

TESIS

presentada el día 22 de octubre de 2013 en la

Universidad de la República, UdelaR

para obtener el título de

MAGISTER EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

por

Lic. Fernanda GONZÁLEZ

Instituto de Investigación : LPE/IMERL - Facultad de Ingeniería

Componentes universitarios :

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

FACULTAD DE INGENIERÍA

Título de la tesis :

**MUESTREO POR IMPORTANCIA Y REDUCCIÓN RECURSIVA DE
VARIANZA PARA LA EVALUACIÓN DE LA CONFIABILIDAD
DIÁMETRO ACOTADA**

defensa realizada el 03 Diciembre de 2013 ante el comité de examinadores

Dr. Ing. Franco	ROBLEDO	Director de Tesis
Dr. Ing. Héctor	CANCELA	Director de Tesis
Dr. Eduardo	MORENO	Presidente
Dr. Gustavo	GUERBEROFF	
Prof. MSc. Omar	VIERA ZIPITRÍA	

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Notación general	3
2. Marco teórico	5
2.1. Confiabilidad de redes	5
2.1.1. Medida clásica de confiabilidad	5
2.1.2. Confiabilidad diámetro acotada	12
2.2. Métodos de cálculo exacto	14
2.2.1. Método de Enumeración Completa	15
2.2.2. Método de Inclusión Exclusión	16
2.2.3. Método de Factorización	17
2.3. Métodos de cálculo aproximado	21
2.3.1. Método Monte Carlo Crudo	22
2.3.2. Método de Muestreo por Importancia	26
2.3.3. Método Recursivo de Reducción de Varianza	29
3. Métodos de Reducción de Varianza para el problema de Confiabilidad Diámetro Acotada	32
3.1. Muestreo por Importancia	33
3.1.1. Conjunto de Corte de Máxima Probabilidad: Algoritmo de solución óptima aproximada	37
3.1.2. Conjunto de Corte de Máxima Probabilidad: Selección trivial	39
3.1.3. Eliminación de Aristas Irrelevantes	43
3.2. Método Recursivo de Reducción de Varianza	45
4. Análisis experimental	49
4.1. Marco de comparación	49
4.2. Casos de prueba	50
4.3. <i>AZVIS</i> según estrategia de selección del D-mincut	53
4.4. <i>AZVIS</i> con eliminación de aristas irrelevantes	60
4.5. <i>RVR</i>	63
4.6. Función de Cobertura	66
5. Conclusiones	76

Resumen

En una red en la que los enlaces están sujetos a fallas aleatorias e independientes la confiabilidad mide la probabilidad de que el conjunto de nodos terminales esté conectado por enlaces operativos. El parámetro de confiabilidad diámetro acotada extiende el concepto de confiabilidad clásica, estableciendo restricciones en el largo de los caminos que comunican a los nodos terminales dos a dos. En general el cálculo exacto de la confiabilidad diámetro acotada tiene complejidad NP-Hard. En estos casos se recurre a aproximaciones basadas en la simulación Monte Carlo. En el contexto de redes altamente confiables técnicas tradicionales como el método Monte Carlo Crudo no logran un buen desempeño en la estimación de la medida de confiabilidad diámetro acotada. Una alternativa es aplicar métodos de reducción de varianza que mejoran la precisión de las estimaciones respecto al método Monte Carlo Crudo. En este trabajo se propone la comparación de dos modelos de reducción de varianza aplicados al cálculo de la confiabilidad diámetro acotada considerando dos nodos terminales: Muestreo por Importancia y Método Recursivo de Reducción de Varianza. Para el método de Muestreo por Importancia se consideran dos estrategias de selección de conjuntos de corte y un algoritmo de eliminación de aristas irrelevantes. Para el Método Recursivo de Reducción de Varianza se requiere también un algoritmo de selección de conjuntos de corte. Se presentan ejemplos numéricos en los que se verifica la mejora en la performance global respecto al Monte Carlo Crudo y se comparan las características y el desempeño de los métodos propuestos.

Capítulo 1

Introducción

La confiabilidad de una red es una medida que indica la probabilidad de éxito en la conexión de un conjunto de nodos de interés. Es aplicable a diferentes ámbitos, desde el diseño de carreteras hasta los sistemas eléctricos. En telecomunicaciones es relevante ya que permite evaluar la permanencia del servicio de la red cuando las líneas o los terminales están sujetos a fallas. En el caso por ejemplo de las video conferencias se agrega una complejidad extra porque la conexión depende de los rezagos.

Se define la confiabilidad de una red como la probabilidad de que se encuentre operativa; decimos que la red está operativa cuando un conjunto de nodos de interés denominados nodos objetivo se encuentran comunicados a través de enlaces operativos. Una generalización de esta medida es la confiabilidad diámetro acotada en la que los nodos objetivo deben estar conectados dos a dos por caminos de largo no mayor a un cierto valor dado [1].

En el modelo teórico empleado para el cálculo de la confiabilidad la red es representada mediante un grafo no dirigido $G = (V, E)$ donde $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es el conjunto de nodos y $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ el de aristas. El abordaje del cálculo de la confiabilidad admite diferentes alternativas respecto al funcionamiento de enlaces y nodos: en el modelo arista confiabilidad se asume que los nodos son perfectos y las aristas fallan con una probabilidad dada, en nodo confiabilidad las aristas son perfectas y los nodos fallan con una probabilidad dada y en nodo-arista confiabilidad fallan tanto nodos como aristas. En el presente trabajo se considera el modelo arista confiabilidad y se representa el estado de las aristas mediante variables aleatorias binarias. En relación a los nodos objetivo se distinguen tres clases: el caso general K terminal con $K \subseteq V$, s - t terminal con $K = \{s, t\}$, $s, t \in V$ y All terminal con $K = V$. Se denomina $R_K(G)$ a la confiabilidad en su versión clásica y $U_K(G) = 1 - R_K(G)$ a la anticonfiabilidad definida como la probabilidad de falla de la red. La confiabilidad con cota de diámetro D la denominamos $R_K(G, D)$ y la anticonfiabilidad diámetro acotada $U_K(G, D) = 1 - R_K(G, D)$.

El cálculo exacto de la confiabilidad tiene complejidad exponencial en el número de aristas con lo cual se vuelve impráctico en redes de gran porte [2]. En estos casos se recurre a aproximaciones basadas en la simulación Monte Carlo. La formulación estándar del método Monte Carlo, también denominada Monte Carlo Crudo, aplicada al cálculo de la confiabilidad consiste en la generación aleatoria de replicaciones independientes del grafo y la contabilización de aquellas que corresponden a estados operativos de la red. Este abordaje es inapropiado para el caso de redes altamente confiables ya que se requiere un tamaño de muestra elevado para obtener una precisión aceptable. Una mejor aproximación para este tipo de problemas donde se desea evaluar la ocurrencia de un evento raro, en este caso la falla de la red, es a través de métodos de reducción de varianza. Estos métodos logran reducir la varianza respecto a Monte Carlo Crudo empleando técnicas de muestreo más sofisticadas. Existen diversas técnicas de reducción de varianza, algunas son de alcance general como el Muestreo por Importancia [3] y otras están diseñadas específicamente para la confiabilidad de redes como la Reducción Recursiva de la Varianza [4].

En el Muestreo por Importancia se genera una muestra de estados de la red a partir de una nueva distribución en la que se le asigna mayor probabilidad a la falla de la red. Los resultados obtenidos se corrigen multiplicando por el cociente de verosimilitudes de modo que el estimador sea insesgado. En este documento se presenta una formulación basada en el Muestreo por Importancia adaptada a la estimación de la confiabilidad diámetro acotada en el caso $s - t$ terminal. En el modelo aplicado, el muestreo es secuencial y la probabilidad de falla de una arista depende del estado de las aristas ya sorteadas. Se establece un esquema teórico de muestreo de varianza cero bajo el cual el sistema siempre falla. No se aplica la versión exacta del esquema ya que la nueva distribución depende del parámetro a estimar. En el modelo implementado se aproxima dicho valor con la probabilidad máxima de un corte minimal de la red.

Si se consideran restricciones en el largo de los caminos la identificación del conjunto de corte de máxima probabilidad deja de ser un problema de tiempo de cómputo polinomial [5]. Como aproximación se plantean dos alternativas de selección de conjuntos de corte para el problema de diámetro confiabilidad. Una alternativa es un algoritmo de aproximación al Primal Dual del problema de Flujo Máximo y Corte Mínimo y otra la selección de conjuntos de corte triviales.

El método Recursivo de Reducción de Varianza *RVR* según su sigla en inglés (Recursive Variance Reduction) consiste en el muestreo aplicado sobre una partición del espacio de estados de la red. Se establece la recursión de forma tal de estimar la anticonfiabilidad en grafos más pequeños cuyo estado es determinístico. En la formulación presentada en este trabajo la técnica de muestreo considerada es el muestreo multinomial y el criterio de selección del conjunto de corte requerido para definir la partición es el algoritmo de aproximación al problema de Flujo Máximo y Corte Mínimo.

En este trabajo se aplican los métodos Muestreo por Importancia y *RVR* para estimar la confiabilidad diámetro acotada en el caso $s - t$ terminal en redes altamente confiable. Los métodos son comparados entre sí y se evalúa la mejora de su eficiencia respecto al método Monte Carlo Crudo. En los resultados numéricos se verifica un mejor desempeño de los métodos Muestreo por Importancia y *RVR* respecto a Monte Carlo Crudo aunque no alcanzan la estabilidad con los tamaños de muestra considerados.

Este documento está estructurado de la siguiente forma, en el Capítulo 2 se presentan: el concepto clásico de confiabilidad, el de diámetro confiabilidad, métodos de cálculo exacto de la confiabilidad y métodos aproximados. En el Capítulo 3 se presenta un estimador basado en el Muestreo por Importancia y uno basado en el método Recursivo de Reducción de Varianza aplicados al cálculo de la anticonfiabilidad con cota de diámetro. En el Capítulo 4 se presentan los resultados numéricos para los métodos *AZVIS* y *RVR* y se evalúa la precisión a partir del error real y la robustez a partir de la función de cobertura. Por último se presentan las conclusiones.

1.1. Notación general

- $G = (V, E)$: Grafo no dirigido.
- $V = \{v_1, \dots, v_n\}$: Conjunto de nodos de G .
- $E = \{e_1, \dots, e_m\}$: Conjunto de enlaces de G .
- K : Conjunto de nodos objetivo, terminales de la red.
- D_G : Diámetro del grafo G .
- m y n : Número de aristas y nodos respectivamente
- $\Phi(X)$: Función de estructura, $\Phi(X) = 0$ si la red está operativa y $\Phi(X) = 1$ en caso contrario.
- $R_K(G)$: Confiabilidad de G .

- $U_K(G) = 1 - R_K(G)$ Anticonfiabilidad de G .
- $R_K(G, D)$: D-Confiabilidad de G .
- $U_K(G, D) = 1 - R_K(G, D)$: D-anticonfiabilidad de G .
- $\hat{U}_K(G, D)$: Estimación de $U_K(G, D)$.
- N : Tamaño de muestra.
- $X = (X_1, \dots, X_m)$: Vector aleatorio de estados de E .
- $x = (x_1, \dots, x_m)$: Vector de estados observados de E .
- $p_i = P(X_i = 1)$: Probabilidad de que la arista i esté operativa.
- $q_i = 1 - p_i = P(X_i = 0)$: Probabilidad de que la arista i falle.
- $L(X)$: Cociente de verosimilitudes.
- $U_i(x_1, \dots, x_{i-1}, D)$: Anticonfiabilidad diámetro acotada de G condicionada al estado de las aristas $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$.

Capítulo 2

Marco teórico

2.1. Confiabilidad de redes

2.1.1. Medida clásica de confiabilidad

Una red de comunicación puede ser modelada a través de un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de nodos y $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ un conjunto de aristas. Existen diferentes modelos probabilísticos desarrollados para el estudio de la confiabilidad de una red, dependiendo de los componentes a los que se les asigna aleatoriedad de funcionamiento:

- Arista confiabilidad: Se asumen nodos perfectos y aristas sujetas a fallas con una cierta probabilidad dada.
- Nodo confiabilidad: Se asumen aristas perfectas y nodos sujetos a fallas con una cierta probabilidad dada.
- Nodo-Arista confiabilidad: Se asume que tanto nodos como aristas están sujetos a fallas con una cierta probabilidad dada.

En el presente trabajo se considera el modelo de arista confiabilidad. Sea $G = (V, E)$ un grafo simple no dirigido con $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ un conjunto de nodos y $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ un conjunto de aristas o enlaces, se define a la confiabilidad $R_K(G)$ como la probabilidad de que un subconjunto $K \subseteq V$, llamado conjunto de nodos objetivo, estén conectados entre sí luego de remover las aristas que fallan. Se denomina anticonfiabilidad $U_K(G)$ a la probabilidad de falla de la red y se expresa como $U_K(G) = 1 - R_K(G)$.

La medida más general es la K -confiabilidad en la que el conjunto de nodos objetivo $K \subseteq V$. Existen dos casos particulares dependiendo de la conformación de K , la confiabilidad $s-t$ terminal y la confiabilidad *All terminal* con $K = V$.

Definición 1. *Confiabilidad $s-t$ terminal:* Dado $G = (V, E)$ y $\{s, t\} \in V$ la confiabilidad $s-t$ terminal $R_{s,t}(G)$ se define como la probabilidad de que los nodos s y t estén conectados luego de remover los enlaces que fallan.

Definición 2. *Confiabilidad All terminal:* Dado $G = (V, E)$, la confiabilidad All terminal $R_V(G)$ se define como la probabilidad de que todos los nodos de V estén comunicados entre sí, luego de remover los enlaces que fallan.

Se representa una configuración de la red a través de un vector de estado de las aristas $X = (X_1, \dots, X_m)$. Cada elemento del vector es una variable aleatoria binaria X_i que vale 1 si la arista i se encuentra operativa y 0 en caso contrario. Ω es el conjunto espacio de todas las configuraciones de G , y dado que cada arista tiene dos estados posibles $\Omega = \{0, 1\}^m$ y $|\Omega| = 2^m$. Las aristas de G para el modelo considerado son independientes y tienen asociada una probabilidad de falla definida de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P(X_i = 1) &= p_i \\ P(X_i = 0) &= 1 - p_i = q_i \\ P(X = x) &= \prod_{i/x_i=1} p_i \prod_{i/x_i=0} q_i \end{aligned}$$

Para representar matemáticamente si una red se encuentra operativa se utiliza la función de estructura $\Phi()$ que se aplica sobre una configuración del grafo. Según la expresión tradicional, la función $\Phi(X)$ vale 1 si el grafo inducido por X está operativo y 0 en caso contrario. El grafo inducido por X es aquel que resulta de remover las aristas en estado de falla. Para simplificar la notación, en este documento se emplea la expresión opuesta de la función de estructura, $\Phi(X) = 0$ corresponde a un estado operativo de la red y $\Phi(X) = 1$ a un estado de falla. Esta simplificación obedece a que en este trabajo se considera el caso particular de redes altamente confiables y por lo tanto se formulan los métodos en términos de $U_K(G, D)$ en lugar de $R_K(G, D)$.

$$\Rightarrow \Phi(X) = \begin{cases} 1, & \text{si el grafo inducido por } X \text{ no está operativo} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Una función de estructura $\Phi(X)$ es una función monótona cuando verifica las siguientes condiciones:

1. $\Phi(X)(0, 0, \dots, 0) = 1$
2. $\Phi(X)(1, 1, \dots, 1) = 0$
3. $\Phi(X) \leq \phi(Y)$ si $X > Y$

Con $X = (X_1, X_2, \dots, X_m)$ e $Y = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$. Decimos que $X \leq Y$ si $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ $X_i \leq Y_i$ y $\exists i \in \{1, \dots, m\}$ tal que $X_i < Y_i$. En general la función de estructura no cumple con las condiciones de monotonía en los modelos de nodo-confiabilidad mientras que sí lo hace en los modelos de arista confiabilidad. En la nodo confiabilidad no es cierto que todo superconjunto de un estado operacional de la red es un estado operacional de la red. Dado $G = (V, E)$ y $S \subseteq V$, S es un estado operacional si el grafo inducido por S es conexo. En el grafo $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ y $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3)\}$ $S_1 = \{v_1, v_2\}$ es un estado operacional y $S_2 = \{v_1, v_2, v_4\}$ no lo es.



Figura 2.1: Estado operativo y no operativo de G en nodo confiabilidad

La confiabilidad de una red puede definirse en términos de la función de estructura como su valor esperado.

$$U_K(G) = 1 - R_K(G) = E[\phi(X)] = \sum_{x \in \{0,1\}^m} \phi(x)P[X = x] \quad (2.1)$$

Ejemplo 1. Sea $G_1 = (V, E)$ el grafo de la Figura 2.2 con $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y $K = \{s, t\}$, el vector de estado $x = [1, 0, 0, 1, 0]$ corresponde a un estado operativo de la red mientras que $x = [1, 0, 0, 0, 1]$ corresponde a un estado no operativo. En la Figura 2.2 se representa con una línea continua a las aristas que funcionan y con una línea punteada las que fallan.

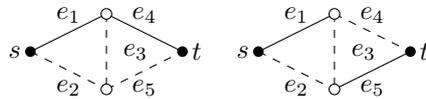


Figura 2.2: Estado operativo y no operativo de G en arista confiabilidad

Una forma alternativa de expresar $R_K(G)$ es en términos de conjuntos camino o pathsets y conjuntos de corte o cutsets.

Definición 3. *Pathset:* Sea $G = (V, E)$, un pathset es un subconjunto de E tal que si todas las aristas en P están operativas la red se encuentra en estado operativo. Decimos que P es un minpath si ningún subconjunto propio de P es un pathset.

Propiedad 1. *Propiedad de Coherencia:* todo superconjunto de un pathset es un pathset.

La propiedad de coherencia indica que para identificar los pathsets es suficiente con determinar los minpaths.

Ejemplo 2. Sea $G_2 = (V, E)$ el grafo representado en la Figura 2.3 con $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ y $\{s, t\}$ los nodos objetivo. El conjunto $P_1 = \{e_1, e_4\}$ es un minpath de G . Los nodos objetivo $\{s, t\}$ se comunican si las aristas $\{e_1, e_4\}$ están operativas, esto significa que toda configuración del espacio de estados con las aristas e_1 y e_4 operativas corresponderá a un estado operativo de la red sin importar el estado del resto de las aristas. También son minpaths $P_2 = \{e_2, e_5\}$ y $P_3 = \{e_3\}$.

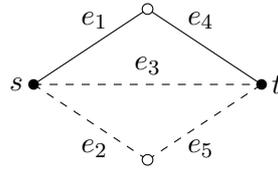


Figura 2.3: minpath de G

Para el caso en que las confiabilidades elementales son iguales para todas las aristas, es decir, $p_i = p \forall i \in \{1, \dots, m\}$, es posible expresar $R_K(G)$ en términos de p . Esta formulación requiere conocer los pathsets que conectan a los nodos objetivo. Sea N_i el número de pathsets de i aristas, la expresión polinomial de la confiabilidad es la siguiente:

$$R_K(G, p) = \sum_{i=1}^m N_i p^i (1 - p)^{m-i} \quad (2.2)$$

Sea $\gamma = \{P_1, \dots, P_{|\gamma|}\}$ el conjunto de todos los minpaths de un grafo G que comunican al conjunto K de nodos objetivo. El grafo G se encuentra operativo si para algún P_i $i = 1, \dots, |\gamma|$ todos los enlaces funcionan. Sea P_i^E el evento donde todas las aristas de P_i están operativas.

$$R_K(G) = P\left[\bigcup_{i=1}^{|\gamma|} P_i^E\right] \quad (2.3)$$

La dificultad en este caso reside en identificar el conjunto de todos los minpaths que comunican a los nodos objetivo del grafo y calcular la probabilidad de la unión de los eventos P_i^E .

Ejemplo 3. Sea $G_2 = (V, E)$ el grafo del ejemplo 2 y $P[X_i = 1] = p \forall i \in \{1, \dots, |E|\}$. El conjunto de minpath γ está formado por: $\gamma = \{(e_3), (e_1, e_4), (e_2, e_5)\}$ y $R_K(G) = p + p^2(1 - p) + 2p^3(1 - p)^2 + p^2(1 - p)^3$.

Definición 4. *Cutset:* Sea $G = (V, E)$ decimos que $C \subseteq E$ es un cutset de G si el grafo resultante de remover todas las aristas de C no es conexo. Si ningún subconjunto propio de C es un cutset entonces C es un mincut.

Ejemplo 4. Sea $G = (V, E)$ el grafo en la Figura 2.4 entonces el conjunto $C_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$ es un mincut de G . Todas las configuraciones del espacio de estados en los que las aristas $\{e_1, e_2, e_3\}$ fallan corresponden a estados no operativos de la red sin importar lo que suceda con el resto de las aristas. También son conjuntos de corte minimales $C_2 = \{e_3, e_4, e_5\}$ y $C_3 = \{e_1, e_3, e_5\}$ y $C_4 = \{e_2, e_3, e_4\}$. La arista e_3 está incluida en todos los mincuts, ya que si está operativa el grafo también lo estará.

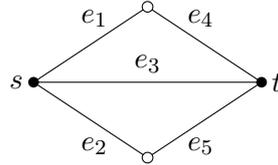


Figura 2.4: mincut de G

Sea $\zeta = \{C_1, \dots, C_{|\zeta|}\}$ el conjunto de todos los mincuts de un grafo G que interrumpen la conexión del conjunto K de nodos objetivo. El grafo G se encuentra no operativo si para al menos uno de los mincuts C_i todos los enlaces fallan. Sea C_i^E el evento donde todas las aristas de C_i fallan, entonces:

$$U_K(G) = P\left[\bigcup_{i=1}^{|\zeta|} C_i^E\right]$$

Análogamente a lo que sucede con los pathsets, es posible expresar $R_K(G)$ en términos de los cutsets. El cálculo implica identificar el conjunto de cutsets de G y calcular la probabilidad de la unión de los eventos ζ_i^E .

Para el caso en que las confiabilidades elementales p_i son iguales para todas las aristas, existe una expresión polinomial para $R_K(G)$. Sea N_i cantidad de cutsets con i aristas,

$$R_K(G, p) = 1 - U_K(G, p) = 1 - \sum_{i=1}^m N_i p^{m-i} (1 - p)^i \quad (2.4)$$

Ejemplo 5. Sea $G = (V, E)$ el grafo de la Figura 2.4 y $P[X_i = 1] = p \forall i \in \{1, \dots, |E|\}$ el conjunto ζ de todos los mincut de G es $\zeta = \{(e_1, e_2, e_3), (e_3, e_4, e_5), (e_1, e_3, e_5), (e_2, e_3, e_4)\}$. Por lo tanto: $U_K(G) = (1 - p)^3 + 3(1 - p)^3 p^2 + 2(1 - p)^4 p$.

En la implementación de métodos de cálculo de la confiabilidad se consideran operaciones sobre el grafo que permiten reducir los tiempos de cómputo. A continuación presentamos la eliminación y contracción de aristas, la reducción en serie y la reducción en paralelo.

Definición 5. *Eliminación de aristas:* Dado $G = (V, E)$, la eliminación de una arista $e \in E$ consiste en removerla del grafo original obteniendo un nuevo grafo $(G - e) = (V, E - e)$. Las aristas de un grafo pueden ser relevantes o irrelevantes para conectar a los nodos objetivo, la eliminación de una arista irrelevante no altera el cálculo de la confiabilidad del grafo.

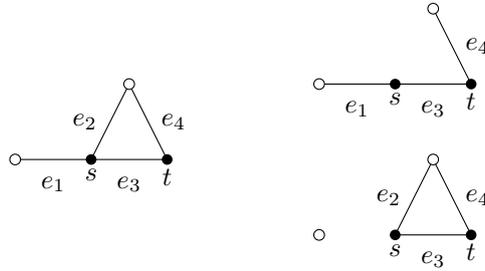


Figura 2.5: Eliminación de una arista

Definición 6. *Aristas irrelevantes:* Dado $G = (V, E)$, decimos que una arista $e \in E$ es irrelevante si no pertenece a ningún pathset que conecte a los nodos objetivo.

En la Figura 2.5, la arista e_1 es irrelevante ya que no pertenece a un pathset que conecte a los nodos objetivo $\{s, t\}$ y al eliminarla se obtiene un grafo equivalente al original en términos de la confiabilidad. No sucede lo mismo con la arista e_2 .

Definición 7. *Contracción de aristas:* Dado $G = (V, E)$, la contracción de la arista $e = \{uv\} \in E$ consiste en la eliminación de la arista e y la fusión de sus nodos adyacentes u y v . Sea w el nodo que resulta de la fusión de u y v , las aristas incidentes a u y a v salvo e son incidentes a w . La confiabilidad del grafo $G * e$ resultante de contraer la arista e se relaciona con el grafo G de la siguiente manera $R_K(G) = R_{K'}(G * e) \cdot p_e$ donde K' el conjunto de nodos objetivo luego de la contracción de aristas.

