics and ultrasonics*, 23(6):379–385, 1976.
- [9] N. Pérez, F. Buiochi, M.A. Brizzotti, and J.C. Adamowski. Numerical characterization of piezoceramics using resonance curves. *Materials (1996-1944)*, 9(2):71, 2016.
- [10] HW. Joo, CH. Lee, JS Rho, and HK Jung. Identification of material constants for piezoelectric transformers by three-dimensional, finite-element method and a design-sensitivity method. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 50(8):965–971, 2003.

## Referencias

- [11] HW. Joo, CH. Lee, and HK. Jung. Identification of the piezoelectric material coefficients using the finite element method with an asymptotic waveform evaluation. *Ultrasonics*, 43(1):13–19, 2004.
- [12] L. Pardo, M. Algueró, and K. Brebøl. A non-standard shear resonator for the matrix characterization of piezoceramics and its validation study by finite element analysis. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 40(7):2162, 2007.
- [13] B Kaltenbacher, M Kaltenbacher, R Lerch, and R Simkovic. Identification of material tensors for piezoceramic materials. In *2000 IEEE Ultrasonics Symposium. Proceedings. An International Symposium (Cat. No. 00CH37121)*, volume 2, pages 1033–1036. IEEE, 2000.
- [14] T. Lahmer, M. Kaltenbacher, B. Kaltenbacher, R. Lerch, and E. Leder. Fem-based determination of real and complex elastic, dielectric, and piezoelectric moduli in piezoceramic materials. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 55(2):465–475, 2008.
- [15] K. Hornik, M. Stinchcombe, and H. White. Multilayer feedforward networks are universal approximators. *Neural networks*, 2(5):359–366, 1989.
- [16] N. Pérez, M.A.B. Andrade, F. Buiochi, and J.C. Adamowski. Identification of elastic, dielectric, and piezoelectric constants in piezoceramic disks. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 57(12):2772–2783, 2010.
- [17] N. Pérez, R.C. Carbonari, M.A.B. Andrade, F. Buiochi, and J.C. Adamowski. A fem-based method to determine the complex material properties of piezoelectric disks. *Ultrasonics*, 54(6):1631–1641, 2014.
- [18] M. del Castillo, F. Buiochi, and N. Pérez. Methodology to evaluate variations in piezoelectric constants after aging process. *Advances in Applied Ceramics*, 117(4):196–200, 2018.
- [19] K. S. Van Dyke. The piezo-electric resonator and its equivalent network. *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, 16(6):742–764, 1928.
- [20] W.P. Mason. *Electromechanical Transducers and Wave Filters*”, 2nd ed. D.Van Nostrand Company Inc.: Princeton, NJ, USA, 1948.
- [21] L. Pardo and K. Brebøl. *Properties of Ferro-Piezoelectric Ceramic Materials in the Linear Range: Determination from Impedance Measurements at Resonance*, pages 617–649. Springer Netherlands, Dordrecht, 2011.
- [22] Y.A. Genenko, J. Glaum, M.J. Hoffmann, and K. Albe. Mechanisms of aging and fatigue in ferroelectrics. *Materials Science and Engineering: B*, 192:52–82, 2015.
- [23] GH Jonker. Nature of aging in ferroelectric ceramics. *J. Am. Ceram. Soc.*, 55(1):57–58, 1972.

