TEOREMA DE LA VARIEDAD ESTABLE
Tesis de maestría

Carolina Cosse
carolinacosse@gmail.com

Director de Tesis: Dr. Jorge Lewowicz
Universidad de la República, lew@fing.edu.uy

Maestría en Ingeniería Matemática
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Montevideo
Noviembre de 2009

Agradecimiento:

Gracias, al **Dr. Jorge Lewowicz***, por su guía, su profunda calidad humana, y por los conocimientos privilegiados que siempre puso a disposición durante la elaboración de este trabajo y en cualquier otra ocasión, más allá del tiempo que esto le insumiera.*
Al **Dr. Roberto Markarian***, gracias por su confianza, que me permitió iniciar este camino, y por sus direcciones a lo largo del mismo.*
Por último quiero agradecer muy especialmente el apoyo, la paciencia y los buenos consejos del Director del IMERL, **Dr. Heber Enrich***.*

Resumen

En este trabajo realizaremos una demostración del Teorema de la Variedad Estable, para difeomorfismos C^∞ *Anosov,* $f : M \to M$*, en variedades* (M) *riemanianas, conexas, compactas. Las técnicas serán del tipo de las usadas en [1], el método se basará fundamentalmente en el uso de formas cuadráticas y funciones de Lyapunov asociadas al carácter Anosov del difeomorfismo y a la condición de compacidad de la variedad* M *, a diferencia de las demostraciones tradicionales basadas en métodos analíticos.*

Índice

1. Introduccion

Dada una variedad M , C^{∞}, riemaniana , conexa y compacta y $f : M \to M$ un difeomorfismo C^r, $r \geq 1$, Anosov, realizaremos una demostración del Teorema de la Variedad Estable.

Definimos conjunto estable de x como :

$$W^s(x) = \{x_s \in M / \lim_{n \to \infty} d(f^n(x), f^n(x_s)) = 0\}$$

En el mencionado teorema se establece que $W^s(x)$ es una sub-variedad C^1 de M y $T_x W^s(x) = S_x$

Donde S_x corresponde a la Definición 2.1 (ver 2. DEFINICIONES) al subfibrado S en el punto x.

Las demostraciones tradicionales de este teorema implican el uso de alguna condición invariante cumplida por la órbita de los puntos del conjunto Estable, en el método de Hadamard se utliza el Teorema del Punto Fijo de Brouwer en un espacio funcional apropiadamente construido (se trata de demostrar la existencia de un gráfico invariante bajo f aplicando el mencionado teorema a un operador conveniente, más conocido como Transformación de Gráficos , o en inglés Graph Transform), también existe el llamado método de Perron, el mismo aplica sobre un operador no lineal que actúa sobre un cierto espacio funcional el Teorema de la Función Implícita.

En nuestro caso el hilo de la demostración es fundamentalmente geométrico utilizándose técnicas similares a las desarrolladas en [1].
Trabajaremos con la suspensión $\hat{M}$=(M, f) y con el flujo ϕ de la misma, llamaremos M_t=$\phi_t(M)$. Las propiedades de las funciones de Liapunov que derivan de la calidad Anosov de f, o sea una función real, continua $\mathbb{V}$ definida en un entorno de la diagonal en $M \times M$, tal que $\mathbb{V}(x, x)$=0 , $x \in M$ y $\mathbb{V}(f(x), f(y))$-$\mathbb{V}(x, y)$>0 para cada (x, y) en ese entorno, con $x \neq y$ (así como de la compacidad de M), y que son extensibles a la suspensión $\hat{M}$, asegurándonos la existencia de funciones de Liapunov para el flujo de la suspensión ϕ, o sea funciones reales diferenciables, V definidas en un entorno de la diagonal $\cup_t M_t \times M_t$, con $V(x, x)$=0, con $V(x, y)$ y $\ddot{V}(x, y)$ positivas para $x \neq y$, siendo $\dot{V}$ la derivada de V a lo largo de ϕ, nos permitirán caracterizar el comportamiento dinámico de los puntos que en las suspensión se mantienen en las cercanías de la órbita de un punto cualquiera x de M.
Trabajando en la suspensión $\hat{M}$ definimos conjuntos del tipo :

$$K_t(x) = \{y \in M_t / V((\phi(x, t), y) \leq k\}. \tag{1.1}$$

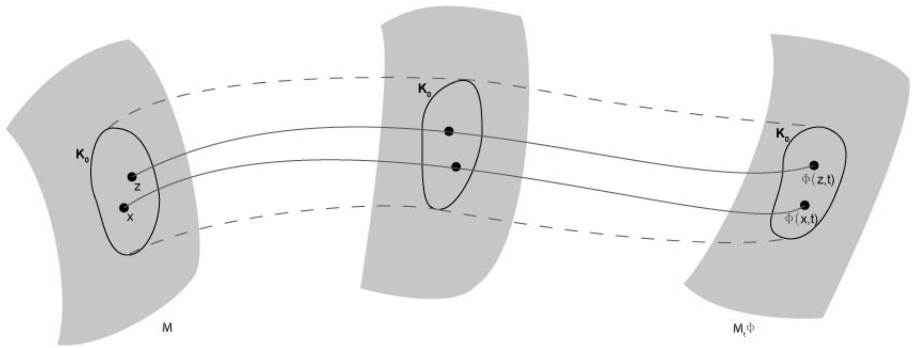

Figura 1: El “tubo ”$\mathcal{C}$

Donde V es una función de Liapunov asociada a la suspensión $\hat{M}$=(M, f) y $k > 0$ convenientemente elegido. A medida que transcurre el tiempo t, podemos pensar que los K_t forman un “tubo ”$\mathcal{C}$ alrededor del flujo de x.

