



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA

Gestión de inventario de artículos perecederos

Informe de Proyecto de Grado presentado al Tribunal Evaluador como
requisito de graduación de la carrera Ingeniería en Computación

Ismael Padilla
Director de Tesis: Pedro Piñeyro

Montevideo, Uruguay
2019

Resumen

El presente trabajo consta del estudio de métodos de gestión de inventario de artículos perecederos. En general, este problema consiste en planificar cómo satisfacer cierta demanda de uno o varios productos durante cierto período de tiempo según algún criterio (por ejemplo, minimizar los costos).

Este problema es de interés, no solo desde un punto de vista matemático, sino que también hay un interés real en reducir el desperdicio de productos. Se estima que en Uruguay se desperdicia un 10 % de los alimentos producidos, mientras que a nivel mundial la cifra asciende a 30 %.

Este trabajo consta de dos etapas: el estudio del estado del arte para los casos donde la demanda es determinista, y el estudio de un problema concreto. El estudio del estado del arte produce como resultado un documento que contiene una revisión de la literatura.

El problema concreto con el que se trabaja es el de gestión de inventario de artículos perecederos con demanda determinista dinámica, capacidad de inventario limitada y costos lineales con costos fijos de producción. El tiempo de vida de los artículos y los costos de almacenamiento dependen de la antigüedad de cada producto. Que la demanda sea determinista dinámica significa que se sabe cuánto será la demanda en cada período, y que la demanda de cada período puede ser distinta. El hecho de que los artículos sean perecederos implican que los mismos no pueden ser retenidos en inventario indefinidamente. La existencia de costos fijos de producción implica que si se decide producir artículos en un período, se tiene que pagar un costo fijo independientemente de la cantidad de artículos que se produzcan.

Como parte del estudio de este problema, se estudian las redes de flujo, herramienta muy utilizada para modelar problemas de gestión de inventario. Se concluye luego que este problema en particular no puede ser modelado mediante una red de este tipo. Después se estudia brevemente la complejidad del problema, y se demuestra empíricamente que para instancias grandes, no es práctico encontrar una solución exacta.

Motivado por esto, se presentan métodos para hallar soluciones aproximadas. Para esto se propone una heurística que permite encontrar soluciones factibles, y tres heurísticas de mejora que dada una solución factible, buscan encontrar una solución de menor costo.

Estas heurísticas se implementan en *Python*, utilizando la librería de cálculo científico *NumPy*. Luego se comparan y contrastan las soluciones obtenidas por estas heurísticas con las soluciones exactas obtenidas por GLPK (GNU Linear Programming Kit). Se obtienen resultados alentadores, con las heurísticas encontrando soluciones en promedio muy cercanas a las óptimas.

Además, para versiones grandes del problema, se compara la mejor solución que GLPK puede hallar en un 30 minutos, con la solución obtenida por las heurísticas. Los resultados obtenidos en este caso son muy buenos, donde las soluciones encontradas por las heurísticas son casi tan buenas o incluso mejores que las encontradas por GLPK.

Las principales contribuciones de esta etapa son las ideas que se utilizan en la heurística que permite hallar una solución factible inicial. También consideramos de mucho interés las heurísticas de mejora presentadas, que están basadas en la idea de desplazar cierta parte de la producción de un período a otro. De acuerdo a nuestro conocimiento, estas ideas no han sido aplicadas aún en problemas con artículos perecederos.

Palabras clave: gestión de inventario, artículos perecederos, lot sizing, ELSP.

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Alcance y objetivos	6
1.2. Resultados obtenidos	7
1.3. Estructura de este informe	7
2. Preliminares	8
2.1. Redes de flujo	8
2.2. Características de problemas de gestión de inventario	9
2.3. Estado del arte	11
2.3.1. Cantidad Económica de Pedido (EOQ) y Producción (EPQ)	11
2.3.2. Problema de Dimensionamiento del Lote Económico (ELS)	13
3. Descripción y formulación del problema	21
3.1. Descripción del problema	21
3.2. Formulación matemática	22
4. Análisis del modelo	24
4.1. Algunos ejemplos	24
4.2. Un enfoque de redes de flujo	25
4.3. Complejidad del problema	26
5. Propuesta de solución	28
5.1. Algoritmo de Hsu modificado	28
5.2. Heurísticas de mejora	29
5.2.1. Shift de Producción (S-Prod)	31
5.2.2. Shift Parcial (S-Parcial)	32
5.2.3. Shift de Saturación (S-Sat)	34
6. Detalles de implementación	36
6.1. Lenguaje y librerías utilizadas	36
6.2. Generación de casos de prueba	37
6.3. Implementación de la solución	37
6.4. Uso de GLPK	38
7. Pruebas realizadas	40
7.1. Objetivo de las pruebas	40
7.2. Clases de problemas	40
7.3. Definición formal de clases de problemas	41
7.4. Plan de pruebas	42
7.4.1. Problemas chicos (10 y 20 períodos)	42
7.4.2. Problemas grandes (50 períodos)	43
7.5. Hardware utilizado	43

8. Resultados obtenidos	44
8.1. Resultados para 10 y 20 periodos	44
8.2. Resultados para 50 periodos	47
8.3. Análisis de los resultados	47
9. Conclusiones y trabajos futuros	51
9.1. Conclusiones	51
9.2. Trabajos futuros	52
Bibliografía	55
Anexos	56
Apéndice A. Resultados	57
A.1. Problemas chicos (10 y 20 períodos)	57
A.2. Problemas grandes (50 períodos)	68
Apéndice B. Gestión de Inventario de Artículos Perecederos: Estado del Arte	70

Índice de figuras

2.1. Inventario en modelo <i>EOQ</i>	12
2.2. Inventario en modelo <i>EPQ</i>	13
2.3. Red de flujo para el problema ELS con 4 períodos	15
2.4. Red de flujo para ELSP-P con 4 períodos	17
2.5. Red de flujo para ELSP-P con <i>backlogging</i> y capacidad de producción limitada, para 4 períodos	19
4.1. Tiempo que se tarda en hallar la solución óptima en función al tamaño del problema.	27
8.1. Diferencia entre la solución hallada por GLPK y la solución hallada por cada heurística (10 períodos).	45
8.2. Diferencia entre la solución hallada por GLPK y la solución hallada por cada heurística (20 períodos).	46
8.3. Diferencia entre la solución hallada por GLPK y la solución hallada por cada heurística (50 períodos).	48

Índice de tablas

8.1. Resultados al aplicar cada heurística por separado (10 y 20 períodos)	44
8.2. Resultados de aplicar las 3 heurísticas en conjunto (10 y 20 períodos)	45
8.3. Resultados al ejecutar GLPK por 30 minutos	47
8.4. Resultados al aplicar cada heurística por separado (50 períodos)	47
8.5. Resultados de aplicar las 3 heurísticas en conjunto (50 períodos)	48
A.1. Resultados para casos c-Hsu (10 períodos)	58
A.2. Resultados para casos c-Hsu (20 períodos)	59
A.3. Resultados para casos c-Div (10 períodos)	60
A.4. Resultados para casos c-Div (20 períodos)	61
A.5. Resultados para casos c-Falto (10 períodos)	62
A.6. Resultados para casos c-Falto (20 períodos)	63
A.7. Resultados para casos c-Halto (10 períodos)	64
A.8. Resultados para casos c-Halto (20 períodos)	65
A.9. Resultados para casos c-Crec (10 períodos)	66
A.10. Resultados para casos c-Crec (210 períodos)	67
A.11. Resultados para casos c-Hsu (50 períodos)	68
A.12. Resultados para casos c-Div (50 períodos)	68
A.13. Resultados para casos c-Falto (50 períodos)	68
A.14. Resultados para casos c-Halto (50 períodos)	69
A.15. Resultados para casos c-Crec (50 períodos)	69

Capítulo 1

Introducción

El problema de gestión de inventario consiste en planificar cómo satisfacer cierta demanda de uno o varios productos durante cierto período de tiempo según algún criterio (por ejemplo, minimizar los costos). Para esto se deben tomar decisiones tales como cuántos productos fabricar o adquirir en qué momento, y qué cantidad de productos retener en inventario.

En este contexto, la mayoría de los modelos suponen que los artículos tienen un tiempo de vida ilimitado (Khanlarzade et al., 2014 [16]). Sin embargo, es claro que en la realidad, hay muchos tipos de artículos que no pueden ser almacenados indefinidamente. El principal ejemplo son la mayoría de artículos comestibles, en especial productos frescos como carne y vegetales, los cuales pasada cierta fecha no son seguros para el consumo. Tener en cuenta estas condiciones acerca del tiempo de vida de los productos es importante ya sea que uno quiera reducir los costos, o reducir la cantidad de productos desperdiciados.

El estudio de este tipo de problemas no solo es de interés desde un punto de vista matemático, sino que también hay un interés real en reducir el desperdicio de productos. En un estudio gestionado por la Fundación Ricaldoni, realizado por investigadores de la Universidad de la República y la empresa Equipos Consultores, se estima que en Uruguay se desperdicia un 10 % de los alimentos producidos por año (Lema et al., 2017 [17]). Esto representa alrededor de 1 millón de toneladas al año, con un valor estimado de 600 millones de dólares, en base a materia prima. A nivel mundial, se estima que la pérdida de alimentos asciende al 30 % de la producción (Gustavsson et al., 2011 [10]).

El estudio de artículos que se deterioran se ve también justificado por la gran variedad de contextos en los que es aplicable, incluyendo artículos que inicialmente no parecerían ser perecederos. Ciertos productos perecederos, tales como es el caso de los comestibles mencionados anteriormente, tienen un tiempo de vida luego del cual deben ser desechados. Otros ejemplos similares son artículos como *film* fotográfico, o sangre almacenada en bancos de sangre. Otros productos como alcohol, gasolina, y sustancias radiactivas, decaen con el correr del tiempo. Otros artículos se vuelven obsoletos con el tiempo, por ejemplo artículos tecnológicos como celulares, y artículos de corto ciclo de vida como periódicos. Este es también el caso de la industria de la moda, donde la vestimenta de temporadas anteriores se vende a precios reducidos. Es interesante notar que en este último caso, los artículos no son perecederos porque sufren algún tipo de transformación mientras son almacenados, sino que es la pérdida de valor percibido por parte de los clientes lo que hace que sea poco conveniente tener un excedente de estos tipos de productos en inventario.

Los diferentes tipos de decaimiento es un criterio utilizado por algunos autores para clasificar los artículos, diferenciando entre artículos perecederos, artículos con deterioro, y artículos sujetos a obsolescencia (Goyal & Giri, 2001 [9]; Rifaat, 1991 [24]). Sin embargo la mayoría de los autores utilizan estas expresiones indistintamente (Pahl & Voß, 2014 [23]).

Modelos dinámicos de Dimensionamiento del Lote Económico (*ELS* por su nombre en inglés, *Economic Lot Sizing*), consideran demanda variable en el tiempo, con un horizonte de planificación finito. El problema bajo estas características fue resuelto eficientemente por

primera vez por Wagner & Whitin (1958) [31].

En uno de los artículos más importantes en el área, Hsu (2000) [12] extiende el modelo de Wagner & Whitin para el caso con deterioro. Al final de cada período, una fracción de los artículos que están en inventario se pierde. La fracción de los artículos que se pierden depende tanto del período actual como del período en el que se produjeron. Hsu asume que en un período dado, los artículos más antiguos se deterioran más rápido y son más costosos de mantener en el inventario con respecto a los artículos más recientes.

Existen numerosas extensiones de Hsu (2000) [12]. Hsu (2003) [13] estudia el caso en el que hay *backlogging*, es decir, cuando la parte de la demanda de un período puede quedar pendiente y ser satisfecha en algún período posterior. Chu et al. (2005) [5] plantean un modelo similar al de Hsu (2000) [12] para funciones de costos más generales llamadas *funciones de economía de escala*. Bai et al. (2010) [3] extienden este último resultado para el caso con *backlogging*. Sargut & Işık (2017) [26] consideran un caso con *backlogging* y capacidad de producción limitada, es decir, donde la cantidad de artículos que se puede producir en un período está acotada.

Si bien el problema con capacidad de inventario limitada ha sido estudiado para el caso sin deterioro, aún no parece haber recibido atención en el contexto de artículos perecederos. En general, el caso con capacidad de producción limitada ha sido mucho más estudiado que el caso con inventario acotado. Sin embargo, en muchos contextos, la capacidad del inventario podría ser un factor limitante (Liu & Tu, 2008 [18]). El problema de gestión de inventario de artículos no perecederos con capacidad de inventario limitada fue estudiado por primera vez por Florian & Klein (1971) [6]. Recientemente se ha estudiado este problema añadiendo características como *backlogging* (Hwang & van den Heuvel, 2012 [14]), ventas perdidas (Hwang et al., 2013 [15]), capacidad de producción (Akbalik et al., 2015 [2]), entre otras.

1.1. Alcance y objetivos

El trabajo a realizar consta de dos etapas. en primer lugar, estudiar el estado del arte de gestión de artículos perecederos, con énfasis en problemas con demanda determinista. En segundo lugar, se busca estudiar un problema concreto. Específicamente, se elige el problema de gestión de inventario de artículos perecederos con demanda determinista dinámica, costos lineales y capacidad de inventario limitada.

Como se mencionó en la previamente, en el caso no perecedero, el problema con capacidad acotada ha ganado interés en los últimos años. El problema para el caso no perecedero es fácilmente resoluble en tiempo polinomial (Love, 1973 [19]). Sin embargo, cuando los artículos son perecederos, creemos que el problema es considerablemente más difícil.

Entonces, la primera etapa del estudio de este problema consiste en analizar el mismo. Se investigarán las redes de flujo, herramienta muy utilizada para representar problemas de gestión de inventario (ver, por ejemplo, Hsu, 2000 [12]; Zangwill, 1968 [32]). Luego se realizará un estudio de la complejidad del problema, con el objetivo de saber si es posible resolver instancias grandes del mismo de manera eficiente.

El principal objetivo de este trabajo es formular propuestas de solución aproximadas al problema que se está estudiando. Se busca tener métodos que, si bien no hallen soluciones óptimas, puedan encontrar soluciones buenas en algún sentido. Idealmente, para instancias grandes del problema, se desearía tener un método que halle soluciones que sean iguales o mejores a las que sea factible encontrar en un tiempo razonable por un método exacto.

Con este fin se propondrán distintas heurísticas que hallen y mejoren soluciones factibles. Se pretende implementar estas heurísticas, y finalmente comparar y contrastar las distintas soluciones propuestas, con las soluciones halladas por GLPK.

1.2. Resultados obtenidos

Se trabaja acorde al alcance y objetivos mencionados. En la primera etapa de trabajo, el principal resultado obtenido es un documento conteniendo una revisión de la literatura y del estado del arte.

En la segunda etapa, las principales contribuciones son las siguientes. Primero se define un método para hallar soluciones factibles iniciales a nuestro problema, basado en el trabajo hecho por Hsu (2000) [12] en el caso sin capacidad de inventario. Luego se proponen tres distintas heurísticas que, dada una solución factible, hallan una solución de menor costo. Las heurísticas propuestas están basadas en realizar *shifts* o desplazamientos de producción. Se busca así sustituir parcial o totalmente la producción en un período dado, por producción en un período distinto.

Consideramos que algunas de las ideas aquí presentes son innovadoras. En particular consideramos de mucho interés las heurísticas de mejora propuestas. De acuerdo a nuestro conocimiento, las ideas utilizadas en estos *shifts* de producción aún no han sido aplicadas en problemas con artículos perecederos.

1.3. Estructura de este informe

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se introducen conceptos, definiciones y formulaciones matemáticas básicas que serán útiles para entender el resto del trabajo, incluyendo un breve estudio del estado del arte en la Sección 2.3. En la Sección 3 se describe el problema y se presenta el modelo matemático, seguido de un análisis del mismo en la Sección 4. En la Sección 5 se presenta la solución propuesta. En la Sección 6 se habla de la implementación de la solución. En las Secciones 7 y 8 se describen las pruebas realizadas y los resultados obtenidos, respectivamente. Finalmente, las conclusiones y reflexiones finales, junto con ideas de trabajos futuros son presentadas en la Sección 9.

Capítulo 2

Preliminares

En esta Sección se introducen varios conceptos e ideas que son importantes para entender el resto de este trabajo.

Primero, en la Sección 2.1, se estudian las redes de flujo. En la Sección 2.2 se describen las principales características de los problemas de gestión de inventario. Finalmente se presenta una breve revisión del estado del arte en la Sección 2.3, haciendo hincapié en los trabajos que son de mayor relevancia al problema que se está estudiando.

2.1. Redes de flujo

Como se verá más adelante en la Sección 2.3.2, las redes de flujo son una herramienta de utilidad a la hora de trabajar con problemas de gestión de inventario. Con el fin de entender mejor este tipo de modelos, aquí se presentan algunas definiciones de importancia.

Definición 1. Una red (N, A) consiste de un conjunto finito N de nodos o vértices e, f, g, \dots y un subconjunto de arcos o aristas A que son pares ordenados (e, f) de N . Puede interpretarse que un arco transporta alguna carga o material de un nodo a otro.

Normalmente se se asume que no hay arco (e, e) de un nodo a sí mismo. Por conveniencia, también se asume que entre dos pares de nodos e, j existe a lo sumo un único arco (e, j) .

Se define x_{ej} , la cantidad de material que es transportada en el arco (e, j) , también llamada flujo del arco (e, j) .

En cada nodo, se considera que el flujo de material se conserva en el siguiente sentido. La cantidad de material entrante a un nodo más la cantidad de material que se origina en el nodo es igual a la cantidad de material entrante al nodo.

Sea r_e el material originado en el nodo e . Si $r_e > 0$, el nodo es una fuente, y la carga de ese nodo está disponible para ser transportada a otros nodos. Un nodo destino tiene $r_e < 0$, y se entiende que en dicho nodo se requiere material. Se dice que un nodo es de transbordo si $r_e = 0$. En un caso general donde el flujo se conserva, se cumple que $\sum_{e \in N} r_e = 0$. Es decir, la cantidad de material producido en los distintos nodos fuente es igual a la cantidad de material recibido en los nodos destino.

Se define $A(e)$, los nodos adyacentes ‘salientes’ desde e (en el sentido de que son alcanzables con algún arco saliente de e), como $A(e) = \{f \mid (e, f) \in A\}$. Asimismo se define $B(e)$, los nodos para los cuales e es adyacente (en el sentido de que e es alcanzable con algún arco saliente de estos nodos), como $B(e) = \{f \mid (f, e) \in A\}$. Entonces, el flujo de una red puede describirse como:

$$\sum_{f \in A(e)} x_{ef} - \sum_{f \in B(e)} x_{fe} = r_e, \quad e \in N \quad (2.1.1)$$

$$0 \leq x_{ef} \quad (e, f) \in A \quad (2.1.2)$$

Se denota al costo de transportar x_{ef} unidades de material por el arco (e, f) como $c_{ef}(x_{ef})$. Por conveniencia se asume, sin pérdida de generalidad, que:

$$c_{ef}(0) = 0 \quad (2.1.3)$$

Observar que si no se tomara esta suposición, siempre es posible obtener una nueva función de costos que sí la cumpla. Si se tuviera $c_{ef}(0) > 0$, simplemente se define $c_{ef}^1(x_{ef}) = c_{ef}(x_{ef}) - c_{ef}(0)$.

Finalmente se define $u_{ef} \geq 0$, la capacidad de un arco (e, f) , de manera que se tiene que cumplir que:

$$x_{ef} \leq u_{ef} \quad (e, f) \in A \quad (2.1.4)$$

Finalmente estamos en condiciones de definir una red de flujo:

Definición 2 (Red de flujo). Se define como Red de flujo a la terna (N, A, c, u, s, t) . N, A, c, u son el conjunto de nodos, el conjunto de arcos, las funciones de costos y la capacidad de cada nodo respectivamente, acorde a las definiciones anteriores. $s \in N$ es el conjunto de nodos fuente, es decir, $s = \{e | r_e > 0\}$. $t \in N$ es el conjunto de nodos destino, es decir, $t = \{e | r_e < 0\}$.

Un flujo sobre una red es simplemente una función $f : A \rightarrow R$, es decir una asignación de flujo para cada arco $(e, j) \in A$ que cumpla con las restricciones 2.1.1 y 2.1.4. Se dice que el flujo es óptimo si cumple que minimiza los costos, es decir si minimiza $\sum_{(e,f) \in A} c_{ef}(x_{ef})$.

En la Sección 2.3.2 se verá cómo puede utilizarse una red de flujo para modelar un problema de gestión inventario con artículos no perecederos. Las siguientes definiciones serán de utilidad para modelar problemas con artículos perecederos.

Definición 3 (Red con ganancia). Una red con ganancia es aquella para la cual existe un valor $\alpha_{ef} \in (0, \infty)$ para cada arco $(e, f) \in A$, llamado la ganancia del arco (e, f) . x_{ef} denota la cantidad de flujo saliente del nodo e hacia el arco f .

En este tipo de redes, el flujo ya no se conserva de la manera dada por la propiedad 2.1.1. En su lugar, se cumple la siguiente propiedad de conservación de flujo:

$$\sum_{f \in A(e)} \alpha_{ef} x_{ef} - \sum_{f \in B(e)} x_{fe} = r_e, \quad e \in N \quad (2.1.5)$$

En este trabajo, son de especial interés las redes para las cuales el flujo se pierde.

Definición 4 (Red con pérdida). Una red de flujo con pérdida es el caso particular de una red que cumple con la definición 3, y donde además se cumple que $\alpha_{ej} \leq 1, \forall (e, j) \in A$.

2.2. Características de problemas de gestión de inventario

En los problemas de gestión de inventario, se considera como *horizonte de planificación* al plazo de tiempo tenido en cuenta en el problema. En general se piensa en un horizonte finito y discreto, compuesto por T períodos: $1, 2, 3, \dots, T$. Existen también modelos que consideran el tiempo como una variable continua t , con $t = [0, T]$ en caso de considerar un horizonte finito, o $t = [0, \infty)$ en caso de considerar un horizonte infinito.

Una de las características principales por la que se pueden clasificar modelos de gestión de inventario es la *demanda*, la cual puede ser determinista (conocida) o estocástica (incierto). En modelos con demanda determinista, se considera una función $D(t)$ que representa la

demanda dada en el tiempo t , que en el caso general es una función cualquiera. Para el caso en que la demanda es una constante conocida ($D(t) = d_t$), puede escribirse simplemente como d_t . En los casos de demanda estocástica, esta suele estar dada por alguna distribución de probabilidad conocida.

Se considera como $I(t)$ al nivel de inventario en el tiempo t . Además de verse afectado por la demanda, el inventario también disminuye de acuerdo al deterioro de los artículos almacenados. La mayoría de los modelos asumen que existe una función $\theta(t)$ que describe una fracción de inventario que se pierde en cada momento. En caso de que $\theta(t)$ es constante, en cada período se pierde la misma proporción de inventario, la cual suele escribirse simplemente como θ , y se dice que se cuenta con un *deterioro exponencial*. En algunos casos el deterioro está basado en alguna distribución de probabilidad, tal como la distribución exponencial o la distribución de Weibull.

En cada momento t , se puede decidir adquirir x_t productos (variable de decisión). Esto en general implica un costo $C(x_t)$ dependiente de la cantidad de unidades que se adquieran. $C(x_t)$ puede ser una función cualquiera, aunque en algunos modelos se hacen suposiciones acerca de la forma de dicha función. Por ejemplo, en algunos casos donde los costos marginales disminuyen al aumentar la cantidad de productos adquiridos, se puede asumir que $C(x_t)$ es una función cóncava.

A veces se considera también un costo fijo que es independiente de la cantidad de artículos adquiridos, correspondiente con el costo de realizar un pedido a un proveedor externo o de poner en marcha una línea de producción.

En algunos problemas existen restricciones de capacidad de producción o de inventario. La capacidad de producción limita la cantidad de artículos que pueden ser producidos en un momento dado, y la capacidad de inventario restringe la cantidad de artículos que pueden estar almacenados en un momento cualquiera.

Si bien en la mayoría de los casos se considera solo un tipo de artículo, en algunos problemas se consideran varios tipos de productos. En estos casos, los distintos tipos de productos pueden tener distintas características, es decir, diferentes costos asociados, tasas de deterioro, entre otros. En estos casos existe en general alguna restricción que vincula a los diferentes tipos de productos, como por ejemplo, la capacidad del inventario.

Se considera como *tasa de reposición* a la velocidad con la que crece el inventario. Cuando la cantidad de x_t se obtiene inmediatamente, se dice que la tasa de reposición es infinita, y que el modelo es de *reposición de artículos*. Este tipo de modelos son los que mejor representan el caso en el que los artículos son adquiridos de un proveedor externo. Si los productos se adquieren paulatinamente, se dice que la tasa de reposición es finita, y que el modelo es de *producción de artículos*. El concepto de tasa de reposición no debe ser confundido con el de *tiempo de entrega*, que es el tiempo transcurrido entre que se toma la decisión de adquirir productos, y los productos finalmente se obtienen (en general, se asume que este tiempo es nulo, pero modelos con demanda estocástica a veces consideran un tiempo de entrega variable).

Los problemas de *revisión continua* son aquellos en los que el estado del sistema de inventario es conocido en todo momento. En los problemas de *revisión periódica*, el estado es conocido en momentos discretos del tiempo.

Otra característica de los modelos de gestión de inventario es la manera en la que consideran la escasez de productos, lo cual ocurre cuando no se tienen artículos suficientes para satisfacer la demanda. En algunos casos se asume que esto implica que cierta parte de la demanda corresponde a ventas perdidas, mientras que otros se asume que los clientes pueden esperar a adquirir el producto más tarde. En el segundo caso se habla de modelos con *demanda pendiente* o *backlogging*. Se dice que hay *backlogging completo* cuando toda la demanda pendiente es satisfecha en algún período posterior. Se dice que hay *backlogging parcial* cuando parte de la demanda es posteriormente satisfecha, y parte de la demanda es perdida (por ejemplo, porque algunos clientes son impacientes y no están dispuestos a esperar). El *backlogging parcial* puede modelarse como una fracción fija de la demanda no

satisfecha que es perdida, o como una función dependiente de alguna variable, $\beta(x)$.

Un caso particular de *backlogging* parcial muy usado en la práctica es el *backlogging parcial dependiente del tiempo de espera* propuesto por Abad (1996) [1]. Si en un instante t , hay una cantidad d de demanda que no puede ser satisfecha, entonces $d\beta(x)$ es la demanda que queda pendiente, donde x es el tiempo de espera hasta el momento en que se adquieran productos para satisfacer dicha demanda. $\beta(t)$ suele considerarse como una función no creciente, representando el hecho de que los clientes son impacientes, y cuanto mayor sea el tiempo hasta que exista inventario disponible, menos clientes estarán dispuestos a esperar.

Finalmente, son importantes las definiciones de *política de consumición* y *política de pedido*. La política de consumición determina la manera en que se usa el inventario para satisfacer la demanda. En general, se asume que los primeros productos en ser adquiridos son los primeros en ser consumidos (política denominada *FIFO* por su nombre en inglés, *First In-First Out*). La política opuesta, en la que se consumen primero los productos adquiridos más recientemente, es denominada *LIFO*, *Last In-First Out*.

Si el cliente tiene la opción de elegir entre diferentes versiones del mismo artículo, es razonable asumir que va a elegir la que tenga mayor tiempo de vida restante, es decir, la última en expirar (política denominada *LEFO*, *Last Expiration-First Out*). La opuesta a esta es llamada *FEFO*, *First Expiration-First out*.

En general, es normal asumir que si un producto fue adquirido en un período i , y otro producto es adquirido en un período j , con $i < j$, entonces el producto adquirido en el período i es el que expira antes. En este caso se dice que los *tiempos de vida no se superponen*, la política *FIFO* es igual a la *LEFO*, y la *LIFO* es igual a la *FEFO*.

Las políticas de pedidos dictan la manera en que se repone el inventario, y aparecen casi exclusivamente cuando se trabaja con demanda estocástica.

2.3. Estado del arte

Finalmente terminamos esta Sección con una breve revisión de los trabajos en el área que son de mayor interés en este contexto. Una revisión del estado del arte más extensa puede encontrarse en el Anexo B. Otras de las revisiones literarias existentes más extensivas son (Nahmias, 1982 [21]) quien considera referencias previas a 1980, (Rafaat, 1991 [24]) considera referencias en los 80, (Goyal & Giri, 2001 [9]) en los 90, y (Pahl & Voß, 2014 [23]) del 2000 en adelante.

A grandes rasgos, el problema de gestión de inventario de artículos consiste en planificar la obtención y almacenamiento de artículos durante determinado tiempo a modo de satisfacer cierta demanda de uno o varios productos durante cierto período de tiempo según algún criterio (por ejemplo, minimizar los costos).

2.3.1. Cantidad Económica de Pedido (EOQ) y Producción (EPQ)

El estudio de ese tipo de problemas comenzó con Harris (1913) [11]. El modelo planteado en dicho trabajo es de los que se conoce como Cantidad Económica de Pedido (*EOQ* por su nombre en inglés, *Economic Order Quantity*). Es un modelo de reposición con demanda constante y tiempo continuo, en el cual una vez agotado el inventario, se realiza una reposición de una cantidad de artículos determinada.

Se asume que en cada pedido existe un costo unitario c_u y un costo fijo c_f , la tasa de demanda es d , y el costo unitario de almacenar un artículo en inventario es h . La variable a determinar es Q , la cantidad artículos que se obtienen en cada pedido, de manera de determinar los costos. Se le llama T a la cantidad de tiempo entre pedidos.

Entonces, existen ciclos de largo T , que comienzan con una reposición de Q unidades, donde el inventario decrece a una tasa constante de valor d hasta agotarse. Esto está ilustrado en la Figura 2.1. El nivel de inventario en función del tiempo, $I(t)$, es:

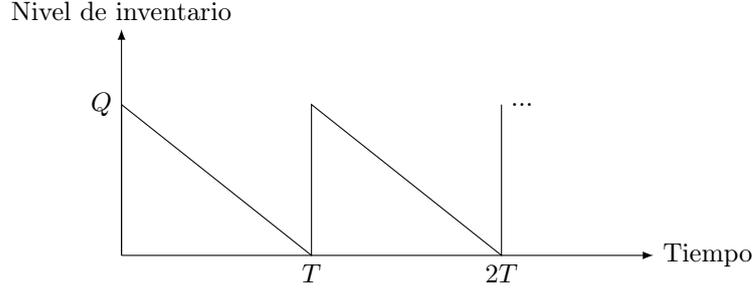


Figura 2.1: Inventario en modelo EOQ

$$I(t) = Q - dt, \quad 0 \leq t \leq T$$

El costo asociado a la adquisición de productos es entonces $c_f + Qc_u$, y el costo asociado al almacenamiento de productos es $h\frac{Q}{2}$. A partir de esto, se obtiene una expresión del costo total por unidad de tiempo en función de Q :

$$C(Q) = dc_u + \frac{dc_f}{Q} + \frac{hQ}{2}$$

Esta función es convexa, entonces finalmente, el valor óptimo para Q , Q^* , puede hallarse resolviendo $\frac{dC}{dQ} = 0$, obteniéndose:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_f d}{h}}$$

Existen diversas extensiones del modelo EOQ , considerando distintas formas de demanda, cantidad de pedido variable, *backlogging*, entre otros (Choi, 2014 [4]). En el estudio con artículos perecederos, Teng & Yang (2004) [30] consideran el caso general en el que la demanda es una función variable en el tiempo, deterioro exponencial y *backlogging* parcial dependiente del tiempo de espera, el horizonte es finito y el tiempo es continuo. Zhang & Wang (2011) [33] y Ghosh et al. (2015) [8] consideran el problema de varios productos con capacidad limitada.

El modelo de Harris (1913) [11] también ha sido extendido para el caso en el que existe una tasa de producción finita. Este modelo de Cantidad Económica de Producción (EPQ por su nombre en inglés, *Economic Production Quantity*) es un modelo de producción propuesto por Taft (1918) [29]. Se toman las mismas suposiciones que en el modelo EOQ , con la suposición adicional de que los artículos se producen a una tasa fija p , con $p > d$.

El modelo se resuelve mediante un análisis similar a EOQ , esta vez se consideran ciclos de largo T compuestos por una etapa de producción en la cual se fabrican Q artículos, donde el inventario crece hasta tener un cierto tamaño H , seguida de una etapa en la que el inventario es agotado debido a la demanda (ver Figura 2.2). El inventario en función del tiempo se puede expresar como:

$$\begin{aligned} I(t) &= (p - d)t, & 0 \leq t \leq t_1 \\ I(t) &= H - dt, & t_1 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Este problema se resuelve de manera similar al modelo EOQ , obteniéndose una expresión del costo total por unidad de tiempo en función de Q :

$$C(Q) = dc_u + \frac{dc_f}{Q} + \frac{hQ}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

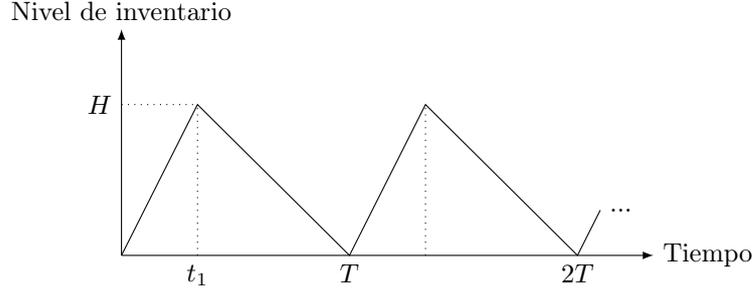


Figura 2.2: Inventario en modelo EPQ

Y el valor óptimo de Q es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_f d}{h(1 - \frac{d}{p})}}$$

Existen también numerosas extensiones de este modelo para el escenario con artículos perecederos. Skouri & Papachristos (2003) [27] consideran el caso general en el que la demanda es una función variable en el tiempo, la tasa de deterioro varía en el tiempo, hay *backlogging* parcial dependiente del tiempo de espera, y el horizonte de planificación es infinito. También existen extensiones donde la tasa de producción es una variable de decisión (Tadj et al., 2006 [28], Sana & Chaudhuri, 2006 [25]).

2.3.2. Problema de Dimensionamiento del Lote Económico (ELS)

En esta Sección abordaremos el problema de gestión de inventario en el que se asume que la demanda es dinámica, es decir que los valores de la misma pueden ser diferentes período a período. Consta de un tiempo discreto compuesto por T períodos, en el período t hay una demanda d_t , un costo fijo s_t asociado a adquirir productos, y un costo h_t por unidad que se almacena en inventario al final del período. El costo unitario por unidad de producto adquirida se asume constante en todos los períodos.

Wagner & Whitin (1958) [31] fueron los primeros en resolver eficientemente este problema. En un período t , x_t y I_t son la cantidad de artículos que se obtienen y que se almacenan en inventario en ese período, respectivamente. Wagner & Whitin escriben la ecuación funcional que representa la política de costos mínimos para los períodos de t a T como:

$$f_t(I_t) = \min_{x_t \geq 0, I_t + x_t \geq d_t} [h_{t-1}I_t + \delta(x_t)s_t + f_{t+1}(I_t + x_t - d_t)]$$

Donde:

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_t = 0 \\ 1 & \text{si } x_t > 0 \end{cases}$$

Y en el período T se tiene:

$$f_T(I_T) = \min_{x_T \geq 0, I_T + x_T = d_T} [h_{T-1}I_T + \delta(x_T)s_T]$$

Los autores demostraron que existe una solución óptima que cumple con la *Propiedad de Inventario Cero*. Se dice que una solución cumple con esta propiedad si $I_t x_t = 0$ (es decir, solo se producen artículos en un período si el inventario actual es 0).

El problema se reduce a elegir los índices $i_1 > i_2 > \dots > i_n$ en los cuales $x_i > 0$, sabiendo que los productos adquiridos en el período i serán utilizados para satisfacer la demanda

entre los períodos i e $i + 1$ si $i < T$, o entre i y T en caso contrario. Los autores presentan un algoritmo que permite hallar la solución óptima de orden $O(T^2)$.

Uno de los avances importantes en el área, es la observación de que el problema ELS puede modelarse con una red de flujo (Zangwill, 1968 [32]). Consideremos una versión más general de ELS, definiendo:

1. $C_t(x_t)$: costo de producir x_t artículos en el período t .
2. y_t : cantidad de artículos que pertenecen en inventario al final del período t . Es decir, $y_t = \sum_{k=1}^t (x_k - d_k)$, para $1 \leq t \leq T$.
3. $H(y_t)$: costo de almacenar y_t unidades de artículos en el período t , que fueron producidos en el período i .

El problema de hallar la política de menor costo puede escribirse como:

$$\begin{aligned} & \text{mín} \sum_{t=1}^T C_t(x_t) + \sum_{t=1}^T H_t(y_t) & \text{(ELS)} \\ \text{sujeto a: } & \sum_{t=1}^T (x_t) = \sum_{t=1}^T (d_t) \\ & -x_t - y_{t-1} + y_t = -d_t & 1 \leq t \leq T \\ & x_t, y_t \geq 0, & 1 \leq i \leq t \leq T \end{aligned}$$

Este problema puede representarse como una red de la siguiente manera:

- Definir un único nodo fuente F . La cantidad de material o flujo que se origina en F es $\sum_{t=1}^T d_t$.
- Definir T nodos destino, $N_t, 1 \leq t \leq T$. En el nodo N_t se requiere d_t material o flujo.
- Definir T arcos $(F, N_t), 1 \leq t \leq T$. El costo de transportar x_t material en el arco (F, N_t) es $C_t(x_t)$. Se representa el hecho de que se produzcan x_t unidades en el período t asignándole x_t flujo a arco (F, N_t) .
- Definir $T - 1$ arcos, $(N_t, N_{t+1}), 1 \leq t \leq T - 1$. El costo de transportar y_t material por el arco (N_t, N_{t+1}) es $H_t(y_t)$. Se representa el hecho de que al final del período t existen y_t unidades, asignándole y_t flujo al arco (N_t, N_{t+1}) .

