TRABAJO MONOGRÁFICO

Representaciones unitarias de grupos discretos y representaciones borde

Por: Verónica De Martino

Orientador: Rafael Potrie

Maestría en Matemática
Universidad de la República
Uruguay

Febrero 2020

Resumen

Una representación untiaria es un morfismo de un grupo G al espacio de transformaciones unitarias de un espacio de Hilbert. Cuando la representación viene dada por la acción de un grupo en un espacio preservando la clase de una medida, se llama representación quasi-regular.

Las representaciones borde son representaciones quasi-regulares asociadas a ciertas acciones naturales de ciertos grupos en sus bordes. Recientemente se han estudiado estos ejemplos de representaciones y mostrado en algunos casos que son irreducibles y que reflejan la geometría del grupo.

Este trabajo busca introducir la teoría de representaciones unitarias de grupos discretos y en particular las representaciones borde de grupos hiper- bólicos discretos. Esto se logra a través del estudio de resultados clásicos de la teoría de representaciones en este contexto así como algunos resultados recientes de irreducibilidad y rigidez de representaciones borde.

Índice

Agradecimientos

Agradezco por acompañarme durante la redacción de este trabajo a Eguenia que siempre está disponible para comer queso y tomar vino, a León, que siempre se hace un rato para ayudarme y a Rafael que desde lejos se las ingenió para ser orientador.

1. Introducción

La teoría de representaciones, en particular de representaciones unitarias, aparece naturalmente en varias áreas de la matemática. Una representación es un morfismo

$$\pi : G \to \mathrm{End}(V)$$

donde G es un grupo y V un espacio vectorial, posiblemente de dimensión infinita.

Contexto

Algunos ejemplos aparecen en contextos dinámicos o geométricos: una acción lineal de un grupo en un espacio vectorial es exactamente una representación. Más aún, cualquier acción de un grupo que preserve una medida en un espacio X induce una representación unitaria actuando en $L^2(X)$ definida como $\pi(g)(f)(x) = f(g^{-1}(x))$.

También hay representaciones asociadas a problemas de geometría de látices (ver [Ben04]) o de regularidad de medidas estacionarias (ver [BQ18]). De forma menos directa aparecen representaciones unitarias en teoría de números, o combinatoria (ver por ejemplo [Sar90], [LZ05] y [Lub10]).

Hay un contraste muy grande entre el estudio de representaciones unitarias de grupos de Lie y de grupos discretos. Cuando se trata de grupos de Lie hay un conjunto de herramientas variado y muy bien entendido a disposición, como la geometría diferencial, la teoría de representaciones de álgebras de Lie o el análisis armónico. Además, como los grupos discretos tienen menos estructura que un grupo de Lie el espacio unitario dual (el espacio de representaciones unitarias del grupo) es -a prori- más grande (ver [BH19]).

El objetivo de este trabajo es entender ciertas representaciones unitarias que aparecen naturalmente en el contexto de los grupos hiperbólicos discretos. Para poder formular las preguntas de manera adecuada y contar con formas de atacar los problemas realizamos primero un estudio de los resultados más clásicos de la teoría.

Enfoque del trabajo y resultados principales

Hay muchas maneras en las que se puede intentar entender una representación o una familia de representaciones. Supongamos que $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$ es una representación de G.

Primero nos interesa entender cuándo si la acción de G en V es minimal, en el siguiente sentido.

Definición. *Una representación se dice irreducible si los únicos subespacios invariantes por la acción de G son los triviales $\{0\}$ o V.*

En la subsección 2.6 tratamos distintos criterios para probar la irreducibilidad de una representación. En la sección 3.1 estudiamos grupos compactos, cuya teoría de representaciones generaliza el caso de grupos finitos (ver [Ser77]). Usamos el teorema 3.5 de densidad de coeficientes matriciales para probar el siguiente teorema (ver [Bum04], teorema 4.3).

Teorema. *Toda representación de un grupo compacto es suma directa de sus componentes irreducibles, que son de dimensión finita.*

Más adelante en la subsección 3.2 presentamos el estudio clásico de las representacioones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$. Toda representación de dimensión finita de un grupo de Lie se puede derivar para obtener una representación del álgebra de Lie y en el caso de $SL_2(\mathbb{R})$ la estructura su álgebra de Lie ofrece una descripción precisa de sus componentes irreducibles (ver [Hal15], capítulo 4). Probamos:

Teorema. *Una representación irreducible y de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$ queda determinada por la acción del subgrupo diagonal. Además hay exactamente una clase de isomorfismo en cada dimensión que se realiza como acción es un espacio de polinomios.*

Más adelante enunciamos un resultado de M. Cowling y T. Steger en el que prueban que la clase de irreducibilidad de una representación se mantiene si se restringe una representación de un grupos de Lie a un látice (ver [CS91]), y damos una prueba en el contexto de dimensión finita.

También nos interesa entender si es posible y cómo es que una representación puede ser entendida a partir de sus componentes irreducibles.

Para ilustrarlo comenzamos en la sección 2.5 presentando algunas versiones del teorema espectral para representaciones de grupos abelianos. En particular probamos el siguiente resultado clásico.

Teorema (Teorema espectral)**.** *Si T es un operador unitario entonces T es conjugado a multiplicar por z con distribución μ en $L^2(\mu)$, donde μ es una medida en el espectro de T.*

Al estudiar las representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$ el truco unitario de Weyl (resultado 3.31) que implica que una representación de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$ siempre se escribe como suma de sus componentes irreducibles.

Otro aspecto muy importante que nos interesa es determinar cuándo las propiedades geométricas del grupo se traducen a la teoría de representaciones y viceversa.

El teorema de Howe y Moore es un claro ejemplo de propiedades espectrales dinámicas inducidas por la geometría del grupo (ver teorema 4.15).

Teorema. *Las acciones ergódicas de un grupo de Lie semisimple son mixing.*

Vemos también la Propiedad (T) de Kazhdan, una propiedad de rigidez de representaciones unitarias, que se puede entender como una versión cuantitativa y mejorada del

Teorema de Howe y Moore (y que por lo tanto tiene consecuencias ergódicas). Una introducción se puede encontrar en [BHV02], junto con pruebas de los siguientes resultados que enunciamos y demostramos en la sección 4.2.

Teorema.
- *Si un grupo tiene la Propiedad (T) en compactamente generado.*
- *Los grupos semisimples de rango real mayor a* 1 *tienen la Propiedad (T).*
- *Los látices de un grupo de Lie con la Propiedad (T) tienen la Propiedad (T) (y en particular son finitamente generados).*

Nos interesan también las realizaciones geométricas de las representaciones. Una representación puede estar dada de forma abstracta pero es mucho más interesante cuando viene asociada a una acción geométrica.

Vemos dos instancias de esto.

La primera es la descripción de las representaciones de dimensión finita e irreducibles de $SL_2(\mathbb{R})$: en la sección 3.2.3 usamos las propiedades algebraicas de su álgebra de Lie para determinar la clase de isomorfismo de dichas representaciones. Probamos lo siguiente (ver 3.29).

Teorema. *Sea π una representación de dimensión $k \leq \infty$ e irreducible de $SL_2(\mathbb{R})$. Entonces π es conjugada a la acción dada por*

$$g \cdot p(z_1, z_2) = p(g^{-1}(z_1, z_0)),$$

de $SL_2(\mathbb{R})$ en el espacio de polinomios homogénenos de dos variables y de grado $k-1$.

La segunda instancia es el objetivo de estudio de este trabajo y la describimos a continuación.

Representación borde

Si Γ es un grupo hiperbólico entonces la acción de Γ en sí mismo por traslaciones se extiende naturalmente a su borde $\partial\Gamma$ presrvando la clase de una medida de Patterson Sullivan μ (ver [Pat+76] y [Sul79]). Esto induce una representación unitaria

$$\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(L^2(\partial\Gamma, \mu)) \text{ tal que } \pi(\gamma)(f)(x) = \left(\frac{dg_*\mu}{d\mu}\right)^{1/2} f(g^{-1}x).$$

Es importante destacar que cada distancia en Γ induce una medida de Patterson-Sullivan distinta en $\partial\Gamma$ y por lo tanto representaciones borde diferentes (ver [Led94]). Las representaciones borde son una gran familia de ejemplos de representaciones de grupos discretos y en la sección 5.3.1 mostramos su irreducibilidad, dando una prueba para el caso del grupo libre que ilustra el caso general y que está basada en el trabajo [Gar14] de L. Garncarek.

El estudio de las representaciones borde tiene interés en sí mismo, pero el siguiente resultado de U. Bader y R. Muchinik muestra la relación entre la representación, su irreducibilidad y la geometría del grupo (ver [BM11]).

Teorema (U. Bader- R. Muchnik, 2011)**.** *Sea* Γ *el grupo fundamental de una variedad compacta de curvatura negativa* (M, g)*. Entonces la representación borde es irreducible. Además si* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *es tal que* $\pi_1(\tilde{M}) = \Gamma$ *entonces son equivalentes*

- *Las representaciones borde son isomorfas.*
- *Las variedaeds riemannianas* (M, g) *y* $(\tilde{M}, \tilde{g})$ *tienen espectro marcado de longitudes proporcionales.*

Otros trabajos paralelos muestran la irreducibilidad y la rigidez de las representaciones borde (L. Garncarek para grupos Gromov hiperbólicos -con la distancia de palabras- en [Gar14], y A. Boyer para espacios CAT(-1) en [Boy14]).

Organización del documento

En la sección 2 se dan las definiciones básicas de la teoría y algunos resultados sobre irreducibilidad y descomposición de representaciones (subsecciones 2.6 y 2.5 respectivamente).

En la sección 3 tratamos las representaciones de grupos compactos (ver subsección 3.1) y las representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$ (ver subsección 3.2).

En la sección 4 estudiamos la ergodicidad y mixing de representaciones unitarias, por medio del teorema 4.12 de Howe y Moore y la Propiedad (T) de Kazhdan en la subsección 4.2.

En la última sección mostramos familias de ejemplos de representaciones borde (ver 5.3, 5.13 y los resultados de la sección 5.4). En particular demostramos la irreducibilidad de la representación borde del grupo libre, ilustrando la prueba de irreducibilidad para el caso general de un grupo Gromov hiperbólico (ver teorema 5.13).

2. Preliminares

En esta sección daremos definiciones y algunos resultados que sirven para introducir tanto el objeto de estudio de este trabajo como cultura general de su contexto. La lectura de este texto resultará más amena para el lector familiarizado con álgebra lineal, teoría de la medida (ver por ejemplo [SS09]), teoría de grupos de Lie (ver [Hal15] y [Bum04]), teoría de álgebras de Lie (ver [Hal15]) y análisis funcional (ver [Rud73]).

Comenzaremos por definir los grupos y representaciones con las cuales trabajaremos, para luego dar ejemplos. En la sección 2.6 mostramos criterios de irreducibilidad para representaciones que usaremos más adelante. La sección 2.5 contiene varias versiones del teorema espectral, teorema que refleja la teoría de representaciones unitarias para grupos abelianos. Terminamos la sección con una breve descripción del espacio unitario dual de un grupo y su topología.

2.1. Grupos de Lie y representaciones unitarias, definiciones y ejemplos

Definición 2.1 (Grupo de Lie)**.** *Un* grupo de Lie *es una variedad diferenciable G, que además tiene estructura de grupo, de forma que las operaciones*

$$\begin{aligned} &(g,h) \mapsto gh \text{ y} \\ &g \mapsto g^{-1} \end{aligned}$$

sean diferenciables.

Notamos por $\mathbb{K}$ indiferentemente a $\mathbb{R}$ o a $\mathbb{C}$. Algunos ejemplos de grupos de Lie son los que siguen.

1. Grupos abelianos, por ejemplo $\mathbb{Z}^d, \mathbb{R}^d, \mathbb{T}^d \simeq \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$ para $d \geq 1$.

2. Grupos matriciales, por ejemplo

   - $GL_d(\mathbb{K})$ el grupo de matrices invertibles de tamaño d,
   - $SL_d(\mathbb{K})$ el subgrupo de $GL_d(\mathbb{K})$ de matrices de determinante igual a 1 (un Grupo de Lie semisimple),
   - El grupo (real) de Heisenberg $H = \begin{bmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R}$ (un Grupo de Lie soluble).
   - O_d y U_d el grupo de matrices ortogonales de $\mathbb{R}^d$ y de $\mathbb{C}^d$, respectivamente. Otros ejemplos son SO_d y SU_d, los subgrupos de O_d y U_d de matrices de determinante 1.

3. Otros grupos de Lie: si bien todo grupo de Lie es cubrimiento o cociente de uno matricial (no necesariamente uno de la lista anterior) existen ejemplos de grupos de Lie que no son matriciales (ver [Hal15] páginas 103-105).

Definición 2.2 (Grupos discretos)**.** *Un grupo discreto es un grupo que además es numerable.*

Observación 2.3. *Un grupo discreto es un grupo de Lie de dimensión* 0 *como variedad diferenciable. La teoría de representaciones de ambas clases de grupos es distinta y es por eso que en este trabajo los distinguimos.*

Ejemplo 2.4. *Algunos ejemplos de grupos discretos son los siguientes.*

- *Grupos finitos.*
- *Subgrupos discretos de grupos de Lie. Un ejemplo de estos son los grupos fundamentales de superficies de curvatura negativa y volumen finito. Se puede probar que todos ellos son subgrupos discretos de $SL_2(\mathbb{R})$.*
- *Más en general, los puntos enteros de un $\mathbb{Q}$-grupo siempre son un grupo discreto.*

A continuación enunciaremos definiciones y propiedades para ambos grupos de Lie y grupos discretos. Notamos por G a cualquiera de ellos. La notación genérica que usaremos para la operación de G será la del producto.

Una *representación* de G en un espacio X es un morfismo lineal $\pi : G \to \mathrm{End}(X)$. Para cada $g \in g$ y $\xi \in X$ notamos por $g \cdot \xi$ (o simplemente $g\xi$) a $\pi(g)(\xi)$.

En esta monografía trabajaremos principalmente con *representaciones unitarias.* Si $\mathcal{H}$ es un espacio vectorial con un producto interno p entonces una representación $\pi : G \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ se dice *unitaria* si para todo $g \in G$ el mapa $\xi \mapsto g \cdot \xi$ es unitario, es decir que preserva p: para todo par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se cumple que $p(g \cdot \xi, g \cdot \eta) = p(\xi, \eta)$, y esto para todo $g \in G$.

Pedimos además que π sea un mapa *fuertemente continuo*, o sea que el mapa $g \mapsto g \cdot \xi$ sea continuo para todo $\xi \in \mathcal{H}$.

Fijamos de ahora en más $\mathcal{H}$ sea un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$, y que sea separable y completo con la norma inducida por el producto interno.

Definición 2.5 (Representación unitaria)**.** *Una representación unitaria de G es un morfismo fuertemente continuo $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$, donde $\mathcal{U}(\mathcal{H})$ denota el espacio de transfomaciones unitarias del espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$.*

De ahora en más, y a no ser que se especifique lo contrario π o $(\pi, \mathcal{H})$ denotará una representación unitaria de G en $\mathcal{U}(\mathcal{H})$.

2.2. Medida de Haar

La medida de Haar juega un rol fundamental en la teoría de grupos.

Definición 2.6 (Medida de Haar). *Si G es un grupo de Lie localmente compacto existe, a menos de una constante multiplicativa, una única medida regular de Borel en G que es invariante por todas las traslaciones a izquierda. O sea, existe una única μ medida regular en G que cumple que $\mu(S) = \mu(gS)$ para todo boreliano S de G. Esta medida se llama medida de Haar a izquierda en G.*

Observación 2.7. *Cuando la medida de Haar de G se puede tomar de volumen finito ($\mu(G) < \infty$) la tomamos para que G tenga medida total* 1.

Para ver la prueba de la existencia y unicidad de esta medida referimos al lector a [Hal13], capítulo XI.

Análogamente se puede definir la *medida de Haar a derecha en G*. Las medidas de Haar a derecha e izquierda no tienen por qué coincidir (por un ejemplo ver [Bum04], página 3). Cuando sí lo hacen, el grupo G se dice *unimodular*. Los grupos abelianos son unimodulares, también lo son los grupos compactos. En general, los grupos que no admiten morfismos no triviales a $\mathbb{R}$ son unimodulares (ver [Bum04], proposición 1.2).

Definición 2.8 (Medida de Haar para grupos discretos). *Cuando G es un grupo discreto definimos la medida de Haar de G como la medida de conteo. Es invariante tanto por la acción a izquierda como a derecha de G en si mismo.*

Observación 2.9. *Es fácil ver que la medida de conteo es la única medida invariante a izquierda en G un grupo discreto, a menos de constantes multiplicativas.*

2.3. Ejemplos de representaciones unitarias

Veamos algunos ejemplos de representaciones unitarias.

Ejemplo 2.10 (Representaciones de $\mathbb{Z}$). *Todo mapa invertible $T : V \to V$ induce una representación de $\mathbb{Z}$ definiendo $n \cdot v = T^n(v)$.*

Ejemplo 2.11 (Representaciones unitarias de $\mathbb{Z}$). *Supongamos que $\pi : \mathbb{Z} \to \mathcal{U}(\mathbb{C})$ es una representación unitaria. Más adelante veremos que toda representación irreducible de un grupo abeliano debe ser unidimensional (ver corolario 2.34). Alcanza ver como actúa $1 \in \mathbb{Z}$ para entender la representación. Sea $T = \pi(1) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. El mapa T es unitario en $\mathbb{C}$ por lo que debe ser de la forma $z \mapsto \exp(it)z$ para algún $t \in S^1$.*

Esto muestra que las representaciones unitarias e irreducibles (y unidimensionales) de $\mathbb{Z}$ están en correpondencia con S^1.

Ejemplo 2.12 (El operador de Koopman). *Si $T : X \to X$ es una transformación invertible que preserva una medida μ en X entonces tiene sentido definir $U_T : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ como $U_T(\phi) = \phi \cdot T$. Como T preserva la medida en X el operador U_T resulta unitario.*

Obtenemos así una representación $\pi : \mathbb{Z} \to \mathcal{U}(L^2(\mu))$ definida por $(n \cdot f)(z) = U_T^n(f)(z)$.

Las propiedades espectrales del operador U_T (o de la representación π) se traducen en propiedades ergódicas (ergodicidad, mixing, etc.) del mapa T. Más sobre teoría espectral aplicada a teoría ergódica se puede encontrar por ejemplo en [Mañ83].

Observación 2.13. *En el ejemplo 2.12 tenemos en cuenta la representación unitaria inducida por una transformación invertible. Una de las herramientas fundamentales de la teoría ergódica espectral consiste en asociar a la transformación no necesariamente invertible T el operador unitario U_T. Si bien U_T es no tiene que ser invertible sigue reflejando las propiedades ergódicas de T.*

Ejemplo 2.14 (La representación regular). *Cada grupo G actúa sobre sí mismo por traslaciones (tanto a izquierda como a derecha). Consideramos el espacio $L^2(G, \mu)$ donde μ es la medida de Haar a izquierda de G y la acción $(g \cdot \phi)(x) = \phi(g^{-1}x)$. Esta acción define una representación unitaria $\lambda_G : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ llamada representación regular a izquierda de G (análogamente se define la representación regular a derecha).*

La representación regular de un grupo contiene información del grupo, como por ejemplo promediabilidad. Hablaremos más de promediabilidad en la sección 4.2.

Ejemplo 2.15 (Representación quasi regular asociada a una acción). *Siempre que la acción de un grupo preserva una medida μ se puede construir una representación unitaria de G en $\mathcal{U}(L^2(\mu))$ de forma que $g \cdot \phi(x) = \phi(g \cdot x)$. Ahora, puede ser el caso que la acción de G no preserve una medida μ pero si la clase de la medida. En ese caso también se puede definir una representación unitaria de G en $\mathcal{U}(L^2(\mu))$ de la siguiente manera: $(g \cdot \phi)(x) = (\frac{dg_*\mu}{d\mu})^{\frac{1}{2}} \phi(g^{-1} \cdot x)$, donde $g_*\mu$ denota el push-forward de μ por la acción de g y el cociente la derivada de Radon-Nikodym.*

Para ver que π así definida es unitaria basta calcular

$$p(\pi(g)(f), \pi(g)(h)) = \int f(g^{-1} \cdot x)\overline{h(g^{-1} \cdot (x))}\frac{dg_*\mu}{d\mu}(x)d\mu(x) = \int f(x)\overline{h(x)}d\mu(x) = p(f, h)$$

Veremos ejemplos de representaciones quasi regulares en la sección 5.

Observación 2.16 (La relación entre una acción y la representación quasi regular inducida). *La teoría espectral es muy usada cuando se estudia teoría ergódica, el estudio dinámico de sistemas medibles. Los siguientes son ejemplos de cómo las propiedades de la representación quasi-regular inducida por una acción medible refleja las propiedades ergódicas del sistema. Se puede ver más de teoría espectral aplicada en este contexto en [Mañ83].*

Una acción que preserva una medida se dice ergódica si la representación quasi regular asociada no deja subespacios invariantes además de las constantes. La representación regular asociada a una acción weak mixing no deja subespacios de dimensión finita invariantes. En particular la irreducibilidad de la representación quasi regular proporciona una propiedad espectral que implica weak mixing y ergodicidad de la acción.

