

Tesis para optar al título de
MAGISTER EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

Precipitaciones Máximas en el Estado de Guanajuato, México

Leonardo Moreno

DIRECTOR ACADÉMICO

Dr. Ernesto Mordecki

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Joaquín Ortega

CODIRECTOR DE TESIS

Ing. Enrique Cabaña



Facultad de Ingeniería

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

Noviembre 2013
Montevideo, Uruguay.



Inundación 1888

para mi padre ...

Agradecimientos

En primera instancia quiero agradecer, por el invaluable apoyo, a mis directores de tesis Enrique Cabaña y Joaquín Ortega, y a mi tutor académico Ernesto Mordecki. También a la familia de Joaquín que hizo amena mi estadía en Guanajuato.

A mi familia y en particular a Kari, mi señora, por su comprensión y paciencia.

A la Scapa, al Cimat y al Iesta que gracias a su apoyo pude realizar una pasantía de tres meses en el Cimat, México.

A la Comisión Nacional del Agua de México, CONAGUA, por permitirme acceder a la base de datos.

Aprovecho también a dar las gracias a Enrique, Ricardo, Gonzalo, Mario y Marco de los cuáles e intentado, la mayoría de la veces sin éxito, contagiarme un poco de sus conocimientos.

A Marco Scavino por sus consejos y apoyo a lo largo de mi formación.

A los compañeros de estudio y trabajo.

Resumen

El trabajo tiene por objetivo demarcar una modelo espacio-temporal para los valores de las precipitaciones diarias máximas en el Estado de Guanajuato, México, a partir de los datos provenientes de un conjunto estaciones meteorológicas ubicadas en la región.

Si bien el camino natural para la extensión espacial de la teoría de valores extremos univariados son los procesos máx-estables, la inferencia sobre dicha familia de procesos es actualmente poco flexible y de un costo computacional elevado. Ligado esto a la falta de estacionariedad espacial de los datos conlleva a que también se examinen caminos alternativos, realizando ajustes finito dimensionales o aplicando modelos locales, en zonas de pequeña extensión y con un número reducido de estaciones. En este contexto son implementadas cópulas extremas, su extensión a dimensiones altas mediante r-vines, y un modelo bayesiano para la estimación de la medida espectral.

Palabras Claves: Distribuciones de valores extremos, procesos máx-estables, cópulas extremas, r-vines, medida espectral.

Índice general

1. Introducción	1
2. Presentación del Problema y Datos Técnicos.	4
2.1. Guanajuato y las lluvias.	4
2.2. Descripción de la Base de Datos.	7
2.3. Algunos supuestos y elección de las estaciones.	8
3. Distribuciones de Valores Extremos.	10
3.1. Extremos Univariados.	10
3.1.1. Generalidades.	10
3.1.2. Dominios de Atracción.	13
3.1.3. Distribución Generalizada de Pareto.	14
3.2. Extremos Multivariados.	15
4. Procesos Máx-Estables.	18
4.1. Introducción.	18
4.2. Conceptos Iniciales.	18
4.3. Caracterización Espectral.	20
4.3.1. Construcción de L. de Haan (1984) de Procesos Máx-Estables.	20
4.3.2. Construcción de Schlather (2002) de Procesos Máx-Estables.	20
4.4. Distribuciones Finito Dimensionales de los Procesos Máx-Estables.	21
4.5. Algunos Modelos.	21
4.5.1. El Modelo de Smith.	21
4.5.2. El Modelo de Schlather.	23
4.5.3. El Modelo de Brown-Resnick.	25
4.5.4. El Modelo Geométrico Gaussiano.	25
4.5.5. El Modelo t -Extremal.	26

5. Cópulas.	29
5.1. Conceptos Iniciales.	29
5.1.1. Generalidades.	29
5.1.2. Definición de Cópula.	30
5.1.3. Algunas Propiedades Elementales de las Cópulas.	31
5.1.4. Densidad de la Función de Cópula.	34
5.1.5. Familias Paramétricas de Cópulas.	34
5.2. Cópulas Extremas.	38
5.2.1. Introducción.	38
5.2.2. Algunos ejemplos.	40
5.3. Cópulas en dimensiones elevadas: Regular Vines.	42
5.3.1. Construcción de modelos a través de pares de cópulas bivariadas.	43
5.3.2. Estructuras de las regular vines.	44
5.3.3. Ejemplos.	45
5.3.4. Matriz de especificación de una R- Vines.	47
5.3.5. Selección del Modelo.	48
5.4. Extensión Espacial.	49
6. Medidas de Dependencia.	51
6.1. Propiedades Deseables de las Medidas de Dependencia.	51
6.2. Correlación y Dependencia.	52
6.3. Índice Extremal.	52
6.3.1. Definición e Interpretación.	52
6.3.2. Estimación.	53
6.4. Coeficiente Extremal.	54
6.4.1. Definición e Interpretación.	54
6.4.2. Ejemplos.	56
6.4.3. Estimación del coeficiente extremal.	57
6.5. El Madograma.	58
6.6. Medidas de Dependencia en Cópulas.	62
6.6.1. Rango Correlación.	62
6.6.2. Coeficiente de Dependencia en las Colas.	63
6.6.3. Dependencia en Cópulas Extremas.	63

7. Estimación.	64
7.1. Estimación de los parámetros para la DGVE.	64
7.1.1. Ajuste de Máximos Anuales o Método de Bloques.	64
7.1.2. Estimación conjunta para todas las estaciones.	66
7.2. Estimación de la distribución multivariada de valores extremos a través de la medida espectral.	66
7.2.1. Distribución de Dirichlet.	68
7.2.2. Estimación en una mezcla de distribuciones Dirichlet mediante un enfoque Bayesiano.	68
7.3. Estimación para Procesos Máx-Estables.	74
7.3.1. Función de Verosimilitud para Procesos Máx-Estables.	74
7.4. Estimación por Cópulas.	76
7.4.1. Estimación máximo verosímil completa.	76
7.4.2. Estimación máximo verosímil a dos pasos.	77
8. Simulación.	78
8.1. Simulación de Procesos Máx-Estables.	78
8.1.1. Simulación no condicional.	78
8.1.2. Simulación Condicional.	79
8.2. Simulación de Cópulas.	82
9. Selección del Modelo.	84
9.1. Criterios de selección en procesos máx-estables.	84
9.1.1. Criterios de Información.	84
9.1.2. Criterio del Cociente de Verosimilitudes.	85
9.2. Criterios de selección en Cópulas.	85
10. Resultados Globales.	86
10.1. Período Junio-Julio-Agosto.	86
10.1.1. Descripción y depuración de la base de datos.	86
10.1.2. Estimación de los parámetros de las DVEG.	89
10.1.3. Transformación a la distribución de Fréchet.	91
10.1.4. Estimación espacial mediante los procesos máx-estables.	91
10.1.5. Estimación mediante Cópulas.	96
10.2. Período Noviembre-Marzo.	99
10.2.1. Depuración de la base de datos.	99
10.2.2. Estimación de los parámetros de las DVEG.	100

10.2.3. Transformación a la distribución de Fréchet.	101
10.2.4. Estimación espacial mediante los procesos máx-estables.	101
10.2.5. Estimación mediante Cópulas.	106
11. Resultados Locales.	109
11.1. Período Junio-Julio-Agosto.	109
11.1.1. Cluster de estaciones.	109
11.1.2. Modelización de la dependencia.	111
11.2. Período Noviembre-Marzo.	116
11.2.1. Cluster de estaciones.	116
11.2.2. Modelación de la dependencia.	116
12. Conclusiones.	121
A. Algunas Demostraciones	124
A.1. Demostración de Teorema 1	124
A.2. Demostración del Teorema 4	126
A.3. Demostración del Teorema 5	126
A.4. Demostración de Teorema 4.3.2	130
A.5. Demostración del Teorema 7	131
B. Algunos Cuadros.	134
B.1. Cuadros del período junio-agosto.	134
B.2. Cuadros del período noviembre-marzo.	140
C. Las lluvias: Algunos Conceptos.	145
D. Funciones de variación regular.	147
D.1. Funciones reales de variación regular	147
D.2. Funciones de variación regular multivariada	149
Referencias bibliográficas	150

Índice de figuras

2.1.	Ubicación del Estado de Guanajuato en México y densidad poblacional.	4
2.2.	Mapa orográfico y mapa agrícola del Estado de Guanajuato.	5
2.3.	Isoyetas y mapa hidrográfico del Estado de Guanajuato.	6
2.4.	Estimación de la componente estacional de los acumulados mensuales en la estación 11001 ubicada en el municipio de Abasolo, entre los años 1963 y 2011.	6
2.5.	Precipitaciones diarias (mm) de los meses de junio, julio y agosto en distintos puntos del Estado de Guanajuato en años donde sucedieron inundaciones.	8
2.6.	Ubicación de las estaciones meteorológicas en el Estado de Guanajuato.	9
3.1.	Densidad de la DVEG al variar el parámetro de forma, $\lambda = 0$ y $\delta = 1$	12
4.1.	Proceso de Smith simulado con matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma = \frac{3}{2}I_2$	23
4.2.	Distintas funciones de correlación en función de la distancia h . Se consideró $c_1 = c_2 = \sigma = \nu = 1$	25
4.3.	Proceso de Schlather simulado con una función de covarianza exponencial, efecto nugget=0, suavizado= 1,5 y rango=3.	26
4.4.	Proceso de t-extremal simulado con efecto nugget=0, suavizado= 1,5, rango=3 y grados de libertad=4.	27
4.5.	Gráficos de distintos procesos máx-estables con los mismos parámetros de suavizado, nugget y rango en \mathbb{R}	28
4.6.	Curvas de nivel de simulaciones en dimensión 2 de los procesos de Smith, Schlather (Wmat) y t-extremal respectivamente.	28
5.1.	Cotas superior e inferior respectivamente de Fréchet-Hoeffding.	32
5.2.	Gráfico de la cópula de independencia $C(u, v) = uv$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0,1)$	33
5.3.	Gráfico de la densidad de la cópula de FGM con $\theta = 0,7$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	35

5.4.	Gráfico de la densidad de la cópula Gaussiana con $\theta = 0,25$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	36
5.5.	Gráfico de la densidad de la cópula de Student con $\rho = 0,8$ y g.l.=4, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	37
5.6.	Gráfico de la densidad de la cópula de Clayton con $\theta = 3/2$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	37
5.7.	Gráfico de la densidad de la cópula de Gumbel con $\alpha = 2/3$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	40
5.8.	Gráfico de la densidad de la cópula de Galambos con $\alpha = 2/3$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	41
5.9.	Gráfico de la densidad de la cópula de Hüsler-Reiss con $a = 3/2$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	41
5.10.	Gráfico de la densidad de la cópula de t-extremal con $\rho = 2/3$ y 4 grados de libertad, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$	42
5.11.	Una posible estructura de árboles C-vines en dimensión 5.	45
5.12.	Una posible estructura de árboles D-vines en dimensión 5.	46
5.13.	Una posible estructura de árboles R-vines en dimensión 5.	46
6.1.	Funciones coeficiente extremal para distintos procesos máx-estables. En Smith se consideró matriz de covarianzas identidad. En los procesos Geométrico Gaussiano, t- Extremal y Schlather la función de correlación fue la de Whittle-Matérn $c_1 = c_2 = 1$, 4 grados de libertad en la t-Extremal, En Brown-Resnick $\gamma(h) = h$, y $\sigma = 1$ en el Geométrico Gaussiano.	57
6.2.	Estimación de Schlather y Tawn de la función coeficiente extremal en un proceso simulado de Schlather con correlación de Cauchy.	59
6.3.	Madograma, F-Madograma, λ -Madograma estimados a partir 100 observaciones simuladas de un proceso de Schlather con correlación de Cauchy en 30 estaciones.	61
7.1.	Representación de la variable W en el simplex unitario de \mathbb{R}^3	67
7.2.	Reparametrización del espacio en dimensión d=3 y una mezcla de Dirichlet con k=4.	70
7.3.	Esquema de la simulación bayesiana de un valor de la distribución de Dirichlet.	71
7.4.	Simulación de 1000 valores de una distribución de Dirichlet y de una mezcla de dos distribuciones de Dirichlet con las respectivas curvas de nivel de sus densidades.	72

8.1. Simulación del proceso de Smith y de un proceso de Schlather en dimensión 1.	79
8.2. Tres simulaciones de un proceso de Schlather en dimensión 1 condicionado a 10 valores.	80
10.1. Histograma del número de estaciones “aptas” en el trimestre junio-julio-agosto según el año correspondiente.	87
10.2. Ubicación de las estaciones meteorológicas resultantes luego de la depuración de los datos, en el período junio-agosto.	88
10.3. Diagramas de caja de los máximos para la estaciones analizadas en el período junio-agosto.	89
10.4. Estimaciones locales máximos verosímiles vs Estimaciones espaciales máximos verosímiles en el período junio-agosto.	91
10.5. Estimación no paramétrica de S-T de la función coeficiente extremal luego de transformar los datos de cada estación a Fréchet, en el período junio-agosto.	92
10.6. Madograma, F-Madograma, λ -Madograma estimados para las 20 estaciones a partir de los 37 años observados, en el período junio-agosto.	92
10.7. Estimaciones de la función coeficiente extremal según los distintos modelos, en el período junio-agosto.	93
10.8. Sector de Guanajuato donde se realizan las simulaciones y predicciones.	94
10.9. Seis simulaciones del logaritmo de los máximos anuales en el período junio-agosto, mediante el proceso t-extremal.	95
10.10 Distribución acumulada estimada, niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales, en junio-agosto.	96
10.11 Densidades estimadas mediante el proceso máx-estable t-extremal de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en junio-agosto.	96
10.12 Primer árbol de la estructura R-vines en el período Junio-Agosto a partir de los valores del F-madograma, en el período noviembre-marzo.	97
10.13 Distribución acumulada estimada mediante R-vines , niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales , en junio-agosto.	97
10.14 Densidades estimadas mediante R-vines de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en junio-agosto.	98
10.15 Ubicación de las estaciones meteorológicas resultantes luego de la depuración de los datos, en el período noviembre-marzo.	99

10.16	Diagramas de caja de los máximos para la estaciones analizadas en el período noviembre-marzo.	100
10.17	Estimaciones locales máximos verosímiles vs estimaciones espaciales máximos verosímiles en el período noviembre-marzo.	101
10.18	Estimación no paramétrica de la función coeficiente extremal luego de transformar los datos de cada estación a Fréchet en el período noviembre-marzo.	102
10.19	Madograma, F-Madograma, λ -Madograma estimados para las 22 estaciones a partir de los 34 años observados, en el período noviembre-marzo.	102
10.20	Estimaciones de la función coeficiente extremal según los distintos modelos, en el período noviembre-marzo.	103
10.21	Seis simulaciones del logaritmo de los máximos anuales en el período noviembre-marzo, mediante el proceso t-extremal.	104
10.22	Distribución acumulada estimada, niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales, en noviembre-marzo.	105
10.23	Densidades estimadas mediante el proceso máx-stable t-extremal de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en noviembre-marzo.	105
10.24	Primer árbol de la estructura R-vines en el período Noviembre-Marzo a partir de los valores del F-madograma, en el período noviembre-marzo.	107
10.25	Distribución acumulada estimada mediante R-vines , niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales , en noviembre-marzo.	107
10.26	Densidades estimadas mediante R-vines de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en noviembre-marzo.	108
11.1.	Cluster de estaciones según distintas matrices de disimilaridad con el método k-medoides en el período junio-agosto	110
11.2.	Ubicación de las estaciones en León.	111
11.3.	Precipitaciones máximas en 50 años en el período junio-agosto.	111
11.4.	Datos bivariados transformados a uniformes entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período junio-agosto.	112
11.5.	Datos simulados bivariados con la cópula t-extremal entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período junio-agosto.	113
11.6.	Densidades estimadas de las precipitaciones máximas anuales locales para distintos períodos de tiempo, en junio-agosto.	114

11.7. Precipitaciones diarias mensuales en el período junio-agosto de las estaciones 11020, 11040 y 11095. Se diferencian el 5 % de las observaciones extremas según la distancia L_1 en \mathbb{R}^3	115
11.8. Cluster de estaciones según distintas matrices de disimilaridad con el método k-medoides en el período noviembre-marzo.	116
11.9. Precipitaciones máximas en 50 años en el período noviembre-marzo.	117
11.10 Datos bivariados transformados a uniformes entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período noviembre-marzo.	117
11.11 Datos simulados bivariados con la cópula t-extremal entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período noviembre-marzo.	118
11.12 Densidades estimadas de las precipitaciones máximas anuales para distintos períodos de tiempo en noviembre-marzo.	119
11.13 Precipitaciones diarias mensuales en el período noviembre-marzo de las estaciones 11020, 11040 y 11095. Se diferencian el 5 % de las observaciones extremas según la distancia L_1 en \mathbb{R}^3	120

Índice de cuadros

10.1. Estimación de los parámetros de los procesos máx-estables y selección del modelo por el TIC, en el período junio-agosto.	93
10.2. Predicciones mediante procesos máx-estables en el período junio-agosto . . .	95
10.3. Predicciones mediante R-vines en el período junio-agosto	98
10.4. Estimación de los parámetros de los procesos máx-estables y selección del modelo por el TIC, en el período noviembre-marzo	103
10.5. Predicciones mediante procesos máx-estables en el período noviembre-marzo	106
10.6. Predicciones mediante R-vines en el período noviembre-marzo	106
11.1. Ajuste de cópulas extremas de a pares en el Municipio de León, en el período junio-agosto.	112
11.2. Predicciones locales mediante cópulas en el período junio-agosto	113
11.3. Predicciones a posteriori en el período junio-agosto a través de una mezcla de distribuciones Dirichlet.	115
11.4. Ajuste de Cópulas extremas de a pares en el Municipio de León, en el período noviembre-marzo	118
11.5. Predicciones locales mediante cópulas en el período noviembre-marzo . . .	120
11.6. Predicciones a posteriori en el período noviembre-marzo a través de una mezcla de distribuciones Dirichlet.	120
B.1. Precipitaciones máximas del trimestre junio-julio-agosto en cada año para cada estación.	135
B.2. Estimación de los parámetros de la DVEG para cada estación por el método de máxima verosimilitud y por el método de los momentos pesados en el período junio-agosto.	136
B.3. Algunos modelos posibles para la estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas en el período junio-agosto. . . .	137

B.4. Estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas a través del modelo seleccionado por el criterio TIC, en el período junio-agosto.	138
B.5. Precipitaciones máximas del trimestre junio-agosto en cada año para cada estación transformadas a Fréchet.	139
B.6. Precipitaciones máximas en el período noviembre-marzo en cada año para cada estación.	140
B.7. Estimación de los parámetros de la DVEG para cada estación por el método de máxima veosimilitud y por el método de los momentos pesados en el período noviembre-marzo.	141
B.8. Algunos modelos posibles para la estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas en el período noviembre-marzo	142
B.9. Estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas a través del modelo seleccionado por el criterio TIC, en el período noviembre-marzo.	143
B.10. Precipitaciones máximas en el período noviembre-marzo en cada año para cada estación transformadas a Fréchet.	144

Capítulo 1

Introducción

Temas de actualidad y de vigente interés en gran parte de la sociedad son los eventos extremos climáticos. Se percibe una creciente preocupación por la variabilidad climática debido al gran impacto que esta provoca sobre la población y la economía. Grandes sectores industriales y financieros, especialmente sensibles a estos eventos ambientales extremos, adolecen en general de un conocimiento confiable sobre la ocurrencia de dichos fenómenos y les es imprescindible asignarles ciertas probabilidades de ocurrencia. Por ejemplo, un problema frecuente es el diseño de estructuras que deben resistir algún fenómeno ambiental. Si el fenómeno es muy intenso la estructura fallará, por lo tanto es necesario diseñarla de modo que la probabilidad de falla sea pequeña, evitando tanto el subdiseño como el sobrediseño. En consecuencia existe una elevada demanda de investigación estadística seria sobre el hecho, lo que se ha traducido a que cierto sector de la comunidad estadística produzca avances significativos sobre la modelización de dichos eventos extremos, y esto se manifiesta en el gran número de publicaciones referentes al tema en la última década.

El estudio de eventos extremos, en particular en tiempo-espacio, es un tema abierto, y de actual desarrollo. Si bien en la tesis se aplican estos conceptos a cierto fenómeno climático, las precipitaciones, el modelado de eventos extremos tiene aplicaciones en diversas ramas de las ciencias.

En particular el objeto de interés son las precipitaciones extremas en el Estado de Guanajuato, México. Por tanto, el trabajo tiene por finalidad entender y modelar, con la mayor precisión posible, los valores de las precipitaciones máximas en el Estado de Guanajuato, tanto a nivel global como local, con las últimas herramientas brindadas por el cuerpo científico estadístico.

El estudio de las precipitaciones se encuentra dentro de la hidrología, ciencia que se dedica al estudio de la distribución, espacial y temporal, y las propiedades del agua presente en la atmósfera y en la corteza terrestre.

Son conocidos modelos espacio-temporales para establecer el nivel promedio de un caudal o de la caída de lluvia en una determinada región y un período de tiempo dado, ver [7], pero muchas veces es necesario modelar las lluvias extremas, o sea la cola de la distribución. Si bien los procesos gaussianos juegan un papel preponderante en lo que se refiere a la modelación de datos espaciales, no son un camino apropiado para el ajuste de las colas de la distribución. Por otro lado, en el estudio de eventos extremos espaciales muchos conceptos dentro de la Geoestadística deben ser reformulados. Por ejemplo el Variograma necesita que el momento de segundo orden sea finito, lo cual en general no sucede en las distribuciones de valores extremos.

Como se busca estimar la cola de la distribución, son necesarias bases de datos de gran tamaño y de una alta precisión. Por definición encontramos pocas observaciones extremas en la muestra. Las técnicas usuales de estimación de densidad funcionan de forma eficiente en aquellas zonas donde hay una alta agrupación de observaciones. Sin embargo con frecuencia se quiere estimar valores que van más allá del último valor de la muestra, por tanto es necesario que se cumplan ciertas condiciones para poder extrapolar la muestra. Una excelente aproximación al estado del arte de la modelización espacio-temporal de valores extremos mediante diferentes enfoques (procesos máx-estables, cópulas, variables latentes) es brindada por Davison, Padoan y Ribatet en 2012, [17].

Si bien, en la tesis, se realizan modelizaciones multivariadas en dimensiones pequeñas y en dimensiones altas, el objetivo principal es realizar el ajuste en dimensión infinita a través de los procesos máx-estables. Los procesos máx-estables brindan una solución parcial al tema, con buenas cualidades, pero como indica M. Schlather nada sencilla y algo arbitraria, por tanto el problema a nivel teórico sigue abierto. Recientes publicaciones en 2013, ver [46], muestran los últimos avances respecto a la inferencia mediante procesos máx-estables. Ribatet, [68], expone la estrecha relación de las distribuciones finito dimensionales de los procesos máx-estables con las cópulas extremas. Como suele suceder la complejidad de la naturaleza supera la flexibilidad de los modelos, por tanto son necesarios muchos supuestos a priori, algunas restricciones pedidas son estacionariedad en el tiempo y en el espacio, independencia o alguna condición mixing en el tiempo.

Ya han sido desarrollados en Guanajuato estudios sobre precipitaciones extremas. Apuntan en dicho sentido las tesis de maestría de Ehyter Martín y Freddy López, ver [65] y [36], empleando los procesos máx-estables de Smith y de Schlather obtienen resultados variables. Se desconoce el uso de dichas herramientas estadísticas en datos pluviales del territorio Uruguayo.

La tesis se desarrolla en doce capítulos. El capítulo 2 pone en contexto el problema a enfrentar, se describen características generales sobre el clima de Guanajuato que sean de

particular relevancia para el correcto entendimiento del problema. Se detalla la conformación y depuración de la base de datos, en particular se mencionan los criterios tomados para seleccionar aquellas estaciones meteorológicas “aptas” para el estudio.

Los capítulos subsiguientes demarcan los conceptos teóricos a usar en el análisis posterior. El capítulo 3 delinea las bases de extremos univariados y multivariados, se desarrollan las distribuciones asintóticas y su peculiar vínculo con las distribuciones máx-estables. En el capítulo 4, se conceptúan los procesos máx estables, con particular interés en las caracterizaciones espectrales y sus distribuciones finito dimensionales. Se definen los procesos,

- de Smith,
- de Schlather,
- de Brown-Resnick,
- Geométrico Gaussiano,
- t-Extremal.

Se introducen los conceptos generales de cópulas en el capítulo 5, con especial énfasis en cópulas extremas y en un modelo reciente para trabajar problemas multivariados en dimensiones altas mediante cópulas, R-vines.

El capítulo 6 muestra distintas formas de captar la dependencia entre eventos extremos cuando no se cuenta con el supuesto gaussiano. Son definidos la función coeficiente extremal, el F-madograma y los coeficientes de dependencia en las colas. Los capítulos 7, 8 y 9, determinan las bases para realizar inferencia con procesos máx estables o mediante cópulas. Son expuestos métodos de estimación, simulación y selección del modelo. Se describe además un procedimiento bayesiano introducido por Naveau en 2013, [6], para modelar la medida angular.

Los resultados se encuentran divididos en dos capítulos, 10 y 11, según la extensión del territorio analizada y el número de estaciones presentes. Siguiendo la literatura en este tema son llamados resultados regionales y resultados locales. Son extraídas diversas y novedosas conclusiones, las cuales se explicitan en el capítulo 12.

Para el procesamiento de datos se utilizará el software R, [1], y en particular una serie de librerías adicionales. Una comparativa de las funcionalidades que se pueden encontrar en diversos paquetes de R, para el estudio de extremos, son investigadas por Ribatet, Gilleland y Stephenson en 2013, [33].

Capítulo 2

Presentación del Problema y Datos Técnicos.

2.1. Guanajuato y las lluvias.

Como ya se ha mencionado el objetivo de la tesis es poder modelar y predecir de forma eficiente lluvias extremas en el Estado de Guanajuato, México.

Guanajuato ¹ es uno de los 31 Estados de México, ubicando en el centro del país entre latitudes $19^{\circ}55'08'' - 21^{\circ}52'09''$ y longitudes $99^{\circ}41'06'' - 102^{\circ}09'07''$. Presenta una extensión territorial de 30941 km^2 y 5.486.372 habitantes. Cuenta con 41 Municipios y la capital recibe el mismo nombre que el Estado, ver figura 2.1.



Figura 2.1: Ubicación del Estado de Guanajuato en México y densidad poblacional.

Su suelo esta conformado por amplias llanuras interrumpidas por extensas y altas sierras escarpadas, ver figura 2.2 ². Se presume que la fisonomía de las sierras y montañas, así como la circulación de los vientos afectan de forma directa la distribución de las precipitaciones en el Estado.

¹Estado muy querido y respetado por la población de México por ser cuna de su independencia nacional.

²Los mapas de este capítulo fueron extraídos del Instituto Nacional de Estadística y Geografía, (INEGI).

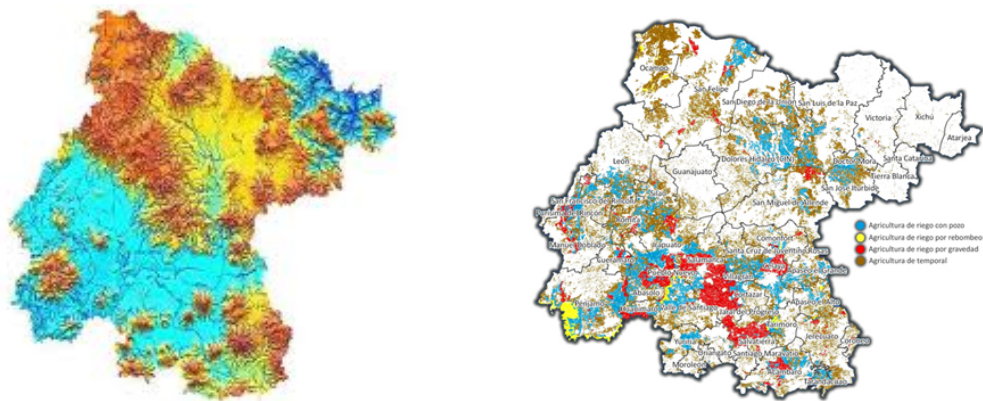


Figura 2.2: Mapa orográfico y mapa agrícola del Estado de Guanajuato.

Guanajuato, debido a la fertilidad de gran parte de sus suelos, se ha caracterizado por su producción agrícola. Un tercio de las tierras son cultivables, cuyo riego se realiza por gravedad o por bombeo de acuíferos subterráneos, ver figura 2.2. Cabe hacer notar que estos mantos acuíferos se encuentran en riesgo de extinción por sobre explotación, reduciendo sus caudales a más del 50 % en los últimos 50 años³. Estos sectores fértiles, al igual que la mayoría de los poblados, se ubican sobre la zona sur del Estado, pues el norte es un territorio semiárido como se puede apreciar en el mapa de las isoyetas de la figura 2.3, lo que conlleva que las estaciones meteorológicas con mayor número de años en funcionamiento y datos registrados se encuentren en el sur de Guanajuato. Este hecho determina que en la tesis sólo se estudien las precipitaciones extremas en aproximadamente 2/3 del Estado, ubicado por debajo de la latitud 21°12'.

El clima se corresponde a la latitud donde se encuentra ubicado Guanajuato y a su lejanía del mar. Este clima tropical se caracteriza por precipitaciones de convección y precipitaciones orográficas, ver apéndice C, y por distintos niveles de lluvias según el período del año. Como se puede apreciar en la figura 2.4 las precipitaciones promedio mensuales se presentan en mayor magnitud en los meses de junio, julio y agosto. Los meses de noviembre, diciembre, enero y febrero corresponden a un período extremadamente seco, aunque es posible que se registren lluvias extremas en este lapso por determinados fenómenos atípicos, como por ejemplo provocadas por un huracán.

La topografía particular de Guanajuato determina que lluvias de un alto caudal provoquen daños nefastos tanto en la producción agrícola como en las viviendas de sus habitantes, ocasionando inclusive pérdidas humanas. Los ríos que atraviesan el estado, ver figura 2.3, aumentan de forma abrupta su caudal en presencia de lluvias extremas. Hay datos históricos

³Semanario “Chopper” Guanajuato, edición 708, febrero 2013

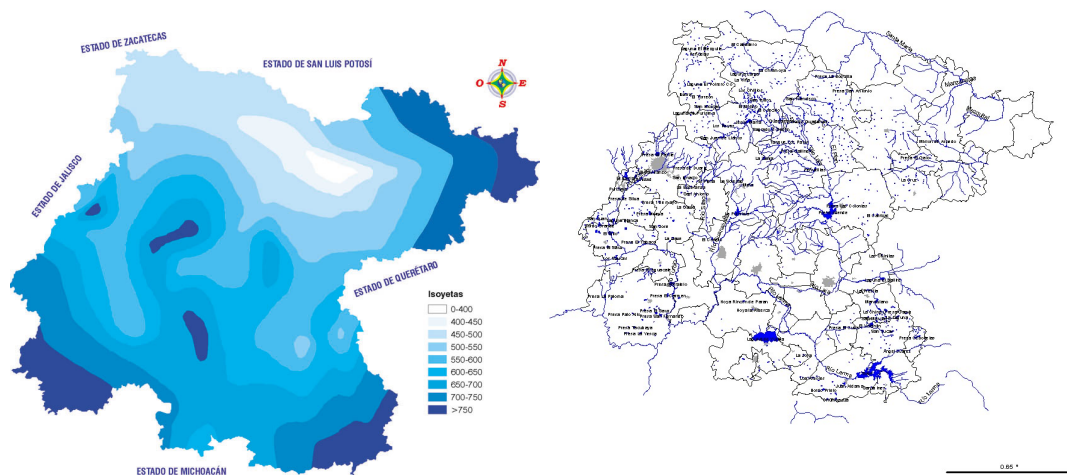


Figura 2.3: Isoyetas y mapa hidrográfico del Estado de Guanajuato.

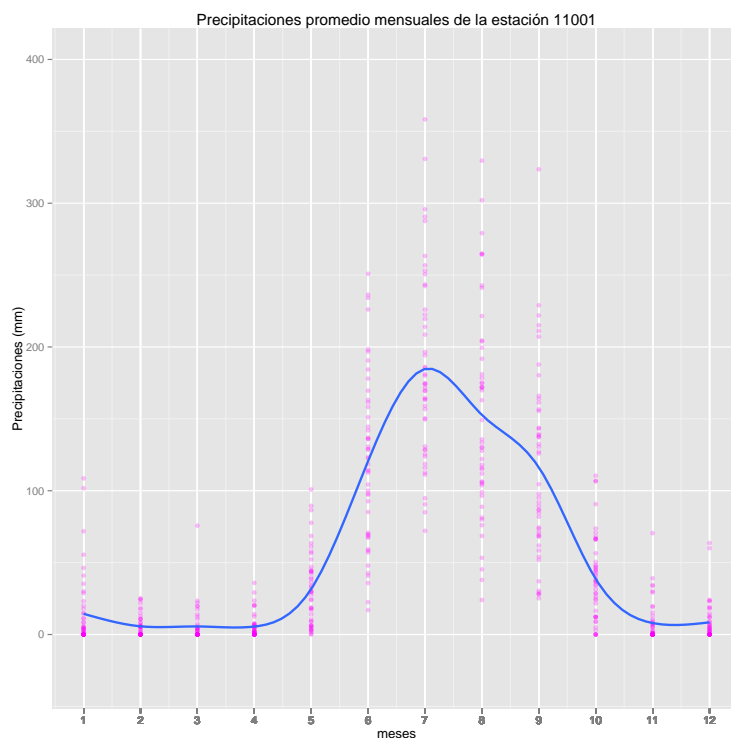


Figura 2.4: Estimación de la componente estacional de los acumulados mensuales en la estación 11001 ubicada en el municipio de Abasolo, entre los años 1963 y 2011.

de severas inundaciones en el Estado, por ejemplo en los años 1700, 1780, 1873 y 1905. ⁴

⁴Fuente: “El agua en la ciudad de Guanajuato, problema de siglos”, Gobierno del Estado de Guanajuato, Secretaría de Programación, 1983, Guanajuato, Gto. México.

Ejemplos mas recientes son las inundaciones de agosto de 1973 en el estado de Irapuato, por lluvias durante quince días que superaron los 300 mm, ver figura 2.5, provocando el desborde del río Llave, ocasionando pérdidas humanas y cuantiosos daños materiales. En julio de 1976, el Municipio de Silao sufrió una severa inundación por lluvias que superaron los 483 mm, ver figura 2.5, provocando el desborde del río Silao y destruyendo extensas áreas de cultivo y sumergiendo a la ciudad 1,40 mts del nivel del suelo. También en esta fecha el desborde del Río Turbio afectó un alto número de Municipios. Asimismo en 2003 y en 2007 todo el Estado se vio afectado por lluvias extraordinarias produciéndose pérdidas de todo tipo ⁵, ver figura 2.5.

Por tanto es fundamental establecer, en la medida de lo posible, probabilidades de ocurrencia de estos hechos, así como definir posibles zonas de riesgo para poder establecer políticas de prevención adecuadas.

2.2. Descripción de la Base de Datos.

La base de estaciones meteorológicas y los registros diarios de lluvias fueron proporcionados por la Coordinación General del Servicio Meteorológico Nacional de México, dependiente de la Comisión Nacional del Agua (CONAGUA). La base de datos cuenta con 160 estaciones meteorológicas, que registran caudales diarios de lluvias en milímetros en períodos que van desde el año 1902 al 2012. Las estaciones se dividen en dos grupos, según como es tomada la lectura del pluviómetro, ver figura 2.6,

convencionales La medición es registrada cada día por una persona.

automáticas El pluviómetro registra la medición sin ayuda externa.

Un problema de elevada complejidad en el análisis estadístico es el alto número de datos faltantes. Una gran cantidad de estaciones funcionaron por determinados períodos de años, y en ciertos lapsos (meses o años) no presentan datos. Inclusive dentro de cada mes hay días en los que no se cuenta con la información. Como en el trabajo es necesario contar con los datos de todas las estaciones en el mismo período de tiempo, es inevitable descartar una gran cantidad de estaciones y de años. La tesis no afronta el problema de imputación de datos extremos.

⁵Datos extraídos del Programa Estatal de Cambio Climático, Guanajuato.

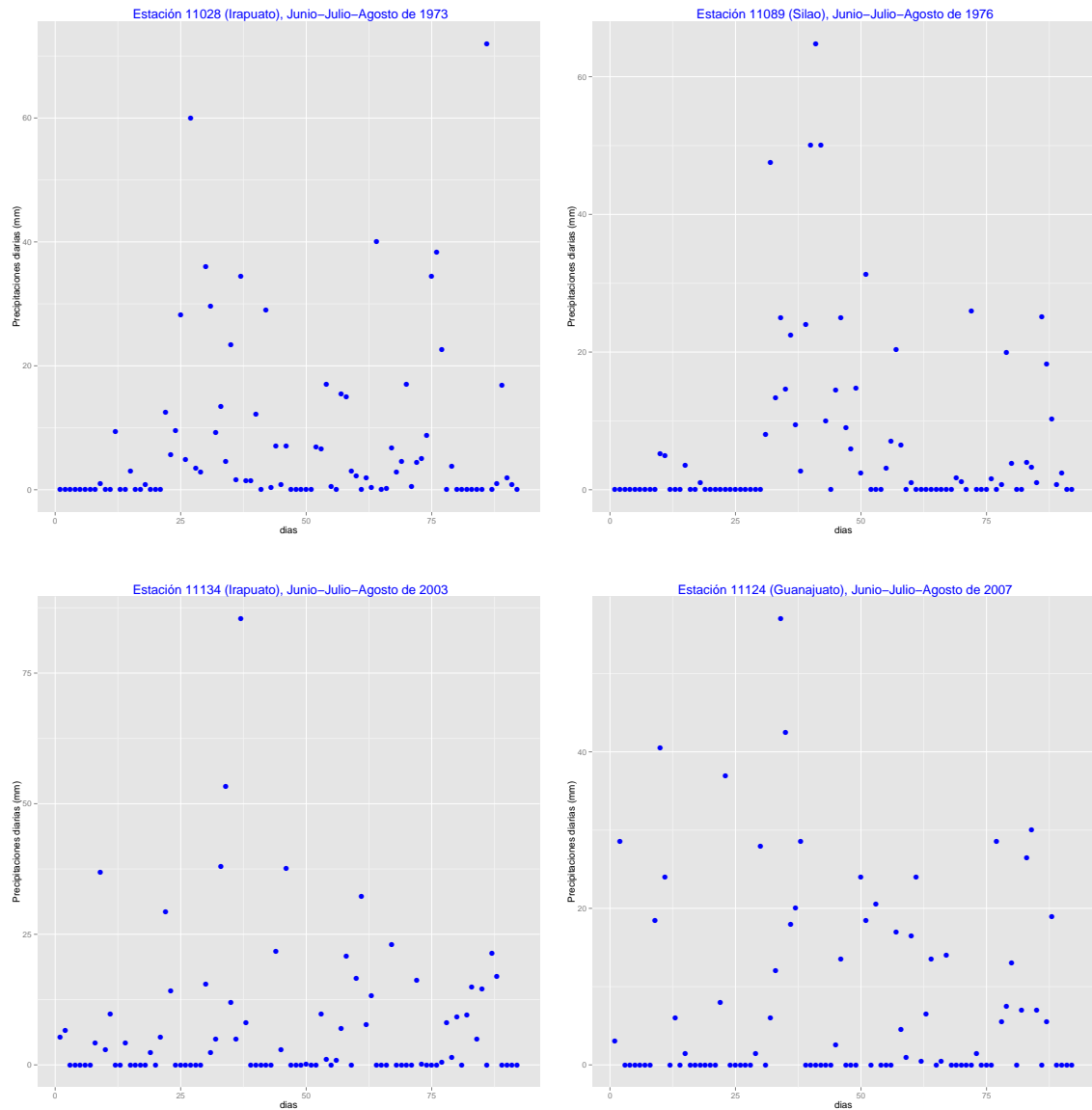


Figura 2.5: Precipitaciones diarias (mm) de los meses de junio, julio y agosto en distintos puntos del Estado de Guanajuato en años donde sucedieron inundaciones.

2.3. Algunos supuestos y elección de las estaciones.

El tipo de clima tropical hace suponer válida la hipótesis de independencia entre los valores de precipitaciones diarios dentro de cada año, o al menos una condición de m -independencia siendo m una determinada longitud de tiempo, pero es claro a partir de la figura 2.4 que no se puede suponer equidistribución. Dos caminos son plausibles, uno es eliminar la componente estacional y trabajar con la serie de todos los días del año con lo cual se gana información pero se pierde interpretabilidad. El camino a seguir en la tesis es

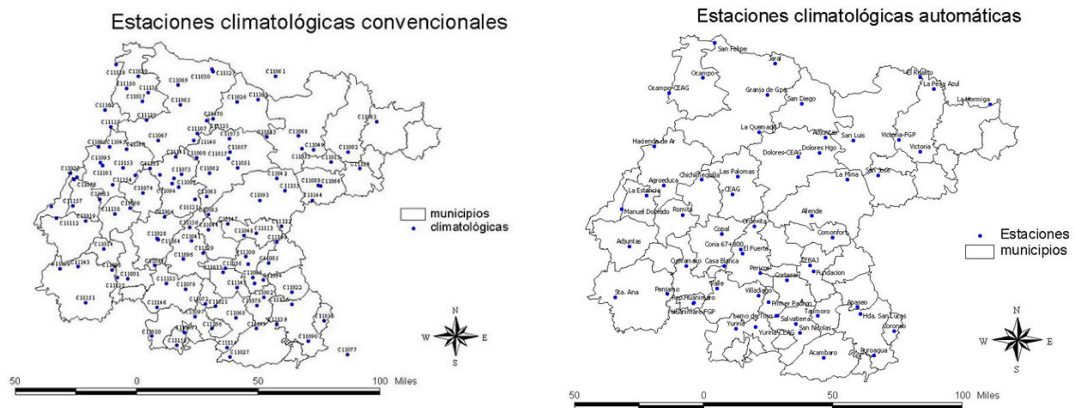


Figura 2.6: Ubicación de las estaciones meteorológicas en el Estado de Guanajuato.

dividir el año en tres períodos,

Seco Noviembre, Diciembre, Enero, Febrero y Marzo.

Moderado Abril, Mayo, Septiembre y Octubre.

Lluvioso Junio, Julio y Agosto.

Obviamente el período de mayor importancia es el tercero. La ventaja de no tomar períodos mensuales es obtener mayor cantidad de datos por año lo que genera un mejor ajuste de las distribuciones de valores extremos marginales. También se supone independencia de la sucesión de máximos tomados para cada año en el lapso analizado, es decir, no se tiene en cuenta un posible cambio climático.

Serán descartadas aquellas estaciones que presenten mas de un 10 % de datos faltantes en el total de meses que se toma en cuenta dentro de cada año y aquellas que tengan una latitud superior a $21^{\circ}12'$, obteniendo así una mayor densidad de estaciones en la región a analizar lo que conduce a predicciones más confiables.

Capítulo 3

Distribuciones de Valores Extremos.

3.1. Extremos Univariados.

La teoría de valores extremos, si bien se ha desarrollado a lo largo del último siglo, ha estado muy activa en las últimas tres décadas. El principal interés radica en modelar las colas de la distribución. Las aplicaciones de dicha teoría abarcan diversas ramas de las ciencias, la ingeniería, la oceanografía, el medio ambiente, la hidrología, la climatología, las finanzas, por citar algunas. Uno de los objetivos principales es la extrapolación de la información, para poder así inferir resultados en zonas extremas donde se encuentran pocos o ningún valor de la muestra. Este capítulo está basado en las notas del Dr. Joaquín Ortega Sanchez, sobre el curso “Valores Extremos”, [72], dictado en el año 2010 en el Cimat, Guanajuato, México.

3.1.1. Generalidades.

Dada una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots i.i.d y sea M_n la v.a. máximo de las primeras n variables aleatorias, es decir,

$$M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}. \quad (3.1)$$

Es sencillo observar que,

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = F^n(x), \quad (3.2)$$

siendo $F(x)$ la función de distribución acumulada de X_1 .

En general la distribución F no es conocida, por tanto tampoco lo es la distribución del máximo, por ello se buscan aproximaciones asintóticas. Se denotan los extremos del soporte de la variable X_1 como,

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\} \quad \text{y} \quad \omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\}.$$

Es evidente que $P(M_n \leq x) = F^n(x)$ converge en distribución a la constante $\omega(F)$, por ser una constante también se cumple la convergencia en probabilidad y como la sucesión M_n es monótona se puede afirmar la convergencia casi segura. Para obtener una distribución asintótica no degenerada $G(x)$, al igual que en el Teorema Central del Límite, se busca una transformación del tipo $\frac{M_n - a_n}{b_n}$, siendo a_n y b_n dos sucesiones reales, de forma tal que $\frac{M_n - a_n}{b_n}$ converja en distribución a una variable no degenerada con distribución G cuando n tiende a infinito. Es decir, la pregunta a realizarse es, ¿existen y son únicas las sucesiones reales a_n y b_n que verifican lo antedicho?. Además, ¿qué se puede decir acerca de la distribución no degenerada G ?. Éstas preguntas son contestadas parcialmente por el Teorema de Fisher-Tippet en 1928, [80], cuya versión final es dada por Gnedenko en 1943, [34], que se enuncia a continuación.

Teorema 1 (Teorema de Fisher-Tippet.). *Dada una sucesión de variables aleatorias $\{X_n\}_{n \geq 1}$ i.i.d tal que $X_1 \sim F$ y sea $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$. Si existen sucesiones reales $\{a_n\}_{n \geq 1}$ positiva y $\{b_n\}_{n \geq 1}$ que cumplen lo siguiente,*

$$P\left(\frac{M_n - a_n}{b_n} \leq x\right) = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow G(x), \quad (3.3)$$

débilmente cuando $n \rightarrow +\infty$ donde G es propia y no degenerada. Entonces G pertenece a alguna de las siguientes tres familias de distribuciones,

- *Tipo 1 o distribución Gumbel.*

$$H_1(x; \lambda, \delta) = \exp\left\{-\exp\left[\frac{\lambda - x}{\delta}\right]\right\}, \quad \delta > 0.$$

- *Tipo 2 o distribución Fréchet.*

$$H_2(x; \lambda, \delta, \kappa) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[\frac{x-\lambda}{\delta}\right]^{-1/\kappa}\right\} & \text{si } x \geq \lambda \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \delta > 0, \kappa > 0.$$

- *Tipo 3 o distribución Weibull.*

$$H_3(x; \lambda, \delta, \kappa) = \begin{cases} \exp\left\{-\left[\frac{\lambda-x}{\delta}\right]^{-1/\kappa}\right\} & \text{si } x \leq \lambda \\ 0 & x > \lambda \end{cases} \quad \delta > 0, \kappa < 0.$$

Demostración. Ver apéndice A □

Las tres distribuciones se pueden escribir en una sola expresión que recibe el nombre de *distribución de los valores extremos o distribución de Jenkinson-Von Misses*, se abrevia DVE o también DGVE,

$$H(x; \lambda, \delta, \kappa) = \exp \left\{ - \left[1 + \kappa \left(\frac{x - \lambda}{\delta} \right) \right]_+^{-1/\kappa} \right\}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \delta > 0, \kappa \neq 0, \quad (3.4)$$

siendo la función $y_+(t) = \max\{0, y(t)\}$. Se llama a λ el parámetro de posición, a δ el de escala o dispersión y κ es el llamado parámetro de forma o índice de valores extremos. El signo de este último indica cual de las tres posibles es la distribución de la DVE,

- Si $\kappa > 0$, tiene una distribución de Fréchet.
- Si $\kappa < 0$, tiene una distribución de Weibull.
- Si $\kappa = 0$ ($\kappa \rightarrow 0$) tiene una distribución de Gumbel.

Observar que este teorema no brinda información acerca de la existencia de la sucesiones a_n y b_n , una posible referencia sobre este tema es Coles 2001, [11]. En la figura 3.1 se pueden apreciar diferentes densidades de DVE al variar el parámetro de forma.

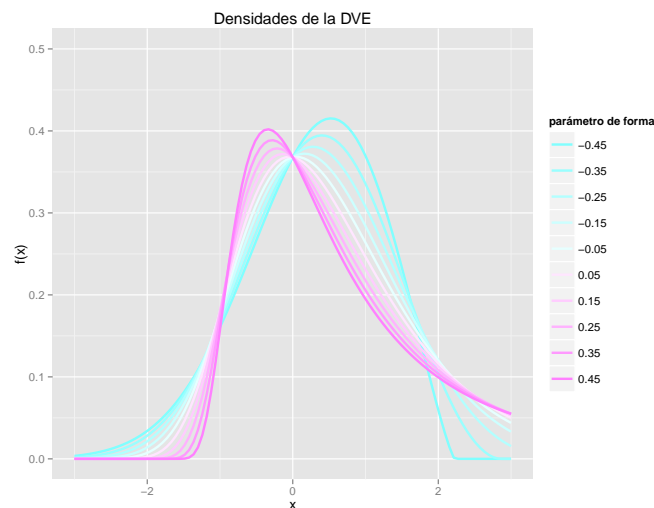


Figura 3.1: Densidad de la DVEG al variar el parámetro de forma, $\lambda = 0$ y $\delta = 1$.

A partir del siguiente teorema se puede transformar cualquier DVE en un distribución Fréchet unitaria, es decir en una variable con distribución acumulada,

$$H(x; 0, 1, 1) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.5)$$

Propiedad 1 (Transformaciones de la DVE.). *Las siguientes relaciones son equivalentes,*

- $X \sim \text{Frechet}(\lambda, \delta, \kappa)$.
- $\log X^\alpha \sim \text{Gumbel}(\lambda, \delta), \quad \delta = 1/\kappa$.
- $-X^{-1} \sim \text{Weibull}(\lambda, \delta, \kappa)$.

Demostración. Ver [23]. □

3.1.2. Dominios de Atracción.

Definición 1 (Dominio de atracción.). *Dada una sucesión de variables aleatorias i.i.d $\{X_n\}_{n \geq 1}$, tal que $X_1 \sim F$ y $M_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, se dice que F está en el dominio de atracción de valor extremo H y se denota $F \in \mathcal{D}(H)$, si existen $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ que cumplen,*

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) \rightarrow H(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.6)$$

cuando $n \rightarrow \infty$.

Definición 2 (Distribuciones asintóticamente equivalentes.). *Dos funciones de distribución F y G son asintóticamente equivalentes si tienen el mismo extremo derecho, es decir $\omega(F) = \omega(G)$, y*

$$\lim_{x \uparrow \omega(F)} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c, \quad c \in (0, \infty). \quad (3.7)$$

Propiedad 2 (Condición necesaria y suficiente para que $F \in \mathcal{D}(H)$.). *La función de distribución F pertenece al dominio de atracción de la DVE H con constantes de normalidad $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ si y sólo si,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\log H(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.8)$$

Demostración. Es simplemente aplicar la definición de $\mathcal{D}(H)$ y $(1 + a_n)^{1/a_n} \rightarrow e$ cuando $a_n \rightarrow 0$. □

Se prueba que $F, G \in \mathcal{D}(H)$ si y sólo si son asintóticamente equivalentes y además es posible usar las mismas constantes de normalización.

