



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



# Problema de Ruteo con Múltiples Ventanas de Tiempo para la Recolección de Leche

Informe de Proyecto de Grado de Ingeniería  
de Producción

ALUMNOS

Danilo Alvez, Juan Pablo Chalupa, Diego Correa

TUTOR

Ing. Pedro Piñeyro

Montevideo  
Mayo de 2019



## Agradecimientos

Antes que nada, queremos expresar nuestro agradecimiento a nuestro tutor Pedro Piñeyro quien nos acompañó a lo largo del Proyecto, compartiendo constantemente con nosotros su conocimiento y demostrándonos que su experiencia muchas veces le daría la razón. También agradecemos al personal de la Cooperativa Nacional de Productores de Leche (CONAPROLE), quienes nos brindaron su tiempo y nos explicaron con paciencia la realidad del caso de estudio: a Mariángela Besio, Eduardo Da Silva y Gastón González. A Adrián Ferrari, quien nos facilitó el contacto y nos abrió las puertas para poder tratar con el excelente equipo de CONAPROLE.

Por último, agradecemos a nuestras familias por el apoyo brindado durante esta etapa, sin ellos esto tampoco habría sido posible.



# Resumen

El presente proyecto de grado estudia la operativa de Conaprole sobre la recolección periódica de leche en tambos. Dicha realidad fue modelada como un Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos y Múltiples Ventanas de Tiempo (en inglés Multi-Depot Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem With Multiple Time Windows and Assignment Restrictions o M-VRPTWAR). En este problema, los tambos deben ser visitados con distintas frecuencias y en distintos horarios en el período de planificación, utilizando una flota heterogénea que entrega la leche en las distintas plantas, haciendo múltiples recorridos de ser necesario.

Se realizó una revisión bibliográfica del tema profundizando en tres aspectos claves: variantes del problema (Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos, Ventanas de Tiempo, entre otros); métodos de resolución (diferenciando exactos de heurísticas); y aplicabilidad a la realidad, siendo generalmente el motor de la investigación.

Se consideraron las restricciones más relevantes del caso. El modelo incorporó elementos adicionales a la forma actual de trabajo que fueron validados con Conaprole. Los parámetros fueron facilitados por la empresa ya que muchos de éstos son utilizados día por medio en la operativa.

Debido a la gran cantidad de variables y complejidad del problema (NP-hard) fue necesario simplificar el problema. Estas modificaciones se realizaron por limitaciones del método de resolución. El modelo completo fue validado, pero se estudiaron casos simplificados: Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Viajes, Múltiples Ventanas de Tiempo y Restricciones de Asignación.

El informe incluye un análisis de sensibilidad con distintos conjuntos de tambos, a partir del cual se arribó a conclusiones de interés para la contraparte, mostrando la influencia de los distintos parámetros en la solución. Los parámetros analizados incluyen costo de transporte, frecuencia de visita y capacidad de camión.

El trabajo realizado abre la puerta a futuras investigaciones sobre el estudio de métodos de resolución eficientes, que logren aportar más información sobre el modelo propuesto y sean de interés para Conaprole.

**Palabras claves:** Problema de Ruteo de Vehículos, Múltiples Ventanas, Recolección de Leche, Programación Matemática.

**Keywords:** Vehicle Routing Problem, Multiple Time Windows, Milk Collection, Mathematical Programming.



# Tabla de contenidos

1	Introducción	13
2	Marco Conceptual	17
2.1	Traveling Salesman Problem	17
2.2	Vehicle Routing Problem	18
2.3	Periodic Vehicle Routing Problem	18
3	Descripción del Problema	23
4	Formulación Matemática	25
4.1	Modelado Matemático	25
5	Validación del modelo	31
5.1	Testeo funcional por módulos	31
5.2	Casos de validación con datos reales	39
6	Validación con datos reales	49
6.1	Relevamiento de Datos	49
6.2	Ejecución con datos reales	49
7	Caso de estudio	61
7.1	Distribución de costos	62
8	Análisis de Sensibilidad	65
8.1	Análisis del costo por litro al variar parámetros	66
8.2	Análisis de kilómetros recorridos al variar parámetros	73
8.3	Análisis de tiempos de espera al variar parámetros	78
8.4	Observaciones del Análisis de Sensibilidad	83
9	Conclusiones y trabajos futuros	85
9.1	Conclusiones	85
9.2	Trabajos futuros	88
	Referencias	91
	Anexo: Estado del Arte	93
	Referencias del Estado del Arte	129





# Índice de figuras

1 Ejemplo de tambos pertenecientes a una única región de 85 tambos y dos plantas . . . . .	24
2 Solución de caso . . . . .	32
3 Esquema de recorridos de caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo . . . . .	41
4 Esquema de recorridos de caso 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	52
5 Esquema de recorridos de caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo (subóptima) . . . . .	56
6 Esquema de recorridos de caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo óptima . . . . .	58
7 Distribución Costos (\$) . . . . .	62
8 Distribución Costos (%) . . . . .	63
9 Ocupación del Caso Normal . . . . .	64
10 Variación el costo por litro (\$/L) en función del parámetro $\alpha$ . . . . .	67
11 Variación el costo por litro (\$/L) en función del parámetro $\beta$ . . . . .	68
12 Variación el costo por litro (\$/L) en función del parámetro $\delta$ . . . . .	68
13 Variación el costo por litro (\$/L) en función del parámetro $\gamma$ . . . . .	69
14 Variación el costo por litro (\$/L) en función de la capacidad . . . . .	70
15 Variación el costo por litro (\$/L) en función de los litros producidos por los tambos . . . . .	71
16 Variación el costo por litro (\$/L) en función de las ventanas y frecuencias . . . . .	72
17 Kilómetros recorridos en función del cambio de frecuencia . . . . .	73
18 Kilómetros recorridos en función del parámetro $\alpha$ . . . . .	74
19 Variación de kilómetros en función del parámetro $\beta$ . . . . .	75
20 Variación de kilómetros en función del parámetro $\delta$ . . . . .	76
21 Variación de kilómetros en función del parámetro $\gamma$ . . . . .	76
22 Variación de kilómetros en función de la capacidad . . . . .	77
23 Variación de kilómetros en función de los litros producidos por los tambos . . . . .	78
24 Espera en función de $\alpha$ . . . . .	79
25 Espera en función de $\beta$ . . . . .	79
26 Espera en función de $\gamma$ . . . . .	80
27 Espera en función de $\delta$ . . . . .	81

28	Espera en función de la capacidad . . . . .	82
29	Espera en función de litros . . . . .	82
30	Todas las rutas posibles (elaboración propia) . . . . .	98
31	Una de las rutas posibles (elaboración propia) . . . . .	98
32	Relación de costo total de transporte y penalización por desbalance (Gulczynski, Golden, y Wasil, 2011). . . . .	117
33	NP = P (elaboración propia) . . . . .	126
34	Ejemplo de solución con subtour (elaboración propia) . . . . .	127

# Índice de tablas

1 Ventanas de visita por tambo para caso 3.1 . . . . .	34
2 Ventanas de visita por tambo para caso 3.2 . . . . .	34
3 Ventanas de visita por tambo para caso 4.0 . . . . .	35
4 Ventanas de visita por tambo para caso 4.1 . . . . .	36
5 Ventanas de visita por tambo para caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo . . . . .	40
6 Demanda por día para el caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo . . . . .	40
7 Salida tabulada para caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo . . . . .	41
8 Distancias entre nodos para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo . . . . .	42
9 Tiempo de traslado entre nodos para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo . . . . .	42
10 Ventanas para el caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo . . . . .	43
11 Frecuencia, última visita y litros por visita para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo . . . . .	43
12 Demanda diaria por planta para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo . . . . .	43
13 Salida tabulada para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo . . . . .	44
14 Distancias entre nodos para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos . . . . .	45
15 Tiempo de traslado entre nodos para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos . . . . .	45
16 Ventanas para los tambos caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos . . . . .	46
17 Frecuencia y producción leche para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos . . . . .	46
18 Demanda diaria para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos . . . . .	46
19 Salida del caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos . . . . .	47

20	Datos de tambos para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	50
21	Costos por vehículo para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	50
22	Ventanas de visita para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	51
23	Demanda diaria para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	51
24	Salida de caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo	51
25	Instante de cada llegada a tambo del caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorrido por vehículo . . . . .	52
26	Datos de tambos para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	54
27	Costo por vehículo para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	54
28	Ventanas de visita para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	54
29	Demanda diaria para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	55
30	Primera salida (subóptima) para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	55
31	Instante de cada llegada a tambo del caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorrido por vehículo (solución subóptima) . . . . .	56
32	Salida de segunda ejecución para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo . . . . .	58
33	Instante de cada llegada a tambo del caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorrido por vehículo (solución óptima) . . . . .	59
34	Características principales de los conjuntos estudiados: frecuencia, litros y capacidad mínima requerida por conjunto . . . . .	61
35	Características de los vehículos en los conjuntos de estudio. . . . .	62
36	Modificación de variables en función de parámetros . . . . .	63
37	Cantidad de artículos de PVRP por clasificación . . . . .	110

# 1. Introducción

Este documento describe el proyecto de grado llevado a cabo sobre el Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos y Múltiples Ventanas de Tiempo. Este problema es una variante del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP), muy estudiado para obtener ventajas competitivas entre cadenas de suministro (Francis, Smilowitz, y Tzur, 2008).

El VRP se puede definir como un problema del diseño de rutas que recorren un conjunto de puntos, cumpliendo con una serie de restricciones, buscando maximizar o minimizar una determinada función objetivo. El problema por lo general está compuesto por un depósito, uno o varios vehículos y clientes, donde las rutas quedan definidas de forma tal que se respeten todas las restricciones dadas. Algunas de estas restricciones pueden ser de capacidad de los vehículos, continuidad de flujo, cumplir con una determinada demanda, etc. Uno de los posibles valores a maximizar podría ser el beneficio neto o, por otro lado, la minimización de los costos.

Este tipo de problema tiene diversas aplicaciones en la realidad, resultando un campo de gran interés y en constante investigación, que a su vez es altamente complejo de resolver por pertenecer a la familia de problemas NP-hard.

Luego de realizado el estudio del caso, el modelo resultante es de similares características a la variante Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos y Múltiples Ventanas de Tiempo con Restricciones de Asignación descrita según Tummel, Franzen, Hauck, y Jeschke (2013). Este modelo incorpora otro elemento a tener en cuenta, el tiempo. Cada cliente tiene definida una ventana de tiempo y no puede ser visitado por fuera de dicha ventana. Por otro lado, se consideran vehículos de distintas capacidades, múltiples depósitos y restricciones de visita a clientes (no todos los vehículos pueden visitar a todos los clientes).

El caso sobre el cual se plasma el estudio es la recolección de leche de Conaprole: Cooperativa Nacional de Productores de Leche. De forma diaria, Conaprole debe recoger leche de alrededor de dos mil tambos, y llevarlos a las plantas de procesamiento que se encuentran ubicadas a lo largo del país. Para esto cuenta con empresas tercerizadas que deben visitar a cada tambo en su ventana horaria correspondiente, descargar en la planta y volver a salir nuevamente. La misión de Conaprole<sup>1</sup> es recoger, procesar y comercializar toda la leche producida por sus socios cooperarios con los máximos niveles de eficiencia, de forma de maximizar el valor de la leche recibida en el corto, mediano y largo plazo, con el menor nivel de riesgo posible. En el marco de un modelo de sustentabilidad apuesta a mejorar sostenidamente los ingresos de sus productores y su calidad de vida.

---

<sup>1</sup>Extraído de la Memoria Anual de Conaprole al 31/03/2019: [http://www.conaprole.com.uy/wp-content/uploads/2018/11/Memoria-Anual-2018\\_Final-1.pdf](http://www.conaprole.com.uy/wp-content/uploads/2018/11/Memoria-Anual-2018_Final-1.pdf)

Uruguay es el séptimo país exportador de leche en el mundo según la Federación Internacional de Lácteos<sup>2</sup>, siendo la lechería el sector agropecuario de mayor ingreso por hectárea, exportando un 70 % de la producción. En Uruguay se producen 2200 millones de litros anualmente, con un 90 % de la producción de leche procesada por nuestra industria<sup>3</sup>. En Uruguay, aproximadamente 20000 personas trabajan en el sector lechero, con alrededor de 3800 productores lecheros. Desde luego la elaboración de productos lácteos tiene como principal insumo la leche producida en los diferentes tambos, a lo largo de todo el territorio, produciendo los distintos productos en cada planta, por lo que cada planta de procesamiento tiene distintos requerimientos de cantidad de leche. Dos particularidades del contexto a considerar: al tratarse de una cooperativa de productores, los tambos son heterogéneos en producción y tamaño; a su vez, se trata de una empresa con una producción de estilo vertical, incluyendo la producción de la leche en los tambos, el procesamiento intermedio en determinadas plantas, el procesamiento final de los productos y por último su distribución y comercialización en algunos casos.

El trabajo incluyó una investigación bibliográfica del tema, profundizando en tres aspectos claves: variantes del problema (Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos y Ventanas de Tiempo); métodos de resolución (diferenciando exactos de heurísticas); y aplicabilidad a la realidad.