Además la clase de isomorfismo de la representación quasi regular es un invariante: dos sistemas isomorfos deben inducir representaciones quasi-regulares equivalentes.

2.4. Subgrupos y representaciones

Si π es una representación de G y H es un subgrupo de G tiene sentido considerar la acción restringida $\pi|_H : H \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$.

Pregunta. *Si π es irreducible como representación de G, ¿existen condiciones sobre H que hagan que la acción restricta $\pi|_H$ también sea irreducible?*

Definición 2.17. *Un subgrupo $H < G$ se llama lático cuando es discreto y además el cociente G/H admite una medida de volumen finito e invariante por la acción por traslaciones de G.*

Si bien toda representación de un lático induce una reprensentación del grupo de Lie la acción no es sobre el mismo espacio de Hilbert.

Definición 2.18 (Representación inducida)**.** *Sea π una representación unitaria de Γ, un lático del grupo de Lie G.*

Fijemos F un dominio fundamental medible de Γ en G (que puede ser no muy agradable) y un mapa

$$m : F \times \Gamma \mapsto G \text{ definido por } (x, \gamma) \mapsto x\gamma \in G.$$

El mapa m es una biyección, tan medible como su dominio. Además si $g, x \in G$ notamos $(x_g, g_x) := m^{-1}(gx)$, con $x_g \in F$ y $g_x \in \Gamma$. Consideramos σ la representación inducida definida en 2.18.

Definimos

$$\mathcal{H}_\pi = \{f : G \mapsto \mathcal{H} : \forall g \in G, \forall \gamma \in \Gamma \ f(g) = \pi(\gamma) f(g\gamma) \text{ y } \|f\|^2 := \int_F \|f(g)\|^2_{\mathcal{H}} d\mu(g) < \infty\}$$

un espacio de Hilbert.

Sea F un dominio fundamental medible de Γ en G: si proy *es la proyección canónica al cociente entonces* $\mathrm{proy}|_F : F \to G/\Gamma$ *es una biyección. El mapa*

$$m : F \times \Gamma \mapsto G \text{ definido por } (x, \gamma) \mapsto x\gamma \in G$$

es una biyección, tan medible como su dominio. Además, si $g, x \in G$ notamos $(x_g, g_x) := m^{-1}(gx)$, con $x_g \in F$ y $g_x \in \Gamma$. A partir de F y m podemos extender la representación de Γ.

Definimos $\sigma : G \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ como

$$(g^{-1} \cdot f)(x) := f(gx) = f(x_g g_x) = \pi(g_x^{-1}) f(x_g).$$

La acción restricta de π a Γ en las secciones constantes es exactamente π.

En la sección 4.2 veremos que la representación inducida por una representación de un látice $\Gamma < G$ es irreducible si y solamente si la representación de Γ lo es (ver proposición 4.35).

Una respuesta parcial afirmativa a la pregunta anterior se puede encontrar en [CS91]. Una forma de su resultado principal es el teorema 5.1; dice que para ciertos grupos de Lie las restricciones de representaciones irreducibles a un látice siguen siendo irreducibles.

2.5. Los teoremas espectrales

En esta sección enunciaremos algunas versiones del teorema espectral y mostraremos uno de ellos, el teorema espectral para operadores unitarios.

Veremos primero el teorema espectral en dimensión finita, esperando que sirva de motivación para sus distintas versiones en dimensión infinita.

2.5.1. Teorema espectral en dimensión finita

Sea $T : V \to V$ un operador en un espacio vectorial V de dimensión finita y complejo. Cuando $\lambda \in \mathbb{C}$ es valor propio de T notamos por P_{E_λ} a la proyección ortogonal sobre $E_\lambda = \mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{Id})$.

Teorema 2.19 (Espectral en dimensión finita)**.** *Si $\dim \mathcal{H} < \infty$ y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador normal, entonces*

$$T = \sum_{\lambda \in \sigma(T)} \lambda P_{E_\lambda}.$$

La idea funtamental de este teorema es que todo operador normal en un espacio vectorial complejo de dimensión finita se escribe como combinación lineal de las proyecciones sobre sus subespacios propios.

2.5.2. Teoremas espectrales en dimensión infinita

Vamos a dar dos versiones del teorema espectral en dimensión inifita. Uno, sin prueba, para operadores normales, cuya prueba se puede encontrar en [Rud73], capítulo 12. La segunda versión es para operadores unitarios.

Definición 2.20 (Espectro de un operador)**.** *Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador continuo en un espacio de Hilbert se define el espectro de T como*

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \mathrm{Id} \textit{ no es invertible en } \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

En dimensión infinita los operadores no tienen porqué tener espectro discreto. En ese caso no se puede esperar que el operador se escriba como suma de operadores más simples (en el teorema 2.19 proyecciones). Las medidas espectrales buscan generalizar la noción de proyección asociada a un valor propio y sirven para descomponer un operador no en suma sino en integral directa de operadores más simples.

Definición 2.21 (Medidas espectrales)**.** *Sea X un espacio topológico, $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel de X y $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert. Una medida espectral para $(X, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ es una función $E : \Omega \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de forma que:*

(1) cada $E(\Delta)$ es una proyección autoadjunta,

(2) $E(\emptyset) = 0$ y $E(\Omega) = \mathrm{Id}$,

(3) $E(\Delta_1 \cap \Delta_2) = E(\Delta_1)E(\Delta_2)$.

(4) E es aditiva en uniones disjuntas finitas.

(5) Para cada $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ el mapa $E_{\xi,\eta}(\Delta) := p(E(\Delta)(\xi), \eta)$ es una medida de Borel en X.

Observación 2.22. *Una medida espectral E en $(X, \mathcal{B}, \mathcal{H})$ define una familia de medidas de Borel indexadas en los pares $(\xi, \eta) \in \mathcal{H} \times \mathcal{H}$.*

Teorema 2.23 (Teorema espectral para operadores normales)**.** *Si $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es un operador normal entonces existe una única medida espectral E soportada en* $\mathrm{Borel}(\sigma(T))$ *de forma que para todo par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se cumple*

$$p(T(\xi), \eta) = \int_{\sigma(T)} z dE_{\xi,\eta}(z).$$

Una prueba de este teorema se puede encontrar en [Rud73], capítulo 12.

En lo que sigue vamos a enunciar y probar una versión del teorema espectral para operadores unitarios.

Observación 2.24. *El espectro de un operador unitario es compacto y un subconjunto del círculo $\{|z| = 1\} \subset \mathbb{C}$.*

La finalidad del siguiente ejemplo es introducir la notación y los conceptos para el teorema espectral para operadores unitarios que trataremos después.

Ejemplo 2.25. *Sea $T : V \to V$ un operador lineal en dimensión finita.*

Supongamos primero que el espectro de T es simple (todos los valores propios tienen multiplicidad 1). Construiremos a partir del teorema espectral en dimensión finita una conjugación isométrica

$$\Phi : L^2(\sigma(T), \mu) \to \mathcal{H} \text{ que lleva } (\phi(z) \mapsto z\phi(z)) \mapsto T,$$

y donde μ es una medida soportada en $\sigma(T)$ a determinar. La idea es que aplicar T es lo mismo que multiplicar por z, donde z se distribuye con regla μ en el espectro de T.

Sean $\lambda_1 \cdots \lambda_d$ los valores propios de T y $\mu = (\delta_{\lambda_1} + \cdots + \delta_{\lambda_d})$ suma de deltas. En este caso $L^2(\sigma(T), \mu) \simeq \mathbb{C}^d \simeq V$, donde la identificación está dada por $\phi \xrightarrow{\Phi} \sum_{0 \le i \le d} \phi(\lambda_i) e_i$ donde los vectores $e_i \in E_{\lambda_i}$ forman una base de $\mathbb{C}^d$. Es una cuenta sencilla ver que Φ lleva el producto interno en $L^2(\sigma(T), \mu)$ al usual en $\mathbb{C}^d$. Además el mapa $\phi(z) \mapsto z\phi(z)$ es en las nuevas coordenadas multiplicar por λ_i en la coordenada i, o exactamente T.

Observamos que Φ sigue conjugando las acciones si se cambia la medida μ por otra medida de la misma clase (con los mismos conjuntos de medida cero), aunque deja de ser isometría.

Ahora modificamos la construcción anterior para contemplar el caso en el que es espectro de T no es simple. Definimos en principio la multiplicidad *de T como el mapa $m : \sigma(T) \to \mathbb{N}$ que a cada valor propio asocia su multiplicidad. Definimos en este caso*

$$L^2(\sigma(T), m, \mu) := \bigoplus_i \left(\bigoplus_1^i L^2(\sigma(T), \mu|E_i)\right),$$

donde $E_i = m^{-1}(i)$. Cada valor propio de multiplicidad uno apraece una vez, los de multiplicidad dos dos veces, y asi. El mapa Φ del caso simple se extiende naturalmente a este escenario y sigue siendo una isometría.

Pasamos ahora al caso general.

Definición 2.26. *Si $m : \sigma(T) \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definimos*

$$L^2(\sigma(T), \mu, m) := \bigoplus_i \bigoplus_1^i L^2(\sigma(T), \mu|E_i)),$$

donde $E_i = m^{-1}(i)$ y $f \in L^2(\sigma(T), \mu|E_i)^\infty$ es $f : \sigma(T) \to \ell^2(\mathbb{C})$. Llamamos a m multiplicidad de μ.

Teorema 2.27 (Teorema de representación espectral para un operador unitario)**.** *Si $T : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ es un operador unitario entonces existe una medida μ, una función de multiplicidad m en S^1 y un isomorfismo $\Phi : \mathcal{H} \mapsto L^2(S^1, \nu, m)$ que además es una isometría y que conjuga la acción de T con el mapa $\phi(z) \mapsto z\phi(z)$. Tanto m como μ quedan únicamente determinadas por T.*

Se deduce de nuevo:

Corolario 2.28. *Un operador unitario e irreducible es unidimensional.*

Demostración del corolario. La representación es unidimensional si la medida μ es una delta y $m \equiv 1$. Si no es ese el caso entonces existen dos medidas singulares μ_1 y μ_2 de forma que $\mu = \mu_1 + \mu_2$. Luego $L^2(S^1, \mu) = L^2(S^1, \mu_1) \oplus L^2(S^1, \mu_2)$ por lo que la acción de T no sería irreducible. $\square$

Probaremos el Teorema de representación espectral en dos partes. La primera será construir una isometría

$$\Phi : \mathcal{H} \mapsto \bigoplus_{i>0} L^2(S^1, \mu_i),$$

para ciertas medidas μ_i y luego introduciremos la medida μ y la función de multiplicidad m que hagan $L^2(S^1, \nu, m) = \bigoplus_{i>0} L^2(S^1, \mu_i)$.

Demostración del Teorema de representación espectral. Sea $\xi \in \mathcal{H}$ un vector no nulo cualquiera. Vamos a definir un mapa $\Phi : \overline{\mathrm{span}\{\mathrm{g} \cdot \xi : \mathrm{g} \in \mathrm{G}\}} \to L^2(S^1, \mu)$ para una cierta medida μ, empezando por los elementos de la forma $T^k(v)$.

Definimos Φ de forma que

$$\begin{aligned} \xi &\mapsto 1, \\ T^k(\xi) &\mapsto z^k \end{aligned}$$

y lo extendemos linealmente.

El mapa queda definido en un subconjunto denso de $\overline{\mathrm{span}\{\mathrm{g} \cdot \xi : \mathrm{g} \in \mathrm{G}\}}$ y con imagen densa en $L^2(S^1, \mu)$ (independientemente de la medida μ). Queremos ahora elegir μ para que el mapa definido sea una isometría. Para eso determinamos μ en los polinomios para luego extenderlo a todo el espacio.

Definimos $\hat{\mu} : C(S^1) \to \mathbb{C}$ en los polinomios de forma que $\hat{\mu}(z^k) = p(T^k \xi, \xi)$, extendiendo linealmente y usando el hecho de que $\hat{\mu}$ así definida en los polinomios es uniformemente continua, y por lo tanto se extiende a su clausura $C(S^1)$.

Afirmación. *El mapa $\hat{\mu}$ definido en los polinomios es uniformemente continuo y definido positivo.*

Demostración. Sean p_1, p_2 son dos polinomios. Calculamos

$$|\hat{\mu}(p_1) - \hat{\mu}(p_2)| \leq |p_1(T) - p_2(T)| = |(p_1 - p_2)(T)| \leq \|p_1 - p_2\|.$$

La prueba de que $\hat{\mu}$ es definido positivo se puede encontrar en [McM17, Resultado 8.2]. $\square$

El mapa $\hat{\mu} : C(S^1) \to \mathbb{C}$ induce una medida μ en S^1, la que hace $\hat{\mu}(f) = \int_{S^1} f(z)d\mu(z)$ para cada $f \in C(S^1)$. En particular obtenemos

$$p(T^k(\xi), \xi) = \hat{\mu}(z^k) = \int_{S^1} z^k d\mu(z),$$

o sea que para μ así definida el mapa Φ lleva el producto interno de $\mathcal{H}$ al producto interno usual de L^2.

Pasando a la clusura obtenemos

$$\Phi : \overline{\text{span}\{T^k(\xi) : k \in \mathbb{Z}\}} \mapsto L^2(S^1, \mu).$$

Observamos que actuar con T del lado izquierdo es exactamente multiplicar por z del lado derecho.

Si es el caso que $\overline{\text{span}\{T^k(\xi) : k \in \mathbb{Z}\}} \neq \mathcal{H}$ consideramos $\mathcal{H}' = \overline{\text{span}\{T^k(v) : k \in \mathbb{Z}\}}^{\perp}$ que es invariante por T (porque T es unitaria) y repetimos la construcción anterior para un vector $\xi' \in \mathcal{H}'$.

Haciendo inducción obtenemos

$$\Phi : \mathcal{H} \mapsto \bigoplus_{i>0} L^2(S^1, \mu_i),$$

que lleva la acción de T en $\mathcal{H}$ con el mapa $(\varphi_i(z))_i \mapsto (z\varphi_i(z))_i$ en $\bigoplus_{i>0} L^2(S^1, \mu_i)$.

$\square$

Esto termina la primera parte de la prueba. Si bien el mapa Φ da una conjugación al operador "multiplicar por z" en L^2 no es canónico (porque las medidas μ_i dependen de la elección de los vectores ξ_i). A continuación damos una descripción de la función de multiplicidad m que hace la identificación canónica.

2.5.3. Multiplicidad

En dimensión finita la función de multiplicidad descompone a la medida μ según la multiplicidad de cada valor propio.

Con la notación de la primera parte de la prueba del Teorema de representación espectral definimos μ a partir de las medidas μ_i como

$$\mu := \sum_i \frac{1}{2^i} \mu_i.$$

La medida μ "contiene" a todas las medidas μ_i: el rol de la función de multiplicidad es contar cuantas veces aparece cada medida en cada punto del soporte de μ.

Definimos $f_i = \frac{d\mu_i}{d\mu}$ -la derivada de Radon-Nikodym-, $h_i = \chi_{f_i \geq 0}$ y $m(z) = \sum_i h_i(z)$. La función m cuenta exactamente cuantas veces aparece cada μ_i en μ.

2.5.4. Generalización para acciones de $\mathbb{R}^d$

Hay una versión del teorema espectral para representaciones untarias de grupos abelianos de la que haremos uso en 4.40. Enunciaremos el resultado para acciones de $\mathbb{R}^d$. La preuba es muy similar a la de 2.27, y se puede encontrar en [McM17], corolario 8.8.

Aquí el espacio $L^2(\mathbb{R}^d, m, \sigma)$ se define de forma análoga a la definición 2.26, siendo

$$m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Teorema 2.29. *Sea $\pi : \mathbb{R}^d \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria. Entonces existe una probabilidad σ en $\mathbb{R}^d$, una función de multiplicidad $m : \mathbb{R}^d \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ y un isomorfismo $\mathcal{H} \mapsto L^2(\mathbb{R}^d, m, \sigma)$ que lleva la acción de $\pi(t)$ a la multiplicación por $\exp(2\pi i(t, x))$, donde $(\cdot, \cdot)$ denota el producto interno usual de $\mathbb{R}^2$.*

2.6. Sobre la irreducibilidad de representaciones unitarias

Esta sección intentará entender la irreducibilidad de una representación. Miramos en particular algunos criterios de irreducibilidad.

Definición 2.30. *Una representación de G se dice irreducible si no existen subespacios cerrados e invariantes por la acción de G no triviales.*

Si $\pi_i : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_i),\ i = 1, 2$ son representaciones unitarias, decimos que $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ es un *operador intercambiante*, o que T intercambia π_1 y π_2 si es lineal y continuo y para cada $g \in G$ se cumple que

$$\pi_2(g) \cdot T = T \cdot \pi_1(g).$$

Notar que T no necesariamente es conjugaci'pon ya que no tiene porqué ser biyectivo.

Si π es una representación de G definimos el conmutante de $\pi(G)$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ como $\pi(G)' = \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ operador que intercambia π consigo misma$\}$.

Observación 2.31. *Más en general, si B es un conjunto de operadores sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ definimos B' como el conjunto de operadores T de $\mathcal{H}$ que son continuos y lineales y que hacen*

$$T \cdot b = b \cdot T$$

para cada $b \in B$.

Lema 2.32. *Un subespacio V de $\mathcal{H}$ es invariante si y solamente si P_V, la proyección ortogonal sobre V, está en $\pi(G)'$.*

Demostración. Supongamos que V es invariante por π. Entonces se cumple que $\pi(g) \cdot P_V = P_V \cdot \pi(g) \cdot P_V$ para cada $g \in G$. Luego

$$P_V \cdot \pi(g) = (\pi(g^{-1}) \cdot P_V)^* = (P_V \cdot \pi(g^{-1}) \cdot P_V)^* = \pi(g) \cdot P_V.$$

Luego $P_V \in \pi(G)'$.

Supongamos ahora que $P_V \in \pi(G)'$. Si $\xi \in V$ y $g \in G$ entonces $P_V \cdot \pi(g)(\xi) = \pi(g)(\xi)$ de donde se deduce que V es π-invarainte. □

Proposición 2.33 (Lema de Schur)**.** *La representación π es irreducible si y solamente si $\pi(G)' = \{\lambda \mathrm{Id} : \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

Demostración. Para el directo suponemos que π es irreducible y consideramos $T \in \pi(G)'$. Es un cálculo directo ver que $T^* \in \pi(G)'$ y también $T_1 = \frac{T+T^*}{2}$ y $T_2 = \frac{T-T^*}{2i}$. Obtenemos $T = T_1 + iT_2$ como suma de dos operadores autoadjuntos en $\pi(G)'$. Si podemos probar que T_1 y T_2 son múltiplos de la identidad terminamos la prueba. Asumimos entonces que T es autoadjunto.

Usando el teorema espectral para operadores autoadjuntos (ver resultado 2.23) vemos que el espectro de T es no vacío: queremos ver que es un único punto.

Para eso suponemos que no, que

$$\sigma(T) = A \sqcup B$$

se escribe como unión disjunta de dos conjuntos no vacíos $A, B \subset \mathbb{C}$.

El teorema 2.23 nos da una medida espectral E que codifica la acción de T. Obtenemos dos proyecciones no triviales $E(A)$ y $E(B)$ sobre dos subespacios de $\mathcal{H}$, que notamos por V_A, yV_B respectivamente.

Como T conmuta con π las proyecciones $E(A)$ y $E(B)$ también conmutan con π. Podemos usar el resultado 2.32 y obtenemos que tanto V_A como V_B son subespacios invariantes por π. Pero esto es absurdo pues estamos suponiendo que π es irreducible. Luego el espectro de T es un único punto y $T = \lambda \mathrm{Id}$.

Para ver el recíproco consideramos V un subespacio invariante por π. El Lema 2.32 asegura que entonces $P_V \in \pi(G)'$ y por lo tanto $P_V = \lambda \mathrm{Id}$. Como $P^2 = P$ obtenemos $\lambda = 0$ o 1, por lo que $V = \{0\}$ o $\mathcal{H}$, lo que completa la prueba. □

Corolario 2.34. *Si G es abeliano entonces todas sus representaciones irreducibles son unidimensionales.*

Demostración. Si π es una representación de G entonces el mapa $\pi(g)$ intercambia π para cada $g \in G$. Como π es irreducible cada $\pi(g)$ resulta ser de la forma $\lambda_g \mathrm{Id}$ para algún $\lambda_g \in \mathbb{C}$. Como los subespacios invariantes son los mismos para todo $g \in G$ tiene que ser $\mathcal{H}$ unidimensional. □

A continuación presentaremos dos criterios para ver la irreducibilidad de una representación que involucran al álgebra de von Neumann asociada a la representación π.

Definición 2.35 (Topología débil en $\mathcal{H}$)**.** *El espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ tiene un producto interno p que induce una norma según la cual es completo. La topología inducida por esta norma es llamada* topología fuerte de $\mathcal{H}$*. Definimos la* topología débil de $\mathcal{H}$ *de forma que una sucesión ξ_n converja a $\xi \in \mathcal{H}$ si para cada $\eta \in \mathcal{H}$ se cumple que* $\lim_n p(\xi_n, \eta) = p(\xi, \eta)$.