3.1.3. Distribución Generalizada de Pareto.

Sea $u < \omega_F$ un valor fijo, se dice que ha ocurrido una excedencia si $X > u$. Se llama excedencia al valor de X y exceso a $X - u$. Se denota,

$$F_u(x) = P(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad x \geq 0. \quad (3.9)$$

Se llama función media de excesos a $e(u) = E(X - u | X > u)$

Observación Si \bar{F} es de variación regular con índice $-\alpha$, con $\alpha > 1$ se puede probar que, $e(u) \sim \frac{u}{\alpha-1}$ cuando $u \rightarrow \infty$. Se define la Distribución Generalizada de Pareto (DGP), $H_{\xi, \beta}$ como,

$$H_{\xi, \beta}(x) = 1 - \left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}, \quad x \in D(\xi, \beta), \quad (3.10)$$

siendo

$$D(\xi, \beta) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } \xi \geq 0 \\ [0, -\beta/\xi] & \xi < 0 \end{cases}$$

Propiedades

1. Sea $X \sim H_{\xi, \beta}$. Entonces,

$$E(X) < \infty \Leftrightarrow \xi < 1.$$

2. Para $\xi \in \mathbb{R}$, $F \in \mathcal{D}(G_\xi)$ si y sólo si para alguna función β positiva se cumple que,

$$\lim_{u \uparrow \omega_F} \sup_{0 < x < \omega_F - u} |F_u(x) - H_{\xi, \beta(u)}(x)| = 0.$$

Esto indica que la función de distribución de los excesos F_u se aproxima a una DGP cuando u es suficientemente grande.

3. Si $x_1, x_2 \in D(\xi, \beta)$, entonces

$$\frac{\bar{H}_{\xi, \beta}(x_1 + x_2)}{\bar{H}_{\xi, \beta}(x_1)} = \bar{H}_{\xi, \beta + \xi x_1}(x_2).$$

Es decir, la clase de la DGP es cerrada frente a cambios de umbral.

4. Si $X \sim DGP_{\xi, \beta}$ tal que $\xi < 1$. Entonces para $u < \omega_F$,

$$e(u) = E(X - u/X > u) = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi u > 0.$$

Esta propiedad proporciona un método gráfico para la determinación de un umbral u adecuado para que la aproximación a una DGP sea eficiente.

Observación Si $X \in \mathcal{D}(G_{\xi, \mu, \sigma})$ entonces los excesos sobre un umbral tienen una distribución aproximada con igual parámetro de forma ξ , y

$$\beta = \sigma + \xi(u - \mu).$$

3.2. Extremos Multivariados.

Se introduce ahora la generalización de extremos al caso multivariado. No son plausibles de generalización muchas de las propiedades ya vistas.

Definición 3 (Máximo Multivariado.). *Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de variables aleatorias en dimensión k independientes e idénticamente distribuidas, se denota $X_n = (X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,k})$ a las variables marginales y F a la distribución conjunta. Se define el vector de máximos como,*

$$M_n = (M_{n,1}, M_{n,2}, \dots, M_{n,k}) = \left(\max_{1 \leq i \leq n} X_{i,1}, \max_{1 \leq i \leq n} X_{i,2}, \dots, \max_{1 \leq i \leq n} X_{i,k} \right).$$

Definición 4 (Distribución de valores extremos multivariada.). *Se dice que H tiene una distribución de extremos multivariada si existen dos sucesiones en \mathbb{R}^k , $\{a_n = (a_{n,1}, \dots, a_{n,k}) > 0\}_{n \geq 1}$ y $\{b_n = (b_{n,1}, \dots, b_{n,k})\}_{n \geq 1}$ tal que,*

$$P \left\{ \frac{M_{n,1} - b_{n,1}}{a_{n,1}} \leq x_1, \dots, \frac{M_{n,k} - b_{n,k}}{a_{n,k}} \leq x_k \right\} \rightarrow G(x_1, \dots, x_k), \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

En este caso se dice que F esta en el dominio de atracción de G . Si bien no ha sido posible describir G , como en el caso univariado mediante una familia paramétrica, se han encontrado ciertas medidas de probabilidad que caracterizan a la distribución G .

Teorema 2 (Caracterización Espectral). *Sea $E = [0, \infty]^d \setminus \{0\}$, $\|\cdot\|$ la norma suma, y S_d el simplex unitario en E . Una función de distribución d -dimensional G es una distribución de valores extremos multivariada con marginales Fréchet unitaria si y sólo si,*

1. Existe una medida finita H en S_d que cumple,

$$\int_{S_d} \omega_j dH(\omega) = 1/d, \quad \forall j = 1, \dots, d,$$

tal que,

$$G(x) = e^{-V(x)}, \quad x \in E,$$

$$\text{con } V(x) = \int_{S_d} \max_{1 \leq j \leq d} \frac{\omega_j}{x_j} dH(\omega).$$

2. Existe un proceso de Poisson no homogéneo N en E con medida de intensidad,

$$\mu \left\{ y \in E / \|y\| > r, \frac{y}{\|y\|} \in A \right\} = \frac{H(A)}{r}, \quad \forall r > 0, A \subset S_d,$$

con H una medida finita en S_d que satisface 1, tal que,

$$G(x) = P(N((0, x]^c) = 0) = e^{-\mu\{(0, x]^c\}}.$$

3. Existen f_1, \dots, f_d funciones no negativas e integrables en $[0, 1]$ que cumplen,

$$\int_0^1 f_j(t) dt = 1, \quad \forall j = 1, \dots, d,$$

tal que

$$G(x) = e^{-\int_0^1 \max_{1 \leq j \leq d} \left(\frac{f_j(t)}{x_j} \right) dt}, \quad x \in E.$$

Demostración. Ver [24] □

H es llamada la medida espectral, μ la medida exponente y la funciones f_j son llamadas funciones espectrales.

Teorema 3 (Marshall-Olkin). *Dada una distribución multivariada F en \mathbb{R}^d , con marginales F_i , $i = 1, 2, \dots, d$ que verifican,*

$$\frac{1 - F_i(x)}{1 - F_1(x)} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Entonces, F está en el dominio de atracción de G con marginales Fréchet si y sólo si, existe una función de escala $b(t) \rightarrow \infty$ y una medida de Radon ν cuando $t \rightarrow \infty$ tal que,

$$tP\left(\frac{X}{b(t)} \in B\right) \rightarrow \nu(B),$$

con B relativamente compacto en $\bar{\mathbb{R}}_+^d$ y $\nu(\partial B) = 0$.

Demostración. Ver [52]

□

Capítulo 4

Procesos Máx-Estables.

4.1. Introducción.

Los procesos máx-estables han evolucionado vigorosamente en los últimos 10 años. Los trabajos desarrollados por Balkema y Resnick en 1977, [3], Laurens de Hann en 1978, [22] y 1984, [21] demarcan las bases de la teoría. Este capítulo está basado en [66] y [23].

4.2. Conceptos Iniciales.

Definición 5 (Distribuciones sum-estables.). *Dada una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots i.i.d tal que $X_1 \sim F$ (no degenerada). F es una distribución sum-estable si existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que,*

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} X_1, \quad \forall n \geq 1. \quad (4.1)$$

Se extiende el mismo concepto pero en lugar de una suma de variables aleatorias, se toma el máximo de ellas, para ver luego la estrecha relación con las distribuciones de valores extremos.

Definición 6 (Distribuciones máx-estables.). *Dada una sucesión de variables aleatorias X_1, X_2, \dots i.i.d tal que $X_1 \sim F$ (no degenerada). F es una distribución máx-estable si existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que,*

$$\frac{\max_{i=1, \dots, n} \{X_i\} - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} X_1, \quad \forall n \geq 1. \quad (4.2)$$

Es decir, se puede realizar un cambio de posición y escala para que el máximo $M_n = \max_{i=1, \dots, n} \{X_i\}$ mantenga la misma distribución que la de las variables de la sucesión original. Puesto que $F_{M_n}(z) = F^n(z)$ la igualdad (4.2) es equivalente a,

$$F^n(a_n z + b_n) = F(z), \quad \forall n. \quad (4.3)$$

El teorema siguiente determina que las distribuciones máx-estables caracterizan a las DVE.

Teorema 4 (Caracterización de la distribuciones de valores extremos.). *Un distribución es máx-estable si y sólo si es una distribución de valores extremos.*

Demostración. Ver apéndice A. □

Dada la sucesión X_1, X_2, \dots de campos aleatorios se está interesado en caracterizar $\{Y(x)\}_{x \in K}$ límite en distribución del siguiente proceso,

$$\left\{ \max_{i=1, \dots, n} \frac{X_i(x) - b_n(x)}{a_n(x)} \right\}_{x \in K} \xrightarrow{d} \{Y(x)\}_{x \in K}, \quad (4.4)$$

donde Y sea un proceso no degenerado, con a_n y b_n funciones continuas en un compacto K de \mathbb{R}^d y a_n una función positiva.

L. de Haan en 1984, [22], demuestra que esta clase de procesos límite coincide con una clase de procesos llamada máx-estables.

Definición 7 (Procesos Máx-Estables.). *Sea K un subconjunto compacto de \mathbb{R}^d y sea $Z \in C(K)$ un proceso estocástico con marginales no degeneradas, diremos que $Z = \{Z(t), t \in T\}$ es un proceso máx-estable si dadas n copias independientes de este proceso Z_1, \dots, Z_n , existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tal que,*

$$Z \stackrel{d}{=} \max_{i=1, \dots, n} \frac{Z_i - b_n}{a_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.5)$$

Bajo una transformación adecuada, sin perder generalidad, [22], es posible trabajar con distribuciones marginales de Fréchet unitarias,

$$P(Z(t) \leq z) = e^{-1/z} \quad z > 0. \quad (4.6)$$

Se dice entonces que Z es un *proceso máx-estable simple*. En este caso se puede observar que las constantes de normalización son $a_n(t) = n$ y $b_n(t) = 0$. Por tanto Z es un proceso máx-estable simple si las marginales son Fréchet unitarias y

$$Z \stackrel{d}{=} \max_{i=1, \dots, n} \frac{Z_i}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.7)$$

L. de Haan también demuestra que si $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ son copias independientes de un proceso estocástico X definido en K y existen constantes $c_n(t) > 0$ y $d_n(t) \in \mathbb{R}$ para todo $t \in K$ tal que,

$$\max_{i=1,\dots,n} \frac{X_i(t) - d_n(t)}{c_n(t)} \xrightarrow{d} Z(t), \quad (4.8)$$

se cumple que Z es degenerado o Z es un proceso máx-estable. De ahora en más, sin perder generalidad, se trabajará con distribuciones marginales Fréchet unitarias.

4.3. Caracterización Espectral.

Es interesante observar que los procesos máx-estables simples presentan una sencilla representación, a través de lo que se llama la *representación espectral* del proceso. Se exponen dos posibles enfoques.

4.3.1. Construcción de L. de Haan (1984) de Procesos Máx-Estables.

Una primera caracterización es dada por L. de Haan en 1984, [22].

Teorema 5 (Caracterización de L. de Haan). *Sea $\{(\psi_i, U_i) : i \in \mathbb{N}\}$ un proceso puntual de Poisson definido en $(0, +\infty) \times \mathbb{R}^d$ con medida de intensidad $d\Lambda(\psi, u) = \psi^{-2}d\psi\nu(du)$, con ν una medida σ -finita en \mathbb{R}^d . Sea f una función definida en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ continua y no negativa tal que,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)\nu(dy) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.9)$$

entonces el proceso $Z = \max_{i \geq 1} \psi_i f(x, U_i)$, $x \in \mathcal{X}$ es un proceso máx-estable simple. Y viceversa, todo proceso máx-estable admite una representación de este tipo.

Demostración. Ver apéndice A. □

Una familia conveniente para la construcción de dichos procesos es considerar $\{f(x-y) : x, y \in \mathbb{R}^d\}$ donde f es una densidad en \mathbb{R}^d .

4.3.2. Construcción de Schlather (2002) de Procesos Máx-Estables.

Una segunda caracterización de los procesos máx-estables es proporcionada por Martin Schlather en 2002, [73], donde considera funciones aleatorias en lugar de funciones determinísticas.

Teorema 6 (Caracterización de Schlather). *Sea $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$ un proceso puntual de Poisson en $(0, \infty)$ con intensidad $d\Lambda(\psi) = \psi^{-2}d\psi$ y un proceso estocástico no negativo Y , independiente del anterior, con trayectorias continuas, tal que $E(Y(x)) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^d$. El*

proceso $Z(x) = \max_{i \geq 1} \psi_i Y_i(x)$, $x \in X$, donde Y_1, Y_2, \dots son copias independientes de Y , es un proceso máx-estable.

Demostración. Ver apéndice A. □

En caso de que $E(Y(x)) = \mu$ basta trabajar con el proceso $\tilde{Y}(x) = Y(x)/\mu$ y si toma valores negativos se considera el proceso $\tilde{Y}(x) = \max\{0, Y(x)\}$.

Ambas construcciones producen una “máquina” que genera procesos máx-estables al hacer variar la función f o el proceso Y .

4.4. Distribuciones Finito Dimensionales de los Procesos Máx-Estables.

Las distribuciones acumuladas finito dimensionales de un proceso máx-estable son sencillas de obtener a través de su representación espectral. Se determina la función de distribución acumulada k -dimensional F ,

$$\begin{aligned} F(z_1, z_2, \dots, z_k) &= P \left[\max_i \{\psi_i Y_i(x_j)\} \leq z_j, j = 1, 2, \dots, k \right] = \quad (4.10) \\ &= P \left[\psi_i \leq \frac{z_j}{Y_i(x_j)}, i \geq 1, j = 1, 2, \dots, k \right] = \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{\psi > \min_j \frac{z_j}{y_j}\}} \psi^{-2} d\psi dP^Y(y_1, \dots, y_k) \right\} = \\ &= \exp \left\{ - \int_{\mathbb{R}^d} \max_j \frac{y_j}{z_j} dP^Y(y_1, \dots, y_k) \right\} = \exp \left\{ -E \left(\max_j \frac{Y(x_j)}{z_j} \right) \right\} = \exp \{-V(z_1, \dots, z_k)\}, \\ &= \exp \{-V(z_1, \dots, z_k)\}, \end{aligned}$$

siendo $V(z_1, \dots, z_k) = E \left(\max_j \frac{Y(x_j)}{z_j} \right)$.

Cuando la dimensión k es lo suficientemente grande, la densidad conjunta se torna intratable, al menos numéricamente, por la cantidad de términos que ella presenta. Este problema será retomado en el capítulo 7.

4.5. Algunos Modelos.

4.5.1. El Modelo de Smith.

Modelo desarrollado por Smith en 1990, [77]. Se deduce a partir de la caracterización de L. de Haan considerando,

$$f(s, t) = \phi(s - t, \Sigma), \quad (4.11)$$

donde $\phi(\cdot, \Sigma)$ es la densidad de una distribución $N(0, \Sigma)$, siendo Σ la matriz de varianzas y covarianzas. Es decir,

$$f(s, t) = (2\pi)^{-d/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (s - t)^T \Sigma^{-1} (s - t) \right\}. \quad (4.12)$$

También es posible deducir el modelo de Smith a través de la caracterización de Schlather si se considera,

$$Y_i(x) = \phi(x - X_i), \quad (4.13)$$

donde $\{X_i\}_{i \geq 1}$ son puntos de un proceso homogéneo de Poisson y ϕ como en la construcción anterior.

A partir de (4.10) se puede reconstruir la distribuciones finito dimensionales, que son expresadas en dimensión 2 de forma de reducir la notación,

$$P(Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2) = \exp \left\{ -\frac{1}{z_1} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_2}{z_1} \right) - \frac{1}{z_2} \Phi \left(\frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \frac{z_1}{z_2} \right) \right\}, \quad (4.14)$$

donde Φ denota la distribución acumulada de una normal estándar en \mathbb{R} y $a^2 = (x_1 - x_2)^T \Sigma^{-1} (x_1 - x_2)$. Este modelo, que fue uno de los pioneros para la modelación de lluvias a través de procesos máx-estables, también recibe le nombre de *proceso de valores extremos gaussianos* o *modelo perifr de la tormenta*. Es desconocida y por tanto a estimar la matriz de varianzas y covarianzas Σ .

Interpretación del Modelo.

Siguiendo los conceptos vertidos por Smith en 1990, este es un proceso homogéneo en el espacio, es decir, no importa en el modelo la ubicación de los puntos, en este caso las estaciones, sino la distancia entre ellos. Es usado en general para modelar lluvias del tipo *de convección*. Se trabaja en un espacio de dimensión $d = 2$.

La intensidad o magnitud de la i -ésima tormenta centrada en s_i esta representada por ψ_i . La función ϕ determinista indica la forma de la tormenta, o sea, de que manera ésta disminuye a medida que se aleja del centro. Por tanto $\psi_i \phi(t - s_i)$ representa la magnitud de la lluvia en la posición t en referencia a una tormenta de tamaño ψ_i centrada en s_i . El proceso $Z(t)$ viene a representar en este caso un máximo sobre un conjunto de tormentas independientes con las mismas forma pero de intensidad variable. En la figura 4.1 se simula un proceso de Smith ¹ con matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma = \frac{3}{2} I_2$.

¹El procedimiento para realizar las simulaciones será desarrollado en el capítulo 8.

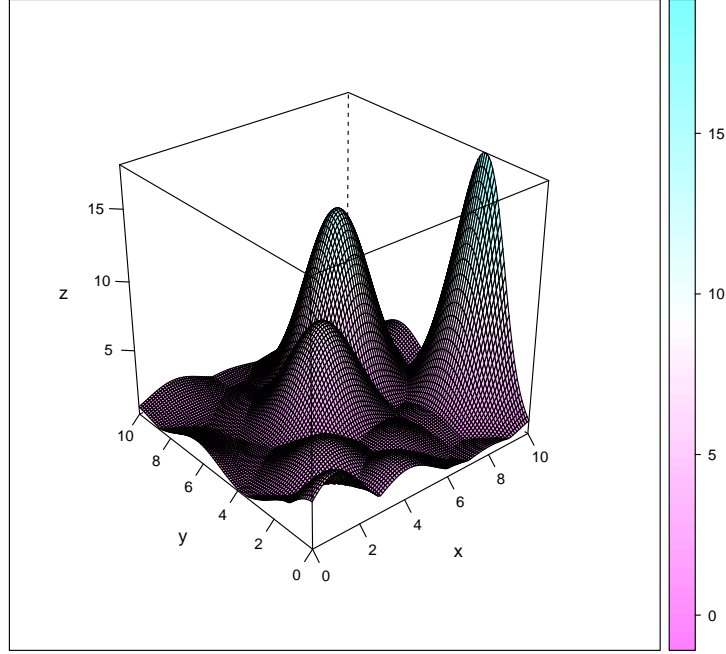


Figura 4.1: Proceso de Smith simulado con matriz de varianzas y covarianzas $\Sigma = \frac{3}{2}I_2$.

4.5.2. El Modelo de Schlather.

Schlather, [73], propone a través de su construcción de procesos máx-estables considerar,

$$Y_i(x) = \sqrt{2\pi}Y_{*,i}(x), \quad (4.15)$$

donde $Y_{*,i}$ son copias independientes de un proceso estándar gaussiano con correlación ρ . Al igual que en el proceso anterior partiendo de (4.10) se puede obtener la distribución acumulada finito dimensional,

$$\begin{aligned} P(Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2) &= \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \left(1 + \sqrt{1 - 2(\rho(h) + 1) \frac{z_1 z_2}{(z_1 + z_2)^2}} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde $h = \|x_1 - x_2\|$.

Se presentan algunas de las posibles funciones de correlación a utilizar extraídas de [31],

Exponencial.

$$\rho(h; a, \sigma^2) = \sigma^2 \left(1 - \frac{1}{a} e^{-\|h\|} \right). \quad (4.17)$$

Exponencial Generalizada

$$\rho(h; a, \sigma^2, \alpha) = \sigma^2 \left(1 - e^{-(\|h\|/a)^\alpha}\right). \quad (4.18)$$

Power Exponencial.

$$\rho(h; b, c) = b\|h\|^c, 0 < c \leq 2. \quad (4.19)$$

Esférica.

$$\rho(h; a, \sigma^2) = \begin{cases} \sigma^2 \left(\frac{3}{2a}\|h\| - \frac{1}{2a^3}\|h\|^3\right) & \text{si } \|h\| \leq a \\ \sigma^2 & \text{en otro caso} \end{cases}. \quad (4.20)$$

Gaussiana.

$$\rho(h; a, \sigma^2) = \sigma^2 \left(1 - e^{-(\|h\|/a)^2}\right). \quad (4.21)$$

Matérn.

$$\rho(h; a, \sigma^2, \nu) = \sigma^2 \left[1 - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\|h\|}{a}\right)^\nu K_\nu \left(\frac{\|h\|}{a}\right)\right], \quad (4.22)$$

donde K_ν es la función de Bessel modificada de segunda especie con $\nu > -1$.

Whittle-Matérn.

$$\rho(h; a, \sigma^2, \nu) = c_1 \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{h}{c_2}\right)^\nu K_\nu \left(\frac{h}{c_2}\right). \quad (4.23)$$

Cauchy.

$$\rho(h; a, \sigma^2, \nu) = \sigma^2 \left[1 + \left(\frac{h}{c_2}\right)^2\right]^{-\nu}. \quad (4.24)$$

A c_1 y c_2 se les denomina parámetros de rango, σ es el llamado parámetro de umbral y ν el parámetro de suavizado. Se llama efecto nugget a $\eta = 1 - \sigma$. El problema en este caso se reduce a estimar los parámetros que intervienen en la función de covarianza. En la figura 4.2 se puede apreciar la forma de las distintas correlaciones.

Interpretación del Modelo.

En este modelo, a diferencia con el de Smith, la forma de la tormenta es aleatoria. La estructura de la tormenta está dada por la función de correlación $\rho(h)$. En general es aplicado para lluvias *ciclónicas*. En este caso la magnitud de la i -ésima tormenta esta dada por $\psi_i Y_i$, manteniendo la misma estructura de dependencia y sólo variando la magnitud ψ_i . En la figura 4.3 se puede apreciar la simulación de un proceso de Schlather con una covarianza exponencial generalizada.

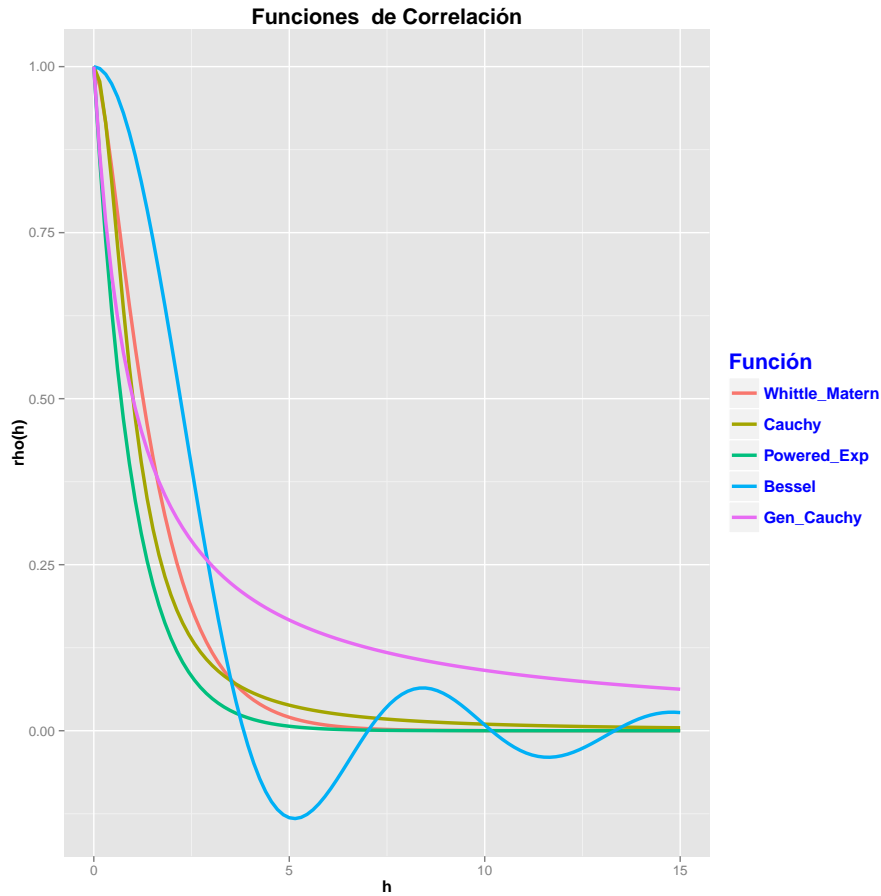


Figura 4.2: Distintas funciones de correlación en función de la distancia h . Se consideró $c_1 = c_2 = \sigma = \nu = 1$.

4.5.3. El Modelo de Brown-Resnick.

Proceso introducido por Brown-Resnick en 1977, [9], pero Kabluchko, Schlather y L. de Haan en 2009, [43], lo analizan y generalizan desde la óptica de los procesos máx-estables. Surge de elegir en la caracterización de Schlather (2002),

$$Y_i(x) = \exp \left\{ \epsilon(x) - \frac{\sigma^2(x)}{2} \right\}, \quad (4.25)$$

donde ϵ es un proceso gaussiano con incrementos estacionarios y $\sigma^2(x) = V[\epsilon(x)]$. La distribución bivariada es dada por (4.14) siendo ahora $a^2 = V(Y(x_1 - x_2))$. En este caso si bien Y no es un proceso estacionario el proceso máx estable asociado sí lo es. Si se cumple que $a^2 = V(Y(h)) \propto h^2$, $h \geq 0$, el proceso coincide con el proceso de Smith.

4.5.4. El Modelo Geométrico Gaussiano.

Introducido por Davison y Gholamrezaee en 2012, [20]. Se toma en Schlather (2002),

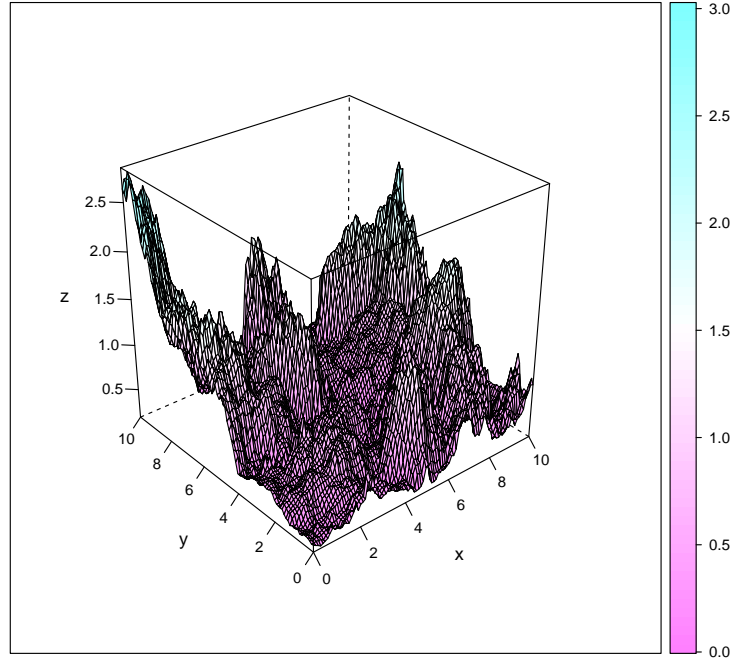


Figura 4.3: Proceso de Schlather simulado con una función de covarianza exponencial, efecto nugget=0 , suavizado= 1,5 y rango=3.

$$Y_i(x) = \exp \left\{ \sigma(x)\epsilon(x) - \frac{\sigma^2(x)}{2} \right\}, \quad (4.26)$$

donde ϵ es un proceso gaussiano estándar con $\sigma^2(x) = V[\epsilon(x)]$. La distribución acumulada bivariada del proceso es la misma que en Smith, (4.14), pero siendo $a^2 = 2\sigma^2(1 - \rho(h))$.

4.5.5. El Modelo t -Extremal.

El modelo t -extremal fue desarrollado recientemente por Opitz en 2012, [62], también es analizado por Ribatet y Sedki en 2013, [69],

$$Y_i(x) = \sqrt{\pi} 2^{-(\nu-2)/2} \Gamma \left(\frac{\nu+1}{2} \right)^{-1} \max\{0, \epsilon_i(x)\}^\nu, \quad \nu \geq 1, \quad (4.27)$$

donde ϵ es un proceso estándar gaussiano con función de correlación ρ y Γ es la función Gamma. En este caso la distribución bivalente obtenida a partir de (4.10) es,

$$\begin{aligned} & P(Z(x_1) \leq z_1, Z(x_2) \leq z_2) = \\ & = \exp \left\{ -\frac{1}{z_1} T_{\nu+1} \left[-\frac{\rho(x_1 - x_2)}{b} + \frac{1}{b} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^{1/\nu} \right] - \frac{1}{z_2} T_{\nu+1} \left[-\frac{\rho(x_1 - x_2)}{b} + \frac{1}{b} \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^{1/\nu} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

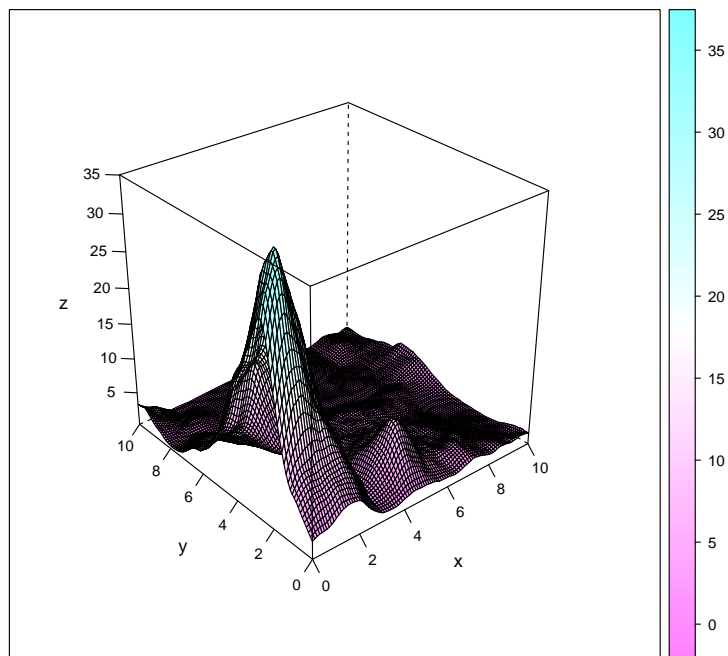


Figura 4.4: Proceso de t-extremal simulado con efecto nugget=0 , suavizado= 1,5, rango=3 y grados de libertad=4.

En la figura 4.5 se pueden apreciar las diferencias entre los distintos procesos simulados en dimensión 1, en la figura 4.6 se observa las curvas de nivel de algunos procesos simulados en dimensión 2.

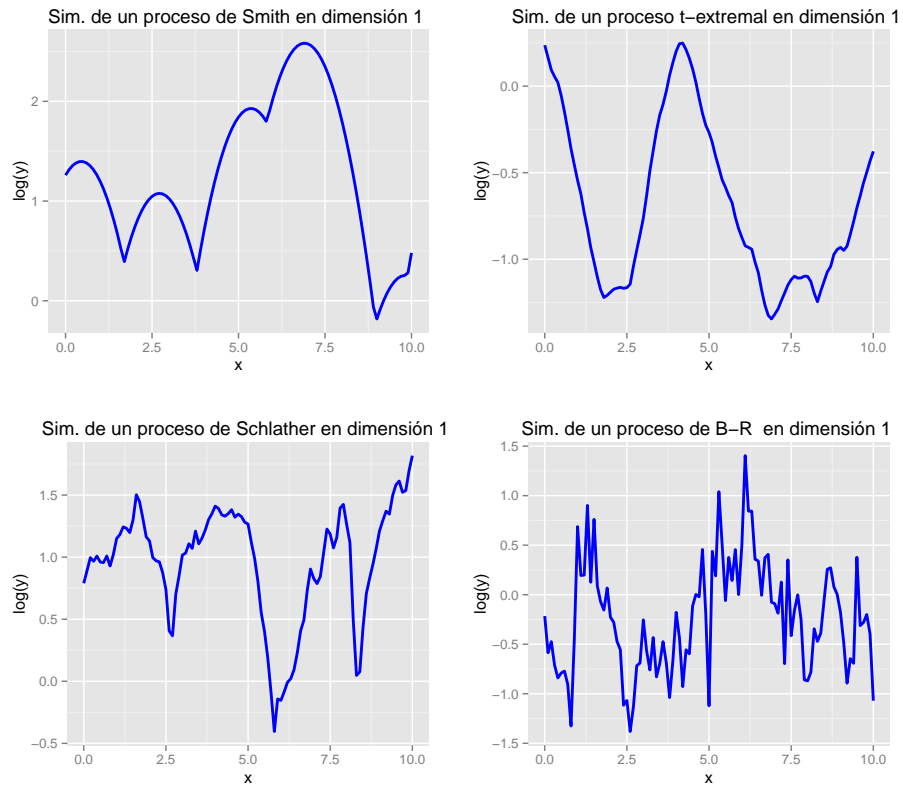


Figura 4.5: Gráficos de distintos procesos máx-estables con los mismos parámetros de suavizado, nugget y rango en \mathbb{R} .

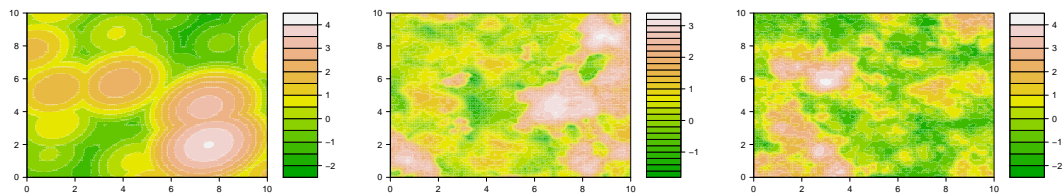


Figura 4.6: Curvas de nivel de simulaciones en dimensión 2 de los procesos de Smith, Schlather (Wmat) y t-extremal respectivamente.

Capítulo 5

Cóputas.

5.1. Conceptos Iniciales.

5.1.1. Generalidades.

El concepto “Cópula” o “Función de Cópula” es introducido por Sklar en 1959, [76], originalmente en el contexto de espacios métricos probabilísticos. La idea en que se basa este concepto es la siguiente: para distribuciones multivariadas, las distribuciones marginales univariantes y su estructura de dependencia pueden ser separadas, donde esta última estará representada por la cópula. La palabra “cópula” proviene del latín (*copula*) que es un sustantivo para describir un vínculo o adherencia entre dos objetos. El término *cópula* es usado en gramática y lógica para describir la parte de la proposición que conecta el sujeto con el predicado. En estadística, la “cópula” describe la función que “une” distribuciones unidimensionales para formar una multivariada y puede servir para caracterizar varios conceptos de dependencia, en particular dependencia en las colas de la distribución. La cópula de una distribución multivariada puede ser considerada como la parte que describe su estructura de dependencia, como un complemento al comportamiento de cada una de sus marginales.

Elas permiten tener en cuenta todos los posibles casos de dependencia. Si existe dependencia perfecta positiva entre las variables aleatorias de interés, se dice que las variables aleatorias son “comonotónicas”, por su parte, cuando la dependencia es perfecta negativa, se dice que las variables son “contramonotónicas”. En ambos casos, estas situaciones pueden ser descritas por una cópula específica. Adicionalmente, cuando las variables aleatorias son independientes, su relación se resume en la cópula de independencia.

De acuerdo al teorema de Sklar, cualquier distribución multivariante puede ser modelada a través de las distribuciones marginales y de la función de cópula separadamente. En efecto, conceptualmente, el teorema de Sklar sostiene que para cualquier función de distribución

bivariada, existe una cópula que vincula las distribuciones univariadas y que contiene toda la información acerca de la naturaleza de la dependencia entre dos variables aleatorias independientemente de sus distribuciones marginales.

La información sobre las distribuciones marginales y la información sobre la dependencia se mantienen separadas, y su influencia puede ser evaluada claramente.

Esta separación entre distribuciones marginales y parámetros de dependencia explica la flexibilidad que brindan las cópulas para modelar. Desde un punto de vista teórico, las funciones de cópulas permiten un doble “infinito” de grados de libertad,

1. definir las marginales apropiadas,
2. elegir la cópula apropiada.

Desde el punto de vista práctico del modelado, podemos descomponer cualquier problema de estimación en dos pasos: el primero es para las marginales y el segundo para los parámetros de la función de cópula. Las ventajas de una representación a través de las funciones de cópulas son muchas. El enfoque clásico de medir la dependencia, la función de correlación lineal, es una medida válida de dependencia sólo dentro de una restrictiva clase de distribuciones, por ejemplo las elípticas, mientras que las funciones de cópulas no tienen esta limitación. Las cópulas permiten modelar las distribuciones marginales y la estructura de dependencia separadamente. Se puede tener combinaciones de distribuciones marginales estimadas por métodos paramétricos y otras por métodos no paramétricos. Se modela la forma de la función de distribución, donde la cópula modela de forma acertada el tipo de dependencia. Finalmente, las cópulas permiten ajustar cualquier distribución marginal a diferentes variables aleatorias y esas distribuciones pueden variar de una variable aleatoria a la siguiente. Para las definiciones subsiguientes se ha tomado como referencia Nelsen 2006, [60].

5.1.2. Definición de Cópula.

Definición 8 (Cópula Bidimensional). *Se llama cópula a una función real C de dominio $I^2 \equiv [0, 1]^2$ con las siguientes propiedades,*

1. $\forall u, v \in I$ se cumple que,

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad C(u, 1) = u \quad y \quad C(1, v) = v. \quad (5.1)$$

2. (es 2-creciente) $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ tal que $u_1 \leq u_2$ y $v_1 \leq v_2$ se cumple que,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (5.2)$$

Definición 9 (Cópula d-Dimensional). Se llama *d*-Cópula a una función real C de dominio $I^d \equiv [0, 1]^d$ con las siguientes propiedades,

1. $\forall u \in I^d$ se cumple que,
 - $C(u) = 0$ si algunas de las coordenadas de u vale 0.
 - Si todas las coordenadas de u valen 1 excepto u_k entonces $C(u) = u_k$.
2. $\forall a$ y $b \in I^d$ tal que $a \leq b$ se cumple que,

$$V_C[a, b] \geq 0 \text{ (se dice que } C \text{ es } d\text{-creciente)}. \quad (5.3)$$

Siendo $[a, b]$ el *d*-bloque determinado por las coordenadas de a y b en el dominio de la Cópula y nombrando $V_C[a, b]$ al *C*-volumen de $[a, b]$ definido como:

$$V_C[a, b] = \sum \text{sgn}(c) \cdot C(c) \quad (5.4)$$

$$\text{sgn}(c) = \begin{cases} 1 & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número par de coordenadas} \\ -1 & \text{si } c_k = a_k \text{ para un número impar de coordenadas} \end{cases} \quad (5.5)$$

5.1.3. Algunas Propiedades Elementales de las Cópulas.

Propiedad 3. Sean $M(u, v) \equiv \min(u, v)$ y $W(u, v) \equiv \max(u + v - 1, 0)$. Entonces para toda cópula C se cumple que,

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v). \quad (5.6)$$

W y M son llamadas las cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding para Cópulas, ver figura 5.1. Las cotas inferior y superior de Fréchet-Hoeffding para el caso *d*-dimensional son,

$$W^d(u) = \max(u_1 + u_2 + \dots + u_d - d + 1, 0). \quad (5.7)$$

$$M^d(u) = \min(u_1, u_2, \dots, u_d). \quad (5.8)$$

Propiedad 4. Las cópulas son funciones de Lipschitz, es decir, $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in I$ se cumple que,

$$|C(u_1, v_1) - C(u_2, v_2)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \quad (5.9)$$

Por tanto se puede afirmar que son funciones uniformemente continuas en su dominio.

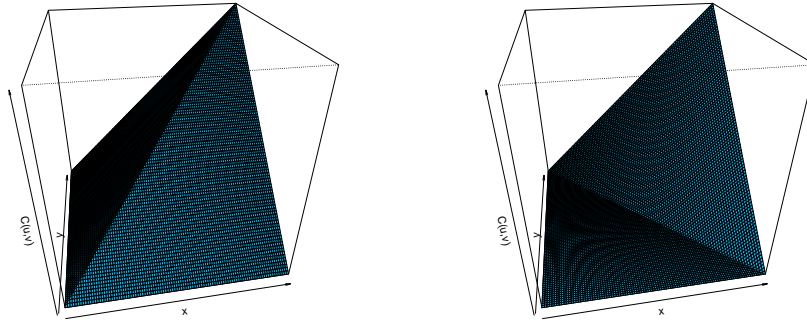


Figura 5.1: Cotas superior e inferior respectivamente de Fréchet-Hoeffding.

Propiedad 5. Si C es una función de cópula entonces existen ambas derivadas parciales en casi todos los puntos del dominio (en el sentido de la medida de Lebesgue) y están acotadas entre 0 y 1.

Teorema de Sklar.

Teorema 7 (Para cópulas bidimensionales). Sea H la función de distribución conjunta de una v.a. vectorial (X, Y) con F y G las distribuciones marginales. Entonces existe una cópula C tal que $\forall (x, y) \in \overline{\mathbb{R}^2}$ se cumple que,

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (5.10)$$

Si F y G son continuas la cópula C es única. En otro caso las cópulas solución coinciden en $\text{Ran}(F) \times \text{Ran}(G)$. Inversamente si C es una cópula con F y G dos funciones de distribución entonces $H(x, y) = C(F(x), G(y))$ es una función de distribución conjunta con marginales F y G .

Demostración. Ver apéndice A. □

Teorema 8 (Para cópulas d-dimensionales). Sea H la función de distribución conjunta de una v.a. vectorial (X_1, X_2, \dots, X_d) con F_1, F_2, \dots, F_d las distribuciones marginales. Entonces existe una d-cópula C tal que $\forall \mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}^d}$ se cumple que,

$$H(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)). \quad (5.11)$$

Si F_1, F_2, \dots, F_d son continuas la cópula C es única. En otro caso las cópulas solución coinciden en $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$. Inversamente si C es una cópula con F_1, F_2, \dots, F_d funciones de distribución entonces $H(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d))$ es una función de distribución conjunta con marginales F_1, F_2, \dots, F_d .

Corolario 1. ■ Sean X e Y v.a. absolutamente continuas. X e Y son independientes si y sólo si $C_{XY}(u, v) = \Pi(u, v) \equiv u.v$, ver figura 5.2.

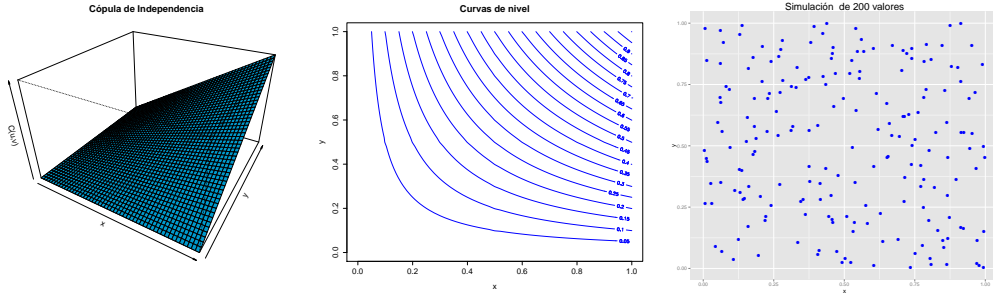


Figura 5.2: Gráfico de la cópula de independencia $C(u, v) = uv$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0,1)$.

- Sean X_1, X_2, \dots, X_d v.a. absolutamente continuas. X_1, X_2, \dots, X_d son independientes si y sólo si $C(u) = \Pi(u) \equiv u_1.u_2.\dots.u_d$.

Corolario 2. Sean X e Y v.a. absolutamente continuas con cópula C_{XY} . Si α y β son funciones estrictamente crecientes en $\text{Ran}(X)$ y $\text{Ran}(Y)$ respectivamente, entonces $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$.

Corolario 3. Sean X e Y v.a. absolutamente continuas con cópula C_{XY} . Si α y β son funciones estrictamente monótonas en $\text{Ran}(X)$ y $\text{Ran}(Y)$ respectivamente,

- Si α es estrictamente creciente y β es estrictamente decreciente,

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v).$$

- Si α es estrictamente decreciente y β es estrictamente creciente,

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v).$$

- Si α es estrictamente decreciente y β es estrictamente decreciente,

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Corolario 4 (Método de inversión que permite construir cópulas¹). Sea H la distribución conjunta, F y G las marginales (continuas), C la cópula, $F^{(\leftarrow)}$ y $G^{(\leftarrow)}$ las cuasi-inversas. Entonces $\forall (u, v)$ en el $\text{dom}(C)$ se cumple que $C(u, v) = H(F^{(\leftarrow)}(u), G^{(\leftarrow)}(v))$.

¹Otros métodos tanto geométricos como algebraicos para la construcción de cópulas se encuentran detallados en [60].

5.1.4. Densidad de la Función de Cópula.

Se llama densidad asociada a la cópula $C(u_1, u_2, \dots, u_d)$ a,

$$c(u_1, u_2, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, u_2, \dots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_d}. \quad (5.12)$$

Para v.a. absolutamente continuas se cumple que,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i), \quad (5.13)$$

siendo f_i la densidad de la v.a. X_i ,

$$f_i(x_i) = \frac{dF_i(x_i)}{dx_i}. \quad (5.14)$$

En general, la densidad de la cópula describe de forma más explícita las relaciones de dependencia que determina.

5.1.5. Familias Paramétricas de Cópulas.

Se presentan ciertas familias o clases paramétricas de cópulas. Para cada clase se detalla la función de cópula, el espacio paramétrico de los parámetros de dependencia, así como las principales características y cualidades de cada familia.

Cópula de Marshall-Olkin.

Para poder realizar los cálculos explícitos de los coeficientes de dependencia, sin realizar cálculos tediosos, se desarrolla el caso bivariado.

Considerar un sistema de dos partículas que en cierto momento colapsan de 3 formas: con consecuencia fatal para la primera y no para la segunda, viceversa o colapso fatal para los dos componentes. Sean X_1 y X_2 la v.a. tiempo de supervivencia de cada componente respectivamente. Se asume que los colapsos están conformados por tres v.a. independientes con distribución Poisson de parámetros λ_1 , λ_2 y $\lambda_{12} \geq 0$, por tanto los tiempos hasta la ocurrencia del colapso Z_1 , Z_2 y Z_{12} son v.a. exponenciales con parámetros λ_1 , λ_2 y λ_{12} respectivamente. La distribución del tiempo de supervivencia de ambas componentes es,

$$\bar{H}(x_1, x_2) = P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = P(Z_1 > x_1)P(Z_2 > x_2)P(Z_{12} > \max(x_1, x_2)), \quad (5.15)$$

y los tiempos de supervivencia de cada componente tiene distribución,

$$\bar{F}_1(x_1) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_{12})x_1), \quad \bar{F}_2(x_2) = \exp(-(\lambda_2 + \lambda_{12})x_2). \quad (5.16)$$

Como $\max(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - \min(x_1, x_2)$ se puede expresar $\bar{H}(x_1, x_2)$ como,

$$\bar{H}(x_1, x_2) = \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2) \min(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2). \quad (5.17)$$

Siendo $\alpha_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$ y $\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, usando el método de inversión la cópula de la v.a. de sobrevida de (X_1, X_2) se expresa,

$$C(\alpha_1, \alpha_2)(u_1, u_2) = u_1 u_2 \min(u_1^{-\alpha_1}, u_2^{-\alpha_2}) = \min(u_1^{1-\alpha_1} u_2, u_2^{1-\alpha_2} u_1). \quad (5.18)$$

Esta familia de cópulas es llamada de Marshal-Olkin. Es una familia absolutamente continua cuya masa esta concentrada en la curva $u_1^{\alpha_1} = u_2^{\alpha_2}$ en $[0, 1]^2$ puesto que,

$$\frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} C_{\alpha_1, \alpha_2}(u_1, u_2) = \begin{cases} u_1^{-\alpha_1} & \text{si } u_1^{-\alpha_1} < u_2^{-\alpha_2} \\ u_2^{-\alpha_2} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.19)$$

Cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern.

La cópula de Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) es de la forma,

$$C(u_1, u_2; \theta) = u_1 u_2 (1 + \theta(1 - u_1)(1 - u_2)). \quad (5.20)$$

Son una perturbación de la cópula producto. Si el parámetro de dependencia θ es igual a cero la cópula FGM colapsa en la cópula producto. Es atractiva por su simplicidad, sin embargo, es restrictiva en el sentido que sólo puede ser usada cuando la dependencia entre las marginales es de magnitud modesta, ver figura 5.3.

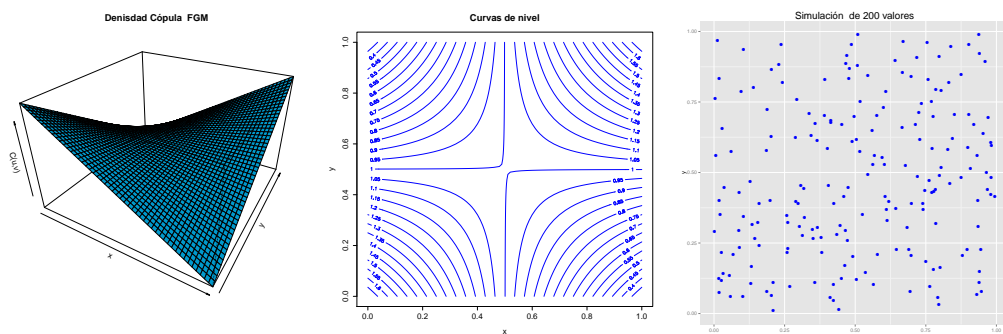


Figura 5.3: Gráfico de la densidad de la cópula de FGM con $\theta = 0,7$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Cópula Gaussiana.

Es de la forma,

$$C(u_1, u_2; \theta) = \Phi_G(\Phi^{-1}(u_1), \Phi^{-1}(u_2); \theta) = \quad (5.21)$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\theta^2)^{1/2}} \cdot \frac{-(s^2 - 2\theta st + t^2)}{2(1-\theta^2)} ds dt,$$

donde Φ es la distribución normal estándar y Φ_G es la distribución normal bivariada estándar con coeficiente de correlación θ restringido al intervalo $(-1, 1)$, ver figura 5.4. Cópula introducida por Lee en 1983, [50], que permite modelar con gran flexibilidad por igual grado dependencias tanto positivas como negativas.

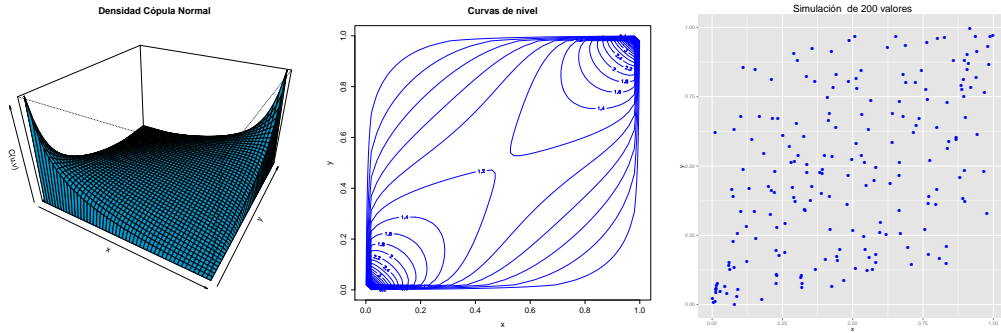


Figura 5.4: Gráfico de la densidad de la cópula Gaussiana con $\theta = 0,25$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Cópula de Student.