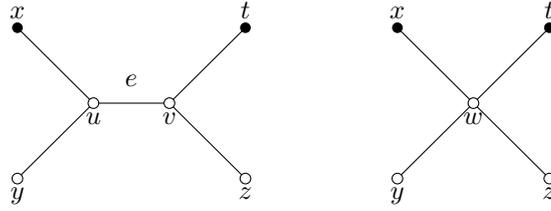


Figura 2.6: Contracción de la arista e

Definición 8. *Reducción en serie:* Sea $G = (V, E)$, dos aristas e_1 y $e_2 \in E$ están en serie si son adyacentes y el nodo que comparten es de grado 2 y no pertenece a K . La reducción en serie consiste en sustituir las aristas $e_1 = uv$ y $e_2 = vw$ con $P(X_{e_1} = 1) = p_1$ y $P(X_{e_2} = 1) = p_2$ por una única arista $e' = uw$ con $P(X_{e'} = 1) = p_1 \cdot p_2$. Con este ajuste en las probabilidades elementales no se altera el cálculo de la confiabilidad global.

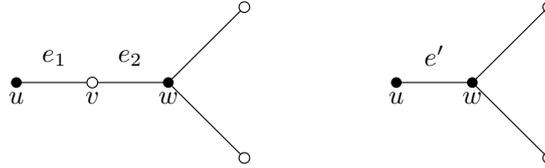


Figura 2.7: Reducción en serie de las aristas $\{e_1, e_2\}$

Definición 9. *Reducción en paralelo:* Sea $G = (V, E)$, dos aristas e_1 y e_2 están en paralelo si tienen los mismos extremos. La reducción en paralelo en el ejemplo de la Figura 2.8 consiste en sustituir las aristas $e_1 = uv$ y $e_2 = uv$ por una única arista $e' = uv$. Si $P(X_{e_1} = 1) = p_1$ y $P(X_{e_2} = 1) = p_2$ entonces $P(X_{e'} = 1) = p_1 + p_2 - p_1 \cdot p_2$. Con este ajuste en las probabilidades elementales no se altera el cálculo de la confiabilidad global.



Figura 2.8: Reducción en paralelo de las aristas e_1 y e_2

Dada su importancia en la simplificación de la topología de los grafos se desarrollan algoritmos para detectar aristas irrelevantes y reducir grafos. Algunos métodos de cálculo exacto como el método de Factorización y métodos aproximados como el de Reducción Recursiva de la Varianza se basan en este tipo de operaciones.

2.1.2. Confiabilidad diámetro acotada

El concepto de “diámetro confiabilidad” fue introducido por Petingi y Rodríguez [1]. La diámetro confiabilidad extiende la medida clásica de confiabilidad considerando como parámetro el largo máximo aceptado para los caminos que conectan dos a dos a los nodos objetivo. En el modelo matemático la red es representada por un grafo no dirigido $G = (V, E)$ donde los nodos son perfectos y los enlaces fallan con una cierta probabilidad dada. Las definiciones formales de diámetro y diámetro confiabilidad son las siguientes:

Definición 10. *Diámetro de G : Dado $G = (V, E)$, con $K \subseteq V$ el conjunto de nodos objetivo se define el Diámetro de G $D_K(G)$ como la máxima distancia entre cualquier par de nodos de K .*

Definición 11. *Confiabilidad diámetro acotada: Dado $G = (V, E)$, se define a la confiabilidad diámetro acotada $R_K(G, D)$ como la probabilidad de que todo par de nodos objetivos en K estén comunicados exitosamente entre sí por al menos un camino de largo menor o igual a D luego de remover las aristas que fallan.*

Nótese que la medida clásica de la confiabilidad es un caso particular de la confiabilidad diámetro acotada, $R_K(G) = R_K(G, D)$ con $D = |V| - 1$. La medida de anticonfiabilidad diámetro acotada $U_K(G, D)$ representa la probabilidad de falla de la red cuando los caminos que comunican dos a dos a los nodos de K tienen como largo máximo admitido D .

$$U_K(G, D) = 1 - R_K(G, D)$$

La diámetro confiabilidad admite la misma clasificación que la versión clásica respecto al conjunto de nodos objetivo; podemos hablar de confiabilidad diámetro acotada K -terminal $R_K(G, D)$, confiabilidad diámetro acotada s - t terminal $R_K(G, D)$ con $K = \{s, t\}$ y confiabilidad diámetro acotada All-terminal $R_V(G, D)$ con $K = V$.

Definición 12. *En términos de la diámetro confiabilidad la red está operativa si los nodos terminales están conectados dos a dos por caminos de largo menor o igual a D . El camino resultante que conecta a todas los nodos terminales es un D -pathset. Decimos que un D -pathset es un D -minpath si eliminando cualquier componente deja de ser un D -pathset.*

Definición 13. *D -cutset: Sea $G = (V, E)$ decimos que $C \subseteq E$ es un D -cutset de G si en el grafo resultante de remover todas las aristas de C no existen pathsets de largo menor o igual a D que conecten a los nodos de K . Si quitando cualquier elemento de C el conjunto deja de ser un D -cutset entonces C es un D -mincut.*

Ejemplo 6. *Los D -minpath $P_i(D)$ y D -mincut $C_i(D)$ del grafo G de la Figura 2.9 son:*

- Para $D = 1$ $P_1(D) = \{e_3\}$ $C_1(D) = \{e_3\}$
- Para $D \geq 2$ $P_1(D) = \{e_3\}$, $P_2(D) = \{e_1, e_4\}$, $P_3(D) = \{e_2, e_5\}$, $C_1(D) = \{e_1, e_2, e_3\}$, $C_2(D) = \{e_3, e_4, e_5\}$, $C_3(D) = \{e_1, e_3, e_5\}$, $C_4(D) = \{e_2, e_3, e_4\}$

La confiabilidad clásica es equivalente a la D-confiabilidad con $D = |V|-1$, en el ejemplo 6 los D-minpath y D-mincut para $D \geq 2$ coinciden con los de la confiabilidad clásica porque no existen pathsets de largo mayor a 2 que comuniquen a s y t .

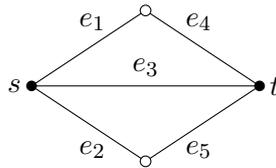


Figura 2.9: Grafo G con $K = \{s, t\}$

En el modelo clásico de arista confiabilidad es posible realizar operaciones sobre G obteniendo un grafo equivalente. Los conceptos sobre operaciones de simplificación de grafos para el modelo clásico de confiabilidad no se extienden de manera completa al modelo de diámetro confiabilidad. La eliminación de aristas irrelevantes y la reducción en paralelo no implican modificaciones en el largo de los caminos y por lo tanto pueden aplicarse de la misma forma que en el modelo clásico con la única salvedad que serán aristas irrelevantes aquellas que no pertenezcan a ningún camino que conecte a algún par de nodos objetivo de largo menor o igual a D .

La contracción y la reducción en serie alteran el largo de los caminos y como consecuencia también la medida de diámetro confiabilidad del grafo. Existen algunas alternativas respecto a la fusión de aristas en el modelo de diámetro confiabilidad que presentamos a continuación:

Definición 14. *Aristas incidentes a un terminal:* si todas las aristas incidentes a un nodo terminal están operativas se contraen todas y se evalúa la confiabilidad con un nuevo diámetro $D' = D - 1$.

Definición 15. *Reducción path-terminal:* Se aplica en el modelo $s-t$ terminal e implica la modificación de los nodos objetivo. Consiste en una reducción en serie de un camino φ que verifica las siguientes condiciones:

1. Uno de los nodos extremos es un nodo terminal s de grado 1
2. El camino conecta al nodo s con un nodo v

3. Los nodos intermedios del camino son de grado 2, $\text{grado}(u_i) = 2 \quad i = 1, \dots, |\varphi|$.

Sea $\varphi = \{(s, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_{|\varphi|-1}, v)\}$ un camino entre s y v entonces:

$$R_{s,t}(G, D) = R_{v,t}(G', |D - \varphi| - 1) \prod_{e \in \varphi} p_e \text{ con}$$

$$G' = (V - \{s, u_1, \dots, u_{|\varphi}|\}, E - \varphi)$$

2.2. Métodos de cálculo exacto

La complejidad del cálculo exacto de $R_K(G)$ depende del tamaño de la red considerada, el tiempo de cómputo es mayor en redes de gran porte. Es posible reducir el tiempo de cómputo para evaluar $R_K(G)$ y $R_K(G, D)$ si se consideran operaciones como la eliminación de aristas irrelevantes, reducciones en serie y en paralelo a partir de las cuales se obtiene un grafo de menor tamaño y equivalente en términos de confiabilidad.

El cómputo de la K-confiabilidad $R_K(G)$ en el caso general es un problema NP-Hard [6], esto también se verifica para el caso de la confiabilidad s-t terminal $R_{s,t}(G)$ [7] y la confiabilidad All terminal $R_V(G)$ [8].

La diámetro confiabilidad según fue demostrado por Cancela y Petingi [2] puede ser determinada en tiempo polinomial en el caso s-t terminal si $D = 2$ mientras que para $D \geq 3$ el problema es NP-Hard. Este resultado se extiende para cualquier número fijo de nodos objetivo [2].

En algunas topologías específicas el cálculo exacto es trivial, un ejemplo es el de una red con al menos uno de los nodos objetivo aislado. Para algunas clases de grafos existen algoritmos de cálculo eficientes para el cálculo de la confiabilidad clásica. Este es el caso del Grafo Completo cuando las probabilidades elementales son idénticas. Sea K_n el Grafo Completo con $p_e = p \quad \forall e \in E$ se presenta una fórmula de cálculo recursivo para $R_{s,t}(G)$, $R_V(G)$ y $R_K(G)$. Esta formulación no es válida para el cálculo de la diámetro confiabilidad.

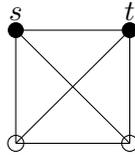


Figura 2.10: Grafo Completo $K_{n=4}$

Caso All terminal: Sea $A_n = R_V(K_n)$ entonces:

$$A_n = 1 - \sum_{j=1}^{n-1} C_{j-1}^{n-1} A_j q^{j(n-j)}$$

Caso s-t terminal: Sea $B_n = R_{s-t}(K_n)$ entonces:

$$B_n = \sum_{j=2}^{n-1} C_{j-2}^{n-2} A_j q^{j(n-j)}$$

Caso K terminal: Sea $S_n = R_K(K_n)$ entonces:

$$S_n = \sum_{j=k}^{n-1} C_{j-k}^{n-k} A_j q^{j(n-j)}$$

Además de las fórmulas para grafos particulares, existen métodos generales de cálculo de la confiabilidad. En las Secciones 2.2.1, 2.2.2 y 2.2.3 se presentan tres métodos de cálculo exacto que a diferencia de la formulación anterior son aplicables a todas las topologías de red.

2.2.1. Método de Enumeración Completa

El método de *Enumeración Completa* de los estados, también denominado método de *Fuerza Bruta* es el método más elemental de cálculo de confiabilidades. Consiste en la enumeración de todos los estados posibles de G , y la suma de la probabilidad de ocurrencia de aquellos que corresponden a un estado operativo global de la red. Esto es equivalente a calcular la probabilidad de todos los posibles pathsets. La formulación es aplicable tanto para $R_K(G)$ como para $R_K(G, D)$. Sea $X = (X_1, \dots, X_m)$ el vector de estado de las aristas de G , para el cálculo de $R_K(G)$ se requiere:

- Enumerar todos los posibles X en Ω el espacio de estados de G
- Calcular $\sum_{x \in \Omega / \phi(x)=0} P(X = x)$

Ejemplo 7. Sea $G = (V, E)$ el grafo de la Figura 2.11 con $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $K = \{s, t\}$ y $P(X_i = 1) = p$, el espacio de vectores de estado Ω está compuesto por:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix}$$

Las primeras cinco columnas corresponden a estados operativos de la red. Sumando las probabilidades de dichos estados se obtiene $R_{s,t}(G) = p^3 + 3p^2(1-p) + p(1-p)^2$.

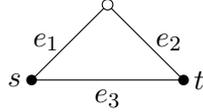


Figura 2.11: Grafo G con $K = \{s, t\}$

2.2.2. Método de Inclusión Exclusión

El método de *Inclusión Exclusión* consiste en expresar $R_K(G)$ como la probabilidad de que al menos uno de los minpaths de G se encuentre operativo, esta probabilidad se calcula como la unión de eventos no disjuntos. La formulación del método es análoga para calcular $R_K(G, D)$.

Sean $\{P_1, \dots, P_h\}$ el conjunto de minpaths de G , E_i el evento todas las aristas de P_i están operativas y $P(E_i)$ la probabilidad del evento E_i podemos expresar $R_K(G)$ como la probabilidad de que al menos un evento E_i ocurra, con $i = 1, \dots, h$. Dado que los eventos E_i no son disjuntos entonces:

$$R_K(G) = \sum_{j=1}^h (-1)^{j+1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, h\} | I|=j} P(E_I)$$

con $E_I = \bigcap_{i \in I} E_i$

Para obtener esta fórmula se considera la expresión de cálculo de la probabilidad de la unión de eventos no disjuntos.

$$\begin{aligned} R_K(G) &= P\left(\bigcup_{i=1}^h E_i\right) = \sum_{i=1}^h P(E_i) - \sum_{i < j} P(E_i E_j) + \dots + (-1)^{h+1} P(E_1 E_2 \dots E_H) \\ &= \sum_{j=1}^h (-1)^{j+1} \sum_{I \subseteq \{1, \dots, h\} | I|=j} P(E_I) \end{aligned} \tag{2.5}$$

El desempeño del método de *Inclusión Exclusión* mejora si se considera el signo de la dominancia del grafo.

Definición 16. Una *i*-formación de un grafo es un conjunto de *i* minpaths cuya unión es el propio subgrafo. Una *i*-formación será par o impar según *i* sea par o impar respectivamente.

Definición 17. Se define *Signed Domination* de un grafo G o $SDom(G)$ al número de formaciones pares menos el número de formaciones impares de G .

Las formaciones pueden aparecer con signo positivo o negativo en la ecuación 2.5, las formaciones pares tienen signo positivo y las impares negativo, la contribución neta es equivalente a la *Signed Domination*. Considerando estas propiedades se define [9]:

$$R_K(G) = \sum_{H \subseteq G} SDom(H)P(H) \quad (2.6)$$

donde H varía en los estados de G y $P(H)$ es la probabilidad de que todas las aristas en H se encuentren operativas.

Esta expresión también es válida para $R_K(G, D)$ [10].

$$R_K(G, D) = \sum_{H \subseteq G} SDom(H)P(H) \quad (2.7)$$

Si bien la formulación presentada significa una mejora en el desempeño respecto al método de *Fuerza Bruta* requiere un esfuerzo computacional importante, en especial para conocer $SDom(H)$ para cada H .

2.2.3. Método de Factorización

El método de *Factorización* fue introducido por Moskowitz [11], a diferencia de los métodos anteriores el método de *Factorización* toma en consideración la topología de la red. Consiste en evaluar $R_K(G)$ a través de una fórmula recursiva, llamada fórmula de factorización, basada en los estados posibles de una arista: falla u opera, la primera equivale a la eliminación de la arista y la segunda a la contracción.

$$R_K(G) = r_e \cdot R_{K'}(G_e) + (1 - r_e) \cdot R_K(G - e) \quad (2.8)$$

donde G_e representa el grafo que resulta de contraer la arista e en G y $G - e$ el grafo que resulta de eliminar la arista e .

Esta recursión equivale a la enumeración de todos los estados posibles con complejidad exponencial aunque puede computarse en menor tiempo. A menudo ocurre que con la eliminación de una arista el grafo resultante no es conexo o con la contracción quedan comunicados los nodos objetivo sin importar el estado de las aristas que no han sido consideradas como pivot. En la fórmula se consideran explícitamente las operaciones de reducción y contracción de aristas pero también se consideran otras clases de simplificaciones como las reducciones en serie y en paralelo. Las modificaciones en el grafo generadas por la contracción y eliminación de aristas producen estructuras que admiten estas reducciones.

El primer paso del algoritmo de factorización es verificar si pueden realizarse reducciones serie paralelo de G para su simplificación, los conceptos de reducción en serie y en paralelo están definidos en la Sección 2.1.1. El segundo paso es verificar si se trata de un grafo cuya confiabilidad puede obtenerse de manera trivial, si es así se evalúa directamente $R_K(G)$. El cálculo de la confiabilidad es trivial si el grafo no es conexo o si es un K-Árbol.

Definición 18. *Un K-Árbol es un conjunto minimal de aristas de G que forman un subgrafo en el cual el conjunto K de nodos objetivo están conectados. Un K-Árbol es minimal, si al eliminar cualquier arista los nodos de K dejan de estar conectados.*

Si no es posible realizar un cálculo trivial de $R_K(G)$ se elige una arista pivot para aplicar la factorización. Una adecuada elección de la arista pivot acelera el tiempo de cómputo del método. Los criterios y algoritmos para una selección óptima de la arista pivot pueden consultarse en [12]. Una vez elegida la arista pivot se ejecuta la eliminación y contracción de la arista. Si los grafos resultantes de la eliminación y contracción son triviales se calculan las confiabilidades asociadas y se asigna su valor en la fórmula de factorización, de lo contrario continúa el proceso recursivo.

Algorithm 1 Algoritmo de Factorización para $R_K(G)$

Require: N , $G = (V, E)$, K , y $p = (p_i, \dots, p_{|E|})$

- 1: Mientras G no es irreducible realizar reducciones serie-paralelo
 - 2: **if** G no es conexo **then**
 - 3: $R_K(G) = 0$
 - 4: **else if** G es un K-Árbol **then**
 - 5: $R_K(G) = \prod_{e \in E} r_e$
 - 6: **else**
 - 7: Elegir una arista pivot e
 - 8: $R_K(G) = r_e \text{FACT}(G_e) + (1 - r_e) \text{FACT}(G - e)$
 - 9: **end if**
-

Para evaluar $R_K(G, D)$ se utiliza el mismo principio de factorización pero se introdu-

cen modificaciones en el algoritmo de cálculo [13]. En primer lugar se requiere computar previamente las variables que se detallan a continuación para simplificar los cálculos y porque las operaciones de eliminación y contracción afectan el largo de los paths.

Notación

- a, b : se representan de esta forma a los pares de nodos de K .
- $P_{a,b}(D)$: paths de largo máximo D entre a y b para todos los terminales de K .
- $P(D)$: conjunto unión de todos los $P_{a,b}(D)$.
- $P(e)$: Conjunto de paths que incluyen a la arista e .
- $NP_{a,b}$: Número de paths de largo máximo D entre a y b en G .
- $NAristas_P$: Número de aristas no perfectas en P .
- $Factible_P$: Variable Booleana, marca Verdadero si el camino entre a y b tiene aristas que fallan y Falso en caso contrario.
- $Conexo_{a,b}$: Variable Booleana, marca Verdadero si a y b están conectados por algún path perfecto de largo máximo D .
- $NParesConexos$: Número de pares de nodos en K conectados por caminos perfectos de largo máximo D .

Algorithm 2 $FACT(G, D)$ Algoritmo de Factorización para $R_K(G, D)$

Require: $G = (V, E)$, K , D , $p = (p_i, \dots, p_{|E|})$, $P_{a,b}(D)$, $P(D)$, $P(e)$, $NP_{a,b}$, $NAristas_P$, $Factible_P$, $Conexo_{a,b}$, $NParesConexos$

```
1:  $R_{CONT} = 0$ 
2:  $R_{ELIM} = 0$ 
3: Elegir  $e \in E \setminus 0 < p_e < 1$ 
4: Computar  $G * e$  y obtener  $R_{CONT}$ 
5: if  $R_{CONT} < 1$  then
6:    $R_{CONT} = FACT(G * e, D)$ 
7: else
8:   Computar  $G - e$  y obtener  $R_{ELIM}$ 
9: end if
10:  $R_K(G, D) = p_e R_{CONT} + (1 - p_e) R_{ELIM}$ 
```

En la operación Contraer $G * e$ se considera el criterio: si todos los enlaces de P distintos de e están operativos entonces a y b están conectados, si todos los pares de nodos (a, b) de K están conectados por paths perfectos entonces la red es siempre operativa. Si al menos uno de los enlaces de P no es perfecto, el proceso recursivo debe continuar.

Algorithm 3 $G * e$

Require: $G = (V, E)$, K , D , e , $P_{a,b}(D)$, $P(D)$, $P(e)$, $NP_{a,b}$, $NAristas_P$, $Factible_P$, $Conexo_{a,b}$, $NParesConexos$

```
1: for  $i = 1 : |P(e)|$  do
2:    $P = P_i(e)$ 
3:   if  $Factible_P = VERDADERO$  then
4:      $NAristas_P = NAristas_P - 1$  {Reducir el número de aristas no perfectas}
5:     if  $Conexo_{a,b} = FALSO$  and  $NAristas_P = 0$  then
6:        $Conexo_{a,b} = VERDADERO$ 
7:        $NP_{a,b} = NP_{a,b} + 1$  {Aumentar el número de caminos perfectos entre  $a$  y  $b$ }
8:       if  $NParesConexos = \frac{|K|(|K|-1)}{2}$  then
9:          $R_{CONT} = 1$  {Si todos los pares de nodos en  $K$  están comunicados por caminos perfectos el estado global de la red es operativo}
10:      end if
11:    end if
12:  end if
13: end for
```

Para el proceso de Eliminación $G - e$ se considera el criterio: si todos los enlaces de

P distintos de e fallan, entonces P no es factible, si falla al menos una arista de todos los P que conectan al par (a, b) entonces el par (a, b) no es conexo. Si cualquiera de los pares de nodos de K no es conexo entonces la red falla. Si no todos los paths P entre a y b fallan entonces la recursión continúa.

Algorithm 4 $G - e$

Require: $G = (V, E)$, K , D , e , $P_{a,b}(D)$, $P(D)$, $P(e)$, $NP_{a,b}$, $NAristas_P$, $Factible_P$, $Conexo_{a,b}$, $NParesConexos$

```

1: for  $i = 1 : |P(e)|$  do
2:    $P = P_i(e)$ 
3:   if  $Factible_P = \text{VERDADERO}$  then
4:      $Factible_P = \text{FALSO}$ 
5:      $NP_{a,b} = NP_{a,b} - 1$  {El path  $P$  entre  $a$  y  $b$  deja de ser factible porque se elimina  $e$  }
6:     if  $NP_{a,b} = 0$  then
7:        $R_{ELIM} = 0$  {No existen paths que comuniquen a los nodos  $a$  y  $b$  de  $K$ }
8:     else
9:        $R_{ELIM} = \text{FACT}(G - e, D)$ 
10:    end if
11:  end if
12: end for

```

El costo computacional del método es como máximo de orden $O(2^m |K|^2 \delta)$ con δ el grado máximo de G [13]. El esfuerzo computacional puede reducirse gracias a las simplificaciones efectuadas sobre G .

Si bien existen métodos que mejoran el desempeño respecto al método de Fuerza Bruta, el tiempo de cómputo del cálculo exacto de la confiabilidad se vuelve prohibitivo para grafos de gran tamaño. Para estos casos la alternativa es recurrir a métodos aproximados o trabajar con cotas. En la Sección 2.3 se presentan tres métodos aproximados basados en la simulación de Monte Carlo.

2.3. Métodos de cálculo aproximado

El cálculo exacto de la medida de confiabilidad de una red es un problema de complejidad NP-Hard [2]. En la práctica, la resolución analítica de la confiabilidad se vuelve computacionalmente prohibitiva para grafos de gran tamaño. Esto motiva la aplicación de métodos aproximados basados en la simulación de una muestra de estados de la red.

El método Monte Carlo Crudo es de fácil implementación pero se vuelve poco apropiado cuando la probabilidad de falla de las aristas es cercana a cero y la falla de la red es un evento raro. Para la estimación de la confiabilidad de redes altamente confiables se aplican técnicas de reducción de varianza basadas en la simulación Monte Carlo.

En esta sección se describen las siguientes técnicas: Método Monte Carlo Crudo, Muestreo por Importancia y Reducción Recursiva de la Varianza.

2.3.1. Método Monte Carlo Crudo

Consideremos la estimación de la anticonfiabilidad de una red en la que los enlaces se encuentran sujetos a fallas y los nodos son perfectos. La formulación estándar del método Monte Carlo [14] para estimar la anticonfiabilidad consiste en generar en forma aleatoria un cierto número N de vectores de estado de la red independientes y computar el número de realizaciones que corresponden a estados globales no operativos. El estimador de la anticonfiabilidad se define como la proporción de los estados sorteados en los que el grafo inducido no es conexo. La formulación para la medida de anticonfiabilidad con cota de diámetro $Q_{K,D}(G)$ es análoga a la de la medida clásica de anticonfiabilidad $Q_K(G)$.