Definición 2.36 (Topología débil en $\mathrm{End}(\mathcal{H})$)**.** *Cuando se considera el espacio de morifismos de un espacio de Hilbert, hay una topología a considerar más débil que la asociada a la convergencia en norma de operadores y a su vez más natural y acorde a la estructura de $\mathcal{H}$. Se define la topología débil en* $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ *de forma que una sucesión (ϕ_n) converge a ϕ si para cada par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ se cumple que* $\lim_n p(\phi_n(\xi), \eta) = p(\phi(\xi), \eta)$.

Notamos con el supraíndice w la clausura según la topología débil, tanto en $\mathcal{H}$ como en $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ y si es claro en el contexto o especificando si existe algún caso ambiguo.

Definición 2.37 (Álgebra de von Neumann de π)**.** *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y p su producto interno. Podemos pensar $\pi(G) \subset$* $\mathrm{End}(\mathcal{H})$*. A la estructura de grupo que hereda $\pi(G)$ de G, podemos agregar la estructura de ágebra, considerando el espacio $CL(\pi(G))$ de combinaciones lineales finitas de elementos de $\pi(G)$. El álgebra de von Neumann de π, que notamos por $VN(\pi(G))$ es la clausura débil de $CL(\pi(G))$.*

En otras palabras $VN(\pi(G))$ es la menor álgebra de $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ *que contiene a $\pi(G)$ y que es cerrada según la topología débil.*

Proposición 2.38 (Un criterio de irreducibilidad)**.** *Si $VN(\pi(G)) =$* $\mathrm{End}(\mathcal{H})$ *entonces π es irreducible.*

Demostración. Alcanza ver que si $T \in \pi(G)'$ entonces $T = \lambda \mathrm{Id}$ para algún escalar λ (ver resultado 2.33). Si $T \in \pi(G)'$ entonces T también conmuta los elementos de $CL(\pi(G))$. El intercambio pasa al límite débil: si $\phi_n \in CL(\pi(G))$ converge débilmente a $\phi \in \mathrm{End}(\mathcal{H})$ entonces $\phi_n \cdot T = T \cdot \phi_n$ convergen débilmente a $\phi \cdot T$ y $T \cdot \phi$ respectivamente. Luego $T \in VN(\pi(G))' = \mathrm{End}(\mathcal{H})'$. Como $\mathrm{End}(\mathcal{H})' = \{\lambda \mathrm{Id} : \lambda \in \mathbb{C}\}$ obtenemos que $T = \lambda \mathrm{Id}$ para algún escalar λ. □

El criterio que sigue tiene un aire más dinámico. Si se quiere tener irreducibilidad para su representación, se debería pedir al menos que cada vector tenga *órbita densa*, en algún sentido.

Definición 2.39. *Decimos que $\xi \in \mathcal{H}$ es cíclico si* $\overline{\mathrm{span}\{g \cdot \xi : g \in G\}} = \mathcal{H}$.

Es sencillo ver que la irreducibilidad de π es equivalente a que todos los vectores de $\mathcal{H}$ sean cíclicos. Alcanza con un ejemplo para endender por qué no alcanza que exista un vector cíclico, o incluso un suconjunto denso de $\mathcal{H}$ de vectores cíclicos.

Ejemplo 2.40. *Sea* $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ *la transformación con matriz asociada* $T = \begin{bmatrix} \exp(i\alpha) & 0 \\ 0 & \exp(i\beta) \end{bmatrix}$, *donde* α *y* β *son dos números irracionales e independientes. Entonces cada subespacio generado por un elemento de la base es invariante pero cada* $v = (v_1, v_2)$ *con* $v_1, v_2 \neq 0$ *es cíclico.*

Proposición 2.41 (Otro criterio de irreducibilidad)**.** *Si* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ *es una representación unitaria y se cumple que para algún vector cíclico* $\xi \in \mathcal{H}$ *la proyección* P_ξ *sobre* $\mathbb{C}\xi$ *está en el álgebra de Von Neumann* $VN(\pi(G))$ *entonces* π *es irreducible.*

Demostración. Sea $V < \mathcal{H}$ un subespacio distinto de $\{0\}$, cerrado e invariante por π y sea ξ como en el enunciado. Queremos probar que $V = \mathcal{H}$ y para esto alcanza con ver $\xi \in V$.

Debe existir $\eta \in V$ de forma que $p(\xi, \eta) \neq 0$ (de otra manera $0 = p(g^{-1} \cdot \eta, \xi) = p(\eta, g \cdot \xi)$ por lo que todo $\eta \in V$ sería 0). Luego $P_\xi(\eta) = \lambda\xi$ para algún $\lambda \neq 0$. La condición $P_\xi \in VN(\pi(G))$ implica que ξ está en la clausura débil de V. Como V es convexo su clausura débil coincide con su clausura según la topología fuerte (ver [Rud73], Teorema 3.12) de donde obtenemos que $\xi \in V$, como buscábamos. $\square$

2.7. Coeficientes matriciales y la topología de Fell

A continuación daremos una descripción de la *topología de Fell*, una topología en -algún- espacio de representaciones de G. Referimos al lector a [BHV02], Apéndice F.

Definición 2.42 (Dual unitario)**.** *Dado* G *un grupo de Lie localmente compacto, se define su dual unitario* $\widehat{G}$ *como el conjunto de clases de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles de* G*.*

Definición 2.43. *Definimos* $\check{G}$ *el conjunto de clases de representaciones de* G *de dimensión menor a* $\aleph_0$ *(primer cardinal infinito).*

Observación 2.44. *Como* $\mathcal{H}$ *es separable es cierto que* $\hat{G} \subset \check{G}$*. Igualmente consideramos estos dos espacios de manera independiente.*

Observación 2.45. *Nos gustaría definir una topología en el espacio de clases de equivalencia de todas las representaciones de* G*, pero sucede que este espacio no es un conjunto. Es por eso que nos restringimos a las representaciones irreducibles, o a las de dimensión acotada (ya que estamos trabajando con espacios de Hilbert separables).*

Definición 2.46 (Caracteres de un grupo)**.** *Se llama espacio de caracteres de* G *al espacio de clases de equivalencia de representaciones unitarias irreducibles y unidimensionales de* G*.*

Observación 2.47. *Como vimos en las seciones anteriores, cuando* G *es abeliano el espacio de caracteres de* G *coincide con su dual unitario (y cada caracter está en correspondencia con un elemento del círculo).*

Definición 2.48 (Coeficientes matriciales)**.** *Dada una representación* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ *unitaria se llaman* coeficientes matriciales de π *a las funciones* $G \mapsto \mathbb{C}$ *definidas por* $g \mapsto p(g \cdot \xi, \eta)$*, donde* $\xi, \eta \in \mathcal{H}$*.*

El espíritu de los coeficientes matriciales en dimensión infinita es el de la matriz asociada en dimensión finita. En función de los coeficientes matriciales es que se define la topología de Fell.

Observación 2.49. *Sean* $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ *y* $\rho : G \to \mathcal{U}(\mathcal{K})$ *dos representaciones unitarias equivalentes. Eso es decir que existe una transformación unitaria* $U : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ *que hace* $U^*\pi(g)U = \rho(g)$ *para cada* $g \in G$*. Si* $\eta_1, \eta_2 \in \mathcal{K}$ *y definimos* $\xi_i = U(\eta_i)$ *entonces*

$$p(\rho(g)(\eta_1), \eta_2) = p(U^*\pi(g)U(\eta_1), \eta_2) = p(\pi(g)(\xi_1), \xi_2).$$

Esto muestra que los coeficientes matriciales no dependen de la calse de equivalencia de representación que se considere.

Observación 2.50. *La siguiente definición tiene sentido tanto en el dual unitario de* G *como en* $\check{G}$*. Notamos por* $\tilde{G}$ *a* $\hat{G}$ *o* $\check{G}$ *indistintamente (ver observación 2.45).*

Definición 2.51 (Topología de Fell)**.** *Sean* $(\pi, \mathcal{H})$ *una representación unitaria y* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *coeficientes matriciales asociados a* π*, un subconjunto compacto* $Q \subset G$ *y* $\varepsilon > 0$*. Definimos* $W(\pi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, Q, \varepsilon) \subset \tilde{G}$ *el conjunto de todas las clases de representaciones* $\rho \in \tilde{G}$ *que cumplen:*

para cada φ_i *existe* ψ *que es suma de coeficientes matriciales de* ρ *y tal que*

$$|\varphi_i(x) - \psi(x)| < \varepsilon, \text{ para todo } x \in Q$$

Los conjuntos $W(\pi, \varphi_1, \ldots, \varphi_k, Q, \varepsilon)$ *son la base de una topología en* $\tilde{G}$ *que llamamos topología de Fell.*

Vamos a describir un poco más esta topología. La convergencia de redes según la topología de Fell queda determinada por la *contención débil* de representaciones, una noción de contención más débil que la intuitiva (y correcta definición de *contención, o contención fuerte*): "$\rho \subset \pi$ si ρ es equivalente a la acción unitaria π restricta a algún subespacio cerrado e invariante".

Definición 2.52 (Contención débil de representaciones)**.** *Si* $(\pi, \mathcal{H}, p)$ *y* $(\rho, \mathcal{K}, q)$ *son dos representaciones unitarias decimos que* ρ *está debilmente contenida en* π *si todo coeficiente matricial de* ρ *se puede aproximar, uniformemente en compactos de* G*, por sumas finitas de coeficientes matriciales de* π*. Lo notamos como* $\rho \prec \pi$*.*

En términos cuantitativos la definición 2.52 se traduce: $(\rho, \mathcal{K}, q) \prec (\pi, \mathcal{H}, p)$ si para todo $\eta \in \mathcal{K}$, todo $K \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$ existen $\xi_1, \dots \xi_k \in \mathcal{H}$ tal que para todo $g \in K$ se cumple que

$$|q(\rho(g)\eta, \eta) - \sum_{1 \leq i \leq k} p(\pi(g)\xi_i, \xi_i)| < \varepsilon.$$

La prueba de las siguientes proposiciones se puede encontrar en [BHV02], Apéndice F, proposiciones F.1.5 y F.2.2.

Proposición 2.53. *Una red $(\pi_i)_i$ converge a π (con la topología de Fell) si y solamente si $\pi \prec \oplus_j \pi_j$ para toda subred $(\pi_j)_j$ de $(\pi_i)_i$.*

Notamos por 1_G a la representación $1_G : G \to \mathcal{U}(\mathbb{C})$ tal que $1_G(g) \cdot z = z$ para todo $g \in G$. La proposición que sigue podría llamarse dinámica.

Proposición 2.54 (Vectores casi invariantes)**.** *Se cumple que $1_G \prec \pi$ si y solamente si para cada $Q \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$ existe un vector unitario $\xi \in \mathcal{H}$ tal que*

$$\sup_{g \in Q} \|g \cdot \xi - \xi\| < \varepsilon.$$

En este caso se dice que π tiene vectores casi invariantes.

Observación 2.55. *La existencia de vectores casi invariantes no implica la existencia de un vector invariante, aún si consideramos $Q_n \nearrow G$ y $\varepsilon_n \to 0$. Si bien (K_n, ε_n) induce vectores "cada vez mas invariantes", que podemos tomar unitarios, estos no tienen por qué converger (con la topología fuerte).*

Cuando los vectores casi invariantes inducen vectores invariantes (para toda representación) se dice que el grupo G tiene la Propiedad (T) de Kazhdan. Veremos más sobre esta propiedad de rigidez en la sección 4.2.

3. Representaciones de dimensión finita

Estudiaremos en esta sección las representaciones de grupos compactos y las representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$.

3.1. Grupos compactos

La teoría de representaciones de grupos compactos termina siendo bastante sencilla. Vamos a ver que si $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación irreducible de un grupo G compacto, entonces π es de dimensión finita. Vamos a ver además que toda representación de un grupo compacto se escribe como suma directa de sus componentes irreducibles. Referimos al lector a [Bum04], parte I.

En esta sección G siempre denotará un grupo de Lie compacto. Los ejemplos clásicos de grupos compactos son $O(n), U(n)$ y los respectivos $SO(n)$ y $SU(n)$, aunque hay más ejemplos que estos.

Probaremos el siguiente teorema.

Teorema 3.1. *Sea π una representación de G. Entonces π es equivalente a una suma directa de representaciones irreducibles de dimensión finita.*

Observación 3.2. *Supongamos que π es una representación de G en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$* no necesariamente unitaria. *Entonces podemos promediar el producto interno p en $\mathcal{H}$ para obtener un nuevo producto interno invariante por la acción de G de la siguiente manera.*

Recordando que la medida de Haar es la única probabilidad en G que es invariante por traslaciones a izquierda, definimos

$$p'(\xi, \eta) = \int_G p(g \cdot \xi, g \cdot \eta) d\mu(g).$$

Es inmediato de la definición que p' es invariante por la acción de G, por lo que cambiando el producto interno obtenemos una representación unitaria de G.

Si π es una representación de un grupo compacto G en un espacio vectorial V entonces fijamos p un producto interno en V que haga que π sea unitaria.

3.1.1. Teorema de Peter y Weyl

La prueba del teorema 3.1 usa el Teorema de Peter y Weyl, que enunciaremos después de motivar con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.3. *Sean $G = S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z} \simeq SO_2$ y $\phi : G \to \mathbb{C}$ un coeficiente matricial de G: una representación unitaria $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ y un par de elementos $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, de forma que $\phi(g) = p(g \cdot \xi, \eta)$. La imagen de este morfismo debe ser un grupo compacto y conexo de $\mathbb{C}$, por lo que (asumiendo $\phi, \xi, \eta \neq 0$) obtenemos que $\mathrm{Im}(\phi) = S^1$.*

Afirmación. *Todo morfismo de grupos de Lie $\phi : S^1 \to S^1$ es de la forma $z \mapsto z^k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.*

Demostración. Tal morfismo induce un morfismo de álgebras de Lie $d\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (lineal) que debe ser de la forma $x \mapsto ax$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Además el cociente al círculo de $d\phi$ tiene que ser 2π-periódico: $\exp(iax) = \exp(ia(x+2\pi))$. Luego a debe ser un número entero y si $z = \exp(x)$ (usándo la fórmula de la derivada de un morfismo) obtenemos

$$\phi(z) = \phi(\exp(x)) = \exp(d\phi(x)) = \exp(ax) = z^a.$$

$\square$

En esta sección vamos a diferenciar las representaciones de dimensión finita y las de dimensión infinita.

Observación 3.4. *Nos referimos con coeficiente matricial finito de G a un coeficiente matricial de G correspondiente a una representación de dimensión finita, es decir una función $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(g) = p(\pi(g)(v), w)$ para alguna representación $(\pi, \mathcal{H})$ de dimensión finita y $v, w \in \mathcal{H}$.*

Teorema 3.5 (Peter, Weyl)**.** *Sea G un Grupo de Lie compacto. Entonces los coeficientes matriciales finitos de G son densos en $C(G, \mathbb{C})$.*

La prueba del Teorema de Peter y Weyl usa el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos y las propiedades del operador convolución.

Si $\phi : G \to \mathbb{C}$ es continua, definimos T_ϕ como

$$(f * \phi)(h) = \int_G \phi(hg^{-1}) f(g) d\mu(g).$$

A continuación listamos una serie de propiedades que serán útiles.

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [Bum04], proposiciones 4.1, 4.2, 4.3.

Proposición 3.6. *Con la notación del párrafo anterior.*

(1) El operador T_ϕ está definido y es acotado en $L^1(G)$. Esto además implica que lo es en $L^2(G)$. En ambos casos $\|T_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$.

(2) El operador T_ϕ es compacto en $L^2(G)$.

(3) Si $\phi(g^{-1}) = \overline{\phi(g)}$ entonces T_ϕ es autoadjunto.

(4) El operador T_ϕ conmuta con la representación regular de G: para todo $g \in G$ se cumple que $T_\phi \cdot \delta(g) = \delta(g) \cdot T_\phi$. En particular los subespacios propios de T_ϕ son invariantes por la representación regular.

El siguiente es un resultado clásico de análisis funcional. Enunciamos un caso más general en la sección 2.5

Teorema 3.7 (Espectral para operadores compactos y autoadjuntos). *Si $T : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ es un operador compacto y autoadjunto entonces existe una base ortonormal $B = \{e_i\}_{i \in I}$ de $\mathrm{Ker}(T)^{\perp}$ formada por vectores propios de T. El conjunto de índices I es siempre numerable, es finito si T tiene rango de dimensión finita y es vacío si $T = 0$. Además los subespacios propios son ortogonales dos a dos.*

Estableceremos una fuerte relación entre los coeficientes matriciales finitos de π y las representaciones regulares a izquierda y derecha de G (cuando las restringimos a $C(G, \mathbb{C})$).

Definición 3.8 (Representación regular reducida). *Se define la representación regular reducida a izquierda de G como el mapa $\lambda : G \to \mathrm{Aut}(C(G, \mathbb{C}))$ de forma que $\lambda(g)(f)(x) = f(g^{-1}x)$. Análogamente se define la representación regular reducida a derecha $\delta : G \to \mathrm{End}(C(G, \mathbb{C}))$.*

Proposición 3.9. *Sea $f : G \mapsto \mathbb{C}$ continuo. Son equivalentes.*

(1) $\dim \mathrm{span}\{\lambda(g)f : g \in G\} < \infty$*,*

(2) $\dim \mathrm{span}\{\delta(g)f : g \in G\} < \infty$*,*

(3) f es un coeficiente matricial finito de G.

Demostración. Sean π es una representación de dimensión finita sobre un espacio V y f un coeficiente matricial de (π, V) (asociado a dos vectores $v, w, \in V$). Si fijamos una base $B = \{b_i\}$ de V y escribimos $v = \sum v_i b_i$ y $w = \sum w_j b_j$ obtenemos

$$f(g) = p(\pi(g)(v), w) = \sum_{i,j} v_i \overline{w_j} p(\pi(g)(b_i), b)j),$$

de donde se obtiene que el espacio de coeficientes matriciales de (π, V) tiene dimensión $\dim(V)^2 < \infty$.

Si $f_{v,w}$ es coeficiente matricial finito de G (por una representación π de dimensión finita y $v, w \in V$) entonces

$$\lambda(h) f_{v,w}(g) = f_{v,w}(h^{-1}g) = p(\pi(g)(v), \pi(h)(w)) = f_{v,\pi(h-1)(w)}$$

también es un coeficiente matricial. Como el espacio de coeficientes de (π, V) es de dimensión finita debe ser $\dim \mathrm{span}\{\lambda(g)f : g \in G\} < \infty$.

La prueba de que (3) implica (2) es análoga.

Si $W = \mathrm{span}\{\lambda(g)f : g \in G\}$ tiene dimensión finita entonces $\lambda : G \to \mathrm{End}(W)$ es una representación de dimensión finita de G de la cual, como mostramos a continuación, f es coeficiente matricial. Si definimos $L : W \to \mathbb{C}$ como $L(\phi) = \phi(\mathrm{id}_G)$ entonces $f(g) =$

$\lambda(g^{-1})f(\mathrm{id}_G) = L(\lambda(g^{-1})f)$. Fijando un producto interno q en W, existe un $w \in W$ que hace $f(g) = L(\lambda(g^{-1})f) = q(\lambda(g^{-1})f, w)$. Esto prueba que f es coeficiente matricial de la representación $\pi : G \to \mathrm{Aut}(W)$ que hace $\pi(g)(v) = \lambda(g^{-1}(v)$ con vectores asoaciado f, w. Obtenemos que (1) implica (3). La prueba de que (2) implica (3) es similar. □

3.1.2. Prueba de 'Peter-Weyl'

Demostración del Teorema 3.5. Sean $f \in C(G, \mathbb{C})$ y $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar un coeficiente matricial f' de forma que $\|f - f'\|_\infty < \varepsilon$. Como G es compacto f es uniformemente continua, y por lo tanto existe un entorno U de la identidad en G de forma que si $g \in U$ entonces $\|f(h) - f(gh)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea ϕ una función continua, no negativa, soportada en U y normalizada de forma que $\int_G \phi d\mu = 1$. Además podemos suponer que ϕ es simétrica (considerando una nueva función $\psi(g) = \phi(g) + \phi(g^{-1})$) de forma que el operador T_ϕ sea autoadjunto (ver el resultado 3.6) además de compacto.

Si $h \in G$ calculamos, usando que ϕ es simétrica, haciendo el cambio de variable $g \mapsto gh$ y teniendo en cuenta que G compacto es unimodular

$$\begin{aligned}|T_\phi(f)(h) - f(h)| &= |\int_G \phi(hg^{-1})f(g)d\mu(g) - \int_G \phi(g)f(h)d\mu(g)| \\ &= |\int_G \phi(gh^{-1})f(g)d\mu(g) - \int_G \phi(g)f(h)d\mu(g)| \\ &\leq \int_G |\phi(g)||f(hg^{-1}) - f(h)|d\mu(g) \leq \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

de donde obtenemos $\|T_\phi(f) - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Como T_ϕ es compacto en $L^2(G)$ y autoadjunto podemos aplicar el teorema 3.7. Cuando λ es valor propio de T_ϕ notamos por E_λ al subespacio propio asociado. Los E_λ son ortogonales dos a dos y de dimensión finita si $\lambda \neq 0$.

