Tesis

Presentada el 1 de Abril de 2016

Universidad de La República, UdelaR

TESIS DE MAESTRÍA EN INGENIERÍA MATEMÁTICA

de

María SARAVIA SALARI

Instituto : Laboratorio de Probabilidad y Estadística - IMERL
Universidad :
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA

Título de la Tesis :

Diámetro Confiabilidad: Optimización y Complejidad Computacional

Comité:

Dr. Ing. Franco	ROBLEDO	Tutor
Dr. Ing. Pablo	ROMERO	Tutor
Dr. Ing. Antonio	MAUTTONE	Tribunal
Dr. Ing. Álvaro	PARDO	
Dr. Ing. Pablo	SARTOR	

Reconocimientos

Deseo expresar mi gratitud a mis tutores, los doctores Franco Robledo y Pablo Romero que desde el momento de la propuesta de esta tesis hasta el final, estuvieron siempre en contacto cada vez que lo necesité, a través de reuniones, correos y llamadas. Fueron mi principal apoyo y fuente de motivación en los momentos donde perdía de vista el objetivo.
Mi gratitud también a las doctoras María Inés Lorenzo y Milka Bengochea que me facilitaron horas libres de trabajo para poder culminar la escritura de esta tesis.
Agradezco a los integrantes del tribunal, los doctores Antonio Mauttone, Álvaro Pardo y Pablo Sartor por aceptar evaluar este trabajo.
Gracias a Denis Migov que muy amablemente me proporcionó artículos de su autoría.
A mi familia y amigos que también me supieron contener desde el cariño y con palabras de aliento.
Una mención especial a mi padre, Gabino Silveira, un sanducero que me crió como su hija y a quien le debo gran parte de mis logros.

Índice general

Resumen

En el contexto de redes, el principal objetivo es la optimización de costos, disponibilidad y robustez del servicio que se brinda a través de ellas. Naturalmente, con el desarrollo, surgen nuevas aplicaciones como son por ejemplo las llamadas por video y voz. Estas poseen la característica de ser sensibles a retardo. Es así que surge la necesidad de incorporar como factor restrictivo en el proceso de optimización la distancia existente entre los sitios que interesa comunicar entre sí, lo que se denomina diámetro de una red.
La medida de diámetro confiabilidad refleja la capacidad que tiene una red de permanecer operativa luego de que fallan alguno de sus enlaces.
En esta tesis se exponen algunos problemas reconocidos en el diseño topológico de redes, para cuyas soluciones factibles se evalúa la medida de diámetro confiabilidad.

Esta tesis ha dado como producto la siguiente publicación: Robledo, F., Romero, P., Saravia, M. "On the Interplay between Topological Network Design and Diameter Constrained Reliability." Proceedings of the 12th International Conference on Design of Reliable Communication Networks, 14-17 march, 2016. Paris, France. To Appear in IEEEXplore.

Parte I

INTRODUCCIÓN

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo en la forma de comunicación ha puesto de manifiesto la importancia que representa el correcto diseño y planificación de una infraestructura que sustente el servicio que se brinda a través de ella. En este contexto, el objetivo que se busca es minimizar los costos y garantizar la robustez de una red ante la falla de alguno de sus componentes. Estas características son indicadoras de conveniencia y calidad.
Una de las áreas de investigación en constante desarrollo es la confiabilidad de redes cuyo objeto de estudio es evaluar la probabilidad que tiene una red de permanecer operativa ante fallas de alguno de sus componentes.
La redes son representadas mediante grafos donde los nodos indican los sitios y las aristas los enlaces de la red. En esta tesis se aborda el problema de la diámetro confiabilidad de redes (DCR) donde se incorpora restricciones de distancia entre los nodos de interés, denominados terminales, suponiendo que las aristas fallan de forma independiente y al azar. Esta medida resulta de gran aplicación para determinados servicios donde el paso del tiempo o la distancia deterioran su calidad, como por ejemplo la comunicación por llamada de video y voz.
En esta tesis se evalúa la complejidad de la medida de diámetro confiabilidad para soluciones factibles de célebres problemas de optimización combinatoria. Esta tesis se organiza en tres partes cada una compuesta por sus correspondientes capítulos. La Parte I se destina a introducir conceptos relativos a teoría de grafos y complejidad computacional que comprenden los Capítulos 1 y 2 respectivamente. La Parte II, compuesta por los Capítulos 3 y 4, presenta el problema de interés a abordar en esta tesis, a saber, el cómputo de la diámetro confiabilidad y el problema emparentado que es la confiabilidad clásica de una red. Asimismo se evalúa la complejidad computacional de ambos problemas. Métodos de cálculo exacto exhaustivos y basados en mecanismos de reducción de grafos se exponen en el Capítulo 4. La Parte III contiene las principales contribuciones de esta tesis. En el Capítulo 5 se introducen los problemas fundacionales del diseño topológico de redes y la motivación real que derivó en importantes publicaciones. En el Capítulo 6 se demuestra la intratabilidad de la diámetro confiabilidad para redes 2-nodo conexas. El Capítulo 7 presenta el estudio de la DCR para soluciones factibles de algunos problemas de optimización combinatoria de gran relevancia en el diseño de redes robustas de área extendida (por ejemplo, redes de fibra óptica). Las conclusiones se encuentran en el Capítulo 8.

Capítulo 2

Conceptos preliminares

Este capítulo está destinado a la definición de conceptos necesarios para introducir el problema de interés abordado en esta tesis. En la Sección 2.1 se establecen conceptos básicos enmarcados en Teoría de Grafos [12] y en la Sección 2.2 se realiza un breve resumen referente a la Teoría Computacional.

2.1. Teoría de Grafos

El origen de la teoría de grafos se ubica en el siglo XVIII gracias a los resultados obtenidos por Leonhard Euler en su trabajo conocido como "El problema de los puentes de Königsberg"[19]. La idea era determinar un camino que recorriese todos los puentes sin visitar más de una vez por cada uno. Euler sustituyó cada una de las regiones por un punto y cada uno de los puentes por una línea resultando en una figura denominada grafo. Así demostró que el problema en cuestión es irresoluble.
Se define formalmente un grafo como el par (V, E), y en general se denota $G = (V, E)$, con $V \neq \emptyset$ el conjunto de nodos (o vértices) y $E \subseteq V \times V$ el conjunto de aristas (o enlaces). El número de elementos o cardinalidad de estos dos conjuntos lo representaremos como $n = |V|$ y $m = |E|$. Dado dos nodos arbitrarios u y v de G, la arista entre ambos (si existe) la denotaremos uv o e_{uv}. Si para todo par de nodos u y v las aristas uv y vu están en E entonces G es un grafo no dirigido. Un lazo (o loop en inglés) es una arista que conecta a un vértice consigo mismo. Si un grafo no contiene lazos entonces es simple.
El orden es la cantidad de nodos de un grafo, y el tamaño la cantidad de aristas. Esto implica que G es de orden finito si $|V|$ es finito. Dado el grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subseteq V$ y $E' \subseteq E$, entonces G' es un subgrafo de G, y se expresa $G' \subseteq G$. Si $G' = (V', E \cap V' \times V)$ entonces G' es subgrafo inducido de G. Al grafo resultante de sustraer un subconjunto $U \subseteq V$ de nodos lo denotaremos $G \setminus U$ y si $U = \{v\}$ un único nodo denotaremos $G \setminus \{v\}$. La notación en el caso de sustraer aristas del grafo es $G - F = (V, E \setminus F)$ con $F \subseteq V \times V$ y en caso de incorporar aristas es $G + F = (V, E \cup F)$. Dos nodos u y v son adyacentes si $uv \in E$. Un camino es una secuencia $v_1, v_2, \ldots, v_r$ de vértices adyacentes, es decir, tales que $v_i v_{i+1} \in E$. Un camino es simple si no repite nodos. Un grafo P_n es un camino elemental si todo él es un camino simple.

Definición 2.1.1 *Un grafo es planar si puede ser dibujado en el plano sin que ninguna de sus aristas se cruce excepto en sus extremos.*

A las regiones delimitadas por aristas de un grafo plano se les llama caras. Además todo grafo plano tiene una cara no acotada denominada *cara exterior*.

Definición 2.1.2 *Dado un grafo $G = (V, E)$ y un vértice $i \in V$, el grado de i es el número de aristas incidentes a él y se denota $d(i)$.*

Definición 2.1.3 *La distancia entre dos nodos u y v, $d(u, v)$, es el largo del camino más corto que los comunica.*

Definición 2.1.4 *El diámetro, d, de un grafo es el máximo de las distancias entre todo par de nodos del grafo.*

Definición 2.1.5 *Decimos que u alcanza a v si existe un camino que inicia en u y termina en v.*

En un grafo simple, la relación es de equivalencia. Las clases de equivalencia de la relación de alcanzabilidad se llaman componentes conexas.

Definición 2.1.6 *Dado un camino simple $P = x_0x_1...x_n$, si $n \geq 2$, entonces $C = P + x_nx_0$ es un ciclo.*

Definición 2.1.7 *Un grafo G es conexo si todo par de vértices admite un camino que los comunica.*

Definición 2.1.8 *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple. Un punto de articulación es un vértice tal que al eliminarlo el grafo resultante aumenta el número de componentes conexas.*

En particular, un grafo $G = (V, E)$ es 2-nodo conexo si es conexo y no presenta puntos de articulación.

Definición 2.1.9 *Dado $G = (V, E)$, G es k-nodo-conexo si $|V| > k$ y $G \setminus X$ es conexo para todo $X \subseteq V$ con $|X| < k$.*

A partir de la definición anterior se desprende que un grafo es 2-nodo conexo si no presenta puntos de articulación.

Definición 2.1.10 *Dado $G = (V, E)$, con $n = |V|$ y $|m| = E$, su rango es $r(G) = n - c$ y su co-rango es $c(G) = m - n + c$.*

En la definición anterior c indica el número de componentes conexas en G. Un grafo conexo cumple que $c = 1$, entonces $c(G) = m - n + 1$.

Definición 2.1.11 *Un grafo $G = (V, E)$ es bipartito si V admite una partición en dos clases, tal que cada arista comienza en una clase y termina en la otra.*

Definición 2.1.12 *Un grafo $G = (V, E)$ es completo si $\forall\ u, v \in V$, $u \neq v$ se cumple que $e_{uv} \in E$ y se denota $K_{|V|}$.*

Otro concepto fundamental es el de grafo aleatorio. El modelo mas comúnmente utilizado es el propuesto por Gilbert, que se denota $G(n, p)$, en el cual cada arista entre todo par de nodos ocurre con probabilidad independiente p, con $0 \leq p \leq 1$.
Por ejemplo dado un grafo aleatorio $G = (V, E)$, un subconjunto de nodos $K \subseteq V$ denominados terminales, y d un entero positivo que define una restricción de distancia entre todo par de K, la medida diámetro confiabilidad (DCR en inglés) K terminal indica la probabilidad de que los nodos terminales estén comunicados por caminos de largo d o menos, suponiendo que los enlaces fallan de manera independiente al azar y los nodos son perfectos (no fallan). En el capítulo II se formaliza el concepto de medida de confiabilidad clásica y diámetro confiabilidad. El objetivo de esta tesis radica en evaluar la complejidad de la DCR de ciertas topologías de grafos derivadas de célebres problemas de optimización combinatoria.