Es una cópula con dos parámetros de dependencia, con ν grados de libertad y correlación ρ ,

$$C^t(u_1, u_2; \nu, \rho) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \cdot \left\{ 1 + \frac{(s^2 - 2\rho st + t^2)}{\nu(1-\rho^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} ds dt, \quad (5.22)$$

con $t_\nu^{-1}(u_1)$ la inversa de la distribución univariada de Student con ν grados de libertad. El parámetro de dependencia ν controla lo “pesado” de las colas. Si $\nu < 3$ no existe la varianza y si $\nu < 5$ el cuarto momento no existe. Para $\nu \rightarrow \infty$ se cumple que $C^t(u_1, u_2; \nu, \rho) \rightarrow \Phi_G(u_1, u_2; \rho)$. Una ventaja que poseen las cópulas Gaussiana y de Student con respecto a las funciones de distribución de las cuáles se derivan, es que a partir de las cópulas es posible utilizar variables aleatorias que sigan distribuciones marginales que no sean del mismo tipo, ver figura 5.5.

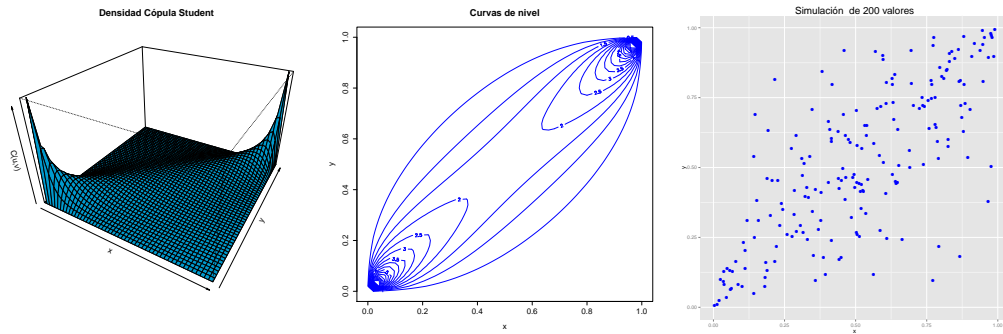


Figura 5.5: Gráfico de la densidad de la cópula de Student con $\rho = 0,8$ y g.l.=4, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Cópula de Clayton.

Dado $\theta > 0$ es de la forma,

$$C(u_1, u_2, \theta) = (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}. \quad (5.23)$$

La cópula de Clayton muestra dependencia débil en las colas, ver figura 5.6.

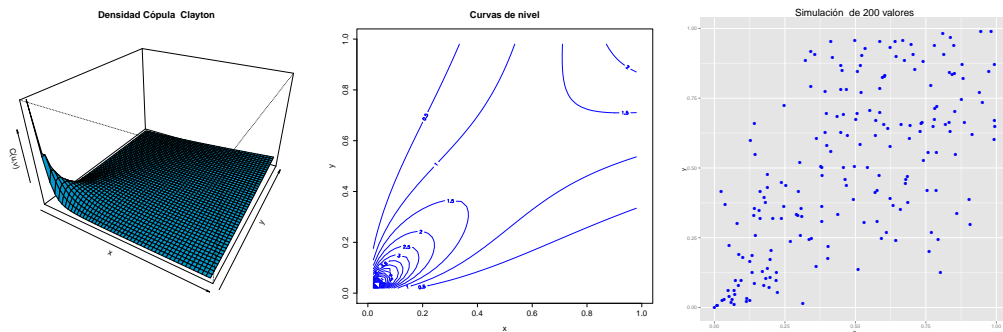


Figura 5.6: Gráfico de la densidad de la cópula de Clayton con $\theta = 3/2$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Forma parte de una familia más amplia, las cópulas Arquimedeanas, donde se encuentran las cópulas de Frank, Gumbel, Clayton generalizada y otras. Si bien todas estas cópulas son de la familia Arquimedeanas, describen tipos de dependencia completamente diferente. Por ejemplo, la cópula Gumbel muestra dependencia en los extremos solamente en la cola superior, mientras que la cópula Clayton la presenta en la cola contraria. Por su parte, la cópula Frank no muestra dependencia en ninguna de las dos colas y la cópula Clayton generalizada muestra dependencia en los extremos para ambas colas, aunque pueden ser

de intensidades diferentes. En todas las cópulas el Kendall-Tau, ver capítulo 6, se puede expresar como función de los parámetros.

5.2. Cópulas Extremas.

5.2.1. Introducción.

En esta sección se introducen aquellas familias de cópulas que permiten modelar eventos extremos multivariados.

Definición 10 (Cópula Extrema). *Se dice que C_* es una cópula extrema, si existe otra cópula C que verifica,*

$$C \left(u_1^{1/n}, u_2^{1/n}, \dots, u_d^{1/n} \right)^n \rightarrow C_*(u_1, u_2, \dots, u_d), \quad (5.24)$$

cuando $n \rightarrow +\infty$ y $\forall (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$.

Por tanto la cópula límite C_* se encuentra determinada de forma única por la cópula C , si bien las distribuciones marginales afectarán la distribución multivariada, la estructura de dependencia no se verá modificada por éstas.

Básicamente esta definición es concebida de forma que las distribuciones marginales estén modeladas por un máximo. Es decir, si $U_i = (U_{i,1}, \dots, U_{i,d})$, $i \geq 1$, es una sucesión de copias independientes de $U = (U_1, \dots, U_d)$ cuya distribución es la cópula C , la definición anterior se puede expresar como,

$$P \left(\max_{i=1, \dots, n} U_{i,1}^n \leq u_1, \max_{i=1, \dots, n} U_{i,2}^n \leq u_2, \dots, \max_{i=1, \dots, n} U_{i,d}^n \leq u_d \right) \rightarrow C_*(u_1, u_2, \dots, u_d), \quad (5.25)$$

cuando $n \rightarrow +\infty$ y $\forall (u_1, u_2, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$.

Mediante un paralelismo con la teoría de valores extremos ya desarrollada, se dice que la cópula C pertenece al dominio de atracción de C_* .

Definición 11 (Cópula Máx-estable). *Se dice que una cópula C es máx-estable si,*

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d)^n = C(u_1^n, u_2^n, \dots, u_d^n), \quad \forall n > 0. \quad (5.26)$$

Es sencillo demostrar que las cópulas extremas son máx-estables. El siguiente teorema exhibe una caracterización de las cópulas extremas, lo cual permite la construcción de muchas de ellas.

Teorema 9 (Representación de Pickands). *Toda cópula C_* es una cópula extrema si y sólo si admite la siguiente representación,*

$$C_*(u_1, u_2, \dots, u_d) = \exp \left\{ B(w_1, \dots, w_d) \sum_{i=1}^d \bar{u}_i \right\}, \quad (5.27)$$

siendo $\bar{u}_i = \log u_i$, $w_i = \frac{\bar{u}_i}{\sum_{j=1}^d \bar{u}_j}$ y B es una función convexa, la cual está definida como,

$$B(w_1, \dots, w_d) = \int_{S_d} \text{máx}(x_1 w_1, \dots, x_d w_d) dU(x_1, \dots, x_d), \quad (5.28)$$

con U una medida finita sobre el simplex unitario S_d .

Demostración. Ver [64]. □

La función B , denominada función de dependencia, toma una representación sencilla en dimensión 2, definiendo $A(w) = B(w, 1 - w)$ con $w \in [0, 1]$ podemos expresar la cópula de valor extremo como,

$$C_*(u_1, u_2) = \exp \left\{ (\log u_1 + \log u_2) A \left(\frac{\log u_1}{\log u_1 + \log u_2} \right) \right\}, \quad (5.29)$$

donde A es una función convexa y $\text{máx}(w, 1 - w) \leq A(w) \leq 1$.

Esto permite reconstruir la función A a partir de la cópula, pues

$$A(w) = -\log C(e^{-w}, e^{(1-w)}). \quad (5.30)$$

Siendo $V(z_1, z_2) = -(1/z_1 + 1/z_2)A(\frac{z_2}{z_1+z_2})$ se cumple que,

- $V(z_1, \infty) = 1/z_1$, $V(\infty, z_2) = 1/z_2$.
- V es una función homogénea de grado -1.
- $C_*(u_1, u_2) = \exp \left\{ -V \left(-\frac{1}{\log u_1}, -\frac{1}{\log u_2} \right) \right\}$.
- $V(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$ y $V(z_1, z_2) = \frac{1}{\text{mín}(z_1, z_2)}$ corresponden al caso de independencia y dependencia completa respectivamente.

Estas propiedades si bien están enunciadas en dimensión 2 simplemente para una mejor comprensión son extensibles al caso d-dimensional.

5.2.2. Algunos ejemplos.

Son desarrollados algunos ejemplos de cópulas extremas y en aquellos casos donde la notación es muy engorrosa se realiza el desarrollo en dimensión 2 sin pérdida de generalidad.

Cópula de Gumbel-Hougaard o Familia Logística. Es un caso particular de la cópula de Arquímedes tomando como generadora la función $\phi(t) = -\log(t)$, ver figura 5.7,

$$C_*(u_1, u_2, \dots, u_d) = \exp \left[- \left\{ \sum_{j=1}^d (-\log u_j)^{1/\alpha} \right\}^\alpha \right], \quad \text{si } 0 < \alpha \leq 1. \quad (5.31)$$

El parámetro de dependencia $\theta = 1/\alpha$ está restringido al intervalo $[1, \infty)$. Los valores de 1 e infinito se corresponden a la independencia y a la cota superior de Fréchet respectivamente, la familia no alcanza para ningún valor de θ la cota inferior de Fréchet. Al igual que la cópula de Clayton no cuenta las dependencias negativas, pero en contraste con ésta exhibe una dependencia fuerte en la cola derecha y relativamente débil en la cola izquierda.

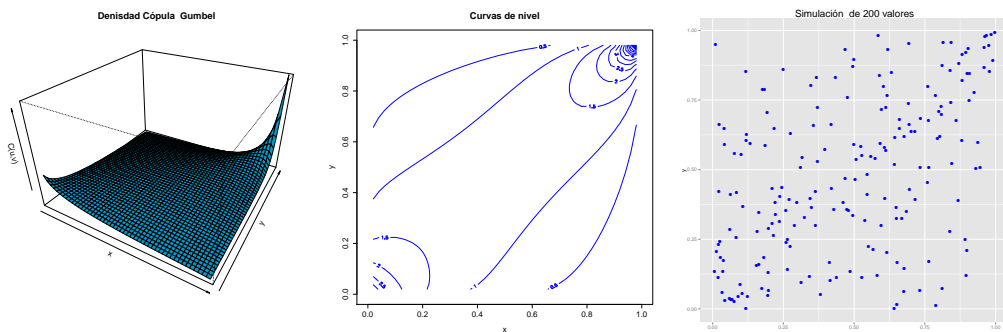


Figura 5.7: Gráfico de la densidad de la cópula de Gumbel con $\alpha = 2/3$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Cópula de Galambos o Familia Logística Negativa. Es de la forma,

$$C_*(u_1, u_2, \dots, u_d) = \exp \left[- \sum_{J \subset \{1, \dots, d\}, |J| \geq 2} (-1)^{|J|} \left\{ \sum_{j \in J} (-\log u_j)^{-\alpha} \right\}^{-1/\alpha} \right] \prod_{i=1}^d u_i, \quad (5.32)$$

si $\alpha > 0$. La densidad, sus curvas de nivel y la simulación de 200 valores se pueden apreciar en la figura 5.8.

Ambas familias mencionadas presentan una dificultad con respecto a la modelación de la dependencia pues se encuentran limitadas a un único parámetro de dependencia α .

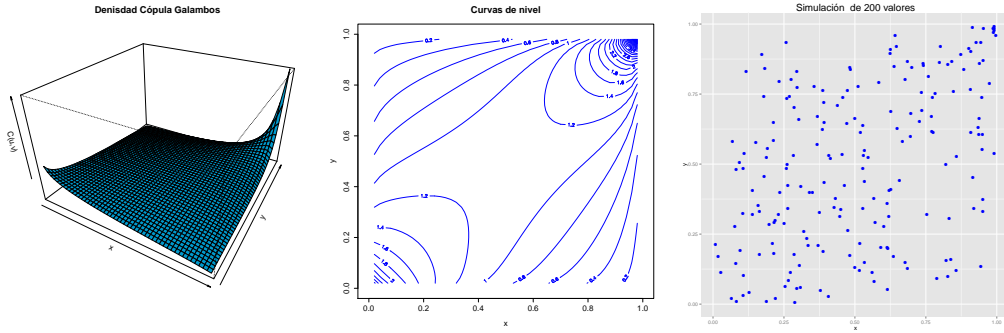


Figura 5.8: Gráfico de la densidad de la cópula de Galambos con $\alpha = 2/3$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Cópula de Hüsler-Reiss Se puede demostrar, ver [38], que la cópula gaussiana con coeficiente de correlación $\rho < 1$ cumple que,

$$C(u_1^{1/n}, u_2^{1/n})^n \rightarrow u_1 u_2, \quad (5.33)$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Para obtener una cópula extrema no trivial se considera ρ dependiendo de n de forma que $(1 - \rho_n) \log n \rightarrow a^2$ con $n \rightarrow \infty$, siendo a una constante no negativa. En este caso el límite obtenido es la cópula de Hüsler-Reiss,

$$C_*(u_1, u_2) = \exp \left[\Phi \left\{ \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \left(\frac{\log u_2}{\log u_1} \right) \right\} \log u_1 + \Phi \left\{ \frac{a}{2} + \frac{1}{a} \log \left(\frac{\log u_1}{\log u_2} \right) \right\} \log u_2 \right], \quad (5.34)$$

siendo Φ la acumulada de la normal estándar. Ver figura 5.9.

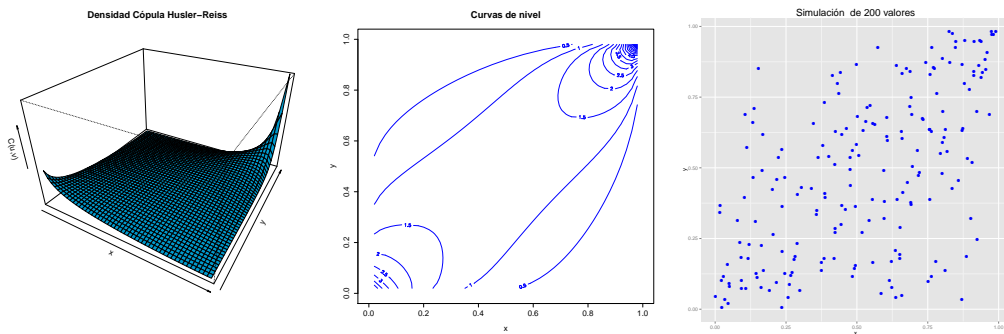


Figura 5.9: Gráfico de la densidad de la cópula de Hüsler-Reiss con $a = 3/2$, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Cópula t -Extremal. En 2005, Damarta y McNeil, [15], a partir de la siguiente propiedad de la distribución t_ν ,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{t_\nu^{-1}(1 - sx)}{t_\nu^{-1}(1 - s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{t_\nu^{-1}(sx)}{t_\nu^{-1}(s)} = x^{-1/\nu}, \quad (5.35)$$

y de la cópula t con ν grados de libertad con correlación ρ determinan la cópula t -extremal,

$$C_*(u_1, u_2) = \exp \left[T_{\nu+1} \left\{ \frac{\rho}{b} + \frac{1}{b} \log \left(\frac{\log u_2}{\log u_1} \right)^{1/\nu} \right\} \log u_1 + T_{\nu+1} \left\{ \frac{\rho}{b} + \frac{1}{b} \log \left(\frac{\log u_1}{\log u_2} \right)^{1/\nu} \right\} \log u_2 \right], \quad (5.36)$$

siendo T_ν la distribución acumulada de la Student con ν grados de libertad y $b^2 = \frac{1-\rho^2}{\nu+1}$, ver figura 5.10.

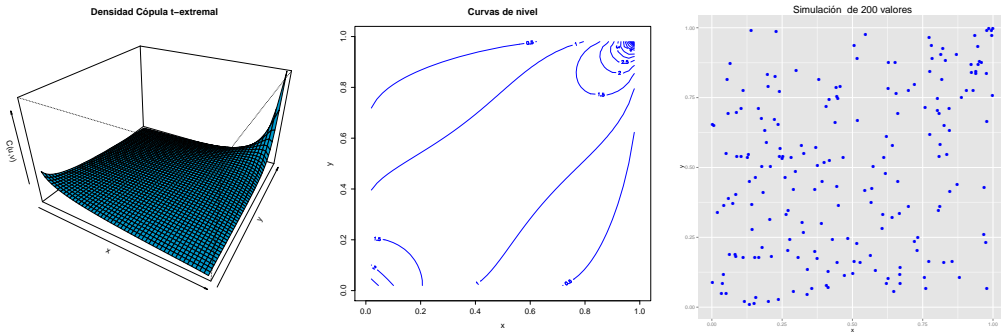


Figura 5.10: Gráfico de la densidad de la cópula de t -extremal con $\rho = 2/3$ y 4 grados de libertad, curvas de nivel, y simulación de 200 valores con marginales $U(0, 1)$.

Presenta colas más pesadas que la cópula de Hüsler-Reiss, y ésta última, si bien no es un caso particular de la cópula t -extremal, puede obtenerse considerando $\rho = e^{-\frac{a^2}{2\nu}}$, para ν suficientemente grande se deduce que $b \sim a/\nu$.

Existen otras cópulas extremas, por ejemplo modificando las descritas de forma de introducir asimetría, pero no serán utilizadas en la tesis.

5.3. Cópulas en dimensiones elevadas: Regular Vines.

Es conocida como una de las grandes debilidades del enfoque de cópulas la modelación en dimensiones altas, ver [55]. Embrechts y Hofert en 2013, [28], mediante un estudio de simulación describen el impacto del aumento de la dimensión en la precisión de las

estimaciones. Una posible construcción de cópulas en este paradigma es dada por Joe en 1996, ver [40], a través de cópulas bidimensionales. Bedford y Cooke en 2001, [4], trabajan este tipo de construcciones a partir de métodos gráficos, en lo que llaman *regular vines*, modelando la dependencia en función de un conjunto de árboles. Kurowicka y Cooke desarrollan en 2006, [47], la teoría de construcción de modelos mediante cópulas de a pares (PCC), a través de las cópulas bivariadas gaussianas. Aas, Czado, Frigessi y Bakken en 2009,[2], plantean la verosimilitud en el caso de las cópulas de Gumbel, Clayton y Student para PCC. Se realiza en esta sección un breve desarrollo de la teoría en base a Kurowicka y Joe 2011, [48].

5.3.1. Construcción de modelos a través de pares de cópulas bivariadas.

A partir del teorema Sklar se puede expresar la densidad conjunta en dimensión 2 como,

$$f(x_1, x_2) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (5.37)$$

siendo c_{12} la cópula densidad. Por tanto la densidad condicional es,

$$f_{2/1}(x_2/x_1) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_2(x_2). \quad (5.38)$$

Si se realiza el mismo desarrollo en dimensión 3,

$$\begin{aligned} f_{13/2}(x_1, x_3/x_2) &= c_{13/2}(F_{1/2}(x_1/x_2), F_{3/2}(x_3/x_2)) f_{1/2}(x_1/x_2) f_{3/2}(x_3/x_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f_{3/12}(x_3/x_1, x_2) = c_{13/2}(F_{1/2}(x_1/x_2), F_{3/2}(x_3/x_2)) f_{3/2}(x_3/x_2) \end{aligned}$$

Como $f_{3/2}(x_3/x_2) = c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) f_3(x_3)$, se puede escribir la densidad conjunta en dimensión 3 como,

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f_{3/12}(x_3/x_1, x_2) f_{2/1}(x_2/x_1) f_1(x_1) = \\ &= c_{13/2}(F_{1/2}(x_1/x_2), F_{3/2}(x_3/x_2)) c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) f_3(x_3) f_2(x_2) f_1(x_1), \end{aligned}$$

en general, en \mathbb{R}^d , se puede factorizar la densidad conjunta en función de las cópulas de a pares,

$$f(x_1, \dots, x_d) = \left[\prod_{j=1}^{d-1} \prod_{i=1}^{d-j} c_{i,(i+j)/(i+1), \dots, (i+j-1)} \right] \left[\prod_{s=1}^d f_s(x_s) \right]. \quad (5.39)$$

Cabe destacar que la descomposición no es única. Una forma gráfica de representar estas estructuras y ayudar a su comprensión son las llamadas *regular vines*.

5.3.2. Estructuras de las regular vines.

Se definen la regular vines como un conjunto de árboles con ciertas restricciones.

Definición 12 (Estructura de una regular vines en dimensión d). *Diremos un conjunto de árboles $\mathcal{U} = (T_1, \dots, T_{d-1})$ es una vines de d elementos si y sólo si,*

- T_1 es un árbol con nodos $N_1 = \{1, \dots, d\}$ y un conjunto de aristas denotadas por E_1 .
- Para $i = 2, \dots, m$, T_i es un árbol con nodos $N_i = E_{i-1}$ y un conjunto de aristas E_i .
- (Condición de proximidad).

Dos nodos en el árbol $j + 1$ son unidos por una arista si las aristas comparten un nodo en el árbol j .

Definición 13 (Distribución de una regular vines en dimensión d , R-vines.). *Una distribución mediante regular vines es definida por,*

- Un estructura de regular vines.
- Cada arista se corresponde con la densidad de una cópula de a pares.
- La densidad de una distribución de una regular vines es definida por el producto de las $d(d - 1)/2$ cópulas de a pares identificadas con las aristas de la estructura regular vines y por el producto de las densidades marginales.

Por tanto una cópula R-vine es especificada por una terna (F, \mathcal{U}, B) que cumple,

- $F = (F_1, \dots, F_d)$ es un vector de funciones de distribución continuas.
- \mathcal{U} es una R-vines de d elementos.
- $B = \{B_e/i = 1, \dots, d - 1; e \in E_i\}$ donde B_e es una cópula bivariada y E_i es el conjunto de aristas del árbol T_i de la R-vines, \mathcal{U} .

Si en cada árbol un único nodo es conectado a los restantes se llama *vine canónica* y se denota C-vines. En el caso que cada nodo es conectado a lo sumo con dos aristas a los restantes nodos en cada árbol, se llaman D-vines.

5.3.3. Ejemplos.

Ejemplo 1 : C-Vines.

En la figura 5.11 puede apreciarse una posible estructura de una c-vines en dimensión 5. La densidad conjunta que se corresponde a este caso es,

$$f_{1,2,3,4,5} = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 c_{12} c_{13} c_{14} c_{15} c_{23/1} c_{24/1} c_{25/1} c_{34/12} c_{35/12} c_{45/123} \quad (5.40)$$

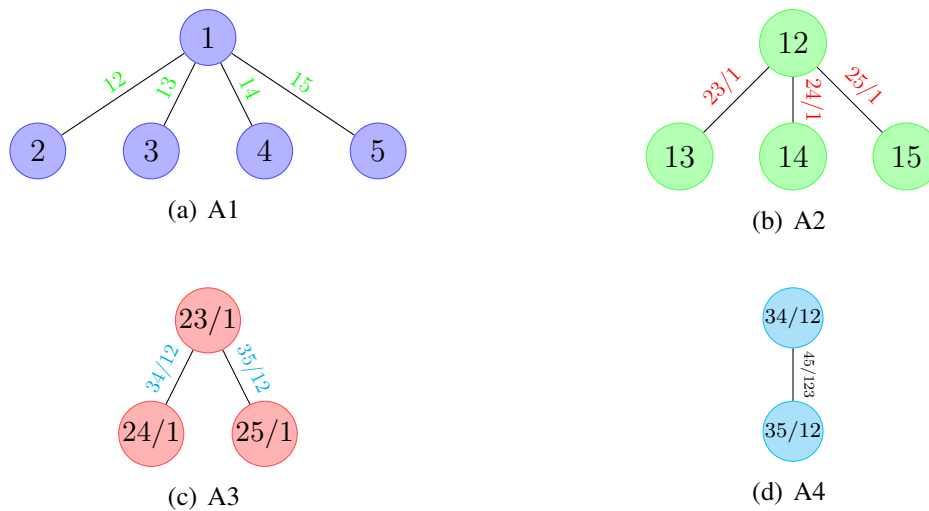


Figura 5.11: Una posible estructura de árboles C-vines en dimensión 5.

Ejemplo 2 : D-Vines.

En la figura 5.12 se expone un estructura de D-vines en dimensión 5, la densidad conjunta correspondiente es,

$$f_{1,2,3,4,5} = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 c_{12} c_{23} c_{34} c_{45} c_{13/2} c_{24/3} c_{35/4} c_{14/23} c_{25/34} c_{15/234}, \quad (5.41)$$

En general en dimensión d hay $d!/2$ posibles estructuras de C-vines e igual número de D-vines. El uso de una u otra estructura depende del problema a modelar.

Ejemplo 3 : R-Vines.

Las R-vines contiene a los ejemplos anteriores, por tanto brindan mayor flexibilidad a la hora de modelar las relaciones de dependencia. En la figura 5.13 se expone un estructura de R-vines en dimensión 5, la densidad conjunta correspondiente es,

$$f_{1,2,3,4,5} = f_1 f_2 f_3 f_4 f_5 c_{12} c_{13} c_{34} c_{15} c_{23/1} c_{14/3} c_{35/1} c_{24/13} c_{45/13} c_{25/134}. \quad (5.42)$$

El número posible de R-vines en un espacio d -dimensional es $\frac{d!}{2} 2^{\frac{(d-2)(d-3)}{2}}$, ver [57].

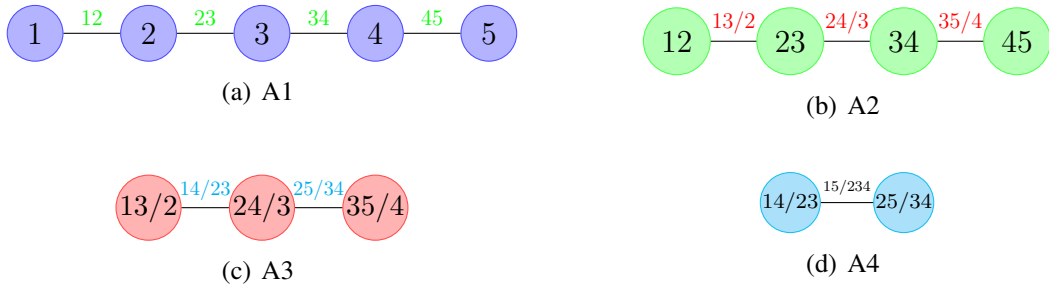


Figura 5.12: Una posible estructura de árboles D-vines en dimensión 5.

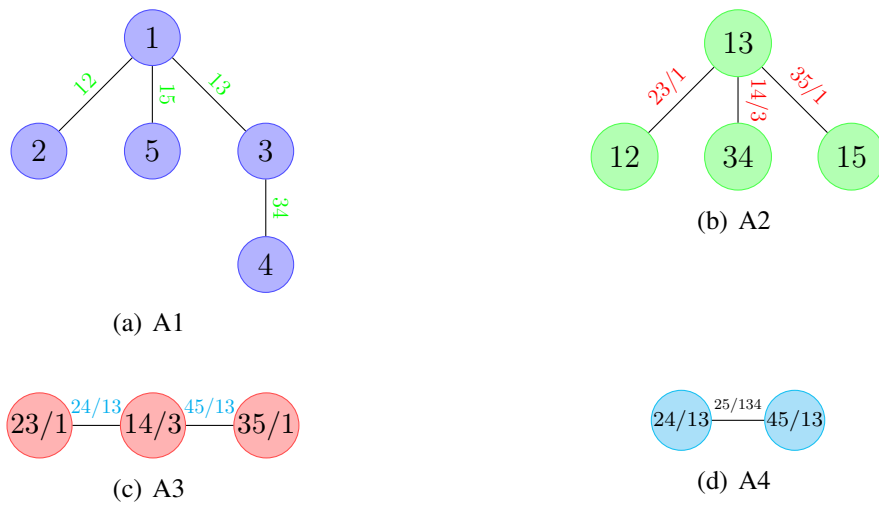


Figura 5.13: Una posible estructura de árboles R-vines en dimensión 5.

5.3.4. Matriz de especificación de una R- Vines.

Morales-Nápoles en 2008, ver [56], y DíMann en 2010, ver [25], introducen una matriz que, bajo ciertas restricciones, induce una estructura de R-vines.

Definición 14 (Conjunto de restricciones). *Sea $M \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}$ una matriz triangular inferior con elementos $m_{i,j}$ para $i, j = 1, \dots, d$. El i -ésimo conjunto de restricciones para M es,*

$$C_M(i) = \{(\{m_{i,i}, m_{k,i}\}, D) : k = i + 1, \dots, d; D = \{m_{k+1,i}, \dots, m_{n,i}\}\}, \quad (5.43)$$

con $i = 1, \dots, d - 1$. $D = \{\}$ si $k = d$.

El conjunto de restricciones para la matriz M es,

$$CM = C_M(1) \cup \dots \cup C_M(d - 1). \quad (5.44)$$

Para definir una matriz R-vines, se denota,

$$\begin{aligned} L_M(i) &= \{m_{i,i}, \dots, m_{d,i}\}, \\ B_M(i) &= \{(m_{i,i}, D)/k = i + 1, \dots, d; D = \{m_{k,i}, \dots, m_{n,i}\}\}, \\ \tilde{B}_M(i) &= \{(m_{k,i}, D)/k = i + 1, \dots, d; D = \{m_{i,i}\} \cup \{m_{k+1,i}, \dots, m_{n,i}\}\}, \\ BM &= B_M(1) \cup \dots \cup B_M(d - 1), \\ \tilde{B}M &= \tilde{B}_M(1) \cup \dots \cup \tilde{B}_M(d - 1). \end{aligned}$$

Definición 15 (Matriz R-vines). *Sea $M \in \{1, \dots, n\}^{n \times n}$ una matriz triangular inferior con elementos $m_{i,j}$ para $i, j = 1, \dots, d$. Se dice que es una matriz R-vines si satisface las siguientes condiciones,*

- $L_M(i) \subset L_M(j)$ si $1 \leq j < i \leq d$,
- $m_{i,i} \notin L_M(i + 1)$ si $i = 1, \dots, d - 1$,
- Para $i = 1, \dots, d - 1$ y para todo $k = i + 1, \dots, d - 1$ se cumple que,

$$(m_{k,i}, \{m_{k+1,i}, \dots, m_{n,i}\}) \in BM \cup \tilde{B}M$$

Ejemplo.

Si se considera la matriz R-vines,

$$M = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 & 5 \\ 6 & 7 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 6 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 6 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz M define con cada una de sus columnas las cópulas que determinan la densidad conjunta,

Columna 1	Columna 2	Columna 3	Columna 4	Columna 5	Columna 6
4 7 / 6 5 1 2 3	5 7 / 6 1 3 2	1 7 / 6 2 3	7 2 / 3 6	6 2 / 3	2 3
4 6 / 5 1 2 3	5 6 / 1 3 2	1 6 / 3 2	7 3 / 6	6 3	
4 5 / 1 2 3	5 1 / 3 2	1 3 / 2	7 6		
4 1 / 2 3	5 3 / 2	1 2			
4 2 / 3	5 2				
4 3					

5.3.5. Selección del Modelo.

La selección de la cópula R-vines consta de 3 pasos.

1. Seleccionar la estructura R-vines entre todas la posibles.
2. Elegir las $d(d - 1)/2$ familias paramétricas de cópulas de a pares.
3. Estimar los parámetros de las cópulas seleccionadas.

En este caso, como se busca modelar dependencia entre valores máximos, en el paso dos se consideran familias de cópulas extremas. El problema con mayor complejidad es seleccionar de forma correcta la estructura R-vines de todas las posibles en el paso 1.

Selección de la estructura R-vines.

Para la selección de la estructura correcta se realiza un procedimiento secuencial introducido por Dißmann, Brechmann, Czado y Kurowicka en 2013, ver [26]. En primer lugar se elige una medida de dependencia $\delta_{i,j}$ que le asigne pesos a las aristas, en general por su sencillo cálculo se selecciona el tau de Kendall, en la tesis se considera como medida de dependencia el valor del F-madograma. Posteriormente bajo un algoritmo adecuado se selecciona un árbol, el primero del conjunto, que maximice,

$$\sum_{\text{aristas } e=\{i,j\}} |\delta_{i,j}|.$$

El algoritmo a utilizar para determinar el árbol óptimo es el *Algoritmo Prim*, introducido por el matemático Checo V. Jarník en 1930 y posteriormente desarrollado en 1957 por R.C Prim. Los pasos básicos de dicho algoritmo son los siguientes,

1. Considerar el grafo conexo $G = (N, E)$
2. Considerar subgrafo $T = (N', E')$ con $E' = \{N, E'\}$ y N' formado al comienzo por un nodo arbitrario n .
3. Mientras E' no conecte con todos los nodos de N ,
 - a) Seleccionar una nueva arista $e \in E$ de forma que maximice el peso al conectarse un nuevo nodo que no este en E' .
 - b) Añadir la arista y el nodo a E' y N' respectivamente.

Luego de elegida la estructura se seleccionan las familias de cópulas bidimensionales y se estiman los parámetros de cada cópula por máxima verosimilitud. Por ejemplo si la dimensión es 20 hay 190 cópulas de a pares a seleccionar. El método de simplificación, que consiste en considerar cópulas de una sola familia, y truncamiento, suponer que a partir de cierto nivel las cópulas son independientes, fueron introducidos por Brechmann, Czado y Aas en 2012, ver [8].

Por último se calculan las distribuciones empíricas condicionales, ver [42], de forma recursiva pues,

$$F(x/v) = \frac{\partial C_{xv_j/v_{-j}}(F(x/v_{-j}, F(v_j/v_{-j}))}{\partial F(v_j/v_{-j})}$$

A partir de ellas se reitera el algoritmo.

5.4. Extensión Espacial.

Las cópulas son por definición de origen multivariado en una primera instancia, por tanto parecen suscitar problemas en referencia al caso infinito dimensional. Sin embargo si se observa un proceso estocástico es intrínsecamente multivariado. Además mediante el teorema de extensión de Kolmogorov uno puede extender cualquier cópula multivariada a un proceso estocástico. Si bien no es natural la extensión de cualquier cópula a dimensión infinita, sí lo es en las cópulas Gaussiana y de Student.

Extensión de la cópula gaussiana. Se considera el proceso Z en la posición x ,

$$Z(x) = F_x^{\leftarrow} [\Phi\{\epsilon(x)\}], \quad x \in \mathcal{X}, \quad (5.45)$$

siendo $\epsilon(x)$ el proceso estándar Gaussiano y F_x^{\leftarrow} la inversa generalizada de la distribuciones acumuladas marginales.

Extensión de la cópula de Student. Se considera el proceso Z en la locación x ,

$$Z(x) = F_x^{\leftarrow} \left[T_\nu \left\{ \epsilon(x) \sqrt{\frac{\nu}{X}} \right\} \right], \quad x \in \mathcal{X}, \quad (5.46)$$

donde X es una variable aleatoria chi-cuadrado con ν grados de libertad. El modelo dependerá de la elección de la distribución F , en este caso como se quiere modelar los valores extremos se considera F una DVE.

Si se considera un modelo lineal para explicar los parámetros de forma, posición y escala en función de la latitud, longitud y altura de la posición x , como en los procesos max-estables, es sencillo plantear la función de verosimilitud y encontrar las estimaciones máximo verosímiles. Por ejemplo en el caso normal,

$$\varphi[\Phi^{\leftarrow}\{F_{x_1}(z_1), \dots, F_{x_k}(z_k)\}; \Sigma] \prod_{j=1}^k \frac{\varphi[\Phi^{\leftarrow}\{F_{x_j}(z_j)\}]}{f_{x_j}(z_j)}, \quad (5.47)$$

donde $\varphi[\cdot; \Sigma]$ es la densidad k -variante con matriz de correlaciones $\Sigma = \{\rho(x_i - x_j)\}_{i,j}$ y f_{x_j} es la densidad asociada a F_{x_j} .

La extensión de las cópulas extremas se encuentra altamente asociada con los procesos máx-estables. A partir de la caracterización ya vista de Schlather para los procesos máx-estables, $Z(x) = \max_{i \geq 1} \zeta_i Y_i(x)$, $x \in \mathcal{X}$, donde $Z(x)$ es una Fréchet unitaria. La distribución finita acumulada multivariada es,

$$P[Z(x_1) \leq z_1, \dots, Z(x_k) \leq z_k] = \exp \left\{ -E \left[\max_{j=1, \dots, k} \frac{Y(x_j)}{z_j} \right] \right\}, \quad (5.48)$$

lo cual tiene un estrecho vínculo con las cópulas extremas si se considera $u_j = e^{-1/z_j}$ y $V(z_1, \dots, z_k) = E \left[\max_{j=1, \dots, k} \frac{Y(x_j)}{z_j} \right]$

Se puede observar que el modelo de Brown-Resnick extiende al caso infinito dimensional la cópula de Hüsler-Reiss con $a^2 = 2\gamma(x_i - x_j)$, $x_i, x_j \in \mathcal{X}$.

El proceso t -extremal extiende a dimensión infinita la cópula t -extremal con $Y(x) = c_\nu \max\{0, \epsilon(x)\}^\nu$, con $c_\nu = \pi^{1/2} 2^{-(\nu-2)/2} \Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^{-1}$, $\nu \geq 1$, siendo ϵ un proceso gaussiano estacionario y Γ la función gamma.

Capítulo 6

Medidas de Dependencia.

El capítulo tiene por objetivo describir y cuantificar algunas medidas de dependencia. En primera instancia se introducen algunos conceptos generales, posteriormente se define una medida de dependencia para sucesiones y se enuncia un teorema que generaliza el teorema de Fisher y Tippett para sucesiones dependientes con algunas restricciones sobre la sucesión.

Se definen medidas de dependencia para valores extremos y se enuncian sus principales propiedades.

6.1. Propiedades Deseables de las Medidas de Dependencia.

El par de variables (X, Y) es llamado dependiente si las variables no son independientes. En el caso bivariado se denota $\delta(X, Y)$ a una medida escalar de dependencia. Embrechts en 1997, [29], lista cuatro propiedades deseables para este coeficiente,

- $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ (simetría).
- $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$ (normalización).
- $\delta(X, Y) = 1 \Rightarrow (X, Y)$ es comonotónica.
 $\delta(X, Y) = -1 \Rightarrow (X, Y)$ es contramonotónica.
- Para una transformación monótona $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(Y, X) & \text{si } T \text{ es creciente} \\ -\delta(Y, X) & \text{si } T \text{ es decreciente} \end{cases} .$$

6.2. Correlación y Dependencia.

El concepto mas familiar de asociación es el coeficiente de correlación para un par de variables,

$$\rho_{XY} = \frac{\text{cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y},$$

que puede ser extendido para el caso multivariado a partir de la matriz de correlación. Si el par (X, Y) tiene distribución normal bivalente entonces la correlación contiene toda la información acerca de la dependencia conjunta, si $\rho_{XY} = 0$ las variables son independientes. Pero en general correlación cero no implica independencia. Por ejemplo si $X \sim N(0, 1)$, y $Y = X^2$, la covarianza es 0 y sin embargo el par (X, Y) es claramente dependiente. Por tanto el coeficiente de correlación es una medida de dependencia débil. La segunda limitación de la correlación es que no se encuentra definido para colas pesadas pues no existe el segundo momento. La tercera limitación es que no es invariante bajo transformaciones crecientes no lineales y es una medida de dependencia escalar, resume toda la relación de dependencia en un sólo número. Aunque esto facilita la interpretación, puede tener inconvenientes en la toma de decisiones. Por tanto algunas medidas alternativas son necesarias.

6.3. Índice Extremal.

6.3.1. Definición e Interpretación.

Definición 16 (Condición $D(u_n)$ de Dependencia). *Una sucesión estacionaria $\{X_n\}_{n \geq 1}$ satisface la condición $D(u_n)$ si para cualesquiera $i_1 < \dots < i_p < j_1 < \dots < j_q$, con $j_1 - i_p > l_n$, se cumple que,*

$$\left| P(X_{i_1} \leq u_n, \dots, X_{i_p} \leq u_n, X_{j_1} \leq u_n, \dots, X_{j_q} \leq u_n) - P(X_{i_1} \leq u_n, \dots, X_{i_p} \leq u_n) P(X_{j_1} \leq u_n, \dots, X_{j_q} \leq u_n) \right| \leq \alpha(n, l_n), \quad (6.1)$$

donde $\alpha(n, l_n) \rightarrow 0$ para alguna sucesión l_n tal que $l_n/n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Teorema 10 (Límites de Extremos para Sucesiones Dependientes). *Sea $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión estacionaria que satisface la condición $D(u_n)$ y M_n la sucesión de máximos parciales. Si existen constantes $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tales que,*

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G(z) \quad (6.2)$$

con $n \rightarrow \infty$ y la sucesión estacionaria satisface la condición $D(a_n z + b_n)$ para cualquier z , entonces G pertenece a la familia DGVE.

Demostración. Ver [51]. □

Si bien la distribución límite sigue siendo la de los valores extremos, se produce una corrección en los parámetros de posición y escala, no así en el de forma, en referencia si la sucesión fuera independiente. El siguiente teorema vincula las dos distribuciones límite.

Teorema 11. Dadas $\{X_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión estacionaria y $\{X_n^*\}_{n \geq 1}$ una sucesión independiente con la misma distribución marginal. Sea M_n y M_n^* los máximos parciales respectivos, bajo ciertas condiciones de regularidad se tiene que existen $a_n > 0$ y $b_n \in \mathbb{R}$ tal que,

$$P\left(\frac{M_n^* - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G_1(z) \quad \text{no degenerada,} \quad (6.3)$$

cuando $n \rightarrow \infty$, si y sólo si

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \rightarrow G_2(z) \quad \text{no degenerada,} \quad (6.4)$$

donde $G_2(z) = [G_1(z)]^\theta$ con $\theta \in [0, 1]$.

Demostración. Ver [51]. □

Este parámetro θ recibe el nombre de *índice extremal*. Es sencillo probar que dada una constante u_n que cumple que $n\bar{F}(u_n) \rightarrow \tau > 0$ entonces se cumple que,

$$P(M_n \leq u_n) \approx P^\theta(M_n^* \leq u_n) = F^{\theta n}(u_n). \quad (6.5)$$

Cabe hacer notar que el valor del índice extremal es independiente de la sucesión de umbrales u_n . La ecuación (6.5) permite interpretar el índice extremal como el número efectivo de observaciones independientes de la muestra.

6.3.2. Estimación.

Varios estimadores han sido propuestos para estimar el índice extremal, se presenta uno de ellos.

De (6.5) se deduce que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log P(M_n \leq u_n)}{n \log F(u_n)} = \theta, \quad (6.6)$$

lo que sugiere la construcción de un estimador de θ . Una aproximación de $F(u_n)$ puede ser dada por Glivenko-Cantelli, $1 - N/n$ donde N es el número de excedencias del umbral

u_n . Es posible aproximar $P(M_n \leq u_n)$, a partir de la condición $D(u_n)$ y pensando n en k bloques de tamaño r , como $(1 - K/k)^k$ siendo K el número de bloques con al menos una excedencia. Por tanto,

$$\hat{\theta} = \frac{k \log(1 - K/k)}{n \log(1 - N/n)}. \quad (6.7)$$

6.4. Coeficiente Extremal.

6.4.1. Definición e Interpretación.

Se busca una medida de dependencia que capture esta información de la mejor manera posible en referencia a las colas de la distribución. Ya se mencionó que el coeficiente de correlación no describe de forma adecuada la dependencia en valores extremos pues sólo lo hace para un tipo particular de distribuciones. En varias oportunidades se trabaja con marginales particulares, por ejemplo Fréchet unitarias o uniformes, pues sólo interesa captar la estructura de dependencia.

Definición 17. Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ un vector aleatorio de \mathbb{R}^k , con distribuciones marginales Fréchet unitarias. Dado $A \subset \{1, 2, \dots, k\}$. Si existe un real θ_A , $1 \leq \theta_A \leq |A|$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\max_{i \in A} \max_{j=1, \dots, n} \frac{X_i^{(j)}}{n} < z \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[P \left(\max_{j=1, \dots, n} \frac{X_1^{(j)}}{n} < z \right) \right]^{\theta_A} = e^{-\frac{\theta_A}{z}}, \quad \forall z > 0. \quad (6.8)$$

siendo $X_i^{(j)}$ la j -ésima copia independiente de la variable X_i , en este caso se dice que θ_A es el coeficiente extremal.

Si bien no siempre existe, bajo hipótesis muy débiles se puede afirmar su existencia, ver [74]. El coeficiente extremal es una variable de dependencia extrema entre las variables indexadas en A . Se puede interpretar como el número efectivo de variables independientes del conjunto A . Se cumple que $\theta_i = \theta_{\{i\}} = 1 \quad \forall i$ y se denota $\theta = \theta_{i,j} = \theta_{\{i,j\}}$ al coeficiente extremal a pares. En este caso si la sucesión es estacionaria se puede expresar la definición para pares diciendo que θ es el valor que verifica,

$$P(M_k \leq z) = e^{-\frac{\theta}{z}}, \quad \forall z. \quad (6.9)$$

El coeficiente extremal a pares toma entonces valores en el intervalo cerrado $[1,2]$. El extremo inferior corresponde a dependencia total y el extremo superior a independencia perfecta.

Por lo ya visto, bajo ciertas condiciones, se cumple que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\max_{j=1, \dots, n} \frac{X_i^{(j)}}{n} \leq z_i; i = 1, \dots, k \right) = G_k(z_1, \dots, z_k), \quad (6.10)$$

donde G_k pertenece a la familia de distribuciones multivariantes de valores extremos con distribuciones marginales Fréchet. Esta clase está caracterizada por una función V homogénea de grado -1 , donde

$$V(z_1, \dots, z_k) = -\log G_k(z_1, \dots, z_k) = \int_{S_k} \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \left(\frac{w_i}{z_i} \right) dH_k(z_1, \dots, z_k), \quad (6.11)$$

siendo S_k el simplex unitario $(k-1)$ -dimensional y H_k es una medida cuyas esperanzas marginales valen 1. A partir de (6.11) y (6.8) se deduce que,

$$\theta_A = \int_{S_k} \max_{i \in A} w_i dH_k(w_1, \dots, w_k), \quad (6.12)$$

y por tanto θ_A no necesita de argumentos asintóticos. En caso de que $|A| = K$ se cumple que,

$$V(z, z, \dots, z) = \frac{\theta_k}{z} \Rightarrow \theta_k = V(1, 1, \dots, 1). \quad (6.13)$$

Función Coeficiente Extremal.

Si se considera ahora un campo aleatorio $X(x)$ estacionario con $x \in \mathbb{R}^d$ y marginales Fréchet unitarias, se denota $X^{(j)}(x)$ a copias independientes del proceso $X(x)$ para $j = 1, 2, \dots$, se define la *función coeficiente extremal* $\theta(\cdot)$ de la siguiente manera,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\max_{j=1, \dots, n} \frac{\max \{X^{(j)}(h), X^{(j)}(o)\}}{n} \leq z \right) = e^{-\frac{\theta(h)}{z}}, \quad z > 0 \quad (6.14)$$

para cualquier $h \in \mathbb{R}^d$, donde o es el origen de coordenadas.

Algunas propiedades de la función coeficiente extremal. Sea $\theta(h)$, con $h \in \mathbb{R}^d$ la función coeficiente extremal de un proceso max-estable estacionario en \mathbb{R}^d . Entonces verifica la siguientes propiedades,

- $1 \leq \theta(h) \leq 2 \forall h$, el extremo inferior corresponde a dependencia completa y el derecho a independencia.

- $2 - \theta(h)$ es una función semidefinida positiva.
- $\theta(\cdot)$ no es diferenciable en el origen salvo que $\theta(h) = 1, \forall h$.

6.4.2. Ejemplos.

Se expresan algunas funciones coeficiente extremal a usar en el trabajo,

Modelo de Smith.

$$\theta(h) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{h^T \Sigma^{-1} h}}{2}\right). \quad (6.15)$$

Modelo de Schlather.

$$\theta(h) = 1 + \sqrt{\frac{1 - \rho(h)}{2}}. \quad (6.16)$$

Modelo de Brown-Resnick.

$$\theta(h) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{V[Y(h)]}}{2}\right). \quad (6.17)$$

Modelo Geométrico Gaussiano.

$$\theta(h) = 2\Phi\left(\frac{\sqrt{\sigma^2(1 - \rho(h))}}{2}\right). \quad (6.18)$$

Modelo t -Extremal.

$$\theta(h) = 2T_{\nu+1}\left(\sqrt{\frac{\nu+1}{1-\rho^2(h)}}(1-\rho(h)) - \sqrt{\frac{1-\rho^2(h)}{\nu+1}}\rho(h)\right). \quad (6.19)$$

En la figura 6.1 se muestran los gráficos de las distintas funciones coeficiente extremal, suponiendo que el proceso sea estacionario.

El modelo t -extremal tiene acotada la función coeficiente extremal por $2T_{\nu+1}(\sqrt{\nu+1})$ cuando $h \rightarrow \infty$, el modelo de Smith toma todos los valores posibles, mientras que el de Schlather en \mathbb{R}^2 toma valores por debajo de 1,838, y si la correlación es una función positiva la cota superior es $1 + \sqrt{1/2}$. En el modelo Geométrico Gaussiano la cota superior es $2\Phi(\sigma/\sqrt{2})$. Éstas cotas suelen ser un primer indicador de que modelo utilizar.

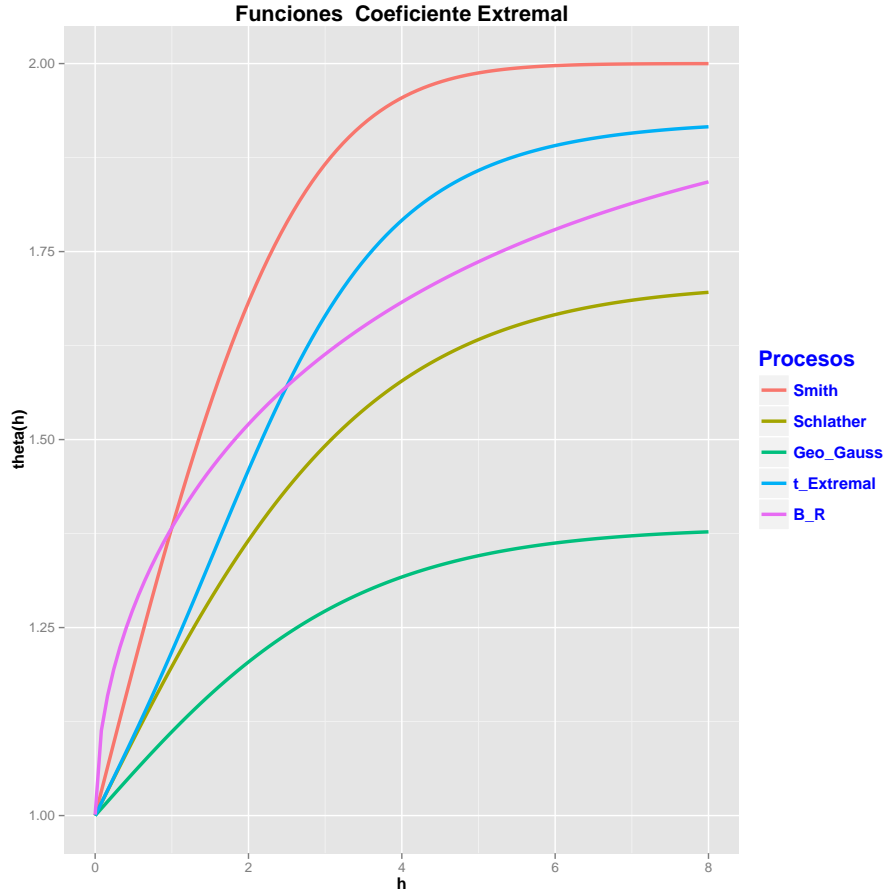


Figura 6.1: Funciones coeficiente extremal para distintos procesos máx-estables. En Smith se consideró matriz de covarianzas identidad. En los procesos Geométrico Gaussiano, t- Extremal y Schlather la función de correlación fue la de Whittle-Matérn $c_1 = c_2 = 1$, 4 grados de libertad en la t-Extremal, En Brown-Resnick $\gamma(h) = h$, y $\sigma = 1$ en el Geométrico Gaussiano.

