Dinámica Topológica Expansiva: Algunos aportes

Tesis de Doctorado en Matemática

Universidad de la República Oriental del Uruguay
Programa de Desarrollo de las Ciencias Básicas

Mág. Mauricio Achigar

29 de julio de 2019

Orientadores: Dr. José Vieitez y Dr. Alfonso Artigue

Tribunal:
Dr. Fernando Abadie
Dr. Alexander Arbieto
Dr. Alfonso Artigue
Dr. Álvaro Rovella
Dr. Martín Sambarino

Para Mónica.

Agradecimientos

Quiero agradecer a José Vieitez y Alfonso Artigue por innumerables charlas, por ser una fuente constante de ideas y problemas interesantes, por los muchos buenos consejos que me han dado en la preparación de esta tesis. Agradezco también a Ignacio Monteverde con quien he trabajado en varios de los temas que están desarrollados. A Damián Ferraro le doy las gracias por varias charlas y buenas ideas que ha aportado. Finalmente quiero agradecer en forma especial a Martín Sambarino que hace unos años me alentó a venir a establecerme en la cuidad de Salto y culminar esta etapa que significa el doctorado.

Salto, Mayo de 2019,

Mauricio Achigar.

Resumen

En esta tesis se estudian algunos aspectos de la teoría de los sistemas dinámicos discretos desde el punto de vista topológico con especial énfasis en las dinámicas expansivas. El material se encuentra dividido en tres capítulos cada uno de los cuales aborda una temática diferente y es esencialmente independiente de los otros.

En el primer capítulo se estudian generalizaciones del concepto de expansividad de un homeomorfismo definido en un espacio métrico compacto, en especial la denominada *expansividad por refinamientos*. Esta noción tiene sentido en un espacio topológico arbitrario y preserva varias de las propiedades que exhiben los sistemas expansivos en el sentido usual. Se destacan entre otros el teorema de Mañé [28] sobre la dimensión topológica del espacio en el que está definido un homeomorfismo expansivo, y teorema de la finitud de los sistemas expansivos al futuro [13, 34]. Se presenta también una familia de sistemas dinámicos simbólicos que generalizan los *shift* expansivos usuales. Finalmente se indica cómo puede intentarse extender este concepto a otras categorías como la de los anillos conmutativos. Gran parte del contenido presentado forma parte del artículo [2] escrito en coautoría con Alfonso Artigue e Ignacio Monteverde.

En el segundo capítulo se trata el tema de la *observabilidad* de un sistema dinámico, que grosso modo es el estudio de condiciones bajo las cuales diferentes estados del sistema pueden ser distinguidos realizando mediciones a lo largo de la evolución del mismo. El principal resultado obtenido es un teorema de observabilidad genérica para mapas continuos localmente inyectivos, que extiende trabajos de otros autores, en especial el de Gutman [17, 18]. Este teorema es aplicado al caso de las dinámicas expansivas obteniendo un teorema de observabilidad para mapas expansivos al futuro de un toro. Finalmente se estudia la vinculación entre la propiedad de expansividad y la de observabilidad. El material expuesto se encuentra contenido esencialmente en el artículo [3] escrito en coautoría con Alfonso Artigue e Ignacio Monteverde.

El tercer capítulo está dedicado al estudio de sistemas dinámicos que admiten un cociente expansivo. Se dan caracterizaciones de tales homeomorfismos complementando el trabajo de otros autores como Lewowicz [27], Sambarino y Cerminara [12]. Se aborda también el caso de sistemas que son extensión de un homeomorfismo expansivo con la propiedad de sombreado (homeomorfismos de Anosov), obteniendo para ellos un resultado de estabilidad topológica en la linea del teorema de del mismo tipo para sistemas de Anosov debido a Walters [37]. En el Anexo a este capítulo se presenta un resultado sobre sombreado que se encuentra publicado en [1].

XXX

Índice general

1. Expansividad topológica **1**

1.1. Órbita - expansividad . . . 2

1.1.A. Definición de homeomorfismo órbita-expansivo . . . 3

1.1.B. Ejemplos y primeras propiedades . . . 6

1.1.C. Algunas propiedades de la o-expansividad . . . 9

1.2. Expansividad por refinamientos . . . 11

1.2.A. Definición de homeomorfismo expansivo por refinamientos . . . 11

1.2.B. Ejemplos y primeras propiedades . . . 15

1.2.C. Algunas propiedades de la r-expansividad . . . 18

1.2.D. Dimensión topológica . . . 21

1.2.E. Expansividad al futuro . . . 24

1.2.F. Reducción al caso $\mathcal{T}_1$ . . . 26

1.3. El shift no Hausdorff . . . 29

1.3.A. Construcción del shift . . . 29

1.3.B. Todo sistema expansivo es un subshift . . . 31

1.3.C. Entropía del shift . . . 33

1.4. Expansividad algebraica . . . 37

1.4.A. Expansividad en retículos distributivos . . . 37

1.4.B. Expansividad en anillos . . . 40

Preguntas abiertas del Capítulo 1 . . . 42

2. Observables y expansividad **45**

2.1. Observabilidad . . . 45

2.1.A. Observabilidad de mapas continuos . . . 48

2.1.B. Resultados previos . . . 51

2.1.C. Lemas de observabilidad . . . 53

2.1.D. Demostración del Teorema 2.1.9 . . . 57

2.1.E. Extensión de los resultados obtenidos . . . 61

2.2. Observabilidad de sistemas expansivos . . . 63

2.2.A. Observabilidad de homeomorfismos expansivos . . . 63
2.2.B. Observabilidad de mapas expansivos al futuro . . . 64
2.2.C. Observabilidad estricta . . . 67

3. Extensiones de sistemas expansivos 71
3.1. $[\varepsilon, \alpha]$-expansividad . . . 72
3.2. Cocientes expansivos . . . 74
3.2.A. Caracterizaciones topológicas . . . 78
3.2.B. Casi expansividad . . . 82
3.3. Cocientes Anosov . . . 84
3.3.A. Un resultado de estabilidad . . . 88
3.3.B. Envolventes de sombreado . . . 90
Preguntas abiertas del Capítulo 3 . . . 94
Anexo: Una nota sobre sombreado . . . 95

Referencias 99

Capítulo 1

Expansividad topológica

En este capítulo se introducen dos nociones diferentes de expansividad de un homeomorfismo de un espacio topológico arbitrario que generalizan la noción de expansividad de un homeomorfismo de un espacio métrico: la *órbita-expansividad* y la *expansividad por refinamientos*. La primera se trata en la Sección 1.1 y la segunda en la Sección 1.2. En espacios (compactos) de Hausdorff ambas nociones son equivalentes a la expansividad métrica usual, por lo que es en espacios no Hausdorff en donde efectivamente tiene lugar la generalización. En espacios con la propiedad de separación $\mathcal{T}_1$ la expansividad por refinamientos implica la órbita-expansividad, y es para estos espacios para los cuales se obtienen la mayor cantidad de resultados novedosos.

Se generalizan a este contexto más amplio varias propiedades de los homeomorfismos expansivos métricos, como por ejemplo resultados sobre la cardinalidad de los puntos periódicos (Proposición 1.1.19 y Corolario 1.1.20), sobre puntos asintóticos (Proposición 1.2.20), el Teorema de Mañé sobre la dimensión topológica del espacio que soporta un sistema expansivo (Teorema 1.2.25), y la finitud del espacio en el que actúa un homeomorfismo expansivo al futuro (Teorema 1.2.30). En la Sección 1.3 se presenta una familia de sistemas dinámicos simbólicos (llamados *shift no Hausdorff*) que generalizan el shift simbólico (métrico) usual. Estos sistemas resultan ser expansivos por refinamientos (Teorema 1.3.4) y tienen la propiedad que todo sistema expansivo es un subshift de un shift no Hausdorff (Teorema 1.3.10). Finalmente en la Sección 1.4 se muestra brevemente cómo puede intentarse extender el concepto de expansividad (por refinamientos) a otras categorías como la de los anillos conmutativos.

Notación

Sean X un conjunto y $\mathcal{U} = \{U_i : i \in I\}$ una familia de subconjuntos de X. La unión y la intersección de los miembros de $\mathcal{U}$ se denota con cualquiera de los símbolos

$$\bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{i \in I} U_i \qquad \text{y} \qquad \bigcap \mathcal{U} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcap_{i \in I} U_i,$$

respectivamente. En particular para la familia vacía $\varnothing$ se tiene $\bigcup\varnothing = \varnothing$ y $\bigcap\varnothing = X$. Una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de X se denomina *cubrimiento* de X sii $\bigcup\mathcal{U} = X$.

Si X es un conjunto y $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ son familias de subconjuntos de X se dice que $\mathcal{U}$ *refina a* $\mathcal{V}$, y se denota $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, sii para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $U \subseteq V$. Si $A \subseteq X$ se denota $A \prec \mathcal{V}$ para indicar que $\{A\} \prec \mathcal{V}$. Dados $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ como antes se define

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

Si $A \subseteq X$ y $\mathcal{V}$ es una familia de subconjuntos de X se denota $A \wedge \mathcal{V}$ para indicar $\{A\} \wedge \mathcal{V}$. Si $\{\mathcal{U}_i : i \in I\}$ es una colección de familias de subconjuntos de X se extiende la definición anterior de la siguiente manera:

$$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{U}_i = \Big\{\bigcap_{i\in I} U_i : U_i \in \mathcal{U}_i \text{ para todo } i \in I\Big\}.$$

Sean X e Y conjuntos y $T\colon X \to Y$ una función. Si $x \in X$ la imagen de x a través de T se denotará Tx o $T(x)$. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ se denota con TA o $T(A)$ el conjunto imagen de A por T, y con $T^{-1}B$ o $T^{-1}(B)$ el conjunto preimagen de B por T. En el caso $X = Y$, si $n > 0$, $T^n = T \circ \cdots \circ T$ denota la composición de T consigo misma n veces, y $T^0 = id_X$ denota la función identidad de X. Si $A \subseteq X = Y$ y $n \in \mathbb{Z}$, se denota con T^nA o $T^n(A)$ el conjunto imagen de A por T^n cuando $n \geq 0$, o bien el conjunto preimagen de A por T^k si $n = -k < 0$. Finalmente, si T es biyectiva se denota $T^{-n} = (T^{-1})^n$, $n \geq 0$.

Si ahora $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de X y $\mathcal{V}$ es una familia de subconjuntos de Y se denota $T\mathcal{U} = T(\mathcal{U}) = \{TU : U \in \mathcal{U}\}$ y $T^{-1}\mathcal{V} = T^{-1}(\mathcal{V}) = \{T^{-1}V : V \in \mathcal{V}\}$. En el caso $Y = X$, si $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de X y $n \in \mathbb{Z}$ se define $T^n\mathcal{U}$ de forma similar a lo expresado en párrafo anterior para la imagen y preimagen de subconjuntos de X.

1.1. Órbita - expansividad

En esta sección se introduce la noción de homeomorfismo *órbita-expansivo* de un espacio topológico como generalización del concepto usual de expansividad para un homeomorfismo de un espacio métrico (homeomorfismo expansivo métrico). Se presentan formulaciones equivalentes de la definición y se muestra que la clase de homeomorfismos órbita-expansivos es estrictamente mayor que la de los expansivos métricos. Se compara la definición dada con otras similares que se encuentran en la literatura.

Se prueba que para espacios compactos de Hausdorff la existencia de un homeomorfismo órbita-expansivo implica la metrizabilidad del espacio y que el homeomorfismo es de hecho expansivo métrico. Se deduce que el espacio topológico que soporte un homeomorfismo órbita-expansivo es necesariamente un espacio $\mathcal{T}_1$. En consecuencia, en el caso compacto, que es el caso en el se está principalmente interesado, los ejemplos de homeomorfismos órbita-expansivos que no sean expansivos métricos serán sobre espacios $\mathcal{T}_1$ pero no Hausdorff. Se dan también ejemplos de espacios compactos y $\mathcal{T}_1$ que no soportan homeomorfismos órbita-expansivos.

Finalmente se generalizan al caso de homeomorfismos órbita-expansivos algunas propiedades bien conocidas del caso métrico, a saber la invariancia por conjugaciones, la expansividad de las restricciones, la expansividad del producto, la relación con la expansividad de las potencias y resultados sobre la cardinalidad de los puntos periódicos.

1.1.A. Definición de homeomorfismo órbita-expansivo

En primer lugar se recuerda la definición de expansividad de un homeomorfismo de un espacio métrico. A esta clase de expansividad se la denominará *expansividad métrica*.

Definición 1.1.1. Sean (M, d) un espacio métrico y $T\colon M \to M$ un homeomorfismo. Se dice que T es *expansivo métrico* sii existe $\alpha > 0$ (denominada *constante de expansividad*) tal que

$$x, y \in M \text{ y } d(T^n x, T^n y) < \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ implica } x = y.$$

Si (M, d) es un espacio métrico y $\alpha > 0$ considérese el cubrimiento abierto $\mathcal{U}_\alpha$ de M formado por todas las bolas de radio $\alpha/2$. Entonces, para $x, y \in M$ la condición $\{x, y\} \prec \mathcal{U}_\alpha$ implica que $d(x, y) < \alpha$. En consecuencia, si $T\colon M \to M$ es un homeomorfismo expansivo métrico con constante de expansividad α, se tiene que $x, y \in M$ y $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}_\alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implica $x = y$. Esta observación sugiere entonces la siguiente definición de expansividad que tiene sentido en un espacio topológico arbitrario.

Definición 1.1.2. Sean X un espacio topológico y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Se dice que T es *órbita-expansivo* (abreviadamente *o-expansivo*) sii existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que

$$x, y \in X \text{ y } \{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ implica } x = y.$$

Un tal cubrimiento $\mathcal{U}$ se denomina *cubrimiento de o-expansividad para* T.

Como surge de lo expuesto previo a la Definición 1.1.2 todo homeomorfismo de un espacio métrico M que sea expansivo métrico es automáticamente o-expansivo. El recíproco de esta afirmación es en general falso: por ejemplo, la traslación $T\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Tx = x + 1$ si $x \in \mathbb{R}$, no es expansivo métrico (respecto a la métrica usual en $\mathbb{R}$) pero, como es fácil verificar, admite a $\mathcal{U} = \{(x - 2/|x|, x + 2/|x|) : |x| \geq 1\}$ como cubrimiento de o-expansividad. Sin embargo, para el caso de espacios métricos compactos el recíproco es cierto. En efecto, un número de Lebesgue[1] de un cubrimiento de o-expansividad es claramente una constante de expansividad. Se tiene por lo tanto la siguiente proposición.

[1] Un *número de Lebesgue* de un cubrimiento $\mathcal{U}$ de un espacio métrico M es un número $\lambda > 0$ tal que si $x, y \in M$ y $d(x, y) < \lambda$ entonces $\{x, y\} \prec \mathcal{U}$. Todo cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto admite un número de Lebesgue.

Proposición 1.1.3. *Sean M un espacio métrico y $T\colon M \to M$ un homeomorfismo. Si T es expansivo métrico entonces T es o-expansivo. Si M es compacto y T es o-expansivo entonces T es expansivo métrico.*

Una consecuencia inmediata de la Proposición 1.1.3 es que la expansividad de un homeomorfismo de un espacio métrico compacto es una noción topológica: no depende de la métrica compatible elegida. En la Proposición 1.1.13 se mejora este resultado asumiendo tan solo que el espacio es compacto y de Hausdorff.

Proposición 1.1.4. *Sean X un espacio topológico, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) *$\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T.*

2) *Para toda bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n$ contiene a lo sumo un punto.*

3) *El cubrimiento $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U}$ de X es el cubrimiento por singuletes, módulo[2] el $\varnothing$.*

Demostración. Si $x, y \in M$ y $n \in \mathbb{Z}$ entonces $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$ sii existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\{T^n x, T^n y\} \subseteq U$, o lo que es lo mismo, $\{x, y\} \subseteq T^{-n}U$. Por lo tanto 1) equivale a 2) ya que, para $x, y \in X$, la condición $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ es equivalente a que exista una bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ tal que $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n$. Finalmente 2) equivale 3) pues los elementos de $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U}$ son precisamente las intersecciones $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n$, $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$. □

Si X es un conjunto y $T\colon X \to X$ es una función sea $T\times T\colon X\times X \to X\times X$ la función dada por $T\times T(x,y) = (Tx, Ty)$ si $(x,y) \in X\times X$. Por un abuso de notación la función $T\times T$ se denota con el mismo símbolo "T". En particular, si $\mathbb{U} \subseteq X \times X$ entonces $T\mathbb{U} = \{(Tx, Ty) : (x,y) \in \mathbb{U}\}$. Se define la *diagonal* de $X \times X$ como $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$.

Proposición 1.1.5. *Sean X un espacio topológico y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Entonces T es o-expansivo sii existe un entorno abierto $\mathbb{U}$ de Δ_X en $X \times X$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathbb{U} = \Delta_X$.*

Demostración. Si T es o-expansivo con cubrimiento de o-expansividad $\mathcal{U}$, entonces, como es fácil ver, $\mathbb{U} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \times U$ cumple la propiedad requerida. Recíprocamente, dado $\mathbb{U}$ como en el enunciado, tomando para cada $x \in X$ un entorno U_x tal que $U_x \times U_x \subseteq \mathbb{U}$, es fácil verificar que $\{U_x : x \in X\}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T. □

Observación 1.1.6. Una definición ligeramente diferente de homeomorfismo expansivo métrico que es equivalente a la Definición 1.1.1, y que de hecho es de uso más frecuente en la literatura, es la que da Utz en [38, §1, p. 769], donde llama a estos homeomorfismos *homeomorfismos*

[2] $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} = \{\{x\} : x \in X\}$.

inestables[3]. Según esta definición un homeomorfismo $T\colon M \to M$ de un espacio métrico (M, d) es expansivo sii existe una constante $\alpha > 0$ tal que $x, y \in M$ y $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implica $x = y$. La diferencia entre ésta y la Definición 1.1.1 radica en el uso de "$\leq$" en lugar de "$<$".

Si bien ambas definiciones de expansividad métrica son equivalentes conducen a definiciones topológicas diferentes del concepto de expansividad. De la misma manera que la Definición 1.1.1, con el "$<$", sugiere la Definición 1.1.2 y sus formulaciones equivalentes en base a la Proposición 1.1.4 y la Proposición 1.1.5, la definición de Utz, con el "$\leq$", parece ser el motivo de la introducción de varias de las definiciones topológicas de expansividad que se pueden encontrar en la literatura. A saber:

1) Fried en [16, p. 489] adopta la siguiente definición topológica de expansividad para un homeomorfismo T de un espacio topológico X (el cual asume compacto), que es similar a la condición de la Proposición 1.1.5: T se dice expansivo sii existe un entorno *cerrado* $\mathbb{V}$ de Δ_X tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathbb{V} = \Delta_X$. Notar que lo anterior, independientemente de la compacidad, implica que Δ_X es cerrada y por lo tanto X resulta necesariamente un espacio de Hausdorff. En [16, p. 489] se prueba que para espacios compactos la expansividad implica la metrizabilidad del espacio, y por lo tanto el concepto de expansividad usado es de hecho equivalente a la expansividad métrica.

2) En [10, §2, p. 1163] Bryant da una definición topológica de expansividad en el contexto de espacios uniformes (compactos): si $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio uniforme $(X, \mathscr{U})$ entonces T es expansivo sii existe $\mathbb{U} \in \mathscr{U}$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n\overline{\mathbb{U}} = \Delta_X$. Nuevamente esta definición implica que Δ_X es cerrada y por lo tanto X es un espacio de Hausdorff. En virtud de [25, Corollary 30, p. 198] en un espacio topológico compacto y de Hausdorff existe una única uniformidad compatible con la topología, por lo tanto para espacios compactos la definición que usa Bryant es equivalente a la de Fried.

3) Finalmente, en [26, Definition 2.4] Keynes y Robertson introducen el concepto de *generador* cuya definición es similar a la condición 2) de la Proposición 1.1.4: un cubrimiento abierto y finito $\mathcal{U}$ de un espacio topológico compacto X es un generador del sistema dinámico (X, T), donde $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo, sii para toda bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ la intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n\overline{U}_n$ contiene a lo sumo un punto. Si bien es una hipótesis general del artículo [26] que los espacios considerados son además de compactos espacios de Hausdorff, es fácil ver que la existencia de un generador garantiza esta última condición. Más aun, en [26, Corollary 2.8] se prueba que si (X, T) admite un generador entonces X es metrizable, de modo que entonces T es expansivo en el sentido métrico usual ([26, Theorem 3.2]).

[3]Unstable homeomorphism.

1.1.B. Ejemplos y primeras propiedades

Como se ha mencionado, para espacios compactos, que es el caso que se abordará, las diferentes definiciones clásicas citadas en la Observación 1.1.6 son equivalentes entre sí y equivalentes al concepto de expansividad métrica, por lo que no representan una extensión del mismo. El siguiente ejemplo muestra que el concepto de o-expansividad extiende estrictamente la noción de expansividad métrica aun en el caso compacto.

Ejemplo 1.1.7. Este es un ejemplo de un homeomorfismo o-expansivo en un espacio topológico compacto y no Hausdorff (en particular no metrizable). Considérese $\mathbb{Z}$ con la topología discreta y sea $X = \mathbb{Z} \cup \{\infty_1, \infty_2\}$ la compactificación no Hausdorff de $\mathbb{Z}$ que se obtiene agregando dos puntos ∞_1 e ∞_2, munida de la topología

$$\tau_X = \{A \subseteq \mathbb{Z}\} \cup \{A \subseteq X : \infty_i \in A \text{ para algún } i = 1, 2 \text{ y } X \setminus A \text{ finito}\}.$$

Sea $T\colon X \to X$ dado por $Tx = x + 1$ si $x \in \mathbb{Z}$ y $T\infty_i = \infty_i$ para $i = 1, 2$. Es fácil ver que $\mathcal{U} = \big\{\{0\}, X \setminus \{0, \infty_1\}, X \setminus \{0, \infty_2\}\big\}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T.

Observación 1.1.8. Nótese que si $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo o-expansivo, con cubrimiento de o-expansividad $\mathcal{U}$, entonces todo cubrimiento abierto que refine a $\mathcal{U}$, en particular todo subcubrimiento, es también un cubrimiento de o-expansividad para T. En consecuencia, si X es compacto, el cubrimiento de o-expansividad $\mathcal{U}$ de la Definición 1.1.2 puede suponerse finito.

Ejemplo 1.1.9. Considérese $\mathbb{Z}$ con la topología discreta y sea $T\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $Tx = x + 1$ si $x \in \mathbb{Z}$. Entonces T es o-expansivo con cubrimiento de o-expansividad $\mathcal{U} = \big\{(-\infty, 0], [1, +\infty)\big\}$. En relación a la Observación 1.1.8 este ejemplo muestra que la existencia de un homeomorfismo o-expansivo con cubrimiento de o-expansividad finito no implica la compacidad del espacio. Notar que este ejemplo es de hecho expansivo métrico.

En el siguiente ejemplo, al igual que en el ejemplo anterior se presenta un homeomorfismo o-expansivo de un espacio métrico no compacto, con cubrimiento de o-expansividad finito, pero con la novedad de que el homeomorfismo no es expansivo métrico. Notar que el homeomorfismo del Ejemplo 1.1.9 es expansivo métrico respecto a cualquiera de las métricas compatibles con la topología.

Ejemplo 1.1.10. Sean $X = \mathbb{Q}^+ \setminus \{m/2^n : m, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ con la topología usual, y $T\colon X \to X$, dado por $Tx = 2x$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ denótese $(a, b) = \{x \in X : a < x < b\}$. Sean

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (2n, 2n + 1), \quad V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (2n + 1, 2n + 2) \quad \text{y} \quad \mathcal{U} = \{U, V\}.$$

Se probará que el cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X es un cubrimiento de o-expansividad para T.

Supónganse dados $x, y \in X$ tales que $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Iterando para el pasado o para el futuro si fuera necesario, puede suponerse que $x, y \in (0, 1) \subseteq U$ y que $Tx, Ty \notin (0, 1)$, es decir $Tx, Ty \in (1, 2)$. En efecto, nótese que no puede ocurrir por ejemplo $T^n x \in (0, 1)$ y $T^n y \in (1, 2)$ para ningún $n \in \mathbb{Z}$ pues se ha supuesto que $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$, luego basta tomar $n_0 = \max\{n \in \mathbb{Z} : T^n x, T^n y \in (0, 1)\}$ y reemplazar x, y por $T^{n_0} x, T^{n_0} y$. Exprésense x e y en base 2 de la forma

$$x = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 \ldots_{(2)}\,, \qquad y = 0, y_1 y_2 y_3 y_4 \ldots_{(2)}\,,$$

donde $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ para todo $i \geq 1$. Nótese que los elementos de X poseen una única expansión en base 2. Como

$$Tx = x_1, x_2 x_3 x_4 \ldots_{(2)}\,, \qquad Ty = y_1, y_2 y_3 y_4 \ldots_{(2)}\,,$$

y ambos puntos pertenecen a $(1, 2) = (01_{(2)}, 10_{(2)})$ se deduce que $x_1 = y_1 = 1$. Aplicando nuevamente T se obtiene que

$$T^2 x = x_1 x_2, x_3 x_4 \ldots_{(2)}\,, \qquad T^2 y = y_1 y_2, y_3 y_4 \ldots_{(2)}\,,$$

pertenecen a $(2, 4) = (010_{(2)}, 100_{(2)})$ y a la vez ambos pertenecen a U o ambos a V. En el primer caso se tiene $T^2 x, T^2 y \in (2, 3) = (010_{(2)}, 011_{(2)})$ y por lo tanto $x_2 = y_2 = 0$. En el segundo caso se cumple que $T^2 x, T^2 y \in (3, 4) = (011_{(2)}, 100_{(2)})$ y por lo tanto $x_2 = y_2 = 1$. En resumen, se concluye que $x_2 = y_2$.

Ahora, como $T^2 x, T^2 y \in (2, 4) = (010_{(2)}, 100_{(2)})$ una nueva aplicación de T arroja que

$$T^3 x = x_1 x_2 x_3, x_4 \ldots_{(2)}\,, \qquad T^3 y = y_1 y_2 y_3, y_4 \ldots_{(2)}\,,$$

pertenecen a $(4, 8) = (0100_{(2)}, 1000_{(2)})$ y también ambos a U o ambos a V. En el primer caso $T^2 x, T^2 y \in (4, 5) \cup (6, 7) = (0100_{(2)}, 0101_{(2)}) \cup (0110_{(2)}, 0111_{(2)})$ y por lo tanto $x_3 = y_3 = 0$. De forma similar, en el segundo caso se concluye que $x_3 = y_3 = 1$. Así que en cualquier caso $x_3 = y_3$. Continuando con este procedimiento es posible ver que $x_i = y_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$, y por lo tanto $x = y$. Esto muestra que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T.

Sea $h \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, el homeomorfismo $h(x) = \log x$, $X' = h(X)$ y $T' \colon X' \to X'$, el homeomorfismo $T' = h \circ T \circ h^{-1}$. Como T' es conjugado a T se tiene que T' es o-expansivo con cubrimiento de expansividad finito $\mathcal{U}_1 = h(\mathcal{U})$ (Proposición 1.1.15). Finalmente, nótese que X_1 no es compacto y que $T'(y) = y + \log 2$ no es expansivo métrico con la métrica usual de $\mathbb{R}$ restringida a X'. Sin embargo T' sí es expansivo métrico respecto a la métrica compatible d' de X' dada por $d'(x, y) = |x^3 - y^3|$, $x, y \in X'$.

Recuérdese que un espacio topológico se dice que es un *espacio* $\mathcal{T}_1$ sii dados puntos diferentes $x, y \in X$ existe un entorno de x que no contiene a y (y por lo tanto existe también un entorno de y que no contiene a x).

Proposición 1.1.11. *Si un espacio topológico admite un homeomorfismo o-expansivo entonces es un espacio $\mathcal{T}_1$, pero no necesariamente es un espacio de Hausdorff.*

Demostración. Sean $T\colon X \to X$ un homeomorfismo o-expansivo y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de o-expansividad para T. Dados puntos diferentes $x, y \in X$ se tiene que existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\{T^n x, T^n y\} \not\prec \mathcal{U}$. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $T^n x \in U$, y necesariamente $T^n y \notin U$. Entonces $T^{-n}U$ es un entorno de x que no contiene a y, y X es un espacio $\mathcal{T}_1$. La afirmación final es consecuencia del Ejemplo 1.1.7 donde se muestra un homeomorfismo o-expansivo en un espacio no Hausdorff. □

Una topología compacta y $\mathcal{T}_1$ bien conocida es la *topología de los complementos finitos*. Si el espacio es infinito entonces esta topología no es Hausdorff.

Proposición 1.1.12. *Un espacio infinito X con la topología de los complementos finitos no admite homeomorfismos o-expansivos.*

Demostración. En efecto, supóngase que existe $T\colon X \to X$ o-expansivo. Dado que X es compacto, por la Observación 1.1.8 existe un cubrimiento de o-expansividad finito $\mathcal{U}$ para T. Puede suponerse que $\varnothing \notin \mathcal{U}$. Considérese el conjunto finito $A = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} X \setminus U$. Notar que si $x \notin A$ e $y \in X$ entonces $\{x, y\} \prec \mathcal{U}$.

Si todo punto de X es periódico, como A es finito y X infinito, existen al menos dos órbitas periódicas diferentes una de las cuales nunca visita A. De modo que tomando puntos x e y uno en cada una de estas órbitas, se tiene $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, lo cual contradice la o-expansividad. Si en cambio existe algún punto no periódico $x \in X$, como A es finito existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x \notin A$ para todo $|n| \geq N$. Luego los puntos x e $y = T^{2N}x$ contradicen la o-expansividad ya que para todo $n \in \mathbb{Z}$ a lo sumo uno de los puntos $T^n x$ o $T^n y$ está en A y por lo tanto $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$. Esto concluye la prueba. □

Proposición 1.1.13. *Si un espacio topológico compacto y de Hausdorff admite un homeomorfismo o-expansivo entonces es un espacio metrizable.*

Demostración. Sea X un espacio topológico compacto y de Hausdorff que admite un homeomorfismo o-expansivo $T\colon X \to X$ y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de o-expansividad para T. Dado $x \in X$ sea $U_x \in \mathcal{U}$ entorno de x. Como X es compacto y de Hausdorff puede construirse un entorno abierto V_x de x tal que $\overline{V}_x \subseteq U_x$. Extrayendo un subcubrimiento finito del cubrimiento $\{V_x : x \in X\}$, se obtiene entonces un cubrimiento abierto y finito $\mathcal{V}$ de X tal que $\{\overline{V} : V \in \mathcal{V}\}$ refina a $\mathcal{U}$, y que por lo tanto tiene la propiedad de que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n \overline{V}_n$ contiene a lo sumo un punto para toda bi-sucesión $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{Z}}$ (Proposición 1.1.4).

Dado $x \in X$, como $T^n\mathcal{V}$ es un cubrimiento de X para cada $n \in \mathbb{Z}$, es posible entonces hallar una bi-sucesión $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{V}^{\mathbb{Z}}$ tal que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n \overline{V}_n = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} T^n V_n = \{x\}$. Si W es un entorno cualquiera de x, un argumento de compacidad permite encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$\bigcap_{|n|\leq N} T^n\overline{V}_n \subseteq W$. Por lo tanto la familia de intersecciones finitas de los elementos de $\mathcal{V}$ y sus iterados forman una base numerable de la topología de X. Como además X es compacto y de Hausdorff, aplicando el Teorema de metrizabilidad de Urysohn [25, Theorem 16, p. 125] se concluye que X es metrizable. □

Ejemplo 1.1.14. El cuadrado $X = [0,1] \times [0,1]$ con la topología inducida por el orden lexicográfico no admite homeomorfismos o-expansivos. En efecto X es un espacio compacto y de Hausdorff que no es metrizable. Luego X no puede soportar un homeomorfismo o-expansivo en virtud de la Proposición 1.1.13.

1.1.C. Algunas propiedades de la o-expansividad

Las siguientes proposiciones son generalizaciones al caso de homeomorfismos o-expansivos de propiedades bien conocidas de homeomorfismos expansivos métricos.

Proposición 1.1.15. *Para $i = 1, 2$ sean X_i un espacio topológico y $T_i\colon X_i \to X_i$ un homeomorfismo. Si T_1 y T_2 son conjugados, es decir que existe un homeomorfismo $h\colon X_1 \to X_2$ tal que $h \circ T_1 = T_2 \circ h$, y T_1 es o-expansivo entonces T_2 es o-expansivo.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}_1$ un cubrimiento de o-expansividad para T_1. Es fácil ver que $h(\mathcal{U}_1) = \{h(U) : U \in \mathcal{U}_1\}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T_2. □

Proposición 1.1.16. *Si X es un espacio topológico, $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo o-expansivo e $Y \subseteq X$ es un subconjunto invariante bajo T, entonces $T|_Y\colon Y \to Y$ es o-expansivo.*

Demostración. En efecto, si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T entonces $\mathcal{U}_Y = \{U \cap Y : U \in \mathcal{U}\}$ es un cubrimiento de o-expansividad para $T|_Y$. □

Proposición 1.1.17. *Para $i = 1, 2$ sean X_i un espacio topológico y $T_i\colon X_i \to X_i$ un homeomorfismo o-expansivo. Entonces el producto $T_1 \times T_2\colon X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$, dado por $T_1 \times T_2(x, y) = (T_1x, T_2y)$ si $(x, y) \in X_1 \times X_2$, es un homeomorfismo o-expansivo.*

Demostración. Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{U}_i$ un cubrimiento de o-expansividad para T_i. Es fácil verificar que $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 = \{U_1 \times U_2 : U_i \in \mathcal{U}_i, i = 1, 2\}$ es un cubrimiento de o-expansividad para $T_1 \times T_2$. □

Proposición 1.1.18. *Sean X un espacio topológico, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo y $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Entonces T es o-expansivo sii T^m es o-expansivo.*

Demostración. A partir de la definición es claro que T es o-expansivo sii T^{-1} es o-expansivo, por lo que puede asumirse $m \geq 1$. Si T^m es o-expansivo con cubrimiento de o-expansividad $\mathcal{U}$ entonces por el ítem 3) de la Proposición 1.1.4 $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^{mn}\mathcal{U}$ es el cubrimiento por singuletes. Como $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \prec \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^{mn}\mathcal{U}$ se tiene que $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U}$ es también el cubrimiento por singuletes.

Por lo tanto $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T y T es o-expansivo. Recíprocamente, si T es o-expansivo y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T sea $\mathcal{V} = \bigwedge_{k=0}^{m-1} T^k\mathcal{U}$. Entonces

$$\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^{mn}\mathcal{V} = \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^{mn}\Big(\bigwedge_{k=0}^{m-1} T^k\mathcal{U}\Big) = \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\bigwedge_{k=0}^{m-1} T^{mn+k}\mathcal{U}\Big) = \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U},$$

es el cubrimiento por singuletes. Luego $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T^m en virtud del ítem 3) de la Proposición 1.1.4 y T^m es o-expansivo. □

El cardinal de un conjunto A se denota con $|A|$. Si X es un conjunto, $T\colon X \to X$ una función y $m \geq 1$ se denota el conjunto de los puntos periódicos de periodo a lo sumo m con

$$\mathrm{Per}_m(T) = \{x \in X : T^m x = x\}.$$

Proposición 1.1.19. *Sean X un espacio topológico, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo o-expansivo, $\mathcal{U}$ un cubrimiento de o-expansividad para T y $m \geq 1$. Entonces $|\mathrm{Per}_m(T)| \leq |\mathcal{U}|^m$.*

Demostración. Para cada punto fijo $x \in \mathrm{Per}_1(T)$ existe un único $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$ ya que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad. Existe entonces una función inyectiva $\mathrm{Per}_1(T) \to \mathcal{U}$ y por lo tanto $|\mathrm{Per}_1(T)| \leq |\mathcal{U}|$. Esto prueba lo afirmado para el caso $m = 1$. Si ahora $m \geq 1$ es arbitrario, nótese que $\mathrm{Per}_m(T) = \mathrm{Per}_1(T^m)$ de donde, por lo ya demostrado, $|\mathrm{Per}_m(T)| = |\mathrm{Per}_1(T^m)| \leq |\mathcal{V}|$ si $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T^m. Ahora bien, por la demostración de la Proposición 1.1.18 $\mathcal{V} = \bigwedge_{k=0}^{m-1} T^k\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T^m y, como es fácil ver, su cardinal verifica $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{U}^m| = |\mathcal{U}|^m$. De aquí que $|\mathrm{Per}_m(T)| \leq |\mathcal{U}|^m$. □

Recuérdese que un espacio topológico X se dice *espacio de Lindelöf* sii todo cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable.

Corolario 1.1.20. *Sean $T\colon X \to X$ un homeomorfismo o-expansivo y $\mathrm{Per}(T)$ el conjunto de puntos periódicos de T.*

1) *Si X es compacto entonces $\mathrm{Per}_m(T)$ es finito para todo $m \geq 1$ y $\mathrm{Per}(T)$ es numerable.*

2) *Si X es de Lindelöf entonces $\mathrm{Per}(T)$ es numerable.*

Demostración. Si X es compacto, por la Observación 1.1.8 T admite un cubrimiento de o-expansividad finito. Por lo tanto 1) se deduce inmediatamente de la Proposición 1.1.19. Si X es de Lindelöf y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T, entonces es posible extraer un subcubrimiento numerable de $\mathcal{U}$ que también será cubrimiento de o-expansividad para T. La primera afirmación de 2) se deduce entonces de la Proposición 1.1.19. □

Como caso particular del ítem 2) del Corolario 1.1.20 se obtiene el siguiente resultado para homeomorfismos expansivos métricos.

Corolario 1.1.21. *Si X es un espacio métrico separable y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo expansivo métrico entonces* $\mathrm{Per}(T)$ *es numerable.*

Demostración. La afirmación es consecuencia de que todo espacio métrico separable es de Lindelöf (de hecho tiene base numerable) y la Proposición 1.1.3: si T es expansivo métrico entonces es o-expansivo. Luego por el ítem 2) del Corolario 1.1.20 $\mathrm{Per}(T)$ es numerable. □

1.2. Expansividad por refinamientos

En esta sección se introduce una segunda noción de expansividad para homeomorfismos de un espacio topológico arbitrario: la *expansividad por refinamientos*. Esta noción extiende el concepto de *expansividad uniforme*, propiedad que posee cualquier homeomorfismo expansivo de un espacio métrico compacto. Los homeomorfismos expansivos por refinamientos tienen propiedades topológicas diferentes, y en cierto sentido complementarias, a las de los órbita-expansivos. Para ellos es posible extraer conclusiones más fuertes desde el punto de vista topológico, es decir en cuanto a propiedades de los conjuntos abiertos, pero no así desde el punto de vista de la dinámica de los puntos del espacio cuando éste no tiene propiedades de separación suficientes. Sin embargo, en el caso de espacios compactos con la propiedad de separación $\mathcal{T}_1$ todo homeomorfismo expansivo por refinamientos es también órbita expansivo. Por lo tanto, en esta clase de espacios se tienen conjugados los dos tipos de expansividad, permitiendo obtener mayor cantidad de resultados novedosos.

En §1.2.A se motiva y define la expansividad por refinamientos y se discuten definiciones equivalentes. Los primeros ejemplos y propiedades básicas, así como la vinculación con la órbita expansividad, se discuten en §1.2.B. En §1.2.C se tratan propiedades relativas a conjugados, productos, restricciones y potencias de homeomorfismos expansivos por refinamientos, y se generaliza a este contexto un resultado sobre puntos asintóticos (Proposición 1.2.20). En §1.2.D (Teorema 1.2.25) se extiende para esta clase de sistemas dinámicos el resultado de Mañé [28] sobre la dimensión topológica de un espacio que soporta un homeomorfismo expansivo, y en 1.2.E (Teorema 1.2.30) se considera el caso de *expansividad por refinamientos al futuro*, demostrando que al igual que en al caso métrico [13, 34] homeomorfismos de este tipo necesariamente deben estar definidos en un conjunto finito. Finalmente, en §1.2.F, se da una construcción canónica que permite obtener un sistema dinámico con la deseada propiedad de separación $\mathcal{T}_1$ a partir de un sistema dinámico cualquiera, y se la vincula con la expansividad por refinamientos.

1.2.A. Definición de homeomorfismo expansivo por refinamientos

Se recuerda a continuación la definición de expansividad uniforme para un homeomorfismo de un espacio métrico.

Definición 1.2.1. Sean (M, d) un espacio métrico y $T\colon M \to M$ un homeomorfismo. Se dice que f es *uniformemente expansivo* sii existe $\alpha > 0$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x, y \in M \text{ y } d(T^n x, T^n y) < \alpha \text{ para todo } |n| \leq N \text{ implica } d(x, y) \leq \varepsilon.$$

Una constante α como la anterior se denominará *constante de expansividad uniforme* para T.

Si (M, d) es un espacio métrico y $\alpha > 0$ considérese el cubrimiento abierto $\mathcal{U}_\alpha$ de M formado por todas las bolas de radio $\alpha/2$. Entonces, para $x, y \in M$ la condición $\{x, y\} \prec \mathcal{U}_\alpha$ implica $d(x, y) < \alpha$. Por lo tanto, si $T\colon M \to M$ es un homeomorfismo, $x, y \in M$ y $N \in \mathbb{N}$, la condición "$d(T^n x, T^n y) < \alpha$ para todo $|n| \leq N$" que aparece en la Definición 1.2.1 es consecuencia de cualquiera de las siguientes condiciones equivalentes

$$\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}_\alpha \ \forall\, |n| \leq N \quad \text{sii} \quad \{x, y\} \prec T^{-n}\mathcal{U}_\alpha \ \forall\, |n| \leq N \quad \text{sii} \quad \{x, y\} \prec \bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U}_\alpha.$$

De esta forma se obtiene que si T es uniformemente expansivo entonces existe $\alpha > 0$ tal que el cubrimiento $\mathcal{U}_\alpha$ tiene la propiedad de que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada miembro de $\bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U}_\alpha$ tiene diámetro[4] menor o igual que ε, es decir tal que $\operatorname{diam}\big(\bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U}_\alpha\big) \leq \varepsilon$. Se tiene entonces el siguiente resultado.

Lema 1.2.2. *Sean (M, d) un espacio métrico compacto y $T\colon M \to M$ un homeomorfismo. Entonces T es uniformemente expansivo sii existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\lim_{N \to +\infty} \operatorname{diam}\Big(\bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U}_\alpha\Big) = 0,$$

donde $\mathcal{U}_\alpha$ es el cubrimiento de M formado por todas las bolas de radio $\alpha/2$.

Demostración. Si T es uniformemente expansivo, tomando una constante de expansividad uniforme $\alpha > 0$ para T, se tiene que el límite aludido es 0 como surge de lo expuesto previo al enunciado de este lema. Recíprocamente, si existe $\alpha > 0$ tal que el límite enunciado es 0, entonces tomando $\alpha' > 0$ un número de Lebesgue de $\mathcal{U}_\alpha$ se obtiene que α' es una constante de expansividad uniforme para T y T es uniformemente expansivo. □

Esta reformulación del concepto de expansividad uniforme sugiere entonces la siguiente definición de expansividad que tiene sentido en un espacio topológico arbitrario.

Definición 1.2.3. Un homeomorfismo $T\colon X \to X$ de un espacio topológico X se dice *expansivo por refinamientos* (abrev. *r-expansivo*) sii existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que

$$\text{para todo cubrimiento abierto } \mathcal{V} \text{ de } X \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U} \prec \mathcal{V}.$$

Un tal cubrimiento $\mathcal{U}$ se denomina *cubrimiento de r-expansividad para T*.

[4]Si M es un espacio métrico y $A \subseteq M$ el *diámetro* de A es $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$. Si $\mathcal{U}$ es una colección de subconjuntos de M el diámetro de $\mathcal{U}$ es $\operatorname{diam}(\mathcal{U}) = \sup\{\operatorname{diam}(U) : U \in \mathcal{U}\}$.

Compárese la condición introducida en la Definición 1.2.3 con la condición enunciada en el ítem 3) de la Proposición 1.1.4.