Para fijar ideas, manejémosnos por un instante como en $\mathbb{R}^n$.
El eje de la demostración es:

Dado $x \in M$, para todo y del subespacio estable de x , en las cercanías de x, existe un único z en el subespacio inestable de y que se mantiene en el tubo $\mathcal{C}$ para todo $t \geq 0$. La demostración de la existencia del tal z, se hace por el absurdo. Si dado y no existiera el tal z, entonces **todos** los puntos del subespacio inestable de y se salen del tubo $\mathcal{C}$ en algún momento. Consideremos ese tiempo de salida para todos esos puntos. El mismo es una función continua de la posición inicial de cada punto con respecto a x, nos permitirá construir una contracción entre la Bola y la esfera, arribando a un absurdo y por lo tanto quedando probada la Existencia.

Con respecto a la Unicidad del tal z, la prueba consiste en suponer que para un y suficientemente cercano a x, existen dos z en el subespacio inestable de y, tales que sus flujos permanecen en el tubo $\mathcal{C}$, digamos z_1 y z_2. Si B es la forma cuadrática que caracteriza a f (debido a su condición Anosov, [1]), se cumple que para todo y en un entorno de x es $B_{z_1}(z_2 - z_1) > 0$. Como B es creciente [1], esto implica que z_1 y z_2 se alejan entre sí, lo cual es absurdo dado que por hipótesis de absurdo se mantienen ambos en el tubo $\mathcal{C}$ para todo $t \geq 0$. De esta forma, encontramos una correspondencia biunívoca y continua entre los vectores del Subespacio Vectorial Estable $S_x \subset T_xM$ y los puntos del conjunto estable de x en M, $W^s(x)$, la que nos permitirá concluir que el mismo es homeomorfo a $\mathbb{R}^p$, p=dim(S_x), y por lo tanto es una subvariedad de M.

Finalmente y una vez más usando las propiedades de las funciones de Liapunov demostraremos que $T_xW^s(x)$=S_x.

2. Definiciones.

Consideremos M una variedad C^∞, riemaniana , conexa y compacta. Y sea $f : M \to M$ un difeomorfismo C^r, $r \geq 1$, denotaremos el mapa tangente de f como f'.

Definición 2.1 *f es Anosov* si se cumplen las siguientes condiciones:

- El fibrado tangente TM admite una descomposición en suma directa de dos subfibrados S y U , $TM = S \oplus U$ invariantes bajo f'.
- Existen números positivos λ, K, $0 < \lambda < 1$, tal que $\forall n \geq 0$: $\|(f^n)'(s)\| \leq K\lambda^n\|s\| \ \forall s \in S$ y , $\|(f^{-n})'(u)\| \leq K\lambda^n\|u\| \ \forall u \in U$

Definición 2.2 Una función $B : TM \to \mathbb{R}$ se llamará *forma cuadrática* si $B_x = B|_{T_xM}$ es una forma cuadrática en el espacio vectorial T_xM.

Definición 2.3 Diremos que B es *no degenerada* si para cada $x \in M$, B_x es no degenerada.

Definición 2.4 *B es positiva , $B > 0$ si $B_x(v) > 0 \forall v \in T_xM$, $v \neq 0$ y $\forall x \in M$.*

Definición 2.5 *PullBack,* $f^\sharp(B)$ es la forma cuadrática definida por : $f^\sharp(B)_x(v){=}B_{f(x)}f'(v)$, $x \in M$, $v \in T_xM$

Definición 2.6 Sea $\hat{M}{=}\hat{M}_f$ la *suspensión* de (M, f) bajo la función constante 1, ϕ es el flujo de la suspensión , asumimos que $\hat{M}$ también está dotada de una métrica riemaniana. Identificamos M con $p(M \times \{0\})$ siendo p la proyección de $M \times \mathbb{R}$ sobre la suspensión $\hat{M}$, le llamamos M_t a la variedad $M_t{=}\phi_t(M)$. $\hat{M}$ se obtiene de $M \times [0, 1]$ identificando pares de puntos de la forma $(x, 1)$ y $(f(x), 0)$ para $x \in M$, el flujo de la suspensión ϕ_t está determinado por el campo "vertical" $\frac{\delta}{\delta t}$ en $\hat{M}$.

Definición 2.7 Decimos que V definida en un entorno de la diagonal $\cup_t M_t \times M_t$ es una *función de Liapunov para el flujo ϕ* definido en 2.6 , si es una función real , continua con $V(x, x) = 0$ y tal que la derivada de V a lo largo del flujo ϕ , $\dot{V}(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} V(\phi(x, t), \phi(y, t)) - V(x, y)$ existe y es continua.

Notation 2.8 Sea $V(x, y)$ una función continua, anotamos $\bar{V}(x, y)$ a la primera diferencia en (x, y): $\bar{V}(x, y){=}V(f(x), f(y)) - V(x, y)$.

Definición 2.9 Decimos que una función V real continua, definida en un entorno de $M \times M$ es *de Liapunov para f* si $V(x, x) = 0 \forall x \in M$ y $\bar{V}(x, y) > 0$ si $x \neq y$.

Definición 2.10 *Mapa exponencial:* $exp_x : \mathfrak{U} \subset T_xM \to M$ dado por $exp_x(v)=\gamma(1)$, donde γ es la geodésica con $\gamma(0)=x$, $\dot{\gamma}(0)=v$ *(ver [3])*

Notation 2.11 Dados dos puntos x e y en M, anotaremos P_y al transporte paralelo desde x hasta y a través de la geodésica γ entre esos puntos , $P_y : T_xM \to T_yM$.

3. Resultados previos

3.1 Sea $f : M \to M$ difeomorfismo Anosov. Entonces existe un entero positivo m tal que $\forall x \in M$, $\forall v \in TM$, $\|v\| \neq 0$, $\|(f^n)'(v)\| > 2\|v\|$ para algún n con $|n| = m$.