- [24] A.L. Araújo, C.M. Mota Soares, J. Herskovits, and P. Pedersen. Parameter estimation in active plate structures using gradient optimisation and neural networks. *Inverse Problems in Science & Engineering*, 14(5):483 – 493, 2006.
- [25] S. R. H. Hoole. Artificial neural networks in the solution of inverse electromagnetic field problems. *IEEE Transactions on Magnetics*, 29(2):1931–1934, 1993.
- [26] T. Hacib, M.R. Mekideche, F. Moussouni, N. Ferkha, and S. Brisset. Generalized rbf neural network and fem for material characterization through inverse analysis. *Intelligent Computer Techniques in Applied Electromagnetics*, page 11, 2008.
- [27] X. Han, D. Xu, and G.R. Liu. A computational inverse technique for material characterization of a functionally graded cylinder using a progressive neural network. *Neurocomputing*, 51:341 – 360, 2003.
- [28] Bishop C. *Pattern Recognition and Machine Learning*. Springer-Verlag New York, 2006.
- [29] I. Goodfellow, J. Bengio, and A. Courville. *Deep Learning*. MIT Press, 2016. <http://www.deeplearningbook.org>.
- [30] Yaser S. Abu-Mostafa, Malik Magdon-Ismail, Hsuan-Tien Lin, and undefined undefined. *Overfitting*. AML Book, 2012.
- [31] Aurélien Géron. *Training deep neural networks*. O’Reilly Media, 2 edition, 2019.
- [32] Y. Le Cun, L. D. Jackel, B. Boser, J. S. Denker, H. P. Graf, I. Guyon, D. Henderson, R. E. Howard, and W. Hubbard. Handwritten digit recognition: applications of neural network chips and automatic learning. *IEEE Communications Magazine*, 27(11):41–46, 1989.
- [33] J.A. Nelder and R. Mead. A simplex method for function minimization. *The computer journal*, 7(4):308–313, 1965.
- [34] M. Abadi, A. Agarwal, P. Barham, E. Brevdo, Z. Chen, C. Citro, G.S. Corrado, A. Davis, J. Dean, M. Devin, S. Ghemawat, I. Goodfellow, A. Harp, G. Irving, M: Isard, Y. Jia, R.z Jozefowic, L. Kaiser, M. Kudlur, J. Levenberg, D. Mané, R: Monga, S. Moore, D Murray, C. Olah, M Schuster, J Shlens, B Steiner, I. Sutskever, K. Talwar, P. Tucker, V. Vanhoucke, V. Vasudevan, F. Viégas, O. Vinyals, P. Warden, M. Wattenberg, M. Wicke, Y. Yu, and X. Zheng. TensorFlow: Large-scale machine learning on heterogeneous systems, 2015. Software available from tensorflow.org.
- [35] François Chollet et al. Keras. <https://keras.io>, 2015.
- [36] D.-A. Clevert, T. Unterthiner, and S. Hochreiter. Fast and accurate deep network learning by exponential linear units (elus). *arXiv preprint arXiv:1511.07289*, 2015.

## Referencias

- [37] Kaiming He, Xiangyu Zhang, Shaoqing Ren, and Jian Sun. Delving deep into rectifiers: Surpassing human-level performance on imagenet classification. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV)*, December 2015.
- [38] DP Kingma and J Ba. Adam: A method for stochastic optimization, arxiv (2014). *arXiv preprint arXiv:1412.6980*, 106.

# Glosario

**Activación** Las funciones de activación son funciones (lineales o no) que se aplican individualmente sobre los valores de las señales.. 19, 20, 31

**Dropout** Eliminar aleatoriamente algunas conexiones durante el entrenamiento.. 31

**Pooling** Capa de reducción dimensional. 22, 32

**PZT** Familia de cerámicas piezoeléctricas cuya composición es Titanato-Zirconato de Plomo. 14

**Stride** Distancia entre puntos de aplicación (sobre la señal de entrada) del núcleo de convolución.. 31

**épocas** Las épocas describen el número de veces que el algoritmo ve el conjunto de datos completo. 34

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Siglas

**ANN** Artificial Neural Network. 3, 4, 26

**CAD** Computer-Aided Design. 1

**CNN** Convolutional Neural Network. 22, 31, 39, 40

**ELU** Exponential Linear Unit. 32, 81

**FEM** Finite Element Method. 2–4, 6, 10–13, 15, 16, 25–29, 33, 35, 39, 40

**FFN** Feed Forward Network. 18–22

**MAPE** Mean Absolute Percentage Error. 32, 34, 41

**ML** Machine Learning. 17–19, 21

**MSE** Mean Squared Error. 32, 34

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Índice de tablas

2.1. Relación de notación entre tensores y vectores . . . . .	6
2.2. Cambios en la curva de impedancia debido al envejecimiento . . .	15
4.1. Datos iniciales para generar base de datos . . . . .	27
4.2. Valores de Constantes para Curvas graficadas . . . . .	30
5.1. Valores medios ( $\hat{P}$ ) y desviación estandar ( $\sigma_P$ ) para las propiedades del material en las muestras originales (ori), y las envejecidas (env).	33
5.2. Errores entre la curva simulada y la curva experimental para las curvas ajustadas. . . . .	34
5.3. Evaluación de algoritmo en espacio de parámetros . . . . .	34
5.4. Error entre curvas Original y Ajustada . . . . .	36
5.5. Errores porcentuales en el espacio de los parámetros para las curvas analizadas. . . . .	36
5.6. Evaluación en muestras con todos los Parámetros aleatorios . . . .	37
5.7. Error entre curvas Original y Ajustada, en muestras con todos los Parámetros aleatorios . . . . .	37