Sea $G = (V, E)$ con $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ y $E = \{e_1, \dots, e_m\}$, $X = \{X_1, \dots, X_m\}$ es una configuración del espacio de estados de G . En X se representan los estados de los enlaces, $X_i = 1$ si e_i está operativo y 0 en caso contrario. En este esquema se utiliza directamente la distribución de probabilidad P planteada en el modelo teórico. Cada replicación se genera sorteando el estado de cada arista del grafo a partir de las confiabilidades elementales; este proceso se repite N veces y se acumulan los estados de falla de la red.

Para cada arista se sortea W una variable Uniforme en $[0,1]$ definida de la siguiente forma:

$$\Rightarrow X_i^{(j)} = \begin{cases} 1, & \text{si } w \leq p_i \\ 0, & \text{si } w > p_i \end{cases}$$

con $j = 1, \dots, N$, $i = 1, \dots, |E|$ y $X^{(j)}$ realización j -ésima del vector de estado.

La función de estructura $\Phi(X)$ indica si el grafo inducido por la configuración X está o no en estado operativo, $\phi(X) = 1$ cuando la red no está operativa y $\phi(X) = 0$ si lo está. De acuerdo a esta definición, $\Phi(X)$ es una variable Bernoulli de parámetro $U_K(G)$.

El parámetro a estimar es la anticonfiabilidad $U_K(G) = E[\phi(X)]$. El estimador de $U_K(G)$

bajo el esquema de Monte Carlo Crudo se define como:

$$\hat{U}_K(G) = \frac{\sum_{j=1}^N \phi(X^{(j)})}{N}$$

El estimador representa la proporción de estados de falla de la red sorteados en las N replicaciones.

A continuación se presenta la expresión para la esperanza y la varianza del estimador. Para su deducción se asume que las replicaciones son independientes y que $\phi(X)$ es una variable Bernoulli de parámetro $U_K(G)$, con lo cual $E[\phi(X)] = U_K(G)$ y $Var[\phi(X)] = U_K(G)(1 - U_K(G))$.

$$\begin{aligned} E[\hat{U}_K(G)] &= E\left[\frac{\sum_{j=1}^N \phi(X^{(j)})}{N}\right] = \frac{\sum_{j=1}^N E[\phi(X^{(j)})]}{N} \\ &= \frac{NU_K(G)}{N} = U_K(G) \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} Var[\hat{U}_K(G)] &= Var\left[\frac{\sum_{j=1}^N \phi(X^{(j)})}{N}\right] \\ &= \frac{\sum_{j=1}^N Var[\phi(X^{(j)})]}{N^2} \\ &= \frac{NU_K(G)(1 - U_K(G))}{N^2} \\ &= \frac{U_K(G)(1 - U_K(G))}{N} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Un estimador insesgado de $Var[\hat{U}_K(G)]$ es:

$$\hat{V}ar[\hat{U}_K(G)] = \frac{\hat{U}_K(G)(1 - \hat{U}_K(G))}{N - 1} \quad (2.11)$$

En el Algoritmo 5 se presenta un pseudocódigo para el Método Monte Carlo Crudo que tiene como parámetros de entrada el grafo en cuestión y la cantidad de replicaciones; y como parámetros de salida la estimación de $U_K(G)$ y la varianza empírica del estimador.

En el comienzo del algoritmo se inicializa la variable S que acumula la cantidad de estados no operativos de la red ocurridos en las N replicaciones. Entre los pasos 3 y

Algorithm 5 Método Monte Carlo Crudo

Require: N , $G = (V, E)$, K , y $p = (p_i, \dots, p_{|E|})$

```
1:  $S = 0$  {Se inicializa  $S$ }
2: for  $j=1:N$  do
3:   for  $i=1:m$  do
4:      $w = \text{Uniforme}(0, 1)$  {Se sortea  $X^j \sim P$ }
5:     if  $w \leq p_i$  then
6:        $X_i = 1$ 
7:     else
8:        $X_i = 0$ 
9:     end if
10:  end for
11:   $S = S + \phi(X)$ 
12: end for
13:  $\hat{U}_K(G) = S/N$  {Estimador puntual de  $U_K(G)$ }
14:  $\hat{V}(\hat{U}_K(G)) = \hat{U}_K(G)(1 - \hat{U}_K(G))/N$  {Estimador puntual de la varianza de  $\hat{U}_K(G)$ }
15: return  $\hat{U}_K(G)$   $\hat{V}(\hat{U}_K(G))$ 
```

10 se sortean las N variables $X^{(j)}$ independientes y con probabilidad p . En el paso 4 se genera una Uniforme (0,1) por cada enlace del grafo, si el valor obtenido es menor o igual que la probabilidad de que la arista esté operativa se fija la arista como operativa de lo contrario se fija su falla. En el paso 11 se evalúa la función de estructura para la replicación generada del grafo y se acumula su valor en S . En el paso 13 se calcula el estimador y en el paso 14 se estima la varianza de $\hat{U}_K(G)$.

El tiempo de cómputo de Monte Carlo Crudo es lineal con el número de aristas del grafo. El esquema del método consiste en el sorteo del estado de cada arista con complejidad $O(|E|)$ y la evaluación del estado resultante de la red. Este proceso se repite N veces, con lo cual la complejidad global es de orden $O(N|E|)$. Esto significa una reducción del tiempo de cómputo respecto a los métodos de cálculo exacto cuya complejidad es exponencial en el número de aristas [2].

La base teórica del método se encuentra en dos teoremas, la Ley Débil de los Grandes Números y el Teorema Central del Límite. El primero está asociado al valor de la diferencia entre el estimador bajo el método Monte Carlo y el parámetro de interés, es decir, entre la suma normalizada de las $\Phi(X^{(i)})$ observadas y el valor esperado de $\Phi(X)$. El segundo refiere al comportamiento de la distribución asintótica de esta diferencia y permite computar un intervalo de confianza para $E[\phi(X)]$. En la práctica no se verifican las condiciones de estos teoremas, en primer lugar porque se trata de propiedades asintóticas del estimador y en segundo lugar porque en la implementación del método se contemplan números pseudo aleatorios que presentan ciclos y comprometen la condición de independencia [15].

El estimador $\hat{U}_K(G)$ es insesgado, una medida apropiada para evaluar su precisión es el error relativo definido como el cociente entre el ancho del intervalo de confianza y el valor del parámetro a estimar. El error relativo es mejor medida de la precisión que la varianza dado que se calcula en términos del valor del propio parámetro.

Intervalo de confianza para $\hat{U}_K(G)$:

$$(\hat{U}_K(G) - z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{U}_K(G))}, \hat{U}_K(G) + z_{\alpha/2}\sqrt{Var(\hat{U}_K(G))}) \quad (2.12)$$

Intervalo de confianza estimado para $\hat{U}_K(G)$:

$$(\hat{U}_K(G) - z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}ar(\hat{U}_K(G))}, \hat{U}_K(G) + z_{\alpha/2}\sqrt{\hat{V}ar(\hat{U}_K(G))}) \quad (2.13)$$

Expresión del Error relativo exacto:

$$ER(\hat{U}_K(G)) = \frac{z_{\alpha/2}\sqrt{U_K(G)(1-U_K(G))/N}}{U_K(G)} = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{1-U_K(G)}{NU_K(G)}} \quad (2.14)$$

Expresión del estimador del error relativo

$$\hat{E}R(\hat{U}_K(G)) = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{(1-\hat{U}_K(G))}{N\hat{U}_K(G)}} \quad (2.15)$$

Cuando $U_K(G)$ tiende a cero el error relativo tiende a infinito con N fijo. En redes altamente confiables se requiere un número elevado de replicaciones para obtener una precisión aceptable. Para obtener un error relativo menor a 1 se necesita un número de replicaciones del orden de $U_K^{-1}(G)$.

Un mejor abordaje para estimar la anticonfiabilidad cuando la falla de la red es un evento raro es a través de métodos de reducción de varianza. Estos métodos logran reducir la varianza o el tiempo de cálculo respecto a Monte Carlo Crudo empleando técnicas de muestreo más sofisticadas. Existen diferentes técnicas de reducción de varianza, algunas son generales y pueden aplicarse a distintos problemas de simulación, como el Muestreo por Importancia; otras son diseñadas particularmente para la confiabilidad de redes como el método Recursivo de Reducción de Varianza.

2.3.2. Método de Muestreo por Importancia

En la actualidad existen redes cuya falla es un evento poco probable, pero su ocurrencia puede ocasionar riesgos importantes con lo cual resulta relevante su estudio. Cuando la falla de la red es un evento raro el método Monte Carlo en su formulación estándar se vuelve poco apropiado para la estimación de la confiabilidad ya que para obtener una precisión aceptable se requiere un número elevado de replicaciones. Lo anterior se traduce en un esfuerzo computacional importante y tiempos prohibitivos de ejecución.

El tiempo total empleado por un algoritmo depende del esquema general y de la cantidad de replicaciones requeridas. Una disminución de la varianza permite que se alcance una cierta precisión con un menor número de replicaciones. Las técnicas que emplean este mecanismo de mejora de la eficiencia se las denomina técnicas de reducción de varianza. Se basan en el Método Monte Carlo y logran disminuir la varianza mediante la modificación del esquema de muestreo. La referencia para evaluar la reducción de la varianza y la mejora de la eficiencia es el propio Método Monte Carlo Crudo. Esta referencia permite comparar las bondades de las diversas técnicas.

En este punto se profundiza sobre el método de Muestreo por Importancia, *IS* según su sigla en inglés (Importance Sampling), que consiste en una modificación de la Ley de probabilidades considerada en el muestreo con el objetivo de reducir la varianza del estimador [3], [16].

El Muestreo por Importancia es una técnica de uso general aplicable a la simulación y la inferencia probabilística. Su versión para la estimación de la confiabilidad de una red consiste en generar la muestra de estados a partir de una nueva distribución de probabilidad en la que se asigna mayor probabilidad a la falla de la red. De aquí su nombre, con la nueva distribución se le asigna mayor “importancia” al evento falla que ocurre con mayor frecuencia que con la Ley original. La reducción de la varianza se logra a partir de la modificación de la Ley de probabilidad con la que se generan los estados de la red.

A continuación se presenta la formulación del *IS* aplicada al problema de la estimación de la anticonfiabilidad $U_K(G)$ para un modelo de falla de aristas y nodos perfectos. La formulación es análoga para $U_K(G, D)$.

La medida $U_K(G)$ puede expresarse como:

$$U_K(G) = E(\Phi(X)),$$

con X una variable aleatoria discreta, que representa el vector de estado de las aristas de G , con función de cuantía P .

Cabe aclarar que en este caso se plantea la función de estructura $\Phi()$ de forma opuesta

a como se la conoce normalmente con el fin de simplificar la notación. La función $\Phi(X)$ vale 1 si la red no está operativa y 0 si lo está.

Si $X \in R^n$ y las observaciones X_i son i.i.d. de distribución F_X , el valor esperado de Φ cumple:

$$E(\Phi(X)) = \sum_{x \in \Omega_G} \Phi(x)P(X = x), \quad (2.16)$$

con Ω_G el espacio de los vectores de estado de G .

La ecuación 2.16 puede reescribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} E(\Phi(X)) &= \sum_{x \in \Omega_G} \Phi(x)P(X = x) \frac{\tilde{P}(X = x)}{\tilde{P}(X = x)} = \\ &= \sum_{x \in \Omega_G} \Phi(x)L(x)\tilde{P}(X = x) = \tilde{E}(\Phi(X)L(X)) \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde \tilde{P} es una nueva función de densidad de X , \tilde{E} el valor esperado bajo \tilde{P} y $L(x) = \frac{P(X=x)}{\tilde{P}(X=x)}$ es el ratio de verosimilitud de P y \tilde{P} .

Un estimador insesgado de $E(\Phi(X))$ es su media,

$$\hat{E}(\Phi(X)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(x^{(j)}) \quad (2.18)$$

donde N representa el tamaño de muestra y $x^{(j)}$ la j -ésima realización del vector de estado de G .

De acuerdo con la ecuación 2.17 el siguiente también es un estimador insesgado de $E(\Phi(X))$ y como consecuencia de $U_K(G)$:

$$\hat{U}_K(G) = \hat{E}(\Phi(X)) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(x^{(j)})L(x^{(j)}), \quad (2.19)$$

Donde los valores de $x^{(j)}$ se obtienen a partir de la distribución \tilde{P} .

En este planteo el sesgo introducido por la nueva distribución es corregido en el estimador por el factor $L(X)$.

La varianza asociada a P es:

$$\sigma^2(\hat{U}_K(G)) = \frac{E[\Phi(X)^2] - (E[\Phi(X)])^2}{N} \quad (2.20)$$

La varianza asociada a \tilde{P} es:

$$\tilde{\sigma}^2(\Phi(X)L(X)) = \frac{\tilde{E}[(\Phi(X)L(X))^2] - (E[\Phi(X)])^2}{N} \quad (2.21)$$

La distribución óptima de \tilde{P} es aquella que minimiza la ecuación (2.21), dicho mínimo se alcanza para:

$$\tilde{E}[(\Phi(X)L(X))^2] = U_K^2(G) \quad (2.22)$$

Los cambios de medida que cumplen con la condición (2.22) dan lugar a los estimadores de *varianza cero*.

La dificultad del método *IS* reside en encontrar la distribución \tilde{P} que resulte en una reducción de la varianza. Si bien la elección de \tilde{P} depende del problema abordado existe un cambio de medida óptimo [3] que se define como:

$$\tilde{P}(X) = \frac{P(X)\Phi(X)}{E[\Phi(X)]}.$$

Cuando $\Phi(x) \geq 0$ es sencillo verificar que este cambio de medida cumple con la condición (2.22).

$$\tilde{E}[(\Phi(X)L(X))^2] = \tilde{E}\left[\left(\frac{\Phi(X)P(X)E(\Phi(X))}{\Phi(X)P(X)}\right)^2\right] = E^2(\Phi(X)) \quad (2.23)$$

En el Algoritmo 6 se presenta el pseudocódigo del método *IS* que tiene como parámetros de entrada el grafo G considerado, el conjunto de nodos objetivo K , las confiabilidades elementales originales p , las confiabilidades elementales asociadas al cambio de medida establecido por el método \tilde{p} y el tamaño de muestra N . El algoritmo computa la estimación de la anticonfiabilidad $\hat{U}_K(D)$ y la estimación de la varianza de $\hat{U}_K(G)$.

El algoritmo comienza inicializando la variable S_1 en la que se acumula el número de estados de falla observados ponderados por la razón de verosimilitudes y S_2 que acumula el cuadrado de las fallas ponderadas para la estimación de $\hat{V}(\hat{U}_K(G))$. En el paso 4 se sortea una variable aleatoria $X^{(j)}$ con probabilidad \tilde{P} . En el paso 5 se calcula la razón de verosimilitudes de P y \tilde{P} . En el paso 6 se evalúa la función de estructura $\Phi(\cdot)$ para el vector de estado sorteado y se acumula su valor ponderado por el ratio de verosimilitudes obtenido en el paso anterior. Este proceso se repite N veces. Finalmente se calcula el estimador $\hat{U}_K(G)$ y se estima su varianza.

Algorithm 6 Método de Muestreo por Importancia

Require: N , $G = (V, E)$, K , $P = (p_1, \dots, p_m)$ y $\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m)$

```
1:  $S_1 = 0$ 
2:  $S_2 = 0$  {Iniciamos  $S$ }
3: for  $j=1:N$  do
4:   Sortear  $X^{(j)} \sim \tilde{P}$ 
5:    $L(X^{(j)}) = \frac{\tilde{P}(X^{(j)})}{P(X^{(j)})}$ 
6:    $S_1 = S_1 + \phi(X^{(j)})L(X^{(j)})$ 
7:    $S_2 = S_2 + (\phi(X^{(j)})L(X^{(j)}))^2$ 
8: end for
9:  $\hat{U}_K(G) = S_1/N$  {Estimador puntual de  $U_K(G)$ }
10:  $\hat{V}(\hat{U}_K(G)) = \frac{S_2 - S_1^2/N}{N(N-1)}$  {Estimador puntual de la varianza de  $\hat{U}_K(G)$ }
```

2.3.3. Método Recursivo de Reducción de Varianza

El método Recursivo de Reducción de Varianza (*RVR*) fue introducido por Cancela y El Khadiri en 1994 [17]. Se basa en la partición del espacio de estados de G definida en función de mincuts o de minpaths y el cálculo de la confiabilidad en subgrafos de G .

Dado un grafo $G = (V, E)$, el método plantea la partición P de Ω_G y el cálculo de la anticonfiabilidad expresada en función de P . La partición

$$P = \{A_O, A_F, A_w, w \in W\}$$

se define considerando componentes que contienen estados determinísticos de la red A_O y A_F y componentes que contienen estados aleatorios de la red A_w con $w \in W$.

A_O : Contiene estados operativos de la red

A_F : Contiene estados de falla de la red

A_w : Contiene estados aleatorios de la red

Los componentes de la partición son disjuntos y exhaustivos de Ω_G . La partición puede definirse en función de minpaths o de mincuts, plantearemos la formulación en función de estos últimos.

Sea $C_{G,K} = \{e_1, \dots, e_{|C_{G,K}|}\}$ un mincut de G entonces:

- $A_O = \emptyset$

- A_F : Estados en los que todas las aristas de $C_{K,G}$ fallan.
- A_w : Opera la w -ésima arista de $C_{G,K}$ y las $w-1$ anteriores fallan, $w \in \{1, \dots, |C_{G,K}|\}$

Las probabilidades asociadas a A_F y A_w son las siguientes:

$$P(X \in A_F) = \prod_{e_j \in C_{G,K}} (1 - q_{e_j})$$

$$P(X \in A_w) = \prod_{j=1}^{w-1} (1 - q_j) q_w$$

Dada la partición P puede definirse $U_K(G)$ de la siguiente forma:

$$U_K(G) = P(C_{G,K}) + (1 - P(C_{G,K})) * P(\phi(X) = 1/E_{C_{G,K}}^c) \quad (2.24)$$

donde $E_{C_{G,K}}^c$ es el evento al menos una arista de $C_{G,K}$ funciona, $P(C_{G,K}) = \prod_{e_j \in C_{G,K}} (1 - q_{e_j})$ y $P(\phi(X) = 1/E_{C_{G,K}}^c)$ es la probabilidad de falla de la red condicionada al evento $E_{C_{G,K}}^c$.

El cálculo de $P(C_{G,K})$ es trivial pero no sucede lo mismo con $P(\phi(G) = 1/E_{C_{G,K}}^c)$ y por lo tanto se estima.

La ecuación 2.24 da lugar a una formulación recursiva para el cálculo de $U_K(G)$.

$$U_K(G) = P(C_{G,K}) + (1 - P(C_{G,K})) \sum_{i=1}^{|C_{G,K}|} \frac{P(A_i)}{P(C_{G,K})} U_{K_i}(G_i) \quad (2.25)$$

donde:

- $U_K(G)$: Anticonfiabilidad de G .
- $C_{G,K}$: mincut de G .
- $P(C_{G,K})$: Probabilidad de que todas las aristas de $C_{G,K}$ fallen.
- A_i : evento en el que fallan las primeras $i-1$ aristas y opera la i -ésima.
- G_i : $(G - e_1 - \dots - e_{i-1}) * e_i$, grafo G condicionado a A_i .

A partir de la ecuación 2.25 se define una nueva recursión para estimar $U_K(G)$ en la que se introduce aleatoriedad en el componente de la partición en el que la recursión continúa.

$$F(G, K) = P(C_{G,K}) + (1 - P(C_{G,K})) \sum_{i=1}^{|C_{G,K}|} 1_{\{U \in J_i\}} F(G_i, K_i) \frac{P(A_i)}{P(C_{G,K})} U_{K_i}(G_i) \quad (2.26)$$

donde:

- U es una variable aleatoria con distribución Uniforme(0,1)
- J_i con $1 \leq i \leq |C_{G,K}|$ una secuencia de intervalos disjuntos de amplitud $\frac{P(A_i)}{1-P(C_{G,K})}$
- $1_{\{U \in J_i\}}$ la indicatriz que determina el intervalo J_i de la partición en el que la recursión continúa.

El proceso recursivo se repite N veces y se obtiene una muestra de estados de la red de tamaño N . La diferencia con el método Monte Carlo reside en que en *RVR* se sortea una muestra de estados condicionados a la falla de un corte de G .

La reducción de la varianza de *RVR* respecto a *MCC* depende de la elección del conjunto de corte. Una cota inferior de la reducción de la varianza está dada por $P(C_{G,K}) \cdot U_K(G)$ lo que motiva a seleccionar conjuntos de corte de máxima probabilidad. El tiempo de ejecución máximo asociado a este método es $O((mk)^2n)$ con $m = |E|$ $k = |K|$ y $n = |V|$ [18]. El método puede mejorarse introduciendo en la implementación reducciones en serie y en paralelo.

Capítulo 3

Métodos de Reducción de Varianza para el problema de Confiabilidad Diámetro Acotada

En redes altamente confiables el Monte Carlo Crudo requiere un número elevado de replicaciones para obtener una precisión aceptable, lo que puede significar tiempos de cálculo prohibitivos. El tiempo total empleado por un algoritmo depende del esquema general y de la cantidad de replicaciones requeridas. Una disminución de la varianza permite que se alcance una cierta precisión con un menor número de replicaciones. Los métodos de reducción de varianza se basan en el Método Monte Carlo y logran disminuir la varianza mediante la modificación del esquema de muestreo.

En este capítulo se presentan dos métodos de reducción de varianza adaptados al problema de la diámetro confiabilidad $s - t$ terminal. El primer método se presenta en la sección 3.1, está basado en la técnica de Muestreo por Importancia y consiste en una aproximación a un esquema de varianza cero. Para su implementación se requiere la identificación de D-mincuts de máxima probabilidad, por este motivo se incluyen en la sección dos estrategias de identificación de mincuts, un algoritmo de aproximación a la solución óptima presentado en el punto 3.1.1 y una estrategia de selección trivial presentada en el punto 3.1.2. El método basado en el Muestreo por Importancia es iterativo y por lo tanto tiene asociado un tiempo de cómputo importante, por este motivo se propone combinarlo con un procedimiento de eliminación de aristas irrelevantes para reducir los tiempos de ejecución; el detalle de este procedimiento se encuentra en el punto 3.1.3.

El segundo método de reducción de varianza considerado es el Método Recursivo de Reducción de Varianza con una formulación basada en el muestreo multinomial. Este método se presenta en la sección 2.3.3 y también requiere la identificación de D-mincuts

para su implementación; la estrategia considerada en este caso es el algoritmo de selección óptima aproximada.

3.1. Muestreo por Importancia

En este punto se desarrolla un modelo basado en el Muestreo por Importancia de varianza cero para la estimación de la confiabilidad diámetro acotada en el caso $s-t$ terminal. En el Capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos para esta formulación. El Muestreo por Importancia (*IS*) es apropiado para redes altamente confiables en las que el método Monte Carlo Crudo no logra una precisión aceptable. El método *IS* aplicado a la confiabilidad de redes consiste en el muestreo de estados de la red a partir de una nueva distribución en la que se le asigna mayor probabilidad a la falla de la misma. Los resultados obtenidos se corrigen multiplicando por el ratio de verosimilitudes de modo que el estimador sea insesgado.

El método *IS* se basa en el siguiente planteo:

$$U_{s,t}(G, D) = E(\Phi(X)) = \sum_{x \in \Omega_G} \Phi(x)L(x)\tilde{P}(X=x) = \tilde{E}(\Phi(X)L(X))$$

donde \tilde{P} es una nueva función de densidad de X , $L(x) = \frac{P(X=x)}{\tilde{P}(X=x)}$ es el ratio de verosimilitud de P y \tilde{P} , \tilde{E} el valor esperado bajo \tilde{P} y $\Phi(X)$ la función de estructura con $\Phi(x) = 1$ si la red falla y $\Phi(x) = 0$ si está operativa.

El estimador de $U_{s,t}(G, D)$ bajo este esquema se define como:

$$\hat{U}_{s,t}(G, D) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(x^{(j)})L(x^{(j)}), \quad (3.1)$$

donde $x^{(j)}$ es la j -ésima realización del vector de estado y D la cota de diámetro.

La dificultad del método reside en encontrar \tilde{P} que resulte en una reducción de varianza del estimador respecto a *MCC*. El cambio de medida para obtener un estimador de varianza cero es:

$$\tilde{P}(X) = \frac{P(X)\Phi(X)}{E[\Phi(X)]}.$$

En esta formulación $\tilde{P}(X)$ depende de $E[\Phi(X)]$ y por lo tanto no puede implementarse su versión exacta.