Sea f_λ la proyección de f sobre E_λ. La ortogonalidad de los subespacios propios dan que $\sum_\lambda \|f_\lambda\|_2^2 = \|f\|_2^2 < \infty$. Fijamos $q > 0$ y definimos

$$f'' = \sum_{|\lambda| > q} f_\lambda, \ f' = T_\phi(f'').$$

Como el espectro de T_ϕ solamente puede acumular en 0 el subespacio $W_q = \bigoplus_{|\lambda|>q} E_\lambda$ es de dimensión finita. Además como $f'' \in W_q$ que es T_ϕ-invariante (por ser suma directa de subespacios propios) también $f' \in W_q$.

El operador T_ϕ conmuta con la representación regular (ver resultado 3.6 lo que implica que $\mathrm{span}\{\lambda(g)f' : g \in G\} \subset W_q$ que tiene dimensión finita. Luego por la proposición 3.9 f' es cpeficiente matricial de alguna representación ρ de G finito dimensional (el mismo argumento vale para f'').

Falta ver que $\|f - f'\|_\infty < \varepsilon$. Para eso observamos que podemos elegir q de forma que $\sum_{|\lambda|<q} |f_\lambda|_2^2$ sea tan chico como queramos, en particular para que

$$|\sum_{|\lambda|<q} f_\lambda|_1 \leq |\sum_{|\lambda|<q} f_\lambda|_2 = \sqrt{\sum_{|\lambda|<q} |f_\lambda|_2^2} < \frac{\varepsilon}{2\|\phi\|_\infty}.$$

Calculamos por otro lado

$$\|T_\phi(f - f')\|_\infty = \|T_\phi(f_0 + \sum_{|\lambda|<q} f_\lambda - f')\|_\infty = \|\sum_{|\lambda|<q} f_\lambda\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por fin obtenemos $\|f - f'\|_\infty \leq \|f - T_\phi(f'')\|_\infty + \|T_\phi(f - f')\|_\infty \leq \varepsilon$ como buscábamos.

□

3.1.3. Preliminares para el Teorema 3.1

Para probar el teorema 3.1 usaremos el teorema 2.33 en su version finito dimensional y un resultado de ortogonalidad de representaciones de grupos compactos (ver resultado 3.11

Lema 3.10 (Lema de Schur en dimensión finita)**.** *(1) Sean $\pi_i : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_i), i = 1, 2$ dos representaciones unitarias irreducibles de dimensión finita de G. Si T intercambia π_1 y π_2 entonces T es un isomorfismo o el mapa nulo.*

(2) Una representación $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ de dimensión finita es irreducible si y solamente si $T \in \pi(G)'$ implica $T(\xi) = \lambda\xi$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$ para algún escalar $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostración. Si bien este resultado es corolario de la proposición 2.33 damos esta prueba en dimensión finita más simple e intuitiva.

Para ver (1): observar que $\mathrm{Ker}(T)$ es un subespacio de $\mathcal{H}_1$ que es invariante por π_1 y que $\mathrm{Im}(T)$ es un subespacio que $\mathcal{H}_2$ que es invariante por π_2. Por la irreducibilidad de π_1 y π_2 si T es no nulo debe ser un isomorfismo.

Para ver (2) (el directo) consideramos cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ y observamos que $T - \lambda\mathrm{Id}$ también está en el conmutador de $\pi(G)$. Luego cada $T - \lambda\mathrm{Id}$ es o bien un isomorfismo o el mapa nulo. Existe entonces a lo más un único valor de λ que hace que $T - \lambda\mathrm{Id}$ sea nulo y como T tiene espectro no vacío (por ser un operador de dimensión finita) debe existir tal λ.

Para ver el recíproco, si V es un subespacio no tricial e invariante por $\pi(g)$ para todo $g \in G$ entonces el resultado 2.32 dice que la proyección ortogonal sobre V está en el conmutador de $\pi(G)$. Por hipótesis del recíproco tenemos que P debe ser de la forma $\lambda\mathrm{Id}$ de donde V tiene que ser todo $\mathcal{H}$. Luego π es irreducible. □

Decimos que dos mapas $f, h : G \to \mathbb{C}$ son ortogonales (y lo notamos $f \perp h$) si $\int_G f(g)\overline{h(g)}d\mu(g) = 0$.

Proposición 3.11. *Sean $(\pi_i, \mathcal{H}_i)$ dos representaciones irreducibles de G. Entonces o bien los coeficientes matriciales de π_1 son ortogonales a los de π_2 o las representaciones son isomorfas.*

Demostración. Dividimos la prueba en dos partes.

Lema (1). *Si $\xi \in \mathcal{H}_1, \eta \in \mathcal{H}_2$ entonces el mapa $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ definido como*

$$T(v) = \int_G p_1(\pi_1(g)(v), \xi)\pi_2(g^{-1})(\eta)d\mu(g)$$

intercambia las representaciones π_1 y π_2.

Lema (2). *Si ϕ_i es un coeficiente matricial de π_i y ϕ_1 no es ortogonal a ϕ_2 entonces existen $\xi \in \mathcal{H}_1, \eta \in \mathcal{H}_2$ de forma que el mapa T definido en el Lema 1 es un isomorfismo.*

Es claro que los dos lemas prueban el teorema.

La prueba de (1) es un cálculo directo. La prueba de (2) es una concecuencia del Lema (3.10).

Si $\phi_i(g) = p(\pi_i(g)(\xi_i), \eta_i)$ entonces

$$0 \neq \int_G \phi_1(g)\overline{\phi_2(g)}d\mu(g) = \int_G p(\pi_1(g)(\xi_1), \eta_1)p(\pi_2(g^{-1})(\eta_2), \xi_2)d\mu(g) = p(T(\xi_1), \xi_2),$$

donde T es el operador definido en el Lema 1 con $\xi = \eta_1$ y $\eta = \eta_2$. Como T intercambia π_1 con π_2 y $T \neq 0$ el lema 3.10 asegura que T es un isomorfismo. □

Observación 3.12. *Si $f : G \to \mathbb{C}$ es un coeficiente matricial de G entonces el mapa $g \mapsto f(g^{-1})$ también lo es.*

Demostración. Basta considerar la representación $\hat{\pi} : G \to \mathrm{End}(V^*)$ definida por $\hat{\pi}_g(\varphi)(v) = \varphi(\pi(g^{-1})(v))$. □

3.1.4. Prueba del Teorema 3.1

Demostración del teorema 3.1. Fijamos $\pi : G \to \mathrm{End}(\mathcal{H})$ una representación de G y $v \in \mathcal{H}$ un vector no nulo. Recordamos que μ denota la medida de Haar a izquierda en G y que p es un producto interno en $\mathcal{H}$ que es invariante por la acción de G y que por lo tanto hace a π unitaria.

Sea $N \subset G$ un entorno abierto de e (el elemento neutro en G) de forma que si $g \in N$ entonces $\|g \cdot v - v\| < \frac{\|v\|}{2}$. Esto es posible ya que π es fuertemente continua. Consideramos $\phi : G \to \mathbb{C}$ una función continua, positiva y soportada en N que normalizamos para que $\int_G \phi d\mu = 1$.

Lema. $\int_G \phi(g)\pi(g)(v)d\mu \neq 0$.

Demostración del lema. Calculamos

$$p(\int_G \phi(g)\pi(g)(v)d\mu, v) = \|v\|^2 + \int_N \phi(g)p(\pi(g)(v) - v, v)d\mu$$

y

$$|p(\int_N \phi(g)(\pi(g)(v) - v)d\mu, v)| \leq |\int_N |\pi(g)(v) - v|d\mu\|v\| \leq \frac{\|v\|^2}{2}.$$

Esto prueba el lema. □

Como $\phi \in C(G, \mathbb{C})$ si $\varepsilon > 0$ aplica el teorema de densidad 3.5 y obtenemos que existe $f : G \to \mathbb{C}$ un coeficiente matricial finito de G de forma que $\|f - \phi\|_\infty < \varepsilon$. Se cumple además que $\int_G f(g)\pi(g)(v)d\mu \neq 0$ pues

$$|\int_G \phi(g)\pi(g)(v)d\mu - \int_G f(g)\phi(g)(v)d\mu| \leq \int_G |\phi(g) - f(g)|d\mu\|v\| < \varepsilon\|v\|,$$

por lo que alcanza tomar ε lo suficientemente pequeño.

El mapa $g \mapsto f(g^{-1})$ (lo llamamos h) es coeficiente matricial finito, por lo que podemos considerar la representación de dimensión finita $\rho : G \to \mathrm{End}(W)$ que hace que $h(g) = p(\rho(g)(\xi), \eta)$ para algún par $\xi, \eta \in W$.

Definimos ahora $T : W \to \mathcal{H}$ como $T(w) = \int_G p(\rho(g^{-1})(w), \eta)\pi(g)(v)d\mu$.

Lema. *El mapa T intercambia π con ρ y es no nulo.*

Demostración del lema. La prueba de que T intercambia π y ρ es directa. Para ver que T es no nulo observamos que $T(\xi) = \int_G f(g)\pi(g)(v)d\mu$ que probamos es no nulo. □

Obtuvimos que $\mathcal{H}$ contiene un subespacio π-invariante y de dimensión finita que a menos de tomar un subespacio podemos suponer irreducible.

Sea Σ el conjunto de del conjuntos de subespacios invariantes, ortogonales e irreducibles de π con el orden de la inclusión. Si c es una cadena ordenada entonces el elemento S de Σ que es unión de todos los elementos de la cadena es una cota superior de la cadena. Por el Lema de Zorn Σ contiene un elemento maximal S. Si S no es una descomposición de $\mathcal{H}$ consideramos $\mathcal{H}'$ el complemento ortogonal del espacio generado por S y encontramos un subespacio de $\mathcal{H}'$ irreducible y finito dimensional. Esto contradice la maximalidad de S. Luego $\mathrm{span}\{s : S \in S\} = \mathcal{H}$. □

Observación 3.13. *Como $L^2(G, \mu)$ es separable y los coeficientes matriciales son densos y ortogonales cuando las representaciones no son isomorfas se deduce que un grupo compacto admite solamente numerables clases de isomorfismo de representaciones untiarias.*

3.2. Representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$

Estudiaremos las representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$.

3.2.1. Preliminares para el estudio de representaciones de dimensión finita

Fijamos en esta sección V un espacio vectorial (sobre $\mathbb{R}, \mathbb{C}$) de dimensión finita y $\pi : G \to GL(V)$ una representación (real, compleja).

Observación 3.14. *Fijando una base de V obtenemos una representación de G en el espacio de matrices de dimensión $k = \dim V$.*

La prueba del siguiente resultado se puede ver en [Hal15], proposición 4.4.

Proposición 3.15 (Derivada de un morfismo)**.** *Sea G un grupo de Lie matricial con álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea $\pi : G \to GL(V)$ una representación. Entonces existe una única representación $\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ de $\mathfrak{g}$ tal que*

$$\pi(\exp(X)) = \exp(\Pi(X))$$

para todo $X \in \mathfrak{g}$. Además la representación Π se puede computar como

$$\Pi(X) = \frac{d}{dt}\pi(\exp(tX))|_{t=0}$$

.

Llamamos *derivada* de π a Π. Las representaciones π y Π son duales, en el sentido de la siguiente proposición.

Proposición 3.16. *Valen las siguientes afirmaciones.*

(1) Si G es conexo, entonces π es irreducible si y solamente si Π lo es.

(2) Si π_1 y π_2 son representaciones de G y Π_1 y Π_2 son sus respectivas derivadas, entonces $\pi_1 \sim \pi_2$ si y solamente si $\Pi_1 \sim \Pi_2$.

Demostración. Para probar (1) empezamos con π una representación irreducible de G. Sea V un subespacio Π-invariante. Como G es conexo, si $g \in G$ podemos escribir

$$g = \exp(X_1)\ldots\exp(X_k) \text{ con } X_i \in \mathfrak{g} \text{ para todo } i.$$

Como V es invariante por $\Pi(X_i)$ también lo será por

$$I\mathrm{d} + \Pi(X_i) + \frac{\Pi(X_i)^2}{2} + \cdots = \exp(\Pi(X_i)).$$

Luego

$$\pi(g) = \pi(\exp(X_1)\ldots\exp(X_k)) = \exp(\Pi(X_1))\ldots\exp(\Pi(X_k)),$$

por lo que V que es Π-invariante debe ser también π-invariante, de donde se deduce que Π es irreducible.

Para probar el recíproco, si Π es irreducible y V es un subespacio π-invariante consideramos $X \in \mathfrak{g}$. Como $\Pi(X)$ es lineal y $\Pi(X) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\pi(\exp(tX))$ se deduce que $\Pi(X)$ debe dejar V invariante, por lo que π es irreducible.

Para probar (2) alcanza con notar que si T intercambia π_1 con π_2 entonces también intercambia Π_1 con Π_2. $\square$

Una prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [Hal15], capítulo 3.

Proposición 3.17. *Sean G simplemente conexo y H un grupo de Lie cualquiera, $\mathfrak{h}$ su álgebra de Lie. Entonces todo morfismo $\Phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ integra a un morfismo $\phi : G \to H$, donde integrar significa que la derivada de ϕ es Φ en el sentido de la proposición 3.15.*

Definición 3.18. *Si A es un álgebra de Lie real, se define su complexificación como $A_{\mathbb{C}} = A \otimes \mathbb{C}$. Es la menor álgebra de Lie compleja que contiene a A como subálgebra.*

Se cumple que $A = \{X + iY : X, Y \in A\}$ y el corchete en $A_{\mathbb{C}}$ es la extensión lineal del corchete en A.

Ejemplo 3.19. *Las álgebras*

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(g) = 0\} \text{ y}$$
$$\mathfrak{su}(2) = \{g \in M_2(\mathbb{C}) : g = -g^*, \operatorname{tr}(g) = 0\}$$

son subálgebras reales de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y se cumple que

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})_{\mathbb{C}} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}.$$

Es claro que tanto $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ como $\mathfrak{su}(2)$ son subálgebras reales de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

La base real de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ dada por

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es una base de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ cuando considerada sobre los complejos.

Para ver que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \mathfrak{su}(2)_{\mathbb{C}}$ observamos que toda matriz X (en particular matrices de $SL_2(\mathbb{C})$) se escribe como una suma

$$X = \frac{X - X*}{2} + i\frac{X + X*}{2i},$$

donde ambas $\frac{X-X*}{2}$ y $\frac{X+X*}{2i}$ son antisimétricas. Además, si X tiene traza 0 también es así para $\frac{X-X*}{2}$ y $\frac{X+X*}{2i}$.

Proposición 3.20. *Si $\Pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ es una representación de un álgebra de Lie real $\mathfrak{g}$ sobre un espacio vectorial complejo V, entonces existe una única extensión lineal de Π*

(que también notamos Π*) a la compexificación* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ *de* $\mathfrak{g}$*. La nueva representación está dada por*

$$\Pi(X + iY) = \Pi(X) + i\Pi(Y).$$

Además se cumple que Π *es irreducible como representacion de* $\mathfrak{g}$ *si y solamente si lo es como representación de* $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$*.*

Demostración. La unicidad es inmediata.

Para ver la segunda parte del enunciado alcanza notar que un subespacio $W < V$ es invariante si y solamente si lo es por $\Pi(X)$ y $\Pi(Y)$. Esto prueba que las representaciones $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ tienen los mismos subespacios invariantes. □

3.2.2. ¿Por qué estudiar reprensentaciones de $SL_2(\mathbb{R})$?

Una familia de ejemplos muy importantes de grupos de Lie semisimples surge de estudiar espacios localmente simétricos. A menos de factores euclídeos el grupo de isometrías de un espacio simétrico es un grupo de Lie semisimple (ver [Ben07]).

Los grupos de Lie semisimples son aquellos cuya álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se escribe como suma directa de factores simples (subálgebras no abelianas y sin ideales propios). Ejemplos de grupos de Lie semisimples son $SL_2(\mathbb{K}), SO_n, SP_{2n}$.

Desde el punto de vista algebraico el estudio de las álgebras de Lie semisimples es también importante. Se puede probar que toda álgebra de Lie se escribe como suma directa de una soluble y otra semisimple. Las álgebras solubles son fácilmente clasificables, con el Teorema de Engel (teorema 2.3 en [Ben07]); son álgebras de matrices triangulares superiores. Para las álgebras de Lie semisimples no es tan fácil. Su clasificaicón hace uso de sistemas de raíces, y éstos del resultado 3.22 (ver [Hal15], Parte II, en particular el Capítulo 6).

Definición 3.21. *Si* $\mathfrak{g}$ *es un álgebra de Lie, decimos que* $X, Y, H \in \mathfrak{g}$ *es una* $\mathfrak{sl}_2$*-tripleta si*

$$\begin{aligned} HX - XH &= [H, X] = 2X, \\ HY - YH &= [H, Y] = -2Y, \\ XY - YX &= [X, Y] = H. \end{aligned}$$

Esta definición cobra sentido si notamos que el álgebra de Lie generada por una $\mathfrak{sl}_2$-tripleta es isomorfa al álgebra de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

El siguiente resultado relaciona las grupos de Lie semisimples con $SL_2(\mathbb{R})$; la prueba se puede encontrar en [Ben07], sección 2.4.

Teorema 3.22 (Teorema de Jacobson- Morozov)**.** *Todo elemento nilpotente de un álgebra de Lie semisimple forma parte de una* $\mathfrak{sl}_2$*-tripleta.*

Si G es un grupo de Lie semisimple y $u \in \mathfrak{g}$ es un elemento nilpotente de su álgebra de Lie, entonces la $\mathfrak{sl}_2$ tripleta dada por el Teorema 3.22 corresponde a un subgrupo (no necesariamente cerrado) del grupo de Lie G.

3.2.3. Representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$ y $SL_2(\mathbb{C})$

Presentaremos la clasificación de representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{C})$ con el teorema 3.23. A partir de dicha clasificación se deduce la de representaciones de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$ (ver 3.29).

Teorema 3.23. *Para cada k entero positivo existe una única representación irreducible de $SL_2(\mathbb{C})$ en $\mathbb{C}^k$.*

Sea $\pi : SL_2(\mathbb{C}) \to GL(V)$ una representación finita. Podemos derivar (como en la proposición 3.15) y obtener una representación $\Pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$.

Usamos la siguiente base del álgebra de Lie:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculamos además el corchete para cada par y obtenemos

$$\begin{aligned} HX - XH &= [H, X] = 2X, \\ HY - YH &= [H, Y] = -2Y, \\ XY - YX &= [X, Y] = H. \end{aligned}$$

Como Π es un morfismo de álgebras de Lie, las mismas relaciones tendrán que ser verificadas por los operadores $\Pi(H), \Pi(X)$ y $\Pi(Y)$.

Como $\Pi(H)$ es un operador lineal en un espacio vectorial complejo tiene al menos un vector propio $u \neq 0$ con valor propio asociado α.

Lema 3.24. *Se cumple que*

$$\Pi(H)\Pi(X)u = (\alpha + 2)\Pi(X)u \text{ y } \Pi(H)\Pi(Y)u = (\alpha - 2)\Pi(Y)u.$$

Demostración. Calculamos para X, la prueba para Y es análoga. Usando las relaciones del álgebra obtenemos

$$\Pi(H)\Pi(X)u = 2\Pi(X)u + \Pi(X)\Pi(H)u = (2 + \alpha)\Pi(X)u.$$

□

Observación 3.25. *La proposición 3.24 nos dice que si $\Pi(X)^k u$ es no nulo, entonces es vector propio de $\pi(H)$ con valor propio asociado $\alpha + 2k$. Lo mismo para $\Pi(Y)^k u$: si es no nulo, entonces es vector propio de $\pi(H)$ con valor propio asoaciado $\alpha - 2k$.*

Sea $N > 0$ el que hace $\Pi(X)u^N \neq 0$ y $\Pi(X)^{N+1}u = 0$. Notamos $u_0 = \Pi(X)^N u$ y definimos $u_k = \Pi(Y)^k u_0$. Sea $\lambda = \alpha + 2N$.

Proposición 3.26. *Se cumplen las siguientes relaciones.*

(1) $\Pi(H)u_0 = \lambda u_0$.

(2) $\Pi(H)u_k = (\lambda - 2k)u_k$.

(3) $\Pi(X)u_k = (k\lambda - k(k-1))u_{k-1}$.

Demostración. Las dos primeras relaciones son inmediatas de la definición de λ, u_0 y u_k. Para probar (3) hacemos inducción. Para $k = 1$ calculamos

$$\Pi(X)u_1 = \Pi(X)\Pi(Y)u_0 = \Pi(H)u_0 + \Pi(Y)\Pi(X)u_0 = \lambda u_0.$$

Para $k+1$, suponemos que vale para k y calculamos

$$\Pi(X)u_{k+1} = \Pi(X)\Pi(Y)u_k = \Pi(H)u_k + \Pi(Y)\Pi(X)u_k =$$
$$(\lambda - 2k)u_k + \Pi(Y)(k\lambda - k(k-1))u_{k-1} = ((k+1)\lambda - k(k+1))u_k,$$

que era lo que buscábamos. $\square$

Como V es de dimensión finita y los vectores u_k son vectores propios de $\Pi(H)$, con valores propios asociados diferentes, tienen que formar un conjunto linealmente independiente (los no nulos); luego tiene que existir un K que haga $u_K \neq 0$ y $u_{K+1} = 0$. Calculamos usando (3) de la Proposición 3.26

$$0 = \Pi(X)u_{K+1} = ((K+1)\lambda - (K+1)K)u_K = (K+1)(\lambda - K)u_K,$$

de donde deducimos $\lambda = K$.

