dECON
Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

Documentos de Trabajo

Evolución y crisis en un modelo de Equilibrio General

Elvio Accinelli

Documento No. 09/12
Julio 2012

ISSN 0797-7484

Evolución y crisis en un modelo de Equilibrio General[1]

Elvio Accinelli[2]

Julio de 2012

Resumen

En el marco de la teoría del equilibrio general, se introduce un modelo evolutivo para una economía con producción. De esta forma se intenta explicar la posibilidad del surgimiento de cambios inesperados e impredecibles (crisis económicas), en una economía, como resultado de la acción, bajo información imperfecta, de agentes que buscan maximizar sus beneficios.

Palabras claves: Equilibrio general, economías regulares y singulares, evolución.

Abstract

In the framework of the general equilibrium theory, we introduce an evolutionary model for an economy with production. This will try to explain the possibility of the emergence of unexpected and unpredictable changes (economic crisis), in the economy as a result of the action, under imperfect information, of agents looking for maximize their profits.

*Keywords***:** General Equilibrium, Regular and singular economies, evolution.

JEL Classification: D21, D40.

[1] El autor desea agradecer a Mario Ibarburu así como a los participantes del Seminario de Economía del Departamento de Economía de la Facultad de Ciencias Sociales de la UDELAR, Montevideo-Uruguay.

[2] Facultad de Economía, Universidad Autónoma de San Luis Potos. México. E-mail: elvio.accinelli@eco.uaslp.mx

1 Introducción

Es bien sabido que la teoría del equilibrio general competitivo, es una teoría básicamente estática. El teorema de Debreu-Mantel-Sonneschein, muestra que la función exceso de demanda, adquiere formas muy generales, que hacen imposible, que sin mayores restricciones sobre las economías, pueda considerarse un sistema dinámico en la que dicha función explique los cambios económicos. Consecuentemente, la literatura existente sobre modelos dinámicos de equilibrio general es limitada, pues debe asumir hipótesis latamente restrictivas sobre las preferencias de los consumidores, o escaza.

En este trabajo la dinámica de la economía aparece como resultado de la acción de gerentes o propietarios de las firmas, que en busca de mejores beneficios, cambian la tecnología bajo la que producen. Los equilibrios cambian, cuando la distribución sobre las posibles tecnologías usadas por las firmas, cambia, dando lugar así, a una dinámica, que si bien ocurre sobre la variedad de equilibrios walrasianos, posibilita la aparición de economías singulares y consecuentemente, el surgimiento de cambios inesperados y *apriori*, impredecibles (crisis económicas), como resultado de pequeñas modificaciones en la distribución de las tecnologías. El modelo dinámico supone información imperfecta, en el momento en el cual los gerentes o propietarios de la firma, deciden cambiar su tecnología de producción, para aquellas que, en el momento, muestran mayores beneficios. En un modelo de equilibrio general, aun en condiciones de equilibrio competitivo, no todas las firmas obtienen los mismos beneficios, por lo tanto la pregunta acerca de por qué las firmas competitivas bajo condiciones de perfecta mobilidad de capital, no eligen las tecnologas que ofrecen los más altos beneficios, es pertinente y su vigencia es la que explica, al menos en este trabajo, la dinámica y la posibilidad de aparición de crisis económicas, como resultado de la acción racional de gerentes o propietarios maximizadores de beneficio, bajo información imperfecta.