Observación 1.2.4. Si $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo r-expansivo y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad, entonces todo cubrimiento abierto que refine a $\mathcal{U}$, en particular todo subcubrimiento, es también un cubrimiento de r-expansividad para T. En consecuencia, si X es compacto, el cubrimiento de r-expansividad $\mathcal{U}$ de la Definición 1.2.3 puede suponerse finito. Recíprocamente, si existe un cubrimiento de r-expansividad finito $\mathcal{U}$ para T entonces X es necesariamente compacto, ya que todo cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X será refinado por un cubrimiento de la forma $\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}$ para algún $N \in \mathbb{N}$, y como este último es un cubrimiento finito se deduce que $\mathcal{V}$ posee un subcubrimiento finito. Compárese este hecho con lo mencionado en la Observación 1.1.8 y el Ejemplo 1.1.9.

Proposición 1.2.5. *Sean M un espacio métrico compacto y $T\colon M \to M$ un homeomorfismo. Entonces T es (uniformemente) expansivo sii T es r-expansivo.*

Demostración. Supóngase que T es uniformemente expansivo, con constante de expansividad uniforme α. Entonces por el Lema 1.2.2 se tiene que

$$\lim_{N\to+\infty} \operatorname{diam}\Big(\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}_\alpha\Big) = 0,$$

donde $\mathcal{U}_\alpha$ es el cubrimiento por bolas de radio $\alpha/2$. Luego, dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de M, la compacidad asegura la existencia de un número de Lebesgue fuerte[5] $\varepsilon > 0$ para $\mathcal{V}$. Entonces, tomando $N \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{diam}\big(\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}_\alpha\big) < \varepsilon$, se obtiene que $\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}_\alpha \prec \mathcal{V}$. Luego $\mathcal{U}_\alpha$ es un cubrimiento de r-expansividad para T y T es r-expansivo.

Recíprocamente, si T es r-expansivo con cubrimiento de expansividad $\mathcal{U}$, como M es compacto existe $\alpha > 0$ un número de Lebesgue fuerte para $\mathcal{U}$. Notar que entonces $\mathcal{U}_\alpha$, el cubrimiento por bolas de radio $\alpha/2$, refina a $\mathcal{U}$. Dado $\varepsilon > 0$ sea $\mathcal{V} = \mathcal{U}_\varepsilon$ el cubrimiento de M por bolas de radio $\varepsilon/2$. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T y $\mathcal{U}_\alpha \prec \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_\alpha$ es también cubrimiento de r-expansividad para T, luego existe $N > 0$ tal que $\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}_\alpha \prec \mathcal{V}$. Por lo tanto $\operatorname{diam}\big(\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}_\alpha\big) \leq \varepsilon$. Finalmente como la sucesión $N \mapsto \operatorname{diam}\big(\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}_\alpha\big)$ es decreciente se obtiene que

$$\lim_{N\to+\infty} \operatorname{diam}\Big(\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}_\alpha\Big) = 0.$$

Entonces T es uniformemente expansivo en virtud del Lema 1.2.2. $\square$

Al igual que en el caso de la órbita-expansividad (Proposición 1.1.5) se tiene la siguiente

[5] Un *número de Lebesgue fuerte* para un cubrimiento $\mathcal{V}$ de un espacio métrico M es un número $\lambda > 0$ tal que si $A \subseteq M$ y $\operatorname{diam} A < \lambda$ entonces $A \prec \mathcal{V}$. Todo cubrimiento abierto de un espacio métrico compacto admite un número de Lebesgue fuerte.

caracterización de la expansividad por refinamientos en términos de entornos de la diagonal, válida en el caso compacto. Compárese con los ítems 1) y 2) de la Observación 1.1.6.

Proposición 1.2.6. *Sean X un espacio topológico compacto y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1) *T es r-expansivo.*

2) *Existe un entorno $\mathbb{U}$ de Δ_X en $X \times X$ con la propiedad de que para todo entorno abierto $\mathbb{V}$ de Δ_X existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{|n|\leq N} T^n\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$.*

Demostración. Si T es r-expansivo con cubrimiento de r-expansividad $\mathcal{U}$, sea $\mathbb{U} = \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U \times U$. Dado un entorno $\mathbb{V}$ de Δ_X sea $\mathcal{V}$ el cubrimiento abierto de X dado por $\mathcal{V} = \{V_x : x \in X\}$, donde para cada $x \in X$, V_x es un entorno abierto de x tal que $V_x \times V_x \subseteq \mathbb{V}$. Sea $N \in N$ tal que $\mathcal{W} = \bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Entonces

$$\bigcap_{|n|\leq N} T^n\mathbb{U} = \bigcap_{|n|\leq N} T^n\Big(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\times U\Big) = \bigcap_{|n|\leq N}\bigcup_{U\in\mathcal{U}} T^nU\times T^nU = \bigcup_{W\in\mathcal{W}} W\times W \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V\times V \subseteq \mathbb{V}.$$

Luego, $\bigcap_{|n|\leq N} T^n\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$ como se deseaba.

Recíprocamente, dado $\mathbb{U}$ como en el enunciado, para cada $x \in X$ sea U_x un entorno abierto de x tal que $U_x \times U_x \subseteq \mathbb{U}$. Se probará que el cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T. En efecto, dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X, que puede suponerse finito ya que X es compacto, sea $\mathbb{V}$ el entorno abierto de Δ_X dado por $\mathbb{V} = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \times V$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{|n|\leq N} T^n\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$. Llamando $\mathcal{W} = \bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U}$, se tiene

$$\bigcap_{|n|\leq N} T^n\mathbb{U} \supseteq \bigcap_{|n|\leq N} T^n\Big(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U\times U\Big) = \bigcap_{|n|\leq N}\bigcup_{U\in\mathcal{U}} T^nU\times T^nU = \bigcup_{W\in\mathcal{W}} W\times W.$$

Luego, $\bigcup_{W\in\mathcal{W}} W \times W \subseteq \bigcup_{V\in\mathcal{V}} V \times V$, de donde, como $\mathcal{V}$ es finito[6], se deduce que $\mathcal{W} \prec \mathcal{V}$ como se deseaba. □

La condición que se introduce en la siguiente definición ha de compararse con la condición 2) de la Proposición 1.1.4 y asimismo con lo expresado en el ítem 3) de la Observación 1.1.6.

Definición 1.2.7. Sean X un espacio topológico y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Se dice que T es *puntualmente expansivo por refinamientos* sii existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que

> para todo cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X y toda bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{|n|\leq N} T^nU_n \prec \mathcal{V}$.

Un tal cubrimiento $\mathcal{U}$ se denomina *cubrimiento de r-expansividad puntual.*

[6] Se usa aquí que si $A, A_1, \ldots, A_n$ son conjuntos tales que $A \times A \subseteq A_1 \times A_1 \cup \cdots \cup A_n \times A_n$. entonces $A \subseteq A_i$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Es claro que la r-expansividad implica la r-expansividad puntual ya que todo cubrimiento de r-expansividad es un cubrimiento de r-expansividad puntual. De hecho la diferencia entre ambos conceptos radica en que el "N" de la definición de r-expansividad puntual depende en principio, además del cubrimiento $\mathcal{V}$, de la bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$, en tanto que la definición de r-expansividad requiere que "N" sea el mismo para todas las bi-sucesiones $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$. Sin embargo, al menos en el caso compacto, ambas nociones son equivalentes como lo muestra el siguiente resultado.

Proposición 1.2.8 ([26, Lemma 2.3])**.** *Si X es un espacio topológico compacto y $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo puntualmente r-expansivo, entonces T es r-expansivo. De hecho todo cubrimiento de r-expansividad puntual finito es también un cubrimiento de r-expansividad.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de r-expansividad puntual para T. Como X es compacto y todo refinamiento, en particular todo subcubrimiento, de un cubrimiento de r-expansividad puntual es también un cubrimiento de r-expansividad puntual, $\mathcal{U}$ puede elegirse finito.

Supóngase que $\mathcal{U}$ no es un cubrimiento de r-expansividad. Entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ tal que $\bigwedge_{|n|\le N} T^n\mathcal{U} \not\prec \mathcal{V}$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, existen bi-sucesiones $\left(U_n^N\right)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$, $N \in \mathbb{N}$, tales que

$$\bigcap_{|n|\le N} T^n U_n^N \not\prec \mathcal{V} \qquad \text{para todo } N \in \mathbb{N}.$$

Se construye ahora una bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ de manera inductiva como sigue: como $\mathcal{U}$ es finito existe $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $U_0 = U_0^N$ para infinitos $N \in \mathbb{N}$; dados $U_{-n}, \dots, U_n \in \mathcal{U}$ con $n \ge 0$, tales que $U_k = U_k^N$ si $|k| \le n$ para infinitos $N \in \mathbb{N}$, como $\mathcal{U}$ es finito existen $U_{-n-1}, U_{n+1} \in \mathcal{U}$ tales que $U_k = U_k^N$ si $|k| \le n+1$ para infinitos $N \in \mathbb{N}$. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad puntual existe $M \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{|n|\le M} T^n U_n \prec \mathcal{V}$. Por la definición de $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se tiene que $U_k = U_k^N$ si $|k| \le M$ para infinitos $N \in \mathbb{N}$, luego existe $N \ge M$ tal que $U_k = U_k^N$ si $|k| \le M$. Pero entonces para este N se verifica

$$\bigcap_{|n|\le N} T^n U_n^N \subseteq \bigcap_{|n|\le M} T^n U_n^N = \bigcap_{|n|\le M} T^n U_n \prec \mathcal{V},$$

lo cual es absurdo. Esto concluye la prueba. □

1.2.B. Ejemplos y primeras propiedades

Es claro que la noción de expansividad por refinamientos extiende estrictamente la de expansividad métrica. Cualquier ejemplo de un homeomorfismo r-expansivo en un espacio no metrizable, por ejemplo no Hausdorff, da cuenta de ello. Sin embargo, si se desean obtener resultados que hablen de la dinámica de los puntos, similares a los que se conocen en el contexto métrico, será necesario suponer propiedades de separación en el espacio en el que se trabaja. Esto se debe principalmente a que en la definición de r-expansividad no se mencionan en absoluto los puntos del espacio, solo la acción del homeomorfismo sobre los conjuntos abiertos.

Los siguientes ejemplos intentan justificar la necesidad de introducir propiedades de separación del espacio para estudiar homeomorfismos r-expansivos, concretamente la propiedad de separación $\mathcal{T}_1$ como se tenía en el caso de sistemas o-expansivos (Proposición 1.1.11).

Ejemplo 1.2.9. Si X es cualquier conjunto con la topología indiscreta, entonces cualquier biyección $T\colon X \to X$ es r-expansivo con cubrimiento de r-expansividad $\mathcal{U} = \{X\}$. En particular, si se toma $T = id_X$ la función identidad, entonces T es r-expansivo y sin embargo todos los puntos son fijos.

Ejemplo 1.2.10. Sea $X = \mathbb{R}$ con la topología $\tau = \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}, \varnothing\}$ y $T\colon X \to X$, $T = id_X$. En este caso el espacio X es $\mathcal{T}_0$ (dados puntos diferentes de X alguno de ellos posee un entorno que no contiene al otro) y no es $\mathcal{T}_1$. Nuevamente todos los puntos son fijos y sin embargo T es r-expansivo con cubrimiento de r-expansividad $\mathcal{U} = \{X\}$.

Proposición 1.2.11. *Sean X un espacio topológico $\mathcal{T}_1$ y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo. Se verifican las siguientes propiedades*

1) Todo cubrimiento de r-expansividad para T es también un cubrimiento de o-expansividad para T. En particular T es o-expansivo.

2) Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T, entonces la familia

$$\mathcal{B} = \left\{\bigcap\nolimits_{|n|\leq N} T^n U_n : N \in \mathbb{N}, U_n \in \mathcal{U} \ \textit{si}\ |n| \leq N\right\}$$

es una base de X.

Demostración. 1) Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de r-expansividad para T. Dada una bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$, considérense $x, y \in X$ puntos diferentes arbitrarios. Como X es un espacio $\mathcal{T}_1$ el cubrimiento $\mathcal{V} = \big\{X \setminus \{x\}, X \setminus \{y\}\big\}$ es abierto. Entonces, por la r-expansividad, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, y en particular $\bigcap_{|n|\leq N} T^n U_n \prec \mathcal{V}$. Luego $\{x, y\} \not\subseteq \bigcap_{|n|\leq N} T^n U_n$ y entonces $\{x, y\} \not\subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n$. Como $x, y \in X$ son puntos diferentes arbitrarios, esto significa que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n$ contiene a lo sumo un punto para toda bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$. En consecuencia $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T (Proposición 1.1.4) y T es o-expansivo.

2) Sean $x \in X$ y V un entorno abierto de x. Como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento, existe una bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{U}^{\mathbb{Z}}$ tal que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n$. Considérese el cubrimiento abierto $\mathcal{V} = \big\{X \setminus \{x\}, V\big\}$. Por la r-expansividad existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, y en particular $\bigcap_{|n|\leq N} T^n U_n \prec \mathcal{V}$. Entonces, como $x \in \bigcap_{|n|\leq N} T^n U_n$, necesariamente se tiene $\bigcap_{|n|\leq N} T^n U_n \subseteq V$. Por lo tanto la familia $\mathcal{B}$ es base de X. $\square$

Observación 1.2.12. La condición del ítem 2) de la Proposición 1.2.11, a saber que la familia

$$\mathcal{B} = \Big\{ \bigcap_{|n| \leq N} T^n U_n : N \in \mathbb{N}, U_n \in \mathcal{U} \text{ si } |n| \leq N \Big\}$$

sea una base de X, puede interpretarse como una noción débil de r-expansividad. En efecto, si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto y finito de X y $N \in \mathbb{N}$ llámese *N-itinerario* de x a toda sucesión $(U_n)_{n=-N}^{n=N}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $x \in \bigcap_{|n| \leq N} T^n U_n$, es decir $T^n x \in U_{-n}$, para todo $|n| \leq N$. Entonces $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad (puntual) sii dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $x \in X$, el conjunto de puntos $y \in X$ que comparten algún N-itinerario de x refina a $\mathcal{V}$. Por otro lado, si el espacio X es $\mathcal{T}_1$, puede probarse que el cubrimiento $\mathcal{U}$ verifica la condición del ítem 2) de la Proposición 1.2.11 sii dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $x \in X$ el conjunto de puntos $y \in X$ que comparten todos los N-itinerarios de x refina a $\mathcal{V}$.

En ambos casos la idea es la misma, la de la expansividad uniforme: "los puntos que acompañan a x en un intervalo de tiempo $-N, \dots, N$ suficientemente grande deberán estar tan cerca de x como se haya preestablecido"; pero cambia el significado de "acompañan", que es más débil en el primer caso y más fuerte en el segundo. De forma análoga es posible enunciar también una noción débil de o-expansividad.

Corolario 1.2.13. *Si un espacio topológico compacto y de Hausdorff admite un homeomorfismo r-expansivo entonces es un espacio metrizable.*

Demostración. Supóngase que X admite un homeomorfismo r-expansivo T y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de r-expansividad para T. Como X es compacto, por la Observación 1.2.4 puede suponerse que $\mathcal{U}$ es finito. Luego la base $\mathcal{B}$ del ítem 2) de la Proposición 1.2.11 es una base numerable de X. Como además X es compacto y de Hausdorff, aplicando el Teorema de metrizabilidad de Urysohn [25, Theorem 16, p. 125] se concluye que X es metrizable. □

En el siguiente ejemplo se muestra una construcción general que permite obtener homeomorfismos r-expansivos en espacios compactos que no son metrizables, pero que satisfacen la propiedad de separación $\mathcal{T}_1$ que es necesario suponer para obtener los resultados deseados. La construcción puede aplicarse por ejemplo a un homeomorfismo expansivo métrico.

Ejemplo 1.2.14. Dados un espacio topológico (X, τ) y un subconjunto $Y \subseteq X$ sea Z el espacio topológico que se obtiene agregando a X una copia de Y de la siguiente manera: sean $Y_1 = Y \times \{1\}$ y $Z = X \cup Y_1$ con la topología generada por la base $\tau \cup h(\tau)$, donde $h\colon Z \to Z$ es el mapa dado por $h(x) = x$ si $x \in X \setminus Y$, $h(x) = (x, 1)$ y $h(x, 1) = x$ si $x \in Y$. Nótese que con esta topología h es un homeomorfismo. Asimismo, obsérvese que si Y contiene algún punto de acumulación y de $X \setminus Y$ entonces Z no es de Hausdorff, ya que no existen entornos disjuntos de los puntos y e $(y, 1)$. Por otro lado, si X es $\mathcal{T}_1$ o compacto entonces Z también lo es.

Si ahora X es compacto y $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo r-expansivo tal que $T(Y) = Y$ entonces el homeomorfismo $S\colon Z \to Z$ dado por $S(x) = T(x)$ si $x \in X$ y $S(x,1) = (T(x),1)$ si $x \in Y$ es también r-expansivo. En efecto, si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T se probará que $\mathcal{W} = \mathcal{U} \cup h(\mathcal{U})$ es un cubrimiento de r-expansividad para S. Para ello, en virtud de la Proposición 1.2.8 basta probar que $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de r-expansividad puntual. Dados un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de Z y una bi-sucesión $(W_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{W}^{\mathbb{Z}}$, se distinguen tres casos:

1) Si $W_n = U_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces considerando el cubrimiento abierto $\mathcal{V}_1 = \{V \cap X : V \in \mathcal{V}\}$ de X, como $\mathcal{U}$ es cubrimiento de r-expansividad puntual para T, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{|n|\le N} S^n(W_n) = \bigcap_{|n|\le N} T^n(U_n) \prec \mathcal{V}_1$. Por lo tanto, como $\mathcal{V}_1 \prec \mathcal{V}$ se obtiene que $\bigcap_{|n|\le N} S^n(W_n) \prec \mathcal{V}$.

2) Si $W_n = h(U_n)$, $U_n \in \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces considerando el cubrimiento abierto $\mathcal{V}_2 = \{h(V) \cap X : V \in \mathcal{V}\}$ de X, como $\mathcal{U}$ es cubrimiento de r-expansividad puntual para T, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{|n|\le N} T^n(U_n) \prec \mathcal{V}_2 \prec h(\mathcal{V})$. Luego, usando que $S \circ h = h \circ S$ y que $h^2 = id_Z$ se obtiene que

$$\begin{aligned}\bigcap_{|n|\le N} S^n(W_n) = \bigcap_{|n|\le N} S^n h(U_n) = \bigcap_{|n|\le N} hS^n(U_n) = \bigcap_{|n|\le N} hT^n(U_n)\\ = h\big(\bigcap_{|n|\le N} T^n(U_n)\big) \prec h^2(\mathcal{V}) = \mathcal{V}.\end{aligned}$$

3) Si $W_n = h^{k(n)}(U_n)$, $U_n \in \mathcal{U}$, $k(n) \in \{0,1\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, con algún $k(n_0) = 0$ y algún $k(n_1) = 1$, entonces $S^{n_0}(W_{n_0}) = T^{n_0}(U_{n_0}) \subseteq X$ y $S^{n_1}(W_{n_1}) = S^{n_1}h(U_{n_1}) = hT^{n_1}(U_{n_1}) \subseteq h(X)$. Luego, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, $N \ge \max\{|n_0|,|n_1|\}$, se tiene $\bigcap_{|n|\le N} S^n(W_n) \subseteq X \cap h(X) = X \setminus Y$. Por otro lado, considerando el cubrimiento abierto $\mathcal{V}_1 = \{V \cap X : V \in \mathcal{V}\}$ de X, como $\mathcal{U}$ es cubrimiento de r-expansividad puntual para T, existe $N \in \mathbb{N}$, $N \ge \max\{|n_0|,|n_1|\}$, tal que $\bigcap_{|n|\le N} T^n(U_n) \prec \mathcal{V}_1 \prec \mathcal{V}$. Combinando ambos hechos se llega entonces a que

$$\begin{aligned}\bigcap_{|n|\le N} S^n(W_n) = \bigcap_{|n|\le N} S^n h^{k(n)}(U_n) = \bigcap_{|n|\le N} h^{k(n)} S^n(U_n) = \bigcap_{|n|\le N} h^{k(n)} T^n(U_n)\\ = \bigcap_{|n|\le N} h^{k(n)} T^n(U_n) \cap (X \setminus Y) = \bigcap_{|n|\le N} h^{k(n)}\big(T^n(U_n) \cap (X \setminus Y)\big)\\ = \bigcap_{|n|\le N} T^n(U_n) \cap (X \setminus Y) \subseteq \bigcap_{|n|\le N} T^n(U_n),\end{aligned}$$

donde se ha usado que $h|_{X\setminus Y} = id_{X\setminus Y}$. Por lo tanto $\bigcap_{|n|\le N} S^n(W_n) \prec \mathcal{V}$.

1.2.C. Algunas propiedades de la r-expansividad

Las siguientes proposiciones son generalizaciones al caso de homeomorfismos r-expansivos de propiedades bien conocidas de homeomorfismos expansivos métricos.

Proposición 1.2.15. *Para $i = 1, 2$ sean X_i un espacio topológico y $T_i \colon X_i \to X_i$ un homeomorfismo. Si T_1 y T_2 son conjugados, es decir que existe un homeomorfismo $h \colon X_1 \to X_2$ tal que $h \circ T_1 = T_2 \circ h$, y T_1 es r-expansivo entonces T_2 es r-expansivo.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}_1$ un cubrimiento de r-expansividad para T_1. Es fácil ver que $h(\mathcal{U}_1) = \{h(U) : U \in \mathcal{U}_1\}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T_2. □

Un subconjunto Y de un espacio topológico X se denominará *cerrado extendido* (del inglés *extension closed*), sii todo cubrimiento $\mathcal{U}_Y$ de Y por abiertos relativos admite una extensión a un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, en el sentido de que $Y \wedge \mathcal{U} = \mathcal{U}_Y$. Esta definición, que proviene de [19, §1] (ver también [20, 21]), representa una generalización del concepto de conjunto cerrado adecuada para espacios no Hausdorff: todo subconjunto cerrado de un espacio topológico es cerrado extendido y en un espacio de Hausdorff vale el recíproco.

Proposición 1.2.16. *Si X es un espacio topológico, $T \colon X \to X$ es un homeomorfismo r-expansivo e $Y \subseteq X$ es un subconjunto cerrado extendido invariante bajo T, entonces $T|_Y : Y \to Y$ es r-expansivo.*

Demostración. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T entonces $\mathcal{U}_Y = Y \wedge \mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para $T|_Y$. En efecto, dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}_Y$ de Y, como Y es cerrado extendido, existe un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X tal que $\mathcal{V}_Y = Y \wedge \mathcal{V}$. Ahora, como $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Luego,

$$\bigwedge_{|n|\leq N} T|_Y^n \mathcal{U}_Y = \bigwedge_{|n|\leq N} T^n(Y \wedge \mathcal{U}) = \bigwedge_{|n|\leq N} Y \wedge T^n\mathcal{U} = Y \wedge \bigwedge_{|n|\leq N} T^n\mathcal{U} \prec Y \wedge \mathcal{V} = \mathcal{V}_Y,$$

como se deseaba. □

Sean X_1 y X_2 conjuntos. Dados cubrimientos $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de espacios X_1 y X_2, respectivamente, se define el cubrimiento $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ de $X_1 \times X_2$ como $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 = \{U_1 \times U_2 : U_i \in \mathcal{U}_i, i = 1, 2\}$. Si $T_1 \colon X_1 \to X_1$ y $T_2 \colon X_2 \to X_2$ son funciones se define la función $T_1 \times T_2 \colon X_1 \times X_2 \to X_1 \times X_2$ como $T_1 \times T_2(x_1, x_2) = (T_1x_1, T_2x_2)$ si $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$.

El argumento en la demostración del siguiente resultado se encuentra contenido esencialmente en la prueba de [4, Theorem 3].

Proposición 1.2.17. *Para $i = 1, 2$ sean X_i un espacio topológico compacto y $T_i \colon X_i \to X_i$ un homeomorfismo r-expansivo. Entonces $T_1 \times T_2$ es un homeomorfismo r-expansivo.*

Demostración. Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{U}_i$ un cubrimiento de r-expansividad para T_i. Se probará que $\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2$ es un cubrimiento de r-expansividad para $T_1 \times T_2$. Supóngase dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de $X_1 \times X_2$. Entonces, existe un refinamiento $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ compuesto por abiertos básicos de la forma $V_1 \times V_2$, con $V_i \subseteq X_i$ abierto, $i = 1, 2$. Por la compacidad, puede además suponerse que $\mathcal{V}' = \{V_1^{(1)} \times V_2^{(1)}, \ldots, V_1^{(k)} \times V_2^{(k)}\}$ es finito. Para cada $x_i \in X_i$ sea el conjunto abierto $V_i(x_i) = \bigcap\{V_i^{(j)} : x_i \in V_i^{(j)}, 1 \leq j \leq k\}$, $i = 1, 2$.

Para $i = 1, 2$, sea $\mathcal{V}_i = \{V_i(x_i) : x_i \in X_i\}$, que es un cubrimiento abierto de X_i. Se afirma que $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \prec \mathcal{V}'$. En efecto, si $x_1 \in X_1$ y $x_2 \in X_2$ entonces $(x_1, x_2) \in V_1^{(j)} \times V_2^{(j)}$ para algún $j \in \{1, \ldots, k\}$. Entonces, como $x_i \in V_i^{(j)}$ se deduce que $V_i(x_i) \subseteq V_i^{(j)}$, $i = 1, 2$. Es decir, $V_1(x_1) \times V_2(x_2) \subseteq V_1^{(j)} \times V_2^{(j)}$, probando lo afirmado. Se concluye que $\mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \prec \mathcal{V}$.

Ahora bien, para $i = 1, 2$, $\mathcal{V}_i$ es un cubrimiento abierto de X_i y por lo tanto, como $\mathcal{U}_i$ es un cubrimiento de r-expansividad para T_i, existe $N_i \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|n| \leq N_i} T^n \mathcal{U}_i \prec \mathcal{V}_i$. Finalmente, tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \bigwedge_{|n|\leq N} (T_1 \times T_2)^n (\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2) &= \bigwedge_{|n|\leq N} T_1^n \mathcal{U}_1 \otimes T_2^n \mathcal{U}_2 = \bigwedge_{|n|\leq N} T_1^n \mathcal{U}_1 \otimes \bigwedge_{|n|\leq N} T_2^n \mathcal{U}_2 \\ &\prec \bigwedge_{|n|\leq N_1} T_1^n \mathcal{U}_1 \otimes \bigwedge_{|n|\leq N_2} T_2^n \mathcal{U}_2 \prec \mathcal{V}_1 \otimes \mathcal{V}_2 \prec \mathcal{V}, \end{aligned}$$

como se deseaba. □

Proposición 1.2.18. *Sean X un espacio topológico, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo y $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Entonces T es r-expansivo sii T^m es r-expansivo.*

Demostración. A partir de la definición es claro que T es r-expansivo sii T^{-1} es r-expansivo, por lo que puede asumirse $m \geq 1$. Si T^m es r-expansivo con cubrimiento de r-expansividad $\mathcal{U}$ entonces dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|n|\leq N} T^{mn} \mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Luego,

$$\bigwedge_{|n|\leq mN} T^n \mathcal{U} \prec \bigwedge_{|n|\leq N} T^{mn} \mathcal{U} \prec \mathcal{V},$$

por lo que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T y T es r-expansivo.

Recíprocamente, si T es r-expansivo y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T, sea $\mathcal{U}_m = \bigwedge_{k=0}^{m-1} T^k \mathcal{U}$. Si $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\bigwedge_{|n|\leq N} T^{mn} \mathcal{U}_m = \bigwedge_{|n|\leq N} T^{mn} \left(\bigwedge_{k=0}^{m-1} T^k \mathcal{U} \right) = \bigwedge_{|n|\leq N} \left(\bigwedge_{k=0}^{m-1} T^{mn+k} \mathcal{U} \right) = \bigwedge_{n=-mN}^{mN+m-1} T^n \mathcal{U} \prec \bigwedge_{|n|\leq mN} T^n \mathcal{U}.$$

Luego, dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X es posible elegir N de modo que $\bigwedge_{|n|\leq N} T^{mn} \mathcal{U}_m \prec \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{U}_m$ es cubrimiento de r-expansividad para T^m y T^m es r-expansivo. □

A continuación se generaliza al contexto topológico el hecho bien conocido para homeomorfismos expansivos métricos de que dos puntos que se mantengan a menos de la constante de expansividad (para el futuro/pasado) son de hecho asintóticos (al futuro/pasado).

Definición 1.2.19. Sean $T\colon X \to X$ un homeomorfismo de un espacio topológico X y $x, y \in X$. Dado un cubrimiento $\mathcal{V}$ de X se dice que x e y son $\mathcal{V}$-*asintóticos* sii existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{V}$ para todo $n \geq n_0$. Se dice que x e y son *asintóticos* sii x e y son $\mathcal{V}$-asintóticos para todo cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X.

Nótese que en el caso métrico, si $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{U}_\varepsilon$ es el cubrimiento por bolas de radio ${}^{\varepsilon}/_{2}$, entonces que x e y sean $\mathcal{U}_\varepsilon$-asintóticos implica $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon$ para todo n suficientemente grande. Por otro lado, en el caso compacto, si $\mathcal{V}$ es un cubrimiento de X y $\varepsilon > 0$ es un número de Lebesgue de $\mathcal{V}$, entones $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon$ para todo n suficientemente grande implica que x e y son $\mathcal{V}$-asintóticos. En consecuencia, en el caso métrico compacto, x e y son asintóticos según la definición anterior sii $d(T^n x, T^n y) \to 0$ cuando $n \to +\infty$.

Proposición 1.2.20. *Sean $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo, $\mathcal{U}$ un cubrimiento de r-expansividad para T y $x, y \in X$. Si x e y son $\mathcal{U}$-asintóticos entonces x e y son asintóticos.*

Demostración. Sean $x, y \in X$ puntos $\mathcal{U}$-asintóticos y $\mathcal{V}$ un cubrimiento abierto de X. Por definición existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$, y por la r-expansividad existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Llamando $x' = T^{n_0+N} x$ e $y' = T^{n_0+N} y$, se tiene que $\{T^n x', T^n y'\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \geq -N$, o lo que es lo mismo $\{x', y'\} \prec T^{-n}\mathcal{U}$ para todo $n \geq -N$. Por lo tanto $\{x', y'\} \prec \bigwedge_{n \geq -N} T^{-n}\mathcal{U} = \bigwedge_{n \leq N} T^n \mathcal{U}$. Luego, para todo $k \geq 0$ se tiene que

$$\{T^k x', T^k y'\} \prec T^k\Big(\bigwedge_{n \leq N} T^n \mathcal{U}\Big) = \bigwedge_{n \leq N} T^{k+n}\mathcal{U} \prec \bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U} \prec \mathcal{V},$$

por lo que x' e y' son $\mathcal{V}$-asintóticos. Entonces también x e y son $\mathcal{V}$-asintóticos, y como esto es cierto para $\mathcal{V}$ arbitrario se concluye que x e y son asintóticos. □

1.2.D. Dimensión topológica

En este apartado se generaliza al contexto de homeomorfismos r-expansivos el siguiente resultado debido a Mañé [28].

Teorema 1.2.21. *Si X es un espacio métrico compacto que admite un homeomorfismo expansivo entonces* $\dim X$ *es finita.*

Aquí $\dim X$ hace referencia a la *dimensión topológica de Lebesgue* del espacio topológico X, cuya definición puede encontrarse por ejemplo en [30, Definition I.4]: $\dim X$ es el mínimo $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que para todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X existe un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X tal que $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ y $\operatorname{ord} \mathcal{V} \leq n+1$, donde si $\mathcal{V}$ es una familia de subconjuntos de X se define

$$\operatorname{ord} \mathcal{V} = \max\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} : \text{existe } \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V} \text{ tal que } |\mathcal{W}| = n \text{ y } \textstyle\bigcap \mathcal{W} \neq \varnothing\}.$$

Lema 1.2.22 ([28, §2, Lemma I])**.** *Sean X un espacio topológico, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo con cubrimiento de r-expansividad $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{W}$ de X tal que*

$$T^{-n}\mathcal{W} \wedge \Big(\bigwedge_{|k| \leq n} T^k \mathcal{U}\Big) \wedge T^n \mathcal{W} \prec \bigwedge_{|k| \leq n} T^k \mathcal{V},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|k|\leq N} T^k\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ y defínase $\mathcal{W} = \bigwedge_{|k|\leq N} T^k\mathcal{U}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $l \in \mathbb{Z}$ tales que $|l| \leq n$ se tiene

$$T^{-n}\mathcal{W} \wedge \Big(\bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}\Big) \wedge T^n\mathcal{W} = \Big(\bigwedge_{k=-N-n}^{N-n} T^k\mathcal{U}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{k=-n}^{n} T^k\mathcal{U}\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{k=n-N}^{n+N} T^k\mathcal{U}\Big)$$
$$\prec \bigwedge_{k=-n-N}^{n+N} T^k\mathcal{U} \prec \bigwedge_{k=l-N}^{l+N} T^k\mathcal{U} = T^l\Big(\bigwedge_{|k|\leq N} T^k\mathcal{U}\Big) = T^l\mathcal{W} \prec T^l\mathcal{V}.$$

Luego, como $|l| \leq n$ es arbitrario se concluye que

$$T^{-n}\mathcal{W} \wedge \Big(\bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}\Big) \wedge T^n\mathcal{W} \prec \bigwedge_{|l|\leq n} T^l\mathcal{V},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ como se quería. □

Definición 1.2.23. Dada una familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos de un conjunto X se denota con $\mathcal{U}^2$ la familia dada por

$$\mathcal{U}^2 = \{U_1 \cup U_2 : U_1, U_2 \in \mathcal{U}, U_1 \cap U_2 \neq \varnothing\}.$$

Observación 1.2.24. En el contexto de la Definición 1.2.23, nótese que $\mathcal{U} \prec \mathcal{U}^2$ y que $\bigcup\mathcal{U} = \bigcup\mathcal{U}^2$. Por otro lado, obsérvese que si $\mathcal{V}$ es otra familia de subconjuntos de X entonces $(\mathcal{U} \wedge \mathcal{V})^2 \prec \mathcal{U}^2 \wedge \mathcal{V}^2$: en efecto, si $A \in (\mathcal{U} \wedge \mathcal{V})^2$ entonces $A = (U_1 \cap V_1) \cup (U_2 \cap V_2)$ para ciertos $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ tales que $U_1 \cap V_1 \cap U_2 \cap V_2 \neq \varnothing$; pero entonces $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$ y $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, con lo cual $B = (U_1 \cup U_2) \cap (V_1 \cup V_2) \in \mathcal{U}^2 \wedge \mathcal{V}^2$, y como $A \subseteq B$ se obtiene lo afirmado. Finalmente, es claro que si $T\colon X \to X$ es una biyección entonces $(T\mathcal{U})^2 = T(\mathcal{U}^2)$. En suma, combinando estas propiedades se obtiene que

$$\Big(\bigwedge_{k\in I} T^k\mathcal{U}\Big)^2 \prec \bigwedge_{k\in I} T^k\mathcal{U}^2,$$

para todo subconjunto finito $I \subseteq \mathbb{N}$.

Teorema 1.2.25. *Sean X un espacio topológico compacto y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo que admite un cubrimiento de r-expansividad de la forma $\mathcal{U}^2$, donde $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X. Entonces* $\dim X < \infty$.

Demostración. Como X es compacto el cubrimiento $\mathcal{U}$ puede suponerse finito. Por el Lema 1.2.22 existe un cubrimiento abierto $\mathcal{W}$ de X tal que

$$T^{-n}\mathcal{W} \wedge \Big(\bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}^2\Big) \wedge T^n\mathcal{W} \prec \bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}, \tag{1.1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Además $\mathcal{W}$ puede elegirse finito como se desprende de la demostración del citado lema y el hecho de que $\mathcal{U}$ es finito. Se afirma que $\dim X < |\mathcal{W}|^2$. Dado $n \in \mathbb{N}$ sean los cubrimientos

$$\mathcal{W}_n = T^{-n}\mathcal{W} \wedge T^n\mathcal{W}, \quad \mathcal{U}_n = \bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U} \quad \text{y} \quad \mathcal{V}_n = T^{-n}\mathcal{W} \wedge \mathcal{U}_n \wedge T^n\mathcal{W} = \mathcal{U}_n \wedge \mathcal{W}_n.$$

Para cada $A \in \mathcal{W}_n$, sea $\mathcal{V}_n^A$ cubrimiento de A por $\mathcal{V}_n$-*componentes*, es decir

$$\mathcal{V}_n^A = \Big\{ \bigcup_{i=1}^{p} V_i : p \in \mathbb{N},\ V_1, \dots, V_p \in A \wedge \mathcal{V}_n,\ V_j \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \neq \varnothing \text{ si } 2 \leq j \leq p,$$
$$V \cap \bigcup_{i=1}^{p} V_i = \varnothing \text{ si } V \in A \wedge \mathcal{V}_n \setminus \{V_1, \dots, V_p\} \Big\}.$$

Es claro que $\mathcal{V}_n^A$ es un cubrimiento abierto de A cuyos miembros son disjuntos dos a dos. Sea $\widetilde{\mathcal{V}}_n$ el cubrimiento abierto de X dado por $\widetilde{\mathcal{V}}_n = \bigcup_{A \in \mathcal{W}_n} \mathcal{V}_n^A$. Para concluir la prueba será suficiente probar que (A) $\operatorname{ord} \widetilde{\mathcal{V}}_n \leq |\mathcal{W}|^2$ y que (B) $\widetilde{\mathcal{V}}_n \prec \mathcal{U}_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de modo que $\widetilde{\mathcal{V}}_n$ podrá elegirse más fino que cualquier cubrimiento abierto dado, ya que $\mathcal{U}_n = \bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad para T.

Para probar (B) supóngase que $\bigcup_{i=1}^{p} V_i \in \mathcal{V}_n^A \subseteq \widetilde{\mathcal{V}}_n$, donde $A \in \mathcal{W}_n$, $p \in \mathbb{N}$, $V_1, \dots, V_p \in A \wedge \mathcal{V}_n$ y $V_j \cap \bigcup_{i=1}^{j-1} V_i \neq \varnothing$ si $2 \leq j \leq p$. Por un lado, como $V_1, V_2 \prec \mathcal{V}_n \prec \mathcal{U}_n$ y $V_1 \cap V_2 \neq \varnothing$, se obtiene que $V_1 \cup V_2 \prec \mathcal{U}_n^2$. Pero

$$\mathcal{U}_n^2 = \Big(\bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U} \Big)^2 \prec \bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}^2,$$

en virtud de la Observación 1.2.24, y entonces $V_1 \cup V_2 \prec \bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}^2$. Por otro lado, como $V_1, V_2 \subseteq A \in \mathcal{W}_n$ se deduce que $V_1 \cup V_2 \prec \mathcal{W}_n = T^{-n}\mathcal{W} \wedge T^n\mathcal{W}$. De ambos hechos se sigue entonces que $V_1 \cup V_2 \prec T^{-n}\mathcal{W} \wedge \Big(\bigwedge_{|k|\leq n} T^k\mathcal{U}^2 \Big) \wedge T^n\mathcal{W}$, y entonces $V_1 \cup V_2 \prec \mathcal{U}_n$ en virtud de (1.1). De forma análoga, repitiendo el argumento anterior con $V_1 \cup V_2$ y V_3 en lugar de V_1 y V_2 se llega a que $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \prec \mathcal{U}_n$, y así sucesivamente hasta obtener que $\bigcup_{i=1}^{p} V_i \prec \mathcal{U}_n$, como se deseaba.

Finalmente, para probar (A), nótese que $\mathcal{W}_n = T^{-n}\mathcal{W} \wedge T^n\mathcal{W}$ tiene a lo sumo $|\mathcal{W}|^2$ elementos. Luego, como para todo $A \in \mathcal{W}_n$ se tiene que $\mathcal{V}_n^A$ es una partición de A, se deduce fácilmente que a lo sumo $|\mathcal{W}|^2$ miembros diferentes de $\widetilde{\mathcal{V}}_n = \bigcup_{A \in \mathcal{W}_n} \mathcal{V}_n^A$ pueden tener intersección no vacía. Es decir, $\operatorname{ord} \widetilde{\mathcal{V}}_n \leq |\mathcal{W}|^2$ como se deseaba. □

Observación 1.2.26. Es claro que para un homeomorfismo expansivo T de un espacio métrico compacto siempre existe un cubrimiento de r-expansividad de la forma $\mathcal{U}^2$. En efecto si $\mathcal{U}_0$ es un cubrimiento de r-expansividad para T basta elegir $\mathcal{U}$ como el cubrimiento de bolas de radio $\delta/2$, donde $\delta > 0$ es un número de Lebesgue fuerte de $\mathcal{U}_0$. De ese modo $\mathcal{U}^2 \prec \mathcal{U}_0$ y por lo tanto $\mathcal{U}^2$ es un cubrimiento de r-expansividad para T. En consecuencia el Teorema 1.2.25 es una extensión del Teorema de Mañé (Teorema 1.2.21).

1.2.E. Expansividad al futuro

En este apartado se considera la generalización al contexto topológico del concepto de expansividad al futuro de un homeomorfismo continuo de un espacio métrico. Se tienen definiciones de mapa o-expansivo al futuro y r-expansivo al futuro análogas a las correspondientes al caso de homeomorfismos. Para estas versiones topológicas de expansividad al futuro la gran mayoría de los resultados presentados en el contexto de homeomorfismos valen igualmente en el caso de mapas continuos, con las modificaciones necesarias evidentes en algunos casos y con demostraciones similares y en varios casos más sencillas.

Por ejemplo, se tienen definiciones equivalentes con entornos de la diagonal y bi-sucesiones de abiertos, la equivalencia con la expansividad (al futuro) métrica en el caso compacto y de Hausdorff, los resultados de expansividad de los conjugados, restricciones, productos y potencias, los resultados sobre puntos periódicos y sobre puntos asintóticos, y la finitud de la dimensión del espacio que soporta un expansivo (al futuro), por citar algunas de las propiedades desarrolladas hasta el momento.

Aquí el interés se centrará en la versión de expansividad por refinamientos al futuro, y la generalización para esta clase de sistemas del resultado que afirma que si un homeomorfismo de un espacio métrico compacto es expansivo al futuro entonces el espacio es finito [13, 34].

Si M es un espacio métrico, un mapa continuo $T\colon M \to M$ se dice *expansivo al futuro* sii existe una constante $\alpha > 0$ (llamada *constante de expansividad al futuro para* T) tal que

$$x, y \in M \text{ y } d(T^n x, T^n y) < \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ implica } x = y.$$

La siguiente es la versión "por refinamientos" de la expansividad al futuro.

Definición 1.2.27. Sean X un espacio topológico y $T\colon X \to X$ un mapa continuo. Se dice que T es *expansivo por refinamientos al futuro* sii existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que

$$\text{para todo cubrimiento abierto } \mathcal{V} \text{ de } X \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \bigwedge_{n=0}^{N} T^{-n}\mathcal{U} \prec \mathcal{V}.$$

En ese caso $\mathcal{U}$ se denomina *cubrimiento r-expansividad al futuro* para T.

Dadas familias de subconjuntos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ de un espacio X, se dice que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son *equivalentes*, y se denota $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$, sii $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ y $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$.