3.2 Sea $f : M \to M$ difeomorfismo C^r, $r \geq 1$.
Entonces f es Anosov si y solo si existe una forma cuadrátiva continua no degenerada $B : TM \to \mathbb{R}$ tal que $f^\sharp(B) - B > 0$
Obs.: Durante la demostración del directo, se ve que la siguiente expersión para la B cumple con el enunciado: $B(u) = \sum \|(f^{m+i})'u\|^2 - \|(f^i)'\|^2$ Esta forma cuadrática induce otra forma cuadrática A , definida positiva y tal que $f^\sharp(A) - A = B$.
La demostración del recíproco se basa en demostrar que los subespacios

$$S_x = \{v \in T_xM/B(f^n)'v < 0; n \geq 0\}$$

$$U_x = \{v \in T_xM/B(f^n)'v > 0; n \leq 0\}$$

Son los subespacions del T_xM invariantes bajo la aplicación tangente y que cumplen con las propiedades de **2.1**

3.3 Sea $f : M \to M$ difeomorfismo C^r, $r \geq 1$, Anosov. Entonces existe un número real $\beta > 0$ y una función real , continua V definida en :

$$\mathbb{A} = \{(x, y) \in \hat{M} \times \hat{M}/x, y \in M_t, t \in \mathbb{R}, dist(x, y) < \beta\}$$

Tal que $V(x, x) = 0$, $V(x, y) > 0$ si $x \neq y$ y tal que

$$\dot{V}(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(V(\phi(x, t), \phi(y, t)) - V(x, y)\right)$$

$$\ddot{V}(x, y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\dot{V}(\phi(x, t), \phi(y, t)) - \dot{V}(x, y)\right)$$

son continuas y tienen las siguientes propiedades:

3.3.1 $\ddot{V}(x, y) > 0$ si $x \neq y$.

3.3.2 Existen $\rho > 0$ y para cada $x \in \hat{M}$ subespacios $\hat{S}_x$, $\hat{U}_x$, $\hat{S}_x \oplus \hat{U}_x = T_xM_t$ para $x \in M_t$ continuos en x y tal que si $v \in \hat{S}_x$ $(\hat{U}_x)$, $0 < \|v\| \leq \rho$ entonces $\dot{V}(x, exp_xv) < 0$ (resp. > 0).

3.3.3 Se cumplen adicionalmente una cualquiera de las siguientes dos condiciones (Condición de Regularidad):

- Para cada $x \in \hat{M}$, $\hat{S}_x$ intersecta trivialmente al espacio tangente en $x \in M_t$ de cualquier variedad contenida en $\{y \in M_t / \dot{V}(x,y) \geq 0\}$.
- Para cada $x \in \hat{M}$, $\hat{U}_x$ intersecta trivialmente al espacio tangente en $x \in M_t$ de cualquier variedad contenida en $\{y \in M_t / \dot{V}(x,y) \leq 0\}$.

En [1] , págs. 201 y 202 , durante la demostración del Lema 4.2 , se realiza una construcción que permite afirmar que siempre podremos encontrar una función con todas las características de **3.3** , lo que haremos en este trabajo es repasar una posible obtención de la V en la suspensión $\hat{M}$.
Esta será la función V que interviene en el **Lema de Existencia**.
Como $f : M \to M$ es Anosov, sabemos que exiten las formas cuadráticas B y A , según **3.2**.
Consideremos $\mathbb{A}_M$ entorno de la diagonal de $M \times M$, supongamos que existe $\mathbb{V} : \mathbb{A}_M \to \mathbb{R}$, continua, tal que: $\mathbb{V}(x,x) = 0$ y $\bar{\mathbb{V}}(x,y) > 0$ si $x \neq y$.

Definimos $\mathbb{A}$ como en **3.3** y consideremos p la proyección en la suspensión definida en 2.6.
Nos valdremos de una función real, C^∞ , creciente , $q(s)$ definida en $0 \leq s \leq 1$ tal que:

$q(0) = 0$, $q(1) = 1$, $q^{(n)}(0) = q^{(n)}(1) = 0$, $n = 1, 2 \ldots$, a los efectos de definir una función auxiliar $W : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ de la siguiente forma:

$$W(x,y) = W(p(x_0,t), p(y_0,t)) = (1 - q(t))\mathbb{V}(x_0,y_0) + q(t)\mathbb{V}(f(x_0), f(y_0))$$

W es continua y para $x \neq y$ suficientemente cercanos se cumple que :

$$W(\phi(x,1), \phi(y,1)) - W(x,y) > 0$$

si observamos que

$$W(\phi(x,1), \phi(y,1)) - W(x,y) = (1 - q(t))\bar{\mathbb{V}}(x_0,y_0) + q(t)\bar{\mathbb{V}}(f(x_0), f(y_0))$$

Lema 3.1 *Sea* $\mathbf{U} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ *Si* $\mathbf{U}(x,y) = \int_0^1 W(\phi(x,-s),\phi(y,-s))ds \Rightarrow$

$$\dot{\mathbf{U}}(x,y) = W(x,y) - W(\phi(x,-1),\phi(y,-1))$$

Demostración:
Según ***3.3***:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{U}}(x,y) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\mathbf{U}(\phi(x,t),\phi(y,t)) - \mathbf{U}(x,y)\right) \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^1 W(\phi(x,t-s),\phi(y,t-s)) - W(\phi(x,-s),\phi(y,-s))ds \\
&= \int_0^1 \dot{W}(\phi(x,-s),\phi(y,-s))ds \\
&= W(\phi(x,-s),\phi(y,-s))|_0^1
\end{aligned}$$

■

Definamos entonces $\dot{V} : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$, $\dot{V}(x,y) = \mathbf{U}(x,y)$, por 3.1, es $\ddot{V}(x,y) > 0$ si $x \neq y$.

Consideremos la función $V : \mathbb{A} \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$V(p(x,s),p(y,s)) = V(x,y) + \int_0^s \dot{V}(\phi(x,t),\phi(y,t))dt$$

y $V(x_0,y_0) = A_{x_0}u + A_{f^{-1}x_0}(f^{-1})'u$,con $u = exp_{x_0}^{-1}y_0 \in T_{x_0M}$. La definición de $V(x_0,y_0)$ y el hecho de que $\bar{\mathbb{V}}(x,y) > 0$ si $x \neq y$, nos aseguran que $\ddot{V}(x,y) > 0$ si $x \neq y$ y que V sea definida positiva en $\mathbb{A}$.