6.4.3. Estimación del coeficiente extremal.

Estimador de Smith.

Propuesto por Smith en 1990, [77]. Es sencillo demostrar que si X_1 y X_2 tienen distribución Fréchet unitaria, entonces $1/X_1$ y $1/X_2$ se distribuyen exponencial con media 1 y por tanto $1/\max\{X_1, X_2\}$ distribuye exponencial con media θ , lo que conlleva a un estimador natural. Sean las variables transformadas, con los parámetros estimados por máxima verosimilitud, a Fréchet unitarias,

$$\{Y_{ni}, 1 \leq n \leq N, 1 \leq i \leq p\}, \quad (6.20)$$

se cumple que $\sum_n Y_{ni}^{-1} = \sum_n Y_{nj}^{-1} = N$. El estimador propuesto por Smith para el coeficiente extremal a pares es,

$$\hat{\theta} = \frac{N}{\sum_{n=1}^N \min(Y_{ni}^{-1}, Y_{nj}^{-1})}. \quad (6.21)$$

Tiene la desventaja que la estimación puede escapar del espacio paramétrico de θ por encima de 2, por tanto en la tesis se ha optado por trabajar con el estimador de Schlather y Tawn.

Estimador de Schlather y Tawn.

Propuesto por Schlather y Tawn en 2003, [74]. Sea $X^{(i)}$ una v.a. de dimensión m con $i = 1, \dots, n$ con marginales Fréchet y con dominio de atracción una distribución extrema multivariada de la forma $\exp(-\theta_A/x)$ para $x > 0$. Se supone entonces que la distribución de $\max_{i \in A} X_i$ es idéntica a la de $\exp(-\theta_A/x)$ para $x > 0$, por encima de un umbral z . Para estimar ahora θ_A se utiliza máxima verosimilitud penalizada, es decir, si llamamos al umbral marginal $t = \exp(-1/z)$, la log-verosimilitud para θ_A , $A \in C_m$ es dada por,

$$\mathcal{L}_A(\theta_A) = \text{card} \left\{ j : \max_{i \in A} \left(X_i^{(j)} \bar{X}_i \right) > z \right\} \log \theta_A - \theta_A \sum_{j=1}^n \left[\max \left\{ z, \max_{i \in A} \left(X_i^{(j)} \bar{X}_i \right) \right\} \right]^{-1}. \quad (6.22)$$

Al estimador máximo verosímil se lo denota $\hat{\theta}_{A,t}$. Cuando $t = 0$ se reduce a una variante del estimador de Hall y Tajvidi, [39], que se denota $\hat{\theta}_{A,HT}$. Este no se encuentra entre $(1, |A|)$, se llama $\hat{\theta}_{A,b}$ al estimador $\hat{\theta}_{A,HT}$ truncado en $(1, |A|)$.

Otra propuesta es dada por Cooley, Naveau y Poncet en 2005, [12], plantean estimar el coeficiente extremal a partir del F-madograma a través de la relación dada por la ecuación 6.29. También ha habido modificaciones de este último estimador utilizando el método de los mínimos cuadrados, ver [5]. En la figura 6.2 se muestra la simulación de un proceso de Schlather con función de correlación de Cauchy en 30 sitios distribuidos al azar en $[0, 20]^2$, en rojo está representada la estimación no paramétrica de Schlather-Tawn y en azul la función coeficiente extremal real.

6.5. El Madograma.

Un primer acercamiento a “la cercanía” entre dos puntos del proceso espacial estacionario $Z(x)$ es dado por el llamado *variograma* o también llamado *semivariograma*, se denota $\gamma(h)$ definido por Cressie en 1993, [14],

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \left[(Z(x+h) - Z(x))^2 \right]. \quad (6.23)$$

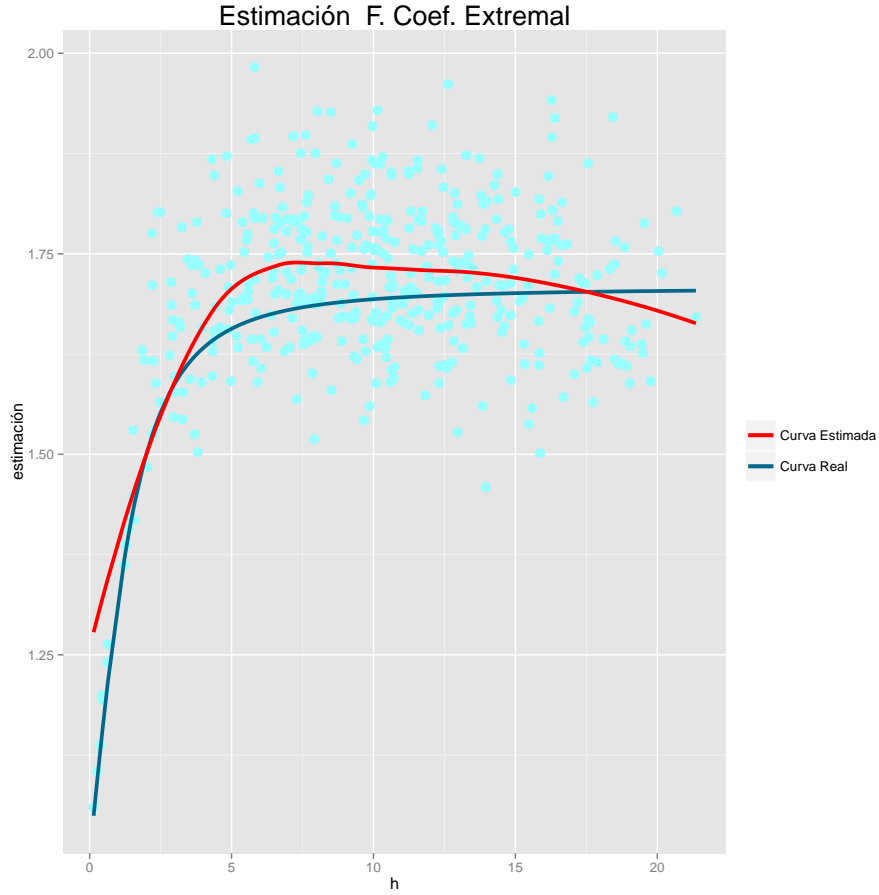


Figura 6.2: Estimación de Schlather y Tawn de la función coeficiente extremal en un proceso simulado de Schlather con correlación de Cauchy.

Puesto que en algunos casos no existen los momentos de segundo orden en la distribución de valores extremos es necesario definir una medida en L_1 , llamado *variograma de primer orden o madograma*. Definido en primera instancia por Matheron en 1987, [53], pero desarrollado en trabajos posteriores, ver [12], se define como,

$$\nu(h) = \frac{1}{2} E |Z(x+h) - Z(x)|. \quad (6.24)$$

Teorema 12 (Relación entre el madograma y el coeficiente extremal). *Sea Z un campo aleatorio espacial máx-estable con marginales DVEG y coeficiente extremal $\theta(h)$, si el parámetro de forma ψ es menor a uno, entonces se cumple que,*

$$\theta(h) = \begin{cases} u_\beta \left(\mu + \frac{\nu(h)}{\Gamma(1-\psi)} \right) & \text{si } \psi < 1, \psi \neq 0 \\ e^{\nu(h)/\sigma} & \text{si } \psi = 0 \end{cases}$$

siendo $\Gamma(\cdot)$ la función gamma y

$$u_\beta(u) = \left(1 + \psi \frac{u - \mu}{\sigma}\right)_+^{1/\psi}.$$

Se obtiene entonces una relación algo sofisticada entre el coeficiente extremal y el madograma. Aún así, en procesos máx-estables con distribuciones Fréchet unitarias, se cumple que $E(Z(x)) = V(Z(x)) = \infty$ y el madograma no se encuentra definido, en consecuencia se necesita en estos casos de otro estadístico.

El madograma rescalado.

$$\eta_t(h) = \frac{1}{2} E \left[\left| t(I_{Z(x+h) \leq t} - I_{Z(x) \leq t}) \right| \right], \quad (6.25)$$

con $t \in (0, \infty)$ y $I(\cdot)$ la función indicatriz. Un estimador plug-in del madograma rescalado es,

$$\hat{\eta}_t(h) = \frac{1}{2|\mathcal{N}_h|} \sum_{x,y \in \mathcal{N}_h} |tI_{Z(x) \leq t} - tI_{Z(y) \leq t}|. \quad (6.26)$$

donde \mathcal{N}_h es el conjunto de puntos muestrales que distan h .

Si consideramos un campo aleatorio estacionario máx-estable con marginales Fréchet unitarias, el madograma rescalado es $\eta_t(h) = t(e^{-1/t} - e^{-\theta(h)/t})$, entonces se cumple que,

$$\theta(h) = 1 + \nu(h) = 1 + \lim_{t \rightarrow \infty} \eta_t(h). \quad (6.27)$$

El F -madograma.

$$\nu^F(h) = \frac{1}{2} E \left| F(Z(x+h)) - F(Z(x)) \right|, \quad (6.28)$$

donde $F(x) = P(M(x) \leq u)$. Cooley 2006, [12], encuentra una sencilla relación entre el F -madograma y el coeficiente extremal,

$$2\nu^F(h) = \frac{\theta(h) - 1}{\theta(h) + 1} \Rightarrow \theta(h) = \frac{1 + 2\nu^F(h)}{1 - 2\nu^F(h)}. \quad (6.29)$$

Con este estadístico se soluciona el problema de la existencia y se encuentra una clara relación con el coeficiente extremal. El estimador plug-in del F -madograma es,

$$\hat{\nu}^F(h) = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \left| \hat{F}_T[M_t(x+h)] - \hat{G}_T[M_t(x)] \right|, \quad (6.30)$$

siendo T el número de copias del proceso,

$$\hat{F}_T(u) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_{\{M_t(x+h) \leq u\}} \quad \text{y} \quad \hat{G}_T(u) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T I_{\{M_t(x) \leq u\}}.$$

Sin embargo, a partir de la relación (6.29) se observa que el F -madograma se focaliza en los valores que toma $V_h(u, u)$ pero no proporciona información sobre $V_h(u, v)$ para $u \neq v$. Esto se resuelve a partir del λ -madograma introducido por Naveau en 2009, [59].

El λ - madograma.

$$\nu(h, \lambda) = \frac{1}{2} E \left| F^\lambda(Z(x+h)) - F^{1-\lambda}(Z(x)) \right|, \quad \lambda \in (0, 1). \quad (6.31)$$

Si las distribuciones marginales son Fréchet unitarias, se cumple que

$$\nu(h, \lambda) = \frac{V_h(\lambda, 1-\lambda)}{1 + V_h(\lambda, 1-\lambda)} - c(\lambda), \quad (6.32)$$

siendo $c(\lambda) = \frac{3}{2(1-\lambda)(2-\lambda)}$.

Es claro por tanto que el λ -madograma describe a $V_h(u, v)$ para todo (u, v) . Es sencillo observar además que $\nu^F(h) = \nu(h, 1/2)$.

El estimador natural del λ -madograma es,

$$\hat{\nu}_T(h, \lambda) = \frac{1}{2T} \sum_{t=1}^T \left| \hat{F}_T^\lambda[M_t(x+h)] - \hat{G}_T^\lambda[M_t(x)] \right|, \quad (6.33)$$

Para sus propiedades asintóticas ver [59].

En la figura 6.3 se muestran los distintos gráficos para un proceso máx-estable simulado de Schlather en 30 estaciones distribuidas uniformemente en $[0, 20]^2$.

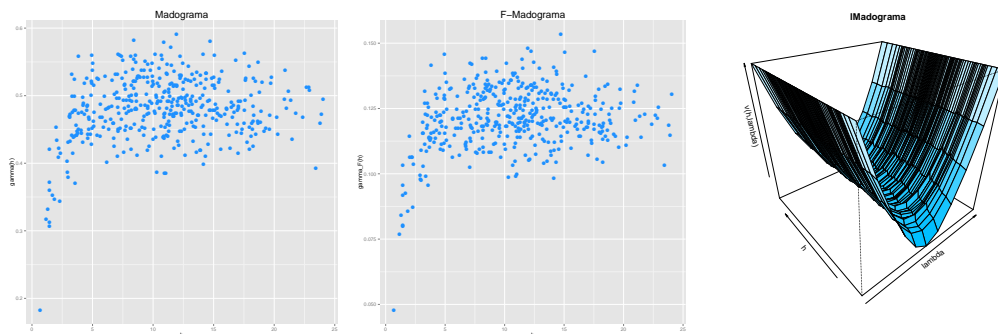


Figura 6.3: Madograma, F-Madograma, λ -Madograma estimados a partir 100 observaciones simuladas de un proceso de Schlather con correlación de Cauchy en 30 estaciones.

6.6. Medidas de Dependencia en Cópulas.

Se estudia ahora la naturaleza de dependencia que es capturada por los distintos parámetros de dependencia en cada familia de cópulas y qué relación existe entre los parámetros de dependencia y el concepto de correlación. Pueden ser expresados en términos de cópulas las medidas de rango de correlación y los coeficientes de dependencia en las colas, lo cuál las hace útiles en este paradigma.

6.6.1. Rango Correlación.

Mide el grado de dependencia entre dos variables aleatorias sin suponer que la relación entre las variables es lineal y requieren solamente que las variables sean medidas a nivel ordinal. Como su nombre lo indica, la estimación empírica de las medidas de correlación de rango puede ser calculada de forma no paramétrica a partir de los rangos de los datos. Sin embargo, pueden ser obtenidas en función de la cópula asociada a la función de distribución conjunta de las variables aleatorias. Al igual que las cópulas, las medidas de correlación de rango son invariantes bajo transformaciones monótonas crecientes.

Se consideran dos variables aleatorias X e Y con funciones de distribución continuas F_1 y F_2 respectivamente, y distribución conjunta F , se definen dos medidas de correlación,

- Rango correlación de Spearman (“Spearman’s rho”)

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y)).$$

- Rango correlación de Kendall (“Kendall’s tau”)

$$\rho_\tau(X, Y) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0],$$

donde (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son dos pares de variables aleatorias independientes con distribución F .

El coeficiente de Kendall puede ser visto como $\rho_\tau(X, Y) = P[\textit{concordancia}] - P[\textit{discordancia}]$. Si bien estos coeficientes presentan mejores propiedades estadísticas que el coeficiente de Pearson, son simétricas, definidas en el intervalo $[-1, 1]$ y toman el valor de cero bajo independencia, son más difíciles de obtener.

6.6.2. Coeficiente de Dependencia en las Colas.

Una de las principales ventajas que ofrece el estudio de las funciones de distribución multivariada a partir de la cópula, es la posibilidad de identificar los patrones de dependencia existentes entre los valores extremos de las variables aleatorias. Si las funciones de distribución marginales de las variables aleatorias de interés son continuas, la dependencia en las colas puede ser expresada como una medida basada en la cópula asociada a la función de distribución conjunta. Por consiguiente, esta medida de dependencia en las colas también es invariante bajo transformaciones monótonas crecientes. Se considera dos variables aleatorias X e Y con funciones de distribución continuas F_1 y F_2 respectivamente, y distribución conjunta F . El coeficiente de dependencia en la cola superior entre X e Y es,

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1^-} P(Y > F_2^{-1}(u) | X > F_1^{-1}(u)).$$

Si $\lambda_u > 0$ se dice que X e Y son asintóticamente dependientes en la cola superior y si $\lambda_u = 0$ se dice que son asintóticamente independientes en la cola superior.

De manera análoga, el coeficiente de dependencia de la cola inferior entre X e Y es :

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 0^+} P(Y \leq F_2^{-1}(u) | X \leq F_1^{-1}(u)).$$

Estas medidas pueden ser expresadas a través de la función de cópula,

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u},$$

y

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{\bar{C}(u, u)}{1 - u},$$

donde $\bar{C}(u_1, u_2) = P(U_1 > u_1, U_2 > u_2) = 1 - u_1 - u_2 + C(u_1, u_2)$.

6.6.3. Dependencia en Cópulas Extremas.

Debido a la homogeneidad de la función V es sencillo demostrar que $C_*(u, u) = u^{V(1,1)}$, entonces es posible el cálculo de las dependencias en las colas,

$$\lambda_l = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{C_*(u, u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} u^{V(1,1)-1} = 0,$$

y

$$\lambda_u = \lim_{u \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C_*(u, u)}{1 - u} = 2 - V(1, 1).$$

De igual manera que en los procesos máx-estables se define el coeficiente extremal θ como una medida de dependencia (a pares), $\theta \equiv V(1, 1)$, y verifica que $\theta \in [1, 2]$.

Capítulo 7

Estimación.

7.1. Estimación de los parámetros para la DGVE.

Se desarrollan dos posibles opciones para estimar los parámetros de la DGVE para cada estación,

- Un primer método es estimar los parámetros de cada estación de forma independiente de las demás estaciones. En este caso se realiza un ajuste mediante el *Método de Bloques*, clásico en la estadística de extremos.
- Un segundo enfoque implementado por Padoan en 2010, [63], es suponer que hay cierta similitud entre los parámetros de una estación respecto a otra cercana. Por tanto es coherente pensar en un modelo de regresión donde se expresen los parámetros del modelo en función de un conjunto de variables predictoras, como por ejemplo latitud, longitud, altura de la estación meteorológica.

7.1.1. Ajuste de Máximos Anuales o Método de Bloques.

Se agrupan los datos en conjuntos disjuntos de datos ordenados en el tiempo de igual longitud. Los vectores a considerar son,

$$X^i = \left(X_1^{(i)}, \dots, X_s^{(i)} \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (7.1)$$

donde n es el número de períodos y s el tamaño de cada grupo. Se supone que la familia de vectores $\{X^{(i)}\}_{i=1, \dots, n}$ es independiente aunque esto podría no ocurrir.

Estimación por Máxima Verosimilitud.

Sea g_θ la función de densidad de G_θ DVEG y $\theta = (\mu, \sigma, \kappa)$. La verosimilitud de $X = (X_1, \dots, X_n)$ esta dada por,

$$L(\theta, X) = \prod_{i=1}^n g_{\theta}(X_i) I_{\{1+\kappa(X_i-\mu)/\sigma > 0\}}. \quad (7.2)$$

Si se denota $\mathcal{L}(\theta, X) = \log L(\theta, X)$, la log-verosimilitud es,

$$\mathcal{L}(\theta, X) = \begin{cases} -n \log \sigma - (1 + \frac{1}{\kappa}) \sum_{i=1}^n \log \left[1 + \kappa \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right) \right] - \sum_{i=1}^n \log \left[1 + \kappa \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\kappa} & \text{si } \kappa \neq 0 \\ -n \log \sigma - \sum_{i=1}^n \exp \left\{ -\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right\} - \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma} & \text{si } \kappa = 0 \end{cases}$$

Diferenciando respecto a θ se obtienen ecuaciones de las cuáles no se puede calcular una solución explícita de la estimación máximo verosímil, por tanto son necesarios procedimientos numéricos. Según los valores del parámetro de forma se pueden cumplir los supuestos pedidos para obtener las condiciones de regularidad necesarias para que se verifiquen las propiedades asintóticas usuales. Si $\kappa > -0,5$ los EMV presentan las propiedades asintóticas usuales, si $-1 < \kappa < -0,5$ es posible obtener los estimadores pero no tienen las propiedades usuales, mientras que si $\kappa < -1$ es posible que no puedan obtenerse los estimadores.

Método de los Momentos Pesados.

Es una generalización del método de los momentos. Para una variable aleatoria $X \sim F$, se considera,

$$M_{p,r,s} = E [X^p F^r(X) (1 - F(X))^s]. \quad (7.3)$$

Se denota $\omega_r(\theta) = M_{1,r,0} = E [X G_{\theta}^r(X)]$, $r \in \mathbb{N}_0$, donde G_{θ} es la DGVE y $X \sim G_{\theta}$. Se considera que $\kappa < 1$, pues en caso contrario \bar{G}_{θ} es de variación regular con índice $1/\kappa$ y en consecuencia $\omega_0 = \infty$. El estimador plug-in de ω_r es,

$$\hat{\omega}_r(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} x G_{\theta}^r(x) dF_n(x). \quad (7.4)$$

Para estimar θ se resuelven las ecuaciones,

$$w_r(\theta) = \hat{\omega}_r(\theta), \quad r = 0, 1, 2. \quad (7.5)$$

Como $G_{\theta}(X_{1:n}, \dots, X_{n:n}) \stackrel{d}{=} (U_{1:n}, \dots, U_{1:n})$ siendo éstos los estadísticos de orden de una sucesión i.i.d de variables uniformes, se puede escribir,

$$\hat{\omega}_r(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_{j:n} U_{j:n}^r, \quad r = 0, 1, 2. \quad (7.6)$$

Por ejemplo si $\kappa < 1$ y $\kappa \neq 0$ se cumple que,

$$\omega_r(\theta) = \frac{1}{r+1} \left(\mu - \frac{\sigma}{\kappa} (1 - \Gamma(1 - \kappa)(1+r)^\kappa) \right). \quad (7.7)$$

A partir de la ecuaciones [7.7] y [7.6] se deduce el estimador explícito de los momentos pesados, $\hat{\theta}$.

7.1.2. Estimación conjunta para todas las estaciones.

Se puede modelar el valor de los parámetros de las estaciones como una regresión en referencia a determinadas medidas que caracterizan a las estaciones, es decir se puede expresar cada parámetro como,

$$h \{p(x_k)\} = [X\beta]_k, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad (7.8)$$

siendo K el número de estaciones, $p(\cdot)$ representa los parámetros $\mu(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$ y $\kappa(\cdot)$, h es la función de enlace, $x_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kI})$ es el vector de predictores, $X_{K \times I}$ es la matriz de diseño, y $\beta_{I \times 1}$ es el vector de parámetros desconocidos. La modelación de los parámetros de esta forma permite, además de una correcta estimación del error estándar, la predicción de los parámetros en cualquier punto de \mathbb{R}^d

7.2. Estimación de la distribución multivariada de valores extremos a través de la medida espectral.

Esta sección se basa en los trabajos realizados por Boldi y Davison en 2007, [19], y por Sabourin y Naveau en 2013, [71]. Puesto que la información sobre la estructura de dependencia esta contenida en la medida espectral, una buena aproximación semi-paramétrica de la medida es dada por una mezcla de distribuciones de Dirichlet (se denota DM). A nivel práctico dicho enfoque presenta algunas dificultades, al aumentar los términos de la mezcla el número de parámetros a estimar crece de manera abrupta, en este caso es necesario algún criterio de información que penalice en referencia a los términos de la mezcla. Un segundo problema es la baja convergencia al aumentar la dimensión del espacio, por tanto en la tesis se utiliza para modelar fenómenos locales, en dimensión no superior a 5.

Sea $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ una v.a. en \mathbb{R}^d con marginales Fréchet unitarias. Sea $R = X_1 + \dots + X_d$ la componente radial y $W = X/R$ la componente angular. W tiene su recorrido en el simplex S_d de dimensión $d - 1$, ver figura 7.1.

A partir del teorema 3 y suponiendo variación regular multivariada, ver apéndice D, se puede afirmar que,

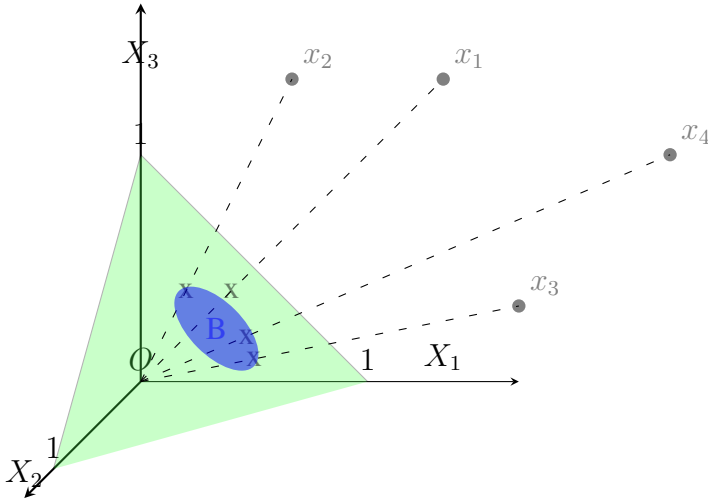


Figura 7.1: Representación de la variable W en el simplex unitario de \mathbb{R}^3 .

$$P(W \in B/R > r_0) \xrightarrow{r_0 \rightarrow \infty} H(B), \quad (7.9)$$

siendo H la medida espectral. H es una medida espectral válida si su centro de masa coincide con el centro del simplex, es decir,

$$\int_{S_d} \omega_i dH(w) = 1/d, \quad \forall i \in \{1, \dots, d\}. \quad (7.10)$$

La medida límite ν y la medida angular H están relacionadas por,

$$nP\left(\frac{X}{b_n} \in A\right) \approx \nu(A) = \int_{rw \in A} r^{-(\alpha+1)} dr dH(w). \quad (7.11)$$

Si las distribuciones marginales son Fréchet unitarias se cumple que $\alpha = 1$ y $b_n = n$, entonces

$$P(X \in A^*) \approx \nu(A^*) = \int_{rw \in A^*} r^{-2} h(w) dr dw, \quad (7.12)$$

siendo h la densidad de H .

Si se desea estimar $A = \{X_1 > u_1, X_2 > u_2, X_3 > u_3\}$ a partir del modelo paramétrico,

$$P_\theta(X \in A) \approx \int_{rw \in A} \frac{dr}{r^2} dH_\theta(w) = \int_{S_d} \min_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{w_j}{u_j} \right\} h_\theta(w) dw, \quad (7.13)$$

se puede obtener una aproximación de la distribución predictiva a posteriori,

$$P_\theta(X \in A/w_1, \dots, w_n) \approx \int_{\Theta} \int_{S_d} \min_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{w_j}{u_j} \right\} h_\theta(w) dw d\pi_n(\theta), \quad (7.14)$$

siendo $\pi_n(\theta)$ la distribución a posteriori de los parámetros. Mediante doble-Montecarlo se estima la probabilidad a posteriori de pertenecer al conjunto,

$$\hat{P}_\theta(X \in A/w_1, \dots, w_n) \approx \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \min_{j=1, \dots, d} \left\{ \frac{w_{i,j}^t}{u_j} \right\} \quad w_i^t \sim h_{\theta(t)}. \quad (7.15)$$

Es por tanto necesario explicitar un modelo paramétrico para la medida espectral.

7.2.1. Distribución de Dirichlet.

Sea la distribución de Dirichlet,

$$dir_i(w/\mu, \nu) = \frac{\Gamma(\nu)}{\prod_{i=1}^d \Gamma(\nu\mu_i)} \prod_{i=1}^d w_i^{\nu\mu_i-1}, \quad (7.16)$$

siendo $\mu \in \text{int}(S_d)$ el parámetro de ubicación y $\nu > 0$ el parámetro de concentración.

Boldi y Davison en 2007 plantean modelar la densidad espectral a través de una mezcla de distribuciones de Dirichlet,

$$h_{(\mu, p, \nu)}(w) = \sum_{m=1}^k p_m dir_i(w/\mu_{.,m}, \nu_m), \quad (7.17)$$

siendo $\mu_{.} = (\mu_{.,1}, \dots, \mu_{.,k})$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ y $p = (p_1, \dots, p_k)$, donde μ y p cumplen la siguiente restricción,

$$p_1 \mu_{.,1} + \dots + p_k \mu_{.,k} = \left(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d} \right).$$

7.2.2. Estimación en una mezcla de distribuciones Dirichlet mediante un enfoque Bayesiano.

Un problema que se presenta en este punto es la estimación de los parámetros de la mezcla de Dirichlet. Se aborda esta dificultad bajo un enfoque bayesiano. El inconveniente radica en generar (p, μ) de forma que se cumpla la restricción,

$$\sum_{m=1}^k p_m \mu_{.,m} = \left(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d} \right).$$

Reparametrización del espacio paramétrico sin restricciones.

Trabajo desarrollado por Sabourin y Naveau en 2013. Sea el espacio paramétrico $\Theta = \bigsqcup_{k=1}^{\infty} \Theta_k$, siendo

$$\Theta_k = \left\{ (\mu_{\cdot,1:k}, p_{1:k}, \nu_{1:k}) / \sum_{m=1}^k p_m \mu_{\cdot,m} = \left(\frac{1}{d}, \dots, \frac{1}{d} \right) \right\}.$$

La idea es transformar el espacio paramétrico en un “rectángulo” incluido en $S_d^{k-1} \times (0, 1)^{k-1} \times (\mathbb{R}^+)^k$.

Dado $m \in \{0, \dots, k-1\}$ se introducen ciertas variables intermedias γ_m , centro de masa de las últimas $k-m+1$ componentes,

$$\gamma_m = \frac{1}{\rho_m} \sum_{j=m+1}^k p_j \mu_{\cdot,j}, \quad (7.18)$$

donde $\rho_j = \sum_{j=m+1}^k p_j$ y $\rho_0 = 1$.

Puesto que γ_m puede ser expresado en función de los términos precedentes,

$$\gamma_m = \frac{1}{\rho_m} \left(\gamma_0 - \sum_{j=1}^m p_j \mu_{\cdot,j} \right), \quad (7.19)$$

Desarrollando $\gamma_0 = (1/d, \dots, 1/d)$,

$$\gamma_0 = p_1 \mu_{\cdot,1} + \sum_{j=2}^k p_j \mu_{\cdot,j} = p_1 \mu_{\cdot,1} + \rho_1 \gamma_1, \quad (7.20)$$

se observa que se encuentra en el segmento determinado por γ_1 y $\mu_{\cdot,1}$, sea \mathcal{D}_1 la semirrecta de origen $\mu_{\cdot,1}$ que contiene a γ_1 , y I_1 el punto intersección de \mathcal{D}_1 con el simplex unitario. Existe un único número llamado excentricidad $e_1 \in [0, 1]$ que determina la ubicación de γ_1 en el segmento $[\gamma_0, I_1]$,

$$e_1 = \frac{\|\gamma_1 - \gamma_0\|}{\|I_1 - \gamma_0\|}. \quad (7.21)$$

De la misma manera se plantea $\gamma_1 = p_2 \mu_{\cdot,1} + p_2 \gamma_2$ y se reitera el razonamiento, ver figura 7.2. Con este argumento recursivo a partir del vector de medias $\mu_{1,1:k-1}$ y de las excentricidades $e_{1,k-1}$ es posible obtener los centros de masa $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}$ y las excentricidades $e_{1,k-1}$ a partir de las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \gamma_m &= \gamma_{m-1} + e_m (I_m - \gamma_m) \\ p_m &= \rho_m \frac{\gamma_m - \gamma_{m-1}}{\gamma_m - \mu_{\cdot,m}} \\ \rho_m &= \rho_{m-1} - p_m. \end{aligned}$$

Por definición $\gamma_{k-1} = \mu_{.,k}$ y $p_k = \rho_{m-1}$.

La parametrización esta bien definida si,

$$\gamma_{m-1} \neq \mu_{.,m}, \quad \forall m \in \{1, 2, \dots, k-1\}, \quad (7.22)$$

para ello basta considerar para los $\mu_{.,m}$ una distribución absolutamente continua.

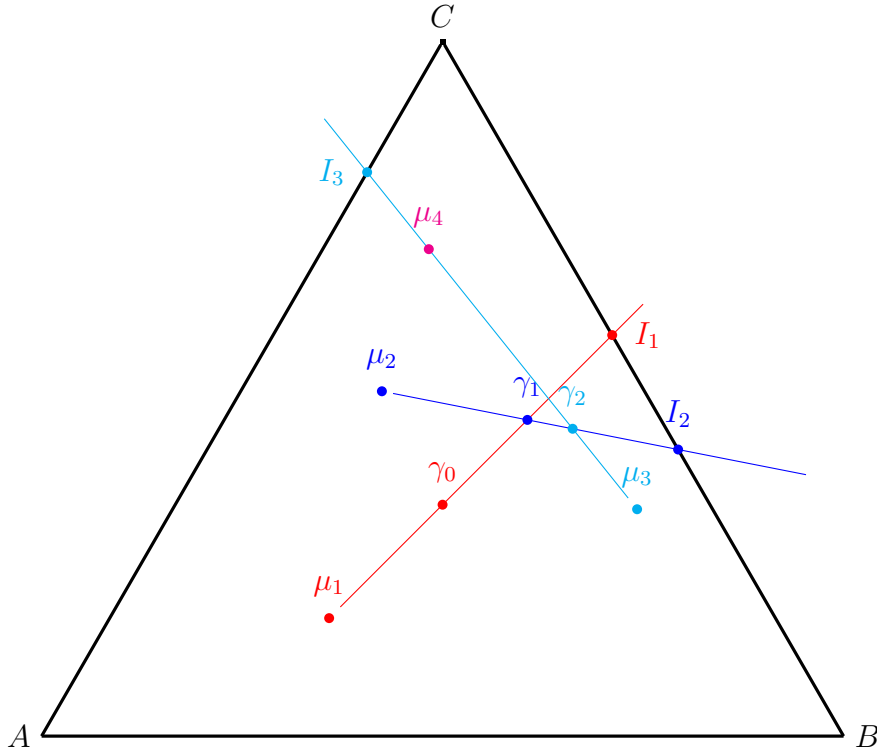


Figura 7.2: Reparametrización del espacio en dimensión $d=3$ y una mezcla de Dirichlet con $k=4$.

A partir de la reparametrización, el parámetro $\theta = (\mu_{.,1:k-1}, e_{1:k-1}, \nu_{1:k})$ pertenece a $\Theta = \uplus_{k=1}^{\infty} \Theta_k$, siendo $\Theta_k = \{(S_d)^{k-1} \times [0, 1)^{k-1} \times (0, \infty]^{k-1}\}$

Modelo Bayesiano.

Sea π la distribución a priori, y supongamos que la distribución de ν es independiente de (μ, e) condicionada a k . Entonces se puede expresar π como,

$$\pi(k, \mu, e, \nu) = \pi_k(k) \pi_{\mu, e}(\mu, e/k) \pi_{\nu}(\nu/k). \quad (7.23)$$

Las distribuciones asignadas a cada uno de los factores son,

- π_k es una distribución geométrica truncada,

$$\pi_k(k) \propto \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{k-1} \frac{1}{\lambda} \mathbf{1}_{[1, k_{max}]}(k), \quad \lambda > 0$$

- π_ν se le asigna distribución log-normal truncada con componentes independientes,

$$\pi_{\nu,j} \propto \mathbf{1}_{[\nu_{min}, \nu_{max}]} \log N(m_\nu, \sigma_\nu^2), \quad \forall j = 1, \dots, k,$$

y la distribución de ν es la medida producto $\pi_\nu = \bigotimes_{j=1}^k \pi_{\nu,j}$.

- La distribución de $\pi_{\mu,e}(\cdot/k)$ es dada por sucesivas condicionales,

$$\pi_{\mu,e}(\mu, e/k) = \prod_{m=1}^{k-1} \pi_{\mu_m}(\mu_{.,m}/k, \mu_{.,1:m-1}, e_{1:m-1}) \pi_{e_m}(e_m/k, \mu_{.,1:m}, e_{1:m-1}),$$

donde por definición $\mu_{.,1:0} = \{\gamma_0\}$ y $e_{1:0} = \emptyset$.

En este caso se considera

$$\pi_{\mu_m}(\cdot/\mu_{.,1:m-1}, e_{1:m-1}) = \text{diri} \left(\cdot/\gamma_m, \frac{\chi_\mu}{\min_{1 \leq i \leq d} \{\gamma_{i,m}\}} \right),$$

donde χ_μ es un hiper parámetro de concentración.

En la figura 7.3 se puede apreciar el esquema bayesiano, con esta nueva parametrización, para simular valores de una mezcla de distribuciones de Dirichlet. Un ejemplo de 1000 simulaciones en una mezcla de distribuciones de Dirichlet con uno y dos centros, así como las respectivas curvas de nivel de las distribuciones se ilustran en la figura 7.4.

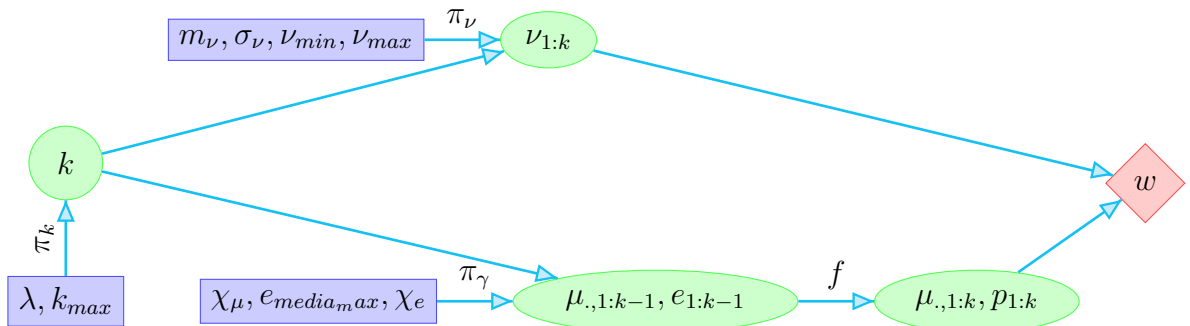


Figura 7.3: Esquema de la simulación bayesiana de un valor de la distribución de Dirichlet.

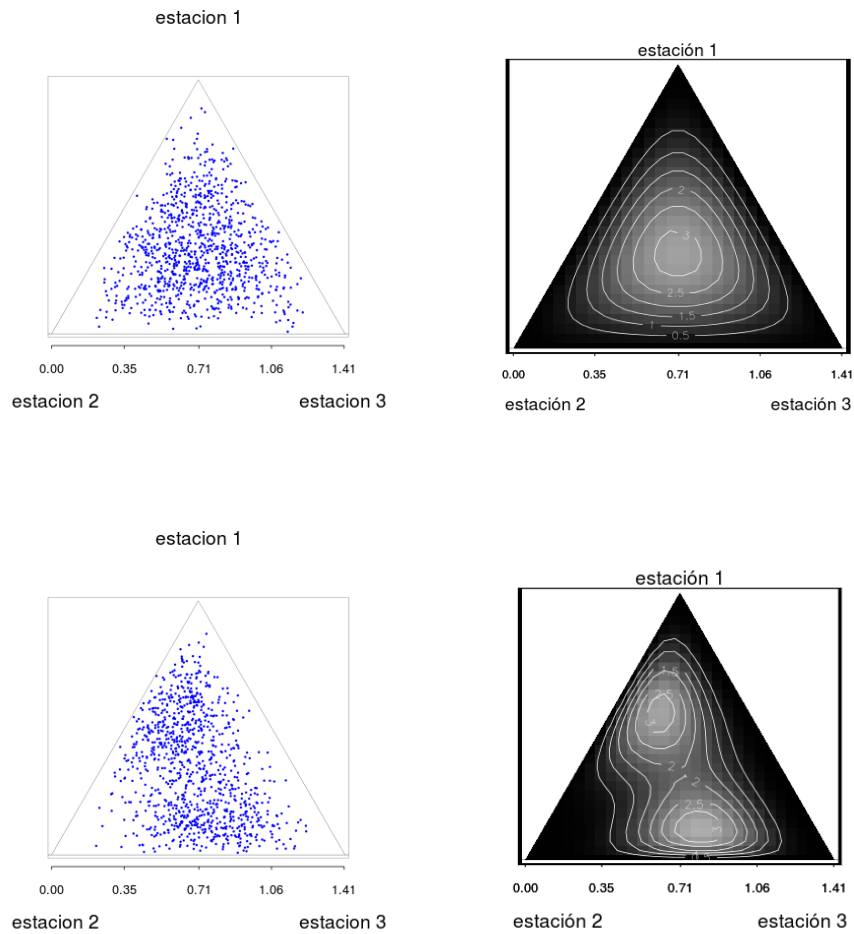


Figura 7.4: Simulación de 1000 valores de una distribución de Dirichlet y de una mezcla de dos distribuciones de Dirichlet con las respectivas curvas de nivel de sus densidades.

Algoritmo Metropolis para mezclas de Dirichlet (M-DM).

Siguiendo la lógica del algoritmo Monte Carlo vía cadenas de Markov con salto reversible (RJMCMC), implementado por Green en 1995, [37], Sabourin y Naveau implementan un algoritmo Metropolis para generar valores a posteriori de una mezcla de Dirichlet cuando es desconocido el número de “cosas” que se desconocen, es decir, no se conoce el número de componentes de la mezcla.

Tres tipos de movimientos posibles son propuestos, elegidos al azar con probabilidades p_1 , p_2 y p_3 .

- **Movimiento Regular.**

Dado $\theta_t = (\mu_{\cdot,1:k-1}, p_{\cdot,1:k-1}, \nu_{1:k}) \in \Theta_k$ existen $3k - 2$ movimientos posibles,

- (**ν -movimientos**) Afectan una componente $\nu_m(t)$ de $\nu(t)$, donde

$$q_\nu(\nu_m(t), \nu_m^*) \sim \text{LogNormal con media } \log(\nu_m(t)).$$

- (**e -movimientos**) Afectan una componente $e_m(t)$ de $e(t)$, donde

$$q_\nu(e_m(t), e_m^*) \sim \text{beta,}$$

con moda $e_m(t)$ y parámetros,

$$a_1 = 1 + \frac{2(1-\epsilon_e^*)}{\epsilon_e^*} e_m(t) \text{ y } a_2 = 1 - \frac{2(1-\epsilon_e^*)}{\epsilon_e^*} e_m(t),$$

en este paso son afectados los $\mu_{\cdot,k}^*$ según la reparametrización.

- (**μ -movimientos**) Afecta uno de los primeros $(k - 1)$ -vectores media.

La sucesión parcial de pesos $p_{m:k}^*$ y el último vector son modificados según la reparametrización. Se propone para $\mu_{\cdot,m}^*$ una mezcla de Dirichlet con densidad $q_\mu(\mu_{\cdot,m}(t), \cdot)$.

La probabilidad de aceptación en un movimiento regular es dada por,

$$r(e_m(t), e_m^*) = \min \left(1, \frac{h_{\theta^*}(w_{1:n})\pi(\theta^*)q_e(e_m^*, e_m(t))}{h_{\theta_t}(w_{1:n})\pi(\theta_t)q_e(e_m(t), e_m^*)} \right)$$

■ **Movimiento trans-dimensional.** Dos tipos,

- **Movimiento de división.** Se genera un nuevo vector $\mu_{\cdot,k}^*$ en un entorno de $\mu_{\cdot,k}(t)$ y e_k^* según la apriori. Se deduce $\mu_{\cdot,k}^*$ a partir de la reparametrización.
- **Movimiento de combinación.** Se remueve la última componente

Las probabilidades de aceptación son,

$$r_{div} = \min \left\{ 1, \frac{h_{\theta^*}(w_{1:n})\pi(\theta^*)p_{comb}(k+1)}{h_{\theta_t}(w_{1:n})\pi(\theta_t)p_{div}(k+1)} [q_{\mu,div}(\theta_t, \mu_{\cdot,k}^*)q_{e,div}(\theta_t, e_k^* | \mu_{\cdot,k}^*)q_{\nu,div}(\theta_t, \nu_{k+1}^*)]^{-1} \right\}$$

$$r_{comb} = \min \left\{ 1, \frac{h_{\theta^*}(w_{1:n})\pi(\theta^*)p_{div}(k-1)}{h_{\theta_t}(w_{1:n})\pi(\theta_t)p_{comb}(k)} [q_{\mu,div}(\theta^*, \mu_{\cdot,k})q_{e,div}(\theta^*, e_k | \mu_{\cdot,k})q_{\nu,div}(\theta^*, \nu_k(t))] \right\}$$

■ **Movimiento “Shuffle”.**

No afecta la densidad h_θ pero aumenta la velocidad de convergencia del algoritmo, ver [6].

Teorema 13. *El algoritmo M-DM genera una cadena de Markov aperiódica, η -irreducible que admite la distribución a posteriori π_n como una medida de probabilidad invariante.*

Demostración. Ver [6]. □

7.3. Estimación para Procesos Máx-Estables.

7.3.1. Función de Verosimilitud para Procesos Máx-Estables.

Se obtuvo la distribución acumulada conjunta en un conjunto finito x_1, \dots, x_k de estaciones,

$$P(Z(x_1) \leq z_1, \dots, Z(x_k) \leq z_k) = \exp\{-V(z_1, \dots, z_k)\}, \quad (7.24)$$

siendo,

$$V(z_1, \dots, z_k) = E \left[\max_{j=1,2,\dots,k} \frac{Y(x_j)}{z_j} \right].$$

Esto hace que la densidad asociada sea de la forma,

$$f(z_1, \dots, z_k) = \exp\{-V(z_1, \dots, z_k)\} \sum_{\tau \in \mathfrak{P}_k} \omega(\tau), \quad (7.25)$$

donde \mathfrak{P}_k es el conjunto de todas las posibles particiones de $\{x_1, \dots, x_k\}$, si $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_s)$ entonces,

$$\omega(\tau) = (-1)^{|\tau|} \prod_{j=1}^{|\tau|} \frac{\partial^{|\tau_j|}}{\partial z_{\tau_j}} V(z_1, \dots, z_k), \quad (7.26)$$

siendo $\frac{\partial^{|\tau_j|}}{\partial z_{\tau_j}}$ la derivada mixta respecto al j -ésimo elemento de la partición τ . Por ejemplo si $\tau = \{(x_1, x_2), (x_3)\}$, entonces,

$$\frac{\partial^{|\tau_1|}}{\partial z_{\tau_1}} V(z_1, \dots, z_k) = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} V(z_1, z_2, z_3), \quad \frac{\partial^{|\tau_2|}}{\partial z_{\tau_2}} V(z_1, \dots, z_k) = \frac{\partial}{\partial z_3} V(z_1, z_2, z_3). \quad (7.27)$$

Esto hace que el número de términos ω_τ corresponda al k -ésimo número de Bell, por ejemplo si el número de estaciones es 10 ($k=10$), la suma tendrá 115000 términos, por tanto la verosimilitud se vuelve intratable numéricamente. Intentado sortear este problema una alternativa posible es trabajar en base a la verosimilitud compuesta, ver [63] y [32].

Verosimilitud Compuesta.

El método de Verosimilitud Compuesta consiste en sumar componentes individuales de la log-verosimilitud, correspondientes a las marginales de la variable de interés. Por lo tanto, este método no requiere el conocimiento completo de la distribución multivariada.

Dado el modelo $Y \sim f(y; \theta)$, y los eventos $\{\mathcal{I}_k : k \in \mathcal{K} \subset \mathbb{N}\}$ se pueden considerar las “seudo-densidades” $f(y \in \mathcal{I}_k; \theta)$, entonces la log-verosimilitud compuesta se define como,

$$\mathcal{L}_C(\theta; y) = \sum_{k \in \mathcal{K}} w_k \log f(y \in \mathcal{I}_k; \theta), \quad (7.28)$$

donde $f(y \in \mathcal{I}_k; \theta) = f(\{y_i : y_i \in \mathcal{I}_k\}; \theta)$, con $y = (y_1, \dots, y_k)$, es la verosimilitud asociada al suceso \mathcal{I}_k y $\{w_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ es un conjunto de pesos no negativos.

Las estimaciones máximo verosímiles compuestas (MCLE) son obtenidas de,

$$D_\theta \mathcal{L}_C(\hat{\theta}_{MCLE}; y) = 0, \quad (7.29)$$

siendo $D_\theta \mathcal{L}_C$ las derivadas de primer orden de la log-verosimilitud compuesta. La utilidad fundamental de este método es que, bajo ciertas condiciones de regularidad, permite obtener estimadores asintóticamente insesgados de los parámetros, en aquellos casos donde los estimadores máximo verosímiles habituales no son posibles de obtener. Además los MCLE son consistentes y es conocida su distribución asintótica de forma similar a los MLE,

$$\hat{\theta}_{MCLE} \rightarrow N\left(\theta, \tilde{I}(\theta)^{-1}\right), \text{ con } \tilde{I}(\theta) = H(\theta)J(\theta)^{-1}H(\theta), \quad (7.30)$$

siendo $H(\theta) = E[-H_\theta \mathcal{L}_C(\theta; Y)]$, $H_\theta \mathcal{L}_C$ la matriz Hessiana y $J(\theta) = V[D_\theta \mathcal{L}_C(\theta; Y)]$.

La log-verosimilitud compuesta es una combinación lineal de log-verosimilitudes en sigma álgebras mas pequeñas. Notar que la verosimilitud completa es un caso particular de la verosimilitud compuesta. Los MCLE no son asintóticamente eficientes, por tanto hay una pérdida de eficiencia respecto a los MLE, inclusive si no se cumplen ciertas condiciones de regularidad la consistencia y la normalidad asintótica podrían no darse, ver [13]. Ribatet, Padoan y Sisson, [63], consideran los estimadores máximo verosímiles compuestos por pares para estimar los parámetros en procesos máx-estables.

Verosimilitud Compuesta por Pares.

Puesto que en las distribuciones finito dimensionales de los procesos máx-estables las densidades bidimensionales son sencillas de calcular, se pueden obtener los MCLE considerando las log-verosimilitudes compuestas por pares.

Si se denota $\{y_{m,k}\}$ al máximo de h muestras de $m = 1, \dots, M$ bloques y $k = 1, \dots, K$ estaciones en una región continua. Cada una de las K marginales son aproximadas por distribuciones GVE y se asume que $\{y_m\}_{m=1, \dots, M}$ son M realizaciones i.i.d del proceso con marginales Y_1, \dots, Y_k . Para cada m de las M copias, se define el evento $\mathcal{I}_k = \{(y_{m,i}, y_{m,j})\}$ como el conjunto de subvectores bivariantes de y que tienen cardinal $K(K-1)/2$. Por tanto la verosimilitud compuesta esta dada por,

$$\mathcal{L}_{\mathcal{P}}(\theta; y) = \sum_{m=1}^M \sum_{i=1}^{K-1} \sum_{j=i+1}^K w_{ij} \mathcal{L}_{ij}(\theta), \quad (7.31)$$

donde $\mathcal{L}_{ij}(\theta) = \log f(y_{m,i}, y_{m,j}; \theta)$ es la log-verosimilitud marginal bivariada de las estaciones i y j . En general los pesos respectivos se consideran positivos y que sumen 1, en el trabajo se consideran todos iguales.

7.4. Estimación por Cópulas.

Existen varios métodos para la estimación de la función de cópula. Algunos a citar son, FML (“full maximum likelihood”)

La idea consiste en maximizar la función de verosimilitud en función de todos los parámetros de las marginales y de la cópula simultáneamente.

IFM (o TSML “two-step maximum likelihood”)

Se trata de una estimación secuencial a 2 pasos. En primera instancia se estiman los parámetros de las densidades marginales y luego los parámetros de dependencia.