Lema 1.2.28. *Si $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son familias de subconjuntos de un espacio X, entonces:*

1) $\mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ implica $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \sim \mathcal{V}$. *2) $\mathcal{U} \sim \mathcal{V}$ implica $\mathcal{U} \wedge \mathcal{W} \sim \mathcal{V} \wedge \mathcal{W}$.*

Proposición 1.2.29. *Sean X un espacio topológico y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo al futuro. Entonces existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}_0$ de X tal que para todo cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^{-n}\mathcal{U}_0 \prec \mathcal{V}$.*

Demostración. Sean $\mathcal{U}$ un cubrimiento de r-expansividad al futuro para T, $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\bigwedge_{n=0}^{N} T^{-n}\mathcal{U} \prec T\mathcal{U}.$$

Aplicando T^{-1} a esta relación se obtiene que

$$\bigwedge_{n=1}^{N+1} T^{-n}\mathcal{U} \prec \mathcal{U}.$$

Pero entonces

$$\bigwedge_{n=0}^{N+1} T^{-n}\mathcal{U} = \mathcal{U} \wedge \bigwedge_{n=1}^{N+1} T^{-n}\mathcal{U} \sim \bigwedge_{n=1}^{N+1} T^{-n}\mathcal{U},$$

ya que el segundo factor del miembro central refina al primero y se aplica el ítem 1) del Lema 1.2.28. Ahora si $k \in \mathbb{Z}$, aplicando T^k a la última relación se obtiene

$$\bigwedge_{n=k}^{k+N+1} T^{-n}\mathcal{U} = T^k\mathcal{U} \wedge \bigwedge_{n=k+1}^{k+N+1} T^{-n}\mathcal{U} \sim \bigwedge_{n=1}^{k+N+1} T^{-n}\mathcal{U},$$

es decir, se puede cancelar un factor $T^k\mathcal{U}$ cuando en el producto están como factores sus $N+1$ primeros iterados al pasado. Luego, cancelando repetidamente como se acaba de indicar y aplicando el ítem 2) del Lema 1.2.28 se obtiene que

$$\bigwedge_{n=0}^{k+N} T^{-n}\mathcal{U} \sim \bigwedge_{n=k}^{k+N} T^{-n}\mathcal{U}$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de X, por la r-expansividad al futuro, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{n=0}^{k+N} T^{-n}\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Como $\bigwedge_{n=0}^{k+N} T^{-n}\mathcal{U} \sim \bigwedge_{n=k}^{k+N} T^{-n}\mathcal{U} = T^k\big(\bigwedge_{n=0}^{N} T^{-n}\mathcal{U}\big)$, se obtiene que $\mathcal{U}_0 = \bigwedge_{n=0}^{N} T^{-n}\mathcal{U}$ cumple la propiedad requerida. □

Teorema 1.2.30. *Si un espacio topológico compacto y $\mathcal{T}_1$ admite un homeomorfismo r-expansivo al futuro entonces es finito.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}_0$ como en la Proposición 1.2.29. Por compacidad puede suponerse que $\mathcal{U}_0$ es finito. Sea $m = \operatorname{card}\mathcal{U}_0$. Si X contiene más de m puntos $x_0, \ldots, x_m$ considérese el cubrimiento $\mathcal{V} = \{X \backslash \{x_0, \ldots, \widehat{x_k}, \ldots, x_m\} : 0 \le k \le m\}$, donde el "sombrero" significa que el punto debe ser omitido. $\mathcal{V}$ es un cubrimiento abierto porque como el espacio es $\mathcal{T}_1$ los singuletes son cerrados. Además, como como cada punto x_k, $0 \le k \le m$, está en exactamente uno de los miembros de $\mathcal{V}$, se deduce que $\mathcal{V}$ es minimal: no tiene subcubrimientos propios. Sin embargo, de acuerdo a propiedad establecida en la Proposición 1.2.29 que verifica $\mathcal{U}_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n\mathcal{U}_0 \prec \mathcal{V}$. Entonces, como $T^n\mathcal{U}_0$ es un refinamiento de $\mathcal{V}$ que tiene m miembros, $\mathcal{V}$ debe tener un subcubrimiento de m miembros, en contradicción con la minimalidad de $\mathcal{V}$ ya que $\mathcal{V}$ tiene $m+1$ miembros. Esto concluye la prueba. □

1.2.F. Reducción al caso $\mathcal{T}_1$

Como se ha mencionado anteriormente, en la definición de r-expansividad de un homeomorfismo $T\colon X \to X$ no se hace referencia a la acción de T sobre los puntos del espacio, sino solamente a su acción sobre los conjuntos abiertos (de hecho sobre los cubrimientos abiertos). Es por este motivo que homeomorfismos r-expansivos pueden presentar fenómenos en relación a los puntos del espacio que claramente no están dentro de lo que se espera de una dinámica expansiva (ver Ejemplos 1.2.9 y 1.2.10).

La razón de fondo tiene que ver con las propiedades de separación que tenga el espacio topológico en cuestión, es decir, en qué medida la topología determina los puntos del espacio, y por lo tanto en qué medida la dinámica de los conjuntos abiertos determina la dinámica de los puntos.

En los Ejemplos 1.2.9 y 1.2.10 se mostraron dinámicas r-expansivas con comportamientos indeseados en términos de los puntos, sobre espacios uno indiscreto y el otro con la propiedad de separación $\mathcal{T}_0$. Por otro lado en la Proposición 1.2.11 se ha probado que en un espacio $\mathcal{T}_1$ la r-expansividad implica la o-expansividad y en la Proposición 1.1.11 que la o-expansividad implica la propiedad de separación $\mathcal{T}_1$. Como en la definición de o-expansividad se menciona directamente a los puntos del espacio, el comportamiento de estos bajo la acción del homeomorfismo está controlado. El contexto de los espacios $\mathcal{T}_1$ aparece entonces como el ámbito natural, al menos en términos de la dinámica de los puntos, para considerar la generalización de la expansividad métrica que en este trabajo se introduce. En ese contexto se tienen simultáneamente la r-expansividad (control en la topología) y la o-expansividad (control en los puntos).

En este apartado se muestra como a partir de una dinámica en un espacio topológico arbitrario es posible rescatar una dinámica en un espacio $\mathcal{T}_1$ que conserva todo lo posible la dinámica de los conjuntos abiertos del sistema original. Cuando la dinámica de partida es r-expansiva la dinámica resultante es también r-expansiva (y o-expansiva). En consecuencia, en muchos casos los resultados sobre homeomorfismos r-expansivos en espacios $\mathcal{T}_1$ que en su enunciado involucren a los puntos del espacio pueden extenderse a dinámicas cualesquiera teniendo en cuenta la construcción que aquí se presenta de la "dinámica $\mathcal{T}_1$" asociada. Por ejemplo, a partir del Teorema 1.2.30, que afirma que un espacio compacto y $\mathcal{T}_1$ que admita un homeomorfismo r-expansivo al futuro es necesariamente finito, sin asumir la propiedad de separación $\mathcal{T}_1$ lo que se obtiene es que el conjunto de cerrados minimales del espacio (estos serán los puntos del espacio $\mathcal{T}_1$ asociado, ver Definición 1.2.32) es finito.

1.2.31. Reducción al caso $\mathcal{T}_0$

Dado un espacio topológico X se define la relación de equivalencia $x \sim y$ sii x e y pertenecen a los mismos abiertos. El espacio topológico cociente por esta relación se denotará con $t_0(X)$, las clases de equivalencia con $[x]$ si $x \in X$ y la proyección cociente canónica asociada con $\pi_0\colon X \to t_0(X)$, $\pi_0(x) = [x]$.

Como es fácil ver, $t_0(X)$ es un espacio $\mathcal{T}_0$ y si X es un espacio $\mathcal{T}_0$ entonces X es homeomorfo a $t_0(X)$ vía π_0. De hecho esta construcción da "el máximo" espacio $\mathcal{T}_0$ en el cual X se proyecta, en el sentido de que si $\pi\colon X \to Y$ es una función continua sobre un espacio $\mathcal{T}_0$, entonces existe una (única) función continua $h\colon t_0(X) \to Y$ tal que $h \circ \pi_0 = \pi$. Nótese que la función $\tau_X \to \tau_{t_0(X)}$, $U \mapsto \pi_0(U)$, es una biyección monótona (preserva la inclusión) entre las topologías de X y de $t_0(X)$, respectivamente, y por lo tanto preserva uniones e intersecciones. En particular π_0 es un mapa abierto y también cerrado.

Si $T\colon X \to Y$ es una función continua entre espacios topológicos X e Y puede comprobarse que la asignación $[x] \mapsto [Tx]$, $x \in X$, tiene sentido y que efectivamente define una función de $t_0(X)$ en $t_0(Y)$ que se denotará $t_0(T)$. Si ahora $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo r-expansivo con cubrimiento de r-expansividad $\mathcal{U}$, es inmediato verificar que $t_0(T)\colon t_0(X) \to t_0(X)$ es r-expansivo con cubrimiento de r-expansividad $\pi_0(\mathcal{U})$, y recíprocamente.

A través de la construcción (funtor) t_0, queda claro que el estudio de la r-expansividad puede restringirse al caso de espacios $\mathcal{T}_0$ sin pérdida de generalidad. Sin embargo, como ya se ha mostrado a través de ejemplos (Ejemplo 1.2.10) aún asumiendo la propiedad de separación $\mathcal{T}_0$ persisten fenómenos, al menos en términos de los puntos del espacio, que no corresponden al contexto clásico de los sistemas expansivos.

Definición 1.2.32. Dado un espacio topológico (X, τ) y $P \subseteq X$ se dirá que P es un *punto*[7] de X sii P es cerrado minimal, es decir, si P es cerrado, $P \neq \varnothing$ y P no tiene subconjuntos propios cerrados y no vacíos. Se denota con $t_1(X)$ el conjunto de los puntos de X,

$$t_1(X) = \{P \subseteq X : P \text{ es cerrado minimal}\}.$$

En $t_1(X)$ se considera la topología (esto se probará en el Lema 1.2.33) dada por

$$t_1(\tau) = \{t_1(U) : U \in \tau\},$$

donde si $Y \subseteq X$ se define $t_1(Y) = \{P \in t_1(X) : P \cap Y \neq \varnothing\}$.

Lema 1.2.33. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Se verifican las siguientes propiedades.*

1) Si $U \subseteq X$ es abierto o cerrado y $P \in t_1(X)$ entonces $P \subseteq U$ o bien $P \cap U = \varnothing$.

2) Si $P, Q \in t_1(X)$ y $P \neq Q$ entonces $P \cap Q = \varnothing$.

3) La colección $t_1(\tau)$ es una topología $\mathcal{T}_1$ de $t_1(X)$.

4) Si X es un espacio $\mathcal{T}_0$ entonces todo $P \in t_1(X)$ es un singulete y el mapa $\iota_1\colon t_1(X) \to X$, $\iota_1\big(\{x\}\big) = x$ es un encaje (homeomorfismo sobre su imagen).

[7]Esta acepción de la palabra *punto* será utilizada solamente en relación a la construcción t_1 que se está definiendo. En el resto de la tesis se usa como sinónimo de *elemento*.

Demostración. 1) Si $U \subseteq X$ es abierto y $P \in t_1(X)$ entonces $P \setminus U$ es cerrado y $P \setminus U \subseteq P$. Entonces, por la minimalidad de P, se tiene $P \setminus U = \varnothing$ o $P \setminus U = P$, como se afirmó. Si U es cerrado se aplica lo anterior a $X \setminus U$.

2) Si $P, Q \in t_1(X)$ y $P \cap Q \neq \varnothing$, entonces $P \subseteq Q$ y $Q \subseteq P$ por 1). Luego $P = Q$.

3) Si $Y \subseteq X$ por definición $t_1(Y) = \{P \in t_1(X) : P \cap Y \neq \varnothing\}$. Es claro entonces que si $\mathcal{U} \subseteq \tau$ se tiene $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} t_1(U) = t_1\big(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U\big)$. Así que $t_1(\tau)$ es cerrado por uniones. Por otro lado, por 1) se cumple que $t_1(U) = \{P \in t_1(X) : P \subseteq U\}$ para todo $U \in \tau$. Se ve entonces que $t_1(U) \cap t_1(V) = t_1(U \cap V)$ si $U, V \in \tau$. Entonces $t_1(\tau)$ es cerrado también por intersecciones finitas y por lo tanto una topología. Finalmente, para probar que $t_1(\tau)$ es una topología $\mathcal{T}_1$, nótese que para todo $P, Q \in t_1(X)$, $P \neq Q$, se tiene que, por 1), $t_1(X \setminus Q)$ es un entorno abierto de P que no contiene a Q.

4) Si X es un espacio $\mathcal{T}_0$ y $P \in t_1(X)$, supóngase que existen $x, y \in P$ con $x \neq y$. Como X es un espacio $\mathcal{T}_0$ uno de estos dos elementos, por ejemplo x, tiene un entorno abierto U tal que $y \notin U$. Pero entonces $P \setminus U$ es un subconjunto propio cerrado y no vacío de P, lo cual contradice la minimalidad de P. Por lo tanto todo punto es un singulete. La ultima afirmación es un consecuencia de que el mapa ι_1, es claramente inyectivo y aplica cada conjunto abierto $t_1(U)$ de $t_1(X)$, $U \in \tau$, en $U \cap \operatorname{Im} \iota_1$. □

Observación 1.2.34. Si X es un espacio $\mathcal{T}_0$ mediante el mapa ι_1 del ítem 4) del Lema 1.2.33 puede considerarse $t_1(X) \subseteq X$ con la topología relativa. Como subconjunto de X, el espacio $t_1(X)$ consiste de los $x \in X$ tales que $\{x\}$ es cerrado; esos elementos son entonces los *puntos* de X. En particular se obtiene que si X es un espacio $\mathcal{T}_1$ entonces $t_1(X) = X$.

Observación 1.2.35. Si X es un espacio topológico arbitrario $t_0(X)$ es un espacio $\mathcal{T}_0$, y por lo tanto según lo mencionado en la Observación 1.2.34 puede considerarse $t_1\big(t_0(X)\big) \subseteq t_1(X)$. Por otro lado, $t_1(X)$ y $t_1\big(t_0(X)\big)$ son espacios homeomorfos: en efecto, es fácil ver que el mapa $t_1\big(t_0(X)\big) \to t_1(X)$, $P \mapsto \bigcup\{[x] : [x] \in P\}$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, en el caso general puede suponerse $t_1(X) \subseteq t_0(X)$.

Ejemplo 1.2.36. Para un espacio topológico X puede ocurrir que $t_1(X) = \varnothing$. En efecto, sea $X = \mathbb{Z}$ con la topología $\tau = \{[n, +\infty) : n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces X es un espacio $\mathcal{T}_0$, no es compacto y $t_1(X) = \varnothing$.

Proposición 1.2.37. *Si X es un espacio topológico compacto y no vacío entonces $t_1(X) \neq \varnothing$. Más aún, si $C \subseteq X$ es cerrado y no vacío entonces existe $P \in t_1(X)$ tal que $P \subseteq C$.*

Demostración. Sea $C \subseteq X$ cerrado y no vacío. Considérese la familia $\mathcal{F} = \{D \subseteq C : D \text{ cerrado y no vacío}\}$. Si $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{F}$ es una cadena entonces $\bigcap \mathcal{C}$ es cerrado y no vacío por la compacidad de X, y por lo tanto una cota inferior de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{F}$. Entonces por el Lema de Zorn se concluye que $\mathcal{F}$ tiene algún elemento minimal $P \in \mathcal{F}$. Claramente $P \in t_1(X)$ y $P \subseteq C$. □

Definición 1.2.38. Si $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio topológico X se define el mapa[8]

$$t_1(T)\colon t_1(X) \to t_1(X), \qquad t_1(T)(P) = T(P), \quad P \in t_1(X).$$

Observación 1.2.39. En el contexto de la Definición 1.2.38 es claro que $t_1(T)$ es un homeomorfismo. De hecho considerando $t_1(X) \subseteq t_0(X)$ como en la Observación 1.2.35, el mapa $t_1(T)$ es simplemente la restricción a $t_1(X)$ del mapa $t_0(T)$ introducido en el apartado 1.2.31.

El siguiente resultado muestra que el estudio de los sistemas dinámicos r-expansivos en espacios compactos puede restringirse al caso de espacios $\mathcal{T}_1$ sin pérdida de generalidad, lo cual era el objetivo de esta sección.

Proposición 1.2.40. *Sea $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio topológico compacto X. Si T es r-expansivo entonces $t_1(T)$ es r-expansivo.*

Demostración. Aplicando en primer lugar la construcción t_0 del apartado 1.2.31 si fuera necesario puede suponerse que X es un espacio $\mathcal{T}_0$, que $t_1(X) \subseteq X$ como en la Observación 1.2.34 y que $t_1(T) = T|_{t_1(X)}$ como en la Observación 1.2.39.

Si T es r-expansivo, como $t_1(T) = T|_{t_1(X)}$, para demostrar que $t_1(T)$ es r-expansivo es suficiente probar que $Y = t_1(X)$ es cerrado extendido, en virtud de la Proposición 1.2.16. Sea $\mathcal{U}_1$ un cubrimiento de Y por abiertos relativos y sea $\mathcal{U}$ una colección de subconjuntos abiertos de X tal que $\mathcal{U}_1 = Y \wedge \mathcal{U}$. Bastará demostrar que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de X. Si $\bigcup \mathcal{U} \neq X$ entonces $C = X \setminus \bigcup \mathcal{U}$ es un subconjunto cerrado y no vacío de X. Entonces por la Proposición 1.2.37 existe $x \in Y$ tal que $x \in C$, lo cual es absurdo pues $\mathcal{U}$ claramente cubre Y. $\square$

1.3. El shift no Hausdorff

En esta sección se introduce una familia de sistemas dinámicos simbólicos r-expansivos cuya construcción se da en §1.3.A y que se denominarán *shift no Hausdorff*, aunque como caso particular se encuentran los shift simbólicos métricos usuales. En §1.3.B se resalta la relevancia de esta familia probando que todo sistema dinámico expansivo es conjugado a un subshift de un shift no Hausdorff (Teorema 1.3.10). Finalmente en §1.3.C se calcula la entropía topológica de los shift no Hausdorff, extendiendo el resultado correspondiente a los shift métricos usuales.

1.3.A. Construcción del shift

Sea $\mathcal{S}$ un conjunto finito cuyos elementos se denominarán *símbolos*, y sea $\leq$ un orden parcial en $\mathcal{S}$, es decir una relación transitiva, reflexiva y antisimétrica. Supóngase que $(\mathcal{S}, \leq)$ es además

[8] Es claro que $T(P) \in t_1(X)$ si $P \in t_1(X)$.

completo inferiormente, es decir que verifica que todo subconjunto no vacío de $\mathcal{S}$ acotado inferiormente posee ínfimo. Dados símbolos $u, v \in \mathcal{S}$ tales que $\{u, v\}$ es acotado inferiormente se denota con $u \wedge v$ el ínfimo de $\{u, v\}$. Por conveniencia, se agrega a $\mathcal{S}$ el nuevo símbolo "0" y se extiende la relación de orden a $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S} \cup \{0\}$ imponiendo que $0 \leq u$ para todo $u \in \mathcal{S}_0$. El conjunto ordenado $\mathcal{S}_0$ resulta ser entonces lo que se conoce como *semirretículo inferior*: para todo $u, v \in \mathcal{S}_0$ existe el ínfimo $u \wedge v$ de $\{u, v\}$. En efecto, si $u, v \in \mathcal{S}$ son tales que $\{u, v\}$ no es acotado inferiormente en $\mathcal{S}$ entonces $u \wedge v = 0$; además $0 \wedge u = 0$ para todo $u \in \mathcal{S}_0$.

Definición 1.3.1. Dado un conjunto ordenado de símbolos $\mathcal{S}$ completo inferiormente, se considera en $\mathcal{S}$ la topología que tiene por base la familia $\mathcal{B} = \{(0, u] : u \in \mathcal{S}_0\}$, donde se denota $(0, u] = \{v \in \mathcal{S} : v \leq u\}$ para $u \in \mathcal{S}_0$[9]. Sea Σ el espacio topológico producto $\Sigma = \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ y considérese el mapa llamado *shift* dado por

$$\sigma\colon \Sigma \to \Sigma, \qquad \sigma\big((u_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big) = (u_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}} \quad \text{si} \quad (u_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma.$$

Observación 1.3.2. Una base de la topología de Σ puede darse en términos de la base $\mathcal{B}$ considerada para $\mathcal{S}$. Dados $n \in \mathbb{N}$ y $u_{-n}, \dots u_n \in \mathcal{S}_0$ considérese el *n-cilindro*

$$C(u_{-n}, \dots u_n) = \big\{(v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma : v_k \leq u_k \text{ si } |k| \leq n\big\},$$

y sea $\mathcal{B}_{\Sigma,n}$ la colección de todos los n-cilindros. Entonces $\mathcal{B}_\Sigma = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_{\Sigma,n}$ es una base para la topología de Σ. A partir de esto es claro que $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ es un homeomorfismo.

Observación 1.3.3. En el caso en el que el orden $\leq$ de $\mathcal{S}$ es la identidad de $\mathcal{S}$, la topología considerada en $\mathcal{S}$ es la topología discreta y (Σ, σ) resulta ser el shift usual, que es un sistema dinámico expansivo métrico compacto (ver por ejemplo [37, p. 232]). En cualquier otro caso es fácil ver que $\mathcal{S}$, y por lo tanto Σ, no es un espacio $\mathcal{T}_1$. En general, $\mathcal{S}$ y Σ son espacios $\mathcal{T}_0$ y compactos.

Teorema 1.3.4. *El sistema dinámico (Σ, σ) es r-expansivo.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ el cubrimiento de Σ por 0-cilindros, es decir

$$\mathcal{U} = \big\{C(u) : u \in \mathcal{S}\big\} \qquad \text{donde} \qquad C(u) = \big\{(v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma : v_0 \leq u\big\}.$$

Se probará que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de r-expansividad puntual para σ. Para ello supóngase dados un cubrimiento abierto $\mathcal{V}$ de Σ y una bi-sucesión $\big(C(u_k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ de elementos de $\mathcal{U}$. Se debe probar que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigcap_{|k|\leq N} \sigma^{-k}\big(C(u_k)\big) \prec \mathcal{V}$.

Como todo subconjunto abierto de Σ es la unión de cilindros, puede hallarse un refinamiento $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{V}$ cuyos elementos son cilindros. Por compacidad existe entonces un subcubrimiento finito $\mathcal{V}''$ de $\mathcal{V}'$, que será por lo tanto un refinamiento de $\mathcal{V}$. Para refinar a $\mathcal{V}$ es suficiente entonces refinar a $\mathcal{V}''$.

[9] Nótese que $(0, 0] = \varnothing$ y que $(0, u] \cap (0, v] = (0, u \wedge v]$ si $u, v \in \mathcal{S}_0$.

Ahora bien, como $\mathcal{V}''$ es un cubrimiento finito por cilindros, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que cada miembro de $\mathcal{V}''$ es un n-cilindro con $n \leq N$. Como la bi-sucesión $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ pertenece a Σ se tiene que $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ pertenecerá a algún miembro de $\mathcal{V}''$. Sea $C(v_{-n}, \dots, v_n)$ uno de ellos, donde $v_{-n}, \dots, v_n \in \mathcal{S}$ y $n \leq N$. Esto significa que $u_k \leq v_k$ para $|k| \leq n$, y entonces

$$C(u_{-N}, \dots, u_N) \subseteq C(u_{-n}, \dots, u_n) \subseteq C(v_{-n}, \dots, v_n) \in \mathcal{V}''.$$

Finalmente, como para para todo $N \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\bigcap_{|k|\leq N} \sigma^{-k}\big(C(u_k)\big) = C(u_{-N}, \dots, u_N),$$

se concluye que $\bigcap_{|k|\leq N} \sigma^{-k}\big(C(u_k)\big) \prec \mathcal{V}$ como se deseaba. □

1.3.B. Todo sistema expansivo es un subshift

Un resultado clásico [26, Theorem 2.7] es que todo homeomorfismo expansivo de un espacio métrico compacto es semiconjugado a un subshift del shift métrico usual de bi-sucesiones en una cantidad finita de símbolos. En este apartado se muestra (Teorema 1.3.10) que si se considera el shift no Hausdorff introducido en §1.3.A, entonces todo homeomorfismo r-expansivo de un espacio compacto y $\mathcal{T}_1$, en particular todo homeomorfismo expansivo de un espacio métrico compacto, es conjugado a un subshift de un shift no Hausdorff.

Definición 1.3.5. Sean X un conjunto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento finito de X. Denótese con $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mathcal{U}$ la familia de las intersecciones finitas de los miembros de $\mathcal{U}$ ordenado por la inclusión. Dado $x \in X$ se define $\mathcal{S}[x] \in \mathcal{S}$ como el menor miembro de $\mathcal{S}$ que contiene a x. Dada una biyección $T\colon X \to X$ y un cubrimiento finito $\mathcal{U}$ de X se define

$$\varphi\colon X \to \Sigma, \qquad \varphi(x) = \big(\mathcal{S}[T^k x]\big)_{k\in\mathbb{Z}},$$

donde $\Sigma = \mathcal{S}^\mathbb{Z}$. El mapa φ se denominará *mapa itinerario.*

Tomando como conjunto de símbolos el conjunto $\mathcal{S} = \mathcal{S}_\mathcal{U}$ es posible realizar la construcción del espacio topológico Σ y el shift $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ del apartado 1.3.A. En adelante se supondrá que (Σ, σ) es el sistema dinámico construido a partir de $\mathcal{U}$ de ese modo.

Lema 1.3.6. *En el contexto de la Definición 1.3.5 se verifican las siguientes propiedades.*

1) $\varphi \circ T = \sigma \circ \varphi$, donde $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ es el shift.

2) Si $U_{-N}, \dots, U_N \in \mathcal{S}$ entonces $\varphi^{-1}\big(C(U_{-N}, \dots, U_N)\big) = \bigcap_{|k|\leq N} T^{-k} U_k$.

Demostración. 1) Dado $x \in X$ se tiene que

$$\varphi(Tx) = \big(\mathcal{S}[T^k Tx]\big)_{k\in\mathbb{Z}} = \big(\mathcal{S}[T^{k+1}x]\big)_{k\in\mathbb{Z}} = \sigma\Big(\big(\mathcal{S}[T^k x]\big)_{k\in\mathbb{Z}}\Big) = \sigma\big(\varphi(x)\big).$$

2) Dado $x \in X$ se tiene que $\varphi(x) \in C(U_{-N}, \dots, U_N)$ sii $\mathcal{S}[T^k x] \subseteq U_k$ para todo $|k| \leq N$ sii $T^k x \in U_k$ para todo $|k| \leq N$ sii $x \in \bigcap_{|k| \leq N} T^{-k} U_k$. □

Proposición 1.3.7. *Si $T \colon X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio topológico X y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto y finito de X, se verifican las siguientes propiedades.*

1) *El mapa itinerario $\varphi \colon X \to \Sigma$ es continuo.*

2) *Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad para T, entonces $\varphi \colon X \to \Sigma$ es inyectiva.*

3) *Sean $\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{|n| \leq N} T^n U_n : N \in \mathbb{N}, U_n \in \mathcal{U} \text{ si } |n| \leq N \right\}$ y $\Sigma_0 := \operatorname{Im} \varphi \subseteq \Sigma$.*

   a. *Si $\mathcal{B}$ es base de X entonces $\varphi \colon X \to \Sigma_0$ es abierto.*

   b. *Si φ es inyectiva, vale el recíproco de lo anterior.*

Demostración. 1) Por el ítem 2) del Lema 1.3.6 la preimagen a través de φ los abiertos básicos de $\mathcal{B}_\Sigma$ (Observación 1.3.2) son los elementos del conjunto $\mathcal{B}$ del ítem 3), es decir $\varphi^{-1}(\mathcal{B}_\Sigma) = \mathcal{B}$. Como $\mathcal{U}$ está formado por abiertos y T es continua, los elementos de $\mathcal{B}$ son abiertos y por lo tanto φ es continua.

2) Si $x, y \in X$ y $\varphi(x) = \varphi(y)$ entonces $\mathcal{S}[T^k x] = \mathcal{S}[T^k y]$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego $\{T^k x, T^k y\} \prec \mathcal{U}$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y por lo tanto $x = y$ ya que $\mathcal{U}$ es cubrimiento de o-expansividad para T.

3) Es inmediato a partir del hecho probado en 1): $\varphi^{-1}(\mathcal{B}_\Sigma) = \mathcal{B}$. □

Observación 1.3.8. El ítem 1) de la Proposición 1.3.7 junto con el ítem 1) del Lema 1.3.6 dicen que *todo* sistema dinámico (X, T) es semiconjugado, vía el mapa itinerario, al subshift (Σ_0, σ), donde $\Sigma_0 = \operatorname{Im} \varphi$.

Si un observador del sistema dinámico (X, T) puede "medir como $\mathcal{U}$", es decir que sus instrumentos de medición le permiten determinar si un determinado estado x del espacio de fase X está o no en los miembros de un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, entonces lo que el observador realmente verá es el sistema dinámico semiconjugado (Σ_0, σ), donde en general Σ_0 no será un espacio de Hausdorff, aún si el espacio de fase de partida X es métrico. De esta forma, si se modelan las mediciones que puede realizar un observador del modo indicado anteriormente, aparecen de manera natural sistemas dinámicos en espacios no Hausdorff.

Observación 1.3.9. Es interesante notar que la condición "$\mathcal{B}$ es base de X" que aparece en el ítem 3) de la Proposición 1.3.7 y que forma parte de la tesis en el ítem 2) de la Proposición 1.2.11 justamente corresponde a la noción débil de r-expansividad discutida en la Observación 1.2.12.

Teorema 1.3.10. *Todo homeomorfismo r-expansivo de un espacio topológico compacto y $\mathcal{T}_1$ es conjugado a un subshift de un shift no Hausdorff.*

Demostración. Sean X un espacio topológico compacto y $\mathcal{T}_1$ y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo. Sean $\mathcal{U}$ un cubrimiento de r-expansividad finito para T, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\mathcal{U}}$ y φ el mapa itinerario como en la Definición 1.3.5, y $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ el shift como en la Definición 1.3.1.

Por el ítem 1) del Lema 1.3.6 y el ítem 1) de la Proposición 1.3.7 φ es una semiconjugación de (X, T) al subshift (Σ_0, σ), donde $\Sigma_0 := \operatorname{Im}\varphi \subseteq \Sigma$. Por otro lado, como X es $\mathcal{T}_1$, por el ítem 1) de la Proposición 1.2.11 T es o-expansivo y entonces φ es inyectiva en virtud del ítem 2) de la Proposición 1.3.7. Finalmente, por el ítem 2) de la Proposición 1.2.11 y el ítem 3) de la Proposición 1.3.7 φ es además abierta. □

El siguiente ejemplo muestra que un subshift de un shift no Hausdorff no necesariamente tiene que ser r-expansivo. El problema de fondo es que, si bien en el contexto de la Observación 1.3.8, $\Sigma_0 = \operatorname{Im}\varphi$ es σ-invariante no necesariamente es cerrado extendido, por lo que no es aplicable la Proposición 1.2.16 que garantizaría la r-expansividad de la restricción de σ a Σ_0.

Ejemplo 1.3.11. Sean T una rotación irracional en el círculo y $\mathcal{U} = \{U, V\}$ un cubrimiento abierto compuesto de dos arcos tales que las dos componentes conexas de $U \cap V$ tengan diferente longitud. Entonces, dados puntos diferentes x e y existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $T^n x \in U \cap V$ y $T^n y \notin U \cap V$. Por lo tanto el mapa itinerario será inyectivo. Además, es fácil ver que el conjunto $\mathcal{B}$ del ítem 3) de la Proposición 1.3.7 es efectivamente una base de la topología del círculo, y por lo tanto el mapa itinerario es abierto en virtud de la citada proposición. Por consiguiente en este caso T es conjugado a un subshift que no es expansivo pues T no lo es.

1.3.C. Entropía del shift

En [4, Example 3] se prueba que si σ_{met} denota el shift métrico usual en n símbolos entonces la entropía topológica de σ_{met} vale $h(\sigma_{met}) = \log n$. El principal resultado de este apartado lo constituye la Proposición 1.3.16 en donde se calcula la entropía topológica de los shift no Hausdorff.

La *entropía topológica* $h(T) \in [0, +\infty]$ de una función continua $T\colon X \to X$ que actúa en un espacio topológico compacto X se introduce en [4] y se define como

$$h(T) = \sup\big\{h(T, \mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ cubrimiento abierto y finito de } X)\big\},$$

donde, si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto y finito de X se definen

$$h(T, \mathcal{U}) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{N} H\Big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\mathcal{U}\Big) \quad \text{y} \quad H(\mathcal{U}) = \log\big(\min\big\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es subcubrimiento de } \mathcal{U}\big\}\big).$$

Proposición 1.3.12 ([26, Theorem 2.6]). *Sean X un espacio topológico compacto, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de r-expansividad finito para T. Entonces $h(T) = h(T, \mathcal{U})$.*

Demostración. Igual que [26, Theorem 2.6]. □

Corolario 1.3.13. *Sean X un espacio topológico compacto y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo r-expansivo. Entonces $h(T)$ es finito.*

Demostración. En [4, Property 8] se prueba que $h(\mathcal{U}, T)$ es finito para todo cubrimiento abierto y finito de X. Luego, lo afirmado se deduce inmediatamente de la Proposición 1.3.12. □

Lema 1.3.14. *Si I es un conjunto y X_i un espacio topológico por cada $i \in I$, entonces $t_1\big(\prod_{i\in I} X_i\big) \cong \prod_{i\in I} t_1(X_i)$ son homeomorfos, donde t_1 refiere a la construcción de la Definición 1.2.32. En particular, si X es un espacio topológico e I un conjunto, entonces $t_1(X^I) \cong t_1(X)^I$.*

Demostración. Sea $(P_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} t_1(X_i)$. Entonces $P_i \subseteq X_i$ es un cerrado minimal para todo $i \in I$. Se afirma que el subconjunto cerrado y no vacío $P = \prod_{i\in I} P_i \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ es también minimal. En efecto, supóngase que existe un subconjunto propio de P cerrado y no vacío $Q \subsetneq P$. Entonces $Q^c \cap P \neq \varnothing$ y Q^c es abierto. Como todo subconjunto abierto de $\prod_{i\in I} X_i$ es unión de abiertos básicos de la forma

$$C(U_i : i \in I_0) = \Big\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : x_i \in U_i \text{ si } i \in I_0\Big\},$$

donde $I_0 \subseteq I$ es un conjunto finito y $U_i \subseteq X_i$ es abierto para todo $i \in I_0$, se deduce que $C(U_i : i \in I_0) \cap P \neq \varnothing$ para alguno de estos abiertos básicos incluidos en Q^c. Luego, existe $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i$ tal que $x_i \in U_i \cap P_i$ para todo $i \in I_0$. Ahora, como cada P_i, $i \in I_0$, es un cerrado minimal, se obtiene que $P_i \subseteq U_i$ si $i \in I_0$ (de lo contrario $P_i \setminus U_i \neq \varnothing$ contradice la minimalidad de P_i). Por lo tanto, se concluye que $P \subseteq C(U_i : i \in I_0) \subseteq Q^c$, lo cual es absurdo ya que se tenía $\varnothing \neq Q \subseteq P$.

Es posible entonces definir el mapa inyectivo

$$h\colon \prod_{i\in I} t_1(X_i) \to t_1\big(\prod_{i\in I} X_i\big), \qquad h\big((P_i)_{i\in I}\big) = \prod_{i\in I} P_i.$$

Se afirma que h es además sobreyectiva. En efecto, supóngase que $P \subseteq \prod_{i\in I} X_i$ es un cerrado minimal. Para simplificar la notación, fijado $i \in I$, denótese $Y = \prod_{j\neq i} X_j$, con lo cual $X_i \times Y \cong \prod_{i\in I} X_i$, y sea $\pi_i\colon \prod_{i\in I} X_i \to X_i$ la proyección canónica. Sean $P_i = \pi_i(P) \subseteq X_i$ y $P_Y \subseteq Y$ la proyección de P en Y. Como P^c es abierto, para todo $p = (x, y) \in P^c$ existen abiertos $U_p \subseteq X_i$ y $V_p \subseteq Y$ tales que $p \in U_p \times V_p \subseteq P^c$. Sea el conjunto abierto

$$U = \bigcup\{U_p : p = (x, y) \in P^c \text{ e } y \in P_Y\} \subseteq X.$$

Es claro que $U \cup P_i = X_i$. Más aún $U = P_i^c$, pues de lo contrario existe $p = (x, y) \in P^c$, $y \in P_Y$, tal que $U_p \cap P_i \neq \varnothing$, y entonces $P \setminus U_p \times Y$ es un subconjunto propio de P que es cerrado. Luego, por la minimalidad de P, se llega a que $P \subseteq U_p \times Y$ y entonces $U_p \times \{y\} \cap P \neq \varnothing$ pues $y \in P_Y$ y P_Y es la proyección de P es Y. Pero como $U_p \times \{y\} \subseteq U_p \times V_p$ se obtiene $U_p \times V_p \cap P \neq \varnothing$, lo cual es absurdo. Queda probado entonces que $P_i = U^c$ es cerrado para todo $i \in I$.

Por otro lado, P_i es a su vez cerrado minimal para todo $i \in I$, pues si $Q_i \subsetneq P_i$ es un subconjunto propio cerrado y no vacío para algún $i \in I$ entonces $Q = P \cap \pi_i^{-1}(Q_i)$ será un subconjunto propio cerrado y no vacío de P, contradiciendo la minimalidad de P. Entonces $\prod_{i\in I} P_i$ es cerrado minimal, en virtud de lo demostrado en el primer párrafo, ya que cada factor es cerrado minimal. Pero entonces, como $P \subseteq \prod_{i\in I} P_i$ se deduce que $P = \prod_{i\in I} P_i = h\big((P_i)_{i\in I}\big)$, y h es sobreyectiva.

Finalmente para ver que h es un homeomorfismo, nótese que dado un abierto básico de $\prod_{i\in I} t_1(X_i)$ de la forma (ver Definición 1.2.32)

$$C\big(t_1(U_i) : i \in I_0\big) = \Big\{(P_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} t_1(X_i) : P_i \cap U_i \neq \varnothing \text{ si } i \in I_0\Big\},$$

donde $I_0 \subseteq I$ es un subconjunto finito y $U_i \subseteq X_i$ es abierto para todo $i \in I_0$, entonces

$$h\Big(C\big(t_1(U_i) : i \in I_0\big)\Big) = \Big\{\prod_{i\in I} P_i \subseteq t_1\big(\prod_{i\in I} X_i\big) : \prod_{i\in I} P_i \cap C(U_i : i \in I_0) \neq \varnothing\Big\},$$

que es precisamente un elemento típico de una base de $t_1\big(\prod_{i\in I} X_i\big)$. $\square$

Proposición 1.3.15. *Sean X un espacio topológico compacto y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo, entonces $h(T) = h\big(t_0(T)\big) = h\big(t_1(T)\big)$, donde t_1 refiere a la construcción de la Definición 1.2.38.*

Demostración. En primer lugar se probará que $h(T) = h\big(t_0(T)\big)$, donde t_0 refiere a la construcción del apartado 1.2.31. Como se menciona en el referido apartado, la proyección canónica $\pi_0\colon X \to t_0(X)$ induce una biyección monótona entre las topologías de ambos espacios y por lo tanto preserva las intersecciones y uniones. Queda claro entonces que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X sii $\pi_0(\mathcal{U})$ es un cubrimiento abierto de X, y en ese caso $H(\mathcal{U}) = H\big(\pi_0(\mathcal{U})\big)$. Luego si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X y $N \in \mathbb{N}$, como $\pi_0 \circ T = t_0(T) \circ \pi_0$, se tiene que

$$\pi_0\Big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\mathcal{U}\Big) = \bigwedge_{k=0}^{N-1} \pi_0\big(T^{-k}\mathcal{U}\big) = \bigwedge_{k=0}^{N-1} t_0(T)^{-k}\pi_0(\mathcal{U}),$$

y por lo tanto $H\big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\mathcal{U}\big) = H\big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} t_0(T)^{-k}\pi_0(\mathcal{U})\big)$. Se deduce entonces que $h(\mathcal{U}, T) = h\big(\pi_0(\mathcal{U}), t_0(T)\big)$ para todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X y entonces $h(T) = h\big(t_0(T)\big)$.

Por lo recién demostrado puede suponerse entonces que X es un espacio $\mathcal{T}_0$ y que $Y = t_1(X) \subseteq X$ como en la Observación 1.2.34. Dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, considérese el cubrimiento abierto $Y \wedge \mathcal{U}$ de Y. Es claro que $H(\mathcal{U}) \geq H(Y \wedge \mathcal{U})$. Pero de hecho $H(\mathcal{U}) = H(Y \wedge \mathcal{U})$. En efecto, si $Y \wedge \mathcal{U}_0$ es un subcubrimiento de cardinal mínimo de $Y \wedge \mathcal{U}$, donde $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, entonces $\mathcal{U}_0$ es un cubrimiento de X, ya que de lo contrario $C = X \setminus \bigcup \mathcal{U}_0$ sería un cerrado no vacío, que entonces contiene algún cerrado minimal en virtud de la Proposición 1.2.37, lo cual es absurdo pues $C \cap Y = \varnothing$. Entonces $H(\mathcal{U}) \leq \log\lvert\mathcal{U}_0\rvert = \log\lvert Y \wedge \mathcal{U}_0\rvert = H(Y \wedge \mathcal{U})$, ya que $\mathcal{U} \mapsto \pi_0(\mathcal{U})$ es una biyección entre los cubrimientos abiertos de X y los cubrimientos abiertos de $t_0(X)$.

Sean $T_Y = t_1(T) = T|_Y$, $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X y $N \in \mathbb{N}$. Entonces

$$Y \wedge \bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\mathcal{U} = \bigwedge_{k=0}^{N-1} T_Y^{-k} Y \wedge \mathcal{U}$$

y por lo tanto $H\big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\mathcal{U}\big) = H\big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T_Y^{-k} Y \wedge \mathcal{U}\big)$. Se deduce entonces que $h(\mathcal{U}, T) = h(Y \wedge \mathcal{U}, T_Y)$ para todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X. Ahora bien, todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}_Y$ de Y es de la forma $\mathcal{U}_Y = Y \wedge \mathcal{U}$ para cierto cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X, ya que tomando una familia $\mathcal{U}$ de abiertos de X tal que $\mathcal{U}_Y = Y \wedge \mathcal{U}$, se tiene que de hecho $\mathcal{U}$ debe cubrir X, otra vez por la Proposición 1.2.37. Por lo tanto se obtiene que $h(T) = h(T_Y)$ como se deseaba. □

Proposición 1.3.16. *Sean $\mathcal{S}$ un conjunto ordenado de símbolos completo inferiormente y (Σ, σ) el shift construido a partir de $\mathcal{S}$ en la Definición 1.3.1. Entonces $h(\sigma) = \log |t_1(\mathcal{S})|$.*

Demostración. En primer lugar, nótese que como $\mathcal{S}$ es finito para todo elemento $u \in \mathcal{S}$ existe $v \in \mathcal{S}$ elemento maximal tal que $u \leq v$. Teniendo en cuenta la topología considerada en $\mathcal{S}$, que es una topología $\mathcal{T}_0$ compacta, es fácil verificar que $t_1(\mathcal{S})$ es el subconjunto[10] $\mathcal{S}_+ \subseteq \mathcal{S}$ formado por todos los elementos maximales de $\mathcal{S}$. Además $\mathcal{S}_+ = t_1(\mathcal{S})$ resulta ser un espacio discreto y por lo tanto de Hausdorff. Denotando $\Sigma_+ = \mathcal{S}_+^{\mathbb{Z}}$, se tiene entonces que $t_1(\mathcal{S})^{\mathbb{Z}} = \Sigma_+$ es el espacio métrico compacto de las bi-sucesiones de símbolos de $\mathcal{S}_+$.

Asimismo, como el espacio $\Sigma = \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ es un espacio $\mathcal{T}_0$ puede suponerse que $t_1(\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}) \subseteq \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$. Como subconjunto de $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ el espacio $t_1(\mathcal{S}^{\mathbb{Z}})$ consiste de aquellos $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ tales que $\{\xi\}$ es cerrado, que son precisamente aquellos $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$ tales que $\{x_n\}$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{Z}$, como se probó en la demostración del Lema 1.3.14.[11] Es decir $t_1(\Sigma) = t_1(\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}) = \mathcal{S}_+^{\mathbb{Z}} = \Sigma_+$.

En consecuencia, en el caso del producto $\mathcal{S}^{\mathbb{Z}}$, el homeomorfismo $h\colon t_1(\mathcal{S})^{\mathbb{Z}} \to t_1(\mathcal{S}^{\mathbb{Z}})$ construido en la demostración del Lema 1.3.14, resulta ser el mapa identidad

$$h\colon \Sigma_+ \to \Sigma_+, \qquad h = id.$$

Por otro lado se tiene que el mapa $t_1(\sigma)\colon t_1(\Sigma) \to t_1(\Sigma)$ inducido por σ como en la Definición 1.2.38 es $t_1(\sigma) = \sigma|_{t_1(\Sigma)} = \sigma|_{\Sigma_+}$, como se indica en la Observación 1.2.39. Es decir, el mapa $\sigma_+\colon \Sigma_+ \to \Sigma_+$, $\sigma_+ = t_1(\sigma)$ es el shift usual (métrico) en los símbolos $\mathcal{S}_+$.