Definición 2.1.13 *Se define grafo aleatorio a la terna $G = (V, E, \vec{q})$ con $q_i \in [0, 1]$ para todo $i \in E \cup V$.*

Puesto que se asumen nodos perfectos, $\vec{q}$ será al vector de probabilidades de falla de las aristas del grafo aleatorio.

Existen métodos exactos y aproximados para el cálculo de la confiabilidad de un grafo. Algunas técnicas comprendidas en dichos métodos consisten en procedimientos de reducción de grafos para disminuir el número de operaciones a realizar. Lo cual se logra a través de la eliminación de elementos redundantes con el objetivo de simplificar la topología.

Definición 2.1.14 (Contracción de una arista) *Dado un grafo $G = (V, E)$ y la arista contraída es $e \in E$, $e = (x, y)$, el grafo contraído, que notaremos G_e, viene dado por $G_e = (V', E')$, donde $V' = V \setminus \{x\}$ y $E' = E - \{\{v, x\}, v \in V\} \cup \{\{v, y\} : e_{vx} \in E\}$.*

2.2. Complejidad Computacional

La Teoría de la complejidad computacional permite clasificar a los problemas computacionales de acuerdo a su dificultad "inherente", entendiéndose esto como la magnitud de recursos (tiempo y memoria) necesarios para su resolución. Un problema se compone de una serie de parámetros de entrada y una salida o solución que cumple ciertas propiedades deseadas y la serie de pasos definidos para su resolución se conoce como algoritmo.
En general la eficiencia de un algoritmo se establece de acuerdo a los requerimientos computacionales necesarios para su implementación siendo el principal indicador de eficiencia el tiempo de ejecución. Para comparar la complejidad de dos algoritmos resulta necesario definir una función, digamos, $f(n)$ donde n representa el largo de la configuración de entrada. Esta función indica el número de operaciones que requiere la ejecución de un algoritmo. La función $f(n)$ es de orden $O(g(n))$ si existe M, constante, tal que $f(n) \leq Mg(n)$. Entonces el tiempo de ejecución se expresa como función del tamaño de la

entrada del problema, $O(g(n))$ y se conoce como función de complejidad, donde n indica el largo de la entrada. En base a lo anterior surge la distinción entre algoritmos de tiempo polinomial y algoritmos de tiempo exponencial [18]. Un algoritmo polinomial es aquel cuya función de complejidad queda acotada superiormente por una función polinómica del largo de la entrada, $O(p(n))$. Un problema es intratable si es tan difícil que se requiere de un algoritmo exponencial para resolverlo [18].

Los primeros resultados sobre intratabilidad se atribuyen a Alan Turing quien en 1936 en su célebre artículo "On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungs Problem" [46] demostró que ciertos problemas son tan duros que son "indecidibles". Para ello definió un dispositivo de cómputo universal (máquina de Turing) capaz de brindar la solución de cualquier problema siempre que la misma sea computable. Todo problema que no es resoluble por este dispositivo no es resoluble por ningún otro. El problema puntual para el cual el autor demostró su intratabilidad se conoce como "The Halting Problem" (el problema de la parada). Este consiste determinar si dada una máquina de Turing y una serie de parámetros de entrada, la máquina termina (o para), en un número finito de operaciones, por lo tanto se espera que retorne "si" o "no" en tiempo finito.

Como mencionamos al comienzo existen distintas clases de problemas de acuerdo a su complejidad. Para los problemas de decisión, el objetivo es determinar si la configuración de entrada satisface cierta propiedad, es decir que se busca una respuesta del tipo *Sí/NO*. La clase $\mathcal{P}$ se compone por aquellos problemas de decisión para los cuales existe un algoritmo capaz de encontrar soluciones en tiempo polinomial. Un problema de decisión es de la clase $\mathcal{NP}$ si existe un algoritmo capaz de verificar una solución (dada por un oráculo externo) en tiempo polinomial [37]. Se desprende de esto que si un problema puede resolverse en tiempo polinomial, la solución también puede verificarse en tiempo polinomial, es decir $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{NP}$. Se sospecha que $\mathcal{P} \not\supseteq \mathcal{NP}$ pero no existe a la fecha un prueba formal al respecto. En efecto $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$ es el problema abierto mas importante. Un problema H se dice $\mathcal{NP}$-Difícil si todo otro problema de la clase $\mathcal{NP}$ admite una reducción polinómica al primero. Si además H pertenece a $\mathcal{NP}$, entonces es $\mathcal{NP}$-Completo. Se desprende que un problema de la clase $\mathcal{NP}$-Completo es resoluble en tiempo polinomial si y solo si se cumple $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

Otra clase de complejidad de interés es la que involucra problemas de conteo. Un problema se dice de conteo si su solución es un entero no negativo. Cada problema de conteo tiene un problema de decisión asociado. Un ejemplo es el conteo de árboles de cubrimiento de un grafo no dirigido y el correspondiente problema de decisión es determinar si cada subgrafo es un árbol de cubrimiento. Para la clase de problemas de decisión en $\mathcal{NP}$ se define la clase $\#\mathcal{P}$ [47] para los problemas de conteo o enumeración asociados. De manera análoga $\#\mathcal{P}$-Completo refiere a esos problemas de conteo cuyos problemas de decisión subyacente son de la clase $\mathcal{NP}$-Completo.

Parte II

ESTADO DEL ARTE

Capítulo 3

Problema y Complejidad Computacional

3.1. Sistema Binario Estocástico

En su trabajo publicado en 1986 [4], Michael Ball resume los principales resultados sobre la complejidad computacional de la confiabilidad en redes. Allí parte del concepto general de *Sistema Binario Estocástico* (SBE) que representa un sistema en el que la probabilidad de falla (operación) de cada una de sus componentes determina la probabilidad de falla (operación) del sistema. Sea T el conjunto de componentes con $|T| = m$, cada componente tiene dos posibles estados, 1 si se encuentra operativo y 0 si no. Se define el vector de estados de las componentes del sistema $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \{0,1\}^m$ y una función $\phi : \{0,1\}^m \to \{0,1\}$ tal que:

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si el sistema se encuentra operativo para la configuración } x \\ 0 & \text{si el sistema se encuentra en falla para la configuración } x \end{cases}$$

El SBE es coherente (SBEC) si cumple:

1. $\phi(\mathbf{0}) = 0$
2. $\phi(T) = 1$
3. $\forall\, x \leq y$ se cumple $\phi(x) \leq \phi(y)$

La Condición 1 implica que el sistema está en falla si todas sus componentes los están, la Condición 2 indica que si todas las componentes están operativas, el sistema está operativo. Finalmente la Condición 3 implica monotonía, es decir si $x_i \leq y_i \; \forall\, i \in T$ entonces $x \leq y$ y por lo tanto se cumple $\phi(x) \leq \phi(y)$.

En un SBEC, un conjunto de componentes P es un *pathset* si al funcionar todos garantizan que $\phi(x) = 1$. Un conjunto de componentes S es un *cutset* si el estado del sistema es de falla cuando todos los componentes de S fallan. Un *minpath* es un estado operativo minimal por inclusión. En otras palabras, es un conjunto de operación de modo que si falla

algún componente operativo, el sistema torna al estado de falla. Análogamente, un *mincut* es un conjunto de corte minimal. Si suponemos que las componentes fallan independientemente con probabilidad $q = (q_1, q_2, ..., q_m)$ siendo $\{q_i\}_{i \in T}$ la probabilidad de falla de la componente i-ésima del sistema y $0 \leq q_i \leq 1$ definiendo entonces la probabilidad de operación como $p_i = 1 - q_i$, entonces podemos definir la variable aleatoria vector de estados del sistema $X = (X_1, X_2, ..., X_m)$ tal que $\{X_i\}_{i \in T}$ tiene distribución Bernoulli y $P(X_i = 1) = p_i$. A partir de lo anteriormente expuesto se define la confiabilidad del SBEC como $r(q) = P(\phi(X) = 1)$.

En su artículo Ball expone tres clases de problemas de análisis de la confiabilidad [4]:

1. **Estimación puntual de la confiabilidad**

   Entrada: (T, ϕ), ϵ, y $\{q_i\}_{i \in T}$, con $0 < \epsilon < 1$, y $0 \leq q_i \leq 1 \; \forall \; i \in T$.

   Salida: r_{est}, donde $r(q)(1 - \epsilon) < r_{est} < r(q)(1 + \epsilon)$.

2. **Análisis de la confiabilidad racional**

   Entrada: (T, ϕ, q) donde q es un vector de probabilidades racionales.

   Salida: $r(q)$

3. **Análisis funcional de la confiabilidad**

   Entrada: (T, ϕ).

   Salida: f_i para $i = 0, 1, ..., m$, con f_i entero positivo y $r(q) = \sum_{i=1}^{m} f_i q^i p^{m-i}$

El último problema es menos general que los dos anteriores pues asume igualdad de probabilidades de falla de las componentes del sistema, q. Sin embargo una vez que se obtiene el vector f la confiabilidad se determina completamente.

A través del siguiente teorema, Ball estableció las condiciones suficientes para determinar la intratabilidad de la confiabilidad de un SBEC:

Teorema 3.1.1 *Dado un SBEC si cualquiera de las 5 condiciones se cumple, entonces las tres clases de análisis de la confiabilidad son $\mathcal{NP}$-Difícil.*

1. El problema de reconocimiento del pathset de mínimo cardinal es $\mathcal{NP}$-Completo,
2. El problema de reconocimiento del cutset de mínimo cardinal es $\mathcal{NP}$-Completo,
3. El problema de conteo de pathsets de mínimo cardinal es #$\mathcal{P}$-Completo,
4. El problema de conteo de cutsets de mínimo cardinal es #$\mathcal{P}$-Completo,
5. El problema de determinar el vector f de la confiabilidad polinomial es #$\mathcal{P}$-Completo.