7.4.1. Estimación máximo verosímil completa.

En una primera instancia hay que que modelar el problema, es decir elegir las familias paramétricas donde se encuentran las marginales, y una familia adecuada de cópulas. Luego si se llama $\theta_1 = (\beta'_1, \beta'_2, \dots, \beta'_K)'$ el vector de parámetros de las marginales, θ_2 el vector de parámetros de la cópula y $\theta = (\theta'_1, \theta'_2)'$. Es fácil verificar que la función de log-verosimilitud se puede escribir de la forma,

$$\ell(\theta) = \sum_{i=1}^n \log c\{F_1(X_{i1}; \beta_1), \dots, F_K(X_{iK}; \beta_K); \theta_2\} + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^K \log f_i(X_{ik}; \beta_k).$$

El problema consiste en hallar θ dentro de su dominio que maximice dicha función, lo cuál es relativamente sencillo bajo algún método iterativo similar al de Newton en dimensiones bajas del espacio paramétrico.

Otra estrategia computacional para obtener el máximo es un algoritmo sugerido por Song en 2005, [78], llamado MBP (“maximization-by-parts”) que parte de la estructura que presenta esta última ecuación.

Se estima θ_1 a partir de la maximización del segundo término y luego usando éstas estimaciones se halla θ_2 que maximice el primer miembro, la estimación inicial hallada no

es eficiente puesto que ignora la dependencia entre ambos términos. Se prueba que si se realiza un procedimiento iterativo, luego de obtener θ_2 volviendo a estimar θ_1 pero ahora a partir de la verosimilitud total, la estimación se vuelve eficiente.

A partir de la teoría asintótica para los estimadores de máxima verosimilitud, ver [75], se demuestra que $\hat{\theta}_{FML}$ es asintóticamente eficiente y consistente con distribución asintótica normal,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{FML} - \theta) \rightarrow N(0, I(\theta)^{-1}).$$

7.4.2. Estimación máximo verosímil a dos pasos.

El método anteriormente descrito tiene la desventaja que es muy costoso a nivel computacional si la dimensión del espacio paramétrico es relativamente alta. Una forma de eludir este problema es realizar el método TSML propuesto por Joe y Xu en 1996, [42], también llamado (IMF) que consiste en estimar primero los parámetros en cada marginal por separado, útil cuando el número de marginales es alto, y luego los parámetros de la dependencia. En este método también es posible realizar una estimación no paramétrica de las densidades marginales para luego pasar a la estimación de los parámetros de dependencia. Por tanto el primer paso es hallar la estimación máximo verosímil de,

$$\hat{\beta}_{k,IMF} = arg \max_{\beta_k} \sum_{i=1}^n \log f(X_{ik}; \beta_k).$$

Luego se estima el parámetro de dependencia θ_2 ,

$$\hat{\theta}_{2,IMF} = arg \max_{\theta_2} \sum_{i=1}^n \log c \left[F_1(X_{i1}; \hat{\beta}_{1,IMF}), \dots, F_K(X_{iK}; \hat{\beta}_{K,IMF}); \theta_2 \right].$$

Se puede probar que bajo ciertas condiciones de regularidad, hay normalidad asintótica,

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_{IFM} - \theta) \rightarrow N(0, G(\theta)^{-1}),$$

siendo $G(\theta)^{-1}$ la matriz de información de Godambe, [35]. El método IFM es el que se aplica en la tesis.

Capítulo 8

Simulación.

8.1. Simulación de Procesos Máx-Estables.

A través de la simulación espacial del proceso se puede reconstruir la información en cualquier sitio. Cuando la simulación se ajusta a las observaciones realizadas diremos que es condicional, en caso contrario diremos que es no condicional.

8.1.1. Simulación no condicional.

En una primera instancia parecería imposible calcular el máximo de un conjunto infinito de funciones aleatorias. Surgen dos posibles estrategias para enfrentar el problema.

1. Encontrar las constantes de normalización a_n y b_n asociadas al proceso X y luego de normalizar, calcular el máximo para un número N suficientemente grande,

$$\max_{i=1,\dots,N} \frac{X_i(x) - b_N(x)}{c_N(x)}. \quad (8.1)$$

No es un método recomendado, pues es necesario valores de N demasiados altos para tener una buena aproximación, lo que tiene un costo computacional elevado.

2. Un segundo enfoque es utilizar la caracterización espectral de los procesos máx-estables. Sin pérdida de generalidad se asume que los puntos $\{\psi_i : i \in \mathbb{N}\}$ se sortean en orden decreciente, es decir $\psi_i \downarrow 0$, cuando $i \rightarrow \infty$. Si el proceso Y es uniformemente acotado por una constante $B < \infty$, entonces existe casi seguramente un número finito de átomos $\{(\psi_i, Y_i)\}$ que contribuyen puntualmente al máximo. En la figura 8.1 se observa una simulación del proceso de Smith y una de Schlather.

En general Y no es uniformemente acotado, entonces se elige una pseudo-cota B de tal forma que $P(\|Y\| > B)$ sea lo suficientemente pequeño. Si el proceso Y no es estacionario,

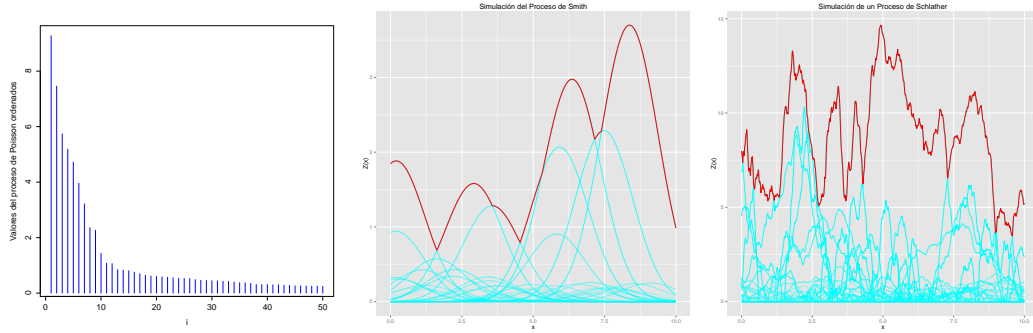


Figura 8.1: Simulación del proceso de Smith y de un proceso de Schlather en dimensión 1.

por ejemplo los procesos de Brown-Resnick, son necesarias otras alternativas. Un primer acercamiento a este problema es recordar que el proceso $Z(x)$ sí es estacionario, y es invariante frente a traslaciones aleatorias, es decir, sea $K \supset X$,

$$Z(x) \stackrel{d}{=} \tilde{Z}(x) \equiv \max_{i \geq 1} \psi_i \exp\{\epsilon(x - U_i) - \gamma(x - U_i)\}, \quad U_i \stackrel{i.i.d}{\sim} U(K), \quad (8.2)$$

pues

$$\begin{aligned} P\left(\tilde{Z}(x_1) \leq z_1, \dots, \tilde{Z}(x_k) \leq z_k\right) &= \exp\left[-\int E\left(\max_{j=1, \dots, k} \frac{Y(x_j - u)}{z_j}\right) dF(u)\right] = \\ &= \exp\left[\int \log P(Z(x_1 - u) \leq z_1, \dots, Z(x_k - u) \leq z_k) dF(u)\right] = \\ &= P(Z(x_1) \leq z_1, \dots, Z(x_k) \leq z_k). \end{aligned}$$

Otro camino para la simulación de procesos de Brown-Resnick es introducida por Schlather, Oesting y Kabluchko en 2011, [61], donde se exponen diferentes construcciones posibles del proceso.

Una forma reciente para simular procesos máx-estables condicionada a ciertos valores del proceso es introducida por Stoev y Wang en 2011, [82], y desarrollada también por Dombry, Eyi-Minko y Ribatet en 2013, [27], es la simulación condicional de los procesos máx-estables.

8.1.2. Simulación Condicional.

Dada la región $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^d$ se quiere obtener un muestra de,

$$Z(\cdot) | \{Z(x_1) = z_1, \dots, Z(x_k) = z_k\}, \quad (8.3)$$

donde $z_1, \dots, z_k > 0$, condicionado a k estaciones $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{X}$, ver figura 8.2.

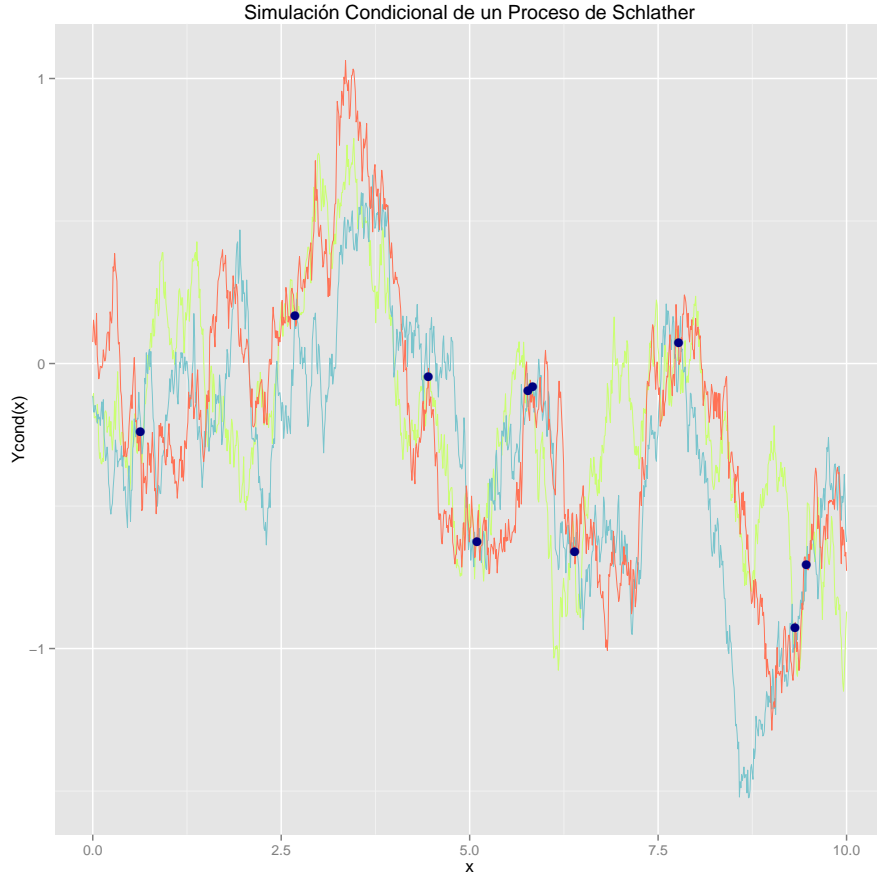


Figura 8.2: Tres simulaciones de un proceso de Schlather en dimensión 1 condicionado a 10 valores.

Sea Φ un proceso puntual en $(0, \infty)^k$ donde los átomos son,

$$\varphi_i(x) = \psi_i Y_i(x), \quad x = (x_1, \dots, x_k). \quad (8.4)$$

A partir de este se construyen los siguientes procesos puntuales,

$$\Phi^- = \{\varphi \in \Phi : \varphi(x_i) < z_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}, \quad (8.5)$$

$$\Phi^+ = \{\varphi \in \Phi : \varphi(x_i) = z_i, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}. \quad (8.6)$$

Entonces se cumple que,

- $\Phi = \Phi^- \cup \Phi^+$.
- $\Phi^+ = \{\varphi_1^+, \dots, \varphi_k^+\} = \{\varphi_1^+, \dots, \varphi_l^+\}$ c.s para $1 \leq l \leq k$.
- Φ^+ y Φ^- son condicionalmente independientes respecto de $Z(x) = z$.

Asumiendo que la medida de intensidad es regular, es decir $\Lambda_X(dz) = \lambda_X(z)dz$ para todo $x \in \mathcal{X}^k$, la función condicional de intensidad dada por,

$$\lambda_{s|x,z}(u) = \frac{\lambda_{(s,x)}(u, z)}{\lambda_x(z)}, \quad (8.7)$$

es la distribución condicional de $Z(x)$ para todas las posibles particiones de x . Es necesario simular ambos procesos pues puede suceder que $\max \Phi^-(s) > \max \Phi^+(s)$. Por tanto los pasos a seguir son,

Paso 1 Tomar una partición aleatoria τ .

Paso 2 Dado τ de tamaño l expresar de forma independiente $\varphi_1^+, \dots, \varphi_l^+$.

Paso 3 Independientemente de los pasos anteriores, tomar $\varphi_1^-, \dots, \varphi_l^-$.

Paso 1: Elección de la partición aleatoria.

Sea \mathcal{P}_k el conjunto de todas las posibles particiones de $\{x_1, \dots, x_k\}$, se toma una partición τ aleatoria con distribución,

$$\pi_x(z, t) = \frac{1}{C(x, z)} \prod_{j=1}^{|\tau|} \lambda_{x_{\tau_j}}(z_{\tau_j}) \int_{\{u < z_{\tau_j^c}\}} \lambda_{x_{\tau_j^c}|x_{\tau_j}, z_{\tau_j}}(u) du, \quad (8.8)$$

donde $C(x, z)$ es la constante de normalización.

Paso 2: Las funciones φ^+ .

Ya seleccionada la partición $\tau = \{\tau_1, \dots, \tau_l\}$, se seleccionan ahora los vectores aleatorios $\varphi_1^+(s), \dots, \varphi_l^+(s)$ a partir de la siguiente distribución,

$$P[\varphi_j^+(s) \in dv_j] = \frac{1}{C_j} \left\{ \int I_{u < z_{\tau_j^c}} \lambda_{(s, x_{\tau_j^c})|x_{\tau_j}, z_{\tau_j}}(v_j, u) du \right\} dv_j, \quad (8.9)$$

siendo C_j la constante de normalización. Se define entonces $Z^+(s) = \max_{j=1, \dots, l} \varphi_j^+(s)$ con $s \in \mathcal{X}^m$.

Paso 3: Las funciones φ^- .

Se toman de manera independiente $\{\psi_i\}_{i \geq 1}$ un proceso puntual de Poisson en $(0, \infty)$ con intensidad $\psi^{-2}d\psi$ y $\{Y_i(\cdot)\}_{i \geq 1}$ copias independientes de $Y(\cdot)$. Se define el vector aleatorio,

$$Z^-(s) = \max_{i \geq 1} \psi_i Y_i I_{\{\psi_i Y_i(x) < z\}}, \quad s \in \mathcal{X}^m. \quad (8.10)$$

Entonces el vector aleatorio $\tilde{Z}(s) = \max\{Z^+(s), Z^-(s)\}$ sigue la distribución condicional de $Z(s)$ dado $Z(x) = z$.

Por tanto se puede deducir la función de distribución acumulada condicional,

$$P[Z(s) \leq a | Z(x) = z] = \underbrace{\sum_{\tau \in P_k} \pi_x(z, \tau) \prod_{j=1}^{|\tau|} F_{\tau,j}(a)}_{\text{Paso 1 y 2}} \underbrace{\frac{P(Z(s) \leq a, Z(x) \leq z)}{P[Z(x) \leq z]}}_{\text{Paso 3}},$$

donde

$$F_{\tau,j}(a) = \frac{\int_{\{y < z_{\tau_j^c}, u, a\}} \lambda_{(s, x_{\tau_j^c}) | x_{\tau_j}, z_{\tau_j}}(u, y) dy du}{\int_{\{y < z_{\tau_j^c}\}} \lambda_{t_{\tau_j^c} | x_{\tau_j}, z_{\tau_j}}(y) dy}.$$

Se puede observar que $Z(\cdot) | \{Z(x) = z\}$ no es máx-estable.

8.2. Simulación de Cópulas.

Uno de los principales aplicaciones de cópulas es la simulación de vectores aleatorios con diferentes estructuras de dependencia. Se exponen los principales algoritmos para la generación de valores aleatorios que provengan de una determinada cópula.

■ **Algoritmo de simulación para la cópula gaussiana.** Los pasos son los siguientes,

1. Encontrar la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianzas $\Sigma = A.A'$.
2. Simular $Z_i = [z_{1i}, \dots, z_{di}] \sim N(0, I_d)$.
3. Calcular $x_i = [x_{1i}, \dots, x_{di}] = A.z_i \sim N(0, \Sigma)$.
4. Generar el vector $u_i = [u_{1i}, \dots, u_{di}]$ siendo $u_{i,j} = \Phi(x_{i,j})$ y se forma u_i proveniente de una cópula gaussiana de matriz de covarianzas Σ .

■ **Algoritmo para la generación de números aleatorios que sigan una cópula dada.**

La distribución condicional de un vector que en el caso bivariada es,

$$P(U_2 \leq u_2 | U_1 = u_1) = C_{2|1}(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}.$$

El algoritmo propuesto es entonces,

1. Simular realizaciones de dos variables aleatorias uniformes $(0, 1)$ independientes, w_{i1} y w_{i2} con $i = 1, 2, \dots, n$.
2. Definir el vector $u_i = [u_{i1}, u_{i2}]$ de la siguiente manera, $u_{i1} = w_{i1}$ y $u_{i2} = C_{2|1}^{-1}(u_{i1}, w_{i2})$. De esta forma u_i tiene como distribución conjunta la cópula dada.

Si bien este procedimiento parece simple y general, su implementación puede resultar complicada dependiendo de que tan sencillo sea obtener las distribuciones marginales condicionales y sus inversas.

■ **Algoritmo para simular variables aleatorias a partir de la cópula empírica.**

Romano en 2002, [70], a partir del principio de bootstrapping, realiza el siguiente algoritmo para generar variables a través de la cópula empírica,

1. Obtener de forma aleatoria (con reemplazamiento), n vectores observados de la base de datos histórica $r_i = [r_{i1}, \dots, r_{id}]$.
2. Definir el vector $u_i = [\hat{F}_1(r_{i1}), \dots, \hat{F}_d(r_{id})]$, donde \hat{F}_j corresponde a la función de distribución empírica para la variable j . Por tanto u_i es un vector cuya relación de dependencia está determinada por la cópula empírica.

Capítulo 9

Selección del Modelo.

9.1. Criterios de selección en procesos máx-estables.

Se introducen métodos de selección de modelos. Dos enfoques son posibles en este tema,

- Adaptación de Criterios de Información (por ejemplo AIC, TIC, BIC), ver [81].
- Pruebas del cociente de verosimilitudes compuestas, ver [10].

9.1.1. Criterios de Información.

En estos casos como se trabaja con una verosimilitud compuesta, se define la divergencia de Kullback-Leibler compuesta entre los modelos estadísticos g y f ,

$$D_p(f_\theta; g) = \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k w_{i,j} E \left[\log \frac{g(Z_i, Z_j)}{f(Z_i, Z_j; \theta)} \right], \quad (9.1)$$

donde $Z = (Z_1, \dots, Z_k) \sim g$. La divergencia de Kullback-Leibler compuesta es una combinación lineal de las usuales divergencias de Kullback-Leibler. Se puede mostrar que el modelo minimiza la divergencia de Kullback-Leibler compuesta es el mismo modelo que minimiza,

$$TIC(f_\theta) = -2\mathcal{L}_p(\hat{\theta}_p; z) + 2tr \left[\hat{J}(\theta_0) \hat{H}(\theta_0)^{-1} \right], \quad (9.2)$$

donde $\hat{H}(\theta_0)$ y $\hat{J}(\theta_0)$ son estimadores consistentes de las matrices $H(\theta_0)$ y $J(\theta_0)$. La ecuación (9.2) es una generalización del criterio de información de Takeuchi. De manera similar se define una generalización del criterio de información Bayesiano,

$$BIC(f_\theta) = -2\mathcal{L}_p(\hat{\theta}_p; z) + \log tr \left[\hat{J}(\theta_0) \hat{H}(\theta_0)^{-1} \right]. \quad (9.3)$$

9.1.2. Criterio del Cociente de Verosimilitudes.

Prueba que nos permite contrastar la hipótesis de que el parámetro $\theta = (\xi, \eta)$ toma la forma (ξ, η_*) . Como ya fue visto el estimador máximo verosímil compuesto $\hat{\theta}_p$ es asintóticamente normal, y usando argumentos típicos se muestra que,

$$W(\eta_*) = 2 \left[\mathcal{L}_p(\hat{\theta}_p; z) - \mathcal{L}_p(\hat{\xi}_{\eta_*}, \eta_*) \right] \rightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i, \quad n \rightarrow \infty, \quad (9.4)$$

donde p es la dimensión del parámetro η , $\hat{\xi}_{\eta_*}$ es la estimación máximo verosímil de ξ restringido a $\eta = \eta_*$, X_i son variables aleatorias χ_1^2 y λ_i son los valores propios de,

$$\left[H^{-1}(\theta_0) J(\theta_0) H^{-1}(\theta_0) \right]_{\eta} \left[(H^{-1}(\theta_0))_{\eta} \right]^{-1}, \quad (9.5)$$

siendo A_{η} la sub matriz de A correspondiente a los elementos de η .

9.2. Criterios de selección en Cópulas.

Si bien se presentaron diferentes procedimientos para la estimación de una cópula de forma paramétrica o semiparamétrica, estos procedimientos suponen que se conoce a priori la familia de cópulas que describe en forma correcta la estructura de dependencia. Por tanto es necesario obtener algún criterio que permita escoger una familia específica. Los criterios más usuales son,

- **Log verosimilitud y criterios de información.**

Joe, [41], expone varios criterios para la selección de la cópula. Uno de ellos es el de la función de log-verosimilitud evaluada en el estimador de máxima verosimilitud. El segundo estadístico sugerido es el *AIC* (criterio de información de Akaike) definido como $AIC = L - n_p$ donde n_p corresponde al número de parámetros estimados en el modelo.

Otros criterios de información son propuestos por Zivot y Wang [2006] quienes proponen el Criterio de Información Bayesiano $BIC = -2L + n_p \cdot \log(n)$. Hannan y Quinn plantean la variante $HQ = -2L + 2 \cdot n_p \cdot \log(\log(n))$.

- **Comparación entre la cópula paramétrica y la cópula empírica.**

Otro posible criterio de selección es el uso de estadísticos de bondad de ajuste (GOF), donde se selecciona aquella cópula que se ajusta mejor al comportamiento de los datos observados.

Capítulo 10

Resultados Globales.

Se extraen conclusiones de los períodos Junio-Agosto y Noviembre-Marzo obteniendo resultados variables según el lapso de tiempo estudiado. Se entiende por resultados globales o regionales aquellos que abarcan una superficie relativamente amplia y un alto número de estaciones presentes en la región. Se realiza una modelización espacial mediante diferentes procesos máx-estables y por cópulas extremas. Para un ajuste multivariado bajo el enfoque de cópulas, debido al alto número de estaciones presentes, se aborda el problema mediante R-vines.

10.1. Período Junio-Julio-Agosto.

Período donde se encuentran precipitaciones diarias con mayor frecuencia en el año y en general de mayores caudales. A priori se asocian en este período del año lluvias de convección y lluvias orográficas, lo cual provoca inconvenientes en la modelación de la dependencia espacial a nivel global.

Se comienza por describir la base de datos y su depuración para su posterior estudio.

10.1.1. Descripción y depuración de la base de datos.

La base de datos está dada por una matriz donde cada fila proporciona las mediciones precipitaciones diarias en mm de una de las 160 estaciones en un mes de un determinado año. Sólo se considera para cada estación y año el vector de precipitaciones diarias correspondientes al trimestre junio-julio-agosto. Luego se descartan aquellas filas que tengan por lo menos un 10 % de datos faltantes, cabe indicar que el trabajo no tiene como uno de sus objetivos el problema de datos faltantes y la imputación por algún mecanismo de éstos. Se toma como supuesto la confiabilidad en la base de datos salvo valores irreales, es decir, errores en la mediciones instrumentales o humanas, falta de coordinación entre los horarios

diarios entre las mediciones de estaciones distintas no son considerados, excepto que el dato no se encuentre entre 0 y 300 mm.

Hay 5 estaciones que en ningún año desde 1902 al 2012 presentan un número satisfactorio de datos. En la gráfica 10.1 se observa el histograma del número de estaciones que presentan datos en el trimestre del respectivo año.

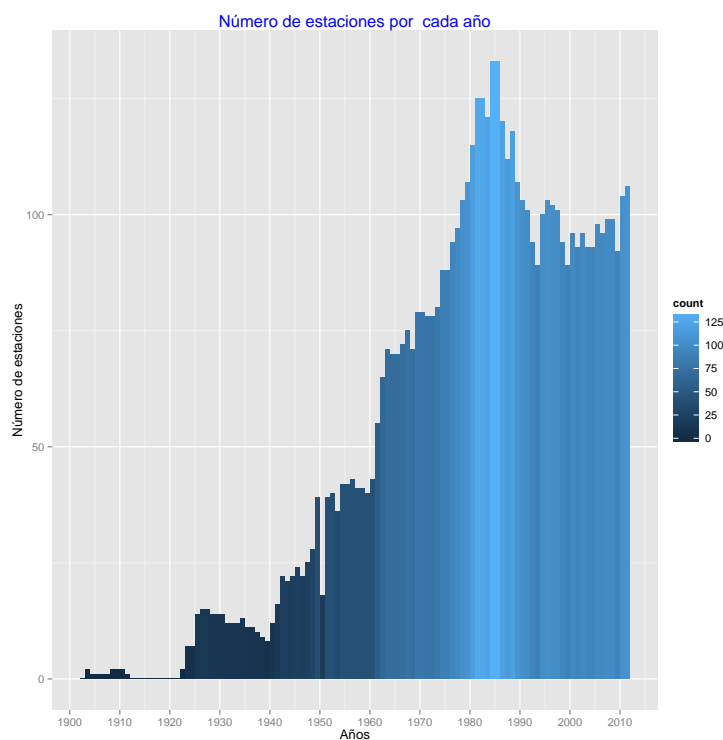


Figura 10.1: Histograma del número de estaciones “aptas” en el trimestre junio-julio-agosto según el año correspondiente.

Como se puede apreciar la moda del conjunto de datos son los años 1984 y 1985 donde se encuentra el número máximo de estaciones funcionando simultáneamente. Se evidencia un aumento abrupto del número de estaciones a principios de 1960. Presentan datos en los trimestres respectivos de cada año de forma interrumpida desde 1963 hasta 2012 las estaciones 11001, 11020, 11036, 11052, 11071, 11072 y 11095. Para un correcto ajuste del campo aleatorio es necesario incrementar el número de estaciones. A partir del histograma se observa una merma de estaciones en ciertos períodos de tiempo, por ejemplo a fines de la década del 80 donde se produjo un cambio de algunas estaciones convencionales a automáticas. Por tanto se van extrayendo de forma consecutiva aquellos años de tal manera que se incorporen el mayor número de estaciones posibles. Al final se ha decidido trabajar con 20 estaciones,

11001, 11002, 11003, 11005, 11006, 11009, 11013, 11020, 11021, 11028, 11031, 11033, 11036, 11040, 11051, 11052, 11071, 11072, 11079, 11095,

con datos tomados de los siguientes 37 años,

1963, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1972, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1981, 1982, 1984, 1987, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2002, 2004, 2005, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011.

La ubicación de éstas estaciones en el Estado de Guanajuato, ver figura 10.2, presentan una alta coherencia respecto a la agricultura, orografía y densidad poblacional del Estado, ver figuras 2.2 y 2.1. La agrupación de estaciones 11020, 11040 y 11095 pertenecen a León, Municipio con mayor número de habitantes. La zona norte, como era de esperar, no presenta estaciones eficientes en lo que respecta a este trabajo. Los sectores “vacíos” de la zona sur se corresponden con la ubicación de sierras, en el centro por ejemplo, se encuentra la sierra Central que atraviesa Guanajuato del noroeste al sureste.

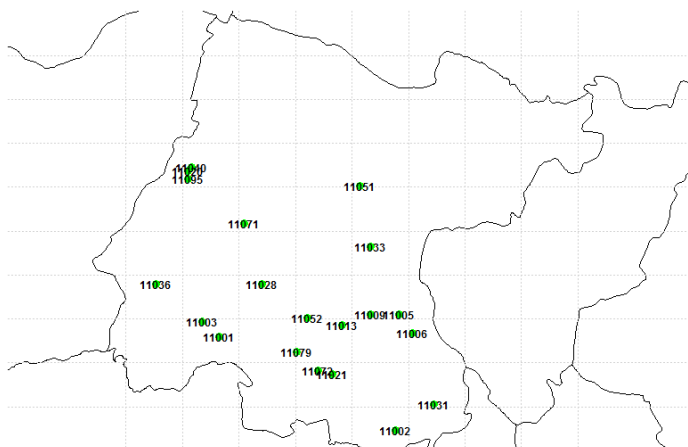


Figura 10.2: Ubicación de las estaciones meteorológicas resultantes luego de la depuración de los datos, en el período junio-agosto.

Luego de depurada la base se calculan los máximos anuales, en el trimestre junio-julio-agosto, para cada una de las 20 estaciones. Los resultados obtenidos se encuentran en el cuadro B.1.

En la figura 10.3 se encuentra una descripción de los datos, mediante diagramas de caja de los máximos anuales, y también agrupados en lapsos de 10 años.

Se estiman los parámetros de la DVEG marginales.

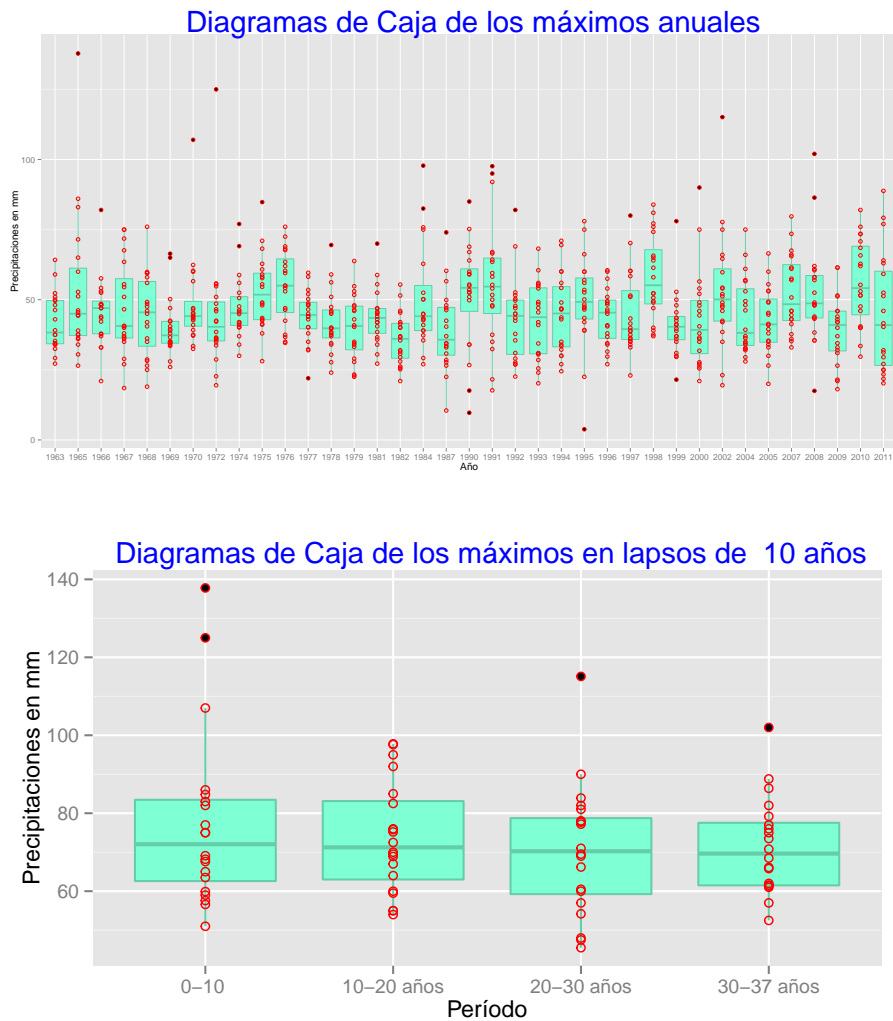


Figura 10.3: Diagramas de caja de los máximos para la estaciones analizadas en el período junio-agosto.

10.1.2. Estimación de los parámetros de las DVEG.

Como se desarrolló en el capítulo 7, se pueden estimar los parámetros de cada estación considerando un modelo individual o imponiendo una determinada relación a partir de ciertas variables regresoras, pensar en un modelo espacial y realizar la estimación conjunta. En el caso de estimar los parámetros de las DVEG marginales de forma individual se considera el método de máxima verosimilitud y el método de los momentos pesados en probabilidad.

Estimación por máxima verosimilitud y por el método de los momentos pesados.

En principio se supone más adecuado en este caso la estimación máximo verosímil por contar con aproximadamente 90 datos, cantidad suficientemente grande de observaciones

por estación. Si la muestra fuera más pequeña es aconsejable el método de los momentos pesados, ver cuadro B.2.

Estimación conjunta de los parámetros.

La ventaja de este método es que es posible estimar la DVEG de las precipitaciones máximas en puntos del territorio donde no se encuentran estaciones. Por otro lado se reduce de manera significativa el número de parámetros a estimar. Se toman como variables regresoras, la latitud, la longitud y la altura respecto al nivel del mar de la estación meteorológica. Si se considera el modelo completo, es decir,

$$\begin{cases} \mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt) \\ \sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lon) + \beta_2(lat) + \beta_3(alt) \\ \xi(x) = \gamma_0 + \gamma_1(lon) + \gamma_2(lat) + \gamma_3(alt) \end{cases} \quad (10.1)$$

Muchos de los coeficientes no son significativos, entonces es necesario considerar submodelos, ver cuadro B.3. En general se considera que el parámetro de forma no depende de ninguna de las 3 covariables. Se toma como criterio de selección del modelo una generalización del criterio de información de Takeuchi (TIC), desarrollado en el capítulo 9.

A partir del criterio TIC se selecciona el modelo,

$$\begin{cases} \hat{\mu}(x) = -454,7094 - 6,2963(lat) - 6,1578(lon) + 0,0343(alt) \\ \hat{\sigma}(x) = -212,30257 - 2,23877(lon) - 0,02451(lat) \\ \hat{\xi}(x) = -0,06471 \end{cases} \quad (10.2)$$

Tomando como referencia este modelo se calculan las estimaciones de los parámetros de ubicación, escala y forma, ver cuadro B.4. Se quiere comparar si este ajuste espacial es una aproximación eficiente de las estimaciones locales máximo verosímiles. A partir de la figura 10.4 se puede inferir que la estimación espacial no es adecuada en este caso. En particular hay una gran variabilidad referente a las estimaciones de los parámetros de ubicación y escala de un método respecto del otro. Además, a partir del histograma de los valores locales de las estimaciones del parámetro de forma, tampoco parece ser correcto un único valor estimado para este parámetro. Probablemente esto se deba al conjunto de sierras que atraviesan Guanajuato y al clima propio del Estado en este período del año, haciendo que sitios cercanos tengan comportamientos pluviales diferentes. Por tanto, a pesar de sus desventajas, en el trabajo se utilizan las estimaciones locales máximo verosímiles de los parámetros de las DVEG, en el período junio-agosto.

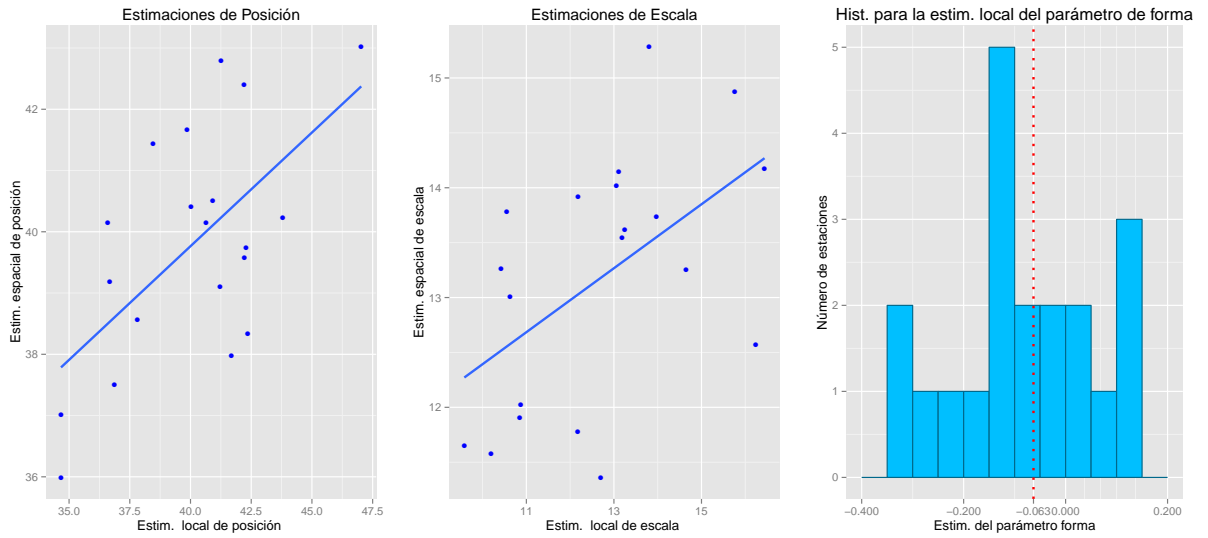


Figura 10.4: Estimaciones locales máximos verosímiles vs Estimaciones espaciales máximos verosímiles en el período junio-agosto.

10.1.3. Transformación a la distribución de Fréchet.

A partir de la propiedad 1, se puede transformar cada DVGE a una distribución de Fréchet unitaria, esta transformación es aplicada a las observaciones de cada estación con los parámetros de ubicación, escala y forma correspondientes, ver cuadro B.5. A partir de los datos obtenidos se realiza el ajuste espacial, a través de procesos máx-estables.

10.1.4. Estimación espacial mediante los procesos máx-estables.

En base a la estimación de la función coeficiente extremal y del F-madograma, ver figuras 10.5 y 10.6, se observa una gran variabilidad y una alta independencia de las precipitaciones en estaciones cercanas.

Por tanto no es claro que modelo máx-estable es el más adecuado, sin embargo aquellos que presentan un función coeficiente extremal acotada por una constante pequeña en referencia a 2 no parecen ser adecuados, como por ejemplo el modelo de Schlather.

La matriz de varianzas y covarianzas para el modelo de Smith es,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,013411 & 0,007502 \\ 0,007502 & 0,004197 \end{pmatrix}.$$

Su determinante cercano a cero ocasiona problemas de invertibilidad de la matriz, por tanto, este modelo presenta problemas numéricos.

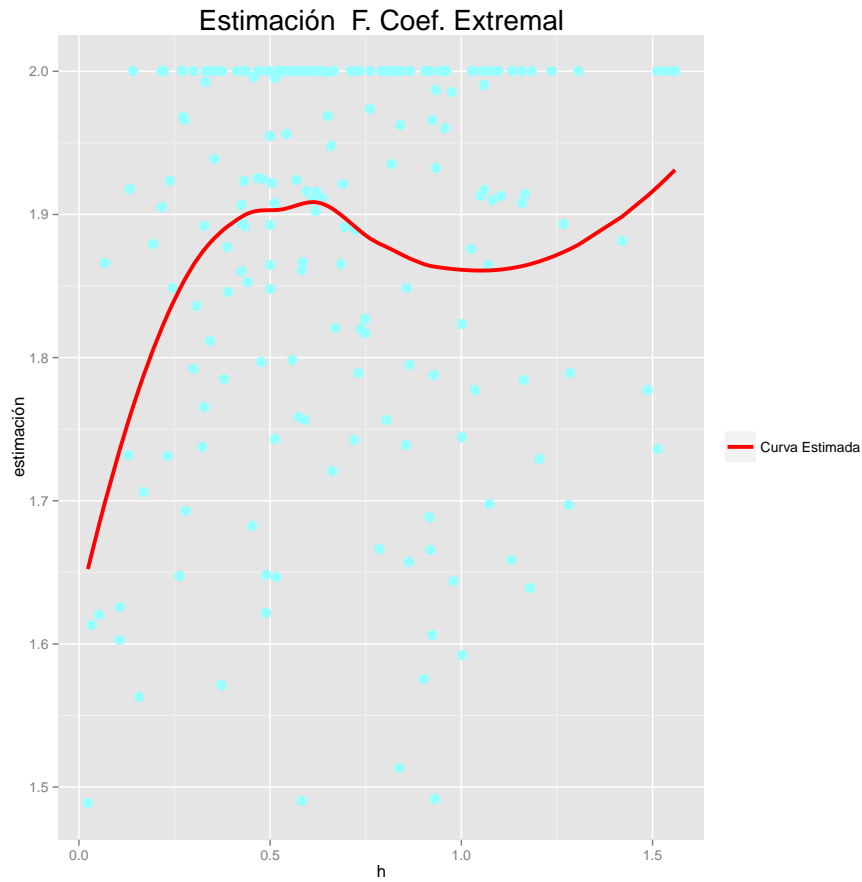


Figura 10.5: Estimación no paramétrica de S-T de la función coeficiente extremal luego de transformar los datos de cada estación a Fréchet, en el período junio-agosto.

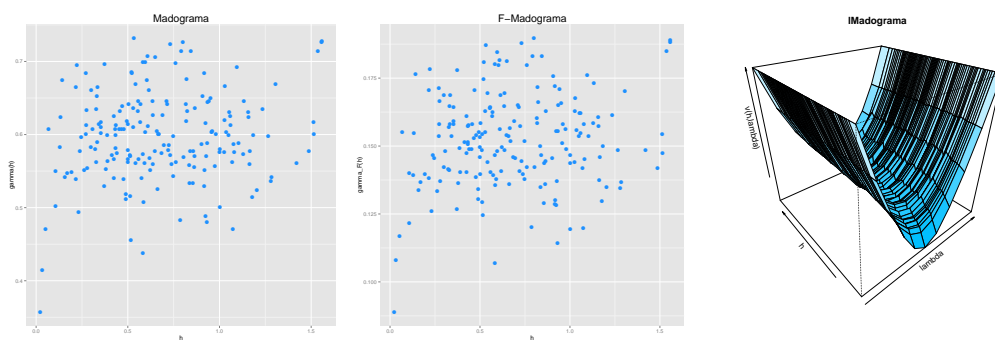


Figura 10.6: Madograma, F-Madograma, λ -Madograma estimados para las 20 estaciones a partir de los 37 años observados, en el período junio-agosto.

Selección mediante el TIC. A partir del cuadro 10.1 se puede apreciar según el criterio TIC el mejor modelo es el t-extremal, y como era de esperar el modelo de Schlather con distintas funciones de correlación no produce un buen ajuste. En la figura 10.7 se observan

las distintas estimaciones paramétricas de la función coeficiente extremal en referencia a la estimación no paramétrica.

Cuadro 10.1: Estimación de los parámetros de los procesos máx-estables y selección del modelo por el TIC, en el período junio-agosto.

Modelo	Parámetros Estimados				TIC
	nugget	rango	suavizado	otro	
Schlather (Whitmat)	0.152557265	0.004482092	15.365008469		61250.89
Schlather(PowExp)	0.15864611	0.03495404	1.99583921		61250.82
tExtremal	0.003024729	0.040675800	1.219398640	g.l=5	60632.15
Geo. Gaussiano	0.001076448	0.044292382	1.230667966	$\sigma^2=7.845857248$	60635.03
Brown Resnick		0.001147649	0.331258917		60645.38

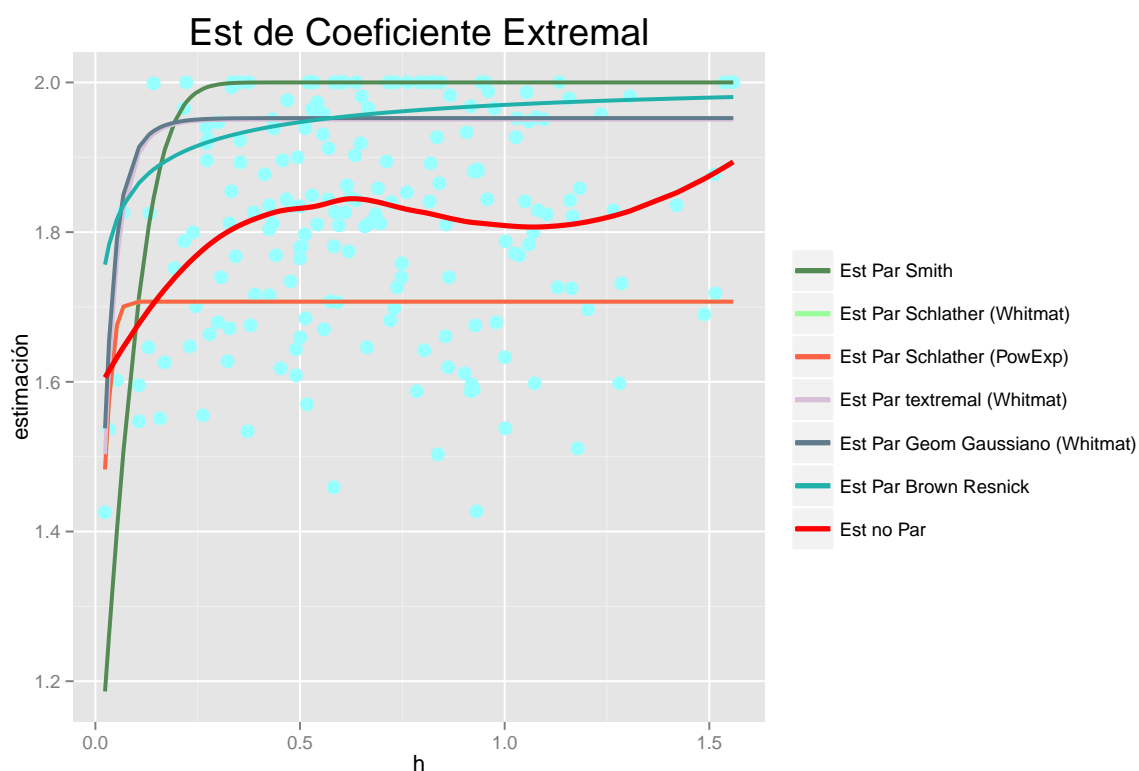


Figura 10.7: Estimaciones de la función coeficiente extremal según los distintos modelos, en el período junio-agosto.

Simulación a través del proceso t-extremal. Se realiza un estudio de simulación en el sector comprendido entre las latitudes $20^{\circ}12' - 21^{\circ}$ y las longitudes $100^{\circ}35' - 101^{\circ}42'$, ver

figura 10.8. Si se observan las curvas de nivel de una simulación del proceso t-extremal con los valores estimados, ver figura 10.9, se aprecia la independencia existente entre puntos distintos, lo cuál reafirma conclusiones de estudios anteriores realizados en el Estado.

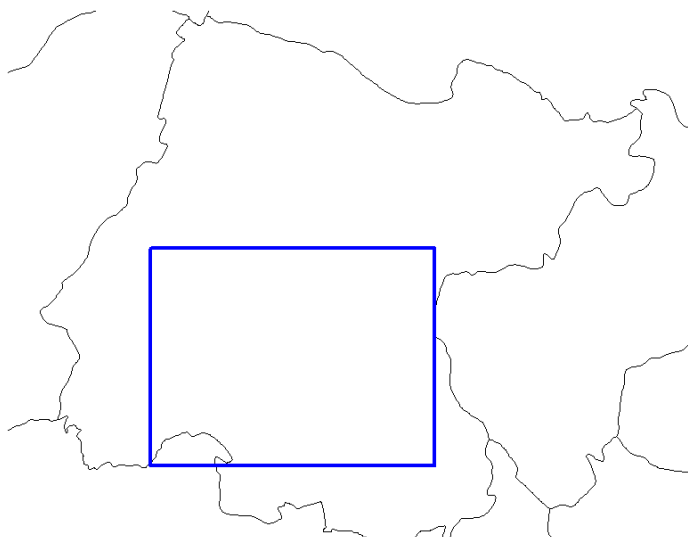


Figura 10.8: Sector de Guanajuato donde se realizan las simulaciones y predicciones.

Predicciones En esta sección se hace referencia a las definiciones de *Niveles de Retorno* y *Períodos de Retorno*. Se entiende por T -nivel de retorno al cuantil $1 - \frac{1}{T}$ de F que se denota u_T . Es decir, dados T años la variable número de veces que supera el umbral u_T distribuye $\text{Bin}(T, 1 - F(u_T))$. u_T es el valor del umbral de forma que el valor esperado de la v.a. valga 1.

Sea la v.a. T_u el número de años antes de encontrar el primero que supere el umbral u . Esta variable distribuye $\text{Geo}(1 - F(u))$ y se define el Período de Retorno como el valor esperado de la variable, es decir $\frac{1}{1-F(u)}$.

Sea F la distribución acumulada de la v.a. precipitación máxima anual en mm en el Estado de Guanajuato en cualquiera de las 20 estaciones, a partir de 10000 simulaciones, en la figura 10.10 se muestra la distribución acumulada, las curvas de nivel y períodos de retorno estimados. La figura 10.11 exhibe las densidades estimadas, mediante simulación, de los máximos anuales en períodos de 10, 20, 30 y 50 años respectivamente. En el cuadro 10.10 se encuentran las estimaciones de algunos valores de posición y dispersión para la distribución del máximo en los distintos lapsos de tiempo. Son calculadas las probabilidades

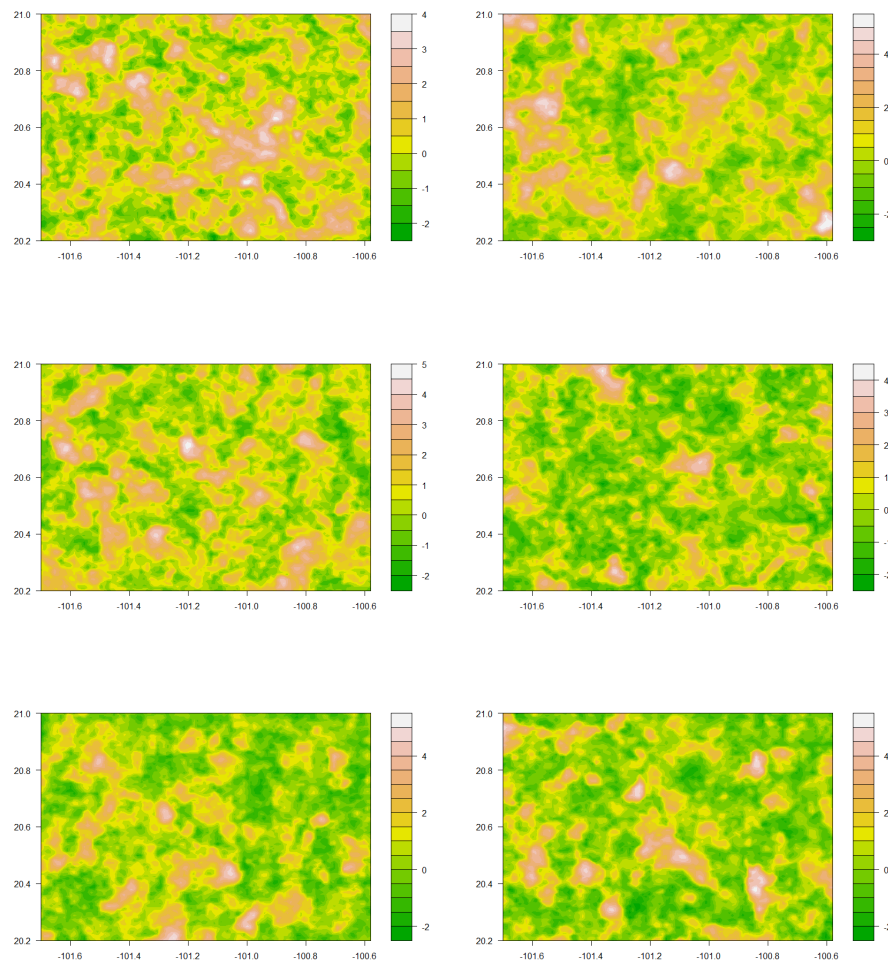


Figura 10.9: Seis simulaciones del logaritmo de los máximos anuales en el período junio-agosto, mediante el proceso t-extremal.

estimadas de que las lluvias máximas anuales superen los 100 y 150 mm respectivamente, pues dichos fenómenos pueden resultar en la mayoría de los casos catastróficos.