En la Figura 2.3 se muestra la red resultante para un problema de 4 períodos de duración. Es evidente que el problema de hallar la solución óptima al problema ELS es equivalente a hallar el flujo óptimo de la red construida.

Si ambas funciones de costo son cóncavas, usando propiedades de redes de flujo se deduce que existe un flujo óptimo en el cuál cada nodo tiene a lo sumo una entrada (Zangwill, 1968 [32]). De ahí se deduce que existe una solución óptima donde para todo período t , $y_t x_t = 0$.

En el caso donde los productos son perecederos, dicha propiedad no se cumple (Friedman & Hoch (1978) [7]). La primer solución eficiente para ELS con artículos perecederos (ELS-P) fue dada por Hsu (2000) [12]. Hsu considera un modelo basado en el de Wagner & Whitin en el cual el costo de adquirir productos y el costo de almacenamiento son funciones cóncavas cualesquiera, y una fracción del inventario se pierde de un período al siguiente. Además, tanto la función de almacenamiento y la tasa de deterioro dependen del período actual así como de la antigüedad de cada artículo. Se definen:

1. $C_t(x_t)$: costo de producir x_t artículos en el período t .

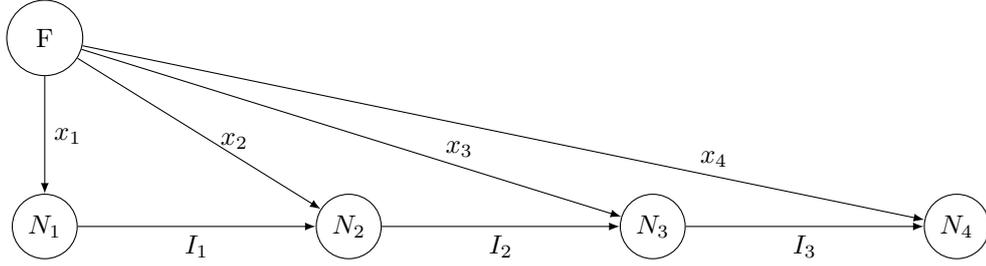


Figura 2.3: Red de flujo para el problema ELS con 4 períodos

2. z_{it} : cantidad de la demanda en el período t que es satisfecha con artículos producidos en el período i .
3. y_{it} : cantidad producida en el período i que es retenida en inventario al principio del período t , que excluye la cantidad z_{it} utilizada para satisfacer la demanda del período t .
4. $H(y_{it})$: costo de almacenar y_{it} unidades de artículos en el período t , que fueron producidos en el período i .
5. α_{it} : la fracción de y_{it} que se pierde durante el período t .

También asume que cuanto más tiempo estuvo un producto en inventario, mayor es el costo de almacenamiento y la velocidad a la cual se deteriora. Es decir, para $1 \leq i \leq j \leq t \leq n$, se asume:

$$\begin{aligned} \alpha_{it} &\geq \alpha_{jt} \\ H_{it}(y) &\geq H_{jt}(y), & y &\geq 0 \end{aligned}$$

Entonces, la función a minimizar es la siguiente:

$$\text{mín} \sum_{t=1}^T (C_t(x_t) + \sum_{i=1}^t H_{it}(y_{it})) \quad (\text{ELS-P})$$

$$\text{sujeto a: } x_t - z_{tt} = y_{tt}, \quad 1 \leq t \leq T \quad (2.3.1)$$

$$(1 - \alpha_{i,t-1})y_{i,t-1} - z_{it} = y_{it}, \quad 1 \leq i \leq t \leq T \quad (2.3.2)$$

$$\sum_{i=1}^t z_{it} = d_t, \quad 1 \leq t \leq T \quad (2.3.3)$$

$$x_t, y_{it}, z_{it} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq t \leq T \quad (2.3.4)$$

La Restricción 2.3.1 es para que la cantidad de artículos x_t que no son usados para satisfacer la demanda en t , sea retenida en inventario y sea igual a la cantidad y_{tt} . La Restricción 2.3.2 calcula la fracción de artículos que se pierden en cada período (la cantidad que se tenía en inventario y no fue utilizada). La Restricción 2.3.3 es para asegurarse que la demanda de cada período sea satisfecha.

Hsu demuestra que este problema puede formularse como una red de flujo con pérdida. El hecho de que los costos de almacenamiento y la tasa de deterioro dependan de la antigüedad de un artículo significa que la red no es tan simple como la del caso no perecedero. En este caso, estando en un período t , es necesario distinguir entre el período en que fue adquirido cada uno de los artículos que se tienen en inventario. Para esto, un período t será representado por t nodos. La red está dada por:

- Un único nodo fuente F .
- T nodos destino, $S_t, 1 \leq t \leq T$. En el nodo N_t se requiere d_t material o flujo.
- Para cada período de demanda t , se definen N nodos, N_{it} , con $1 \leq i \leq t \leq T$.
- Para cada nodo $N_{tt}, 1 \leq t \leq T$, se define un arco (F, N_{tt}) . El costo de transportar x_t material por el arco (F, N_{tt}) es $C_t(x_t)$. Se representa el hecho de que se produzcan x_t unidades en el período t asignándole x_t flujo a arco (F, N_{tt}) .
- Para cada par i y t , con $1 \leq i \leq t \leq T - 1$, se define el arco $(N_{it}, N_{i,t+1})$. El costo de transportar y_{it} material por dicho arco es $H_{it}(y_{it})$. Se representa el hecho de que al final del período t , y_{it} unidades que fueron producidas en el período i permanecen en inventario asignándole y_{it} flujo al arco $(N_{it}, N_{i,t+1})$.
- Para cada período t , se definen t arcos, (N_{it}, S_t) , con $1 \leq i \leq t \leq T$, con costo nulo. Se representa el hecho de que se usan z_{it} unidades de artículos producidos en el período i son utilizados para satisfacer la demanda del período t , asignándole z_{it} flujo al arco (N_{it}, S_t) .
- La pérdida de flujo del arco $(N_{it}, N_{i,t+1})$, con $1 \leq i \leq t \leq T - 1$, es α_{it} . Esto representa la cantidad de artículos producidos en el período i que se pierden entre el período t y el siguiente.
- La pérdida de flujo de los arcos restantes es 0.

En la Figura 2.4 se muestra la red resultante para un problema de 4 períodos de duración. Observar que las restricciones 2.3.1, 2.3.2 y 2.3.3 son representadas por la conservación del flujo en redes con pérdida (Propiedad 2.1.5). El problema ELS-P es claramente equivalente al problema de hallar un flujo óptimo de la red construida.

Usando argumentos similares a los de Zangwill, 1968 [32], Hsu argumenta que existe una solución óptima donde cada nodo tenga a lo sumo una entrada. Observar que, como se mencionó anteriormente, una solución de esa forma no necesariamente cumple con la *Propiedad de Inventario Cero* de Wagner & Whitin. Sin embargo, un flujo donde un nodo tenga a lo sumo una entrada, cumple la siguiente propiedad: la demanda de cada período t , es satisfecha utilizando artículos producidos en exactamente un solo período. Gráficamente esto se deduce observando que en el nodo S_t , solo uno de los arcos (N_{it}, S_t) , con $1 \leq i \leq t \leq T$, puede tener flujo positivo. Además se demuestra que si la demanda de un período t es satisfecha por artículos producidos en el período i , entonces la demanda de ningún período anterior a t puede ser satisfecha por artículos producidos en períodos posteriores a i .

Más formalmente, existe una solución óptima al problema ELS-P que cumple con la siguiente propiedad (demostrada en Hsu, 2000 [12]):

Propiedad 1 (Propiedad de División de Intervalos). *Supongamos $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_R \leq T$ son R períodos de producción¹ en la solución. Hay $R + 1$ índices $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_R < j_{R+1} = T + 1$ tal que para cada $t, 1 \leq t \leq R$, se cumplen:*

- (a) $i_t \leq j_t$
- (b) *La demanda en los períodos desde j_t hasta $j_{t+1} - 1$ es satisfecha con artículos producidos en el período i_t .*

Hsu plantea un algoritmo basado en programación dinámica de orden $O(T^4)$ para hallar la solución, basado en las siguientes ideas. Para cada par de índices (i, r) , con $1 \leq i \leq r \leq T$, se define $P(i, r)$ como el problema ELS-P restringido a los períodos 1 hasta r , donde i es el último período de producción. Si $V(i, r)$ es la solución óptima a $P(i, r)$, entonces la solución

¹Un período t es un período de producción si $x_t > 0$

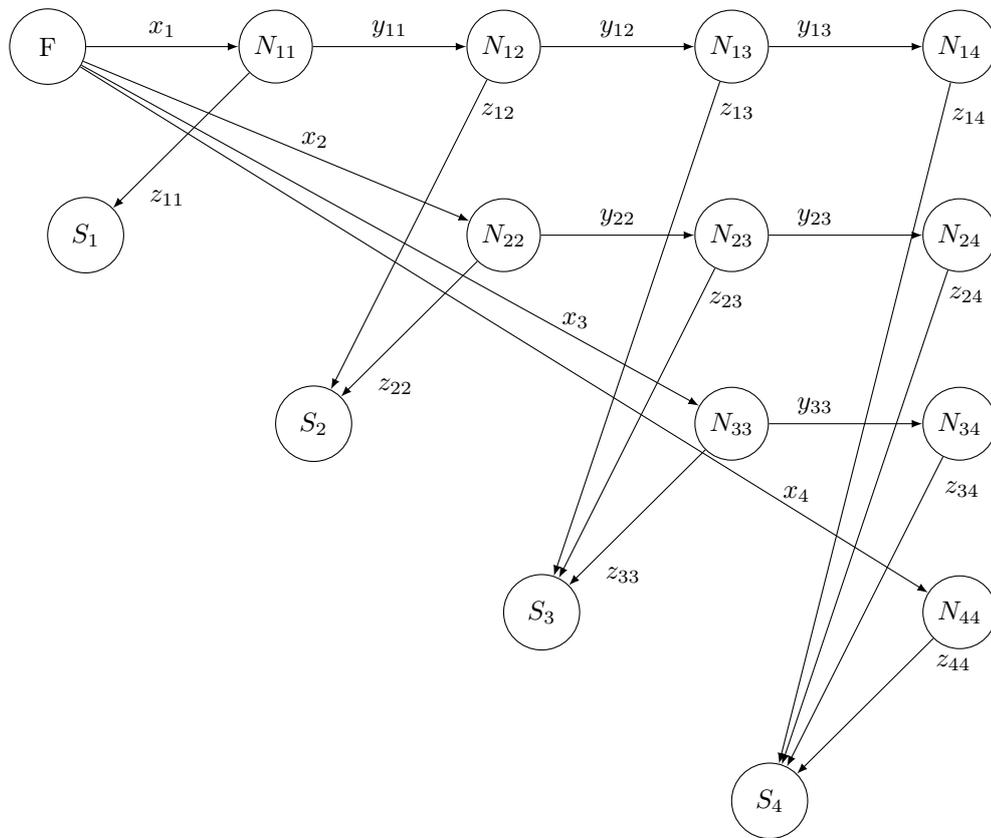


Figura 2.4: Red de flujo para ELSP-P con 4 períodos

al problema ELS-P será $\min_{1 \leq i \leq T} V(i, T)$. Para el caso lineal con costos fijos de producción donde las funciones de costos tienen la forma:

$$C_t(x_t) = \begin{cases} f_t + c_t x_t & \text{si } x_t > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$H_{it}(y_{it}) = h_{it} y_{it}$$

El problema puede resolverse en orden $O(T^2)$. Se define A_{kt}^i como la cantidad de artículos producidos en el período i que deben estar en inventario al principio del período k para satisfacer una unidad de demanda del período t . Para $1 \leq i \leq k < t \leq n$:

$$A_{kk}^i = 1 \quad \text{y} \quad A_{kt}^i = \frac{1}{\prod_{l=k}^{t-1} (1 - \alpha_{il})} \quad (2.3.6)$$

Se define T_{ir} , con $i \leq r$ como el costo de producción y almacenamiento de satisfacer la demanda en el período r con producción en el período i :

$$T_{ir} = c_t A_{ir}^i d_r + S_{ir} d_r \quad (2.3.7)$$

Donde S_{ir} representa la parte de los costos asociado a los costos de almacenamiento, es decir, $S_{ir} = \sum_{l=i}^{r-1} h_{il} A_{lr}^i$.

Entonces, la solución está dada por:

$$V(i, i) = \min_{1 \leq h < i} \{V(h, i-1)\} + f_i + T_{ii} \quad \text{para } 1 < i \leq T \quad (2.3.8)$$

$$V(i, r) = \min_{1 \leq h \leq i} \{V(h, r-1) + T_{hr}\} \quad \text{para } 1 \leq i < r \leq T \quad (2.3.9)$$

La manera de computar $V(i, r)$, para todos los i, r con $1 \leq i \leq r \leq T$, es de la siguiente forma:

1. Al principio se calcula $V(1, 1)$, la solución óptima al problema de un solo período:
 $V(1, 1) = f_1 + c_1 d_1$.
2. Luego se calcula $V(1, r)$, con $1 < r \leq T$ según 2.3.9. Primero se calcula $V(1, 2)$, luego $V(1, 3)$ y así sucesivamente.
3. $V(2, 2)$ está dada por 2.3.8.
4. El proceso continúa calculando $V(2, r)$, $2 < r \leq T$. luego $V(3, 3)$, y así sucesivamente hasta tener $V(T, T)$.
5. La solución óptima al problema es $\min_{1 \leq i \leq T} V(i, T)$.

En resumen, $V(i, r)$ puede pensarse como una matriz $T \times T$, definida solamente en su parte triangular positiva. La matriz se llena de fila por fila, de arriba hacia abajo, donde cada fila i se llena desde la columna i hacia la derecha.

Hsu (2003) [13] extiende estos resultados para el caso en el que hay *backlogging*, donde el costo de satisfacer la demanda de un pedido pendiente depende del período en que se generó esa demanda, y del período en el que se adquieren productos para satisfacerla. El autor asume que el costo de satisfacer la demanda pendiente es no decreciente con el tiempo. Se demuestra que cuando la demanda es no decreciente en el tiempo, o cuando el costo marginal de *backlogging* es no decreciente con respecto a la edad de la demanda pendiente, el problema es resoluble en tiempo polinomial.

Sargut & Işık (2017) [26] consideran un problema similar al de Hsu (2003), pero con capacidad de producción finita constante durante el horizonte de planificación. Esta nueva

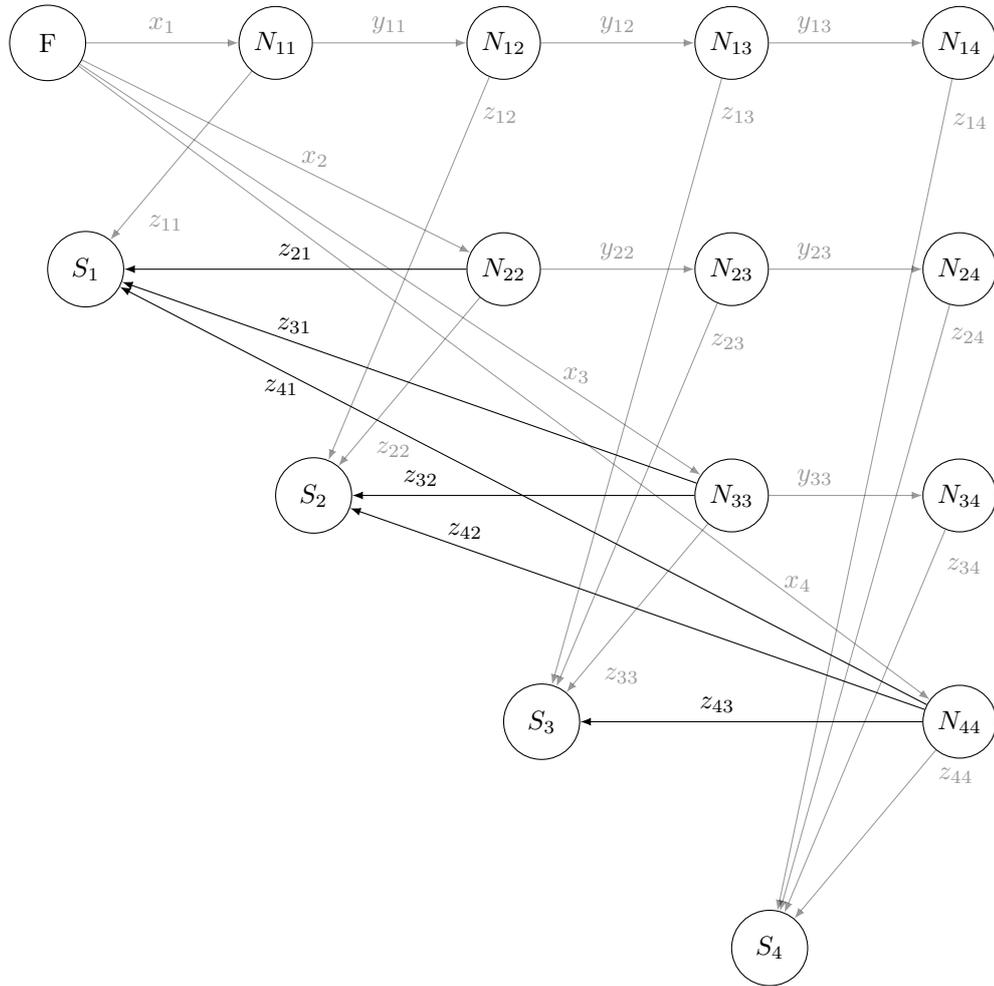


Figura 2.5: Red de flujo para ELSP-P con *backlogging* y capacidad de producción limitada, para 4 periodos

restricción es suficiente para que el problema sea NP-completo. Interesantemente, este problema también es estudiado utilizando redes de flujo. La red del problema con *backlogging* es similar a la del problema ELS-P, son las siguientes adiciones:

- Se definen nuevos arcos (N_{ii}, S_t) , con $i > t$. Esto representa el hecho de que en el período i , se satisfacen z_{it} unidades de demanda que habían quedado pendientes del período t . Estos arcos tienen flujo z_{it} , y costo B_{it} , donde B_{it} es una función de costos que representa la penalización de no haber satisfecho la demanda de un período a tiempo.
- Los arcos (F, N_{tt}) ahora tienen capacidad limitada, que representa la capacidad de producción.

En la Figura 2.5 se muestra la red resultante para un problema de 4 periodos de duración. Los arcos de la red que representa el problema ELS-P son grises, y los arcos nuevos para esta variante del problema son negros.

Los autores proponen una heurística de orden $O(T^6)$ (donde T es la cantidad de periodos) basada en Programación Dinámica. En pruebas realizadas con hasta 20 periodos, el algoritmo encuentra soluciones con una desviación promedio de 4.54 % de la solución óptima.

Una extensión de Hsu (2000) [12] es considerada en Chu et al. (2005) [5], donde el costo de adquirir productos es una función que los autores denominan como *función de economía de escala*. Una función $F(X)$ definida en $[0, +\infty]$ es de este tipo si cumple:

1. $F(0) = 0$.
2. $F(X)$ es no decreciente en $[0, +\infty]$.
3. La función de costo promedio, definida como $\bar{F}(X) = F(X)/X$, para $X > 0$, es una función no creciente en $(0, +\infty)$.

Chu et al. (2005) [5] demuestran que el problema de hallar una solución óptima bajo estas condiciones es NP-completo, y proponen un método para hallar una solución aproximada. El resultado principal es que esta solución aproximada supone un costo no mayor a $\frac{(4\sqrt{2}+5)}{7}$ veces el costo de la solución óptima. Este resultado es extendido para el caso con *backlogging* por Bai et al. (2010) [3], quienes proponen un método para hallar una solución aproximada con desempeño similar a la solución de Chu et al. (2005).

Önal et al. (2015) [22] consideran el efecto de 4 políticas de consumición de artículos (FIFO, LIFO, FEFO, LEFO). En este caso la demanda y los costos son variables, y los artículos son perecederos y tienen un tiempo de vida fijo que depende del período en que fueron adquiridos. Önal et al. demuestran que dada una instancia cualquiera del problema, los costos son mínimos si los artículos son consumidos en orden FEFO, y son máximos si son consumidos en orden LEFO. También demuestran que dada una política de consumición, el problema siempre es resoluble en tiempo polinomial cuando no hay restricciones de capacidad, y el caso con capacidad solo es resoluble en tiempo polinomial bajo las políticas FIFO y LEFO.

Capítulo 3

Descripción y formulación del problema

En esta Sección se presenta el problema a resolver y la formulación matemática del mismo. Como se mencionó en secciones anteriores, se busca estudiar el problema de gestión de inventario de artículos perecederos donde los costos son lineales y la capacidad de inventario es limitada. El problema es descrito en mayor detalle en la Sección 3.1, mientras que el modelo formal es presentado en la Sección 3.2.

3.1. Descripción del problema

El problema en cuestión puede verse como una extensión a ELS-P estudiado por Hsu (2000) [12], donde se agrega la restricción adicional referente a la capacidad de inventario.

La demanda es dinámica, es decir, varía en cada período. Existen costos fijos y unitarios de producción que son distintos en cada período. La existencia de costos fijos significa que si se elige producir artículos en cierto período, existe cierto costo que debe pagarse, independientemente de la cantidad de artículos que sean producidos. Los costos unitarios significan que además debe pagarse cierta cantidad por cada unidad que elija producirse.

Existen costos unitarios de almacenamiento, que son distintos en cada período y que a su vez dependen de la antigüedad de cada artículo.

El hecho de que los artículos sean perecederos se modela diciendo que en cada período una fracción de los artículos se pierde. Esta fracción depende del período actual, y de la antigüedad de cada producto.

En este problema, se considera cómo satisfacer la demanda de los distintos períodos de manera de minimizar los costos. Las decisiones que deben tomarse son:

- En qué períodos producir, y cuántas unidades deben producirse. Los períodos en los que se decide producir son llamados *períodos de producción*.
- Cómo gestionar el inventario de los artículos existentes. Es decir, cuántas unidades se mantienen en inventario en cada período. Además es necesario discriminar por el período en que fueron producidos cada uno de los artículos que se tienen en inventario.
- Cómo satisfacer la demanda de cada período. Para esto hay que decidir de qué manera se utilizan los artículos que se tienen en inventario y los que se producen o adquieren en determinado período. La demanda de un período puede satisfacerse o bien utilizando unidades que ya se tenían en inventario, o bien unidades que son producidas en ese período, o bien utilizando alguna mezcla de ambas.

3.2. Formulación matemática

Más formalmente, el problema puede definirse de la siguiente manera. Se considera un horizonte de planificación de n periodos. En cada período t , $1 \leq t \leq n$ existe una demanda d_t que debe ser satisfecha. Se producen x_t artículos a un costo $C_t(x_t)$. Los artículos producidos en un período pueden ser almacenados para ser usados en un período posterior, hasta el límite de inventario u_t . Se denomina mediante y_{it} a la cantidad de artículos que fueron producidos en el período i , que están en inventario en el período t , con $1 \leq i \leq t \leq n$. El costo de retener y_{it} artículos en inventario es $H(y_{it})$. Una fracción α_{it} de y_{it} se pierde en el período t . Se define z_{it} la cantidad de artículos del período i que son utilizados para satisfacer la demanda del período t .

Se asume que el inventario inicial es 0, y que el inventario final también lo es. Se asume que las funciones de costos C_t y H_{it} son de la forma:

$$C_t(x_t) = \begin{cases} f_t + c_t x_t & \text{si } x_t > 0 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \quad (3.2.1)$$

$$H_{it}(y_{it}) = h_{it} y_{it}$$

El problema a resolver es entonces:

$$\text{mín } \sum_{t=1}^n (C_t(x_t) + \sum_{i=1}^t H_{it}(y_{it})) \quad (3.2.2)$$

$$\text{sujeto a: } x_t - z_{tt} = y_{tt}, \quad 1 \leq t \leq n \quad (3.2.3)$$

$$(1 - \alpha_{i,t-1})y_{i,t-1} - z_{it} = y_{it}, \quad 1 \leq i < t \leq n \quad (3.2.4)$$

$$\sum_{i=1}^t z_{it} = d_t, \quad 1 \leq t \leq n \quad (3.2.5)$$

$$\sum_{i=1}^t y_{it} \leq u_t \quad 1 \leq t \leq n \quad (3.2.6)$$

$$x_t \geq 0, \quad 1 \leq t \leq n \quad (3.2.7)$$

$$y_{it}, z_{it} \geq 0, \quad 1 \leq i \leq t \leq n \quad (3.2.8)$$

La Restricción 3.2.3 es para que la cantidad de artículos x_t que no son usados para satisfacer la demanda en t , sea retenida en inventario y sea igual a la cantidad y_{tt} . La Restricción 3.2.4 calcula la fracción de artículos que se pierden en cada período (la cantidad que se tenía en inventario y no fue utilizada). La Restricción 3.2.5 es para asegurarse que la demanda de cada período sea satisfecha. Finalmente, la capacidad de inventario limitada es modelada con la Restricción 3.2.6.

Observar que teniendo en cuenta las Suposiciones 3.2.1, el problema puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \text{mín } & \sum_{t=1}^n (f_t w_t + c_t x_t + \sum_{i=1}^t h_{it} y_{it}) & & \text{(P)} \\ \text{sujeto a: } & x_t - z_{tt} = y_{tt}, & & 1 \leq t \leq n & \text{(3.2.9)} \\ & (1 - \alpha_{i,t-1}) y_{i,t-1} - z_{it} = y_{it}, & & 1 \leq i < t \leq n & \text{(3.2.10)} \\ & \sum_{i=1}^t z_{it} = d_t, & & 1 \leq t \leq n & \text{(3.2.11)} \\ & \sum_{i=1}^t y_{it} \leq u_t & & 1 \leq t \leq n & \text{(3.2.12)} \\ & w_t A \geq x_t & & 1 \leq t \leq n & \text{(3.2.13)} \\ & x_t \geq 0, w_t \in \{0, 1\} & & 1 \leq t \leq n & \text{(3.2.14)} \\ & y_{it}, z_{it} \geq 0, & & 1 \leq i \leq t \leq n & \text{(3.2.15)} \end{aligned}$$

Donde w_t es una variable binaria auxiliar, tal que $w_t = 1$ si $x_t > 0$, y $w_t = 0$ en caso contrario. Esto se refleja en la nueva Restricción 3.2.13, donde A es una constante arbitrariamente grande.

Capítulo 4

Análisis del modelo

Aquí se analiza el modelo presentado en la Sección anterior. Primero, con el fin de entender mejor el problema, se presentan algunos ejemplos simples en la Sección 4.1. Luego, en la Sección 4.2, se hacen algunos comentarios acerca del modelo y de una posible representación de redes del flujo del mismo. Finalmente se hace un breve estudio de la complejidad del problema en la Sección 4.3.

4.1. Algunos ejemplos

Supongamos que tenemos un horizonte de planificación de 5 períodos. Para simplificar las cosas, supongamos que la tasa de deterioro es 0, es decir, los artículos no se deterioran. Supongamos que los costos y la demanda son iguales en todos los períodos, de la siguiente manera:

1. Costo fijo de producción = 100.
2. Costo unitario de producción = 10.
3. Costo de almacenamiento = 1.
4. Demanda en cada período = 10.

Como los artículos no se deterioran y los costos son constantes, una solución óptima será la que minimice los costos fijos de producción y los costos de almacenamiento. Como el costo fijo de producción es tan alto, es fácil ver que en este caso, la solución óptima será aquella que minimice la cantidad de períodos en los que se producen artículos.

Ejemplo 1: sin restricciones de capacidad En primera instancia supongamos que no tenemos ninguna restricción de capacidad. La solución óptima es aquella en la que ocurre producción solamente en el período inicial. Se producen suficientes unidades para satisfacer la demanda de todos los períodos. Esa solución tiene la siguiente forma (se especifican solamente las variables cuyo valor es distinto de 0):

- $x_1 = 50$.
- $z_{1i} = 10$ para $1 \leq i \leq 5$.
- $y_{11} = 40, y_{12} = 30, y_{13} = 20, y_{14} = 10$.

Ejemplo 2: capacidad de inventario limitada Supongamos ahora que nuestra capacidad de inventario es 30 en todos los períodos. Ya no es posible satisfacer la demanda de todos los períodos con artículos producidos en el período inicial. En el período inicial, la cantidad máxima que podemos producir es 40 unidades, de las cuales 10 se usan para satisfacer la demanda, y 30 es el máximo que puede permanecer en el inventario a terminar el período. Las 30 unidades restantes se usan para satisfacer la demanda de los 3 períodos siguientes. En el último período, se deberán producir 10 unidades más para satisfacer la demanda de ese período. La solución es entonces:

- $x_1 = 40, x_5 = 10.$
- $z_{1i} = 10$ para $1 \leq i \leq 4, z_{55} = 10.$
- $y_{11} = 30, y_{12} = 20, y_{13} = 10.$

Ejemplo 3: capacidad de producción limitada Supongamos ahora que la capacidad de inventario es ilimitada, pero que la capacidad de producción es 30. En el período inicial, la cantidad máxima que podemos producir es entonces 30 unidades, utilizadas para satisfacer la demanda de los primeros 3 períodos. En el cuarto período se producirán 20 unidades más para satisfacer la demanda de los últimos dos períodos. La solución es:

- $x_1 = 30, x_4 = 20.$
- $z_{1i} = 10$ para $1 \leq i \leq 3, z_{44} = 10, z_{45} = 10.$
- $y_{11} = 20, y_{12} = 10, y_{44} = 10.$

4.2. Un enfoque de redes de flujo

En la Sección 2.3.2 se describieron los problemas ELS de Wagner & Whitin (1958) [31]. También se vio la extensión al caso precedero ELS-P estudiada por Hsu (2000) [12], y la extensión que además considera *backlogging* estudiada por Sargut & Işık (2017) [26]. Todos estos problemas tienen en común que pueden ser modelados utilizando redes de flujo (presentadas en las Figuras 2.3, 2.4 y 2.5, respectivamente). También es evidente que el problema ELS con capacidad de inventario limitada (estudiado por Florian & Klein, 1971 [6]) también puede representarse con una red. Para esto basta con asignarle una capacidad limitada a los arcos (N_t, N_{t+1}) , con $1 \leq t \leq T - 1$ a la red de la Figura 2.3.

Entonces resulta natural, al encontrarse con un nuevo problema de gestión de inventario, tratar de modelarlo mediante una red de flujo. Sin embargo, surgen algunas dificultades. En un principio, podemos comenzar basándonos en la red del Problema ELS-P (Figura 2.4). Pero observamos que en una red así, es imposible (a diferencia de todos los modelos mencionados anteriormente) modelar la capacidad de nuestro Problema P como la capacidad de una red de flujo (en el sentido de la definición 2.1.4). En efecto, en una red como la de la Figura 2.4, el inventario saliente de un período t no está dada por un único arco, sino por el conjunto de arcos $(N_{it}, N_{i,t+1})$, con $1 \leq i \leq t \leq T - 1$. Entonces la capacidad de nuestro problema ya no es una cota sobre el flujo de un único arco, sino que es una cota sobre la suma del flujo de los arcos $(N_{it}, N_{i,t+1})$. De acuerdo a nuestro conocimiento, este tipo de restricciones de capacidad (a la que podríamos llamarle “capacidad conjunta”), no es el tipo de problemas que se trate en el estudio de redes de flujo.

La pregunta que surge inmediatamente luego de este análisis es si efectivamente es posible construir una red de flujo equivalente a nuestro problema. En tal red, se tendría que cumplir que la capacidad de inventario de un período dado t pueda modelarse como la capacidad de un único arco en la red. Para esto tendría que cumplirse que el la cantidad de artículos de quedan en inventario al final de un período pueda modelarse como el flujo de un único arco en la red (de manera similar al Problema ELS). Sin embargo, esto no sería adecuado para

nuestro problema, ya que al final de un período, es necesario discriminar en qué período fueron producidos cada uno de los artículos que se tienen en inventario. Esto se debe a que en nuestro problema, la tasa de deterioro y los costos de almacenamiento dependen de la antigüedad de cada producto. Mediante este argumento afirmamos que no creemos que sea posible modelar el Problema P con una red de flujo.

Esto tiene algunas implicaciones negativas sobre nuestro problema. Todos los artículos mencionados al principio de esta Sección se basan en utilizar propiedades de redes de flujo para hallar soluciones óptimas o aproximadas. El no poder modelar el Problema P con una red significa que no podemos hacer uso de toda la teoría existente en este campo. Además, intuitivamente pensamos que estas dificultades para modelar el problema pueden indicar que el problema sea significativamente más difícil de resolver que algunos de los problemas mencionados anteriormente. En efecto, en la Sección que se discute brevemente la complejidad del problema.

4.3. Complejidad del problema

Es sabido que el problema con artículos perecederos sin capacidad es resoluble en tiempo polinomial (Hsu, 2000 [12]), así como lo es el problema de artículos no perecederos con capacidad limitada (Love, 1973 [19]). Sin embargo, como se vio en la Sección anterior, el combinar estas características (artículos perecederos y capacidad de inventario limitada), presenta algunas dificultades.

Entonces, en esta Sección abordamos brevemente el tema de complejidad, preguntándonos si es factible hallar soluciones óptimas en un tiempo razonable. Con este fin, buscaremos hallar soluciones exactas a problemas de distinto tamaño (es decir, de distinta cantidad de períodos de duración), comparando el tiempo necesario para hallar dicha solución. La metodología a utilizar fue la siguiente:

Se generaron 15 casos de prueba de 50 períodos de largo. Luego se resolvió el problema restringido a n períodos de largo. Se consideraron distintos valores de n , $n = 10, 11, \dots$, hasta que el tiempo de resolución fuera demasiado grande.

Los problemas fueron resueltos utilizando la versión 4.64 de GLPK (*GNU Linear Programming Kit*)¹. GLPK es un paquete utilizado para resolver problemas de gran escala de Programación Lineal, Programación Entera Mixta, y otros problemas relacionados. El Problema P fue modelado utilizando el lenguaje de modelado *MathProg* y se resolvió con el *solver* autónomo *glpsol* de GLPK.

Los casos a resolver fueron generados acorde al siguiente procedimiento (usando $U[a, b]$ para denotar un valor elegido por una variable aleatoria con distribución uniforme entre a y b):

- Capacidad del período i : $U[40, 60]$.
- Demanda en el período i : $U[5, 20]$.
- Costo fijo de producción en el período i : $U[200, 300]$.
- Costo unitario de producción en el período i : $U[40, 50]$.
- El costo de almacenamiento de los productos producidos en i es $U[1, 10]$ en el período en el que fueron producidos. Para el resto de los períodos, el costo de almacenamiento es igual al costo del período anterior más $U[1, 5]$.
- La tasa de deterioro de los productos producidos en i es $U[0, 0,1]$ en el período en el que fueron producidos. Para el resto de los períodos, la tasa de deterioro es igual a la tasa del período anterior más $U[0, 0,05]$.

¹<https://www.gnu.org/software/glpk/> – último acceso noviembre 2019

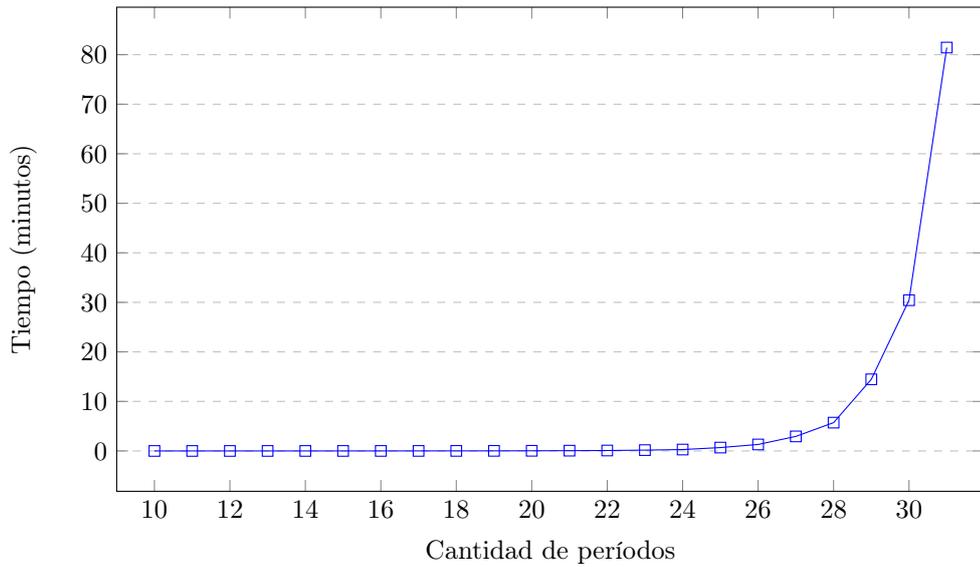


Figura 4.1: Tiempo que se tarda en hallar la solución óptima en función al tamaño del problema.

Se registró el tiempo de promedio resolución para cada n , y los resultados obtenidos son presentados en la Figura 4.1.