El problema de la confiabilidad clásica y diámetro acotada en el contexto de redes (abreviadas CLR y DCR respectivamente por sus siglas en inglés) son ejemplos de sistemas binarios estocásticos coherentes. Estos sistemas se representan mediante un grafo aleatorio $G = (V, E)$ no dirigido en el cual los nodos son perfectos y las aristas son las componentes que fallan al azar con probabilidad q y operan con probabilidad $p = 1 - q$, uniforme, i.e. $p_e = p \; \forall \; e \in E$. En el caso de la DCR se incorpora además la restricción de distancia entre nodos. La expresión polinómica de la CLR y DCR, $R_G(p)$ y $R^d_G(q)$ respectivamente se presentan a continuación.

$$R_G(p) = \sum_{i=0}^{|E|} F_i q^i p^{|E|-i} \tag{3.1}$$

Donde F_i es el número de configuraciones operativas cuando fallan exactamente i-aristas.

$$R^d_G(p) = \sum_{i=0}^{|E|} F^d_i q^i p^{|E|-i} \tag{3.2}$$

Donde F^d_i es el número de configuraciones operativas que satisfacen la restricción de diámetro cuando fallan exactamente i aristas.

3.2. El problema de la Confiabilidad Clásica, CLR

En el problema clásico se desea calcular la probabilidad de correcta comunicación de un conjunto distinguido de terminales, donde las aristas pueden fallar. Este concepto se puede capturar mediante un sistema binario estocástico. En efecto, considérese como entradas un grafo simple $G = (V, E)$ y un conjunto terminal $K \subseteq V$. Suponemos que en dicho sistema los nodos son perfectos (no fallan) y las aristas operan de forma independiente con probabilidad p cada una de ellas. Se define el vector aleatorio $X = (X_1, ..., X_m)$ de estados de cada arista y el estado de la red se define mediante una variable binaria $\phi : \{0, 1\}^m \to \{0, 1\}$ tal que la función $\phi(x) = 1$ si en el sub-grafo H de aristas $E' = \{e_i : x_i = 1, i = 1...m\}$ se encuentran conectados todo par de K. Por lo tanto $\phi(X)$ es una variable aleatoria Bernoulli con probabilidad de éxito $P(\phi(X) = 1)$. Esta probabilidad es lo que se define como *confiabilidad clásica* y se denota como $R_{K,G}(p)$, los tres casos de estudio según el número de terminales k son: $k = |V|$ conocida como confiabilidad *all terminal*, $k = 2$ confiabilidad *source terminal* y $k = |K|$ confiabilidad *k terminal*.

En base al Teorema 3.1.1 Michael Ball demostró que la complejidad de la CLR en sus tres versiones es $\mathcal{NP}$-Difícil. A continuación daremos una idea de la demostración (se invita al lector consultar [4] por más detalles).

3.2.1. Confiabilidad *k terminal*

Para este caso la Condición 1 se traduce en el problema de encontrar el árbol de mínima cardinalidad que cubre el conjunto K de terminales que equivale al problema de encontrar el árbol de Steiner de cardinalidad mínima. El reconocimiento de dicho problema es de la clase

$\mathcal{NP}$-Completo [21], por lo tanto se satisface la Condición 1 del teorema y se concluye que la confiabilidad de este caso es $\mathcal{NP}$-Difícil. Rosenthal [40] fue el primero en demostrar que el problema de la confiabilidad clásica es $\mathcal{NP}$-Difícil.

3.2.2. Confiabilidad *two terminal*, $k = 2$

En este problema el conjunto de nodos terminales se define como $K = \{s, t\}$. La Condición 1 del teorema equivale a encontrar el camino más corto entre s y t para lo cual existe un amplio número de algoritmos que realizan esta tarea en tiempo polinomial, como por ejemplo el algoritmo de Dijkstra [29]. La Condición 2 equivale a encontrar un corte $(s - t)$ de mínima cardinalidad, lo cual puede realizarse en tiempo polinomial utilizando técnicas de flujo en redes (ver [14] y [17]). La Condición 3 equivale al problema de contar caminos más cortos entre s y t, que Ball y Provan ([5]) demostraron que puede realizarse en tiempo polinomial gracias a una extensión del algoritmo *Breadth Fist Search* (BFS). La Condición 4 corresponde a contar el número de cortes $(s - t)$ de cardinalidad mínima. En este caso Provan y Ball demostraron que dicho problema de conteo tiene complejidad #$\mathcal{P}$-Completo. Si bien las condiciones 1 a 3 del teorema no se cumplen, se cumple la Condición 4 por lo cual es suficiente para concluir que el problema 2-terminal es $\mathcal{NP}$-Difícil.

3.2.3. Confiabilidad *all terminal*, $k = |V|$

En este problema todos los nodos son terminales, $K = V$. La Condición 1 corresponde a encontrar el árbol de cubrimiento de mínima cardinalidad, cada uno de estos árboles tiene cardinalidad $|V| - 1$, y el reconocimiento del árbol de mínima cardinalidad puede realizarse en tiempo polinomial. La Condición 2 corresponde a hallar el corte de mínima cardinalidad, que se define como el mínimo conjunto de arcos que corta cada árbol de cubrimiento. Este problema puede resolverse en tiempo polinomial utilizando teoría de ramificaciones, desarrollado por Edmonds en 1972 [13]. La Condición 3 que corresponde al conteo de árboles de cubrimiento de cardinalidad mínima es también un problema que puede resolverse en tiempo polinomial gracias al resultado obtenido por Kirchoff que derivó en el teorema matriz-árbol, en donde se prueba que el menor principal cualquiera de la matriz Laplaciana es igual al número de árboles de cubrimiento (ver [22]). La Condición 4 consiste en determinar la cantidad de cortes de mínima cardinalidad. Provan y Ball ([33]) mostraron que el problema de conteo de cortes $s - t$ de mínima cardinalidad para el caso 2-terminal puede reducirse al problema del conteo de cortes de mínima cardinalidad para el caso all terminal, por lo tanto este último es también #$\mathcal{P}$-Completo. Con esto se cumple la Condición 4 y se concluye que el problema de la confiabilidad all terminal pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil.

3.3. El problema de la Diámetro Confiabilidad, DCR

La medida de Diámetro Confiabilidad, DCR, es una extensión de la CLR con una restricción adicional d, entero positivo, denominada restricción de diámetro. La idea en este

contexto es encontrar $G' = (V, E') \subseteq G$ tal que G' sea d-K- conexo y esto ocurre si $d_{G'}(u, v) \leq d, \forall\, u, v \in K$ donde $d_{G'}(u, v)$ es la distancia entre los nodos u y v en el grafo G'. El problema fue introducido en el año 2001 por los autores Louis Petingi y José Rodríguez en el contexto de infraestructuras de Internet [31]. Cuantifica la probabilidad de que todo par de terminales se encuentren conectados (exista algún camino entre ellos) por caminos de largo a lo sumo d. A esta probabilidad se le denomina diámetro confiabilidad de una red y se denota $R^d_{K,G}(p)$.

En la Sección 3.2 hemos visto que la medida clásica de confiabilidad es un problema que pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil. Esto permite una valoración de la complejidad de la DCR, pues el problema clásico es un caso particular de DCR con $d = n - 1$. Luego por inclusión el cálculo exacto de la DCR también pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil.

Existen en la bibliografía resultados obtenidos para algunos sub-problemas de DCR, de acuerdo al número de nodos terminales $k = |K|$ y del diámetro d (ver por ejemplo [8]).

3.3.1. Fórmula exacta para el caso $d = 1$

Todos los terminales deben tener una conexión directa. Por lo cual el subgrafo inducido por K debe ser entonces un K-clique donde todos sus enlaces se encuentran operacionales:

$$R^1_{K,G} = \prod_{\{u,v\} \in K} p(u, v) \tag{3.3}$$

donde $p(u, v)$ es la probabilidad de que la arista $(u, v) \in E$ y $p(u, v) = 0$ si $(u, v) \notin E$.

3.3.2. Fórmula exacta para el caso $k = d = 2$

Dado el conjunto $K = \{s, t\}$ de terminales. En este escenario dichos nodos deben tener un enlace directo, o un nodo intermedio que los comunica. Si utilizamos el complemento de la confiabilidad, es decir si falla el enlace directo y todos los caminos de largo 2 entre s y t, la fórmula de la confiabilidad para este caso queda:

$$R^2_{\{s,t\},G} = 1 - (1 - p(s, t)) \prod_{w \in V \setminus \{s,t\}} (1 - p(s, w)p(w, t)) \tag{3.4}$$

Este problema puede evaluarse en tiempo lineal en el número de nodos de la red.

3.3.3. Caso $d \geq 3$ y $k \geq 2$, fijo

A diferencia del caso anterior no resulta sencillo generalizar la fórmula de la DCR para otros valores de d y K. Cancela y Petingi demostraron que este sub-problema de la DCR pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil [11]. La prueba se basa en el hecho que contar cubrimiento

por vértices de grafos bipartitos es un problema #$\mathcal{P}$-Completo [5]. Luego se observa que cada cubrimiento de bipartitos induce un corte de la red y recíprocamente.

Inspirados en la demostración de Cancela y Petingi [11], Eduardo Canale *et al.* prueban que el cómputo de la DCR pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil para el escenario all terminal ($k = n$) y $d \geq 2$. La demostración se realiza en partes, en primer lugar desarrollan la intratabilidad de DCR cuando $d \geq 3$ y luego la intratabilidad de $d = 2$ [8].

3.3.4. Caso $d = 2$ y k fijo

Este sub-problema de la DCR tiene cómputo polinomial. Pablo Sartor presenta una demostración recursiva [43], mientras que Eduardo Canale *et al.* brinda una expresión explicita para la $R^2_{K,G}$ [9].

En el Cuadro 3.1 se resumen los resultados anteriormente mencionados.

d \ K	2	3...	$\|K\| = n$ o libre
2	$\mathcal{P}$ [11]	$\mathcal{P}$ [9]	$\mathcal{NP}$-Difícil [8]
3 ⋮ n - 2	$\mathcal{NP}$-Difícil [11]		$\mathcal{NP}$-Difícil [8]
n - 1 ⋮	$\mathcal{NP}$-Difícil [33]		$\mathcal{NP}$-Difícil [33]

Cuadro 3.1: Complejidad de la DCR según valores de diámetro d y número de terminales $|K|$.