También se relevaron los distintos aspectos de la realidad de Conaprole necesarios para el desarrollo del modelo, describiendo al detalle todos los puntos que luego fueron tenidos en cuenta para el modelo propuesto. Dicha realidad fue modelada como un Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos y Múltiples Ventanas de Tiempo con Restricciones de Asignación (en inglés Multi-Depot Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem With Multiple Time Windows and Assignment Restrictions o M-VRPTWAR). En este problema, los tambos deben ser visitados con distintas frecuencias y en distintos horarios en el período de planificación, utilizando una flota heterogénea que entrega la leche en las distintas plantas, haciendo múltiples recorridos de ser necesario. Los aspectos básicos y principales del problema VRP se basaron en el modelo propuesto por Christofides y Beasley (1984) por otro lado para lo referente a ventanas de tiempo se consultó el trabajo presentado por Michallet, Prins, Amodeo, Yalaoui, y Vitry (2014) mientras que las características del modelo asociados a la realidad relevada fueron elaboradas por el propio equipo.

Culminado el desarrollo del modelo, se validó el mismo. Para verificar las distintas restricciones del modelo se diseñó una serie de pruebas, incrementando su complejidad paulatinamente. Luego de recabar toda la información pertinente, se concluyó la validación de modelo con pruebas completas con datos reales. El código se escribió para ser ejecutado en GLPK, pero al tener ejecuciones muy extensas se

---

<sup>2</sup>Por más información visitar: <https://www.fil-idf.org/>

<sup>3</sup>Según datos oficiales del Instituto Nacional de Leche: <https://www.inale.org/>

prefirió continuar con el trabajo en AMPL/CPLEX. Al ser un problema NP-hard y debido a la gran cantidad de variables, fue necesario simplificar el problema al momento de resolverlo para que fuera ejecutado en tiempos computacionales razonables.

El trabajo continuó utilizando distintos conjuntos de tambos como casos de estudio, para los cuales se describió la solución obtenida. Sobre estos casos de estudio se realizó un análisis de sensibilidad donde se presenta como interactúan los distintos parámetros del problema y se analiza el impacto de cada uno sobre la solución. Debido a las limitantes del método de resolución para un modelo tan complejo, las conclusiones no son absolutas, ya que debió aplicarse para un problema reducido.

En las recomendaciones y conclusiones realizadas, se sugiere las distintas direcciones que serían interesantes tomar si se siguiera profundizando este estudio, incluyendo la implementación de una heurística para poder abordar una versión más completa del problema.

El resto del documento se encuentra organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 se desarrollan los aspectos teóricos de mayor importancia relacionados con ruteo de vehículos. En la Sección 3, se describe la problemática de Conaprole y se incorporan los conceptos teóricos antes vistos introduciendo el modelo desarrollado en la Sección 4. En las Secciones 5 y 6 se valida el modelo y se muestran los primeros casos. Luego, en la Sección 7 se realiza un caso de estudio, culminando en la Sección 8 con un análisis de sensibilidad diseñado de manera de poder brindar a la contraparte un estudio de la realidad que permita identificar de que manera interactúan los distintos parámetros del problema. El trabajo concluye en la Sección 9 con una serie de recomendaciones que buscan servir de guía para futuros trabajos.





## 2. Marco Conceptual

Esta sección presenta una introducción a los temas estudiados en mayor profundidad en el Estado del Arte (Anexo 9.2), a partir de una revisión bibliográfica de la literatura hasta la fecha, sobre el problema de ruteo de vehículos (VRP por sus siglas en inglés). Todos los modelos se pueden encontrar en el Estado del Arte pero con el fin de facilitar la lectura se decidió no incluirlos todos en esta Sección.

El ruteo de vehículos consiste en decidir como asignar de forma ordenada un conjunto de clientes a rutas realizadas por vehículos, satisfaciendo ciertas condiciones para cumplir con un servicio. Las restricciones más comunes suelen ser la máxima capacidad de carga de los vehículos, satisfacer la demanda de todos los clientes y restricciones propias del modelo como que el vehículo parta y retorne al depósito. El problema de ruteo de vehículos no termina al encontrar una solución que cumple todas las restricciones (solución factible), sino que además busca la optimalidad. Suele ser el objetivo del problema encontrar las rutas con menor costo, con menores distancias totales recorridas, minimizar el tiempo total de transporte o minimizar la flota requerida entre otros (Golden, Raghavan, y Wasil, 2008).

La dificultad de esta familia de problemas radica en ser altamente combinatorio, siendo representativo de los problemas de optimización combinatoria y perteneciendo a la clase de problemas NP-hard. Por más detalle ver Estado del Arte, en Anexo 9.2.

### 2.1. Traveling Salesman Problem

El TSP (“Traveling Salesman Problem” o Problema del Vendedor Viajero) es el primer problema planteado formalmente como un problema de ruteo de vehículos (Rego, Gamboa, Glover, y Osterman, 2011). Como mencionan los autores, si bien es un problema fácil de plantear, su resolución es compleja, debido a ser altamente combinatorio. Es un problema atractivo debido a todos los escenarios con los que se los puede relacionar en la práctica.

El problema originalmente se plantea como un vendedor ambulante que desea visitar exactamente una vez cada ciudad, con costo de traslado entre ciudades conocido y retornando finalmente al lugar de partida. El problema a resolver consiste en lograr determinar cuál es la ruta menos costosa para hacer todo el recorrido.

A la fecha del artículo de Hoffman, Padberg, y Rinaldi (2013), nadie ha encontrado un algoritmo que resuelva el problema en tiempo polinomial. El problema TSP es aplicable a diversos problemas y esto junto a su dificultad hace que el problema sea altamente estudiado (Campbell y Wilson, 2014) y derive en muchos subproblemas, cada uno con distintos conjuntos de restricciones.

## 2.2. Vehicle Routing Problem

G. B. Dantzig y J. H. Ramser (1959) presentan por primera vez el VRP como una extensión del TSP. Esta generalización se debe a que la capacidad de transporte del vehículo es menor a la suma total de las demandas de los clientes, necesitando más de una ruta. Si la capacidad fuese mayor que la suma total de las entregas, estaríamos en presencia del TSP.

Del problema de VRP surgen variantes como por ejemplo, CVRP (Capacitated VRP) en el cual se cuenta con una flota homogénea de vehículos en el cual la restricción es la capacidad. Otro caso es el VRP con Ventanas de Tiempo (en inglés VRPTW), en el cual las visitas están sujetas a ventanas horarias que dependen del nodo.

A continuación se presenta el VRP según lo describen Toth y Vigo (2002):

Dado un grafo dirigido  $G = (N, A)$ , donde  $N = \{0, 1, \dots, n\}$  conjunto de  $n + 1$  nodos y  $A$  es el conjunto de arcos. El nodo 0 representa el depósito, mientras que los nodos restantes corresponden a los clientes. Dicho conjunto se representa de la siguiente manera  $C = N \setminus \{0\}$ .

Cada cliente  $i \in C$  requiere que le entreguen una cantidad de unidades  $q_i$  desde el depósito. Una flota homogénea de  $K$  vehículos idénticos con una capacidad  $Q$  sale desde el depósito para cumplir con la entrega de los productos a todos los clientes. Además, se tiene el costo no negativo  $c_{ij}$ , correspondiente a recorrer el arco  $(i, j) \in A$ . Una ruta se define eligiendo los nodos que se visitarán y se indica también su orden, dando lugar al conjunto  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , con  $i_1 = i_n = 0$ , es decir, tiene que comenzar y terminar en el depósito.  $\{i_2, \dots, i_n - 1\} \subseteq C$  es un circuito simple en  $G$  que contiene al depósito.

La versión del VRP con flota homogénea, consiste en encontrar un conjunto de rutas que cumplan que:

1. Cada cliente es visitado por una única ruta una sola vez.
2. Todas las rutas parten y regresan al depósito.
3. La suma de la demanda total de los clientes pertenecientes a la ruta es menor o igual a la capacidad del vehículo.

Minimizando el costo total de la ruta que corresponde a la suma de los costos de los arcos recorridos. Por más detalle del VRP consultar el Estado del Arte.

## 2.3. Periodic Vehicle Routing Problem

El problema de ruteo de vehículos periódico (PVRP por sus siglas en inglés), considera un horizonte de tiempo y se construyen rutas para los distintos períodos. Para cada uno de ellos, una flota de vehículos con cierta capacidad, recorre las rutas que comienzan y terminan en el mismo depósito, buscando minimizar el costo

total de traslado cumpliendo con las restricciones operacionales. Hasta donde se pudo averiguar, el PVRP es introducido en primera instancia por [Beltrami y Bordin \(1974\)](#) en un artículo acerca de recolección de residuos, dejando planteado el problema y dos enfoques para su resolución. Es mencionado luego por [Russell y Igo \(1979\)](#) como “Problema de asignación de rutas” y [Christofides y Beasley \(1984\)](#) introducen “El problema de ruteo periódico” y formulan el problema matemáticamente.

El término “Problema de Ruteo de Vehículos Periódico” es introducido por [Gaudio y Paletta \(1992\)](#), centrándose, a diferencia de los anteriores, en minimizar la flota necesaria.

A continuación se introduce la formalización del PVRP realizada por [Francis et al. \(2008\)](#):

**Dado** un el grafo de red completo  $G = (N, A)$ , con los costos de arcos conocidos  $c_{(i,j)}, \forall (i, j) \in A$ ; un horizonte de planificación  $T$ , con  $t \in T$ ; el depósito identificado con el nodo  $i = 0$ ; un conjunto de nodos de clientes  $C = N \setminus \{0\}$  tal que cada nodo  $i \in C$  tiene una demanda total de  $W_i$  para todo el periodo de planificación y un número fijo de visitas  $f_i$ ; un conjunto  $K$  de vehículos, todos con capacidad  $Q$ ; un conjunto  $S$  de las posibles agendas de días en los que podrán ser visitados los clientes.

**Encontrar** las asignaciones de las agendas de visita para cada cliente de forma que cada nodo sea visitado el número requerido de veces y se le entregue la demanda  $w_i = \frac{W_i}{f_i}$  en cada una de las visitas; las rutas para cada día de los vehículos que visitaran los clientes.

**Con el objetivo** de obtener costos totales mínimos de visitas.

A continuación se introduce la formulación del PVRP de [Christofides y Beasley](#), con modificaciones para continuar con la nomenclatura utilizada:

### Variables de decisión

$$x_{ijk}^t = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo } k \in K \text{ transita el arco } (i, j) \in A \text{ en el día } t \in T \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$z_i^s = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \in C \text{ es visitado en la agenda } s \in S \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$v_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \in C \text{ es visitado el día } t \in T \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\mathbf{min} \quad \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk}^t \quad (1)$$

$$s.a : \quad \sum_{s \in S_i} z_i^s = 1 \quad \forall i \in C \quad (2)$$

$$v_i^t = \sum_{s \in S_i} z_i^s a_{st} \quad \forall t \in T; i \in C \quad (3)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ijk}^t \leq \frac{v_i^t + v_j^t}{2} \quad \forall t \in T; i, j \in C (i \neq j) \quad (4)$$

$$\sum_{j \in C} x_{ijk}^t = \sum_{j \in C} x_{jik}^t \quad \forall i \in N, k \in K; t \in T \quad (5)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N} x_{ijk}^t = \begin{cases} v_j^t & \forall j \in C \\ |K| & j = 0 \end{cases} \quad \forall t \in T \quad (6)$$

$$\sum_{i,j \in Q} x_{ijk}^t \leq |Z| - 1 \quad \forall Z \subseteq C; k \in K; t \in T \quad (7)$$

$$\sum_{j \in C} x_{0jk}^t \leq 1 \quad \forall k \in K; t \in T \quad (8)$$

$$\sum_{i \in C} w_i \sum_{j \in N} x_{ijk}^t \leq Q \quad \forall k \in K; t \in T \quad (9)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk}^t \leq L \quad \forall k \in K; t \in T \quad (10)$$

$$z_i^s \in \{1, 0\} \quad \forall i \in C; s \in S_i \quad (11)$$

$$x_{ijk}^t \in \{1, 0\} \quad \forall (i, j) \in A; k \in K; t \in T \quad (12)$$

La función objetivo (1) minimiza los costos de los arcos de traslado. La familia de restricciones (2) asegura que cada nodo tenga asociado una agenda factible, mientras las (3) definen  $v_i^t$  en los días de visita dentro de la agenda asignada. Las restricciones de (4) permiten arcos sólo entre clientes asignados para la entrega en el día  $t$  de  $T$ . Las restricciones de (5) introducen la conservación de flujo. Las restricciones de (6) aseguran que los nodos sean incluidos en rutas para los días dentro de la agenda. Las restricciones de (7) son las restricciones de eliminación de subtours. Las restricciones de (8) aseguran que un vehículo no se utilice más de una vez por día. Las restricciones de (9) y de (10) son las restricciones de capacidad física y de largo de rutas respectivamente. Finalmente, las restricciones de (11) y las de (12) definen un conjunto de variables.

Posteriores formulaciones, como la de [Tan y Beasley \(1984\)](#), proponen un modelo para luego de asignados los días para cada agenda.

A nuestro entender, hay dos enfoques principales para definir formalmente el PVRP: [Russell y Igo \(1979\)](#), y [Tan y Beasley \(1984\)](#) afrontan el PVRP como la extensión de un problema de asignación con un componente de ruteo, mientras que [Christofides y Beasley \(1984\)](#) formulan el PVRP como un problema de ruteo

con una decisión de selección involucrada.

### 2.3.1. Extensiones y aplicaciones

En esta sección se presentarán algunas de las extensiones recabadas en la revisión bibliográfica y sus aplicaciones.

[Campbell y Wilson \(2014\)](#) recopilan información de las publicaciones más importantes en la materia desde 1974 hasta 2014, enfocándose en las aplicaciones y métodos de resolución de lo relevado.