Nos será de utilidad obtener una expresión para $\dot{V}(x_0,y_0)$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_0,y_0) &= \int_0^1 W(\phi(x_0,-s),\phi(y_0,-s))ds \\
&= \int_0^1 W(\phi(f^{-1}(x_0),1-s),\phi(f^{-1}(y_0),1-s))ds \\
&= \int_0^1 (1-q(u))\mathbb{V}(f^{-1}(x_0),f^{-1}(y_0)) + q(u)\mathbb{V}(x_0,y_0)du \\
&= \mathbb{V}(x_0,y_0) - \int_0^1 (1-q(u))du\bar{\mathbb{V}}(f^{-1}(x_0),f^{-1}(y_0))
\end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión de $\dot{V}(x_0, y_0)$ y la correspondiente de $\ddot{V}(\phi(x_0, s), \phi(y_0, s))$ en

$$\int_0^t \ddot{V}(\phi(x_0, s), \phi(y_0, s))ds = \dot{V}(\phi(x_0, t), \phi(y_0, t)) - \dot{V}(x_0, y_0)$$

se obtienen las siguientes expresiones para $\dot{V}(x, y)$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \mathbb{V}(f^{-1}(x_0), f^{-1}(y_0)) + \left[\int_0^t (1 - q(u))du + \int_0^1 q(u)du\right] \bar{\mathbb{V}}(f^{-1}(x_0), f^{-1}(y_0)) \\ &+ \left[\int_0^t q(u)du\right] \bar{\mathbb{V}}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= \mathbb{V}(f(x_0), f(y_0)) - \left[\int_t^1 q(u)du + \int_0^1 (1 - q(u))du\right] \bar{\mathbb{V}}(x_0, y_0) \\ &- \left[\int_t^1 (1 - q(u))du\right] \bar{\mathbb{V}}(f^{-1}(x_0), f^{-1}(y_0)) \end{aligned}$$

Veamos cómo definir los subespacios invariantes mencionados en **3.3.2**:
Observamos que si $v = exp^{-1}_{f(x_0)} f(y_0) \in S_{f(x_0)} \Rightarrow \mathbb{V}(f(x_0), f(y_0)) < 0$

$\Rightarrow \mathbb{V}(x_0, exp^{-1}_{x_0}(f^{-1})'(v) < 0 \Rightarrow \dot{V}(x_0, exp^{-1}_{x_0}(f^{-1})'(v) < 0$

$\Rightarrow$ definiendo $\hat{S}_{x_0} = (f^{-1})' S_{f(x_0)}$ y coherentemente $\hat{S}_{\phi_{-t}(x_0)} = \phi'_{-t}\hat{S}_{x_0}$

obtenemos los subespacios que cumplen que si $\hat{v} \in \hat{S}_x \Rightarrow \dot{V}(x, exp_x \hat{v}) < 0$ (**3.3.2**).
Ambas definiciones son consistentes con $\hat{S}_{x_0} \oplus \hat{U}_{x_0} = T_{x_0}M$ o lo que es lo mismo:

$$f' U_{f^{-1}(x_0)} \oplus (f^{-1})' S_{f(x_0)} = T_{x_0}M$$

Pues si así no fuera, existiría $v \in T_{x_0}M$ $v \neq 0$ y $v \in f'U_{f^{-1}(x_0)} \cap (f^{-1})' S_{f(x_0)}$
Sea $w = f'v \in T_{f(x_0)}M$
$\Rightarrow w \in S_{f(x_0)} \cap (f^2)' U_{f^{-1}(x_0)} \Rightarrow \exists\, z \in U_{f^{-1}(x_0)}$ / $w = (f^2)'z$.

$z \in U_{f^{-1}(x_0)} \Rightarrow B_{f^{-1}(x_0)}(z) > 0 \Rightarrow$ como B es creciente

$\Rightarrow B_{f(x_0)}((f^2)'z) = B_{f(x_0)}(w) > 0$ pero esto es absurdo ya que es $w \in S_{f(x_0)}$.

De aquí en más llamaremos S_x (U_x) a $\hat{S}_x$ ($\hat{U}_x$)cuando trabajemos en la suspensión , a los efectos de no entorpecer la notación y tendremos como **hipótesis general**:

M una variedad C^∞, riemaniana , conexa y compacta y $f : M \to M$ un difeomorfismo C^r, $r \geq 1$, Anosov.

4. Lemas

Lema 4.1 *Existe* Γ *entorno de* $x \in M$ */*$\forall y \in \Gamma$ *y para cualesquiera* z_1 *y* $z_2 \in \Gamma$ *con* u_1 *y* $u_2 \in U_y$ *(*$u_i = exp_y^{-1} z_i, i = 1, 2$*) y con* $a = exp_{z_1}^{-1} z_2 \Longrightarrow B_{z_1}(a) > 0$.
Demostración:

Caso 4.2 $y \equiv x$

Como B es continua , tiene un mínimo μ_x en la Bola Unidad en U_x

$$\Longrightarrow \frac{B_x(u_2 - u_1)}{\|u_2 - u_1\|^2} > \mu_x$$

$\Longrightarrow$ por la continuidad de B , $\exists\ \Gamma_x$ entorno de $x \in M$ / si $p \in \Gamma_x \Longrightarrow \frac{B_p(u_2-u_1)}{\|u_2-u_1\|^2} > \mu_x$, en particular si $z_1 \in \Gamma_x$ será

$$\Longrightarrow \frac{B_{z_1}(u_2 - u_1)}{\|u_2 - u_1\|^2} > \mu_x$$

Si adicionalmente $\Gamma_x \subset$ en un entorno totalmente normal (o sea tal que es normal para cada uno de sus puntos, o lo que es lo mismo *exp.* es un difeo en todos ellos) de x, si $z_2 \in \Gamma_x$, nos estaremos asegurando la identificación de $u_2 - u_1 = u$ con a a través de un homeomorfismo como sigue:
Sean $\mathfrak{g} : U_x \to U_x$ y $\mathfrak{h} : U_x \to T_{z_1}M$ definidas de la siguiente forma:

$$\mathfrak{g}(u) = exp_x^{-1} z_1 + u$$

$$\mathfrak{h} = exp_{z_1}^{-1} \circ exp_x \circ \mathfrak{g}$$

Vemos que con $\mathfrak{h}$ y $\mathfrak{g}$ así definidas: $\mathfrak{h}(u) = a$, $\mathfrak{h}(0) = 0$ y como $(\mathrm{d}exp_\bullet)_0 = Id$

$$\Longrightarrow (\mathrm{d}\mathfrak{h})_0 = (\mathrm{d}exp_{z_1}^{-1})_{z_1} \cdot (\mathrm{d}exp_x)_{u_1} \cdot (\mathrm{d}\mathfrak{g})_0 = Id + \varepsilon$$