Capítulo 4

Métodos de Cálculo Exacto

Hemos visto que el cómputo de la confiabilidad, tanto clásica como diámetro acotada pertenece a la clase de complejidad $\mathcal{NP}$-Difícil excepto para algunos sub-problemas. En este apartado se recopilan métodos de cálculo exacto de tiempo de ejecución exponencial y polinomial para obtener la medida de confiabilidad. En el caso de los métodos exponenciales, citamos los trabajos de Trivedi *et al.* [34] y Rubino [41], donde se realiza una clasificación de métodos exactos y se recopila una rica cantidad de métodos disponibles en la literatura. Se distinguen entre aquellos basados en enumeración de conjuntos, que en el contexto de redes están dados por *minpaths* o *mincuts*, y los que se basan en mecanismo de reducción de grafos. Dentro de los que pertenecen a la primera categoría mencionaremos: *fuerza bruta*, *inclusión-exclusión* y *suma de productos disjuntos* (SDP) siguiendo la clasificación propuesta por Trivedi *et al.* [34]. En la segunda categoría expondremos el método de factorización basado en el estado de una arista y en técnicas de reducción. Dentro de los métodos polinomiales se definen ciertas clases de grafos que admiten tiempo de cómputo polinomial de la DCR [7]. Entre los que cumplen esta última característica se encuentran grafos débiles, con co-rango acotado y en particular los grafos de Monma, de gran relevancia en el diseño de redes robustas. Adicionalmente se incorpora un algoritmo para el cómputo de la DCR de un grafo de Monma con k nodos terminales.

4.1. Métodos exponenciales

Fuerza Bruta

Sea $G = (V, E)$ un grafo aleatorio, donde las aristas fallan al azar con probabilidad independiente y los nodos son perfectos. El método de fuerza bruta consiste en enumerar el espacio de estados de G. El cálculo de la confiabilidad consiste en la suma de la probabilidad de ocurrencia de cada configuración operativa. La medida de diámetro confiabilidad puede expresarse como en la siguiente ecuación:

$$R(G) = \sum_{G_i \subseteq G} P(G_i) \tag{4.1}$$

donde G_i indica una configuración operativa de G. En el caso de la DCR *k terminal* una configuración operativa sería un subgrafo de G d-K-conexo. Si bien se trata de una técnica básica, el costo computacional requerido para su implementación crece exponencialmente con el tamaño de la red, pues el espacio de vectores de estado contiene $2^{|E|}$ elementos y con esto la aplicación del método solo es eficiente para grafos pequeños.

Método de Inclusión-Exclusión

Este método se basa en el principio de inclusión-exclusión y es aplicable tanto para minpaths o mincuts.
Dado $\{P_1, ..., P_{MP}\}$ como el conjunto de minpaths de G, P_m es el evento "todas las aristas de P_i están operativas" y $Pr(P_i)$ la probabilidad del evento P_i. La confiabilidad es la probabilidad de que al menos un evento P_i ocurra con $i = 1, ..., MP$. Dado que los eventos P_i no son disjuntos la expresión para el cálculo de la confiabilidad queda:

$$R(G) = \sum_{j=1}^{MP} \left((-1)^{j+1} \sum_{I \subseteq \{1...MP\}, |I|=j} Pr(P_I) \right) \tag{4.2}$$

donde $P_I = \cap_{i \in I} P_i$. Este método también puede ser exponencial, por ejemplo Cayley demostró que el número de árboles de cubrimiento para un grafo completo de n vértices es n^{n-2}.

Método de Satyanarayana-Prabhakar

Este método propone una fórmula basada en conceptos de dominancia [44], que permite reducir el esfuerzo computacional respecto al de inclusión-exclusión. Algunos conceptos que emplea se exponen a continuación:

Definición 4.1.1 *Una i-formación de un grafo G es un conjunto de i minpaths cuya unión es el grafo. Si i es par (impar) la formación es par (impar).*

Definición 4.1.2 *Se define signed domination de G como el número de formaciones pares de G menos el número de formaciones impares de G y se denota $sdom(G)$.*

La idea es que una formación par contribuye positivamente a la confiabilidad mientras que una impar contribuye negativamente. Con base en estas definiciones la expresión de la confiabilidad queda:

$$R = \sum_{H \subseteq G} sdom(H) P(H) \tag{4.3}$$

donde H varía en todos los vectores de estado de G y $P(H)$ es la probabilidad de ocurrencia de H. En lugar de la enumeración completa de configuraciones de la red se requiere el cálculo de *signed domination* de cada estado de la red.

Método de Suma de Productos Disjuntos

Esta técnica implementada por S. Ahmad [2] se basa en la obtención de eventos mutuamente disjuntos de tal modo que la confiabilidad de una red puede obtenerse de la suma de probabilidades de estos eventos. Si r_i es la probabilidad de operación de la arista i, entonces la confiabilidad queda:

$$R = \prod_{i \in I} r_i \prod_{h=1}^{H} (1 - \prod_{j \in J_h} r_j) \tag{4.4}$$

donde I, $J_1, J_2, ...$ son conjuntos disjuntos de aristas.

Método de Factorización

En su trabajo de 1958, [30] Fred Moskowitz investiga las propiedades topológicas de una red, representada por el grafo $G = (V, E)$, con la finalidad de establecer ciertas relaciones en el cálculo de la confiabilidad. Este método ofrece la alternativa de reducir el grafo original a subgrafos mas pequeños, en donde el cálculo de la confiabilidad se vuelve un problema trivial. Para ello emplea técnicas tales como, reducciones en serie, reducciones en paralelo, contracción de aristas y eliminación de aristas irrelevantes. En el trabajo citado el autor asume probabilidades independientes de operación de las componentes, que en el contexto de confiabilidad en redes, corresponde a la probabilidad de operación de una arista $e \in E$, que denotaremos r. Sin embargo este método es válido para el caso de probabilidades de operación heterogéneas.

Moskowitz establece en el siguiente teorema una relación recursiva de la confiabilidad:

$$R_K(G) = r_e \cdot R_{K'}(G_e) + (1 - r_e) \cdot R_K(G \setminus e) \tag{4.5}$$

Dado que es un proceso recursivo y que el número de subgrafos de un grafo G es exponencial con la cantidad de nodos de G, este método puede requerir tiempo de cómputo exponencial en grafos de gran tamaño.

Para el cálculo de la DCR la fórmula queda:

$$R^d_K(G) = r_e \cdot R^d_{K'}(G_e) + (1 - r_e) \cdot R^d_K(G \setminus e) \tag{4.6}$$

En este último caso se debe tener especial cuidado pues las técnicas de reducción de grafos modifican la distancia original del grafo y por consiguiente el diámetro d.

4.2. Métodos polinomiales

Existen métodos polinomiales para determinar la DCR de grafos especiales entre los que se encuentran: caminos, ciclos, escaleras, escaleras generalizadas, *abanicos españoles* [43] y grafos débiles. En este apartado citamos una clase de grafos que admiten cómputo eficiente de la DCR denominados grafos débiles [8].

Definición 4.2.1 *Sea $G = (V, E)$ un grafo simple, $K \subseteq V$ y d un entero positivo. El grafo G es d-K-r débil si $G \setminus U$ es d-K disconexo, para cada $U \subseteq E$ con $|U| \geq r$.*

En síntesis la definición anterior establece que si una red se encuentra no operativa (i.e no es d-K conexa) cuando se remueven r aristas (arbitrarias) o más entonces la red es d-K-r-débil.

Teorema 4.2.2 *Sea $G = (V, E)$ un grafo d-K-r débil, para algún r independiente de n. Entonces, la DCR tiene cómputo polinomial en n.*

Prueba. Dada una configuración arbitraria $G' = (V, H) \subseteq G$ podemos decidir en tiempo polinomial si G' es d-K-conexo o no. Sea $\mathcal{O}^r$ el conjunto de todas las configuraciones (V, H) con $H \geq m - r$, donde $m = |E|$. Como G' es d-K-r débil, sumando las probabilidades de eventos disjuntos tenemos que:

$$R_K^d(G) = \sum_{G' \in \mathcal{O}^r} 1_{G' \in \mathcal{O}_D^K(G)} \prod_{e \in E(G')} p(e) \prod_{e \notin E(G')} (1 - p(e)), \tag{4.7}$$

donde 1_x es 1 si x es verdadero, de lo contrario $1_x = 0$. Es suficiente con probar que el número de términos en la suma es polinomial respecto a n.

$$|\mathcal{O}^r| = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{m}{m-i} \sim m^{r-1}, \tag{4.8}$$

donde $\sim$ indica que ambos términos son equivalentes cuando m tiende a infinito. Observar que $m < n^2$ se cumple para todo grafo conexo. Entonces $|\mathcal{O}^r| \sim m^{r-1} \leq n^{2r-2}$ polinomial en n. Entonces $R_K^d(G)$ puede encontrarse en tiempo polinomial.

QED

Corolario 4.2.3 *La DCR en grafos conexos G con co-rango libre de n, $c(G) = m + n - 1$, puede hallarse en tiempo polinomial*

Prueba. Sea el grafo simple $G = (V, E)$, con co-rango libre de n, $c(G)$, el conjunto de terminales $K \subseteq V$ y diámetro d. Si removemos $U \subseteq E$ tal que $|U| = c(G) + 1$, entonces el subgrafo resultante tiene menos aristas que un árbol, es decir $G - U$ es disconexo, y G is d-K-$(c(G) + 1)$ débil. Como $c(G) + 1$ es libre de n, aplica el Teorema 4.2.2, y la DCR puede encontrarse en tiempo polinomial en n.

QED

Del concepto de grafo débil se desprende como corolario la DCR para algunas familias de grafos entre las que encontramos: árbol, ciclo y grafos de Monma considerando $K = V$ caso all terminal.

- Árboles: Sea el árbol T con diámetro $d(T) \leq d$. Dado que T es 1-débil, entonces $R_{V,T}^d(p) = p^m$.

- Ciclos: Sea C un ciclo, se cumple que C es un grafo 2-débil, entonces $R^d_{V,C}(p) = p^m + m(1-p)p^{m-1}$.
- Monma: Sea M_{l_1,l_2,l_3} un grafo de Monma con l_1, l_2 y l_3 el número de aristas de cada camino independiente. Se cumple que un grafo de Monma es 3-débil, entonces $R^d_{V,M_{l_1,l_2,l_3}}(p) = p^m + m(1-p)p^{m-1} + \kappa(1-p)^2p^{m-2}$, con $\kappa = l_1l_2 + l_1l_3 + l_2l_3$ el número de árboles de cubrimiento en M_{l_1,l_2,l_3}.

En el Algoritmo 1 se define un algoritmo para el cálculo de la confiabilidad un grafo de Monma con $k = |K|$ terminales, $K \subseteq V$. En la Figura 4.1 se presenta distintas estructuras de Monma donde los nodos en blanco son nodos opcionales o de Steiner, l_1, l_2, y l_3 son tres caminos independientes que comunican los nodos u y v, nodos extremos del grafo de Monma.