Este artículo, clasifica las distintas publicaciones según su aplicación en tres categorías: visita para recolección (desperdicios, reciclaje, leche, etc.); visita para entrega (alimentos, ropa, sangre, etc.); y visita para brindar un servicio in situ (reparaciones, ventas, enfermeras a domicilio, etc.). La característica en común de estas aplicaciones que las lleva a ser modeladas como PVRP es que no todos los puntos/clientes requieren la misma periodicidad de visitas.

Por otra parte, [Braekers, Ramaekers, y Van Nieuwenhuyse \(2016\)](#) recopila publicaciones referidas a VRP y sus variantes, haciendo foco en características del problema y de su resolución. De la muestra analizada, casi un 80 % son resueltos mediante metaheurísticas y los datos generalmente son deterministas.

Algunas extensiones de las cuales se puede encontrar más detalle en el Estado del Arte son:

- Flexible Periodic Vehicle Routing Problem
- Periodic Vehicle Routing Problem with Reassignment Constraints and Balance Constraints
- Periodic Vehicle Routing Problem with Service Choice
- Multi Periodic Vehicle Routing Problem with Due Date
- Multi-period vehicle routing problem with time Windows and limited visiting Quota
- PVRP en el reparto de ropa hospitalaria

#### **PVRP en la recolección de leche**

[Dayarian, Crainic, Gendreau, y Rei \(2015\)](#) se centran en la industria lechera de Quebec donde se desarrolló un modelo del Problema de Ruteo de Vehículos de Múltiple Periodo (MPVRP por sus siglas en inglés) que implica la optimización de la recolección diaria por un conjunto de productores locales en un horizonte de tiempo, teniendo en cuenta que los productores pueden tener variaciones en sus niveles de producción en distintas temporadas. La mercadería que se recoje

de los distintos productores es leche (un único producto) para luego enviarla a un conjunto de plantas de procesamiento. A diferencia del modelo clásico, el conjunto de vehículos parten de diferentes depósitos, recojen la leche de los productores y lo envían a plantas de procesamiento. Cada productor es visitado solamente por un único vehículo y este visita una única planta por día, se asume que la producción total satisface la demanda de las plantas.

Los autores deciden modelar bajo la variante de múltiples periodos debido a que los productores tienen variaciones en su producción y la forma de representarlo es asignar diferentes niveles de producción dentro del horizonte de tiempo.

### 3. Descripción del Problema

La Cooperativa Nacional de Productores de Leche (Conaprole) posee 8 plantas de procesamiento de leche. Cada uno de los 1918 tambos, localizados a lo largo del país, se visita al menos una vez cada 48 horas. El problema que se aborda en este proyecto es el de minimizar el costo total de recolectar toda la leche disponible, sin comprometer la calidad de la misma y cumpliendo con las necesidades de las plantas.

Dependiendo de su producción y capacidad de almacenamiento, cada tambo debe ser visitado cada 12, 24 o 48 horas. La recolección se realiza mediante camiones cisterna de distintas capacidades. Algunos tambos tienen restringido el acceso a ciertos tamaños de camiones por características de la caminería o de la playa de maniobras.

Se realizan dos ordeños diarios en cada tambo. El horario lo define el tambero pero no suelen modificarlo para no reducir la productividad del ordeño. La recolección de leche debe realizarse con la leche fría, por lo que en la mayoría de los tambos es necesario recolectar la leche hora y media luego del ordeño. Por otra parte, cuando se recoge la leche y el tanque del tambero se vacía, es necesario desinfectarlo, por lo que se requiere que la recolección sea a lo sumo hasta una hora antes del siguiente ordeño.

Los tambos están divididos en 15 regiones, dentro de las cuales operan 34 empresas fleteras que disponen de 223 choferes. Cada región de tambos es atendida por distintas empresas fleteras y no pueden visitar tambos de dos regiones distintas dentro del mismo recorrido, en la Figura 1 se puede observar la distribución de los tambos pertenecientes a una misma región.

Conaprole no determina el recorrido de los camiones cisterna, pero calcula el costo de los fletes a pagar considerando que los camiones inician y terminan la ruta en la planta de destino con ciertos parámetros predeterminados, que buscan minimizar los costos de traslado, por lo que indirectamente incentiva la optimización de rutas.

El software que utiliza actualmente Conaprole, optimiza las rutas realizadas en los últimos días mediante la variación de los tambos entre rutas. Esto hace posible que se encuentren mejoras locales al recorrido reciente. Como contrapartida, esta herramienta no les permite explorar y visualizar nuevas formas de trabajar. Por este motivo resultaba interesante para Conaprole una herramienta que les permita saber qué tan cerca están del costo mínimo que se pudiera tener si tuvieran las ventanas de recolección perfectamente coordinadas, si tuvieran otro tipo de flota, o modificar la frecuencia de algún tambo en particular. También sería de utilidad saber cómo organizarse ante el cierre de una planta por mantenimiento o redirigir el volumen recolectado de la mejor manera, descubriendo mejores soluciones que permitan anticipar la mejor ruta, evitando a la empresa transportista incurrir en gastos innecesarios.

El pago del flete se realiza considerando las siguientes variables:

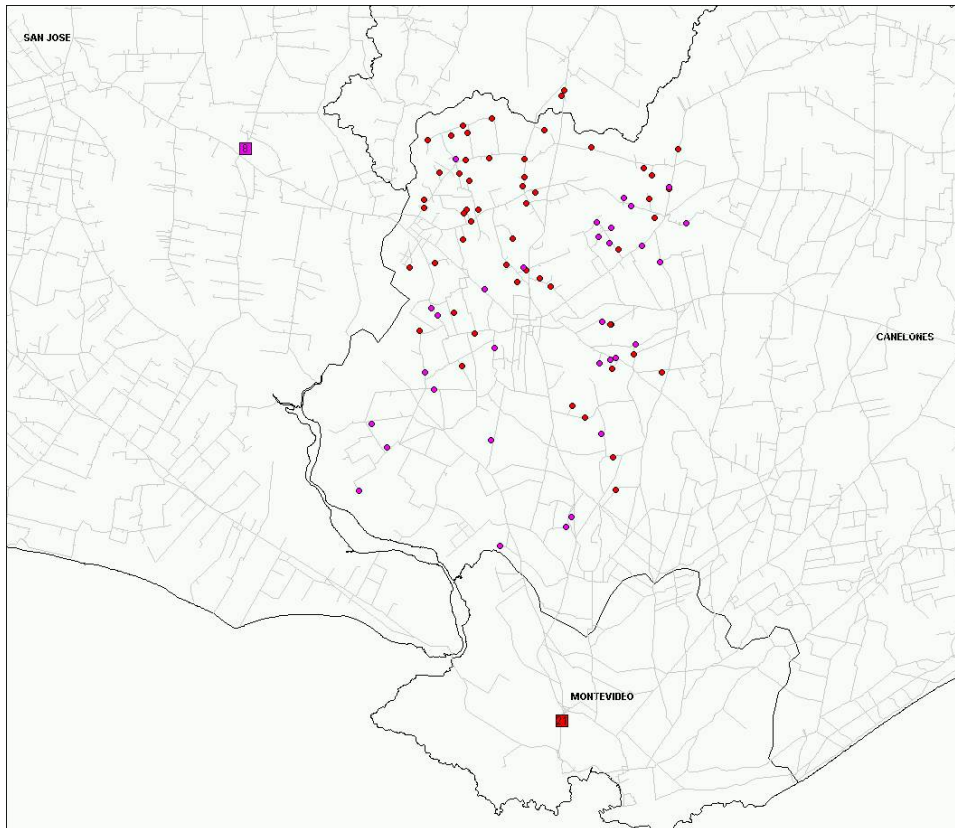


Figura 1: Ejemplo de tambos pertenecientes a una única región de 85 tambos y dos plantas

- Kilómetros recorridos saliendo de la planta y retornando a esta (depende del tipo de camión).
- Litros de leche transportados.
- Matrícula por ingresar al tambo (depende del tipo de camión).

Conaprole tiene que atender un problema de 1918 tambos y 8 plantas, con tambos que requieren diferentes frecuencias de visitas, ventanas horarias de visita y se realiza utilizando una flota heterogénea de camiones cisterna, por lo tanto, es un Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos y Múltiples Ventanas de Tiempo (en inglés Multi-Depot Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem With Multiple Time Windows and Assignment Restrictions o M-VRPTWAR).

Este problema es computacionalmente muy complejo considerando todas las variables y la gran cantidad de tambos y depósitos. Por este motivo, se estudiará una porción del mismo que permita arribar a conclusiones válidas en una menor escala y con ciertas simplificaciones.



## 4. Formulación Matemática

Considerando el problema definido en la Sección 3, se realizó el modelo matemático que se detalla a continuación. El problema fue modelado como un Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiples Depósitos, Flota Heterogénea y Múltiples Ventanas de Tiempo, teniendo en cuenta que cada tambo tiene distintas frecuencias de recolección dentro del período de planificación. El modelo resultante se describe en la Sección 4.1, y en la Sección 5 se describe la validación del modelo original con datos no reales, y las modificaciones realizadas que llevaron al modelo resultante.

### 4.1. Modelado Matemático

A continuación se presentan las definiciones de los conjuntos y parámetros seguidos de la explicación del modelo. Se podrá ver la función objetivo junto con las restricciones y sus descripciones.

#### Conjuntos

$M$ :	Conjunto de plantas donde se entrega la leche.
$N$ :	Conjunto de tambos de donde se retira la leche.
$V = M \cup N$ :	Conjunto de nodos, compuesto por la unión de plantas $M$ y tambos $N$ .
$K$ :	Conjunto de vehículos.
$W$ :	Conjunto de ventanas para cada tambo.
$R$ :	Conjunto de recorridos que realiza el vehículo.
$O$ :	Conjunto de días.

## Parámetros

- $f_i$  : Frecuencia de visita al tambo  $i$  : con  $i \in N$ , dentro del período de planificación  $f_i \in \{1, 2, 4\}$ .
- $H_i$  : Parámetro auxiliar para forzar la visita en ventanas salteadas si la frecuencia es  $f_i = 2$ . Definiendo  $H_i = (4 - f_i)(f_i - 1)$ :
- Si  $f_i = 2$  entonces  $H_i = 2$ ,
  - Si  $f_i = 1$  ó  $f_i = 4$  entonces  $H_i = 0$ .
- Es decir, que si la frecuencia es  $f_i = 2$ , el tambo deberá ser visitado en las ventanas 1 y 3, o 2 y 4.
- $g_{iw}$  : 1 si la última visita en el período anterior al tambo  $i$  fue en la ventana  $w$ , 0 en otro caso.
- $d_{ij}$  : Distancia en metros desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  con  $i, j \in V$ .
- $r_{ij}$  : Tiempo (segundos) que se demora para ir desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  con  $i, j \in V$ .
- $l_i$  : Litros a recoger por visita del tambo  $i$  con  $i \in N$ .
- $c_k$  : Capacidad máxima de transporte del vehículo  $k$  (litros) con  $k \in K$ .
- $e_i$  : Tamaño máximo del vehículo que puede entrar al tambo  $i$  (litros) con  $i \in N$ .
- $a_{iw}$  : Instante de llegada temprana al tambo  $i$  en la ventana  $w$  (segundos) con  $i \in N$  y  $w \in W$ .
- $b_{iw}$  : Instante de llegada tardía al tambo  $i$  en la ventana  $w$  (segundos) con  $i \in N$  y  $w \in W$ .
- $\alpha_k$  : Costo por metro para el vehículo  $k$  con  $k \in K$ .
- $\beta_k$  : Costo por visita a tambo para el vehículo  $k$  con  $k \in K$ .
- $\gamma_k$  : Costo por cada recorrido  $r$  que realiza el vehículo  $k$ , con  $r \in R$  y  $k \in K$ .
- $\delta_k$  : Costo de espera por segundo para el vehículo  $k$  con  $k \in K$ .
- $s_k$  : Velocidad de llenado de vehículo en el tambo (litros/segundos) para el vehículo  $k$  con  $k \in K$ .
- $s_m$  : Velocidad de descarga en planta (litros/segundos) para la planta  $m$  con  $m \in M$ .
- $t_{lavado}$  : Tiempo de la higienización del vehículo para quedar operativo, que se realiza luego de finalizar la descarga del mismo (segundos).
- $t_{48}$  : Instante a las 48 horas (segundos).
- $t_{24}$  : Instante a las 24 horas (segundos).
- $M_1$  : Constante auxiliar de tiempo, mayor o igual a  $t_{48}$  (segundos).
- $M_2$  : Constante auxiliar para activación de rutas, mayor o igual a  $|V| \cdot |P|$ .
- $D_m^o$  : Demanda diaria en el día  $o$  de planificación de la planta  $m$  (litros) con  $o \in O$  y  $m \in M$ .