2 El modelo

Suponemos que en la economía existen l bienes diferentes, m consumidores representados por sus funciones de utilidad $u_i : R_+^l \to R$ cuasicóncavas dos veces derivables con continuidad y dotaciones iniciales $w_i \in R^l_+$ para todo $i \in I = \{1,...,m\}$. El conjunto de las firmas será representado por F. Es un conjunto finito, cuya cardinalidad será representada por $|F|$, cada una de las cuales utiliza una de las posibilidades tecnológicas representadas por $Y_j \subset R^l; j \in \{1,...,k\}$. Representaremos por N_j el número de firmas que producen de acuerdo a la tecnologa Y_j de forma tal que $n_j = N_j / |F|$ y además $|F| = \sum_{j=1}^{k} N_j$. Las restricciones tecnológicas cumplen las condiciones habituales, es cerrado, convexo, acotado superiormente y además $R^l_+ \cap Y_j = \{0\}$. En cada momento t, la producción se realiza acorde a una distribución sobre las tecnologías, representada por $n(t) = (n_1(t),..,n_n(t))$ siendo $n_j(t)$ el porcentaje de firmas que en el momento t utilizan la tecnología $Y_j; j = 1,...,k$. Cada firma $f \in F$ elige un plan de producción maximizador dentro de su restricción tecnológica, esto es, a precios p dados una firma $f \in F$ utilizando la tecnología Y_j, elige un plan $y^f \in Y_j$ tal que $py^f \geq py \ \ \forall y \in Y_j; j = 1,....,k$, que es el mismo para cada firma que utiliza la misma tecnología. El producto total, corresponde a $y \in \sum_{j=1}^{n} N_j Y_j$ tal que:

$$y = \sum_{f \in F} y^f = |F| \sum_{j=1}^{n} n_j y_j$$

donde $y_j \in Y_j$ representa el plan óptimo a precios dados, de cada firma usando la tecnología Y_j. Asuminos que la economía es de propiedad privada, esto es que las firmas son de propiedad de los consumidores. El número real θ_{if} representa la proporción de los beneficios de la firma $f \in F$ que corresponden al consumidor $i \in I$. Por lo que se verifica que $0 \leq \theta_{if} \leq 1$ para todo $i \in I$ y $f \in F$ y además que $\sum_{i=1}^{n} \theta_{if} = 1$ para todo $f \in F$. Si asumimos que en el momento t la distribución de las firmas es n y las firmas maximizan sus beneficios, a precios p dados, todas las que producen con una misma tecnologa, ellas el mismo plan de producción, al que representamos por $y_j(p)$. La función de oferta de la firma $f \in F$ será representada por $y^f : R^l_{++} \rightarrow R^l$ y consecuentemente corresponde a $y^f(p) = y_j(p)$ para toda firma cuya tecnología sea Y_j. La participación del $i-$ésimo conusmidor en los beneficios correspondientes será $\theta_{ij} N_j p y_j(p) = \sum_{f \in Y_j} \theta_{if} y^f(p)$, por lo que $\theta_{ij} = \sum_{f \in Y_j} \frac{\theta_{if}}{|F| n_j}$.

Consecuentemente, dada la distribución de las firmas, la riqueza del $i-$ésimo agente está dada por la función $W_i : R^l_+ \to R$ definida por

$$W_i(p) = p w_i + \sum_{f \in F} \theta_{if} p y_f(p)$$

o equivalentemente por

$$W_i(p) = p w_i + |F| \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} n_j p y_j(p).$$

Las utilidades y las dotaciones iniciales de los cosnumidores, así como su particpación en los beneficios de cada firma, se mantendrán constantes, por cada economía se caracterizará por la distribución de las firmas sobre los posibles tipos de tecnología, la que puede modificarse con el tiempo. Como ya fue dicho, las demás caractersticas se mantendrán constantes, inclusive el total de firmas existentes. El vector de distribución n caracterizará a las economías las que serán representadas por E_n. La riqueza de los consumidores depende de los precios y de la distribución de las firmas, para destacar esta dependencia, utilizaremos la función $W_i : R^l_+ \times S^k \to R$ definida por

$$W_i(p, n) = p w_i + |F| \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} n_j p y_j(p). \tag{1}$$

Siendo S^k el simplex de dimensión $k-1$.

Cada economía E_n representa una economía neoclásica con producción de propiedad privada, en el sentido de la definición habitual, ver por ejemplo [Aliprantis et all]. Bajo las condiciones indicadas, cada economía tiene al menos un equilibrio walrasiano.

Definimos la función de demanda individual por $x_{in} : R^l_{++} \to R^l$ siendo $x_i(p)$ la solución del problema de maximizar $u_i(x)\ s.a: x \in B_i(p,n), \forall i = 1,...,m,$, siendo

$$B_i(p,n) = \{x \in R_+^l : px \leq W_i(p,n)\}$$

La restricción presupuestaria del i-ésimo consumidor. Daremos a continuación la definición de función exceso de demanda para una economía neoclásica, con producción de propieded privada (ver [Aliprantis et all]).