Algoritmo 1 Calc_DCR_Monma_Graph

Input:
Grafo: G
Diámetro: d
Conjunto de terminales en cada camino independiente: K_1, K_2, K_3

Output:
Confiabilidad $R^d_K(G)$

1: $Factible = Fact\_DCR(G, d, K)$;
2: **if** $Factible$ **then**
3: $\hat{G} = SpReducible(G)$
4:

$$R^d_K(G) = P(\hat{G})1_{Fact\_DCR(\hat{G},d,K)} + \sum_{e\in\hat{G}} P(\hat{G}\setminus\{e\})1_{Fact\_DCR(\hat{G}\setminus\{e\},d,K)}$$
$$+$$
$$\sum_{i,j\in\{1,2,3\},i<j} \sum_{e_i\in\hat{l_i}} \sum_{e_j\in\hat{l_j}} P(\hat{G}\setminus\{e_i,e_j\})1_{Fact\_DCR(\hat{G}\setminus\{e_i,e_j\},d,K)}$$
$$+$$
$$P(\hat{G}\setminus\{e_1,e_2,e_3\} : \{e_i = (x,u), x\in K, u\notin K, j = 1,2,3, d(u) = 3\})1_{Fact\_DCR(\hat{G}\setminus\{e_1,e_2,e_3\},d,K)}$$
$$+$$
$$P(\hat{G}\setminus\{e_1,e_2,e_3\} : \{e_i = (x,v), x\in K, v\notin K, j = 1,2,3, d(v) = 3\})1_{Fact\_DCR(\hat{G}\setminus\{e_1,e_2,e_3\},d,K)}$$

5: **end if**

$Fact\_DCR(G, d, K)$ es una función lógica que verifica si el grafo de entrada cumple las condiciones de factibilidad. Para ello utiliza el algoritmo de Floyd [16] para computar los caminos más cortos entre todo par de nodos terminales y finalmente se impone una condición de verificación de diámetro, d, entre dichos nodos. Sobre el grafo G se aplica $SpReducible$ que realiza reducciones en serie y paralelo. En el último paso (línea 4 del Algoritmo 1) se calcula la confiabilidad del grafo teniendo en cuenta que para un grafo de Monma se puede

sacar hasta dos aristas de caminos independientes y en caso de que los nodos de grado tres sean no terminales se pueden extraer hasta tres aristas.

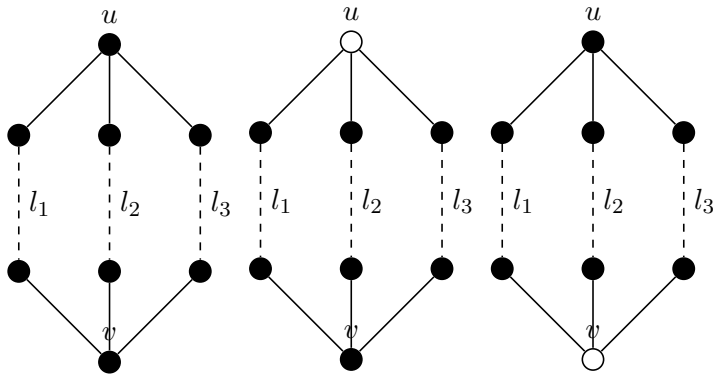

Figura 4.1: Estructura de Monma con $k = |K|$ nodos terminales.

Los grafos de Monma son de altísima relevancia en el diseño de redes robustas. En particular redes 2-conexas. Algunos de los resultados presentados por Monma *et al.* [28] son:

Teorema 4.2.4 *Para cualquier conjunto de nodos V con función de distancia $d(.)$ definida sobre $V \times V$, existe un grafo de costo mínimo $G = (V, E)$ satisfaciendo las siguientes condiciones:*

a) cada nodo en G tiene grado 2 o 3.

b) eliminando cualquier arista o par de aristas de G surge una arista puente en una de las componentes conexas resultantes.

Con $d(.)$, función de distancia que cumple:

1. $d(u, u) = 0$,
2. $d(u, v) \geq 0$,
3. $d(u, v) = d(v, u)$,
4. $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Teorema 4.2.5 *Sea $G = (V, E)$ un grafo el cual satisface las siguientes condiciones:*

a) G es 2-conexo.

b) Cada nodo de G tiene grado 2 o 3.

c) G es arista minimal, i.e., eliminando cualquier arista surge una arista puente.

d) Eliminando cualquier par de aristas de G surge un puente en una de las componentes conexas resultantes.

Entonces G es la única red de costo mínimo que cubre V para la función de distancia $d(.)$.

Corolario 4.2.6 *Cualquier grafo 2-conexo $G = (V, E)$ satisfaciendo las condiciones a) y b) del Teorema 4.2.4, y el cual no es un ciclo, contiene el grafo de la Figura 4.2 como un subgrafo nodo-inducido.*

Teorema 4.2.7 *Para cualquier conjunto de nodos V y función de distancia $d(.)$ se satisface:* $\left[\frac{d(C_{opt}(V))}{d(TC_{opt}(V))} \leq \frac{3}{4}\right]$
Además, esta cota puede ser aproximada arbitrariamente por la clase de grafos mostrada en la Figura 4.2 con $d(.)$ la función de distancia canónica.

Donde:

- $C_{opt}(V)$ denota el ciclo hamiltoniano de costo mínimo que cubre V.
- $TC_{opt}(V)$ denota la topología 2-conexa de costo mínimo cubriendo V.
- $d(C_{opt}(V))$ es el costo de $C_{opt}(V)$.
- $d(TC_{opt}(V))$ es el costo de $TC_{opt}(V)$.

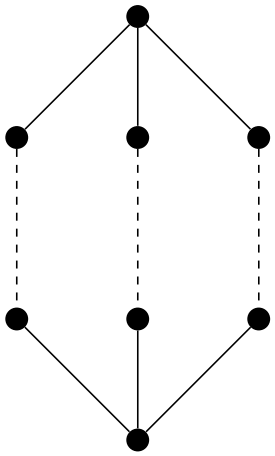

Figura 4.2: Grafo 2-conexo nodo inducido donde las líneas punteadas corresponden a caminos de una o mas aristas.

Conclusiones

El problema de la confiabilidad en redes ha sido abordado y resuelto por diversos métodos, tanto exactos como aproximados. Dentro de los métodos exactos, los basados en enumeración de conjuntos si bien son sencillos de implementar, su complejidad computacional crece exponencialmente con el tamaño de la red.

Dada la complejidad de cómputo de la confiabilidad, tanto clásica como diámetro acotada, se han destacado diversos trabajos de investigación que abordan estos problemas mediante métodos de simulación que generan soluciones aproximadas. El método de Monte Carlo Crudo [15] si bien es un método de sencilla implementación, en redes altamente confiables, i.e probabilidad de operación de los enlaces cercana a 1, tiene bajo desempeño en cuanto a precisión [42]. Para redes altamente densas se han desarrollado mecanismos de reducción de varianza. Entre los trabajos que abordan estas técnicas se destaca el método denominado Reducción Recursiva de Varianza, RVR por sus siglas en inglés, de los autores Héctor Cancela y Mohamed El Khadiri [10] e Importance Sampling [25]. El método RVR se basa en la identificación de una partición del espacio de estados del grafo, definida en función de un conjunto de corte, y aplica una relación recursiva. Los resultados indican que RVR tiene mejor desempeño que el método de Monte Carlo Crudo, pues las estimaciones realizadas son de menor varianza. El método Importance Sampling es una técnica de aplicación general que consiste en modificar la distribución de probabilidades utilizadas en el muestreo dando mayor probabilidad a la falla de la red. Esta técnica también logra disminuir la varianza del estimador de la confiabilidad respecto a Monte Carlo Crudo. Hasta el momento los métodos de cálculo exacto de la DCR, si bien han incorporado técnicas de reducción de grafo en pos de disminuir el número de operaciones, siguen siendo métodos exponenciales. Por otra parte se debe tener especial cuidado con los métodos de reducción de grafos en el caso de la DCR, pues estos modifican la distancia original del grafo y por consiguiente el diámetro d.

El cómputo de la DCR de una red es en general un problema $\mathcal{NP}$-Difícil, pues generaliza a la confiabilidad clásica, lo que implica que es al menos tan difícil como este último. Se han abordado distintos sub-problemas de la DCR y se ha evaluado su complejidad en términos de k y d. Cuando el diámetro vale 1 el problema es trivial. Para el caso $d = 2$ y k fijo el problema pertenece a la clase $\mathcal{P}$. Cuando $k = |K|$ y d es libre, dado que es el caso de la confiabilidad clásica, es un problema de la clase $\mathcal{NP}$-Difícil. Para el caso casos restantes ($d \geq 2$) la DCR también pertenece a esta última clase. El cómputo eficiente de la DCR es viable para ciertas clases de grafos como ser: grafos débiles, escaleras y abanicos.

Parte III

CONTRIBUCIONES

Capítulo 5

Problemas de optimización de redes robustas: motivación y evolución

La invención del telégrafo y principalmente el teléfono en el siglo XIX significaron una importante transformación de la comunicación a distancia. Con el paso del tiempo se han hecho avances al punto de crear mecanismos de comunicación instantánea y permanente a nivel mundial. Otro de los grandes logros es la comunicación *wireless* sobre todo en telefonía móvil. La primera generación, 1G, se sitúa a finales de los 70 del siglo XX que se caracterizó únicamente por la transmisión de voz con tecnología analógica. En la segunda generación, 2G, disponible desde la década de 1990, los usuarios por primera vez disponen de los mensajes de texto y el servicio prepago y además emplean tecnología digital. El avance sustancial viene con la tercera generación, 3G,que a diferencia de las anteriores permite la transmisión de datos como por ejemplo descarga de archivos e intercambio de correos electrónicos desde cualquier lugar y momento. A medida que los servicios de telecomunicación ganaron accesibilidad y comenzaron a expandirse se generó también una dependencia cada vez mayor de los usuarios. Es gracias a esto que el diseño topológico de redes cobró relevancia y surgieron incontables problemas con aplicación real. El objetivo de este capítulo es mencionar algunos ellos y su aplicación real.

Uno de los problemas fundacionales y de amplio estudio en el contexto de optimzación combinatoria es el Minimum Spanning Tree, MST. Publicado por primera vez en 1926 por Otakar Borůvka con el objetivo de construir una red eléctrica de costo mínimo. Para la resolución de este problema existen múltiples algoritmos de tiempo polinomial, y en las ultimas décadas incluso se han hecho avances para encontrar algoritmos de orden lineal (ver por ejemplo [20]). Entre los algoritmos clásicos se encuentran el de Kruskal [23] y Prim [32] de orden $\mathcal{O}(m \log n)$, siendo m y n la cantidad de aristas y nodos de la red respectivamente.