Observación 3.27. *El razonamiento anterior nos permite deducir que si π es una representación de $SL_2(\mathbb{C})$ en un espacio vectorial complejo, entonces el valor propio más grande de $\Pi(H)$ es entero.*

Usando la proposición 3.26 obtenemos que todos los valores propios de $\Pi(h), \Pi(X)$ y $\Pi(Y)$ son enteros.

Encontramos una base $\{u_0, \ldots, u_K\}$ formada por vectores propios de $\Pi(H)$ y en la que X actúa como un shift a izquierda e Y como un shift a derecha (ambos con pesos). La acción de X, Y, H restricta al subespacio W generado por estos vectores es claramente irreducible. Además el valor propio más grande de $\Pi(H)$ cumple $\lambda = k = \dim W - 1$.

Como $SL_2(\mathbb{C})$ es simplemente conexo, podemos integrar Π a una representación de $SL_2(\mathbb{C})$ (irreducible). Así queda probado el teorema 3.23.

Sea Π una representación real de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$. Complexificando obtenemos $\Pi_{\mathbb{C}}$ una representación del álgebra $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ cuya acción ya determinamos por completo. Como mencionamos en la observación 3.27 los valores propios de la acción de H, X e Y por $\Pi_{\mathbb{C}}$ son enteros, por lo que los vectores propios de $\Pi(H)$ (que son soluciones a ecuaciones lineales con coeficientes en $\mathbb{R}$) serán reales.

Obtenemos que Π cumple exactamente las relaciones de la proposición 3.26, por lo que es irreducible.

No podemos integrar Π a una representación de $SL_2(\mathbb{R})$ directamente pues no es simplemente conexo. Pero tenemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.28. *Notamos por $\mathbb{K}$ a $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ indistintamente, pero el cuerpo está fijo para todo el ejemplo.*

Para $k > 0$ entero sea V el espacio de polinomios en dos variables homogéneos de grado $k-1$ con coeficientes en $\mathbb{K}$. Todos los elementos de V son de la forma

$$p = a_0 {z_1}^0 {z_2}^{k-1} + a_1 {z_1}^1 {z_2}^{k-2} + \cdots + a_{k-1} {z_1}^{k-1} {z_2}^0$$

de donde V es un espacio vectorial de dimensión k.

Si escribimos $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, definimos la representación $\pi_k : SL_2(\mathbb{K}) \to GL(V)$ como

$$g \cdot p(z_1, z_2) = p(g^{-1}(z_1, z_0)).$$

Podemos derivar y calcular la acción de $\Pi(H)$ para un polinomio elegido adecuadamente. Fijamos $n = k-1$

$$d\pi_k(H)(z_2^n) = \frac{d}{dt}_{|t=0} \pi_k(\exp(tH))(z_2^n) = \frac{d}{dt}_{|t=0} (\exp(t) z_2)^n = n z_2^n.$$

El operador $d\pi_k(H)$ tiene valor propio $k-1$ en un espacio de dimensión k por lo que la representación $d\pi$ tiene que ser irreducible y coincidir con la descripta anteriormente.

Podemos probar el siguiente teorema.

Teorema 3.29. *Para cada $k > 0$ entero existe una única representación irreducible de $SL_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^k$.*

Demostración. Sean $k > 0$ y π_k la representación definida en el ejemplo 3.28. Podemos complexificar y derivar para obtener $\Pi : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de dimensión k de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$. Como calculamos en el ejemplo $k-1$ es valor propio de $\Pi(H)$, lo que implica que Π debe ser irreducible. Volviendo hacia atrás obtenemos que π_k es irreducible.

La unicidad queda determinada por la forma de la acción del álgebra de Lie. $\square$

Teorema 3.30. *Toda representación irreducible y de dimensión k de $SL_2(\mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se realiza geométricamente como la representación π_k del ejemplo 3.28.*

Demostración. Vimos que el valor propio más grande de una representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ determina la clase de isomorfismo de la representación (el valor propio más grande da exactamente la dimensión del espacio menos uno, y luego las relaciones 3.26 determinan la clase de isomorfismo). En el resultado 3.29 vemos que $\dim V - 1$ es valor propio de $\Pi(H)$. $\square$

3.2.4. Truco unitario de Weyl

Dos preguntas vienen a la mente. Una, ¿cómo son las representaciones de dimensión finita (no irreducibles) de $SL_2(\mathbb{R})$? Dos, ¿son unitarias -para algún producto interno-?

La segunda pregunta la contestaremos en la siguiente sección. Con respecto a la primera pregunta, probaremos lo siguiente.

Proposición 3.31 (Truco unitario de Weyl)**.** *Toda representación de dimensión finita de $SL_2(\mathbb{R})$ se escribe como suma directa de sus componentes irreducibles.*

Demostración. Sea $\mathfrak{k}$ el álgebra de Lie del grupo compacto y simplemente conexo $SU(2)$.

Se cumple que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \sim \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ (ver 3.19).

Las representaciones de $SL_2(\mathbb{R})$ están en correspondencia con las de $SL_2(\mathbb{C})$ por ser su complexificación. Las de $SL_2(\mathbb{C})$ con las de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ por ser simplemente conexo. Las de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ con las de $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ en concencuencia de que $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \sim \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$. Las de $\mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$ con las de $\mathfrak{k}$ por ser su complexificación. Las de $\mathfrak{k}$ con las de $SU(2)$, por ser $SU(2)$ simplemente conexo. Como $SU(2)$ es compacto sus representaciones son suma directa de sus componentes irreducibles. Luego las de $SL_2(\mathbb{R})$ también. $\square$

4. Representaciones de dimensión infinita

Esta sección tiene dos partes.

La primera es sobre el Teorema de Howe y Moore, y trata sobre la ergodicidad y mixing de representaciones unitarias de grupos semisimples.

La segunda habla de la Propiedad (T), una propiedad de rigidez de representaciones. La Propiedad (T) además puede ser entendida como una versión cuantitativa y más fuerte del resultado de Howe y Moore (ver [Ben04], secciones 3.4, 3.5 y 3.6).

4.1. Teorema de Howe y Moore

En esta sección trataremos la ergodicidad y mixing de ciertas acciones de grupos de Lie semisimples.

4.1.1. Preliminares para el Teorema de Howe y Moore

La principal motivación para las definiciones de ergódico y mixing vienen del ejemplo 2.12 del operador de Koopman asociado a una transformación medible.

Ejemplo 4.1. *Sea U_T el operador de Koopman en $L^2(X,\mu)$ asociado a la transformación T en un espacio (X,μ) de probabilidad. Como X es de volumen finito las constantes $\{\mathbb{C}1\}$ forman un subespacio de $L^2(X,\mu)$ que es invariante por la acción de U_T.*

Podemos considerar la descomposición

$$L^2(X,\mu) \sim \mathbb{C} \oplus L^2_0(X,\mu)$$

en subespacios invariantes, donde $L^2_0(X,\mu)$ es el complemento ortogonal a las constantes, o las funciones de integral 0. Tiene sentido considerar la representación restricta

$$U^0_T : L^2_0(X,\mu) \to L^2_0(X,\mu).$$

El mapa T se dice ergódico si los únicos vectores invariantes de U_T son las constantes. Equivalentemente, T es ergódico si el único vector invariante por U^0_T es 0.

Definición 4.2. *Una representación unitaria se dice ergódica si el único vector invariante por la acción de G es el nulo.*

Decimos que una sucesión $(g_n)_n \subset G$ se va a infinito si escapa de cualquier compacto.

Definición 4.3. *La representación unitaria $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ se dice mixing si*

$$\lim_n p(g_n \cdot \xi, \eta) = 0$$

para todo par $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ y toda sucesión $(g_n)_n \subset G$ que se vaya a infinito.

Observación 4.4. *Si π es mixing también es ergódica. Si ξ es invariante por la acción de G entonces $0 = \lim_n p(g_n \cdot \xi, \eta) = p(\xi, \eta)$ para cualquier η, lo que implica que ξ es cero.*

Definición 4.5. *Un grupo de Lie se dice semisimple si su álgebra de Lie se escribe como suma directa de factores simples.*

En esta sección vamos a trabajar con la familia $SL_d(\mathbb{R})$ para $d \geq 2$ (ver sección 3.2.2). Las álgebras de Lie $\mathfrak{sl}(d, \mathbb{R})$ son simples y los grupos $SL_d(\mathbb{R})$ por lo tanto semisimples.

Definición 4.6. *Fijamos $d \geq 2$. Definimos los subgrupos $A, N, K < SL_d(\mathbb{R})$ como*

- *A el subgrupo de matrices diagonales,*
- *N el subgrupo de matrices triangulares superiores con 1 en la diagonal y*
- *$K \sim SO_d$ el grupo de matrices ortogonales.*

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [Ben07], sección 5.3.

Proposición 4.7 (Descomposiciones KAN Y KAK)**.** *Fijamos $G = SL_d(\mathbb{R})$. Entonces $G \sim KAN$ (la descomposición de Iwasawa) y $G \sim KAK$ (la descomposición de Cartan) son dos descomposiciones de G.*

La descomposición de Iwasawa es única, no así la de Cartan.

Comenzamos estudiando las representaciones de $SL_2(\mathbb{R})$. En este caso fijamos

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \quad N_s = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lema 4.8 (Lema de Mautner)**.** *Si $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria, $v \in \mathcal{H}$ y $S_v = \{g \in G : g \cdot v = v\}$ entonces*

(1) $S_v = \{g \in G : p(g \cdot v, v) = \|v\|^2\}$.

(2) Sean $s_n, s'_n \in S_v$ y $g \in G$ de forma que existe una sucesión $(g_n)_n$ tal que $\lim_n g_g = g$ y $\lim_n s_n g_n s'_n = 1_G$. Entonces $g \in S_v$.

Demostración. La prueba de (1) es directa de la igualdad $\|g \cdot v - v\|^2 = 2\|v\|^2 - 2\mathrm{Re} p(g \cdot v, v)$. Para ver (2) calculamos

$$p(g \cdot v, v) = \lim_n p(s_n g_n s'_n \cdot v, v) = p(v, v),$$

donde la primera igualdad es consecuencia de $s_n, s'_n \in S_v$. □

Sea $\pi : SL_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria.

Proposición 4.9 (N-truco)**.** *Si $\xi \in \mathcal{H}$ es N-invariante entonces es $SL_2(\mathbb{R})$-invariante.*

Demostración. Fijamos $(1,0) \in \mathbb{R}^2$ un punto base y miramos la acción usual de $SL_2(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^2$. La órbita de $(1,0)$ es todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ y su estabilizador es exactamente N.

Fijamos ahora $\xi \in \mathcal{H}$ un vector unitario y N-invariante y $f : G \to \mathbb{C}$ definida por $f(g) = p(g \cdot \xi, \xi)$. Usando el lema 4.8 obtenemos que $f(g) = 1$ solamente si $g \cdot \xi = \xi$. Además si $n, n' \in N$ y $g \in SL_2(\mathbb{R})$ cualesquiera

$$f(ngn') = p(ngn' \cdot \xi, \xi) = p(g \cdot \xi, n^* \cdot \xi) = f(g),$$

lo que muestra que la acción de f en el cociente $G/N \sim \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ está bien definida y además es N-invariante.

Calculando vemos que la acción estándar de N en $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ fija cada punto del eje x y es transitiva en cada recta horizontal. Esto último implica que f debe ser constante en cada recta horizontal, ya que es N-invariante. Por continuidad obtenemos que f es constante en el eje x y vale $f|\{Ox\} = f(id) = 1$.

La acción de A es transitiva y fiel en el eje x, por lo que tiene que ser $f(a) = 1$ para cada $a \in A$. Si r es una semirrecta por el origen y (r_1, r_2) es el vector unitario de r existe una única $k \in K$ que hace $k \cdot (1,0) = (r_1, r_2)$. Si $p = a \cdot (r_1, r_2)$ calculamos $f(ak) = f(ka) = f(k)$. Esto prueba que f es constante en las semirrectas por el origen.

Luego f debe ser constante 1. $\square$

Proposición 4.10 (A-truco)**.** *Si $v \in \mathcal{H}$ es A-invariante entonces es N-invariante.*

Demostración. Para cada $n \in N$ podemos encontrar una sucesión $(a_i) \subset A$ de forma que $a_i^{-1} n a_i \to \mathrm{id}$. Luego para cada vector unitario ξ que sea A-invariante hacemos la cuenta

$$p(n \cdot \xi, \xi) = p(n \cdot a_i \cdot \xi, a_i \xi) = p(a_i^{-1} n a_i \cdot \xi, \xi) \to p(\xi, \xi) = 1.$$

Luego ξ es también N-invariante. $\square$

Recordamos que si Γ es un nlátice de G, entonces existe una medida invariante por la acción por traslaciones de G en G/Γ, que notamos por ν. En este caso el cociente G/Γ hereda la estructura de variedad de G, pero no así la estructura de grupo ya que Γ no tiene que ser normal en G.

Ejemplo 4.11 (Flujos geodésico y horocíclico en G/Γ)**.** *Sea $G = SL_2(\mathbb{R})$. El cociente $PSL_2(\mathbb{R})$ de índice 2 de G se puede identificar con $T^1\mathbb{H}^2$ y hereda así una métrica riemanniana con la cual es completo y geodésico.*

Sea Γ un látice de G (que también es látice de $PSL_2(\mathbb{R})$) y g la métrica de curvatura constante en $X = PSL_2(\mathbb{R})/\Gamma$ heredada de $T^1\mathbb{H}^2$ en $PSL_2(\mathbb{R})$.

Se puede probar que el flujo geodésico en X es inducido por la multiplicaicón de matrices de $A < SL_2(\mathbb{R})$, es decir, si notamos Φ_t al flujo geodésico en X se cumple que $\Phi_t(x) = a_t \cdot x$ para alguna matriz a_t de A. El flujo geodésico en X es Anosov y por lo *tanto se puede definir el flujo horocíclico en X como el flujo a lo largo de las variedades estables del flujo geodésico. Se puede probar que el flujo horocíclico en X es inducido por la multiplicación por matrices de N.*

Lema. *El flujo geodésico y horocíclico son ergódicos en X, en el sentido de que las acciones unitarias inducidas en $L^2_0(X,\nu)$ son ergódicas.*

Demostración del lema. El argumento es sencillo.

Como la acción de G en X preserva ν podemos definir $\pi : G \to \mathcal{U}(L^2(X,\nu))$ por $(g \cdot f)(x) = f(gx)$.

Para ver que el flujo horocíclico es ergódico consideramos f un vector N-invariante: la proposición 4.9 dice que f es G-invariante. Pero la acción de G es transitiva en X, por lo que f debe ser constante, y por lo tanto 0. La prueba de ergodicidad para el flujo geodésico es idéntica. □

4.1.2. Prueba del Teorema de Howe y Moore

Teorema 4.12 (Howe-Moore, caso particular)**.** *Si $\pi : SL_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria ergódica entonces también es mixing.*

Corolario 4.13. *Con la notación del ejemplo 4.11. El flujo geodésico y horocíclico son mixing en X, en el sentido de que las acciones unitarias inducidas en $L^2_0(X,\nu)$ son mixing.*

Demostración del corolario. Los flujos geodésico y horocíclico son generados por la multiplicación en X por elementos de los subgrupos A y N respectivamente, que son no acotados en $SL_2(\mathbb{R})$. La acción inducida en $L^2_0(X,\nu)$ es ergódica y por el teorema 4.12 también son mixing. □

Demostración del teorema 4.12. Usamos la descomposición $G = KAK$. Sea $(g_n)_n$ una sucesión que se va a infinito y $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ dos vectores unitarios. Reescribimos $g_n = k_n a_n k'_n$ donde $k_n, k'_n \in K$ y $a_n \in A$ para cada n. Como K es compacto podemos asumir que k_n y k'_n son constantes k y k' respectivamente (e iguales a la identidad si cambiamos ξ y η por $k' \cdot \xi$ y $k^* \cdot \eta$ respectivamente).

Podemos usar que la acción de G es por isometrías y que la bola unidad es débilmente compacta para encontrar un límite débil de $g_n \cdot \xi$ que notamos ξ_0. Tenemos que ver $\xi_0 = 0$.

Sea $u \in N$. Podemos suponer que el primer elemento de la primer fila de a_n se va a infinito y calculando obtenemos $\lim_n a_n^{-1} u a_n = \mathrm{id}$. Si $w \in \mathcal{H}$ es cualquiera calculamos

$$\begin{aligned}
|p(u \cdot \xi_0 - \xi_0, w)| &= \lim_n |p(u a_n \cdot \xi - a_n \cdot \xi, w)| \\
&= \lim_n |p(a_n a_n^{-1} u a_n \cdot \xi - a_n \cdot \xi, w)| \\
&\leq \liminf_n \|\pi(a_n)\| \|a_n^{-1} u a_n \cdot \xi_0 - \xi_0\| \|w\| \to 0.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $u \cdot \xi_0 - \xi_0 = 0$ para $u \in N$ cualquiera, o que ξ_0 es N-invariante. Por 4.9 sabemos que ξ_0 es G-invariante y como π es ergódica tiene que ser $\xi_0 = 0$. □

Obtenemos la respuesta a una de las preguntas hechas en la sección anterior.

Corolario 4.14. *Si π es una representación unitaria e irreducible de $SL_2(\mathbb{R})$ entonces o es la representación unidimensional trivial o es de dimensión infinita.*

Demostración. Sea π una representación unitaria e irreducible de $SL_2(\mathbb{R})$ y supongamos que no es la representación trivial unidimensional. Si $v \neq 0$ es un vector invariante entonces el subespacio $\{\mathbb{C}v\}$ es unidimensional, cerrado e invariante por la acción de $SL_2(\mathbb{R})$. Como π es irreducible y no es unidimensional debe ser $v = 0$. Esto prueba que la representación es ergódica, y por el teorema 4.12 debe ser mixing. En dimensión finita la condición mixing $p(g_n \cdot \xi, \eta) \to 0$ implica que $g_n \cdot \xi \to 0$, que no puede pasar pues π es unitaria. □

El teorema 4.12 es en realidad un caso particular de un restultado que vale para grupos de Lie semisimples y de centro finito.

Teorema 4.15. *Sea G un grupo de Lie conexo y semisimple con centro finito, y sea $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria. Supongamos que cada subgrupo normal conexo de G no deja vectores invariantes no nulos. Entonces la acción de G es mixing.*

La prueba del caso general es muy parecida a la del Teorema 4.12. Usa el Teorema de Jacobson Morozov (ver 3.22), el hecho de que todo elemento unipotente del grupo da lugar a un subgrupo isomorfo a $SL_2(\mathbb{R})$.

4.2. La Propiedad (T)

La Propiedad (T) de Kazhdan fue introducida por D. Kazhdan en el 1967 (ver [Kaz67]) dada su fuerte relación con la estructura de ciertos grupos de Lie. Dejamos como referencia el libro Kazhdan Property (T) (ver [BHV02]).

La Propiedad (T) también puede ser entendida como una versión más fuerte que el resultado del teorema 4.15 de Howe y Moore. Si el rango de un grupo de Lie semisimple es mayor a 2 entonces el decaimiento de los coeficientes de la definición 4.3 se puede cuantificar de forma que la Propiedad (T) de Kazhdan se puede verificar casi automaticamente (ver [Ben04]).

4.2.1. Definición y ejemplos para la Propiedad (T) de Kazhdan

La Propiedad (T) puede ser definida en términos de la topología de Fell. Si bien no es la definición que usaremos (tampoco es la más intuitiva) la damos a continuación. En la sección 2.7 definimos la topología de Fell en los espacios $\widehat{G}$ y $\check{G}$.

Definición 4.16 (Propiedad (T) según la topología de Fell)**.** *Decimos que un grupo de Lie G tiene la Propiedad (T) de Kazhdan si la representación trivial $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es aislada según la topología de Fell.*

Para dar la definición que vamos a usar de la Propiedad (T) de Kazhdan hacen falta algunas definiciones.

Definición 4.17. *Dadas $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria de G, un conjunto compacto $Q \subset G$ y $\varepsilon > 0$ decimos que un vector $\xi \in \mathcal{H}$ es (Q, ε)-invariante si*

$$\sup_{g \in Q} \frac{\|g \cdot \xi - \xi\|}{\|\xi\|} < \varepsilon.$$

Definición 4.18 (Vectores casi invariantes)**.** *Sea $\pi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria de G. Decimos que π tiene vectores casi invariantes si para cada $Q \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$ existe $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo (Q, ε)-invariante.*

Observación 4.19. *Si ξ es un vector (K, ε)-invariante entonces $\xi' = \xi/\|\xi\|$ también lo es. De ahora en adelante suponemos que los vectores casi invariantes son unitarios.*

Definición 4.20. *Un grupo G tiene la Propiedad (T) si cada vez que una representación π de G tiene vectores casi invariantes también tiene un vector invariante no nulo.*

Podemos interpretar la Propiedad (T) como una propiedad de rigidez de las representaciones del grupo.