Finalmente, por la Proposición 1.3.15, se sabe que $h(\sigma) = h\big(t_1(\sigma)\big) = h(\sigma_+)$. Y como $h(\sigma_+) = \log |\mathcal{S}_+|$, pues σ_+ es un shift (métrico) usual en los símbolos $\mathcal{S}_+$ ([4, Example 3]), se deduce que $h(\sigma) = \log |\mathcal{S}_+| = \log |t_1(\mathcal{S})|$. □

Observación 1.3.17. Es posible demostrar la Proposición 1.3.16 directamente a partir de la Proposición 1.3.12. En efecto, en el Teorema 1.3.4 se muestra que el cubrimiento por 0-cilindros

$$\mathcal{U} = \big\{C(u) : u \in \mathcal{S}\big\} \qquad \text{donde} \qquad C(u) = \big\{(v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma : v_0 \leq u\big\},$$

[10] Ver Observación 1.2.34.

[11] En la demostración del referido Lema se prueba que el producto de cerrados minimales es un cerrado minimal y viceversa.

es un cubrimiento de r-expansividad para (Σ, σ). En virtud de la Proposición 1.3.16 se tiene que $h(\sigma) = h(\sigma,\mathcal{U})$ y por lo tanto basta calcular esta última. Ahora bien, dado $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\bigwedge_{k=0}^{N-1} \sigma^{-k}\mathcal{U} = \big\{C(u_0, \dots, u_{N-1}) : u_0, \dots, u_{N-1} \in \mathcal{S}\big\},$$

donde $C(u_0, \dots, u_{N-1}) = \big\{(v_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma : v_k \le u_k \text{ si } 0 \le k \le N-1\big\}$ si $u_0, \dots, u_{N-1} \in \mathcal{S}$. Es fácil verificar que el cubrimiento

$$\mathcal{V} = \big\{C(u_0, \dots, u_{N-1}) : u_0, \dots, u_{N-1} \in \mathcal{S}_+\big\},$$

donde $\mathcal{S}_+$ denota el conjunto de elementos maximales de $\mathcal{S}$, es un subcubrimiento de $\bigwedge_{k=0}^{N-1} \sigma^{-k}\mathcal{U}$ de cardinal mínimo igual a $|\mathcal{S}_+|^N$. Entonces, se obtiene que

$$h(\sigma,\mathcal{U}) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H\Big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} \sigma^{-k}\mathcal{U}\Big) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \log\big(|\mathcal{S}_+|^N\big) = \log|\mathcal{S}_+|,$$

como se deseaba.

1.4. Expansividad algebraica

Una de las principales motivaciones que ha llevado a desarrollar la temática del capítulo 1 ha sido el obtener una definición de expansividad para homeomorfismos que sea independiente, no mencione, la métrica o los puntos del espacio, con miras a lograr una generalización de la noción de expansividad en el contexto de la topología no conmutativa (C^*-álgebras). Si bien esto se ha logrado de manera satisfactoria con la introducción del concepto de r-expansividad, la noción C^*-algebraica obtenida no parece ser la adecuada a los fines que persigue una generalización de este tipo. Sin embargo en el contexto de los anillos, en particular en los conmutativos, la expansividad podría representar un concepto nuevo interesante.

En §1.4.A se discute en primer lugar la extensión de la noción de expansividad al contexto de los automorfismos de retículos, y en §1.4.B se trata brevemente el caso de anillos y C^*-álgebras.

1.4.A. Expansividad en retículos distributivos

Un análisis de la definición de r-expansividad (Definición 1.2.3) junto a varias de las propiedades estudiadas en este capítulo, muestra que tanto esa noción como varios de los resultados obtenidos tienen sentido en el contexto más general de los retículos y sus automorfismos. Este apartado está dedicado a mostrar estos hechos, introduciendo la noción de expansividad para un automorfismo de retículos y mencionando algunas de las propiedades que continúan siendo válidas en este contexto más amplio.

Definición 1.4.1. Un *retículo* es un conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{L}, \sqsubseteq)$, es decir $\sqsubseteq$ es una relación transitiva, reflexiva y antisimétrica en $\mathcal{L}$, en el que para todo $u, v \in \mathcal{L}$ existen $u \sqcup v \in \mathcal{L}$ y $u \sqcap v \in \mathcal{L}$ que son, respectivamente, supremo e ínfimo de $\{u, v\}$. Un retículo se dice *acotado* sii existen elementos $0, 1 \in \mathcal{L}$ tales que $0 \sqsubseteq u \sqsubseteq 1$ para todo $u \in \mathcal{L}$. Un retículo se dice *distributivo* sii se verifica $u \sqcap (v \sqcup w) = (u \sqcap v) \sqcup (u \sqcap w)$ para todo $u, v, w \in \mathcal{L}$.[12]

En lo que sigue la palabra *retículo* hará referencia a un retículo acotado y distributivo.

Observación 1.4.2. Sea $\mathcal{L}$ un retículo. Dados $u, v \in \mathcal{L}$ es claro que $u \sqcup v = v \sqcup u$ y $u \sqcap v = v \sqcap u$ ya que, gracias a la propiedad antisimétrica, el supremo o ínfimo de cualquier subconjunto de $\mathcal{L}$ en caso de existir es único. Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ es un subconjunto finito es fácil ver que existen el supremo e ínfimo de $\mathcal{U}$ y se denotan con alguno los símbolos $\bigsqcup \mathcal{U} = \bigsqcup_{u \in \mathcal{U}} u$ y $\bigsqcap \mathcal{U} = \bigsqcap_{u \in \mathcal{U}} u$, respectivamente. En particular $\bigsqcup \varnothing = 0$ y $\bigsqcap \varnothing = 1$. Notar también que $\sqcup$ y $\sqcap$ son *monótonas*, es decir, si $u_1 \sqsubseteq u_2$ y $v_1 \sqsubseteq v_2$ entonces $u_1 \sqcup u_2 \sqsubseteq v_1 \sqcup v_2$ y $u_1 \sqcap u_2 \sqsubseteq v_1 \sqcap v_2$

Definición 1.4.3. Sea $\mathcal{L}$ un retículo. Un subconjunto $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{L}$ se denominará *cubrimiento* en $\mathcal{L}$ sii $\mathcal{U}$ es finito y $\bigsqcup \mathcal{U} = 1$. El conjunto formado por todos los cubrimientos en $\mathcal{L}$ se denota $\mathscr{C}(\mathcal{L})$. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{C}(\mathcal{L})$. Se dice que $\mathcal{U}$ es un *subcubrimiento* de $\mathcal{V}$ sii $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Se dice que $\mathcal{U}$ es un *refinamiento* de $\mathcal{V}$, y se denota $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$, sii para todo $u \in \mathcal{U}$ existe $v \in \mathcal{V}$ tal que $u \sqsubseteq v$. Finalmente, se define

$$\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} = \{u \sqcap v : u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V}\}.$$

Observación 1.4.4. Sean $\mathcal{L}$ un retículo y $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{C}(\mathcal{L})$ entonces $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathscr{C}(\mathcal{L})$ en virtud de la propiedad distributiva. En efecto

$$1 = 1 \sqcap 1 = \Big(\bigsqcup_{u \in \mathcal{U}} u\Big) \sqcap \Big(\bigsqcup_{v \in \mathcal{V}} v\Big) = \bigsqcup_{u \in \mathcal{U}} \Big(u \sqcap \bigsqcup_{v \in \mathcal{V}} v\Big) = \bigsqcup_{u \in \mathcal{U}} \bigsqcup_{v \in \mathcal{V}} u \sqcap v = \bigsqcup_{w \in \mathcal{U} \wedge \mathcal{V}} w.$$

Notar que la relación $\prec$ en $\mathscr{C}(\mathcal{L})$ es transitiva y reflexiva, que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \prec \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \prec \mathcal{V}$ si $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathscr{C}(\mathcal{L})$, y que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ es *un* ínfimo de $\{\mathcal{U}, \mathcal{V}\}$ en el conjunto pre-ordenado $\big(\mathscr{C}(\mathcal{L}), \prec\big)$.

Definición 1.4.5. Sea $L \colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ una función entre conjuntos pre-ordenados $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$. L se dice *monótona* sii $u, v \in \mathcal{L}$ y $u \sqsubseteq v$ implica $Lu \sqsubseteq Lv$. Si $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ son retículos, L se denomina *morfismo de retículos* sii $L(u \sqcup v) = Lu \sqcup Lv$ y $L(u \sqcap v) = Lu \sqcap Lv$ para todo $u, v \in \mathcal{L}$. Si además L es biyectivo se lo denomina *isomorfismo de retículos* (o simplemente *isomorfismo*).

Es claro que la composición e inversa de isomorfismos es un isomorfismo. Asimismo, es fácil ver que una biyección monótona entre retículos es necesariamente un isomorfismo.

Introducida la terminología y notación básica para los retículos y sus automorfismos se presenta la definición de expansividad correspondiente a este contexto general.

[12] Un resultado básico de la teoría de retículos es que la condición dada es equivalente a su dual: $u \sqcup (v \sqcap w) = (u \sqcup v) \sqcap (u \sqcup w)$ para todo $u, v, w \in \mathcal{L}$.

Definición 1.4.6. Un automorfismo de retículos $L\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ se dice *expansivo* sii existe un cubrimiento $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(\mathcal{L})$, llamado *cubrimiento de expansividad*, tal que

$$\text{para todo } \mathcal{V} \in \mathscr{C}(\mathcal{L}) \text{ existe } N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \bigwedge_{|n|\leq N} L^n\mathcal{U} \prec \mathcal{V}.$$

Si $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio topológico X la acción de T en los conjuntos abiertos da un isomorfismo de retículos $L_T\colon \mathcal{L}_X \to \mathcal{L}_X$, donde $\mathcal{L}_X = \tau_X$ es la topología de X con el orden dado por la inclusión y $L_T U = TU$ si $U \subseteq X$ es abierto. El homeomorfismo T es r-expansivo precisamente si L_T es un automorfismo expansivo.

A continuación se enumeran algunas de las propiedades que se han establecido para homeomorfismos r-expansivos y que siguen siendo válidas para automorfismos expansivos de un retículo. Las demostraciones de estas propiedades pueden realizarse de manera similar al caso de homeomorfismos, en ocasiones con algunos cambios menores.

Proposición 1.4.7. *Para $i = 1, 2$ sean $\mathcal{L}_i$ un retículo y $L_i\colon \mathcal{L}_i \to \mathcal{L}_i$ un automorfismo. Si existe un isomorfismo $h\colon \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ tal que $h \circ L_1 = L_2 \circ h$ y L_1 es expansivo entonces L_2 es expansivo.*

Dados retículos $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ es fácil ver que el producto cartesiano $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ es un retículo respecto al orden producto: $(u_1, u_2) \sqsubseteq (v_1, v_2)$ sii $u_1 \sqsubseteq v_1$ y $u_2 \sqsubseteq v_2$, $u_1, v_1 \in \mathcal{L}_1$, $u_2, v_2 \in \mathcal{L}_2$.

Proposición 1.4.8. *Para $i = 1, 2$ sean $\mathcal{L}_i$ un retículo y $L_i\colon X_i \to X_i$ un automorfismo expansivo. Entonces el producto $L_1 \times L_2\colon \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, dado por $L_1 \times L_2(u_1, u_2) = (L_1u_1, L_2u_2)$ si $(u_1, u_2) \in \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, es un automorfismo expansivo.*

Proposición 1.4.9. *Sean $\mathcal{L}$ un retículo, $L\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ un automorfismo y $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$. Entonces L es expansivo sii L^m es expansivo.*

De forma análoga a la Definición 1.2.27 un automorfismo de retículos $L\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ se dice expansivo al futuro sii existe $\mathcal{U} \in \mathscr{C}(\mathcal{L})$ tal que para todo $\mathcal{V} \in \mathscr{C}(\mathcal{L})$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{n=0}^{N} L^{-n}\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$. Para estos automorfismos lo realizado para el caso de homeomorfismos en §1.2.E arroja la siguiente propiedad.

Proposición 1.4.10. *Si un retículo $\mathcal{L}$ admite un automorfismo expansivo al futuro entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que todo cubrimiento de $\mathcal{L}$ posee un subcubrimiento de cardinal menor o igual a N.*

Tanto el concepto de dimensión topológica como el de entropía topológica tienen sentido perfectamente en el contexto de los retículos con las adaptaciones obvias. Estas nociones generalizadas se vinculan con la expansividad en retículos de manera similar al caso de los espacios topológicos y homeomorfismos. Por ejemplo, el Teorema 1.2.25 (Teorema de Mañé) y la Proposición 1.3.12 (igualdad de la entropía a la entropía de un cubrimiento de expansividad) son válidos en el contexto de los retículos.

1.4.11. Retículo dual, expansividad dual.

El *retículo dual* de un retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq)$ es el retículo que se obtiene a partir de $\mathcal{L}$ invirtiendo el orden. Concretamente, el retículo dual es $(\mathcal{L}^*, \sqsubseteq^*)$ donde $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ y $u \sqsubseteq^* v$ sii $v \sqsubseteq u$, $u, v \in \mathcal{L}$. El ínfimo y el supremo en $\mathcal{L}^*$ son, respectivamente, el supremo y el ínfimo en $\mathcal{L}$: $u \sqcap^* v = u \sqcup v$ y $u \sqcup^* v = u \sqcap v$ si $u, v \in \mathcal{L}$. Los elementos máximo y mínimo en $\mathcal{L}^*$ son $1^* = 0$ y $0^* = 1$. Todo automorfismo $L\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es automáticamente un automorfismo de la estructura dual $L\colon \mathcal{L}^* \to \mathcal{L}^*$.

Dado un automorfismo de retículos $L\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ puede considerarse la condición de expansividad para L respecto a la estructura de retículo dual. En el caso de la r-expansividad la noción dual sería la siguiente: un homeomorfismo $T\colon X \to X$ de un espacio topológico X es *r-expansivo dual* sii existe una familia finita de conjuntos abiertos $\mathcal{U}$ tal que $\bigcap \mathcal{U} = \varnothing$ de modo que para toda familia $\mathcal{V}$ con esas características existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{V} \prec \bigvee_{|n| \leq N} T^n \mathcal{U}$. Utilizando las leyes de De Morgan esta condición puede reformularse así: existe un cubrimiento cerrado y finito $\mathcal{C}$ de X tal que para todo cubrimiento finito y cerrado $\mathcal{D}$ de X existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\bigwedge_{|n| \leq N} T^n \mathcal{C} \prec \mathcal{D}$. Sería interesante entender esta propiedad desde el punto de vista dinámico.

1.4.B. Expansividad en anillos

Si A es un anillo con unidad considérese el conjunto $\mathcal{I}(A)$ formado por todos los ideales de A ordenado por la inclusión. Si $I, J \lhd A$ el ideal suma $I + J$ y el ideal intersección $I \cap J$ son respectivamente el supremo y el ínfimo de $\{I, J\}$. Los ideales triviales 0 y A son mínimo y máximo de $\mathcal{I}(A)$. Por lo tanto $\mathcal{I}(A)$ es un retículo acotado, pero que en general no es distributivo. Aun así tiene sentido ensayar la definición de expansividad para un automorfismo de ese tipo retículo, aunque claro está, varias de las demostraciones de propiedades de los automorfismos expansivos en retículos distributivos dejarán de ser válidas, y habrá que estudiar las particularidades del caso. Dado un automorfismo $\alpha\colon A \to A$ del anillo A considérese el automorfismo de retículos $L_\alpha\colon \mathcal{L}_A \to \mathcal{L}_A$ dado por $\mathcal{L}_A = \mathcal{I}(A)$ y $L_\alpha(I) = \alpha(I)$ si $I \lhd A$. Resulta natural definir que α es expansivo sii L_α es expansivo, obteniéndose así una noción de expansividad para automorfismos de un anillo.

Una primera dificultad que presenta la ausencia de la propiedad distributiva en un retículo acotado es que dados cubrimientos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ no se puede en general garantizar que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ sea un cubrimiento. Recordar que en la Observación 1.4.4 la propiedad distributiva ha sido usada para justificar que $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ es un cubrimiento. Sin embargo, en el caso de $\mathcal{I}(A)$ esto es cierto. En efecto, dados cubrimientos $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$, es decir familias finitas de ideales de $\mathcal{U} = \{I_1, \ldots, I_n\}$ y $\mathcal{V} = \{J_1, \ldots, J_m\}$ tales que $I_1 + \cdots + I_n = A$ y $J_1 + \cdots + J_m = A$, se tiene que

$$A = AA = (I_1 + \cdots + I_n)(J_1 + \cdots + J_m) = \sum I_i J_j \subseteq \sum I_i \cap J_j,$$

por lo que $\sum I_i \cap J_j = A$, es decir $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ es un cubrimiento.

Una alternativa para estudiar la expansividad en el contexto de los anillos es sustituir, en el esquema anterior, la intersección de ideales $I \cap J$ por el producto IJ. De ese modo se consigue la propiedad distributiva pero ahora IJ deja de ser un ínfimo de $\{I, J\}$ (aunque es una cota inferior), más aun $IJ \neq JI$ en general. Dentro de esta alternativa existe la posibilidad de restringirse a anillos conmutativos de modo que $IJ = JI$ para todo par de ideales $I, J \lhd A$. Ésta es precisamente la elección que se hace en el artículo [8] recientemente en circulación.

Si como anillo se toma una *C^*-álgebra* con unidad A el conjunto de ideales natural a considerar es el de los *$*$-ideales cerrados* de A, que se denotará igualmente con $\mathcal{I}(A)$. En una C^*-álgebra (conmutativa o no) se verifica que si $I, J \in \mathcal{I}(A)$ entonces $IJ = I \cap J$, por lo que en este caso $\mathcal{I}(A)$ es un retículo acotado y distributivo, y valen las propiedades generales que se tienen para la expansividad en retículos. Sin embargo, la noción de expansividad para automorfismos de una C^*-álgebra que se obtiene no parece ser la adecuada, pues como se verá, si bien representa una extensión del concepto de r-expansividad al contexto *no conmutativo* se remite básicamente a ella.

Si X es un espacio topológico compacto y de Hausdorff el anillo $A = C(X)$ de las funciones continuas de X en $\mathbb{C}$ es una C^*-álgebra conmutativa con unidad. Además, toda función continua $T\colon X \to Y$ entre espacios compactos de Hausdorff induce un morfismo de C^*-álgebras $\alpha_T\colon C(Y) \to C(X)$ dado por $\alpha_T(f) = f \circ T$. Recíprocamente, dada una C^*-álgebra conmutativa con unidad A es posible construir un espacio topológico compacto y de Hausdorff X_A de modo que $A = C(X_A)$ (se trata en realidad de un isomorfismo), y todo morfismo de C^*-álgebras conmutativas con unidad $\alpha\colon A \to B$ induce una función continua $T_\alpha\colon X_B \to X_A$.

Estas correspondencias (funtores) entre espacios compactos y de Hausdorff y sus funciones continuas, y las C^*-álgebras conmutativas con unidad y sus morfismos establecen lo que se conoce como una *equivalencia contravariante* entre ambas categorías. Groseramente esto significa que, además de preservarse la composición, se tiene que $C(X_A) = A$, $\alpha_{T_\alpha} = \alpha$, $X_{C(A)} = A$ y $T_{\alpha_T} = T$ "módulo isomorfismos/conjugaciones". Es por esto que el estudio de las C^*-álgebras (no necesariamente conmutativas) se conoce como *topología no conmutativa.*

Gracias a esta dualidad bien conocida es fácil verificar que requerir que un automorfismo de una C^*-álgebra conmutativa con unidad sea expansivo (vía la definición para retículos aplicada al retículo de $*$-ideales cerrados) es equivalente a que el homeomorfismo (dual) asociado sea r-expansivo. En consecuencia la noción de expansividad en el contexto C^*-algebraico es una extensión del concepto de r-expansividad en espacios compactos y de Hausdorff, espacios para los cuales la r-expansividad coincide con la expansividad métrica usual.

En el caso no necesariamente conmutativo se tiene que el funtor $A \mapsto X_A$, $\alpha \mapsto T_\alpha$ se extiende a C^*-álgebras con unidad no necesariamente conmutativas y sus morfismos, asociando a cada C^*-álgebra con unidad un espacio topológico compacto (ahora no necesariamente de Hausdorff) y a cada morfismo una función continua. Una manera de hacerlo es tomar como X_A el *espectro primitivo* de A que es el conjunto de *ideales primitivos* de A con la *topología hull-kernel* (una construcción similar al *espectro primo* de un anillo conmutativo y la *topología de Zariski*) y como T_α la acción por preimágenes de α sobre tales ideales. La C^*-álgebra conmutativa $C(X_A)$ puede pensarse como la "parte conmutativa" de A (por ejemplo la "parte conmutativa" del álgebra de las matrices complejas $n \times n$ sería la subálgebra de las matrices diagonales y el espacio topológico en juego es el espacio discreto de n elementos).

Aun en el caso no necesariamente conmutativo nuevamente ocurre que un automorfismo α de una C^*-álgebra con unidad A es expansivo (con la definición con retículos) sii el homeomorfismo asociado $T_\alpha \colon X_A \to X_A$ es r-expansivo. Es decir, la noción de expansividad C^*-algebraica se remite en definitiva a la noción de r-expansividad.

Para C^*-álgebras A simples (sin ideales no triviales), las cuales verifican que X_A es un punto, se tiene entonces que todo isomorfismo es automáticamente expansivo, aun cuando existen muchas C^*-álgebras simples con estructuras muy ricas y nada triviales. Por lo tanto, desde el punto de vista de las C^*-álgebras esta noción de expansividad no es del todo satisfactoria, pues solo toma en cuenta la "parte conmutativa" y nada refleja del resto de la estructura (no conmutativa) presente.

Preguntas abiertas del Capítulo 1

A continuación se plantean algunas de las preguntas que han surgido en relación a la temática de este capítulo y que no han podido ser contestadas hasta el momento.

Pregunta 1.4.12. Luego de la definición de homeomorfismo o-expansivo (Definición 1.1.2) se muestra que la traslación $T \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es o-expansiva aunque no es expansivo en el sentido métrico. Por otro lado, en el Ejemplo 1.1.10 en relación a la vinculación de la existencia de un cubrimiento de o-expansividad finito y la compacidad del espacio se muestra un homeomorfismo (conjugado a un subsistema de la traslación) no expansivo métrico que posee un cubrimiento de o-expansividad finito y está definido en un espacio metrizable no compacto. En ambos casos el homeomorfismo sí es expansivo métrico respecto a una métrica diferente de la usual (ver Ejemplo 1.1.10).

Existe un ejemplo de un homeomorfismo o-expansivo en un espacio metrizable que no sea expansivo métrico respecto a ninguna de las métricas compatibles? Un tal ejemplo necesariamente deberá ser en un espacio no compacto en virtud de la Proposición 1.1.3.

Pregunta 1.4.13. Necesidad de la hipótesis de compacidad en la Proposición 1.1.13. Existe algún ejemplo de homeomorfismo o-expansivo en un espacio de Hausdorff no metrizable?

Pregunta 1.4.14. El directo de la Proposición 1.2.6 vale sin la necesidad de la hipótesis de compacidad. En el caso no compacto la condición 2) de la citada proposición es en principio más débil que la condición de r-expansividad. Queda planteada entonces la siguiente pregunta.

Existe algún homeomorfismo $T\colon X \to X$ que verifique la condición 2) de la Proposición 1.2.6 pero que no sea r-expansivo?

Pregunta 1.4.15. En un espacio métrico compacto todo homeomorfismo expansivo es uniformemente expansivo ([11, Theorem 5]). Dado que la o-expansividad está inspirada en la expansividad métrica y la r-expansividad en la expansividad uniforme, cabe preguntarse si un teorema análogo es válido en este nuevo contexto topológico.

Si X es un espacio topológico compacto y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo o-expansivo, es T necesariamente r-expansivo?

Pregunta 1.4.16. Vale el recíproco de la Proposición 1.2.40?

Capítulo 2

Observables y expansividad

En este capítulo se introduce y se estudia el concepto de *observabilidad* de un sistema dinámico discreto. El principal aporte realizado a esta teoría lo constituye el Teorema 2.1.9 al cual está dedicado la mayoría de la Sección 2.1. En la Sección 2.2 se aplica este resultado para obtener el Teorema 2.2.8 que garantiza la observabilidad de dinámicas expansivas al futuro en toros con dos observables.

2.1. Observabilidad

Sea $T\colon X \to X$ un sistema dinámico que modela la evolución temporal (discreta) de un cierto sistema físico. Supóngase que para cada estado del espacio de fases $x \in X$ es posible realizar $m \geq 1$ mediciones, lo cual se representa mediante una función $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. El *problema de la observabilidad* (también llamado *problema de reconstrucción*) consiste en decidir bajo qué condiciones es posible distinguir estados diferentes $x, y \in X$ mediante mediciones realizadas a lo largo de la evolución del sistema.

En este contexto, se dice que f *observa a* T sii dados $x, y \in X$, $x \neq y$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f(T^k x) \neq f(T^k y)$. Si el valor de $k \in \mathbb{N}$ puede elegirse siempre de modo que $k \leq n$ para un cierto valor fijo $n \in \mathbb{N}$ independiente de $x, y \in X$ se dice que f *observa a* T *en* n *pasos*. Por otro lado, si T es biyectiva tiene sentido permitir que el valor de k sea entero, en cuyo caso se dice que f *observa bilateralmente a* T. El punto de interés es determinar condiciones para que f observe a T en alguno de los sentidos mencionados. Aquí se abordará principalmente el caso de la observación en una cantidad n de pasos.

El problema de la observabilidad puede reformularse en términos de un problema de encaje. Concretamente, si se considera el mapa

$$f_0^\infty\colon X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \qquad f_0^\infty(x) = \big(f(x), f(Tx), f(T^2x), \ldots\big),$$

se tiene que f observa a T sii f_0^∞ es un encaje (inyectiva). De manera similar se vinculan la observabilidad en n pasos y la observabilidad bilateral con la inyectividad de los mapas

$$f_0^n\colon X \to \mathbb{R}^{m(n+1)}, \qquad f_0^n(x) = \big(f(x), f(Tx), \ldots, f(T^n x)\big),$$
$$f_{-\infty}^{\infty}\colon X \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \qquad f_{-\infty}^{\infty}(x) = \big(\ldots, f(T^{-1}x), f(x), f(Tx), f(T^2x), \ldots\big).$$

Más aun, es claro que si f observa a T el mapa f_0^∞ da una conjugación con un subshift del shift (unilateral)

$$\sigma\colon (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}, \qquad \sigma\big((\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = (\xi_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}.$$

De manera similar, si f observa bilateralmente a T el mapa $f_{-\infty}^{\infty}$ da una conjugación con un subshift de un shift (bilateral) de fibra $\mathbb{R}^m$.

Un resultado clásico en esta temática en el contexto diferenciable es probado por Takens en 1981 [36, Theorem 1].[1]

Teorema 2.1.1 (Teorema de encaje de Takens, 1981)**.** *Sea X una variedad diferenciable de clase C^r ($r \geq 2$), compacta y de dimensión finita* $\dim X = d$*. Entonces, para los pares (T, f) donde $T\colon X \to X$ es in difeomorfismo de clase C^r y $f\colon X \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^r, es una propiedad genérica que el mapa*

$$f_0^{2d}\colon X \to \mathbb{R}^{2d+1}, \qquad f_0^{2d}(x) = \big(f(x), f(Tx), \ldots, f(T^{2d}x)\big),$$

es un encaje. Más aun, el conjunto de pares (T, f) para los cuales f_0^{2d} es un encaje es un conjunto abierto y denso en $C^r(X,\mathbb{R}) \times Dif^r(X)$ respecto a la topología C^r.

A primera vista el resultado es sorprendente, pues afirma que genéricamente alcanza con una sola medición ($m = 1$) realizada $2d + 1$ veces a lo largo de la evolución del sistema para caracterizar los estados. Es decir, genéricamente cualquier $f\colon X \to \mathbb{R}$ observa a cualquier difeomorfismo en $2d$ pasos.

En el contexto topológico varios autores han considerado este tipo de problema. En 1974 en su trabajo de tesis doctoral Jaworski presenta el siguiente teorema que se puede encontrar en [14, Theorem 8.3.1].

Teorema 2.1.2 (Teorema de Jaworski, 1974)**.** *Sean X un espacio métrico compacto de dimensión finita y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Si T no tiene puntos periódicos entonces el sistema dinámico (X, T) es conjugado a un subshift de $(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \sigma)$, donde $\sigma\big((\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = (\xi_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Nótese que a diferencia del Teorema de Takens aquí T es fija, dada de antemano. Si bien no aparece en el enunciado lo que se prueba en [14, Theorem 8.3.1] es que el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ que observan bilateralmente a T es residual. Más aún con una

[1] En 1991 Noakes [32] extiende este resultado al caso $r = 1$. En el mismo año en el que Takens publica su teorema, Aeyels [5] demuestra una versión del mismo para flujos diferenciables en variedades.

simple modificación en la referida prueba se obtiene que el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$ que observan a T es residual, es decir, genéricamente para $f\colon X \to \mathbb{R}$ ($m = 1$) se tiene que f_0^∞ es un encaje.

Aunque en este teorema no hay referencia a la cantidad de pasos necesaria para observar a T en la introducción de [17] se menciona que según la prueba original de Jaworski alcanza con $(4d + 3)^2$ pasos, donde $d = \dim X$. Asimismo se señala que la condición de no existencia de puntos periódicos de T es necesaria hasta períodos de tamaño $(4d + 3)^2$.

En 1991 Nerurkar [31, Theorem 4.1] logra probar el Teorema de Jaworski con menos hipótesis, permitiendo la existencia de finitos puntos periódicos de cada período. En la prueba del teorema queda de manifiesto que esta condición alcanza asumirla hasta período $(4d + 3)^2$ y que la observabilidad es genérica en $(4d + 3)^2$ pasos, donde d es la dimensión (finita) del sistema.

Recientemente Gutman en 2016 [17, Theorem 1.1] mejora considerablemente los resultados anteriores presentando el siguiente teorema, donde $\mathrm{Per}_n(T)$ denota el conjunto de los puntos periódicos de T de periodo menor o igual que n y $C(X)$ el conjunto de las funciones reales continuas en X.

Teorema 2.1.3 (Teorema de Gutman, 2016)**.** *Sea $T\colon X \to X$ un mapa continuo e inyectivo en un espacio métrico compacto X de dimensión finita $\dim X \leq d$ tal que*

$$\dim \mathrm{Per}_n(T) < {}^{n}\!/_{2}, \quad \textit{si} \quad n = 1, \dots, 2d.$$

Entonces el conjunto

$$\Omega = \{f \in C(X) : f \ \textit{observa a}\ T \ \textit{en}\ 2d\ \textit{pasos}\}$$

es residual en $C(X)$.

Son varias las mejoras que introduce Gutman. En primer lugar se reemplaza la hipótesis de finitud de los puntos periódicos por una condición (más débil) en la dimensión de dichos conjuntos. En segundo lugar se mejora la cota de $(4d+3)^2$ pasos a $2d$ pasos para la observabilidad genérica. Y, finalmente, no se requiere que el mapa T sea un homeomorfismo sino solamente que sea continuo e inyectivo.

El objetivo de esta sección es presentar una generalización del Teorema de Gutman para mapas T *localmente inyectivos*. Para ello en el apartado §2.1.A se enuncia dicho resultado (Teorema 2.1.9) y se comentan las dificultades del caso no inyectivo, en §2.1.B se recopilan los teoremas necesarios para abordar la prueba los *lemas de observabilidad* que se presentan en §2.1.C, con los cuales finalmente se demuestra el Teorema 2.1.9 en §2.1.D.

2.1.A. Observabilidad de mapas continuos

Dados un espacio topológico compacto X y $m \in \mathbb{N}$ se denota con $C(X, \mathbb{R}^m)$ el conjunto de las funciones continuas de X en $\mathbb{R}$, munido con la norma del máximo: $\|f\| = \max\{\|f(x)\| : x \in X\}$ si $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$. Para el caso $m = 1$ este espacio se denota simplemente con $C(X)$.

Definición 2.1.4. Sean $T\colon X \to X$ un mapa, $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) y $n \in \mathbb{N}$. Se dice que f *observa a T en n pasos* sii

$$\text{para todo } x, y \in X,\ x \neq y, \text{ existe } k \in \mathbb{N},\ k \leq n, \text{ tal que } f(T^k x) \neq f(T^k y).$$

Si se verifica la condición

$$\text{para todo } x, y \in X,\ x \neq y, \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } f(T^k x) \neq f(T^k y),$$

se dice simplemente que f *observa a T*.

En el contexto de la Definición 2.1.4 se denota

$$\begin{aligned} &f_0^n\colon X \to \mathbb{R}^{m(n+1)}, \qquad && f_0^n(x) = \big(f(x), f(Tx), \ldots, f(T^n x)\big), \qquad && \text{si } x \in X, \\ &f_0^\infty\colon X \to (\mathbb{R}^m)^{\mathbb{N}}, \qquad && f_0^\infty(x) = \big(f(x), f(Tx), f(T^2x), \ldots\big), \qquad && \text{si } x \in X. \end{aligned}$$

Es claro que f observa a T en n pasos sii f_0^n es inyectiva, que f observa a T sii f_0^∞ es inyectiva, y que si f observa a T en n pasos entonces f observa a T.

Una primera obstrucción para la observabilidad de un mapa $T\colon X \to X$, ya sea este inyectivo o no, está vinculada a la existencia de puntos periódicos. Dado $n \in \mathbb{N}$ recordar que se denota

$$\mathrm{Per}_n(T) = \{x \in X : T^n x = x\}.$$

Supóngase que se desea observar un mapa continuo T de un espacio métrico compacto X con una sola función continua $f\colon X \to \mathbb{R}$ ($m = 1$). Nótese que los conjuntos $\mathrm{Per}_n(T)$ son compactos invariantes y que el vector $f_0^\infty|_{\mathrm{Per}_n(T)}$ es periódico de período n, por lo que en definitiva $f_0^\infty|_{\mathrm{Per}_n(T)}$ se reduce a $f_0^{n-1}|_{\mathrm{Per}_n(T)}$. Si f observa a T entonces $f_0^{n-1}|_{\mathrm{Per}_n(T)}$ dará un encaje de $\mathrm{Per}_n(T)$ en $\mathbb{R}^n$. En general, un espacio métrico de dimensión d puede encajarse en $\mathbb{R}^{2d+1}$ (Teorema 2.1.10) y no en $\mathbb{R}^{2d}$. Por lo que para que sea posible encajar $\mathrm{Per}_n(T)$ en $\mathbb{R}^n$ será necesario en general que $n \geq 2d_n + 1$, donde $d_n = \dim \mathrm{Per}_n(T)$, lo que equivale a que $d_n < n/2$. Por este motivo la hipótesis sobre los puntos periódicos hecha en el Teorema de Gutman (Teorema 2.1.3), a saber

$$\dim \mathrm{Per}_n(T) < n/2, \quad \text{si} \quad n = 1, \ldots, 2d,$$

es de hecho necesaria. Como se desprende del Teorema de Gutman estas hipótesis son también suficientes en relación al problema presentado por los puntos periódicos para la observabilidad de T con una sola función real f en el caso inyectivo. Afortunadamente, como se verá en la demostración del Teorema 2.1.9 esta misma hipótesis permite salvar el obstáculo de los puntos periódicos en el caso localmente inyectivo. El mapa T se dice *localmente inyectivo* sii

$$\text{para todo } x \in X \text{ existe } \varepsilon > 0 \text{ tal que } T|_{B_\varepsilon(x)} \text{ es inyectivo,}$$

donde $B_\varepsilon(x)$ denota la bola de centro x y radio ε.

La principal dificultad para la observabilidad de mapas T no inyectivos es la presencia de puntos que *colapsan*, esto es, pares de puntos diferentes $x, y \in X$ tales que luego de una cierta cantidad $k \in \mathbb{N}$ de iteraciones coinciden: $T^k x = T^k y$. Para tales puntos cualquier f solo tendrá $k-1$ pasos para intentar distinguirlos.

El siguiente ejemplo muestra que a diferencia del caso inyectivo (Teorema 2.1.3) si se desea que *alguna* $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ observe a una T no inyectiva en general se necesitará tomar $m > 1$.

Ejemplo 2.1.5. Sea $T\colon S^1 \to S^1$ el mapa del círculo $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ dado por $Tz = z^2$. Nótese que los puntos periódicos de cada período son finitos en este caso por lo que no representan un problema para la observabilidad. Para este mapa los pares de puntos diferentes $x, y \in S^1$ que colapsan en un paso son los pares de puntos antipodales $z, -z \in S^1$. Esta observación permite ver que ninguna función continua $f\colon S^1 \to \mathbb{R}$ observa a T. En efecto, si una tal f observara a T entonces la función continua $g\colon S^1 \to \mathbb{R}$ dada por $g(z) = f(z) - f(-z)$ no debería tomar el valor 0. Pero por otro lado se tiene que $g(-z) = -g(z)$ para todo $z \in S^1$ lo cual conduce a un absurdo en virtud del Teorema de Bolzano.

Finalmente, es claro que existen funciones $f \in C(S^1, \mathbb{R}^m)$ que observan a T si $m = 2$. Basta tomar como f por ejemplo el encaje usual de S^1 en $\mathbb{R}^2$ (f observará a T en 0 pasos).

Se presenta a continuación una generalización de lo expuesto en el Ejemplo 2.1.5.

Lema 2.1.6. *Sean G un grupo topológico compacto y conexo y $T\colon G \to G$ un endomorfismo continuo y no inyectivo de G. Entonces ninguna función continua $f\colon G \to \mathbb{R}$ observa a T.*

Demostración. Sea $f \in C(G)$. Como T no es inyectiva existe $x \neq e$, donde e denota el neutro de G, tal que $Tx = e$. Como $\int_G f(y) - f(xy)\, d\mu(y) = 0$, donde $d\mu(y)$ denota la medida de Haar invariante a derecha de G, se tiene que $f(y) - f(xy) = 0$ para algún $y \in G$ en virtud de la conexión de G. Entonces $y \neq xy$, $f(y) = f(xy)$ y $Tx = Txy$. Esto prueba que f no puede observar a T. □

Como se ha mencionado, el Ejemplo 2.1.5 y el Lema 2.1.6 dan cuenta de que para el caso de mapas T no inyectivos en general será necesario que $m > 1$ para que exista $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ que observe T. Por otro lado, una cota inferior de m para la observabilidad <u>genérica</u> en el caso no inyectivo lo da el siguiente resultado: m debe ser mayor que la dimensión del espacio.

Proposición 2.1.7. *Sea X una variedad diferenciable compacta (posiblemente con borde) de dimensión finita $d \geq 1$. Si $T\colon X \to X$ es un mapa continuo, no inyectivo y localmente inyectivo, entonces existe un conjunto abierto $U \subseteq C(X, \mathbb{R}^d)$ tal que ninguna $f \in U$ observa a T.*

Demostración. Sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \neq x_2$ y $Tx_1 = Tx_2 = y$. Considérense entornos compactos A_i de x_i, $i = 1, 2$, y B de y tales que $T|_{A_i} \colon A_i \to B$ es un homeomorfismo, $i = 1, 2$. Sea $h \colon A_1 \to A_2$ el homeomorfismo $h = T|_{A_2}^{-1} \circ T|_{A_1}$. Como X es una variedad de dimensión d se tiene que $\dim A_1 = d$, y entonces, por el Teorema 2.1.11, existe una función continua $g \colon A_1 \to \mathbb{R}^d$ tal que 0 es un valor estable[2] de g. Sea $f \in C(X, \mathbb{R}^d)$ tal que $g(x) = f(x) - f\big(h(x)\big)$ si $x \in A_1$ (por ejemplo tómese $f = g$ en A_1, $f = 0$ en A_2 y extiéndase utilizando el Teorema de extensión de Tietze). Entonces toda perturbación suficientemente pequeña $\tilde{f}$ de f origina una pequeña perturbación $\tilde{g}(x) = \tilde{f}(x) - \tilde{f}\big(h(x)\big)$ de g que tomará 0 como valor. Por lo tanto $\tilde{f}$ tomará el mismo valor en ciertos $a \in A_1$ y $b = h(a) \in A_2$. Como $Ta = Tb$ por la definición de h se concluye que $\tilde{f}(T^k a) = \tilde{f}(T^k b)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Esto prueba que ninguna $\tilde{f}$ en un entorno de f observa a T. $\square$

Dadas las dificultades antes mencionadas que presentan los puntos que colapsan, para obtener un resultado de observabilidad genérica mediante una sola función real f $(m = 1)$ será necesario excluir las parejas de puntos que colapsan. Dada $T \colon X \to X$ y $n \in \mathbb{N}$ se denota

$$\Delta_n(T) = \big\{(x, y) \in X \times X : T^n x = T^n y\big\}.$$

Definición 2.1.8. Sean $T \colon X \to X$ un mapa, $f \colon X \to \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$, $W \subseteq X \times X$ y $n \in \mathbb{N}$. Se dice que f *observa a T en n pasos en W* sii

$$\text{para todo } (x, y) \in W \text{ existe } k \in \mathbb{N},\ k \leq n, \text{ tal que } f(T^k x) \neq f(T^k y).$$

Habiendo discutido las obstrucciones especiales que presenta la observabilidad de mapas T no inyectivos, se introduce a continuación el anunciado teorema de observabilidad para mapas continuos que generaliza el Teorema de Gutman, que se demostrará en §2.1.D.

Teorema 2.1.9. *Sean X un espacio métrico compacto de dimensión finita $\dim X \leq d$ y $T \colon X \to X$ un mapa continuo y localmente inyectivo tal que*

$$\dim \operatorname{Per}_n(T) < {}^n\!/\!_2, \quad \textit{si} \quad n = 1, \ldots, 2d.$$

Entonces el conjunto

$$\Omega = \big\{f \in C(X) : f \textit{ observa a } T \textit{ en } X \times X \setminus \Delta_{2d}(T) \textit{ en } 2d \textit{ pasos}\big\}$$

es residual en $C(X)$.

Es claro que el Teorema de Gutman es consecuencia del Teorema 2.1.9 ya que para mapas T inyectivos se tiene $\Delta_n(T) = \Delta = \big\{(x, x) : x \in X\big\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

[2]Ver la definición de *valor estable párrafo previo al Teorema 2.1.11.*

2.1.B. Resultados previos

En este apartado se recopilan los resultados necesarios para probar los lemas de observabilidad en §2.1.C. En la mayoría de los casos se dan simplemente las referencias salvo para la Proposición 2.1.13 que si bien parece un resultado conocido no se ha encontrado referencias en la literatura, por lo que se incluye su demostración.

Teorema 2.1.10 ([23, Theorem V 2, p. 56]). *Si X es un espacio métrico compacto de dimensión finita* $\dim X \leq d$ *entonces una función genérica* $f \in C(X, \mathbb{R}^{2d+1})$ *es un encaje.*

Si X es un espacio topológico compacto y $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$, un punto $y \in f(X)$ se dice *valor inestable* de f sii para todo $\varepsilon > 0$ existe $g \in C(X, \mathbb{R}^m)$ tal que $\|f - g\| < \varepsilon$ e $y \notin g(X)$. Los restantes valores $y \in f(X)$ se denominan *valores estables*.

Teorema 2.1.11 ([23, Theorems VI.1 y VI.2, pp. 75 – 77]). *Sea X un espacio métrico compacto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) $\dim X \leq d$,

2) todos los valores de f son inestables, para toda $f \in C(X, \mathbb{R}^{d+1})$.

El Teorema 2.1.11 da entonces una caracterización de la dimensión topológica de un espacio métrico compacto X: $\dim X$ el mínimo $d \in \mathbb{N}$ tal que todos los valores de todas las $f \in C(X, \mathbb{R}^{d+1})$ son inestables.