Cuadro 10.2: Predicciones mediante procesos máx-estables en el período junio-agosto

período (años)	<i>Junio – Agosto</i>				
	Mediana	Media	Desvío	P^* (supere 100 mm)	P^* (supere 150 mm)
10	103.6	108.6	20.1	0.607	0.03
20	114.9	120.6	24.1	0.84	0.11
30	120.4	125.7	24.1	0.92	0.13
40	126.2	132.5	26.0	0.968	0.195
50	131.2	138.5	29.6	0.996	0.234

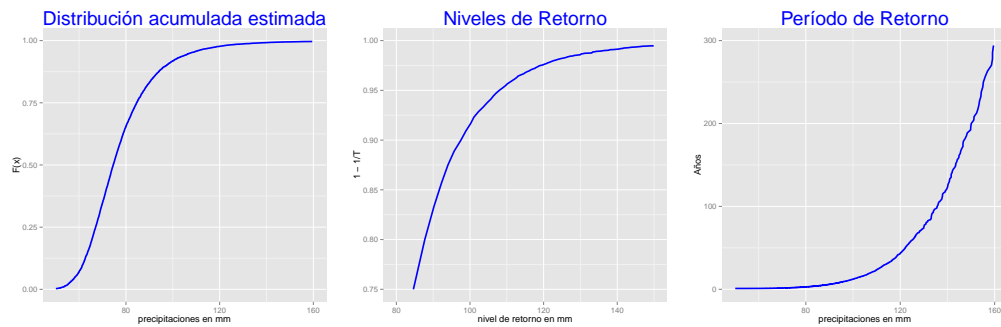


Figura 10.10: Distribución acumulada estimada, niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales, en junio-agosto.

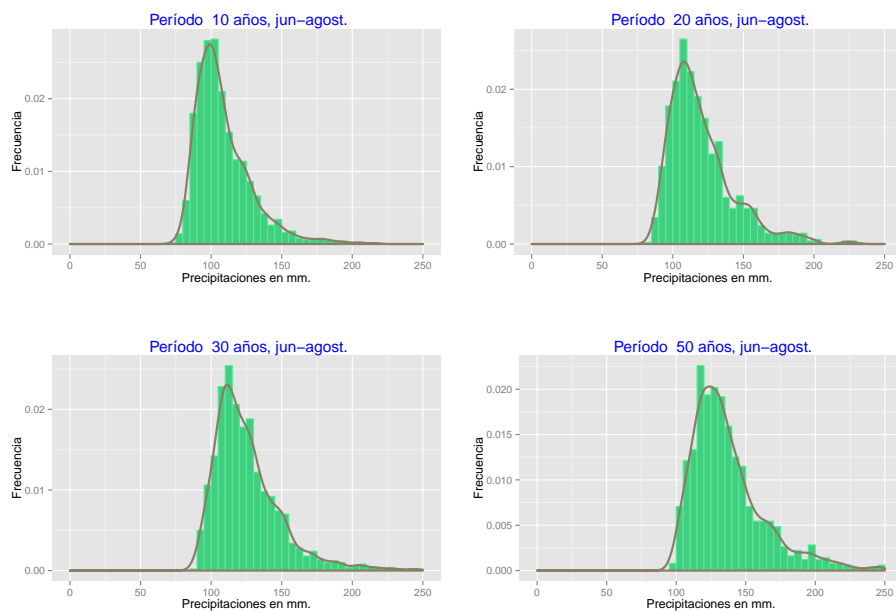


Figura 10.11: Densidades estimadas mediante el proceso máx-estable t-extremal de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en junio-agosto.

10.1.5. Estimación mediante Cópulas.

Estimación Multivariada.

Se desarrolla en esta sección el método R-vines introducido en 5.3 para abordar el problema de modelación multidimensional en dimensiones altas mediante cópulas. Se considera como matriz de disimilaridad la inducida por los valores del F-madograma y no la derivada del Tau de Kendall, puesto que el interés radica en modelar la dependencia de los extremos. La figura 10.12, exhibe el primer árbol de la estructura R-vines. Para

modelar la familia de cópulas de a pares se seleccionaron la cópula t-extremal y la cópula de Gumbel. Al igual que en la modelación por procesos máx estables, ver figuras 10.13, 10.14 y cuadro 10.3, a partir de un número elevado de simulaciones se estiman, la distribución acumulada, los niveles y períodos de retorno, las densidades para distintos lapsos de tiempo y probabilidades estimadas de eventos extremos son presentadas. Se puede apreciar una alta similitud con las predicciones obtenidas vía procesos máx-estables.

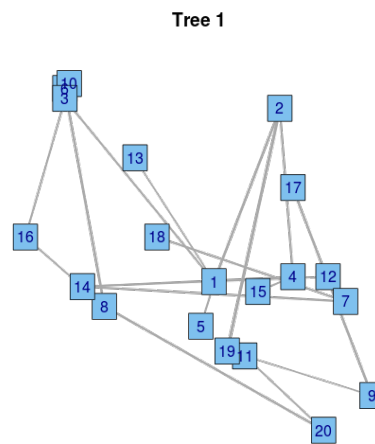


Figura 10.12: Primer árbol de la estructura R-vines en el período Junio-Agosto a partir de los valores del F-madograma, en el período noviembre-marzo.



Figura 10.13: Distribución acumulada estimada mediante R-vines , niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales , en junio-agosto.

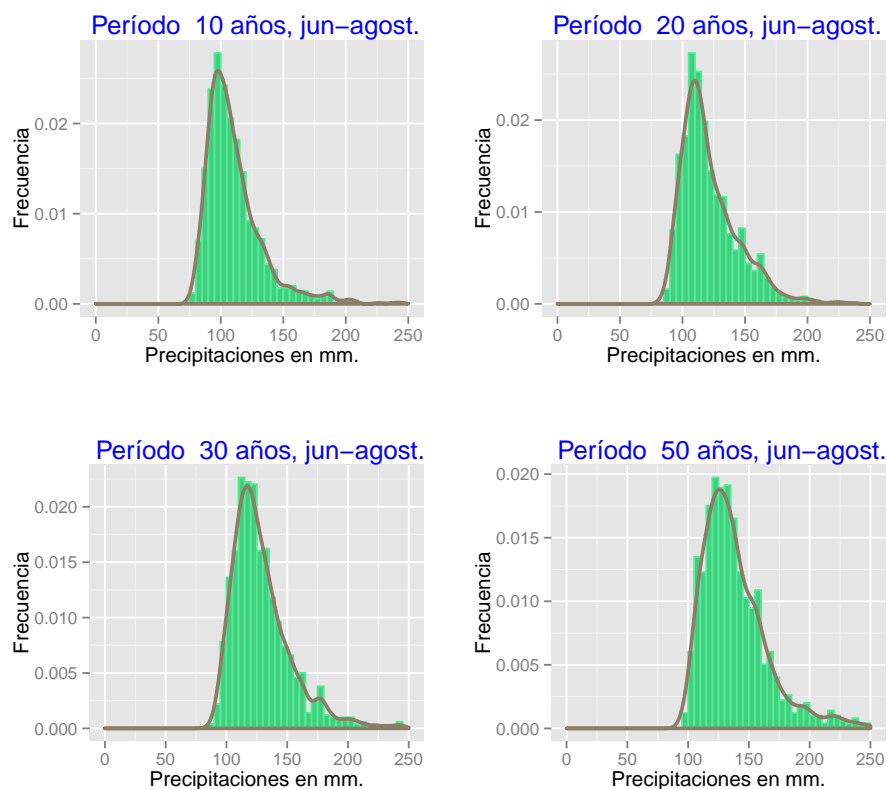


Figura 10.14: Densidades estimadas mediante R-vines de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en junio-agosto.

Cuadro 10.3: Predicciones mediante R-vines en el período junio-agosto

período (años)	<i>Junio – Agosto</i>				
	Mediana	Media	Desvío	P^* (supere 100 mm)	P^* (supere 150 mm)
10	105.2	110.6	23.4	0.625	0.063
20	116.0	122.5	25.3	0.87	0.121
30	123.4	129.1	25.4	0.948	0.161
40	127.2	133.5	27.4	0.98	0.194
50	133.0	139.2	28.7	0.994	0.268

10.2. Período Noviembre-Marzo.

10.2.1. Depuración de la base de datos.

Se realiza un estudio análogo al caso anterior obteniendo como resultado final 22 estaciones,

11001, 11002, 11003, 11005, 11009, 11011, 11013, 11020, 11021, 11025, 11028, 11033, 11036, 11040, 11051, 11052, 11060, 11071, 11072, 11076, 11095, 11096.

Con datos en los siguientes 34 años,

1964, 1965, 1966, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976 1977, 1978, 1979, 1984, 1985, 1988, 1989, 1992, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2004 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011.

En la figura 10.15 se pueden observar sus ubicaciones dentro del Estado de Guanajuato.

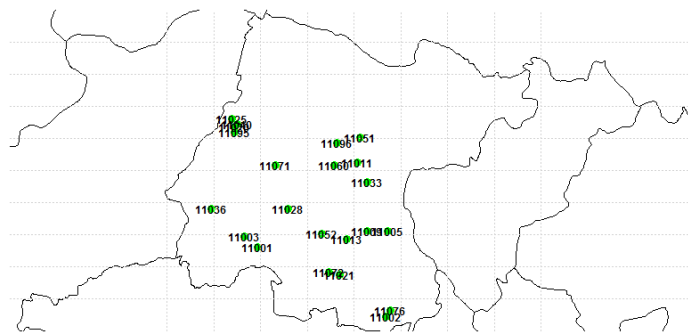


Figura 10.15: Ubicación de las estaciones meteorológicas resultantes luego de la depuración de los datos, en el período noviembre-marzo.

Se calculan los máximos en el período noviembre-marzo por año para cada estación. Los resultados obtenidos se encuentran en el cuadro B.6.

En la figura 10.16 se presenta una descripción de los datos, mediante diagramas de caja de los datos máximos anuales y en lapsos de 10 años. Es clave observar las lluvias del mes de febrero del 2010, provocando pérdidas materiales y humanas ¹.

¹www.eluniversal.com.mx/estados/74645.html

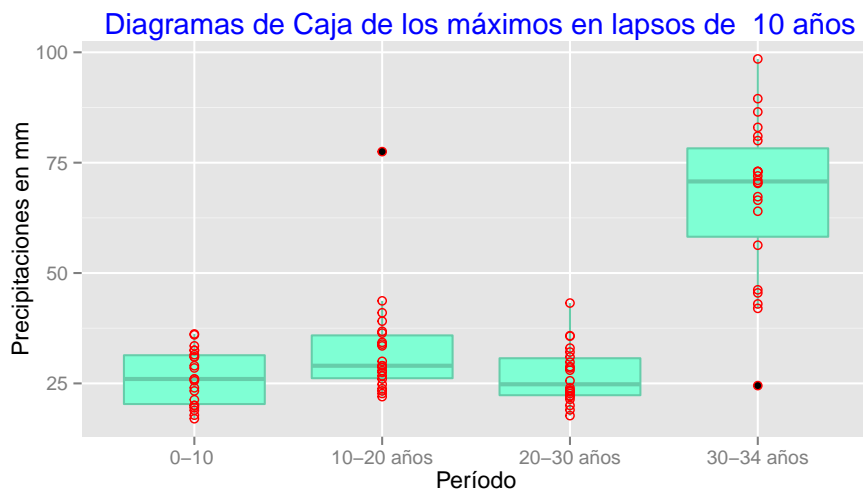
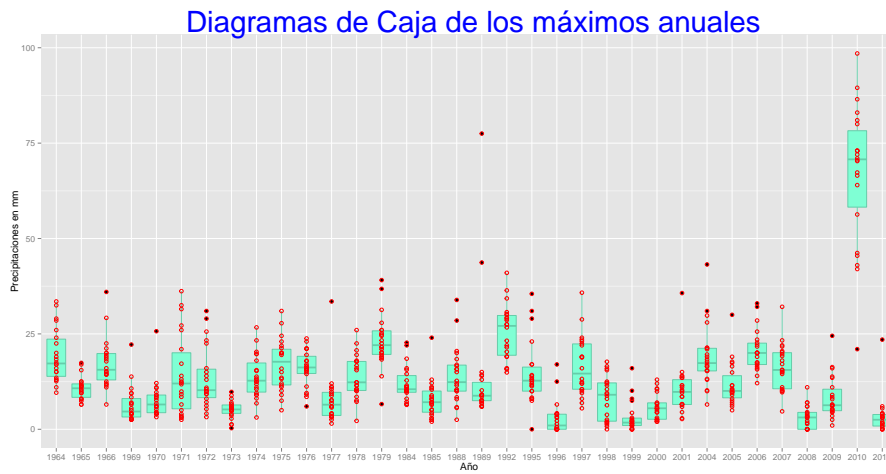


Figura 10.16: Diagramas de caja de los máximos para la estaciones analizadas en el período noviembre-marzo.

10.2.2. Estimación de los parámetros de las DVEG.

Estimación por máxima verosimilitud y por el método de los momentos pesados.

Al igual que en el período anterior se estiman los parámetros de las DVE correspondientes para cada estación por máxima verosimilitud y por el método de los momentos pesados en probabilidad, ver cuadro B.7.

Estimación conjunta de los parámetros.

Se consideran los submodelos de el cuadro B.8, en este caso el modelo seleccionado mediante el TIC es,

$$\begin{cases} \hat{\mu}(x) = 163,178 + 1,534(lon) \\ \hat{\sigma}(x) = 42,0678 + 0,3499(lon) \\ \hat{\xi}(x) = 0,2364 \end{cases} \quad (10.3)$$

Las estimaciones conjuntas de los parámetros de la DVEG se encuentran en el cuadro B.9.

En base a comparar de manera gráfica las estimaciones locales máximo verosímiles con las estimaciones conjuntas, ver figura 10.17 se observa una mejor aproximación que en el período junio-agosto, por tanto en el lapso noviembre-marzo se utilizan las estimaciones conjuntas.

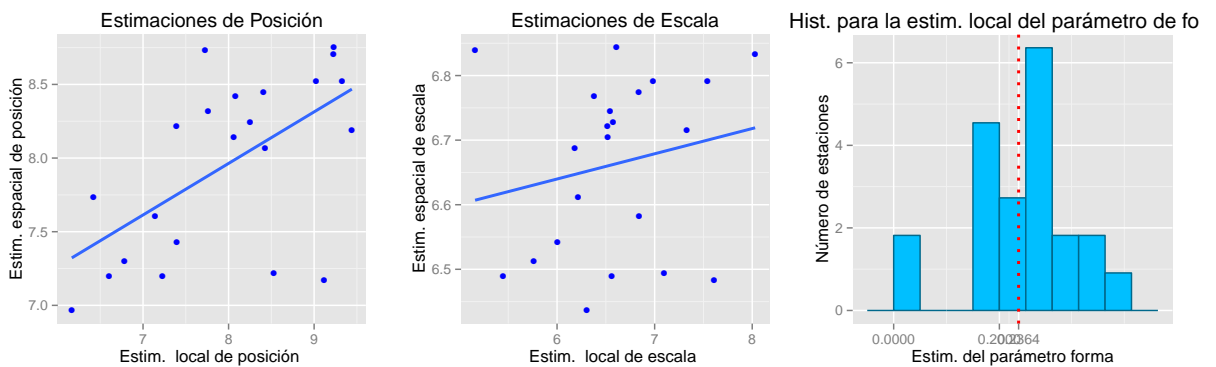


Figura 10.17: Estimaciones locales máximo verosímiles vs estimaciones espaciales máximo verosímiles en el período noviembre-marzo.

10.2.3. Transformación a la distribución de Fréchet.

Se transforman los datos a una Fréchet unitaria en cada caso, ver cuadro B.10.

10.2.4. Estimación espacial mediante los procesos máx-estables.

A partir de la estimación de la función coeficiente extremal y del F-madograma, ver figuras 10.18 y 10.19, si bien persiste una gran variabilidad, hay una mayor dependencia en función de la ubicación de las estaciones en referencia al período junio-agosto, se percibe en este caso que los procesos máx estables modelan de forma más eficiente el conjunto de lluvias.

La matriz de varianzas y covarianzas para el modelo de Smith es,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,598935 & -0,052804 \\ -0,052804 & 0,004655 \end{pmatrix},$$

que al igual que en el período anterior presenta problemas de invertibilidad.

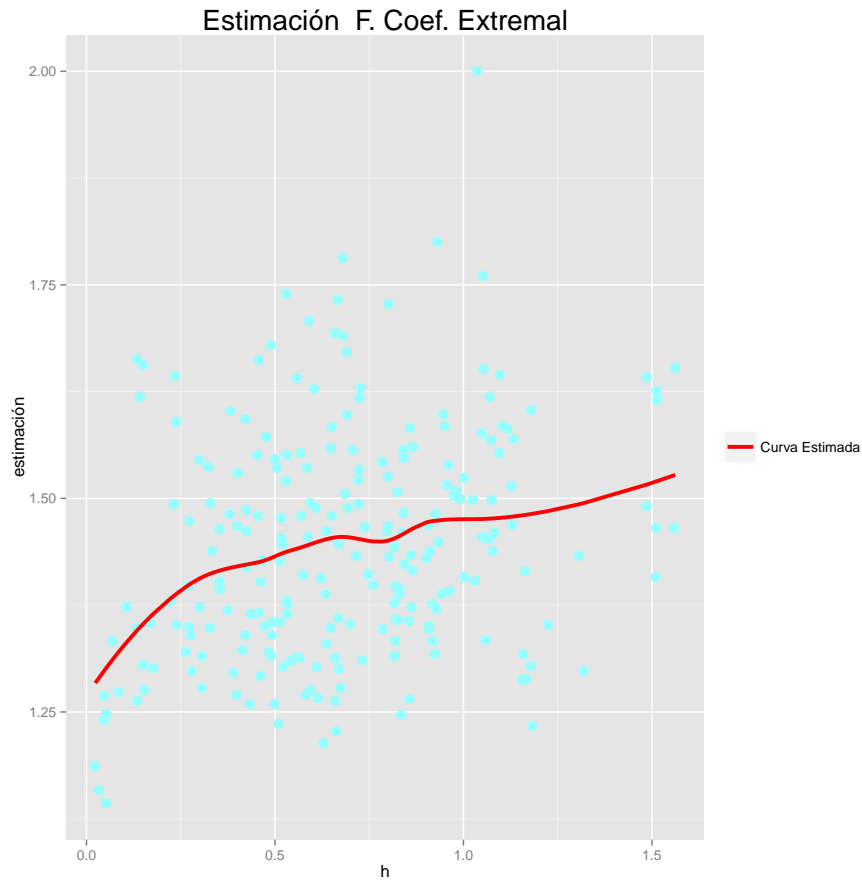


Figura 10.18: Estimación no paramétrica de la función coeficiente extremal luego de transformar los datos de cada estación a Fréchet en el período noviembre-marzo.

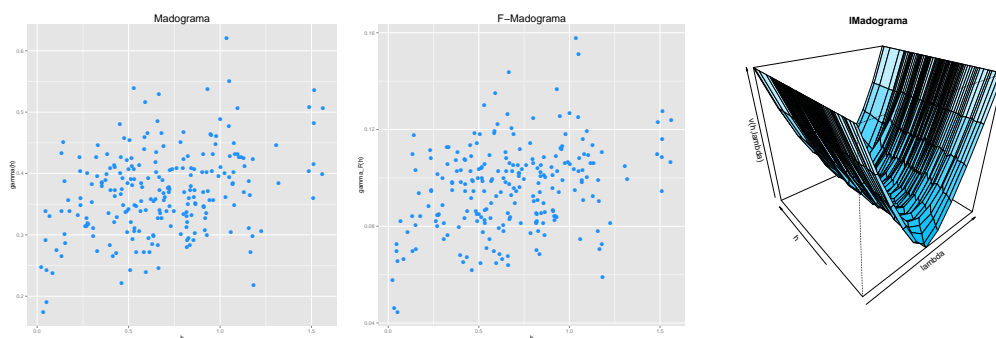


Figura 10.19: Madograma, F-Madograma, λ -Madograma estimados para las 22 estaciones a partir de los 34 años observados, en el período noviembre-marzo.

Selección mediante el TIC. El proceso más adecuado es el t-extremal a partir del criterio TIC, ver cuadro 10.4. Si se observa la figura 10.20, la función coeficiente extremal del proceso t-extremal es la que mejor se aproxima a la estimación no paramétrica.

Cuadro 10.4: Estimación de los parámetros de los procesos máx-estables y selección del modelo por el TIC, en el período noviembre-marzo

Modelo	Parámetros Estimados				TIC
	nugget	rango	suavizado	otro	
Schlather (Whitmat)	0.008133	3.735179	0.161565		63683.48
Schlather(PowExp)	0.00001614	1.078	0.4349		63681.2
tExtremal	0.05999	11.31927	0.18073	g.l= 3	63548.97
Geo. Gaussiano	0.01364	183.39646	0.42525	$\sigma^2=45.65890$	NA
Brown Resnick		0.6253	0.2290		63747.54

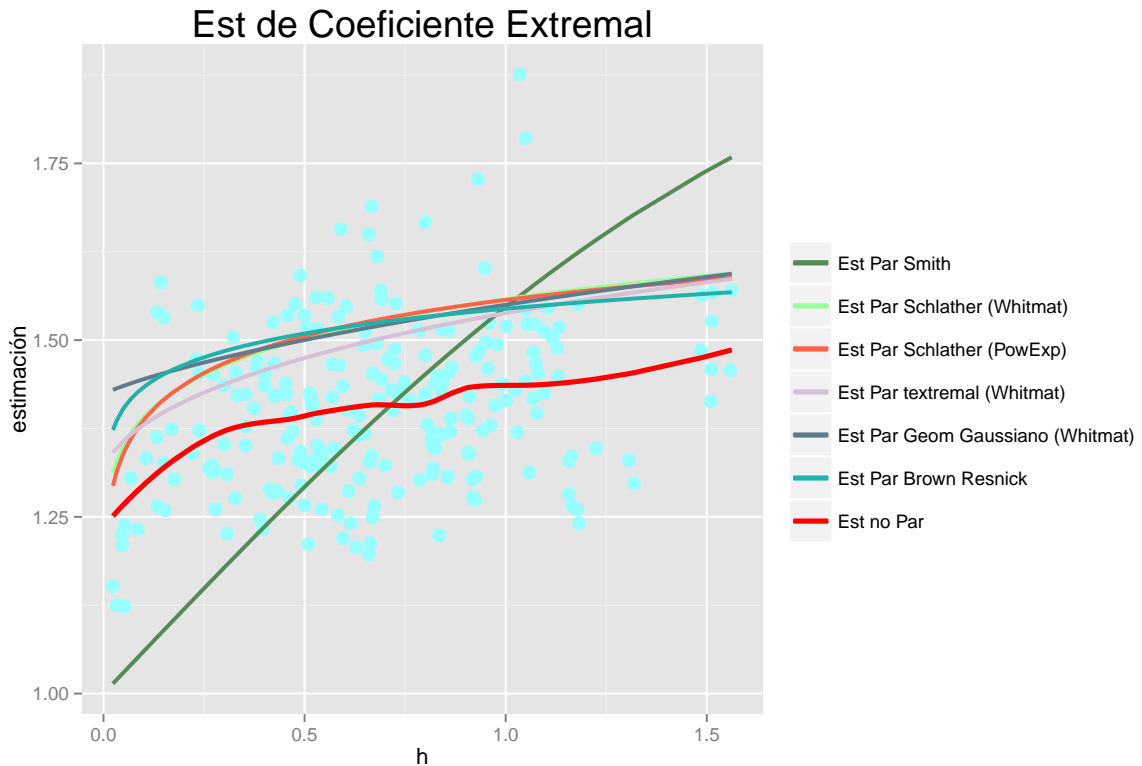


Figura 10.20: Estimaciones de la función coeficiente extremal según los distintos modelos, en el período noviembre-marzo.

Simulación a través del proceso t-extremal.

Si observamos las curvas de nivel de una simulación del proceso t-extremal con los valores observados, vemos mayor dependencia entre puntos distintos que en el período junio-agosto, ver figura 10.21.

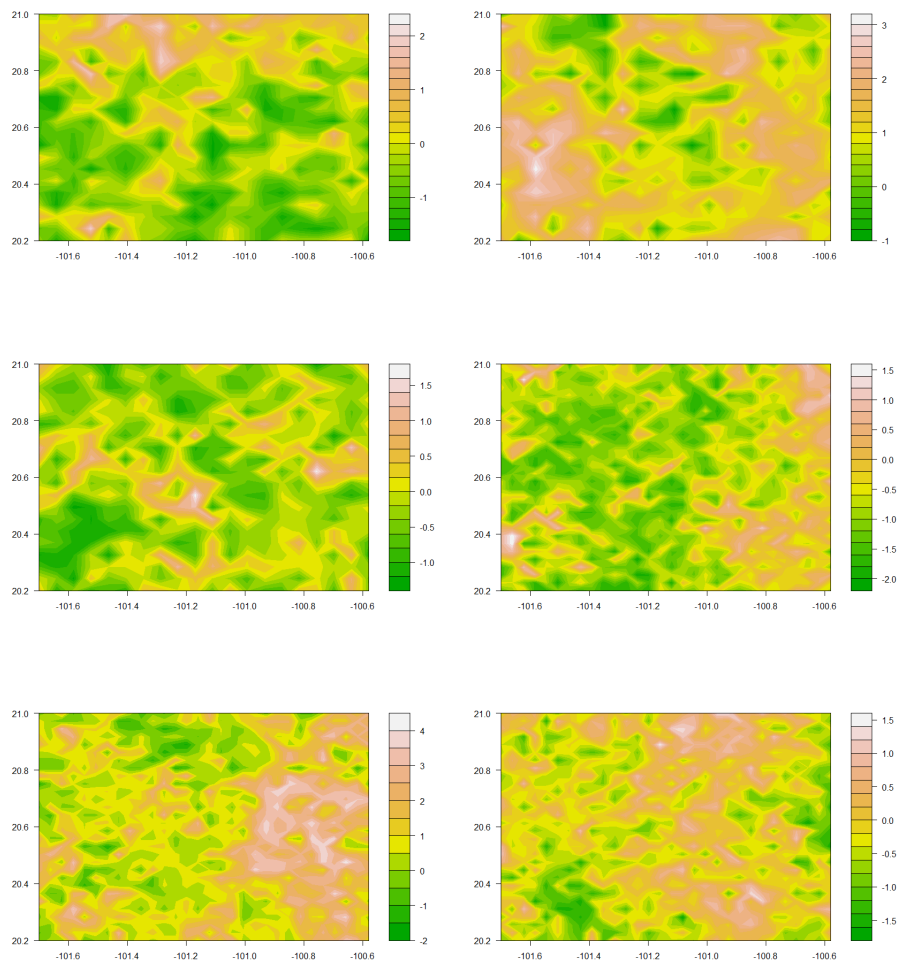


Figura 10.21: Seis simulaciones del logaritmo de los máximos anuales en el período noviembre-marzo, mediante el proceso t-extremal.

Predicciones En las figura 10.22 puede apreciarse la distribución acumulada, niveles y períodos de retorno estimados. En comparación con el período junio-agosto, si bien las probabilidades de superar el umbral de 100 mm son reducidas, no es posible descartar un evento extremo de tal magnitud en este período del año debido a las colas pesadas de la densidad estimada, ver figura 10.23. Las probabilidades de superar el umbral de los 150 mm es improbable a corto plazo, como lo muestra el cuadro 10.5.

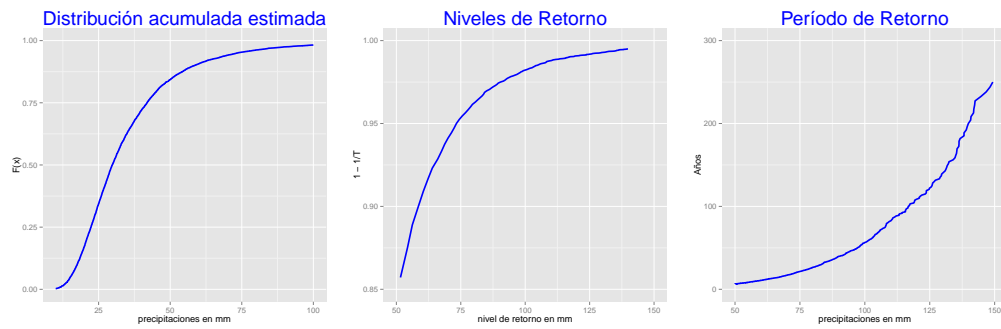


Figura 10.22: Distribución acumulada estimada, niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales, en noviembre-marzo.

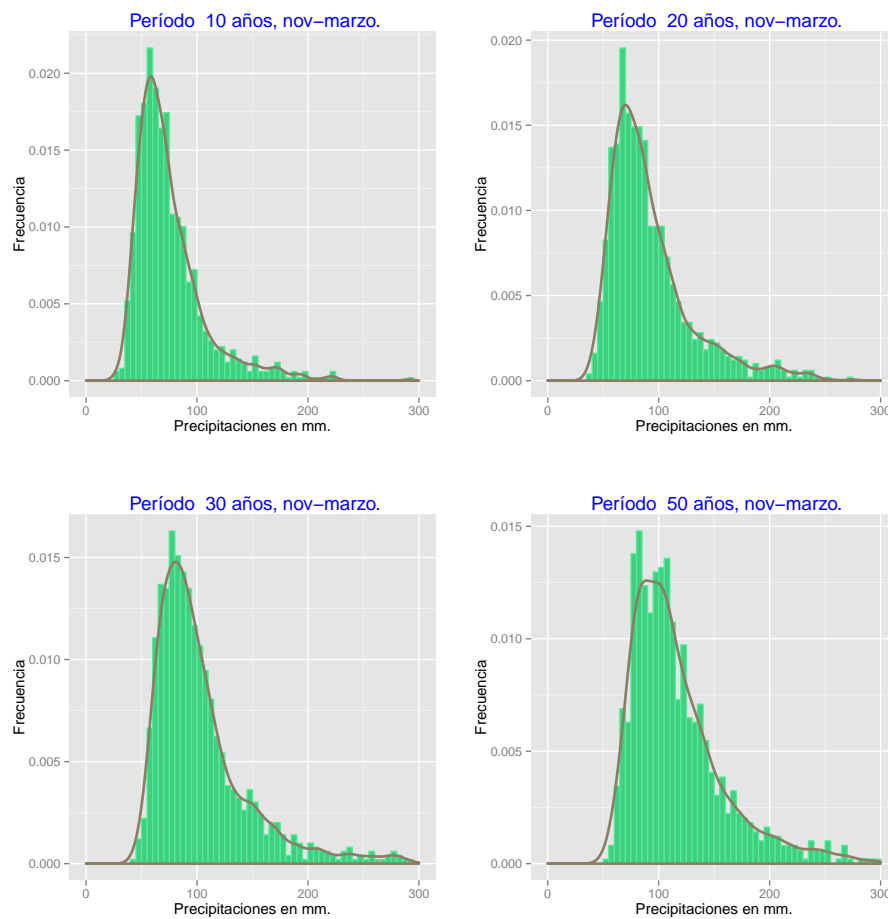


Figura 10.23: Densidades estimadas mediante el proceso máx-stable t-extremal de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en noviembre-marzo.

Cuadro 10.5: Predicciones mediante procesos máx-stables en el período noviembre-marzo

período (años)	Noviembre – Marzo				
	Mediana	Media	Desvío	P^* (supere 100 mm)	P^* (supere 150 mm)
10	67.2	75.5	33.1	0.146	0.043
20	83.1	94.6	46.7	0.306	0.093
30	92.0	105.0	47.3	0.407	0.125
40	99.5	113.4	54.9	0.492	0.132
50	106.6	119.9	50.9	0.592	0.178

10.2.5. Estimación mediante Cópulas.

Estimación Multivariada.

Al igual que en el período junio-agosto se realiza una modelización multivariada mediante R-vines. Si se compara la dependencia entre las estaciones en el primer árbol se puede observar en este caso, ver figura 10.24, una estructura de dependencia mucho mas fuerte que en verano, afirmando este resultado lo ya visto en el ajuste por procesos máx-estables. Si bien se logran predicciones similares a las obtenidas en procesos máx estables, se puede contemplar en este caso una mayor probabilidad de ocurrencia asignada a los eventos extremos, ver cuadro 10.6 y figura 10.26.

Es importante destacar en el período de invierno, que si bien las precipitaciones extremas son menos frecuentes que en verano, no se puede descartar un acontecimiento extremo en dicha época del año, en general esto se debe a la entrada de algún frente frío que afecta todo el Estado.

Cuadro 10.6: Predicciones mediante R-vines en el período noviembre-marzo

período (años)	Noviembre-Marzo				
	Mediana	Media	Desvío	P^* (supere 100 mm)	P^* (supere 150 mm)
10	66.6	85.9	79.5	0.205	0.086
20	86.7	107.7	75.9	0.384	0.155
30	98.5	127.6	122.9	0.479	0.219
40	116.1.2	147.4	118.3	0.62	0.297
50	121.3	152.2	125.6	0.683	0.31

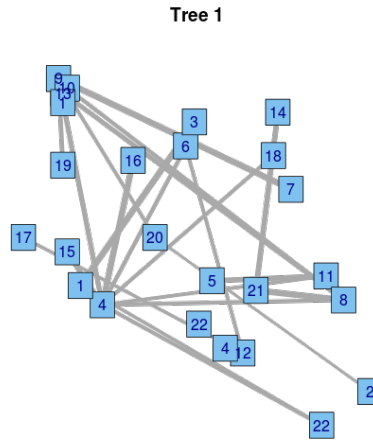


Figura 10.24: Primer árbol de la estructura R-vines en el período Noviembre-Marzo a partir de los valores del F-madograma, en el período noviembre-marzo.

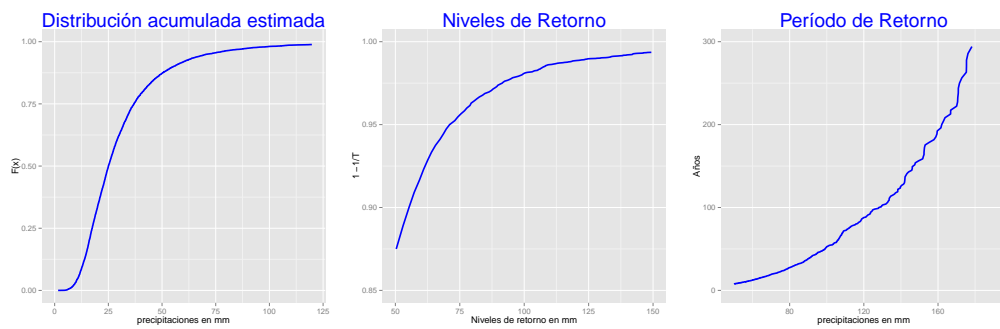


Figura 10.25: Distribución acumulada estimada mediante R-vines , niveles y períodos de retorno para las precipitaciones máximas anuales regionales , en noviembre-marzo.

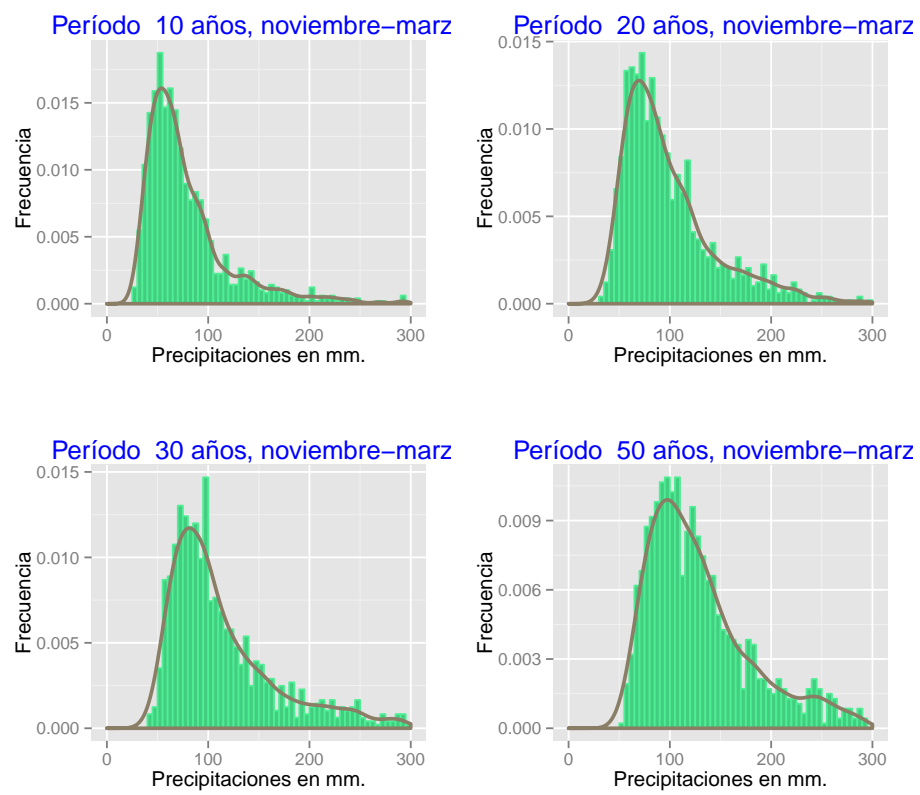


Figura 10.26: Densidades estimadas mediante R-vines de las precipitaciones máximas anuales regionales para distintos períodos de tiempo, en noviembre-marzo.

Capítulo 11

Resultados Locales.

Se entiende por resultados locales aquellos que comprenden una pequeña región y un número reducido de estaciones. En este caso se realiza una modelización mediante cópulas extremas y mediante una mezcla de distribuciones Dirichlet.

Al igual que en el capítulo anterior se analizan los períodos Junio-Agosto y Noviembre-Marzo.

11.1. Período Junio-Julio-Agosto.

En una primera instancia se exploran herramientas para determinar grupos de estaciones que proporcionen un mejor ajuste, en referencia a las proporcionadas por el modelo global, sobre algún territorio de extensión reducida.

11.1.1. Cluster de estaciones.

Observando el comportamiento dispar de las precipitaciones extremas respecto a las diferentes estaciones meteorológicas de Guanajuato, parece conveniente dividir al estado en sectores mas pequeños para un estudio local. Naveau, Sabourin, Bernard, Vrac y Mestre en el 2013, [6], basados en el método de k-medoides introducido por Kaufman y Rousseeuw en 1987, [45], como una generalización del método de k-medias, introducen un procedimiento de cluster para máximos, donde la matriz de disimilaridad está dada por los valores del F-madograma. En la figura 11.1 se observan particiones de las 155 estaciones en grupos, tomando como matriz de disimilaridad,

- las distancias en L1 entre las precipitaciones máximas,
- las distancias en L1 entre los coeficientes marginales de forma ajustados por máxima verosimilitud,

- los valores del F-madograma.

En la figura 11.1 se encuentran también los coeficientes de validación de Silhouette. Si se denota $a(i)$ la disimilitud promedio de la estación i con las estaciones del mismo cluster, y $b(i)$ a la menor disimilitud promedio de la estación i con los restantes cluster, el coeficiente de Silhouette se define como,

$$s(i) = \frac{b(i) - a(i)}{\max\{a(i), b(i)\}} \quad (11.1)$$

Se encuentra acotado en el intervalo $[-1, 1]$, si es cercano a 1 se considera la estación i como bien clasificada y si es cercano a -1 como mal clasificada.

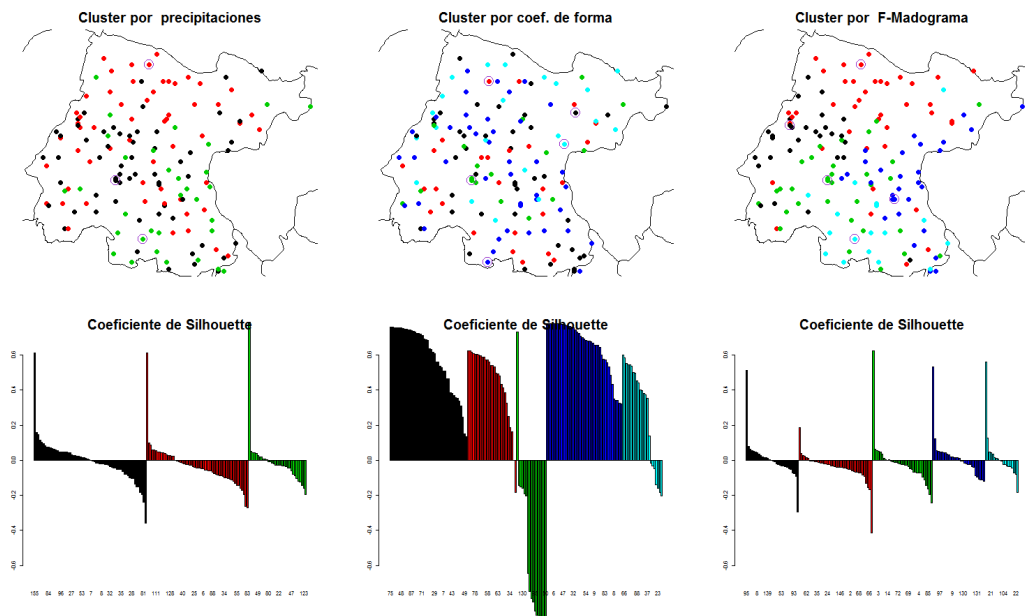


Figura 11.1: Cluster de estaciones según distintas matrices de disimilitud con el método k-medoides en el período junio-agosto

Con el fin de realizar un ajuste local, se seleccionan 3 estaciones del Municipio de León que se encuentran en el mismo cluster,

11020, 11040, 11095.

En la figura 11.2 se observa la ubicación de las estaciones, para tener una perspectiva de las distancias la estación 11040 y 11095 se encuentran aproximadamente a 10 km. Los años

que comparten estas 3 estaciones son 50,

1961, 1962, 1963, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011.

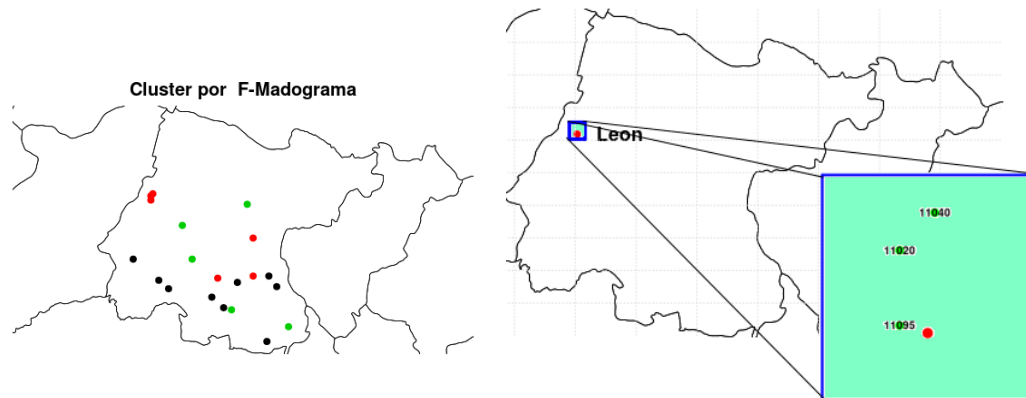


Figura 11.2: Ubicación de las estaciones en León.

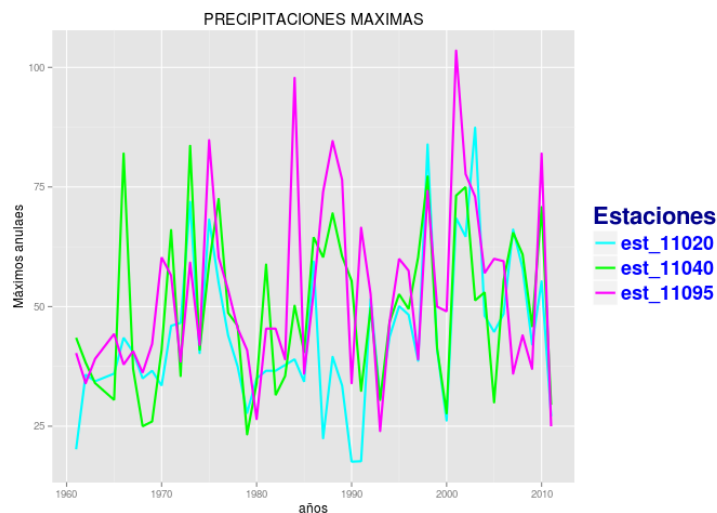


Figura 11.3: Precipitaciones máximas en 50 años en el período junio-agosto.

En la figura 11.3 puede apreciarse que la cercanía de las estaciones no conlleva a un comportamiento similar, como el esperado, entre los máximos anuales .

11.1.2. Modelización de la dependencia.

Para una mejor representación de la dependencia, se modela los datos mediante pares de cópulas. A partir de la estimación de los parámetros marginales para cada estación por

máxima verosimilitud se transforman las v.a. aleatorias a Uniformes en el intervalo $[0,1]$. En la figura 11.4 se muestran los valores observados que permiten estimar la cópula extrema entre pares de estaciones.

Cópulas Extremas.

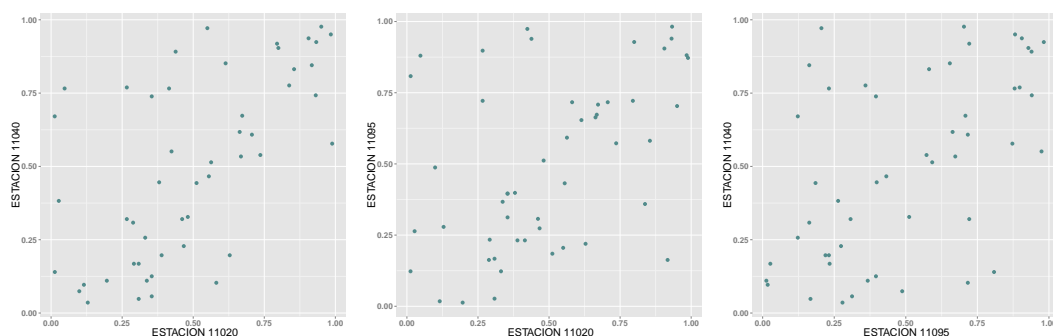


Figura 11.4: Datos bivariados transformados a uniformes entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período junio-agosto.

Se emplean diferentes familias de cópulas bivariadas, ver cuadro 11.1. Si se toma como criterio de selección la pseudo máx-verosimilitud, la cópula t-extremal es seleccionada en dos de los tres ajustes.

Cuadro 11.1: Ajuste de cópulas extremas de a pares en el Municipio de León, en el período junio-agosto.

Cópula	11020 – 11040			11020 – 11095			11040 – 11095		
	LogLik	Parámetro	p-valor	LogLik	Parámetro	p-valor	LogLik	Parámetro	p-valor
Gumbel	11.75	1.834	0.0080	5.77	1.489	0.04	7.90	1.51	0.0534
Galambos	11.31	1.109	0.0664	5.57	0.747	0.05744	7.80	0.78	0.2021
Husler Reiss	10.71	1.521	0.0534	5.475	1.155	0.0534	7.592	1.183	0.2111
T-Extremal (g.l=4)	11.77	0.845	0.1314	5.687	0.714	0.036	7.911	0.73	0.0584

A partir de la estimación de la cópula t-extremal y las distribuciones marginales de valores extremos, se realizan 100 simulaciones de la distribución bivariada conjunta de las precipitaciones máximas para cada par de estaciones, ver figura 11.5. Es claro que las estaciones más cercanas muestran mayor dependencia.

Al igual que en la modelación global se estiman las densidades de los máximos para distintos períodos de tiempo 10, 20, 30, 50 y 100 años, ver figura 11.6. En el cuadro 11.2 se

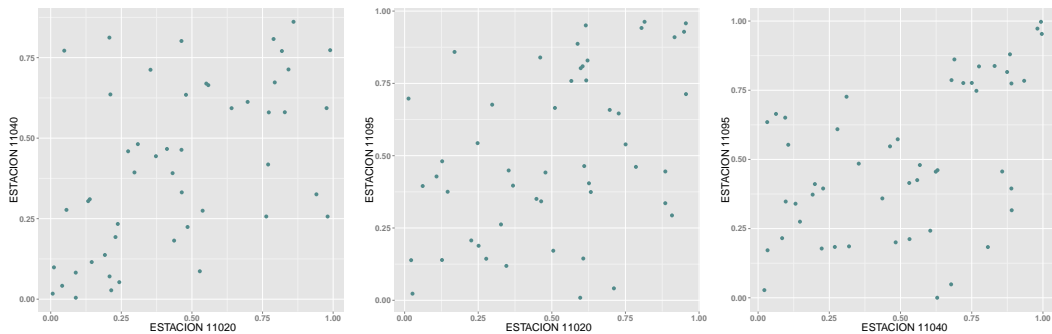


Figura 11.5: Datos simulados bivariados con la cópula t-extremal entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período junio-agosto.

observa la mediana, la media, el desvío y las estimaciones de la probabilidades de ocurrencia de ciertos sucesos extremos.

Cuadro 11.2: Predicciones locales mediante cópulas en el período junio-agosto

período (años)	11020 – 11040					11020 – 11095				
	Mediana	Media	Desvío	$P^*(\text{supere } 100 \text{ mm})$	$P^*(\text{supere } 150 \text{ mm})$	Mediana	Media	Desvío	$P^*(\text{supere } 100 \text{ mm})$	$P^*(\text{supere } 150 \text{ mm})$
10	73.8	75.4	12.0	0.037	0	79.7	82.6	16.6	0.146	0.003
20	80.7	81.8	11.3	0.069	0	88.2	90.8	16.5	0.259	0.004
30	84.4	85.7	10.7	0.112	0	92.9	96.40	17.4	0.339	0.011
40	87.0	88.3	10.2	0.133	0	97.6	100.5	16.4	0.437	0.014
50	89.0	90.0	10.3	0.149	0	99.9	102.3	16.2	0.498	0.015
100	94.4	95.6	9.4	0.280	0	108.8	111.8	17.4	0.729	0.037

Mezcla de distribuciones Dirichlet.

En esta sección en lugar de modelar los extremos marginales por bloques se utiliza el método del umbral. Se consideran las estaciones 11020, 11040 y 11095 resultando 4650 días comunes con observaciones de precipitaciones diarias, ver figura 11.7.

Se modelan los datos al igual que en Cooley, Naveau y Davis 2010, [58], se estima la acumulada \hat{F} , modelando el 70 % inferior de los datos a través de la distribución empírica F^* y la cola superior a través de la distribución generalizada de Pareto,

$$\hat{F}_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - \{1 - F_{X_i}^*(u_{X_i})\} \{1 + \kappa(x - u_{X_i})/\beta_i\}_+^{-1/\kappa} & \text{si } x > u_{X_i} \\ F_{X_i}^*(x) & \text{si } x \leq u_{X_i} \end{cases}$$

siendo u_{X_i} el cuantil 0,7.