El cambio de medida adoptado se basa en la formulación presentada por L'Ecuyer et

al [19] para el problema de confiabilidad clásica donde se establece un muestreo secuencial del estado de las aristas. Bajo el esquema teórico de varianza cero se definen las confiabilidades elementales de las aristas de acuerdo al siguiente planteo:

$$U_i(x_1, \dots, x_{i-1}, D) = E[\Phi(X)/X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}] = U_{s,t}(G_i, D)$$

donde G_i es el grafo condicionado al estado de las aristas $\{e_1, \dots, e_{i-1}\}$.

$$\begin{aligned} U_i(x_1, \dots, x_{i-1}, D) &= q_i U_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, D) \\ &+ (1 - q_i) U_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, D) \end{aligned} \quad (3.2)$$

La cuantía \tilde{P} definida para sortear el estado de la arista en el paso i es la siguiente:

$$\begin{aligned} \tilde{q}_i &= P[X_i = 0/X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}] \\ &= \frac{q_i U_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, D)}{U_i(x_1, \dots, x_{i-1}, D)} \\ \tilde{p}_i &= 1 - \tilde{q}_i = P[X_i = 1/X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}] \\ &= \frac{(1 - q_i) U_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, 1, D)}{U_i(x_1, \dots, x_{i-1}, D)} \end{aligned} \quad (3.3)$$

El ratio de verosimilitud resultante de las cuantías P y \tilde{P} en el paso i es entonces

$$\begin{aligned} L_i(x_i) &= x_i \frac{1 - q_i}{1 - \tilde{q}_i} + (1 - x_i) \frac{q_i}{\tilde{q}_i} \\ &= \frac{U_i(x_1, \dots, x_{i-1}, D)}{U_{i+1}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, D)} \end{aligned}$$

Esta formulación de muestreo secuencial satisface las siguientes condiciones: $\Phi(X) = 1$ con probabilidad 1 y $L(X) = U_{s,t}(G, D)$ con probabilidad 1. La demostración de este resultado puede encontrarse en [19] y es válida tanto para el modelo clásico de confiabilidad como para el de diámetro confiabilidad. La primera condición significa que se generan únicamente estados de falla de la red, lo cual es fácilmente verificable en la ecuación 3.3.

La versión exacta del esquema de varianza cero presentado no puede aplicarse en la práctica ya que la nueva cuantía \tilde{P} depende de $U_{s,t}(G, D)$ el parámetro a estimar. La solución planteada para el modelo clásico de confiabilidad es aproximar el valor de $U_{s,t}(G, D)$ incluido en la definición de \tilde{P} con la probabilidad del conjunto de corte de máxima probabilidad condicionado al estado de las aristas ya sorteadas.

$$U_i(x_1, \dots, x_{i-1}) \cong P[C_D(G/x_1, \dots, x_{i-1})]$$

donde $C_D(G/x_1, \dots, x_{i-1})$ es un D-mincut del grafo G condicionado al estado de las aristas e_1, \dots, e_{i-1} .

Para el modelo clásico de confiabilidad el problema de identificación del conjunto de corte de máxima probabilidad se resuelve en tiempo polinomial; esta propiedad no se verifica cuando se establecen cotas de diámetro [5]. Para aproximar el valor del máximo de la probabilidad del conjunto de corte del grafo inducido por las aristas ya sorteadas se consideran dos estrategias de identificación de conjuntos de corte. La primera se presenta en el punto 3.1.1 y se basa en una relajación del problema de Flujo Máximo y Corte Mínimo en la que se admiten cotas de diámetro. Un segundo criterio es la identificación de conjuntos de corte triviales como el de las aristas incidentes a alguno de los nodos objetivo que se presenta en el punto 3.1.2. Ambos criterios son formulados para el caso s-t terminal y su desempeño se evalúa en la Sección 4.3.

Sea \tilde{q}_i la probabilidad de falla de la arista i bajo la nueva ley de probabilidad \tilde{P} definida en la ecuación 3.3; el reemplazo del valor real de $U(G, D)$ por la probabilidad máxima de un conjunto de corte en \tilde{q}_i , dan lugar a una nueva versión del método en el marco de la diámetro confiabilidad. A esta versión aproximada se le denominará *AZVIS* por su sigla en inglés (Approximate Zero-Variance Importance Sampling). En el Capítulo 4 de análisis experimental se evalúa el desempeño de *AZVIS* respecto a *MCC* y se compara con el método *RVR*.

El algoritmo asociado a esta versión es el siguiente:

Algorithm 7 AZVIS

Require: N , $G = (V, E)$, D , (s, t) , $P = (p_1, \dots, p_m)$ y $\tilde{P} = (\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_m)$

- 1: $S_1 = 0$
- 2: $S_2 = 0$ {Iniciamos S_1 y S_2 }
- 3: **for** $j=1:N$ **do**
- 4: **for** $i=1:m$ **do**
- 5: Identificar D-mincut($G/x_1, \dots, x_{i-1}, x_i = 1$) = C_i
- 6: Calcular $P(C_i)$
- 7: Identificar D-mincut($G/x_1, \dots, x_{i-1}$) = C_{i-1}
- 8: Calcular $P(C_{i-1})$
- 9: Calcular $\tilde{p}_i = 1 - \frac{p_i \cdot P(C_i = 1)}{P(C_i)}$
- 10: Sortear $X_i^{(j)} \sim \text{Bernoulli}(\tilde{p}_i)$
- 11: **end for**
- 12: $L(X^{(j)}) = \frac{\tilde{P}(X^{(j)})}{P(X^{(j)})}$
- 13: $S_1 = S_1 + \phi(X^{(j)})L(X^{(j)})$
- 14: $S_2 = S_2 + (\phi(X^{(j)})L(X^{(j)}))^2$
- 15: **end for**
- 16: $\hat{U}_{s,t}(G, D) = S_1/N$ {Estimador puntual de $U_{s,t}(G, D)$ }
- 17: $\hat{V}(\hat{U}_{s,t}(G)) = \frac{S_2 - S_1^2/N}{N(N-1)}$ {Estimador puntual de la varianza de $\hat{U}_{s,t}(G, D)$ }
- 18: **return** $\hat{U}_{s,t}(G, D)$ $\hat{V}(\hat{U}_{s,t}(G))$

En el Algoritmo 7 se sortea el estado global de la red para N replicaciones. En cada replicación se muestrea secuencialmente el estado de las aristas a partir de la probabilidad \tilde{q}_i que depende del estado de las aristas ya sorteadas. Para la estimación de $U_{s,t}(G, D)$ la proporción de estados de falla de la red se corrige por el ratio de verosimilitudes. En el comienzo del algoritmo se inicializan las variables S_1 y S_2 donde se acumulan los resultados para la estimación de $U_{s,t}(G, D)$ y la varianza de $\hat{V}(\hat{U}_{s,t}(G))$. Para cada replicación se sortea el estado de cada una de las aristas; para esto en el paso 5 se identifica un D-mincut de G condicionado al estado de las aristas ya sorteadas y asumiendo que la arista e_i está operativa. En el paso 6 se calcula la probabilidad del D-mincut identificado en el paso 5. En el paso 7 se identifica un D-mincut de G condicionado al estado de las aristas ya sorteadas y en el paso 8 se calcula su probabilidad. En el paso 9 se calcula \tilde{p}_i la probabilidad de que la arista e_i se encuentre operativa bajo la ley de probabilidad \tilde{P} donde se consideran las probabilidades de los D-mincuts identificados en los pasos 5 y 7. En el paso 10 se sortea el estado de la arista e_i a partir de una distribución Bernoulli de parámetro \tilde{p}_i . En el paso 12 se calcula $L(X^{(j)})$ la razón de verosimilitudes para la j -ésima replicación. En los pasos 13 y 14 se acumulan los valores de S_1 y S_2 respectivamente. En el paso 16 se calcula el estimador de $U_{s,t}(G, D)$ y en el paso 17 la varianza estimada de

$\hat{V}(\hat{U}_{s,t}(G))$.

Esta versión del método es válida además para $U_K(G, D)$, se plantea para el caso de $U_{s,t}(G, D)$ porque los algoritmos para identificar los D-mincuts considerados están formulados para el caso $s - t$ terminal. Los algoritmos de selección de los D-mincuts se presentan en las Secciones 3.1.1 y 3.1.2.

El método *AZVIS* es iterativo y tiene asociado un tiempo de ejecución importante, de hecho, el tiempo de cómputo de *AZVIS* es superior al de *MCC* para un tamaño de muestra dado ya que en cada replicación se requiere la identificación de $2|V|$ D-mincuts. Por este motivo, en el punto 3.1.3 se presenta un procedimiento de eliminación de aristas irrelevantes que permite reducir el tiempo de cómputo de *AZVIS* sin alterar su nivel de precisión.

3.1.1. Conjunto de Corte de Máxima Probabilidad: Algoritmo de solución óptima aproximada

Para la implementación del método *AZVIS* se requiere la identificación de conjuntos de corte de máxima probabilidad para el caso de diámetro confiabilidad s-t terminal. En esta sección se presenta un criterio de selección del conjunto de corte basado en una relajación del problema de Flujo Máximo - Corte Mínimo que admite cotas de diámetro. Los resultados de la implementación del método *AZVIS* considerando este criterio de identificación de conjuntos de corte se encuentran en la Sección 4.3.

En el caso general la identificación del conjunto de corte de máxima probabilidad es un problema de complejidad polinomial, propiedad que no se cumple si se agrega una restricción en el largo de los caminos [5]. La resolución del problema de Flujo Máximo - Corte Mínimo fue desarrollada por Ford Fulkerson [20], su generalización a casos donde sólo son válidos los caminos de largo acotado es un problema NP-Hard. Cuando se introducen restricciones en el largo de los caminos la versión continua del problema tiene complejidad polinomial pero las versiones enteras son polinomiales sólo cuando $D \leq 3$ [5]. Un algoritmo aproximado para el problema de Flujo Máximo - Corte Mínimo que admite cotas de diámetro y es resoluble en tiempo polinomial fue formulado por Mahjoub et al [5] para el caso s-t terminal.

Este algoritmo de aproximación al corte óptimo que denominaremos *COA* permite identificar un D-mincut de G en tiempo polinomial. Sea $G = (V, E)$ un grafo con nodos objetivo s y t , donde cada enlace e tiene capacidad c_e . Se define $P(D)$ como el conjunto de caminos de a lo sumo D enlaces comunicando s con t y x_P el flujo en un camino $P \in P(D)$. El siguiente problema Primal equivale a la identificación del camino P de flujo máximo que denominaremos máx *DPF*:

$$\text{máx } DPF \left\{ \begin{array}{l} \text{máx } \sum_{P \in P(D)} x_P \\ \sum_{P \ni e} x_P \leq c_e, \forall e \in E \\ x_P \geq 0, \forall P \in P(D) \end{array} \right.$$

Si se agrega la condición de que $x_P \in Z$, el problema se convierte en uno de solución entera. Los caminos P pertenecientes a $P(D)$ los denominaremos D-Path y al Flujo de los D-Path lo denominaremos DPF . El problema de solución entera del máximo DPF será referido como *Int. máx DPF*.

Sea C un conjunto de enlaces tal que cada $P \in P(D)$ contiene al menos un enlace de C , $C \cap P \neq \emptyset \forall P \in P(D)$ entonces C es un D-Cut o DC , un conjunto de corte en el que se establecen restricciones sobre el largo de los caminos entre s y t . Al problema entero de identificar el conjunto C que minimiza la capacidad de sus enlaces se lo denota *Int. mín DC*. El Dual de máx DPF es una relajación de la versión entera del problema mín DC . El Dual de máx DPF tiene una variable y asociada a cada enlace y se define como:

$$\text{mín } DC \left\{ \begin{array}{l} \text{mín } \sum_{e \in E} c_e \cdot y_e \\ \sum_{e \in P} y_e \geq 1, \forall P \in P(D) \\ y_e \geq 0, \forall e \in E \end{array} \right.$$

En esta formulación se propone una relajación a la versión entera del problema de corte mínimo bajo restricciones de diámetro, que es el dual de maximizar el flujo de la red. A partir del Algoritmo 8 se obtiene una aproximación al problema entero aplicando el esquema Primal - Dual ya detallado.

Algorithm 8 Algoritmo COA

```
1:  $x = 0$ 
2:  $C = \emptyset$ 
3: while  $C$  no es un DC do
4:   Encontrar camino  $P$  tal que  $\text{largo}(P) \leq D$  y  $P \cap C = \emptyset$ 
5:   Aumentar el flujo de  $P$  hasta que algún  $e \in P$  no tenga capacidad remanente
6:    $C = C \cup e$ 
7: end while
8: return  $C$ 
```

En el paso 1 del Algoritmo 8 se inicializa la variable x que representa el flujo. En el paso 2 se inicializa el D-Cut C como un conjunto vacío. Mientras no se encuentre un D-Cut en el paso 4 se busca un camino P entre s y t de largo D que no tenga aristas en común con C . En el paso 5 se aumenta el flujo en P hasta que alguna arista no tenga capacidad remanente; dicha arista se agregará a C .

En la formulación clásica del problema de Flujo Máximo y Corte Mínimo, la solución exacta coincide con la solución entera [20]. Cuando se introducen restricciones en el largo de los caminos esto ya no se verifica y existe una brecha entre la solución exacta y la entera [5]. El ratio de *Int. mín DC* y *mín DC* es de orden $O(D)$, esto es análogo para *Int. máx DPF* [5].

$$\text{Int. mín DC} \geq \text{mín DC} = \text{máx DPF} \geq \text{Int. máx DPF}$$

donde *Int. mín DC* es la solución entera al problema del corte mínimo con cota de diámetro D , *mín DC* es la solución continua al problema del corte mínimo con cota de diámetro D , *máx DPF* es la solución continua al problema de flujo máximo de los caminos con cota de diámetro D e *Int. máx DPF* es la solución entera al problema de flujo máximo de los caminos con cota de diámetro D .

3.1.2. Conjunto de Corte de Máxima Probabilidad: Selección trivial

En este punto se presenta una estrategia alternativa al criterio *COA* presentada en el punto 3.1.1 para identificar los D-mincuts requeridos para la implementación del método *AZVIS*. Se trata de un criterio de selección de cortes triviales que denominaremos *CT* que tiene menor costo computacional que *COA* pero que como contrapartida puede generar pérdida de precisión. A la formulación resultante de aplicar la estrategia de selección del conjunto de corte *CT* en *AZVIS* la denominamos *AZVIS_{CT}*. Los resultados de *AZVIS_{CT}* se presentan en la Sección 4.3.

En la versión clásica del problema de cálculo de la confiabilidad, la identificación de

un conjunto de corte de máxima probabilidad tiene resolución polinomial. Esta propiedad no se verifica cuando se consideran restricciones en el largo de los caminos [5]. Por este motivo se recurre a una estrategia de selección de cortes triviales en la que no se asegura que el mincut identificado sea el de máxima probabilidad. Un ejemplo de conjunto de corte minimal trivial es el de las aristas incidentes a cualquiera de los nodos objetivo, este criterio es válido sin importar si existe o no cota de diámetro. En base a este criterio se desarrolla una estrategia de selección de conjuntos de corte minimales válido cuando se admiten restricciones de diámetro.

La aplicación de esta estrategia en *AZVIS* da lugar a la versión *AZVIS_{CT}*. Dado que en *AZVIS* el muestreo es secuencial, la identificación del conjunto de corte debe contemplar el estado de las aristas ya sorteadas. Esto agrega una complejidad extra ya que existen estados fijos de algunas aristas, con lo cual el criterio de selección planteado en principio puede no ser suficiente. Este es el caso si en todos los nodos terminales existe al menos una arista que fue fijada como operativa.

El criterio considerado para la identificación de un mincut cuando el estado de algunas aristas es fijo es el que se presenta a continuación.

Sea $G = (V, E)$ y $\{s, t\}$ el conjunto de nodos objetivo de G entonces:

- Si no existen aristas perfectas entre las aristas incidentes a t entonces el corte trivial es el conjunto compuesto por las aristas incidentes a t .
- Si no se cumple lo anterior pero se verifica que no existen aristas perfectas entre las aristas incidentes a s entonces el corte trivial es el conjunto compuesto por las aristas incidentes a s .
- Si no se cumple ninguna de las anteriores, se elige uno de los terminales y el corte trivial es el conjunto compuesto por las aristas no perfectas incidentes al nodo terminal elegido y las aristas incidentes a los nodos conectados con el terminal mediante aristas perfectas. Este proceso continúa hasta que no existan aristas perfectas entre las aristas incidentes al nodo en cuestión.

Para explicar este criterio se presenta en la Figura 3.1 un ejemplo para un grafo $G = (V, E)$ con $K = \{s, t\}$. Se representa a las aristas operativas con una línea más ancha, las aristas con una marca en la mitad son las que componen el conjunto de corte. En el primer caso el corte está conformado por las aristas incidentes al nodo terminal s , $\text{mincut} = \{e_1, e_2\}$. En el segundo caso la arista e_1 está operativa y el mincut está conformado por $\{e_2, e_3, e_4\}$.

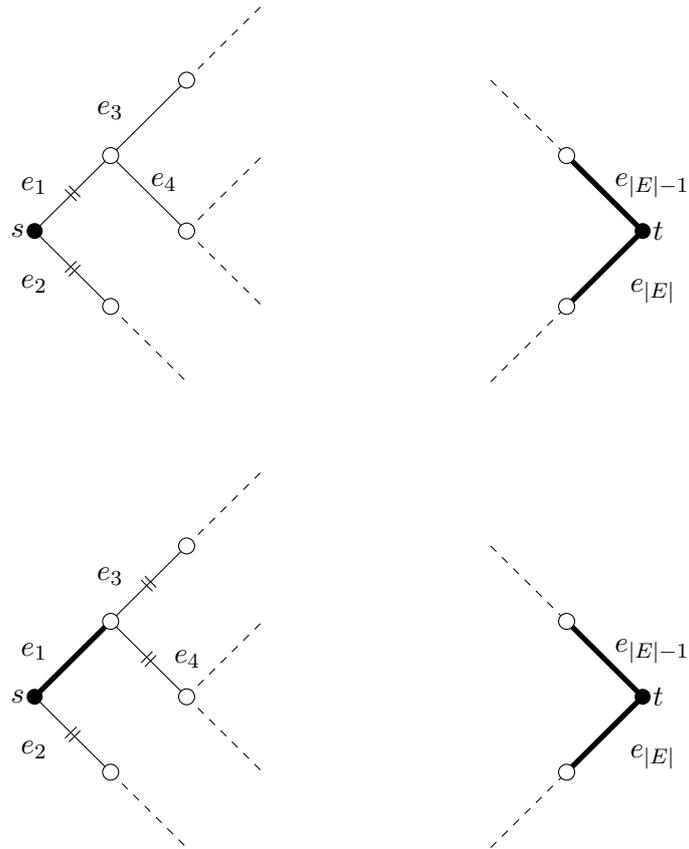


Figura 3.1: Ejemplo de selección del conjunto de corte trivial

A continuación se presenta el pseudocódigo para este método de selección de corte trivial.

Notación:

- $\text{Incidentes}(v)$: Conjunto de aristas incidentes a v .
- Operativas: Aristas de G cuyo estado ya fue sorteado y es operativo.
- Cut : mincut de G .
- PCut : Probabilidad de ocurrencia de Cut .

Algorithm 9 Corte Trivial

Require: $G = (V, E)$, $\{s, t\}$, $q = (q_1, \dots, q_m)$

```
1:  $PCut_s = 0$ 
2:  $PCut_t = 0$ 
3: if Incidentes( $s$ ) $\cap$ Operativas =  $\emptyset$  then
4:    $Cut_s =$ Incidentes( $s$ )
5:    $PCut_s = \prod_{e \in Cut_s} q_e$ 
6: end if
7: if Incidentes( $t$ ) $\cap$ Operativas =  $\emptyset$  then
8:    $Cut_t =$ Incidentes( $t$ )
9:    $PCut_t = \prod_{e \in Cut_t} q_e$ 
10: end if
11: if  $Cut(s) \neq \emptyset$  or  $Cut(t) \neq \emptyset$  then
12:    $PCut = \text{Max}(PCut_s, PCut_t)$ 
13:    $Cut = Cut(i)$  con  $PCut_i == PCut$   $i = \{s, t\}$ 
14: else
15:    $Cut =$ Corte( $G, t$ )
16:    $PCut = \prod_{e \in Cut} q_e$ 
17: end if
18: return [ $Cut, PCut$ ]
```

Algorithm 10 Corte(G, t)

Require: $G = (V, E)$, T , $q = (q_1, \dots, q_m)$

```
1:  $Cut = []$ 
2: for  $i$  in  $1:|T|$  do
3:   Marco  $T_i$ 
4:   if Incidentes( $T_i$ ) no tiene aristas operativas then
5:      $Cut = [Cut, Incidentes(T_i)]$ 
6:   else
7:     Determinar  $T^*$  {nodos no marcados asociados a las aristas operativas incidentes a  $T_i$ }
8:      $Cut = [Cut, Incidentes a  $T_i$  no operativas, Corte( $G, T^*$ )]$ 
9:   end if
10: end for
11: return  $Cut$ 
```

En *AZVIS* el muestreo de las aristas es secuencial, cuando se sortea el estado de una arista, el estado de las anteriores ya fue sorteado y es conocido. El estado de las aristas del grafo puede ser operativo, de falla o desconocido. Las aristas para las que

el estado sorteado es de falla se eliminan del grafo. En la estrategia del corte trivial si s o t no tienen aristas incidentes operativas, el conjunto de corte contiene a las aristas incidentes a alguno de los nodos terminales de G . Esta primera opción de corte es la que se formula en el Algoritmo 9. Si ambos nodos terminales de G tienen aristas incidentes operativas se elige s o t arbitrariamente y se define el corte en el Algoritmo 10.

El Algoritmo 9 comienza asignando el valor cero a las probabilidades de los mincuts asociados a los terminales s y t . En el paso 3 se verifica la condición de que a ninguna de las aristas incidentes al nodo s estén operativas, en ese caso en el paso 4 se define el corte asociado a s como las aristas incidentes a s . Este proceso se repite para el terminal t en los pasos 7 a 9. En los pasos 11 a 13 se elige el corte de mayor probabilidad entre los identificados en los pasos 4 y 8. Si no se identifican cortes en 4 ni en 8 porque ambos terminales tienen aristas incidentes operativas se define el corte en el Algoritmo 10 partiendo desde el nodo t .

En el Algoritmo 10 se define el conjunto de corte en el caso en que ambos nodos terminales s y t tengan aristas incidentes operativas. Dado un nodo T_i el conjunto de corte lo componen las aristas incidentes a T_i que no están en estado operativo y las incidentes a aquellos nodos conectados a T_i mediante aristas operativas.

En el Algoritmo 10 se inicializa el corte como un conjunto vacío en el paso 1. En el paso 3 se marca el nodo T_i perteneciente a T a partir del cual se construye el corte y en el paso 4 se verifica si tiene aristas incidentes en estado operativo. Si T_i no tiene aristas operativas, se agregan al corte las aristas incidentes a T_i en el paso 5. Si T_i tiene aristas incidentes operativas, se determina el conjunto T^* de los nodos conectados a T_i mediante aristas operativas en el paso 6. En el paso 7 se agregan al corte las aristas incidentes a T_i que no se encuentren en estado operativo y las aristas que resultan de aplicar este proceso sobre el conjunto de nodos en T^* . Esta secuencia se repite para todos los nodos en T .

3.1.3. Eliminación de Aristas Irrelevantes

El método *AZVIS* es iterativo y cuenta con un tiempo de ejecución elevado. Atendiendo esta dificultad se detalla en este punto un procedimiento de eliminación de aristas irrelevantes formulado para el problema de diámetro confiabilidad $s - t$ terminal. La evaluación de la ganancia en términos de tiempo de cómputo al combinar el método *AZVIS* con este procedimiento de eliminación de aristas irrelevantes se presentan en la Sección 4.4.

Las aristas irrelevantes en el modelo clásico de confiabilidad son aquellas aristas que

no pertenecen a ningún pathset que conecte entre sí a los nodos de K . En el modelo de diámetro confiabilidad, son irrelevantes aquellas aristas que no pertenecen a ningún D -pathset. Esto significa que además de las aristas irrelevantes en el modelo clásico de confiabilidad son irrelevantes aquellas que no pertenecen a ningún pathset que conecte a un par de nodos objetivo de cardinalidad menor a D . La eliminación de aristas irrelevantes no afecta el cálculo de la confiabilidad, si $e \in E$ es irrelevante en G , entonces, $R_K(G, D) = R_K(G - e, D)$, lo mismo sucede con la medida clásica de la confiabilidad.

Para identificar y eliminar aristas irrelevantes en el modelo de *diámetro confiabilidad $s - t$ terminal* se considera el algoritmo de tiempo polinomial formulado en [22]. Para identificar aristas irrelevantes en esta formulación se distinguen dos clases:

- Aristas que no pertenecen a ningún pathset entre s y t .
- Aristas que sólo pertenecen pathsets entre s y t de largo mayor a D .

Para identificar las aristas irrelevantes en la primera clase se aplica un algoritmo de tiempo lineal basado en la teoría de biconexidad [23]. El criterio para identificar las aristas irrelevantes en la segunda clase se basa en la propiedad 2.