Lema 2.1.12. *Sean U un espacio métrico compacto de dimensión finita* $\dim U \leq r$ *y* $H_1, \dots, H_n \subseteq \mathbb{R}^{r+s+1}$ *subespacios afines tales que* $\dim H_i \leq s$, $i = 1, \dots, n$. *Entonces el conjunto*

$$\Omega = \left\{F \in C(U, \mathbb{R}^{r+s+1}) : F(U) \cap H_i = \varnothing \text{ para todo } i = 1, \dots, n\right\}$$

es abierto y denso en $C(U, \mathbb{R}^{r+s+1})$.

Demostración. Como la familia de subespacios afines es finita y la intersección finita de conjuntos abiertos densos es abierta y densa es suficiente considerar el caso $n = 1$. Sea $H = H_1$. Como H es cerrado y U es compacto se tiene que Ω abierto. En efecto, dada $F \in \Omega$ se tiene que $F(X)$ es compacto. Luego tomando $\varepsilon = d\big(F(X), H\big) = \text{mín}\{d(y, H) : y \in F(X)\} > 0$, es inmediato verificar que $B_\varepsilon(F) \subseteq \Omega$.

Realizando un cambio de coordenadas lineal (traslación) si es necesario puede suponerse que H es un subespacio, i.e. $0 \in H$. Sea $H^\perp$ el complemento ortogonal de H. Dada una función $F \in C(U, \mathbb{R}^{r+s+1})$ descompóngase $F = F_H + F_{H^\perp}$, donde $F_H \colon U \to H$ y $F_{H^\perp} \colon U \to H^\perp$ son las composiciones de F con las proyecciones ortogonales en H y $H^\perp$ respectivamente. Como $\dim H \leq s$ se tiene $\dim H^\perp \geq r + 1$. Luego, dado que $\dim U \leq r$, por el Teorema 2.1.11 puede perturbarse $F_{H^\perp}$ obteniendo $\widetilde{F}_{H^\perp} \in C(U, H^\perp)$ de modo que $0 \notin \widetilde{F}_{H^\perp}(U)$. Entonces tomando

$\widetilde{F} = F_H + \widetilde{F}_{H^\perp}$ se tiene que $\widetilde{F}$ es una perturbación de F y $\widetilde{F}(U) \cap H = \varnothing$. Esto prueba que Ω es denso. $\square$

Proposición 2.1.13. *Sean U, V espacios métricos compactos tales que* $\dim U + \dim V \leq n$ *y* $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *un subconjunto convexo. Entonces el conjunto*

$$\Omega = \big\{(F, G) \in C(U, \mathbb{R}^{n+1}) \times C(V, S) : F(U) \cap G(V) = \varnothing\big\}$$

es abierto y denso en $C(U, \mathbb{R}^{n+1}) \times C(V, S)$.

Demostración. Como U y V son compactos es claro que Ω es abierto. En efecto, si $(F, G) \in \Omega$ se tiene que $F(U)$ y $G(V)$ son compactos. Luego, tomando $\varepsilon = d\big(F(X), G(X)\big) = \min\{d(x, y) : x \in F(U), y \in G(V)\} > 0$, es claro que $B_{\varepsilon/2}(F) \times \big(B_{\varepsilon/2}(G) \cap C(V, S)\big)$ es un entorno de (F, G) en Ω.

Para probar que Ω es denso supóngase dado $(F, G) \in C(U, \mathbb{R}^{n+1}) \times C(V, S)$ y sean $r = \dim U$ y $s = \dim V$. Como $\dim V = s$ puede perturbarse G obteniéndose $\widetilde{G}$ como en a prueba de [23, (C) pp. 57-59]: tomando un cubrimiento abierto finito β de V con $\operatorname{ord} \beta \leq s + 1$ compuesto de bolas suficientemente pequeñas, para cada $W \in \beta$ eligiendo un punto cualquiera $p_W \in G(W) \subseteq S$, y definiendo $\widetilde{G}(y) = \sum_{W \in \beta} \omega_W(y) p_W$ si $y \in V$, donde $\{\omega_W : W \in \beta\}$ es una partición de la unidad subordinada a β.[3] Más concretamente, dado un margen $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ un módulo de continuidad uniforme para G: si $d(x, y) \leq \delta$ entonces $d\big(G(x), G(y)\big) \leq \varepsilon$. Basta entonces tomar β formado por bolas de radio $\delta/2$. En efecto, dado $y \in V$, sean $W_1, \ldots, W_t$ ($t \in \mathbb{N}$) los elementos de β que contienen a y. Como para $i = 1, \ldots, t$ se tiene que $p_{W_i}, G(y) \in G(W_i)$ y $\operatorname{diam} G(W_i) \leq \varepsilon$, pues $\operatorname{diam} W_i \leq \delta$, se obtiene que $d\big(p_{W_i}, G(y)\big) \leq \varepsilon$ si $i = 1, \ldots, t$. Luego, como $G(y) = G(y)1 = G(y) \sum_{i=1}^t \omega_{W_i}(y) = \sum_{i=1}^t \omega_{W_i}(y) G(y)$, se tiene que

$$\|G(y) - \widetilde{G}(y)\| = \|\sum_{i=1}^t \omega_{W_i}(y) G(y) - \omega_{W_i}(y) p_{W_i}\| \leq \sum_{i=1}^t \omega_{W_i}(y) \|G(y) - p_{W_i}\| \leq \sum_{i=1}^t \omega_{W_i}(y) \varepsilon = \varepsilon.$$

Como esto vale para todo $y \in V$, se concluye $d(G, \widetilde{G}) \leq \varepsilon$, es decir, $\widetilde{G}$ es una perturbación de G.

Nótese que como $p_W \in S$ si $W \in \beta$ y S es convexo se tiene que $\widetilde{G}(V) \subseteq S$, ya que $G(y)$ es una combinación lineal convexa de los puntos p_W para cada $y \in V$. Más aun, como $\operatorname{ord} \beta \leq s + 1$, cada $\widetilde{G}(y)$ es una combinación lineal de a lo sumo $s + 1$ puntos p_W. Luego cada $\widetilde{G}(y)$ está en alguno de los subespacios afines de dimensión menor o igual a s generados $s + 1$ puntos p_W. Así que $\widetilde{G}(V) \subseteq \bigcup_i H_i$ para una familia finita $\{H_i\}$ de subespacios afines tales que $\dim H_i \leq s$. Entonces, como $\dim U = r$ y $r + s \leq n$, por el Lema 2.1.12 puede perturbarse F obteniendo $\widetilde{F}$ de modo que $\widetilde{F}(U)$ es disjunto de $\bigcup_i H_i$, y por lo tanto $\widetilde{F}(U) \cap \widetilde{G}(V) = \varnothing$. Esto prueba que Ω es denso. $\square$

[3] $\{\omega_W\}_{W \in \beta}$ es una familia de funciones continuas $\omega_W \colon V \to [0, 1]$, tales que $\omega_W|_{V \setminus W} = 0$ y $\sum_{W \in \beta} \omega_W = 1$.

Lema 2.1.14 ([18, Lemma A.5])**.** *Sean X un espacio topológico normal, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua y acotada, $A \subseteq X$ un subconjunto cerrado y $g_0\colon A \to \mathbb{R}$ un función continua y acotada tal que $d(f|_A, g_0) < \epsilon$ para cierto $\epsilon > 0$. Entonces existe una extensión continua y acotada $g\colon X \to \mathbb{R}$ de g_0 tal que $d(f,g) < \epsilon$.*

2.1.C. Lemas de observabilidad

Para tratar los diferentes casos que aparecerán en la prueba del Teorema 2.1.9 (§2.1.D), en esta sección se introducen los Lemas 2.1.17 (una generalización de [14, Lemma 8.3.4]), 2.1.19 y 2.1.21.

Para referencia posterior se establece el siguiente fácil resultado.

Lema 2.1.15 ([18, Lemma A.2])**.** *Sen X un espacio métrico compacto, $T\colon X \to X$ un mapa continuo, $W \subseteq X \times X$ un subconjunto compacto y $n \in \mathbb{N}$. Entonces el conjunto*

$$\Omega(W) = \{f \in C(X) : f \textit{ observa a } T \textit{ en } W \textit{ en } n \textit{ pasos}\}$$

es abierto en $C(X)$.

Definición 2.1.16. Dado un mapa $T\colon X \to X$, un subconjunto $W \subseteq X$ y $n \in \mathbb{N}$ se denota

$$W_0^n = W \cup TW \cup \cdots \cup T^n W.$$

Recordar que si $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$ se denota

$$f_0^n\colon X \to \mathbb{R}^{n+1}, \qquad f_0^n(x) = \big(f(x), f(Tx), \ldots, f(T^n x)\big), \quad \text{si } x \in X.$$

El siguiente lema permitirá distinguir pares de puntos no periódicos que se encuentran en órbitas diferentes.

Lema 2.1.17. *Sean X un espacio métrico compacto, $T\colon X \to X$ un mapa continuo, $U, V \subseteq X$ subconjuntos compactos y $n \in \mathbb{N}$ tales que*

1) $\dim U \leq n/2$ *y* $\dim V \leq n/2$,

2) $U, \ldots, T^n U, V, \ldots, T^n V$ *son disjuntos dos a dos,*

3) T *es inyectiva en los conjuntos* $U, \ldots, T^{n-1}U, V, \ldots, T^{n-1}V$.

Entonces el conjunto

$$\Omega = \{f \in C(X) : f \textit{ observa a } T \textit{ en } U \times V \textit{ en } n \textit{ pasos}\}$$

es abierto y denso en $C(X)$.

Demostración. En primer lugar nótese que como $U \times V$ es compacto Ω es abierto (Lema 2.1.15). Para probar que Ω es denso considérese una función $f \in C(X)$. Sean $W = U \cup V$ y $F\colon W \to \mathbb{R}^{n+1}$, $F = f_0^n|_W$. Como $\dim W \leq n/2$ por el Teorema 2.1.10 F puede perturbarse obteniendo un encaje $\widetilde{F} \in C(W, \mathbb{R}^{n+1})$. Sea $\tilde{f}\colon W_0^n \to \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(T^i x) = \widetilde{F}_i(x)$ si $x \in W$ e $i = 0, \dots, n$, donde se denota $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_0, \dots, \widetilde{F}_n)$. Entonces $\tilde{f}$ es una perturbación de $f|_{W_0^n}$ que por el Lema 2.1.14 puede ser extendida a una perturbación $\bar{f} \in C(X)$ de f. Se tiene que $\bar{f}_0^n|_W = \widetilde{F}$, de donde, como $\widetilde{F}$ es inyectiva, $\bar{f}$ observa a T en $W \times W \setminus \Delta$ en n pasos, y en particular en $U \times V$, es decir $\bar{f} \in \Omega$. Esto prueba que Ω es denso. □

Definición 2.1.18. Dado un mapa $T\colon X \to X$ y $k, l \in \mathbb{N}$ se denota

$$G_k = \{(x, T^k x) \in X \times X : x, \dots, T^k x \text{ son distintos}\},$$
$$G_{k,l} = \{p \in X \times X : T^l p \in G_k \text{ y } T^{l-1} p \notin G_k\},$$

donde $Tp = (Tx, Ty)$ si $p = (x, y) \in X \times X$.

El lema que se introduce a continuación se aplicará para distinguir pares de puntos que luego de algunas iteraciones se encuentran en una misma órbita.

Lema 2.1.19. *Sean X un espacio métrico compacto, $T\colon X \to X$ un mapa continuo, $U, V \subseteq X$ subconjuntos compactos y $k, l, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq l < l + k \leq n$, tales que*

1) $\dim U \leq n$,

2) $T^{l+k} U = T^l V$,

3) $U, \dots, T^{l+k-1} U, V, \dots, T^n V$ *son disjuntos dos a dos,*

4) T *es inyectiva en los conjuntos* $U, \dots, T^{l+k-1} U, V, \dots, T^{n-1} V$.

Entonces el conjunto

$$\Omega = \{f \in C(X) : f \textit{ observa a } T \textit{ en } U \times V \cap G_{k,l} \textit{ en } n \textit{ pasos}\}$$

es abierto y denso en $C(X)$.

Demostración. Como U y V son compactos se tiene que $U \times V \cap G_{k,l}$ es compacto. En efecto, dada una sucesión $\big((x_j, y_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ en $U \times V \cap G_{k,l}$ existe una subsucesión $\big((\bar{x}_j, \bar{y}_j)\big)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $(\bar{x}_j, \bar{y}_j) \to (x, y) \in U \times V$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene que $(\bar{x}_j, \bar{y}_j) \in G_{k,l}$, así que $T^l \bar{y}_j = T^{l+k} \bar{x}_j$ y $T^l \bar{x}_j, T^{l+1} \bar{x}_j, \dots, T^{l+k} \bar{x}_j$ son distintos por la definición de $G_{k,l}$. Tomando límites con $j \to \infty$ se obtiene que $T^l y = T^{l+k} x$ y que $T^l x, T^{l+1} x, \dots, T^{l+k} x$ son distintos, ya que $T^{l+i} x = T^i y \in T^i V$ si $i = 0, \dots, k$ y $V = T^0 V, \dots, T^k V$ son disjuntos dos a dos por 3). Finalmente $T^{l-1} y \neq T^{l+k-1} x$ pues $T^{l-1} y \in T^{l-1} V$, $T^{l+k-1} x \in T^{l+k-1} U$, y los conjuntos $T^{l-1} V$ y $T^{l+k-1} U$ son disjuntos por

3). Esto prueba que $(x, y) \in U \times V \cap G_{k,l}$, y que por lo lo tanto $U \times V \cap G_{k,l}$ es compacto. Aplicando entonces el Lema 2.1.15 se obtiene que Ω es abierto.

Por otro lado, nótese que por 2) y 4) T se restringe a homeomorfismos $T^iW \to T^{i+1}W$ para $i = 0, \ldots, n-1$ y $W = U, V$. Considérense los homeomorfismos $t_i \colon T^iU \to T^iV$, $i = 0, \ldots, n$, dados por

$$t_i = \begin{cases} T^iU \xrightarrow{T^{l+k-i}} T^{l+k}U = T^lV \xrightarrow{T^{i-l}} T^iV, & \text{si } i < l, \\ T^iU \xrightarrow{T^k} T^iV, & \text{si } i \geq l, \end{cases}$$

y sea $W = U_0^n \cup V_0^n$. En la Figura 2.1 se ilustra esta definición.

Dada una función $f \in C(X)$ defínase $\delta = (\delta_0, \ldots, \delta_n) \in C(U, \mathbb{R}^{n+1})$ como $\delta_i(x) = f(t_iT^ix) - f(T^ix)$ si $x \in U$ e $i = 0, \ldots, n$. La función δ se llamará *δ-función asociada a $f|_W$* (solo los valores que toma f en W están involucrados). Es fácil ver que la condición de que f observe a T en

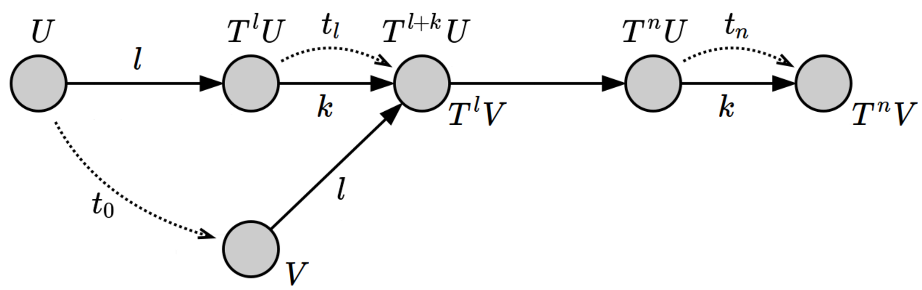

Figura 2.1

$U \times V \cap G_{k,l}$ en n pasos es equivalente a que $0 \notin \delta(U)$. En efecto, si $0 \notin \delta(U)$ entonces para todo $x \in U$ existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $f(t_iT^ix) - f(T^ix) \neq 0$. Ahora bien, si $(x, y) \in U \times V \cap G_{k,l}$ se tiene que $T^ly = T^{l+k}x$ y por lo tanto $T^iy = t_iT^ix$.[4] Luego, como $x \in U$ se concluye que $f(T^ix) \neq f(T^iy)$ para algún $i \in \{0, \ldots, n\}$. Recíprocamente, aunque no se usará, puede verse que si f observa a T en $U \times V \cap G_{k,l}$ en n pasos entonces $0 \notin \delta(U)$.

Si este no fuera el caso, como $\dim U \leq n$, se puede aplicar el Teorema 2.1.11 y obtener una perturbación $\tilde{\delta} \in C(U, \mathbb{R}^{n+1})$ de δ tal que $0 \notin \tilde{\delta}(U)$. Defínase $\tilde{f} \in C(W)$ como

$$\tilde{f}|_{T^iU} = f|_{T^iU}, \text{ si } i = 0, \ldots, l+k-1,$$

$$\tilde{f}|_{T^iV}(t_iT^ix) = f|_{T^iU}(T^ix) + \tilde{\delta}_i(x), \text{ si } x \in U \text{ e } i = 0, \ldots, l,$$

y en $V_{l+1}^n = T^{l+1}V \cup \cdots \cup T^nV = T^{k+l+1}U \cup \cdots \cup T^{k+n}U$ inductivamente como

$$\tilde{f}|_{T^iV}(T^{k+i}x) = \tilde{f}|_{T^iU}(T^ix) + \tilde{\delta}_i(x), \text{ si } x \in U \text{ y } i = l+1, \ldots, n.$$

Puede comprobarse que $\tilde{f}$ es una perturbación de $f|_W$ y que la δ-función asociada a $\tilde{f}$ es

[4]Si $i < l$ esto surge de que $T^{l-i}T^iy = T^ly = T^{l+k}x = T^{l+k-i}T^ix$ y y que $T^iy \in T^iV$ junto a la definición de t_i en este caso. Si $i \geq l$ directamente $T^iy = T^{i-l}T^ly = T^{i-l}T^{l+k}x = T^{i+k}x = t_iT^ix$, pues $t_i = T^k$ en este caso.

precisamente $\tilde{\delta}$. Ahora, por el Lema 2.1.14, puede extenderse $\tilde{f}$ a una perturbación $\bar{f} \in C(X)$ de f, que observará a T en $U \times V \cap G_{k,l}$ en n pasos ya que $0 \notin \tilde{\delta}(U)$. Esto prueba que Ω es denso. $\square$

Definición 2.1.20. Dado un mapa $T \colon X \to X$ y $m, k \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, se denota

$$H_m = \{x \in X : x = T^m x \text{ y } x, \dots, T^{m-1}x \text{ son distintos}\},$$
$$H_{m,k} = \{x \in X : T^k x \in H_m \text{ y } T^{k-1}x \notin H_m\}.$$

Los puntos $x \in H_{m,k}$ se denominan *puntos preperiódicos de período m.*

El siguiente lema se usará para distinguir un punto periódico (o preperiódico) de uno no periódico.

Lema 2.1.21. *Sean X un espacio métrico compacto, $T \colon X \to X$ un mapa continuo, $m, n, k \in \mathbb{N}$ $(0 \leq k \leq m + k \leq n)$, $U \subseteq X$ y $V \subseteq H_{m,k}$ subconjuntos compactos tales que*

1) $\dim U + \dim V \leq n$,

2) $U, \dots, T^n U, V, \dots, T^{m+k-1} V$ *son disjuntos dos a dos,*

3) T *es inyectiva en los conjuntos* $U, \dots, T^{n-1}U, V, \dots, T^{k-1}V$.

Entonces el conjunto

$$\Omega = \{f \in C(X) : f \text{ observa a } T \text{ en } U \times V \text{ en } n \text{ pasos}\}$$

es abierto y denso en $C(X)$.

Demostración. Nótese que como $V \subseteq H_{m,k}$ entonces $T^k V \subseteq H_m$. Por lo tanto T es inyectiva también en los conjuntos $T^k V, \dots, T^{m+k-1} V$. Esto junto con 3) implica que T se restringe a homeomorfismos $T^i U \to T^{i+1} U$ si $i = 0, \dots, n-1$ y $T^i V \to T^{i+1} V$ si $i = 0, \dots, m+k-1$.

Dada $f \in C(X)$ sean $F \in C(U, \mathbb{R}^{n+1})$ y $G \in C(V, \mathbb{R}^{n+1})$ dadas por $F = f_0^n|_U$ y $G = f_0^n|_V$. Como $V \subseteq H_{m,k}$ se tiene que

$$G(V) \subseteq S = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_i = x_j \text{ si } i = j \pmod{m} \text{ y } i, j \geq k\},$$

y entonces $G \in C(V, S)$. Como $\dim U + \dim V \leq n$ y S es convexo, por la Proposición 2.1.13 se puede perturbar F y G obteniendo $\widetilde{F} \in C(U, \mathbb{R}^{n+1})$ y $\widetilde{G} \in C(V, S)$ de modo que $\widetilde{F}(U) \cap \widetilde{G}(V) = \varnothing$. Defínanse $\tilde{f} \in C(U_0^n \cup V_0^{m+k-1})$ como $\tilde{f}(T^i x) = \widetilde{F}_i(x)$ si $x \in U$ e $i = 0, \dots, n$, y $\tilde{f}(T^i y) = \widetilde{G}_i(y)$ si $y \in V$ e $i = 0, \dots, m+k-1$, donde se denota $\widetilde{F} = (\widetilde{F}_0, \dots, \widetilde{F}_n)$ y $\widetilde{G} = (\widetilde{G}_0, \dots, \widetilde{G}_n)$. Se tiene que $\tilde{f}$ es una perturbación de $f|_W$, donde $W = U_0^n \cup V_0^{m+k-1}$. Extiéndase $\tilde{f}$, aplicando el Lema 2.1.14, a una perturbación $\bar{f} \in C(X)$ de f. Entonces se cumple que $\bar{f}_0^n|_U = \widetilde{F}$ y, como $\widetilde{G}(V) \subseteq S$, que $\bar{f}_0^n|_V = \widetilde{G}$. Luego $\bar{f}$ observa a T en $U \times V$ en n pasos ya que $\widetilde{F}(U) \cap \widetilde{G}(V) = \varnothing$. Se concluye entonces que Ω es denso. Finalmente, como $U \times V$ es compacto Ω es abierto. $\square$

2.1.D. Demostración del Teorema 2.1.9

Para el lector familiarizado con las técnicas de Gutman [17, 18] se quiere marcar algunas de las diferencias fundamentales entre el enfoque por él usado y el que se presenta aquí para demostrar el Teorema 2.1.9, lo que redunda en una prueba más simple. En primer lugar no se considera una partición de $X \times X \setminus \Delta$ en subespacios producto (conjuntos C_1, C_2 y C_3 en [17, §3.2]). En lugar de ello se considera una familia finita de subespacios $\mathscr{C}$, no necesariamente disjunta, compuesta entre otros por los conjuntos $G_{k,l}$ introducidos en §2.1.C, que luego se compatibilizan usando el Lema 2.1.22.

Por otro lado, para simplificar algunos argumentos se considera la caracterización de la dimensión topológica en términos de valores inestables (Teorema 2.1.11), en lugar de la usada por Gutman, que es la definición con cubrimientos o dimensión de Lebesgue, por ejemplo en [18, Propositions 4.2, 4.3, 8.2, 8.3 y Lemmas A9, A10, A11, A12] y [17, §3.2]. Esta caracterización se usó en la prueba del Lema 2.1.19, que se aplica para distinguir pares de puntos que luego de algunas iteraciones se encuentran en una misma órbita positiva. Para distinguir puntos periódicos (o preperiódicos) de puntos no periódicos se utiliza el Lema 2.1.21, cuya prueba está basada en la Proposición 2.1.13 que es nuevamente un resultado inspirado en las ideas de la caracterización de la dimensión topológica con valores inestables. Finalmente, el Lema 2.1.17 se aplica al caso más simple: dos puntos no periódicos en diferentes órbitas. En la demostración de ese lema se utilizó el Teorema 2.1.10. Con solo esos tres lemas se cubren todos los casos que aparecen en la prueba del teorema 2.1.9.

Lema 2.1.22. *Sean M un espacio topológico que posee base numerable y $\mathscr{C}$ una familia numerable de subespacios de M. Supóngase que para todo $p \in M$ existe $N_p \in \mathscr{C}$ y un entorno relativo $W_p \subseteq N_p$ de p. Entonces el cubrimiento $\mathcal{W} = \{W_p : p \in M\}$ posee un subcubrimiento numerable.*

Demostración. Dado $N \in \mathscr{C}$ sea $N^* = \{p \in M : N_p = N\} \subseteq N$. Nótese que $\{N^*\}_{N\in\mathscr{C}}$ es un cubrimiento numerable de M. Para cada $N \in \mathscr{C}$ sea $\mathcal{W}_N = \{W_p : p \in N^*\}$. Entonces $\mathcal{W}_N$ es un cubrimiento de N^* que contiene un entorno (relativo a N) de cada $p \in N^*$. Como M posee base numerable N^* también, y entonces existe un subcubrimiento numerable $\mathcal{W}_N^\circ \subseteq \mathcal{W}_N$ de N^*. Luego $\mathcal{W}^\circ = \bigcup_{N\in\mathscr{C}} \mathcal{W}_N^\circ$ es un subcubrimiento numerable de $\mathcal{W}$. □

Demostración del Teorema 2.1.9. Se desea probar que el conjunto

$$\Omega = \big\{f \in C(X) : f \text{ observa a } T \text{ en } X \times X \setminus \Delta_{2d}(T) \text{ en } 2d \text{ pasos}\big\}$$

es residual.

Para ello se aplicará el Lema 2.1.22 al espacio $M = X \times X \setminus \Delta_{2d}(T)$ y la colección finita $\mathscr{C}$ formada por los subespacios de la forma

$$M_1 = M, \qquad M_2 = G_{k,l}, \qquad M_3 = X \times H_{m,k} \setminus \Delta_{2d}(T),$$
$$M_4 = H_{m,r} \times H_{m,s} \cap G_{k,l}, \qquad \text{y} \qquad M_5 = H_{r,l} \times H_{m,k},$$

donde $k, l, m, r, s \in \mathbb{N}$, $k, l, m, r, s \leq 2d$.

Para cada $p \in M$ se hallará un subconjunto $W \subseteq M$, entorno relativo de p en uno de los subespacios $M_i \in \mathscr{C}$, que verifique que el conjunto

$$\Omega(W) = \{f \in C(X) : f \text{ observa a } T \text{ en } W \text{ en } 2d \text{ pasos}\}$$

es abierto y denso. Luego, por el Lema 2.1.22, M se puede cubrir con una cantidad numerable de tales conjuntos W, sean estos $\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Entonces, como $\Omega = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \Omega(W_k)$, se tendrá que Ω es residual.

Dado $z \in X$ y $k \in \mathbb{N}$, se denota la *órbita de k pasos* de z con

$$z_0^k = \{z, \ldots, T^k z\}.$$

Se llama *largo* de z_0^k al número

$$\operatorname{len}(z_0^k) = \operatorname{card}(z_0^k) - 1 \leq k.$$

Dado $p = (x, y) \in M$, para hallar W como se ha indicado se distinguen seis casos de acuerdo a si las órbitas de $2d$ pasos x_0^{2d} e y_0^{2d} se cortan o no, y de acuerdo a si sus largos son iguales o menores que $2d$. Los casos se enumeran en la tabla siguiente.

	$x_0^{2d} \cap y_0^{2d} = \varnothing$	$x_0^{2d} \cap y_0^{2d} \neq \varnothing$
$\operatorname{len}(x_0^{2d}) = \operatorname{len}(y_0^{2d}) = 2d$	Caso 1	Caso 2
$\operatorname{len}(x_0^{2d}) = 2d > \operatorname{len}(y_0^{2d})$	Caso 3	Caso 4
$2d > \operatorname{len}(x_0^{2d}) \geq \operatorname{len}(y_0^{2d})$	Caso 5	Caso 6

Los casos restantes, correspondientes a $\operatorname{len}(y_0^{2d}) = 2d > \operatorname{len}(x_0^{2d})$ y $2d > \operatorname{len}(y_0^{2d}) \geq \operatorname{len}(x_0^{2d})$, se reducen a los casos de las últimas dos filas de la tabla intercambiando x e y.[5]

Caso 1: Como en este caso las dos órbitas de $2d$ pasos no se cortan, ambas tienen largo $2d$ y T es continua y localmente inyectiva, existen entornos compactos U y V de x e y respectivamente, tales que $U, \ldots, T^{2d}U$, $V, \ldots, T^{2d}V$ son disjuntos dos a dos y T es inyectiva restringida a $U, \ldots, T^{2d-1}U$, $V, \ldots, T^{2d-1}V$. Entonces, como $\dim U \leq d$ y $\dim V \leq d$, aplicando el Lema 2.1.17 (con $n = 2d$) se obtiene que $W = U \times V$ es un entorno de p en el subespacio $M_1 = M$, para el cual $\Omega(W)$ es abierto y denso.

[5] Nótese que si para $p = (x, y) \in M$ existe un entorno relativo $W \subseteq M_i$ del tipo que se ha indicado, entonces $W^t = \{(b, a) : (a, b) \in W\}$ es un entorno relativo en M_i^t de $p^t = (y, x)$ que verifica las propiedades requeridas y *viceversa*. Por lo tanto, para cada $p \in M$ alcanza con considerar uno solo de los dos puntos p o p^t, agregando los subespacios M_i^t a $\mathscr{C}$ si fuera necesario. Es decir, a lo largo de la demostración pueden intercambiarse x e y si así se considera conveniente.

Caso 2: En este caso las dos órbitas de $2d$ pasos tienen largo $2d$ y se encuentran. Como $p \in M$ se tiene que $p \notin \Delta_{2d}(T)$, luego x e y no colapsan en un mismo iterado antes de los $2d$ pasos. Por lo tanto puede suponerse que $T^{l+k}x = T^l y$, con $0 \leq l < l+k \leq 2d$, son los primeros iterados de x e y que coinciden. Se está entonces en la situación de la Figura 2.2 con $n = 2d$.

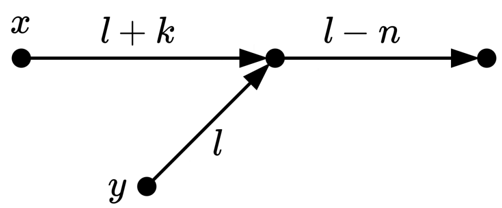

Figura 2.2

Como T es continua y localmente inyectiva existen entornos compactos U_0 y V_0 de x e y respectivamente, tales que $U_0, \ldots, T^{l+k-1}U_0$, $V_0, \ldots, T^{2d}V_0$ son disjuntos dos a dos, con T inyectiva en esos conjuntos. Sean $O = T^{l+k}U_0 \cap T^l V_0$, $U = U_0 \cap T^{-l-k}O$ y $V = V_0 \cap T^{-l}O$. Se tiene que U y V son compactos, $T^{l+k}U = T^l V (= O)$, $U, \ldots, T^{l+k-1}U$, $V, \ldots, T^{2d}V$ son disjuntos dos a dos y que T es inyectiva en dichos conjuntos. Entonces, como $\dim U \leq \dim X = d \leq 2d$, puede aplicarse el Lema 2.1.19 (con $n = 2d$) y concluir que

$$W = U \times V \cap G_{k.l} = U_0 \times V_0 \cap G_{k.l}$$

es un entorno de p en el subespacio $M_2 = G_{k.l}$, para el cual $\Omega(W)$ es abierto y denso.

Caso 3: En este caso las órbitas de $2d$ pasos son disjuntas, $\mathrm{len}(x_0^{2d}) = 2d$ y $\mathrm{len}(y_0^{2d}) < 2d$. La última condición implica que $y \in H_{m,k}$ con $0 \leq k < m+k < 2d$. Como T es continua y localmente inyectiva pueden elegirse entornos compactos U y V_0 de x e y respectivamente, tales que $U, \ldots, T^{2d}U$, $V_0, \ldots, T^{m+k-1}V_0$ son disjuntos dos a dos y T es inyectiva en esos conjuntos. Sea $V = V_0 \cap H_{m,k}$ y nótese que V es compacto. Es fácil verificar que los conjuntos U y V están en las hipótesis del Lema 2.1.21 (con $n = 2d$), siendo $\dim U + \dim V \leq 2d$ ya que $U, V \subset X$ y $\dim X \leq d$. Entonces, $W = U \times V$ es un entorno de p en el subespacio $M_3 = X \times H_{m,k}$ para el cual $\Omega(W)$ es abierto y denso.

Casos 4 y 6: Estos casos son similares al Caso 2. En ellos las dos órbitas de $2d$ pasos se encuentran, $\mathrm{len}(y_0^{2d}) \leq \mathrm{len}(x_0^{2d}) \leq 2d$ y $\mathrm{len}(y_0^{2d}) < 2d$. Como en el caso anterior, $\mathrm{len}(y_0^{2d}) < 2d$ implica que y es un punto preperiódico: $y \in H_{m,s}$ con $0 \leq s < m+s < 2d$. Además, como las órbitas se encuentran, x es también un punto preperiódico del mismo período: $x \in H_{m,r}$ con $0 \leq r < m+r \leq 2d$. Así que ambos puntos x e y alcanzan una misma órbita periódica de período m en r y s pasos respectivamente.

Se distinguen aquí dos subcasos: (A) $T^r x = T^s y$; (B) $T^r x \neq T^s y$.

Subcaso A: En este subcaso ambas órbitas se encuentran antes de dar un paso en la órbita periódica común a la que llegan. Como en este subcaso $T^r x = T^s y$ se tiene que $r \neq s$ ya que x e y no colapsan $\big((x,y) \notin \Delta_{2d}(T)\big)$. Puede suponerse $r > s$ intercambiando x e y si es necesario.

Sean $l \geq 0$ y $k > 0$ ($k = r - s$) tales que $T^{k+l}x = T^l y$ son los primeros iterados de x e y que coinciden. Desde este punto, llámese z, restan $t \geq 0$ pasos para llegar a la órbita periódica ($t = s - l = r - l - k$) en un punto que se llamará z' ($z' = T^r x = T^s y$), y luego $m - 1$ pasos a lo largo de la órbita periódica antes que esta se cierre como muestra la Figura 2.3 (izquierda). La Figura 2.3 (derecha) muestra la situación a la que se llega luego de eliminar el último paso

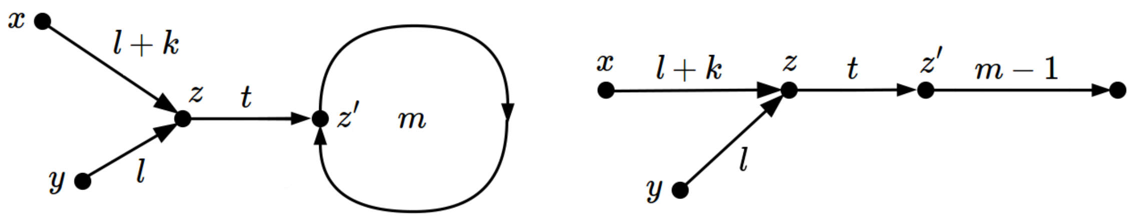

Figura 2.3

antes de que la órbita periódica se cierre en z' (compárese con la Figura 2.2).

Como T es continua y localmente inyectiva existen entornos compactos U_0 y V_0 de x e y, respectivamente, tales que $U_0, \ldots, T^{l+k-1}U_0$, $V_0, \ldots, T^{s+m-1}V_0$ ($s = l + t$) son disjuntos dos a dos y T es inyectiva en esos conjuntos. Sean $O = T^{l+k}U_0 \cap T^l V_0$, $U = H_{m,r} \cap U_0 \cap T^{-l-k}O$ y $V = H_{m,s} \cap V_0 \cap T^{-l}O$. Se tiene que U y V son compactos, $T^{l+k}U = T^l V$, los conjuntos $U, \ldots, T^{l+k-1}U$, $V, \ldots, T^{s+m-1}V$ son disjuntos dos a dos y T es inyectiva restringida a ellos. Entonces, como $\dim U \leq m - 1$ (ya que U es homeomorfo a $T^r U \subseteq H_m \subseteq \mathrm{Per}_m(T)$ y $\dim \mathrm{Per}_m(T) < \frac{m}{2}$) puede aplicarse el Lema 2.1.19 (con $n = s + m - 1$) y concluir que

$$W = U \times V \cap G_{k,l} = U_0 \times V_0 \cap H_{m,r} \times H_{m,s} \cap G_{k,l}$$

es un entorno de p en el subespacio $M_4 = H_{m,r} \times H_{m,s} \cap G_{k,l}$ para el cual $\Omega(W)$ es abierto y denso ($n = s + m - 1 \leq 2d$).

Subcaso B: En este caso las órbitas de x ey llegan a una misma órbita periódica en puntos diferentes $x' = T^r x$ e $y' = T^s y$, respectivamente, como se muestra en la Figura 2.4 (izquierda).

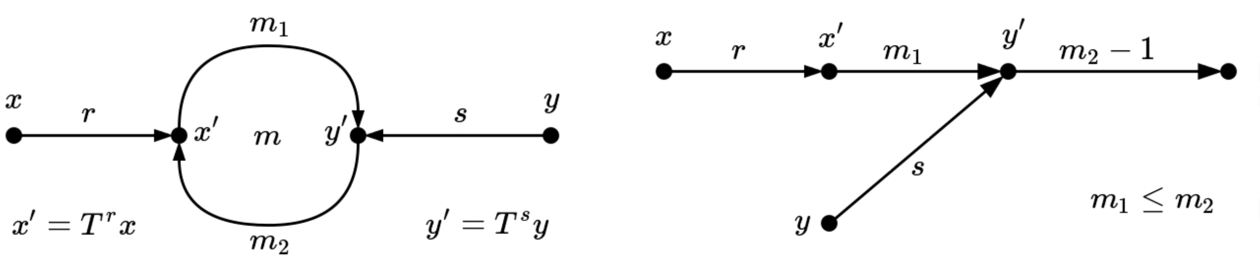

Figura 2.4

Sean $m_1 > 0$ el número de pasos a lo largo de la órbita periódica de x' a y', y $m_2 > 0$ el número de pasos de y' a x' ($m_1 + m_2 = m$). Se tiene que $m_1 \geq {}^m\!/\!_2$ o bien $m_2 \geq {}^m\!/\!_2$.

Intercambiando x e y si es necesario puede suponerse que se está en el segundo caso. Eliminando el paso en el cual la órbita periódica se cierra en x' se llega a la situación mostrada en la Figura 2.4 (derecha). Comparando $r+m_1$ con s se tienen dos casos: $r+m_1>s$ o $r+m_1<s$ (x e y no colapsan). Supóngase que $r+m_1>s$ (el otro caso se trata de manera análoga). Sean $l\geq 0$ y $k>0$ tales que $l=s$ y $r+m_1=k+l$.

Como T es continua y localmente inyectiva existen entornos compactos U_0 y V_0 de x e y tales que $U_0,\ldots,T^{l+k-1}U_0$, $V_0,\ldots,T^{s+m_2-1}V_0$ son disjuntos dos a dos y T es inyectiva en ellos. Sean $O=T^{l+k}U_0\cap T^lV_0$, $U=H_{m,r}\cap U_0\cap T^{-l-k}O$ y $V=H_{m,s}\cap V_0\cap T^{-l}O$. Se tiene que U y V son compactos, $T^{l+k}U=T^lV$, $U,\ldots,T^{l+k-1}U$, $V,\ldots,T^{s+m_2-1}V$ son disjuntos dos a dos y T es inyectiva en estos conjuntos. Como U es homeomorfo a $T^rU=O\subseteq H_m\subseteq \operatorname{Per}_m(T)$ y $\dim \operatorname{Per}_m(T)<\frac{m}{2}$ se tiene que $\dim U<\frac{m}{2}$. Luego $\dim U\leq[\frac{m-1}{2}]\leq m_2-1$ y entonces puede aplicarse el Lema 2.1.19 (con $n=s+m_2-1]$) y concluir que

$$W=U\times V\cap G_{k,l}=U_0\times V_0\cap H_{r,m}\times H_{s,m}\cap G_{k,l}$$

es un entorno de p en el subespacio $M_4=H_{r,m}\times H_{s,m}\cap G_{k,l}$ para el cual $\Omega(W)$ es abierto y denso ($s+m_2-1\leq 2d$).

Caso 5: Este caso es similar al Caso 3. Aquí las dos órbitas de $2d$ pasos son disjuntas y $\operatorname{len}(y_0^{2d})\leq\operatorname{len}(x_0^{2d})<2d$. La última condición implica que $x\in H_{r,l}$ e $y\in H_{m,k}$ donde $0\leq l\leq r+l<2d$, $0\leq k\leq m+k<2d$ y $k+m\leq r+l$. Como T es continua y localmente inyectiva existen entornos compactos U_0 y V_0 de x e y respectivamente, tales que $U_0,\ldots,T^{r+l-1}U_0,V_0,\ldots,T^{m+k-1}V_0$ son disjuntos dos a dos y T es inyectiva en estos conjuntos. Sean $U=U_0\cap H_{r,l}$ y $V=V_0\cap H_{m,k}$. Nótese que U y V son compactos, con $\dim U\leq\dim H_r\leq\frac{r-1}{2}\leq\frac{r+l-1}{2}$ y de forma similar $\dim V\leq\frac{m+k-1}{2}\leq\frac{r+l-1}{2}$, donde en la última igualdad se ha usado que $m+k-1=\operatorname{len}(y_0^{2d})\leq\operatorname{len}(x_0^{2d})=r+l-1$. Puede aplicarse entonces el Lema 2.1.21 (con $n=r+l-1$) y concluir que $W=U\times V$ es un entorno de p en el subespacio $M_5=H_{r,l}\times H_{m,k}$ para el cual $\Omega(W)$ es abierto y denso ($n=r+l-1<2d$). □

2.1.E. Extensión de los resultados obtenidos

En este apartado se desea discutir una posible extensión del Teorema de Gutman (Teorema 2.1.3) y de la generalización para mapas localmente inyectivos (Teorema 2.1.9). Ambos teoremas dan un resultado de observabilidad genérica utilizando un solo observable $f\in C(X,\mathbb{R})$ que observa a T en $2d$ pasos, donde $d=\dim X$. ¿Pero qué ocurre con la cantidad de pasos p necesaria para la observabilidad genérica de T si se considera el caso de $m\geq 1$ observables, es decir $f\in C(X,\mathbb{R}^m)$? Lo que se puede esperar es que la cantidad de pasos necesaria sea menor cuanto mayor sea el valor de m. A continuación se argumentará en este sentido, cuantificando la dependencia de la cantidad de pasos necesaria p en relación a la cantidad m de observables.

Supóngase que X es un espacio métrico compacto de dimensión finita $\dim X=d$. Si alguna función $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ observa a T en p pasos entonces el mapa f_0^p dará un encaje de X en $\mathbb{R}^{m(p+1)}$, como ya se ha indicado en la introducción de esta sección (§2.1). Como en general un espacio de dimensión d se puede encajar en $\mathbb{R}^{2d+1}$ y no en $\mathbb{R}^{2d}$, se obtiene que p deberá satisfacer $m(p+1) \geq 2d+1$, o lo que es lo mismo

$$p \geq \frac{2d+1}{m} - 1.$$

Como es natural, para el caso $m = 1$ esta desigualdad permite tomar $p = 2d$ pasos.

En relación a los puntos periódicos, de forma similar a lo indicado en la página 48, la existencia de una función $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ que observe a T implica que para cada $n \geq 1$ el mapa $f_0^{n-1}|_{\mathrm{Per}_n(T)}$ dará un encaje de $\mathrm{Per}_n(T)$ en $\mathbb{R}^{mn}$. Por lo tanto, en general se deberá cumplir que $mn \geq 2 \dim \mathrm{Per}_n(T) + 1$, o lo que es lo mismo

$$\dim \mathrm{Per}_n(T) < {}^{mn}/_{2}$$

para todo $n \geq 1$. En realidad, si la cantidad de pasos es p, los puntos periódicos con período mayor que p no representan un problema, así que esta última condición alcanzará requerirla para los períodos $n = 1, \dots, p$. Nótese que para $m = 1$ se recupera la condición sobre la dimensión de los puntos periódicos con la que se venía trabajando en ese caso.

Analizando la técnica de la demostración del Teorema 2.1.9 y de los lemas de observabilidad, parece muy plausible, que al igual que en el caso $m = 1$, las condiciones necesarias antes mencionadas

linea de argumentos dada en el caso $m = 1$ al caso $m \geq 1$ daría como resultado entonces los teoremas que se enuncian como conjeturas a continuación.