En dicha Figura se observa que para versiones pequeñas del problema, la solución óptima es hallada rápidamente. Sin embargo, cuando la cantidad de períodos del problema es mediana o grande, el tiempo promedio de resolución se vuelve cada vez más grande, creciendo desproporcionadamente. Pasado cierto punto (31 o 32 períodos de largo), el tiempo de resolución es tan grande que consideramos que no es razonable hallar soluciones óptimas para problemas de este tamaño. Con esto nos referimos a que hallar una solución exacta es tan difícil, que bien daría lo mismo que fuera imposible hallar dicha solución.

Esto motiva la búsqueda de métodos alternativos para hallar soluciones. Si bien es deseable poder contar siempre con soluciones óptimas al problema que se desea resolver, en la práctica hay escenarios en lo que esto resulta imposible. Debido a esto renunciamos a la búsqueda de soluciones exactas, y nos conformamos con buscar soluciones que por lo menos puedan hallarse de manera eficiente. Claramente es deseable que las soluciones que se encuentren en esta búsqueda, si bien no sean óptimas, sean buenas en alguna medida. Idealmente, nos gustaría contar con algún método de búsqueda de soluciones eficiente que, si bien no encuentre soluciones óptimas, encuentre mejores soluciones a las que GLPK puede encontrar en un tiempo razonable.

En la Sección siguiente se presenta una propuesta de solución siguiendo estas ideas.

Capítulo 5

Propuesta de solución

En esta Sección se proponen ideas para hallar soluciones al problema P. El método de búsqueda de soluciones consiste en una dos fases:

1. Hallar una solución factible al problema.
2. Mejorar la solución obtenida. Es decir, dada una solución factible, hallar una solución aún mejor.

En cuanto al primer punto, no nos conformamos con solamente hallar una solución factible cualquiera. Es cierto que esto sería muy fácil de hacer, por ejemplo, podríamos pensar en una solución donde en cada período t se produzcan exactamente d_t artículos, y se utilizaran inmediatamente para satisfacer la demanda de ese período. En esta solución nunca se almacenarían artículos en inventario, garantizando que sea una solución factible.

Formalmente nuestra solución en este caso estaría dada por:

$$x_t = z_{tt} = d_t, \quad 1 \leq t \leq n \quad (5.0.1)$$

$$z_{it} = y_{it} = 0, \quad 1 \leq i \leq t \leq T \quad (5.0.2)$$

Claramente, es más conveniente hallar una solución inicial que sea buena en cierta medida. Al menos intuitivamente, resulta razonable pensar que cuanto más cerca de la solución óptima se esté inicialmente, la solución final a la que se llegue luego de la etapa de mejora estará más cerca de la solución óptima. Además, dado que los métodos de mejora de soluciones se ejecutan indefinidamente (se sigue mejorando la solución que se tiene siempre que sea posible), intuitivamente también será más eficiente el proceso de búsqueda si la solución inicial es mejor.

Debido a esto, descartamos tomar la solución inicial dada por las Fórmulas 5.0.1 y 5.0.2. En su lugar, se pretende aplicar ideas similares a las presentadas en Hsu (2000) [12] para hallar una solución inicial. En la Sección 5.1 se considera un método de búsqueda de soluciones factibles que resulta de modificar el algoritmo de Hsu para contemplar la capacidad de inventario limitada. Luego, en la Sección 5.2 se presentan tres distintas maneras de mejorar soluciones factibles, basadas en ideas de realizar *shifts* o desplazamientos.

5.1. Algoritmo de Hsu modificado

El método propuesto consiste en buscar soluciones donde si dos períodos i y j son períodos de producción consecutivos, entonces la demanda entre los períodos i y $j - 1$ es satisfecha exclusivamente por artículos producidos en i . Es decir, si $x_i > 0$, $x_j > 0$, y $x_k = 0$ para $1 \leq i < k < j \leq n$, entonces $z_{ik} = d_k$ para $i \leq k < j$. Este método de solución está basado en Hsu (2000) [12].

Para cada par de índices (i, r) , donde $1 \leq i \leq r \leq n$, se define $V(i, r)$ como el costo mínimo del Problema (P) restringido a los períodos 1 a r , donde i es el último período de producción. El costo mínimo del Problema (P) será entonces $\min_{1 \leq i \leq n} V(i, n)$.

Para esto, dados dos períodos i y t , $i < t$, es de interés calcular el costo de satisfacer la demanda entre i y t con artículos producidos en i . En primera instancia, analicemos cuántos artículos deben producirse en i para satisfacer solo la demanda de t . Debido a que cierta fracción de artículos se pierde en cada período, es evidente que en un caso general, la cantidad a producir será mayor a d_t , la demanda en t .

Definimos A_{kt}^i como la cantidad de artículos producidos en el período i que deben estar en inventario al principio del período k para satisfacer una unidad de demanda del período t . Para $1 \leq i \leq k < t \leq n$:

$$A_{kk}^i = 1 \quad \text{y} \quad A_{kt}^i = \frac{1}{\prod_{l=k}^{t-1} (1 - \alpha_{il})} \quad (5.1.1)$$

A partir de la definición anterior, se deduce que en el período i se deben producir $A_{it}^i d_t$ artículos para satisfacer la demanda de t .

Se define T_{ir} para $i \leq r$ como el costo de producción y almacenamiento de satisfacer la demanda en r con producción en el período i :

$$T_{ir} = c_i A_{ir}^i d_r + S_{ir} d_r \quad (5.1.2)$$

Donde S_{ir} es la parte de T_{ir} que se corresponde con los costos de almacenamiento:

$$S_{ir} = \sum_{l=i}^{r-1} h_{il} A_{lr}^i \quad (5.1.3)$$

A continuación se describe cómo calcular $V(i, r)$ mediante Programación Dinámica. Inicialmente se sabe que $V(1, 1) = f_1 + c_1 d_1$. Luego se tiene que:

$$V(i, i) = \min_{1 \leq h < i} \{V(h, i-1)\} + f_i + T_{ii} \quad \text{para } 1 < i \leq n \quad (5.1.4)$$

$$V(i, r) = \min_{h | \Phi(h) \geq r-1} \{V(h, r-1) + T_{hr}\} \quad \text{para } 1 \leq i < r \leq n \quad (5.1.5)$$

Donde $\Phi(h)$ es el máximo j tal que es factible que la producción de h satisfaga la demanda entre los períodos h y j . Se calcula como:

$$\Phi(h) = \max\{j | \forall k, h \leq k < j, \sum_{l=k+1}^j A_{kl}^h d_l \leq u_k\} \quad (5.1.6)$$

Esta función $\Phi(h)$ es la diferencia con el método de búsqueda de soluciones de Hsu (2000) [12], y nuestra principal contribución en esta etapa. Claramente, no toda solución factible al problema sin capacidad es una solución factible a nuestro problema, por lo que debemos descartar las soluciones que no sean factibles. Es decir, descartamos las soluciones que implicarían en algún momento tener más inventario que la capacidad que se tiene.

El Pseudocódigo 1 se corresponde con el algoritmo de Hsu modificado presentado en esta Sección.

5.2. Heurísticas de mejora

En lo que sigue se presentan tres heurísticas que, partiendo de una solución factible, buscan obtener una nueva solución factible de menor costo. Las tres heurísticas están basadas en

Pseudocódigo 1 Algoritmo de Hsu modificado

Entrada: Matrices A, T **Salida:** Matriz V

```
1:  $V_{11} = f_1 + c_1d_1$ 
   para  $r = 2, \dots, n$  hacer ▷ Calcular fila 1
     si  $r < \Phi(1)$  entonces ▷ Si producción en 1 puede satisfacer demanda entre 1 y r
        $V_{1r} \leftarrow V_{1,r-1} + T_{1r}$ 
     5: si no
        $V_{1r} \leftarrow \infty$  ▷ Valor arbitrariamente alto
     fin si
   fin para
   para  $i = 2, \dots, n$  hacer ▷ Fila 2 en adelante
     10:  $V_{ii} \leftarrow \min_{1 \leq h < i} \{V_{h,i-1}\} + f_i + T_{ii}$ 
     para  $r = i + 1, \dots, n$  hacer
       si  $r < \Phi(i)$  entonces ▷ Si producción en i puede satisfacer demanda entre i y r
          $\min \leftarrow V_{1,r-1} + T_{1r}$  ▷ Hallar  $\min_{h | \Phi(h) \geq r-1} \{V(h, r-1) + T_{hr}\}$ 
         para  $j = 2, \dots, i$  hacer
           15:  $\text{valor} \leftarrow V_{j,r-1} + T_{jr}$ 
           si  $\text{valor} \leq \min$  entonces
              $\min \leftarrow \text{valor}$ 
           fin si
         fin para
       20:  $V_{ir} \leftarrow \min$ 
       si no
          $V_{ir} \leftarrow \infty$  ▷ Valor arbitrariamente alto
       fin si
     fin para
   25: fin para
```

la idea de realizar *shifts* o desplazamientos, que consisten en reemplazar parte de producción de un período por producción en algún otro período, en caso de que sea conveniente.

Algunas de estas ideas han sido estudiadas anteriormente. Por ejemplo, Maes & Van Wassenhove (1988) [20] mencionan heurísticas de *shifts* en su revisión de la literatura de problemas de gestión de inventario de varios artículos con capacidad de producción limitada. Acorde a dicha revisión, las heurísticas aquí consideradas pueden clasificarse como heurísticas de mejora. Es decir, heurísticas que toman una solución (factible o no factible), y buscan una solución que sí es factible o es de menor costo.

Como se hará evidente en lo que sigue de esta Sección, aplicar este tipo de heurísticas al problema en el que se está trabajando presenta algunas dificultades y debe hacerse con cuidado. Esto se debe a dos razones. En primer lugar, a que se está trabajando con artículos perecederos. Esto implica que, a diferencia del caso no perecedero, no se puede reemplazar parte de la producción en un período por producción en otro período de la misma cantidad. Por ejemplo, no es equivalente producir q unidades en el período i que en el período $i + 1$. Esto se debe a que si se producen q unidades en el período $i + 1$, todas estas unidades pueden ser utilizadas en dicho período. Sin embargo, si se producen q unidades en el período i , no todas estas unidades estarán disponibles en el período $i + 1$, ya que una fracción $\alpha_{i,i+1}$ se habrá perdido.

La otra dificultad se da ya que si se opta “desplazar” cierta cantidad de unidades de producción de un período a otro, podría llegarse a una nueva solución que no sea factible. Entonces antes de realizar cada desplazamiento es necesario asegurarse de que se está respetando la restricción de capacidad de inventario.

5.2.1. Shift de Producción (S-Prod)

Dado un período de producción i , se busca transferir toda la producción de i al período $i - 1$. El objetivo es que el período $i - 1$ satisfaga la demanda de todos los períodos cuya demanda es satisfecha por i . Esta heurística potencialmente elimina períodos de producción. Le llamamos *Shift de Producción* porque busca desplazar toda la producción de un período a otro.

Para saber si es conveniente realizar este desplazamiento, hay que calcular el costo de producir en i , y el costo de producir en $i - 1$.

El costo de producir en i :

$$C_1 = f_i + \sum_{j|z_{ij}>0} T_{ij} \frac{z_{ij}}{d_j} \quad (5.2.1)$$

El costo de realizar el desplazamiento es:

$$C_2 = (1 - \delta_{i-1})f_{i-1} + \sum_{j|z_{ij}>0} T_{i-1,j} \frac{z_{ij}}{d_j} \quad (5.2.2)$$

Donde δ_{i-1} es 1 si $i - 1$ ya era un período de producción, 0 en caso contrario.

Si es conveniente realizar el desplazamiento (es decir, si $C_2 < C_1$), hay que averiguar si es factible. Para esto, si j es el último período cuya demanda es satisfecha por i , se tiene que cumplir que para todo $k, i - 1 \leq k < j$:

$$\sum_{l|l \geq k, z_{il} > 0} A_{kl}^{i-1} z_{il} + \sum_{l=1}^k y_{lk} - y_{ik} \leq u_k \quad (5.2.3)$$

Donde $A_{kl}^{i-1} z_{il}$ es la cantidad de artículos producidos en $i - 1$ que existen en inventario en el período k satisfacer la demanda de l que era satisfecha por i , y u_k es la capacidad de inventario en el período k .

Si es conveniente y factible realizar el desplazamiento, hay que tener en cuenta que la cantidad de artículos que se producirán en $i - 1$ será mayor a los que se producían en i ,

aunque se utilice para satisfacer la misma cantidad de demanda. Esto se debe al diferente deterioro de los productos. La cantidad a producir es:

$$\sum_{j|z_{ij}>0} A_{i-1,j}^{i-1} z_{ij} \quad (5.2.4)$$

El Pseudocódigo 2 corresponde al *shift* de producción.

Pseudocódigo 2 *Shift* de producción

```

1: para todo  $i$  tal que  $x_i > 0$  hacer
     $q \leftarrow \sum_{j|z_{ij}>0} A_{i-1,j}^{i-1} z_{ij}$  ▷ Cantidad a producir en  $i - 1$ 
     $C_1 \leftarrow f_i + \sum_{j|z_{ij}>0} T_{ij} \frac{z_{ij}}{d_j}$ 
     $C_2 \leftarrow (1 - \delta_{i-1})f_{i-1} + \sum_{j|z_{ij}>0} T_{i-1,j} \frac{z_{ij}}{d_j}$ 
5: si  $C_2 < C_1$  entonces ▷ Si el desplazamiento es conveniente
    factible  $\leftarrow$  True ▷ Verificar factibilidad
     $j \leftarrow i - 1$ 
     $k \leftarrow$  último período tal que  $z_{ik} > 0$ 
    mientras factible &  $j < k$  hacer
10: | factible  $\leftarrow \sum_{l|l \geq k, z_{il} > 0} (A_{kl}^{i-1} z_{il}) + \sum_{l=1}^k y_{lk} - y_{ik} \leq u_k$ 
    |  $k \leftarrow k + 1$ 
    fin mientras
    si factible entonces ▷ Realizar el desplazamiento
15: |  $x_{i-1} \leftarrow x_{i-1} + q$ 
    |  $x_i \leftarrow 0$ 
    | para  $j = i - 1, \dots, k - 1$  hacer
    | | si  $z_{ij} > 0$  entonces
    | | |  $y_{i-1,j} \leftarrow y_{i-1,j} + q - z_{ij}$  ▷ Modificar el nivel de inventario
    | | |  $z_{i-1,j} \leftarrow z_{i-1,j} + z_{ij}$ 
    | | |  $q \leftarrow (q - z_{ij}) * (1 - \alpha_{i-1,j})$ 
    | | |  $z_{ij} \leftarrow 0$ 
    | | | si no
    | | | |  $y_{y-1,j} \leftarrow y_{y-1,j} + q$  ▷ Modificar el nivel de inventario
    | | | |  $q \leftarrow q(1 - \alpha_{i-1,j})$ 
    | | | fin si
    | | |  $y_{ij} \leftarrow 0$ 
    | | fin para
    | |  $z_{i-1,k} \leftarrow z_{i-1,k} + z_{ik}$ 
    | |  $z_{ik} \leftarrow 0$ 
    | fin si
30: fin si
fin para

```

5.2.2. Shift Parcial (S-Parcial)

Dados dos períodos i y j tal que $z_{ij} > 0$, se consideran los períodos k , $k < i$. Se evalúa el costo de satisfacer la parte de la demanda de j que es satisfecha por i con productos de k . A esta heurística le llamamos *Shift Parcial*. Este tipo de desplazamiento no necesariamente crea ni elimina periodos de producción. Para saber si es conveniente realizar este desplazamiento, hay que comparar el costo de ambas opciones.

El costo de satisfacer la demanda de j con producción en i es:

$$C_1 = \eta f_i + u_i A_{ij}^i z_{ij} + S_{ij} z_{ij} \quad (5.2.5)$$

Donde η es 1 si el período i solamente abastece la demanda de j . Es decir que η es 0 si realizar el desplazamiento haría que i ya no fuera un período de producción. Recordar que S_{ij} es el costo de almacenamiento de satisfacer una unidad de demanda de j con producción en i .

El costo de satisfacer la demanda de j con producción en k es:

$$C_2 = (1 - \delta_k)f_k + u_k * q + S_{kj}z_{ij} \quad (5.2.6)$$

Donde δ_k es 1 si k ya era un período de producción, 0 en caso contrario. q es la cantidad que hay que producir en k para reemplazar los artículos producidos en i :

$$q = A_{kj}^k z_{ij} \quad (5.2.7)$$

Si es conveniente realizar el desplazamiento ($C_2 < C_1$), hay que verificar que sea factible. Esto se hace de manera similar al desplazamiento anterior.

El Pseudocódigo 3 se corresponde con esta heurística.

Pseudocódigo 3 Shift parcial

```

1: para todo  $i, j$  tal que  $z_{ij} > 0$  hacer
   |   para todo  $k, k < i$  hacer
   |   |    $q \leftarrow A_{kj}^k z_{ij}$  ▷ Cantidad a producir en  $k$ 
   |   |    $C_1 \leftarrow \eta f_i + u_i A_{ij}^i z_{ij} + S_{ij} z_{ij}$ 
   |   |   5:  $C_2 \leftarrow (1 - \delta_k) f_k + u_k * q + S_{kj} z_{ij}$ 
   |   |   si  $C_2 < C_1$  entonces ▷ Si el desplazamiento es conveniente
   |   |   |   factible  $\leftarrow$  True ▷ Verificar factibilidad
   |   |   |    $l \leftarrow k$ 
   |   |   |   mientras factible &  $k < i$  hacer
   |   |   |   |   factible  $\leftarrow A_{lj}^k z_{ij} + \sum_{m=1}^l y_{ml} \leq u_l$ 
   |   |   |   |    $l \leftarrow l + 1$ 
   |   |   |   fin mientras
   |   |   |   mientras factible &  $k < j$  hacer
   |   |   |   |   factible  $\leftarrow A_{lj}^k z_{ij} + \sum_{m=1}^l y_{ml} - A_{lj}^i z_{ij} \leq u_l$ 
   |   |   |   |    $l \leftarrow l + 1$ 
   |   |   |   fin mientras
   |   |   |   si factible entonces ▷ Realizar el desplazamiento
   |   |   |   |    $z_{kj} \leftarrow z_{kj} + z_{ij}$ 
   |   |   |   |    $x_k \leftarrow x_k + q$ 
   |   |   |   |    $x_i \leftarrow x_i - A_{ij}^i z_{ij}$ 
   |   |   |   |   para  $l = k, \dots, i - 1$  hacer ▷ Modificar el nivel de inventario
   |   |   |   |   |    $y_{kl} \leftarrow y_{kl} + q$ 
   |   |   |   |   |    $q \leftarrow q(1 - \alpha_{kl})$ 
   |   |   |   |   fin para
   |   |   |   |   para  $l = i, \dots, j - 1$  hacer
   |   |   |   |   |    $y_{il} \leftarrow y_{il} - A_{ij}^i z_{ij}$ 
   |   |   |   |   |    $y_{kl} \leftarrow y_{kl} + q$ 
   |   |   |   |   |    $q \leftarrow q(1 - \alpha_{kl})$ 
   |   |   |   |   fin para
   |   |   |   |    $z_{ij} \leftarrow 0$ 
   |   |   |   fin si
   |   |   fin si
   |   fin para
fin para

```

5.2.3. Shift de Saturación (S-Sat)

En esta heurística, se busca desplazar parte de los artículos producidos en un período de producción, a un período de producción anterior. La idea es “saturar” el inventario en cada período de producción, y por esto denominamos a esta heurística como *Shift de Saturación*. Esta heurística puede producir soluciones en las cuales la demanda de un período dado ya no es satisfecha por un único período de producción.

Para esto definimos la holgura entre i y j : cantidad adicional máxima q que se puede producir en i , que no exceda la capacidad entre los períodos i y j .

$$\begin{aligned} \text{máx}\{q \mid q \leq u_i - \sum_{l=1}^i y_{li}, y \\ \forall k, i < k < j, q \prod_{l=i}^{k-1} (1 - \alpha_{il}) \leq u_k - \sum_{l=1}^k y_{lk}\} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

Dado un período i de producción, se consideran todos los períodos posteriores j tal que:

- La demanda de j no es satisfecha completamente por i ($z_{ij} \neq d_j$).
- La holgura entre i y j es mayor que 0 (es decir, es factible producir artículos en i que satisfagan parcialmente la demanda de j).

Dados i y j que cumplen con esas condiciones, se busca un período k tal que:

- La demanda de j sea parcial o totalmente satisfecha por k ($z_{kj} > 0$).
- Es más barato satisfacer la demanda de j con producción en i que con producción en k ($T_{ij} < T_{kj}$)

Bajo estas condiciones, se reemplazará la mayor cantidad posible de artículos producidos en k que satisfacen la demanda en j por artículos producidos en i . Esta cantidad q es el mínimo entre la holgura entre i y j , y la cantidad que reemplaza totalmente a z_{kj} :

$$q = \text{mín}\{\text{holgura}_{ij}, A_{ij}^i z_{kj}\} \quad (5.2.9)$$

El Pseudocódigo 4 se corresponde con la función de cálculo de holgura.

El Pseudocódigo 5 se corresponde con el *shift* de saturación.

Pseudocódigo 4 Calcular holgura

Entrada: i, j : periodos entre los cuales calcular la holgura.

Salida: q : holgura entre i y j .

```
1: función CALCULARHOLGURA(i, j)
   |  $q \leftarrow u_i - \sum_{l=1}^i y_{li}$ 
   |  $k \leftarrow i + 1$ 
   |  $tasaDeterioro \leftarrow 1 - \alpha_{i,i}$ 
5: mientras  $q > 0$  y  $k \leq j$  hacer
   |   |  $holgurak \leftarrow u_k - \sum_{l=1}^k y_{lk}$   $\triangleright$  La cap. de inventario no utilizada en el período  $k$ 
   |   | si  $q * tasaDeterioro > holgurak$  entonces
   |   |   |  $q = holgurak / tasaDeterioro$ 
   |   |   | fin si
10:   |   |  $tasaDeterioro \leftarrow tasaDeterioro * (1 - \alpha_{ik})$ 
   |   |  $k \leftarrow k + 1$ 
   |   | fin mientras
   |   | devolver  $q$ 
   | fin función
```

Pseudocódigo 5 Shift de saturación

```
1: para todo  $i$  tal que  $x_i > 0$  hacer
   | para todo  $j$ , tal que  $j > i$  y  $z_{ij} \neq d_j$  hacer
   |   | para todo  $k$ , tal que  $z_{kj} > 0$  y  $T_{kj} > T_{ij}$  hacer
   |   |   |  $holgura \leftarrow \text{CALCULARHOLGURA}(i, j)$ 
5:   |   |   | si  $holgura > 0$  entonces
   |   |   |   |  $q \leftarrow \min\{holgura, z_{kj} A_{ij}^i\}$   $\triangleright$  Cantidad a producir en  $i$ 
   |   |   |   |  $x_i \leftarrow x_i + q$ 
   |   |   |   | para  $l = i, \dots, j$  hacer  $\triangleright$  Modificar los niveles de inventario
   |   |   |   |   |  $y_{i,l} \leftarrow y_{i,l} + q$ 
10:   |   |   |   |   |  $q \leftarrow q(1 - \alpha_{i,l})$ 
   |   |   |   |   | fin para
   |   |   |   |  $z_{ij} \leftarrow z_{ij} + q$ 
   |   |   |   |  $z_{kj} \leftarrow z_{kj} - q$ 
   |   |   |   |  $q \leftarrow A_{kj}^k q$   $\triangleright$  Cantidad de producción en  $k$  que es reemplazada
15:   |   |   |   | para  $l = k, \dots, j$  hacer  $\triangleright$  Modificar los niveles de inventario
   |   |   |   |   |  $y_{k,l} \leftarrow y_{k,l} - q$ 
   |   |   |   |   |  $q \leftarrow q * (1 - \alpha_{k,l})$ 
   |   |   |   |   | fin para
   |   |   |   | fin si
20:   |   |   | fin para
   |   |   | fin para
   |   | fin para
   |  $i \leftarrow 0$ 
   | si  $i + k \leq \text{maxval}$  entonces
25:   |   |  $i \leftarrow i + k$ 
   | fin si
```

Capítulo 6

Detalles de implementación

En esta Sección se describen los aspectos más importantes de la implementación de la solución. En la Sección 6.1 detalla el lenguaje y las librerías utilizadas. En la Sección 6.2 se incluye información referente a la generación de casos de prueba. En la Sección 6.3 se describen los métodos que se implementaron para hallar la solución. En la Sección 6.4 se especifica cuál fue el comando utilizado y los parámetros correspondientes para resolver los casos de prueba con GLPK.

6.1. Lenguaje y librerías utilizadas

Las heurísticas presentadas en la Sección anterior fueron implementadas en *Python*¹, versión 3.6.4. *Python* es un lenguaje interpretado muy utilizado en investigación, contando con una gran cantidad de paquetes científicos² utilizados para el análisis y procesamiento de datos, estadística, y *machine learning*.

Las razones por las cuales se optó por utilizar *Python*, son principalmente la facilidad de programar en el lenguaje y la legibilidad del código obtenido. Además, a la hora de desarrollar una solución a un problema de optimización, el intérprete de línea de comandos resulta de gran utilidad para, por ejemplo, realizar pruebas e inspeccionar matrices.

En general se considera que la principal desventaja del lenguaje es que es ineficiente. Sin embargo, para el procesamiento de números y cálculos con matrices, se utilizó la librería NumPy³. NumPy es un paquete para cómputo científico, donde muchos de sus componentes están implementados en C/C++. Los objetos manejados por NumPy internamente son matrices similares a C/C++ (a diferencia de las listas que maneja *Python* nativamente, que son listas dinámicas con punteros a objetos). Debido a estas razones, al utilizar NumPy se consiguen velocidades comparables a utilizar C/C++⁴.

Para medir el tiempo de ejecución de cada método de solución se utilizó *timeit*⁵. *timeit* es una librería de *Python* utilizada para medir el tiempo de ejecución de fragmentos de código. Si bien existen soluciones más robustas tales como *cProfile*⁶, estas librerías tienen un *overhead* considerable.

Para generar números aleatorios para los casos de prueba, se utilizó la librería *random*⁷. Dicha librería genera números de punto flotante con 53 bits de precisión. Los números obtenidos fueron redondeados a 2 dígitos significativos, para tratar de evitar posibles problemas

¹<https://www.python.org/> – último acceso noviembre 2019

²<https://wiki.python.org/moin/NumericAndScientific> – último acceso noviembre 2019

³<https://numpy.org/> – último acceso noviembre 2019

⁴<https://stackoverflow.com/questions/7596612/benchmarking-python-vs-c-using-blas-and-numpy> – último acceso noviembre 2019

⁵<https://docs.python.org/3/library/timeit.html> – último acceso noviembre 2019

⁶<https://docs.python.org/3/library/profile.html> – último acceso noviembre 2019

⁷<https://docs.python.org/3/library/random.html> – último acceso noviembre 2019

de redondeo al hacer cálculos.

Para gestionar los casos de prueba se utilizó el módulo *pickle*⁸. *pickle* permite serializar y deserializar objetos complejos de *Python*. Esto permitió, una vez generado un caso de prueba, contar con una manera fácil de guardar y recuperar dicho caso. Cada caso de prueba fue además guardado en el formato de datos de *MathProg*, para ser utilizados como entrada a GLPK.

6.2. Generación de casos de prueba

Para generar casos de prueba, se implementaron 5 rutinas auxiliares (una por cada una de las clases de problemas definidas en la Sección 7.2). Cada una de estas rutinas, dado un tamaño del problema T , genera un objeto que representa una instancia del problema a resolver. Este objeto está formado por las siguientes variables:

- Tamaño T del problema (cantidad de períodos).
- Vectores de tamaño T para:
 - La capacidad en cada período.
 - La demanda en cada período.
 - El costo fijo de producción en cada período.
 - El costo unitario de producción en cada período.
- Matrices de tamaño $T \times T$, definidas en su parte triangular positiva, para:
 - Los costos de almacenamiento, donde en la posición (i, j) se guarda el costo de almacenar una unidad producida en el período i , en el período j .
 - Las tasas de deterioro, donde en la posición (i, j) se guarda la tasa de deterioro de los artículos producidos en el período i , en el período j .

Una vez generadas estas variables, se utiliza *pickle* para guardarlas en un archivo especificado. Una vez guardadas, pueden ser recuperadas en cualquier momento utilizando el método `load` de *pickle*.

Además se incluye una rutina auxiliar (`generarData`) que, dadas las variables mencionadas anteriormente, las vuelca a un archivo en el formato adecuado para que sea utilizado como entrada del solver `glpsol` de GLPK.

6.3. Implementación de la solución

Se implementó un método distinto para cada una de las propuestas de solución, los cuales retornan el costo de la solución obtenida. Los métodos correspondientes a las heurísticas de mejora retornan también el costo de la solución inicial obtenida con el algoritmo de Hsu modificado, para facilitar la comparación entre ambas soluciones. Los métodos implementados toman una instancia del problema tal como se definió en la Sección anterior. Estos métodos son:

- `resolverHsuModificado`: implementa el Peudocódigo 1.
- `resolverSProd`
- `resolverSParcial`
- `resolverSSat`

⁸<https://docs.python.org/3/library/pickle.html> – último acceso noviembre 2019

- **resolver3Heurísticas**: este método está basado en aplicar *shifts* de producción, parciales, y de saturación, en ese orden. Esto se hace continuamente hasta que no se pueda mejorar más la solución que se tiene.

Los métodos anteriores, permiten hallar el costo de la solución de una instancia del problema. Estos métodos utilizan distintas funciones auxiliares, que se detallan a continuación.

Para hallar la solución inicial correspondiente al algoritmo de Hsu modificado, se implementaron las siguientes rutinas:

- **calcularMatrices**: calcula las matrices A , S y T del algoritmo de Hsu modificado.
- **calcularV**: calcula la matriz V del algoritmo de Hsu modificado.
- **construirSolucion**: dados los datos del problema y las matrices A y V , calcula el valor de las variables que forman la solución.
- **calcularCostoSolucion**: dadas las variables del problema obtenidas por el método anterior, calcula el costo de la solución.

Observar que para el algoritmo de Hsu modificado, el costo de la solución óptima puede obtenerse de la matriz V (recordamos de la Sección 5.1 que el costo de la solución encontrada por este método está dado por $\min_{1 \leq i \leq n} V(i, n)$). Sin embargo, este método es necesario para calcular el costo de la solución luego de que se hayan aplicado las heurísticas.

Cada uno de los métodos que calcula una solución utilizando las heurísticas de mejora, utiliza alguna de las siguientes rutinas auxiliares:

- **shiftProd**: implementa el Pseudocódigo 2. Realiza tantos *shifts* de producción como sea posible.
- **shiftParcial**: implementa el Pseudocódigo 3. Realiza tantos *shifts* parciales como sea posible.
- **shiftSat**: implementa el Pseudocódigo 5. Realiza tantos *shifts* de saturación como sea posible. Para evitar problemas de redondeo que surgieron en la práctica, no se realizan *shifts* en períodos con producción menor a 0,0005, ni *shifts* en cantidades menores a 0,015.

Este método hace uso de una función auxiliar, **calcularHolgura**, que calcula la holgura entre dos períodos según 5.2.8. implementa el Pseudocódigo 4.

6.4. Uso de GLPK

Para resolver problemas con el solver `glpsol` de GLPK se utilizó el siguiente comando:

```
glpsol.exe -m modelo.mod -d d.data -o output.txt --log salidaConsola.txt
--tmlim tiempoLimite
```

Donde:

- `-m modelo.mod` – indica el archivo con el modelo que debe cargarse.
- `-d d.data` – indica el archivo del cual leer los datos del problema (el archivo que contiene el caso de prueba).
- `-o output.txt` – indica dónde guardar la solución encontrada.

- `--log salidaConsola.txt` – indica dónde guardar la salida en consola del programa, si se desea.
- `--tmlim tiempoLimite` – (opcional) indica el tiempo límite en segundos que GLPK tendrá para hallar una solución.

Capítulo 7

Pruebas realizadas

En esta Sección se define todo lo referente a las pruebas que se realizaron. En la Sección 7.1 definen los objetivos de las pruebas realizadas. En la Sección 7.2 se describen los distintos casos de prueba generados. Luego, estos casos son definidos más formalmente en la Sección 7.3. En la Sección 7.4 se detallan las pruebas que se realizaron, y en la Sección 7.5 se describe las especificaciones del equipo en el que se ejecutaron las pruebas.

7.1. Objetivo de las pruebas

El objetivo de las pruebas es comparar los distintos métodos de solución. Se desea comparar el desempeño de las distintas heurísticas entre sí, así como compararlas con el desempeño de GLPK (versión 4.64). Se desea tener una noción de si las distintas heurísticas son buenas (y alguna medida de qué tan buenas son). Con todo esto se busca saber cuáles de las heurísticas son mejores (en términos de tiempo de ejecución y calidad de la solución obtenida).

Además se busca averiguar, para el caso de problemas grandes que no pueden ser resueltos eficientemente con GLPK, si realmente es conveniente utilizar alguna de las soluciones basadas en heurísticas en su lugar.

Para todo esto se medirán el tiempo que se tarda en encontrar las soluciones con cada método, además de medidas que indiquen la diferencia entre las distintas soluciones obtenidas.

Además se desea llegar a una conclusión acerca de, en la práctica, cuál heurística es conveniente utilizar según la circunstancia. Es posible que existan, por ejemplo, situaciones particulares en las cuales alguna de las heurísticas se desempeñe considerablemente mejor que las otras, mientras que en otras situaciones la misma heurística se desempeñe peor.

Para analizar este comportamiento es que se diseñarán distintas clases de casos de prueba, detallados en la Sección siguiente.

7.2. Clases de problemas

A continuación se detallan los distintos clases de problemas utilizadas para ejecutar las pruebas. Se definieron 5 distintas clases:

- **c-Hsu**: problemas que siguen las suposiciones de Hsu (2000) [12]. Es decir, problemas donde los artículos más antiguos se deterioran más rápido y conllevan mayores costos de almacenamiento
- **c-Div**: problemas “diversos” o aleatorios, donde los parámetros del problema no están relacionados entre sí.
- **c-Falto**: problemas con costos fijos altos.

- **c-Halto**: problemas con costos de almacenamiento alto.
- **c-Ccrec**: problemas con costos de producción crecientes.

La primer clase (**c-Hsu**) fue elegida ya que el método presentado para hallar soluciones iniciales está basado en el algoritmo de Hsu (2000) [12]. Parece razonable esperar que el método de solución presentado se desempeñe bien para los problemas de esta clase.

Luego, ya que en nuestro problema no estamos tomando ninguna suposición acerca de los parámetros del problema, es de interés ver cómo se desempeña nuestra solución para casos generales **c-Div**.

Resulta también de interés analizar los casos donde los costos tienen distintas formas (**c-Falto**) y (**c-Halto**). Se espera que nuestra propuesta de solución tenga dificultades con la clase **c-Falto**. Esto se debe a que si los costos fijos de producción son muy altos, resultaría deseable minimizar la cantidad de períodos en los que se produce. Sin embargo el deseo de producir en menor cantidad de períodos posibles y mantener alta cantidad de artículos en inventario parecería ser lo contrario a lo que normalmente deseamos hacer. Esto es porque producir en grandes cantidades provocará que mayor cantidad de artículos se desperdicien. Además, resultará difícil mantener muchos artículos en inventario cuando la capacidad que se tiene es limitada.

Finalmente se espera que la clase **c-Ccrec**, donde los costos de cada período son mayores a los del período anterior, sea la que de mayores dificultades. En estos casos parecería que las soluciones óptimas serán aquellas que siempre produzcan lo antes posible, manteniendo la mayor cantidad de artículos posibles en inventario. Este es un caso más extremo que la clase **c-Falto**, por lo que se espera que las dificultades sean aún mayores.

7.3. Definición formal de clases de problemas

Los casos de prueba fueron generados acorde a los siguientes procedimientos (usando $U[a, b]$ para denotar un valor elegido por una variable aleatoria con distribución uniforme entre a y b):

c-Hsu:

- Capacidad del período i : $U[20, 35]$.
- Demanda en el período i : $U[5, 20]$.
- Costo fijo de producción en el período i : $U[300, 600]$.
- Costo unitario de producción en el período i : $U[40, 50]$.
- En cada período i , el costo de almacenar una unidad de un artículo producido en i es $U[1, 10]$. El costo de almacenamiento de los artículos producidos en un período anterior j , ($j < i$), es el costo de los artículos producidos en $(j + 1)$ más $U[1, 5]$.
- En cada período i , la tasa de deterioro de los productos producidos en i es $U[0, 0,1]$. La tasa de los artículos producidos en un período anterior j , ($j < i$), es la tasa de los artículos producidos en $(j + 1)$ más $U[0, 0,05]$.

c-Div:

- La capacidad, demanda y costos de producción se genera de manera igual a la clase **c-Hsu**.
- El costo de almacenar una unidad de un artículo producido en i , en el período j es $U[1, 5]$.
- La tasa de deterioro los artículos producidos en i , en el período j es $U[0, 0,18]$.

c-Falto:

- La capacidad, demanda, costos unitarios de producción, costos de almacenamiento y tasas de deterioro se genera de manera igual a la clase **c-Div**.
- Costo fijo de producción en el período i : $U[3000, 6000]$.

c-Halto:

- La capacidad, demanda, costos de producción y tasas de deterioro se genera de manera igual a la clase **c-Div**.
- El costo de almacenar una unidad de un artículo producido en i , en el período j es $U[15, 25]$.

c-Crec:

- Capacidad del período i : $U[300, 350]$.
- Demanda en el período i : $U[20, 40]$.
- Costo fijo de producción en el período 1: $U[200, 400]$. El costo fijo en el período $(i + 1)$ es igual al costo en i más $iU[200, 400]$.
- Costo unitario de producción en el período i : $U[40, 50]$. El costo unitario en el período $(i + 1)$ es igual al costo en i más $iU[30, 40]$.
- El costo de almacenar una unidad de un artículo producido en i , en el período j es $U[1, 15]$.
- La tasa de deterioro los artículos producidos en i , en el período j es $U[0, 0, 18]$.