Observación 4.21. *Sea $1_G : G \to \mathcal{U}(\mathbb{C})$ la representación trivial. Como dice la proposición 2.54 que una representación π tenga vectores casi invariantes es equivalente a que $1_G \prec \pi$. Esto es que los coeficientes de 1_G se pueden aproximar uniformemente en compactos por coeficientes de π, o que π está en cualquier entorno de 1_G (para los entornos definidos en 2.51). Que la representación trivial sea un abierto de esta topología implica en particular que tiene que ser $1_G \subset \pi$, o que π tiene vectores invariantes.*

Definición 4.22. *Decimos que $Q \subset G$ es de Kazhdan si existe $\varepsilon > 0$ tal que toda representación unitaria con vectores (Q, ε)-invariantes tiene vectores invariante no nulos. En ese caso llamamos al par (Q, ε) par de Kazhdan para G.*

Observar que en la definición 4.22 el subconjunto Q es independiente de la representación π de G.

Proposición 4.23. *Son equivalentes.*

(1) Existe un subconjunto de Kazhdan de G compacto,

(2) G tiene la Propiedad (T),

Demostración. Que (1) implica (2) es inmediato: si π tiene vectores casi invariantes entonces en particular los tiene para el par de Kazhdan (Q, ε). Luego π tiene algún vector invariante no nulo.

Para ver que (2) implica (1) suponemos que G no tiene subconjuntos de Kazhdan compactos. Sean $Q \subset G$ compacto y $\varepsilon > 0$. Como Q no es de Kazhdan existe una representación $\pi_{Q,\varepsilon} : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H}_{Q,\varepsilon})$ y un vector $\xi_{Q,\varepsilon}$ que es (Q, ε)-invariante pero de forma que $\pi_{Q,\varepsilon}$ no tiene vectores invariante no nulos.

Si $I = \{(Q, \varepsilon) : Q \subset G \text{ compacto}, \varepsilon > 0\}$ definimos

$$\pi = \bigoplus_I \pi_{Q,\varepsilon}.$$

La representación π tiene vectores casi invariantes pero no tiene vectores invariantes no nulos. Luego G no tiene la Propiedad (T), lo cual contradice la hipótesis. □

Ejemplo 4.24. *Los siguientes grupos tienen la Propiedad (T).*

- *Los grupos compactos tienen la Propiedad (T) (ver proposición 4.25).*
- *La imagen por un morfismo de un grupo con la Propiedad (T) tiene la Propiedad (T). En particular los cocientes de grupos con la Propiedad (T) por un subgrupo normal tienen la Propiedad (T) (ver proposición 4.27).*
- *Vamos a probar que un grupo tiene la Propiedad (T) si y solamente si sus látices tienen la Propiedad (T) (ver teorema 4.35).*
- $SL_d(\mathbb{R})$ *tiene la Propiedad (T) si* $d \geq 3$ *(más en general, los grupos de Lie semisimples de rango alto tienen la Propiedad (T) (ver teorema 4.37).*

Comenzamos por dar pruebas para algunos de los items recién mencionados.

Proposición 4.25. *Si G es compacto entonces tiene la Propiedad (T).*

Demostración. Sean π una representación unitaria y ξ un vector no nulo y $(G, \frac{1}{2})$-invariante. Sea $\mathcal{C}$ la clausura convexa de $\{g \cdot \xi : g \in G\}$ y $\xi_0 \in \mathcal{C}$ el vector que minimiza la norma en $\mathcal{C}$. Como la acción de G por π es unitaria el vector ξ_0 es invariante. Además $\|\xi_0 - \xi\| \leq \sup_{g \in Q} \|g \cdot \xi - \xi\| < \frac{\|\xi\|}{2}$. Luego ξ_0 es no nulo.

Probamos que $(G, 1/2)$ es un par de Kazhdan. Luego como G es compacto tiene la Propiedad (T). □

Observación 4.26. *En la prueba de la Proposición 4.25 el valor de $\varepsilon = \frac{1}{2}$ se puede mejorar a $\sqrt{2}$ (ver resulado 1.1.5 de [BHV02]).*

Proposición 4.27. *Sea $\phi : G \to H$ un morfismo sobreyectivo. Si G tiene la Propiedad (T) entonces H tiene la Propiedad (T).*

Demostración. Sea (Q, ε) un par de Kazhdan para G, sea $K = \phi(Q) \subset H$ y $\pi : H \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ una representación unitaria con un vector ξ que es (K, ε)-invariante. Entonces ξ es un vector (Q, ε)-invariante por la representación $\pi' = \pi \cdot \phi : G \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$. Como G tiene la Propiedad (T) existe un vector ξ_0 invariante por π'. Calculamos y vemos

$$\pi(h)(\xi_0) = \pi(\phi(g))(\xi_0) = \pi'(g)(\xi_0) = \xi_0$$

para todo $h \in H$. Probamos que (K, ε) es un par de Kazhdan □

Corolario 4.28. *El cociente por un subgrupo normal de un grupo con la Propiedad (T) tiene la Propiedad (T).*

Ejemplo 4.29 (Un grupo sin la Propiedad (T))**.** *El grupo aditivo $\mathbb{R}$ no tiene la Propiedad (T).*

Consideramos la representación regular a izquierda $\lambda : \mathbb{R} \mapsto \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}, dx))$. Los únicos vectores invariantes por la acción regular de un grupo son las constantes (porque la acción es transitiva) que en este caso no están en $L^2(\mathbb{R}, dx)$ porque dx no es de volumen total finito.

Sean $Q \subset \mathbb{R}$ compacto y $\varepsilon > 0$. Sea B una bola centrada en cero que contenga a Q. Sea C una bola muy grande en $\mathbb{R}$. Si $q \in Q$, entonces

$$\|q \cdot \chi_C - \chi_C\|^2 = 2(dx(C) - dx(q \cdot C \cap C)) < 4dx(B) < \varepsilon^2 dx(C)^2,$$

si elegimos C muy muy grande. La función χ_C es por lo tanto (Q, ε)-invariante. Como Q y ε son arbitrarios probamos que λ tiene vectores casi invariantes.

Más en general tenemos lo siguiente.

Definición 4.30. *Un grupo se dice* promediable *si la representación regular tiene vectores casi invariantes.*

Ejemplos de grupos promediables son los grupos abelianos, o más en general los grupos solubles (ver [Mor15], Proposición 12.2.6).

Proposición 4.31. *Son equivalentes que G sea compacto y que sea promediable y tenga la Propiedad (T).*

Demostración. Si G es promediable y tiene la Propiedad (T) entonces la representación regular tiene que tener al menos un vector invariante no nulo. Como los únicos vectores invariantes son las constantes se obtiene que la medida de Haar es finita y por lo tanto G es compacto. □

Observación 4.32. *La proposición anterior dice que la Propiedad (T) y la promediabilidad de un grupo son propiedades excluyentes (a menos de grupos compactos).*

Corolario 4.33. *Si G tiene la Propiedad (T) entonces*

- *G es unimodular.*
- *El grupo $G/\overline{[G,G]}$ es compacto.*

Demostración. Como G tiene la Propiedad (T) cualquier morfismo $G \mapsto \mathbb{R}$ debe ser trivial ($G \mapsto 1$), si no $\mathbb{R}$ tendría la Propiedad (T). Luego G es unimodular (ver [Bum04], proposición 1.2). El cociente $G/\overline{[G,G]}$ es abeliano y es imagen por la proyección canónica de G, un grupo con la Propiedad (T), por lo que es promediable y tiene la Propiedad (T). Por la proposición 4.31 es compacto. □

4.2.2. Los grupos con la Propiedad (T) son compactamente generados

La siguiente propiedad de los grupos con la Propiedad (T) es una de las más fuertes motivaciones para introducir esta clase de grupos.

Proposición 4.34. *Si G tiene la Propiedad (T) entonces es compactamente generado. En particular los grupos discretos con la Propiedad (T) son finitamente generados.*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ la familia de todos los subgrupos abiertos y compactamente generados de G. La familia $\mathcal{C}$ es no vacía pues G es localmente compacto y un conjunto compacto con interior no vacío genera un subgrupo abierto. Por cada $H \in \mathcal{C}$ consideramos el conjunto G/H de coclases de H en G. Como H es abierto cada G/H tiene que ser discreto.

Consideramos ahora la representación

$$\pi : G \mapsto \mathcal{U}(\bigoplus_{H\in\mathcal{C}} \ell^2(G/H)), \tag{1}$$

de forma que la acción en cada coordenada de la suma sea $g \cdot (a_{kH})_{kH} = (a_{gkH})_{kH}$ (la acción es la de un shift en las coclases de cada H).

Afirmación. *La representación π tiene vectores casi invariantes.*

Demostración. Sea $Q \subset G$ compacto y sea K el subgrupo de G generado por un entorno de Q relativamente compacto. Sea $\delta'_K \in \ell^2(G/K)$ la función que vale 1 en la coordenada K y cero en el resto. Extendemos δ'_K a $\delta_K \in \bigoplus_{H\in\mathcal{C}} \ell^2(G/H)$ como cero en el resto de las coordenadas. Como $Q \subset K$ entonces

$$\sup_{q\in Q} \|q \cdot \delta_K - \delta_K\| = 0.$$

El vector δ_K es por lo tanto (Q, ε)-invariante para todo $\varepsilon > 0$. □

Como G tiene la Propiedad (T) π tiene un vector $\xi = \oplus\xi_H$ invariante y no nulo, o sea una coordenada H de forma que $\xi_H = (a_{gH})_{gH} \in \ell^2(G/H)$ que es no nulo. Como G actúa de forma transitiva en las coclases de H tiene que ser ξ_H constante. Luego G/H deben ser finitas coclases. Obtenemos que G es generado por la unión de finitos trasladados del generador de H, que es compacta. □

4.2.3. Los látices de grupos con la Propiedad (T) tienen la Propiedad (T)

La siguiente proposición nos da una lista de ejemplos de grupos con la Propiedad (T).

Proposición 4.35. *Sean G un grupo de Lie y $\Gamma < G$ un látice. Entonces G tiene la Propiedad (T) si y solamente si Γ tiene la Propiedad (T).*

Demostración. Vamos a probar el directo. La prueba completa se puede encontrar en [BHV02], teorema 1.7.1.

Sean $\Gamma < G$ un látice de G y μ la medida de Haar en G. Supongamos que $\pi : \Gamma \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria de Γ con vectores casi invariantes: para todo $Q \subset \Gamma$ finito y $\varepsilon > 0$ hay un vector $\xi \in \mathcal{H}$ unitario tal que $\sup_{q\in Q} \|q \cdot \xi - \xi\| < \varepsilon$. Queremos extender π a una representación de G. Para eso necesitamos cambiar el espacio de Hilbert.

Fijamos F un dominio fundamental medible de Γ en G y definimos el mapa

$$m : F \times \Gamma \mapsto G \text{ dado por } (x, \gamma) \mapsto x\gamma \in G.$$

El mapa m es una biyección, tan medible como su dominio. Además si $g, x \in G$ notamos $(x_g, g_x) := m^{-1}(gx)$ con $x_g \in F$ y $g_x \in \Gamma$. Consideramos σ la representación inducida definida en 2.18:

Sea

$$\mathcal{H}_\pi = \{f : G \mapsto \mathcal{H} : \forall g \in G, \forall \gamma \in \Gamma \ f(g) = \pi(\gamma) f(g\gamma) \ y \ \|f\|^2 := \int_F \|f(g)\|^2_{\mathcal{H}} d\mu(g) < \infty\}.$$

La representación $\sigma : G \mapsto \mathcal{U}(\mathcal{H}_\pi)$ definida por

$$(g^{-1} \cdot f)(x) := f(gx) = f(x_g g_x) = \pi(g_x^{-1}) f(x_g)$$

cumple que la acción de Γ restricta a las secciones constantes es exactamente π.

Fijemos ahora $C \subset G$ compacto, $\varepsilon > 0$ y $F_1 \subset F$ un dominio compacto y de forma que $\mu(F \setminus F_1) < \frac{\varepsilon^2}{8}$. Sean

$$\Gamma_1 = \{g_x : g \in C, x \in F_1\} \text{ y } \hat{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \cup \Gamma_1^{-1}.$$

Ambos son finitos y por lo tanto compactos en Γ. Sea $\xi \in \mathcal{H}$ un vector $(\hat{\Gamma}_1, \frac{\varepsilon}{2})$-invariante (por π).

Sea $f \in \mathcal{H}_\pi$ de forma que $f|_F = \xi$. Si $g \in C$, calculamos

$$\|g^{-1} \cdot f - f\|^2 = \int_{F \setminus F_1} 4\|f\|^2 d\mu + \int_{F_1} \|\pi(g_x^{-1} f(x_g) - f(x)\|^2_{\mathcal{H}} d\mu(x) < \varepsilon \|f\|^2.$$

Luego σ tiene casi vectores invariantes. Como G tiene la Propiedad (T), tiene algún vector invariante ξ_0.

El vector ξ_0 debe ser constante, y por lo tanto determina un vector en $\mathcal{H}$ que es Γ invariante por π. $\square$

Encontramos con la Proposición 4.35 un ejemplo no trivial de un grupo sin la Propiedad (T).

Corolario 4.36. *El grupo $SL_2(\mathbb{R})$ no tiene la Propiedad (T).*

Demostración. Si Σ_g es una superficie compacta y de género g entonces $\Gamma = \pi_1(\Sigma_g)$ es un látice de $SL_2(\mathbb{R})$. El abelianizado de Γ es abeliano y se puede probar que es ismorfo a $\mathbb{Z}^{2g}$, que no es compacto. Luego no puede tener la Propiedad (T). $\square$

4.2.4. $SL_d(\mathbb{R})$ tiene la Propiedad (T)

A continuación probaremos que $SL_d(\mathbb{R})$ tiene la Propiedad (T) (para $d \geq 3$).

Teorema 4.37. *El grupo $SL_d(\mathbb{R})$ tiene la Propiedad (T) si $d \geq 3$.*

La prueba que vamos a dar tiene varias partes. Comenzamos reduciendo la el problema a encontrar un vector $\xi \in \mathcal{H}$ invariante por la acción de $SL_2(\mathbb{R})$ (para alguno de sus encajes usuales en $SL_d(\mathbb{R})$).

Proposición 4.38. *Si ξ es un vector de $\mathcal{H}$ que es $SL_2(\mathbb{R})$-invariante, para alguno de los encajes estándar de $SL_2(\mathbb{R})$ en $SL_d(\mathbb{R})$, entonces ξ es $SL_d(\mathbb{R})$-invariante.*

Demostración. Asumimos sin pérdida de generalidad que ξ es invariante por

$$SL_2(\mathbb{R}) \sim \left\{ \begin{bmatrix} g & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d-2} \end{bmatrix} : g \in SL_2(\mathbb{R}) \right\} \subset SL_d(\mathbb{R}).$$

Veremos que es invariante por

$$SL_3(\mathbb{R}) \sim \left\{ \begin{bmatrix} g & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d-3} \end{bmatrix} : g \in SL_3(\mathbb{R}) \right\} \subset SL_d(\mathbb{R}).$$

Utilizando este paso inductivo se obtiene la prueba para $SL_d(\mathbb{R})$.

Notamos por $E_{i,j}(x)$ a la matriz de $SL_d(\mathbb{R})$ con unos en la diagonal, $x \in \mathbb{R}$ en el lugar $i \neq j$ y ceros en el resto. Como los conjuntos

$$\left\{ \begin{bmatrix} g & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : g \in SL_2(\mathbb{R}) \right\} \cup \{E_{i,3}(x), x \in \mathbb{R}, i = 1, 2\} \cup \{E_{3,i}(x), x \in \mathbb{R}, i = 1, 2\}$$

generan $SL_3(\mathbb{R})$ alcanza con probar que ξ es invariante por la acción de $E_{i,3}(x)$ y $E_{3,i}(x)$ para $i = 1, 2$.

Vemos que ξ es $E_{1,3}(x)$-invariante usando el lema 4.8. Sea

$$s = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ con } \lambda < 0.$$

Con la notación del Lema 4.8 y usando $s_n = s^n, s'_n = s^{-n}$ calculamos $\lim_n s_n E_{1,3}(x) s'_n = \mathrm{Id}$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Luego ξ es $E_{1,3}(x)$-invariante. La invarianza es análoga para el resto de los generadores. $\square$

Para probar que existe un vector no nulo y $SL_2(\mathbb{R})$-invariante (para algún encaje) vamos a aplicar la proposición 4.9.

Observación 4.39. *Supongamos que existe un vector $\xi \in \mathcal{H}$ no nulo que es invariante por la acción de*

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{Id}_{d-2} \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}.$$

Entonces N es el subgrupo unipotente de la descomposición KAN de

$$SL_2(\mathbb{R}) \sim \begin{bmatrix} * & 0 & * & \\ 0 & 1 & 0 & \\ * & 0 & * & \\ & & & \mathrm{Id}_{d-3} \end{bmatrix}$$

(recordar la proposición 4.7) y podemos aplicar el resultado 4.9, probando así que el vector ξ es $SL_2(\mathbb{R})$-invariante (el subgrupo de $SL_d(\mathbb{R})$ que es isomorfo a $SL_2(\mathbb{R})$ definido por el encaje).

Sea

$$G = SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \sim \left\{ \begin{bmatrix} g & & a \\ & & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : g \in SL_2(\mathbb{R}), a, b \in \mathbb{R} \right\} < SL_d(\mathbb{R}).$$

Entonces G contiene un subgrupo isomorfo a $SL_2(\mathbb{R})$ y otro subgrupo normal isomorfo a

$$\mathbb{R}^2 \sim \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [BHV02].

Teorema 4.40. *Si $\pi : SL_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 \to \mathcal{U}(\mathcal{H})$ es una representación unitaria con vectores casi invariantes entonces existe $\xi \neq 0$ un vector invariante por $\mathbb{R}^2$.*

Observación 4.41.

4.2.5. Propiedad (T) y promediabilidad de $SL_2(\mathbb{R})$

El grupo $SL_2(\mathbb{R})$ es intermedio si lo miramos desde el punto de vista Propiedad (T)-promediabilidad. No tiene la Propiedad (T) (ver Corolario 4.36), y si bien tiene subgrupos que son promediables (por ejemplo $SO_1(\mathbb{R})$, que es compacto) no es promediable.

Proposición 4.42. *El grupo $SL_2(\mathbb{R})$ no es promediable.*

La prueba es corolario de la siguiente obervación y la proposición que sigue.

Observación 4.43. *Si un grupo es promediable entonces todos sus subgrupos cerrados lo son.*

Si $H < G$ es un subgrupo cerrado entonces la representación regular de H es restricción de la representación regular de G. Si G deja vectores casi invariantes por la representación regular entonces también los deja la representación regular de H.

Proposición 4.44. *El grupo libre $\mathbb{F}^2$ no es promediable.*

Demostración. Supongamos que $\mathbb{F}^2$ es promediable. Sean $K_n \subset \mathbb{F}^2$ una sucesión de compactos de forma que $K_n \nearrow \mathbb{F}^2$ y $\varepsilon_n \searrow 0$. Como $\mathbb{F}^2$ es promediable para cada par (K_n, ε_n) existe $f_n \in L^2(\mathbb{F}^2)$ unitario y tal que

$$\sup_{g \in K_n} \|g \cdot f_n - f_n\|_2 < \varepsilon_n.$$

Definimos para cada n la medida $\mu_n = \sum_{x \in \mathbb{F}^2} |f_n(x)|^2 \delta_x$ en $\mathrm{Prob}(\overline{\mathbb{F}^2})$. Como son probabilidades y $\overline{\mathbb{F}^2}$ es compacto existe un punto de acumulación débil de la sucesión $(\mu_n)_n$ que es una probabilidad soportada en $\overline{\mathbb{F}^2}$.

Afirmación 4.45. *La medida μ es $\mathbb{F}^2$-invariante.*

Demostración. Si $\phi \in C(\overline{\mathbb{F}^2})$ calculamos

$$\begin{aligned}
|\int \phi dg_* \mu - \int \phi d\mu| &= \lim_n |\sum_{x \in \mathbb{F}^2} |f_n(x)|^2 \phi(gx) - \sum_{x \in \mathbb{F}^2} |f_n(x)|^2 \phi(x)| \\
&= |\sum_{x \in \mathbb{F}^2} |f_n(g^{-1}x)|^2 \phi(x) - \sum_{x \in \mathbb{F}^2} |f_n(x)|^2 \phi(x)| \\
&\leq \|\phi\|_\infty \sum_{x \in \mathbb{F}^2} ||f_n(g^{-1}x)|^2 - |f_n(x)|^2|.
\end{aligned}$$

Notamos $a_x = |f_n(g^{-1}x)|$ y $b_x = |f_n(x)|$ y calculamos

$$\sum_{x \in \mathbb{F}^2} |a_x^2 - b_x^2| = \sum_{x \in \mathbb{F}^2} |a_x - b_x||a_x + b_x| \leq \left(\sum_{x \in \mathbb{F}^2} |a_x - b_x|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{x \in \mathbb{F}^2} |a_x + b_x|^2 \right)^{1/2},$$

y podemos acotar el último término, usando que las funciones f_n son (K_n, ε_n)-invariantes por $\|f_n \cdot g^{-1} + f_n\|_2 \varepsilon_n^{1/2} \to 0$. □

Encontramos una probabilidad μ soportada en $\overline{\mathbb{F}^2}$ y que es invariante por la acción por traslaciones a izquierda de $\mathbb{F}^2$.

De la invarianza de μ por traslaciones y el hecho de que tiene volumen finito se deduce que debe estar soportada en $\partial\mathbb{F}^2$.