Definición 1 *Si por* E_n *representamos una economa de propiedad privada como la anteriormente definida, la función de exceso de demanda* $\xi_n : R_{++}^l \to R^l$ *es la función definida por:*

$$\xi_n(p) = \sum_{i=1}^{m} x_{in}(p) - \sum_{f \in F} y^f(p) - \sum_{i=1}^{m} w_i. \tag{2}$$

Un sistema de precios de equilibrio, corresponderá a un vector $p(n) \in R_{++}^l$ tal que $\xi_n(p(n)) = 0.$

3 Consideraciones sobre el equilibrio walrasiano y la distribución de las firmas sobre los tipos de tecnología

Si bien el modelo supone, para cualquiera sea la distribución de las firmas sobre los tipos de tecnología, la existencia del equilibrio walrasiano, los beneficios de los firmas, aun bajo equilibrio, no necesariamente son los mismos para todas las tecnologías posibles. Siendo esto as y bajo condiciones de libre movilidad de capital, los gerentes o propietarios racionales (asumimos que los propietarios y gerentes de las firmas tienen iguales intereses) preferirán producir de acuerdo a las tecnologías que ofrezcan los mayores beneficios. Por lo que parece natural, que se produzcan modificaciones en la distribución de las firmas a lo largo del tiempo.

Dependiendo de cada n, la oferta óptima de cada firma que opere con la tecnologa Y_j, corresponderá a una función, $p \to y_j(p)$ si asumimos precios de equilibrio, los beneficios de las firmas según su tipo de tecnogúia, estarán dados por

$\pi_j(p(n)) = p(n)y_j(p(n))$. Debe considerarse que la demanda de cada consumidor, dependerá en definitiva de la distribución de las firmas, pues su riqueza es función de n.

Nótese que la función exceso de demanda de cada consumidor, considerada como función de los precios y de la distribución de las firmas (ver ecuación 2) $(p,n) \to \xi_i(p,n)$ resulta derivable con respecto a cada uno de sus argumentos.

Recordamos a continuación las definiciones de economías regulares y singulares (tales caracterizaciones fueron introducidas en [Debreu, G]).

Definición 2 *Decimos que un vector de precios* p^* *es un equilibrio regular para una economía* E_n *si y sólo si, es un cero regular para la función exceso de demanda, es decir: si y sólo si:* $\xi_n(p^*) = 0$ *y además el jacobiano de dicha función, evaluado en* p^*, $J_p\xi_n(p^*)$ *resulta de rango máximo, si la condición sobre el jacobiano no se verifica, diremos que el equilibrio es singular o crítico.*

Definición 3 *Diremos que una economa* E_π *es regular si cada cero de la función* $\xi_\pi : R^l_+ \to R^l$ *resulta regular, es decir si todos sus precios de equilibrio son ceros regulares para la función exceso de demanda. En otro caso la economa se dirá singular*[3].

Obsérvese, que no necesariamente los precios de equilibrio de una economía singular, tienen porqué ser todos singulares, basta con que uno de ellos tenga esta caracterstica, para que la economía se denomine singular. En principio, la teoría no puede predecir cual de los posibles equilibrios para una economía con multiplicidad de equilibrios, prevalecerá o se revelará en el instatne t.

Sea p un equilibrio regular para la economía E_π. Luego p es un cero regular para la función exceso de demanda, esto es: $\xi_\pi(p) = \xi(p,\pi) = 0$, y además $J_p\xi(p,\pi)$ es de rango máximo, entonces de acuerdo al teorema de la función implcita ([Lages Lima, E.]), es posible definir en un entorno relativo de π una función $p : V_\pi \to R^l_{++}$ tal que $\xi(n) = \xi(p(n),n) = 0 \;\; \forall n \in V_\pi$ y tal que $p = p(n)$.

[3] Para una caracterización de estas economías véase por ejemplo [Balasko Y.] o bien para una caracterización más detallada de las economías regulares con producción [Mas-Colell, A.].