Por lo que para Γ_x suficientemente pequeño : $\mathfrak{h}(u) = u + \theta(u)$ con $\|\theta(u)\| \ll \|u\|$.
En esas condiciones siendo Φ la forma bilineal asociada a B:

$$B_{z_1}(a) = B_{z_1}(u + \theta(u)) = B_{z_1}(u) + B_{z_1}(\theta(u)) + 2\Phi(u, \theta(u))$$

Podemos asegurar que $B_{z_1}(\theta(u)) + 2\Phi(u, \theta(u)) > \delta\|u\|^2$, para z_1, z_2 en Γ_x con δ suficientemente pequeño de forma que $\mu_x + \delta > 0 \Longrightarrow B_{z_1}(a) > (\mu_x + \delta)\|u\|^2 > 0$, cqd.

Caso 4.3 $y \neq x$:

Como los subespacios inestables U son continuos, $\exists\ \Gamma'_x$ entorno de x en M / $\forall y \in \Gamma'_x$ se cumple que el mínimo de B en la bola unidad de U_x es $> \mu_x - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ pequeño, por lo tanto si considero $\Gamma = \Gamma_x \cap \Gamma'_x$ podemos hacer el mismo razonamiento que en el caso anterior cuando z_1 y $z_2 \in \Gamma$ con $u_i \in U_y$, sustituyendo μ_x por $\mu_x - \varepsilon$.

$\blacksquare$

Lema 4.4 ***de Unicidad***

Para x e y en M , sea $\mathbb{V} : M \times M \to \mathbb{R}$ una función continua, tal que : $\mathbb{V}(x,x) = 0$, $\bar{\mathbb{V}}(x,y) = \mathbb{V}(f(x), f(y)) - \mathbb{V}(x,y) > 0$ si $x \neq y$, sea $k > 0$ y $\mathbb{K}_n(x) = \{p \in M / \mathbb{V}(f^n(x), p) \leq k\}$ con k / $\mathbb{K}_0 \subset$ en un entorno totalmente normal de x.

H: $\exists\ z_1$ *y* $z_2 \in \mathbb{K}_0 / f^n(z_i) \in \mathbb{K}_n \forall\, n \geq 0 \quad i = 1,2, \quad \mathbb{V}(z_1, z_2) > 0$
T: $z_1 \equiv z_2$.

Demostración:

Consideremos para cualquier n la diferencia

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(f^n(z_1), f^n(z_2)) - \mathbb{V}(z_1, z_2) &= \mathbb{V}(f^n(z_1), f^n(z_2)) - \mathbb{V}(f^{n-1}(z_1), f^{n-1}(z_2) \\
&+ \mathbb{V}(f^{n-1}(z_1), f^{n-1}(z_2)) - \ldots + \mathbb{V}(f(z_1), f(z_2)) \\
&- \mathbb{V}(z_1, z_2) > 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{V}(f^n(z_1), f^n(z_2)) > \mathbb{V}(z_1, z_2) > 0$ por $\mathbf{H} \Longrightarrow$ por la continuidad de $\mathbb{V}$, $\exists\ \rho > 0$ $/dist(f^n(z_1), f^n(z_2)) > \rho\ \forall\ n \geq 0$.
Además por $\mathbf{H}$, $f^n(z_i) \in \mathbb{K}_n(x) \forall n \geq 0$, consideremos entonces la diferencia

$$|\mathbb{V}(f^n(x), f^n(z_1)) - \mathbb{V}(f^n(x), f^n(z_2))|$$

Asumiendo para fijar ideas que $\mathbb{V}(x, z_2) < \mathbb{V}(x, z_1)$, se cumple que

$$|\mathbb{V}(f^n(x), f^n(z_1)) - \mathbb{V}(f^n(x), f^n(z_2))| < |k - \mathbb{V}(x, z_2)| = k'$$

Por lo tanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $dist(f^n(z_1), f^n(z_2)) < \varepsilon \ \forall n \geq 0$.

Sea $m = min\,\{\bar{\mathbb{V}}(x,y)\}$ con $(x,y) \in \{M \times M \ , \ \rho < dist(x,y) < \varepsilon\} \Longrightarrow m > 0$ ya que $\bar{\mathbb{V}}(x,y) > 0$ si $x \neq y$.

Considero nuevamente

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(f^n(z_1), f^n(z_2)) &= \mathbb{V}(f^n(z_1), f^n(z_2)) - \mathbb{V}(f^{n-1}(z_1), f^{n-1}(z_2) \\
&+ \mathbb{V}(f^{n-1}(z_1), f^{n-1}(z_2)) - \ldots - \mathbb{V}(f(z_1), f(z_2)) \\
&+ \mathbb{V}(f(z_1), f(z_2)) - \mathbb{V}(z_1, z_2) + \mathbb{V}(z_1, z_2) \\
&\geq \mathbb{V}(z_1, z_2) + m \cdot (n-1) > 0
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow lim_{n\to\infty}\mathbb{V}(f^n(z_1), f^n(z_2)) = \infty$ lo cual es absurdo ya que $\mathbb{V}$ está acotada en $\mathbb{A}_M$ entorno de la diagonal de $M \times M$. Por lo tanto $z_1 \equiv z_2$ cqd.