## Variables

- $x_{ij}^{kr}$  : 1 si el vehículo  $k$  se traslada del nodo  $i$  al nodo  $j$  en el recorrido  $r$ .  
0 en otro caso.
- $z_{iw}^{kr}$  : 1 si el tambo  $i$  es visitado por el vehículo  $k$  en la ventana  $w$  en el recorrido  $r$ .  
0 en otro caso.
- $p_{iw}$  : 1 si el tambo  $i$  es visitado en la ventana  $w$ .  
0 en otro caso.
- $u^{kr}$  : 1 si el vehículo  $k$  visita algún tambo en el recorrido  $r$ .  
0 en otro caso.
- $\tilde{n}_{imwo}$  : 1 si el ordeño de la ventana  $w$  del tambo  $i$  abastece a la planta  $m$  en el día  $o$  de trabajo.  
0 en otro caso.
- $t_{iw}^{kr}$  : Variable continua que establece el instante (segundos) de llegada al nodo  $i$  en su ventana de ordeño  $w$ , del vehículo  $k$  en el recorrido  $r$ .
- $y_{iw}^{kr}$  : Variable continua que establece el tiempo (segundos) de espera en el nodo  $i$  del vehículo  $k$  en la ventana  $w$ .
- $ye_m^k$  : Variable continua que establece el instante (segundos) de la primera salida del tambo  $m$  del vehículo  $k$ .

## Modelo matemático

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{r \in R} \left[ \alpha_k \sum_{i,j \in V} d_{ij} x_{ij}^{kr} + \gamma_k u^{kr} + \sum_{w \in W} \left( \beta_k \sum_{i \in N} z_{iw}^{kr} + \delta_k \sum_{i \in V} y_{iw}^{kr} \right) \right] \quad (13)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{w \in W} p_{iw} = f_i \quad \forall i \in N \quad (14)$$

$$p_{iw} = \sum_{k \in K} \sum_{r \in R} z_{iw}^{kr} \quad \forall i \in N, w \in W \quad (15)$$

$$p_{iw} \geq g_{iw} \quad \forall i \in N, w \in W \quad (16)$$

$$H_i(p_{i1} - p_{i3}) = 0 \quad \forall i \in N \quad (17)$$

$$H_i(p_{i2} - p_{i4}) = 0 \quad \forall i \in N \quad (18)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{r \in R} z_{iw}^{kr} \leq 1 \quad \forall i \in N, w \in W \quad (19)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^{kr} = \sum_{w \in W} z_{iw}^{kr} \quad \forall i \in V, k \in K, r \in R \quad (20)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ji}^{kr} = \sum_{w \in W} z_{iw}^{kr} \quad \forall i \in V, k \in K, r \in R \quad (21)$$

$$M_2 u^{kr} \geq \sum_{w \in W} \sum_{i \in N} z_{iw}^{kr} \quad \forall k \in K, r \in R \quad (22)$$

$$\sum_{m \in M} \sum_{j \in N} x_{mj}^{kr} = u^{kr} \quad \forall k \in K, r \in R \quad (23)$$

$$u^{k(r-1)} \geq u^{kr} \quad \forall k \in K, r \in \{2, \dots, R\} \quad (24)$$

$$\sum_{w \in W} z_{mw}^{k(r-1)} \geq \sum_{w \in W} z_{mw}^{kr} \quad \forall m \in M, k \in K, r \in \{2, \dots, R\} \quad (25)$$

$$z_{m3}^{k1} = 0 \quad \forall m \in M, k \in K \quad (26)$$

$$z_{m4}^{k1} = 0 \quad \forall m \in M, k \in K \quad (27)$$

$$\sum_{j \in N} x_{mj}^{kr} = \sum_{i \in N} x_{im}^{kr} \quad \forall m \in M, k \in K, r \in R \quad (28)$$

$$\sum_{i \in M} \sum_{j \in M} x_{ij}^{kr} = 0 \quad \forall k \in K, r \in R \quad (29)$$

$$\sum_{w \in W} \sum_{i \in N} l_i z_{iw}^{kr} \leq c_k \quad \forall k \in K, r \in R \quad (30)$$

$$c_k z_{iw}^{kr} \leq e_i \quad \forall i \in V, w \in W, k \in K, r \in R \quad (31)$$

$$t_{iw}^{kr} + y_{iw}^{kr} \geq z_{iw}^{kr} a_{iw} \quad \forall i \in V, w \in W, k \in K, r \in R \quad (32)$$

$$t_{iw}^{kr} + y_{iw}^{kr} \leq z_{iw}^{kr} b_{iw} \quad \forall i \in V, w \in W, k \in K, r \in R \quad (33)$$

$$\sum_{w \in W} y e_m^k + r_{mj} \leq \sum_{w \in W} t_{jw}^{k1} + M_1(1 - x_{mj}^{k1}) \quad \forall m \in M, j \in V, k \in K \quad (34)$$

$$\sum_{w \in W} y e_m^k + r_{mj} \geq \sum_{w \in W} t_{jw}^{k1} - M_1(1 - x_{mj}^{k1}) \quad \forall m \in M, j \in V, k \in K \quad (35)$$

$$y e_m^k \leq M_1 \sum_{w \in W} z_{mw}^{k1} \quad \forall m \in M, k \in K \quad (36)$$

$$\sum_{w \in W} t_{iw}^{kr} + \sum_{w \in W} y_{iw}^{kr} + l_i/s_k + r_{ij} \leq \sum_{w \in W} t_{jw}^{kr} + M_1(1 - x_{ij}^{kr}) \quad \forall i \in N, j \in V, k \in K, r \in R \quad (37)$$

$$\sum_{w \in W} t_{iw}^{kr} + \sum_{w \in W} y_{iw}^{kr} + l_i/s_k + r_{ij} \geq \sum_{w \in W} t_{jw}^{kr} - M_1(1 - x_{ij}^{kr}) \quad \forall i \in N, j \in V, k \in K, r \in R \quad (38)$$

$$\sum_{w \in W} t_{mw}^{k(r-1)} + \sum_{w \in W} y_{mw}^{k(r-1)} + \frac{c_k}{s_m} + t_{lavado} + r_{mj} \leq \sum_{w \in W} t_{jw}^{kr} + M_1(1 - x_{mj}^{kr}) \quad \forall j \in N, m \in M, k \in K, r \in \{2, \dots, R\} \quad (39)$$

$$\sum_{w \in W} t_{mw}^{k(r-1)} + \sum_{w \in W} y_{mw}^{k(r-1)} + \frac{c_k}{s_m} + t_{lavado} + r_{mj} \geq \sum_{w \in W} t_{jw}^{kr} - M_1(1 - x_{mj}^{kr}) \quad \forall j \in N, m \in M, k \in K, r \in \{2, \dots, R\} \quad (40)$$

$$\sum_{w \in W} t_{mw}^{kr} \leq t_{48} \quad \forall m \in M, k \in K, r \in R \quad (41)$$

$$z_{m1}^{kr} \leq (1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw1} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (42)$$

$$z_{m1}^{kr} \geq -(1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw1} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (43)$$

$$z_{m2}^{kr} \leq (1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw2} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (44)$$

$$z_{m2}^{kr} \geq -(1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw2} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (45)$$

$$\sum_{o \in O} \sum_{m \in M} \tilde{n}_{imwo} = p_{iw} \quad \forall i \in N, w \in W \quad (46)$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{w \in W} l_i \tilde{n}_{imwo} \geq D_m^o \quad \forall m \in M, o \in O \quad (47)$$

$$x_{ij}^{kr}, z_{iw}^{kr}, p_{iw}, u^{kr}, g_m^{kr}, \tilde{n}_{imwo} \in \{0, 1\}, t_{iw}^{kr}, y_{iw}^{kr} \in R, \forall i, j \in V, w \in W, m \in M, k \in K, r \in R \quad (48)$$

La función objetivo (13) busca minimizar los costos del transporte: costo por kilómetros recorridos según tipo de vehículo, matrícula por ingresar al tambo según vehículo, costo por utilización de vehículo y costo de tener el vehículo esperando. Las restricciones de (14) imponen que se visite cada tambo en tantas ventanas como lo define la frecuencia, (15) establecen que si se debe visitar el tambo  $i$  en la ventana  $w$ , lo hace un solo vehículo, sino ninguno. Las restricciones de (16) imponen la restricción de última visita: si un tambo fue visitado por última vez en el período de planificación anterior en la ventana  $w$ , obliga al tambo  $i$  a visitarlo nuevamente en dicha ventana. Las restricciones de (17) y (18) imponen que, si la frecuencia de visita es 2, se visite en las ventanas 1 y 3 o 2 y 4. Las restricciones de (19) especifican que todo tambo es visitado a lo sumo una única vez por un vehículo en una vuelta dada, mientras (20) y (21) definen si se recorre el arco  $ij$  por el vehículo  $k$  y la vuelta  $r$  en el período  $w$ , y aseguran la conservación de flujo por el tambo  $i$ . Las restricciones de (22) definen la variable de activación de utilización de vehículo en cada vuelta. Las restricciones de (23) aseguran que cada vehículo

$k$  en una vuelta  $r$  parta de alguna planta si la vuelta contiene algún tambo en su recorrido, (24) aseguran que la numeración de las rutas para un mismo vehículo son consecutivas. Las restricciones de (25) a (27) restringen el uso de camiones a una única planta. Es decir, si un vehículo tiene un recorrido con punto de partida la planta 1, solo puede ser usado en próximos recorridos asociados a la planta 1. Las restricciones de (28) aseguran que si el vehículo  $k$  parte de la planta  $m$ , vuelva a dicha planta en la misma vuelta  $r$ , y (29) evitan traslado entre plantas. Las restricciones de (30) evitan que se cargue más litros en el vehículo de los que permite su capacidad. Las restricciones de (31) restringen el ingreso al tambo  $i$  de camiones de mayor tamaño que lo permitido. Las restricciones de (32) y (33) incorporan las restricciones de ventana de tiempo: que la llegada al tambo o planta, más la espera en este sea mayor o igual al horario más temprano de llegada para cada ventana, que la llegada al tambo más la espera en este sea menor o igual al horario más tarde de llegada para cada ventana. Las restricciones de (34) a (40) eliminan los subtours y preservan la continuidad del tiempo: (34) y (35) definen que el vehículo  $k$  sale de la planta  $m$  en tiempo 0, y la llegada al siguiente tambo  $i$  tiene que ser igual a su traslado y la espera en planta. Las restricciones de (36) definen que la espera inicial de un vehículo antes de salir de planta, solo puede tomar valor si parte de esa planta. Las restricciones de (37) y (38) determinan que el instante de llegada a un tambo  $j$  es igual a la llegada al tambo anterior, más la espera en dicho tambo antes de comenzar a cargar el camión, más la carga en dicho tambo, más el traslado desde éste al tambo  $j$ . Análogamente, las restricciones de (39) y (40) para la planta, con los tiempos de descarga y preparación antes de la próxima partida. Las restricciones de (41) establecen que todas las rutas deben llegar a la planta de destino antes del horizonte de planificación. Las restricciones de (42) a (46) definen la variable  $\tilde{n}_{imwo}$  que vale 1 si el ordeño de la ventana  $w$  del tambo  $i$  abastece a la planta  $m$  en el día  $o$  de trabajo y 0 en caso contrario, cumpliendo la restricción que cada ventana de ordeño  $w$  de un tambo  $i$  puede abastecer a lo sumo un día  $o$  y una planta  $m$ . Las restricciones de (47) imponen que se cumpla con la demanda mínima diaria en cada planta, siendo significativo qué día  $o$  llega la leche a planta y no qué día se extrae. Las restricciones de (48) definen el dominio de las variables.

## 5. Validación del modelo

En esta sección se detallan los casos de prueba realizados para validar el modelo. El modelo fue codificado en GNU MathProg, pensado originalmente para ser resuelto con GLPK. Con el fin de minimizar tiempos de ejecución finalmente fue resuelto con CPLEX en AMPL.

Se comenzó utilizando las restricciones elementales para el funcionamiento del modelo y a medida que se detectaron errores fueron corregidos. Se avanzó en los casos de prueba y se fueron agregando las demás restricciones al modelo, para luego realizar pruebas de validación con el modelo completo. Se partió con casos de un único camión saliendo de planta hasta llegar a casos de prueba mayores en tamaño y complejidad, que comprendieran al modelo en su totalidad. Lo que se probó comprende:

- Frecuencias de visitas respetadas
- Visita dentro de las ventanas de tiempo permitidas
- Cumplimiento de la demanda por día
- Múltiples plantas (caso de prueba con 2 plantas)
- Litros a entregar en Planta para cada día
- Casos de validación con datos reales incluyendo todos los puntos anteriores.

El modelo se fue ajustando a partir de los resultados de los casos de prueba. El resultado final fue el modelo presentado en la Sección 4, luego de probar el correcto funcionamiento de todas las restricciones.

### 5.1. Testeo funcional por módulos

Estas pruebas son casos simples con el fin de comprender fácilmente los resultados, sobre todo para aquellos casos en los que se detectan errores. Luego se verifica el correcto funcionamiento del modelo en sus funciones elementales, como ser correcta generación de rutas y cumplimiento de las reglas del negocio relevadas.

#### 5.1.1. Prueba 1: Funcionamiento básico

Se comienza con un modelo sin las restricciones que implican las ventanas de tiempo, demandas por días y múltiples plantas. En esta primera prueba se verifican las restricciones del modelo que determinan salida de planta y recorrido por los tambos. Para esta prueba se utilizó: 1 Planta, 2 Tambos, 1 Vehículo, 1 Recorrido y 1 Ventana.

**Caso 1.0** En la primera corrida no se encontró solución factible. Mediante posterior análisis pudimos detectar que presentaba un subtour que llevaba a la infactibilidad. A partir de este hecho, las ecuaciones 20 y 21 resultan como se describe a continuación:

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^{kr} = \sum_{w \in W} z_{iw}^{kr}, \quad \forall i \in V, k \in K, r \in R \quad (20)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ji}^{kr} = \sum_{w \in W} z_{iw}^{kr}, \quad \forall i \in V, k \in K, r \in R \quad (21)$$

Siendo que antes de la corrección la sumatoria estaba definida como  $j \in N$ , por lo que no estaba considerando el arco que salía y llegaba a planta, generando de esta manera subtours. Se corrigieron dichas ecuaciones incluyendo los arcos mencionados, se volvió a correr y el resultado fue esperado, en la Figura 2 se puede observar el antes y después de la corrección.