7.4. Plan de pruebas

A continuación se detallan las pruebas realizadas, y las métricas tomadas.

7.4.1. Problemas chicos (10 y 20 períodos)

Para cada clase de problemas, se generaron 50 casos de prueba con 10 períodos de duración, y 50 casos de 20 períodos de duración. Para todos los casos de prueba generados, se guardó una versión con extensión `.pkl` generada por el módulo `pickle` de *Python*. También se guardó, con extensión `.data`, el caso de prueba en formato de datos de *MathProg* para usarlo como entrada para GLPK.

Primero utilizó GLPK para hallar la solución exacta a cada problema. Luego se resolvieron estos problemas de cinco maneras distintas:

- Utilizando el algoritmo de Hsu modificado y definiendo la solución obtenida como la solución final, sin aplicar heurísticas de mejora.
- Utilizando el algoritmo de Hsu modificado para hallar una solución factible inicial, y luego utilizando cada una de las heurísticas por separado, obteniendo tres soluciones distintas.
- Utilizando el algoritmo de Hsu modificado para hallar una solución factible inicial, y luego utilizando las tres heurísticas en sucesión varias veces, hasta que no se pudiera mejorar la solución obtenida.

Para las soluciones obtenidas utilizando solamente el algoritmo de Hsu modificado, es de interés medir:

- Cantidad de casos en los que se halló la solución óptima.
- Tiempo que se tardó en hallar la solución.
- Qué tan lejos está la solución hallada mediante este método, de la solución hallada por GLPK.

Para las soluciones obtenidas utilizando las heurísticas de mejora, en primer lugar, es de interés tomar las mismas mediciones. Adicionalmente, es de interés medir qué tanto se logró mejorar la solución inicial hallada.

7.4.2. Problemas grandes (50 períodos)

Como se concluyó en la Sección 4.3, el tiempo que se tarda en encontrar una solución en problemas grandes es demasiado largo, dejando de ser factible buscar una solución exacta.

Es de interés entonces estudiar cómo se desempeñan nuestras heurísticas en estos casos. Para esto se busca comparar la solución obtenida por el método que proponemos con la mejor solución que puede hallar GLPK en un tiempo razonable.

Con este fin, para cada caso de problemas, se crean 5 casos de prueba con 50 períodos de largo. Se compara la mejor solución que puede encontrar GLPK en un período de media hora, con la solución hallada por nuestras heurísticas.

Las métricas tomadas son similares a las de los problemas chicos. La diferencia principal es que en este caso, es posible que nuestras heurísticas encuentren mejores soluciones que las encontradas por GLPK. Es de interés registrar cuántas veces sucede esto.

Además, ya que GLPK probablemente no pueda encontrar una solución óptima, se reporta:

- Cuántas veces GLPK sí pudo encontrar la solución óptima.
- El *duality gap* promedio de cada clase de pruebas reportado por GLPK. Esto nos da una medida de qué tan buena es la solución reportada por GLPK (en el sentido de qué tan cerca está de la solución óptima).

7.5. Hardware utilizado

Para todas las pruebas se utilizó una computadora con sistema operativo Windows 10 Home de 64 bits, procesador Intel Core i7-6700HQ 2.6GHz y 16GB de memoria RAM.

Capítulo 8

Resultados obtenidos

En esta Sección se presentan los resultados obtenidos a partir del plan de pruebas descrito en la Sección anterior. Los resultados correspondientes a los problemas chicos y grandes se muestran en las Secciones 8.1 y 8.2, respectivamente. El detalle de los resultados obtenidos para cada caso individual se encuentra en el Anexo A. El análisis y comentarios personales acerca de los resultados le siguen en la Sección 8.3.

8.1. Resultados para 10 y 20 periodos

	n	GLPK		Hsu			S-Prod			S-Parcial			S-Sat				
		t	N	t	%dif.	t	%mej.	%dif.	N	t	%mej.	%dif.	N	t	%mej.	%dif.	N
c-Hsu	10	0.099	50	0.0007	0	0.0009	0	0	50	0.0007	0	0	50	0.0006	0	0	50
	20	0.152	48	0.0022	0.0018	0.0023	0	0.0018	48	0.0027	0.0013	0.0005	49	0.0024	0.0018	0	50
c-Div	10	0.104	50	0.0007	0	0.0008	0	0	50	0.0008	0	0	50	0.0007	0	0	50
	20	0.376	44	0.0022	0.0711	0.0022	0	0.0711	44	0.0026	0	0.0711	44	0.0023	0.0014	0.0697	44
c-Falto	10	0.099	39	0.0007	0.6041	0.0009	0	0.6041	39	0.0007	0.0174	0.5866	43	0.0007	0.0278	0.5762	44
	20	0.170	28	0.0020	1.8882	0.0022	0	1.8882	28	0.0027	0.1148	1.7665	29	0.0027	0.0202	1.8679	30
c-Halto	10	0.099	50	0.0007	0	0.0009	0	0	50	0.0008	0	0	50	0.0007	0	0	50
	20	0.76	50	0.0022	0	0.0022	0	0	50	0.0027	0	0	50	0.0025	0	0	50
c-Crec	10	0.099	0	0.0010	66.5732	0.0012	1.8551	61.5957	0	0.0014	31.1264	9.6569	5	0.0018	25.4790	21.3959	5
	20	0.109	0	0.0036	49.5406	0.0039	1.1642	47.7038	0	0.0073	21.3558	17.4291	0	0.0044	5.3152	41.5651	0

Tabla 8.1: Resultados al aplicar cada heurística por separado (10 y 20 períodos)

En la Tabla 8.1 se muestran los resultados de aplicar cada heurística por separado. En la Tabla 8.2 se muestran los resultados de aplicar las 3 heurísticas en conjunto.

Leyenda: n es la cantidad de períodos. Para cada método de solución, t es el promedio de tiempo en segundos que se tardó en encontrar la solución. N es la cantidad de veces que el método halló la solución óptima.

Para las heurísticas, $\%mej$ es el porcentaje que se mejoró en promedio la solución inicial. $\%dif$ es en porcentaje la diferencia promedio entre la solución hallada por la heurística y la óptima.

En las Figuras 8.1 y 8.2 se muestran, para las diferentes clases de problemas, las diferencias entre la solución obtenida por GLPK y la solución obtenida por cada una de las heurísticas. La Figura 8.1 se corresponde con los problemas de 10 períodos, y la Figura 8.2 se corresponde con los problemas de 20 períodos.

	n	GLPK	Hsu			3 heurísticas			N
		t	N	t	%dif.	t	%mej.	%dif.	
c-Hsu	10	0.099	50	0.0007	0	0.0013	0	0	50
	20	0.152	48	0.0022	0.0018	0.0048	0.0018	0	50
c-Div	10	0.104	50	0.0007	0	0.0013	0	0	50
	20	0.376	44	0.0022	0.0711	0.0045	0.0014	0.0697	44
c-Falto	10	0.099	39	0.0007	0.6041	0.0014	0.0278	0.5762	44
	20	0.170	28	0.0020	1.8882	0.0056	0.1359	1.7451	30
c-Halto	10	0.099	50	0.0007	0	0.0013	0	0	50
	20	0.76	50	0.0022	0	0.0050	0	0	50
c-Ccrec	10	0.099	0	0.0010	66.5732	0.0024	33.1526	5.9444	6
	20	0.109	0	0.0036	49.5406	0.0336	23.1092	14.7504	0

Tabla 8.2: Resultados de aplicar las 3 heurísticas en conjunto (10 y 20 períodos)

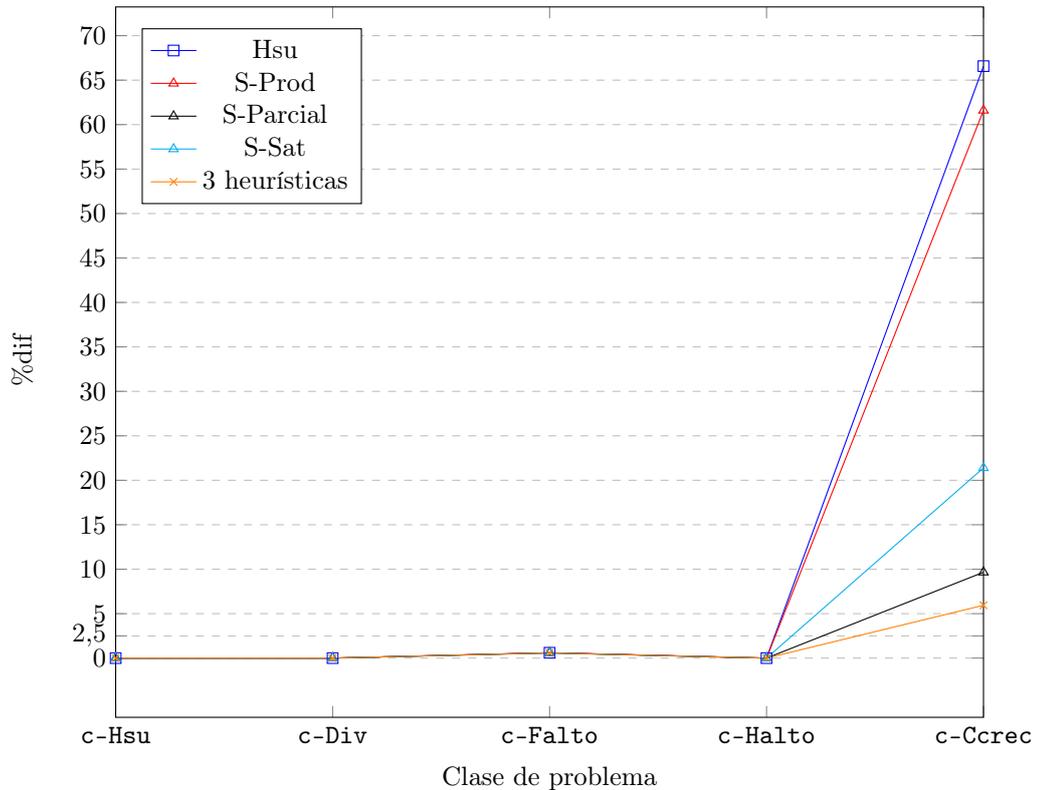


Figura 8.1: Diferencia entre la solución hallada por GLPK y la solución hallada por cada heurística (10 períodos).

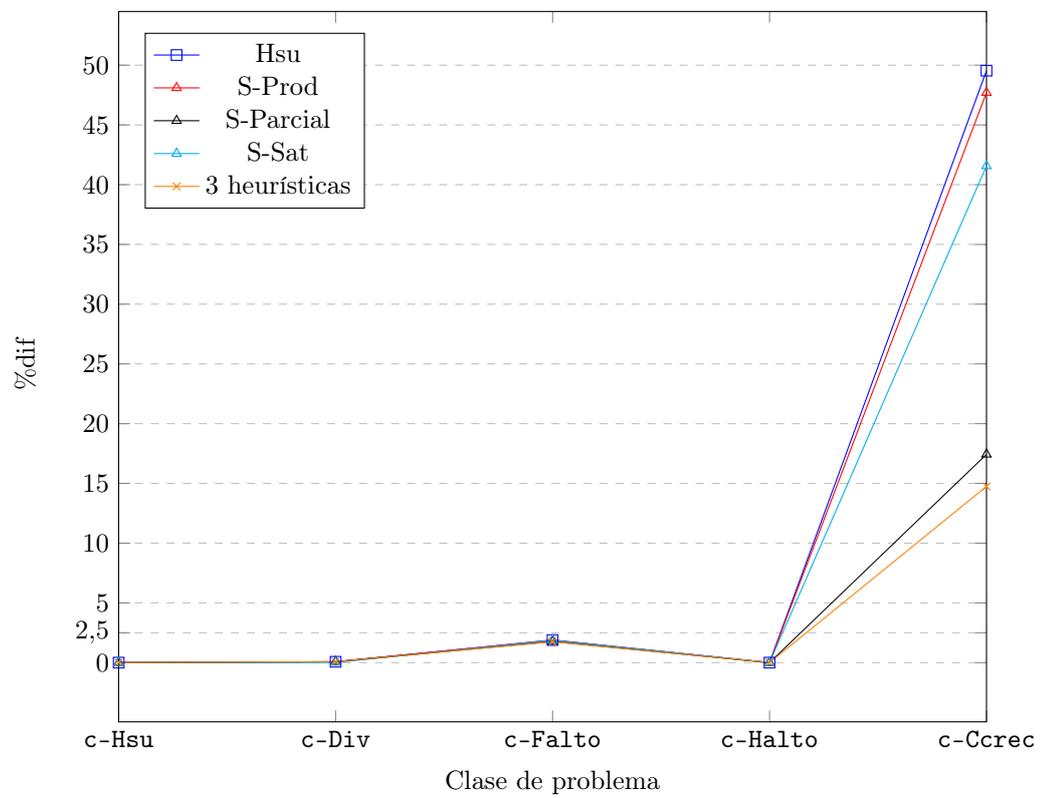


Figura 8.2: Diferencia entre la solución hallada por GLPK y la solución hallada por cada heurística (20 períodos).

	n	GLPK		
		t	N	%gap
c-Hsu	50	1800	0	3.08
c-Div	50	1800	0	7.52
c-Falto	50	1800	0	8.16
c-Halto	50	1800	0	10.04
c-Ccrec	50	762.1	3	0.30

Tabla 8.3: Resultados al ejecutar GLPK por 30 minutos

	n	GLPK t	Hsu			S-Prod			S-Parcial			S-Sat					
			N	t	%dif.	t	%mej.	%dif.	N	t	%mej.	%dif.	N	t	%mej.	%dif.	N
c-Hsu	50	1800	5	0.0119	-1.160	0.0214	0	-1.160	5	0.0007	0	-1.160	5	0.0267	0	-1.160	5
c-Div	50	1800	5	0.0119	-2.827	0.0105	0	-2.827	5	0.0150	0	-2.827	5	0.0177	0	-2.827	5
c-Falto	50	1800	4	0.0118	-2.187	0.0111	0	-2.187	4	0.0165	0.0286	-2.214	4	0.0203	0.0286	-2.214	4
c-Halto	50	1800	5	0.0117	-1.581	0.0155	0	-1.581	5	0.0189	0	-1.581	5	0.0272	0	-1.581	5
c-Ccrec	50	762.1	0	0.0223	3.187	0.0211	0.0408	3.145	0	0.0476	1.5127	1.624	0	0.0294	0.6630	2.502	0

Tabla 8.4: Resultados al aplicar cada heurística por separado (50 períodos)

8.2. Resultados para 50 períodos

En la Tabla 8.3 se muestran los resultados correspondientes a ejecutar GLPK durante media hora. Aquí N es la cantidad de veces que GLPK halló la solución óptima, y %gap es el promedio de la brecha de dualidad para cada clase de problemas.

En la Tabla 8.4 se muestran los resultados de aplicar cada heurística por separado. En la Tabla 8.5 se muestran los resultados de aplicar las 3 heurísticas en conjunto.

En este caso N es la cantidad que cada método halla una solución mejor a la de GLPK. Para las heurísticas, %dif es la diferencia entre la solución hallada por las heurísticas y la solución hallada por GLPK. Un valor negativo indica que la solución hallada por las heurísticas es mejor que el de GLPK.

En la Figura 8.3 se muestran, para las diferentes clases de problemas, las diferencias entre la solución obtenida por GLPK y la solución obtenida por cada una de las heurísticas.

8.3. Análisis de los resultados

En resumen, podemos decir que los resultados obtenidos son bastante buenos. Una de las cosas que se destaca es que la solución hallada por el algoritmo de Hsu modificado, sin aplicar ninguna heurística de mejora, es en sí bastante buena. Efectivamente, se desempeña muy bien en la clase c-Hsu, y mucho mejor de lo esperado en la clase c-Halto.

De hecho, el algoritmo de Hsu modificado halla la solución óptima en en la mayoría de los casos, con la excepción de c-Ccrec. En esta clase de problemas, no solo nunca encontró una solución óptima en los casos de 10 y 20 períodos, sino que las soluciones encontradas están bastante lejos de las halladas por GLPK.

Mirando las Tablas 8.1 y 8.2 podemos sacar otra conclusión en estos casos, y es que las heurísticas de mejora se desempeñaron muy bien. En el caso c-Ccrec especialmente, la heurística S-Parcial halló soluciones que son 31 y 21 por ciento para los problemas con 10

	n	GLPK	Hsu			3 heurísticas			
		t	N	t	%dif	t	%mej.	%dif.	N
c-Hsu	50	1800	5	0.0119	-1.160	0.0451	0	-1.160	5
c-Div	50	1800	5	0.0119	-2.827	0.0358	0	-2.827	5
c-Falto	50	1800	4	0.0118	-2.187	0.0379	0.0286	-2.214	4
c-Halto	50	1800	5	0.0117	-1.581	0.1079	0	-1.581	5
c-Ccrec	50	762.1	0	0.0223	3.187	0.1192	1.9391	1.185	6

Tabla 8.5: Resultados de aplicar las 3 heurísticas en conjunto (50 períodos)

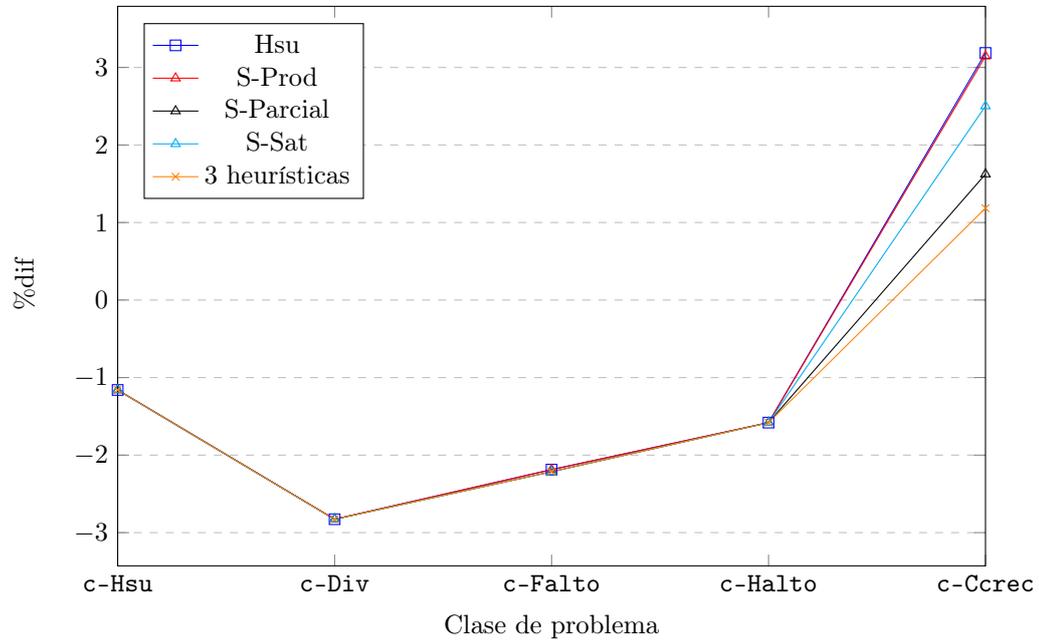


Figura 8.3: Diferencia entre la solución hallada por GLPK y la solución hallada por cada heurística (50 períodos).

y 20 períodos respectivamente, acercándose en 9 y 17 por ciento a la solución óptima. **S-Sat** Mejoró las soluciones iniciales en 21 y 41 por ciento, hallando soluciones que están a 21 y 41 por ciento de la óptima, para los problemas de 10 y 20 períodos respectivamente.

Otra cosa que es de interés en estos casos, es que como conjeturábamos en la Sección 7.2, la clase **c-Ccrec** efectivamente resultó ser la más difícil de resolver. Sin embargo, los resultados obtenidos no son tan malos. Para los casos de 10 y 20 períodos, **S-Parcial** obtiene soluciones razonablemente cerca de las óptimas, y las tres heurísticas en conjunto obtienen resultados aún mejores.

Otra de las suposiciones que fueron correctas, es que la clase **c-Ccrec** resulta difícil de resolver para nuestras heurísticas. A pesar de esto, los resultados en este caso son mejor de lo que esperábamos. Si bien **S-Sat** y las 3 heurísticas en conjunto hallan la solución óptima solamente en 44 y 30 casos de 10 y 20 períodos respectivamente, las soluciones halladas están bastante cerca de las óptimas.

El comportamiento de las heurísticas se ve resumido en las Figuras 8.1 y 8.2 para los problemas de 10 y 20 períodos, respectivamente. Para todos las clases de problemas, excepto **c-Ccrec**, las heurísticas obtienen soluciones muy similares. Para los casos **c-Ccrec**, las distintas heurísticas muestran sus diferencias. **S-Prod** obtiene resultados muy similares a los del algoritmo de Hsu modificado. En orden de peor a mejor desempeño le siguen **S-Sat**, **S-Parcial** y la solución provista por las tres heurísticas. En particular para los problemas de 20 períodos, **S-Parcial** y el aplicar las tres heurísticas en conjunto son claramente los mejores métodos de solución.

En cuanto a los problemas con 50 períodos de duración, lo primero que llama la atención de la Tabla 8.3 es que GLPK se desempeñó muy bien en la clase **c-Ccrec**. Una posible explicación es que la forma de este problema es tal que la solución óptima es evidente para GLPK (producir siempre lo antes posible, ya que los costos son crecientes). Para los otros problemas GLPK no se desempeñó tan mal, teniendo brecha de dualidad de a lo sumo 10.04%.

Aquí nuevamente, el algoritmo de Hsu modificado obtiene resultados bastante buenos. Y aún así, estos resultados son mejorados por las heurísticas. En este caso, para problemas grandes, si en la práctica no fuera factible hallar una solución óptima con GLPK, podríamos decir que nos conformaríamos con simplemente ejecutar el algoritmo de Hsu y alguna de las heurísticas de mejora.

En cuanto a las heurísticas en sí, **S-Prod** parece ser la que se ha desempeñado peor. Una posible explicación de esto, es que esta heurística es en algún sentido la más “rígida” de las tres. Dado un período, solo analiza si es más barato desplazar la producción hacia el período inmediatamente anterior. Y si lo es, el desplazamiento solo se realiza si es posible desplazar la producción del período en su totalidad.

Claramente, hay muchos casos en los que **S-Prod** va a encontrar muy pocos desplazamientos posibles. Por otra parte, **S-Parcial** y **S-Sat** son más flexibles y evidentemente pueden aplicarse en más casos. Estas últimas heurísticas obtienen resultados muy similares entre sí, pero parecería que **S-Parcial** es la mejor de los dos (mirando los casos **c-Ccrec**).

Los resultados de aplicar las tres heurísticas en conjunto parecen ser aún mejores que los de aplicar solamente **S-Parcial**. En la clase **c-Ccrec**, las tres heurísticas en conjunto hallan la solución óptima en un problema más para los casos con 10 y 50 períodos.

En la Figura 8.3 se ve claramente la comparación entre las distintas heurísticas para los problemas de 50 períodos. Las conclusiones que se obtienen acerca de qué heurísticas obtienen mejores resultados son similares a los problemas de 10 y 20 períodos (Figuras 8.1 y 8.2, respectivamente). Para todos las clases de problemas excepto **c-Ccrec**, la diferencia en las soluciones obtenidas por las distintas heurísticas es despreciable. Para la clase **c-Ccrec**, nuevamente se tiene que no hay mucha diferencia entre **S-Prod** y el algoritmo de Hsu modificado. Las soluciones obtenidas por **S-Sat** son mejores, y aún mejores son los resultados obtenidos por **S-Parcial** y las 3 heurísticas en conjunto.

Dado que los tiempos de ejecución en todos los casos son tan cortos, como conclusión

final decimos que en la práctica es más conveniente aplicar las tres heurísticas en conjunto.

Capítulo 9

Conclusiones y trabajos futuros

En esta Sección se presentan las conclusiones y reflexiones finales acerca del trabajo realizado en el presente informe. Primero se presentan las conclusiones generales en la Sección 9.1. Luego, en la Sección 9.2, se mencionan posibles líneas de investigación que son de interés, y que pueden verse como posibles extensiones de este trabajo a realizar en un futuro.

9.1. Conclusiones

En este trabajo se estudió el problema de gestión de inventario de artículos perecederos con demanda dinámica determinista. Esto significa, a diferencia de los problemas de gestión de inventario en general, que los artículos producidos o adquiridos no pueden ser almacenados indefinidamente. En general, este problema es muy estudiado no solo por ser de interés desde un punto de vista matemático, sino porque existe un interés real en reducir la cantidad de artículos que se echan a perder.

El trabajo realizado consistió en dos etapas. En primer lugar se estudió el estado del arte de gestión de inventario de artículos perecederos. En la segunda etapa se estudió un problema concreto de esta área.

En la primera etapa se vio la gran variedad de problemas que existen, y los distintos tipos de modelos que son utilizados para estudiar estos problemas. El resultado de este trabajo fue la revisión de la literatura presentada en el Anexo B (junto con la revisión más acotada, pero más profunda presentada en la Sección 2.3). Consideramos que este trabajo es de gran importancia ya que permitió tener una importante visión global del problema.

En la segunda etapa se optó por estudiar el problema donde la capacidad de inventario es limitada. Si bien en general este es un problema que parece haber sido ignorado por mucho tiempo, parece que recientemente ha surgido interés en estudiar distintas versiones mismo. Esto es indicado por algunos de los artículos que se han publicado en los últimos años para el caso con productos no perecederos (por ejemplo Akbalik et al., 2015 [2]; Hwang & van den Heuvel, 2012 [14]; Hwang et al., 2013 [15]).

Una de las conclusiones más importantes a las que se llegó rápidamente en el presente informe, es el hecho de que el problema en cuestión parecería no poder modelarse utilizando redes de flujo. Esto parecería ser desalentador ya que este tipo de redes son una de las principales herramientas utilizadas en el estudio de problemas de gestión de inventario (ver, por ejemplo, Hsu, 2000 [12]; Zangwill, 1968 [32]).

Posteriormente se analizó empíricamente la complejidad del problema, concluyendo que para versiones medianas o grandes del mismo, no siempre es factible tratar de buscar una solución óptima exacta.

Todo esto motivó la búsqueda de heurísticas que permitan hallar soluciones que sean razonablemente buenas. Esto llevó a proponer el algoritmo de Hsu modificado (Sección 5.1), y tres distintas heurísticas de mejora de soluciones (Sección 5.2). Nuestras principales

contribuciones son la adaptación del algoritmo de Hsu (2000) [12] para el caso perecedero, en particular mediante la definición de la función $\Phi(h)$.

Consideramos también importantes las heurísticas de mejora propuestas. Estas heurísticas están basadas en realizar *shifts* o desplazamientos de producción. Se busca así sustituir parcial o totalmente la producción en un período dado, por producción en un período distinto. De acuerdo a nuestro conocimiento, estas ideas no han sido aplicadas en problemas con artículos perecederos.

Finalmente se realizaron distintas pruebas. Esto consistió en generar una variedad de casos de prueba, y comparar las soluciones exactas halladas por GLPK con las soluciones halladas con nuestras heurísticas. Los resultados obtenidos fueron muy buenos, y concluimos que en problemas grandes donde no sea factible buscar soluciones exactas, aplicar nuestras heurísticas es una muy buena alternativa.

9.2. Trabajos futuros

Hay varios temas que consideramos serían de interés en estudiar en un futuro.

En primer lugar, en nuestro problema asumimos que las funciones de costos son lineales. Si bien esta es una suposición común, no es una suposición muy realista. Una posible línea de investigación a seguir podría ser entonces considerar funciones más generales. Por ejemplo podrían considerarse funciones de costo cóncavas tales como el caso general estudiado en Hsu (2000) [12]. Este problema probablemente sea considerablemente más difícil. Ya que nuestro método propuesto para hallar una soluciones iniciales es una modificación del método de Hsu, claramente es de mucho interés estudiar esta versión del problema. Posiblemente podría resolverse aplicando ideas similares a las propuestas en este trabajo.

También es de interés seguir una línea similar a la del estudio de artículos no perecederos. Por ejemplo, anteriormente se mencionaron varios trabajos para el caso no perecedero que consideran inventario acotado junto con otras restricciones (Hwang & van den Heuvel, 2012 [14]), ventas perdidas (Hwang et al., 2013 [15]), capacidad de producción (Akbalik et al., 2015 [2]). Sería interesante extender los problemas similares a los allí propuestos, pero con artículos perecederos.

En esta línea, por ejemplo, Hsu (2003) [13] estudia artículos perecederos con *backlogging*, y Sargut & Işık (2017) [26] estudia artículos perecederos con *backlogging* y capacidad de producción limitada. Esos trabajos pueden ser un buen punto de partida para incorporar restricciones acerca de la capacidad de inventario.

En resumen, consideramos que extender el trabajo presentado en este informe aplicando nuevas restricciones y consideraciones, o extender algún otro trabajo existente con alguna de las ideas aquí propuestas es importante. Sin duda, hay una gran variedad de problemas que pueden ser estudiados, y consideramos que este es el camino a seguir.

Bibliografía

- [1] ABAD, P. Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering. *Management Science* 42, 8 (1996), 1093–1104.
- [2] AKBALIK, A., PENZ, B., AND RAPINE, C. Capacitated lot sizing problems with inventory bounds. *Annals of Operations Research* 229, 1 (Jun 2015), 1–18.
- [3] BAI, Q.-G., ZHANG, Y.-Z., AND DONG, G.-L. A note on an economic lot-sizing problem with perishable inventory and economies of scale costs: Approximation solutions and worst case analysis. *International Journal of Automation and Computing* 7, 1 (2010), 132–136.
- [4] CHOI, T.-M. *Handbook of EOQ inventory problems*, vol. 197. Springer US, 2014.
- [5] CHU, L. Y., HSU, V. N., AND SHEN, Z.-J. M. An economic lot-sizing problem with perishable inventory and economies of scale costs: Approximation solutions and worst case analysis. *Naval Research Logistics (NRL)* 52, 6 (2005), 536–548.
- [6] FLORIAN, M., AND KLEIN, M. Deterministic production planning with concave costs and capacity constraints. *Management Science* 18, 1 (1971), 12–20.
- [7] FRIEDMAN, Y., AND HOCH, Y. A dynamic lot-size model with inventory deterioration. *INFOR: Information Systems and Operational Research* 16, 2 (1978), 183–188.
- [8] GHOSH, S. K., SARKAR, T., AND CHAUDHURI, K. A multi-item inventory model for deteriorating items in limited storage space with stock-dependent demand. *American Journal of Mathematical and Management Sciences* 34, 2 (2015), 147–161.
- [9] GOYAL, S., AND GIRI, B. C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory. *European Journal of operational research* 134, 1 (2001), 1–16.
- [10] GUSTAVSSON, J., CEDERBERG, C., AND SONESSON, U. Global food losses and food waste: Extent causes and prevention. <http://www.fao.org/3/a-i2697e.pdf>, 2011. Último acceso noviembre 2019.
- [11] HARRIS, F. W. How many parts to make at once. *The Magazine of Management Science* 10, 2 (1913), 135–136, 152.
- [12] HSU, V. N. Dynamic economic lot size model with perishable inventory. *Manage. Sci.* 46, 8 (Aug. 2000), 1159–1169.
- [13] HSU, V. N. An economic lot size model for perishable products with age-dependent inventory and backorder costs. *IIE Transactions* 35, 8 (2003), 775–780.
- [14] HWANG, H.-C., AND VAN DEN HEUVEL, W. Improved algorithms for a lot-sizing problem with inventory bounds and backlogging. *Naval Research Logistics (NRL)* 59, 3-4 (2012), 244–253.

- [15] HWANG, H.-C., VAN DEN HEUVEL, W., AND WAGELMANS, A. P. M. The economic lot-sizing problem with lost sales and bounded inventory. *IIE Transactions* 45, 8 (2013), 912–924.
- [16] KHANLARZADE, N., YOUSEFI YEGANE, B., NAKHAI KAMALABADI, I., AND FARUGH, H. Inventory control with deteriorating items: A state-of-the-art literature review. 179–198.
- [17] LEMA, P., ACOSTA, M. J., BARBOZA, R., BARRIOS, S., CAMAÑO, G., AND CROSA, M. J. Estimación de pérdidas y desperdicio de alimentos en el uruguay: alcance y causas. http://www.fao.org/fileadmin/user_upload/FAO-countries/Uruguay/docs/INFORME_FINAL_-_Estimacion_de_p%C3%A9rdidas_y_desperdicio_de_alimentos_en_Uruguay.pdf, 2017. Último acceso noviembre 2019.
- [18] LIU, X., AND TU, Y. Production planning with limited inventory capacity and allowed stockout. *International Journal of Production Economics* 111, 1 (2008), 180 – 191. Managing Supply Chain Network.
- [19] LOVE, S. F. Bounded production and inventory models with piecewise concave costs. *Management Science* 20, 3 (1973), 313–318.
- [20] MAES, J., AND VAN WASSENHOVE, L. Multi-item single-level capacitated dynamic lot-sizing heuristics: A general review. *Journal of the Operational Research Society* 39, 11 (1988), 991–1004.
- [21] NAHMIAS, S. Perishable inventory theory: A review. *Operations research* 30, 4 (1982), 680–708.
- [22] ÖNAL, M., ROMEIJN, H. E., SAPRA, A., AND VAN DEN HEUVEL, W. The economic lot-sizing problem with perishable items and consumption order preference. *European Journal of Operational Research* 244, 3 (2015), 881–891.
- [23] PAHL, J., AND VOSS, S. Integrating deterioration and lifetime constraints in production and supply chain planning: a survey. *European Journal of Operational Research* 238, 3 (2014), 654–674.
- [24] RAAFAT, F. Survey of literature on continuously deteriorating inventory models. *Journal of the Operational Research society* 42, 1 (1991), 27–37.
- [25] SANA, S., AND CHAUDHURI, K. On a volume flexible stock-dependent inventory model. *PROCEEDINGS-NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES INDIA SECTION A* 76, 4 (2006), 309.
- [26] SARGUT, F. Z., AND IŞIK, G. Dynamic economic lot size model with perishable inventory and capacity constraints. *Applied Mathematical Modelling* (2017), –.
- [27] SKOURI, K., AND PAPACHRISTOS, S. Optimal stopping and restarting production times for an {EOQ} model with deteriorating items and time-dependent partial backlogging. *International Journal of Production Economics* 81–82 (2003), 525 – 531. Proceedings of the Eleventh International Symposium on Inventories.
- [28] TADJ, L., BOUNKHEL, M., AND BENHADID, Y. Optimal control of a production inventory system with deteriorating items. *International Journal of Systems Science* 37, 15 (2006), 1111–1121.
- [29] TAFT, E. The most economical production lot. *Iron Age* 101, 18 (1918), 1410–1412.
- [30] TENG, J. T., AND YANG, H. L. Deterministic economic order quantity models with partial backlogging when demand and cost are fluctuating with time. *The Journal of the Operational Research Society* 55, 5 (2004), 495–503.

- [31] WAGNER, H. M., AND WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management science* 5, 1 (1958), 89–96.
- [32] ZANGWILL, W. I. Minimum concave cost flows in certain networks. *Management Science* 14, 7 (1968), 429–450.
- [33] ZHANG, B., AND WANG, X. Optimal policy and simple algorithm for a deteriorated multi-item EOQ problem. *American Journal of Operations Research* 1, 02 (2011), 46.

Anexos

Apéndice A

Resultados

En esta Sección se presentan los resultados obtenidos para cada caso de prueba. En la Sección A.1 se muestran los resultados para problemas de 10 y 20 períodos, y en la Sección A.2 se muestran los resultados para problemas de 50 períodos.

En las siguientes tablas, cada fila representa un caso de prueba distinto. Allí se muestra, para cada método de solución, el tiempo en segundos que se tardó en hallar la solución (columna t) y el costo de dicha solución (columna C).