Propiedad 2. Sea $G = (V, E)$ un grafo con nodos objetivo s y t , si una arista (u, v) de G pertenece a un $s - t$ path y cumple: $d(s, u) + d(v, t) \geq D$ y $d(s, v) + d(u, t) \geq D$ entonces (u, v) es irrelevante.

Definición 19. Se define a la distancia entre dos nodos u y v , $d(u, v)$, como el largo del path más corto entre u y v . Si no existe un path entre u y v entonces $d(u, v) = \infty$. Para calcular la distancia entre dos nodos puede recurrirse al algoritmo de Dijkstra [24] o al método BFS [25].

Con este criterio no se asegura la identificación de todas las aristas irrelevantes, las condiciones establecidas son suficientes pero no necesarias.

En el Algoritmo 11 de implementación del método se comienza por identificar y eliminar las aristas irrelevantes de la primera clase. En el paso 2 se calculan las distancias de todos los nodos de G con s y t . A partir de esta información se identifican y eliminan las aristas que son irrelevantes porque cumplen con la propiedad 2 y si existen aristas irrelevantes de la primera clase en el grafo resultante se vuelve al inicio. La complejidad del método es de orden $O(|E|(|E| + |V|))$ [22].

Algorithm 11 Eliminación de Aristas Irrelevantes

Require: $G = (V, E), K = \{s, t\}, D$

- 1: Eliminar aristas que no pertenecen a ningún $s - t$ -path {Eliminar las aristas irrelevantes de la primera clase}
 - 2: Para cada $v \in V$ calcular $d(v, s)$ y $d(v, t)$
 - 3: Eliminar a las aristas (u, v) tal que $d(u, s) + d(v, t) \geq D$ y $d(v, s) + d(u, t) \geq D$ {Eliminar las aristas irrelevantes de la segunda clase}
 - 4: **if** Existen aristas (u, v) que no pertenecen a un $s - t$ -path **then**
 - 5: Volver al inicio
 - 6: **end if**
-

El proceso de eliminación de aristas irrelevantes se combina con métodos de cálculo exacto y aproximado para simplificar el grafo sobre el cual se evalúa la confiabilidad y de esta forma se reduce el tiempo de cómputo. En el algoritmo de *AZVIS* se incluye el proceso de identificación y eliminación de aristas irrelevantes únicamente al inicio. Existe la alternativa de incorporarlo dentro del algoritmo, es decir, para cada etapa del muestreo y cada replicación. Vale aclarar que en cada etapa del muestreo se fija el estado de una arista y por lo tanto pueden identificarse nuevas aristas irrelevantes en cada sorteo de estado de aristas. El muestreo de las aristas se desarrolla para cada iteración, incluirlo cada vez puede significar un esfuerzo computacional importante que neutralice la reducción de tiempo generada por la simplificación del grafo y hasta aumentar el tiempo de cómputo respecto al método *AZVIS* sin eliminación de irrelevantes.

3.2. Método Recursivo de Reducción de Varianza

El método Recursivo de Reducción de Varianza (*RVR*) consiste en una descomposición recursiva basada en particiones del espacio de estados de la red en función de los componentes de un D-mincut de G para estimar $U_{\{s,t\}}(G, D)$. En este método se practica un muestreo condicionado a la partición y se calcula la confiabilidad diámetro acotada en grafos de menor tamaño que el original. A diferencia del método *IS*, el *RVR* explota la topología de la red. La formulación para el modelo clásico de confiabilidad considerado en este caso fue propuesta por Cancela y El Khadiri [4] y ajustada al problema de diámetro confiabilidad [21]. En esta formulación se aplica el muestreo Multinomial sobre Ω_G el espacio de estados de G .

Sea P_G una partición de Ω_G y C un D-mincut tal que $|P_G| = |C|$ se denota:

$$P_G = \cup_{k=1}^{|C|} A_k.$$

Cada componente A_k es un conjunto de subgrafos de G condicionados a que la k -ésima arista de C opera y las $k - 1$ anteriores fallan.

Además se define la variable aleatoria N_k como el número de estados a sortear en A_k . La variable N_k se distribuye Binomial($N, p(A_k)$) y se cumple:

$$\sum_{k=1}^{|C|} N_k = N, \quad \sum_{k=1}^{|C|} p(A_k) = 1.$$

El vector $(N_1, \dots, N_{|C|})$ se distribuye Multinomial con parámetros N y $p = (p(A_1), \dots, p(A_{|C|}))$.

La recursión se aplica sobre cada componente de P_G de forma que el árbol de la recursión tiene tantas ramificaciones como enlaces tiene C . El proceso continúa hasta que se alcanzan estados determinísticos del grafo.

El desempeño del método depende en gran medida del criterio empleado para la identificación del D-mincut. Cuando no existen restricciones en el largo de los caminos la identificación del mincut de máxima probabilidad es resoluble en tiempo polinomial con el algoritmo de Ford Fulkerson [20]. Este resultado no verifica cuando se introduce una cota de diámetro [5]. Una alternativa es la selección de un conjunto de corte trivial, este conjunto no necesariamente cumple con la condición de ser el de máxima probabilidad, pueden encontrarse resultados de la aplicación del método *RVR* con este criterio en [21]. Una segunda alternativa es aplicar como estrategia de selección de conjuntos de corte una aproximación a la solución óptima del problema con tiempo de resolución polinomial como la presentada en el punto 3.1.1. Los resultados del método *RVR* con este último criterio de selección del conjunto de corte se presentan en la Sección 4.5.

Se define $\hat{U}_{\{s,t\}}(G, D)$, el estimador de la anticonfiabilidad diámetro acotada como:

$$\hat{U}_{\{s,t\}}(G, D) = \frac{NQ_C + (1 - Q_C) \sum_{k=1}^{|C|} S1(G_k, N_k)}{N} = \frac{S1}{N}, \quad (3.4)$$

donde Q_C es la probabilidad de falla de C , $S1(G_k, N_k) = \sum_{j=1}^{N_k} Y_{G_k}^j$ y $Y_{G_k}^j$ la j -ésima realización de la muestra de estados sorteados en A_K . El estimador $\frac{S1}{N}$ es insesgado para $U_{\{s,t\}}(G, D)$ [21].

El estimador de la varianza propuesto en [4] es:

$$\hat{V}(\hat{U}_{\{s,t\}}(G, D)) = \frac{1}{N(N-1)} \left[S2 - \left(\frac{S1}{N} \right)^2 \right] \quad (3.5)$$

donde

$$S2(G, N) = NQ_C^2 + 2Q_C(1 - Q_C) \sum_{i=1}^{|C|} S1(G_i, N_i) + (1 - Q_C)^2 \sum_{i=1}^{|C|} S2(G_i, N_i)$$

El esquema recursivo no repite ningún cálculo, evaluando cada estado de la red por única vez; cuando N crece aumentan las posibilidades de sortear estados de la red que comparten parte o toda la configuración de la red [4].

Algorithm 12 Estimación

Require: $G = (V, E)$, $K = \{s, t\}$, D , N

- 1: Ejecutar $RVR(G, K, D, N)$ devuelve $S = [S(1), S(2)]$
 - 2: $\hat{U}_K(G) = S(1)/N$
 - 3: $\hat{Var}(\hat{U}_K(G)) = \frac{S(2) - (S(1))^2/N}{N(N-1)}$
 - 4: **return** $\hat{U}_K(G), \hat{Var}(\hat{U}_K(G))$
-

En el algoritmo 12 se estiman $U_{s,t}(G)$ y $Var(\hat{U}_{s,t}(G))$ a partir de la salida del algoritmo de RVR .

Algorithm 13 RVR

Require: $G = (V, E)$, $K = \{s, t\}$, D , N

- 1: **if** $|K| == 1$ **then**
 - 2: $S = [0, 0]$
 - 3: **end if**
 - 4: **if** $G = (V, E)$ no es K -conexo **then**
 - 5: $S = [N, N]$
 - 6: **else**
 - 7: Obtener un D-mincut C
 - 8: Calcular $PC = \prod_{i \in C} (q_i)$
 - 9: Definir P partición de Ω_G
 - 10: Calcular π
 - 11: Sortear $N \sim \text{Multinom}(\pi, N)$
 - 12: $T = [0, 0]$
 - 13: **for** $i = 1$ **to** $|C|$ **do**
 - 14: Construir $G_i = (G - e_1 - \dots - e_{i-1}) * e_i$
 - 15: Determinar K_i
 - 16: **if** $N_i^* > 0$ **then**
 - 17: $T = T + RVR(G_i, N_i^*, K_i, D)$
 - 18: **end if**
 - 19: **end for**
 - 20: $S(1) = N \cdot PC + (1 - PC)T(1)$
 - 21: $S(2) = N \cdot PC^2 + 2PC(1 - PC)T(1) + T(2)(1 - PC_2)$
 - 22: **end if**
 - 23: **return** $S = [S(1), S(2)]$
-

En el algoritmo 13 entre las líneas 1 y 5 se definen los casos de cálculo trivial de $U_{s,t}(G, D)$. Si el cálculo no es elemental se define un D-mincut, se calcula su probabilidad y se define la partición del espacio de estados en función de ese corte. El D-mincut se obtiene a partir del algoritmo de aproximación al corte óptimo (*COA*) detallado en la Sección 3.1.1. La variable π es el vector de probabilidades de los componentes de la partición P . En la línea 11 se sortea el vector N^* con distribución Multinomial que depende de N el tamaño de muestra y las probabilidades de los componentes de la partición. Para cada componente de la partición se determina el grafo condicionado asociado y se acumula en la variable T el resultado de la recursión. Por último, en las líneas 20 y 21 se calculan los valores $S(1)$ y $S(2)$ requeridos para estimar $U_{s,t}(G)$ y $Var(\hat{U}_{s,t}(G))$.

Capítulo 4

Análisis experimental

4.1. Marco de comparación

En esta sección se presentan los resultados numéricos obtenidos con el método de Muestreo por Importancia con esquema de Varianza Cero Aproximado (*AZVIS*) y el método Recursivo de Reducción de la Varianza (*RVR*) aplicados a la estimación de $U_{\{s,t\}}(G, D)$. La medida $U_{\{s,t\}}(G, D)$ es la anticonfiabilidad diámetro acotada para el caso $s - t$ terminal.

Las estimaciones se realizaron sobre topologías comúnmente encontradas en la literatura, concretamente: Arpanet, Dodecaedro, Grilla y Grafo Completo y un caso real: Red Oeste de ANTEL (Administración Nacional de Telecomunicaciones). Para cada una de estas clases de grafos se consideran distintos valores de confiabilidad elemental y diámetro. Los algoritmos fueron implementados en la versión 8.0.0.783 de MATLAB, y los experimentos numéricos fueron realizados en el Cluster de Facultad de Ingeniería- UDELAR¹. Parte de estos resultados fueron presentados en [26].

En esta sección los resultados se organizan de la siguiente forma: en primer lugar se presentan los resultados obtenidos para el método *AZVIS* considerando dos estrategias de identificación del conjunto de corte, en segundo lugar se presentan los resultados obtenidos al combinar el método *AZVIS* con un algoritmo de eliminación de aristas irrelevantes válido para diámetro confiabilidad y por último se presentan los resultados para el método *RVR*.

En los experimentos numéricos se evalúan la precisión y el tiempo de cómputo, tomando como referencia el método *MCC*. Concretamente las medidas consideradas para evaluar

¹<http://www.fing.edu.uy/cluster/index.php>

el desempeño de los métodos son: las estimaciones puntuales de $\hat{U}_{\{s,t\}}(G, D)$, la varianza estimada correspondiente, el tiempo de cómputo total en segundos t , la desviación real porcentual y el coeficiente de eficiencia relativa W . El coeficiente W es una medida imparcial que permite la comparación entre diferentes métodos de estimación tomando como referencia el método *MCC* [27], [16], [28]. Contempla dos dimensiones: tiempo de cómputo y varianza. Para el método *AZVIS* se define como:

$$\hat{W}_{\frac{MCC}{AZVIS}} = \frac{V_{MCC} \cdot t_{MCC}}{\hat{V}_{AZVIS} \cdot t_{AZVIS}}$$

con V_{AZVIS} y t_{AZVIS} la varianza y el tiempo de cómputo asociados al método (*AZVIS*) y con V_{MCC} y t_{MCC} la varianza y el tiempo de cómputo asociados al método Monte Carlo Crudo (*MCC*). No se computa el valor exacto de W porque no se conoce V_{AZVIS} y se imputa en su lugar una estimación. El cálculo es análogo para *RVR*.

$$\hat{W}_{\frac{MCC}{RVR}} = \frac{V_{MCC} \cdot t_{MCC}}{\hat{V}_{RVR} \cdot t_{RVR}}$$

La desviación real porcentual *DR* es una medida que permite conocer la precisión de las estimaciones y se define como:

$$DR = \frac{|\hat{U}_{s,t}(G, D) - U_{s,t}(G, D)|}{U_{s,t}(G, D)} \cdot 100$$

Por otra parte, para cada estimación se evalúa si el valor $U_{s,t}(G, D)$ pertenece al intervalo de confianza del 95 % lo que permite concluir respecto a la robustez del método. La expresión para un intervalo de confianza $1 - \alpha$ para $\hat{U}_{s,t}(G, D)$ es la siguiente:

$$IC = \hat{U}_{s,t}(G, D) \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{V(\hat{U}_{s,t}(G, D))}$$

con $z_{1-\alpha/2}$ el valor que acumula la probabilidad $1 - \alpha/2$ en una distribución *Normal*(0, 1).

Dado que no contamos con el verdadero valor de la varianza se sustituye $V(\hat{U}_{s,t}(G, D))$ por la estimación obtenida en cada muestra. El nivel de confianza $1 - \alpha$ refiere a la proporción de veces en que en teoría el verdadero valor del parámetro pertenece al intervalo para un tamaño de muestra suficientemente grande.

4.2. Casos de prueba

La selección de casos de prueba se realizó considerando redes de distinto tamaño y grado de conectividad, una de ellas, la Red Oeste de ANTEL es una red real, el resto son redes usualmente tratadas en la literatura [18], [29], [21], [22], [30]. Para estas redes

se asumen confiabilidades elementales idénticas de las aristas que toman los valores $q \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$. También se contemplan diferentes cotas de diámetro. A continuación se detallan las topologías consideradas y sus principales características.

- Arpanet s - t terminal: $|V| = 21$ $|E| = 26$ $|K| = 2$
 - $D \in \{6, 10, 20\}$, $q \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$, Figura 4.1
- Dodecaedro s - t terminal: $|V| = 20$ $|E| = 30$ $|K| = 2$
 - $D \in \{5, 10, 19\}$, $q \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$, Figura 4.2
- Grilla $n \times n$ con $n \in \{3, 5\}$ s - t terminal: $|V| = n^2$ $|E| = 2n(n - 1)$ $|K| = 2$
 - $D_{n=3} = 5$, $D_{n=5} = 8$, $q \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$, Figura 4.3
- Grafo Completo: K_n s - t terminal $|V| = n$ $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ $|K| = 2$
 - $D \in \{2, 4\}$, $q \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$, Figura 4.4
- Red Oeste de ANTEL s - t terminal: $|V| = 53$ $|E| = 57$ $|K| = 2$
 - $D = 18$, $q \in \{10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}\}$, Figura 4.5

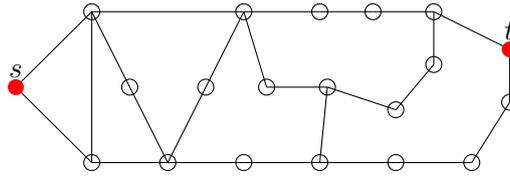


Figura 4.1: Grafo Arpanet

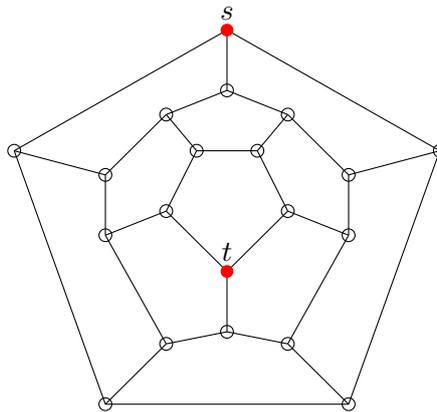


Figura 4.2: Grafo Dodecaedro

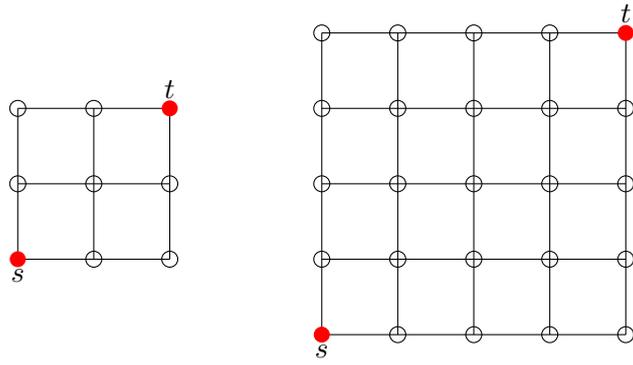


Figura 4.3: Grafo Grilla $n = 3$ y $n = 5$

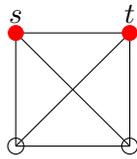


Figura 4.4: Grafo Completo $K_{n=4}$

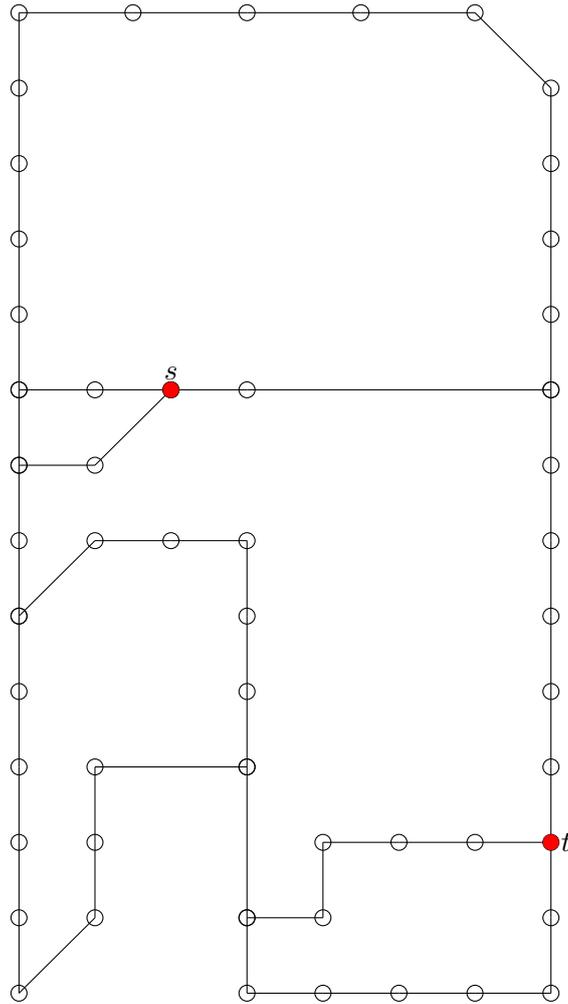


Figura 4.5: Red Oeste de ANTEL

4.3. *AZVIS* según estrategia de selección del D-mincut

En la implementación del método *AZVIS* presentado en la Sección 3.1 se requiere el valor de la probabilidad máxima de los D-mincut de G . Para la identificación de los D-mincut se consideran dos estrategias, la primera que denominamos estrategia de Corte Óptimo Aproximado (*COA*) que consiste en una solución aproximada al problema Primal-Dual de Flujo Máximo y Corte Mínimo en el que se admiten cotas de diámetro. El segundo criterio, denominado Corte Trivial (*CT*) consiste en la identificación de D-mincuts triviales aunque no necesariamente de máxima probabilidad. En la Subsección 3.1.1 se presenta un detalle del criterio *COA* y en la Subsección 3.1.1 de *CT*. En

las Tablas 4.1 a 4.6 se reportan los resultados obtenidos para el método $AZVIS_{COA}$ y en las Tablas 4.7 a 4.12 los de $AZVIS_{CT}$.

Es esperable que la estrategia de selección del conjunto de corte trivial CT tenga menor costo computacional que la aproximación al conjunto óptimo COA . Parte del análisis comparativo consiste en la evaluación de la ganancia en términos de tiempo de cómputo de $AZVIS_{CT}$ y si se verifica como contrapartida una pérdida de precisión. La comparación de las medidas W permitirá concluir respecto a la estrategia más eficiente.

En las tablas de resultados se presenta la siguiente información:

- D : Cota de diámetro del grafo considerado.
- q : Anticonfiabilidad de las aristas, en este caso se considera un valor idéntico de anticonfiabilidad para todas las aristas del grafo.
- N : Tamaño de muestra considerado para la estimación.
- U : Valor real de $U_{s,t}(G, D)$ la anticonfiabilidad diámetro acotada para el caso $s - t$ terminal.
- \hat{U} : Estimación de $U_{s,t}(G, D)$.
- t : Tiempo de cómputo total de la estimación medido en segundos.
- DR : Desviación real porcentual de la estimación respecto al valor exacto del parámetro.
- W : Coeficiente de eficiencia relativa del método aplicado con respecto a MCC .
- $U \in IC$: Variable que indica si $U_{s,t}(G, D)$ pertenece al intervalo de confianza del 95 % construido con la estimación.

Tabla 4.1: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ en el grafo Arpanet.

D	q	N	U	\hat{U}	$\hat{V}(U)$	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
6	1.0E-02	10^2	5.850E-02	7.028E-02	8.537E-05	228	20.1351 %	1.961E-01	Sí
6	1.0E-04	10^2	5.999E-04	5.759E-04	6.237E-09	205	3.9921 %	3.174E+01	Sí
6	1.0E-06	10^2	6.000E-06	5.420E-06	4.334E-13	175	9.6668 %	5.574E+03	Sí
10	1.0E-02	10^2	6.631E-04	1.911E-04	1.317E-08	638	71.1789 %	9.896E+00	No
10	1.0E-04	10^2	6.007E-08	1.330E-08	4.058E-17	649	77.8592 %	2.865E+05	No
10	1.0E-06	10^2	6.000E-12	1.700E-12	2.413E-25	667	71.6672 %	4.612E+09	No
20	1.0E-02	10^2	6.541E-04	2.207E-04	1.429E-08	363	66.2524 %	1.069E+01	No
20	1.0E-04	10^2	6.006E-08	1.551E-08	4.256E-17	245	74.1701 %	5.052E+05	No
20	1.0E-06	10^2	6.000E-12	3.310E-12	6.521E-24	261	44.8344 %	2.740E+08	Sí
6	1.0E-02	10^4	5.850E-02	5.919E-02	5.582E-07	17464	1.1880 %	3.321E-01	Sí
6	1.0E-04	10^4	5.999E-04	6.148E-04	6.149E-11	18666	2.4850 %	3.052E+01	Sí
6	1.0E-06	10^4	6.000E-06	6.068E-06	5.956E-15	18542	1.1265 %	3.183E+03	Sí
10	1.0E-02	10^4	6.631E-04	5.690E-04	6.027E-08	66380	14.1898 %	3.700E-02	Sí
10	1.0E-04	10^4	6.007E-08	2.368E-08	5.208E-18	52315	60.5822 %	3.606E+04	No
10	1.0E-06	10^4	6.000E-12	2.223E-12	4.068E-26	54350	62.9507 %	4.611E+08	No
20	1.0E-02	10^4	6.541E-04	5.048E-04	2.610E-08	23892	22.8228 %	6.714E-02	Sí
20	1.0E-04	10^4	6.006E-08	2.593E-08	2.135E-17	25413	56.8276 %	6.895E+03	No
20	1.0E-06	10^4	6.000E-12	2.201E-12	6.039E-26	24739	63.3140 %	2.431E+08	No

Tabla 4.2: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ en el grafo Dodecaedro.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	3.205E-06	1.111E-06	7.295E-15	300	65.3411 %	1.468E+05	No
5	1.0E-04	10^2	2.012E-12	8.516E-13	6.113E-27	307	57.6735 %	9.188E+10	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-18	1.020E-18	8.885E-39	273	49.0019 %	7.124E+16	No
10	1.0E-02	10^2	2.062E-06	1.072E-06	1.448E-15	511	47.9970 %	3.446E+05	No
10	1.0E-04	10^2	2.001E-12	1.000E-12	6.060E-28	474	50.0138 %	8.183E+11	No
10	1.0E-06	10^2	2.000E-18	9.800E-19	6.020E-40	514	51.0001 %	7.591E+17	No
19	1.0E-02	10^2	2.062E-06	1.128E-06	1.889E-14	149	45.3000 %	4.460E+04	No
19	1.0E-04	10^2	2.001E-12	9.700E-13	6.980E-28	203	51.5129 %	8.588E+11	No
19	1.0E-06	10^2	2.000E-18	9.500E-19	8.838E-40	205	52.5001 %	6.639E+17	No
5	1.0E-02	10^4	3.205E-06	1.720E-06	1.798E-14	24906	46.3271 %	4.305E+00	No
5	1.0E-04	10^4	2.012E-12	9.024E-13	7.402E-29	26313	55.1513 %	7.249E+10	No
5	1.0E-06	10^4	2.000E-18	8.904E-19	6.508E-41	25806	55.4816 %	8.496E+16	No
10	1.0E-02	10^4	2.062E-06	1.020E-06	5.146E-16	60168	50.5179 %	1.756E+04	No
10	1.0E-04	10^4	2.001E-12	1.016E-12	2.144E-28	56168	49.2349 %	3.710E+10	No
10	1.0E-06	10^4	2.000E-18	1.003E-18	5.156E-41	56010	49.8701 %	1.489E+17	No
19	1.0E-02	10^4	2.062E-06	1.031E-06	1.217E-15	15170	49.9870 %	7.366E+03	No
19	1.0E-04	10^4	2.001E-12	9.985E-13	2.191E-29	16212	50.0888 %	3.689E+11	No
19	1.0E-06	10^4	2.000E-18	9.952E-19	2.396E-41	16456	50.2401 %	3.208E+17	No

Tabla 4.3: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ en el grafo Grilla 3.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	2.118E-04	1.367E-04	5.000E-10	54	35.4689 %	2.146E+02	No
5	1.0E-04	10^2	2.001E-08	1.380E-08	4.700E-18	56	31.0411 %	2.038E+06	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-12	1.180E-12	2.189E-26	54	41.0000 %	4.235E+10	No
5	1.0E-02	10^4	2.118E-04	1.787E-04	1.954E-10	5187	15.6273 %	5.306E+00	No
5	1.0E-04	10^4	2.001E-08	2.191E-08	1.000E-16	5197	9.4711 %	1.021E+03	Sí
5	1.0E-06	10^4	2.000E-12	1.191E-12	5.063E-28	5461	40.4350 %	1.889E+10	No

Tabla 4.4: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ en el grafo Grilla 5.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
8	1.0E-02	10^2	2.041E-04	9.325E-05	1.049E-11	764	54.3078 %	4.102E+03	No
8	1.0E-04	10^2	2.000E-08	9.300E-09	1.465E-19	590	53.5081 %	3.727E+07	No
8	1.0E-06	10^2	2.000E-12	9.600E-13	9.939E-28	545	52.0001 %	5.270E+11	No
5	1.0E-02	10^4	2.118E-04	1.787E-04	1.954E-10	5187	15.6273 %	5.306E+00	No
5	1.0E-04	10^4	2.001E-08	2.191E-08	1.000E-16	5197	9.4711 %	1.021E+03	Sí
5	1.0E-06	10^4	2.000E-12	1.191E-12	5.063E-28	5461	40.4350 %	1.889E+10	No

Tabla 4.5: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ en el grafo K_4 .