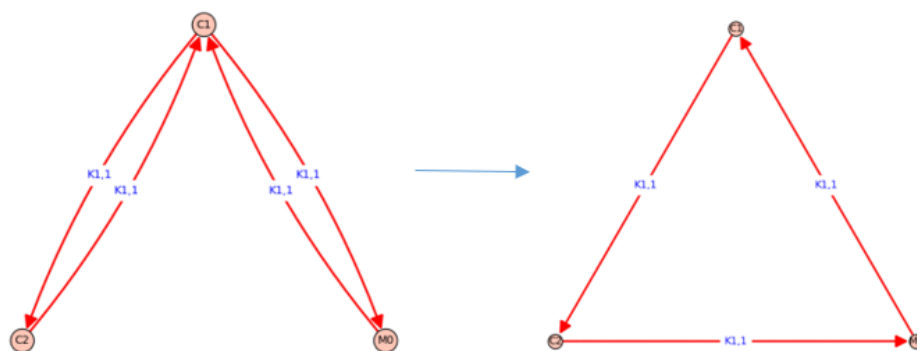


Figura 2: Solución de caso

### 5.1.2. Prueba 2: Recorridos

Le llamamos recorridos a las vueltas completas de los vehículos originadas y finalizadas en la planta luego de visitar al menos un tambo en su ventana horaria y haber recolectado todos los litros del mismo. En estas pruebas se evaluó el correcto funcionamiento de los recorridos. Para esta prueba se utilizó: 1 Planta, 4 Tambos, 1 Vehículo, 6 Recorrido y 1 Ventana.

**Caso 2.0** Se estableció que la capacidad del camión  $c_k$  sea 10 y que los litros producidos en cada tambo sean  $l_i = 10 \forall i \in N$ . De esta manera se está obligando a realizar 4 recorridos, o sea partir cuatro veces desde planta visitando una vez cada tambo. En la primera ejecución se obtuvieron las 4 rutas esperadas, pero observando los tiempos de llegada a cada tambo se pudo notar que se superponían



los recorridos. Esto requirió que se tuvieran que realizar modificaciones al modelo en las siguientes restricciones:

$$\sum_{w \in W} t_{iw}^{kr} + \sum_{w \in W} y_{iw}^{kr} + l_i/s_k + r_{ij} \leq \sum_{w \in W} t_{jw}^{kr} + M_1(1 - x_{ij}^{kr})$$

$$\forall i \in N, j \in V, k \in K, r \in R \quad (37)$$

Al cambiar  $j \in N$  por  $j \in V$ , se obtuvo la solución esperada. En esta nueva solución se observó que se realizaba el recorrido número 4 antes que el número 2. Esto no implica que funcionara incorrectamente (los tiempos y arcos se respetaban) solo que la lectura de la solución quedaba confusa. Para ordenar las soluciones se creó la siguiente familia de restricciones:

$$u^{k(r-1)} \geq u^{kr} \quad \forall k \in K, r \in \{2, \dots, R\} \quad (24)$$

De esta manera nos aseguramos que si el recorrido  $n$  se activó para el vehículo  $k$ , todos los recorridos menores a  $n$  se hayan activado para este vehículo, facilitando el orden, y por tanto la comprensión, de la salida (solo activando recorridos consecutivos).

**Caso 2.1** Capacidad del camión  $c_k = 20$  y los litros producidos en cada tambo  $l_i = 10 \forall i \in N$ . La solución coincide con la esperada, donde se realizaron 2 recorridos y se visitaron 2 tambos por recorrido.

**Caso 2.2** Capacidad del camión  $c_k = 30$  y los litros producidos en cada tambo  $l_i = 10 \forall i \in N$ . La solución coincide con la esperada, donde se realizaron 2 recorridos y se visitaron 3 tambos en un recorrido y el tambo restante en un segundo recorrido. Cabe mencionar que además la agrupación de los 3 tambos era consistente con los datos de distancias de arcos ingresados.

### 5.1.3. Prueba 3: Ventanas de tiempo

Hasta el momento las restricciones de las ventanas de tiempo no estaban activas. En esta sección, se utilizaron datos y restricciones para comprobar que los vehículos visitaran los tambos dentro de los horarios permitidos y que los recorridos lo cumplan. Para esta prueba se utilizo: 1 Planta, 4 Tambos, 1 Vehículo, 6 Recorridos y 1 Ventana.

**Caso 3.1** Tiempo de recorrido  $r_{ij} = 100 \forall i, j$  y tiempo de atención del camión en tambo de 10s. Los instantes de ventanas tempranas y tardías por tambo se detallan en la Tabla 1.

Tambo	<b>a(s)</b> : instante más temprano de llegada	<b>b(s)</b> : instante más tardío de llegada
C1	100	110
C2	220	230
C3	340	350
C4	460	470

Tabla 1: Ventanas de visita por tambo para caso 3.1

La solución prevista implicaba que la variable de espera  $y_{iw}^{kr}$  tomara valor distinto de 0 en ciertas ocasiones pero en la ejecución se obtuvo siempre igual a 0. Tras un análisis de los valores de las variables, se observa que los segundos destinados a la espera eran incluidos a la variable de tiempo de llegada al tambo  $i$  dado que la variable  $y_{iw}^{kr}$  está penalizada en la función objetivo y la restricción relacionada a  $y_{iw}^{kr}$  permitía estos resultados. Para corregir este comportamiento se agregó un nuevo conjunto de restricciones (38) de manera que se cumpliera la igualdad en los casos en que la misma se activara ( $x_{ij}^{kr} = 1$ ).

$$\sum_{w \in W} t_{iw}^{kr} + \sum_{w \in W} y_{iw}^{kr} + l_i/s_k + r_{ij} \leq \sum_{w \in W} t_{jw}^{kr} + M_1(1 - x_{ij}^{kr}) \quad \forall i \in N, j \in V, k \in K, r \in R \quad (37)$$

$$\sum_{w \in W} t_{iw}^{kr} + \sum_{w \in W} y_{iw}^{kr} + l_i/s_k + r_{ij} \geq \sum_{w \in W} t_{jw}^{kr} - M_1(1 - x_{ij}^{kr}) \quad \forall i \in N, j \in V, k \in K, r \in R \quad (38)$$

Luego de esta corrección se volvió a correr el caso y la salida fue la esperada.

**Caso 3.2.0** Se asignan las ventanas de la Tabla 2 para las cuales se espera una salida infactible ya que hay dos tambos con la misma ventana permitida de visita y por los tiempos de atención y traslado es imposible visitar a los 2 tambos con un único vehículo.

Tambo	<b>a(s)</b> : instante más temprano de llegada	<b>b(s)</b> : instante más tardío de llegada
C1	100	110
C2	100	110
C3	340	350
C4	460	470

Tabla 2: Ventanas de visita por tambo para caso 3.2

Se ejecuta y la resolución arroja infactibilidad como era esperado.

Caso 3.2.1 Se corrió el mismo caso pero con 2 vehículos y entonces sí fue factible por contar con otro vehículo que puede cumplir con la otra ventana.

#### 5.1.4. Prueba 4: Frecuencias

A partir de este punto se empezó a probar con más de una ventana para el mismo tambo y diversas frecuencias en cada tambo. Para esta prueba se utilizó: 1 Planta, 3 Tambos, 1 Vehículo, 6 Recorridos, 4 Ventanas y frecuencias 1, 2, 4.

Caso 4.0 Este caso se armó para un solo vehículo con las frecuencias de visita:

$$f_{C1} = 1, \quad f_{C2} = 2, \quad f_{C3} = 4, \quad f_{C4} = 1$$

Las ventanas de visita se describen en la Tabla 3.

		Ventana 1		Ventana 2		Ventana 3		Ventana 4	
		a(s)	b(s)	a(s)	b(s)	a(s)	b(s)	a(s)	b(s)
Tambo	Instante de llegada								
	C1	10	60000	10	60000	10	60000	10	60000
	C2	10	60000	10	60000	10	60000	10	60000
	C3	10	60000	10	60000	10	60000	10	60000
C4	10	60000	10	60000	10	60000	10	60000	

Tabla 3: Ventanas de visita por tambo para caso 4.0

Con estos datos se pretendió verificar que se respetaran las frecuencias de visita. Se corrió el modelo y la salida inicial fue infactible. Tras un análisis de las restricciones se detectó el error y se corrigió agregando las sumatorias de  $z_{iw}^{kr}$  en  $W$  para las siguientes restricciones:

$$\sum_{j \in V} x_{ij}^{kr} = \sum_{w \in W} z_{iw}^{kr} \quad \forall i \in V, k \in K, r \in R \quad (20)$$

$$\sum_{j \in V} x_{ji}^{kr} = \sum_{w \in W} z_{iw}^{kr} \quad \forall i \in V, k \in K, r \in R \quad (21)$$

Como la ruta  $kr$  no está asociada a ninguna ventana  $w$  en particular, para alguna ventana  $w$ ,  $z_{iw}^{kr} = 0$ , y para otra  $z_{iw}^{kr} = 1$ , por lo que se incorporó la sumatoria en  $W$  para que, si el tambo  $i$  es visitado, el arco de salida ( $x_{ij}^{kr}$ ) sea no nulo y en caso contrario sea nulo.

Luego de realizarse este cambio, se obtuvo la salida esperada: se visitó una vez al tambo C1, dos veces al tambo C2, cuatro veces al tambo C3 y una vez al tambo C4.

**Caso 4.1** En esta instancia se tiene un único vehículo, un único tambo (C1) y se incorporan ventanas de visitas más acotadas respetando la frecuencia de visita igual 4, detalladas en la Tabla 4.

		Ventana 1		Ventana 2		Ventana 3		Ventana 4	
		a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)
Instante de llegada	Tambo								
	C1	0	900	1000	1999	2000	2999	3000	3999

Tabla 4: Ventanas de visita por tambo para caso 4.1

La capacidad del vehículo es tal que la solución esperada consiste en un vehículo realizando 4 recorridos en los que atiende un tambo en cada uno. Al ejecutar el modelo se obtiene una solución infactible. Tras un análisis de los datos de entrada se observó que el tiempo de lavado del camión en planta era de 1200 segundos (valor utilizado en otros casos) por lo que no era posible que un vehículo llegara a planta, y pudiera llegar al próximo tambo dentro de la ventana esperada.

Se modifica el valor del parámetro y se vuelve a correr obteniendo una solución factible, pero se detecta que surgen tiempos de espera en todos los recorridos, salvo en el primero, en situaciones donde no era necesario. Tras analizar las restricciones se encuentra que se debe restringir a  $r = 1$  los dos conjuntos de restricciones específicas para el primer recorrido (Ecuaciones 34 y 35 del modelo) debido a que estaban definidas  $\forall r \in R$ , lo cual no tenía sentido ya que estas ecuaciones están pensadas únicamente para el recorrido inicial.

$$\sum_{w \in W} ye_m^k + r_{mj} \leq \sum_{w \in W} t_{jw}^{k1} + M_1(1 - x_{mj}^{k1}) \quad \forall m \in M, j \in V, k \in K \quad (34)$$

$$\sum_{w \in W} ye_m^k + r_{mj} \geq \sum_{w \in W} t_{jw}^{k1} - M_1(1 - x_{mj}^{k1}) \quad \forall m \in M, j \in V, k \in K \quad (35)$$

Se modificó y se volvió a correr el caso obteniendo la salida esperada.

### 5.1.5. Prueba 5: Demandas

Para esta prueba se incorporó el cumplimiento de la demanda diaria de la planta que no se consideraba hasta el momento.

**Caso 5** Para cumplir con la consigna se incluyó la variable  $\tilde{n}_{imwo}$  la cual toma valor 1 si la recolección en la ventana  $w$  del tambo  $i$  abastece la planta  $m$  en el día  $o$  y vale 0 en cualquier otro caso. Dicha variable es utilizada para multiplicarla por la cantidad de litros recolectada y satisfacer por lo menos el mínimo en cada planta. Para esta prueba se utilizó: 1 Planta, 2 Tambos, 1 Vehículo, 5 Recorridos,

4 Ventanas, Frecuencias 1, 2, 4 y 2 Días de entrega.

Por otro lado, para definir los valores de  $\tilde{n}_{imwo}$  se definieron las siguientes restricciones, donde los dos primeros conjuntos de restricciones hacen referencia al día 1 y los últimos dos al día 2.

$$z_{m1}^{kr} \leq (1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw1} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (42)$$

$$z_{m1}^{kr} \geq -(1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw1} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (43)$$

$$z_{m2}^{kr} \leq (1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw2} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (44)$$

$$z_{m2}^{kr} \geq -(1 - z_{iw}^{kr}) + \tilde{n}_{imw2} \quad \forall i \in N, m \in M, w \in W, k \in K, r \in R \quad (45)$$

Se probó con demanda en los dos días y la solución fue la esperada.

### 5.1.6. Prueba 6: Días sin demandas

Para esta prueba se utilizan días con demandas nulas para la planta.