A.1. Problemas chicos (10 y 20 períodos)

c-Hsu n=10	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	< 0,1	8818.88	0.0006	8818.88	0.0006	8818.88	0.0008	8818.88	0.0007	8818.88	0.0010	8818.88
2	< 0,1	8445.57	0.0006	8445.57	0.0008	8445.57	0.0008	8445.57	0.0008	8445.57	0.0011	8445.57
3	< 0,1	9131.02	0.0007	9131.02	0.0009	9131.02	0.0009	9131.02	0.0010	9131.02	0.0011	9131.02
4	< 0,1	7675.75	0.0007	7675.75	0.0008	7675.75	0.0009	7675.75	0.0008	7675.75	0.0012	7675.75
5	< 0,1	8319.80	0.0007	8319.80	0.0008	8319.80	0.0009	8319.80	0.0008	8319.80	0.0015	8319.80
6	< 0,1	8233.06	0.0007	8233.06	0.0008	8233.06	0.0010	8233.06	0.0010	8233.06	0.0011	8233.06
7	< 0,1	7690.65	0.0007	7690.65	0.0007	7690.65	0.0009	7690.65	0.0008	7690.65	0.0014	7690.65
8	< 0,1	7482.77	0.0007	7482.77	0.0008	7482.77	0.0009	7482.77	0.0008	7482.77	0.0017	7482.77
9	< 0,1	7216.52	0.0007	7216.52	0.0008	7216.52	0.0010	7216.52	0.0008	7216.52	0.0011	7216.52
10	< 0,1	7850.13	0.0006	7850.13	0.0008	7850.13	0.0009	7850.13	0.0008	7850.13	0.0015	7850.13
11	< 0,1	7687.38	0.0007	7687.38	0.0008	7687.38	0.0009	7687.38	0.0008	7687.38	0.0015	7687.38
12	< 0,1	7463.93	0.0007	7463.93	0.0008	7463.93	0.0009	7463.93	0.0008	7463.93	0.0011	7463.93
13	< 0,1	8076.57	0.0007	8076.57	0.0008	8076.57	0.0009	8076.57	0.0008	8076.57	0.0011	8076.57
14	< 0,1	7339.28	0.0007	7339.28	0.0008	7339.28	0.0009	7339.28	0.0008	7339.28	0.0015	7339.28
15	< 0,1	6177.84	0.0007	6177.84	0.0010	6177.84	0.0012	6177.84	0.0011	6177.84	0.0017	6177.84
16	< 0,1	8439.62	0.0007	8439.62	0.0008	8439.62	0.0012	8439.62	0.0011	8439.62	0.0015	8439.62
17	< 0,1	8560.47	0.0009	8560.47	0.0010	8560.47	0.0012	8560.47	0.0011	8560.47	0.0017	8560.47
18	< 0,1	7344.52	0.0007	7344.52	0.0008	7344.52	0.0010	7344.52	0.0008	7344.52	0.0010	7344.52
19	< 0,1	8105.87	0.0008	8105.87	0.0010	8105.87	0.0012	8105.87	0.0011	8105.87	0.0011	8105.87
20	< 0,1	8951.66	0.0006	8951.66	0.0008	8951.66	0.0009	8951.66	0.0008	8951.66	0.0015	8951.66
21	< 0,1	7742.90	0.0007	7742.90	0.0008	7742.90	0.0009	7742.90	0.0008	7742.90	0.0011	7742.90
22	< 0,1	6890.83	0.0008	6890.83	0.0009	6890.83	0.0010	6890.83	0.0009	6890.83	0.0016	6890.83
23	< 0,1	9063.45	0.0007	9063.45	0.0008	9063.45	0.0009	9063.45	0.0008	9063.45	0.0015	9063.45
24	< 0,1	8786.32	0.0007	8786.32	0.0008	8786.32	0.0009	8786.32	0.0008	8786.32	0.0015	8786.32
25	< 0,1	8390.15	0.0007	8390.15	0.0008	8390.15	0.0009	8390.15	0.0008	8390.15	0.0014	8390.15
26	< 0,1	7893.50	0.0009	7893.50	0.0010	7893.50	0.0012	7893.50	0.0011	7893.50	0.0019	7893.50
27	< 0,1	6768.39	0.0010	6768.39	0.0011	6768.39	0.0013	6768.39	0.0011	6768.39	0.0015	6768.39
28	< 0,1	7867.48	0.0009	7867.48	0.0010	7867.48	0.0012	7867.48	0.0010	7867.48	0.0018	7867.48
29	< 0,1	9415.54	0.0008	9415.54	0.0010	9415.54	0.0011	9415.54	0.0010	9415.54	0.0020	9415.54
30	< 0,1	6170.89	0.0009	6170.89	0.0011	6170.89	0.0012	6170.89	0.0010	6170.89	0.0019	6170.89
31	< 0,1	7324.21	0.0009	7324.21	0.0010	7324.21	0.0012	7324.21	0.0011	7324.21	0.0019	7324.21
32	< 0,1	8118.66	0.0008	8118.66	0.0010	8118.66	0.0011	8118.66	0.0010	8118.66	0.0019	8118.66
33	< 0,1	8226.76	0.0008	8226.76	0.0010	8226.76	0.0011	8226.76	0.0010	8226.76	0.0014	8226.76
34	< 0,1	9088.05	0.0008	9088.05	0.0010	9088.05	0.0011	9088.05	0.0010	9088.05	0.0014	9088.05
35	< 0,1	7990.64	0.0008	7990.64	0.0010	7990.64	0.0012	7990.64	0.0010	7990.64	0.0014	7990.64
36	< 0,1	9074.09	0.0008	9074.09	0.0009	9074.09	0.0011	9074.09	0.0010	9074.09	0.0014	9074.09
37	< 0,1	8712.86	0.0009	8712.86	0.0010	8712.86	0.0011	8712.86	0.0010	8712.86	0.0018	8712.86
38	< 0,1	8494.01	0.0009	8494.01	0.0010	8494.01	0.0012	8494.01	0.0011	8494.01	0.0020	8494.01
39	< 0,1	8475.53	0.0009	8475.53	0.0010	8475.53	0.0012	8475.53	0.0010	8475.53	0.0019	8475.53
40	< 0,1	7904.42	0.0008	7904.42	0.0010	7904.42	0.0011	7904.42	0.0010	7904.42	0.0018	7904.42
41	< 0,1	7545.41	0.0009	7545.41	0.0010	7545.41	0.0012	7545.41	0.0010	7545.41	0.0014	7545.41
42	< 0,1	8292.80	0.0009	8292.80	0.0010	8292.80	0.0012	8292.80	0.0010	8292.80	0.0015	8292.80
43	< 0,1	6886.87	0.0009	6886.87	0.0010	6886.87	0.0012	6886.87	0.0010	6886.87	0.0019	6886.87
44	< 0,1	7427.27	0.0009	7427.27	0.0010	7427.27	0.0012	7427.27	0.0011	7427.27	0.0021	7427.27
45	< 0,1	8619.27	0.0008	8619.27	0.0010	8619.27	0.0011	8619.27	0.0010	8619.27	0.0019	8619.27
46	< 0,1	8048.70	0.0009	8048.70	0.0010	8048.70	0.0012	8048.70	0.0011	8048.70	0.0020	8048.70
47	< 0,1	8263.36	0.0009	8263.36	0.0010	8263.36	0.0012	8263.36	0.0010	8263.36	0.0019	8263.36
48	< 0,1	9038.23	0.0009	9038.23	0.0009	9038.23	0.0013	9038.23	0.0010	9038.23	0.0019	9038.23
49	< 0,1	8273.31	0.0009	8273.31	0.0010	8273.31	0.0011	8273.31	0.0010	8273.31	0.0013	8273.31
50	< 0,1	8903.58	0.0009	8903.58	0.0010	8903.58	0.0012	8903.58	0.0010	8903.58	0.0020	8903.58

Tabla A.1: Resultados para casos c-Hsu (10 períodos)

c-Hsu n=20	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	0.2	17385.99	0.0028	17385.99	0.0032	17385.99	0.0042	17385.99	0.0041	17385.99	0.0082	17385.99
2	0.1	16149.66	0.0028	16149.66	0.0031	16149.66	0.0041	16149.66	0.0038	16149.66	0.0074	16149.66
3	0.2	18117.89	0.0026	18117.89	0.0029	18117.89	0.0038	18117.89	0.0036	18117.89	0.0071	18117.89
4	0.2	15427.44	0.0026	15427.44	0.0029	15427.44	0.0038	15427.44	0.0038	15427.44	0.0059	15427.44
5	0.1	15357.38	0.0022	15357.38	0.0024	15357.38	0.0031	15357.38	0.0030	15357.38	0.0057	15357.38
6	0.1	16645.15	0.0023	16655.63	0.0025	16655.63	0.0042	16645.15	0.0053	16645.15	0.0070	16645.15
7	0.2	15497.62	0.0023	15497.62	0.0025	15497.62	0.0034	15497.62	0.0030	15497.62	0.0061	15497.62
8	0.1	16428.92	0.0023	16428.92	0.0025	16428.92	0.0040	16428.92	0.0030	16428.92	0.0058	16428.92
9	0.2	16887.39	0.0023	16887.39	0.0026	16887.39	0.0033	16887.39	0.0031	16887.39	0.0059	16887.39
10	0.2	15911.61	0.0022	15911.61	0.0025	15911.61	0.0032	15911.61	0.0029	15911.61	0.0054	15911.61
11	0.2	17879.80	0.0021	17879.80	0.0024	17879.80	0.0031	17879.80	0.0028	17879.80	0.0057	17879.80
12	0.2	15639.81	0.0021	15639.81	0.0023	15639.81	0.0030	15639.81	0.0038	15639.81	0.0055	15639.81
13	< 0,1	13537.26	0.0022	13537.26	0.0026	13537.26	0.0037	13537.26	0.0028	13537.26	0.0039	13537.26
14	0.3	16399.87	0.0022	16399.87	0.0024	16399.87	0.0032	16399.87	0.0030	16399.87	0.0058	16399.87
15	0.1	15767.29	0.0024	15767.29	0.0030	15767.29	0.0032	15767.29	0.0038	15767.29	0.0053	15767.29
16	0.1	16765.89	0.0030	16765.89	0.0033	16765.89	0.0044	16765.89	0.0040	16765.89	0.0053	16765.89
17	0.2	16234.00	0.0027	16234.00	0.0030	16234.00	0.0040	16234.00	0.0037	16234.00	0.0073	16234.00
18	0.1	16748.86	0.0027	16748.86	0.0029	16748.86	0.0039	16748.86	0.0036	16748.86	0.0072	16748.86
19	0.1	18343.91	0.0025	18343.91	0.0026	18343.91	0.0031	18343.91	0.0028	18343.91	0.0046	18343.91
20	< 0,1	16534.80	0.0022	16534.80	0.0024	16534.80	0.0032	16534.80	0.0038	16534.80	0.0063	16534.80
21	0.1	16980.85	0.0021	16980.85	0.0024	16980.85	0.0031	16980.85	0.0028	16980.85	0.0039	16980.85
22	0.2	16047.90	0.0025	16047.90	0.0027	16047.90	0.0034	16047.90	0.0035	16047.90	0.0055	16047.90
23	0.1	14646.19	0.0031	14646.19	0.0032	14646.19	0.0034	14646.19	0.0032	14646.19	0.0041	14646.19
24	0.1	15639.06	0.0022	15639.06	0.0027	15639.06	0.0040	15639.06	0.0040	15639.06	0.0082	15639.06
25	0.1	17852.13	0.0029	17852.13	0.0031	17852.13	0.0041	17852.13	0.0038	17852.13	0.0078	17852.13
26	0.2	17166.54	0.0026	17171.05	0.0033	17171.05	0.0042	17171.05	0.0046	17166.54	0.0089	17166.54
27	0.1	17267.09	0.0029	17267.09	0.0031	17267.09	0.0045	17267.09	0.0038	17267.09	0.0081	17267.09
28	0.1	17340.73	0.0032	17340.73	0.0031	17340.73	0.0045	17340.73	0.0041	17340.73	0.0059	17340.73
29	0.1	15829.00	0.0030	15829.00	0.0036	15829.00	0.0042	15829.00	0.0043	15829.00	0.0081	15829.00
30	0.2	17040.70	0.0029	17040.70	0.0035	17040.70	0.0042	17040.70	0.0041	17040.70	0.0053	17040.70
31	0.1	15981.53	0.0031	15981.53	0.0032	15981.53	0.0046	15981.53	0.0039	15981.53	0.0056	15981.53
32	0.1	15353.67	0.0037	15353.67	0.0037	15353.67	0.0048	15353.67	0.0042	15353.67	0.0081	15353.67
33	0.1	16546.90	0.0031	16546.90	0.0033	16546.90	0.0042	16546.90	0.0042	16546.90	0.0083	16546.90
34	0.1	17146.41	0.0023	17146.41	0.0024	17146.41	0.0038	17146.41	0.0033	17146.41	0.0067	17146.41
35	0.2	15599.84	0.0022	15599.84	0.0024	15599.84	0.0037	15599.84	0.0028	15599.84	0.0044	15599.84
36	0.1	16315.17	0.0023	16315.17	0.0025	16315.17	0.0041	16315.17	0.0040	16315.17	0.0067	16315.17
37	0.2	15346.37	0.0027	15346.37	0.0027	15346.37	0.0037	15346.37	0.0030	15346.37	0.0048	15346.37
38	0.4	16563.04	0.0021	16563.04	0.0024	16563.04	0.0036	16563.04	0.0028	16563.04	0.0111	16563.04
39	0.1	16326.03	0.0059	16326.03	0.0064	16326.03	0.0048	16326.03	0.0085	16326.03	0.0107	16326.03
40	0.2	16440.85	0.0027	16440.85	0.0026	16440.85	0.0034	16440.85	0.0034	16440.85	0.0044	16440.85
41	0.1	14240.23	0.0024	14240.23	0.0026	14240.23	0.0039	14240.23	0.0031	14240.23	0.0044	14240.23
42	0.1	15480.36	0.0025	15480.36	0.0027	15480.36	0.0034	15480.36	0.0040	15480.36	0.0074	15480.36
43	0.2	16048.40	0.0023	16048.40	0.0031	16048.40	0.0032	16048.40	0.0037	16048.40	0.0065	16048.40
44	0.2	17825.65	0.0024	17825.65	0.0023	17825.65	0.0036	17825.65	0.0029	17825.65	0.0079	17825.65
45	0.1	16206.29	0.0029	16206.29	0.0034	16206.29	0.0045	16206.29	0.0042	16206.29	0.0053	16206.29
46	0.2	13502.36	0.0033	13502.36	0.0034	13502.36	0.0048	13502.36	0.0039	13502.36	0.0078	13502.36
47	0.3	13685.33	0.0028	13685.33	0.0035	13685.33	0.0049	13685.33	0.0041	13685.33	0.0081	13685.33
48	0.2	15945.36	0.0030	15945.36	0.0042	15945.36	0.0089	15945.36	0.0087	15945.36	0.0109	15945.36
49	0.1	15473.32	0.0023	15473.32	0.0025	15473.32	0.0034	15473.32	0.0029	15473.32	0.0065	15473.32
50	0.1	15374.89	0.0022	15374.89	0.0025	15374.89	0.0032	15374.89	0.0029	15374.89	0.0044	15374.89

Tabla A.2: Resultados para casos c-Hsu (20 períodos)

c-Div n=10	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	< 0,1	7237.63	0.0011	7237.63	0.0008	7237.63	0.0009	7237.63	0.0009	7237.63	0.0016	7237.63
2	< 0,1	8589.01	0.0006	8589.01	0.0007	8589.01	0.0009	8589.01	0.0008	8589.01	0.0010	8589.01
3	< 0,1	8413.92	0.0008	8413.92	0.0010	8413.92	0.0010	8413.92	0.0009	8413.92	0.0010	8413.92
4	< 0,1	8302.74	0.0007	8302.74	0.0009	8302.74	0.0012	8302.74	0.0010	8302.74	0.0015	8302.74
5	< 0,1	8039.19	0.0007	8039.19	0.0008	8039.19	0.0010	8039.19	0.0009	8039.19	0.0011	8039.19
6	< 0,1	8685.05	0.0008	8685.05	0.0009	8685.05	0.0012	8685.05	0.0010	8685.05	0.0016	8685.05
7	< 0,1	8108.15	0.0007	8108.15	0.0012	8108.15	0.0012	8108.15	0.0011	8108.15	0.0022	8108.15
8	< 0,1	6687.01	0.0007	6687.01	0.0009	6687.01	0.0009	6687.01	0.0009	6687.01	0.0015	6687.01
9	< 0,1	8512.53	0.0007	8512.53	0.0008	8512.53	0.0009	8512.53	0.0008	8512.53	0.0011	8512.53
10	< 0,1	8425.73	0.0009	8425.73	0.0008	8425.73	0.0009	8425.73	0.0009	8425.73	0.0019	8425.73
11	< 0,1	8834.43	0.0009	8834.43	0.0010	8834.43	0.0011	8834.43	0.0010	8834.43	0.0013	8834.43
12	< 0,1	10081.64	0.0007	10081.64	0.0007	10081.64	0.0010	10081.64	0.0008	10081.64	0.0017	10081.64
13	< 0,1	7827.79	0.0009	7827.79	0.0010	7827.79	0.0012	7827.79	0.0011	7827.79	0.0019	7827.79
14	< 0,1	8569.92	0.0009	8569.92	0.0010	8569.92	0.0012	8569.92	0.0011	8569.92	0.0020	8569.92
15	< 0,1	7293.78	0.0009	7293.78	0.0009	7293.78	0.0011	7293.78	0.0010	7293.78	0.0019	7293.78
16	< 0,1	9026.13	0.0008	9026.13	0.0009	9026.13	0.0011	9026.13	0.0010	9026.13	0.0018	9026.13
17	< 0,1	9285.17	0.0008	9285.17	0.0009	9285.17	0.0011	9285.17	0.0010	9285.17	0.0018	9285.17
18	< 0,1	7562.93	0.0009	7562.93	0.0010	7562.93	0.0012	7562.93	0.0010	7562.93	0.0014	7562.93
19	< 0,1	9312.87	0.0009	9312.87	0.0010	9312.87	0.0011	9312.87	0.0010	9312.87	0.0020	9312.87
20	< 0,1	8788.60	0.0008	8788.60	0.0009	8788.60	0.0011	8788.60	0.0010	8788.60	0.0014	8788.60
21	< 0,1	6465.54	0.0009	6465.54	0.0010	6465.54	0.0012	6465.54	0.0011	6465.54	0.0019	6465.54
22	< 0,1	8644.76	0.0009	8644.76	0.0010	8644.76	0.0009	8644.76	0.0009	8644.76	0.0016	8644.76
23	< 0,1	8741.00	0.0007	8741.00	0.0007	8741.00	0.0009	8741.00	0.0010	8741.00	0.0014	8741.00
24	< 0,1	8602.62	0.0006	8602.62	0.0016	8602.62	0.0015	8602.62	0.0009	8602.62	0.0015	8602.62
25	< 0,1	8064.40	0.0007	8064.40	0.0010	8064.40	0.0011	8064.40	0.0008	8064.40	0.0015	8064.40
26	< 0,1	7295.49	0.0006	7295.49	0.0009	7295.49	0.0011	7295.49	0.0010	7295.49	0.0018	7295.49
27	< 0,1	8533.93	0.0008	8533.93	0.0010	8533.93	0.0011	8533.93	0.0010	8533.93	0.0019	8533.93
28	< 0,1	8319.61	0.0009	8319.61	0.0009	8319.61	0.0012	8319.61	0.0010	8319.61	0.0013	8319.61
29	< 0,1	7864.27	0.0009	7864.27	0.0016	7864.27	0.0016	7864.27	0.0008	7864.27	0.0016	7864.27
30	0.3	8823.79	0.0006	8823.79	0.0008	8823.79	0.0009	8823.79	0.0009	8823.79	0.0011	8823.79
31	< 0,1	8152.53	0.0006	8152.53	0.0008	8152.53	0.0012	8152.53	0.0010	8152.53	0.0014	8152.53
32	< 0,1	9812.60	0.0008	9812.60	0.0010	9812.60	0.0011	9812.60	0.0010	9812.60	0.0014	9812.60
33	< 0,1	8736.45	0.0007	8736.45	0.0008	8736.45	0.0010	8736.45	0.0010	8736.45	0.0013	8736.45
34	< 0,1	9184.19	0.0008	9184.19	0.0009	9184.19	0.0011	9184.19	0.0010	9184.19	0.0018	9184.19
35	< 0,1	9750.27	0.0008	9750.27	0.0009	9750.27	0.0011	9750.27	0.0009	9750.27	0.0013	9750.27
36	< 0,1	8113.53	0.0010	8113.53	0.0009	8113.53	0.0011	8113.53	0.0010	8113.53	0.0014	8113.53
37	< 0,1	8932.26	0.0008	8932.26	0.0010	8932.26	0.0012	8932.26	0.0011	8932.26	0.0015	8932.26
38	< 0,1	8090.65	0.0009	8090.65	0.0010	8090.65	0.0011	8090.65	0.0010	8090.65	0.0019	8090.65
39	< 0,1	7429.75	0.0008	7429.75	0.0009	7429.75	0.0011	7429.75	0.0010	7429.75	0.0019	7429.75
40	< 0,1	8292.76	0.0009	8292.76	0.0010	8292.76	0.0012	8292.76	0.0010	8292.76	0.0018	8292.76
41	< 0,1	7265.94	0.0009	7265.94	0.0010	7265.94	0.0012	7265.94	0.0010	7265.94	0.0014	7265.94
42	< 0,1	8976.70	0.0009	8976.70	0.0010	8976.70	0.0012	8976.70	0.0010	8976.70	0.0014	8976.70
43	< 0,1	8993.87	0.0009	8993.87	0.0010	8993.87	0.0012	8993.87	0.0011	8993.87	0.0016	8993.87
44	< 0,1	6769.88	0.0009	6769.88	0.0010	6769.88	0.0012	6769.88	0.0011	6769.88	0.0020	6769.88
45	< 0,1	8571.40	0.0008	8571.40	0.0009	8571.40	0.0011	8571.40	0.0010	8571.40	0.0013	8571.40
46	< 0,1	8113.17	0.0009	8113.17	0.0010	8113.17	0.0011	8113.17	0.0010	8113.17	0.0015	8113.17
47	< 0,1	7833.55	0.0009	7833.55	0.0010	7833.55	0.0013	7833.55	0.0011	7833.55	0.0016	7833.55
48	< 0,1	8272.93	0.0007	8272.93	0.0008	8272.93	0.0009	8272.93	0.0008	8272.93	0.0011	8272.93
49	< 0,1	7749.60	0.0007	7749.60	0.0008	7749.60	0.0009	7749.60	0.0008	7749.60	0.0011	7749.60
50	< 0,1	7672.23	0.0007	7672.23	0.0008	7672.23	0.0009	7672.23	0.0008	7672.23	0.0015	7672.23

Tabla A.3: Resultados para casos c-Div (10 períodos)

c-Div n=20	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	0.4	17514.96	0.0026	17514.96	0.0032	17514.96	0.0042	17514.96	0.0038	17514.96	0.0052	17514.96
2	0.3	16399.01	0.0029	16399.01	0.0033	16399.01	0.0042	16399.01	0.0048	16399.01	0.0060	16399.01
3	0.4	16372.29	0.0028	16402.35	0.0030	16402.35	0.0033	16402.35	0.0037	16402.35	0.0077	16402.35
4	0.2	14926.38	0.0060	14926.38	0.0051	14926.38	0.0046	14926.38	0.0055	14926.38	0.0047	14926.38
5	0.6	15263.77	0.0032	15288.00	0.0038	15288.00	0.0055	15288.00	0.0051	15277.05	0.0092	15277.05
6	0.5	16212.27	0.0032	16279.37	0.0035	16279.37	0.0044	16279.37	0.0043	16279.37	0.0084	16279.37
7	0.6	17514.14	0.0030	17514.14	0.0033	17514.14	0.0043	17514.14	0.0045	17514.14	0.0057	17514.14
8	0.2	14248.06	0.0029	14248.06	0.0030	14248.06	0.0033	14248.06	0.0039	14248.06	0.0050	14248.06
9	0.4	18494.08	0.0022	18494.08	0.0024	18494.08	0.0035	18494.08	0.0030	18494.08	0.0086	18494.08
10	0.4	15979.14	0.0032	15979.14	0.0037	15979.14	0.0048	15979.14	0.0043	15979.14	0.0054	15979.14
11	0.4	16507.73	0.0030	16507.73	0.0032	16507.73	0.0045	16507.73	0.0040	16507.73	0.0056	16507.73
12	0.9	16006.39	0.0030	16006.39	0.0034	16006.39	0.0042	16006.39	0.0043	16006.39	0.0084	16006.39
13	0.4	17408.96	0.0031	17408.96	0.0032	17408.96	0.0043	17408.96	0.0040	17408.96	0.0057	17408.96
14	0.7	18511.53	0.0030	18511.53	0.0032	18511.53	0.0043	18511.53	0.0039	18511.53	0.0058	18511.53
15	0.3	17826.59	0.0029	17826.59	0.0033	17826.59	0.0040	17826.59	0.0040	17826.59	0.0083	17826.59
16	0.1	16263.86	0.0027	16390.06	0.0023	16390.06	0.0042	16390.06	0.0038	16390.06	0.0068	16390.06
17	0.3	15011.27	0.0031	15011.27	0.0032	15011.27	0.0044	15011.27	0.0039	15011.27	0.0076	15011.27
18	0.4	16882.25	0.0030	16882.25	0.0032	16882.25	0.0044	16882.25	0.0043	16882.25	0.0088	16882.25
19	0.3	15000.01	0.0029	15080.58	0.0036	15080.58	0.0044	15080.58	0.0045	15080.58	0.0087	15080.58
20	0.2	17787.98	0.0030	17787.98	0.0034	17787.98	0.0043	17787.98	0.0039	17787.98	0.0055	17787.98
21	0.5	17644.01	0.0029	17644.01	0.0033	17644.01	0.0042	17644.01	0.0043	17644.01	0.0057	17644.01
22	0.4	17849.65	0.0025	17849.65	0.0034	17849.65	0.0045	17849.65	0.0040	17849.65	0.0064	17849.65
23	0.1	17383.08	0.0023	17383.08	0.0024	17383.08	0.0037	17383.08	0.0029	17383.08	0.0070	17383.08
24	0.4	16965.08	0.0032	16965.08	0.0033	16965.08	0.0045	16965.08	0.0039	16965.08	0.0082	16965.08
25	0.1	19141.68	0.0031	19141.68	0.0031	19141.68	0.0045	19141.68	0.0040	19141.68	0.0081	19141.68
26	0.2	15459.19	0.0063	15459.19	0.0045	15459.19	0.0041	15459.19	0.0032	15459.19	0.0079	15459.19
27	0.4	15081.45	0.0030	15081.45	0.0032	15081.45	0.0048	15081.45	0.0029	15081.45	0.0043	15081.45
28	0.2	15767.71	0.0024	15767.71	0.0031	15767.71	0.0032	15767.71	0.0030	15767.71	0.0054	15767.71
29	0.2	15741.05	0.0026	15741.05	0.0029	15741.05	0.0034	15741.05	0.0041	15741.05	0.0081	15741.05
30	0.8	15603.34	0.0030	15603.34	0.0033	15603.34	0.0043	15603.34	0.0039	15603.34	0.0080	15603.34
31	0.4	18940.55	0.0027	18940.55	0.0030	18940.55	0.0042	18940.55	0.0040	18940.55	0.0082	18940.55
32	0.2	15148.39	0.0030	15148.39	0.0033	15148.39	0.0044	15148.39	0.0042	15148.39	0.0083	15148.39
33	0.4	15210.04	0.0030	15210.04	0.0033	15210.04	0.0044	15210.04	0.0040	15210.04	0.0067	15210.04
34	0.2	17390.33	0.0023	17390.33	0.0025	17390.33	0.0033	17390.33	0.0030	17390.33	0.0042	17390.33
35	0.1	18312.65	0.0021	18312.65	0.0024	18312.65	0.0032	18312.65	0.0039	18312.65	0.0071	18312.65
36	0.5	16899.59	0.0029	16899.59	0.0030	16899.59	0.0037	16899.59	0.0029	16899.59	0.0058	16899.59
37	0.5	15614.42	0.0024	15614.42	0.0028	15614.42	0.0033	15614.42	0.0031	15614.42	0.0063	15614.42
38	0.7	17485.52	0.0025	17485.52	0.0024	17485.52	0.0033	17485.52	0.0033	17485.52	0.0043	17485.52
39	0.4	17765.69	0.0032	17765.69	0.0032	17765.69	0.0041	17765.69	0.0041	17765.69	0.0057	17765.69
40	0.7	17780.31	0.0028	17780.31	0.0031	17780.31	0.0042	17780.31	0.0039	17780.31	0.0055	17780.31
41	0.2	17607.21	0.0028	17607.21	0.0031	17607.21	0.0040	17607.21	0.0039	17607.21	0.0055	17607.21
42	0.4	16976.43	0.0030	16976.43	0.0031	16976.43	0.0041	16976.43	0.0049	16976.43	0.0051	16976.43
43	0.2	16713.34	0.0028	16713.34	0.0026	16713.34	0.0038	16713.34	0.0041	16713.34	0.0054	16713.34
44	0.2	16368.77	0.0024	16611.86	0.0031	16611.86	0.0040	16611.86	0.0034	16611.86	0.0074	16611.86
45	0.2	17616.60	0.0026	17616.60	0.0030	17616.60	0.0036	17616.60	0.0037	17616.60	0.0084	17616.60
46	0.5	17141.98	0.0024	17141.98	0.0030	17141.98	0.0041	17141.98	0.0038	17141.98	0.0052	17141.98
47	0.3	16144.68	0.0030	16144.68	0.0032	16144.68	0.0040	16144.68	0.0039	16144.68	0.0065	16144.68
48	0.3	16488.05	0.0023	16488.05	0.0032	16488.05	0.0041	16488.05	0.0045	16488.05	0.0057	16488.05
49	0.4	19122.84	0.0029	19122.84	0.0032	19122.84	0.0058	19122.84	0.0042	19122.84	0.0083	19122.84
50	0.2	16173.10	0.0029	16173.10	0.0032	16173.10	0.0044	16173.10	0.0042	16173.10	0.0079	16173.10

Tabla A.4: Resultados para casos c-Div (20 períodos)

c-Falto n=10	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	< 0,1	25039.47	0.0007	25039.47	0.0008	25039.47	0.0009	25039.47	0.0008	25039.47	0.0015	25039.47
2	< 0,1	25230.27	0.0007	25230.27	0.0008	25230.27	0.0009	25230.27	0.0008	25230.27	0.0020	25230.27
3	< 0,1	26780.07	0.0007	26780.07	0.0008	26780.07	0.0009	26780.07	0.0009	26780.07	0.0011	26780.07
4	< 0,1	28200.01	0.0006	28200.01	0.0008	28200.01	0.0009	28200.01	0.0008	28200.01	0.0011	28200.01
5	< 0,1	28770.08	0.0006	28770.08	0.0008	28770.08	0.0012	28770.08	0.0010	28770.08	0.0022	28770.08
6	< 0,1	30362.99	0.0010	30362.99	0.0012	30362.99	0.0011	30362.99	0.0010	30362.99	0.0020	30362.99
7	< 0,1	27034.89	0.0008	27034.89	0.0009	27034.89	0.0011	27034.89	0.0009	27034.89	0.0018	27034.89
8	< 0,1	32275.98	0.0009	32275.98	0.0011	32275.98	0.0011	32275.98	0.0010	32275.98	0.0014	32275.98
9	< 0,1	28708.29	0.0008	28708.29	0.0009	28708.29	0.0011	28708.29	0.0010	28708.29	0.0019	28708.29
10	< 0,1	29067.27	0.0009	29067.27	0.0010	29067.27	0.0012	29067.27	0.0010	29067.27	0.0020	29067.27
11	< 0,1	26552.46	0.0008	26552.46	0.0009	26552.46	0.0011	26552.46	0.0007	26552.46	0.0014	26552.46
12	< 0,1	21700.71	0.0007	21700.71	0.0008	21700.71	0.0009	21700.71	0.0007	21700.71	0.0014	21700.71
13	< 0,1	24406.60	0.0006	24406.60	0.0007	24406.60	0.0008	24406.60	0.0007	24406.60	0.0014	24406.60
14	< 0,1	23764.95	0.0006	23764.95	0.0008	23764.95	0.0008	23764.95	0.0007	23764.95	0.0014	23764.95
15	< 0,1	23188.34	0.0007	23307.98	0.0008	23307.98	0.0011	23188.34	0.0015	23188.34	0.0017	23188.34
16	< 0,1	26428.12	0.0007	26428.12	0.0008	26428.12	0.0009	26428.12	0.0009	26428.12	0.0020	26428.12
17	< 0,1	23834.74	0.0007	27694.98	0.0008	27694.98	0.0009	27694.98	0.0008	27694.98	0.0011	27694.98
18	< 0,1	25590.76	0.0006	25590.76	0.0008	25590.76	0.0009	25590.76	0.0008	25590.76	0.0014	25590.76
19	< 0,1	23506.00	0.0006	23506.00	0.0007	23506.00	0.0009	23506.00	0.0007	23506.00	0.0014	23506.00
20	< 0,1	24795.77	0.0007	24795.77	0.0007	24795.77	0.0008	24795.77	0.0007	24795.77	0.0010	24795.77
21	< 0,1	23235.29	0.0007	23235.29	0.0008	23235.29	0.0009	23235.29	0.0009	23235.29	0.0013	23235.29
22	< 0,1	26742.43	0.0007	26763.63	0.0008	26763.63	0.0011	26742.43	0.0010	26742.43	0.0017	26742.43
23	< 0,1	27129.20	0.0006	27129.20	0.0007	27129.20	0.0008	27129.20	0.0007	27129.20	0.0015	27129.20
24	< 0,1	22321.19	0.0008	22321.19	0.0010	22321.19	0.0012	22321.19	0.0009	22321.19	0.0013	22321.19
25	< 0,1	22405.06	0.0007	22405.06	0.0008	22405.06	0.0009	22405.06	0.0008	22405.06	0.0012	22405.06
26	< 0,1	24920.23	0.0007	24957.65	0.0008	24957.65	0.0012	24920.23	0.0009	24920.23	0.0024	24920.23
27	< 0,1	29735.68	0.0008	29735.68	0.0010	29735.68	0.0011	29735.68	0.0010	29735.68	0.0020	29735.68
28	< 0,1	30723.32	0.0008	30723.32	0.0009	30723.32	0.0011	30723.32	0.0010	30723.32	0.0013	30723.32
29	< 0,1	26993.25	0.0009	26993.25	0.0010	26993.25	0.0011	26993.25	0.0010	26993.25	0.0017	26993.25
30	< 0,1	27640.83	0.0007	28668.90	0.0008	28668.90	0.0010	28668.90	0.0007	28668.90	0.0017	28668.90
31	< 0,1	26717.04	0.0007	26717.04	0.0008	26717.04	0.0010	26717.04	0.0008	26717.04	0.0011	26717.04
32	< 0,1	24172.43	0.0007	24172.43	0.0008	24172.43	0.0009	24172.43	0.0008	24172.43	0.0015	24172.43
33	< 0,1	29252.96	0.0007	29290.12	0.0008	29290.12	0.0012	29252.96	0.0009	29252.96	0.0018	29252.96
34	< 0,1	24822.23	0.0006	24822.23	0.0007	24822.23	0.0009	24822.23	0.0008	24822.23	0.0011	24822.23
35	< 0,1	24996.25	0.0007	26173.49	0.0008	26173.49	0.0009	26173.49	0.0008	26173.49	0.0011	26173.49
36	< 0,1	18052.16	0.0007	18052.16	0.0008	18052.16	0.0010	18052.16	0.0008	18052.16	0.0014	18052.16
37	< 0,1	29844.00	0.0007	29844.00	0.0008	29844.00	0.0009	29844.00	0.0008	29844.00	0.0011	29844.00
38	< 0,1	21601.12	0.0009	21601.12	0.0010	21601.12	0.0012	21601.12	0.0009	21601.12	0.0014	21601.12
39	< 0,1	24045.63	0.0007	24045.63	0.0009	24045.63	0.0009	24045.63	0.0008	24045.63	0.0011	24045.63
40	< 0,1	31371.18	0.0009	31371.18	0.0010	31371.18	0.0012	31371.18	0.0010	31371.18	0.0020	31371.18
41	< 0,1	30929.82	0.0009	30929.82	0.0010	30929.82	0.0012	30929.82	0.0009	30929.82	0.0013	30929.82
42	< 0,1	24247.55	0.0010	24247.55	0.0011	24247.55	0.0013	24247.55	0.0011	24247.55	0.0019	24247.55
43	< 0,1	24239.77	0.0008	24239.77	0.0009	24239.77	0.0012	24239.77	0.0011	24239.77	0.0015	24239.77
44	< 0,1	19812.20	0.0009	19812.20	0.0010	19812.20	0.0011	19812.20	0.0010	19812.20	0.0015	19812.20
45	< 0,1	34753.61	0.0009	34935.39	0.0011	34935.39	0.0011	34935.39	0.0019	34753.61	0.0034	34753.61
46	< 0,1	25093.69	0.0010	25429.77	0.0010	25429.77	0.0011	25429.77	0.0010	25429.77	0.0021	25429.77
47	< 0,1	30858.36	0.0009	30858.36	0.0011	30858.36	0.0011	30858.36	0.0010	30858.36	0.0020	30858.36
48	< 0,1	21258.25	0.0009	21258.25	0.0011	21258.25	0.0012	21258.25	0.0010	21258.25	0.0018	21258.25
49	< 0,1	20534.83	0.0009	20729.22	0.0011	20729.22	0.0013	20729.22	0.0011	20729.22	0.0019	20729.22
50	< 0,1	25919.64	0.0008	26412.19	0.0010	26412.19	0.0013	26412.19	0.0011	26412.19	0.0022	26412.19