A partir del descubrimiento de la fibra óptica y sus bondades ante el cable de cobre se comienzan a analizar topologías de redes robustas ante fallas de alguno de sus componentes, pues dada la gran capacidad de transmisión que posee la fibra óptica, la falla de algún enlace ocasionaría una gran pérdida de información. A finales de los 80' surge el Generalized Steiner

Problem, GSP [38] [1]. Se trata de un problema de optimización combinatoria de una red donde para un subconjunto restringido de nodos (o aristas) se imponen requerimientos de conectividad. Casos especiales del GSP son el kNCON y el kECON [45]. En el primero se busca una red de mínimo costo que satisface requerimientos de nodo-conectividad, mientras que en el kECON el objetivo es una red de costo mínimo que satisface requerimientos de arista-conectividad. En 1990 Monma *et al.* [28] estudian el Minimum-Weight Two-Connected Spanning Problem, MWTCSP donde la matriz de costos cumple la desigualdad triangular. El objetivo es encontrar una red 2-nodo-conexa de costo mínimo. Como resultado obtienen que el mejor ciclo Hamiltoniano es a lo sumo 4/3 el costo de una solución óptima 2-nodo-conexa. Esto pone de manifiesto el hecho de que existen topologías óptimas 2-nodo-conexas además de los ciclos.

En el año 2004 y también en el contexto de redes de fibra óptica, Martine Labbé *et al.*. introduce el Ring Star Problem, RSP [24]. Los autores se inspiraron en el diseño de redes de telecomunicaciones donde el objetivo es conectar a los usuarios vía conexión simple a sitios concentradores que se interconectan y conforman una red backbone y estos a su vez se conectan al sitio central o fuente. Una propuesta eficiente, es que los concentradores se interconecten vía una topología de anillos, mientras que los usuarios se conectan a ellos mediante enlace simple, conformando así la topología de estrella-anillo.

Como generalización del RSP, en 2007 Baldacci *et al.* [3] proponen el Capacitated m Ring Star Problem, donde se consideran m estructuras de anillos que comparten únicamente el sitio central. Trabajos más recientes sustituyen las topologías de anillos por estructuras 2-nodo-conexas arbitrarias, en base a los resultados obtenidos por Monma *et al.* en 1990. Entre los trabajos al respecto se destacan el Capacitated m Two-Node Survivable Star Problem, CmTNSSP introducido por Gabriel Bayá *et al.* [26] y el Two-Node Connected Star Problem introducido por Rodrigo Recoba [35].

En el año 2001 los autores Louis Petingi y José Rodríguez introducen el concepto de diámetro confiabilidad en redes en el contexto de infraestructuras de Internet [31]. La idea es cuantificar la probabilidad de que todo par de nodos terminales de una red se encuentren conectados (exista algún camino entre ellos) y que la distancia entre ellos, dos a dos, sea a lo sumo d. A esta probabilidad se le denomina diámetro confiabilidad de una red. Esta medida ha ganado relevancia por su aplicabilidad a sistemas sensibles a la retardo como por ejemplo transmisión de voz en redes IP, o sobre el limite de saltos a los que un paquete puede ser sometido (redes P2P) [39] [7].

Capítulo 6

Complejidad de la DCR en redes 2-nodo conexas

Hasta el momento se ha presentado para algunos casos particulares la complejidad de la DCR. En este capítulo se exponen dos demostraciones de la intratabilidad del problema de la DCR para redes 2-nodo conexas: una para el caso source-terminal y otra para el caso all-terminal.

Definición 6.0.8 *Dado $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos simples, con $x \in V_1$ e $y \in V_2$. Si existen nodos x e y tal que $x = y$ en el grafo $G_1 \cup G_2$, entonces obtenemos el grafo unión $G = G_1 * G_2(x, y)$.*

Lema 6.0.9 *El grafo $G = G_1 * G_2(x, y)$ admite cómputo de la DCR en tiempo polinomial para d arbitrario y $K = \{s, t\}$, suponiendo que se cumple para G_1 y G_2.*

El autor D. A. Migov ofrece una formulación en [27]. El autor citado deduce que dado x punto de articulación si los dos terminales s y t pertenecen a la misma componente G_i, entonces $R^d_{K,G}(p) = R^d_{K,G_i}(p)$. Luego define $d_1 = d(s, x)$ en G_1 y $d_2 = d(x, t)$ en G_2 y llega a la siguiente expresión:

$$R^d_{\{s,t\},G}(p) = \sum_{i=d_1}^{d-d_2} R^{\bar{i}}_{\{s,x\},G_1}(p) R^{d-i}_{\{x,t\},G_2}(p) = \sum_{i=d_2}^{d-d_1} R^{d-i}_{\{s,x\},G_1}(p) R^{\bar{i}}_{\{x,t\},G_2}(p). \tag{6.1}$$

donde $R^{\bar{i}}_{\{s,x\},G_1}(p)$ corresponde a la confiabilidad de G_1 condicionado a que el camino mas corto entre s y x es de largo i. Idem para $R^{\bar{i}}_{\{x,t\},G_2}(p)$.

La expresión 6.1 es distinta de cero siempre que $d_1 + d_2 \leq d$.

Teorema 6.0.10 *El cómputo de la DCR para grafos 2-nodo conexos pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil para el caso source-terminal, i.e. $k = 2$.*

Prueba. Por reducción.
Utilizaremos el hecho de que el cómputo de la DCR pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil para el

caso source-terminal. Supongamos que existe un algoritmo polinomial $\mathcal{A}$ que dado un grafo 2-nodo-conexo $G = (V, E)$, un diámetro d, la probabilidad de operación elemental p y $K = \{s, t\} \subseteq V$, devuelve la medida $R^d_{K,G}(p)$. En estas condiciones podemos demostrar que existe $\mathcal{A}'$ que retorna $R^d_{K,G}(p)$ para cualquier grafo G conexo, con diámetro d, probabilidad p y K con $k = |K| = 2$. Si G es 2-nodo-conexo, $\mathcal{A}$ retorna el resultado exacto. En caso contrario, G presenta un número finito de puntos de articulación. Sin perdida de generalidad, supongamos que $G = (V, E)$ presenta un único punto de articulación v (en caso de que presente múlitples puntos de articulación se puede aplicar un proceso recursivo sobre G, suponiendo que n es finito). Entonces, $G = G_1 * G_2(x, y)$ con $v = x = y$ para algún grafo 2-nodo-conexo $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$. Si los dos terminales pertenecen a la misma componente G_i, el algoritmo $\mathcal{A}$ retorna $R^d_{K,G_i}(p) = R^d_{K,G}(p)$. En caso contrario, $K = \{v_1, v_2\}$ para algún $v_1 \in V_1 - \{v\}$ y $v_2 \in V_2 - \{v\}$. Dado que G_i es 2-nodo-conexo, podemos encontrar $R^{d_1}_{\{v_1,v\},G_1}$ y $R^{d_2}_{\{v,v_2\},G_2}$ mediante el algoritmo $\mathcal{A}$, y el Lema 6.0.9 para obtener $R^d_{K,G}(p)$ en tiempo polinomial. Por lo tanto, el cómputo de la DCR de grafos 2-nodo-conexos en el caso source-terminal es al menos tan difícil como el cómputo de la DCR source-terminal para grafos arbitrarios, y con esto se concluye que el problema objeto de estudio pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Hard.

QED

El siguiente paso es probar que el Teorema 6.0.10 se cumple para el caso all-terminal, utilizando el mismo procedimiento matemático.

Lema 6.0.11 *El problema del cómputo de la confiabilidad clásica de grafos 2-nodo-conexos pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil.*

Prueba. Por reducción.
Utilizaremos el hecho de que el cómputo de la confiabilidad clásica en el caso all-terminal pertenece a la clase de problema $\mathcal{NP}$-Difícil. Supongamos que existe un algoritmo $\mathcal{B}$ que dado un grafo arbitrario 2-nodo-conexo $G = (V, E)$, con probabilidad elemental de operación p y $K = V$ conjunto de nodos terminales retorna en tiempo polinomial la medida $R_{V,G}(p)$. Dado lo anterior probaremos que existe $\mathcal{B}'$, un algoritmo que en tiempo polinomial retorna la $R_{V,G}(p)$ de un grafo arbitrario G conexo, probabilidad p y conjunto de terminales $K = V$.
Si G es 2-nodo-conexo, $\mathcal{B}$ produce el resultado exacto. En caso contrario, G contiene algún punto de articulación. Supongamos sin pérdida de generalidad que $G = (V, E)$ presenta un único punto de articulación v. Entonces $G = G_1 * G_2(x, y)$ con $v = x = y$ para algún grafo 2-nodo-conexo $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$, y $x = y = v$. El algoritmo $\mathcal{B}$ retorna $R_{V,G_i}(p)$. El grafo es conexo si y solo si v se comunica con todos los nodos terminales. Por independencia entre los eventos anteriores y G_i, llegamos a que $R_{V,G}(p) = R_{V,G_1}(p)R_{V,G_2}(p)$. Por lo tanto, el cómputo de la confiabilidad all-terminal para grafos 2-nodo-conexos es al menos tan difícil como el cómputo de la confiabilidad clásica para el escenario source-terminal de grafos arbitrarios, con lo cual el problema objeto de estudio pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil.

QED

Corolario 6.0.12 *El cómputo de la DCR para grafos 2-nodo-conexos en el caso all-terminal pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil.*

Prueba. Por inclusión. La DCR es una generalización del problema de la confiabilidad clásica (con $d \geq |V| - 1$)

QED

El corolario 6.0.12 es un resultado negativo a menos que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$, pero resulta de utilidad para evaluar el cómputo de la DCR de algunas clases de grafos que se mencionan en el Capítulo 7.

Capítulo 7

Cálculo de DCR en problemas de optimización de redes

El avance en la forma de comunicación ha puesto de manifiesto la importancia que representa un correcto diseño y planificación de la infraestructura necesaria para sustentarla. Con el paso del tiempo y la experiencia, el objetivo en el diseño de redes ha combinado optimización, desde el punto de vista de los costos, y robustez ante eventuales fallas de alguno de sus componentes. En conjunto estas dos características impactan en la calidad y conveniencia de un servicio de comunicación. En ese sentido se han explorado un vasto número de problemas, algunos de aplicación real, que evalúan ciertas topologías, sus características y su capacidad de sobrevivencia ante fallas. En el Capítulo 4 hemos visto que el cálculo de la DCR en forma exacta en tiempo polinomial es posible para cierta familia de grafos: caminos, ciclos, escaleras, escaleras generalizadas, *abanicos españoles* y grafos débiles. El objetivo de este capítulo es mencionar algunos problemas de optimización en redes robustas y evaluar la complejidad del cálculo de su DCR. Los problemas que se analizarán son:

- Minimum Weight Two Connected Spanning Networks, MW2CSP.
- Ring Star Problem, RSP.
- Capacitated m Ring Star Problem, CmRSP.
- Capacitated m Two-Node-Survivable Star Problem, Cm2NSSP.
- Two Node Connected Star Problem, 2NCSP.