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
2	1.0E-02	10^2	3.960E-06	1.822E-06	3.935E-14	9	54.0000 %	5.104E+04	No
2	1.0E-04	10^2	4.000E-12	1.920E-12	4.033E-26	10	52.0000 %	5.037E+10	No
2	1.0E-06	10^2	4.000E-18	1.880E-18	4.026E-38	8	53.0000 %	4.938E+16	No
4	1.0E-02	10^2	2.020E-06	7.685E-07	6.372E-15	13	61.9459 %	1.476E+05	No
4	1.0E-04	10^2	2.000E-12	7.301E-13	6.436E-27	12	63.4997 %	1.677E+11	No
4	1.0E-06	10^2	2.000E-18	8.900E-19	7.252E-39	12	55.5000 %	1.068E+17	No
2	1.0E-02	10^4	3.960E-06	1.964E-06	3.921E-16	865	50.4100 %	5.557E+04	No
2	1.0E-04	10^4	4.000E-12	2.008E-12	4.000E-28	872	49.7900 %	5.768E+10	No
2	1.0E-06	10^4	4.000E-18	2.010E-18	4.000E-40	869	49.7401 %	4.852E+16	No
4	1.0E-02	10^4	2.020E-06	9.622E-07	2.175E-15	1296	52.3558 %	4.305E+03	No
4	1.0E-04	10^4	2.000E-12	7.442E-13	6.910E-29	1258	62.7950 %	1.469E+11	No
4	1.0E-06	10^4	2.000E-18	7.509E-19	6.903E-41	1252	62.4550 %	1.262E+17	No

Tabla 4.6: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ en la Red Oeste de ANTEL.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
18	1.0E-02	10^2	7.020E-03	3.378E-04	1.271E-08	4354	95.1885 %	1.172E+02	No
18	1.0E-04	10^2	7.199E-07	8.180E-08	2.816E-15	3992	88.6366 %	6.290E+04	No
18	1.0E-06	10^2	7.200E-11	5.660E-12	5.264E-24	3907	92.1389 %	3.488E+09	No

En los resultados obtenidos al aplicar el método $AZVIS_{COA}$ sobre los casos de prueba se verifica que $AZVIS_{COA}$ tiene un mejor desempeño que MCC . El coeficiente W indica una mejora en la eficiencia respecto a MCC para $q \in \{10^{-4}, 10^{-6}\}$, que se debe al aporte en términos de varianza. De todas formas, al evaluar la robustez del método se observa que salvo en el caso del grafo Arpanet, el valor $U_{s,t}(G, D)$ no pertenece al intervalo de confianza del 95 % construido a partir de la estimación. Esto permite concluir que se requiere un tamaño de muestra superior a 10^4 para alcanzar el nivel de estabilidad del método. Aumentando el tamaño de muestra de 10^2 a 10^4 se obtienen mejores resultados en términos de robustez pero sólo para el grafo Arpanet, con $q = 10^{-4}$. En estos casos en que el método no alcanza la estabilidad la estimación de la varianza no es confiable y no aplican los supuestos de normalidad para la estimación de intervalos de confianza.

Dado que se trata de un método iterativo, el costo computacional es importante y desde el punto de vista práctico se dificulta la ejecución para un tamaño de muestra superior a 10^4 . El tiempo de cómputo de $AZVIS_{COA}$ es mayor que el de MCC ya que en el primero se realiza la selección de $2|E|$ conjuntos de corte de máxima probabilidad por cada iteración.

Si bien se verifica que el método no es robusto, los resultados en términos de precisión son aceptables, incluso para $N = 10^2$. Sólo se observan valores de desviación real porcentual cercanos al 100 % en la Red Oeste de ANTEL. En el 75 % de los casos de prueba la desviación porcentual está por debajo del 60 %. Al aumentar el tamaño de muestra de 10^2 a 10^4 la precisión del método mejora de manera notoria para el grafo Arpanet. En el grafo Dodecaedro no se observan cambios y en el resto de los grafos considerados la precisión mejora aunque en menor medida que en Arpanet.

De la comparación general entre grafos se deduce que el método $AZVIS_{COA}$ funciona mejor para topologías más simples y con menor conectividad, como Arpanet.

A continuación se presentan los resultados del método $AZVIS$ con el criterio de identificación trivial de D-mincuts.

Tabla 4.7: Resultados numéricos de $AZVIS_{CT}$ en el grafo Arpanet.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
6	1.0E-02	10^2	5.850E-02	4.039E-02	2.997E-04	190	30.9522 %	6.704E-02	Sí
6	1.0E-04	10^2	5.999E-04	1.000E-04	7.555E-41	196	83.3275 %	2.742E+33	No
6	1.0E-06	10^2	6.000E-06	1.000E-06	1.044E-44	196	83.3333 %	2.067E+35	No
10	1.0E-02	10^2	6.631E-04	6.104E-04	5.997E-09	347	7.9446 %	3.991E+01	Sí
10	1.0E-04	10^2	6.007E-08	6.059E-08	5.746E-17	336	0.8755 %	3.905E+05	Sí
10	1.0E-06	10^2	6.000E-12	4.420E-12	2.928E-25	317	26.3346 %	7.994E+09	No
20	1.0E-02	10^2	6.541E-04	6.144E-04	5.987E-09	155	6.0610 %	5.981E+01	Sí
20	1.0E-04	10^2	6.006E-08	6.039E-08	6.098E-17	154	0.5575 %	5.612E+05	Sí
20	1.0E-06	10^2	6.000E-12	6.860E-12	6.741E-25	145	14.3312 %	4.783E+09	Sí
6	1.0E-02	10^4	5.850E-02	1.939E-02	9.296E-07	15297	66.8562 %	2.277E-01	No
6	1.0E-04	10^4	5.999E-04	4.000E-04	3.000E-08	16563	33.3100 %	7.049E-02	Sí
6	1.0E-06	10^4	6.000E-06	1.000E-06	7.604E-43	16501	83.3333 %	2.802E+31	No
10	1.0E-02	10^4	6.631E-04	6.025E-04	8.610E-11	28605	9.1495 %	6.011E+01	No
10	1.0E-04	10^4	6.007E-08	6.023E-08	5.915E-19	27090	0.2729 %	6.133E+05	Sí
10	1.0E-06	10^4	6.000E-12	6.084E-12	5.995E-27	26857	1.3915 %	6.332E+09	Sí
20	1.0E-02	10^4	6.541E-04	6.025E-04	8.077E-11	11483	7.8770 %	4.514E+01	No
20	1.0E-04	10^4	6.006E-08	6.052E-08	5.900E-19	11153	0.7707 %	5.684E+05	Sí
20	1.0E-06	10^4	6.000E-12	5.994E-12	5.872E-27	11041	0.0951 %	5.603E+09	Sí

Tabla 4.8: Resultados numéricos de $AZVIS_{CT}$ en el grafo Dodecaedro.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	3.205E-06	2.265E-06	8.811E-14	288	29.3186 %	1.268E+04	No
5	1.0E-04	10^2	2.012E-12	2.000E-12	3.999E-34	235	0.5905 %	1.832E+18	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-18	2.000E-18	4.000E-50	235	0.0049 %	1.836E+28	No
10	1.0E-02	10^2	2.062E-06	2.000E-06	9.996E-19	578	3.0043 %	4.417E+08	No
10	1.0E-04	10^2	2.001E-12	2.000E-12	1.004E-34	605	0.0304 %	3.871E+18	No
10	1.0E-06	10^2	2.000E-18	2.000E-18	9.842E-51	640	0.0003 %	3.734E+28	No
19	1.0E-02	10^2	2.062E-06	1.979E-06	4.006E-16	177	4.0178 %	1.772E+06	No
19	1.0E-04	10^2	2.001E-12	2.000E-12	1.010E-34	158	0.0300 %	7.631E+18	No
19	1.0E-06	10^2	2.000E-18	2.000E-18	9.903E-51	174	0.0003 %	6.965E+28	No
5	1.0E-02	10^4	3.205E-06	2.290E-06	7.940E-15	21359	28.5418 %	1.136E+01	No
5	1.0E-04	10^4	2.012E-12	2.005E-12	4.716E-30	20336	0.3727 %	1.472E+12	No
5	1.0E-06	10^4	2.000E-18	2.000E-18	4.000E-52	21141	0.0049 %	1.687E+28	No
10	1.0E-02	10^4	2.062E-06	2.008E-06	3.074E-18	62233	2.6244 %	2.843E+06	No
10	1.0E-04	10^4	2.001E-12	2.000E-12	1.000E-36	60349	0.0300 %	7.405E+18	No
10	1.0E-06	10^4	2.000E-18	2.000E-18	1.000E-52	57722	0.0003 %	7.449E+28	No
19	1.0E-02	10^4	2.062E-06	4.016E-06	4.039E-12	17846	94.7779 %	1.886E+00	Sí
19	1.0E-04	10^4	2.001E-12	2.000E-12	1.000E-36	17477	0.0300 %	7.498E+18	No
19	1.0E-06	10^4	2.000E-18	2.000E-18	1.000E-52	16679	0.0003 %	7.582E+28	No

Tabla 4.9: Resultados numéricos de $AZVIS_{CT}$ en el grafo Grilla 3.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	2.118E-04	1.941E-04	1.178E-11	34	8.3771 %	1.456E+04	No
5	1.0E-04	10^2	2.001E-08	2.000E-08	9.771E-27	39	0.0609 %	1.412E+15	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-12	2.000E-12	9.903E-39	30	0.0000 %	1.673E+23	Sí
5	1.0E-02	10^4	2.118E-04	1.981E-04	8.326E-12	3391	6.4968 %	1.904E+02	No
5	1.0E-04	10^4	2.001E-08	2.001E-08	5.198E-23	3592	0.0300 %	2.842E+09	Sí
5	1.0E-06	10^4	2.000E-12	2.000E-12	1.000E-40	3519	0.0000 %	1.485E+23	Sí

Tabla 4.10: Resultados numéricos de $AZVIS_{CT}$ en el grafo Grilla 5.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
8	1.0E-02	10^2	2.041E-04	1.721E-04	4.870E-11	751	15.6783 %	8.985E+02	No
8	1.0E-04	10^2	2.000E-08	2.000E-08	9.997E-27	747	0.0205 %	4.312E+14	No
8	1.0E-06	10^2	2.000E-12	2.000E-12	1.008E-38	655	0.0002 %	4.320E+22	No
8	1.0E-02	10^4	2.041E-04	1.778E-04	1.650E-11	61088	12.8692 %	4.958E+01	No
8	1.0E-04	10^4	2.000E-08	1.997E-08	5.194E-23	60134	0.1500 %	1.291E+09	No
8	1.0E-06	10^4	2.000E-12	2.000E-12	1.000E-40	56228	0.0002 %	7.239E+22	No

Tabla 4.11: Resultados numéricos de $AZVIS_{CT}$ en el grafo K_4 .

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
2	1.0E-02	10^2	3.960E-06	2.095E-06	1.848E-14	5	47.1032 %	2.017E+05	No
2	1.0E-04	10^2	4.000E-12	2.100E-12	2.212E-26	5	47.4966 %	1.993E+11	No
2	1.0E-06	10^2	4.000E-18	1.860E-18	2.041E-38	5	53.5000 %	1.738E+17	No
4	1.0E-02	10^2	2.020E-06	1.065E-06	1.016E-14	8	47.2572 %	1.557E+05	No
4	1.0E-04	10^2	2.000E-12	9.000E-13	1.000E-26	8	55.0023 %	1.698E+11	No
4	1.0E-06	10^2	2.000E-18	1.140E-18	9.903E-39	8	43.0000 %	1.231E+17	No
2	1.0E-02	10^4	3.960E-06	1.967E-06	1.950E-16	512	50.3186 %	1.886E+05	No
2	1.0E-04	10^4	4.000E-12	2.029E-12	1.999E-28	502	49.2613 %	2.005E+11	No
2	1.0E-06	10^4	4.000E-18	1.996E-18	1.959E-40	500	50.1100 %	1.720E+17	No
4	1.0E-02	10^4	2.020E-06	9.986E-07	1.010E-16	763	50.5511 %	1.576E+05	No
4	1.0E-04	10^4	2.000E-12	9.908E-13	1.000E-28	761	50.4625 %	1.678E+11	No
4	1.0E-06	10^4	2.000E-18	9.864E-19	9.999E-41	762	50.6800 %	1.432E+17	No

Tabla 4.12: Resultados numéricos de $AZVIS_{CT}$ en el grafo Red Oeste de ANTEL.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
18	1.0E-02	10^2	7.020E-03	3.309E-04	2.276E-08	2884	95.2861 %	9.880E+01	No
18	1.0E-04	10^2	7.199E-07	2.688E-07	2.325E-14	2697	62.6562 %	1.127E+04	No
18	1.0E-06	10^2	7.200E-11	2.560E-12	6.554E-24	2552	96.4443 %	4.290E+09	No

Los resultados para el método *AZVIS* con selección trivial del D-mincut indican un mejor desempeño respecto al método *MCC*, la medida considerada en este caso es el coeficiente de eficiencia relativa W . Este comportamiento se explica por una reducción de la varianza de $AZVIS_{CT}$ respecto a *MCC*. La no pertenencia en la mayor parte de los casos de $U_{s,t}(G, D)$ a los intervalos de confianza del 95 % sugiere que el método $AZVIS_{CT}$ no es robusto para los tamaños de muestra considerados. Los indicios de inestabilidad de $AZVIS_{CT}$ son incluso más importantes que en $AZVIS_{COA}$.

El tiempo de cómputo de $AZVIS_{CT}$ es superior al de *MCC* pero es inferior al de $AZVIS_{COA}$ porque la estrategia de selección del corte de $AZVIS_{CT}$ es más sencilla. La reducción del tiempo de cómputo de $AZVIS_{CT}$ respecto a $AZVIS_{COA}$ depende de la topología, para el grafo Arpanet se verifica una reducción del orden del 50 % mientras que para la Red Oeste de ANTEL y K_4 es del 25 %; para el grafo Dodecaedro no se registra una disminución del tiempo de cómputo.

En los experimentos realizados no se evidencia una pérdida de precisión de $AZVIS_{CT}$ respecto a $AZVIS_{COA}$, por el contrario, la desviación real es menor en el primero. En particular, para el método $AZVIS_{CT}$ en un 76 % de los casos de prueba la desviación real es menor al 50 % y en un 57 % menor al 10 %. La precisión de $AZVIS_{CT}$ es menor que la de $AZVIS_{COA}$ en los casos en los que el diámetro tiene un efecto más importante sobre la confiabilidad, por ejemplo en el grafo Arpanet con $D = 6$. Este comportamiento obedece a que la estrategia de selección trivial del conjunto de corte considera al diámetro únicamente al verificar si el grafo inducido obtenido en las diferentes etapas del algoritmo está operativo.

Si analizamos las medidas de precisión y robustez en conjunto los mejores resultados para el método $AZVIS_{CT}$ se observan en el grafo Arpanet.

4.4. *AZVIS* con eliminación de aristas irrelevantes

Como puede verificarse en los resultados empíricos, el método *AZVIS* tiene asociado un elevado costo computacional. Una forma de reducir el tiempo de cálculo es a través de simplificaciones del grafo. En este sentido, se toma como referencia la técnica $AZVIS_{COA}$ y se combina con el algoritmo de eliminación de aristas irrelevantes referido en la Subsección 3.1.1. El proceso de eliminación de aristas irrelevantes se agrega al comienzo y por única vez en el algoritmo de implementación de $AZVIS_{COA}$. Esta modificación no implica cambios en términos de precisión del método pero sí en el tiempo de cómputo. Los resultados se detallan las Tablas 4.13 a 4.18.

Tabla 4.13: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ con eliminación de aristas irrelevantes en el grafo Arpanet.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
6	1.0E-02	10^2	5.850E-02	7.029E-02	8.351E-05	16	20.1553 %	2.847E+00	Sí
6	1.0E-04	10^2	5.999E-04	5.879E-04	4.182E-09	14	1.9908 %	6.994E+02	Sí
6	1.0E-06	10^2	6.000E-06	7.380E-06	9.048E-13	14	22.9998 %	3.401E+04	Sí
10	1.0E-02	10^2	6.631E-04	6.725E-05	4.510E-11	651	89.8589 %	2.835E+03	No
10	1.0E-04	10^2	6.007E-08	9.804E-09	5.023E-18	622	83.6781 %	2.417E+06	No
10	1.0E-06	10^2	6.000E-12	9.400E-13	5.168E-26	681	84.3336 %	2.111E+10	No
20	1.0E-02	10^2	6.541E-04	9.342E-05	3.348E-10	357	85.7174 %	4.634E+02	No
20	1.0E-04	10^2	6.006E-08	4.286E-08	6.946E-16	303	28.6259 %	2.502E+04	Sí
20	1.0E-06	10^2	6.000E-12	1.820E-12	5.195E-25	318	69.6672 %	2.824E+09	No
6	1.0E-02	10^4	5.850E-02	5.895E-02	5.457E-07	1037	0.7725 %	5.723E+00	Sí
6	1.0E-04	10^4	5.999E-04	5.932E-04	5.722E-11	1104	1.1117 %	5.545E+02	Sí
6	1.0E-06	10^4	6.000E-06	6.020E-06	5.900E-15	1098	0.3398 %	5.423E+04	Sí
10	1.0E-02	10^4	6.631E-04	3.019E-04	3.851E-09	76234	54.4681 %	5.042E-01	No
10	1.0E-04	10^4	6.007E-08	2.015E-08	4.145E-18	54077	66.4537 %	4.383E+04	No
10	1.0E-06	10^4	6.000E-12	2.837E-12	1.174E-25	54162	52.7226 %	1.603E+08	No
20	1.0E-02	10^4	6.541E-04	3.540E-04	7.107E-09	25434	45.8798 %	2.316E-01	No
20	1.0E-04	10^4	6.006E-08	1.906E-08	2.624E-18	25336	68.2642 %	5.627E+04	No
20	1.0E-06	10^4	6.000E-12	1.966E-12	3.839E-26	24318	67.2339 %	3.891E+08	No

Tabla 4.14: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ con eliminación de aristas irrelevantes en el grafo Dodecaedro.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	3.205E-06	2.363E-06	1.113E-12	219	26.2815 %	1.318E+03	Sí
5	1.0E-04	10^2	2.012E-12	8.820E-13	5.682E-27	213	56.1611 %	1.427E+11	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-18	8.000E-19	7.273E-39	225	60.0012 %	1.057E+17	No
10	1.0E-02	10^2	2.062E-06	9.316E-07	8.561E-16	580	54.8162 %	5.134E+05	No
10	1.0E-04	10^2	2.001E-12	1.080E-12	1.147E-27	485	46.0153 %	4.226E+11	No
10	1.0E-06	10^2	2.000E-18	9.600E-19	5.899E-40	522	52.0001 %	7.629E+17	No
19	1.0E-02	10^2	2.062E-06	9.219E-07	7.428E-16	176	55.2866 %	9.590E+05	No
19	1.0E-04	10^2	2.001E-12	1.020E-12	8.039E-28	140	49.0141 %	1.083E+12	No
19	1.0E-06	10^2	2.000E-18	9.700E-19	6.980E-40	157	51.5001 %	1.096E+18	No
5	1.0E-02	10^4	3.205E-06	2.290E-06	7.940E-15	21359	28.5418 %	1.136E+01	No
5	1.0E-04	10^4	2.012E-12	2.005E-12	4.716E-30	20336	0.3727 %	1.472E+12	No
5	1.0E-06	10^4	2.000E-18	2.000E-18	4.000E-52	21141	0.0049 %	1.687E+28	No
10	1.0E-02	10^4	2.062E-06	1.063E-06	2.168E-15	60624	48.4571 %	4.138E+03	No
10	1.0E-04	10^4	2.001E-12	1.009E-12	8.395E-29	56623	49.5449 %	9.400E+10	No
10	1.0E-06	10^4	2.000E-18	9.930E-19	2.896E-41	54037	50.3501 %	2.748E+17	No
19	1.0E-02	10^4	2.062E-06	4.016E-06	4.039E-12	17846	94.7779 %	1.886E+00	Sí
19	1.0E-04	10^4	2.001E-12	2.000E-12	1.000E-36	17477	0.0300 %	7.498E+18	No
19	1.0E-06	10^4	2.000E-18	2.000E-18	1.000E-52	16679	0.0003 %	7.582E+28	No

Tabla 4.15: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ con eliminación de aristas irrelevantes en el grafo Grilla 3.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	2.118E-04	1.145E-04	1.754E-10	50	45.9349 %	6.589E+02	No
5	1.0E-04	10^2	2.001E-08	9.901E-09	7.166E-19	53	50.5243 %	1.403E+07	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-12	1.110E-12	1.856E-26	53	44.5000 %	5.076E+10	No
5	1.0E-02	10^4	2.118E-04	1.633E-04	1.452E-10	5236	22.9319 %	7.071E+00	No
5	1.0E-04	10^4	2.001E-08	1.159E-08	2.982E-20	5509	42.0976 %	3.230E+06	No
5	1.0E-06	10^4	2.000E-12	1.206E-12	5.183E-28	5357	39.6850 %	1.881E+10	No

Tabla 4.16: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ con eliminación de aristas irrelevantes en el grafo Grilla 5.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
8	1.0E-02	10^2	2.041E-04	8.624E-05	1.599E-11	876	57.7425 %	2.348E+03	No
8	1.0E-04	10^2	2.000E-08	9.500E-09	2.096E-19	662	52.5084 %	2.321E+07	No
8	1.0E-06	10^2	2.000E-12	9.100E-13	2.039E-27	660	54.5001 %	2.121E+11	No
8	1.0E-02	10^4	2.041E-04	9.912E-05	6.059E-12	61351	51.4301 %	1.344E+02	No
8	1.0E-04	10^4	2.000E-08	9.251E-09	1.617E-21	59963	53.7533 %	4.160E+07	No
8	1.0E-06	10^4	2.000E-12	9.270E-13	1.619E-29	56104	53.6501 %	4.482E+11	No

Tabla 4.17: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ con eliminación de aristas irrelevantes en el grafo K_4 .