Tabla A.5: Resultados para casos c-Falto (10 períodos)

c-Falto n=20	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	0.1	49389.14	0.0029	52421.21	0.0035	52421.21	0.0055	49493.35	0.0041	52421.21	0.0285	49390.12
2	0.3	54678.84	0.0030	57438.75	0.0031	57438.75	0.0042	57438.75	0.0038	57438.75	0.0085	57438.75
3	0.3	52615.79	0.0020	52615.79	0.0026	52615.79	0.0039	52615.79	0.0031	52615.79	0.0076	52615.79
4	0.1	48080.16	0.0027	48080.16	0.0029	48080.16	0.0039	48080.16	0.0037	48080.16	0.0076	48080.16
5	0.3	55473.88	0.0026	55473.88	0.0032	55473.88	0.0034	55473.88	0.0035	55473.88	0.0083	55473.88
6	0.2	46222.92	0.0029	46222.92	0.0035	46222.92	0.0042	46222.92	0.0042	46222.92	0.0078	46222.92
7	0.1	46585.87	0.0027	50098.78	0.0034	50098.78	0.0036	50098.78	0.0029	50098.78	0.0062	50098.78
8	0.2	54664.55	0.0020	58393.63	0.0023	58393.63	0.0036	58393.63	0.0038	58393.63	0.0063	58393.63
9	0.4	52405.77	0.0021	52405.77	0.0025	52405.77	0.0032	52405.77	0.0028	52405.77	0.0050	52405.77
10	0.2	49369.71	0.0031	50673.53	0.0034	50673.53	0.0044	50673.53	0.0040	50673.53	0.0080	50673.53
11	0.1	48265.59	0.0029	48265.59	0.0035	48265.59	0.0042	48265.59	0.0042	48265.59	0.0055	48265.59
12	0.1	44625.44	0.0023	44625.44	0.0033	44625.44	0.0047	44625.44	0.0039	44625.44	0.0079	44625.44
13	0.2	48639.64	0.0029	48639.64	0.0032	48639.64	0.0042	48639.64	0.0041	48639.64	0.0054	48639.64
14	0.3	54116.83	0.0031	54116.83	0.0033	54116.83	0.0043	54116.83	0.0041	54116.83	0.0083	54116.83
15	0.2	52356.33	0.0031	54186.86	0.0036	54186.86	0.0044	54186.86	0.0041	54186.86	0.0045	54186.86
16	0.1	51642.81	0.0027	51642.81	0.0028	51642.81	0.0042	51642.81	0.0086	51642.81	0.0169	51642.81
17	0.1	49121.37	0.0057	49121.37	0.0062	49121.37	0.0083	49121.37	0.0080	49121.37	0.0084	49121.37
18	0.3	53332.23	0.0022	55807.38	0.0024	55807.38	0.0044	55807.38	0.0029	55807.38	0.0052	55807.38
19	0.1	40297.47	0.0025	42745.22	0.0031	42745.22	0.0042	42745.22	0.0040	42745.22	0.0058	42745.22
20	0.3	58028.66	0.0026	59381.17	0.0029	59381.17	0.0035	59381.17	0.0028	59381.17	0.0074	59381.17
21	0.1	46885.15	0.0028	47982.08	0.0032	47982.08	0.0042	47982.08	0.0037	47982.08	0.0074	47982.08
22	0.1	48387.08	0.0028	48387.08	0.0031	48387.08	0.0041	48387.08	0.0037	48387.08	0.0052	48387.08
23	0.1	41180.87	0.0030	41180.87	0.0028	41180.87	0.0038	41180.87	0.0038	41180.87	0.0064	41180.87
24	0.1	43512.58	0.0031	43512.58	0.0032	43512.58	0.0034	43512.58	0.0029	43512.58	0.0050	43512.58
25	0.2	46635.20	0.0023	46635.20	0.0026	46635.20	0.0033	46635.20	0.0030	46635.20	0.0041	46635.20
26	0.2	47887.03	0.0022	47887.03	0.0026	47887.03	0.0032	47887.03	0.0029	47887.03	0.0063	47887.03
27	0.2	56421.91	0.0027	58536.60	0.0031	58536.60	0.0038	58536.60	0.0038	58536.60	0.0062	58536.60
28	< 0,1	49755.46	0.0021	49873.07	0.0029	49873.07	0.0043	49873.07	0.0178	49755.46	0.0207	49755.46
29	0.2	52388.06	0.0027	56789.84	0.0029	56789.84	0.0033	56789.84	0.0039	56789.84	0.0076	56789.84
30	0.1	51437.59	0.0028	51437.59	0.0031	51437.59	0.0041	51437.59	0.0038	51437.59	0.0075	51437.59
31	0.1	48210.30	0.0028	48210.30	0.0032	48210.30	0.0040	48210.30	0.0038	48210.30	0.0077	48210.30
32	0.2	45966.85	0.0029	45966.85	0.0032	45966.85	0.0042	45966.85	0.0037	45966.85	0.0075	45966.85
33	0.2	46505.48	0.0024	46505.48	0.0030	46505.48	0.0042	46505.48	0.0041	46505.48	0.0078	46505.48
34	0.1	45691.51	0.0029	45691.51	0.0032	45691.51	0.0042	45691.51	0.0039	45691.51	0.0048	45691.51
35	0.2	57345.40	0.0026	57581.79	0.0031	57581.79	0.0053	57554.94	0.0082	57417.70	0.0102	57417.70
36	0.2	47712.51	0.0027	47712.51	0.0031	47712.51	0.0041	47712.51	0.0040	47712.51	0.0078	47712.51
37	0.2	61593.17	0.0021	61593.17	0.0029	61593.17	0.0041	61593.17	0.0040	61593.17	0.0083	61593.17
38	0.1	46415.75	0.0027	46606.21	0.0026	46606.21	0.0044	46590.41	0.0118	46412.01	0.0143	46412.01
39	0.1	45695.20	0.0029	45695.20	0.0034	45695.20	0.0038	45695.20	0.0029	45695.20	0.0057	45695.20
40	0.1	43463.67	0.0023	47233.20	0.0025	47233.20	0.0038	47233.20	0.0040	47233.20	0.0053	47233.20
41	0.2	52816.34	0.0028	53417.02	0.0032	53417.02	0.0042	53417.02	0.0040	53417.02	0.0083	53417.02
42	0.1	46837.71	0.0029	50226.65	0.0029	50226.65	0.0033	50226.65	0.0038	50226.65	0.0077	50226.65
43	0.1	49225.98	0.0027	49262.89	0.0030	49262.89	0.0052	49225.98	0.0047	49225.98	0.0086	49225.98
44	0.2	51213.26	0.0029	51213.26	0.0032	51213.26	0.0042	51213.26	0.0038	51213.26	0.0075	51213.26
45	0.1	46652.28	0.0034	49596.53	0.0033	49596.53	0.0045	49596.53	0.0040	49596.53	0.0079	49596.53
46	0.1	46811.64	0.0044	46811.64	0.0041	46811.64	0.0038	46811.64	0.0040	46811.64	0.0080	46811.64
47	0.3	57105.61	0.0022	57105.61	0.0033	57105.61	0.0045	57105.61	0.0042	57105.61	0.0078	57105.61
48	0.2	52165.82	0.0027	52705.74	0.0031	52705.74	0.0034	52705.74	0.0033	52705.74	0.0056	52705.74
49	0.1	44514.53	0.0022	48815.01	0.0033	48815.01	0.0043	48815.01	0.0038	48815.01	0.0079	48815.01
50	0.2	52967.63	0.0028	52967.63	0.0031	52967.63	0.0043	52967.63	0.0040	52967.63	0.0092	52967.63

Tabla A.6: Resultados para casos c-Falto (20 períodos)

c-Halto n=10	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	< 0,1	10159.13	0.0007	10159.13	0.0008	10159.13	0.0009	10159.13	0.0009	10159.13	0.0020	10159.13
2	< 0,1	9380.62	0.0008	9380.62	0.0009	9380.62	0.0012	9380.62	0.0011	9380.62	0.0021	9380.62
3	< 0,1	9446.82	0.0008	9446.82	0.0009	9446.82	0.0011	9446.82	0.0010	9446.82	0.0013	9446.82
4	< 0,1	10765.84	0.0008	10765.84	0.0009	10765.84	0.0011	10765.84	0.0010	10765.84	0.0014	10765.84
5	< 0,1	10152.14	0.0008	10152.14	0.0010	10152.14	0.0011	10152.14	0.0011	10152.14	0.0022	10152.14
6	< 0,1	9319.42	0.0009	9319.42	0.0010	9319.42	0.0012	9319.42	0.0011	9319.42	0.0021	9319.42
7	< 0,1	9537.57	0.0006	9537.57	0.0008	9537.57	0.0009	9537.57	0.0008	9537.57	0.0016	9537.57
8	< 0,1	9003.18	0.0007	9003.18	0.0009	9003.18	0.0009	9003.18	0.0009	9003.18	0.0012	9003.18
9	< 0,1	8504.87	0.0007	8504.87	0.0008	8504.87	0.0009	8504.87	0.0008	8504.87	0.0011	8504.87
10	< 0,1	8320.26	0.0007	8320.26	0.0008	8320.26	0.0009	8320.26	0.0008	8320.26	0.0011	8320.26
11	< 0,1	8811.45	0.0008	8811.45	0.0008	8811.45	0.0009	8811.45	0.0009	8811.45	0.0011	8811.45
12	< 0,1	9009.11	0.0007	9009.11	0.0008	9009.11	0.0009	9009.11	0.0008	9009.11	0.0011	9009.11
13	< 0,1	8598.36	0.0007	8598.36	0.0008	8598.36	0.0009	8598.36	0.0008	8598.36	0.0015	8598.36
14	< 0,1	8481.05	0.0007	8481.05	0.0008	8481.05	0.0009	8481.05	0.0008	8481.05	0.0011	8481.05
15	< 0,1	10088.93	0.0006	10088.93	0.0008	10088.93	0.0009	10088.93	0.0008	10088.93	0.0015	10088.93
16	< 0,1	8799.90	0.0007	8799.90	0.0008	8799.90	0.0009	8799.90	0.0008	8799.90	0.0012	8799.90
17	< 0,1	8650.72	0.0007	8650.72	0.0008	8650.72	0.0009	8650.72	0.0008	8650.72	0.0012	8650.72
18	< 0,1	9206.46	0.0007	9206.46	0.0008	9206.46	0.0010	9206.46	0.0009	9206.46	0.0018	9206.46
19	< 0,1	8468.41	0.0007	8468.41	0.0009	8468.41	0.0010	8468.41	0.0009	8468.41	0.0018	8468.41
20	< 0,1	8859.89	0.0006	8859.89	0.0008	8859.89	0.0009	8859.89	0.0008	8859.89	0.0011	8859.89
21	< 0,1	7626.49	0.0007	7626.49	0.0009	7626.49	0.0009	7626.49	0.0008	7626.49	0.0014	7626.49
22	< 0,1	10816.74	0.0006	10816.74	0.0008	10816.74	0.0009	10816.74	0.0008	10816.74	0.0016	10816.74
23	< 0,1	8291.13	0.0007	8291.13	0.0008	8291.13	0.0010	8291.13	0.0011	8291.13	0.0014	8291.13
24	< 0,1	8992.84	0.0007	8992.84	0.0008	8992.84	0.0009	8992.84	0.0009	8992.84	0.0012	8992.84
25	< 0,1	10179.06	0.0006	10179.06	0.0008	10179.06	0.0009	10179.06	0.0008	10179.06	0.0015	10179.06
26	< 0,1	9252.60	0.0007	9252.60	0.0008	9252.60	0.0009	9252.60	0.0008	9252.60	0.0012	9252.60
27	< 0,1	8672.91	0.0007	8672.91	0.0008	8672.91	0.0009	8672.91	0.0008	8672.91	0.0016	8672.91
28	< 0,1	9532.10	0.0007	9532.10	0.0008	9532.10	0.0009	9532.10	0.0010	9532.10	0.0016	9532.10
29	< 0,1	9720.70	0.0007	9720.70	0.0008	9720.70	0.0009	9720.70	0.0009	9720.70	0.0011	9720.70
30	< 0,1	9313.60	0.0006	9313.60	0.0008	9313.60	0.0008	9313.60	0.0008	9313.60	0.0011	9313.60
31	< 0,1	9014.37	0.0011	9014.37	0.0010	9014.37	0.0011	9014.37	0.0010	9014.37	0.0013	9014.37
32	< 0,1	8550.19	0.0007	8550.19	0.0008	8550.19	0.0009	8550.19	0.0008	8550.19	0.0015	8550.19
33	< 0,1	8356.83	0.0007	8356.83	0.0007	8356.83	0.0009	8356.83	0.0008	8356.83	0.0011	8356.83
34	< 0,1	8598.92	0.0007	8598.92	0.0008	8598.92	0.0011	8598.92	0.0011	8598.92	0.0013	8598.92
35	< 0,1	8029.46	0.0007	8029.46	0.0008	8029.46	0.0009	8029.46	0.0010	8029.46	0.0019	8029.46
36	< 0,1	9337.19	0.0006	9337.19	0.0007	9337.19	0.0009	9337.19	0.0008	9337.19	0.0011	9337.19
37	< 0,1	8942.47	0.0007	8942.47	0.0008	8942.47	0.0009	8942.47	0.0007	8942.47	0.0010	8942.47
38	< 0,1	9511.72	0.0009	9511.72	0.0010	9511.72	0.0011	9511.72	0.0010	9511.72	0.0015	9511.72
39	< 0,1	8670.71	0.0010	8670.71	0.0011	8670.71	0.0013	8670.71	0.0010	8670.71	0.0018	8670.71
40	< 0,1	7428.24	0.0011	7428.24	0.0012	7428.24	0.0015	7428.24	0.0011	7428.24	0.0021	7428.24
41	< 0,1	8853.33	0.0010	8853.33	0.0011	8853.33	0.0013	8853.33	0.0011	8853.33	0.0015	8853.33
42	< 0,1	8505.08	0.0010	8505.08	0.0011	8505.08	0.0013	8505.08	0.0012	8505.08	0.0014	8505.08
43	< 0,1	8999.41	0.0008	8999.41	0.0011	8999.41	0.0013	8999.41	0.0011	8999.41	0.0016	8999.41
44	< 0,1	9950.33	0.0009	9950.33	0.0009	9950.33	0.0011	9950.33	0.0011	9950.33	0.0022	9950.33
45	< 0,1	8994.79	0.0009	8994.79	0.0010	8994.79	0.0011	8994.79	0.0011	8994.79	0.0016	8994.79
46	< 0,1	8209.23	0.0009	8209.23	0.0010	8209.23	0.0011	8209.23	0.0010	8209.23	0.0013	8209.23
47	< 0,1	9646.32	0.0009	9646.32	0.0010	9646.32	0.0012	9646.32	0.0012	9646.32	0.0018	9646.32
48	< 0,1	9098.91	0.0009	9098.91	0.0010	9098.91	0.0013	9098.91	0.0011	9098.91	0.0019	9098.91
49	< 0,1	8614.72	0.0008	8614.72	0.0011	8614.72	0.0013	8614.72	0.0012	8614.72	0.0021	8614.72
50	< 0,1	8456.31	0.0009	8456.31	0.0010	8456.31	0.0013	8456.31	0.0011	8456.31	0.0020	8456.31

Tabla A.7: Resultados para casos c-Halto (10 períodos)

c-Halto n=20	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	0.4	18754.50	0.0031	18754.50	0.0034	18754.50	0.0043	18754.50	0.0044	18754.50	0.0111	18754.50
2	1.0	17378.47	0.0022	17378.47	0.0025	17378.47	0.0036	17378.47	0.0037	17378.47	0.0047	17378.47
3	1.3	20042.29	0.0022	20042.29	0.0032	20042.29	0.0045	20042.29	0.0045	20042.29	0.0063	20042.29
4	0.8	19439.37	0.0029	19439.37	0.0034	19439.37	0.0042	19439.37	0.0047	19439.37	0.0059	19439.37
5	0.5	18632.38	0.0031	18632.38	0.0034	18632.38	0.0045	18632.38	0.0043	18632.38	0.0088	18632.38
6	0.8	19286.49	0.0030	19286.49	0.0031	19286.49	0.0045	19286.49	0.0041	19286.49	0.0059	19286.49
7	0.6	18757.18	0.0033	18757.18	0.0032	18757.18	0.0048	18757.18	0.0044	18757.18	0.0057	18757.18
8	1.3	18646.33	0.0032	18646.33	0.0032	18646.33	0.0046	18646.33	0.0043	18646.33	0.0090	18646.33
9	0.4	17520.28	0.0028	17520.28	0.0033	17520.28	0.0042	17520.28	0.0045	17520.28	0.0088	17520.28
10	0.3	15707.28	0.0032	15707.28	0.0032	15707.28	0.0044	15707.28	0.0041	15707.28	0.0085	15707.28
11	0.6	18784.63	0.0032	18784.63	0.0032	18784.63	0.0046	18784.63	0.0041	18784.63	0.0058	18784.63
12	0.4	19061.30	0.0030	19061.30	0.0031	19061.30	0.0045	19061.30	0.0039	19061.30	0.0084	19061.30
13	0.8	18016.61	0.0030	18016.61	0.0034	18016.61	0.0043	18016.61	0.0045	18016.61	0.0088	18016.61
14	1.5	19118.09	0.0032	19118.09	0.0032	19118.09	0.0046	19118.09	0.0037	19118.09	0.0099	19118.09
15	1.4	17311.75	0.0061	17311.75	0.0040	17311.75	0.0040	17311.75	0.0034	17311.75	0.0082	17311.75
16	0.5	17057.89	0.0043	17057.89	0.0045	17057.89	0.0048	17057.89	0.0044	17057.89	0.0087	17057.89
17	0.9	17378.19	0.0022	17378.19	0.0030	17378.19	0.0042	17378.19	0.0046	17378.19	0.0063	17378.19
18	0.7	18359.79	0.0027	18359.79	0.0026	18359.79	0.0032	18359.79	0.0032	18359.79	0.0064	18359.79
19	0.6	18645.93	0.0021	18645.93	0.0024	18645.93	0.0033	18645.93	0.0031	18645.93	0.0042	18645.93
20	0.7	18908.85	0.0022	18908.85	0.0024	18908.85	0.0030	18908.85	0.0031	18908.85	0.0060	18908.85
21	0.9	17585.29	0.0021	17585.29	0.0023	17585.29	0.0030	17585.29	0.0028	17585.29	0.0054	17585.29
22	1.0	15917.12	0.0021	15917.12	0.0025	15917.12	0.0032	15917.12	0.0030	15917.12	0.0060	15917.12
23	0.9	20071.86	0.0021	20071.86	0.0025	20071.86	0.0031	20071.86	0.0032	20071.86	0.0044	20071.86
24	0.7	18562.39	0.0022	18562.39	0.0024	18562.39	0.0033	18562.39	0.0036	18562.39	0.0048	18562.39
25	0.7	18673.12	0.0022	18673.12	0.0025	18673.12	0.0032	18673.12	0.0031	18673.12	0.0049	18673.12
26	0.6	18170.07	0.0023	18170.07	0.0026	18170.07	0.0042	18170.07	0.0042	18170.07	0.0083	18170.07
27	0.4	17954.49	0.0027	17954.49	0.0028	17954.49	0.0042	17954.49	0.0039	17954.49	0.0069	17954.49
28	0.7	18683.77	0.0022	18683.77	0.0024	18683.77	0.0033	18683.77	0.0032	18683.77	0.0043	18683.77
29	0.8	17232.59	0.0023	17232.59	0.0024	17232.59	0.0033	17232.59	0.0032	17232.59	0.0063	17232.59
30	0.5	17006.39	0.0023	17006.39	0.0025	17006.39	0.0032	17006.39	0.0031	17006.39	0.0041	17006.39
31	1.0	16883.16	0.0023	16883.16	0.0024	16883.16	0.0032	16883.16	0.0032	16883.16	0.0063	16883.16
32	0.4	18881.60	0.0025	18881.60	0.0026	18881.60	0.0034	18881.60	0.0033	18881.60	0.0066	18881.60
33	0.7	16706.24	0.0022	16706.24	0.0025	16706.24	0.0032	16706.24	0.0030	16706.24	0.0051	16706.24
34	1.1	19145.76	0.0024	19145.76	0.0025	19145.76	0.0034	19145.76	0.0032	19145.76	0.0063	19145.76
35	1.4	18632.77	0.0023	18632.77	0.0025	18632.77	0.0037	18632.77	0.0032	18632.77	0.0072	18632.77
36	0.7	17628.81	0.0029	17628.81	0.0033	17628.81	0.0036	17628.81	0.0038	17628.81	0.0086	17628.81
37	0.7	19440.09	0.0028	19440.09	0.0031	19440.09	0.0041	19440.09	0.0041	19440.09	0.0069	19440.09
38	0.6	21203.40	0.0020	21203.40	0.0026	21203.40	0.0036	21203.40	0.0031	21203.40	0.0065	21203.40
39	1.5	18683.53	0.0024	18683.53	0.0026	18683.53	0.0033	18683.53	0.0032	18683.53	0.0062	18683.53
40	1.2	18542.70	0.0023	18542.70	0.0026	18542.70	0.0033	18542.70	0.0034	18542.70	0.0044	18542.70
41	0.5	18078.20	0.0023	18078.20	0.0025	18078.20	0.0033	18078.20	0.0040	18078.20	0.0061	18078.20
42	0.8	17626.30	0.0023	17626.30	0.0024	17626.30	0.0034	17626.30	0.0031	17626.30	0.0061	17626.30
43	0.5	19010.37	0.0022	19010.37	0.0024	19010.37	0.0035	19010.37	0.0032	19010.37	0.0083	19010.37
44	0.9	16490.92	0.0031	16490.92	0.0034	16490.92	0.0048	16490.92	0.0054	16490.92	0.0085	16490.92
45	0.4	19006.46	0.0040	19006.46	0.0042	19006.46	0.0051	19006.46	0.0032	19006.46	0.0123	19006.46
46	0.3	18410.39	0.0045	18410.39	0.0035	18410.39	0.0059	18410.39	0.0031	18410.39	0.0086	18410.39
47	0.6	16827.65	0.0029	16827.65	0.0033	16827.65	0.0062	16827.65	0.0043	16827.65	0.0086	16827.65
48	1.2	19240.12	0.0023	19240.12	0.0030	19240.12	0.0041	19240.12	0.0041	19240.12	0.0082	19240.12
49	0.3	18028.49	0.0035	18028.49	0.0029	18028.49	0.0045	18028.49	0.0032	18028.49	0.0077	18028.49
50	0.5	16861.55	0.0039	16861.55	0.0035	16861.55	0.0035	16861.55	0.0071	16861.55	0.0048	16861.55

Tabla A.8: Resultados para casos c-Halto (20 períodos)

c-Ccrec n=10	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	< 0,1	41216.72	0.0011	88857.37	0.0013	88857.37	0.0023	56585.94	0.0018	57076.43	0.0036	49935.96
2	< 0,1	47121.99	0.0012	60687.49	0.0014	60687.49	0.0021	47698.18	0.0020	52392.06	0.0029	47142.82
3	< 0,1	33209.16	0.0013	81799.24	0.0014	81799.24	0.0025	43795.08	0.0023	48273.92	0.0032	36958.95
4	< 0,1	56034.10	0.0010	118987.93	0.0011	118987.93	0.0021	59502.66	0.0015	73561.58	0.0036	56627.21
5	< 0,1	35767.61	0.0010	37229.23	0.0011	37229.23	0.0013	35767.61	0.0014	35767.61	0.0015	35767.61
6	< 0,1	58306.68	0.0010	92997.94	0.0011	92997.94	0.0021	64030.20	0.0023	70692.72	0.0035	62391.79
7	< 0,1	54166.79	0.0010	70020.40	0.0011	70020.40	0.0018	55724.34	0.0094	59869.05	0.0030	54612.00
8	< 0,1	37962.56	0.0010	49251.71	0.0011	49251.71	0.0017	37962.56	0.0016	37962.56	0.0024	37962.56
9	< 0,1	43735.81	0.0010	55849.42	0.0011	55849.42	0.0016	44359.42	0.0022	43735.81	0.0024	43735.81
10	< 0,1	43484.10	0.0011	68717.02	0.0014	68717.02	0.0022	45627.12	0.0029	50237.24	0.0041	45297.57
11	< 0,1	46578.02	0.0013	55709.76	0.0014	55709.76	0.0022	47088.39	0.0046	46752.55	0.0041	46821.47
12	< 0,1	45782.20	0.0013	65945.85	0.0014	65945.85	0.0024	49054.90	0.0050	56243.60	0.0035	48131.09
13	< 0,1	44366.35	0.0012	61790.76	0.0014	61790.76	0.0020	46163.77	0.0023	48460.13	0.0031	44882.25
14	< 0,1	54721.09	0.0012	92536.61	0.0013	92536.61	0.0024	64170.58	0.0017	75071.27	0.0037	64124.79
15	< 0,1	39931.23	0.0012	90165.81	0.0013	90165.81	0.0022	46378.53	0.0019	57091.49	0.0035	44778.74
16	< 0,1	42175.29	0.0012	59654.77	0.0013	59654.77	0.0020	43225.87	0.0027	42250.37	0.0025	42250.37
17	< 0,1	50200.87	0.0011	103842.84	0.0015	103184.11	0.0022	66878.88	0.0017	73904.47	0.0034	63194.23
18	< 0,1	36189.51	0.0012	80379.38	0.0013	80379.38	0.0024	39164.75	0.0027	40838.40	0.0026	38043.14
19	0,1	42326.65	0.0015	53629.25	0.0017	53629.25	0.0022	44920.55	0.0026	43522.62	0.0032	44880.61
20	< 0,1	37476.22	0.0013	55899.68	0.0014	55899.68	0.0022	39504.13	0.0027	41156.48	0.0030	37576.41
21	< 0,1	40853.09	0.0013	63357.17	0.0014	63357.17	0.0020	45190.88	0.0023	45014.06	0.0023	41732.35
22	< 0,1	53771.66	0.0009	87169.49	0.0011	87169.49	0.0019	60171.12	0.0015	64080.09	0.0028	55302.18
23	< 0,1	38825.67	0.0010	41158.26	0.0011	41158.26	0.0012	39288.07	0.0046	38826.58	0.0033	38826.58
24	< 0,1	34038.68	0.0009	39137.17	0.0011	39137.17	0.0013	34038.68	0.0018	34038.68	0.0015	34038.68
25	< 0,1	39573.66	0.0009	89401.25	0.0011	89401.25	0.0018	45408.72	0.0015	52774.01	0.0025	44021.03
26	< 0,1	45297.63	0.0009	75879.13	0.0010	75879.13	0.0018	45749.75	0.0015	55532.07	0.0024	45711.19
27	< 0,1	44843.08	0.0009	68946.70	0.0011	68946.70	0.0016	46430.88	0.0033	47091.40	0.0023	45779.93
28	< 0,1	36179.91	0.0009	65489.09	0.0011	65489.09	0.0019	43429.08	0.0058	43129.72	0.0071	41381.62
29	< 0,1	33575.12	0.0013	59281.51	0.0014	59281.51	0.0021	38862.57	0.0024	36950.15	0.0027	36950.15
30	< 0,1	61473.25	0.0013	113296.41	0.0013	113296.41	0.0023	67509.63	0.0021	88853.11	0.0032	67217.39
31	< 0,1	53188.47	0.0011	87283.96	0.0014	87283.96	0.0024	58979.42	0.0022	63241.49	0.0038	58228.16
32	< 0,1	50717.03	0.0013	88967.61	0.0014	88967.61	0.0025	62770.98	0.0023	62302.81	0.0033	61113.63
33	< 0,1	32070.78	0.0013	94609.13	0.0022	36344.53	0.0020	36344.53	0.0015	78964.24	0.0029	34370.80
34	< 0,1	44068.47	0.0013	95078.68	0.0021	66043.54	0.0022	49659.46	0.0017	91775.03	0.0034	49158.93
35	< 0,1	37174.55	0.0013	38374.20	0.0015	38374.20	0.0017	37174.55	0.0023	37174.55	0.0021	37174.55
36	< 0,1	39991.71	0.0013	81034.03	0.0014	81034.03	0.0024	44110.09	0.0020	47101.55	0.0027	42945.88
37	< 0,1	50259.09	0.0010	76322.59	0.0011	76322.59	0.0021	52412.85	0.0016	51590.67	0.0027	51316.64
38	< 0,1	44206.74	0.0010	73536.81	0.0012	73536.81	0.0017	49774.47	0.0025	51772.21	0.0030	47259.44
39	< 0,1	46268.60	0.0010	90971.09	0.0012	90971.09	0.0020	54696.37	0.0015	61450.25	0.0026	51433.74
40	< 0,1	28476.42	0.0012	60549.21	0.0015	60549.21	0.0020	31739.29	0.0021	30632.18	0.0026	29534.40
41	< 0,1	44153.36	0.0010	59180.38	0.0011	59180.38	0.0017	46742.74	0.0020	44848.17	0.0028	44164.47
42	< 0,1	50187.17	0.0010	59198.46	0.0011	59198.46	0.0016	54030.47	0.0029	54023.15	0.0034	54023.15
43	< 0,1	37217.07	0.0013	65417.25	0.0012	65417.25	0.0017	37559.95	0.0066	56502.54	0.0023	37266.60
44	< 0,1	38968.22	0.0010	54599.88	0.0011	54599.88	0.0016	41694.75	0.0019	40387.25	0.0024	40579.90
45	< 0,1	37935.31	0.0011	50981.13	0.0011	50981.13	0.0016	37935.31	0.0019	41917.12	0.0019	37935.31
46	< 0,1	40242.33	0.0010	86410.12	0.0011	86410.12	0.0021	45641.93	0.0019	50888.45	0.0027	42105.09
47	< 0,1	49787.62	0.0010	70281.07	0.0012	70281.07	0.0017	55105.98	0.0019	55176.55	0.0027	52493.72
48	< 0,1	36964.97	0.0010	57448.61	0.0011	57448.61	0.0020	37920.32	0.0020	38195.16	0.0026	37659.26
49	< 0,1	29426.28	0.0011	37941.07	0.0011	37941.07	0.0014	30521.46	0.0024	29437.13	0.0020	29437.13
50	< 0,1	47739.16	0.0010	104975.29	0.0011	104975.29	0.0017	61140.53	0.0019	74759.90	0.0025	57831.86

Tabla A.9: Resultados para casos c-Ccrec (10 períodos)

c-Crec n=20	GLPK		Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	0.1	744553.20	0.0040	1123053.80	0.0042	1123053.80	0.0085	804418.44	0.0060	1080795.66	0.1028	793847.50
2	0.1	757065.82	0.0049	1200953.83	0.0051	1200953.83	0.0115	949374.46	0.0103	1125813.39	0.4910	878520.39
3	0.1	603017.15	0.0054	923130.29	0.0056	923130.29	0.0126	684422.56	0.0065	852333.15	0.0237	669562.15
4	0.1	668132.55	0.0043	1003393.32	0.0043	1003393.32	0.0101	786045.10	0.0062	969093.40	0.0195	768875.91
5	0.1	832482.26	0.0052	1203522.40	0.0060	1172748.62	0.0128	977753.63	0.0064	1155019.94	0.0275	924969.16
6	< 0.1	621750.41	0.0056	884397.29	0.0059	884397.29	0.0111	714491.98	0.0059	852062.44	0.0358	713537.93
7	0.1	701505.14	0.0048	1001573.62	0.0054	1001573.62	0.0110	795691.46	0.0055	897388.11	0.0631	783671.88
8	< 0.1	727609.01	0.0051	1037810.40	0.0062	1037810.40	0.0117	834755.76	0.0064	1001151.95	0.0381	815928.18
9	0.1	695919.65	0.0051	1038289.35	0.0055	1038289.35	0.0109	794124.78	0.0064	1029715.06	0.0502	775680.68
10	< 0.1	639562.14	0.0040	1005091.31	0.0042	1005091.31	0.0100	769629.07	0.0051	933484.32	0.0166	757420.92
11	< 0.1	813050.59	0.0042	1085781.74	0.0044	1085781.74	0.0089	903265.54	0.0054	1055683.04	0.0403	898053.32
12	0.1	716716.91	0.0052	1013412.97	0.0053	1013412.97	0.0123	795179.08	0.0058	942025.00	0.0237	790667.27
13	< 0.1	795592.98	0.0038	1142875.68	0.0040	1142875.68	0.0082	840498.49	0.0131	1069638.08	0.0558	836009.40
14	0.2	634763.62	0.0053	986268.55	0.0062	986268.55	0.0106	773941.17	0.0075	968261.69	0.0203	758758.50
15	0.1	681545.19	0.0042	940503.67	0.0046	940503.67	0.0087	746411.67	0.0050	906024.48	0.0202	742164.03
16	0.2	915352.49	0.0040	1229494.40	0.0043	1229494.40	0.0106	1038253.71	0.0052	1128307.15	0.0316	1031367.39
17	0.1	716479.48	0.0111	1235512.12	0.0059	1176482.56	0.0114	941687.15	0.0085	1208777.18	0.0419	909462.82
18	0.1	680196.46	0.0056	1011649.44	0.0078	1011649.44	0.0126	873533.82	0.0058	973607.82	0.0303	853768.52
19	0.1	685003.57	0.0079	958059.09	0.0051	958059.09	0.0133	776764.88	0.0064	836211.70	0.0435	773653.04
20	0.1	810802.44	0.0045	1162288.48	0.0064	1162288.48	0.0105	927769.64	0.0337	1135217.62	0.0181	924539.06
21	0.1	698359.52	0.0053	1077224.59	0.0055	1077224.59	0.0127	787428.25	0.0064	1071257.38	0.0218	782669.42
22	< 0.1	803091.32	0.0047	1260133.74	0.0081	1260133.74	0.0213	993271.15	0.0056	1254535.89	0.1391	959761.58
23	0.1	687166.62	0.0075	1069315.06	0.0042	1069315.06	0.0097	810211.60	0.0055	954574.85	0.0200	780435.29
24	< 0.1	693631.06	0.0055	934435.18	0.0057	934435.18	0.0115	733969.37	0.0076	930653.50	0.0662	728611.26
25	0.1	618614.55	0.0115	1015635.23	0.0121	1015635.23	0.0192	808648.96	0.0052	848994.12	0.0179	779839.52
26	0.1	460409.45	0.0044	860150.70	0.0053	860150.70	0.0101	610889.89	0.0073	824787.89	0.0281	595590.76
27	0.1	817052.69	0.0052	1211225.49	0.0072	1083067.42	0.0129	936378.67	0.0066	1170656.53	0.1059	908236.96
28	< 0.1	702451.81	0.0052	943196.28	0.0055	943196.28	0.0103	791451.06	0.0061	914554.31	0.0243	772994.57
29	< 0.1	655437.76	0.0045	1079255.07	0.0046	1055369.52	0.0097	758488.74	0.0063	972929.22	0.0435	730010.02
30	0.1	720200.62	0.0054	1073357.45	0.0057	1073357.45	0.0127	894864.08	0.0051	956628.99	0.0265	864982.47
31	0.1	642754.53	0.0042	946407.97	0.0094	946407.97	0.0144	749485.59	0.0065	894911.93	0.0250	733201.73
32	0.1	840611.10	0.0099	1177182.47	0.0079	1177182.47	0.0133	955515.42	0.0059	1086848.88	0.0507	938902.47
33	< 0.1	806303.55	0.0042	1145389.62	0.0048	1145389.62	0.0155	936402.56	0.0063	1110991.68	0.0238	935430.14
34	0.1	613870.06	0.0055	1012245.18	0.0064	898001.92	0.0100	747151.08	0.0065	944528.29	0.0294	716994.88
35	< 0.1	673929.93	0.0041	1030648.10	0.0053	1030648.10	0.0091	855933.91	0.0051	988382.56	0.0518	819647.70
36	0.1	711362.81	0.0051	1139442.44	0.0046	1139442.44	0.0140	889399.72	0.0063	1053634.74	0.0895	834043.08
37	< 0.1	625066.95	0.0050	1011066.42	0.0053	859071.04	0.0149	816911.32	0.0062	997042.13	0.0186	815048.94
38	0.3	741325.50	0.0046	1070415.78	0.0053	1070415.78	0.0114	813379.95	0.0057	948760.86	0.0345	796225.34
39	0.1	747416.40	0.0053	1148443.38	0.0054	1148443.38	0.0099	846126.48	0.0060	1062029.29	0.0404	825729.89
40	0.1	709722.67	0.0047	1057814.71	0.0056	1057814.71	0.0122	890254.97	0.0064	972555.41	0.0198	869803.57
41	0.2	767589.62	0.0042	1185921.13	0.0074	1092378.84	0.0194	953082.27	0.0057	1145867.74	0.0467	886412.27
42	< 0.1	668072.50	0.0052	1003356.59	0.0054	1003356.59	0.0117	769840.63	0.0117	1000407.88	0.0383	755108.49
43	0.1	801836.48	0.0050	1152761.41	0.0053	1152761.41	0.0102	940793.16	0.0060	1059338.41	0.0674	914997.95
44	0.1	811047.14	0.0051	1157343.59	0.0054	1157343.59	0.0129	887076.91	0.0062	1104880.71	0.0206	865764.76
45	< 0.1	636657.99	0.0053	913530.39	0.0057	913530.39	0.0115	730171.64	0.0066	870455.25	0.0453	723453.73
46	0.1	729206.80	0.0042	1135325.12	0.0048	1135325.12	0.0096	973148.35	0.0065	1070852.49	0.0326	964532.67
47	0.1	799841.67	0.0050	1187673.61	0.0056	1187673.61	0.0153	881589.46	0.0087	1111867.10	0.0321	866066.52
48	0.1	748759.75	0.0054	1106632.13	0.0047	1106632.13	0.0100	849529.86	0.0058	1069811.88	0.0229	834021.32
49	0.1	709812.00	0.0041	1012085.19	0.0041	1012085.19	0.0092	837581.64	0.0061	982491.02	0.2951	827247.90
50	0.1	641093.45	0.0109	903064.59	0.0120	868052.29	0.0252	677237.52	0.0181	882402.87	0.0229	670607.07

Tabla A.10: Resultados para casos c-Crec (210 periodos)

A.2. Problemas grandes (50 períodos)

En las tablas a continuación se muestra también, para los casos en los que GLPK no halló la solución óptima, la brecha de dualidad.

c-Hsu n=50	GLPK			Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	%gap	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	1800.1	40727.44	3.9	0.0142	40016.32	0.0144	40016.32	0.0196	40016.32	0.0233	40016.32	0.0369	40016.32
2	1800.2	40994.29	3.7	0.0140	40403.16	0.0141	40403.16	0.0206	40403.16	0.0281	40403.16	0.0608	40403.16
3	1800.1	37021.49	1.9	0.0136	36907.58	0.0151	36907.58	0.0244	36907.58	0.0264	36907.58	0.0549	36907.58
4	1800.1	42696.37	5.3	0.0169	41711.54	0.0235	41711.54	0.0234	41711.54	0.0283	41711.54	0.0513	41711.54
5	1800.1	37406.25	0.6	0.0135	37406.25	0.0148	37406.25	0.0199	37406.25	0.0218	37406.25	0.0593	37406.25

Tabla A.11: Resultados para casos c-Hsu (50 períodos)

c-Div n=50	GLPK			Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	%gap	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	1800.2	40425.82	10.1	0.0133	38937.85	0.0137	38937.85	0.0218	38937.85	0.0254	38937.85	0.0505	38937.85
2	1800.2	41467.44	6.4	0.0138	41145.34	0.0126	41145.34	0.0186	41145.34	0.0310	41145.34	0.0558	41145.34
3	1800.1	40712.77	5.5	0.0173	40156.06	0.0180	40156.06	0.0258	40156.06	0.0245	40156.06	0.0748	40156.06
4	1800.1	43782.32	8.1	0.0245	41789.13	0.0176	41789.13	0.0354	41789.13	0.0340	41789.13	0.0637	41789.13
5	1800.1	41961.69	7.5	0.0162	40384.68	0.0175	40384.68	0.0310	40384.68	0.0340	40384.68	0.0412	40384.68

Tabla A.12: Resultados para casos c-Div (50 períodos)

c-Falto n=50	GLPK			Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	%gap	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	1800.1	120768.15	3.1	0.0136	121335.41	0.0154	121335.41	0.0233	121335.41	0.0284	121335.41	0.0664	121335.41
2	1800.1	137355.29	13.6	0.0141	130237.51	0.0179	130237.51	0.0201	130237.51	0.0226	130237.51	0.0604	130237.51
3	1800.1	124213.29	3.6	0.0166	123964.73	0.0201	123964.73	0.0236	123964.73	0.0279	123964.73	0.0743	123964.73
4	1800.1	127313.90	13.8	0.0178	120396.05	0.0166	120396.05	0.0338	120223.31	0.0480	120223.31	0.0627	120223.31
5	1800.1	123587.80	6.7	0.0201	122856.57	0.0209	122856.57	0.0244	122856.57	0.0297	122856.57	0.0596	122856.57

Tabla A.13: Resultados para casos c-Falto (50 períodos)

c-Halto n=50	GLPK			Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	%gap	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	1800.2	48256.63	9.8	0.0155	47397.21	0.0127	47397.21	0.0183	47397.21	0.0266	47397.21	0.0539	47397.21
2	1800.2	45211.80	8.8	0.0144	44422.79	0.0169	44422.79	0.0223	44422.79	0.0313	44422.79	0.0343	44422.79
3	1800.2	46182.82	11.4	0.0147	44960.68	0.0185	44960.68	0.0209	44960.68	0.0289	44960.68	0.0403	44960.68
4	1800.2	45949.73	11.6	0.0143	45454.01	0.0125	45454.01	0.0177	45454.01	0.0257	45454.01	0.0332	45454.01
5	1800.2	45364.44	8.6	0.0170	45067.42	0.0167	45067.42	0.0206	45067.42	0.0326	45067.42	0.0562	45067.42

Tabla A.14: Resultados para casos c-Halto (50 períodos)

c-Crec n=50	GLPK			Hsu		S-Prod		S-Parcial		S-Sat		3 Heurísticas	
	t	C	%gap	t	C	t	C	t	C	t	C	t	C
1	1800.2	22702335.99	1.0	0.0296	23332026.02	0.0282	23332026.02	0.0592	23086727.12	0.0321	23231213.08	0.1806	22988950.10
2	67.5	19993590.01	–	0.0272	20680591.27	0.0303	20680591.27	0.0666	20281187.62	0.0529	20502196.69	0.1257	20138121.33
3	1800.2	21700156.70	0.5	0.0342	22374660.50	0.0266	22374660.50	0.0720	22037949.32	0.0452	22144951.34	0.3404	21909841.56
4	54.7	20684006.22	–	0.0319	21454131.12	0.0304	21454131.12	0.0683	21016703.36	0.0327	21285127.86	0.1162	21005151.09
5	88.3	24375901.13	–	0.0293	25081457.98	0.0302	25030173.05	0.1126	24821258.85	0.1050	25029725.98	0.1464	24722263.02

Tabla A.15: Resultados para casos c-Crec (50 períodos)

Apéndice B

Gestión de Inventario de Artículos Perecederos: Estado del Arte

Resumen

En la literatura, la mayoría de los modelos utilizados para estudiar problemas de gestión de inventario suponen que los artículos pueden ser almacenados indefinidamente. En la realidad, los artículos suelen tener tiempo de vida limitado. En este trabajo, se definen las principales características de este tipo de problemas. Se presenta un resumen de la literatura en el área de artículos perecederos, clasificando y resumiendo los distintos trabajos.