Nótese que no necesariamente existe un único p^* de equilibrio para cada economía[4] del tipo E_π, no obstante, para cada p^* que corresponda a un equilibrio regular de dicha economía, existirá un entorno V_π de π y un entorno V_{p^*} de p^*, tales que $\forall n \in V_\pi$ existe un único $p(n) \in V_{p^*}$ verificándose que $\xi(p(n), n) = 0$ y además $p(\pi) = p^*$, tal es el contenido del teorema de la función implícita anteriormente mencionado.

Luego, si bien es cierto que una modificación en la distribución de las firmas, modifica el conjunto de equilibrios de la economía, el comportamiento de una economía regular, no se ve severamente afectado si la distribución de las firmas no se modifica mucho, por cuanto el número de equilibrios y su caracter de regular no se modifica (ver [Debreu, G]). Reumiendo, podemos decir que si una economía es regular, las economías modificadas serán todas regulares, si la distribución de las firmas no difiere mucho de la original. Es decir que, si en t_0 la economía E_{n_0} es regular, existe un cierto entorno V_{n_0} de la distribución inicial, tal que si la distribución de las firmas, en un momento t psoterior, es tal que $n(t) \in V_{n_0}$ entonces la economía $E_{n(t)}$ seguirá siendo regular y más aun, a cada $p^* \in Eq_{n_0}$ regular, le corresponderá un único $p(n(t)) \in Eq_{n(t)}$ y recíprocamente. Esta última afirmación vale inclusive para los precios regulares de economías singulares.

No obstante el número de equilibrios se modificará en forma impredecible, si las modificaciones ocurren en las economías singulares si se reveló un precio singular. Los equilibrios singulares desaparcerán pudiendo aumentar el número de equilibrios en uno o disminuir en uno por cada equilibrio singular que desaparezca. Cuál de las dos opciones ocurrirá, es en principio impredecible, esta caraterística es propia del modelo, y no corresponde a una situación de información imperfecta, sino a una imposibilidad inherente al modelo mismo. Es precisamente esta característica la que hace a la imposibilidad de definir medidas *apriori* a una crisis económica, pues ellas ocurren solamente si la ecoomía es singular y si el equilibrio existente es crítico. Sólo conoceremos las características de las economías post crisis, luego de que tal evento ocurra. Sí podemos afirmar que los equilibrios que surjan luego de una crisis, serán regulares, pues las economías singulares

[4] Sobre las condiciones que garantizan la unicidad del equilibrio para economías con producción, referimos al lector interesado a [Mas-Colell, A.].

corresponden a espacios topológiacamente magros o de medida nula si nos enfocqmos desde el punto de vista de la teoría de la medida [Debreu, G]. No obstante las caractersticas de ete conjunto de economías, son ellas las causantes de las crisis económicas, y la única forma de explicarlas, dentro del modelo del equilibrio general.

A continuación introduciremos una dinámica, que dentro del referido modelo, sea capaz de explicar la evolución de las economías y la posibilidad de que en sus respectivos procesos de modificación, atraviesen por economías singulares, lo que dará lugar a crisis económicas.

4 Una dinámica para las firmas

Es natural pensar, que en condiciones de competencia perfecta, los propietarios de las firmas o en su caso los gerentes, interesados en maximizar sus beneficios, produzcan con aquellas tecnologías que les permite obtener mayores beneficios. En condiciones de equilibrio, las firmas maximizadoras de beneficios, producen de acuerdo a planes óptimos. No obstante no todas ellas obtienen los mismos niveles de beneficios, dependiendo esto de las ramas de producción o tecnología utilizada. Consecuentemente, es posible pensar que la producción de acuerdo a las tecnologías más exitosas se incremente, emigrando los capitales desde las ramas, o tecnologías de menores beneficios hacia las de mayores. Es natural también pensar que esta emigración desde las tecnologa de tipo Y_h hacia una de tipo Y_l, sea creciente con la diferencia de beneficios $\pi_l(y_l)-\pi_k(y_k)$ obtenidos en condiciones de equilibrio y decreciente con los costos de transformación c_{hl}. Por $y_j(n)$ representamos la oferta óptima de una firma actuando en una economía E_n de acuerdo a la tecnologa Y_j, siendo $p(n)$ un precio de equilibrio, es decir $y_j(n) = y_j(p(n))$.