Notamos a, b a los generadores del grupo. Los únicos puntos fijos en $\partial\mathbb{F}^2$ por la acción de a son los puntos $a^+ = \lim a^n$ y $a^- = \lim a^{-n}$. Luego μ debe estar soportada en $\{a^+\}\cup\{a^-\}$. Pero lo mismo debe suceder para b. Esto es absurdo.

$\square$

5. Representaciones borde

Esta sección trata el tema de representaciones borde de ciertos grupos, así como representaciones de grupos discretos.

Comenzamos enunciando y probando un caso particular del teorema 5.1 que dice que para ciertos grupos de Lie las restricciones a látices de representaciones irreducibles lo siguen siendo.

Luego tratamos la irreducibilidad de la representación borde del grupo de Lie $SL_2(\mathbb{R})$ y del grupo libre en dos generadores. La prueba de la irreducibilidad para el grupo libre está basada en el artículo [Gar14] e ilustra la prueba de un caso más general.

Terminamos la sección repasando algunos resultados sobre irreducibilidad y rigidez de representacion borde.

5.1. Restricciones

En [CS91] M. Cowling y T. Steger prueban lo siguiente.

Teorema 5.1. *Sea G un grupo de Lie semisimple y $\Gamma < G$ un látice de G. Entonces toda representación irreducible de G restringida a Γ sigue siendo irreducible.*

La siguiente prueba vale para cualquier grupo (no exlusivamente grupos semisimples) pero solamente en dimensión finita.

Demostración de 5.1 en dimensión finita. Sean $\pi : G \to GL(\mathbb{C}^d)$ una representación de G y V un subespacio invariante por Γ.

Afirmamos que el subespacio V debe ser invariante por G.

Los látices son Zariski densos en el grupo (ver [Mor15], resultado 4.5.6) por lo que alcanza ver que la condición "ser subespacio invariante" es Zariski cerrada.

Para ver esto podemos considerar una base B de $\mathbb{C}^d$ que haga que

$$V = \{v : \mathrm{coord}_B(v) = (v_1, \dots v_k, 0 \dots, 0)\}.$$

Que V sea invariante significa que para cada $v \in V$ y $\gamma \in \Gamma$ se cumple que $\pi(\gamma)(v) \in V$, o escrito de otra manera, se tiene que cumplir

$$\mathrm{coord}_B(\pi(\gamma)(v)) = (w_1, \dots w_k, 0 \dots, 0)$$

para algunos w_i in $\mathbb{C}$. Esta condición es lineal y por lo tanto Zariski cerrada.

Como V es G-invariante y π es irreducible como representación de G debe ser $\pi|_\Gamma : \Gamma \to GL(\mathbb{C}^d)$ irreducible. $\square$

5.2. La representación borde de $SL_2(\mathbb{R})$

La representación borde es una representación unitaria que surge naturalmente al estudiar la acción natural de un grupo en su borde.

Ejemplo 5.2 (La representación borde de $SL_2(\mathbb{R})$)**.** *El grupo $PSL_2(\mathbb{R})$ actúa por transformaciones de Moebius en el plano hiperbólico $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ libre y discontinuamente. Esta acción se extiende naturalmente al borde de $\mathbb{H}^2$ e induce una representación unitaria $\pi : SL_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{U}(L^2(\mathbb{R}, dx))$, donde dx denota la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Dicha representación está dada por*

$$\pi \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f(x) = |-cx + a|^{-1} f\left(\frac{dx - b}{-cx + a}\right).$$

Si notamos $\varphi(x) = \frac{dx-b}{-cx+a}$ entones $\varphi'(x) = (-cx + a)^{-2}$ de donde deducimos que π es unitaria. Si $f, h \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ y $g \in SL_2(\mathbb{R})$ entonces

$$\begin{aligned} p(g \cdot f, g \cdot h) &= \int (g \cdot f)(x)\overline{(g \cdot h)(x)} dx \\ &= \int \varphi'(x)(f \cdot \varphi)(x)\overline{(h \cdot \varphi)(x)} dx = p(f, h) \end{aligned}$$

Proposición 5.3. *La representación borde de $SL_2(\mathbb{R})$ definida en el ejemplo 5.2 es irreducible.*

Demostración. Vamos a usar el Lema de Schur 2.33 para probar la irreducibilidad. Sea $B \in \mathcal{B}(L^2(\mathbb{R}, dx))$ un operador lineal y acotado que conmuta con $\pi(g)$ para cada elemento $g \in SL_2(\mathbb{R})$. Vamos a probar que B es constante.

Si B conmuta con π entonces en particular conmuta con las restricciones a los subgrupos a un parámetro

$$P_s = \pi\left(\begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \text{ con } s \in \mathbb{R} \text{ y } T_a = \pi\left(\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}\right) \text{ con } a \neq 0.$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ la restricción a estos subgrupos queda

$$P_s(f)(x) = f(x - s) \quad y \quad T_a(f)(x) = |a| f(a^2 x).$$

Notamos por $\widehat{f}$ a la transformada de Fourier de f. Recordamos que

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp(2\pi i x \xi) dx.$$

Primero usamos que B conmuta con la acción del subgrupo unipotente superior.

Afirmación. *Se cumple que $\widehat{Bf}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$ para toda $f \in L^2(\mathbb{R}, dx)$ para alguna función m medible.*

Demostración. Es concecuencia de que B y P_s conmutan, para cada s, y que la transformada de Fourier lleva las traslaciones en multiplicación.

□

Ahora usamos que B conmuta con la acción del subgrupo diagonal.

Afirmación. *Para cada $a \neq 0$ y $\xi \in \mathbb{R}$ se cumple que $m(\xi) = m(a^{-2}\xi)$. Luego m es constante en las semirrectas $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$.*

Demostración. Que $BT_a = T_a B$ implica

$$Bf(a^2 x) = [B(f)(a^2 \cdot)](x).$$

Multiplicando de ambos lados por $\exp(-2\pi i x \xi)$ e integrando obtenemos

$$a^{-2}\widehat{Bf}(a^{-2}\xi) = B(\widehat{f(a^2\cdot)})(\xi),$$

de donde

$$m(a^{-2}\xi) = m(\xi)$$

para todo $a \neq 0$ y casi todo ξ. □

Falta descartar que los subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ cuya transformada de Fourier está soportada en $\mathbb{R}^+$ o $\mathbb{R}^-$ no son invariantes. Esto se puede encontrar en [Kna01], capítulo II parte 5.

□

La representación borde de $SL_2(\mathbb{R})$ es parte de una familia de representaciones unitarias de $SL_2(\mathbb{R})$ llamada Serie principal unitaria (es una familia indexada en $\mathbb{R}$). La Serie principal unitaria está definida por, si $s \in \mathbb{R}$ como

$$\pi \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} f(x) = |-cx+a|^{-1+\frac{si}{2}} f\left(\frac{dx-b}{-cx+a}\right).$$

La prueba de la irreducibilidad de esta familia de representaciones unitarias es similar a la de la representación borde ($s = 0$). Hay otras dos familias, llamadas serie complementaria (indexada en $(0,1)$) y serie discreta (indexada en $\mathbb{Z}$) y las tres familias comprenden todas las clases de irreducibilidad de representaciones unitarias de $SL_2(\mathbb{R})$.

5.3. La representación borde del grupo libre

Se puede recurrir a [GH90] por teoría de grupos hiperbólicos.

Sea (X, d) un espacio métrico completo y geodésico (para cada par de puntos x, y existe una geodésica de x a y); en ese caso se cumple que existe una geodésica $\gamma_{x,y}$ que realiza la distancia $d(x, y)$. Sea $I(x, y, \delta)$ el entorno de tamaño δ del segmento $\gamma_{x,y}$.

Definición 5.4. *Un espacio métrico (X, d) se dice hiperbólico (o δ-hiperbólico) si existe $\delta > 0$ de forma que para todos $x, y, z \in X$ se cumple que*

$$\gamma_{x,y} \subset I(x, z, \delta) \cup I(y, z, \delta).$$

La Definición 5.4 dice que un espacio es hiperbólico si los triángulos son "flacos" en el sentido de que un lado simpre está contenido en un δ-entorno de los otros dos.

Ejemplo 5.5. *El grafo de Cayley X de un grupo libre (donde las aristas miden 1) es un espacio métrico 0-hiperbólico. Como el grupo no tiene relaciones su grafo de Cayley es un árbol. Para una terna $x, y, z \in X$ se cumple que $\gamma_{x,y} \subset \gamma_{x,z} \cup \gamma_{y,z}$.*

Ejemplo 5.6. *El plano euclídeo con la distancia usual no es hiperbólico.*

Definición 5.7 (Producto de Gromov). *Fijamos $x \in X$ un punto base. Se define el producto de Gromov entre $y, z \in X$ como*

$$(y|z)_x = \frac{1}{2}(d(x, y) + d(x, z) - d(y, z)).$$

Se puede hablar de hiperbolicidad en términos del producto de Gromov. La prueba del siguiente resultado se puede ver en [GH90], capítulo 2, proposición 21.

Proposición 5.8. *Son equivalentes.*

(1) X es δ-hiperbólico.

(2) Existe $\delta > 0$ de forma que $(y|z)_x \geq \text{mín}\{(y|w)_x, (w|z)_x\} - \delta$ para todos $x, y, z, w \in X$.

Observación 5.9. *Cuando X es un árbol la condición (2) se cumple trivialmente con $\delta = 0$.*

Sea $\Gamma = \langle a, b\rangle$ un grupo libre en dos generadores y sea d la distancia de palabras en Γ. Los elementos de Γ son palabras reducidas con letras $\{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$. Fijamos $1 \in \Gamma$ como punto base.

Definición 5.10 (Borde de Gromov de un grupo). *Definimos el borde de Gromov de Γ el grupo libre como el espacio de rayos geodésicos en Γ que empiezan en 1. Notamos al borde por $\partial\Gamma$.*

Observación 5.11. *La definición de borde de Gromov tiene sentido en el contexto de grupos hiperbólicos en general. En el caso de un grupo libre, fijado un punto base o y dado cualquier punto $\gamma \in \Gamma$ existe una únia geodésica de o a γ. Esto hace que en este caso particular la definición de borde sea más simple.*

Si $\gamma \in \Gamma$ notamos por $|\gamma| = d(1, \gamma)$. Si $x \in \partial\Gamma$ entonces x es el "límite" de una geodésica en Γ que podemos notar como una sucesión o un producto infinito de elementos del generador del grupo $x = [\gamma] =: c_1 c_2 \ldots$, donde $c_i \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$.

El grupo Γ actúa en $\partial\Gamma$ por traslaciones.

$$\text{Si } x = c_1 c_2 \ldots \in \partial\Gamma \text{ y } \gamma = d_1 \ldots d_k \in \Gamma \text{ definimos } \gamma \cdot x = \gamma c_1 c_2 \ldots = d_1 \ldots d_k c_1 c_2 \ldots$$

cancelando de ser necesario.

Existe una medida natural en $\partial\Gamma$. Si $\gamma \in \Gamma$ definimos *la sombra de* γ como

$$\Sigma_\gamma = \{x = c_0 c_1 \ldots \in \partial\Gamma : c_0 \ldots c_k = \gamma\}.$$

La sombra de un punto $\gamma \in \Gamma$ son los puntos de $\partial\Gamma$ cuyo rayo geodésico asociado pasa por γ. Sea μ la medida que hace que

$$\mu(\Sigma_\gamma) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{|\gamma|-1}.$$

Si bien la medida μ no es invariante por la acción de Γ por traslaciones, sí es equivariante (es decir que la acción si preserva la clase de la medida). Se cumple que

$$\frac{d\gamma_* \mu}{d\mu} = 3\chi_{\Sigma_\gamma} + \frac{1}{3}\chi_{\Sigma_\gamma^c}$$

donde χ_A denota la función característica del conjunto A.

Observación 5.12. *Si Γ es un grupo hiperbólico entonces siempre existe una familia natural de medidas en $\partial\Gamma$ que es equivariante por la acción de Γ en $\partial\Gamma$ por traslaciones. En los trabajos [Pat+76] y [Sul79] S. Patterson y D. Sullivan prueban la existencia y unicidad de una clase de medidas, llamadas medidas de Patterson Sullivan, que verifican la condición de equivarianza y que solamente dependen de la distancia d en el grupo.*

La medida μ (en el borde del grupo libre en dos generadores) recién definida es un representante de las medidas de Patterson Sullivan en este caso.

Esto nos permite definir una representación unitaria $\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(L^2(\partial\Gamma, \mu))$ como en el ejemplo 2.15:

$$(\pi(\gamma)f)(x) = \left(\frac{d\gamma * \mu}{d\mu}\right)^{\frac{1}{2}} f(\gamma^{-1} \cdot x),$$

donde $\cdot$ indica la acción por traslaciones. Llamamos *representación borde del grupo libre* a esta representación

Teorema 5.13. *La representación borde del grupo libre es irreducible.*

Observación 5.14. *La representación borde que definimos para el grupo libre depende de la distancia de palabras d que elegimos (de la medida μ) y por lo tanto de la familia de generadores que estemos considerando. Distintos generadores dan lugar a distintas métricas y por lo tanto a distintas estructuras en $\partial\Gamma$.*

La intención del ejemplo que damos es ilustrar lo que la estructura geométrica de un grupo hiperbólico implica sobre la representación borde, que en particular es irreducible.

La prueba del teorema 5.13 contiene toda la información de la prueba para la irreducibilidad de la representación borde para las familias de representaciones borde dadas por distintas distancias en el grupo.

5.3.1. Prueba de la irreducibilidad de la representación borde del grupo libre

Ambos resultados 2.38 y 2.41 dicen que si el álgebra de von Neumann generada por $\pi(\Gamma)$ es lo suficientemente grande entonces π es irreducible. El estudio de las órbitas de vectores por la representación regular está estrechamente relacionado con entender las funciones $\frac{dg*\mu}{d\mu}$; estas determinan por ejemplo la órbita de la función constante.

La prueba que vamos a dar está basada en el trabajo [Gar14] de L. Garncarek donde prueba la irreducibilidad de una familia grande de representaciones borde. Si bien este ejemplo es un caso particular contiene toda la información de la prueba del caso general.

Observación 5.15. *Fijamos* 1 *como punto base y lo sacamos de la notación (del producto de Gromov).*

Si $g \in \Gamma$ notamos por $|g| = d(1, g)$. Escribimos $P_g = \frac{dg*\mu}{d\mu}$.

Observación 5.16. *El producto de Gromov* $(\cdot|\cdot)$ *se extiende a* $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ *de forma natural. Se cumple que* $|g| = \max_{x \in \partial\Gamma}(g|x)$ *y el máximo se alcanza en* Σ_g.

Definición 5.17 (Distancia visual en $\partial\Gamma$)**.** *Se define la distancia visual en* $\partial\Gamma$ *como la distancia* δ *que hace* $\delta(x, y) = \exp[-(x|y)]$ *para cada par* $x, y \in \partial\Gamma$.

Elegimos para cada $g \in \Gamma$ un punto $\hat{g} \in \Sigma_g$ que haga $|g| = (g|\hat{g})$. Notamos por $\breve{g} = \widehat{g^{-1}}$.

Proposición 5.18. *Se cumple que*

- *La dimensión de Hausdorff de* $\partial\Gamma$ *con la distancia* δ *es* $D = \log(3)$.
- *Si* $x \in \partial\Gamma$ *y* $t > 0$ *entonces* $\mu(B_{\partial\Gamma}(x, t)) = \frac{3}{4}t^D$.
- *Para cada* $g \in \Gamma$ *y* $x \in \partial\Gamma$ *se cumple que* $(g|x) = \min\{|g|, (\hat{g}|x)\}$. *En consecuencia* $3^{(g|x)} = \min\{3^{|g|}, \delta(\hat{g}, x)^{-D}\}$.

Proposición 5.19 (Bolas y anillos en Γ)**.** *Sean*

$$B_r = \{g \in \Gamma : |g| \leq r\} \text{ y } A_R = \{g \in \Gamma : R - 1 \leq |g| \leq R + 1\}.$$

Se cumple

(1) $|B_r| = 5 + 4\sum_{1 \leq k \leq r-1} 3^k$.

(2) $|A_R| = 4\sum_{R-2\le k\le R} 3^k$.

Demostración. Para ver (1) definimos los conjuntos $N_r = \{|g| = r\}$ y contamos

$$|N_0| = 1, |N_1| = 4, |N_2| = 12, \dots, |N_k| = 3^{k-1}4 \text{ para } k \geq 1.$$

Sumamos

$$|B_r| = \sum_{0\le k\le r} |N_r| = 5 + 4\sum_{1\le k\le r-1} 3^k.$$

El item (2) es consecuencia inmediata de (1): $|A_R| = |B_{R+1}| - |B_{R-2}|$. $\square$

Se cumple que $\Sigma_g = \overline{B_{\partial\Gamma}(\hat{g}, \exp(-|g|))}$.

Proposición 5.20 (Sombras en $\partial\Gamma$)**.** *Para cada $R > 0$ los conjuntos $\{\Sigma_g \in A_R\}$ forman un cubrimiento de $\partial\Gamma$.*

Demostración. Si $x = c_0c_1\ldots \in \partial\Gamma$. Entonces $c = c_0\ldots c_R \in A_R$ y es claro que $x \in \Sigma_c$. $\square$

Proposición 5.21. *Si $x \in \partial\Gamma$ y $\theta, R > 0$ se define el cono sobre $B_{\partial\Gamma}(x, \exp(-\theta))$ de radio R como*

$$C_R(x,\theta) = \{g \in \Gamma : g \in A_R, \Sigma_g \cap B_{\partial\Gamma}(x, \exp(-\theta)) \neq \emptyset\}.$$

Se cumple que

$$K_1 3^{R-\theta} < |C_R(x,\theta)| < K_2 3^R$$

para constantes positivas K_1, K_2 y si $R \geq \theta$ entonces

$$|C_R(x,\theta)| = K_3 3^{R-\theta}.$$

Demostración. La cota $|C_R(x,\theta)| < K_2 3^R$ sale de los estimativos de la proposición 5.19. Para ver la cota inferior observamos primero que por definición las sombras de puntos $g \in C_R(x,\theta)$ cubren $B_{\partial\Gamma}(x, \exp(-\theta))$. Luego

$$\frac{3}{4}3^{-\theta} = \mu(B_{\partial\Gamma}(x, \exp(-\theta))) \geq \sum_{g\in C_R(x,\theta)} \mu(\Sigma_g) = |C_R(x,\theta)|\frac{3}{4}3^{R+r}.$$

Supongamos que $R \geq \theta$. Si h es un camino geodésico de 1 a x y $g \in C_R(x,\theta)$ entonces $(g|h(\theta)) \geq \theta$ y entonces $d(g, h(\theta)) \leq C_1(r - \theta)$. Luego $C_R(x,\theta) \subset B_\Gamma(h(\theta), R - \theta + C)$ para alguna constante C. $\square$

Definimos la *doble sombra de g* en $\partial\Gamma \times \partial\Gamma$ como

$$\Sigma_2(g) = \overline{B_{\partial\Gamma}(\hat{g}, \exp -\frac{|g|}{2}) \times B_{\partial\Gamma}(\check{g}, \exp -\frac{|g|}{2})}.$$

Proposición 5.22 (Sombras en $\partial\Gamma\times\partial\Gamma$)**.** *Para cada $R > 0$ los conjuntos $\{\Sigma_2(g) : g \in A_R\}$ forman un cubrimiento de $\partial\Gamma \times \partial\Gamma$.*

Demostración. Sea $(x, y) \in \partial\Gamma \times \partial\Gamma$ y sean h_x, h_y caminos geodésicos en Γ de 1 a x e y respectivamente. Fijamos $g_x = h_x(\frac{R}{2})$ y $g_y = h_y(\frac{R}{2})$. A menos de tachar una letra (si hubiese cancelaciones) tenemos que $|g_x g_y^{-1}| = R$ por lo que $g_x g_y^{-1} \in A_R$. Calculamos $(g_x g_y^{-1}|x) \geq (g_x|x) = \frac{R}{2}$ y $(g_y g_x^{-1}|y) \geq (g_y|y) = \frac{R}{2}$. Luego $(x, y) \in \Sigma(g_x g_y^{-1})$. $\square$

Pasamos a estudiar las funciones $\{P_g : g \in \Gamma\}$. Notamos por $\tilde{P}_g = \frac{P_g^{1/2}}{\|P_g^{1/2}\|_1}$.

Proposición 5.23. *Se cumple que* $\|P_g^{1/2}\|_1 = 3^{-|g|/2}(1 + |g|)$ *y* $\tilde{P}_g(x) = \frac{3^{(g|x)}}{1+|g|} < \frac{\delta(\hat{g},x)^{-D}}{1+|g|}$.