Índice general

1. Introducción	2
2. Preliminares	4
2.1. Características de problemas de gestión de inventario	4
2.2. Modelos de gestión de inventario	6
2.2.1. Cantidad Económica de Pedido (EOQ)	6
2.2.2. Cantidad Económica de Producción (EPQ)	7
2.2.3. Problema de Dimensionamiento del Lote Económico (ELS)	8
3. Revisión de la literatura	9
3.1. Demanda determinista	9
3.1.1. Problemas de reposición	9
3.1.2. Problemas de producción	12
3.1.3. Problemas multi nivel	14
3.1.4. Problemas con reacondicionamiento	17
3.2. Demanda estocástica	17
3.2.1. Revisión periódica	18
3.2.2. Revisión continua	18
4. Conclusiones	20
Bibliografía	26

Capítulo 1

Introducción

El problema de gestión de inventario consiste en planificar cómo satisfacer cierta demanda de uno o varios productos durante cierto período de tiempo según algún criterio (por ejemplo, minimizar los costos). Para esto se deben tomar decisiones tales como cuántos productos fabricar o adquirir en qué momento, y qué cantidad de productos retener en inventario. El estudio de problemas de gestión de inventario comenzó con Harris (1913) [29].

En la literatura, la mayoría de los modelos utilizados para estudiar problemas de gestión de inventario suponen que los artículos producidos pueden ser almacenados indefinidamente (Khanlarzade et al., 2014 [38]). Sin embargo, en la realidad, en la mayoría de los casos esta suposición no se mantiene ya que los productos tienen un tiempo de vida limitado. Esto puede deberse a diversas razones, por ejemplo, un artículo almacenado puede sufrir cambios con el correr del tiempo (como el deterioro o caducidad de artículos alimenticios o químicos), puede volverse obsoleto y sufrir una disminución de su valor percibido por parte de clientes (como artículos tecnológicos o productos como periódicos), o puede ser dañado mientras está siendo almacenado.

Estas formas de decaimiento pueden llevar a que un producto no sea apto para la venta o no pueda servir su función original y deba pasar por un proceso de reacondicionamiento, o (más comúnmente) deba ser desechado. El proceso de deterioro puede provocar una disminución de la demanda o del precio de venta de un artículo, o una variación en los costos de almacenamiento. El no tener en cuenta estas consideraciones lleva a formular planes de gestión de inventario de costos innecesariamente altos, a desperdiciar artículos. En algunos casos esto puede implicar también un impacto ambiental negativo (debido al desperdicio de materiales o al efecto de desechar algunos tipos de productos).

Todo esto es la motivación para considerar modelos más complicados que integren estas restricciones del tiempo de vida de los diferentes artículos. El estudio de artículos perecederos en este contexto comenzó con Within (1953) [80], quien consideró artículos que expiran luego de permanecer almacenados en inventario cierta cantidad de tiempo. Actualmente existen muchas variantes del problema, que difieren en suposiciones acerca de la forma del deterioro de los artículos, la demanda, los costos de producción y de almacenamiento, entre otros.

Algunas de las revisiones literarias existentes más extensivas son (Nahmias, 1982 [54]) quien considera referencias previas a 1980, (Rafaat, 1991 [65]) considera referencias en los 80, (Goyal & Giri, 2001 [27]) en los 90, y (Pahl & Voß, 2014 [59]) del 2000 en adelante.

El objetivo de este trabajo es presentar los principales modelos utilizados para resolver las distintas variantes del problema de gestión de inventario de artículos perecederos y presentar algunas de las referencias más importantes en el área. Se pretende ilustrar algunas de las tendencias actuales en la resolución de estos problemas, haciendo énfasis en modelos recientes que consideran artículos con demanda determinista.

El resto de este documento está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se introducen conceptos, definiciones y formulaciones matemáticas básicas que serán útiles para entender el resto del trabajo, y en la Sección 3 se presenta la revisión de los distintos trabajos

relevados de la literatura sobre el problema de gestión de inventario de artículos perecederos. Finalmente, las conclusiones y reflexiones finales son presentadas en la Sección 4.

Capítulo 2

Preliminares

A grandes rasgos, el problema de gestión de inventario de artículos perecederos consiste en planificar la obtención y almacenamiento de artículos durante determinado tiempo a modo de satisfacer cierta demanda. Se puede asumir que los productos se obtienen por medio de encargos a algún proveedor o por producción propia. En un momento determinado se puede optar por producir una cantidad determinada de artículos y/o conservar cierta cantidad de artículos en inventario. Se asume que tanto la producción como el almacenamiento de artículos incurre cierto costo. A medida que pasa el tiempo, la cantidad de artículos almacenados en inventario disminuye debido a la utilización de los mismos para satisfacer la demanda, y al deterioro que puedan sufrir. Las decisiones principales a tomar son entonces en qué momento producir qué cantidades de artículos.

En lo que queda de esta sección, se presentan en mayor detalle las principales características de este problema en 2.1, y luego en 2.2 se presentan algunos de los modelos básicos en los que están basados la mayoría de los modelos mencionados en la Sección 3.

2.1. Características de problemas de gestión de inventario

En los problemas de gestión de inventario, se considera como *horizonte de planificación* al plazo de tiempo tenido en cuenta en el problema. En general se piensa en un horizonte finito y discreto, compuesto por T períodos: $1, 2, 3, \dots, T$. Existen también modelos que consideran el tiempo como una variable continua t , con $t = [0, T]$ en caso de considerar un horizonte finito, o $t = [0, \infty)$ en caso de considerar un horizonte infinito.

La característica principal utilizada en el resto de este trabajo para clasificar modelos de gestión de inventario es la *demanda*, la cual puede ser determinista (conocida) o estocástica (incierto). En modelos con demanda determinista, se considera una función $D(t)$ que representa la demanda dada en el tiempo t , que en el caso general es una función cualquiera. Para el caso en que la demanda es una constante conocida ($D(t) = d_t$), puede escribirse simplemente como d_t . En los casos de demanda estocástica, esta suele estar dada por alguna distribución de probabilidad conocida.

Se considera como $I(t)$ al nivel de inventario en el tiempo t . Además de verse afectado por la demanda, el inventario también disminuye de acuerdo al deterioro de los artículos almacenados. La mayoría de los modelos asumen que existe una función $\theta(t)$ que describe una fracción de inventario que se pierde en cada momento. En caso de que $\theta(t)$ es constante, en cada período se pierde la misma proporción de inventario, la cual suele escribirse simplemente como θ , y se dice que se cuenta con un *deterioro exponencial*. En algunos casos el deterioro está basado en alguna distribución de probabilidad, tal como la distribución exponencial o la distribución de Weibull.

En cada momento t , se puede decidir adquirir x_t productos (variable de decisión). Esto en general implica un costo $C(x_t)$ dependiente de la cantidad de unidades que se adquieran. $C(x_t)$ puede ser una función cualquiera, aunque en algunos modelos se hacen suposiciones acerca de la forma de dicha función. Por ejemplo, en algunos casos donde los costos marginales disminuyen al aumentar la cantidad de productos adquiridos, se puede asumir que $C(x_t)$ es una función cóncava.

A veces se considera también un costo fijo que es independiente de la cantidad de artículos adquiridos, correspondiente con el costo de realizar un pedido a un proveedor externo o de poner en marcha una línea de producción.

En algunos problemas existen restricciones de capacidad de producción o de inventario. La capacidad de producción limita la cantidad de artículos que pueden ser producidos en un momento dado, y la capacidad de inventario restringe la cantidad de artículos que pueden estar almacenados en un momento cualquiera.

Si bien en la mayoría de los casos se considera solo un tipo de artículo, en algunos problemas se consideran varios tipos de productos. En estos casos, los distintos tipos de productos pueden tener distintas características, es decir, diferentes costos asociados, tasas de deterioro, entre otros. En estos casos existe en general alguna restricción que vincula a los diferentes tipos de productos, como por ejemplo, la capacidad del inventario.

Se considera como *tasa de reposición* a la velocidad con la que crece el inventario. Cuando la cantidad de x_t se obtiene inmediatamente, se dice que la tasa de reposición es infinita, y que el modelo es de *reposición de artículos*. Este tipo de modelos son los que mejor representan el caso en el que los artículos son adquiridos de un proveedor externo. Si los productos se adquieren paulatinamente, se dice que la tasa de reposición es finita, y que el modelo es de *producción de artículos*. El concepto de tasa de reposición no debe ser confundido con el de *tiempo de entrega*, que es el tiempo transcurrido entre que se toma la decisión de adquirir productos, y los productos finalmente se obtienen (en general, se asume que este tiempo es nulo, pero modelos con demanda estocástica a veces consideran un tiempo de entrega variable).

Los problemas de *revisión continua* son aquellos en los que el estado del sistema de inventario es conocido en todo momento. En los problemas de *revisión periódica*, el estado es conocido en momentos discretos del tiempo.

Otra característica de los modelos de gestión de inventario es la manera en la que consideran la escasez de productos, lo cual ocurre cuando no se tienen artículos suficientes para satisfacer la demanda. En algunos casos se asume que esto implica que cierta parte de la demanda corresponde a ventas perdidas, mientras que otros se asume que los clientes pueden esperar a adquirir el producto más tarde. En el segundo caso se habla de modelos con *demanda pendiente* o *backlogging*. Se dice que hay *backlogging completo* cuando toda la demanda pendiente es satisfecha en algún período posterior. Se dice que hay *backlogging parcial* cuando parte de la demanda es posteriormente satisfecha, y parte de la demanda es perdida (por ejemplo, porque algunos clientes son impacientes y no están dispuestos a esperar). El *backlogging parcial* puede modelarse como una fracción fija de la demanda no satisfecha que es perdida, o como una función dependiente de alguna variable, $\beta(x)$.

Un caso particular de *backlogging* parcial muy usado en la práctica es el *backlogging parcial dependiente del tiempo de espera* propuesto por Abad (1996) [1]. Si en un instante t , hay una cantidad d de demanda que no puede ser satisfecha, entonces $d\beta(x)$ es la demanda que queda pendiente, donde x es el tiempo de espera hasta el momento en que se adquieran productos para satisfacer dicha demanda. $\beta(t)$ suele considerarse como una función no creciente, representando el hecho de que los clientes son impacientes, y cuanto mayor sea el tiempo hasta que exista inventario disponible, menos clientes estarán dispuestos a esperar.

Finalmente, son importantes las definiciones de *política de consumición* y *política de pedido*. La política de consumición determina la manera en que se usa el inventario para satisfacer la demanda. En general, se asume que los primeros productos en ser adquiridos son los primeros en ser consumidos (política denominada *FIFO* por su nombre en inglés, *First*

In-First Out). La política opuesta, en la que se consumen primero los productos adquiridos más recientemente, es denominada *LIFO*, *Last In-First Out*.

Si el cliente tiene la opción de elegir entre diferentes versiones del mismo artículo, es razonable asumir que va a elegir la que tenga mayor tiempo de vida restante, es decir, la última en expirar (política denominada *LEFO*, *Last Expiration-First Out*). La opuesta a esta es llamada *FEFO*, *First Expiration-First out*.

En general, es normal asumir que si un producto fue adquirido en un período i , y otro producto es adquirido en un período j , con $i < j$, entonces el producto adquirido en el período i es el que expira antes. En este caso se dice que los *tiempos de vida no se superponen*, la política *FIFO* es igual a la *LEFO*, y la *LIFO* es igual a la *FEFO*.

Las políticas de pedidos dictan la manera en que se repone el inventario, y aparecen casi exclusivamente cuando se trabaja con demanda estocástica.

2.2. Modelos de gestión de inventario

A continuación se presentan tres modelos básicos para artículos no perecederos. La mayoría de los modelos existentes en la actualidad para artículos perecederos se basan en alguno de estos.

2.2.1. Cantidad Económica de Pedido (EOQ)

El modelo de Cantidad Económica de Pedido (*EOQ* por su nombre en inglés, *Economic Order Quantity*) fue originalmente introducido por Harris (1913) [29], y es uno de los modelos de gestión de inventario más antiguos. Es un modelo de reposición con demanda constante y tiempo continuo, en el cual una vez agotado el inventario, se realiza una reposición de una cantidad de artículos determinada.

Se asume que en cada pedido existe un costo unitario c_u y un costo fijo c_f , la tasa de demanda es d , y el costo unitario de almacenar un artículo en inventario es h . La variable a determinar es Q , la cantidad artículos que se obtienen en cada pedido, de manera de determinar los costos. Se le llama T a la cantidad de tiempo entre pedidos.

Entonces, existen ciclos de largo T , que comienzan con una reposición de Q unidades, donde el inventario decrece a una tasa constante de valor d hasta agotarse. Esto está ilustrado en la Figura 2.1. Es fácil ver que el nivel de inventario en función del tiempo, $I(t)$, es:

$$I(t) = Q - dt, \quad 0 \leq t \leq T$$

El costo asociado a la adquisición de productos es entonces $c_f + Qc_u$, y el costo asociado al almacenamiento de productos es $h\frac{Q}{2}$. A partir de esto, se obtiene una expresión del costo total por unidad de tiempo en función de Q :

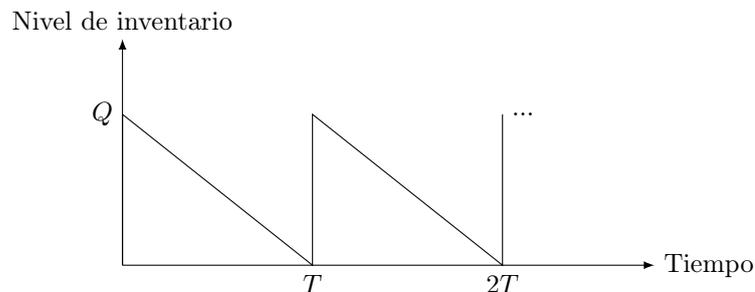


Figura 2.1: Inventario en modelo *EOQ*

$$C(Q) = dc_u + \frac{dc_f}{Q} + \frac{hQ}{2}$$

Esta función es convexa, entonces finalmente, el valor óptimo para Q , Q^* , puede hallarse resolviendo $\frac{dC}{dQ} = 0$, obteniéndose:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_f d}{h}}$$

Existen diversas extensiones del modelo *EOQ*, considerando distintas formas de demanda, cantidad de pedido variable, *backlogging*, entre otros (ver Choi, 2014 [12]). Durante el resto de este documento nos referiremos como *modelos basados en EOQ* a aquellos modelos que tomen la suposición de que no se realizan pedidos si el inventario es positivo, y se resuelvan mediante un análisis similar al descrito en esta Sección.

2.2.2. Cantidad Económica de Producción (EPQ)

El modelo de Cantidad Económica de Producción (*EPQ* por su nombre en inglés, *Economic Production Quantity*) es un modelo de producción propuesto por Taft (1918) [74], que extiende *EOQ* para el caso en el que la tasa de producción es finita. Se toman las mismas suposiciones que en el modelo *EOQ*, con la suposición adicional de que los artículos se producen a una tasa fija p , con $p > d$.

El modelo se resuelve mediante un análisis similar a *EOQ*, esta vez se consideran ciclos de largo T compuestos por una etapa de producción en la cual se fabrican Q artículos, donde el inventario crece hasta tener un cierto tamaño H , seguida de una etapa en la que el inventario es agotado debido a la demanda (ver Figura 2.2). El inventario en función del tiempo se puede expresar como:

$$\begin{aligned} I(t) &= (p - d)t, & 0 \leq t \leq t_1 \\ I(t) &= H - dt, & t_1 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Este problema se resuelve de manera similar al modelo *EOQ*, obteniéndose una expresión del costo total por unidad de tiempo en función de Q :

$$C(Q) = dc_u + \frac{dc_f}{Q} + \frac{hQ}{2} \left(1 - \frac{d}{p}\right)$$

Y el valor óptimo de Q es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2c_f d}{h \left(1 - \frac{d}{p}\right)}}$$

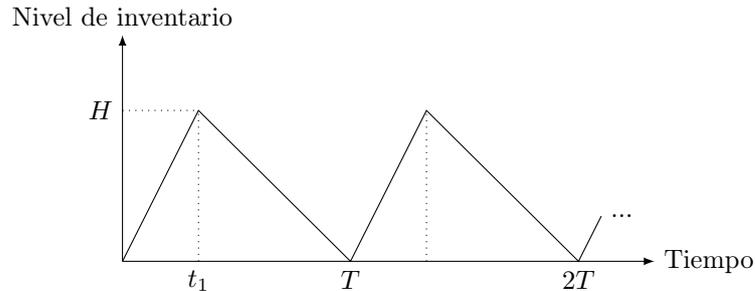


Figura 2.2: Inventario en modelo *EPQ*

Durante el resto de este trabajo, nos referiremos como *modelos basados en EPQ* a aquellos modelos con tasa de reposición finita que se resuelvan con un análisis similar a este.

2.2.3. Problema de Dimensionamiento del Lote Económico (ELS)

En esta Sección abordaremos el problema de gestión de inventario en el que se asume que la demanda es dinámica, es decir que los valores de la misma pueden ser diferentes período a período. Consta de un tiempo discreto compuesto por T períodos, en el período t hay una demanda d_t , un costo fijo s_t asociado a adquirir productos, y un costo h_t por unidad que se almacena en inventario al final del período. El costo unitario por unidad de producto adquirida se asume constante en todos los períodos.

Wagner & Whitin (1958) [79] fueron los primeros en resolver eficientemente este problema. En un período t , x_t y I_t son la cantidad de artículos que se obtienen y que se almacenan en inventario en ese período, respectivamente. Wagner & Whitin escriben la ecuación funcional que representa la política de costos mínimos para los períodos de t a T como:

$$f_t(I_t) = \min_{x_t \geq 0, I_t + x_t \geq d_t} [h_{t-1}I_t + \delta(x_t)s_t + f_{t+1}(I_t + x_t - d_t)]$$

Donde:

$$\delta(x_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_t = 0 \\ 1 & \text{si } x_t > 0 \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Los autores demostraron que existe una solución óptima que cumple con la *Propiedad de Inventario Cero*. Se dice que una solución cumple con esta propiedad si $I_t x_t = 0$ (es decir, solo se producen artículos en un período si el inventario actual es 0).

El problema se reduce a elegir los índices $i_1 > i_2 > \dots > i_n$ en los cuales $x_i > 0$, sabiendo que los productos adquiridos en el período i serán utilizados para satisfacer la demanda entre los períodos i e $i + 1$ si $i < T$, o entre i y T en caso contrario. Los autores presentan un algoritmo que permite hallar la solución óptima de orden $O(T^2)$.

Capítulo 3

Revisión de la literatura

A continuación se presenta un resumen de los artículos de gestión de inventario de artículos perecederos. Los problemas en los que la demanda es conocida o determinista es presentada en la Sección 3.1, y aquellos en los que la demanda es incierta o estocástica son presentados en la Sección 3.2.

3.1. Demanda determinista

En la Sección 3.1.1 se consideran problemas de reposición básicos en los cuales la tasa de reposición es infinita, y en la Sección 3.1.2 se consideran problemas de producción. Problemas que comprenden varios centros de almacenamiento o varios niveles son vistos en la Sección 3.1.3, y problemas en los cuales los productos deteriorados pueden ser restaurados son vistos en la Sección 3.1.4.

3.1.1. Problemas de reposición

El caso en el que un único tipo de producto debe ser adquirido para satisfacer la demanda es estudiado principalmente utilizando modelos de tipo *EOQ*. Teng & Yang (2004) [78] consideran el caso general en el que la demanda es una función variable en el tiempo, deterioro exponencial y *backlogging* parcial dependiente del tiempo de espera, el horizonte es finito y el tiempo es continuo. Para resolver el problema se busca hallar una expresión para el nivel de inventario en función del tiempo. Esta función está compuesta por ciclos, donde el ciclo i comienza con un período de inventario negativo hasta un tiempo t_i en el cual se adquieren productos, momento a partir del cual el inventario comienza a decrecer hasta agotarse en el momento s_i (ver Figura 3.1). A partir de esto se halla el costo total en función de la cantidad de reposiciones, t_i , y s_i . Los autores demuestran que esta función es convexa, por lo cual el problema de hallar el mínimo global se reduce a hallar un mínimo local, lo cual puede resolverse numéricamente. Tan & Weng (2013) [75] presentan un enfoque similar para el caso en que el tiempo es discreto, y Balkhi & Tadj (2008) [4] resuelven el caso con horizonte infinito.

La mayoría de los modelos consideran un solo producto. Zhang & Wang (2011) [84] y Ghosh et al. (2015) [25] consideran el problema de varios productos con capacidad limitada.

Si bien los distintos modelos basados en *EOQ* se diferencian en la forma de la demanda, deterioro, *backlogging*, costos, y tipo de horizonte, el método para hallar la solución óptima siempre es similar. Debido a esto, no se mencionan resultados individuales, sino que una lista de modelos basados en *EOQ* presenta en la Tabla 3.2. Las referencias de esta tabla están clasificadas según la Tabla 3.1.

¹Deterioro no instantáneo: caso particular de deterioro variable en el tiempo, en el cual los artículos conservan su calidad original por un tiempo, antes de comenzar a deteriorarse.

Horizonte (H):	Finito continuo (Fc) Finito discreto (Fd) Infinito (I)
Tipo de demanda (Dem):	Constante (c) Variable en el tiempo (vt) Dependiente del precio (dp) Dependiente del nivel de inventario (di) Función tipo rampa (tr)
Tipo de deterioro (det):	Exponencial (exp) Variable en el tiempo (vt) Distribución de Weibull (wb)
Tipo de <i>backlogging</i> :	Completo (c) Parcial (p) Sin <i>backlogging</i> (-)
Comentarios:	Múltiples productos (mp) Restricciones de capacidad (cap) Deterioro no instantáneo (dni) ¹ Tasa de producción variable (tpv)

Tabla 3.1: Clasificación de referencias

H	Dem	Det	BL	Referencias	Comentarios
I	c	exp	-	Zhang & Wang (2011) [84]	cap, mp
I	vt	vt	p	Balkhi & Tadj (2008) [4]	
I	vt	wb	p	Wu (2002) [81]	
I	vt	wb	c	Gosh & Chaudhuri (2004) [24]	
I	dp	vt	p	Dye et al. (2007) [17]	
I	dp	vt	c	Roy (2008) [67]	
I	di	exp	p	Chang et al. (2006) [8]	
I	di	exp	p	Wu et al. (2006) [82]	dni
I	di	exp	p	Hsieh & Dye (2010) [30]	cap
I	di	exp	-	Teng et al. (2005) [76]	
I	di	exp	-	Ghosh et al. (2015) [25]	cap, mp
I	tr	exp	c	Debata et al. (2015) [15]	
I	tr	vt	p	Debata & Acharya (2016) [14]	
I	tr	wb	c	Giri et al. (2003) [26]	
I	tr	wb	p	Skouri et al. (2009) [71]	
Fd	vt	vt	p	Tan & Weng (2013) [75]	
Fc	c	wb	p	Zhao (2007) [63]	
Fc	vt	exp	p	Dye et al. (2006) [16]	
Fc	di	exp	-	Balkhi & Benkherouf (2004) [5]	
Fc	tr	exp	-	Panda et al. (2008) [62]	

Tabla 3.2: Modelos basados en EOQ.

También existen formulaciones basadas en el modelo de Wagner & Whitin (1958) [79]. Friedman & Hoch (1978) [21] demuestran que para el caso de gestión de inventario de artículos perecederos, no necesariamente existe una solución óptima que cumpla con la Propiedad de Inventario Cero (ver 2.2.3). Una consecuencia importante de esto, es que si bien los modelos *EOQ* tienen la ventaja de ser eficientes, no siempre permiten hallar una política óptima de reposición de productos (ya que en *EOQ*, no se adquieren artículos mientras el inventario no está vacío).

Hsu (2000) [31] considera un modelo basado en el de de Wagner & Whitin en el cual el costo de adquirir productos y el costo de almacenamiento son funciones cóncavas cualesquiera, y una fracción del inventario se pierde de un período al siguiente. Además, tanto la función de almacenamiento y la tasa de deterioro dependen del período actual así como de la antigüedad de cada artículo. También asume que cuanto más tiempo estuvo un producto en inventario, mayor es el costo de almacenamiento y la velocidad a la cual se deteriora. Se definen:

1. $C_t(x_t)$: costo de producir x_t artículos en el período t .
2. z_{it} : cantidad de la demanda en el período t que es satisfecha con artículos producidos en el período i .
3. y_{it} : cantidad producida en el período i que es retenida en inventario al principio del período t , que excluye la cantidad z_{it} utilizada para satisfacer la demanda del período t .
4. $H(y_{it})$: costo de almacenar y_{it} unidades de artículos en el período t , que fueron producidos en el período i .
5. θ_{it} : la fracción de y_{it} que se pierde durante el período t .

Entonces, la función a minimizar es la siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{mín} \sum_{t=1}^T (C_t(x_t) + \sum_{i=1}^t H_{it}(y_{it})) \\ \text{sujeto a: } & x_t - z_{tt} = y_{tt}, & 1 \leq t \leq T \\ & (1 - \theta_{i,t-1})y_{i,t-1} - z_{it} = y_{it}, & 1 \leq i \leq t \leq T \\ & \sum_{i=1}^t z_{it} = d_t, & 1 \leq t \leq T \\ & x_t, y_{it}, z_{it} \geq 0, & 1 \leq i \leq t \leq T \end{aligned}$$

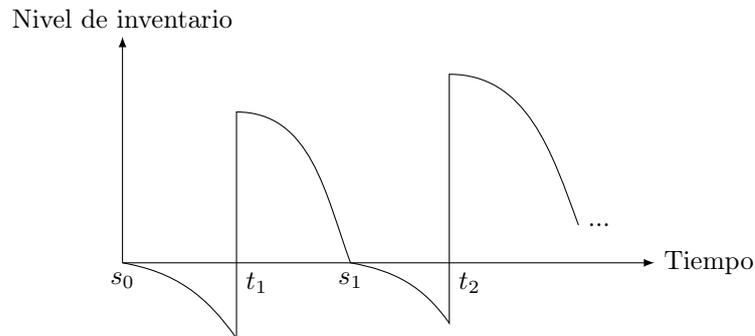


Figura 3.1: Inventario en modelo *EOQ* en caso perecedero determinista.

Hsu demuestra que este problema es equivalente a una red de flujo con pérdida. Basa su trabajo en la existencia de una solución óptima que cumple una propiedad más débil que la Propiedad de Inventario Cero de Wagner & Whitin, llamada la Propiedad de División de Intervalos. Una solución que cumpla esta propiedad es aquella en la que el horizonte de planificación puede dividirse en varios intervalos, donde la demanda de todos los períodos pertenecientes a un intervalo dado es satisfecha exclusivamente por artículos producidos en un único período anterior a ese intervalo. A partir de esto, desarrolla un algoritmo de programación dinámica de orden $O(T^4)$ para hallar una solución óptima, donde T es la cantidad de períodos.

Hsu (2003) [32] extiende estos resultados para el caso en el que hay *backlogging*, donde el costo de satisfacer la demanda de un pedido pendiente depende del período en que se generó esa demanda, y del período en el que se adquieren productos para satisfacerla. El autor asume que el costo de satisfacer la demanda pendiente es no decreciente con el tiempo. Se demuestra que cuando la demanda es no decreciente en el tiempo, o cuando el costo marginal de *backlogging* es no decreciente con respecto a la edad de la demanda pendiente, el problema es resoluble en tiempo polinomial.

Sargut & Işık (2017) [70] consideran un problema similar al de Hsu (2003), pero con capacidad de producción finita constante durante el horizonte de planificación. Esta nueva restricción es suficiente para que el problema sea NP-completo. Los autores proponen una heurística de orden $O(T^6)$ (donde T es la cantidad de períodos) basada en Programación Dinámica. En pruebas realizadas con hasta 20 períodos, el algoritmo encuentra soluciones con una desviación promedio de 4.54 % de la solución óptima.

Una extensión de Hsu (2000) [31] es considerada en Chu et al. (2005) [13], donde el costo de adquirir productos es una función que los autores denominan como *función de economía de escala*. Una función $F(X)$ definida en $[0, +\infty)$ es de este tipo si cumple:

1. $F(0) = 0$.
2. $F(X)$ es no decreciente en $[0, +\infty)$.
3. La función de costo promedio, definida como $\bar{F}(X) = F(X)/X$, para $X > 0$, es una función no creciente en $(0, +\infty)$.

Chu et al. (2005) [13] demuestran que el problema de hallar una solución óptima bajo estas condiciones es NP-completo, y proponen un método para hallar una solución aproximada. El resultado principal es que esta solución aproximada supone un costo no mayor a $\frac{(4\sqrt{2}+5)}{7}$ veces el costo de la solución óptima. Este resultado es extendido para el caso con *backlogging* por Bai et al. (2010) [3], quienes proponen un método para hallar una solución aproximada con desempeño similar a la solución de Chu et al. (2005).

Önal et al. (2015) [58] consideran el efecto de 4 políticas de consumición de artículos (FIFO, LIFO, FEFO, LEFO). En este caso la demanda y los costos son variables, y los artículos son perecederos y tienen un tiempo de vida fijo que depende del período en que fueron adquiridos. Önal et al. demuestran que dada una instancia cualquiera del problema, los costos son mínimos si los artículos son consumidos en orden FEFO, y son máximos si son consumidos en orden LEFO. También demuestran que dada una política de consumición, el problema siempre es resoluble en tiempo polinomial cuando no hay restricciones de capacidad, y el caso con capacidad solo es resoluble en tiempo polinomial bajo las políticas FIFO y LEFO.

3.1.2. Problemas de producción

El enfoque predominante en este tipo de problemas es el de *EPQ*. Los modelos basados en *EPQ* se resuelven de manera similar a los modelos *EOQ* de la Sección 3.1.1. Skouri & Papachristos (2003) [72] consideran el caso general en el que la demanda es una función variable en el tiempo, la tasa de deterioro varía en el tiempo, hay *backlogging* parcial dependiente

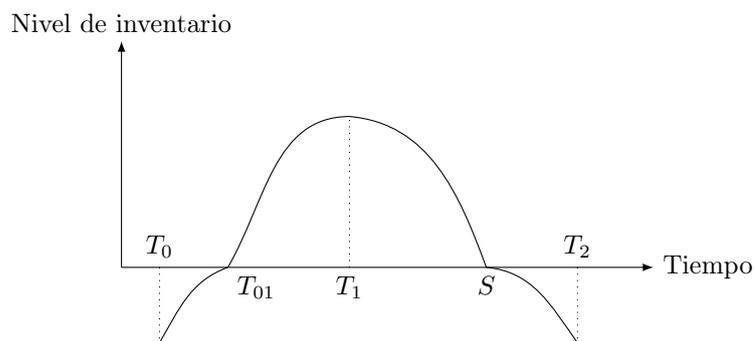


Figura 3.2: Inventario en modelo *EPQ* en caso precedero determinista.

H	Dem	Det	BL	Referencias	Comentarios
I	c	exp	-	Lin et al. (2006) [46]	mp
I	vt	vt	p	Skouri & Papachristos (2003) [72]	
I	vt	vt	-	Tadj et al. (2006) [73]	tpv
I	dp	vt	p	Teng et al. (2007) [77]	
I	di	exp	-	Sana & Chaudhuri (2006) [69]	tpv
I	tr	vt	c	Manna & Chaudhuri (2006) [49]	
Fc	vt	exp	p	Yang (2011) [83]	
Fc	di	vt	-	Chen & Chen (2006) [11]	
Fc	di	exp	c	Sana & Chaudhuri (2004) [68]	

Tabla 3.3: Modelos basados en *EPQ*.

del tiempo de espera, y el horizonte de planificación es infinito. Los autores consideran un ciclo de producción compuesto por cuatro etapas (ver Figura 3.2):

1. Intervalo $[T_0, T_{01}]$ en el cual la producción comienza y el inventario es afectado por la demanda y la producción.
2. Intervalo $[T_{01}, T_1]$ en el cual el inventario es afectado por la producción, la demanda y el deterioro de productos.
3. Intervalo $[T_1, S]$ en el cual la producción se detiene y el inventario es afectado por la demanda y el deterioro.
4. Intervalo $[S, T_2]$ en el cual el inventario es afectado por la demanda y el *backlogging* parcial.

Luego los autores formulan el costo total como una función que depende de T_1 y T_2 . Esta función no siempre es convexa, pero en caso de serla, el problema de hallar un mínimo global se reduce a hallar un mínimo local, lo cual puede hacerse numéricamente.

En la mayoría de los modelos *EPQ*, la tasa de producción es un parámetro del problema, sin embargo existen modelos en los que esta tasa es una variable de decisión (Tadj et al., 2006 [73], Sana & Chaudhuri, 2006 [69]). En la Tabla 3.3 se presenta una lista de modelos basados en *EPQ*.