**Caso 6** Al realizar una prueba con alguno de los dos días con demanda 0 la solución no fue la esperada debido a que la variable  $\tilde{n}_{imwo}$  podía tomar valores no deseados (estaba libre), por lo que se incorporaron las siguientes restricciones:

$$\sum_{o \in O} \sum_{m \in M} \tilde{n}_{imwo} = p_{iw} \quad \forall i \in N, w \in W \quad (46)$$

Este conjunto de restricciones obliga a la variable  $\tilde{n}_{imwo}$  a tomar valor 1 uno de los dos días y 0 el otro día para cada planta. Es decir, si la recolección en un tambo no se entrega el día 1, tiene que ser entregada el día 2, o viceversa. Con este conjunto de restricciones se probaron dos casos donde uno de los días tenía demanda 0 y el otro día distinto de 0, obteniendo una salida igual a la esperada.

### 5.1.7. Prueba 7: Casos de borde

En estas pruebas se plantean situaciones de borde con el fin de continuar con la validación del modelo propuesto. Por razones de practicidad se mencionan los parámetros más relevantes para cada caso.

**Caso 7.0** Al tambo C1 con una frecuencia  $f = 2$  se le asigna el parámetro de visita anterior  $g_{(i=C1,w=2)}$  y  $g_{(i=C1,w=3)}$ , con esto estamos obligando a la visita en dos ventanas consecutivas (2 y 3), obteniendo solución infactible como era esperado.

**Caso 7.1** Al tambo C1 con una frecuencia  $f = 2$  se le asigna el parámetro de visita anterior  $g_{(i=C1,w=1)}$  y  $g_{(i=C1,w=3)}$ , con esto estamos obligando a la visita en las ventanas 1 y 3. El resultado es factible según lo esperado.

**Caso 7.1.1** Al tambo C1 con una frecuencia  $f = 2$  se le asigna el parámetro de visita tal que la suma es igual a 3 (tres visitas en el horizonte de tiempo anterior), obteniendo solución infactible como era esperado.

**Caso 7.2** Símil al caso 7.1.1 al tambo C1 se le asigna una frecuencia  $f$  menor a la suma de visitas en el horizonte de tiempo anterior, obteniendo solución infactible como era esperado.

**Caso 7.3** Se probó ingresar un valor del parámetro  $g_{iw} = 2$  lo cual es incompatible con la definición del parámetro, obteniendo solución infactible como era esperado.

**Caso 7.4.1** Se establece un caso con una capacidad de camión menor que los litros entregados en uno de sus tambos, obteniendo solución infactible como era esperado.

**Caso 7.4.2** Se establece un caso con una capacidad de camión mayor a la capacidad de entrada permitida para un tambo, obteniendo solución infactible como era esperado.

**Caso 7.5** Se visitan dos tambos: C1 y C2, con dos vehículos: V1 y V2 y como máximo un recorrido para cada uno. La capacidad del vehículo V1 excede el límite de entrada para el tambo C1 y el vehículo V2 no tiene suficiente capacidad para recoger la producción de los dos tambos. El resultado es el esperado: ambos vehículos se utilizan y cada uno visita el tambo correspondiente.

**Caso 7.6** Símil al caso anterior con respecto a los tambos y los vehículos, pero con dos recorridos cada uno. El resultado es el esperado, el vehículo de menor capacidad visita los dos tambos y el de mayor tamaño no se utiliza (porque minimiza costos).

**Caso 7.7** Se crea un caso con dos tambos C1 y C2, el tambo C1 con  $f = 1$  y el tambo C2 con  $f = 0$ , el resultado es el esperado, se visita el tambo C1 y no se visita el tambo C2.

**Caso 7.8** Se crea un caso en el cual un tambo tiene  $f = 5$ , lo cual por definición de frecuencia no es posible, dado que los parámetros tienen 4 ventanas, obteniendo solución infactible como era esperado.

**Caso 7.9** No se asignan litros para recoger, a pesar de no asignarse litros los tambos deben ser visitados con la frecuencia estipulada. La solución es la esperada ya se que visita a los tambos, sin recoger leche. Cabe acotar que las demandas se ponen en 0 para que no sea un caso infactible.

**Caso 7.9.1** Hasta el momento en la matriz de distancia y tiempos se utilizaron valores grandes en la diagonal para asegurar que no surjan subtours, la diagonal se completa con ceros. Obteniendo una solución igual al caso con valores grandes, por lo que es indistinto el valor de la diagonal.

**Caso 7.9.2** Se utilizan dos plantas y un vehículo, el resultado no es el esperado ya que la solución plantea que el vehículo visite las dos plantas y a sus tambos en ocasiones en paralelo, no respetando los tiempos de un recorrido y el siguiente. Este problema se corrige en las pruebas 5.1.8.

**Caso 7.9.3** Se utilizan dos plantas y dos vehículos obteniendo resultados esperados, los cuales respetan los tiempos de cada recorrido y las visitas a los tambos.

### 5.1.8. Prueba 8: 2 plantas y 1 vehículo

Para esta sección, vale la pena aclarar que el modelo parte de la siguiente premisa: si un camión tiene un recorrido asociado a la planta 1, este camión puede ser usado únicamente en recorridos que tengan a la planta 1 como origen o destino.

El objetivo de esta prueba fue verificar el correcto funcionamiento de lo anteriormente mencionado. Para eso se planteó el caso de contar con 2 plantas y un solo vehículo. La salida esperada para este caso es que diera infactible. Al correr el modelo se observó que el vehículo que había terminado la ruta anterior en la planta 1, luego comenzaba el siguiente recorrido desde la planta 2 sin recorrer el arco entre ambas plantas.

Esto tuvo como resultado agregar el conjunto de restricciones que se ve a continuación:

$$\sum_{w \in W} z_{mw}^{k(r-1)} \geq \sum_{w \in W} z_{mw}^{kr} \quad \forall m \in M, k \in K, r \in \{2, \dots, R\} \quad (25)$$

$$z_{m3}^{k1} = 0 \quad \forall m \in M, k \in K \quad (26)$$

$$z_{m4}^{k1} = 0 \quad \forall m \in M, k \in K \quad (27)$$

Este conjunto de restricciones limita el uso de cada vehículo a una única planta. Agregadas las restricciones se volvió a correr el modelo y se observó que la salida fue la esperada.

## 5.2. Casos de validación con datos reales

Habiendo realizado las pruebas de validación sobre las restricciones más relevantes, se pasó a utilizar datos realistas a partir de la información suministrada por Conaprole, cambiando distancias, tiempos, costos, etc.

### 5.2.1. 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo.

#### Descripción

Capacidad de vehículos:  $C_{K1} = 15000$  Litros,  $C_{K2} = 18000$ . Litros  $< l_1 + l_2$ . Litros por tambo:  $l_1 = l_2 = 10000$ . Atención por tambo: 2000 segundos. Los instantes de ventanas tempranas y tardías por cliente se detallan en la Tabla 5 y la demanda en la Tabla 6:

Instante de llegada Tambo	Ventana 1		Ventana 2		Ventana 3		Ventana 4	
	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)
M0	0	86400	86401	172800	0	0	0	0
C1	0	27000	73800	113400	18000	64800	104400	151200
C2	14400	57600	100800	144000	54000	97200	140400	172800

Tabla 5: Ventanas de visita por tambo para caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo

Demanda (litros)		
Planta	Día 1	Día 2
M0	100	100

Tabla 6: Demanda por día para el caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo

#### Resultado esperado

En ningún vehículo entran los litros de los dos tambos en el mismo viaje, por lo que deberán realizarse 8 viajes. Como el máximo de vueltas es de 4, será necesario utilizar los dos camiones.

Como el camión K1 es de 15000 litros, es más barato el metro, la matrícula, y la espera que el K2, por lo que hará más recorrido y más visitas. Para evitar esperas entre clientes, el camión K1 hará las 5 primeras visitas o las 5 últimas, y de igual forma será con K2: las 3 primeras o las tres últimas. Como las primeras tres visitas en el mejor de los casos, sería desde el instante 0 al 27000, y las últimas tres serían del 113400 al 144000, tiene que esperar menos el vehículo más costoso (K2) teniendo las primeras 3 visitas.

#### Resultado

En la Figura 3 se puede ver un esquema del recorrido y la salida se puede observar que coincide con lo esperado según describe la Tabla 7.



Vehículo	Recorrido	Tambo	Llegada (s)	Espera(s)	Primera espera (s)	Comienzo de atención (s)
K1	0	M0	0	0	96049	-
K1	1	C2	97200	0	0	97200
K1	1	M0	100351	1038	0	101389
K1	2	C1	104400	0	0	104400
K1	2	M0	107461	2928	0	110389
K1	3	C1	113400	0	0	113400
K1	3	M0	116461	0	0	116461
K1	4	C2	119562	0	0	119562
K1	4	M0	122713	18186	0	140899
K1	5	C2	144000	0	0	144000
K1	5	M0	147151	0	0	147151
K2	0	M0	0	0	13315	-
K2	1	C1	14376	0	0	14376
K2	1	M0	17437	0	0	17437
K2	2	C2	20688	0	0	20688
K2	2	M0	23839	0	0	23839
K2	3	c1	27000	0	0	27000
K2	3	M0	30061	0	0	30061

Tabla 7: Salida tabulada para caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo

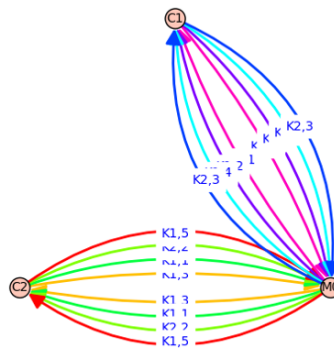


Figura 3: Esquema de recorridos de caso 2 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 5 recorridos por vehículo

## 5.2.2. 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo.

### Descripción

Capacidad de vehículos:  $C_{K1} = 15000$ litros,  $C_{K2} = 21000$ litros. *Litros*  $> l_1 + l_2$   
 Litros por tambo:  $l_1 = l_2 = 10000$ . Atención por tambo: 2000 segundos. En la Tabla 8 se pueden ver los datos de distancias en metros por tambo y en la Tabla 9 los segundos que lleva trasladarse de un tambo a otro. La Tabla 10 muestra las ventanas permitidas de visita para cada tambo. Luego, la Tabla 11 muestra la frecuencia de cada tambo y cantidad de litros a recoger en cada uno de ellos, además de indicar en que ventana se visitó por última vez a cada tambo y la Tabla 12 muestra la demanda diaria de cada planta.

	Distancia(m)						
	M0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
M0	123123	18400	19300	20500	20800	21800	22500
C1	18400	123123	1100	6200	6500	3600	5900
C2	19300	1100	123123	7100	7400	3300	6200
C3	20500	6200	7100	123123	4900	9600	7900
C4	20800	6500	7400	4900	123123	9900	8100
C5	21800	3600	3300	9600	9900	123123	7300
C6	22500	5900	6200	7900	8100	7300	123123

Tabla 8: Distancias entre nodos para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo

	Tiempo(s)						
	M0	C1	C2	C3	C4	C5	C6
M0	123123	1061	1151	1406	1358	1388	1298
C1	1061	123123	138	701	653	375	429
C2	1151	138	123123	791	743	357	429
C3	1406	701	791	123123	504	1028	744
C4	1358	653	743	504	123123	980	737
C5	1388	375	357	1028	980	123123	818
C6	1298	429	706	744	737	818	123123

Tabla 9: Tiempo de traslado entre nodos para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo

Instante de llegada Tambo	Ventana 1		Ventana 2		Ventana 3		Ventana 4	
	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)
M0	0	86400	86401	172800	0	0	0	0
C1	0	27000	18000	64800	73800	104400	113400	151200
C2	14400	57600	54000	97200	100800	140400	144000	172800
C3	0	21600	32400	57600	68400	108000	118800	144000
C4	0	19800	30600	63000	73800	106200	117000	149400
C5	0	27000	34200	64800	72000	113400	120600	151200
C6	23400	54000	66600	97200	109800	140400	153000	172800

Tabla 10: Ventanas para el caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo

Tambo	Frecuencia	Visita en ventana	Litros por visita
C1	1	1	10000
C2	2	1	10000
C3	2	2	10000
C4	1	3	10000
C5	1	4	10000
C6	1	3	10000

Tabla 11: Frecuencia, última visita y litros por visita para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo

Demanda diaria (litros)		
Planta	Día 1	Día 2
M0	100	100

Tabla 12: Demanda diaria por planta para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo

### Resultado Esperado

Dado que en este caso existe un camión con capacidad lo suficientemente grande para cumplir con todas las demandas, con 4 vueltas, sin activar otro camión, pasa a importar la distancia y tiempo de traslado entre los tambos más que en el caso anterior. K2: C1-C2, C3-C4, C6-C3, C2-C5. La tabla 13 muestra los datos obtenidos.

### Resultado

Vehículo	Recorrido	Tambo	Llegada (s)	Espera(s)	Primera espera (s)	Comienzo de atención (s)
K2	0	M0	0	0	16939	-
K2	1	C1	18000	0	0	18000
K2	1	C2	20138	0	0	20138
K2	1	M0	23289	30655	0	53944
K2	2	C3	57600	0	0	57600
K2	2	C4	60104	13696	0	73800
K2	2	M0	77158	9242	0	86400
K2	3	C6	89948	19852	0	109800
K2	3	C3	112544	6256	0	118800
K2	3	M0	122206	0	0	122206
K2	4	C2	125607	0	0	125607
K2	4	C5	127964	0	0	127964
K2	4	M0	131352	0	0	131352

Tabla 13: Salida tabulada para caso 6 tambos, 2 vehículos, 1 planta y 4 recorridos por vehículo

### 5.2.3. 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos

#### Descripción

Capacidad de vehículos:  $C_{K1} = 15000$ litros,  $C_{K2} = 21000$ litros. *Litros*  $> l_1 + l_2$ . Litros por tambo:  $l_1 = l_2 = 10000$ . Atención por tambo: 2000 segundos.