Supongamos que una vez que se revelan los precios de equilibrio y los beneficios correspondientes a cada tecnología, los propietarios o gerentes pueden decidir cambiar o no, su tipo tecnológico. Asumiremos que la información acerca de los beneficios presentes y su posible evolución, no llega al mismo tiempo a todos los productores, por lo que la decisión de emigrar hacia las ramas de beneficios mayores no es unánime ni simultánea. Asumiremos que en cada instante t, una vez que los precios de estuilibrio se revelaron, existe una probabilidad p_{lh} positiva, de que una firma operando hasta enotnces, de acuerdo a la tecnología Y_l se transforme en Y_h si y solamente si resulta $(\pi_l - \pi_h) \geq c_{hl} \geq 0,$ es decir si y solamente si, la diferencia en los beneficios correspondientes al equilibrio que se reveló en el instante $t,$ para las firmas operando con tales tecnologías, resulta mayor que el costo de transformación de una tecnología en otra. Asumiremos además, que existe una función $\phi_{lh} : R \times R \to R$ tal que:

$$p_{lh} = \phi_{lh}((\pi_l - \pi_h), c_{hl})$$

la que resulta positiva si y solamente si $(\pi_l - \pi_h) > c_{hl}$ negativa si la desigualdad es la opuesta, creciente con la diferencia $(\pi_l - \pi_h)$ y decreciente con $c_{hl}.$ Nótese que para cada economía $E_n,$ los beneficios obtenidos por cada firma dependen de la distribución existente sobre los tipos de tecnologa $n(t),$ y del vector de precios de equilibrio que se revele, es decir $\pi_l = p(n(t))y_l(p(n(t)))$ por lo que en definitiva, podemos pensar en los beneficios obtenidos para cada tecnología, como una función de los precios de equilibrio y de la distribución de las firmas en sus tipos de tecnología, es decir $\pi_l : Eq_n \times S^k \to R$ tal que $\pi_l = \pi_l(p,n)$ donde por Eq_n representamos al conjunto de los precios de equilibrio de la economía E_n es decir:

$$Eq_n = \{p \in R^l_{++} : \xi_n(p) = 0\}.$$

De esta forma existirá un flujo positivo hacia una tecnologa Y_l desde todas aquellas tecnologas Y_j para las que $p_{jl} > 0$ y un flujo negativo desde Y_l a otras tecnologías si $p_{lj} > 0$ por lo que obtenemos el siguiente sistema dinámico para la evolución de la tecnología:

$$\begin{aligned} \dot{n}_l &= \sum_{j:p_{jl}>0} p_{jl} n_j - \sum_{j:p_{lj}>0} p_{lj} n_l \quad l = 1,...k-1 \\ \dot{n}_k &= -\sum_{j \neq k} \dot{n}_j . \end{aligned} \tag{3}$$

Por $\dot{n}_i$ se representa la derivada con respecto al tiempo del valor de la i-ésima coordenada de la distribución n (la variable temporal se omite para simplificar la escritura). En forma general, este sistema dinámico puede ser escrito en la forma:

$$\begin{aligned} \dot{n}_l &= \sum_j \phi_{lj}(\pi_l(p(n),n) - \pi_j(p(n),n))n_j \quad l = 1,...,k-1 \\ \dot{n}_k &= -\sum_{j \neq k} \dot{n}_j . \end{aligned} \tag{4}$$