7.1. MW2CSP

Uno de los trabajos fundamentales en el diseño de redes robustas es el de Clyde Monma *et al.* en 1990 [28]. Allí los autores se plantean como objetivo el diseño de redes 2 nodo conexas de costo mínimo con aplicación en redes de comunicación y de transporte. Una red de estas características garantiza que si falla algún enlace entre dos sitios, existe otro alternativo que

permite que continúen conectados. Como resultado obtienen que la topología óptima 2-conexa posee vértices (sitios) de grado dos o tres y que al remover cualquier arista (o nodo) o par de aristas de una topología óptima 2-conexa deja un puente en las componentes resultantes.

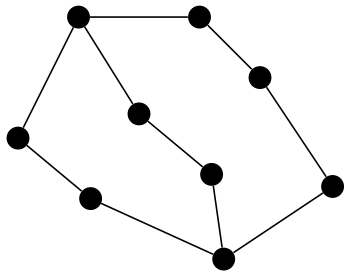

Figura 7.1: Solución factible del MW2NCSP.

Lema 7.1.1 *El cómputo exacto de la DCR para soluciones factibles del MW2CSNP ante instancias de grafos de entradas libres y soluciones factibles libres, es $\mathcal{NP}$-Difícil.*

Vimos que el cómputo de la DCR para el caso $K = V$, all terminal, de redes 2 conexas es intratable, por lo tanto también lo es el del MW2NCSP.

7.2. RSP

El Ring Star Problem consiste en el diseño de una red óptima, i.e. de mínimo costo, con topología de anillo que pasa por un subconjunto de nodos (terminales y no terminales) y además cada nodo no perteneciente al anillo se conecta a un nodo del mismo (el de menor costo) por conexión simple. La topología de anillo se suele utilizar en redes de fibra óptica para garantizar servicio continuo a los clientes (nodos terminales). Fue originalmente introducido por Labbé *et al.* [24] y ha sido el punto de partida para el estudio de otras topologías como el CmRSP publicado por Baldacci *et al.* que desarrollaremos en la Sección 7.3. Se trata de un problema con complejidad $\mathcal{NP}$-Difícil pues si se toman costos infinitos de conexión simple de los nodos a la estructura de anillo, entonces una solución del problema es el Traveling Salesman Problem, TSP.

Lema 7.2.1 *Cualquier solución factible del RSP tiene cómputo exacto de la DCR en tiempo polinomial, siempre que $|K|$ sea fijo.*

Prueba. Los nodos terminales que penden del ciclo deben permanecer conectados para preservar la factibilidad pues si alguno de los enlaces que conecta con la estructura de anillo falla, entonces la solución no es factible. Por otra parte dado que contiene un ciclo, no más de una arista puede ser removida por lo tanto por el Teorema 4.2.2 el grafo es 2-débil entonces el cómputo de la DCR del RSP es polinomial.

QED

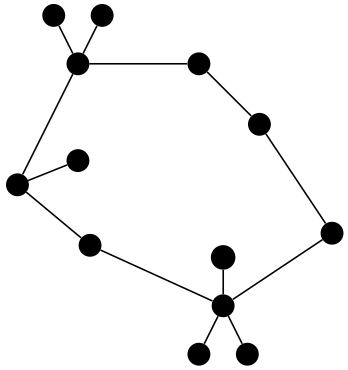

Figura 7.2: Solución factible de RSP

Sea $G = (V, E)$ cierto grafo y $G_H = (V, H)$ una solución factible del problema, con $H = C \cup S$, el conjunto unión de las aristas del ciclo y las aristas de los nodos colgantes. Si suponemos que las aristas fallan aleatoriamente con probabilidad $q = 1 - p$, definimos $p_S = \prod_{\{u,v\} \in S} p = p^{|S|}$, como la confiabilidad de los nodos que se unen al anillo. Vimos en el 4.2 que la confiabilidad del ciclo que es $R_{V,C}(p) = p^{|C|} + |C|p^{|C|-1}(1-p)$. Por otra parte las aristas de los nodos pendientes no deben fallar pues se pierde la factibilidad. Teniendo en cuenta la restricción de diámetro, d, llegamos finalmente a la expresión de la DCR, del RSP es:

$$R^d_{V,G_H}(p) = p^{|S|} \times (p^{|H|} + \sum_{u \in C} 1_{\{d, G_H \setminus u \in C\}} p(1-p)^{|C|-1}) \tag{7.1}$$

donde $1_{\{d,G_H \setminus u \in C\}}$ vale 1 siempre que $G_H \setminus u$ sea d-V-conexo, de lo contrario vale 0.

7.3. CmRSP

Este problema planteado originalmente por Baldacci *et al.* [3] es una extensión del RSP, donde el objetivo es el diseño de una solución óptima compuesta por m ciclos que se comunican a través de un nodo central denominado nodo concentrador o depot, un subconjunto de clientes y un subconjunto de nodos opcionales que se utilizan a modo de minimizar costos. Los clientes que no forman parte del ciclo deben conectarse directamente a algún nodo de este (nodos colgantes). El número de clientes (nodos terminales) y de Steiner de cada anillo (incluido los colgantes) es acotado por una restricción de capacidad Q. El objetivo es minimizar los costos de ruteo (anillo) más los costos de asignación (nodos colgantes). El CmRSP pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil pues si asumimos $m = 1$, ausencia de nodos de Steiner y costos de asignación infinitos, entonces una solución del problema es el TSP. El siguiente corolario es presentado por Bayá *et al.* en su artículo *Capacitated m Ring Star Problem under Diameter Constrained Reliability* [6].

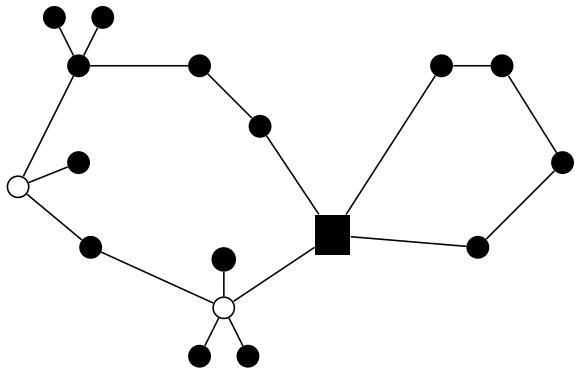

Figura 7.3: Solución factible de CmRSP.

Corolario 7.3.1 *Cualquier solución factible del CmRSP tiene cómputo exacto de su DCR en tiempo polinomial con el número de nodos.*

La demostración propuesta por los autores del citado artículo se basa en probar que una solución factible de este problema es $d - V - m + 1$ débil y puesto que el número de anillos, m, no depende de $|V|$, entonces el cómputo de la DCR es polinomial. Como resultado adicional presentan la formula exacta de la DCR para esta topología:

$$R^d_{V,H}(p) = \sum_u 1_{\{D(H_u)\leq d\}} p^{|H_u|} p^{|\{i:u_i>0\}|} (1-p)^{|\{i:u_i=0\}|}, \tag{7.2}$$

donde:

- $H = \cup_{i=1}^m T_i \cup S$, con T_i el i-ésimo ciclo de la solución factible y S indica la estructura definida por los nodos colgantes de los m ciclos.
- $t_i = |T_i|$ y $u = \{u_1, ..., u_m\}$ tal que $u_i \in [0, t_i]$
- e^i_j denota el enlace j del ciclo T_i, $j \in \{1, ..., l_i\}$ con x^0_i el conjunto vacío

7.4. Cm2NSSP

Este problema es una relajación del CmRSP donde los m anillos se remplazan por componentes 2-nodo-conexas. Al igual que el CmRSP cada componente que conecta con el nodo central debe contener a lo sumo Q nodos (entre terminales y nodos de Steiner). Los nodos terminales de cada componente o bien se encuentran en la estructura 2-nodo-conexa o bien están unidos a la misma por enlace simple (por una arista). Si existen, los nodos opcionales solo pueden pertenecer a la estructura 2-nodo-conexa. El autor, Gabriel Bayá [26], aborda la resolución del mencionado problema de manera exacta para instancias pequeñas y de forma aproximada utilizando el diseño de una metaheurística *Greedy Randomized Adaptative Search*, GRASP [36].

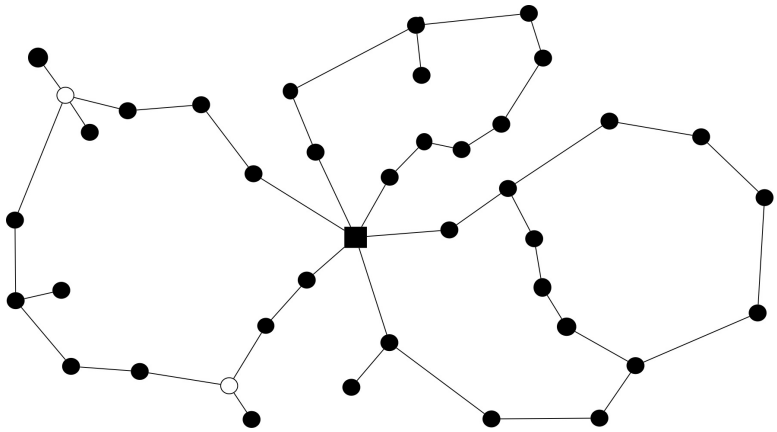

Figura 7.4: Solución factible del Cm2NSSP [26].

Lema 7.4.1 *El cómputo de la DCR del Cm2NSSP pertence a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil.*

Prueba. Si suponemos $m = 1$ y consideramos costos de conexión simple (nodos colgantes de la componente 2-nodo-conexa) infinito, queda reducido al MW2NCSP que vimos es $\mathcal{NP}$-Difícil.

QED

7.5. 2NCSP

El Two Node Connected Star Problem, 2NCSP, es introducido por Rodrigo Recoba [35] en el contexto de su tesis de maestría. Dada una red conformada por nodos y enlaces entre ellos, el objetivo del problema 2NCSP es encontrar una subred de costo mínimo, en donde los nodos, o bien se encuentran en una única componente con topología 2-nodo conexa, o se encuentran conectados a un nodo de dicha componente, mediante una única arista (nodos colgantes). El objetivo del problema es minimizar la suma de dos costos: el costo de la componente 2-nodo conexa, y el costo de asignar los nodos que no se encuentran en la componente 2-nodo conexa con el nodo más cercano de ésta. El autor citado demuestra por reducción al MW2CSP que el problema definido pertenece a la clase de complejidad $\mathcal{NP}$-Completo.

Lema 7.5.1 *El cómputo de la DCR del para soluciones factibles del 2NCSP pertenece a la clase $\mathcal{NP}$-Difícil.*

Prueba. Si consideramos los costos de asignación (costos de colgar nodos de grado 1) a la componente 2-nodo conexa igual a $\inf$, entonces queda reducido al MW2NCSP y vimos que la DCR de este último es $\mathcal{NP}$-Difícil.