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

# Índice de figuras

2.1. Nomenclatura de ejes sobre cerámica cilíndrica con polarización en el eje axial. . . . .	7
2.2. Circuito equivalente de Van Dyke y análisis en frecuencia de la impedancia . . . . .	9
2.3. Modos de Resonancia en una cerámica Pz27 (20 mm diámetro y 2 mm espesor). Imagen obtenida de [9] . . . . .	9
2.4. Diagrama de proceso de optimización utilizado en técnicas basadas en FEM. . . . .	10
2.5. Frecuencia de modos de Resonancia y Antirresonancia en curvas de Impedancia, Conductancia y Resistencia. . . . .	12
2.6. Estudio de Sensibilidad para dos parámetros, $c_{12}$ y $c_{33}$ . . . . .	13
2.7. Resultado obtenido para una cerámica real mediante la técnica de <i>Pérez et al.</i> . . . . .	13
2.8. Ejemplo de los cambios en $\ Z\ $ debido al envejecimiento. Para apreciar mejor las diferencias se muestra en torno al modo espesor. . .	15
2.9. Ejemplo de la curva experimental y la curva modelada para una cerámica en su versión original y envejecida. . . . .	16
3.1. Ejemplo de Red Neuronal: Feed-Forward y Completamente Conectada. . . . .	20
3.2. Funciones de activación . . . . .	20
3.3. Convolución en una dimensión. . . . .	23
3.4. Ejemplos de pooling en 2 dimensiones. . . . .	23
4.1. Ejemplos del dataset Módulo y fase. Cada color representa un conjunto distinto de parámetros constitutivos . . . . .	29
4.2. Red implementada. . . . .	31
4.3. Comportamiento de ELU . . . . .	32

## Índice de figuras

5.1. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 760689 . . . . .	35
5.2. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 790064 . . . . .	35
5.3. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400608, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	38
5.4. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1408070, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	38
A.1. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 711294 . . . . .	44
A.2. Ejemplos de Resultados R y G curva 711294 . . . . .	44
A.3. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 728014 . . . . .	45
A.4. Ejemplos de Resultados R y G curva 728014 . . . . .	45
A.5. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 728816 . . . . .	46
A.6. Ejemplos de Resultados R y G curva 728816 . . . . .	46
A.7. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 748296 . . . . .	47
A.8. Ejemplos de Resultados R y G curva 748296 . . . . .	47
A.9. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 760689 . . . . .	48
A.10. Ejemplos de Resultados R y G curva 760689 . . . . .	48
A.11. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 772244 . . . . .	49
A.12. Ejemplos de Resultados R y G curva 772244 . . . . .	49
A.13. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 781589 . . . . .	50
A.14. Ejemplos de Resultados R y G curva 781589 . . . . .	50
A.15. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 781740 . . . . .	51
A.16. Ejemplos de Resultados R y G curva 781740 . . . . .	51
A.17. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 790064 . . . . .	52
A.18. Ejemplos de Resultados R y G curva 790064 . . . . .	52
A.19. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 791435 . . . . .	53
A.20. Ejemplos de Resultados R y G curva 791435 . . . . .	53
A.21. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400433, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	55
A.22. Ejemplos de Resultados R y G, curva 1400433, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	55
A.23. Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400608, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	56

A.24.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1400608, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	56
A.25.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1400699, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	57
A.26.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1400699, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	57
A.27.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1401032, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	58
A.28.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1401032, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	58
A.29.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1401263, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	59
A.30.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1401263, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	59
A.31.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1402581, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	60
A.32.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1402581, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	60
A.33.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1402831, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	61
A.34.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1402831, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	61
A.35.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1405139, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	62
A.36.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1405139, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	62
A.37.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1406747, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	63
A.38.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1406747, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	63
A.39.Ejemplos de Resultados Módulo y fase, curva 1408070, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	64
A.40.Ejemplos de Resultados R y G, curva 1408070, con los 10 parámetros constitutivos elegidos de manera aleatoria. . . . .	64



Esta es la última página.  
Compilado el miércoles 12 agosto, 2020.  
<http://iie.fing.edu.uy/>