El Teorema 2.1.9 tomaría la forma:

Conjetura 2.1.23. Sean X un espacio métrico compacto de dimensión finita $\dim X \leq d$, $T\colon X \to X$ un mapa continuo y localmente inyectivo, $m \geq 1$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$p \geq \frac{2d+1}{m} - 1 \quad \text{y} \quad \dim \mathrm{Per}_n(T) < {}^{mn}/_{2}, \quad \textit{si} \quad n = 1, \dots, p,$$

Entonces el conjunto

$$\Omega = \big\{ f \in C(X, \mathbb{R}^m) : f \text{ observa a } T \text{ en } X \times X \setminus \Delta_p(T) \text{ en } p \text{ pasos} \big\}$$

es residual en $C(X, \mathbb{R}^m)$.

En particular, el Teorema de Gutman tomaría la forma siguiente:

Conjetura 2.1.24. Sean $T\colon X \to X$ un mapa continuo e inyectivo en un espacio métrico compacto X de dimensión finita $\dim X \leq d$, $m \geq 1$ y $p \in \mathbb{N}$ tales que

$$p \geq \frac{2d+1}{m} - 1 \quad \text{y} \quad \dim \mathrm{Per}_n(T) < {}^{mn}/_{2}, \quad \textit{si} \quad n = 1, \dots, p,$$

Entonces el conjunto

$$\Omega = \{f \in C(X, \mathbb{R}^m) : f \text{ observa a } T \text{ en } p \text{ pasos}\}$$

es residual en $C(X, \mathbb{R}^m)$.

2.2. Observabilidad de sistemas expansivos

En esta sección se aplican los resultados de observabilidad obtenidos en la Sección 2.1 a las dinámicas expansivas. Para homeomorfismos expansivos se obtienen resultados de observabilidad genérica en el apartado §2.2.A (Proposiciones 2.2.1 y 2.2.3). En §2.2.B se obtiene el Teorema 2.2.8 donde se muestra que con dos funciones reales continuas es posible observar un mapa expansivo al futuro cualquiera que actúe en un toro. Finalmente, en §2.2.C se introduce el concepto de observabilidad estricta y se lo utiliza para dar nuevas caracterizaciones de la expansividad de un sistema dinámico (Proposiciones 2.2.14 y 2.2.18).

2.2.A. Observabilidad de homeomorfismos expansivos

Una primera aplicación de los resultados de observabilidad §2.1 a las dinámicas expansivas se obtiene directamente aplicando el Teorema de Gutman (Teorema 2.1.3) a los homeomorfismos expansivos de un espacio métrico compacto. Los resultados obtenidos son por lo tanto resultados de observabilidad genérica.

Proposición 2.2.1. *Sean X un espacio métrico compacto y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo expansivo. Entonces $\dim X = d$ es finito y genéricamente $f \in C(X)$ observa a T en $2d$ pasos.*

Demostración. Por un lado, en virtud del Teorema 1.2.21 se tiene que $d = \dim X$ es finito. Por otro lado, para todo $n \geq 1$ se tiene que $\mathrm{Per}_n(T)$ es 0-dimensional, pues es finito. En efecto, si $\mathrm{Per}_n(T)$ fuera infinito para algún $n \geq 1$ entonces T^n tendría infinitos puntos fijos. Como X es compacto estos puntos fijos acumularían en algún punto, violando la expansividad de T^n (Proposición 1.1.18). Se satisfacen entonces las hipótesis del Teorema de Gutman (Teorema 2.1.3) del cual se deduce la tesis. □

Es posible generalizar el resultado anterior al caso de homeomorfismos *cw-expansivos*, noción introducida por Kato en [24] y que constituye una extensión del concepto de expansividad.

Definición 2.2.2. Sean X un espacio métrico y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Se dice que T es *cw-expansivo* sii existe una constante $\alpha > 0$ (denominada *constante de cw-expansividad*) tal que si $C \subseteq X$ es un continuo[6] no trivial[7] entonces $\operatorname{diam} T^n C > \alpha$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

[6]Se denomina *continuo* a todo conjunto no vacío, compacto y conexo.
[7]Un continuo se dice *trivial* sii contiene un solo punto.

Todo homeomorfismo expansivo es cw-expansivo, ya que dos puntos diferentes cualesquiera de un subconjunto conexo no trivial de un sistema expansivo deberán necesariamente separarse a más de la constante de expansividad en algún iterado, y en ese iterado el subconexo tendrá diámetro mayor que dicha constante.

Proposición 2.2.3. *Sean X un espacio métrico compacto y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo cw-expansivo. Entonces $\dim X = d < \infty$ y genéricamente $f \in C(X)$ observa a T en $2d$ pasos.*

Demostración. Es suficiente verificar las hipótesis del Teorema de Gutman (Teorema 2.1.3). Por un lado se tiene que $d = \dim X$ es finita en virtud de [24, Theorem 5.2]. Por otro lado, para todo $n \geq 1$, se verifica que $\dim \mathrm{Per}_n(T) = 0$. En efecto, si $\dim \mathrm{Per}_n(T) > 0$ para algún $n \geq 1$, entones existe un continuo no trivial $C \subseteq \mathrm{Per}_n(T)$. Dado $\varepsilon > 0$ siempre es posible encontrar un subcontinuo no trivial $C_\varepsilon \subseteq C$ de diámetro menor a ε. Sea $\alpha > 0$ una constante de cw-expansividad para T. La continuidad de T implica que eligiendo ε suficientemente pequeño se tendrá $\operatorname{diam} T^k C_\varepsilon \leq \alpha$ para $k = 0, \ldots, n-1$, y por lo tanto $\operatorname{diam} T^k C_\varepsilon \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, ya que $C_\varepsilon \subseteq \mathrm{Per}_n(T)$. Esto contradice el hecho de que α es una constante de cw-expansividad. □

2.2.B. Observabilidad de mapas expansivos al futuro

En este apartado se presenta un resultado sobre la observabilidad de mapas expansivos al futuro (Teorema 2.2.8). Como esta clase de mapas no son inyectivos en general, a diferencia de lo expuesto en el apartado 2.2.A, por un lado la demostración reposará sobre el Teorema 2.1.9 en lugar del Teorema de Gutman, y por otro, en virtud de las dificultades mencionadas en §2.1, se trata de un resultado de existencia de funciones que observan y no de observabilidad genérica.

La siguiente Proposición 2.2.4, que es consecuencia del Teorema 2.1.9, es importante pues reduce el problema de encontrar una función f que observe un sistema dado a encontrar f que distinga los puntos que colapsan. Dado un mapa $T\colon X \to X$ y $n \geq 1$, se denota

$$\Delta_n^*(T) = \big\{(x, y) \in X \times X : x \neq y, \ldots, T^{n-1}x \neq T^{n-1}y \text{ y } T^n x = T^n y\big\}.$$

Nótese que si $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ la condición de que f observe a T en $\Delta_1^*(T)$ significa que $f(x) \neq f(y)$ si $x, y \in X$, $x \neq y$ y $Tx = Ty$.

Proposición 2.2.4. *Sea $T\colon X \to X$ un mapa continuo y localmente inyectivo de un espacio métrico compacto X de dimensión finita $\dim X \leq d$ tal que*

$$\dim \mathrm{Per}_n(T) < {}^{n}\!/_{2}, \quad si \quad n = 1, \ldots, 2d.$$

Si existe $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$, $m \geq 1$, tal que f observa a T en $\Delta_1^*(T)$ entonces existe una perturbación $\bar{f} \in C(X, \mathbb{R}^m)$ de f que observa a T en $2d$ pasos.

Demostración. Supóngase que $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ observa a T en $\Delta_1^*(T)$. Entonces, es claro que f observa a T en $\Delta_1^*(T)$ en 0 pasos, y en $\Delta_n^*(T)$ en $n-1$ pasos para todo $n \geq 1$. Por lo tanto f observa a T en $\Delta_{2d}(T) \setminus \Delta = \bigcup_{n=1}^{2d} \Delta_n^*(T)$ en $2d-1$ pasos. Como T es localmente inyectiva es fácil verificar que $\Delta_1^*(T)$ es compacto, y en consecuencia cualquier perturbación suficientemente pequeña $\bar{f} \in C(X, \mathbb{R}^m)$ de f observará a T en $\Delta_1^*(T)$, y en $\Delta_{2d}(T) \setminus \Delta$ en $2d-1$ pasos. Aplicando el Teorema 2.1.9 puede elegirse una perturbación $\bar{f} \in C(X, \mathbb{R}^m)$ de f que simultáneamente observe a T en $\Delta_{2d}(T) \setminus \Delta$ en $2d-1$ pasos y en $X \times X \setminus \Delta_{2d}(T)$ en $2d$ pasos. De este modo se obtiene que $\bar{f}$ observa a T en $2d$ pasos como se deseaba. □

Observación 2.2.5. Nótese que en la demostración de la Proposición 2.2.4 en realidad se prueba un poco más de lo que se enuncia. Se demuestra que existe un entorno U de f en $C(X, \mathbb{R}^m)$ tal que genéricamente una función $\bar{f} \in U$ observa a T en $2d$ pasos. Esto permite, por ejemplo, elegir una perturbación $\bar{f}$ de f que además de observar a T en $2d$ pasos, cumpla alguna otra propiedad genérica de interés.

Dada una matriz $d \times d$ de coeficientes enteros $A \in M_d(\mathbb{Z})$, denótese con $T_A \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ el endomorfismo inducido por A en el toro d-dimensional $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d/\mathbb{Z}^d$.

Proposición 2.2.6. *Sea $T_A \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ un endomorfismo tal que $A \in M_d(\mathbb{Z})$ verifica $\det A \neq 0$ y que 1 no es valor propio de A^n para $n = 1, \ldots, 2d$. Entonces existe $f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^2)$ tal que f observa a T_A en $2d$ pasos.*

Demostración. La prueba consiste en la aplicación de la Proposición 2.2.4, para lo cual se procede a verificar las hipótesis de la misma.

Nótese en primer lugar que como A es invertible T_A es localmente inyectiva. Por otro lado, si $n \in \{1, \ldots, 2d\}$, como 1 no es valor propio de A^n se tiene que $\mathrm{Per}_n(T_A)$ is finito (en particular 0-dimensional). En efecto, si $[x] \in \mathbb{T}^d$ ($[x]$ denota la clase de $x \in \mathbb{R}^d$), entonces $[x] \in \mathrm{Per}_n(T_A)$ sii $A^k x = x \mod \mathbb{Z}^d$, y esto ocurre sii $(A^k - I)x \in \mathbb{Z}^d$. Luego, como $A^k - I$ es invertible, esta última ecuación tendrá a lo sumo una cantidad finita de soluciones en el dominio fundamental $D = [0,1)^d \subseteq \mathbb{R}^d$, a saber el conjunto $D \cap (A^k - I)^{-1}\mathbb{Z}^d$.

Finalmente, se definirá una función $f \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{R}^2$ que observa a T_A en $\Delta_1^*(T_A)$. Para ello identifíquense $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ y $\mathbb{T}^d \cong \mathbb{S} \times \cdots \times \mathbb{S}$ como grupo multiplicativo, donde se considera $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{C}$ de la manera usual. Nótese que como T es localmente inyectiva el conjunto $N = \ker T_A$ es finito. Sean $m_1, \ldots, m_d > 0$ tales que si $a = (a_1, \ldots, a_d) \in N \setminus \{(1, \ldots, 1)\}$ y a_i es la última coordenada de a diferente de 1 entonces $|1 - a_i| > m_i$. Sean $\rho_1, \ldots, \rho_d > 0$ definidos inductivamente como

$$\begin{cases} \rho_1 = 1, \\ \rho_i m_i = 1 + 2\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k, \quad i = 2, \ldots, d. \end{cases}$$

Nótese que por definición se tiene: $\quad 2\sum_{k=1}^{i-1}\rho_k < \rho_i m_i \quad$ si $i = 1, \dots, d$. Se define $f \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{C}$,

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{k=1}^{n} \rho_k x_k \qquad \text{si} \quad (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{T}^d.$$

Para ver que f observa a T en $\Delta_1^*(T)$, considérese $(x, y) \in \Delta_1^*(T)$, es decir $x = (x_1, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, \dots, y_d)$ tales que $x \neq y$ y $Tx = Ty$. Nótese que el elemento $a = xy^{-1}$ satisface $a \in N$ y $a \neq (1, \dots, 1)$. Sea a_i la última coordenada de a diferente de 1. Por la definición de $m_1, \dots, m_d$ se tiene que $|1 - a_i| > m_i$. Se puede entonces hacer la estimación siguiente

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= \Big|\sum_{k=1}^{d} \rho_k y_k - \sum_{k=1}^{d} \rho_k x_k\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{d} \rho_k (y_k - x_k)\Big| = \Big|\sum_{k=1}^{i} \rho_k (y_k - x_k)\Big| \\
&\geq \rho_i |y_i - x_i| - \sum_{k=1}^{i-1} \rho_k |y_k - x_k| \geq \rho_i |1 - a_i||y_i| - 2\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k \\
&> \rho_i m_i - 2\sum_{k=1}^{i-1} \rho_k > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x) \neq f(y)$, y entonces f observa a T_A en $\Delta_1^*(T_A)$.

Habiendo verificado todas las hipótesis de la la Proposición 2.2.4 se concluye que una perturbación de f observa a T en $2d$ pasos, como se deseaba. □

Observación 2.2.7. En el contexto de la Proposición 2.2.6, si se tiene que T_A es invertible, es decir $\det A = 1$, entonces, por lo probado en la primera parte de la demostración, es posible aplicar directamente el Teorema de Gutman (Teorema 2.1.3), y por lo tanto, en realidad, una función (genérica) $f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^m)$ observa a T en $2d$ pasos, para $m = 1$. Por el contrario, si T_A no es inyectiva entonces ninguna función $f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^m)$ observa a T para $m = 1$, como consecuencia del Lema 2.1.6. Por lo tanto, en este caso el valor $m = 2$ que arroja la Proposición 2.2.4 es óptimo.

Teorema 2.2.8. *Si $T \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ es un mapa expansivo al futuro entonces existe $f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^2)$ tal que f observa a T en $2d$ pasos.*

Demostración. Por [22] se tiene que T es conjugado a un *endomorfismo expansor*, es decir a un endomorfismo T_A para el cual A tiene todos los valores propios de módulo mayor que 1. Por lo tanto lo afirmado es consecuencia de la Proposición 2.2.6. □

Observación 2.2.9. En virtud de lo expresado en la Observación 2.2.7 se tiene que para mapas expansivos al futuro $T \colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ el número $m = 2$ que anuncia el Teorema 2.2.8 es el menor $m \in \mathbb{N}$ para el cual existe $f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^m)$ que observa a T.

Observación 2.2.10. Utilizando las conjeturas de la Sección 2.1.E, sería posible mejorar el Teorema 2.2.8, dando una cantidad menor de pasos para la observabilidad. En efecto, nótese que tomando $m = 2$ en la Conjetura 2.1.23 puede elegirse la cantidad de pasos $p = d$. Es decir, todo mapa $T\colon \mathbb{T}^d \to \mathbb{T}^d$ expansivo al futuro sería observado en d pasos por alguna $f \in C(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}^2)$.

2.2.C. Observabilidad estricta

En este apartado se introduce una noción fuerte de observabilidad que se denomina *observabilidad estricta*. La misma es utilizada para caracterizar la expansividad de los sistemas dinámicos.

La noción de observabilidad estricta se obtiene naturalmente de la de observabilidad aplicando las mismas ideas que giran en torno al concepto de expansividad. Supóngase que se tiene un sistema $T\colon X \to X$ y una función $f\colon X \to \mathbb{R}^m$ que representa m mediciones que el experimentador puede realizar en cada estado del espacio de fases y con las cuales se pretenden distinguir estados diferentes $x, y \in X$ mediante mediciones a lo largo de la evolución del sistema. Dado que las mediciones en la práctica siempre tienen un error, resulta natural considerar dos mediciones como diferentes cuando éstas difieren en más de una cierta precisión que dependerá de los instrumentos de medición. Esta idea es la que se rescata en la siguiente definición.

Definición 2.2.11. Sean $T\colon X \to X$ un mapa, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f *observa estrictamente* a T sii existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{para todo } x, y \in X,\ x \neq y,\ \text{ existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|f(T^n y) - f(T^n x)\| \geq \varepsilon.$$

La constante ε se denomina *precisión* de la observación. Un mapa continuo $T\colon X \to X$ de un espacio topológico X se dice *estrictamente observable* sii existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, y $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ tal que f observa estrictamente a T.

Observación 2.2.12. Nótese que la versión de observabilidad estricta "en n pasos" análoga a la introducida en la Definición 2.1.4 resulta muy restrictiva pues implica que el espacio es finito. En efecto, supóngase que $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ observa al mapa continuo $T\colon X \to X$ en n pasos, donde X es un espacio métrico compacto. Entonces el mapa f_0^n es un encaje de X en $[-M, M]^{m(n+1)}$, donde M es alguna cota de f, y se tiene que dos puntos cualesquiera de la imagen de f deben distar $\geq \varepsilon$, donde ε es la precisión de la observación. Esto implica entonces la finitud de X.

Lema 2.2.13. *Sea $T\colon X \to X$ un mapa continuo expansivo al futuro de un espacio métrico compacto X, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

1) f observa a T.

2) f observa estrictamente a T.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Supóngase que f observa a T pero que f no observa estrictamente. Entonces para todo $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, existen puntos $x_n, y_n \in X$ tales que $x_n \neq y_n$ y $\|f(T^k x_n) - f(T^k y_n)\| < 1/n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Sea $\alpha > 0$ una constante de expansividad para T y para cada $n \geq 1$ sea $k_n \in \mathbb{N}$ tal que $d(T^{k_n} x_n, T^{k_n} y_n) \geq \alpha$. Como X es compacto tomando subsucesiones puede asumirse que $T^{k_n} x_n \to x$ y $T^{k_n} y_n \to y$. Entonces $d(x, y) \geq \alpha$ y por lo tanto $x \neq y$. Pero por otro lado $f(T^k x) = f(T^k y)$ para todo $k \geq 0$ ya que se tenía $\|f(T^k x_n) - f(T^k y_n)\| < 1/n$ para todo $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Esto contradice que f observe a T.

2) $\Rightarrow$ 1). Trivial. □

El siguiente resultado da una caracterización de la expansividad al futuro para mapas continuos en términos del concepto de observabilidad estricta.

Proposición 2.2.14. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $T\colon X \to X$ un mapa continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) T es estrictamente observable.

2) X es metrizable y T es expansivo al futuro.[8]

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Sean $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ tal que f observa estrictamente a T con precisión $\varepsilon > 0$. Como f es continua existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que $\operatorname{diam} f(U) \leq \varepsilon$ para todo $U \in \mathcal{U}$. Luego, si $x, y \in X$ verifican que $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces $\|f(T^n y) - f(T^n x)\| < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia $x = y$, pues ε es la precisión con la que f observa a T. Se ha probado entonces que $\mathcal{U}$ es un cubrimiento de o-expansividad al futuro para T. Como X es compacto y de Hausdorff aplicando la versión para mapas expansivos al futuro de la Proposición 1.1.13 se deduce que X es metrizable y que T es expansivo métrico al futuro.

2) $\Rightarrow$ 1). Con modificaciones menores en la demostración dada en §1.2.D se obtiene que X tiene dimensión topológica finita $d = \dim X$. Entonces por el Teorema 2.1.10 existe un encaje $f\colon X \to \mathbb{R}^{2d+1}$. Como f es inyectiva queda claro que f observa a T (de hecho en 0 pasos). Luego, por el Lema 2.2.13 se obtiene que f observa estrictamente a T, y por lo tanto T es estrictamente observable. □

Observación 2.2.15. Si $T\colon X \to X$ es un mapa continuo de un espacio compacto y de Hausdorff X y $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ es una función que observa a T, es fácil verificar que la fórmula

$$d_f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|f(T^k y) - f(T^k x)\|}{2^k}, \qquad x, y \in X,$$

[8] En un espacio compacto metrizable la propiedad de expansividad al futuro no depende de la métrica compatible elegida.

define una métrica d_f compatible con la topología de X. Respecto a esta métrica es inmediato ver que T es expansivo al futuro.[9] Estas observaciones darían entonces una demostración alternativa de 2) $\Rightarrow$ 1) de la Proposición 2.2.14. Sin embargo, lo que aquí se quiere remarcar es que, como consecuencia de esa proposición, al trabajar con mapas expansivos al futuro siempre puede suponerse que la métrica viene dada por la fórmula de d_f para alguna $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$.

Resultados análogos a los recién expuestos son válidos también para homeomorfismos expansivos. Para tratar este caso se introduce la noción de *observabilidad bilateral estricta*.

Definición 2.2.16. Sean $T\colon X \to X$ un mapa biyectivo, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $f\colon X \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f *observa estrictamente bilateralmente* a T sii existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que

$$\text{para todo } x, y \in X,\ x \neq y,\ \text{ existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } \|f(T^n y) - f(T^n x)\| \geq \varepsilon.$$

La constante ε se denomina *precisión* de la observación. Un homeomorfismo $T\colon X \to X$ de un espacio topológico X se dice *estrictamente bilateralmente observable* sii existe $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, y $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$ tal que f observa estrictamente bilateralmente a T.

Lema 2.2.17. *Sean $T\colon X \to X$ un homeomorfismo expansivo de un espacio métrico compacto X, $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$ y $f \in C(X, \mathbb{R}^m)$. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones.*

1) f observa bilateralmente a T.

2) f observa estrictamente bilateralmente a T.

Demostración. Análogo al Lema 2.2.13. □

La siguiente es una caracterización de la expansividad de un homeomorfismo en términos de observabilidad bilateral estricta análoga a la de la Proposición 2.2.14, pero con la novedad que se incluye en el ítem 3), que es una condición de observabilidad bilateral estricta genérica.

Proposición 2.2.18. *Sean X un espacio topológico compacto y de Hausdorff y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) T es estrictamente bilateralmente observable.

2) X es metrizable y T es expansivo.

3) Un función genérica $f \in C(X)$ observa estrictamente bilateralmente a T.

[9] En efecto si $\varepsilon > 0$ es la precisión de la observación, entonces ε es una constante de expansividad para T respecto a d_f, ya que si $x, y \in X$, $x \neq y$, entonces existe n tal que $\|f(T^n y) - f(T^n x)\| \geq \varepsilon$, y por lo tanto

$$d_f(T^n x, T^n y) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\|f(T^k T^n y) - f(T^k T^n x)\|}{2^k} \geq \|f(T^n y) - f(T^n x)\| \geq \varepsilon.$$

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Análogo a la Proposición 2.2.14.

2) $\Rightarrow$ 3). Como T es un homeomorfismo expansivo, por la Proposición 2.2.1 se tiene que una función genérica $f \in C(X)$ observa a T (en $2d$ pasos donde $d = \dim X$). En particular, una función genérica $f \in C(X)$ observa bilateralmente a T. Luego, aplicando el Lema 2.2.17 se obtiene la tesis.

3) $\Rightarrow$ 1). Trivial. $\square$

Observación 2.2.19. De forma similar a lo expuesto para el caso de mapas expansivos al futuro en la Observación 2.2.15, para homeomorfismos expansivos se tiene que la fórmula

$$d_f(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|f(T^k y) - f(T^k x)|}{2^k}, \qquad x, y \in X,$$

define una métrica compatible en X para cada $f \in C(X)$ que observe a T, respecto a la cual T es expansivo. Entonces, en virtud del ítem 3) de la Proposición 2.2.18, se tiene que para homeomorfismos expansivos para una $f \in C(X)$ <u>genérica</u> d_f es una métrica compatible en X.

Capítulo 3

Extensiones de sistemas expansivos

El conjunto de los homeomorfismos expansivos de un espacio métrico compacto X no es en general un conjunto abierto. Sin embargo, Lewowicz en [27] muestra que en las proximidades de un homeomorfismo expansivo $T\colon X \to X$ todo homeomorfismo $S\colon X \to X$ verifica una propiedad del tipo: $x, y \in X$ y $d(S^n x, S^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $d(x, y) \leq \varepsilon$. Cuando $\varepsilon \leq \alpha/2$, lo cual se logra para S suficientemente próximo a T, Lewowicz considera la relación de equivalencia en X dada por $x \sim y$ sii $d(S^n x, S^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y afirma que el homeomorfismo inducido por S en el espacio topológico cociente es expansivo. Posteriormente, Cerminara y Sambarino prueban esta afirmación en [12], artículo en el que se estudian además otras propiedades de esta clase de homeomorfismos cociente.

Por otra parte, en el caso en el que T tiene además la propiedad de sombreado (homeomorfismo de Anosov), Walters demuestra en [37] que si S es suficientemente próximo a T entonces existe una semiconjugación de S a un subsistema de T, lo cual es parte de la propiedad de *estabilidad topológica* de los homeomorfismos de Anosov probada en ese artículo. La existencia de una tal semiconjugación implica que un cierto cociente del sistema S es conjugado a un subsistema de T, y por lo tanto el cociente de S es expansivo. No es difícil ver que cuando S es lo suficientemente próximo a T de modo que son posibles simultáneamente las construcciones de Lewowicz y de Walters los sistemas cociente obtenidos de S vía la relación de equivalencia y la semiconjugación coinciden.

En este capítulo además de las condiciones suficientes antes mencionadas se estudian condiciones necesarias para que el cociente de un sistema dado sea expansivo. En §3.1 se estudian algunas propiedades generales de los homeomorfismos que satisfacen la condición tipo expansividad introducida por Lewowicz que se obtiene al perturbar un sistema expansivo. En particular se prueba que estos homeomorfismos, llamados $[\varepsilon, \alpha]$-*expansivos*, forman un conjunto abierto (Proposición 3.1.5).

En §3.2 se introducen los homeomorfismos *semi expansivos*, que corresponden al caso $\varepsilon \leq \alpha/2$. En la Proposición 3.2.9 se prueba con una técnica diferente a la de [12] que ellos inducen un cociente expansivo y que, recíprocamente, todo cociente expansivo de un sistema dinámico corresponde a un cociente inducido de esa forma. Luego, en §3.2.A se estudian caracterizaciones topológicas para que un cociente sea expansivo (Proposiciones 3.2.11 y 3.2.16), y en §3.2.B se introduce la clase de homeomorfismos *casi expansivos* como *límite* de cocientes expansivos (ver Definición 3.2.17), estableciendo una propiedad relativa al cálculo de su entropía en el Corolario 3.2.21.

En §3.3 se aborda el caso de las extensiones de los homeomorfismos de Anosov, caracterizando tales sistemas (Proposición 3.3.6). A modo de aplicaciones, en §3.3.A se prueba para esta clase de homeomorfismos una versión adecuada (Proposición 3.3.8) del resultado de estabilidad topológica de Walters para homeomorfismos de Anosov, y en §3.3.B se presenta una construcción que permite encajar todo sistema dinámico expansivo en otro con la propiedad de sombreado para las pseudo órbitas del sistema original (Proposición 3.3.15).

Contexto

A lo largo de este capítulo, a menos que se indique otra cosa, X denotará un espacio métrico compacto con métrica d, y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Se adoptará la siguiente definición de *constante de expansividad* que es diferente a la utilizada anteriormente (Definición 1.1.1).

$$\alpha > 0 \text{ es una constante de expansividad para } T \text{ si y solo si}$$
$$x, y \in X \text{ y } d(T^n x, T^n y) \leq \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ implica } x = y.$$

La diferencia con la Definición 1.1.1 radica en la utilización de "$\leq$" en lugar de "$<$" en la condición que involucra la distancia entre los iterados de los puntos x e y.

3.1. $[\varepsilon, \alpha]$-expansividad

La siguiente definición está inspirada en [27, Lemma 1.1] en donde se muestra que los homeomorfismos suficientemente próximos a un homeomorfismo expansivo de un espacio métrico compacto verifican una condición como la requerida.

Definición 3.1.1. Sean $\alpha \geq \varepsilon > 0$ constantes. Se dice que T es $[\varepsilon, \alpha]$-*expansivo* sii

$$x, y \in X \text{ y } d(T^n x, T^n y) \leq \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \text{ implica } d(x, y) < \varepsilon.$$

Si en la situación anterior se tiene $\varepsilon > \operatorname{diam} X$ se dice que T es *trivialmente* $[\varepsilon, \alpha]$-*expansivo.*

Nótese que T expansivo con constante de expansividad $\alpha > 0$ sii T es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo para todo $\varepsilon > 0$ menor que α. Obsérvese además que si T es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo entonces $x, y \in X$ y $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implica $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Lema 3.1.2. *Si T es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo entonces T es $[\varepsilon - \delta, \alpha + \delta]$-expansivo para algún $\delta > 0$.*

Demostración. Si la tesis no fuera cierta, para todo $k \in \mathbb{N}$, $k > 1/\varepsilon$, se tiene que T no es $[\varepsilon - 1/k, \alpha + 1/k]$-expansivo, es decir, existen puntos $x_k, y_k \in X$ tales que $d(T^n x_k, T^n y_k) \leq \alpha + 1/k$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ pero $d(x_k, y_k) \geq \varepsilon - 1/k$. Como X es compacto existen puntos de aglomeración x e y de las sucesiones (x_k) e (y_k) respectivamente, los cuales deberán satisfacer $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $d(x, y) \geq \varepsilon$, contradiciendo la $[\varepsilon, \alpha]$-expansividad de T. □

Definición 3.1.3. Se dice que T es *uniformemente $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo* sii para algún $N \in \mathbb{N}$

$$x, y \in X \text{ y } d(T^n x, T^n y) \leq \alpha \text{ para todo } |n| \leq N \text{ implica } d(x, y) < \varepsilon$$

donde $\alpha \geq \varepsilon > 0$.

Es claro que todo homeomorfismo uniformemente $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo.

El siguiente resultado es una generalización de [11, Theorem 5] donde se prueba la propiedad de expansividad uniforme de los homeomorfismos expansivos en espacios compactos.

Proposición 3.1.4. *Si T es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo entonces T es uniformemente $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo.*

Demostración. Si T no fuera uniformemente $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo, para todo $N \in \mathbb{N}$ existirían puntos $x_N, y_N \in X$ tales que $d(T^n x_N, T^n y_N) \leq \alpha$ para todo $|n| \leq N$ pero $d(x_N, y_N) \geq \varepsilon$. La compacidad de X implica la existencia de puntos de aglomeración x e y de las sucesiones (x_N) e (y_N) respectivamente, los cuales deberán satisfacer $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y $d(x, y) \geq \varepsilon$, contradiciendo la $[\varepsilon, \alpha]$-expansividad de T. □

Si X e Y son espacios topológicos se denota con $\mathcal{C}(X, Y)$ el conjunto de las funciones continuas de X en Y dotado de la topología compacto-abierta. Cuando X es compacto e Y es un espacio métrico esta topología es la inducida por la métrica C^0

$$d_{C^0}(T, S) = \max\{d(Tx, Sx) : x \in X\} \quad \text{si } T, S \in \mathcal{C}(X, Y).$$

El subespacio de $\mathcal{C}(X, X)$ formado por los homeomorfismos de X en X se denota con $\mathcal{H}(X)$.

Proposición 3.1.5. *El conjunto de los homeomorfismos $[\varepsilon, \alpha]$-expansivos es abierto en $\mathcal{H}(X)$.*

Demostración. Por el Lema 3.1.2 existe $\delta > 0$ tal que T es $[\varepsilon, \alpha + \delta]$-expansivo. Luego, por la Proposición 3.1.4 T es uniformemente $[\varepsilon, \alpha + \delta]$-expansivo, es decir, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$x, y \in X \text{ y } d(T^n x, T^n y) \leq \alpha + \delta \text{ para todo } |n| \leq N \text{ implica } d(x, y) < \varepsilon.$$

Sea $\mathcal{N}$ un entorno de T tal que $d_{C^0}(T^n, S^n) < \delta/2$ para todo $S \in \mathcal{N}$ y $|n| \leq N$.[1] Se tiene que S es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo para todo $S \in \mathcal{N}$, ya que si $x, y \in X$ y $d(S^n x, S^n y) \leq \alpha$ para todo $|n| \leq N$,

[1]Para todo $n \in \mathbb{Z}$ el mapa $\mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$, $T \mapsto T^n$ es continuo.

entonces

$$d(T^n x, T^n y) \leq d(T^n x, S^n x) + d(S^n x, S^n y) + d(S^n y, T^n y) \leq \alpha + \delta$$

para todo $|n| \leq N$, y por lo tanto $d(x, y) < \varepsilon$, como se deseaba. $\square$

Como caso particular de la Proposición 3.1.5 se recupera el resultado de Lewowicz en [27].

Corolario 3.1.6 ([27, Lemma 1.1])**.** *Si $T\colon X \to X$ un homeomorfismo expansivo con constante de expansividad $\alpha > 0$, entonces para todo $0 < \varepsilon \leq \alpha$ existe un entorno $\mathcal{N}$ de T en $\mathcal{H}(X)$ tal que todo $S \in \mathcal{N}$ satisface que $x, y \in X$ y $d(S^n x, S^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implica $d(x, y) < \varepsilon$.*

Demostración. Como T es expansivo con constante de expansividad α, entonces T es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo si $0 < \varepsilon \leq \alpha$. Como el conjunto de los homeomorfismos $[\varepsilon, \alpha]$-expansivos es abierto por la Proposición 3.1.5 basta tomar un entorno $\mathcal{N}$ de T incluido en ese conjunto. $\square$

3.2. Cocientes expansivos

En este apartado se estudian condiciones necesarias y suficientes para que el cociente de un sistema dinámico sea expansivo (Proposiciones 3.2.9, 3.2.11 y 3.2.16). La condición suficiente enunciada en la Proposición 3.2.9 es anunciada en [27] y probada con todo detalle en [12]. En ese último artículo la expansividad del homeomorfismo inducido en el cociente se muestra construyendo una métrica compatible del espacio cociente respecto a la cual el mapa es expansivo. El método seguido aquí es diferente y se basa en resultados del Capítulo 1.

Definición 3.2.1. Si X es un espacio topológico y $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia, entonces se denota con $X_R = X/R$ el espacio topológico cociente, la clase de equivalencia de $x \in X$ con $[x]$, y con q (o q_R) el mapa canónico $q\colon X \to X_R$ dado por $q(x) = [x]$ si $x \in X$. Un subconjunto $A \subseteq X$ se dice *saturado* sii A es unión de clases de equivalencia

Si $T\colon X \to X$ es un homeomorfismo, se dice que R es *compatible* con T sii $x, y \in X$ y $x \overset{R}{\sim} y$ implica $Tx \overset{R}{\sim} Ty$. En ese caso se denota con T_R el homeomorfismo inducido $T_R\colon X_R \to X_R$ dado por $T_R[x] = [Tx]$ si $x \in X$, y se lo denomina *cociente* de T. En ese contexto se dice también que T es una *extensión* de T_R.

Definición 3.2.2. Dado $\alpha > 0$, se dice que T es *α-semi expansivo* sii T es $[\alpha/2, \alpha]$-expansivo, es decir, $x, y \in X$ y $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implica $d(x, y) < \alpha/2$. En ese caso α se denomina *constante de semi expansividad* para T.

La siguiente es una consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.5.

Proposición 3.2.3. *El conjunto de los homeomorfismos α-semi expansivos es abierto en $\mathcal{H}(X)$.*

Definición 3.2.4. Si T es α-semi expansivo, se define $R(d,\alpha)$ como la relación de equivalencia en X compatible con T dada por

$$x \overset{R(d,\alpha)}{\sim} y \quad \text{sii} \quad d(T^n x, T^n y) \leq \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

si $x, y \in X$. Si X es metrizable, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo y R una relación de equivalencia en X compatible con T, se dice que el homeomorfismo cociente inducido T_R es un *cociente de Lewowicz* sii existe una métrica compatible d en X y $\alpha > 0$ tales que T es α-semi expansivo y $R = R(d,\alpha)$.

Observación 3.2.5. Nótese que si T es un homeomorfismo $[\varepsilon,\alpha]$-expansivo y $0 < \varepsilon \leq \alpha/2$ entonces T es α-semi expansivo. Además, en ese caso las clases de equivalencia $[x]$, $x \in X$, de la relación $R(d,\alpha)$ de la Definición 3.2.4, son compactas y su diámetro verifica $\operatorname{diam}([x]) < \varepsilon$.

Observación 3.2.6. Para que la relación $R(d,\alpha)$ de la Definición 3.2.4 sea una relación de equivalencia es suficiente una condición ligeramente más débil que la α-semi expansividad de T, a saber, que $x, y \in X$ y $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ implique $d(x,y) \leq \alpha/2$ (en lugar de $d(x,y) < \alpha/2$). En ese caso es fácil ver que en la condición anterior α puede sustituirse por cierto $\alpha' > \alpha$: en efecto, tomando $\varepsilon \in (\alpha/2, \alpha)$ se tiene que T es $[\varepsilon,\alpha]$-expansivo y basta tomar $\alpha' > \alpha$ de modo que T sea $[\varepsilon,\alpha']$-expansivo como en el Lema 3.1.2. Es claro que para este α' se tiene que T es α'-semi expansivo y $R(d,\alpha) = R(d,\alpha')$.

El siguiente resultado se encuentra demostrado en [12, Remark p. 323].

Lema 3.2.7. *Si T es α-semi expansivo y $R = R(d,\alpha)$ entonces $X_R = X/R$ es metrizable.*

Demostración. En virtud de [29, Theorem 3.9] es suficiente probar que la descomposición de X en clases de equivalencia es *semicontinua superiormente*, esto es, para toda clase $[x] \subseteq X$ y todo conjunto abierto $U \subseteq X$ tal que $[x] \subseteq U$ existe un conjunto abierto $V \subseteq X$ tal que $[x] \subseteq V$ que satisface $[y] \subseteq U$ para todo $y \in V$ ([29, Definition 3.5]). Si ese no fuera el caso entonces existirían una clase $[x] \subseteq X$ y un conjunto abierto $U \subseteq X$, $[x] \subseteq U$, tales que para todo conjunto abierto $V \subseteq X$, $[x] \subseteq V$, existe $y \in V$ tal que $[y] \not\subseteq U$. En particular, tomando $V = B_{1/n}\big([x]\big)$ con $n \in \mathbb{N}$, donde se denota $B_\varepsilon(C) = \bigcup_{c \in C} B_\varepsilon(c)$ si $C \subseteq X$, se obtiene que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in B_{1/n}\big([x]\big)$ tal que $[y_n] \not\subseteq U$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $x_n \in [x]$ tal que $d(x_n, y_n) < 1/n$ y $z_n \in [y_n]$ tal que $z_n \notin U$. Tomando subsucesiones si es necesario puede suponerse que $x_n \to \bar{x}$, $y_n \to y$ y $z_n \to z$ ya que X es compacto. Como $x_n \sim x$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(T^k x_n, T^k x) \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, luego, tomando límite cuando $n \to +\infty$ se obtiene $d(T^k \bar{x}, T^k x) \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, es decir $\bar{x} \sim x$. Asimismo, como $y_n \sim z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $d(T^k y_n, T^k z_n) \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ y tomando límite cuando $n \to +\infty$ se llega a $d(T^k y, T^k z) \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$, o sea $y \sim z$. Finalmente, como $d(x_n, y_n) < 1/n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se deduce que $\bar{x} = y$. En suma se obtuvo que $x \sim \bar{x} = y \sim z$, y por lo tanto $z \in U$ ya que se tenía $[x] \subseteq U$. Pero esto contradice que $z_n \notin U$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ya que ello implica que $z \notin U$ pues U es abierto y $z_n \to z$. □

Observación 3.2.8. Si X un espacio topológico, $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia y el mapa canónico $q\colon X \to X_R$ es un *mapa cerrado* (que mapea conjuntos cerrados en conjuntos cerrados), entonces para todo conjunto abierto $U \subseteq X$ se tiene que los conjuntos

$$\widehat{U} = \{x \in X : [x] \subseteq U\} \subseteq X \qquad \text{y} \qquad q(\widehat{U}) \subseteq X_R$$

son abiertos. En efecto, para el primero de ellos basta observar que $X \setminus \widehat{U} = q^{-1}\big(q(X \setminus U)\big)$ y utilizar que q es continua y cerrada. Para el segundo se tiene que $\widehat{U}$ además de abierto es saturado (unión de clases), luego $q(\widehat{U})$ es abierto.

Como se ha mencionado ya anteriormente, en [27] Lewowicz afirma que lo que aquí se ha denominado cociente de Lewowicz, justamente en honor a este matemático uruguayo, es efectivamente un homeomorfismo expansivo. Posteriormente Cerminara y Sambarino demuestran esa afirmación con todo detalle en [12], construyendo explícitamente una métrica en el espacio cociente M_R respecto a la cual T_R resulta expansivo. En el siguiente resultado se da una demostración alternativa más breve pero no constructiva de este mismo hecho. Más aun, se demuestra también el recíproco: todo cociente expansivo es un cociente de Lewowicz.

Proposición 3.2.9. *Sean X un espacio compacto metrizable, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo, $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia compatible con T y $T_R\colon X_R \to X_R$ el homeomorfismo cociente asociado. Son equivalentes las siguientes condiciones.*

1) T_R es expansivo.

2) T_R es un cociente de Lewowicz.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Sean d y d_R métricas compatibles de X y X_R, respectivamente. Dado que T_R es expansivo existe una constante $\alpha_R > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d_R(T_R^n[x], T_R^n[y]) \leq \alpha_R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $x \sim y$, donde "$\sim$" denota equivalencia según R. Como el mapa canónico $q\colon (X, d) \to (X_R, d_R)$ es uniformemente continuo existe $\alpha > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d(x, y) \leq \alpha$ entonces $d_R([x], [y]) \leq \alpha_R$. Sea

$$K = \frac{\alpha}{2\,\mathrm{diam}(X, d) + 1}$$

y defínase una nueva métrica d_1 en X mediante la fórmula

$$d_1(x, y) = d_R([x], [y]) + K d(x, y),$$

si $x, y \in X$. A partir de la fórmula anterior es claro que una sucesión en X converge a un punto de X según d sii lo hace según d_1, en consecuencia d_1 es una métrica compatible en X.

Por la elección de K se tiene que si $x, y \in X$ y $x \sim y$ entonces $d_1(x, y) = K d(x, y) < \alpha/2$. Este hecho permite probar que T es α-semi expansivo respecto a la métrica d_1. En efecto, si $x, y \in X$

y $d_1(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $d_R(T_R^n[x], T_R^n[y]) = d_R([T^n x], [T^n y]) \leq \alpha_R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego la expansividad de T_R implica que $[x] = [y]$ y entonces $d_1(x, y) < \alpha/2$.

Finalmente se desea probar que $R = R(d_1, \alpha)$. Denótese $x \sim_1 y$ para indicar que x e y son equivalentes según $R(d_1, \alpha)$ si $x, y \in X$. Nótese que en el párrafo anterior se ha probado que $x \sim_1 y$ implica $x \sim y$ si $x, y \in X$. Recíprocamente, si $x, y \in X$ y $x \sim y$ se tiene que $T^n x \sim T^n y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ pues R se ha supuesto compatible con T. Por lo tanto se tiene que $d_1(T^n x, T^n y) = Kd(T^n x, T^n y) < \alpha/2 \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir $x \sim_1 y$.

2) $\Rightarrow$ 1). En primer lugar en virtud del Lema 3.2.7 se tiene que X_R es metrizable. Por lo tanto, para demostrar que T_R es expansivo es suficiente probar que existe un cubrimiento de o-expansividad para T_R (Proposición 1.1.3), es decir que existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}_R$ de X_R tal que si $x, y \in X$ y $\{T_R^n[x], T_R^n[y]\} \prec \mathcal{U}_R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $[x] = [y]$.

Para cada $x \in X$ sean $U(x) = B_{\alpha/2}(x)$ y $\widehat{U}(x) = \{y \in X : [y] \subseteq U(x)\}$. Como el mapa canónico $q\colon X \to X_R$ es cerrado, ya que X es compacto y X_R es de Hausdorff, por la Observación 3.2.8 los conjuntos $\widehat{U}(x)$ y $q\big(\widehat{U}(x)\big)$ son abiertos para todo $x \in X$. Además, para cada $x \in X$ se verifica $x \in \widehat{U}(x)$ ya que $[x] \subseteq U(x)$ pues $\operatorname{diam}([x]) < \alpha/2$ (Observación 3.2.5). En consecuencia la familia $\mathcal{U}_R = \{q\big(\widehat{U}(x)\big) : x \in X\}$ es un cubrimiento abierto de X_R.