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
2	1.0E-02	10^2	3.960E-06	1.861E-06	3.946E-14	7	53.0000 %	6.761E+04	No
2	1.0E-04	10^2	4.000E-12	1.840E-12	4.014E-26	6	54.0000 %	8.160E+10	No
2	1.0E-06	10^2	4.000E-18	2.080E-18	4.034E-38	6	48.0001 %	6.491E+16	No
4	1.0E-02	10^2	2.020E-06	8.477E-07	7.502E-15	13	58.0250 %	1.282E+05	No
4	1.0E-04	10^2	2.000E-12	8.601E-13	7.480E-27	12	57.0004 %	1.443E+11	No
4	1.0E-06	10^2	2.000E-18	5.500E-19	5.530E-39	13	72.5000 %	1.242E+17	No
2	1.0E-02	10^4	3.960E-06	1.990E-06	3.921E-16	696	49.7400 %	6.904E+04	No
2	1.0E-04	10^4	4.000E-12	2.025E-12	3.999E-28	672	49.3700 %	7.484E+10	No
2	1.0E-06	10^4	4.000E-18	1.970E-18	3.999E-40	672	50.7501 %	6.274E+16	No
4	1.0E-02	10^4	2.020E-06	9.868E-07	2.376E-15	1271	51.1388 %	4.019E+03	No
4	1.0E-04	10^4	2.000E-12	7.345E-13	6.846E-29	1260	63.2800 %	1.481E+11	No
4	1.0E-06	10^4	2.000E-18	7.485E-19	6.875E-41	1256	62.5750 %	1.264E+17	No

Tabla 4.18: Resultados numéricos de $AZVIS_{COA}$ con eliminación de aristas irrelevantes en el grafo Red Oeste de Antel.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
18	1.0E-02	10^2	7.020E-03	1.478E-03	2.861E-07	2619	78.9432 %	8.653E+00	No
18	1.0E-04	10^2	7.199E-07	6.284E-08	3.462E-16	2310	91.2704 %	8.843E+05	No
18	1.0E-06	10^2	7.200E-11	1.142E-11	3.392E-23	2400	84.1388 %	8.810E+08	No

La eliminación de aristas irrelevantes se implementa en el método $AZVIS_{COA}$ con el propósito de reducir el costo computacional. Según los resultados obtenidos, esto se logra en las redes con menor conectividad como Arpanet y la Red Oeste de ANTEL. En el grafo Arpanet con $D = 6$ se obtiene un tiempo de cómputo 15 veces menor con la eliminación de aristas irrelevantes, mientras que no se observan diferencias sustanciales para $D = 10$ y $D = 20$. En la red Oeste de ANTEL se registra una reducción del orden del 50% para $D = 18$. En el resto de los grafos las diferencias obtenidas son menores. Dado que este proceso no compromete la precisión del método y en algunas topologías se logra reducir el tiempo de cómputo, es conveniente incorporarlo en la implementación de $AZVIS_{COA}$.

4.5. RVR

En esta sección se reportan los resultados empíricos obtenidos a partir de la aplicación del método RVR presentado en la Sección 3.2 para la estimación de $U_{s,t}(G, D)$. El desempeño del método RVR se compara con el de $AZVIS$ en términos de precisión, tiempo de ejecución y robustez. Para la implementación del método RVR se requiere la identificación de un D-mincut al igual que en $AZVIS$. El criterio de selección del corte considerado para RVR en este trabajo es el de Corte Óptimo Aproximado COA presentado en la Subsección 3.1.1 y que consiste en una solución aproximada al problema Primal Dual de Flujo Máximo y Corte Mínimo. Los resultados de la aplicación de un criterio de selección de conjuntos de corte triviales como el presentado en la Sección 3.1.2 en RVR pueden encontrarse en [21].

Tabla 4.19: Resultados numéricos de RVR en el grafo Arpanet.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
6	1.0E-02	10^2	5.850E-02	5.852E-02	3.356E-01	0.83	0.0339 %	1.375E-02	Sí
6	1.0E-04	10^2	5.999E-04	5.999E-04	3.527E-05	0.91	0.0000 %	1.264E+00	Sí
6	1.0E-06	10^2	6.000E-06	6.000E-06	3.600E-13	0.63	0.0000 %	1.864E+06	Sí
10	1.0E-02	10^2	6.631E-04	1.304E-03	4.724E-03	12.13	96.5744 %	1.452E-03	Sí
10	1.0E-04	10^2	6.007E-08	1.000E-08	9.801E-15	3.30	83.3514 %	2.335E+05	Sí
10	1.0E-06	10^2	6.000E-12	1.000E-12	9.801E-23	2.77	83.3336 %	2.731E+09	Sí
20	1.0E-02	10^2	6.541E-04	1.041E-04	1.161E-06	5.91	84.0828 %	8.082E+00	Sí
20	1.0E-04	10^2	6.006E-08	1.000E-08	9.803E-15	1.27	83.3472 %	4.231E+05	Sí
20	1.0E-06	10^2	6.000E-12	1.000E-18	9.801E-35	1.56	100.0000 %	3.050E+21	No
6	1.0E-02	10^4	5.850E-02	5.852E-02	3.424E+01	1.51	0.0339 %	6.279E-05	Sí
6	1.0E-04	10^4	5.999E-04	5.999E-04	3.597E-03	0.88	0.0000 %	1.107E-02	Sí
6	1.0E-06	10^4	6.000E-06	6.000E-06	3.599E-07	1.06	0.0000 %	9.214E-01	Sí
10	1.0E-02	10^4	6.631E-04	6.403E-04	2.658E-01	50.56	3.4398 %	1.102E-05	Sí
10	1.0E-04	10^4	6.007E-08	1.001E-08	1.002E-12	9.96	83.3414 %	9.849E+02	Sí
10	1.0E-06	10^4	6.000E-12	2.000E-18	3.999E-32	2.41	100.0000 %	1.056E+19	No
20	1.0E-02	10^4	6.541E-04	6.293E-04	2.591E-01	22.67	3.7938 %	7.128E-06	Sí
20	1.0E-04	10^4	6.006E-08	3.001E-08	2.001E-08	5.99	50.0333 %	3.121E-02	Sí
20	1.0E-06	10^4	6.000E-12	1.000E-12	9.998E-21	1.70	83.3336 %	2.137E+07	Sí

Tabla 4.20: Resultados numéricos de RVR en el grafo Dodecaedro.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	3.205E-06	2.061E-06	2.021E-08	5.73	35.7015 %	2.777E+00	Sí
5	1.0E-04	10^2	2.012E-12	1.000E-16	9.805E-31	1.72	99.9950 %	1.022E+17	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-18	2.000E-24	3.920E-46	1.73	99.9999 %	2.548E+26	No
10	1.0E-02	10^2	2.062E-06	4.070E-08	6.059E-12	14.63	98.0261 %	2.878E+03	Sí
10	1.0E-04	10^2	2.001E-12	3.000E-20	8.821E-38	3.33	100.0000 %	7.999E+23	No
10	1.0E-06	10^2	2.000E-18	2.000E-30	3.920E-58	3.62	100.0000 %	1.657E+38	No
19	1.0E-02	10^2	2.062E-06	3.000E-08	1.990E-12	7.33	98.5449 %	8.596E+03	Sí
19	1.0E-04	10^2	2.001E-12	4.000E-16	9.000E-24	5.18	99.9800 %	2.610E+09	Sí
19	1.0E-06	10^2	2.000E-18	1.000E-18	9.801E-35	1.95	50.0001 %	6.294E+14	Sí
5	1.0E-02	10^4	3.205E-06	7.989E-08	6.193E-08	13.36	97.5072 %	2.329E-03	Sí
5	1.0E-04	10^4	2.012E-12	2.000E-12	2.000E-16	3.12	0.5865 %	2.262E+02	Sí
5	1.0E-06	10^4	2.000E-18	1.000E-18	9.998E-33	1.96	50.0025 %	7.282E+12	Sí
10	1.0E-02	10^4	2.062E-06	4.138E-06	4.161E-04	49.39	100.7016 %	2.646E-05	Sí
10	1.0E-04	10^4	2.001E-12	3.000E-16	3.000E-24	9.48	99.9850 %	1.572E+10	Sí
10	1.0E-06	10^4	2.000E-18	1.000E-30	9.998E-57	4.13	100.0000 %	1.041E+37	No
19	1.0E-02	10^4	2.062E-06	9.978E-07	9.901E-07	25.52	51.6074 %	5.381E-03	Sí
19	1.0E-04	10^4	2.001E-12	4.000E-16	9.000E-24	5.18	99.9800 %	2.811E+09	Sí
19	1.0E-06	10^4	2.000E-18	1.000E-24	9.998E-45	1.99	100.0000 %	6.357E+24	No

Tabla 4.21: Resultados numéricos de *RVR* en el grafo Grilla 3.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
5	1.0E-02	10^2	2.118E-04	2.060E-04	2.020E-04	1.07	2.7618 %	2.648E-02	Sí
5	1.0E-04	10^2	2.001E-08	1.000E-12	9.805E-23	0.41	99.9950 %	1.322E+13	No
5	1.0E-06	10^2	2.000E-12	1.000E-18	9.801E-35	0.40	99.9999 %	1.285E+21	No
5	1.0E-02	10^4	2.118E-04	2.249E-04	2.488E-02	2.06	6.1544 %	1.050E-04	Sí
5	1.0E-04	10^4	2.001E-08	3.000E-12	1.001E-16	0.55	99.9850 %	9.562E+06	No
5	1.0E-06	10^4	2.000E-12	1.000E-18	9.998E-33	0.40	99.9999 %	1.300E+19	No

Tabla 4.22: Resultados numéricos de *RVR* en el grafo Grilla 5.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
8	1.0E-02	10^2	2.041E-04	9.600E-05	9.413E-07	19.17	52.9598 %	1.822E+00	Sí
8	1.0E-04	10^2	2.000E-08	2.000E-20	3.921E-38	6.11	100.0000 %	1.345E+28	No
8	1.0E-06	10^2	2.000E-12	1.000E-12	9.801E-23	5.80	50.0001 %	5.022E+08	Sí
8	1.0E-02	10^4	2.041E-04	2.199E-04	2.258E-02	90.88	7.7522 %	2.435E-05	Sí
8	1.0E-04	10^4	2.000E-08	3.000E-08	3.000E-08	17.49	49.9900 %	7.687E-03	Sí
8	1.0E-06	10^4	2.000E-12	1.000E-12	9.998E-21	4.29	50.0001 %	9.491E+06	Sí

Tabla 4.23: Resultados numéricos de *RVR* en el grafo K_4 .

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
2	1.0E-02	10^2	3.960E-06	1.000E-06	9.801E-11	0.29	74.7481 %	1.702E+02	Sí
2	1.0E-04	10^2	4.000E-12	1.000E-12	9.801E-23	0.03	74.9975 %	1.786E+09	Sí
2	1.0E-06	10^2	4.000E-18	1.000E-18	9.801E-35	0.03	75.0000 %	1.251E+15	Sí
4	1.0E-02	10^2	2.020E-06	2.000E-08	1.019E-12	0.13	99.0097 %	9.061E+02	No
4	1.0E-04	10^2	2.000E-12	1.000E-12	9.801E-23	0.04	50.0050 %	1.765E+09	Sí
4	1.0E-06	10^2	2.000E-18	1.000E-18	9.801E-35	0.05	50.0000 %	8.695E+14	Sí
2	1.0E-02	10^4	3.960E-06	3.050E-06	1.031E-04	0.16	22.9843 %	8.811E-04	Sí
2	1.0E-04	10^4	4.000E-12	1.000E-12	9.998E-21	0.03	74.9975 %	1.593E+07	Sí
2	1.0E-06	10^4	4.000E-18	1.000E-18	9.998E-33	0.03	75.0000 %	1.347E+13	Sí
4	1.0E-02	10^4	2.020E-06	4.010E-06	5.960E-04	0.22	98.5392 %	1.799E-04	Sí
4	1.0E-04	10^4	2.000E-12	1.000E-12	9.999E-17	0.08	50.0000 %	8.447E+02	Sí
4	1.0E-06	10^4	2.000E-18	1.000E-24	9.998E-45	0.04	100.0000 %	1.218E+19	No

Tabla 4.24: Resultados numéricos de *RVR* en el grafo Red Oeste de Antel.

D	q	N	U	\hat{U}	\hat{V}	t	DR	\hat{W}	$U \in IC$
18	1.0E-02	10^2	7.020E-03	4.571E-03	3.174E-02	69.38	34.8857 %	1.921E-03	Sí
18	1.0E-04	10^2	7.199E-07	4.000E-08	1.568E-13	12.64	94.4429 %	1.982E+04	Sí
18	1.0E-06	10^2	7.200E-11	4.000E-12	1.568E-21	11.53	94.4444 %	2.204E+08	Sí

El método *RVR* logra mayor eficiencia que *MCC* según el coeficiente W . Este com-

portamiento es análogo al de $AZVIS_{COA}$ y $AZVIS_{CT}$ pero la mejora en el desempeño de RVR respecto a MCC obedece a una reducción tanto de la varianza como del tiempo de cómputo. La indicatriz de pertenencia de $U_{s,t}(G, D)$ al intervalo de confianza del 95 % sugiere la robustez del método RVR para los tamaños de muestra considerados, salvo en el grafo Grilla 3.

Los resultados de precisión evaluados en función de la desviación real son mejores para $AZVIS_{COA}$ y $AZVIS_{CT}$ que para RVR salvo en la red Oeste de ANTEL y Arpanet con $D = 6$. En la Red Oeste de ANTEL con $q = 10^{-2}$ los métodos $AZVIS_{COA}$ y $AZVIS_{CT}$ conducen a desvíos reales importantes, cercanos al 100 % mientras que en RVR es del orden del 40 %. En la red Arpanet con $D = 6$ y $q \in \{10^{-4}, 10^{-6}\}$ el valor de la estimación obtenida con RVR es el valor real del parámetro $U_{s,t}(G, D)$. Por otro lado, la desviación real para RVR es mayor al 95 % en el 38 % de los casos de prueba.

Al aumentar el tamaño de muestra de 10^2 a 10^4 se verifica una mejora en la precisión en los grafos Arpanet y Grilla 5 y se logran mejores resultados de robustez para los grafos Dodecaedro y Grilla 5. A diferencia de los métodos $AZVIS_{COA}$ y $AZVIS_{CT}$ no se observa un deterioro en los indicadores de robustez y precisión a medida que disminuye q , el valor asignado a las anticonfiabilidades elementales de las aristas.

Si bien la mayoría de los intervalos de confianza contienen a $U_{s,t}(G, D)$ y esto indica cierta estabilidad del método RVR se requiere un tamaño de muestra superior a 10^4 para mejorar su precisión. Trabajar con un tamaño de muestra mayor no es una limitante en RVR ya que el crecimiento del tiempo de ejecución es sublineal en N . El tiempo de cómputo de RVR es notoriamente menor a los de $AZVIS_{COA}$ y $AZVIS_{CT}$ que son iterativos y tienen asociado un tiempo de cómputo lineal en N .

4.6. Función de Cobertura

La función de cobertura permite evaluar la robustez del método y definir si ha alcanzado la estabilidad para el tamaño de muestra considerado [31]. En la presentación de los resultados se incluye una variable que indica si para la estimación realizada el valor real del parámetro pertenece a un intervalo de confianza del 95 %. Lo esperable para este intervalo es que en el 95 % de los casos contenga al verdadero valor del parámetro cuando se alcance un tamaño de muestra suficientemente grande. Con la función de cobertura se evalúa si el tamaño de muestra considerado para las estimaciones es suficiente como para cumplir con la propiedad asintótica antes mencionada.

Sea η el coeficiente de cobertura se define $\eta = P(U_{s,t}(G, D) \in IC_\eta) = 1 - \alpha$ donde

$U_{s,t}(G, D)$, la anticonfiabilidad diámetro acotada del grafo G con nodos objetivo s y t , es el parámetro que se desea estimar. IC_η es el intervalo de confianza de nivel η que depende de los datos observados.

Para el cálculo de la función de cobertura se considera la función η^* definida de la siguiente forma:

$$\eta^* = \inf\{\eta \in [0, 1]; U_{s,t}(G, D) \in IC(\eta)\}$$

La función de distribución de η es la *función de cobertura*. Por definición $P(\eta^* \leq \eta) = P(U_{s,t}(G, D) \in IC_\eta) = \eta$ o lo que es equivalente, η^* tiene distribución Uniforme en $(0, 1)$.

El intervalo de confianza considerado para la estimación del parámetro $U_{s,t}(G, D)$ es el siguiente:

$$IC(\eta) = \hat{U}_{s,t}(G, D) \pm z_\eta \sqrt{Var(\hat{U}_{s,t}(G, D))}$$

con z_η el valor que acumula probabilidad η en la distribución Normal(0,1) y $\hat{U}_{s,t}(G, D)$ la estimación de $U_{s,t}(G, D)$.

El valor resultante de η^* para este intervalo es el siguiente:

$$\eta^* = 2\Phi\left(\frac{|U_{s,t}(G, D) - \hat{U}_{s,t}(G, D)|}{\sqrt{Var(\hat{U}_{s,t}(G, D))}}\right) - 1$$

con $\Phi()$ el valor de la distribución Normal(0,1). En los intervalos de confianza presentados en las tablas de resultados se imputa $\hat{Var}(\hat{U}_{s,t}(G, D))$ en lugar de $Var(\hat{U}_{s,t}(G, D))$.

Cuando los intervalos de confianza funcionan correctamente la cobertura deseada η iguala a la cobertura real. Cuando la cobertura real se encuentra por debajo de la deseada los resultados obtenidos en los intervalos de confianza pueden conducir a conclusiones erróneas; cuando se encuentra por encima significa que el procedimiento de estimación es ineficiente.

La cobertura observada se obtiene a través de la distribución empírica de la variable η^* . Para evaluar la cobertura en forma empírica se generan n estimaciones independientes del parámetro de interés, se obtienen los valores η^* y se construye la función empírica para los η^* observados.

$$G_{\eta^*}(\eta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{[\eta_i^* \leq \eta]}$$

donde η_i^* con $i = 1, \dots, n$ son los valores observados del coeficiente de cobertura aleatorio para una muestra de n intervalos de confianza.

Para evaluar la función de cobertura en los casos estudiados en este documento se considera el método *AZVIS* con los dos criterios de selección de mincuts presentados: el algoritmo de solución aproximada *COA* y la selección trivial *CT* y el método *RVR*. Para construir la función de cobertura se establecen los tamaños de muestra $N = [10^2, 10^3]$ para obtener los intervalos de confianza y $n = 1000$ replicaciones para obtener la cobertura empírica de η^* . El caso de estudio es el grafo Grilla 3 con $D = 5$ y $q = [10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}]$. No se consideran grafos de mayor porte ya que la función de cobertura requiere un importante tiempo de cómputo.

En las Figuras 4.6 y 4.7 se presentan los resultados para el método *AZVIS_{COA}*, en las Figuras 4.8 y 4.9 los resultados para el método *AZVIS_{CT}* y en las Figuras 4.10 y 4.11 los de *RVR*.

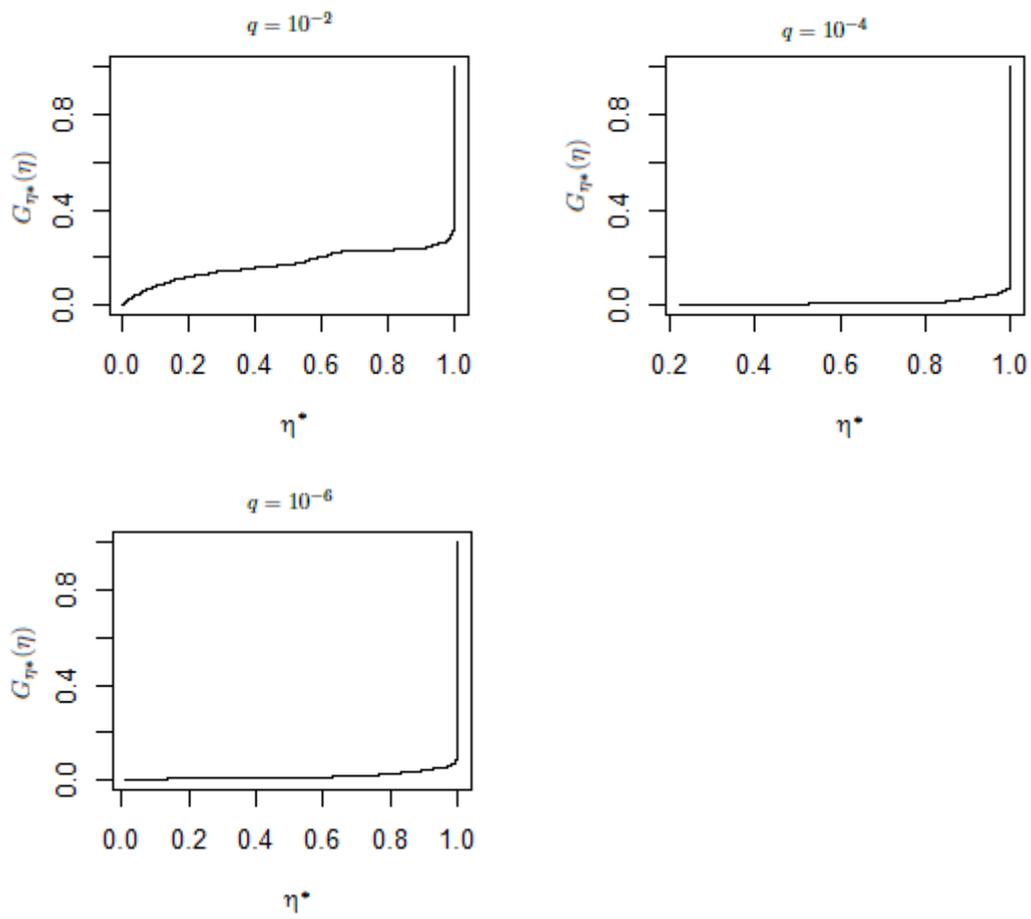


Figura 4.6: Gráfico de cobertura para la Grilla 3 con $D = 5$, $q = [10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}]$, $N = 10^2$ y método $AZVIS_{COA}$

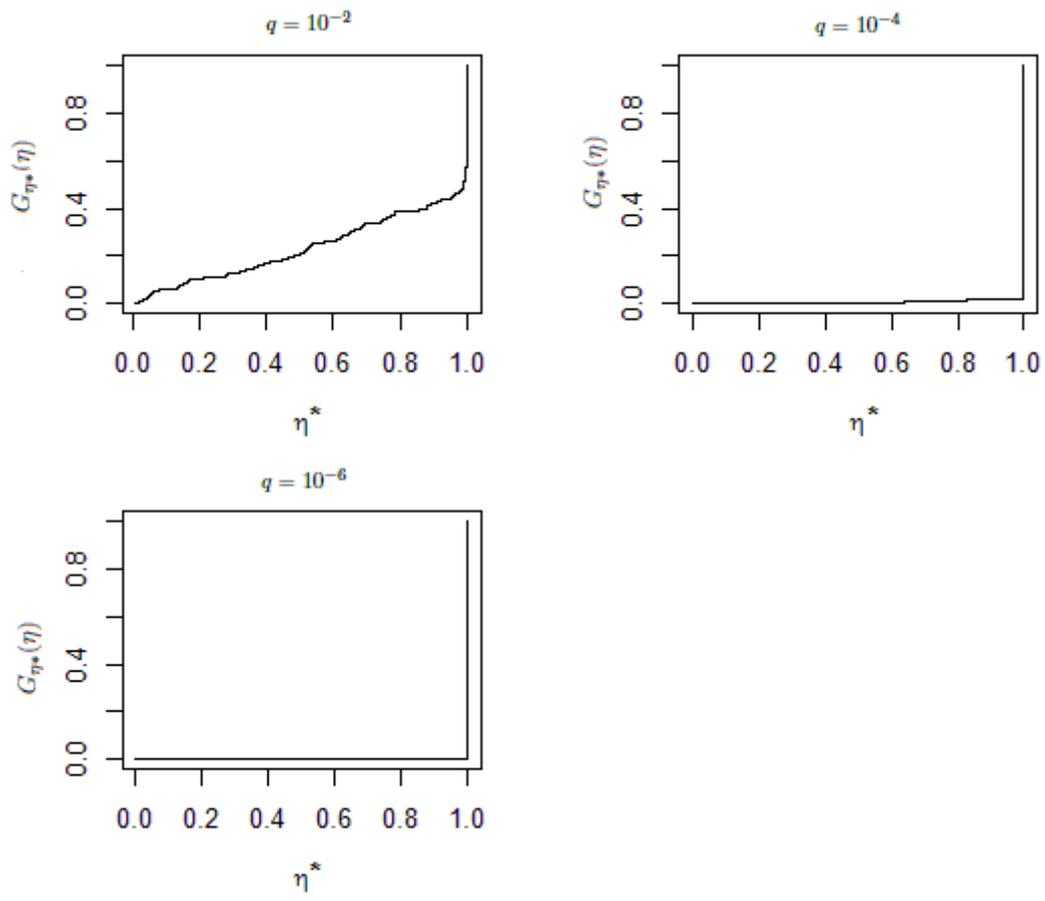


Figura 4.7: Gráfico de cobertura para la Grilla 3 con $D = 5$, $q = [10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}]$, $N = 10^3$ y método $AZVIS_{COA}$