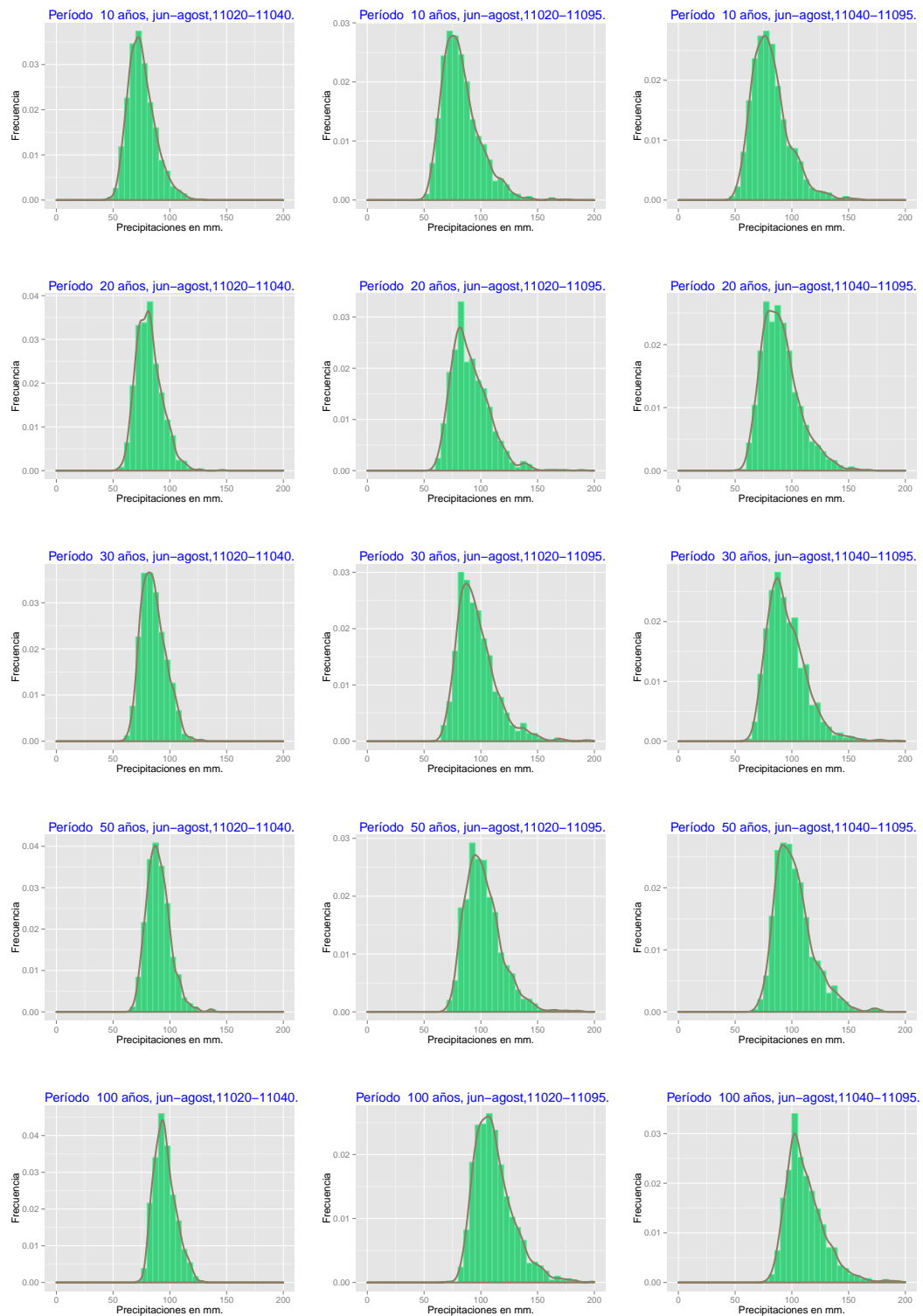


Figura 11.6: Densidades estimadas de las precipitaciones máximas anuales locales para distintos períodos de tiempo, en junio-agosto.

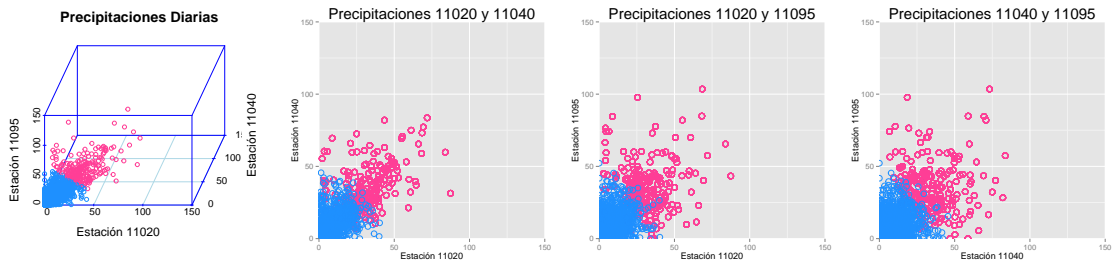


Figura 11.7: Precipitaciones diarias mensuales en el período junio-agosto de las estaciones 11020, 11040 y 11095. Se diferencian el 5 % de las observaciones extremas según la distancia L_1 en \mathbb{R}^3

A partir de la F estimada se transforman los datos a una Fréchet unitaria y se seleccionan aquellas 200 observaciones de mayor norma en L_1 , aproximadamente el 5 % del total de la muestra. Como se desarrolló en la sección 7.2, a través del método de Monte Carlo, se estiman las probabilidades predictivas a posteriori en el período junio-agosto. A través de la distribución geométrica se calculan la probabilidades de ocurrencia de ciertos eventos extremos en distintos lapsos de tiempo, ver cuadro 11.3.

período (años)	<i>Junio – Agosto</i>	
	$P_\theta(A w)$ umbrales de 100 mm	$P_\theta(A w)$ umbrales de 150 mm
10	0.0821	0
20	0.1202	0.0002
30	0.2341	0.0009
40	0.3933	0.0012
50	0.4222	0.0041

Cuadro 11.3: Predicciones a posteriori en el período junio-agosto a través de una mezcla de distribuciones Dirichlet.

11.2. Período Noviembre-Marzo.

11.2.1. Cluster de estaciones.

Se realiza al igual que en el período junio-agosto cluster de estaciones por máximos de precipitaciones, los cuales difieren en forma significativa de los grupos obtenidos en el caso anterior, ver figura 11.8.

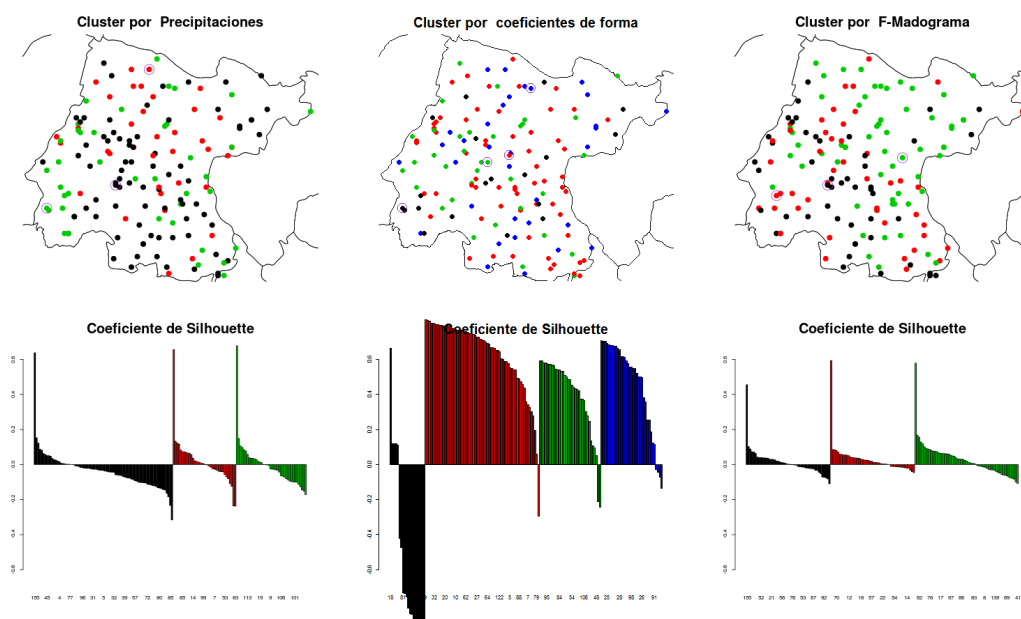


Figura 11.8: Cluster de estaciones según distintas matrices de disimilitud con el método k-medoides en el período noviembre-marzo.

Se estudian, las estaciones 11020, 11040, 11095, que comparten 50 años de información en común,

1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011.

Como puede apreciarse en la figura 11.9 los máximos anuales muestran un comportamiento similar entre las estaciones, lo que no acontecía en junio-agosto.

11.2.2. Modelación de la dependencia.

Como se mencionó en la sección anterior la cercanía entre las estaciones se manifiesta en una alta dependencia, la cual se puede apreciar en los diagramas de dispersión luego de

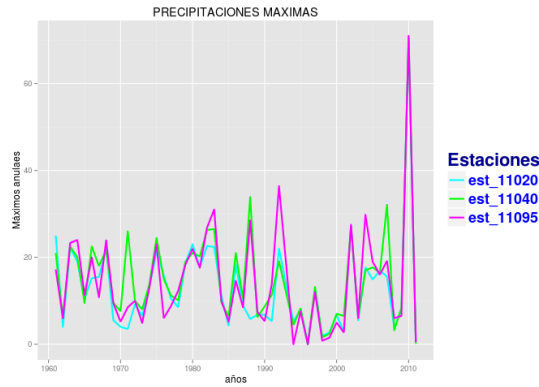


Figura 11.9: Precipitaciones máximas en 50 años en el período noviembre-marzo.

ser transformados los datos, ver figura 11.10.

Cóputas Extremas

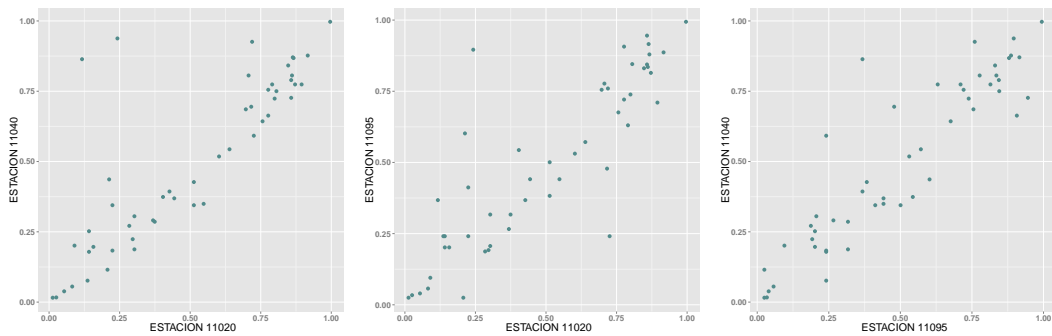


Figura 11.10: Datos bivariados transformados a uniformes entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período noviembre-marzo.

Se ajustan distintas familias de cóputas extremas, ver cuadro 11.4, y a partir del criterio de la pseudo máx-verosimilitud se selecciona la cóputa t-extremal, al igual que en el caso anterior. Se simulan 100 valores bajo este modelo para los diferentes pares de estaciones en la figura 11.11.

Las densidades estimadas de los máximos anuales, ver 11.12, presentan valores esperados mas pequeños, las colas más pesadas que el lapso junio-agosto determinan probabilidad más altas de eventos muy extremos, ver cuadro 11.5.

Cuadro 11.4: Ajuste de Cópulas extremas de a pares en el Municipio de León, en el período noviembre-marzo

Cópula	11020 – 11040			11020 – 11095			11040 – 11095		
	LogLik	Parámetro	p-valor	LogLik	Parámetro	p-valor	LogLik	Parámetro	p-valor
Gumbel	39.30	2.954	0.0084	40.30	2.878	0.0154	43.44	3.278	0.0245
Galambos	38.25	2.212	0.0005	39.81	2.139	0.0524	42.92	2.548	0.0175
Husler Reiss	31.25	2.167	0.0005	36.70	2.4990	0.0394	40.35	2.74	0.0115
T-Extremal (g.l.=4)	42.55	0.965	0.0865	42.23	0.967	0.056	44.03	0.966	0.0923

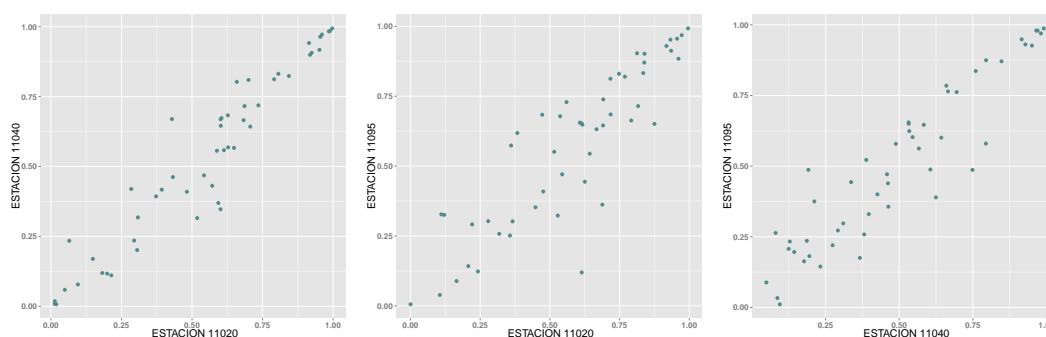


Figura 11.11: Datos simulados bivariados con la cópula t-extremal entre las estaciones 11020, 11040 y 11095 en el período noviembre-marzo.

Mezcla de distribuciones Dirichlet.

En este caso obtenemos 7543 datos diarios para las estaciones 11020, 11040 y 11095, ver figura 11.13.

De la misma manera que en el período junio-agosto se simulan valores de la distribución predictiva a posteriori mediante Monte Carlo, ver figura 11.6. Se aprecia un comportamiento similar al obtenido por cópulas extremas, en referencia a las predicciones y a las diferencias entre invierno y verano.

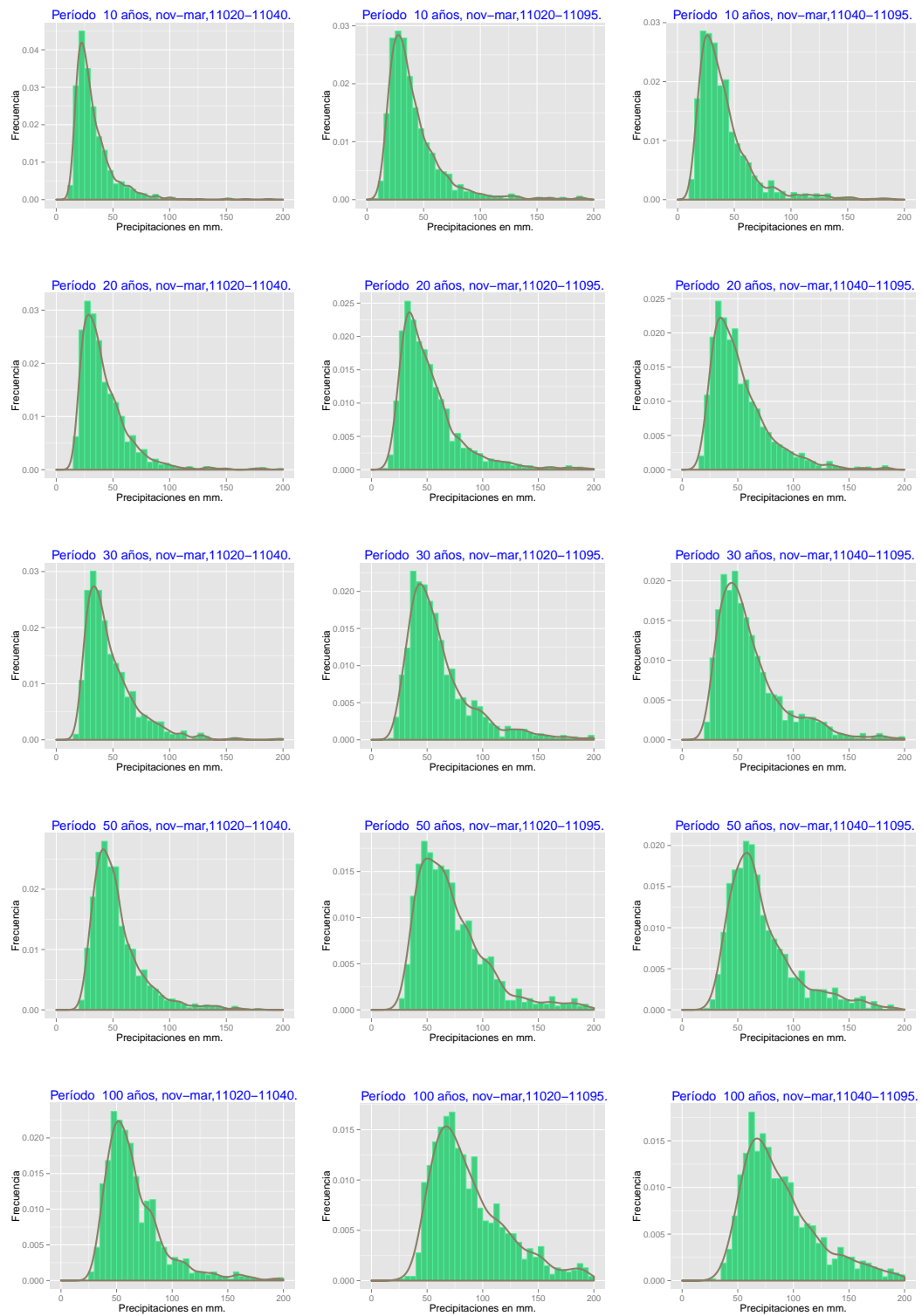


Figura 11.12: Densidades estimadas de las precipitaciones máximas anuales para distintos períodos de tiempo en noviembre-marzo.

Cuadro 11.5: Predicciones locales mediante cópulas en el período noviembre-marzo

período (años)	11020 – 11040					11020 – 11095				
	Mediana	Media	Desvío	$P^*(\text{supere } 100 \text{ mm})$	$P^*(\text{supere } 150 \text{ mm})$	Mediana	Media	Desvío	$P^*(\text{supere } 100 \text{ mm})$	$P^*(\text{supere } 150 \text{ mm})$
10	27.6	32.8	17.9	0.010	0.004	34.4	42.3	29.1	0.039	0.014
20	36.6	43.1	25.7	0.026	0.009	45.2	54.5	38.1	0.072	0.026
30	41.3	48.2	25.2	0.037	0.010	52.9	64.4	47.9	0.109	0.034
40	44.4	51.9	26.3	0.053	0.010	59.6	70.8	48.9	0.149	0.042
50	48.3	54.8	29.6	0.054	0.012	65.7	78.1	52.6	0.180	0.006
100	59.2	68.1	34.0	0.110	0.033	82.2	103.5	97.8	0.333	0.119

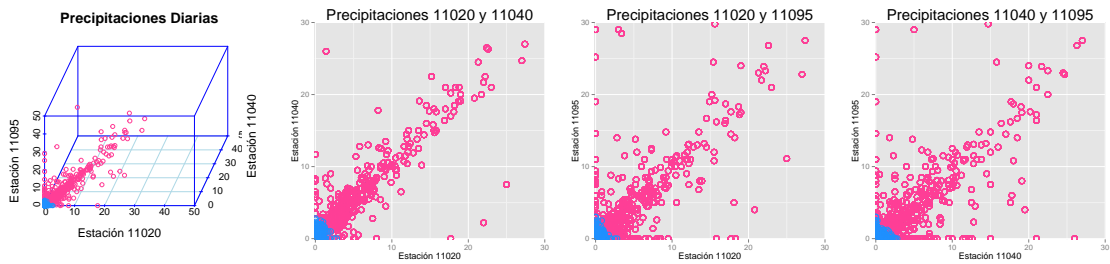


Figura 11.13: Precipitaciones diarias mensuales en el período noviembre-marzo de las estaciones 11020, 11040 y 11095. Se diferencian el 5 % de las observaciones extremas según la distancia L_1 en \mathbb{R}^3

período (años)	<i>Noviembre – Marzo</i>	
	$P_\theta(A w)$ umbrales de 100 mm	$P_\theta(A w)$ umbrales de 150 mm
10	0.031	0.0005
20	0.044	0.0012
30	0.074	0.0085
40	0.1221	0.0201
50	0.2081	0.0470

Cuadro 11.6: Predicciones a posteriori en el período noviembre-marzo a través de una mezcla de distribuciones Dirichlet.

Capítulo 12

Conclusiones.

Se delinear las conclusiones que se consideran de mayor relevancia en el trabajo. Posiblemente un especialista en eventos climáticos podría realizar un análisis con mayor profundidad.

- En el período junio-agosto no se observa que el proceso sea estacionario en el espacio, es decir, estaciones cercanas presentan comportamientos distintos respecto a las precipitaciones máximas de manera apreciable. No es trivial, como lo muestran los cluster de estaciones, delimitar zonas con comportamiento similar. Inclusive esto se puede ver entre las estaciones 11020, 11095, que se encuentran a menos de 10 kms, en la modelación local. Esto no sucede en el lapso noviembre-enero donde se aprecia una mayor dependencia espacial, posiblemente debido a que las lluvias se producen por frentes fríos que entran en dichos meses y abarcan gran parte del Estado. Los modelos máx-estable producen por tanto un mejor ajuste en invierno.
- La relación de los parámetros de DVGE con determinadas variables predictoras no es clara en junio-agosto.

El mejor modelo en el lapso noviembre-marzo es función sólo de la longitud, posiblemente influye por tanto la distancia al mar y el circuito de vientos que en general van de sur a norte.

- Las colas más pesadas del período noviembre-marzo, lleva a probabilidades relativamente altas respecto a junio-agosto de valores muy extremos, lo que indica la importancia del estudio de estos meses, aunque esto puede ser un efecto colateral de la variabilidad de las lluvias en esta época.
- Los modelos de Schlather no son adecuados debido a presentar un alta dependencia en valores espaciales lejanos.

- El modelo de Smith presenta dificultades con la cercanía a cero de los valores propios de la matriz de varianzas y covarianzas, lo que tiene por consecuencia problemas de invertibilidad de la matriz.
- El número de datos faltantes así como el posible número de datos erróneos determinan una modelación menos eficiente.
- Los modelos t-extremales presentan una alta flexibilidad, lo que los hace muy útiles en la modelación. Tanto en la modelación global como local, variando los grados de libertad de un período al otro, es el modelo que mejor ajusta en la mayor parte de los casos. Se observa cierta coherencia en estos resultados puesto que las distribuciones finito dimensionales de los procesos t-extremales tienen asociadas cópulas t-extremales.
- El ajuste regional por R-vines y por procesos máx-estables determinan predicciones similares. Las R-vines brindan una posible solución al problema de la no estacionariedad espacial.
- Se obtienen predicciones ajustadas a la realidad, lo que no siempre aconteció en trabajos anteriores.
- A partir de las distintas modelizaciones obtenidas es posible la construcción vía simulación de intervalos de confianza para las estimaciones realizadas.
- Se realiza un estudio de las lluvias extremas de una manera mas efectiva que aquella en la que sólo se consideran los valores máximos de las lluvias ignorando sus características espaciales.
- Si bien la función coeficiente extremal parece no ajustar de forma adecuada en ambos períodos, esto sucede en general en los estudios bajo este enfoque.
- Para junio-agosto se sugiere como adecuado el enfoque local, agrupando estaciones cercanas mediante el método propuesto por Naveau en 2013, [6].
- Es altamente probable que en períodos de tiempo no muy lejanos se produzcan lluvias que superen los 100 mm.
- A través de lo ya realizado se podrían determinar las isoyetas de valores extremos en la zona analizada del estado, para distinguir zonas de alto riesgo.

- No hay evidencias categóricas sobre un cambio climático, sin embargo investigaciones futuras podrían apuntar a un estudio sobre dicho aspecto. Por ejemplo, analizar a través de alguna medida de dependencia en el tiempo, ver [16] y [49], un posible cambio climático.
- Las predicciones globales y locales demuestran que es de esperar, en períodos de tiempo no muy extensos, precipitaciones extremas que provoquen severas inundaciones en el Estado. En este contexto, es sustentable la idea que el patrimonio histórico México en el Estado de Guanajuato sigue en riesgo latente, futuras inundaciones y deslizamientos son plausibles a mediano plazo.

Es necesario, consolidar los sistemas de información y alerta de fenómenos meteorológicos e hidrometeorológicos, apoyar la implementación de planes de prevención y atención de inundaciones a nivel de cuenca hidrológica y la protección de los habitantes en zonas de alto riesgo de inundación.

Apéndice A

Algunas Demostraciones

A.1. Demostración de Teorema 1

Demostración. Por hipótesis existen dos sucesiones a_n y b_n tales que,

$$F^{[nt]}(a_{[nt]}x + b_{[nt]}) \rightarrow G(x) \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.1})$$

en los puntos de continuidad de G . Por la monotonía de F se cumple que,

$$F^{[nt]}(a_n x + b_n) \rightarrow G^t(x) \text{ cuando } n \rightarrow \infty, \quad (\text{A.2})$$

para t positivo. Por tanto a partir del teorema de convergencia de familias, ver [30], se puede afirmar que existen constantes $A_t > 0$ y $B_t \in \mathbb{R}$, tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{[nt]}} = A(t), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n - b_{[nt]}}{a_{[nt]}} = B(t). \quad (\text{A.3})$$

y

$$G^t(x) = G(A(t)x + B(t)). \quad (\text{A.4})$$

$A(t)$ y $B(t)$ son medibles por ser límites de funciones medibles. A partir de (A.4) se tiene que,

$$\begin{aligned} G(A(t)A(s)x + A(t)B(s) + B(t)) &= \\ &= [G(A(s)x + B(s))]^t = G^{ts}(x) = G(A(ts)x + B(ts)). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Como G no está concentrada en un punto, entonces

$$A(ts) = A(t)A(s), \quad B(ts) = A(t)B(s) + B(t) = A(s)B(t) + B(s). \quad (\text{A.6})$$

Se puede deducir de lo anterior que la única solución finita, medible y no negativa es de la forma,

$$A(t) = t^\theta, \theta \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

$\theta = 0$ En este caso $B(ts) = B(t) + B(s)$ y la solución es, $B(t) = c \log(t)$ y sustituyendo en (A.4),

$$G^t(x) = G(x + c \log t). \quad (\text{A.8})$$

Por tanto $c < 0$ pues en caso contrario G sería degenerada o G^t creciente respecto de t . A partir de (A.8) se deduce que $0 < G(x) < 1$ y tomando $x = 0$ se obtiene.

$$G^t(0) = G(c \log t). \quad (\text{A.9})$$

Tomando $G(0) = e^{-p}$ y $u = c \log t$ se obtiene la distribución de Gumbel.

$\theta < 0$ Como $A(t)B(s) + B(t) = A(s)B(t) + B(s)$, si $t \neq 1$ y $s \neq 1$,

$$\frac{B(s)}{1 - A(s)} = \frac{B(t)}{1 - A(t)}, \quad (\text{A.10})$$

o sea que es una función constante c . Por tanto,

$$B(t) = c(1 - t^\theta). \quad (\text{A.11})$$

A partir de (A.4) se cumple $G^t(x + c) = G(t^\theta x + c)$ y siendo $H(x) = G(x + c)$ se puede concluir que G y H son del mismo tipo, así que se trabaja con H , que satisface,

$$H^t(x) = H(t^\theta x). \quad (\text{A.12})$$

Tomando $x = 0$ en esta ecuación se cumple que $t \log H(0) = \log H(0)$ para $t > 0$, entonces $H(0) = 0$ pues es imposible que $H(0) = 1$ a partir de (A.12) y que H no es degenerada. Ahora si en (A.12) se toma $x = 1$, se observa que $H(1) \in (0, 1)$. Si se elige $\alpha = -1/\theta$ y $H(1) = \exp\{-p^{-\alpha}\}$ en (A.12) se obtiene la distribución de Fréchet.

$\theta > 0$ Es análogo al caso anterior

□

A.2. Demostración del Teorema 4

Demostración. El problema se reduce a probar que si ψ_1, ψ_2, \dots son v.a. i.i.d en $C^+[0, 1]$ tal que $\frac{1}{n} \max\{\psi_1, \dots, \psi_n\} \xrightarrow{d} \nu$ en $C[0, 1]$, con ψ_i Fréchet unitarias, ver [23].

Si se expresa,

$$\frac{1}{nk} \max_{i=1, \dots, nk} \psi_i = \frac{1}{k} \max_{j=1, \dots, k} \frac{1}{n} \max_{r=1, \dots, n} \psi_{r,k}, \quad (\text{A.13})$$

donde $\psi_{r,k}$ son independientes con la misma distribución, si n tiende a infinito se obtiene la tesis. \square

A.3. Demostración del Teorema 5

Directo.

Demostración. Se supone, en lugar de \mathbb{R}^d , un espacio S medible. Sea $y_t > 0$ y el conjunto,

$$B = \{(\psi, s) : \psi f(s, t) > y_t \text{ para al menos un } t\}. \quad (\text{A.14})$$

El suceso $\{Y_t \leq y_t \text{ para todo } t\}$ es equivalente a que ningún punto del proceso de Poisson caiga en B . La medida de B es,

$$\int_S \int_0^\infty I_{\{\psi > \min_t \frac{y_t}{f(s,t)}\}} \psi^{-2} d\psi \nu(ds) = \int_S \max_t \left\{ \frac{f(s, t)}{y_t} \right\} \nu(ds), \quad (\text{A.15})$$

entonces,

$$P(T_t \leq y_t \text{ para todo } t) = e^{-\int_S \max_t \left\{ \frac{f(s,t)}{y_t} \right\} \nu(ds)}. \quad (\text{A.16})$$

\square

Por tanto las distribuciones marginales son Fréchet unitarias y es sencillo, a partir de (A.16), observar que es un proceso máx-estable.

Recíproco.

Lema 1

Sea ψ un proceso simple máx-estable en S . Entonces,

$$P(|\psi|_\infty > x) = e^{-c/x}, \quad x > 0 \quad (\text{A.17})$$

y c una constante positiva.

Demostración. Sean ψ_1, ψ_2, \dots , v.a. i.i.d con la distribución de ψ , por ser ψ máx-estable se cumple que,

$$\psi \stackrel{d}{=} \frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \psi_i \quad \forall n, \quad (\text{A.18})$$

entonces,

$$P(|\psi|_\infty \leq x) = (P[|\psi|_\infty \leq x])^n. \quad (\text{A.19})$$

Por tanto se concluye la tesis. \square

Lema 2

Sea $\psi_1, \dots, \psi_k, \dots$ un proceso estocástico en $C(S)$ y $\frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \psi_i \stackrel{d}{=} \psi$, se define,

$$\mu_{n,\epsilon}(A) = \mu_n\{f \in A / |f|_\infty > \epsilon\}, \quad (\text{A.20})$$

siendo $\mu_n(D) = nP(n^{-1}\psi \in A)$, para cada $A \in \bar{C}^+(S) = (0, \infty] \times \{f \in C(S) / f \geq 0\}$ es relativamente compacta.

Demostración. Ver [23]. \square

Lema 3

Sea ψ_1, ψ_2, \dots , un proceso estocástico en $C(S)$. Si $\frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} \psi_i \stackrel{d}{=} \psi$ en $C(S)$, entonces,

$$\mu_n \stackrel{d}{=} \mu \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.21})$$

en $\bar{C}_Q^+(S) = (0, \infty] \times \bar{C}_1^+(S)$, donde $(0, \infty]$ está dotado de la métrica Q ,

$$Q(x, y) = |1/x - 1/y|.$$

Equivalentemente, para cada conjunto de Borel A en $\{f \in C(S) / f \geq 0\}$ tal que $\inf_{f \in A} |f|_\infty > 0$ y $\nu(\partial A) = 0$, se tiene que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \mu(A), \quad (\text{A.22})$$

donde la relación entre las medidas ψ y μ , para cada $m = 1, 2, \dots$, es dada por,

$$P(\psi \in A_{K,x}) = e^{-\mu(A_{K,x})^c}, \quad (\text{A.23})$$

para los compactos $K = (K_1, \dots, K_m)$ en S y $x = (x_1, \dots, x_m)$ positivos, y

$$A_{K,x} = \{f \in \bar{C}^+(S) / f(s) \leq x_j \text{ con } s \in K_j, j = 1, 2, \dots, m\}. \quad (\text{A.24})$$

Demostración. Si $\mu_{n,\epsilon}$ converge en $C^+(S)$, entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \{f/f(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m\}^c = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} n (1 - P(n^{-1}\psi(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m)) = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} n \log P(n^{-1}\psi(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m) = \\ & \lim_{n \rightarrow \infty} -\log P(n^{-1} \max_{1 \leq i \leq n} \psi_i(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m) = \\ & -\log P(\psi(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Por tanto la medida μ , para cualquier m , K_i , y x_i verifica que,

$$\mu\{f/f(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m\}^c = -\log P(\psi(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m).$$

Dado $\epsilon > 0$ la sucesión $\{\mu_{n,\epsilon}\}$ es relativamente compacta por el lema 2, cada subsucesión convergente tiene el mismo límite. □

Lema 4

(Giné, Laurens de Hann y Vatan en 1990)

Para un proceso estocástico ψ en S los siguientes enunciados son equivalentes,

1. ψ es máx-estable simple en $C(S)$.
2. Existe una medida de Borel σ -finita en $\bar{C}_1^+(S)$ tal que para todo $t \in S$, $\int_{\bar{C}_1^+} f(t) d\sigma(f) = 1$, y si ν es una medida en $\bar{C}_1^+ \times \mathbb{R}^+$, tal que $d\nu = d\sigma \times \frac{dr}{r^2}$, entonces

$$\psi \stackrel{d}{=} \max_i \eta_i, \tag{A.25}$$

donde $\{\eta_i\}$ son los puntos de un proceso de Poisson con intensidad ν .

3. Hay una medida finita de Borel, σ , en \bar{C}_1^+ con $\int_{\bar{C}_1^+} f(t) d\sigma(f) = 1$ para todo $t \in S$ tal que para los compactos en S , K_1, \dots, K_n y $x_1, \dots, x_n > 0$, se cumple que,

$$-\log P(\cap_{i=1}^n \{\psi(K_i) < x_i\}) = \int_{\bar{C}_1^+} \max_{i \leq n} \frac{f(K_i)}{x_i} d\sigma(f).$$

4. ψ tiene trayectorias continuas c.s y hay una medida de Borel, σ en \bar{C}_1^+ , con $\int_{\bar{C}_1^+} f(t) d\sigma(f) = 1$ para todo $t \in S$ tal que para toda $f \in C(S)$, $f > 0$, se cumple que,

$$-\log P(\psi < f) = \int_{\bar{C}_1^+} \|g/f\|_\infty d\sigma(g)$$

Demostración. ■ (1 \Rightarrow 2).

A partir del Lema 3 , existe una medida ν , que cumple,

$$\mu(aA) = a^{-1}\mu(A), \quad \forall a > 0,$$

con $A \in (0, \infty] \times \bar{C}_1^+(S)$. Si se denota $B_{r,A} = (r, \infty] \times A$ se obtiene que $B_{r,A} = rB_{1,A}$ y por tanto $\mu(B_{r,A}) = r^{-1}\mu(B_{1,A})$.

Considerando la transformación $f \rightarrow \left(|f|_\infty, \frac{f}{|f|_\infty}\right)$, ν pasa a ser una medida producto representada por,

$$\sigma(A) = \mu(B_{1,A}).$$

■ (2 \Rightarrow 3)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \{f/f(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m\}^c = \\ & = -\log P(\psi(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m). \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n \{f/f(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m\}^c = \\ & = \mu \{f/f(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m\}^c = \\ & = \mu \left\{ f/|f|_\infty > \frac{\min_{1 \leq j \leq m} x_j}{\sup_{s \in K_j} f(s)/|f|_\infty} \right\} = \\ & = \int_{f \in \bar{C}_1^+(S)} \int_{r > \frac{\min_{1 \leq j \leq m} x_j}{\sup_{s \in K_j} f(s)/|f|_\infty}} \frac{dr}{r^2} d\sigma(f) = \\ & = \int_{f \in \bar{C}_1^+(S)} \max_{1 \leq j \leq m} x_j \frac{\sup_{s \in K_j} f(s)}{x_j} d\sigma(f). \end{aligned}$$

Fijado s ,

$$\begin{aligned} 1 & = -\log P(\psi(S) \leq 1) = \mu\{f : f(s) > 1\} = \\ & = \mu\{f : |f|_\infty > \left(\frac{f(s)}{|f|_\infty}\right)^{-1}\} = \\ & = \int_{\bar{C}_1^+(S)} \int_{r > 1/f(s)} \frac{dr}{r^2} d\sigma(g) = \\ & = \int_{\bar{C}_1^+(S)} f(s) d\sigma(f) \end{aligned}$$

■ (3 \Rightarrow 1) Sea σ una medida finita en $\bar{C}_1^+(S)$, y la medida $\mu \in \bar{C}_Q^+(S)$ es definida por,

$$\mu\{f/|f|_\infty > r, \frac{f}{|f|_\infty} \in A\} = r^{-1}\sigma(A), \quad r > 0,$$

con A un boreliano de $\bar{C}_1^+(S)$. Sea N un proceso de Poisson con intensidad μ , y sea ψ_1, ψ_2, \dots una realización de dicho proceso. Se define,

$$\eta = \max_i \psi_i,$$

η es finito pues,

$$P(|\eta|_\infty) = P(N \text{ no tiene puntos en } \{f/|f|_\infty > x\}) = e^{-\mu\{f/|f|_\infty > x\}} = e^{-x^{-1}\sigma(\bar{C}_1^+(S))}.$$

Dados los compactos $K_i \in S$, la distribución de η es,

$$\begin{aligned} P(\eta(s) \leq x_j, \text{ con } s \in K_j, j = 1, \dots, m) &= \\ &= P(\text{El grafo de } f \text{ evita al conjunto } K_j \times (x_j, \infty], j = 1, \dots, m) = \\ &= \exp \left\{ - \int_{\bar{C}_1^+(S)} \max_{1 \leq j \leq m} \left(x_j^{-1} \sup_{s \in K_j} f(s) \right) d\sigma(f) \right\}. \end{aligned}$$

Ahora se observa que η es máx-estable,

$$\max_{1 \leq j \leq k} \eta_j = \max_{1 \leq j \leq k} \max_{1 \leq i \leq \infty} \psi_i^{(j)},$$

siendo $\psi^{(j)}$ k copias del proceso. Se puede identificar al proceso máx-estable donde la medida ν es remplazada por $k\nu$. Expresando,

$$k\eta = \max_i k\psi_i,$$

la medida del proceso es,

$$\mu\{f/kf \in A\} = \mu\{k^{-1}A\} = k\mu\{A\}.$$

Como $\max_{1 \leq j \leq k} \eta_j$ y $k\eta$ tiene la misma distribución, entonces η es máx-estable. □

La demostración del teorema es evidente a través de la propiedad 2 del lema 4, considerando

$$\psi \stackrel{d}{=} \max_i \{R_i \pi_i\} \text{ donde } (R_i \pi_i) \text{ son puntos de un proceso de Poisson con intensidad } \nu.$$

A.4. Demostración de Teorema 4.3.2

Demostración. Debido a la infinita divisibilidad del proceso de Poisson, ver [22] se puede observar que Z es máx-estable. Las marginales son Fréchet unitarias, donde $(y, \psi, Y_{y,\psi})$ tiene la misma distribución que un proceso de Poisson en $\mathbb{R}^d \times (0, \infty) \times U$ con medida de intensidad,

$$\Lambda(B \times I \times V) = |B|P^Y(V) \int_I s^{-2} ds,$$

donde B es un subconjunto medible de \mathbb{R}^d , $I \subset (0, \infty)$, y $V \subset U$. Entonces, ver [79], la probabilidad $P(Z(o) \leq t)$, $t > 0$, siendo o el origen de coordenadas, es igual a la probabilidad nula del conjunto,

$$\{(x, s, \xi) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \times U / s\xi(-x) \geq t\}.$$

Es decir,

$$-\log P(Z(o) \geq t) = \int_U \int_{\mathbb{R}^d} \int_{t/Y(-x)}^{\infty} s^{-2} ds dx dP^Y = t^{-1}.$$

□

A.5. Demostración del Teorema 7

Lema 1

Sea $h : S_1 \times S_2 \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ un función 2-creciente, que cumple que,

$$h(x, m_1) = h(x, m_2) = 0 \quad \forall (x, y) \in S_1 \times S_2,$$

siendo m_1 y m_2 los mínimos respectivos de S_1 y S_2 . Si se denota $i(t) = h(t, M_2)$ y $j(t) = h(M_1, t)$, con M_1, M_2 los máximos de S_1 y S_2 respectivamente, entonces

$$|h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)| \leq |i(x_2) - i(x_1)| + |j(y_2) - j(y_1)|,$$

con $x_1, x_2 \in S_1$ y $y_1, y_2 \in S_2$.

Demostración.

$$|h(x_2, y_2) - h(x_1, y_1)| \leq |h(x_2, y_2) - h(x_1, y_2)| + |h(x_1, y_2) - h(x_1, y_1)|.$$

Suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $x_1 \leq x_2$ y $y_1 \leq y_2$ se cumple por hipótesis que $h(x_2, y_2) - h(x_1, y_2) \geq 0$ y como,

$$0 \leq h(x_2, y_2) - h(x_1, y_2) \leq h(x_2, M_2) - h(x_1, M_2) = i(x_2) - i(x_1)$$

Invirtiendo x_1 con x_2 se obtiene que,

$$|h(x_2, y_2) - h(x_1, y_2)| \leq |i(x_2) - i(x_1)|,$$

y de forma análoga,

$$|h(x_1, y_2) - h(x_1, y_1)| \leq |j(y_2) - j(y_1)|,$$

□

Lema 2

Sea H una función de distribución conjunta con marginales F y G . Entonces existe una única subcópula (misma definición que cópula pero con dominio un subconjunto de I^2) C' tal que,

- $Dom\ c' = Ran\ F \times Ran\ G$.
- $H(x, y) = C'(F(x), G(y)) \forall (x, y)$

Demostración. Si se considera $S_1 = S_2 = \bar{\mathbb{R}}$ a partir del lema anterior,

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|,$$

por tanto si $F(x_2) = F(x_1)$ y $G(y_2) = G(y_1)$ se cumple que $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$. Entonces la función $C' : (F(x), F(y)) \rightarrow H(x, y)$ esta bien definida en el dominio $Ran\ F \times Ran\ G$ y es sencillo verificar las propiedades que determinan que es una subcópula. □

Lema 3

Toda subcópula C' se puede extender a una cópula, no necesariamente de manera única.

Sea $S_1 \times S_2$ el dominio de C' . Puesto que C' es creciente y acotada podemos extenderla a $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$, sea C'' dicha extensión. Es obvio que,

- $C''(1, v) = v \quad C''(u, 1) = u$.
- $h(m_1, y) = h(x, m_2) = 0$

Si se toma un rectángulo \bar{B} en $\bar{S}_1 \times \bar{S}_2$ y B_n una sucesión de rectángulos en $S_1 \times S_2$ cuyos vértices tengan como límite los vértices de \bar{B} , entonces

$$V_{C''}(\bar{B}) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_{C'}(B_n) \geq 0,$$

por tanto C'' es 2-creciente y entonces una subcópula.

Sean $a_1 = \max\{u \in \bar{S}_1 / u \leq a\}$, $a_2 = \max\{u \in \bar{S}_1 / u \geq a\}$, b_1 y b_2 de manera análoga para S_2 . Se define una cópula C de la siguiente manera,

$$C(a, b) = (1-\lambda_1)(1-\mu_1)C''(a_1, b_1) + (1-\lambda_1)\mu_1C''(a_1, b_2) + \lambda_1(1-\mu_1)C''(a_2, b_1) + \lambda_1\mu_1C''(a_2, b_2),$$

Siendo,

$$\lambda_1 = \begin{cases} \frac{a-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_2 \neq a_1 \\ 1 & \text{si } a_1 = a_2 \end{cases}$$

$$\mu_1 = \begin{cases} \frac{b-b_1}{b_2-b_1} & \text{si } b_2 \neq b_1 \\ 1 & \text{si } b_1 = b_2 \end{cases}.$$

Sea $(c, d) \in I^2$, tal que $a \leq c$ y $b \leq d$ son los vértices opuestos del rectángulo $B \subset I^2$.

Notemos $c_1, c_2, d_1, d_2, \lambda_2, \mu_2$ los valores para $C(c, d)$.

caso 1: $a_i = c_i$ y $b_i = d_i$ con $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} V_C(B) &= C(c, d) - C(c, b) - C(a, d) + C(a, b) = \\ &= [(1-\lambda_2)(1-\mu_2) - (1-\lambda_2)(1-\mu_1) - (1-\lambda_1)(1-\mu_2) + \\ &+ (1-\lambda_2)(1-\mu_1)C''(a_1, b_1) + \\ &+ [(1-\lambda_2)\mu_2 - (1-\lambda_2)\mu_1 - (1-\lambda_1)\mu_2 + (1-\lambda_1)\mu_1]C''(a_1, b_2) + \\ &+ [\lambda_2(1-\mu_2) - \lambda_2(1-\mu_1) - \lambda_1(1-\mu_2) + \lambda_1(1-\mu_1)]C''(a_2, b_1) + \\ &+ [\lambda_2\mu_2 - \lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1]C''(a_2, b_2) = \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\mu_2 - \mu_1)V_{C''}(B) \geq 0 \end{aligned}$$

caso 2: $a < a_2 \leq c_1$ y $b < b_2 \leq d_1 < d$

$$\begin{aligned} V_C(B) &= (1-\lambda_1)\mu_2V_{C''}([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \mu_2V_{C''}([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) + \\ &+ \lambda_2\mu_2V_{C''}([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + (1-\lambda_1)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) + \\ &+ V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \lambda_2V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) + \\ &+ (1-\lambda_1)(1-\mu_2)V_{C''}([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) + (1-\mu_1)V_{C''}([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) + \\ &+ \lambda_2(1-\mu_1)V_{C''}([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]) \geq 0. \end{aligned}$$

Es análogo para los otros casos.

Teorema de Sklar

Demostración. A partir del lema 3, se obtiene una subcópula en $\text{Ran } F \times \text{Ran } G$, si F y G son continuas se cumple que $\text{Ran } F \times \text{Ran } G = I^2$, en caso contrario se pueden extender a una cópula según el lema 4.

El recíproco es sencillo probando que $H(x, y)$ verifica las propiedades de una distribución acumulada conjunta □

Apéndice B

Algunos Cuadros.

B.1. Cuadros del período junio-agosto.

Cuadro B.1: Precipitaciones máximas del trimestre junio-julio-agosto en cada año para cada estación.

Estación	1963	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1972	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1981	1982	1984	1987	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2002	2004	2005	2007	2008	2009	2010	2011
11001	49.60	51.20	54.20	63.50	59.50	38.00	47.00	55.80	41.50	57.70	67.70	38.00	37.00	40.30	45.70	35.50	52.50	28.50	85.00	63.50	35.50	48.50	24.50	75.00	34.00	80.00	58.00	42.50	90.00	66.00	56.60	66.50	67.50	102.00	21.00	73.40	63.00
11002	33.30	36.40	42.20	46.60	28.20	33.50	56.60	33.70	46.20	41.10	37.50	48.00	34.50	46.00	55.50	29.50	43.40	34.50	52.70	97.60	27.60	28.50	54.20	48.30	31.50	43.30	50.70	38.90	47.90	38.50	61.00	53.00	46.00	57.00	26.50	51.50	59.20
11003	64.20	60.00	48.20	67.60	49.20	50.20	43.50	34.80	56.00	38.00	76.00	45.00	27.70	34.00	40.50	21.00	75.00	37.00	67.00	21.60	45.00	54.00	30.00	57.00	54.00	51.00	49.00	43.50	38.00	46.00	75.00	38.00	61.00	17.50	21.50	73.50	46.00
11005	34.00	37.70	37.70	27.00	26.50	34.50	37.50	51.00	30.00	43.00	63.50	43.00	30.40	23.00	47.00	28.00	27.00	42.50	55.00	95.00	26.90	54.90	60.10	47.10	60.50	51.50	52.20	31.00	44.40	47.40	39.30	41.40	37.70	35.50	51.20	62.80	88.80
11006	37.50	65.00	47.00	36.00	42.00	65.00	39.20	42.50	37.00	60.80	55.00	40.20	45.00	22.50	44.00	25.20	35.50	33.00	51.00	50.00	45.00	42.00	49.00	60.00	51.00	35.00	76.00	78.00	75.00	52.00	66.00	34.00	57.50	60.50	32.00	33.50	79.20
11009	46.30	37.50	57.60	28.90	40.50	35.20	44.00	55.50	34.00	43.50	53.00	58.20	69.50	54.80	46.80	37.00	62.80	27.70	34.00	55.30	82.00	47.10	60.00	3.80	34.50	41.50	65.00	29.60	31.80	59.80	32.80	45.30	79.70	86.40	51.50	53.00	40.30
11013	32.50	39.00	33.00	75.00	46.00	28.00	43.00	36.00	42.00	55.50	62.00	35.00	40.00	35.00	41.90	55.40	41.00	40.40	64.00	35.00	37.80	31.00	56.00	66.20	45.80	60.20	37.60	21.50	40.50	51.20	32.00	33.00	41.30	62.00	40.00	40.00	21.80
11020	34.40	36.00	43.50	40.50	35.00	36.60	33.50	46.60	40.30	68.20	55.00	44.00	37.50	27.80	36.60	36.60	39.00	22.50	17.70	51.60	30.80	43.70	50.10	48.30	38.70	83.90	41.00	26.20	64.60	48.10	44.70	66.10	58.00	42.10	55.30	27.10	
11021	59.00	45.50	48.50	36.50	56.00	35.00	46.50	22.70	52.50	41.40	42.50	40.20	34.00	53.00	45.00	32.00	43.00	10.50	9.70	54.00	50.30	56.00	46.50	56.00	38.00	37.50	81.00	48.00	54.00	49.00	28.00	41.00	44.50	48.00	42.00	76.00	64.00
11028	50.00	137.80	44.00	71.80	59.50	66.40	62.40	48.60	45.50	71.00	69.00	48.20	38.50	34.50	35.80	26.20	44.80	49.90	49.80	92.00	22.60	55.50	35.00	53.50	60.00	36.40	52.30	37.00	35.00	54.00	37.00	53.20	35.20	49.00	61.40	40.00	31.20
11031	43.00	83.00	53.00	51.00	58.00	39.50	60.00	45.90	44.90	28.10	34.60	52.00	24.00	43.00	52.50	46.00	39.00	33.50	59.00	67.00	43.50	60.50	69.50	39.00	45.00	34.00	47.00	36.00	56.50	35.00	34.50	39.50	57.00	43.20	34.50	46.00	41.60
11033	48.10	26.50	47.00	18.50	28.70	33.90	37.20	54.80	69.10	42.60	36.70	22.00	39.60	33.20	70.00	30.70	29.20	34.30	26.70	48.00	42.50	45.50	33.50	43.50	40.50	40.00	39.00	43.50	21.00	42.50	49.50	20.00	46.00	48.40	61.50	40.50	32.00
11036	51.00	86.00	21.00	40.00	47.50	34.90	44.30	36.20	40.10	49.00	35.00	32.30	56.20	47.60	43.00	41.40	75.80	56.60	59.20	64.30	47.80	68.20	30.00	42.00	48.90	70.20	65.70	30.00	52.10	115.10	35.00	49.30	50.80	52.50	33.00	47.60	20.20
11040	34.00	30.50	82.00	37.00	25.00	26.00	41.00	35.50	41.00	59.00	72.50	48.70	46.00	23.30	58.80	31.50	50.20	60.30	55.40	32.40	49.70	30.50	46.80	52.60	49.50	60.30	77.20	41.30	27.70	75.00	53.00	30.00	65.50	60.90	45.90	70.80	29.50
11051	27.20	71.50	33.00	75.00	19.00	47.00	32.50	28.70	46.20	48.00	54.20	32.00	38.00	48.00	34.00	51.50	45.00	47.00	75.20	47.60	69.00	41.00	32.20	22.50	27.00	23.00	49.50	52.80	27.10	23.10	46.20	26.50	61.50	43.60	44.00	29.70	23.40
11052	34.50	44.50	48.00	35.00	76.00	40.50	42.70	125.00	58.80	48.60	59.50	50.20	51.00	29.00	38.50	40.00	42.70	26.50	52.50	37.50	27.00	20.20	34.00	47.50	46.50	33.00	37.00	45.50	36.00	42.00	36.30	35.10	33.00	38.30	46.00	65.80	25.00
11071	52.30	46.20	48.30	54.50	59.90	42.50	45.30	36.50	50.60	58.20	68.20	44.10	47.40	46.40	27.20	25.70	50.10	30.80	68.90	58.20	47.00	49.20	71.00	39.20	29.70	35.30	64.00	37.00	25.50	19.50	29.50	55.50	43.00	48.00	43.00	68.50	52.50
11072	29.20	52.80	37.00	55.50	48.50	39.00	45.00	19.50	77.00	62.80	47.00	46.50	59.00	51.70	30.50	40.20	37.30	48.00	60.00	51.70	31.00	34.40	43.00	78.00	40.90	58.40	61.40	39.70	36.50	54.30	34.00	35.40	73.50	35.50	18.10	51.60	51.30
11079	37.50	34.00	52.50	38.00	45.00	34.50	107.00	42.20	47.60	54.60	46.40	59.60	40.00	63.80	42.00	42.00	82.50	46.30	53.50	29.00	25.50	27.00	46.50	36.80	36.00	40.00	35.00	46.00	48.00	32.50	49.00	43.00	58.00	31.00	62.00	77.00	
11095	39.10	44.30	37.90	40.70	36.20	42.20	60.30	38.50	42.00	84.80	60.30	53.50	45.50	40.90	45.40	45.40	97.80	74.00	34.00	66.50	52.60	24.00	46.80	60.00	67.50	39.00	74.20	50.00	49.00	77.70	57.00	60.00	36.00	44.00	37.00	82.00	25.00

Cuadro B.2: Estimación de los parámetros de la DVEG para cada estación por el método de máxima verosimilitud y por el método de los momentos pesados en el período junio-agosto.