Se afirma que $\mathcal{U}_R$ es un cubrimiento de o-expansividad para T_R. En efecto, si $x, y \in X$ y $\{T_R^n[x], T_R^n[y]\} \prec \mathcal{U}_R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ se deduce que si $n \in \mathbb{Z}$ entonces $\{[T^n x], [T^n y]\} \subseteq q\big(\widehat{U}(z_n)\big)$ para cierto $z_n \in X$, donde se ha usado que $T_R^n[x] = [T^n x]$ y $T_R^n[y] = [T^n y]$. Como $\widehat{U}(z_n)$ es un conjunto saturado se obtiene que $\{T^n x, T^n y\} \subseteq \widehat{U}(z_n)$ y por lo tanto $d(T^n x, T^n y) < \alpha$ para cada $n \in \mathbb{Z}$, ya que $\widehat{U}(z_n) \subseteq U(z_n)$ y $U(z_n)$ es una bola de radio $\alpha/2$. Se tiene entonces que $x \sim y$, es decir $[x] = [y]$ como se deseaba. $\square$

Observación 3.2.10. Nótese que en la prueba de 1) $\Rightarrow$ 2) en la Proposición 3.2.9 la constante de semi expansividad α de T puede elegirse arbitrariamente pequeña en relación a la constante de expansividad α_R de T_R pues α debe satisfacer solamente la condición: si $x, y \in X$ y $d(x, y) \leq \alpha$ entonces $d_R([x], [y]) \leq \alpha_R$. Más aun, tomando una constante $K > 0$ menor que la elegida en la citada demostración se ve que puede lograrse que T sea $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo respecto a la métrica d_1 para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño en relación al α elegido. Obsérvese también que las métricas d_1 construidas de esa manera verifican $d_R([x], [y]) \leq d_1(x, y)$ para todo $x, y \in X$, cualesquiera sean las constantes α y K elegidas.

Una consecuencia de la Proposición 3.2.9 y la Observación 3.2.10 es que si T es α_0-semi expansivo para cierto $\alpha_0 > 0$ y cierta métrica d_0 entonces para $\alpha \geq \varepsilon > 0$ arbitrarios dados T es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo respecto a alguna métrica compatible d, induciendo la relación de equivalencia $R(d, \alpha)$ siempre el mismo cociente si $\varepsilon \leq \alpha/2$. En efecto, si T es α_0-semi expansivo entonces por el recíproco de la Proposición 3.2.9 se tiene que T_R es expansivo, donde $R = R(d_0.\alpha_0)$. Luego, por la demostración del directo de la Proposición 3.2.9 con las puntualizaciones hechas en la Observación 3.2.10, se tiene que T es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo para $\alpha \geq \varepsilon > 0$ arbitrarios dados menores que la constante de expansividad α_R de T_R respecto a la métrica d_1 adecuada. Finalmente, tomando múltiplos de esta métrica se obtiene lo afirmado.

3.2.A. Caracterizaciones topológicas

En la Proposición 3.2.9 se estableció una caracterización para que el cociente de un homeomorfismo definido en un espacio metrizable compacto sea un homeomorfismo expansivo. En este apartado se estudian caracterizaciones para que el homeomorfismo cociente sea expansivo para el caso más general en el que el espacio de partida es compacto pero no necesariamente metrizable.

A diferencia del resto de este capítulo donde X denota un espacio métrico compacto, en esta sección se asume que X es un espacio topológico compacto no necesariamente metrizable. Como siempre $T\colon X \to X$ denota un homeomorfismo.

Una primera caracterización topológica para que un cociente sea expansivo es la siguiente.

Proposición 3.2.11. *Si $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia y el espacio cociente X_R es de Hausdorff, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) *R es compatible con T y el homeomorfismo inducido $T_R\colon X_R \to X_R$ es expansivo (métrico).*

2) *Existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X tal que $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} = X_R$.*

3) *Existe un conjunto abierto $\mathbb{U} \subseteq X \times X$ tal que $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathbb{U} = R$.*

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Sean d una métrica en X_R y $\alpha > 0$ una constante de expansividad para T_R respecto a d. Sean $\mathcal{U}_R$ un cubrimiento de X_R formado por bolas de radio $\alpha/2$ y $\mathcal{U}$ el cubrimiento abierto de X dado por $\mathcal{U} = q^{-1}(\mathcal{U}_R)$, donde $q\colon X \to X_R$ es el mapa canónico. Dada una clase $[x] \in X_R$, donde $x \in X$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $T^{-n}x \in U_n$. Se tiene que $T^{-n}[x] = [T^{-n}x] \subseteq U_n$ pues U_n es saturado, y por lo tanto $[x] \subseteq T^n U_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir $[x] \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n \in \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U}$. Esto prueba que $X_R \prec \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U}$.

Por otro lado, si $C \in \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\}$ existe una bi-sucesión $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de elementos de $\mathcal{U}$ tal que $C = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n$. Luego, si $x, y \in C$ se tiene que $T^n x, T^n y \in U_{-n}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y entonces $[T^n x], [T^n y] \in q(U_{-n}) \in \mathcal{U}_R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de donde se deduce que $d([T^n x], [T^n y]) < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, ya que $\mathcal{U}_R$ es un cubrimiento de bolas de radio $\alpha/2$. En consecuencia se ha de cumplir $[x] = [y]$ por la expansividad de T_R, de aquí que $C = [x]$ para algún $x \in X$. Se ha probado entonces que $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} \subseteq X_R$, lo cual junto con la relación $X_R \prec \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U}$ ya probada implica que $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} = X_R$, como se deseaba.

2) $\Rightarrow$ 1). En primer lugar nótese que R es compatible con T ya que $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} = X_R$ y por lo tanto

$$TX_R = T\big(\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\}\big) = \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^{n+1}\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} = X_R.$$

Para probar que el homeomorfismo inducido $T_R\colon X_R \to X_R$ es expansivo considérese para cada $U \in \mathcal{U}$ el conjunto $\widehat{U} = \{x \in X : [x] \subseteq U\} \subseteq U$ y sea $\widehat{\mathcal{U}} = \{\widehat{U} : U \in \mathcal{U}\}$. Como por hipótesis $X_R = \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} \prec \mathcal{U}$ se tiene que $\widehat{\mathcal{U}}$ es un cubrimiento de X. Dado que q es cerrada, pues X es compacto y X_R es de Hausdorff, de la Observación 3.2.8 se obtiene que el cubrimiento de X_R dado por $\mathcal{U}_R = q(\widehat{\mathcal{U}})$ es abierto. Se afirma que $\mathcal{U}_R$ es un cubrimiento de o-expansividad para T_R, es decir $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T_R^n\widetilde{U}_n$ contiene a lo sumo un punto para toda bi-sucesión $(\widetilde{U}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de elementos de $\mathcal{U}_R$, lo cual en virtud de las Proposiciones 1.1.3 y 1.1.13 implica que T_R es expansivo (métrico). En efecto, dada una tal bi-sucesión $(\widetilde{U}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $U_n \in \mathcal{U}$ tal que $\widetilde{U}_n = q(\widehat{U}_n)$. Supóngase que $x, y \in X$ verifican que $[x], [y] \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T_R^n\widetilde{U}_n$. Entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $[T^n x], [T^n y] \in \widetilde{U}_{-n} = q(\widehat{U}_{-n})$ y esto implica que $T^n x, T^n y \in \widehat{U}_{-n} \subseteq U_{-n}$, dado que $\widehat{U}_{-n}$ es saturado. Luego $x, y \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} T^n U_n \in \bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\}$, y como $\bigwedge_{n\in\mathbb{Z}} T^n\mathcal{U} \setminus \{\varnothing\} = X_R$ por hipótesis se concluye que $[x] = [y]$ como se deseaba.

2) $\Leftrightarrow$ 3) Si $\mathcal{U}$ es como en 2) es fácil ver que $\mathbb{U} = \bigcup_{u\in\mathcal{U}} U \times U$ verifica las condiciones requeridas en 3). Recíprocamente, dado $\mathbb{U}$ como en 3) para cada $x \in X$ sea U_x un entorno abierto de x tal que $U_x \times U_x \subseteq \mathbb{U}$. Es directo verificar que $\mathcal{U} = \{U_x : x \in X\}$ satisface lo enunciado en 2). □

Las condiciones de los ítems 2) y 3) de la Proposición 3.2.11 implican la expansividad del homeomorfismo cociente con la hipótesis de que el espacio cociente sea de Hausdorff. Las restantes implicaciones en la citada proposición, a saber 1) $\Rightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3), valen sin esa hipótesis adicional. A continuación se desarrollan brevemente una serie de preliminares con el objetivo de lograr una caracterización de las extensiones de los homeomorfismos expansivos que prescinda de condiciones sobre el espacio cociente y que involucre solamente propiedades del sistema dinámico de partida (Proposición 3.2.16). Las ideas utilizadas son esencialmente las que están presentes en el caso de extensiones en espacios metrizables, tratadas en §3.2, adaptadas al caso general no necesariamente metrizable.

Definición 3.2.12. Dado un cubrimiento $\mathcal{C}$ de X se define la relación $R(\mathcal{C}) \subseteq X \times X$, denotada también $\sim_\mathcal{C}$, dada por la fórmula

$$x \sim_\mathcal{C} y \quad \text{sii} \quad \{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{C} \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

si $x, y \in X$. Dado $x \in X$ se definen además los conjuntos

$$[x]_\mathcal{C} = \{y \in X : x \sim_\mathcal{C} y\} \quad \text{y} \quad X_\mathcal{C} = \{[x]_\mathcal{C} : x \in X\}.$$

En el contexto de la Definición 3.2.12, nótese que $R(\mathcal{C})$ es una relación simétrica y reflexiva, pero que en general no es transitiva. Es claro además que $R(\mathcal{C})$ es una relación de equivalencia sii $X_\mathcal{C}$ es una partición de X, en cuyo caso el espacio cociente es precisamente $X/{\sim_\mathcal{C}} = X_\mathcal{C}$.

Observación 3.2.13. Si $(\Lambda, \leq)$ es un *conjunto dirigido* y $\Lambda = \Lambda_1 \cup \cdots \cup \Lambda_r$ entonces al menos uno de los conjuntos Λ_i verifica la siguiente propiedad: para todo $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu \in \Lambda_i$ tal que si

$\nu \in \Lambda_i$ y $\mu \leq \nu$ entonces $\lambda \leq \nu$.[2] En consecuencia, si $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ es una *red* en X entonces $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_i}$ es una *subred* para algún $i \in \{1, \ldots, r\}$.

Denótese con 2^X el conjunto de partes de X. Una función $F\colon X \to 2^X$ se dice *semicontinua superiormente* sii para todo $x \in X$ y todo entorno U de $F(x)$ existe un entorno V de x tal que $F(y) \subseteq U$ si $y \in V$ ([9, Definition 1.4.1]). Si $\mathcal{P}$ es una partición de X se dice que $\mathcal{P}$ es una *descomposición semicontinua superiormente* sii para todo $P \in \mathcal{P}$ y todo entorno U de P existe un entorno V de P tal que si $Q \in \mathcal{P}$ y $Q \cap V \neq \varnothing$ entonces $Q \subseteq U$ ([29, Definition 3.5]). Es fácil ver que una partición $\mathcal{P}$ es una descomposición semicontinua superiormente sii el mapa $X \to 2^X$ que asocia a cada elemento $x \in X$ el elemento $P \in \mathcal{P}$ que contiene a x es una función semicontinua superiormente.

Lema 3.2.14. *Supóngase que $\mathcal{C}$ es un cubrimiento cerrado y finito de X. Entonces la función $X \to 2^X$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{C}}$, es semicontinua superiormente. En particular, si $R(\mathcal{C})$ es una relación de equivalencia entonces $X_{\mathcal{C}}$ es una descomposición semicontinua superiormente.*

Demostración. Para probar la primera afirmación supóngase que por el contrario la función $X \to 2^X$, $x \mapsto [x]_{\mathcal{C}}$, no es semicontinua superiormente. Entonces existen $x \in X$ y un entorno U de $[x]_{\mathcal{C}}$ tales que para todo entorno V de x existe $x' \in V$ de modo que $[x']_{\mathcal{C}} \nsubseteq U$. Eligiendo en cada entorno V de x un punto x' como el anterior se construye una red $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ que converge a x y tal que $[x_\lambda]_{\mathcal{C}} \nsubseteq U$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Por lo tanto existe una red $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tal que $x_\lambda \sim_{\mathcal{C}} y_\lambda$ e $y_\lambda \notin U$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Como X es compacto puede asumirse que $y_\lambda \to y \notin U$.

Para cada $n \in \mathbb{Z}$ fijo se tiene que para todo $\lambda \in \Lambda$ existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $\{T^n x_\lambda, T^n y_\lambda\} \subseteq C$ ya que $x_\lambda \sim_{\mathcal{C}} y_\lambda$. Por lo tanto Λ puede escribirse como la unión finita $\Lambda = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} \Lambda_C$ donde $\Lambda_C = \big\{\lambda \in \Lambda : \{T^n x_\lambda, T^n y_\lambda\} \subseteq C\big\}$. Entonces, por la Observación 3.2.13 existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_C}$ y $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda_C}$ son subredes de $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ e $(y_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, respectivamente. Para este C se verifica que $\{T^n x_\lambda, T^n y_\lambda\} \subseteq C$ para todo $\lambda \in \Lambda_C$, luego como C es cerrado tomando límites se obtiene que $\{T^n x, T^n y\} \subseteq C$, es decir $\{T^n x, T^n y\} \prec \mathcal{C}$. Dado que lo anterior vale para todo $n \in \mathbb{Z}$ se concluye que $x \sim_{\mathcal{C}} y$, y por lo tanto $y \in [x]_{\mathcal{C}} \subseteq U$, lo cual es absurdo pues $y \notin U$.

La segunda afirmación es consecuencia de lo comentado previo al enunciado de este lema. □

La siguiente definición, donde se emplean las notaciones $\overline{\mathcal{C}} = \{\overline{C} : C \in \mathcal{C}\}$ y para $k \in \mathbb{N}$ $\mathcal{C}^k = \{C_1 \cup \cdots \cup C_k : C_1, \ldots, C_k \in \mathcal{C},\ C_i \cap C_{i+1} \neq \varnothing \text{ para todo } 1 \leq i < k\}$ si $\mathcal{C}$ es un cubrimiento de X, es la versión topológica de la Definición 3.2.2.

Definición 3.2.15. Dado un cubrimiento abierto y finito $\mathcal{U}$ de X se dice que T es $\mathcal{U}$-*semi expansivo* sii $x, y \in X$ y $x \sim_{\overline{\mathcal{U}}^4} y$ implica $x \sim_{\mathcal{U}} y$, es decir, $R(\overline{\mathcal{U}}^4) \subseteq R(\mathcal{U})$.

[2] En efecto, en caso contrario se tendría que para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$ existe $\lambda_i \in \Lambda$ tal que para todo $\mu \in \Lambda_i$ existe $\nu \in \Lambda_i$ tal que $\mu \leq \nu$ pero $\lambda_i \nleq \nu$. Pero entonces, como Λ es un conjunto dirigido, tomando μ tal que $\lambda_i \leq \mu$ para todo $i \in \{1, \ldots, r\}$, se tiene que $\mu \in \Lambda_{i_0}$ para algún $i_0 \in \{1, \ldots, r\}$. Luego, según lo supuesto existe $\nu \in \Lambda_{i_0}$ tal que $\mu \leq \nu$ y $\lambda_{i_0} \nleq \nu$, lo cual es absurdo pues $\lambda_{i_0} \leq \mu$.

En relación a la Definición 3.2.15, nótese que como $\mathcal{U} \prec \bar{\mathcal{U}}^4$ siempre se verifica $R(\mathcal{U}) \subseteq R(\bar{\mathcal{U}}^4)$, luego T es $\mathcal{U}$-semi expansivo sii $R(\mathcal{U}) = R(\bar{\mathcal{U}}^4)$. Entonces, en ese caso se tiene que $R(\mathcal{U})$ es transitiva, pues $R(\mathcal{U}) \circ R(\mathcal{U}) \subseteq R(\mathcal{U}^2) \subseteq R(\bar{\mathcal{U}}^2) \subseteq R(\bar{\mathcal{U}}^4) = R(\mathcal{U})$. Es decir, si T es $\mathcal{U}$-semi expansivo entonces $R(\mathcal{U}) = R(\bar{\mathcal{U}}^4)$ es una relación de equivalencia. Más aún, claramente es una relación de equivalencia compatible con T.

Proposición 3.2.16. *Sean R una relación de equivalencia en X compatible con T, $X_R = X/R$ y $T_R\colon X_R \to X_R$ el homeomorfismo cociente. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) T_R es expansivo.

2) Existe un cubrimiento abierto y finito $\mathcal{U}$ de X tal que T es $\mathcal{U}$-semi expansivo y $R = R(\mathcal{U})$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Sean d una métrica compatible en X_R y $\alpha > 0$ una constante de expansividad de T_R respecto a d. Sean $\mathcal{U}_R$ un cubrimiento finito de X_R formado por conjuntos abiertos de diámetro menor que $\alpha/4$ y $\mathcal{U} = q^{-1}(\mathcal{U}_R)$, donde $q\colon X \to X_R$, $q(x) = [x]$ si $x \in X$, es el mapa canónico.

Se afirma que T es $\mathcal{U}$-semi expansivo. En efecto si $x, y \in X$ y $x \sim_{\bar{\mathcal{U}}^4} y$, entonces para cada $n \in \mathbb{Z}$ existen $U_1, U_2, U_3, U_4 \in \mathcal{U}$ tales que $T^n x \in \bar{U}_1$, $\bar{U}_i \cap \bar{U}_{i+1} \neq \varnothing$ si $1 \leq i \leq 3$ y $T^n y \in \bar{U}_4$. Luego $T_R^n[x] = [T^n x] \in q(\bar{U}_1)$, $q(\bar{U}_i) \cap q(\bar{U}_{i+1}) \neq \varnothing$ si $1 \leq i \leq 3$ y $T_R^n[y] = [T^n y] \in q(\bar{U}_4)$. Como $q(\bar{U}_i) \subseteq \overline{q(U_i)}$ y $q(U_i) \in \mathcal{U}_R$ tiene diámetro menor que $\alpha/4$ si $1 \leq i \leq 4$ se deduce que $d(T_R^n[x], T_R^n[y]) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por lo tanto la expansividad de T_R implica que $[x] = [y]$ y entonces $x \sim_{\mathcal{U}} y$ pues los elementos de $\mathcal{U}$ son R-saturados.

Finalmente, para ver que $R = R(\mathcal{U})$ supóngase que $x, y \in X$ y $x \sim_{\mathcal{U}} y$. Entonces $x \sim_{\bar{\mathcal{U}}^4} y$ y por lo probado en el párrafo anterior se tiene que $[x] = [y]$, es decir, $x \sim y$, donde "$\sim$" denota equivalencia según R. Recíprocamente, si $x, y \in X$ y $x \sim y$ entonces $x \sim_{\mathcal{U}} y$ como ya se observó anteriormente, dado que los elementos de $\mathcal{U}$ son R-saturados.

2) $\Rightarrow$ 1). Como T es $\mathcal{U}$-semi expansivo se tiene que $R(\bar{\mathcal{U}}^4) = R(\mathcal{U}) = R$. Luego, dado que $\bar{\mathcal{U}}^4$ es un cubrimiento cerrado y finito de X, por el Lema 3.2.14 X_R es una descomposición semicontinua superiormente. Entonces, aplicando [29, Proposition 3.7] se obtiene que el mapa canónico $q\colon X \to X_R$ es cerrado.

Para cada $x \in X$ considérense $U(x) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ y $\widehat{U}(x) = \{y \in X : [y] \subseteq U(x)\}$. Nótese que $x \in \widehat{U}(x)$ para todo $x \in X$, ya que si $y \in [x] = [x]_{\mathcal{U}}$ entonces $\{x, y\} \prec \mathcal{U}$ y por lo tanto $y \in U(x)$, es decir, $[x] \subseteq U(x)$. Esto junto a la Observación 3.2.8 permite afirmar que las familias finitas $\widehat{\mathcal{U}} = \{\widehat{U}(x) : x \in X\}$ y $\mathcal{U}_R = q(\widehat{\mathcal{U}})$ son cubrimientos abiertos de X y X_R respectivamente.

En virtud de [26, Theorem 3.2] para concluir la prueba es suficiente probar que $\mathcal{U}_R$ es un *generador* para T_R ([26, Definition 2.4]), es decir, si $x, y \in X$ y $[x] \sim_{\overline{\mathcal{U}_R}} [y]$ entonces $[x] = [y]$.[3]

[3] En [26] se asume la hipótesis general de que el espacio en el que se trabaja es un espacio de Hausdorff sin embargo es fácil ver que de hecho esa propiedad se deduce de la existencia de un generador.

Supóngase entonces que $x, y \in X$ son puntos tales que $\{T_R^n[x], T_R^n[y]\} \prec \overline{\mathcal{U}_R}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $z_n \in X$ tal que $\{[T^n x], [T^n y]\} \subseteq q\big(\widehat{U}(z_n)\big)^- \subseteq q\big(U(z_n)\big)^- = q\big(U(z_n)^-\big)$, donde en la última igualdad se ha usado que q es un mapa cerrado, y sean $x_n, y_n \in U(z_n)^-$ tales que $T^n x \sim x_n$ y $T^n y \sim y_n$. Dado que $\mathcal{U}$ es finito, para cualquier punto $z \in X$ se verifica $U(z)^- = \big(\bigcup\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}\big)^- = \bigcup\{\overline{U} : x \in U \in \mathcal{U}\}$, luego $\{x_n, z_n\} \prec \overline{\mathcal{U}}$ y $\{y_n, z_n\} \prec \overline{\mathcal{U}}$ ya que $x_n, y_n \in U(z_n)^-$. Como además $\{T^n x, x_n\} \prec \mathcal{U}$ y $\{T^n y, y_n\} \prec \mathcal{U}$ pues $T^n x \sim x_n$, $T^n y \sim y_n$ y $R = R(\mathcal{U})$, se concluye que $\{T^n x, T^n y\} \prec \overline{\mathcal{U}}^4$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces $x \sim_{\overline{\mathcal{U}}^4} y$, de donde $[x] = [y]$ ya que $R = R(\overline{\mathcal{U}}^4)$. $\square$

3.2.B. Casi expansividad

La semi expansividad y en general la $[\varepsilon, \alpha]$-expansividad de un homeomorfismo T no parece tener consecuencias en la dinámica a escala menor que ε. Concretamente, en el caso semi expansivo los puntos dentro de una misma clase de equivalencia del cociente expansivo asociado podrían tener comportamientos dinámicos arbitrarios: T *mueve* las clases de equivalencia *de forma expansiva* pero no se tiene ninguna condición sobre cómo actúa T *dentro* de cada una de ellas.

En orden a obtener resultados más finos sobre la dinámica surge entonces la idea de considerar homeomorfismos T que admitan cocientes expansivos con clases de equivalencia de diámetro tan pequeño como se quiera. Dado que una cota para el diámetro de las clases de equivalencia es $\alpha/2$ si α es una constante de semi expansividad, resulta natural entonces introducir la siguiente clase de homeomorfismos.

Definición 3.2.17. Sean X un espacio métrico y $T\colon X \to X$ un homeomorfismo. Se dice que T es *casi expansivo* sii existe una sucesión de reales positivos $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_k \to 0$ y T es α_k-semi expansivo para todo $k \in \mathbb{N}$.

Es claro que todo homeomorfismo expansivo es casi expansivo: cualquier sucesión $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_k \to 0$ y $\alpha_k \le \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$, donde α es una constante de expansividad, satisface la condición de la Definición 3.2.17.

Observación 3.2.18. Si T es un homeomorfismo casi expansivo como en la Definición 3.2.17, denotando con T_k el homeomorfismo (expansivo) cociente asociado a la constante de semi expansividad α_k, se espera que el comportamiento de T sea aproximado cada vez mejor por el de T_k a medida que k crece. Como es fácil ver, esta noción de *convergencia* de la sucesión $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ a T es de hecho un caso particular de la *convergencia C^0-Gromov-Hausdorff* recientemente introducida en [7].

Proposición 3.2.19. *El conjunto de homeomorfismos casi expansivos de un espacio métrico compacto X es un G_δ en $\mathcal{H}(X)$. Si X es el conjunto de Cantor entonces el conjunto de homeomorfismos casi expansivos de X es un residual en $\mathcal{H}(X)$.*

Demostración. Dada una sucesión de reales positivos $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_k \to 0$, como para cada $k \in \mathbb{N}$ el conjunto de homeomorfismos de X que son α_k-semi expansivos es abierto por la Proposición 3.2.3, entonces el conjunto de homeomorfismos de X que son α_k-semi expansivos para todo $k \in \mathbb{N}$ es un G_δ. Se deduce entonces la primera afirmación del enunciado. Para la segunda basta aplicar lo anterior junto al resultado de [35]: el conjunto de homeomorfismos expansivos (y por lo tanto para cada $\alpha > 0$ el de los α-semi expansivos) del conjunto de Cantor es denso en $\mathcal{H}(X)$. □

Recuérdese que la *entropía topológica* $h(T) \in [0, +\infty]$ de una función continua $T\colon X \to X$ que actúa en un espacio topológico compacto X se define en [4] como:

$$h(T) = \sup\big\{h(T,\mathcal{U}) : \mathcal{U} \text{ cubrimiento abierto y finito de } X)\big\},$$

donde, si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto y finito de X se definen

$$h(T,\mathcal{U}) = \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} H\Big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\mathcal{U}\Big) \quad \text{y} \quad H(\mathcal{U}) = \log\big(\min\big\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es subcubrimiento de } \mathcal{U}\big\}\big).$$

Proposición 3.2.20. *Sean X un espacio topológico compacto, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de relaciones de equivalencia en X compatibles con T, para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $X_n = X/R_n$ el espacio topológico cociente, $q_n\colon X \to X_n$ la proyección canónica y $T_n\colon X_n \to X_n$ el homeomorfismo inducido por T. Si q_n es cerrada para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \prec \mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$, entonces $h(T_n) \to h(T)$.*

Demostración. En virtud de [4, Theorem 5] se tiene que $h(T_n) \leq h(T)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supóngase dado $a \in \mathbb{R}$ tal que $a < h(T)$ y sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto y finito de X tal que

$$a \leq h(T,\mathcal{U}). \tag{3.1}$$

Por hipótesis es posible elegir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_n \prec \mathcal{U}$ para todo $n \geq n_0$. Dado $n \geq n_0$ para cada clase $C \in X_n$ sean $U_C \in \mathcal{U}$ tal que $C \subseteq U_C$, $\widehat{U}_C = \{x \in X : [x] \subseteq U_C\}$ y $\widetilde{U}_C = q_n(\widehat{U}_C)$. Defínanse $\widehat{\mathcal{U}} = \{\widehat{U}_C : C \in X_n\}$ y $\mathcal{U}_R = q_n(\widehat{\mathcal{U}}) = \{\widetilde{U}_C : C \in X_n\}$. Dado que $C \subseteq \widehat{U}_C$ para cada $C \in X_n$ se tiene que $\widehat{\mathcal{U}}$ es un cubrimiento de X y por lo tanto $\mathcal{U}_R$ lo es de X_n. Como q_n es cerrada, la Observación 3.2.8 implica que los cubrimientos $\widehat{\mathcal{U}}$ y $\mathcal{U}_R$ son abiertos.

Obsérvese que $\widehat{\mathcal{U}} \prec \mathcal{U}$ pues $\widehat{U}_C \subseteq U_C$ para cada $C \in X_n$, por lo tanto

$$h(T,\mathcal{U}) \leq h(T,\widehat{\mathcal{U}}), \tag{3.2}$$

en virtud de [4, Property 10]. Por otro lado, como cada $\widehat{U}_C \in \widehat{\mathcal{U}}$ es saturado (es unión de clases) se tiene que $\widehat{\mathcal{U}} = q_n^{-1}(\mathcal{U}_R)$ y eso implica $H(\widehat{\mathcal{U}}) = H(\mathcal{U}_R)$. Lo mismo ocurre con los cubrimientos $\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\widehat{\mathcal{U}}$ y $\bigwedge_{k=0}^{N-1} T_n^{-k}\mathcal{U}_R$, es decir, $H\big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\widehat{\mathcal{U}}\big) = H\big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\mathcal{U}_R\big)$, para todo $N \in \mathbb{N}$, ya que

$$\bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k}\widehat{\mathcal{U}} = \bigwedge_{k=0}^{N-1} T^{-k} q_n^{-1}(\mathcal{U}_R) = \bigwedge_{k=0}^{N-1} q_n^{-1}(T_n^{-k}\mathcal{U}_R) = q_n^{-1}\big(\bigwedge_{k=0}^{N-1} T_n^{-k}\mathcal{U}_R\big).$$

Por lo tanto

$$h(T,\widehat{\mathcal{U}}) = h(T_n,\mathcal{U}_R). \tag{3.3}$$

La combinación de las relaciones (3.1), (3.2) y (3.3), junto con el hecho de que $h(T_n,\mathcal{U}_R) \leq h(T_n)$ arroja que $a \leq h(T_n)$ para todo $n \geq n_0$. Se concluye entonces que $h(T_n) \to h(T)$ como se deseaba. □

Corolario 3.2.21. *Sean (X, d) un espacio métrico compacto, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo casi expansivo, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de constantes de semi expansividad para T tal que $\alpha_k \to 0$, y para cada $k \in \mathbb{N}$ sea T_k el homeomorfismo expansivo inducido por T en el cociente $X_k = X/R(d, \alpha_k)$. Entonces $h(T_k) \to h(T)$.*

Demostración. Por el Lema 3.2.7 cada cociente X_k, $k \in \mathbb{N}$, es de Hausdorff y por lo tanto el mapa canónico $X \to X_k$ es cerrado. Por otro lado, como el diámetro de las clases de R_k-equivalencia es menor que α_k para cada $k \in \mathbb{N}$, queda claro que dado un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $X_k \prec \mathcal{U}$ si $k \geq k_0$, pues basta tomar $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que α_k sea menor que un número de Lebesgue fuerte de $\mathcal{U}$. La tesis se obtiene entonces aplicando la Proposición 3.2.20. □

3.3. Cocientes Anosov

En esta sección se estudian los cocientes de sistemas dinámicos que dan homeomorfismos de Anosov, dando una condición necesaria y suficiente para que ello ocurra en la Proposición 3.3.6. Luego se desarrollan dos aplicaciones de esta proposición, una en §3.3.A, donde se prueba una generalización del teorema de estabilidad topológica de Walters [37, Theorem 4] al contexto de los homeomorfismos que son extensión de un homeomorfismo de Anosov (Proposición 3.3.8), y la otra en §3.3.B construyendo para cada sistema dinámico expansivo una *envolvente* expansiva con la propiedad de sombreado para las pseudo órbitas del sistema original (Proposición 3.3.15).

Definición 3.3.1. Sea $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una bi-sucesión de puntos de X. Si $\delta > 0$ y $d(Tx_n, x_{n+1}) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces ξ es llamada *δ-pseudo órbita*. Dado $\varepsilon > 0$ se dice que ξ es *ε-sombreada* por la bi–sucesión $\eta = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ sii $d(x_n, y_n) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En la situación anterior, si $\eta = (T^n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ es la órbita de un punto $x \in X$ se dice simplemente que x ε-sombrea a ξ y en ese caso ξ se denomina *ε-sombreable.*

Dados $\varepsilon, \delta > 0$ y un conjunto de bi–sucesiones $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{Z}}$ se dice que T tiene la *propiedad de $\varepsilon - \delta$ sombreado en $\mathcal{S}$* sii toda δ-pseudo órbita perteneciente a $\mathcal{S}$ es ε-sombreable. Si para todo

$\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que T tiene la propiedad de $\varepsilon - \delta$ sombreado en $\mathcal{S}$ se dice que T tiene la *propiedad de sombreado en* $\mathcal{S}$. Si en los casos anteriores $\mathcal{S} = X^{\mathbb{Z}}$ se omite la mención a $\mathcal{S}$ y se dice simplemente que T tiene la *propiedad de $\varepsilon - \delta$ sombreado/propiedad de sombreado.* Si en cambio, se tiene que $\mathcal{S} = Y^{\mathbb{Z}}$ para cierto subconjunto $Y \subseteq X$ se adopta la terminología *propiedad de $\varepsilon - \delta$ sombreado para Y/propiedad de sombreado para Y.*

Si T es expansivo y tiene la propiedad de sombreado, T se llama *homeomorfismo de Anosov.*

Las nociones anteriores, en particular las de pseudo órbita y sombreado, se extienden naturalmente al contexto topológico de la siguiente manera.

Definición 3.3.2. Sean $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una bi-sucesión de puntos de X y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Se dice que ξ es una *$\mathcal{U}$-pseudo órbita* sii $\{Tx_n, x_{n+1}\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se dice que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es *$\mathcal{U}$-sombreada* por $x \in X$ sii $\{T^n x, x_n\} \prec \mathcal{U}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Si $T \colon X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio topológico X se llama *generador* a todo cubrimiento abierto y finito $\mathcal{U}$ tal que si $x, y \in X$ y $\{T^n x, T^n y\} \prec \overline{\mathcal{U}}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $x = y$, donde se denota $\overline{\mathcal{U}} = \{\overline{U} : U \in \mathcal{U}\}$. Como se mencionaba en el ítem 3) de la Observación 1.1.6 para espacios compactos la existencia de un generador es equivalente a la expansividad (métrica) de T en virtud de [26, Theorem 3.2].

Lema 3.3.3. *Supóngase que T es expansivo, $\alpha_0 > 0$ una constante de expansividad y $\mathcal{U}_0$ un generador. Dado $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{Z}}$ las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) T tiene la propiedad de sombreado en $\mathcal{S}$.

2) T tiene la propiedad de $\alpha_0 - \delta_0$ sombreado en $\mathcal{S}$ para algún $\delta_0 > 0$.

3) T tiene la propiedad de $\mathcal{U}_0 - \mathcal{V}_0$ sombreado en $\mathcal{S}$ para algún cubrimiento abierto $\mathcal{V}_0$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Trivial.

2) $\Rightarrow$ 1). Supóngase que T no tiene la propiedad de sombreado en $\mathcal{S}$. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe una δ-pseudo órbita perteneciente a $\mathcal{S}$ que no es ε-sombreada. Tomando $\delta = {}^1\!/_k$, $k \in \mathbb{N}$, se obtiene que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe una ${}^1\!/_k$-pseudo órbita $(x_n^k)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$ que no es ε-sombreada. Por hipótesis, tomando $k_0 \in \mathbb{N}$, $k_0 > {}^1\!/_{\delta_0}$ se tiene que si $k \geq k_0$ la pseudo órbita $(x_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ es α_0-sombreada por algún $x^k \in X$. Como $(x_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ no es ε-sombreada para cada $k \geq k_0$ existe $n_k \in \mathbb{Z}$ tal que $d(T^{n_k}x^k, x_{n_k}^{(k)}) \geq \varepsilon$. Re indexando cada pseudo órbita y reemplazando x^k por $T^{n_k}x^k$ puede suponerse que $n_k = 0$ para todo $k \geq k_0$. De esta forma $d(x^k, x_0^k) \geq \varepsilon$ si $k \geq k_0$. Tomando subsucesiones si es necesario puede suponerse también que $x^k \to x$ y $x_0^k \to y$. Es claro que $x \neq y$ ya que $d(x, y) = \lim_k d(x^k, x_0^k) \geq \varepsilon$.

Nótese que como $x_0^k \to y$ y $d(Tx_0^k, x_1^k) < {}^1\!/_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, tomando límite cuando $k \to +\infty$ se obtiene que $x_1^k \to Ty$. Partiendo de esto último, el mismo argumento prueba que $x_2^k \to T^2 y$, y así sucesivamente se obtiene que $x_n^k \to T^n y$ para todo $n \geq 0$. Por otro lado, como

$d(Tx^k_{-1}, x^k_0) < {}^1\!/_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tomando límite cuando $k \to +\infty$ se llega a que $Tx^k_{-1} \to y$, es decir $x^k_{-1} \to T^{-1}y$. Repitiendo este argumento sucesivamente se llega a la conclusión de que $x^k_n \to T^n y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (las pseudo órbitas tienden puntualmente a la órbita de y). Ahora bien, como para cada $k \geq k_0$ el punto x^k α_0-sombrea a $(x^k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, se tiene $d(T^n x^k, x^k_n) < \alpha_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Tomando límite cuando $k \to +\infty$ se obtiene entonces que $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, lo que contradice que α_0 es una constante de expansividad pues $x \neq y$. Esta contradicción completa la demostración.

1) $\Rightarrow$ 3). Sean $\varepsilon > 0$ un numero de Lebesgue de $\mathcal{U}_0$, $\delta > 0$ tal que T tiene la propiedad de $\varepsilon - \delta$ sombreado en $\mathcal{S}$ y $\mathcal{V}_0$ el cubrimiento de X por bolas de radio ${}^\delta\!/_2$. Si $\xi \in \mathcal{S}$ es una $\mathcal{V}_0$-pseudo órbita entonces ξ es una δ-pseudo órbita, luego existe $x \in X$ que ε-sombrea a ξ, de donde se deduce que ξ es $\mathcal{U}_0$-sombreada por x.

3) $\Rightarrow$ 1). De igual forma que en la prueba de 2) $\Rightarrow$ 1) si T no tuviera la propiedad de sombreado es posible construir ${}^1\!/_k$-pseudo órbitas $(x^k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, $k \in \mathbb{N}$, pertenecientes a $\mathcal{S}$ que convergen puntualmente a la órbita de cierto $y \in X$. Asimismo, tomando $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que ${}^1\!/_{k_0}$ sea un número de Lebesgue de $\mathcal{V}_0$, si $k \geq k_0$ se obtienen puntos $x^k \in X$ que $\mathcal{U}_0$-sombrean a $(x^k_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tales que $x^k \to x \neq y$. Como para cada $n \in \mathbb{Z}$ se verifica que $\{T^n x^k, x^k_n\} \prec \mathcal{U}_0$ para todo $k \geq k_0$ y $\mathcal{U}_0$ es finito, se concluye que $\{T^n x, T^n y\} \prec \overline{\mathcal{U}}_0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, contradiciendo que $\mathcal{U}_0$ es un generador ya que $x \neq y$. □

Si $f\colon X \to Y$ es una función y $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una bi–sucesión de puntos de X la bi–sucesión de puntos de Y correspondiente se denota $f(\xi) = \big(f(x_n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$. Asimismo, si $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{Z}}$ se emplea la notación $f(\mathcal{S}) = \{f(\xi) : \xi \in \mathcal{S}\} \subseteq Y^{\mathbb{Z}}$.

Proposición 3.3.4. *Si $\mathcal{S} \subseteq X^{\mathbb{Z}}$, T es $[{}^\delta\!/_4, \alpha]$-expansivo y tiene la propiedad de ${}^\alpha\!/_4 - \delta$ sombreado en $\mathcal{S}$, donde $0 < \delta \leq {}^\alpha\!/_4$, y $R = R(d, \alpha)$ es la relación de equivalencia introducida en la Definición 3.2.4, entonces el homeomorfismo (expansivo) cociente $T_R\colon X_R \to X_R$ tiene la propiedad de sombreado en $q(\mathcal{S})$, donde $q\colon X \to X_R$ es el mapa canónico.*

Demostración. En primer lugar nótese que como ${}^\delta\!/_4 \leq {}^\alpha\!/_2$ y T es $[{}^\delta\!/_4, \alpha]$-expansivo entonces T_R es expansivo por la Proposición 3.2.9 y las clases de equivalencia verifican $\mathrm{diam}([x]) < {}^\delta\!/_4 \leq {}^\alpha\!/_{16}$ en virtud de la Observación 3.2.5. En virtud del Lema 3.3.3 para probar que T_R tiene la propiedad de sombreado en $q(\mathcal{S})$ es suficiente exhibir un generador $\mathcal{U}_R$ para T_R y un cubrimiento abierto $\mathcal{V}_R$ de X tales que toda $\mathcal{V}_R$-pseudo órbita perteneciente a $q(\mathcal{S})$ es $\mathcal{U}_R$-sombreada.

Sea $F \subseteq X$ un conjunto finito tal que $\bigcup_{x\in F} B_{\alpha/8}(x) = X$, si $x \in X$ defínanse $U_x = B_{7\alpha/16}(x)$ y $\widehat{U}_x = \{y \in X : [y] \subseteq U_x\}$, y considérense $\mathcal{U} = \{\widehat{U}_x : x \in F\}$ y $\mathcal{U}_R = \{q(\widehat{U}_x) : x \in F\}$. Por la Observación 3.2.8 éstas son familias de conjuntos abiertos. Más aun, para cada $x \in X$ tomando $y \in F$ tal que $d(x, y) < {}^\alpha\!/_8$ se tiene $[x] \subseteq U_y$, pues $\mathrm{diam}([x]) < {}^\alpha\!/_{16}$ y ${}^\alpha\!/_8 + {}^\alpha\!/_{16} \leq {}^{7\alpha}\!/_{16}$, y por lo tanto $x \in \widehat{U}_y \in \mathcal{U}$. Esto prueba que $\mathcal{U}$ y en consecuencia $\mathcal{U}_R$ son cubrimientos.

Para ver que $\mathcal{U}_R$ es un generador para T_R obsérvese primero que si $z \in F$ entonces

$$q^{-1}\big(q(\widehat{U}_z)^-\big) \subseteq B_{\alpha/2}(z). \tag{3.4}$$

En efecto, como q es cerrada, ya que X_R es metrizable por el Lema 3.2.7 y X es compacto, se cumple que $q(\widehat{U}_z)^- = q(\widehat{U}_z^-)$. Luego, para todo $w \in q^{-1}\big(q(\widehat{U}_z)^-\big)$ se tiene $[w] \in q(\widehat{U}_z)^- = q(\widehat{U}_z^-)$, y como $\widehat{U}_z \subseteq U_z = B_{7\alpha/16}(z)$ se tiene que $[w] = [w']$ para algún $w' \in X$ tal que $d(z, w') \leq {}^{7\alpha}/_{16}$. En consecuencia $w \in B_{\alpha/2}(z)$ dado que $\operatorname{diam}([w]) < {}^{\alpha}/_{16}$ y ${}^{7\alpha}/_{16} + {}^{\alpha}/_{16} = {}^{\alpha}/_{2}$.

Ahora supóngase que $x, y \in X$ y $\{T_R^n[x], T_R^n[y]\} \prec \overline{\mathcal{U}}_R$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $\{[T^n x], [T^n y]\} \subseteq q(\widehat{U}_z)^-$ para cierto $z \in F$. Aplicando la condición (3.10) se obtiene que $\{T^n x, T^n y\} \subseteq B_{\alpha/2}(z)$, y por lo tanto $d(T^n x, T^n y) < \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto implica que $[x] = [y]$, probando que $\mathcal{U}_R$ es un generador.

Por otro lado, para cada $x \in X$ sean $V_x = B_{\delta/2}(x)$ y $\widehat{V}_x = \{y \in M : [y] \subseteq V_x\}$, y considérense las familias $\widehat{\mathcal{V}} = \{\widehat{V}_x : x \in X\}$ y $\mathcal{V}_R = \{q(\widehat{V}_x) : x \in X\}$. De forma similar a lo hecho anteriormente con $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_R$ se puede verificar que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{V}_R$ son cubrimientos abiertos.