Pahl et al (2011) [60] presentan modelos de producción para varios productos utilizando Programación Entera. El problema considerado consta de una única línea de producción en la cual solo se puede fabricar un único tipo de producto a la vez, y cada vez que se desea cambiar el tipo de producto siendo fabricado, se debe pagar un costo fijo (distinto para

cada producto). Además, existen restricciones de capacidad. Este problema es NP-completo, sin embargo los autores discuten que es factible aplicar este modelo a problemas donde la cantidad de productos y períodos es pequeña.

3.1.3. Problemas multi nivel

En los problemas multinivel se considera la coordinación de diferentes entidades que forman parte de la cadena de suministro, tales como proveedores de materia prima, productores de los artículos, depósitos y centros de distribución.

Primero consideramos los problemas con varios depósitos o centros de almacenamiento, donde en general se consideran dos ubicaciones en las cuales se pueden almacenar artículos: el depósito propio (DP), y el depósito externo (DE). Normalmente se asume que el DP tiene un costo de almacenamiento menor, pero capacidad limitada. Entonces, los artículos en inventario se almacenan primero en el DP, y solo el inventario de sobra se almacena en el DE. El inventario en el DP se utiliza para satisfacer la demanda, y a medida que se vacía, se transfiere parte del inventario del DE al DP.

En este contexto, modelos de reposición de artículos tales como Dye et al. (2007) [18] suelen estar basados en *EOQ* y son resueltos de manera similar a los modelos de la Sección 3.1.1. Dye et al. asumen *backlogging* parcial y también tienen en cuenta el costo de ventas perdidas.

Jaggi et al. (2013) [37] presentan un caso simple con demanda constante, deterioro exponencial y *backlogging* parcial, sin embargo los autores también plantean un modelo *FIFO*, en el cual los artículos almacenados en el DE son utilizados primero, argumentando que una política de consumición de este tipo puede minimizar los costos totales cuando el costo de almacenamiento del DE es mayor al del DP. Jaggi et al. muestran un ejemplo numérico donde los costos de almacenamiento son iguales en ambos depósitos, pero los productos se deterioran más rápido en el DP que en DE, la política *LIFO* es óptima. Jaggi et al. (2015) [36] presentan una discusión similar para el caso en que la demanda depende del precio de venta de un artículo. Una comparación de modelos de producción de artículos bajo políticas *FIFO* y *LIFO* es presentada en Niu & Xie (2008) [56].

Un enfoque distinto es planteado por Pal et al. (2005) [61], quienes desarrollan un procedimiento de solución basado en algoritmos genéticos para el caso en el que la demanda es una función lineal creciente, hay *backlogging* parcial, y existe un costo por transportar artículos del DE al DP.

Ekşioğlu & Jin (2006) [19] consideran un caso de dos niveles donde hay N productores y M compradores. Cada productor puede fabricar productos y almacenarlos durante un tiempo limitado antes de que perezcan, y el inventario almacenado se usa para satisfacer la demanda de los compradores. Cada comprador tiene una demanda independiente que es variable en el tiempo. Cada productor tiene distintos costos de producción y almacenamiento, y existe un costo de transporte distinto para cada par productor-comprador.

A partir de la formulación del problema como una red de flujo, se demuestra que existe una solución óptima en la que en un período dado, la demanda de un comprador se satisface a partir de un único productor. Además, esta demanda es satisfecha o bien a partir de artículos previamente almacenados en inventario, o bien a partir de artículos producidos en el período actual (pero no ambos). También, en un período dado, cada productor no fabrica artículos nuevos mientras tenga artículos en inventario (similar a la Propiedad de Inventario Cero de Wagner & Whitin, 1958 [79]).

El modelo de Ekşioğlu & Jin (2006) [19] considera un horizonte de planificación de T períodos de carácter cíclico. Es decir, se asume que para cada productor, la cantidad de artículos sobrantes en inventario en el período T es igual a la cantidad de artículos que se tenían en inventario en el período inicial. El modelo tiene los siguientes parámetros:

1. d_{jt} : demanda del comprador j en el período t .
2. c_{it} : costo unitario de producción del productor i en el período t .

3. s_{it} : costo fijo de producción del productor i en el período t .
4. h_{it} : costo unitario de almacenamiento del productor i en el período t .
5. r_{ijt} : costo de transportar d_{jt} del productor i al comprador j en el período t .
6. k : la cantidad máxima de períodos que un artículo puede ser almacenado antes de que perezca.

Las variables de decisión son entonces:

1. q_{it} : cantidad producida por el productor i en el período t .
2. I_{it} : cantidad de artículos en el productor i al final del período t .
3. x_{ijt} : variable binaria que es 1 si hay un envío del productor i al comprador j en el período t , y 0 en caso contrario.
4. y_{it} : variable binaria que es 1 el productor i produce una cantidad positiva de artículos en el período t , y 0 en caso contrario.

Y la función a minimizar es la siguiente:

$$\text{mín} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{t=1}^T (c_{it}q_{it} + s_{it}y_{it} + h_{it}I_{it} + r_{ijt}x_{ijt})$$

$$\text{sujeto a: } q_{it} + I_{i,[T+(t-1)]} - \sum_{j=1}^M d_{jt}x_{ijt} - I_{it} = 0 \quad 1 \leq i \leq N; 1 \leq t \leq T$$

$$\sum_{i=1}^N x_{ijt} = 1 \quad 1 \leq j \leq M; 1 \leq t \leq T$$

$$q_{it} - \sum_{\tau=t}^{t+k} \sum_{j=1}^M d_{j\tau}y_{ij\tau} \leq 0 \quad 1 \leq i \leq N; 1 \leq t \leq T$$

$$I_{it} - \sum_{\tau=t+1}^{t+k} \sum_{j=1}^R b_{j\tau}x_{ij\tau} \leq 0 \quad 1 \leq i \leq N; 1 \leq t \leq T$$

$$I_{i0} = I_{iT} \quad 1 \leq i \leq N$$

$$q_{it}, I_{it} \geq 0 \quad 1 \leq i \leq N; 1 \leq t \leq T$$

$$y_{it}, x_{ijt} \in \{0, 1\} \quad 1 \leq i \leq N; 1 \leq j \leq M; 1 \leq t \leq T$$

Si bien este problema es NP-completo, los autores proponen una heurística de orden $O(NMT^2)$ con la que obtienen buenos resultados. Ahuja et al. (2007) [2] estudian el caso con capacidades de producción y almacenamiento limitadas, y Rezaeian et al. (2016)[66] extienden este trabajo para el caso en el que hay *backlogging* y varios tipos de productos. Un caso de tres niveles (productores, centros de almacenamiento, compradores) es estudiado por Ghasimi & Gohdsi (2009) [23].

Önal (2016) [57] extiende el estudio de Önal et al. (2015) [58] visto en la Sección 3.1.1 para el caso en el que el productor y el comprador son entidades diferentes, y existe un costo de transporte entre ambos. La demanda es satisfecha a partir de los artículos que tienen mayor tiempo de vida restante (orden de consumición LEFO), y se estudia el caso con y sin capacidad.

En un período cualquiera t , el comprador debe satisfacer una demanda d_t . El productor produce una máximo de C unidades, y esto tiene un costo fijo s_t y un costo unitario p_t .

Transferir artículos del productor al comprador tiene un costo fijo r_t y un costo unitario g_t . En un período cualquiera t , tanto el productor como el comprador pueden almacenar artículos en inventario. Esto tiene un costo unitario h_t^1 para el productor y h_t^2 para el comprador. Los artículos producidos en el período t expiran en el período $v_t \geq t$. Las variables del problema son las siguientes:

1. x_{tji} es la cantidad de artículos producida en el período t , transportada del productor al comprador en el período j , y consumida en el período i .
2. I_t^1 y I_t^2 es la cantidad de artículos almacenadas en el período t por el productor y el comprador, respectivamente.
3. x_t y u_t son las cantidades producidas y transferidas en el período t , respectivamente.
4. y_t y w_t son variables binarias que son 1 si ocurre producción o transporte de artículos en el período t , respectivamente, y 0 en caso contrario.
5. z_{tij} es una variable binaria que es 1 si $x_{tij} > 0$, y 0 en caso contrario.

La función a minimizar es:

$$\begin{aligned} & \min \sum_{t=1}^T (s_t y_t + r_t w_t + p_t x_t + g_t u_t + h_t^1 I_t^1 + h_t^2 I_t^2) \\ \text{sujeto a: } & \sum_{t:t \leq i \leq v_t} \sum_{j:t \leq j \leq i} x_{tji} = d_i && 1 \leq i \leq T \\ & x_t \leq C && 1 \leq t \leq T \\ & x_{tji} \leq d_i z_{tji} && 1 \leq t \leq T; t \leq j \leq v_t; j \leq i \leq v_t \\ & z_{tji} \leq y_t && 1 \leq t \leq T; t \leq j \leq v_t; j \leq i \leq v_t \\ & z_{tji} \leq w_j && 1 \leq t \leq T; t \leq j \leq v_t; j \leq i \leq v_t \\ & z_{ijs} + z_{lj't} \leq 1 && 1 \leq i \leq j \leq s \leq v_i; \\ & && 1 \leq l \leq j' \leq s \leq t \leq v_l, \text{conv}_i \leq v_l \\ & \sum_{i=1}^t \sum_{j=t}^T x_{ijt} = u_t && 1 \leq t \leq T \\ & \sum_{j=t}^{v_t} \sum_{i=j}^{v_t} x_{tji} = x_t && 1 \leq t \leq T \\ & \sum_{i=1}^t x_i - \sum_{i=1}^t u_i = I_t^1 && 1 \leq t \leq T \\ & \sum_{i=1}^t u_i - \sum_{i=1}^t d_i = I_t^2 && 1 \leq t \leq T \\ & x_{tji} \geq 0, z_{tji} \in \{0, 1\} && 1 \leq t \leq T; t \leq h \leq v_t; j \leq i \leq v_t \\ & y_t, w_t \in \{0, 1\} && 1 \leq t \leq T \end{aligned}$$

El autor demuestra que el problema en general es NP-completo, pero si la capacidad es ilimitada, o si los tiempos de vida no se superponen (es decir, artículos fabricados antes, expiran antes), el problema es resoluble en tiempo polinomial.

3.1.4. Problemas con reacondicionamiento

En la práctica, existen situaciones en las cuales restaurar un artículo defectuoso o que se haya deteriorado puede ser más conveniente que reemplazarlo por un artículo nuevo. En esta Sección se consideran problemas llamados de *logística inversa interna*, donde productos que se hayan deteriorado como parte del proceso de producción o almacenamiento son reacondicionados. No se consideran problemas de *logística inversa externa*, que tratan de casos en los cuales se recuperan artículos defectuosos de los clientes para su restauración o reciclaje.

En general se suele asumir que debido a imperfecciones durante el proceso de producción, una fracción de los artículos fabricados son defectuosos y deben pasar por un período de reacondicionamiento. Una máquina sola es la encargada de fabricar artículos nuevos y restaurar los existentes, por lo cual en un momento dado solo se puede hacer una de esas tareas a la vez.

Inderfurth et al. (2005) [35] plantea un modelo basado en *EPQ* para estudiar el caso en el que la demanda es constante y no hay *backlogging*. El modelo considerado es de tipo $(1, 1)$, donde cada ciclo de producción está compuesto por una etapa de fabricación de productos nuevos seguida por una etapa de reacondicionamiento de productos defectuosos.

Se considera un horizonte infinito donde los productos son consumidos según una tasa de demanda D . Se considera que se producen Q_p unidades a tasa P_q , y luego se reacondicionan Q_r unidades a tasa P_r . Cuando finaliza una etapa de producción, una fracción α de los productos producidos son defectuosos, y deben ser reacondicionados antes de que puedan ser utilizados para satisfacer la demanda. Existe un costo de almacenamiento h_s para los productos en buen estado, y un costo de almacenamiento h_r para los productos defectuosos que esperan ser reacondicionados.

Para pasar de la etapa de producción a la etapa de reacondicionamiento, existe un costo fijo S_{pr} , y transcurre un tiempo t_{pr} durante el cual no se pueden producir ni reacondicionar artículos. Finalizada la etapa de reacondicionamiento, existe un costo fijo S_{rp} , y debe transcurrir un tiempo t_{rp} antes de que pueda comenzar un nuevo ciclo de producción.

Se busca entonces minimizar el costo por unidad de tiempo, donde las variables de decisión son el tamaño de los lotes de producción y reacondicionamiento (Q_p y Q_r).

En Inderfurth et al. (2007) [34], un problema similar es estudiado utilizando Programación Dinámica. Los autores plantean dos relajaciones del problema que son resolubles en tiempo polinomial, y plantean una generalización para el caso con varios tipos de productos.

Li et al. (2015) [44] presentan un modelo *EOQ* con demanda constante y con *backlogging*, donde tanto los artículos producidos como la línea de producción en sí misma se deterioran. Es decir, la fracción de productos que son defectuosos aumenta con el correr del tiempo debido a un desgaste de la línea de producción, que es restaurada al final de cada ciclo de producción.

En Inderfurth et al. (2006) [33], los autores plantean un algoritmo de Programación Dinámica de orden polinomial que permite encontrar el orden óptimo de procesos de fabricación y reacondicionamiento para lograr producir una cantidad dada de artículos de buena calidad, minimizando los costos. Existe un límite de tiempo fijo en el cual los artículos defectuosos deben ser restaurados, y el no restaurar artículos a tiempo supone un costo adicional correspondiente a deshacerse de los mismos.

3.2. Demanda estocástica

En esta sección se consideran problemas en los cuales la demanda es incierta o estocástica. Un posible enfoque es extender el modelo *EOQ* presentado en la Sección 2.2.1. Un trabajo reciente donde la demanda tiene distribución normal y los productos tienen un tiempo de vida fijo, junto con una revisión de la literatura de modelos *EOQ* es presentado en Muriana (2016) [51].

En el resto de esta Sección se consideran modelos más complejos. Se distingue entre problemas con revisión periódica y problemas con revisión continua. Los problemas con revisión periódica, en los cuales el estado del inventario es conocido en momentos discretos en el tiempo, son presentados en la Sección 3.2.1. Los problemas con revisión continua son considerados en la Sección 3.2.2.

3.2.1. Revisión periódica

El caso básico en el que existe un único período es conocido como el problema del vendedor de periódicos. La demanda tiene funciones de probabilidad y densidad conocidas. El problema consiste en determinar la cantidad óptima de productos que deben ser adquiridos para satisfacer la demanda y minimizar los costos. Este problema puede resolverse analíticamente (Kouhja, 1999 [39]). Extensiones y aplicaciones de este problema con un único período son consideradas por Qin et al. (2011) [64].

Generalizaciones para el caso en el que los productos tienen tiempo de vida de más de un período han sido estudiados (Fires, 1975 [22]; Nahmias, 1975 [52]). En estos casos es considerablemente más difícil hallar soluciones óptimas exactas. En la práctica se observa que resolver el método mediante Programación Dinámica deja de ser factible debido a la alta dimensionalidad del problema (Nahmias, 1978 [53]). La mayoría de los artículos modernos se basan entonces en hallar soluciones aproximadas.

En casos más generales, se considera un horizonte de planificación compuesto por T períodos, donde en cada uno de ellos existe una demanda D_t , que tiene cierta distribución de probabilidad. Minner & Transchel (2010) [50] estudian un caso con tiempos de entrega positivos y productos perecederos con tiempo de vida fijos. La demanda puede tener una distribución cualquiera, con la suposición de que las demandas de diferentes períodos son independientes. Los autores estudian políticas de consumición LIFO y FIFO.

El caso donde el tiempo de vida es también estocástico es considerablemente más difícil. Esto es estudiado en Kouki et al. (2014) [41] y Kouki & Jouini (2015) [42].

Chao et al. (2015b) [10] estudian casos donde la demanda de distintos períodos pueden estar correlacionadas. Los autores no consideran costos fijos, y asumen política de consumición FIFO, tiempos de entrega nulos, y estudian el problema con y sin *backlogging*. Presentan algoritmos aproximados para las distintas variantes del problema, y proveen también garantías de desempeño en el peor caso. Chao et al. (2015a) [9] agregan restricciones de capacidad de producción y tiempo de entrega positivo. Los efectos de considerar costos fijos son estudiados en Zhang et al. (2016) [85].

Un caso de dos niveles con un productor y un comprador es considerado en Ferguson & Ketzenberg (2006) [20]. Los autores estudian el beneficio de compartir información acerca del tiempo de vida de los productos entre el comprador y el vendedor. El tiempo de vida de los productos es fijo y la cantidad de productos que puede ser adquirida por el comprador en un período cualquiera es de la forma nQ , donde Q es un parámetro del problema.

3.2.2. Revisión continua

Los problemas de revisión continua son aquellos en los que el estado del sistema es conocido en todo momento. En este contexto, no se tiene mucha información acerca de políticas óptimas cuando los artículos son perecederos (Nahmias, 2011 [55]). Esto se debe a que cuando el tiempo de entrega es positivo, se vuelve complicado rastrear el estado del sistema (Lian & Liu, 2001 [45]). Además, como es posible realizar pedidos de artículos en cualquier momento, el inventario del sistema puede estar compuesto de artículos provenientes de una cantidad potencialmente ilimitada de pedidos.

Si bien es posible simplificar el problema asumiendo tiempos de entrega instantáneos (Liu & Lian, 1999 [47]; Gürler & Özkaya, 2003 [28]), esto no es del todo realista. Esto es diferente a suponer tiempos de entrega nulos en el contexto de revisión periódica, donde la suposición simplemente significa que el tiempo de entrega es menor al tiempo transcurrido en

un período. Cuando la revisión es continua, suponer tiempos de entrega nulos es realmente suponer que los productos son entregados instantáneamente.

Un enfoque utilizado es buscar una solución óptima dentro de un conjunto de políticas de pedido. Por ejemplo, problemas con tiempos de entrega positivos son estudiados por Berk & Gürler (2008) [7] y Kouki et al. (2015) [40] utilizando la política de pedido (Q, r) . En esta política, se realiza un pedido de Q artículos cuando el nivel de inventario es r . El problema consiste entonces en hallar Q y r óptimos.

Recientemente, un problema muy general es estudiado por Baron et al. (2017) [6]. El tamaño de la demanda, el tiempo entre demandas, el tiempo de vida de los productos y los tiempos de entrega son todos estocásticos. Los autores consideran una política de pedido (s, S) , donde se realiza un pedido cuando el nivel de inventario es s , de manera tal que el nivel de inventario luego del pedido sea S .

Un caso complejo multi nivel es presentado en Mahmoodi & Haji (2014) [48]. Los autores estudian el caso en el que hay un productor y varios compradores. Cada comprador tiene demanda *Poisson*, los productos tienen un tiempo de vida fijo y comienzan a expirar al llegar a los compradores. Bajo este contexto se comparan políticas de pedido $(1, T)$ y $(S-1, S)$. Una política de pedido $(1, T)$ es aquella donde se ordena 1 unidad cada cierto tiempo T , donde el problema consiste en hallar el valor óptimo para T . Una política $(S-1, S)$ es aquella donde el nivel de inventario se mantiene en un nivel fijo S a determinar.

Un problema de cadena de suministros con un centro de producción, dos un almacenamiento, y dos centros de distribución que abastecen múltiples compradores es estudiado en Kumaresan et al. (2014) [43]. Se asume demanda *Poisson* y tiempos de entrega con distribución exponencial en los centros de distribución.

Capítulo 4

Conclusiones

En este trabajo se definieron las principales características del problema de gestión de inventario. Luego se presentó un resumen de la literatura en el área de artículos precederos, clasificando las distintas referencias. Los casos con demanda determinista fueron descritos en mayor detalle.

Este estudio hace aparente algunas tendencias en esta área. Por ejemplo, se observa que la gran mayoría de los trabajos de gestión de inventario utilizan un enfoque determinista. Es posible que este enfoque no represente tan fielmente la realidad como los modelos estocásticos. En situaciones prácticas, es cuestionable que características tales como la demanda o el tiempo de vida de los productos sean conocidas con exactitud.

Aún así, resultados en problemas deterministas son alentadores, habiendo surgido en los últimos años modelos que utilizan Programación Dinámica y heurísticas para resolver casos relativamente complejos. Este es el caso de Hsu (2000) [31], y en los últimos se tienen, por ejemplo, Önal et al. (2015) [58] y Sargut & Işık (2017) [70]. En esta línea de trabajo, posibles características a investigar en un futuro son distintas formulaciones para el deterioro de los productos, integración de restricciones de capacidad de inventario a problemas existentes, entre otras.

Bibliografía

- [1] ABAD, P. Optimal pricing and lot-sizing under conditions of perishability and partial backordering. *Management Science* 42, 8 (1996), 1093–1104.
- [2] AHUJA, R. K., HUANG, W., ROMELIJN, H. E., AND MORALES, D. R. A heuristic approach to the multi-period single-sourcing problem with production and inventory capacities and perishability constraints. *INFORMS journal on Computing* 19, 1 (2007), 14–26.
- [3] BAI, Q.-G., ZHANG, Y.-Z., AND DONG, G.-L. A note on an economic lot-sizing problem with perishable inventory and economies of scale costs: Approximation solutions and worst case analysis. *International Journal of Automation and Computing* 7, 1 (2010), 132–136.
- [4] BALKHI, Z., AND TADJ, L. A generalized economic order quantity model with deteriorating items and time varying demand, deterioration, and costs. *International Transactions in Operational Research* 15, 4 (2008), 509–517.
- [5] BALKHI, Z. T., AND BENKHEROUF, L. On an inventory model for deteriorating items with stock dependent and time-varying demand rates. *Computers & Operations Research* 31, 2 (2004), 223 – 240.
- [6] BARON, O., BERMAN, O., AND PERRY, D. Continuous review inventory models for perishable items with leadtimes. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* (2017), 1–26.
- [7] BERK, E., AND ÜLKÜ GÜRLER. Analysis of the (q, r) inventory model for perishables with positive lead times and lost sales. *Operations Research* 56, 5 (2008), 1238–1246.
- [8] CHANG, C.-T., GOYAL, S. K., AND TENG, J.-T. On “an EOQ model for perishable items under stock-dependent selling rate and time-dependent partial backlogging” by dye and ouyang. *European Journal of Operational Research* 174, 2 (2006), 923–929.
- [9] CHAO, X., GONG, X., SHI, C., YANG, C., ZHANG, H., AND ZHOU, S. X. Approximation algorithms for capacitated perishable inventory systems with positive lead times. Tech. rep., Working paper, University of Michigan, Ann Arbor. Available at <http://www.umich.edu/~shicong/papers/perishable2.pdf>, 2015a.
- [10] CHAO, X., GONG, X., SHI, C., AND ZHANG, H. Approximation algorithms for perishable inventory systems. *Operations Research* 63, 3 (2015b), 585–601.
- [11] CHEN, J.-M., AND CHEN, L.-T. Market-driven production lot-size and scheduling with finite capacity for a deteriorating item. *Production Planning & Control* 17, 1 (2006), 44–53.
- [12] CHOI, T.-M. *Handbook of EOQ inventory problems*, vol. 197. Springer US, 2014.

- [13] CHU, L. Y., HSU, V. N., AND SHEN, Z.-J. M. An economic lot-sizing problem with perishable inventory and economies of scale costs: Approximation solutions and worst case analysis. *Naval Research Logistics (NRL)* 52, 6 (2005), 536–548.
- [14] DEBATA, S., AND ACHARYA, M. A note on inventory model for perishable items with trapezoidal type market demand and time-varying holding cost under partial backlogging. *Malaya Journal of Biosciences* 4, 1 (2016), 136–154.
- [15] DEBATA, S., ACHARYA, M., AND SAMANTA, G. An inventory model for perishable items with quadratic trapezoidal type demand under partial backlogging. *International Journal of Industrial Engineering Computations* 6, 2 (2015), 185–198.
- [16] DYE, C.-Y., CHANG, H.-J., AND TENG, J.-T. A deteriorating inventory model with time-varying demand and shortage-dependent partial backlogging. *European Journal of Operational Research* 172, 2 (2006), 417 – 429.
- [17] DYE, C.-Y., HSIEH, T.-P., AND OUYANG, L.-Y. Determining optimal selling price and lot size with a varying rate of deterioration and exponential partial backlogging. *European Journal of Operational Research* 181, 2 (2007), 668 – 678.
- [18] DYE, C.-Y., OUYANG, L.-Y., AND HSIEH, T.-P. Deterministic inventory model for deteriorating items with capacity constraint and time-proportional backlogging rate. *European Journal of Operational Research* 178, 3 (2007), 789–807.
- [19] EKŞİOĞLU, S., AND JIN, M. Cross-facility production and transportation planning problem with perishable inventory. *Computational Science and Its Applications-ICCSA 2006* (2006), 708–717.
- [20] FERGUSON, M., AND KETZENBERG, M. E. Information sharing to improve retail product freshness of perishables. *Production and Operations Management* 15, 1 (2006), 57.
- [21] FRIEDMAN, Y., AND HOCH, Y. A dynamic lot-size model with inventory deterioration. *INFOR: Information Systems and Operational Research* 16, 2 (1978), 183–188.
- [22] FRIES, B. E. Optimal ordering policy for a perishable commodity with fixed lifetime. *Operations Research* 23, 1 (1975), 46–61.
- [23] GHASIMI, S. A., AND GHODSI, R. Improvement and solving three new supply chain inventory control models for perishable items using just-in-time logistic. In *Computer Modelling and Simulation, 2009. UKSIM'09. 11th International Conference on* (2009), IEEE, pp. 279–286.
- [24] GHOSH, S., AND CHAUDHURI, K. An order-level inventory model for a deteriorating item with weibull distribution deterioration, time-quadratic demand and shortages. *Advanced Modeling and Optimization* 6, 1 (2004), 21–35.
- [25] GHOSH, S. K., SARKAR, T., AND CHAUDHURI, K. A multi-item inventory model for deteriorating items in limited storage space with stock-dependent demand. *American Journal of Mathematical and Management Sciences* 34, 2 (2015), 147–161.
- [26] GIRI, B. C., JALAN, A. K., AND CHAUDHURI, K. S. Economic order quantity model with weibull deterioration distribution, shortage and ramp-type demand. *International Journal of Systems Science* 34, 4 (2003), 237–243.
- [27] GOYAL, S., AND GIRI, B. C. Recent trends in modeling of deteriorating inventory. *European Journal of operational research* 134, 1 (2001), 1–16.

- [28] GÜRLER, Ü., AND YÜKSEL ÖZKAYA, B. A note on continuous review perishable inventory systems: models and heuristics". *IIE Transactions* 35, 3 (2003), 321–323.
- [29] HARRIS, F. W. How many parts to make at once. *The Magazine of Management Science* 10, 2 (1913), 135–136, 152.
- [30] HSIEH, T.-P., AND DYE, C.-Y. Optimal replenishment policy for perishable items with stock-dependent selling rate and capacity constraint. *Computers & Industrial Engineering* 59, 2 (2010), 251–258.
- [31] HSU, V. N. Dynamic economic lot size model with perishable inventory. *Manage. Sci.* 46, 8 (Aug. 2000), 1159–1169.
- [32] HSU, V. N. An economic lot size model for perishable products with age-dependent inventory and backorder costs. *IIE Transactions* 35, 8 (2003), 775–780.
- [33] INDERFURTH, K., JANIAC, A., KOVALYOV, M. Y., AND WERNER, F. Batching work and rework processes with limited deterioration of reworkables. *Computers & operations research* 33, 6 (2006), 1595–1605.
- [34] INDERFURTH, K., KOVALYOV, M. Y., NG, C., AND WERNER, F. Cost minimizing scheduling of work and rework processes on a single facility under deterioration of reworkables. *International Journal of Production Economics* 105, 2 (2007), 345–356.
- [35] INDERFURTH*, K., LINDNER, G., AND RACHANIOTIS, N. Lot sizing in a production system with rework and product deterioration. *International Journal of Production Research* 43, 7 (2005), 1355–1374.
- [36] JAGGI, C., PAREEK, S., KHANNA, A., AND SHARMA, R. Two-warehouse inventory model for deteriorating items with price-sensitive demand and partially backlogged shortages under inflationary conditions. *International Journal of Industrial Engineering Computations* 6, 1 (2015), 59–80.
- [37] JAGGI, C. K., PAREEK, S., VERMA, P., AND SHARMA, R. Ordering policy for deteriorating items in a two-warehouse environment with partial backlogging. *International Journal of Logistics Systems and Management* 16, 1 (2013), 16–40.
- [38] KHANLARZADE, N., YOUSEFI YEGANE, B., NAKHAI KAMALABADI, I., AND FARUGHI, H. Inventory control with deteriorating items: A state-of-the-art literature review. 179–198.
- [39] KHOUJA, M. The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research. *Omega* 27, 5 (1999), 537 – 553.
- [40] KOUKI, C., JEMAI, Z., AND MINNER, S. A lost sales (r, q) inventory control model for perishables with fixed lifetime and lead time. *International Journal of Production Economics* 168, Supplement C (2015), 143 – 157.
- [41] KOUKI, C., JEMAI, Z., SAHIN, E., AND DALLERY, Y. Analysis of a periodic review inventory control system with perishables having random lifetime. *International Journal of Production Research* 52, 1 (2014), 283–298.
- [42] KOUKI, C., AND JOUINI, O. On the effect of lifetime variability on the performance of inventory systems. *International Journal of Production Economics* 167, Supplement C (2015), 23 – 34.
- [43] KUMARESAN, S., BAKTHAVACHALAM, R., KRISHNAN, K., AND ELANGO, C. Perishable inventory system with (s, q) policy in supply chain. *International Journal of Mathematics and Soft Computing* 4, 2 (2014), 213–224.

- [44] LI, N., CHAN, F. T., CHUNG, S., AND TAI, A. H. An EPQ model for deteriorating production system and items with rework. *Mathematical Problems in Engineering* 2015 (2015).
- [45] LIAN, Z., AND LIU, L. Continuous review perishable inventory systems: models and heuristics. *IIE Transactions* 33, 9 (2001), 809–822.
- [46] LIN, G. C., KROLL, D. E., AND LIN, C. Determining a common production cycle time for an economic lot scheduling problem with deteriorating items. *European Journal of Operational Research* 173, 2 (2006), 669 – 682.
- [47] LIU, L., AND LIAN, Z. (s, s) continuous review models for products with fixed lifetimes. *Operations Research* 47, 1 (1999), 150–158.
- [48] MAHMOODI, A., AND HAJI, A. (1, t) policy for a two-echelon inventory system with perishable-on-the-shelf items. *Journal of Optimization in Industrial Engineering* 7, 16 (2014), 31–40.
- [49] MANNA, S., AND CHAUDHURI, K. An EOQ model with ramp type demand rate, time dependent deterioration rate, unit production cost and shortages. *European Journal of Operational Research* 171, 2 (2006), 557 – 566.
- [50] MINNER, S., AND TRASCHEL, S. Periodic review inventory-control for perishable products under service-level constraints. *OR spectrum* 32, 4 (2010), 979–996.
- [51] MURIANA, C. An eoq model for perishable products with fixed shelf life under stochastic demand conditions. *European Journal of Operational Research* 255, 2 (2016), 388–396.
- [52] NAHMIAS, S. Optimal ordering policies for perishable inventory—ii. *Operations Research* 23, 4 (1975), 735–749.
- [53] NAHMIAS, S. The fixed-charge perishable inventory problem. *Operations Research* 26, 3 (1978), 464–481.
- [54] NAHMIAS, S. Perishable inventory theory: A review. *Operations research* 30, 4 (1982), 680–708.
- [55] NAHMIAS, S. *Continuous Review Perishable Inventory Models*. Springer US, Boston, MA, 2011, pp. 25–31.
- [56] NIU, B., AND XIE, J. A note on “two-warehouse inventory model with deterioration under fifo dispatch policy”. *European Journal of Operational Research* 190, 2 (2008), 571–577.
- [57] ÖNAL, M. The two-level economic lot sizing problem with perishable items. *Operations Research Letters* 44, 3 (2016), 403–408.
- [58] ÖNAL, M., ROMEIJN, H. E., SAPRA, A., AND VAN DEN HEUVEL, W. The economic lot-sizing problem with perishable items and consumption order preference. *European Journal of Operational Research* 244, 3 (2015), 881–891.
- [59] PAHL, J., AND VOSS, S. Integrating deterioration and lifetime constraints in production and supply chain planning: a survey. *European Journal of Operational Research* 238, 3 (2014), 654–674.
- [60] PAHL, J., VOSS, S., AND WOODRUFF, D. L. Discrete lot-sizing and scheduling with sequence-dependent setup times and costs including deterioration and perishability constraints. In *System Sciences (HICSS), 2011 44th Hawaii International Conference on* (Jan 2011), pp. 1–10.

- [61] PAL, P., DAS, C. B., PANDA, A., AND BHUNIA, A. K. An application of real-coded genetic algorithm (for mixed integer non-linear programming in an optimal two-warehouse inventory policy for deteriorating items with a linear trend in demand and a fixed planning horizon). *International Journal of Computer Mathematics* 82, 2 (2005), 163–175.
- [62] PANDA, S., SENAPATI, S., AND BASU, M. Optimal replenishment policy for perishable seasonal products in a season with ramp-type time dependent demand. *Computers & Industrial Engineering* 54, 2 (2008), 301 – 314.
- [63] PEI-XIN, Z. An EOQ model for items with weibull distribution deterioration. In *Industrial Electronics and Applications, 2007. ICIEA 2007. 2nd IEEE Conference on* (2007), IEEE, pp. 451–454.
- [64] QIN, Y., WANG, R., VAKHARIA, A. J., CHEN, Y., AND SEREF, M. M. The news vendor problem: Review and directions for future research. *European Journal of Operational Research* 213, 2 (2011), 361–374.
- [65] RAAFAT, F. Survey of literature on continuously deteriorating inventory models. *Journal of the Operational Research society* 42, 1 (1991), 27–37.
- [66] REZAEIAN, J., HAGHAYEGH, S., MAHDAVI, I., ET AL. Designing an integrated production/distribution and inventory planning model of fixed-life perishable products. *Journal of Optimization in Industrial Engineering* 9, 19 (2016), 47–60.
- [67] ROY, A. An inventory model for deteriorating items with price dependent demand and time varying holding cost. *Advanced modeling and optimization* 10, 1 (2008), 25–37.
- [68] SANA, S., AND CHAUDHURI, K. On a volume flexible production policy for a deteriorating item with stock-dependent demand rate. *NONLINEAR PHENOMENA IN COMPLEX SYSTEMS-MINSK- 7*, 1 (2004), 61–68.
- [69] SANA, S., AND CHAUDHURI, K. On a volume flexible stock-dependent inventory model. *PROCEEDINGS-NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES INDIA SECTION A* 76, 4 (2006), 309.
- [70] SARGUT, F. Z., AND IŞIK, G. Dynamic economic lot size model with perishable inventory and capacity constraints. *Applied Mathematical Modelling* (2017), –.
- [71] SKOURI, K., KONSTANTARAS, I., PAPACHRISTOS, S., AND GANAS, I. Inventory models with ramp type demand rate, partial backlogging and weibull deterioration rate. *European Journal of Operational Research* 192, 1 (2009), 79 – 92.
- [72] SKOURI, K., AND PAPACHRISTOS, S. Optimal stopping and restarting production times for an {EOQ} model with deteriorating items and time-dependent partial backlogging. *International Journal of Production Economics* 81–82 (2003), 525 – 531. Proceedings of the Eleventh International Symposium on Inventories.
- [73] TADJ, L., BOUNKHEL, M., AND BENHADID, Y. Optimal control of a production inventory system with deteriorating items. *International Journal of Systems Science* 37, 15 (2006), 1111–1121.
- [74] TAFT, E. The most economical production lot. *Iron Age* 101, 18 (1918), 1410–1412.
- [75] TAN, Y., AND WENG, M. X. A discrete-in-time deteriorating inventory model with time-varying demand, variable deterioration rate and waiting-time-dependent partial backlogging. *International Journal of Systems Science* 44, 8 (2013), 1483–1493.

- [76] TENG, J., OUYANG, L., AND CHENG, M. An EOQ model for deteriorating items with power-form stock-dependent demand. *International Journal of Information and Management Sciences* 16, 1 (2005), 1.
- [77] TENG, J.-T., OUYANG, L.-Y., AND CHEN, L.-H. A comparison between two pricing and lot-sizing models with partial backlogging and deteriorated items. *International Journal of Production Economics* 105, 1 (2007), 190 – 203.
- [78] TENG, J. T., AND YANG, H. L. Deterministic economic order quantity models with partial backlogging when demand and cost are fluctuating with time. *The Journal of the Operational Research Society* 55, 5 (2004), 495–503.
- [79] WAGNER, H. M., AND WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. *Management science* 5, 1 (1958), 89–96.
- [80] WHITIN, T. M. *The theory of inventory management*. Princeton University Press, 1953.
- [81] WU, K.-S. EOQ inventory model for items with weibull distribution deterioration, time-varying demand and partial backlogging. *International Journal of Systems Science* 33, 5 (2002), 323–329.
- [82] WU, K.-S., OUYANG, L.-Y., AND YANG, C.-T. An optimal replenishment policy for non-instantaneous deteriorating items with stock-dependent demand and partial backlogging. *International Journal of Production Economics* 101, 2 (2006), 369 – 384.
- [83] YANG, H.-L. A partial backlogging production-inventory lot-size model for deteriorating items with time-varying production and demand rate over a finite time horizon. *International Journal of Systems Science* 42, 8 (2011), 1397–1407.
- [84] ZHANG, B., AND WANG, X. Optimal policy and simple algorithm for a deteriorated multi-item EOQ problem. *American Journal of Operations Research* 1, 02 (2011), 46.
- [85] ZHANG, H., SHI, C., AND CHAO, X. Approximation algorithms for perishable inventory systems with setup costs. *Operations Research* 64, 2 (2016), 432–440.