Estación	Máxima Verosimilitud			Momentos Pesados		
	posición	escala	forma	posición	escala	forma
11001	47.03	16.44	-0.15	46.82	17.02	-0.15
11002	38.46	9.58	0.04	38.76	10.33	-0.03
11003	42.21	15.76	-0.32	41.54	15.97	-0.25
11005	36.87	10.88	0.12	36.94	11.53	0.07
11006	42.35	12.70	-0.10	41.92	12.96	-0.06
11009	41.69	16.24	-0.24	40.97	15.19	-0.15
11013	37.82	10.43	-0.07	37.38	10.05	0.00
11020	36.59	12.18	-0.11	36.34	11.99	-0.08
11021	40.03	14.65	-0.28	40.67	14.17	-0.35
11028	42.29	13.11	0.09	41.94	12.75	0.13
11031	41.22	10.19	-0.07	40.94	10.16	-0.03
11033	34.68	10.85	-0.14	34.74	11.21	-0.16
11036	41.26	13.81	0.00	40.93	13.42	0.04
11040	40.64	13.97	-0.11	40.44	14.84	-0.12
11051	34.67	12.18	-0.01	34.82	13.11	-0.06
11052	36.68	10.55	0.10	36.20	9.64	0.19
11071	42.22	13.25	-0.34	41.83	13.52	-0.30
11072	40.91	13.19	-0.20	40.57	13.21	-0.16
11079	39.86	10.63	0.11	39.59	10.61	0.13
11095	43.80	13.06	-0.00	43.25	12.69	0.06

Cuadro B.3: Algunos modelos posibles para la estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas en el período junio-agosto.

Modelo	Modelo Estimado	$-\mathcal{L}_p$	Dof	TIC
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = -454,66 - 6,34(lat) - 6,17(lon) + 0,04(alt)$	-3038.927	12	6102.517
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -215,58 + 0,014(lat) - 2,27(lon) - 0,02(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,065$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = -381,52 - 4,93(lat) - 5,17(lon)$	-3039.499	11	6101.672
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -215,95 - 0,052(lat) - 2,29(lon) - 0,03(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,066$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = -454,21 - 6,34(lat) - 6,16(lon) + 0,04(alt)$	-3039.657	11	6102.023
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = -257,99 - 0,90(lat) - 2,86(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,065$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = -377,79 - 5,04(lat) - 5,16(lon)$	-3040.442	10	6101.575
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = -257,40 - 1,08(lat) - 2,90(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,067$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 58,94 - 8,77(lat) - 0,03(alt)$	-3044.338	11	6110.923
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -222,39 + 0,51(lat) - 2,23(lon) - 0,02(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,07$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = -454,51 - 6,31(lat) - 6,16(lon) + 0,03(alt)$	-3039.396	11	6101.044
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -27,12 + 2,05(lat) - 0,05(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,064$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 56,49 - 0,75(lat) - 0,03(alt)$	-3043.594	10	6106.491
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -23,66 + 1,88(lat) - 0,05(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,063$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = -226,48 + 0,56(lon) - 0,02(alt)$	-3043.217	11	6108.021
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -220,48 + 0,56(lat) - 2,21(lon) - 0,02(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,068$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = -454,71 - 6,30(lat) - 6,16(lon) + 0,03(alt)$	-3038.912	11	6100.937
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -212,30 - 2,24(lon) - 0,02(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,065$			
$\mu(x) = \alpha_0\alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = -220,35 - 2,58(lon) - 0,02(alt)$	-3043.268	10	6106.519
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = -212,49 - 2,24(lon) - 0,02(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,068$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat)$	$\hat{\mu}(x) = 72,03 - 1,57(lat)$	-3046.464	8	6108.571
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat)$	$\hat{\sigma}(x) = -7,83 + 1,02(lat)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,06$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = -254,12 - 2,9(lon)$	-3044.106	8	6103.878
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = -235,59 - 2,46(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,067$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = -381,09 - 5,04(lat) - 5,19(lon)$	-3041.147	12	6107.016
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = -257,79 - 0,83(lat) - 2,85(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0 + \gamma_1(lat) + \gamma_2(lon)$	$\hat{\xi}(x) = 5,35 + 0,08(lat) + 0,07(lon)$			

Cuadro B.4: Estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas a través del modelo seleccionado por el criterio TIC, en el período junio-agosto.

Estimación conjunta			
estación	posición	escala	forma
11001	43.02	14.17	-0.065
11002	41.44	11.65	-0.065
11003	42.40	14.88	-0.065
11005	37.50	12.03	-0.065
11006	38.34	11.36	-0.065
11009	37.98	12.57	-0.065
11013	38.57	13.26	-0.065
11020	40.15	13.92	-0.065
11021	40.41	13.25	-0.065
11028	39.74	14.14	-0.065
11031	39.10	11.58	-0.065
11033	37.02	11.91	-0.065
11036	42.79	15.29	-0.065
11040	40.15	13.74	-0.065
11052	39.18	13.78	-0.065
11071	39.57	13.62	-0.065
11072	40.51	13.55	-0.065
11079	41.67	13.01	-0.065
11095	40.23	14.02	-0.065

Cuadro B.5: Precipitaciones máximas del trimestre junio-agosto en cada año para cada estación transformadas a Fréchet.

Estación	1963	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1972	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1981	1982	1984	1987	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2002	2004	2005	2007	2008	2009	2010	2011
11001	1.17	1.29	1.57	2.95	2.23	0.59	1.00	1.74	0.72	1.98	4.01	0.59	0.56	0.67	0.92	0.51	1.41	0.35	1.673	2.95	0.51	1.09	0.29	7.07	0.47	10.73	2.02	0.76	26.90	3.54	1.84	3.67	3.95	98.28	0.24	6.22	2.85
11002	0.72	0.81	1.47	2.30	0.33	0.59	6.16	0.61	2.21	1.32	0.90	2.65	0.66	2.17	5.54	0.38	1.67	0.66	4.22	294.24	0.31	0.35	4.88	2.73	0.48	1.65	3.46	1.05	2.62	1.00	9.37	4.34	2.17	6.40	0.28	3.75	7.90
11003	6.34	4.05	1.50	9.61	1.61	1.74	1.09	0.65	2.79	0.77	37.13	1.20	0.45	0.62	0.90	0.33	30.55	0.73	8.89	0.34	1.20	2.35	0.50	3.05	2.35	1.85	1.59	1.09	0.77	1.28	30.55	0.77	4.48	0.28	0.33	23.29	1.28
11005	0.76	1.08	1.08	0.38	0.36	0.80	1.06	3.36	0.52	1.73	8.64	1.73	0.54	0.25	2.42	0.42	0.38	1.65	4.59	64.45	0.38	4.56	6.75	2.44	6.95	3.49	3.69	0.57	1.95	2.50	1.25	1.50	1.08	0.88	3.41	8.22	44.93
11006	0.69	7.17	1.45	0.61	0.97	7.17	0.78	1.01	0.66	4.82	2.86	0.85	1.23	0.23	1.14	0.28	0.59	0.49	2.03	1.86	1.23	0.97	1.71	4.48	2.03	0.57	22.06	27.47	19.81	2.21	7.90	0.53	3.57	4.69	0.46	0.51	31.40
11009	1.34	0.78	3.06	0.49	0.93	0.68	1.16	2.59	0.64	1.12	2.15	3.22	9.17	2.46	1.39	0.76	4.77	0.46	0.64	2.35	45.19	1.42	3.74	0.16	0.66	0.99	5.85	0.50	0.57	3.67	0.60	1.26	32.04	95.71	1.92	2.15	0.92
11013	0.61	1.12	0.63	62.55	2.24	0.40	1.66	0.84	1.50	6.12	12.72	0.77	1.24	0.77	1.49	6.05	1.36	1.28	16.06	0.77	1.00	0.53	6.47	20.85	2.20	10.34	0.98	0.23	1.30	3.85	0.58	0.63	1.40	12.72	1.24	1.24	0.23
11020	0.84	0.95	1.80	1.39	0.88	1.00	0.78	2.36	1.36	20.77	5.19	1.88	1.08	0.50	1.00	1.00	1.22	0.34	0.24	0.24	3.74	0.63	1.83	3.25	2.76	1.19	148.54	1.45	0.44	13.94	2.71	1.99	16.42	6.99	1.59	5.34	0.47
11021	4.96	1.48	1.88	0.79	3.66	0.72	1.60	0.36	2.64	1.10	1.19	1.01	0.68	2.76	1.43	0.60	1.23	0.20	0.19	3.02	2.18	3.66	1.60	3.66	0.87	0.84	209.63	1.80	3.02	1.96	0.48	1.07	1.38	1.80	1.15	60.17	8.80
11028	1.77	29.25	1.14	7.71	3.45	5.46	4.19	1.60	1.27	7.33	6.46	1.56	0.75	0.54	0.60	0.27	1.21	1.76	1.75	25.69	0.20	2.62	0.57	2.28	3.57	0.63	2.09	0.66	0.57	2.36	0.66	2.23	0.57	1.65	3.92	0.84	0.41
11031	1.19	122.08	3.33	2.70	5.73	0.85	7.16	1.59	1.44	0.29	0.53	3.00	0.20	1.19	3.16	1.61	0.81	0.48	6.40	16.04	1.25	7.57	21.63	0.81	1.46	0.50	1.78	0.60	4.86	0.55	0.52	0.85	5.13	1.22	0.52	1.61	1.04
11033	3.88	0.49	3.44	0.26	0.59	0.93	1.27	8.49	63.91	2.16	1.21	0.34	1.60	0.87	74.09	0.70	0.61	0.97	0.50	3.84	2.14	2.92	0.90	2.37	1.75	1.66	1.51	2.37	0.31	2.14	4.54	0.29	3.08	4.01	20.41	1.75	0.78
11036	2.02	25.40	0.23	0.91	1.57	0.63	1.25	0.69	0.92	1.75	0.64	0.52	2.95	1.58	1.13	1.01	12.16	3.03	3.66	5.30	1.61	7.02	0.44	1.05	1.74	8.11	5.86	0.44	2.19	206.94	0.64	1.79	1.99	2.26	0.55	1.58	0.22
11040	0.63	0.50	36.95	0.77	0.35	0.37	1.03	0.70	1.03	4.15	14.01	1.82	1.48	0.31	4.08	0.53	2.04	4.64	3.08	0.57	1.96	0.50	1.57	2.46	1.93	4.64	22.34	1.05	0.41	17.91	2.54	0.48	7.30	4.88	1.47	11.91	0.47
11051	0.54	21.41	0.87	28.77	0.28	2.77	0.84	0.61	2.59	3.00	5.03	0.80	1.32	3.00	0.95	4.02	2.34	2.77	29.26	2.91	17.55	1.68	0.82	0.37	0.53	0.38	3.40	4.47	0.54	0.39	2.59	0.51	9.25	2.09	2.16	0.67	0.40
11052	0.81	2.04	2.76	0.85	23.30	1.43	1.74	4.11.17	6.66	2.91	7.03	3.33	3.56	0.47	1.19	1.36	1.74	0.36	4.03	1.08	0.88	0.18	0.77	2.65	2.43	0.70	1.03	2.23	0.94	1.63	0.96	0.86	0.70	1.16	2.33	11.31	0.31
11071	2.41	1.37	1.65	3.05	5.92	1.02	1.27	0.67	2.04	4.72	25.28	1.16	1.52	1.40	0.38	0.35	1.94	0.47	29.75	4.72	1.47	1.79	51.57	0.80	0.44	0.62	1.10	0.69	0.35	0.26	0.44	3.41	1.06	1.60	1.06	27.08	2.46
11072	0.44	2.70	0.75	3.48	1.84	0.87	1.38	0.24	51.08	7.46	1.62	1.56	4.95	2.44	0.48	0.95	0.77	1.76	5.50	2.44	0.50	0.62	1.17	60.39	1.00	4.65	6.39	0.91	0.72	3.10	0.61	0.67	29.59	0.67	0.23	2.42	2.35
11079	0.80	0.57	3.05	0.84	1.60	0.60	16.96	1.24	2.01	3.63	1.81	5.39	1.01	7.43	1.22	1.22	27.27	1.80	3.31	5.35	0.34	0.23	0.27	1.83	0.75	0.69	1.01	0.63	1.75	2.08	0.49	2.27	1.34	4.76	0.42	6.49	18.97
11085	0.70	1.04	0.64	0.79	0.56	0.88	3.54	0.67	0.87	23.26	3.54	2.10	1.14	0.80	1.13	1.13	63.30	10.14	0.47	5.70	1.96	0.22	1.26	3.46	2.86	0.69	10.30	1.61	1.49	13.48	2.75	3.46	0.55	1.02	0.59	18.76	0.24

B.2. Cuadros del período noviembre-marzo.

Cuadro B.6: Precipitaciones máximas en el período noviembre-marzo en cada año para cada estación.

	1984	1985	1986	1989	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1984	1985	1988	1989	1992	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	
1001	1500	1250	1460	400	850	1250	2330	650	1240	750	2110	150	720	1950	670	710	1150	600	2900	1300	000	1000	1050	800	200	1100	1550	1150	1900	470	1100	610	8100	000	
1002	960	990	1890	840	890	920	410	120	310	1110	1530	1100	2070	2250	1830	1040	1580	750	3070	3550	420	3580	1530	000	990	1390	1900	800	1750	1450	000	2450	2100	150	
1005	1510	1740	1180	430	680	1310	2560	360	1250	2000	1810	600	220	660	650	200	2000	900	3000	800	000	800	200	1600	200	1500	1000	700	2000	1100	700	110	4550	550	
1005	1100	1200	1430	390	450	1460	930	520	950	2000	1780	770	1770	2600	1100	670	790	750	2670	1300	300	1900	880	300	450	650	1960	1060	2010	2330	420	450	4200	200	
1009	1750	800	1500	400	400	2720	2900	550	2030	1200	1700	330	1600	2480	1600	2400	1040	1020	1570	000	1250	1600	930	750	550	850	2130	990	1720	2200	140	620	6400	320	
1011	1700	1250	1600	700	580	1220	1460	700	900	1950	1600	310	1800	3910	1000	260	1570	750	2950	1000	220	690	1590	030	210	660	1020	1040	2850	2020	600	1650	8300	600	
1013	1600	1700	1250	250	400	300	320	600	1050	1150	950	400	2600	2790	1000	1300	1040	750	1590	2300	000	1900	1150	000	670	650	1650	950	2270	1000	340	1600	7200	2520	
1020	1900	1050	1520	550	400	350	920	350	920	650	1330	2130	1580	1050	850	1870	1120	430	580	680	2200	800	000	1240	190	270	670	290	1770	1490	1560	390	790	7050	080
1021	1350	1150	1780	300	1100	250	1050	130	1100	1500	1950	980	1550	2450	1150	720	1000	700	1600	2900	400	2400	1250	000	1200	1350	1300	650	1400	1800	000	350	4500	400	
1025	2900	1160	3600	1070	600	1720	1300	470	1530	2190	2300	1200	1040	2160	800	120	250	1300	4100	1000	000	2250	250	430	600	1150	3100	3000	2000	1000	300	900	7300	300	
1028	1500	780	2120	280	400	3150	1090	490	810	500	850	420	1150	2150	1050	850	1660	860	2750	1160	000	950	380	150	250	960	2100	1650	2220	1970	000	640	8000	000	
1033	1830	740	2920	1380	620	1180	3100	980	1180	2780	1640	330	1060	3130	1450	890	1840	900	3450	3100	050	550	950	100	550	1400	1650	900	2350	1550	450	1380	9850	300	
1036	2250	800	650	260	1080	500	530	280	2330	3100	1120	690	760	2330	640	800	1690	770	1900	1250	060	1880	130	000	440	3570	1830	980	1750	1500	000	480	8950	100	
1040	2000	950	2250	950	760	2600	1000	800	1380	2450	1510	1120	1010	1900	960	640	3390	620	1910	830	000	1320	160	240	700	650	1700	1770	1640	3210	320	840	7030	010	
1051	1700	620	1200	260	900	400	980	570	1980	2000	1650	570	1000	3680	2200	300	1500	910	2750	1400	380	2200	1200	220	300	1030	4320	1740	3210	2050	700	1350	7300	150	
1052	2850	1550	2000	500	320	2100	620	890	1970	1590	1540	350	1150	2600	1280	500	1200	4400	2320	1200	400	2350	800	150	1050	1000	1320	1020	2560	1050	220	550	7300	420	
1060	2600	1100	1940	2220	820	320	2250	030	1800	1350	910	250	2250	2000	1030	1080	1270	1430	2860	1130	650	1200	1650	1010	550	1350	2800	750	2170	1020	000	250	4620	410	
1071	1260	1120	1440	420	1210	3250	1600	510	680	1320	2110	930	1670	2520	720	380	560	4370	2030	1700	140	2310	1770	100	250	450	650	500	2000	1500	000	510	6650	000	
1072	3350	950	1100	250	2570	650	800	400	1550	900	2380	600	1780	2100	1050	780	1000	1500	1490	1700	1700	1050	000	100	1070	590	2140	970	1570	1710	170	520	6720	350	
1076	3250	1020	1840	680	970	990	710	520	900	1010	1450	3350	1950	1390	1560	110	840	900	3020	1420	330	2880	1220	200	1300	1150	1530	600	1210	2170	000	1100	5630	350	
1085	2400	1130	2000	940	520	850	1000	490	1300	2300	600	880	1230	1830	1000	520	2850	750	3640	750	000	1200	080	150	500	270	2980	1900	1600	1920	600	650	7100	050	
1086	1300	620	1150	650	430	3620	1500	590	2670	2000	2120	750	1230	2020	270	250	2050	590	1150	1350	000	1050	630	210	250	860	1530	1150	3300	970	350	450	8650	160	

Cuadro B.7: Estimación de los parámetros de la DVEG para cada estación por el método de máxima veosimilitud y por el método de los momentos pesados en el período noviembre-marzo.

Estación	Máxima Verosimilitud			Momentos Pesados		
	posición	escala	forma	posición	escala	forma
11001	7.39	6.00	0.21	7.06	5.42	0.32
11002	9.22	8.03	0.17	9.06	7.97	0.19
11003	6.78	5.76	0.20	6.84	6.15	0.15
11005	7.73	5.16	0.27	7.99	5.85	0.14
11009	9.02	6.98	0.15	9.02	7.30	0.12
11011	8.08	6.38	0.28	7.84	6.13	0.33
11013	7.76	6.54	0.21	7.64	6.59	0.22
11020	6.60	5.45	0.25	6.54	5.60	0.25
11021	8.25	6.57	0.03	8.25	6.76	0.01
11025	9.12	7.61	0.27	9.11	7.92	0.23
11028	6.42	6.22	0.32	6.33	6.30	0.31
11033	9.33	7.54	0.28	9.11	7.46	0.31
11036	6.17	6.30	0.40	6.22	6.62	0.34
11040	8.53	7.10	0.19	8.29	6.92	0.23
11051	8.41	6.84	0.37	8.64	7.47	0.26
11052	8.43	6.18	0.27	8.46	6.50	0.23
11060	9.44	7.33	0.02	9.41	7.66	0.00
11071	7.14	6.84	0.31	7.28	7.35	0.23
11072	8.06	6.52	0.20	7.92	6.54	0.21
11076	9.23	6.61	0.16	8.93	6.21	0.22
11095	7.23	6.56	0.30	7.14	6.67	0.28
11096	7.39	6.51	0.36	7.39	6.81	0.32

Cuadro B.8: Algunos modelos posibles para la estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas en el período noviembre-marzo

Modelo	Modelo Estimado	$-\mathcal{L}_p$	Dof	TIC
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 132,49 - 0,35(lat)1,164(lon) + 0,013(alt)$	-2697.78	12	5476.878
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 16,23 - 0,30(lat) + 0,038(lon) + 0,01(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2356$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = 174,15 + 0,426(lat) + 1,73(lon)$	-2698.088	11	5476.896
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 16,38 - 0,29(lat) + 0,04(lon) + 0,007(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = -0,2365$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 144,36 - 0,180(lat) + 1,314(lon) + 0,006(alt)$	-2698.249	11	5476.865
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = 54,44 + 0,068(lat) + 0,486(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2359$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = 173,307 - 0,447(lat) + 1,725(lon)$	-2698.107	10	5475.885
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = 51,62 + 0,208(lat) + 0,4870(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2364$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 32,416 - 1,234(lat) - 0,022(alt)$	-2698.826	11	5477.716
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 17,16 - 0,506(lat) + 0,006(lon) + 0,012(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2351$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 132,377 - 0,348(lat) + 1,64(lon) + 0,012(alt)$	-2697.776	11	5475.654
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 13,491 - 0,355(lat) + 0,010(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2338$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 34,125 - 1,317(lat) - 0,022(alt)$	-2698.873	10	5476.055
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 13,126 - 0,337(lat) - 0,010(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2338$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 146,4 + 1,373(lon) + 0,01(alt)$	-2697.697	11	5475.953
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 16,229 - 0,307(lat) + 0,037(lon) + 0,0104(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2361$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 132,417 - 0,353(lat) + 1,164(lon) + 0,013(alt)$	-2697.907	11	5475.534
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 28,286 + 0,218(lon) + 0,008(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2339$			
$\mu(x) = \alpha_0\alpha_2(lon) + \alpha_3(alt)$	$\hat{\mu}(x) = 146,39 + 1,373(lon) + 0,01(alt)$	-2697.738	10	5474.267
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_2(lon) + \beta_3(alt)$	$\hat{\sigma}(x) = 28,273 + 0,218(lon) + 0,008(alt)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2349$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat)$	$\hat{\mu}(x) = 17,169 - 0,44(lat)$	-2700.636	8	5477.778
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat)$	$\hat{\sigma}(x) = 5,12 + 0,075(lat)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2331$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = 163,178 + 1,534(lon)$	-2698.443	8	5473.384
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = 42,07 + 0,35(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0$	$\hat{\xi}(x) = 0,2364$			
$\mu(x) = \alpha_0 + \alpha_1(lat) + \alpha_2(lon)$	$\hat{\mu}(x) = 174,005 + 0,423(lat) + 1,728(lon)$	-2697.038	12	5476.965
$\sigma(x) = \beta_0 + \beta_1(lat) + \beta_2(lon)$	$\hat{\sigma}(x) = 50,704 + 0,338(lat) + 0,505(lon)$			
$\xi(x) = \gamma_0 + \gamma_1(lat) + \gamma_2(lon)$	$\hat{\xi}(x) = -4,06 + 0,105(lat) - 0,021(lon)$			

Cuadro B.9: Estimación conjunta de los parámetros de las DVEG de las estaciones meteorológicas a través del modelo seleccionado por el criterio TIC, en el período noviembre-marzo.

Estimación conjunta			
estación	posición	escala	forma
11001	7.43	6.54	0.24
11002	8.70	6.83	0.24
11003	7.30	6.51	0.24
11005	8.73	6.84	0.24
11009	8.53	6.79	0.24
11011	8.42	6.77	0.24
11013	8.32	6.75	0.24
11020	7.20	6.49	0.24
11021	8.24	6.73	0.24
11025	7.17	6.48	0.24
11028	7.73	6.61	0.24
11033	8.53	6.79	0.24
11036	6.97	6.44	0.24
11040	7.22	6.49	0.24
11051	8.45	6.77	0.24
11052	8.07	6.69	0.24
11060	8.19	6.72	0.24
11071	7.60	6.58	0.24
11072	8.14	6.70	0.24
11076	8.76	6.84	0.24
11095	7.20	6.49	0.24
11096	8.22	6.72	0.24

Cuadro B.10: Precipitaciones máximas en el período noviembre-marzo en cada año para cada estación transformadas a Fréchet.

Estación	1964	1965	1966	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1984	1985	1988	1989	1992	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
11001	2.78	2.04	2.65	0.57	1.17	2.04	6.81	0.87	2.01	1.01	5.47	0.36	0.97	4.63	0.89	0.94	1.79	0.80	11.45	2.17	0.27	1.46	1.56	1.09	0.40	1.67	2.95	1.79	4.39	0.64	1.67	0.81	241.58	0.27
11002	1.14	1.19	3.59	0.96	1.03	1.07	0.48	0.28	0.40	1.40	2.44	1.38	4.34	5.21	3.44	1.27	2.53	172.77	10.95	16.04	0.49	16.41	2.44	0.22	1.19	2.01	3.63	0.90	3.08	2.17	0.22	6.32	4.48	0.30
11003	2.87	3.75	1.90	0.61	0.93	2.24	8.63	0.54	2.08	4.97	4.01	0.82	0.42	0.90	0.88	0.41	4.97	1.29	12.71	1.11	0.27	1.11	0.41	3.19	0.41	2.84	1.49	0.96	4.97	1.70	0.96	0.33	39.65	0.75
11005	1.38	1.57	2.11	0.46	0.51	2.03	1.09	0.58	1.12	4.02	3.17	0.86	3.13	7.24	1.38	0.74	0.88	0.83	7.72	1.79	0.39	3.62	1.01	0.39	0.51	0.71	3.86	1.30	4.06	5.62	0.49	0.51	25.49	0.33
11009	3.16	0.92	2.36	0.48	0.48	8.32	9.74	0.62	4.28	1.62	2.98	0.43	2.66	6.68	2.66	6.19	1.31	1.27	2.57	0.23	1.73	2.66	1.12	0.86	0.62	1.00	4.74	1.22	3.05	5.09	0.30	0.70	94.50	0.42
11011	3.03	1.76	2.70	0.81	0.67	1.69	2.12	0.81	1.09	3.99	2.70	0.42	3.39	21.77	1.25	0.38	2.61	0.87	10.14	1.25	0.35	0.79	2.67	0.24	0.35	0.76	1.29	1.33	9.46	4.29	0.69	2.80	226.77	0.69
11013	2.74	3.08	1.78	0.38	0.50	0.42	0.43	0.70	1.37	1.56	1.19	0.50	7.69	9.12	1.27	1.90	1.35	0.88	2.71	5.79	0.23	3.84	1.56	0.23	0.78	0.76	2.90	1.19	5.62	1.27	0.45	2.74	142.88	6.08
11020	4.54	1.62	2.95	0.76	0.59	0.54	1.35	0.90	2.34	5.78	3.17	1.62	1.22	4.40	1.78	0.62	0.80	0.94	6.20	1.13	0.28	2.08	0.40	0.47	0.93	0.49	3.94	2.85	3.60	3.10	0.58	1.11	157.35	0.33
11021	2.05	1.58	3.40	0.42	1.48	0.39	1.38	0.31	1.48	2.46	4.09	1.25	2.61	6.76	1.58	0.85	1.29	0.83	2.77	10.14	0.51	6.45	1.80	0.24	1.69	2.05	1.92	0.77	2.18	3.48	0.24	0.46	29.25	0.51
11025	11.91	1.88	20.89	1.67	0.83	3.74	2.26	0.67	3.00	6.16	6.87	1.99	1.60	5.98	1.13	2.01	0.45	2.26	29.95	1.51	0.28	6.54	0.45	0.63	0.83	1.86	14.09	12.96	5.07	1.51	0.50	1.31	177.20	0.50
11028	2.07	1.01	5.27	0.44	0.55	13.49	1.57	0.64	1.06	0.65	1.12	0.56	1.71	5.44	1.49	1.12	3.21	1.14	9.60	1.73	0.25	1.30	0.53	0.34	0.42	1.31	5.17	3.17	5.83	4.51	0.25	0.81	221.35	0.25
11033	3.45	0.84	0.91	2.04	0.70	1.58	11.52	1.20	1.58	8.77	2.79	0.43	1.34	11.81	2.22	1.06	3.49	1.07	15.01	11.52	0.25	0.62	1.15	0.28	0.62	2.09	2.82	1.07	5.90	2.51	0.53	2.04	403.88	0.41
11036	6.75	1.17	0.93	0.48	1.75	0.73	0.77	0.50	7.30	14.53	1.84	0.99	1.10	7.30	0.92	1.17	3.73	1.12	4.70	2.19	0.32	4.60	0.37	0.29	0.66	21.07	4.36	1.52	3.99	2.99	0.29	0.70	364.04	0.35
11040	5.03	1.40	6.49	1.40	1.06	9.06	1.50	1.13	2.48	7.88	2.87	1.77	1.52	4.52	1.42	0.88	17.65	0.85	4.57	1.18	0.28	2.30	0.38	0.44	0.97	0.89	3.63	3.92	3.38	15.29	0.51	1.19	155.29	0.28
11051	3.02	0.74	1.64	0.38	1.08	0.49	1.22	0.65	4.10	4.19	2.85	0.65	1.25	18.35	5.14	0.41	2.39	1.10	8.64	2.11	0.47	5.14	1.64	0.35	0.41	1.30	28.78	3.16	12.75	4.41	0.80	1.99	146.81	0.31
11052	9.97	2.68	4.43	0.62	0.45	4.92	0.75	1.13	4.29	2.81	2.65	0.47	1.62	7.98	1.92	0.62	1.73	2.24	6.13	1.73	0.52	6.31	0.99	0.33	1.42	1.32	2.03	1.36	7.69	1.42	0.37	0.65	155.20	0.54
11060	7.83	1.49	4.08	5.45	1.00	0.44	5.61	0.25	3.51	2.06	1.14	0.39	5.61	4.35	1.35	1.45	1.86	2.28	9.87	1.55	0.77	1.70	2.96	1.32	0.66	2.06	9.37	0.90	5.18	1.33	0.24	0.39	36.32	0.52
11071	2.01	1.67	2.52	0.58	1.88	14.91	3.05	0.67	0.88	2.17	5.32	1.28	3.31	7.94	0.94	0.54	0.73	33.67	4.90	3.42	0.34	6.50	3.70	0.32	0.42	0.61	0.84	0.66	4.75	2.71	0.26	0.67	122.33	0.26
11072	14.91	1.22	1.50	0.39	7.68	0.78	0.98	0.51	2.65	1.13	6.42	0.72	3.45	4.86	1.40	0.95	1.31	2.50	2.47	3.16	3.16	1.40	0.24	0.29	1.44	0.71	5.07	1.25	2.72	3.19	0.34	0.63	117.53	0.47
11076	12.60	1.23	3.37	0.74	1.15	1.18	0.78	0.57	1.04	1.21	2.15	13.64	3.80	2.00	2.45	1.39	0.95	1.04	10.43	2.07	0.41	9.26	1.61	0.33	1.78	1.47	2.37	0.66	1.59	4.77	0.22	1.37	60.94	0.43
11095	7.54	1.80	5.05	1.39	0.73	1.22	1.51	0.69	2.25	6.85	0.83	1.27	2.06	4.21	1.51	0.73	11.36	1.05	21.44	1.05	0.28	1.98	0.33	0.37	0.70	0.47	12.70	4.54	3.24	4.64	0.83	0.90	161.05	0.31
11096	1.93	0.77	1.59	0.77	0.53	18.14	2.47	0.70	8.32	4.33	4.91	0.90	1.76	4.43	5.70	0.39	4.57	0.70	5.06	2.06	0.24	1.39	0.74	0.36	0.39	1.06	2.56	1.59	14.17	1.24	0.46	0.55	268.96	0.33

Apéndice C

Las lluvias: Algunos Conceptos.

La lluvia es un fenómeno atmosférico de tipo acuático que se inicia con la condensación del vapor de agua contenido en las nubes ¹. Según la Organización Meteorológica Mundial, la lluvia es la precipitación de partículas líquidas de agua, de diámetro mayor de 0,5 mm o de gotas menores, pero muy dispersas. Si medimos en mm al año se consideran pocas por debajo de 200 mm, escasas entre 200 y 500, normales entre 500 y 1000, abundantes entre 1000 y 2000 y muchas si son más de 2000.

Se consideran factores determinantes, la presión atmosférica, la temperatura y especialmente la humedad.

Las lluvias pueden originarse por diferentes nubes, generalmente nimbostratus y cumulonimbus, la persistencia de una lluvia abundante requiere que las capas de nubes se renueven continuamente con movimientos ascendentes. El ascenso de las masas de aire puede estar ligada a diversas causas, que dan lugar a diversos tipos de lluvias,

Lluvias de convección Al calentarse las capas bajas de aire húmedas suben, se dilatan y producen precipitaciones intensas, suelen producirse en zonas llanas o con pequeñas irregularidades. La extensión de la lluvia varía notablemente de unos cientos de metros a cientos de kilómetros. Las lluvias de convección dejan una especie de “huella” o mancha mojada en el suelo que tiene forma ovalada.

Lluvias orográficas Se producen cuando una masa de aire húmeda choca con un relieve montañoso y al chocar asciende por la ladera orientada al viento. La orografía juega un papel importante en la cantidad, intensidad, distribución espacial y duración de la precipitación.

¹Fuente: Wikipedia

Lluvias ciclónicas Se produce en las latitudes templadas al entrar en contacto dos masas de aire de características térmicas distintas, como las provocadas por el frente polar y el frente tropical.

Apéndice D

Funciones de variación regular.

El concepto de variación regular es introducido por Karamata en 1933, [44]. Este concepto posteriormente es aplicado para modelizar el comportamiento de la cola de la distribución de una variable aleatoria. Para un breve desarrollo sobre la teoría se considera como referencia [23], [67] y [54].

D.1. Funciones reales de variación regular

Se puede pensar la variación regular como una derivada en el infinito, es decir, en lugar de tomar y fijo y $h \rightarrow 0$ en el cociente incremental,

$$\frac{g(y+h) - g(y)}{h}, \quad (\text{D.1})$$

se considera h fijo y $y \rightarrow \infty$. Se puede probar que si el límite existe para todo h entonces no depende de h y se puede expresar $g(y) = g_0(y) + o(1)$ donde g_0 es diferenciable y cumple,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} g'_0(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} \quad (\text{D.2})$$

Si se define ahora $f(t) = e^{g(\log t)}$, f verifica que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha, \quad (\text{D.3})$$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Se dice que f es una función de variación regular.

Definición 18 (Función de variación regular). *Una función medible Lebesgue $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ positiva es de variación regular si existe $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(tx)}{f(t)} = x^\alpha, \quad x > 0 \quad (\text{D.4})$$

Se denota $f \in RV_\alpha$. α es llamado el índice de variación regular, si $\alpha = 0$ se dice que es de variación lenta.

Es suficiente probar que el límite existe y es finito para todo x en un conjunto de medida de Lebesgue positiva para que la función sea de variación regular.

Teorema 14 (Teorema de Representación). *Si $f \in RV_\alpha$ existen funciones medibles $a, c : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ con,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = c_0 > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = \alpha, \quad (\text{D.5})$$

y $t_0 > 0$ tal que para todo $t > t_0$,

$$f(t) = c(t) \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{a(s)}{s} ds \right) \quad (\text{D.6})$$

También se verifica el recíproco.

Algunas Propiedades.

1. Si $f_1 \in RV_{\alpha_1}$ y $f_2 \in RV_{\alpha_2}$, entonces $f_1 + f_2 \in RV_{\alpha_1 + \alpha_2}$. Además si $\lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t) = \infty$ entonces $f_1 \circ f_2 \in RV_{\alpha_1 \alpha_2}$.
2. Si $f \in RV_\alpha$ es integrable en intervalos finitos de \mathbb{R}^+ y $\alpha \geq -1$, entonces $\int_0^t f(s) ds$ es de variación regular con índice $\alpha + 1$. Si $f \in RV_\alpha$ con $\alpha < -1$, entonces $\int_t^\infty f(s) ds$ existe y es de RV con índice $\alpha + 1$.
3. Si

$$f(t) = \exp \left(\int_0^t a(s) \frac{1}{s} ds \right) \quad (\text{D.7})$$

para una función a continua que cumple que $a(s) \rightarrow \alpha > 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, entonces $f^{\leftarrow} \in RV_{1/\alpha}$, donde f^{\leftarrow} es la inversa generalizada de f .

Definición 19 (Variables aleatorias de variación regular). *Sea X una v.a. no negativa, se dice es de variación regular de índice α si y sólo si \bar{F}_X es de variación regular con índice $-\alpha$.*

D.2. Funciones de variación regular multivariada

Definición 20. El vector aleatorio X con valores en \mathbb{R}^d es de variación regular con índice α si existe un vector Θ con valores en $\mathbb{S}_+^{d-1} = \mathbb{S}^{d-1} \cap [0, \infty)^d$ tal que para $x > 0$ se cumple que,

$$\frac{P(\|X\| > tx, X/\|X\| \in \cdot)}{P(\|X\| > t)} \xrightarrow{\nu} x^{-\alpha} P_{\Theta}(\cdot) \quad (\text{D.8})$$

cuando $t \rightarrow \infty$

Teorema 15 (Condiciones necesarias y suficientes). *Los siguientes enunciados son equivalentes,*

1. X es de variación regular de índice α
2. Existe y es finito para todo x el límite cuando $t \rightarrow \infty$ de $\frac{P(X \in [0, tx]^c)}{P(X \in [0, t]^c)}$, donde el complemento es tomado en el espacio $D = [0, \infty]^d \setminus \{0\}$.
3. Existe una medida de Radon no nula μ en D y un boreliano $E \in D$ relativamente compacto tal que,

$$\frac{P(X \in t \cdot)}{P(X \in tE)} \xrightarrow{\nu} \mu(\cdot), \quad (\text{D.9})$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

4. El siguiente límite existe y es finito para todo $x > 0$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{P(\langle x, X \rangle > t)}{P(\langle \mathbf{1}, X \rangle > t)} \xrightarrow{\nu} \mu(\cdot). \quad (\text{D.10})$$

Demostración. Ver [54]. □

Bibliografía

- [1] *R Development Core Team (2011). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. ISBN 3-900051-07-0, URL.*
- [2] K. Aas, C. Czado, A. Frigessi, and H. Bakken. Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance, Mathematics and Economics*, 44:182–198, 2009.
- [3] A. A. Balkema and S.I Resnick. Max-infinite divisibility. *Journal of Applied Probability*, 14(2):309–319, 1977.
- [4] T. Bedford and R.M Cooke. Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 32:245–268, 2001.
- [5] L. Bel, J.N. Bacro, and C. Lantuéjoul. Estimation of the extremal coefficient function of a stationary random field. *Environmetrics*, 19(2):163–182, 2008.
- [6] E. Bernard, P. Naveau, M. Vrac, and O. Mestre. Clustering of maxima: Spatial dependencies among heavy rainfall in france. *Submitted*, 2013.
- [7] R.L Bras and I. Rodriguez-Iturbe. *Random Functions and Hydrology*. Dover Publications, Incorporated, 1994.
- [8] E. Brechmann, C. Czado, and K. Aas. Truncated regular vines in high dimensions with application to financial data. *Canadian Journal of Statistics*, 40(1):68–85, 2012.
- [9] B. M. Brown and S. I. Resnick. Extreme value of independent stochastic process. *Journal of Applied Probability*, 14:732–739, 1977.
- [10] R.E. Chandler and S. Bate. Inference for clustered data using the independence loglikelihood. *Biometrika*, 94(1):167–183, 2007.

- [11] S. Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer Series in Statistics, 2001.
- [12] D. Cooley, P. Naveau, and P. Poncet. Variograms for spatial max-stable random fields. In *Dependence in Probability and Statistics*. Springer, 2006.
- [13] D.R. Cox and N. Reid. A note on pseudolikelihood constructed from marginal densities. *Biometrika*, 91:729–737, 2004.
- [14] N. Cressie. *Statistics for spatial data*. Wiley Interscience, 1993.
- [15] S. Damarta and A. McNeil. The t-copula and related copulas. *International Statistical Review*, 73:111–129, 2005.
- [16] R.A. Davis and T. Mikosch. The extremogram: A correlogram for extreme events. *Bernoulli*, 15(4):977–1009, 2009.
- [17] A. Davison, S. Padoan, and M. Ribatet. Statistical modelling of spatial extremes. *Statistical Science*, 27(2):161, 2012.
- [18] A.C. Davison. *Statistical Models*. New York: Cambridge University Press., 2003.
- [19] A.C Davison and M.O Boldi. A mixture model for multivariate extremes. *Journal of the Royal Statistical Society*, 69:217–229, 2007.
- [20] A.C. Davison and M.M. Gholamrezaee. Geostatistics of extremes. *Proceedings of the Royal Society of London*, 62(B):191–208, 2012.
- [21] L. de Haan. A characterization of multidimensional extreme-value distributions. *The Indian Journal of Statistics. Series A*, 40(1):85–88, 1978.
- [22] L. de Haan. A spectral representation for max-stable processes. *The Annals of Probability*, 12(4):1194–1204, 1984.
- [23] L. de Haan and A. Ferreira. *Extreme Value Theory , An Introduction*. Springer, 2006.
- [24] L. de Haan and S.I Resnick. Limit theory for multivariate sample extremes. *Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 40(4):317–337, 1977.
- [25] J. Dißmann. Statistical inference for regular vines and application. Master’s thesis, Technische Universit at Munchen., 2010.

- [26] J. Dißmann, E. C. Brechmann, C. Czado, and D. Kurowicka. Selecting and estimating regular vine copulae and application to financial returns. *Computational Statistics & Data Analysis*, 59:52–69, 2013.
- [27] C. Dombry, F. Eyi-Minko, and M. Ribatet. Conditional simulation of max-stable processes. *Biometrika*, 100(1):111–124, 2013.
- [28] P. Embrechts and M. Hofert. Statistical inference for copulas in high dimensions: A simulation study. *To appear in ASTIN Bulletin*, 2013.
- [29] P. Embrechts, C. Kluppelberg, and T. Mikosch. *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer-Verlag, 1997.
- [30] W. Feller. *An introduction to probability theory and its applications*, volume II. Wiley, New York, 1971.
- [31] C. Gaetan and X. Guyon. *Spatial Statistics and Modeling*. Springer, 2010.
- [32] M.G. Genton, Y. Ma, and H. Sang. On the likelihood function of gaussian max-stable processes. *Biometrika*, 98(2):481–488, 2011.
- [33] E. Gilleland, M. Ribatet, and A.G. Stephenson. A comparative software review for extreme value analysis. *Extremes*, To appear, 2013.
- [34] B. Gnedenko. Sur la distribution limite du terme maximum d ’ une serie aleatoire. *Annals of Mathematics*, 44:423–453, 1943.
- [35] V.P Godambe. An optimum property of a regular maximum likelihood estimation. *Annals of Mathematical Statistics*, 31:1208–1211, 1960.
- [36] E. Martín González. Análisis de máximos para datos espaciales de lluvias. Master’s thesis, Cimat, 2011.
- [37] P. Green. Reversible jump markov chain monte carlo computation and bayesian model determination. *Biometrika*, 82:711–732, 1995.
- [38] G. Gudendorf and J. Segers. Extreme-value copulas. In *Copula Theory and Its Applications*. Springer, 2010.
- [39] P. Hall and N. Tajvidi. Distribution and dependence-function estimation for bivariate extreme-value distributions. *Bernoulli*, 6:835–844, 2000.

- [40] H. Joe. Families of m -variate distributions with given margins and $m(m-1)/2$ bivariate dependence parameters. *IMS Lectures Notes- Monograph Series*, 28:120–141, 1996.
- [41] H. Joe. *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman-Hall, 1997.
- [42] H. Joe and J.J. Xu. The estimation method of inference functions for margins for multivariate models. Technical report, Department of Statistics, University of British Columbia, 1996.
- [43] Z. Kabluchko, M. Schlather, and L. de Haan. Stationary max-stable fields associated to negative definite functions. *Annals of Probability*, 37 (5):2042–2065, 2009.
- [44] J. Karamata. Sur un mode de croissance régulière. théorèmes fondamentaux. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 61:55–62, 1933.
- [45] L. Kaufman and P.J Rousseeuw. *Statistical data analysis based on the L1 norm*, chapter Clustering by means of medoids, pages 405–416. Elsevier, Amsterdam, 1987.
- [46] C. Kluppelberg, C. Steinkohl, and R.A Davis. Statistical inference for max-stable processes in space and time. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B*, 75(2), 2013.
- [47] D. Kurowicka and R. Cooke. *Uncertainty analysis with high dimensional dependence modelling*. Wiley, 2006.
- [48] D. Kurowicka and H. Joe. *Dependence Modeling. Vine Copula Handbook*. World Scientific, 2011.
- [49] M. Larsson and S.I. Resnick. Extremal dependence measure and extremogram: the regularly varying case. *Extremes*, 15:231–256, 2012.
- [50] L. F. Lee. Generalized econometric models with selectivity. *Econometrica*, 51:507–512, 1983.
- [51] G. Lindgren, M.R Leadbetter, and H. Rootzén. *Extremes and related properties of stationary sequences and processes*. Springer, 1983.
- [52] A. W. Marshall and I. Olkin. Domains of attraction of multivariate extreme value distributions. *Annals of Probability*, 11:168–177, 1983.
- [53] G. Matheron. Suffit-il, pour une covariance, d’être de type positif. *Sci. de la Terre, Sér. Informatique , Géologique*, 26:51–66, 1987.

- [54] T. Mikosch. *Regular variation, subexponentiality and their applications in probability theory*. Eindhoven : Eurandom, 1999.
- [55] T. Mikosch. Copulas: tales and facts. *Extremes*, 9:3–20, 2006.
- [56] O. Morales-Nápoles. *Bayesian belief nets and vines in aviation safety and other applications*. PhD thesis, Technische Universiteit Delft, 2008.
- [57] O. Morales-Nápoles, O. Cooke, and D. Kurowicka. About the number of vines and regular vines on n nodes. Submitted to *Linear Algebra and its Applications*.
- [58] P. Naveau, D. Cooley, and R.A Davis. The pairwise beta distribution: A flexible parametric multivariate model for extremes. *Journal of Multivariate Analysis*, 101:2103–2117, 2010.
- [59] P. Naveau, A. Guillou, and D. Cooley. Modelling pairwise dependence of maxima in space. *Biometrika*, 96(1):1–17, 2009.
- [60] R. Nelsen. *An introduction to copulas*. Springer-Verlag, 2006.
- [61] M. Oesting, S. Kabluchko, and M. Schlather. Simulation of brown-resnick processes. *Extremes*, published online, 2011.
- [62] T. Opitz. A spectral construction of the extremal-t process. *Submitted*, 2012.
- [63] S. A. Padoan, M. Ribatet, and S. A. Sisson. Likelihood-based inference for max-stable processes. *Journal of the American Statistical Association*, 105(489):263–277, 2010.
- [64] J. Pickands. Multivariate extreme value distributions. *Bulletin of the International Statistical Institute*, 1:859–878, 1981.
- [65] F. L. Quintero. Estudio de la distribución espacial de valores máximos para datos de lluvia. Master’s thesis, Inst. Venezolano de Inv. Cient., 2010.
- [66] S. I. Resnick. *Extreme Value, Regular Variation, and Point Processes*. Springer-Verlag, 1987.
- [67] S.I Resnick. *Heavy-Tail Phenomena. Probabilistic and Statistical Modeling*. Heavy-Tail Phenomena. Probabilistic and Statistical Modeling, 2007.
- [68] M. Ribatet. Extreme value copulas and max-stable processes. *Journal of Societe Francaise de Statistique*, special edition on copulas, 2013.

- [69] M. Ribatet and M. Sedki. Extreme value copulas and max-stable processes. *Journal de la Società Francaise de Statistique, Submitted*, 2013.
- [70] C. Romano. Calibrating and simulating copula functions: An application to the italian stock market. *Risk Management*, pages 23–24, 2002.
- [71] A. Sabourin and P. Naveau. Bayesian dirichlet mixture model for multivariate extremes: a re-parametrization. *Computational Statistics and Data Analysis*, (submitted), 2013.
- [72] J. Ortega Sanchez. *Valores Extremos*. Notas curso Cimat, 2010.
- [73] M. Schlather. Models for stationary max-stable random fields. *Extremes*, 5(1):33–44, 2002.
- [74] M. Schlather and J.A. Tawn. A dependence measure for multivariate and spatial extreme values: Properties and inference. *Biometrika*, 90 (1):139–156, 2003.
- [75] R.J. Serfling. *Approximation Theorems of Mathematical Statistics*. Wiley Series in Probability and Statistics, 1981.
- [76] A. Sklar. Fonctions de répartition a n dimensions et leurs marges. *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 8:229–231, 1959.
- [77] R.L. Smith. Max-stable processes and spatial extremes. *Unpublished manuscript*, 1990.
- [78] P.X.K Song, Y. Fan, and J. D. Kalbfleisch. Maximization by parts in likelihood inference. *Journal of the American Statistical Association*, 100:1145–1158, 2005.
- [79] D. Stoyan, W.S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley & Sons, 1995.
- [80] L.H.C Tippett and R. A. Fisher. Limiting forms of the frequency distribution of the largest or smallest member of a sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 24:190–190, 1928.
- [81] C. Varin and P. Vidoni. A note on composite likelihood inference and model selection. *Biometrika*, 92:519–528, 2005.
- [82] Y. Wang and S.A. Stoev. Conditional sampling for spectrally discrete max-stable random fields. *Advances in Applied Probability*, 43(2):463–481, 2011.