Se afirma que toda $\mathcal{V}_R$-pseudo órbita perteneciente a $q(\mathcal{S})$ es $\mathcal{U}_R$-sombreable. Supóngase dada una $\mathcal{V}_R$-pseudo órbita $q(\xi) \in q(\mathcal{S})$ de T_R, donde $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathcal{S}$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $\{[Tx_n], [x_{n+1}]\} = \{T_R[x_n], [x_{n+1}]\} \subseteq q(\widehat{V}_y)$ para cierto $y \in X$. Como $\widehat{V}_y$ es saturado se obtiene que $\{Tx_n, x_{n+1}\} \subseteq \widehat{V}_y \subseteq V_y = B_{\delta/2}(y)$, y entonces $d(Tx_n, x_{n+1}) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir, ξ es una δ-pseudo órbita para T. Luego, por hipótesis existe $x \in X$ que ${}^{\alpha}/_{4}$-sombrea ξ, esto es, $d(T^n x, x_n) < {}^{\alpha}/_{4}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ sea $z \in F$ tal que $d(x_n, z) < {}^{\alpha}/_{8}$. Como $\operatorname{diam}([T^n x]) < {}^{\alpha}/_{16}$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ y ${}^{\alpha}/_{4} + {}^{\alpha}/_{8} + {}^{\alpha}/_{16} = {}^{7\alpha}/_{16}$, se deduce que $T_R^n[x] = [T^n x] \subseteq U_z = B_{7\alpha/16}(z)$, de donde $T_R^n[x] \in q(\widehat{U}_z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Análogamente se verifica que $[x_n] \in q(\widehat{U}_z)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Se ha probado entonces que $q(\xi)$ es $\mathcal{U}_R$-sombreada por $[x]$, como se quería. $\square$

Definición 3.3.5. Dado $\alpha > 0$, se dice que T es *α-semi Anosov* sii existe $\delta > 0$, tal que $\delta \leq {}^{\alpha}/_{4}$, T es $[{}^{\delta}/_{4}, \alpha]$-expansivo y tiene la propiedad de ${}^{\alpha}/_{4} - \delta$ sombreado.

Es claro que todo homeomorfismo de Anosov es en particular α-semi Anosov si $\alpha > 0$ es una constante de expansividad. Asimismo es inmediato que si T es α-semi Anosov como en la Definición 3.3.5 entonces T es α-semi expansivo pues T es es $[{}^{\delta}/_{4}, \alpha]$-expansivo y ${}^{\delta}/_{4} \leq {}^{\alpha}/_{2}$.

Proposición 3.3.6. *Sean X un espacio compacto metrizable, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo, $R \subseteq X \times X$ una relación de equivalencia compatible con T y $T_R\colon X_R \to X_R$ el homeomorfismo cociente. Son equivalentes las siguientes condiciones.*

1) T_R es un homeomorfismo de Anosov.

2) T es α-semi Anosov y $R = R(d, \alpha)$ respecto a alguna métrica compatible d en X y $\alpha > 0$.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Al igual que en la demostración del directo de la Proposición 3.2.9 sean d y d_R métricas compatibles en X y X_R respectivamente, $\alpha_R > 0$ una constante de expansividad para T_R, $\alpha > 0$ tal que $x, y \in X$ y $d(x,y) \leq \alpha$ implica $d_R([x],[y]) \leq \alpha_R$, y d_1 la métrica en X

$$d_1(x,y) = d_R([x],[y]) + Kd(x,y)$$

si $x, y \in X$, donde ahora

$$K = \frac{\delta}{4\,\mathrm{diam}(X,d) + 1}$$

y $0 < \delta \leq \alpha/4$ será especificado luego. Se tiene que la métrica d_1 es compatible con X, respecto a ella T es $[\delta/4, \alpha]$-expansivo y $R = R(d_1, \alpha)$, todo lo cual se prueba exactamente como en la citada demostración de la Proposición 3.2.9.

Resta especificar δ y mostrar que T tiene la propiedad de $\alpha/4 - \delta$ sombreado respecto a d_1. Dado que T_R tiene la propiedad de sombreado existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita de T_R es $\alpha/8$-sombreada. Claramente puede elegirse $\delta \leq \alpha/4$. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una δ-pseudo órbita de T respecto a d_1. Como $d_1(Tx_n, x_{n+1}) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de la definición de d_1 se obtiene que $d_R(T_R[x_n],[x_{n+1}]) = d_R([Tx_n],[x_{n+1}]) < \delta$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego $([x_n])_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo órbita para T_R y por lo tanto existe $x \in X$ tal que $[x]$ la $\alpha/8$-sombrea, es decir $d_R(T_R^n[x],[x_n]) < \alpha/8$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} d_1(T^n x, x_n) &= d_R([T^n x],[x_n]) + Kd(T^n x, x_n) \\ &= d_R(T_R^n[x],[x_n]) + Kd(T^n x, x_n) \\ &< \alpha/8 + K\,\mathrm{diam}(X,d) \\ &< \alpha/8 + \delta/4 \\ &\leq \alpha/4, \end{aligned}$$

donde se ha usado la definición de K y que $\delta \leq \alpha/4$. Se ha probado entonces que $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es $\alpha/4$-sombreada por x como se deseaba.

2) $\Rightarrow$ 1). Es consecuencia de la Proposición 3.3.4 para el caso $\mathcal{S} = X^{\mathbb{Z}}$. ☐

Observación 3.3.7. De forma similar a lo indicado en la Observación 3.2.10, nótese que en la demostración de 1) $\Rightarrow$ 2) de la Proposición 3.3.6 la constante α puede elegirse arbitrariamente pequeña en relación a la constante de expansividad α_R de T_R. Asimismo δ puede escogerse arbitrariamente pequeño en relación al α elegido. Obsérvese también que la métrica d_1 construida verifica $d_R([x],[y]) \leq d_1(x,y)$ para todo $x, y \in X$.

3.3.A. Un resultado de estabilidad

En este apartado se da una primera aplicación de la Proposición 3.3.6, más precisamente del directo, probando el siguiente resultado que constituye una generalización del teorema de estabilidad topológica de Walters [37, Theorem 4] al contexto de las extensiones de homeomorfismos de Anosov.

Proposición 3.3.8. *Sean X un espacio metrizable compacto, $T\colon X \to X$ un homeomorfismo y R una relación de equivalencia en X compatible con T tales que el homeomorfismo inducido $T_R\colon X_R \to X_R$ es un homeomorfismo de Anosov. Entonces, dado un entorno $\mathcal{N}_q$ del mapa canónico $q\colon X \to X_R$ en $\mathcal{C}(X, X_R)$ existe un entorno $\mathcal{N}_T$ de T en $\mathcal{H}(X)$ tal que para todo $S \in \mathcal{N}_T$ existe un mapa continuo $p\colon X \to X_R$ tal que $T_R \circ p = p \circ S$ y $p \in \mathcal{N}_q$.*

Más aun, existe un entorno $\mathcal{N}_q^0$ de q en $\mathcal{C}(X, X_R)$ de modo que si el entorno $\mathcal{N}_q$ dado verifica $\mathcal{N}_q \subseteq \mathcal{N}_q^0$ entonces el mapa $p \in \mathcal{N}_q$ es único para cada $S \in \mathcal{N}_T$.

Demostración. Sean d_R una métrica compatible en X_R y $\alpha_R > 0$ una constante de expansividad para T_R respecto a d_R. Por la Proposición 3.3.6 existe una métrica compatible d en X y $\alpha > 0$ tales que T es α-semi Anosov y $R = R(d, \alpha)$. Por la Observación 3.3.7 puede asumirse que

$$\alpha \leq \alpha_R \quad \text{y} \quad d_R([x], [y]) \leq d(x, y) \text{ si } x, y \in X. \tag{3.5}$$

Como T es α-semi Anosov, T tiene la propiedad de $\alpha/4 - \delta$ sombreado para algún $\delta > 0$, $\delta \leq \alpha/4$. Considérese el entorno $\mathcal{N}_T = \{S \in \mathcal{H}(X) : d(S, T) < \delta\}$.[4]

Sea $S \in \mathcal{N}_T$ dado. Para cada $x \in X$ se tiene que la órbita según S de x, $(S^n x)_{n \in \mathbb{Z}}$, es una δ-pseudo órbita para T pues $d(S, T) < \delta$. Luego existe $y_x \in X$ que $\alpha/4$-sombrea según T a $(S^n x)_{n \in \mathbb{Z}}$, es decir, $d(S^n x, T^n y_x) < \alpha/4$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Si $y'_x \in X$ también $\alpha/4$-sombrea a $(S^n x)_{n \in \mathbb{Z}}$, la desigualdad triangular implica que $d(T^n y_x, T^n y'_x) < \alpha/2$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, de donde se deduce que $y_x \sim y'_x$ pues $R = R(d, \alpha)$. De este modo cada elemento $x \in X$ determina una única clase $[y_x] \in X_R$, donde y_x es algún elemento de X que $\alpha/4$-sombrea según T la S-órbita de x. Queda así definida una función $p\colon X \to X_R$ tal que $p(x) = [y_x]$ si $x \in X$.

El mapa p verifica $T_R \circ p = p \circ S$. En efecto, si $x \in X$ e y_x $\alpha/4$-sombrea a $(S^n x)_{n \in \mathbb{Z}}$ entonces $d(S^n x, T^n y_x) < \alpha/4$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Luego $d(S^n Sx, T^n T y_x) = d(S^{n+1} x, T^{n+1} y_x) < \alpha/4$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, es decir, $T y_x$ $\alpha/4$-sombrea según T la S-órbita de Sx. Por lo tanto para todo $x \in X$ se tiene $p(Sx) = [T y_x] = T_R [y_x] = T_R p(x)$, o sea $T_R \circ p = p \circ S$.

Para probar la continuidad de p supóngase dados $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Como T_R es uniformemente expansivo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\text{si } [u], [v] \in X_R \text{ y } d_R(T_R^n [u], T_R^n [v]) < \alpha_R \text{ para todo } |n| \leq N \text{ entonces } d_R([u], [v]) < \varepsilon. \tag{3.6}$$

Por otro lado, la continuidad de $q \circ S^n$ para todo $|n| \leq N$ permite elegir $\rho > 0$ de modo que

$$\text{si } z \in X \text{ y } d(x, z) < \rho \text{ entonces } d_R\big(q(S^n x), q(S^n z)\big) < \alpha_R/2 \text{ para todo } |n| \leq N. \tag{3.7}$$

[4]Se denota con el mismo símbolo d la métrica compatible de $\mathcal{H}(X)$ dada por $d(S, T) = \max_{x \in X} d(Sx, Tx)$ si $S, T \in \mathcal{H}(X)$. De forma similar si $p, q \in \mathcal{C}(X, X_R)$ se denota $d_R(p, q) = \max_{x \in X} d_R\big(p(x), q(x)\big)$.

Por lo tanto, si $z \in X$ y $d(x,z) < \rho$, para todo $|n| \leq N$ se tiene

$$\begin{aligned} d_R\big(T_R^n p(x), T_R^n p(z)\big) &\leq d_R\big(T_R^n p(x), q(S^n x)\big) + d_R\big(q(S^n x), q(S^n z)\big) + d_R\big(q(S^n z), T_R^n p(z)\big) \\ &= d_R\big([T^n y_x], [S^n x]\big) + d_R\big(q(S^n x), q(S^n z)\big) + d_R\big([S^n z], [T^n y_z]\big) \\ &\leq d(T^n y_x, S^n x) + d_R\big(q(S^n x), q(S^n z)\big) + d(S^n z, T^n y_z) \\ &< \alpha/4 + \alpha_R/2 + \alpha/4 \\ &\leq \alpha_R, \end{aligned}$$

donde se han usado las condiciones (3.5) y (3.7). Luego, de la condición (3.6) se deduce que si $z \in X$ y $d(x,z) < \rho$ entonces $d_R\big(p(x), p(z)\big) < \varepsilon$, probando así la continuidad de p.

Para obtener que $p \in \mathcal{N}_q$ considérese $\varepsilon > 0$ tal que $p \in \mathcal{N}_q$ si $d_R(p,q) < \varepsilon$, sea $N \in \mathbb{N}$ de forma que se verifique la condición (3.6) y redúzcase $\mathcal{N}_T$ si es necesario de modo que $d(S^n, T^n) < \alpha_R/2$ para todo $|n| \leq N$. Entonces, si $x \in X$ para cada $|n| \leq N$ se tiene

$$\begin{aligned} d_R\big(T_R^n p(x), T_R^n q(x)\big) &= d_R\big(T_R^n [y_x], T_R^n [x]\big) \\ &= d_R\big([T^n y_x], [T^n x]\big) \\ &\leq d\big(T^n y_x, T^n x\big) \\ &\leq d(T^n y_x, S^n x) + d(S^n x, T^n x) \\ &< \alpha/4 + \alpha_R/2 \\ &< \alpha_R. \end{aligned}$$

Por lo tanto $d_R\big(p(x), q(x)\big) < \varepsilon$ para todo $x \in X$ en virtud de la condición (3.6). Así que $d_R(p,q) < \varepsilon$ y entonces $p \in \mathcal{N}_q$ como se deseaba.

Finalmente, en relación a la última afirmación del enunciado, obsérvese que si $p\colon X \to X_R$ y $p'\colon X \to X_R$ son tales que $T_R \circ p = p \circ S$ y $T_R \circ p' = p' \circ S$ donde $S \in \mathcal{H}(X)$ y $d_R(p,p') < \alpha_R$, entonces si $x \in X$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$d_R\big(T_R^n p(x), T_R^n p'(x)\big) = d_R\big(p(S^n x), p'(S^n x)\big) < \alpha_R.$$

Luego $p(x) = p'(x)$ si $x \in X$ pues α_R es una constante de expansividad para T_R, es decir $p = p'$. Por lo tanto basta tomar $\mathcal{N}_q^0$ de modo que $d_R(p,q) < \alpha_R/2$ si $p \in \mathcal{N}_q^0$. □

En el contexto de la Proposición 3.3.8 obsérvese que en el caso particular en el que el homeomorfismo T es un homeomorfismo de Anosov, se tiene que $X_R = X$, $T_R = T$ y $q = id_X$, obteniéndose el resultado de estabilidad topológica de Walters para esa clase de homeomorfismos.

3.3.B. Envolventes de sombreado

En esta sección se estudia una segunda aplicación de la Proposición 3.3.6, en este caso del recíproco, en la versión que se enuncia en la Proposición 3.3.4. Dado un sistema dinámico expansivo en un espacio compacto, en la Proposición 3.3.15 se construirá un sistema dinámico expansivo conteniendo al primero y con la propiedad de sombreado para las pseudo órbitas del sistema original. Uno de los insumos para la demostración de esa proposición lo constituye la Proposición 3.3.13 en la que se da una caracterización de la propiedad de expansividad de un homeomorfismo de un espacio compacto en términos de las pseudo órbitas del sistema. Esta caracterización encontrará una segunda aplicación en el Anexo, pág. 95.

Definición 3.3.9. Sean $\Sigma = X^{\mathbb{Z}}$ el espacio de las bi–sucesiones de elementos de X munido de la topología producto y d_Σ la métrica compatible en Σ definida por la fórmula

$$d_\Sigma(\xi, \eta) = \textstyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{d(x_k, y_k)}{2^{|k|}},$$

si $\xi = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\eta = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ son elementos de Σ. Sean $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$ el homeomorfismo *shift* dado por $\sigma(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (x_{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$ si $(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in \Sigma$, y $\iota\colon X \to \Sigma$ el encaje[5] $\iota(x) = (T^n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ si $x \in X$.

En relación a la definición anterior es claro que Σ es compacto pues X lo es, y que se verifica $\sigma \circ \iota = \iota \circ T$, es decir, se tiene una copia del sistema (X, T) dentro de (Σ, σ).

Observación 3.3.10. Dados elementos $\xi = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\eta = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de Σ es inmediato ver que

$$d(x_0, y_0) \leq d_\Sigma(\xi, \eta).$$

Es fácil verificar también que dado $\varepsilon > 0$ existen $\varepsilon' > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que

$$\text{si } d(x_k, y_k) < \varepsilon' \text{ para todo } |k| \leq N \text{ entonces } d_\Sigma(\xi, \eta) < \varepsilon.$$

Lema 3.3.11. *El sistema dinámico (Σ, σ) tiene la propiedad de sombreado para* $\operatorname{Im}\iota$.

Más aun, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita $\Xi = \iota(\xi) = \big(\iota(x_k)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ de puntos de $\operatorname{Im}\iota$, donde $\xi = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$, es ε-sombreada precisamente por el punto $\xi \in \Sigma$.

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ sean $\varepsilon' > 0$ y $N \in \mathbb{N}$ tales que si $\eta = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\zeta = (z_k)_{k\in\mathbb{Z}}$

$$d(y_k, z_k) < \varepsilon' \text{ para todo } |k| \leq N \text{ implica } d_\Sigma(\eta, \zeta) < \varepsilon. \tag{3.8}$$

Para estos $\varepsilon' > 0$ y $N \in \mathbb{N}$, en virtud de la continuidad uniforme de T^k para todo $|k| \leq N$, es posible elegir $\delta > 0$ de modo que para $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se verifica que:

$$\xi \text{ es una } \delta\text{-pseudo órbita de } T \text{ implica } d(T^k x_n, x_{n+k}) < \varepsilon' \text{ para todo } |k| \leq N, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.9}$$

Supóngase que $\Xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo órbita de σ formada por puntos de $\operatorname{Im}\iota$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{Z}$ se tiene $\xi_n = \iota(x_n)$ para algún $x_n \in X$, es decir, $\xi_n = (T^k x_n)_{k\in\mathbb{Z}}$. Como Ξ es

[5] Se llama *encaje* a un mapa continuo e inyectivo.

una δ-pseudo órbita de σ para todo $n \in \mathbb{Z}$ puede estimarse

$$\begin{aligned} d(Tx_n, x_{n+1}) &\leq d_\Sigma\big((T^{k+1}x_n)_{k\in\mathbb{Z}}, (T^k x_{n+1})_{k\in\mathbb{Z}}\big) \\ &= d_\Sigma\big(\sigma(T^k x_n)_{k\in\mathbb{Z}}, (T^k x_{n+1})_{k\in\mathbb{Z}}\big) \\ &= d_\Sigma(\sigma\xi_n, \xi_{n+1}) \\ &< \delta. \end{aligned}$$

Por lo tanto la bi–sucesión $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una δ-pseudo órbita de T. Entonces, aplicando la condición (3.9) y luego la condición (3.8) con $\eta = \xi_n$ y $\zeta = \sigma^n\xi$ se deduce que

$$d_\Sigma(\xi_n, \sigma^n\xi) = d_\Sigma\big((T^k x_n)_{k\in\mathbb{Z}}, (x_{n+k})_{k\in\mathbb{Z}}\big) < \varepsilon$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esto prueba que Ξ es ε-sombreada por ξ concluyendo la demostración. □

Definición 3.3.12. Sean (X', d') un espacio métrico compacto y $T'\colon X' \to X'$ un homeomorfismo. Se dice que el sistema (X', T') es una *envolvente de sombreado* de (X, T) sii existe un encaje (un mapa continuo e inyectivo) $\mu\colon X \to X'$ que verifica $T' \circ \mu = \mu \circ T$ y tal que (X', T') tiene la propiedad de sombreado para $\operatorname{Im}\mu$ (ver Definición 3.3.1).

Si (X', T') es una envolvente de sombreado de (X, T) entonces reemplazando la métrica d de X por la métrica equivalente d_μ dada por $d_\mu(x, y) = d'\big(\mu(x), \mu(y)\big)$ si $x, y \in X$, se puede identificar (X, d_μ) con el subespacio $\operatorname{Im}\mu \subseteq X'$. De esta forma puede pensarse que $X \subseteq X'$ y que $T = T'|_X$. Con estas identificaciones la condición de sombreado en la Definición 3.3.12 puede reformularse diciendo que (X', T') tiene la propiedad de sombreado para las pseudo órbitas de X: para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita de puntos de X es ε-sombreada por algún punto de $x' \in X'$.

Por el Lema 3.3.11 se tiene que (Σ, σ) es una envolvente de sombreado para todo homeomorfismo T, con el mapa ι jugando el papel del encaje μ de la Definición 3.3.12. Como se verá en la Proposición 3.3.15, en el caso en el que T es expansivo puede elegirse una envolvente de sombreado que además es expansiva.

A continuación se presenta una caracterización de la propiedad de expansividad para T en términos de las pseudo órbitas del sistema.

Proposición 3.3.13. *Sea $\alpha > 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1) T es expansivo con constante de expansividad α.

2) Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{si} \quad d(x_n, y_n) \leq \alpha \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \quad \text{entonces} \quad d(x_n, y_n) < \varepsilon \text{ para todo } n \in \mathbb{Z},$$

para todo par de δ-pseudo órbitas $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de T.

Demostración. 1) $\Rightarrow$ 2). Si la tesis no fuera cierta existiría $\varepsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ se pueden hallar $1/k$-pseudo órbitas $(x_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ e $(y_n^k)_{n\in\mathbb{Z}}$ de T tales que $d(x_n^k, y_n^k) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ pero $d(x_{n_k}^k, y_{n_k}^k) \geq \varepsilon$ para cierto $n_k \in \mathbb{Z}$. Re indexando las pseudo órbitas si es necesario puede suponerse que $n_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como X es compacto puede asumirse también que $x_0^k \to x$ e $y_0^k \to y$ para ciertos $x, y \in X$. Al igual que en la demostración del Lema 3.3.3 puede verificarse que $x_n^k \to T^n x$ e $y_n^k \to T^n y$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ (las pseudo órbitas convergen puntualmente a órbitas). Luego, como $d(x_n^k, y_n^k) \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $n \in \mathbb{Z}$ se deduce que $d(T^n x, T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y como $d(x_0^k, y_0^k) \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$ se obtiene $d(x, y) \geq \varepsilon$, de donde $x \neq y$. Esto contradice que α es una constante de expansividad.

2) $\Rightarrow$ 1). Supóngase que $x, y \in X$ verifican $d(T^n x . T^n y) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y obsérvese que $(T^n x)_{n\in\mathbb{Z}}$ y $(T^n y)_{n\in\mathbb{Z}}$ son δ-pseudo órbitas para todo $\delta > 0$. Entonces, por hipótesis, para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $d(T^n x, T^n y) < \varepsilon$ si $n \in \mathbb{Z}$, es decir, $(T^n x)_{n\in\mathbb{Z}} = (T^n y)_{n\in\mathbb{Z}}$. Luego $x = y$ y por lo tanto α es una constante de expansividad. □

Dado $\rho > 0$ se considera el subespacio compacto σ-invariante Σ^ρ de Σ definido como

$$\Sigma^\rho = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}} : d(Tx_k, x_{k+1}) \leq \rho \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}\}.$$

Obsérvese que Σ^ρ contiene la copia $\operatorname{Im}\iota$ de X cualquiera sea $\rho > 0$. Se denotará con la misma letra σ la restricción $\sigma|_{\Sigma^\rho} \colon \Sigma^\rho \to \Sigma^\rho$.

Corolario 3.3.14. *Si T es expansivo con constante de expansividad $\alpha > 0$ entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que el sistema (Σ^ρ, σ) es $[\varepsilon, \alpha]$-expansivo.*

Demostración. Sean $\xi = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ y $\eta = (y_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ elementos cualesquiera de Σ. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\varepsilon' > 0$ tal que si $d(x_k, y_k) < \varepsilon'$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces $d_\Sigma(\xi, \eta) < \varepsilon$. Por la Proposición 3.3.13 existe $\rho > 0$ tal que si $\xi, \eta \in \Sigma^\rho$ y $d(x_k, y_k) \leq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ entonces $d(x_k, y_k) < \varepsilon'$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Luego, si $\xi, \eta \in \Sigma^\rho$ y $d_\Sigma(\sigma^n \xi, \sigma^n \eta) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ entonces $d(x_n, y_n) \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. En consecuencia $d(x_n, y_n) < \varepsilon'$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, y por lo tanto $d_\Sigma(\xi, \eta) < \varepsilon$. □

Proposición 3.3.15. *Si T es expansivo, T tiene una envolvente de sombreado expansiva.*

Demostración. Considérese el encaje $\iota \colon X \to \sigma$ y para cada bi–sucesión $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de elementos de X denótese la correspondiente bi–sucesión de elementos de Σ como $\iota(\xi) = \big(\iota(x_n)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Sea $\alpha > 0$ una constante de expansividad de T. Por el Lema 3.3.11 existe $\delta > 0$, el cual puede asumirse $\delta \leq \alpha/4$, tal que toda δ-pseudo órbita Ξ de σ perteneciente a $(\operatorname{Im}\iota)^{\mathbb{Z}}$ es $\alpha/4$-sombreable; y más aun si $\Xi = \iota(\xi)$, donde $\xi \in X^{\mathbb{Z}}$, entonces ξ como elemento de Σ es un punto que sombrea a Ξ. Para este $\delta > 0$, por el Corolario 3.3.14 existe $\rho > 0$ tal que (Σ^ρ, σ) es $[\delta/4, \alpha]$-expansivo.

El sistema dinámico (Σ^ρ, σ) tiene además la propiedad de $\alpha/4 - \delta$ sombreado en el conjunto $\mathcal{S}^\rho = \iota(\Sigma^\rho) = \{\iota(\xi) : \xi \in \Sigma^\rho\}$. En efecto, si $\xi \in \Sigma^\rho$ y $\iota(\xi)$ es una δ-pseudo órbita de σ, como se ha mencionado en el párrafo anterior $\iota(\xi)$ es $\alpha/4$-sombreada por el punto ξ que pertenece a Σ^ρ.

Como (Σ^ρ, σ) es α-semi expansivo, ya que es $[\delta/4, \alpha]$-expansivo y $\delta/4 \leq \alpha/2$, considerando la relación de equivalencia $R = R(d_\Sigma, \alpha)$ en el espacio Σ^ρ (Definición 3.2.4), se tiene que por la Proposición 3.2.9 el homeomorfismo inducido $\sigma_R \colon \Sigma^\rho_R \to \Sigma^\rho_R$ es expansivo, donde $\Sigma^\rho_R = \Sigma^\rho/R$ denota el espacio cociente. Por otro lado, aplicando la Proposición 3.3.4 se obtiene que $(\Sigma^\rho_R, \sigma_R)$ posee la propiedad de sombreado en $\mathcal{S}^\rho_R = q(\mathcal{S}^\rho) = \mu(\Sigma^\rho)$, donde $q \colon \Sigma^\rho \to \Sigma^\rho_R$ denota el mapa canónico, ya que (Σ^ρ, σ) es $[\delta/4, \alpha]$-expansivo y tiene la propiedad de $\alpha/4 - \delta$ sombreado en $\mathcal{S}^\rho$.

Se afirma que $(\Sigma^\rho_R, \sigma_R)$ es una envolvente de sombreado de (X, T) con $\mu \colon X \to \Sigma^\rho_R$ dado por $\mu = q \circ \iota$ como encaje (ver Definición 3.3.12). Ciertamente μ es continua, y $\sigma_R \circ \mu = \mu \circ T$ porque $\sigma \circ \iota = \iota \circ T$ y $\sigma_R \circ q = q \circ \sigma$. Para probar la inyectividad supóngase que $x, y \in X$ y $\mu(x) = \mu(y)$, es decir, $\iota(x) \sim \iota(y)$, donde $\sim$ denota R-equivalencia. Entonces, dado que $\iota(z) = (T^k z)_{k\in\mathbb{Z}}$ si $z \in X$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ se tiene

$$d(T^n x, T^n y) \leq d_\Sigma\big((T^{n+k}x)_{k\in\mathbb{Z}}, (T^{n+k}y)_{k\in\mathbb{Z}}\big) = d_\Sigma\big(\sigma^n\iota(x).\sigma^n\iota(y)\big) \leq \alpha.$$

Por lo tanto $x = y$ pues α es una constante de expansividad para T. Luego μ es inyectiva.

Finalmente, para ver que σ_R tiene la propiedad de sombreado para $\operatorname{Im}\mu$ considérese $\varepsilon > 0$ dado. Como σ_R tiene la propiedad de sombreado en $\mathcal{S}^\rho_R$ existe $\delta' > 0$ tal que toda δ'-pseudo órbita de σ_R perteneciente a $\mathcal{S}^\rho_R$ es ε-sombreable. Por otro lado, como $\mu \colon X \to \operatorname{Im}\mu$ es un homeomorfismo entre espacios compactos, existe $\delta'' > 0$ tal que si $x, y \in X$ y $d_R\big(\mu(x), \mu(y)\big) < \delta''$ entonces $d(x, y) \leq \rho$, donde d_R denota la métrica de Σ^ρ_R. Sea $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$. Entonces, si $\Xi_R = \mu(\xi)$ es una δ-pseudo órbita de puntos de $\operatorname{Im}\mu$, donde $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X^{\mathbb{Z}}$, dado que $\delta \leq \delta''$ se tiene $\xi \in \Sigma^\rho$, y en consecuencia $\Xi_R = \mu(\xi) \in \mu(\Sigma^\rho) = \mathcal{S}^\rho_R$. Luego, como $\delta \leq \delta'$ se deduce que Ξ_R es una δ'-pseudo órbita de σ_R perteneciente a $\mathcal{S}^\rho_R$ y por lo tanto es ε-sombreable. $\square$

Preguntas abiertas del Capítulo 3

A continuación se planea una pregunta que ha surgido en relación a la temática de este capítulo y que no ha podido ser contestada hasta el momento.

Pregunta 3.3.16. En relación a la condición necesaria de la Proposición 3.2.9 para que un sistema dinámico cociente sea expansivo se plantea el siguiente problema en el caso casi expansivo (Definición 3.2.17).

Si $T \colon X \to X$ es un homeomorfismo de un espacio métrico compacto (X, d) y $(R_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de relaciones de equivalencia en X compatibles con T tales que el homeomorfismo inducido por T en X/R_k es expansivo para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\sup\{\operatorname{diam} C : C \in X/R_k\} \to 0$ es entonces T casi expansivo?

La Proposición 3.2.9 proporciona para cada $k \in \mathbb{N}$ una métrica d_k respecto a la cual T es semi expansivo y mediante la cual puede construirse el cociente correspondiente. El problema planteado consiste en encontrar una *misma* métrica coherente con cada uno de los cocientes.

Anexo: Una nota sobre sombreado

En este anexo se presenta una segunda aplicación de la caracterización de la propiedad de expansividad de un homeomorfismo de un espacio compacto en términos de las pseudo órbitas del sistema dada en la Proposición 3.3.13. Esta proposición ha sido utilizada en primer lugar en el Corolario 3.3.14, probando que el homeomorfismo shift actuando en un conjunto adecuado de bi-sucesiones del espacio de fases de un sistema expansivo es semi expansivo. En este caso se empleará la caracterización mencionada para dar una prueba simple de la siguiente condición de sombreado para un homeomorfismo expansivo $T\colon X \to X$ definido en un espacio métrico compacto (X, d).

Proposición 3.3.17. *Si T es expansivo con constante de expansividad $\alpha > 0$ entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1) T tiene la propiedad de sombreado.

2) Existe $\delta > 0$ tal que toda δ-pseudo órbita de un salto es α-sombreable.[6]

El ítem 2) de la proposición anterior es una condición suficiente para la propiedad de sombreado bien conocida en la teoría de los sistemas expansivos. En [8, Theorem 1.2.1] se prueba entre otras cosas que los *difeomorfismos de Anosov* tienen la propiedad de sombreado. En la demostración, en [8, p. 23], los autores solo usan la llamada *propiedad de producto local*: si $d(x, y) < \delta$ entonces[7] $W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \neq \varnothing$ si $\delta > 0$ es elegido suficientemente pequeño para un $\varepsilon > 0$ dado; y las propiedades especiales (hiperbólicas) de la métrica d proveniente de estructura riemanniana de la variedad que soporta el sistema [8, (B), p. 20].

Puede verificarse fácilmente que la primera de estas dos condiciones es equivalente a la propiedad de sombreado para pseudo órbitas de un salto, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda bi–sucesión de la forma

$$\ldots,\ z_{-2} = T^{-2}y,\ z_{-1} = T^{-1}y,\ z_0 = x,\ z_1 = Tx,\ z_2 = T^2x,\ \ldots$$

donde $d(x, y) < \delta$, existe $z \in X$ tal que $d(T^n z, z_n) < \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Por otro lado, en [15, Theorem 5.1] se prueba que todo sistema expansivo en un espacio compacto admite una métrica con propiedades similares a las de la métrica d del caso de difeomorfismos de Anosov. Anteriormente en [33] se construye una tal métrica en el caso en el que el sistema expansivo posee además la propiedad de producto local.[8] Por lo tanto la prueba de la propiedad de sombreado dada en [8] funciona igualmente en el caso más general de los homeomorfismos expansivos, como se afirma en [33, Theorem 2, (4)].

---

[6] Se dice que una pseudo órbita $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ tiene un *salto* en el paso n-ésimo sii $Tx_{n-1} \neq x_n$.

[7] Aquí $W^s_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(T^n x, T^n y) \leq \varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$ y $W^u_\varepsilon(x) = \{y \in X : d(T^{-n} x, T^{-n} y) \leq \varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{N}\}$

[8] En [33] la existencia de estructura de producto local es referida diciendo que se tiene *coordenadas canónicas.*

Demostración de la Proposición 3.3.17. 1) $\Rightarrow$ 2). Trivial.

2) $\Rightarrow$ 1). Por [37, Lemma 8] es suficiente mostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\rho > 0$ tal que toda ρ-pseudo órbita con un número finito de saltos es ε-sombreable. Para ello alcanza solamente con hallar $\rho > 0$ correspondiente a $\varepsilon = \alpha$, ya que por la Proposición 3.3.13 para todo $\varepsilon > 0$ tomando un valor menor de ρ, más precisamente eligiendo $\rho \leq \delta$ donde δ es el dado por la citada proposición, se tiene que α-sombrear una ρ-pseudo órbita es equivalente a ε-sombrearla.

Para hallar un tal ρ considérese primero $\delta > 0$ como en el enunciado, es decir, tal que

$$\textit{toda } \delta\textit{-pseudo órbita de un salto es } \alpha\textit{-sombreable.} \tag{3.10}$$

Por la Proposición 3.3.13 (con $\varepsilon = \alpha/2$) puede elegirse un δ menor para garantizar también que

$$\textit{si una } \delta\textit{-pseudo órbita } \xi \ \alpha\textit{-sombrea una } \delta\textit{-pseudo órbita } \eta \textit{ entonces } \xi \ \alpha/2\textit{-sombrea } \eta. \tag{3.11}$$

Puede además suponerse que $\delta \leq \alpha$. Para este δ puede hallarse $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\textit{si } d(T^n x, T^n y) \leq \alpha \textit{ para todo } |n| \leq N \text{ entonces } d(x,y) < \delta, \tag{3.12}$$

para todo $x, y \in X$, en virtud de la expansividad uniforme. Como T es uniformemente continua existe $\rho > 0$, $\rho \leq \delta$, tal que todo segmento de ρ-pseudo órbita de longitud $2N+1$, sea este $x_0, \ldots, x_{2N+1}$, es δ-sombreado por su primer elemento x_0, es decir,

$$\textit{si } d(Tx_n, x_{n+1}) < \rho,\ 0 \leq n \leq 2N, \textit{ entonces } d(T^n x_0, x_n) < \delta,\ 0 \leq n \leq 2N+1. \tag{3.13}$$

Se probará que este ρ cumple la propiedad deseada por inducción en la cantidad de saltos de las ρ-pseudo órbitas. Por la condición (3.10) si una ρ-pseudo órbita tiene un solo salto entonces es α-sombreable ya que $\rho \leq \delta$. Supóngase ahora que $\xi = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ es una ρ-pseudo órbita con $k \geq 2$ saltos. Puede re indexarse ξ para que el último salto se dé en el paso de x_{2N} a x_{2N+1}, de esta forma $(x_n)_{n>2N}$ es un segmento de una órbita verdadera. Por la condición (3.13) puede reemplazarse $(x_n)_{n=0}^{2N}$ por $(T^n x_0)_{n=0}^{2N}$ en ξ obteniéndose una δ-pseudo órbita[9]

$$\xi' = (x_n)_{n<0} \sqcup (T^n x_0)_{0\leq n\leq 2N} \sqcup (x_n)_{n>2N}$$

que α-sombrea a ξ porque $\delta \leq \alpha$. Obsérvese que por un lado la bi-sucesión dada por

$$\eta = (x_n)_{n<0} \sqcup (T^n x_0)_{n\geq 0}$$

es una ρ-pseudo órbita con menos de k saltos. Luego, por la hipótesis inductiva existe $y \in X$ que α-sombrea η. Por la condición (3.11) de hecho η es $\alpha/2$-sombreada por y. Por otro lado

$$\zeta = (T^n x_0)_{n\leq 2N} \sqcup (x_n)_{n>2N}$$

es una δ-pseudo órbita con un salto, y entonces por la condición (3.10) existe $z \in X$ que

[9] Se denota $(x_n)_{n\in I} \sqcup (x_n)_{n\in J} = (x_n)_{n\in I\cup J}$ si $I, J \subseteq \mathbb{Z}$ son conjuntos disjuntos de índices.

α-sombrea ζ. Nuevamente la condición (3.11) implica que ζ es $\alpha/2$-sombreada por z.

Como el segmento de órbita $(T^n x_0)_{0\leq n\leq 2N}$ está en ambas bi–sucesiones η y ζ se tiene que los segmentos correspondientes de las órbitas de y y z verifican $d(T^n y, T^n z) < \alpha$ si $0 \leq n \leq 2N$. Por lo tanto, de la condición (3.12) se obtiene que $d(T^N y, T^N z) < \delta$. En consecuencia

$$\tau = (T^n y)_{n<N} \sqcup (T^n z)_{n\geq N}$$

es una δ-pseudo órbita con un salto que $\alpha/2$-sombrea a ξ'. Una nueva aplicación de la condición (3.10) da un elemento $w \in X$ que α-sombrea τ. Dado que w α-sombrea τ, τ $\alpha/2$-sombrea ξ' y ξ' α-sombrea ξ, utilizando reiteradas veces la condición (3.11) se concluye que w α-sombrea ξ, como se deseaba. $\square$

Bibliografía

[1] M. Achigar, *A note on Anosov homeomorphisms*, Axioms **8** (2019), no. 2.

[2] M. Achigar, A. Artigue, and I. Monteverde, *Expansive homeomorphisms on non-Hausdorff spaces*, Topol. Appl. (2016), 109–122.

[3] ———, *Observing expansive maps*, J. London Math. Soc. **98** (2018), no. 3, 501–516.

[4] R. L. Adler, A. G. Konheim, and M. H. McAndrew, *Topological entropy*, Trans. Amer. Math. Soc. **114** (1965), no. 2, 309–319.

[5] D. Aeyels, *Generic observability of differentiable systems*, SIAM J. Control Optim. **19** (1981), no. 5, 595-603.

[6] N. Aoki and K. Hiraide, *Topological theory of dynamical systems*, North-Holland, 1994.

[7] A. Arbieto and C. A. Morales, *Topological stability from the Gromov-Hausdorff viewpoint*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **37** (2017), no. 7, 3531–3544.

[8] M. Haim A. Artigue, *Expansivity on commutative rings*, arXiv:1812.06195 [math.AC] (2018).

[9] J.P. Aubin and H. Frankowska, *Set-valued analysis*, Systems & control, Birkhäuser, 1990.

[10] B. F. Bryant, *On expansive homeomorphisms*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1163–1167.

[11] ———, *Expansive self-homeomorphisms of a compact metric space*, Amer. Math. Monthly **69** (1962), 386–391.

[12] M. Cerminara and M. Sambarino, *Stable and unstable sets of C^0 perturbations of expansive homeomorphisms of surfaces*, Nonlinearity **12** (1999), no. 2, 321–332.

[13] E. M. Coven and M. Keane, *Every compact metric space that supports a positively expansive homeomorphism is finite*, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., Dynamics & Stochastics **48** (2006), 304–305.

[14] M. Coornaert, *Topological dimension and dynamical systems*, Springer, 2015.

[15] A. Fathi, *Expansiveness, hyperbolicity and Hausdorff dimension*, Commun. Math. Phys. **126** (1989), 249–262.

[16] D. Fried, *Finitely presented dynamical systems*, Ergod. Th. Dynam. Sys. **7** (1987), 489–507.

[17] Y. Gutman, *Takens' embedding theorem with a continuous observable*, Ergodic Theory, Advances in Dynamical Systems (2016), 77–107.

[18] ———, *Mean dimension and Jaworski-type theorems*, Proc. London Math. Soc. **111** (2015), no. 4, 831-850.

[19] D. Harris, *Extension closed and cluster closed subspaces*, Canad. J. Math. **24** (1972), 1132–1136.

[20] ———, *Compact spaces and products of finite spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **35** (1972), 275–280.

[21] ———, *Universal compact T_1 spaces*, Topol. Appl. **3** (1973), 291–318.

[22] K. Hiraide, *Positively expansive maps and growth of fundamental groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), no. 3, 934–941.

[23] W. Hurewicz and H. Wallman, *Dimension theory*, Princeton Univ. Press, 1948.

[24] H. Kato, *Continuum-wise expansive homeomorphisms*, Can. J. Math. **45** (1993), no. 3, 576–598.

[25] J.L. Kelley, *General topology*, D. Van Nostrand Co., 1955.

[26] H.B. Keynes and J.B. Robertson, *Generators for topological entropy and expansiveness*, Math. systems theory **3** (1969), 51–59.

[27] J. Lewowicz, *Persistence in expansive systems*, Ergod. Th. & Dynam. Sys **3** (1983), no. 4, 567–578.

[28] R. Mañé, *Expansive homeomorphisms and topological dimension*, Trans. Amer. Math. Soc. **252** (1979), 313–319.

[29] Jr. S.B. Nadler, *Continuum theory: an introduction*, Chapman and Hall/CRC Pure &— Applied Mathematics, Taylor & Francis, 1992.

[30] J. Nagata, *Modern dimension theory*, North Holland, 1965.

[31] M. Nerurkar, *Observability and topological dynamics*, J. Dynam. Differential Equations **3** (1991), 273–287.

[32] L. Noakes, *The Takens embedding theorem*, Int. J. Bifurcat. Chaos **1** (1991), no. 4, 867-872.

[33] W.L. Reddy, *Expansive canonical coordinates are hyperbolic*, Topol.Appl. **15** (1983), no. 2, 205 - 210.

[34] D. Richeson and J. Wiseman, *Positively expansive homeomorphisms of compact spaces*, Int. J. Math. Math. Sci. **2004** (2004), no. 54, 2907–2910.

[35] M. Sears, *Expansive self-homeomorphisms of the Cantor set*, Math. Systems Theory **6** (1972), 129–132.

[36] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*, Lecture notes in mathematics, vol. 898, Springer Berlin Heidelberg, 1981.

[37] P. Walters, *On the pseudo orbit tracing property and its relationship to stability*, The Structure of Attractors in Dynamical Systems, Lecture Notes in Math. **668** (1978), 231–244.

[38] W. R. Utz, *Unstable homeomorphisms*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), no. 6, 769–774.

PROGRAMA DE DESARROLLO DE LAS CIENCIAS BASICAS
Ministerio de Educación y Cultura - Universidad de la República

PEDECIBA

Área Matemática

EXAMEN DE TESIS DE DOCTORADO EN MATEMÁTICA

Defensa de Tesis
"Dinámica Topológica Expansiva: Algunos aportes"

presentada por el Mag. Mauricio Achigar
orientada por el Dr. Alfonso Artigue y el Dr. José Vieitez

Salto, 29 de julio 2019

Esta tesis trata sobre diversas generalizaciones del concepto de expansividad en espacios topológicos, el problema de observabilidad de mapas y por último sobre extensiones de sistemas expansivos con sombreado. Los resultados presentados son un aporte original y relevante a la teoría de sistemas dinámicos. Se destaca además la introducción de nuevos conceptos e incluye métodos y demostraciones novedosos. El tesista demuestra un fluido manejo de la literatura sobre la temática. La aproximación desarrollada a los diferentes problemas permite potenciales aplicaciones a otras áreas vinculadas. Tanto la redacción del manuscrito como la presentación oral fueron excelentes. Finalmente, el tesista ha respondido con soltura todas las preguntas del tribunal demostrando un conocimiento cabal del área.

Por lo anteriormente expuesto este tribunal califica la defensa de tesis como:
APROBADO CON MENCIÓN.

Dr. Fernando Abadie

Dr. Alexander Arbierto

Dr. Alfonso Artigue

Dr. Alvaro Rovella

Dr. Martín Sambarino

Iguá 4225 esq. Mataojo, Montevideo 11400, URUGUAY
Teléfonos: (+598) 2525 25 22 Fax: (+598) 2522 06 53
Página web: www.pedeciba.edu.uy/matematica - Correo electrónico: lydia@cmat.edu.uy