Demostración. Tenemos que $P_g^{1/2}(x) = 3^{(g|x)-|g|/2} = 3^{|g|/2} \min\{3^{|g|}, \delta(\hat{g}, x)^{-D}\}$. Calculamos.

$$\begin{aligned}
3^{-|g|/2}\|P_g^{1/2}\|_1 &= \int_{\partial\Gamma} \min\{3^{|g|}, \delta(\hat{g}, x)^{-D}\} d\mu(x) \\
&= \int_0^{3^{|g|}} \mu\{x : \delta(\hat{g}, x)^{-D} > t\} dt \\
&= 1 + \int_1^{3^{|g|}} \mu\{x : \delta(\hat{g}, x)^{-D} > t\} dt \\
&= 1 + \int_1^{3^{|g|}} \mu(B_{\partial\Gamma}(\hat{g}, t^{-1/D})) dt = 1 + |g|.
\end{aligned}$$

El segundo estimativo sale juntando lo calculado para $\|P_g^{1/2}\|_1$ y que $3^{(g|x)} < \delta(\hat{g}, x)^{-D}$. $\square$

La siguiente proposición es crucial. Muestra cómo la suma de la distorsión en cada punto del borde está acotada. Tiene que ver tanto con los estimativos de la proposición 5.23 como con cómo se distribuyen los puntos en cada A_R.

Proposición 5.24. *Se cumple que* $\sum_{|g|=R} \tilde{P}_g(x) < K3^R$ *para todo* $R > 0, x \in \partial\Gamma$ *y para alguna constante* $K > 0$.

Demostración. Usamos los estimativos de 5.18 y 5.23 y calculamos

$$\sum_{|g|=R} \tilde{P}_g(x) < \frac{1}{1+R} \sum_{|g|=R} \min\{3^R, \delta(\hat{g}, x)^{-D}\} \leq |\{|g| = R\}| + \int_1^{3^R} |\{|g| = R, \delta(\hat{g}, x)^{-D} > t\}| dt.$$

Como $\delta(\hat{g}, x)^{-D} > t$ implica $\delta(\hat{g}, c) < \frac{1}{t}^{1/D}$, que a su vez implica $g \in C_R(x, \log_3 t)$, y si $t \in [0, 3^R]$ entonces podemos usar el estimativo de la proposición 5.21 para obtener

$$\begin{aligned}
\sum_{|g|=R} \tilde{P}_g(x) &\leq |\{|g| = R\}| + \int_1^{3^R} |C_R(x, \log_3 t)| dt \\
&= |\{|g| = R\}| + K \int_1^{3^R} 3^{R-\log_3 t} dt \\
&= 3^{R-1}4 + K3^R R \log 3 = K'3^R.
\end{aligned}$$

Obtenemos

$$\sum_{|g|=R} \tilde{P}_g(x) < \frac{1}{1+R} RK'3^R < K'3^R,$$

como buscábamos.

$\square$

Observación 5.25. *De la proposición 5.24 y de que* $A_R = \{R-1 \geq |G| \geq R+1\}$ *obtenemos*

$$\sum_{g \in A_R} \tilde{P}_g(x) < K3^{R+1}$$

para alguna costante $K > 0$.

La siguiente proposición es clave y dice que los coeficientes matriciales se comportan -en el límite cuando $|g| \to \infty$- como evaluaciones. El resultado debería ser intuitivo si se tiene en cuenta el comportamiento de las funciones $\tilde{P}_g$ -que tienden a ser chichones alrededor de $\hat{g}$-.

Notamos $\tilde{\pi}(g) = \frac{\pi(g)}{\|P_g^{1/2}\|_1}$.

Proposición 5.26. *Si* ϕ, ψ *son dos funciones Lipschitz en* $\partial\Gamma$ *entonces*

$$|p(\tilde{\pi}(g)\phi, \psi) - \phi(\check{g})\overline{\psi(\hat{g})}| < \frac{\lambda(\phi)\|\psi\|_\infty + \lambda(\psi)\|\phi\|_\infty}{(1+|g|)^{1/D}}$$

para todo $g \in \Gamma$ *y donde* $\lambda(\cdot)$ *es la constante de Lipschitz de una función Lipschitz.*

Demostración. Sumando y restando $p(\tilde{\pi}(g)\phi, \psi(\hat{g})1)$ obtenemos

$$|p(\tilde{\pi}(g)\psi, \psi) - \phi(\check{g})\overline{\psi(\hat{g})}| \leq |p(\tilde{\pi}(g)\phi, \psi - \psi(\hat{g})1)| + |\psi(\hat{g})[p(\tilde{\pi}(g)\phi, 1) - \phi(\check{g})]|.$$

Ahora aplicamos la definición del producto interno, de $\tilde{\pi}$ y que $\int_{\partial\Gamma} \tilde{P}_g d\mu = 1$. La cuenta sigue

$$\leq \|\phi\|_\infty |\int_{\partial\Gamma} \tilde{P}_g(\xi)(\psi(\xi) - \psi(\hat{g}))d\mu(\xi)| + \|\psi\|_\infty |\int_{\partial\Gamma} \tilde{P}_{g^{-1}}(\xi)(\phi(\xi) - \phi(\check{g}))d\mu(\xi)|.$$

Estimamos el primer sumando; el segundo es completamente análogo. Fijamos $\rho > 0$ y $B = B_{\partial\Gamma}(\hat{g}, \rho)$. Usamos $\tilde{P}_g(\xi) < \frac{\delta(\hat{g},\xi)^{-D}}{1+|g|}$ del resultado 5.23 y obtenemos

$$\begin{aligned} &|\int_{\partial\Gamma} \tilde{P}_{g^{-1}}(\xi)(\phi(\xi) - \phi(\check{g}))d\mu(\xi)| \\ &\qquad \leq \lambda(\phi)(\int_B |\tilde{P}_g(\xi)\delta(\hat{g},\xi)d\mu(\xi) + \int_{\partial\Gamma \setminus B} |\tilde{P}_g(\xi)\delta(\hat{g},\xi)d\mu(\xi)) \\ &\qquad \leq \lambda(\phi)(\rho + \frac{\rho^{1-D}}{1+|g|}). \end{aligned}$$

Luego si elegimos $\rho = (1+|g|)^{-1/D}$ y juntamos con todo lo anterior obtenemos lo que buscábamos. $\square$

Observación 5.27. *Destacamos dos cosas de la proposición 5.26.*

La primera es que si ϕ *y* ψ *son dos funciones Lipschitz entonces* $|p(\tilde{\pi}(g)\phi,\psi)-\phi(\check{g})\overline{\psi(\hat{g})}|$ *tiende a* 0 *cuando* $|g|\to\infty$*. La segunda es que las funciones Lipschitz son densas en* L^2*.*

La estrategia para probar la irreducibilidad de la representación borde será encontrar un vector cíclico de forma que la proyección sobre el espacio que genera esté en $VN(\pi(\Gamma))$ (ver proposición 2.41). Probamos un resultado un poco más general.

Si $K \in L^\infty(\partial\Gamma^2)$ definimos el operador $T_K \in \mathcal{B}(L^2(\partial\Gamma,\mu))$ como

$$p(T_K\phi,\psi) = \int_{\partial\Gamma^2} \phi(x)\overline{\psi(y)}K(x,y)d\mu^2(x,y).$$

Proposición 5.28. *El operador* T_K *con* $K \geq 0$ *está en* $VN(\pi(\Gamma))$*.*

Demostración. Vamos a definir una familia de operadores S_R que converjan con topología débil y restringiéndose a las funciones Lipschitz a T_K. Luego vamos a probar que la familia S_R está acotada.

Como las bolas acotadas en $\mathcal{B}(L^2(\partial\Gamma,\mu))$ son compactas con la topología débil, cualquier límite de S_R -que existe por compacidad- va a tener que coincidir con T_K.

Comenzamos con la construcción de la familia S_R. Sea $R > 0$. Definimos primero una partición de $\partial\Gamma \times \partial\Gamma$ a partir del cubrimiento $\{\Sigma_2(g) : g \in A_R\}$. Si ordenamos los $g \in A_R$ entonces definimos la partición

$$\{V_g : V_g = \Sigma_2(g) \setminus \bigcup_{h<g} \Sigma_2(h)\}_{g\in A_R}.$$

Definimos los pesos

$$w_g = \int_{V_g} K d\mu^2$$

y a partir de ellos el operador

$$S_R = \sum_{g\in A_R} w_g \tilde{\pi}(g).$$

Sean ϕ,ψ dos funciones Lipschitz en $\partial\Gamma$. Calculamos

$$|p(S_R\phi,\psi) - p(T_K\phi,\psi)| \leq \sum_{g\in A_R} \int_{V_g} K(\xi,\eta)|p(\tilde{\pi}(g)\phi,\psi) - \phi(\check{g})\overline{\psi(\hat{g})}|d\mu^2(\xi,\eta).$$

Sumando y restando $\phi(\check{g})\overline{\psi(\hat{g})}$ y separando la cuenta sigue

$$\leq \sum_{g\in A_R} \int_{V_g} K(\xi,\eta)|p(\tilde{\pi}(g)\phi,\psi) - \phi(\check{g})\overline{\psi(\hat{g})}|d\mu^2(\xi,\eta)$$

$$+ \sum_{g\in A_R} \int_{V_g} K(\xi,\eta)|\phi(\check{g})\overline{\psi(\hat{g})} - \phi(\xi)\overline{\psi(\eta)}|d\mu^2(\xi,\eta).$$

Usamos la cota de la proposición 5.26 y sumamos y restamos inteligentemente para obtener

$$\leq \|K\|_1 \frac{\lambda(\phi)\|\psi\|_\infty + \lambda(\psi)\|\phi\|_\infty}{(1+(R+1))^{1/D}} + \int_{\partial\Gamma^2} \exp(-|g|/2)(\lambda(\phi)\|\psi\|_\infty + 2\lambda(\psi)\|\phi\|_\infty) K(\xi,\eta) d\mu^2(\xi,\eta),$$

en donde en el último sumando usamos que $V_g \subset \Sigma_2(g)$ para cada $g \in A_R$.

Tomando límite cuando $R \mapsto \infty$ obtenemos que $p(S_R\phi,\psi) \to p(T_K\phi,\psi)$ para cada par ϕ,ψ de funciones Lipschitz.

Para terminar la prueba alcanza con ver que la familia S_R está uniformemente acotada.

Observemos primero que

$$w_g \leq \|K\|_\infty \mu^2(\Sigma_2(g)) = \|K\|_\infty \frac{9}{16} 3^{-|g|}.$$

Con eso en cuenta y el estimativo de la observación 5.25 calculamos

$$\begin{aligned}
\|S_R 1\|_\infty &= \sup_x \sum_{g\in A_R} w_g \tilde{P}_g(x) \\
&\leq \|K\|_\infty \frac{3}{16} 3^{-R+1} \sup_x \sum_{g\in A_R} \tilde{P}_g(x) \\
&\leq \|K\|_\infty \frac{3}{16} 3^{-R+1} K 3^{R+1} = C
\end{aligned}$$

donde C es una constante que no depende de R.

Además la misma cota vale para $\|S_R^* 1\|_\infty$ pues A_R es simétrico con respecto a $1 \in \Gamma$ y $\tilde{\pi}(g)^* = \tilde{\pi}(g^{-1})$.

Consideramos ahora la medida ω en A_R definida por $\omega(g) = w_g$ y el espacio de funciones $L^2(\partial\Gamma \times A_R, \mu \otimes \omega)$. Por simplicidad asumimos que ω es una probabilidad en A_R. Si $\phi,\psi \in L^4(\partial\Gamma,\mu) \subset L^2(\partial\Gamma,\mu)$ calculamos

$$\begin{aligned}
|p(S_R\phi,\psi)| &= |\int_{\partial\Gamma} \sum_{g\in A_R} w_g \tilde{P}_g(\xi)\phi(g^{-1}\xi)\overline{\psi(\xi)} d\mu| \\
&= |\int_{\partial\Gamma\times A_R} \tilde{P}_g(\xi)\phi(g^{-1}\xi)\overline{\psi(\xi)} d\mu d\omega| \\
&\leq \int_{\partial\Gamma\times A_R} \tilde{P}_g(\xi)|\phi(g^{-1}\xi)|^2 d\mu d\omega \int_{\partial\Gamma\times A_R} \tilde{P}_g(\xi)|\psi(\xi)|^2 d\mu d\omega \\
&= p(S_R|\phi|^2, 1) p(S_R 1, |\psi|^2) \\
&\leq \|S_R^* 1\|_\infty \|\phi^2\|_1 \|S_R 1\|_\infty \|\psi^2\|_1 = C' \|\phi\|_2^2 \|\psi\|_2^2.
\end{aligned}$$

Como $L^4(\partial\Gamma,\mu)$ es denso en $L^2(\partial\Gamma,\mu)$ y la cota solamente depende de la norma 2 de los vectores, obtenemos que la familia S_R está uniformemente acotada y por lo tanto debe converger débilmente a T_K.

$\square$

Demostración. Irreducibilidad de la representación borde para el grupo libre. Comenzamos por ver que $1 \in L^2(\partial\Gamma, \mu)$ es un vector cíclico. Si $\phi \in L^\infty(\partial\Gamma)$ entonces definimos $K \in \mathrm{L}^\infty(\partial\Gamma \times \partial\Gamma)$ como $K(x, y) = \phi(y)$. Por la proposición 5.28 el operador asociado T_K está en $VN(\pi(\Gamma))$. Como $\phi = T_K(1)$ obtenemos que ϕ está en la clausura de la órbita de 1. Como $L^\infty(\partial\Gamma)$ es denso en $L^2(\partial\Gamma, \mu)$ probamos que 1 es cíclico.

Consideramos ahora $\phi = 1$ y notamos por T al operador asoaciado a $K(x, y) = \phi(y) = 1$. Si $\psi, \iota \in L^2(\partial\Gamma, \mu)$ entonces

$$p(T(\psi), \iota) = \int_{\partial\Gamma\times\partial\Gamma} \psi(x)\overline{\iota(y)}d\mu^2(x, y) = p(\psi, 1)p(1, \iota).$$

Como ψ e ι son arbitrarias obtenemos $T(\psi) = p(\psi, 1) = P_{\mathbb{C}1}$ la proyección sobre el subespacio generado por 1. Como $T \in VN(\pi(\Gamma))$ podemos aplicar el criterio 2.41 de irreducibilidad y obtener lo buscado. □

5.4. Representación borde de grupos hiperbólicos

El resultado de la sección 5.3, la irreducibilidad de la representación borde para el grupo libre, es un caso particular de varios trabajos que tratan la irreducibilidad de las representaciones borde de ciertos grupos discretos.

Observación 5.29. *La existencia de medidas equivariantes en $\partial\Gamma$ fue establecida por S. Patterson para grupos Fuchsianos (ver [Pat+76]) y luego para grupos hiperbólicos en general por D. Sullivan en [Sul79].*

Nos referimos con *representación borde* a la representación unitaria

$$\pi : \Gamma \to \mathcal{U}(L^2(\partial\Gamma, \mu))$$

definida por

$$(g \cdot f)(x) = \left(\frac{dg_*\mu}{d\mu}\right)^{1/2} f(g^{-1} \cdot x),$$

donde μ es la medida de Patterson-Sullivan que depende de la métrica en el grupo.

En [KS92] G. Kuhn y T. Steger prueban el siguiente resultado acerca de las representaciones borde (la definición de representación borde que usan es un poco más general que la de este trabajo).

Teorema 5.30 (G. Kuhn- T. Steger, 1992). *Si Γ es un grupo libre con finitos generadores entonces la representación borde está débilmente contenida en la representación regular de Γ.*

El teorema 5.30 dice que las representaciones borde de un grupo libre no pueden aproximar (en el sentido de la definicón de contención débil de representaciones) a la representación trivial ya que este no es promediable (ver resultado 4.44).

Los siguientes resultados refieren a la irreducibilidad y rigidez de representaciones borde en el contexto de grupos hiperbólicos. Se refiere al lector a los trabajos [BM11], [Boy14] y [Gar14]).

Teorema 5.31 (U. Bader- R. Muchnik, 2011)**.** *Sea Γ el grupo fundamental de una variedad de curvatura negativa (M, g). Entonces la representación borde es irreducible. Además si (M', g') es tal que $\pi_1(M') = \Gamma$ entonces son equivalentes*

- *Las representaciones borde son isomorfas.*
- *Las variedaeds riemannianas (M, g) y (M', g') tienen espectro marcado de longitudes proporcionales.*

En el teorema 5.31 la distancia considerada en en grupo Γ es inducida por el encaje $\Gamma \subset \mathrm{Isom}(\tilde{M})$, donde $\tilde{M}$ es el cubrimiento universal de M. Fijando un punto base $p \in \tilde{M}$ se define la distancia $|\gamma| = d_{\tilde{M}}(p, \gamma p)$ con la cual es hiperbólico.

La clave de la prueba de la irreducibilidad de las representaciones borde del teorema 5.31 es la equidistribución de puntos de Γ en su borde (como en la prueba del teorema 5.13). La rigidez depende de la irreducibilidad y es una clara muestra de propiedades geométricas que se pueden recuperar por medio de la teoría de representaciones.

Teorema 5.32 (A. Boyer, 2014)**.** *Sea Γ un subgrupo discreto de las isometrías de un espacio $CAT(-1)$. Entonces la representación borde es irreducible.*

Teorema 5.33 (L. Garncarek, 2014)**.** *Sea Γ un grupo discreto hiperbólico. Entonces la representación borde es irreducible.*

Estos tres resultados se intersectan unos a los otros y las pruebas son parecidas a la del teorema 5.13 en el sentido de que la clave para probarlos es mirar la distribución de puntos al borde del grupo y el comportamiento de los núcleos P_g.

La prueba del teorema 5.13 está basada en la prueba de 5.33 pero es más simple por tratarse de un caso específico. Esperamos que la prueba del resultado 5.13 sirva para entender la prueba general de forma más trasparente.

Referencias

[Ben04] Yves Benoist. “Five lectures on lattices in semisimple Lie groups”. En: *Summer school in Grenoble* 5 (2004).

[Ben07] Yves Benoist. “Réseaux des groupes de Lie”. https://www.math.u-psud.fr/ benoist/prepubli/survey.html. 2007.

[BH19] Bachir Bekka y Pierre de la Harpe. “Unitary representations of groups, duals, and characters”. En: *arXiv preprint arXiv:1912.07262* (2019).

[BHV02] Bachir Bekka, Pierre de la Harpe y Alain Valette. “Kazhdan’s property (T)”. En: *preprint* (2002).

[BM11] Uri Bader y Roman Muchnik. “Boundary unitary representations-irreducibility and rigidity”. En: *arXiv preprint arXiv:1102.3036* (2011).

[Boy14] Adrien Boyer. “Equidistribution, ergodicity and irreducibility in CAT (-1) spaces”. En: *arXiv preprint arXiv:1412.8229* (2014).

[BQ18] Yves Benoist y Jean-Francois Quint. “On the regularity of stationary measures”. En: *Israel Journal of Mathematics* 226: 1 (2018).

[Bum04] Daniel Bump. *Lie groups.* Springer, 2004.

[CS91] Michael Cowling y Tim Steger. “The irreducibility of restrictions of unitary representations to lattices”. En: *J. reine angew. Math* 420 (1991), págs. 85-98.

[Gar14] Łukasz Garncarek. “Boundary representations of hyperbolic groups”. En: *arXiv preprint arXiv:1404.0903* (2014).

[GH90] Étienne Ghys y Pierre de la Harpe. “Espaces métriques hyperboliques”. En: *Sur les groupes hyperboliques d’après Mikhael Gromov.* Springer, 1990, págs. 27-45.

[Hal13] Paul R Halmos. *Measure theory.* Vol. 18. Springer, 2013.

[Hal15] Brian Hall. *Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction.* Vol. 222. Springer, 2015.

[Kaz67] David A Kazhdan. “Connection of the dual space of a group with the structure of its close subgroups”. En: *Functional analysis and its applications* 1.1 (1967), págs. 63-65.

[Kna01] Anthony W Knapp. *Representation theory of semisimple groups: an overview based on examples.* Vol. 36. Princeton university press, 2001.

[KS92] Gabriella Kuhn y Tim Steger. “Boundary Representations of the Free Group, I”. En: *Harmonic analysis and discrete potential theory.* Springer, 1992, págs. 85-91.

[Led94] François Ledrappier. “Structure au bord des variétés à courbure négative”. En: *Séminaire de théorie spectrale et géométrie* 13 (1994), págs. 97-122.

[Lub10] Alex Lubotzky. *Discrete groups, expanding graphs and invariant measures.* Springer Science & Business Media, 2010.

[LZ05] Alex Lubotzky y Andrzej Zuk. "On property (τ)". En: *Notices Amer. Math. Soc* 52.6 (2005), págs. 626-627.

[Mañ83] Ricardo Mañé. *Introdução à teoria ergódica.* Vol. 14. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.

[McM17] Curtis McMullen. "Hyperbolic manifolds, discrete groups and ergodic theory". http://people.math.harvard.edu/ ctm/papers/index.html. 2017.

[Mor15] Dave Witte Morris. *Introduction to arithmetic groups.* Deductive Press, 2015.

[Pat+76] Samuel J Patterson y col. "The limit set of a Fuchsian group". En: *Acta mathematica* 136 (1976), págs. 241-273.

[Rud73] Walter Rudin. "Functional analysis". En: (1973).

[Sar90] Peter Sarnak. *Some applications of modular forms.* Vol. 99. Cambridge University Press, 1990.

[Ser77] Jean-Pierre Serre. *Linear representations of finite groups.* Vol. 42. Springer, 1977.

[SS09] Elias M Stein y Rami Shakarchi. *Real analysis: measure theory, integration, and Hilbert spaces.* Princeton University Press, 2009.

[Sul79] Dennis Sullivan. "The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions". En: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 50 (1979), págs. 171-202.