∎

5. Demostracion del Teorema

Teorema 5.1 *Sea M una variedad C^∞, riemaniana , conexa y compacta y $f : M \to M$ un difeomorfismo C^r, $r \geq 1$, Anosov. Definimos conjunto estable de x:*

$$W^s(x) = \{x_s \in M : \lim_{n\to\infty} d(f^n(x), f^n(x_s)) = 0\}.$$

Entonces:

$$W^s(x) \text{es una sub-variedad inmersa de } M \tag{5.1}$$

$$T_x W^s(x) = S_x \tag{5.2}$$

Cómo vamos a probar 5.1:
Sea V la función definida en un entorno de la diagonal de la suspensión de M, tal como se establece en **3.3**, $V : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{R}$. Definimos $K_t(x) = \{y \in M/V(\phi(x,t), y) \leq k\}$ con k elegido convenientemente para que K_0 esté totalmente contenido en un entorno de x en M que nos asegure las condiciones de unicidad requeridas en la presente demostración. Para demostrar que $W^s(x)$ es una variedad, realizaremos los siguientes pasos:

- Veremos que los puntos de K_0 que permanecen en K_t $\forall \quad t \geq 0 \in W^s(x)$.
- Consideraremos U_y, el subespacio inestable en T_yM , de un punto cualquiera $y \in K_0$ con $w_y = exp_x^{-1} y \in S_x$.Demostraremos que en la proyección sobre K_0 vía exp_y de U_y hay un único punto z tal que $\phi(z,t) \in K_t \forall t \geq 0$.
- **Lema de Existencia :** Demostraremos para cada y en un entorno de x , la existencia del tal z.
- **Unicidad:** Demostraremos para cada y en un entorno de x , la unicidad del tal z.
- Concluiremos que $W^s(x)$ es una sub-variedad de M, ya que es el gráfico de una función continua y es por lo tanto homeomorfo al dominio de la misma.

Lema 5.2 ***de Existencia**:*
Para un punto cualquiera $y \in K_0$ con $w_y = exp_x^{-1} y \in S_x$, queremos probar que $\exists\, z \in K_0$ con $exp_y^{-1} z = u \in U_y \,/ \phi(z,t) \in K_t \,\forall t \geq 0$

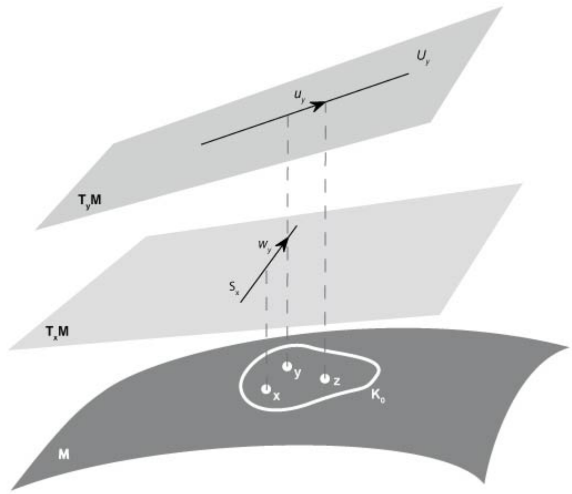

Figura 2: obtención de z

Demostración:
Sea $v_0 = exp_x^{-1}z$. Haremos esta demostración por el absurdo .
La negación de la condición de Existencia implica que para todos los $y \in K_0$ con $w_y \in S_x$, todos los puntos $z \in K_0$ con $exp_y^{-1}z = u \in U_y$ en algún momento abandonan K_t.
Sea $\tau = \tau(v_0)$ ese instante, veremos que es una función continua que vale cero si $z \in \delta K_0$.

LLamamos $v_\tau = exp^{-1}_{\phi(x,\tau)}\phi(z,\tau)$, llevamos v_τ a T_xM vía $\phi'_{-\tau}$, lo proyectaremos sobre U_y según P_yS_x, construiremos así una función α en T_yM que nos permitirá llegar a una retracción entre la Bola y la Esfera, lo cual es absurdo.
Con lo cual quedará probada la existencia del tal z.

Instante de Salida

Sean $B_x = \{v \in T_xM / V(x, exp_x v) \leq k\}$ y $B_y = \{u \in U_y / V(x, exp_y u) \leq k\}$

Definición del instante de salida:

$$\tau = \tau(v_0)/ \begin{cases} \phi(z,t) \in K_t & 0 \leq t \leq \tau \\ \phi(z,t) \notin K_t & t > \tau \end{cases}$$

- Si $v_0 \in \delta B_x \Longrightarrow \tau(v_0) = 0$

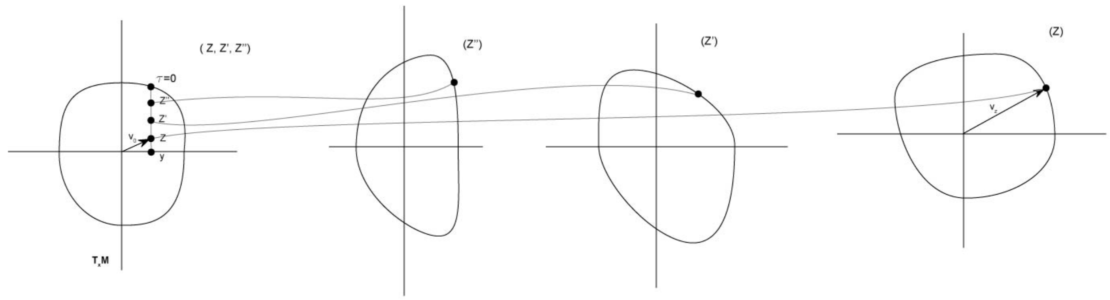

Figura 3: τ

Consideremos $F(s) = V(\phi(x,s), \phi(z,s)) \Rightarrow \ddot{F}(0) = \ddot{V}(x,z) > 0$, adicionalmente si $y \equiv x$, si $u_0 \in \delta B_x \Rightarrow \exists\, \mu_x = min_{v_0 \in \delta B_x} \dot{V}(x,z) > 0$.
Por la continuidad de $\dot{V}$, $\exists$ entorno de x $/ \forall u_0 \in \delta B_y$ es $\dot{V}(y,z) > \mu_x$, para K_0 conveniente, $\Rightarrow \dot{F}(0) > 0 \Rightarrow F(s)$ no tiene máximo en $s = 0 \Rightarrow F(s) > k$ para $s > 0 \Rightarrow \tau(v_0) = 0$ cqd.