QED

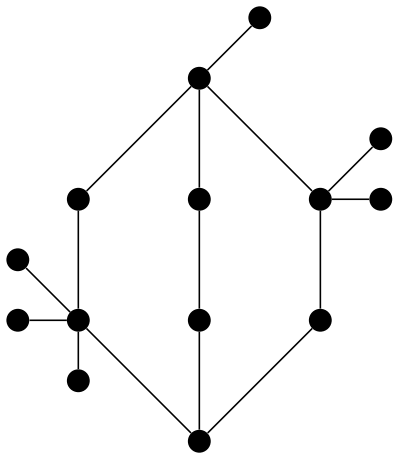

Figura 7.5: Grafo solución factible del 2NCSP.

Capítulo 8

Conclusiones

En la primera parte de este trabajo se incluyeron conceptos preliminares necesarios para el desarrollo del problema de interés.

La segunda parte describe el estado del arte de la medida de confiabilidad tanto clásica como diámetro acotada. Allí se recopilan resultados sobre la complejidad de algunos sub-problemas para el cálculo de la DCR. Cuando el diámetro vale 1 el problema es trivial. Para el caso $d = 2$ y k fijo el problema pertence a la clase $\mathcal{P}$. Cuando $k = |K|$ y d es libre, dado que es el caso de la confiabilidad clásica, es un problema de la clase $\mathcal{NP}$-Díficil. Para los casos restantes ($d \geq 2$) la DCR también pertenece a esta última clase. Si bien existen técnicas de reducción de grafos para disminuir el número de operaciones, los métodos de cálculo exactos son en general exponenciales. Algunas familias particulares de grafos tienen cómputo exacto polinomial de la DCR como por ejemplo los grafos débiles.

Finalmente la tercera y última parte contiene los aportes de esta tesis. Se expone una síntesis de la evolución de las telecomunicaciones y algunos problemas de optimización combinatoria clásicos. Hemos demostrado que la DCR de grafos 2-nodo conexos pertenecen a la clase $\mathcal{NP}$-Díficil, primero para el caso two-terminal y luego generalizando para k-terminal. Por otra parte se ha evaluado la DCR de soluciones factibles en célebres problemas de optimización combinatoria. Como trabajo futuro se propone profundizar el análisis entre estas dos áreas de conocimiento y evaluar su impacto en problemas de aplicación real en el contexto de telecomunicaciones.

El abordaje del problema de la DCR tiene varios campos, pues por un lado se pueden estudiar métodos exactos. A su vez dentro de estos se pueden estudiar la DCR de sub-problemas o familias especiales de grafos. Por otro lado se puede poner el foco en el desarrollo de métodos aproximados.
Entre los problemas al respecto que aún permanecen abiertos se encuentran:

1. Hallar, si existe, un algoritmo de tiempo polinomial para evaluar la DCR o la confiabilidad clásica en forma exacta ante cualquier instancia de grafo. Resolver este problema abierto implicaría probar que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.

2. Probar que no existe el algoritmo mencionado en 1, y así determinar que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.
3. Calcular la DCR eficientemente, en clases de grafos distintos de ciclos, caminos, escaleras, escaleras generalizadas, abanicos españoles y grafos débiles.
4. Estudiar el comportamiento asintótico de la DCR para grafos aleatorios que no coinciden con el modelo de Gilbert.
5. Evaluar la DCR de otras topologías, por ejemplo 3-nodo conexas.
6. Reconocer componentes irrelevantes en la DCR mediante un algoritmo de tiempo polinomial.

Bibliografía

[1] A. Agrawal, P. Klein, and R. Ravi. When trees collide: An approximation algorithm for the generalized steiner problem on networks. *SIAM Journal on Computing*, 24(3):440–456, 1995.

[2] S. Ahmad. A simple technique for computing network reliability. *Transactions on Reliability*, R-31 (1), 1982.

[3] R. Baldacci, M. Dell'Amico, and J. Salazar González. The capacitated *m*-ring-star problem. *Operations Research*, 55(6):1147–1162, 2007.

[4] M. O. Ball. Computational complexity of network reliability analysis: An overview. *IEEE Transactions on Reliability*, 35(3):230 –239, aug. 1986.

[5] M. O. Ball and J. S. Provan. Calculating bounds on reachability and connectedness in stochastic networks. *Networks*, 13(2):253–278, 1983.

[6] G. Bayá, A. Mauttone, F. Robledo, P. Romero, and G. Rubino. Capacitated m ring star problem under diameter constrained reliability. To appear in Electronic Notes in Discrete Mathematics, Elsevier.

[7] E. Canale, H. Cancela, F. Robledo, P. Romero, and P. Sartor. Diameter constrained reliability: Complexity, distinguished topologies and asymptotic behavior. *Networks*, 66(4):296–305, 2015.

[8] E. Canale, H. Cancela, F. Robledo, P. Romero, and P. Sartor. Full complexity analysis of the diameter-constrained reliability. *International Transactions in Operational Research*, 22(5):811–821, 2015.

[9] E. Canale, H. Cancela, F. Robledo, G. Rubino, and P. Sartor. On computing the 2-diameter-constrained K-reliability of networks. *International Transactions in Operational Research*, 20(1):49–58, 2013.

[10] H. Cancela and M. El Khadiri. A recursive variance-reduction algorithm for estimating communication-network reliability. *Reliability, IEEE Transactions on*, 44(4):595–602, 1995.

[11] H. Cancela and L. Petingi. Reliability of communication networks with delay constraints: computational complexity and complete topologies. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2004:1551–1562, 2004.

[12] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2005.

[13] J. Edmonds. Edge disjoint branchings. In R. Rustin, editor, *Combinatorial Algorithms*, pages 91–96. Algorithmics, New York, 1972.

[14] S. Even and R.E. Tarjan. Network flow and testing graph connectivity. *SIAM J. Computing*, 4:507–518, 1975.

[15] G. S. Fishman. *Monte Carlo: concepts, algorithms, and applications*. Springer series in operations research. Springer, New York, Berlin, 1996.

[16] R. W. Floyd. Algorithm 97: Shortest path. *Commun. ACM*, 5(6):345–, June 1962.

[17] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.

[18] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman and Company, New York, NY, USA, 1979.

[19] F. Harary. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1969.

[20] D. R. Karger, P. N. Klein, and R. E. Tarjan. A randomized linear-time algorithm to find minimum spanning trees. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 42/2:321–328, 1995.

[21] R. M. Karp. Reducibility among combinatorial problems. In R. E. Miller and J. W. Thatcher, editors, *Complexity of Computer Computations*, pages 85–103. Plenum Press, 1972.

[22] G. Kirchoff. Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird. *Ann. Phys. Chem.*, 72:497–508, 1847.

[23] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:48–50, 1956.

[24] M. Labbé, G. Laporte, I. Rodríguez Martín, and J. J. Salazar González. The ring star problem: polyhedral analysis and exact algorithm. *NETWORKS*, 43(3):177–189, 2004.

[25] P. L'Ecuyer, M. Mandjes, and B. Tuffin. Importance sampling in rare event simulation. In *Rare Event Simulation using Monte Carlo Methods*, pages 17–38. John Wiley & Sons, Ltd, 2009.

[26] G. Bayá Mantani. Diseño Topológico de Redes. Caso de Estudio: Capacitated *m* Two-Node Survivable Star Problem. Master's thesis, Universidad de la República. Pedeciba Informática, Montevideo, Uruguay, Agosto 2014.

[27] D. Migov. Computing diameter constrained reliability of a network with junction points. *Automation and Remote Control*, 72:1415–1419, 2011.

[28] C. L. Monma, B. Spellman Munson, and W. R. Pulleyblank. Minimum-weight two-connected spanning networks. *Mathematical Programming*, 46(1-3):153–171, 1990.

[29] E. F. Moore. The shortest path through a maze. *Ann. Computation Lab. Harvard Univ*, 30:285–292, 1959.

[30] F. Moskowitz and R.A.D Center. The analysis of redundancy networks. *AIEE Transactions of Communication and Electronics*, 33:627–632, 1958.

[31] L. Petingi and J Rodríguez. Reliability of networks with delay contraints. *Congressus Numerantium,* ***152***, pages 117–123, 2001.

[32] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, 36:1389–1401, 1957.

[33] S. J. Provan and M. O. Ball. The Complexity of Counting Cuts and of Computing the Probability that a Graph is Connected. *SIAM Journal on Computing*, 12(4):777–788, 1983.

[34] S .Rai, M. Veeraraghavan, and K.S. Trivedi. A survey of efficient reliability computation using disjoint products approach. *NETWORKS*, 25:147–163, 1995.

[35] R. Recoba. Diseño topológico de redes caso de estudio: 2-node-connected star problem. Master's thesis, Universidad de la República. Pedeciba Informática, Montevideo, Uruguay, Agosto 2015.

[36] M. G. C. Resende and R. M. A. Silva. Grasp: Greedy randomized adaptive search procedures. In *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science*. John Wiley & Sons, Inc., 2010.

[37] C. Risso. *Using GRASP and GA to design resilient and cost-effective IP/MPLS networks*. PhD thesis, INRIA, Université de Rennes I. INCO/LPE Universidad de la República, may 2014.

[38] F. Robledo. *GRASP heuristics for Wide Area Network design*. PhD thesis, INRIA, Universidad de la República., february 2005.

[39] P. Romero. *Mathematical analysis of scheduling policies in Peer-to-Peer video streaming networks*. PhD thesis, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, November 2012.

[40] A. Rosenthal. Series and parallel reductions for complex measures of network reliability. *Networks*, 11:323–334, 1981.

[41] G. Rubino. *Network reliability evaluation*. Gordon and Breach Science Publishers, Inc., 1999.

[42] G. Rubino and B. Tuffin. *Rare event simulation using Monte Carlo methods*. Wiley, 2009.

[43] P. Sartor. *Propriétés et méthodes de calcul de la fiabilité diamétre-bornée des réseaux*. PhD thesis, INRIA/IRISA, Université de Rennes I, Universidad de la República., Rennes, France, december 2013.

[44] A. Satyanarayana and A. Prabhakar. New topological formula and rapid algorithm for reliability analysis of complex networks. *IEEE Trans. Reliability*, R-27:82–100, 1985.

[45] M. Stoer. *Design of Survivable Networks*. Springer-Verlag, 1996.

[46] A. Turing. On computable numbers with an application to the Entscheidungsproblem. *Proceeding of the London Mathematical Society*, 1936.

[47] L. Valiant. The complexity of enumeration and reliability problems. *SIAM Journal on Computing*, 8(3):410–421, 1979.