En la Tabla 14 se pueden ver los datos de distancias en metros por tambo y en la Tabla 15 los segundos que lleva trasladarse de un tambo a otro. La Tabla 16 muestra las ventanas permitidas de visita para cada tambo. Luego, la Tabla 17 muestra la frecuencia de cada tambo y cantidad de litros a recoger en cada uno de ellos, además de indicar en que ventana se visitó por última vez a cada tambo y la Tabla 18 muestra la demanda diaria de cada planta.

	Distancia(m)				
	M0	M1	C1	C2	C3
M0	123123	123123	51100	52000	50000
M1	123123	123123	18400	19300	20500
C1	51100	18400	123123	1100	6200
C2	52000	19300	1100	123123	7100
C3	50000	20500	6200	7100	123123

Tabla 14: Distancias entre nodos para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos

	Tiempo(s)				
	M0	M1	C1	C2	C3
M0	123123	123123	3940	4030	3576
M1	123123	123123	1061	1151	1406
C1	3940	1061	123123	138	701
C2	4030	1151	138	123123	791
C3	3576	1406	701	791	123123

Tabla 15: Tiempo de traslado entre nodos para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos

Instante de llegada Tambo	Ventana 1		Ventana 2		Ventana 3		Ventana 4	
	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)
M0	0	86400	86401	172800	86400	0	0	0
M1	0	86400	86401	172800	86400	0	0	0
C1	0	18000	27000	64800	73800	104400	113400	151200
C2	14400	54000	57600	97200	100800	140400	144000	172800
C3	0	21600	32400	57600	68400	108000	118800	144000

Tabla 16: Ventanas para los tambos caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos

Tambo	Frecuencia	Visita en ventana	Litros por visita
C1	1	1	10000
C2	2	1	10000
C3	2	2	10000

Tabla 17: Frecuencia y producción leche para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos

Demanda (litros)		
Planta	Día 1	Día 2
M0	100	100
M1	0	100

Tabla 18: Demanda diaria para caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos

### Resultado Esperado

Como el tambo C3 debe ser visitado en su cuarta ventana y está muy alejada del resto en tiempo, este tambo abastecerá el segundo día a la planta M1, para reducir esperas. Por tanto, el otro vehículo hará los tambos C1-C2 y C3-C2. M0: K2: Espera, C1-C2, C3-C2. M1: K1: Espera, C3. En la Tabla 19 se pueden observar los datos obtenidos.

## Resultado

Vehículo	Recorrido	Tambo	Llegada (s)	Espera(s)	Primera espera (s)	Comienzo de atención (s)
K1	0	M1	0	0	117394	-
K1	1	C3	118800	0	0	118800
K1	1	M1	122206	0	0	122206
K2	0	M0	0	0	14060	-
K2	1	C1	18000	0	0	18000
K2	1	C2	20138	0	0	20138
K2	1	M0	26168	25606	0	51774
K2	2	C3	57600	0	0	57600
K2	2	C2	60391	40409	0	100800
K2	2	M0	106830	0	0	106830

Tabla 19: Salida del caso 3 tambos, 2 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículos





## 6. Validación con datos reales

Luego de realizar pruebas específicas para testear las funcionalidades del modelo descrita en la Sección 5, se realizaron pruebas con una muestra aleatoria de datos reales. En la Sección 6.1 se describe el proceso de obtención de datos para las pruebas que se describen en la Sección 6.2.

### 6.1. Relevamiento de Datos

Al ser una realidad tan extensa, Conaprole facilitó información de una muestra de 80 tambos. Los datos proporcionados fueron los siguientes:

- Matriz de tiempo entre tambos y plantas.
- Matriz de distancia entre tambos y plantas.
- Recolección de leche de los tambos.
- Frecuencias de visita de cada tambo.
- Ventanas de visita permitidas para cada tambo.
- Limitaciones de tamaño de camiones a cada tambo.
- Cantidad y capacidad de vehículos a utilizar.

Los parámetros de costos también fueron proporcionados por Conaprole<sup>4</sup>. Por la forma de pago, los datos de costo por kilómetro ( $\alpha$ ) y costo de entrada a tambo ( $\beta$ ) ya los tenían disponibles. Por otra parte, los costos de espera ( $\delta$ ) y activación de camión ( $\gamma$ ), tuvieron que ser estimados ya que hoy en día son datos que no utilizan y por tanto no tienen calculados en detalle.

### 6.2. Ejecución con datos reales

Se continuará a describir las ejecuciones de los casos realizados a partir del relevamiento de datos hecho en la Sección 6.1. Estas pruebas se realizaron para distintos conjuntos de tambos, pero se obtuvo resultados óptimos solamente para casos de menos de 13 tambos. Como los tiempos de ejecución eran muy extensos y varias pruebas no llegaban a un resultado por limitaciones de memoria, se optó por trabajar con conjuntos de 10 tambos. El objetivo de estas pruebas es ver el desempeño del modelo con datos representativos de la realidad. De todas maneras, al ser conjuntos tan pequeños, las conclusiones acerca de un caso real son limitadas ya que, para Conaprole, hay muchos más tambos por atender. De todas formas, al trabajar con datos realistas estas pruebas agregan gran valor, logrando reflejar

---

<sup>4</sup>Para proteger información sensible de la empresa se utilizaron valores similares a los datos reales.

cómo se comportaría el modelo si se pudiera resolver mediante un solver que lograra una buena solución en un tiempo computacional razonable para el problema completo.

En las posteriores subsecciones se describen las pruebas realizadas.

### 6.2.1. 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

Para esta prueba no se puso ningún límite de tiempo a la corrida, por lo que el solver dio como resultado el óptimo. Desde la Tabla 20 a la Tabla 23 se presentan los datos del caso.

Tambo	Frecuencia	Litros	Tamaño máximo camión permitido (litros)	Última visita en periodo anterior
C1	1	1000	21000	1
C2	2	2000	21000	1
C3	2	4000	21000	2
C4	1	10000	21000	3
C5	1	2000	18000	4

Tabla 20: Datos de tambos para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

Vehículo	Capacidad	$\alpha$ (\$/metro)	$\beta$ (\$/tambo)	$\delta$ (\$/s)	$\gamma$ (\$/vehículo)
K1	15000	0.02533	43.49	0.0063325	40000
K2	21000	0.02791	47.86	0.0069755	50000
K3	18000	0.02791	47.86	0.0069775	45000
K4	21000	0.02791	47.86	0.0069755	50000
K5	15000	0.02533	43.49	0.0063325	40000

Tabla 21: Costos por vehículo para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

Instante de llegada Tambo	Ventana 1		Ventana 2		Ventana 3		Ventana 4	
	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)
M0	0	86400	86401	172800	86400	0	0	0
M1	0	86400	86401	172800	86400	0	0	0
C1	0	18000	27000	64800	73800	104400	113400	151200
C2	25200	57600	68400	100800	111600	144000	154800	172800
C3	18000	54000	57600	93600	104400	140400	144000	172800
C4	14400	54000	57600	97200	100800	140400	144000	172800
C5	18000	46800	57600	90000	104400	133200	144000	172800

Tabla 22: Ventanas de visita para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

Demanda diaria (litros)		
Planta	Día 1	Día 2
M0	0	2000
M1	1000	2000

Tabla 23: Demanda diaria para caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

## Resultado

Vehículo	Recorrido	Tambo	Llegada (s)	Espera(s)	Primera espera (s)	Comienzo de atención (s)
K1	0	M0	0	0	97560	97560
K1	1	C4	100800	0	0	100800
K1	1	M0	106040	0	0	106040
K5	0	M1	0	0	16939	16939
K5	1	C1	18000	0	0	34126
K5	1	C2	18338	15788	0	34126
K5	1	C3	35317	48877	0	84194
K5	1	M1	86400	0	0	86400
K5	2	C2	89501	22099	0	111600
K5	2	C5	112357	31643	0	144000
K5	2	C3	145428	0	0	145428
K5	2	M1	147634	0	0	147634

Tabla 24: Salida de caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

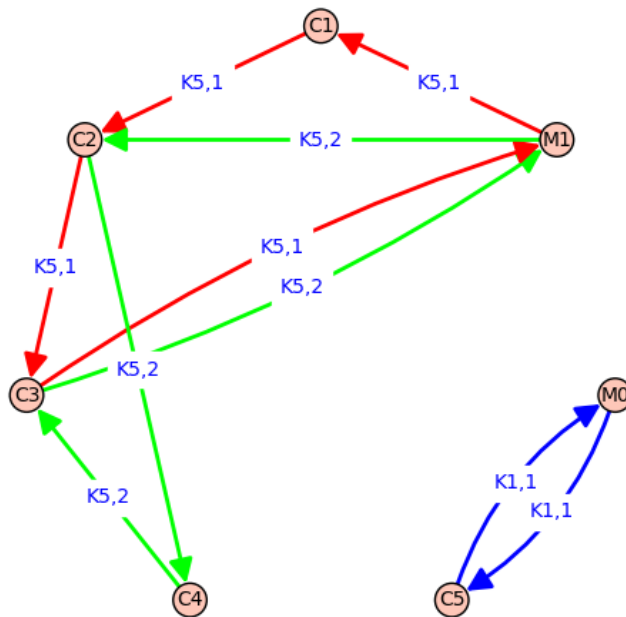


Figura 4: Esquema de recorridos de caso 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

### 6.2.2. Análisis de salida

Es importante observar que se cumplan todas las restricciones establecidas. Por un lado, los tambos C2 y C3 deben de ser visitados 2 veces (frecuencia 2) y el resto deben ser visitados 1 vez. Esto parece cumplirse. En la Tabla 24 se pueden observar los datos obtenidos y en la Figura 4 se puede ver un esquema del recorrido.

Por otro lado, al ver el instante de llegada a cada tambo en la Tabla 25 se observa que se respetaron todas las frecuencias y ventanas de visita.

Instante de n-ésima llegada (s)					
Tambo	Frecuencia	Llegada 1	Llegada 2	Llegada 3	Llegada 4
C1	1	18000	-	-	-
C2	2	34126	111600	-	-
C3	2	84194	145428	-	-
C4	1	100800	-	-	-
C5	1	144000	-	-	-

Tabla 25: Instante de cada llegada a tambo del caso 5 tambos, 5 vehículos, 2 plantas y 4 recorrido por vehículo

El C1, es visitado en la primera ventana que comprende el rango de 0 a 18000s. El C2 es visitado en la primera ventana (25200 a 57600s) y en la tercera (111600

a 144000s). El  $C3$  es visitado en la ventana 2 y 4. La ventana 2 comprende los rangos 57600 a 93600s y la ventana 4, 144000 a 172800s. El  $C4$  es visitado en la ventana que va desde el segundo 100800 al 140400. Por último, el  $C5$  es visitado en la última ventana que va desde el 144000 al 172800s. Todas las recolecciones de leche se dan dentro de los tiempos esperados.

Se puede observar que la vuelta 1 del vehículo  $K1$  llega a la planta  $M0$  en el segundo 106400. El vehículo 5 realiza 2 vueltas, la primera de ellas llega a la planta  $M1$  en el segundo 86400 y la segunda vuelta llega a la misma planta en el segundo 147634. Con esto se puede ver si se logra cumplir con la demanda diaria por planta.

- $M0$  - tiene solo demanda en el día 2. Se entregan a la planta los 2000 litros recogidos de  $C5$ , que coincide con los litros demandados.
- $M1$  - tiene demanda los 2 días. El primer día recibe los 1000 litros de  $C1$ , 2000 litros de  $C2$  y 4000 litros de  $C3$ , que en total supera los 1000 litros demandados. El segundo día se le entregan los 2000 litros de  $C2$ , 4000 litros de  $C3$  y 10000 litros de  $C4$ , superando los 2000 litros demandados.

La demanda se cumple en ambas plantas en los dos días. También se respetan el máximo tamaño de camión que puede ser visitado por cada tambo.

El modelo parece funcionar bien para este caso. Cabe la pena mencionar que el valor de la función objetivo fue \$500548.

### 6.2.3. 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

En esta sección se describe los resultados obtenidos para un caso con 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo. Este caso fue ejecutado dos veces: la primera vez fue con tiempo de resolución limitado, finalizando la ejecución antes de alcanzar el óptimo (subóptimo); y una ejecución sin limitar los tiempos, obteniéndose una solución óptima.

### 6.2.4. Primera ejecución

Para este caso, se limitó el tiempo de cálculo a 10 minutos. Los datos del caso se pueden observar de la Tabla 26 a la Tabla 29.