- Si $v_0 \in B_x - \delta B_x \Longrightarrow V(\phi(x,t), \phi(z,t)) < k$ si $t < \tau(v_0)$

Si $v_0 \in B_x - \delta B_x \Longrightarrow V(x,z) < k \Longrightarrow$ como $\ddot{V} > 0$, quiere decir que hasta $\tau(v_0)$, $\phi(z,t)$ se mantuvo en K_t, o sea $V(\phi(x,t), \phi(z,t)) < k$ si $t < \tau(v_0)$.

En cualquiera de los dos casos, la continuidad de τ es una consecuencia inmediata de la continuidad del flujo ϕ.

Definición de la Proyección sobre U_y según $P_y S_x$

Podemos definir $h_y : U_x \longrightarrow U_y$, homeomorfismo, de la siguiente forma: dado $u \in U_x$, $h_y(u) = \sum_j u_j^* \langle u_j^*, P_y(u) \rangle$ con $\{u_j^*\}$ base de U_y.
Definamos

$$E = \{v \in T_y M / v = v_1 \oplus v_2, v_1 \in P_y S_x, v_2 = h_y(u), u\ U_x\}$$

$$\mathbb{P} : E \longrightarrow E\ , \mathbb{P}(v) = v_2 = h_y(u)$$

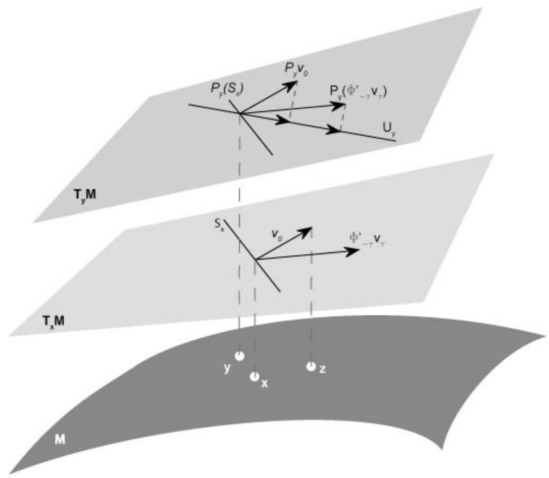

Figura 4:

Construcción de α

Para $u_0 \in B_y$ sea $\alpha : B_y \longrightarrow E$, $\alpha(u_0) = \mathbb{P}(P_y\phi'_{-\tau}v_\tau) + (Id - \mathbb{P})P_y v_0$, α no se anula nunca, para eso basta ver que $\mathbb{P}(P_y\phi'_{-\tau}v_\tau)$ no se anula nunca, esto es asi, pues de lo contrario

$$\phi'_{-\tau}v_\tau \in S_x \Rightarrow v_\tau \in S_{\phi(x,\tau)} \Rightarrow \dot{V}(\phi(x,\tau), \phi(z,\tau)) < 0$$

pero $V(\phi(x,\tau), \phi(z,\tau)) = k$ y vimos que si $t < \tau \Longrightarrow V(\phi(x,t), \phi(z,t)) < k$ por lo tanto hemos llegado a un absurdo puesto que $\ddot{V} > 0$.
Adicionalmente α es continua, ya que $\mathbb{P}$ es una proyección , τ es continua , ϕ' es continua pues ϕ es el flujo de la suspensión de f que es C^r
A través del transporte paralelo de $\alpha(u_0)$ desde y hasta x a lo largo de la geodésica que los une (P_y^{-1}) obtenemos un vector $\sigma(u_0)$ en T_xM.
Haciendo $exp_y^{-1} \circ exp_x \circ \sigma(u_0)$ obtenemos $\beta(u_0) \in T_yM - \{0\}$ y como $\beta : B_y \longrightarrow T_yM - \{0\}$ es continua y es tal que si $u_0 \in \delta B_y$ es $\beta(u_0) = u_0$ (ya que en ese caso es $\tau = 0$), $\Longrightarrow$ podemos en función de β construir una retracción entre la bola y la esfera tal como sigue y por lo tanto llegando a un absurdo.

Construcción de retracción entre la bola y la esfera

En efecto, si $d = diam(B_y)$, considero en T_yM la bola B' de centro y y radio $d' > d$ elegido lo suficientemente grande para que $g : B' \longrightarrow B'$ esté bien definida:

$g(u) = \begin{cases} \beta(u) & u \in B_y \\ Id & u \notin B_y \end{cases}$ Sea entonces $r : B' \longrightarrow T_yM - \{0\}$, $/r(u) = d' \cdot \frac{g(u)}{\|g(u)\|}$ es una retracción de la bola B' en su borde, lo cual es absurdo, por lo que queda demostrado el 5.2.