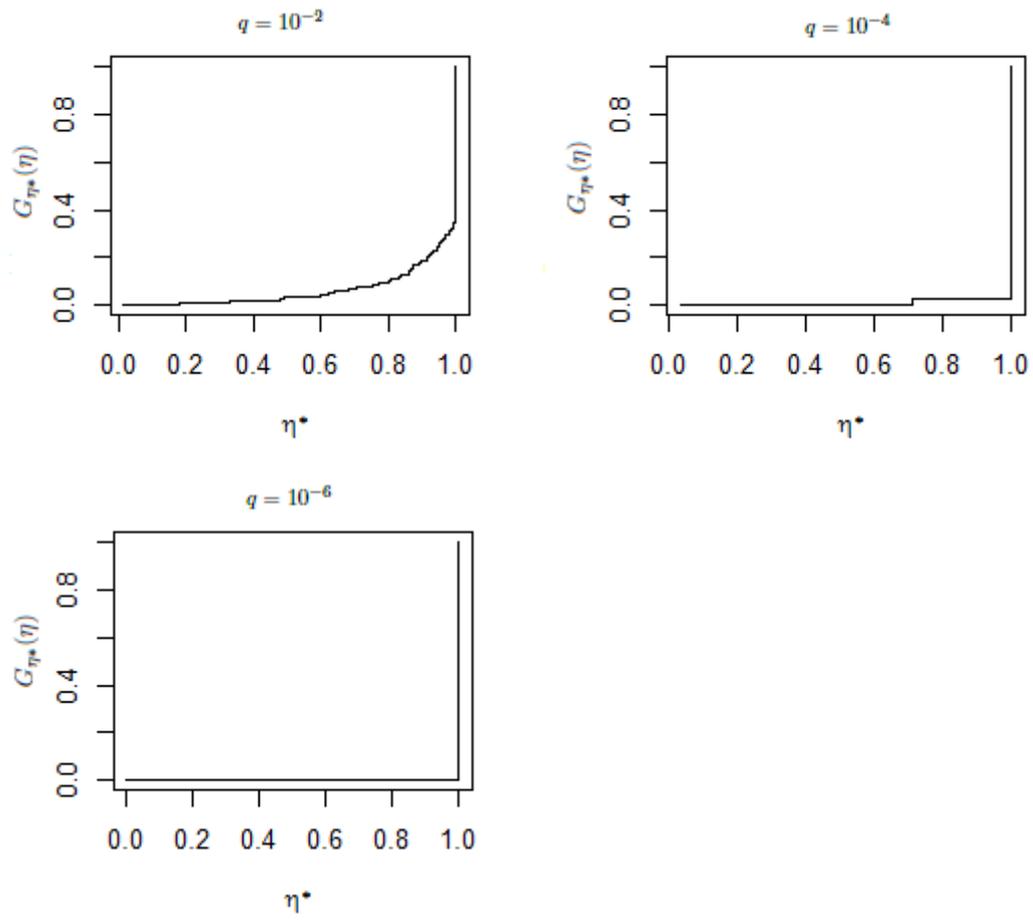


Figura 4.8: Gráfico de cobertura para la Grilla 3 con $D = 5$, $q = [10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}]$, $N = 10^2$ y método $AZVIS_{CT}$

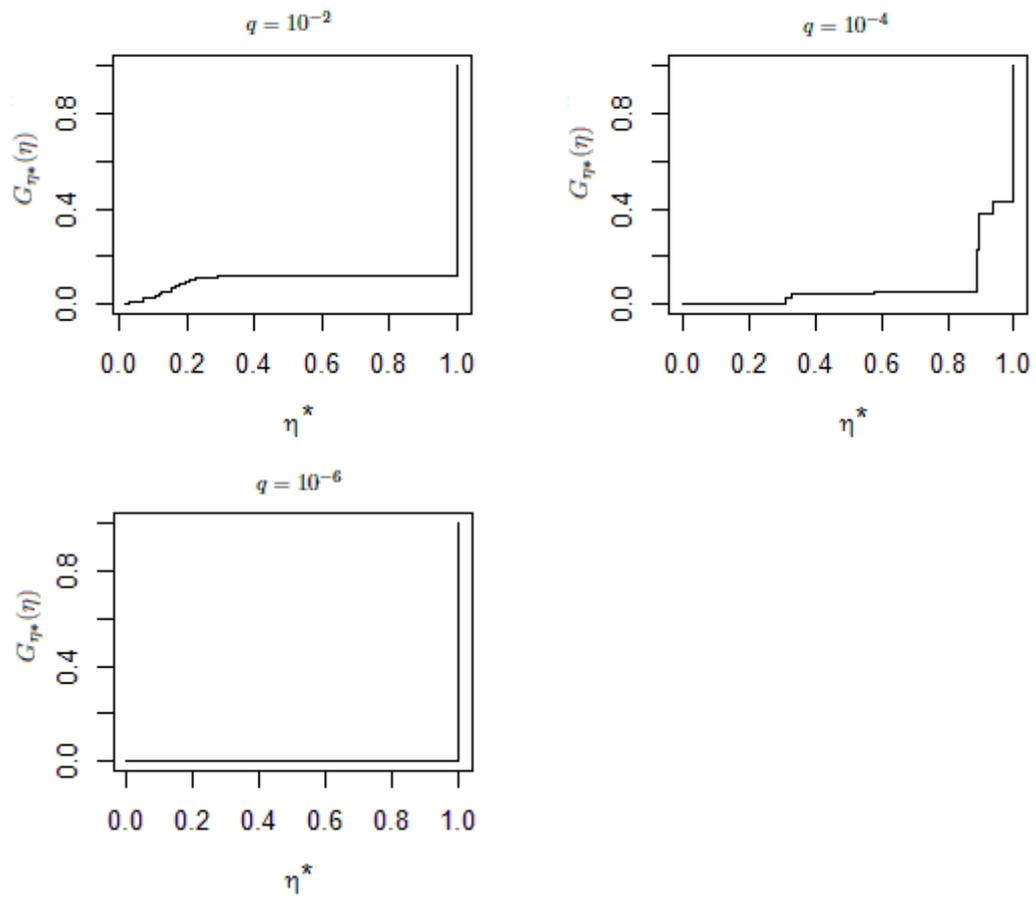


Figura 4.9: Gráfico de cobertura para la Grilla 3 con $D = 5$, $q = [10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}]$, $N = 10^3$ y método $AZVIS_{CT}$

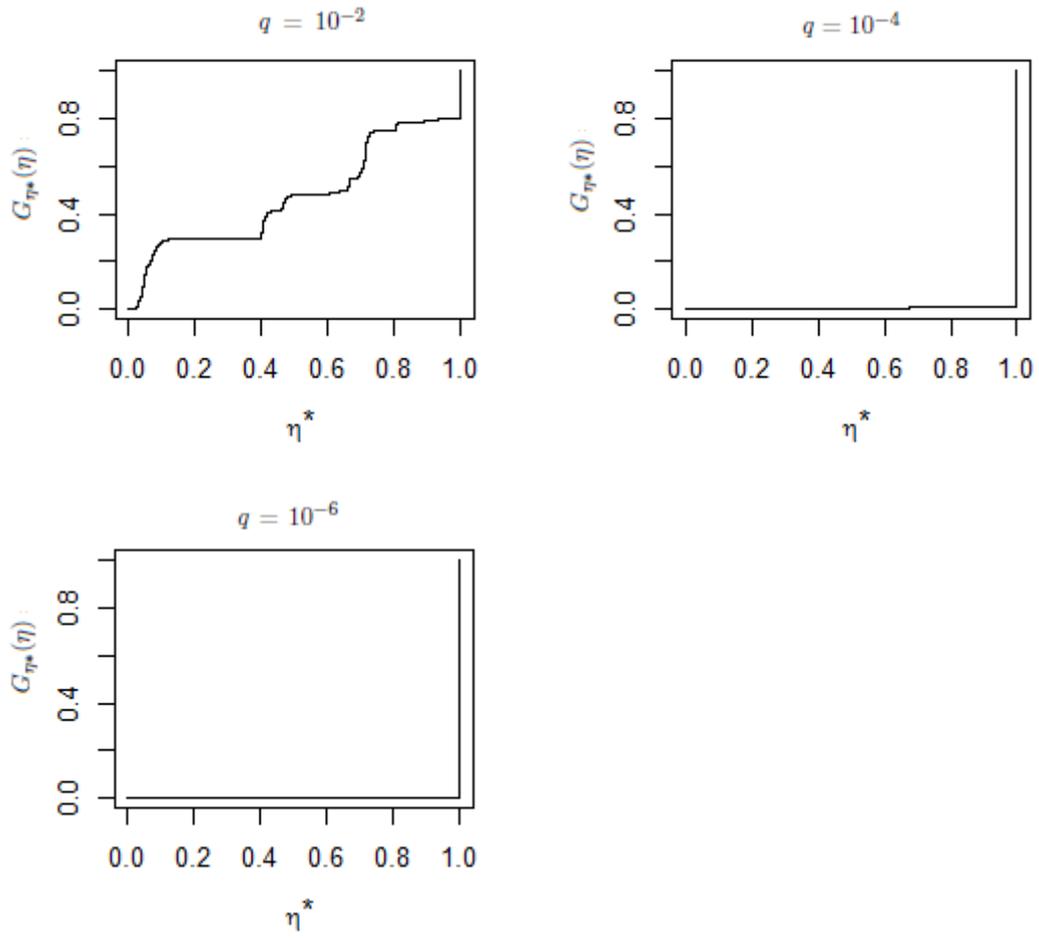


Figura 4.10: Gráfico de cobertura para la Grilla 3 con $D = 5$, $q = [10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}]$, $N = 10^2$ y método *RVR*

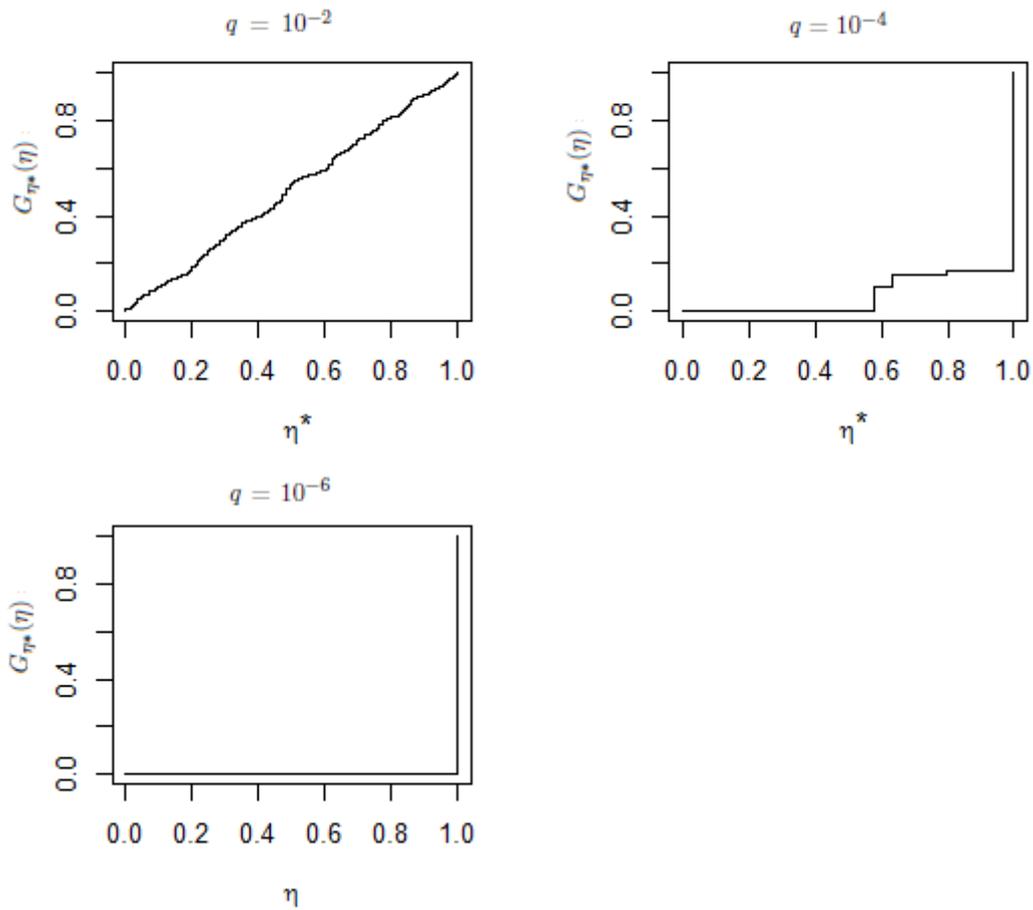


Figura 4.11: Gráfico de cobertura para la Grilla 3 con $D = 5$, $q = [10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}]$, $N = 10^3$ y Método *RVR*

En el método *AZVIS* la cobertura observada no alcanza la cobertura deseada para los tamaños de muestra considerados. Esto significa que el método no es robusto, que no ha alcanzado la estabilidad. En consecuencia, no se verifican los supuestos de normalidad para construir los intervalos de confianza. La información de los intervalos de confianza y la estimación de la varianza del estimador de $U_{s,t}(G, D)$ para estos casos pueden conducirnos a conclusiones erróneas. Este comportamiento es similar para los dos criterios de identificación del conjunto de corte contemplados. Trabajar con un número mayor de replicaciones es poco práctico dado el costo computacional del método.

Si bien para el método *AZVIS* en ninguno de los casos la cobertura esperada coincide con la cobertura deseada, los mejores resultados se alcanzan para $N = 10^3$ y $q = 10^{-2}$. Si comparamos entre los criterios de selección de los mincuts, en la selección óptima

aproximada *COA* se logran mejores resultados que en la selección de cortes triviales *CT*.

Los resultados de cobertura de la Grilla 3 son mejores para *RVR* que para *AZVIS*, aunque no lo suficiente como para concluir que se alcanzó la estabilidad. Para *RVR* la cobertura empírica es similar a la deseada únicamente para $q = 10^{-2}$, alcanzando el mejor resultado con $N = 10^3$ como es esperable.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se logró la implementación de dos métodos de reducción de varianza para la estimación de la confiabilidad diámetro acotada en el caso $s - t$ terminal que son significativamente más precisos y eficaces que el Monte Carlo Crudo (*MCC*) respecto a la estimación de esta medida. Uno de los métodos está basado en el Muestreo por Importancia (*AZVIS*) y el otro es un método Recursivo de Reducción de la Varianza (*RVR*). Parte de los resultados obtenidos para estos métodos fueron publicados en [26].

El método *AZVIS* consiste en una aproximación a un esquema de varianza cero con muestreo secuencial de las aristas. Para la implementación del método se requiere la identificación del D-mincut de máxima probabilidad. En este sentido, se consideraron dos estrategias: una aproximación a la solución óptima a través de la relajación del Primal Dual del problema de Flujo Máximo y Corte Mínimo (*COA*) y una estrategia de selección arbitraria del conjunto de corte sea éste o no el de máxima probabilidad de ocurrencia (*CT*). La primera estrategia fue implementada a partir de la formulación desarrollada por Mahjoub en [5] y permite obtener D-mincuts de mayor probabilidad que con la selección trivial considerando además el parámetro de cota de diámetro. Esto se traduce en mejores estimaciones de la confiabilidad que con la selección trivial especialmente en términos de robustez del estimador. Por otra parte, dado que el método *AZVIS* tiene un elevado costo computacional se combinó con un algoritmo de eliminación de aristas irrelevantes que considera el largo de los paths que conectan a los nodos objetivo s y t con el cual se logran reducir los tiempos de ejecución.

El método Recursivo de Reducción de Varianza consiste en una descomposición recursiva basada en particiones del espacio de estados de la red en función de los componentes de un D-mincut de G y el cálculo de la confiabilidad en subgrafos más sencillos. En el método *RVR* también se requiere la identificación del D-mincut de máxima probabilidad, como aproximación se considera el algoritmo *COA* de selección del corte.

En los experimentos realizados el método *AZVIS* mejora el desempeño respecto a *MCC*. Este comportamiento obedece a la reducción en la varianza y se verifica para las dos estrategias consideradas de selección del D-mincut. Si bien el tiempo de cómputo de *AZVIS* es superior al de *MCC* el desempeño global es mejor para el primero.

Los resultados indican que el método *AZVIS* no alcanza la estabilidad para $N = 10^4$, este comportamiento es más notorio cuando se aplica la estrategia *CT* de selección del corte que cuando se aplica *COA*. Una solución para alcanzar la estabilidad es considerar un tamaño de muestra superior, lo cual es impráctico dado el costo computacional del método. Otra alternativa es aplicar un método exacto de identificación del conjunto de corte de máxima probabilidad que admita cotas de diámetro. La dificultad en este caso reside en que la identificación del conjunto de corte de máxima probabilidad es un problema NP-Hard en diámetro confiabilidad. En el problema clásico de confiabilidad el estimador *AZVIS* construido a partir de un método exacto de selección del corte de máxima probabilidad tiene, bajo ciertas condiciones, la propiedad de error relativo acotado [19].

Los resultados en términos de precisión para *AZVIS* son mejores que para *RVR*; se verifica en general un desvío real menor, en especial con la estrategia *CT* de selección del corte. Como contrapartida, en *RVR* es mejor la estimación de los intervalos de confianza que en *AZVIS* que es en casi todos los casos demasiado optimista.

Cuando se recurre a una selección arbitraria del conjunto de corte (*CT*) en lugar de una aproximación a la solución óptima (*COA*) logra reducirse el tiempo de cómputo sin que se verifique una pérdida de precisión pero sí un deterioro de la robustez. Una forma alternativa de reducir el costo computacional es combinar el método *AZVIS* con un algoritmo de eliminación de aristas irrelevantes. La reducción del tiempo de ejecución es más evidente cuando se consideran valores menores de cota de diámetro y redes con menor conectividad. La eliminación de aristas irrelevantes no afecta la precisión ni la robustez del método.

El método *RVR* evidencia mayor eficiencia que *MCC* porque permite la reducción de la varianza y del tiempo de cómputo. Los resultados indican una mayor robustez del método *RVR* respecto a *AZVIS*. De todas formas sería conveniente considerar un tamaño de muestra superior a 10^4 para lograr mejores resultados en términos de precisión. Aumentar el número de replicaciones no significa una limitación en *RVR* ya que el crecimiento del tiempo de cómputo es sublineal con N mientras que en *AZVIS* es lineal.

Como líneas de trabajo futuro se proponen: investigar otros criterios de selección de conjuntos de corte de máxima probabilidad que admitan cotas de diámetro, estudiar los teoremas que garantizan la calidad de la aproximación de los métodos aquí tratados e identificar conjuntos que cumplan con las hipótesis de dichos teoremas. Otras líneas de

trabajo posibles son: estudiar aspectos computacionales y evaluar qué método es más eficiente en la práctica y extender al caso K -terminal la formulación de los métodos $AZVIS$ y RVR en diámetro confiabilidad.

Bibliografía

- [1] L. Petingi and J. Rodriguez, “Reliability of networks with delay constraints,” in *Congressus Numerantium*, no. 152, 2001, pp. 117–123.
- [2] H. Cancela and L. Petingi, “Reliability of communication networks with delay constraints: computational complexity and complete topologies,” *International journal of Mathematics and Mathematical and Sciences*, pp. 1551–1562, 2004.
- [3] S. Asmussen and P. W. Glynn, *Stochastic Simulation*. New York: Springer-Verlag, 2007.
- [4] H. Cancela and M. El Khadiri, “The recursive variance-reduction simulation algorithm for network reliability evaluation,” *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 52, no. 2, pp. 207–212, 2003.
- [5] A. Mahjoub and S. McCormick, “Max flow and min cut with bounded-length paths: complexity, algorithms, and approximation,” *Mathematical Programming*, vol. 124, no. 1-2, pp. 271–284, 2010.
- [6] A. Rosenthal, “A computer scientist look at reliability computations,” *Reliability and Fault Tree Analysis SIAM*, vol. 32, no. 2, pp. 133–152, 1975.
- [7] L. G. Valiant, “The complexity of enumeration and reliability problems,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 8, no. 3, pp. 410–421, 1979.
- [8] J. S. Provan and M. O. Ball, “The complexity of counting cuts and of computing the probability that a graph is connected,” *SIAM Journal on Computing*, vol. 12, no. 4, pp. 777–788, 1983.
- [9] A. Satyanarayana and A. Prabhakar, “New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks,” vol. R-27, pp. 82–100, 1985.
- [10] H. Cancela and L. Petingi, “Domination invariant of a diameter constrained network reliability model,” *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, vol. 18, pp. 53–58, 2004.

- [11] F. Moskowitz and R. A. D. Center, "The analysis of redundancy networks," *AIEE Transactions of Communication and Electronics*, vol. 33, no. 18, pp. 627–632, 1958.
- [12] R. K. Wood, "Factoring algorithm for computing K-terminal network reliability," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. R-35, no. 3, pp. 269–278, 1986.
- [13] H. Cancela y L. Petingi, "Diameter constrained network reliability: exact evaluation by factorization and bounds," in *International Conference on Industrial Logistics*, 2001, pp. 359–366.
- [14] G. Fishman, *A Monte Carlo sampling plan for estimating reliability parameters and related function*. Networks: An International Journal, 1987, vol. 17, pp. 169–186.
- [15] T. T. C. Lawrence D. Brown and A. DasGupta, "Interval estimation for a binomial proportion," *Statistical Science*, vol. 16, no. 2, pp. 101–133, 2001.
- [16] P. L'Ecuyer, M. Mandjes, and B. Tuffin, *Rare event simulation using Monte Carlo Methods*. Wiley, 2009, ch. Importance sampling and rare event simulation, pp. 17–38.
- [17] H. Cancela and M. El Khadiri, "A recursive variance reduction algorithm for estimating communication network reliability," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 44, pp. 595–602, 1994.
- [18] G. Rubino and B. Tuffin, *Rare Event Simulation using Monte Carlo Methods*. WILEY, 2009, ISBN: 978-0-470-77269-0.
- [19] P. L'Ecuyer, G. Rubino, S. Saggadi, and B. Tuffin, "Approximate Zero-Variance Importance Sampling for Statistic Network Reliability Estimation," *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 60, no. 3, pp. 590–604, 2011.
- [20] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, "Maximal flow through a network," *Canadian Journal of Mathematics* 8, pp. 399–404, 1956.
- [21] M. Bertinat, "Estudio de métodos de reducción de varianza para modelos de confiabilidad con restricciones de diámetro," Master's thesis, Instituto de Investigación: LPE - IMERL, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, 2003. [Online]. Available: http://premat.fing.edu.uy/ingenieriamatematica/archivos/tesis_mariaelisa_bertinat.pdf
- [22] H. Cancela, M. E. Khadiri, and L. Petingi, "Polynomial-time topological reductions that preserve diameter constrained reliability of a communication network," *IEEE Transactions of Reliability*, vol. 60, no. 4, pp. 845–851, 2011.
- [23] M. El Khadiri, "Direct evaluation and by simulation of communication network reliability parameters: Sequential and memory distributed parallel algorithms," Ph.D. dissertation, Campus de Beaulieu, University of Rennes I, Rennes, France, 1992.

- [24] E. W. Dijkstra, “A note on two problems in connexion with graphs,” *Numerische Mathematik*, vol. 1, pp. 269–271, 1959.
- [25] R. Bhandari, *Survivable Networks: algorithms for diverse routing*. Kluwer Academic Publisher, 1999.
- [26] M. Bertinat and M. González, “Approximate zero variance importance sampling and recursive variance reduction for diameter constrained reliability estimation,” *Sixth Latin-American Symposium on Dependable Computing, Student Forum*, 2013.
- [27] G. Fishman, *Operations Research*, 1986, vol. 34, no. 4, ch. A Monte Carlo sampling plan for estimating network reliability, pp. 581–594.
- [28] H. Cancela, G. Rubino, B. Tuffin, “Bounded relative efficiency in rare event simulation.” The 2005 International Symposium on Applications and The Internet, 2005, pp. 272 – 275.
- [29] H. Cancela, P. L’Ecuyer, G. Rubino, B. Tuffin, “Combination of conditional monte carlo and approximate zero-variance importance sampling for network reliability estimation,” *Proceedings of the 2010 Winter Simulation Conference M. E. Kuhl, N. M. Steiger, F. B. Armstrong, and J. A. Joines, eds*, pp. 1263–1274, 2010.
- [30] “Confiabilidad de redes - repositorio,” Sitio Web, 2013. [Online]. Available: <http://www.fing.edu.uy/inco/grupos/invop/graphtopologies/>
- [31] Schruben and Lee, *A Coverage Function for Interval Estimators of simulation response*. Management Science, 1980, vol. 26, no. 1.