Siendo $n(t_0) = n_0$ la distribución de las firmas en el instante t_0. El vector $p(n)$ representa los precios de equilibrio en el instante $t \geq t_0$ (la variable t se suprime para mayor comodidad) siendo $p(n(t_o)) = p(n_0)$ el sistema de precios de equilibrio que se revela en el instante $t = t_0$. Obsérvese que los equilibrios dinámicos, corresponden a situaciones en los que los beneficios obtenidos por las diferentes firmas, bajo precios de equilbrio, son los mismos. La lipsichtizianidad de las funciones $\phi_j, j = 1,...,k$ asegurará la existencia de la solución del sistema dinámico (4) y su unicidad una vez fijadas las condiciones iniciales. La evolución de los precios, a partir del inicial $p(n_0)$ corresponde, si este es regular, a la función $p(n(t))$ cuya existencia y continuidad, en un intervalo V_{n_0} de la distribución inicial n_0, como ya fue dicho, es consecuencia del teorema de la función implcita, verificándose consecuentemente, en t_0 la igualdad $p(n(t_0)) = p(n_0)$. Representaremos a la solución del sistema (4) por la función vectorial $\xi : S^k \times T \to S^k$ definida por $\xi(n_0, t) = n(t)$ siendo $\xi(n_0, t_0) = n_0$, por T se representa el intervalo de tiempo $t_0 \leq t < t_1$, siendo t_1 el primer instante (posiblemente infinito) en el que $n(t)$ deja de pertenecer al intervalo V_{n_0} defindo por el teorema la la función implcita. Es decir que, $p(n(t_1))$ corresponde a un precio de equilibrio crítico. El camino regular $\{(\xi(n_0, t), t) : t \in T\}$ representa la evolución de la economía.

El sistema dinámico sigue rigiendo la evolución de la tecnologa mientras que la distribución $n(t)$ de lugar a precios de equilibrio $p(n(t))$ regulares. Es posible que la evoluvión de la distribución de las firmas, regida por este sistema dinámico converja con el tiempo, hacia una distribución tal que de lugar a un equilibrio económico singular. A partir de este momento, las modificaciones inmediatamnete posteriores dejarán de ser continuas.

La aparición de singularidades da lugar a grandes modificaciones en el comportamiento de la economía, aun ante cambios insignificantes en la distribución de las firmas en sus tipos. En estas condiciones, los precios dejan de modificarse en forma continua como resultado de cambios en la distribución tecnológica. Esto da lugar a la aparición de crisis económicas como resultado de cambios en las tecnologías utilizadas por las firmas. Y el resultado, inmediatamente posterior, a una modificación en el comportamiento de las firmas, para una economa singular, no será consecuencia del sistema dinámico presentado. Como ya fue dicho, las caraterísticas de la economía posterior son *a priori*, impredecibles. Aunque el hecho de que sin lugar a dudas, esta será regular, hará que la evolución posterior pueda analizarse nuevamente, a partir de un sistema dinámico similar al presentado, cambiando ahora las condiciones iniciales.

5 Conclusiones

En el presente trabajo se introdujo una dinámica que permite explicar la evolución tecnológica de una economa competitiva y a partir de ella, los modificaciones en el comportamiento general de la economía. Se introduce un sistema dinámico que permite analizar la evolución de las economas regulares, siempre y cuando las modificaciones en la distribución de las firmas en sus tipos tecnológicos no sobrepase determinados valores, impuestos por el teorema de la función implícita. Si la economía no es regular, y el precio que se revela en un instante determinado, no es regulra, aparece la posibilidad de cambios bruscos e inesperados ante pequeñas modificaciones de la distribución de las firmas en sus tipos, haciendo que las economías posibles, inemdiatamente posteriores a estas modificaciones, presenten comportamientos impredecibles y con modificaciones importantes en su estructura respecto de la original, dando lugar así a la aparición de crisis económicas, como resultado de modificaciones tecnológicas. A pesar de ser el conjunto de las firmas singulareses pequeño desde el punto de vista topológico o bien desde el punto de vista de la proabilidad, juegan ellas un papel significativo en el momento de explicar la crisis económicas. La teora del equilibrio general está en deuda con el estudio de las singularidades.

Referencias

[Aliprantis et all] Aliprantis C.D.; Brown D.J.; Burkinshaw, O. Existence and Optimaility of Competitive Equilibria. *Ed. Springer Verlag*, (1990).

[Balasko Y.] The Equilibrium Manifold Postmodern Developments in the Theory of General Economic Equilibrium. *Ed. The Mit Press*, (2009).

[Debreu, G] Regular Differentiable Economies. *American Economics Review*, 66(2) pp. 831-32 (1976)

[Lages Lima, E.] Curso de Analise vol 2. *Ed. Projeto Euclides IMPA, CNPq*, (2009).

[Mas-Colell, A.] The Theory of General Equilibrium: A differentiable approach. *Ed. Cambrdige University Press*, (1989).