■

Lema 5.3 ***de Unicidad*** *Si* $\forall y \in K_0$, *con* $exp_x^{-1}y \in S_x$, $\exists\, z \in K_0$ *con* $exp_y^{-1}z \in U_y/\, \phi(z,t) \in K_t\ \forall t \geq 0$ *entonces* z *es único.*

Demostración:
Supongamos por el absurdo que existen dos puntos z_1 y z_2 en las condiciones del Lema de Existencia.
Si definimos $\mathbb{V}(x,y) = B_x(exp_x^{-1}y)$, por Lema 1 $\Rightarrow B_{z_1}(a) = \mathbb{V}(z_1,z_2) > 0$.
Además , $\bar{\mathbb{V}}(x,y) > 0$ si $x \neq y$.
Como por hipótesis $\phi(z_i,t) \in K_t \forall t \geq 0 \Rightarrow \forall n \geq 0$ se cumple que $V(f^n(x), f^n(z_i)) \leq k$. Como

$$V(f^n(x), f^n(z_i)) = V(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z_i)) + \int_0^1 \dot{V}(\phi(f^{n-1}(x), s), \phi(f^{n-1}(z_i), s))ds \leq k$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z_i)) + Q\bar{\mathbb{V}}(f^{n-2}(x), f^{n-2}(z_i)) + Q'\bar{\mathbb{V}}(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z_i))$$
$$\leq k - V(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z_i))$$

Siendo $Q = \int_0^1 [\int_0^s q(u)du]ds$ y, $Q' = \int_0^1 [\int_0^1 q(u)du - \int_0^s q(u)du]ds$.
$\Rightarrow \mathbb{V}(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z_i)) \leq k'$.
Llamándole $\mathbb{K}'_n = \{f^n(z) \in M / \mathbb{V}(f^n(x), f^n(z)) \leq k'\}$
$\Rightarrow$ si $\phi(z_i,t) \in K_t \forall t \geq 0 \Rightarrow f^n(z_i) \in \mathbb{K}'_n \forall n \geq 0 \Rightarrow$ podemos aplicar el lema de Unicidad (Lema 2) concluyendo que $z_1 \equiv z_2$.

Queda entonces bien definida una función $j : S_x \longrightarrow M$, entre los $w_y \in S_x$ y los puntos $z \in K_0 \quad / \,\phi(z,t) \in K_t \;\forall\, t \geq 0$, la misma está dada por $j(w_y) = exp_y u$.
Tal como comentamos al inicio de la demostración, si $z \in K_0$ es tal que

$$\phi(z,t) \in K_t \forall t \geq 0 \Rightarrow z \in W^s(x)$$

En efecto, si $d(f^n(x), f^n(z)) \nrightarrow 0 \Rightarrow \exists\, \rho > 0$ tal que $d(f^n(x), f^n(z)) > \rho\, \forall\, n > n_1$, como $\phi(z,t) \in K_t\, \forall\, t \geq 0 \Rightarrow$ por la continuidad de V, existe $\epsilon > 0\, /\, d(f^n(x), f^n(z)) < \epsilon \quad \forall n \geq 0$. Si

$$m = min\{\bar{\mathbb{V}}(x,y)\ ,\ (x,y) \in M \times M/\rho < d(x,y) < \epsilon\}$$

llegamos a que $\mathbb{V}(f^n(x), f^n(z)) > \mathbb{V}(x,z) + m(n-1)$ y por lo tanto $\mathbb{V}(f^n(x), f^n(z)) \to \infty$ cuando $n \to \infty$ lo cual es absurdo por def. de z.
El conjunto de los z es el gráfico de la función j, que es continua (dada un sucesión $w_{y_n} \longrightarrow w_y$ esto implica necesariamente que $j(w_{y_n}) \longrightarrow j(w_y)$ porque si asi no fuera estaríamos en contradicción con la unicidad de z ya demostrada.
Por lo tanto $W^s(x) \cap K_0$ es homeomorfo a $\mathbb{R}^q \cap exp_x^{-1} K_0$ ($q = dimS_x$), por lo tanto $W^s(x)$ es una subvariedad de M **.**

$\blacksquare$

5.2: $T_xW^s(x) = S_x$.

Demostración:

Sea $z \in K_0/\ \phi(z,t) \in K_t\ \forall\, t\ \geq 0 \Rightarrow$ como $\ddot{V}(x,y) > 0$ si $x \neq y$
$\Rightarrow \dot{V}(f^n(x), f^n(z)) < 0\ \forall\, n \geq 0$.
Recordemos la expresión de $\dot{V}$:

$$\dot{V}(f^n(x), f^n(z)) = \mathbb{V}(f^n(x), f^n(z)) - \int_0^1 (1 - q(u))du\bar{\mathbb{V}}(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z))$$

De donde:

$$\mathbb{V}(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z)) + \int_0^1 q(u)du\bar{\mathbb{V}}(f^{n-1}(x), f^{n-1}(z)\ <\ 0$$

Definamos $\mathbb{V}(x,y) = B_x(exp_x^{-1}y)$.
Consideremos entonces una sucesión convergente a x de puntos z_i, con v_i y v_{f_i} unitarios, colineales con $exp_x^{-1}z_i$ y $exp_{f(x)}^{-1}f(z_i)$ respectivamente.

Si $z_i \to x$, $\Rightarrow v_{f_i} = f'v_i + \theta(v_i)$, en tales condiciones entonces será $B_{f^{n-1}(x)}(f^{n-1})'v_i < 0$ para $0 \leqq n \leqq n_i$.

Sea $m > 0$, fijo , cualquiera.
Cuando $v_i \to v$, $m \leq n_i\ \forall i$ suficientemente grande y en ese caso será $B_{f^{m-1}(x)}(f^{m-1})'v_i < 0$, $\Rightarrow lim_{i\to\infty}B_{f^{m-1}(x)}(f^{m-1})'v_i \leq 0$, o lo que es lo mismo $B_{f^{m-1}(x)}(f^{m-1})'v \leq 0$, $\Rightarrow v \in S_x$, el que como se establece en [1] varía continuamente con x.
Con lo que queda demostrado.

$\blacksquare$

Referencias

[1] J. Lewowicz, *Lyapunov Functions and Topological Stability*. J. Differ. Equations 38 (1980), pp. 192–209.

[2] J. Lewowicz, *Invariant Manifolds for regular points*, Pacific J. of Mathematics 96 (1981), pp 163–173.

[3] M. Do Carmo, *Geometría Riemanniana*, Sgda. Edición, pp 64–65. Bull. Amer Math. Soc. 73 (1967), 747–817.

[4] A. Katok & B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems.* Cambridge, University press (www.cambridge.org), pp 242–256.

ISSN 1688-2806

Carolina Cosse
Tesis de Maestría en Ingeniería Matemática
Facultad de Ingeniería
Universidad de la República
Montevideo, Uruguay, 2009