Tambo	Frecuencia ( $f_i$ )	Frecuencia auxiliar ( $h_i$ )	Litros por visita	Tamaño máximo de camión admitido (litros)	Última visita en periodo anterior
C1	1	0	1000	21000	1
C2	2	1	2000	21000	1
C3	2	1	4000	21000	2
C4	1	0	10000	21000	3
C5	1	0	2000	18000	4
C6	2	1	10000	21000	3
C7	2	1	2500	18000	1
C8	1	0	2000	18000	2
C9	1	0	2000	27000	3
C10	1	0	2000	27000	4

Tabla 26: Datos de tambos para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

Vehículo	Capacidad	$\alpha$ (\$/metro)	$\beta$ (\$/tambo)	$\delta$ (\$/s)	$\gamma$ (\$/vehículo)
K1	15000	0.02533	43.49	0.0063325	40000
K2	21000	0.02791	47.86	0.0069755	50000
K3	18000	0.02791	47.86	0.0069775	45000
K4	21000	0.02791	47.86	0.0069755	50000

Tabla 27: Costo por vehículo para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

Tambo \ Instante de llegada	Ventana 1		Ventana 2		Ventana 3		Ventana 4	
	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)	a (s)	b (s)
M0	0	86400	86401	172800	86400	0	0	0
M1	0	86400	86401	172800	86400	0	0	0
C1	0	18000	27000	64800	73800	104400	113400	151200
C2	25200	57600	68400	100800	111600	144000	154800	172800
C3	18000	54000	57600	93600	104400	140400	144000	172800
C4	14400	54000	57600	97200	100800	140400	144000	172800
C5	18000	46800	57600	90000	104400	133200	144000	172800
C6	0	19800	30600	63000	73800	106200	117000	149400
C7	0	27000	34200	64800	72000	113400	120600	151200
C8	0	28800	39600	72000	82800	115200	126000	158400
C9	23400	54000	66600	97200	109800	140400	153000	172800
C10	27000	54000	57600	104400	113400	140400	144000	172800

Tabla 28: Ventanas de visita para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

Demanda diaria		
Tambo	Día 1	Día 2
M0	0	2000
M1	1000	2000

Tabla 29: Demanda diaria para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

### Resultado

En la Tabla 30 se pueden ver los datos obtenidos de esta primera ejecución.

Vehículo	Recorrido	Tambo	Llegada (s)	Espera(s)	Primera espera (s)	Comienzo de atención (s)
K2	0	M0	0	0	136107	-
K2	1	C9	140400	0	0	140400
K2	1	C2	141764	0	0	141764
K2	1	C10	142674	1326	0	144400
K2	1	C3	145581	0	0	145581
K2	1	M0	149957	0	0	149957
K3	0	M1	0	0	16939	-
K3	1	C1	18000	0	0	18000
K3	1	C7	18853	47	0	18900
K3	1	C6	19800	0	0	19800
K3	1	C3	22544	43773	0	66317
K3	1	M1	68523	0	0	68523
K3	2	C8	72000	0	0	72000
K3	2	C6	72584	18126	0	90710
K3	2	C7	93110	0	0	93110
K3	2	C5	94723	49277	0	144000
K3	2	M1	145788	0	0	145788
K4	0	M1	0	0	56449	-
K4	1	C2	57600	0	0	57600
K4	1	C4	58743	42057	0	100800
K4	1	M1	104158	0	0	104158

Tabla 30: Primera salida (subóptima) para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

#### 6.2.5. Análisis del resultado

Al igual que en el caso anterior se verificará que se cumpla con todas las restricciones. El valor de frecuencia por tambo y el cumplimiento de los horarios de las ventanas por parte de las visitas:

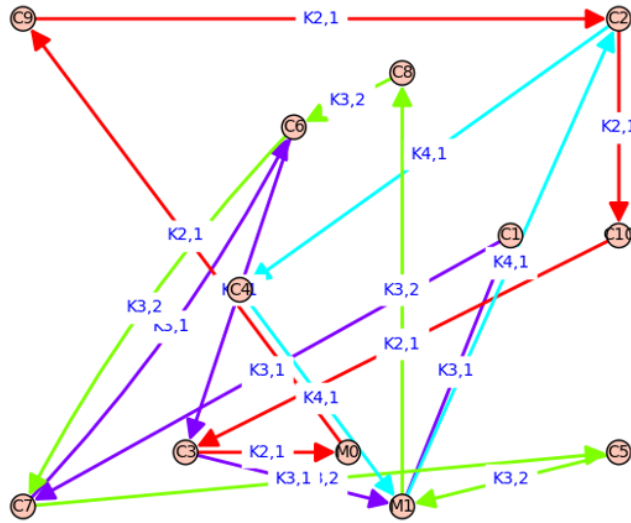


Figura 5: Esquema de recorridos de caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo (subóptima)

Observando la Figura 5 se puede ver como se respetan todas las frecuencias. También se observan los horarios de visita lo que se logró observar fue lo siguiente:

Instante de n-ésima llegada (s)					
Tambo	Frecuencia	Llegada 1	Llegada 2	Llegada 3	Llegada 4
C1	1	18000	-	-	-
C2	2	57600	141764	-	-
C3	2	66317	145581	-	-
C4	1	100800	-	-	-
C5	1	144000	-	-	-
C6	1	90710	198000	-	-
C7	2	19800	90710	-	-
C8	1	72000	-	-	-
C9	1	140400	-	-	-
C10	1	140400	-	-	-

Tabla 31: Instante de cada llegada a tambo del caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorrido por vehículo (solución subóptima)

El C1 es visitado en la primera ventana que va desde el segundo 0 al 18000. El C2 es visitado en su primera y tercera ventana. La primera de ellas va desde el segundo 25200 al 57600 y el rango de la tercera va desde los 11600 segundos hasta los 144000. C3 es visitado en una primera instancia en la segunda ventana



que comprende los valores 57600 al 93600. Es visitado nuevamente en la cuarta ventana que va desde el segundo 144000 hasta el 172800. El *C4* es visitado en su tercera ventana que tiene como horaria temprana de llegada al segundo 10800 y llegada tardía el 140400. *C5* es visitado una única vez en su cuarta ventana (144000 a 172800s). *C6* es visitado en su primera ventana que va desde el segundo 0 al 19800s. Es visitado nuevamente en su tercera ventana que comprende todos los valores del 73800 al 106200. El *C7* es visitado dos veces, la primera de ellas en la ventana 1 (0 a 27000s). La segunda visita ocurre en la tercera ventana que va desde los 72000s hasta los 113400s. *C8* es visitado en su segunda ventana (39600 a 72000s). El *C9* y *C10* son visitados ambos en su tercera ventana. La ventana de visita de *C9* va desde el segundo 109800 hasta el 140400. La ventana de *C10* va desde el segundo 113400 hasta el 140400.

Por último, queda verificar que se cumplan las demandas diarias de cada planta. Se logran observar 4 llegadas a planta. El vehículo 2 en su vuelta 1, pasa por los tambos *C9*, *C2*, *C10*, *C3* llegando en el segundo 149957 a la planta *M0*. El vehículo 3 en su primera vuelta pasa por los tambos 1, 7, 6 y 3 llegando a la planta *M1* en el segundo 68523. En su segunda vuelta pasa por *C8*, *C6*, *C7* y *C5* llegando a *M1* en el instante 145788s. Por último, el vehículo 4 en su primera vuelta pasa por *C2* y *C4* llegando a la planta *M1* en el segundo 104158. Entonces los litros entregados por planta quedarían:

- *M0* no tiene entrega en el primer día. En el segundo día se entregan los litros recogidos por *C9*, *C2*, *C10* y *C3*.
- *M1* el primer día recibe los litros que se logran recolectar de los tambos *C1*, *C7*, *C6* y *C3*. En el segundo día le llegan los litros que vienen de los tambos *C8*, *C6*, *C7*, *C5*, *C2* y *C4*

Se puede observar fácilmente como se cumple con la demanda de ambos días. El valor objetivo de esta corrida limitada a 10 minutos fue de \$793443.

#### 6.2.6. Segunda ejecución

Para este caso se dejó que el solver diera la solución óptima. El tiempo de ejecución fue de 2202s.

#### **Resultado**

En la Tabla 32 se observan los datos obtenidos en la segunda ejecución.

#### 6.2.7. Análisis del resultado

En la Figura 6 se puede ver como se respetan las visitas dadas por la frecuencia y también se observa el cumplimiento de las ventanas con las visitas.

Vehículo	Recorrido	Tambo	Llegada (s)	Espera(s)	Primera espera (s)	Comienzo de atención (s)
K1	0	M1	0	0	9269	-
K1	1	C7	10791	0	0	10791
K1	1	C6	11691	0	0	11691
K1	1	M1	14989	0	0	14989
K1	2	C1	18338	39262	0	57600
K1	2	C2	18338	39262	0	57600
K1	2	C8	58570	0	0	58570
K1	2	C6	59154	23949	0	83103
K1	2	M1	86401	0	0	86401
K1	3	C3	89757	0	0	89757
K1	3	C7	91524	0	0	91524
K1	3	C9	92682	17554	0	110236
K1	3	C2	111600	0	0	111600
K1	3	C10	112510	31490	0	144000
K1	3	C5	144769	0	0	144769
K1	3	M1	146557	0	0	144769
K3	0	M0	0	0	137160	-
K3	1	C4	140400	0	0	140400
K3	1	C3	142904	1096	0	144000
K3	1	M0	148376	0	0	148376
K4	1	M1	104158	0	0	104158

Tabla 32: Salida de segunda ejecución para caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo

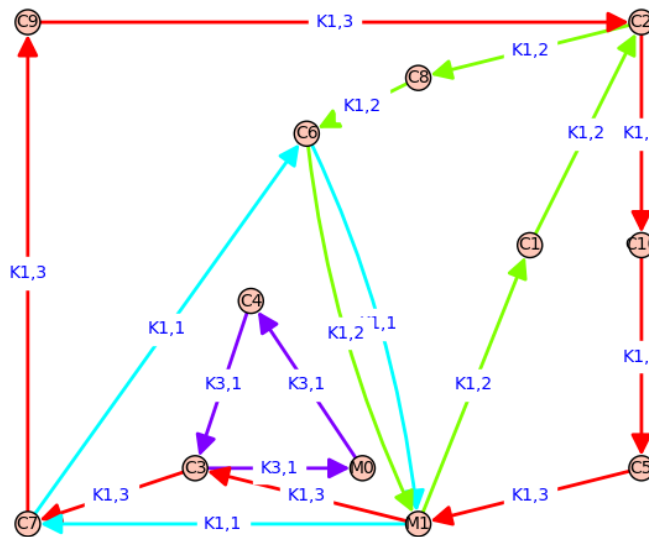


Figura 6: Esquema de recorridos de caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorridos por vehículo óptima

Instante de n-ésima llegada (s)					
Tambo	Frecuencia	Llegada 1	Llegada 2	Llegada 3	Llegada 4
C1	1	18000	-	-	-
C2	2	57600	111600	-	-
C3	2	89757	144000	-	-
C4	1	140400	-	-	-
C5	1	144769	-	-	-
C6	1	11691	83103	-	-
C7	2	10791	91524	-	-
C8	1	58570	-	-	-
C9	1	110236	-	-	-
C10	1	144000	-	-	-

Tabla 33: Instante de cada llegada a tambo del caso 10 tambos, 4 vehículos, 2 plantas y 4 recorrido por vehículo (solución óptima)

El  $C1$  es visitado en su primera ventana (0 a 18000s).  $C2$  es atendido en su primera y tercera ventana (25200-57600s y 111600-144000s respectivamente). El  $C3$  es visitado en su segunda ventana (57600-93600s) y en su cuarta ventana (144000-172800s).  $C4$  es visitado en su tercera ventana que va desde el segundo 100800 hasta el 140400.  $C5$  es visitado en su cuarta ventana (144000-172800s).  $C6$  es visitado en las ventanas 1 y 3. La primera va desde el segundo 0 al 19800 y la tercera del 73800 hasta el 106200. El  $C7$  es visitado su primera y tercera ventana (0-27000s y 72000-113400s respectivamente).  $C8$  es visitado en su segunda ventana que va desde el segundo 39600 hasta el 72000.  $C9$  es visitado en su tercera ventana (109800-140400s). Por último,  $C10$  es visitado en su cuarta ventana que va desde el segundo 144000 hasta el 172800.

En cuanto a la demanda diaria se logra observar lo siguiente: hay 4 recorridos realizados. El vehículo 1, recorrido 1, pasa por los tambos 6 y 7 llegando a la planta 1 en el segundo 14989. En su segunda vuelta pasa por los tambos 1, 2, 8 y 6 llegando a la planta 1 en el segundo 86401. Su tercera y última vuelta, recolecta leche de los tambos 3, 7, 9, 2, 10 y 5 entregando en la planta 1 en el segundo 146557. El último recorrido lo realiza el camión 3 pasando por los tambos 4 y 3 y llegando a la planta M0 en el segundo 148376.

Es fácil ver como se cumplen las demandas diarias:

- $M0$  no necesita entrega el primer día. El segundo día recibe lo recolectado por la ruta 1 del camión 3.
- $M1$  recibe lo recolectado por el camión 1 en su primer recorrido. El segundo día recibe lo recolectado por las rutas 2 y 3.

Vale la pena mencionar que en este caso, el valor de la función objetivo fue de \$689.463. Se logra observar como la función objetivo mejora en unos \$80.000, pasando el tiempo de ejecución de 600s a 2202s.

## 7. Caso de estudio

En esta sección se presenta el análisis realizado sobre datos representativos del caso de estudio. Debido a la complejidad del problema, la cantidad de tambos que se pudieron incluir en cada caso de prueba para tiempos de ejecución razonables fueron solo 10 de los 85 proporcionados por la empresa, y una sola planta de las dos que incluía los datos brindados por la empresa. Esto limita el análisis, ya que se podría perder la interacción entre los distintos tambos y como afecta a la ocupación de los camiones, o como interactúan las configuraciones de ventanas de tiempo.

Para evitar que el análisis pierda generalidad y tener mejores evidencias al momento de realizar conclusiones, se buscó estudiar 10 conjuntos de 10 tambos cada uno.

Para cada conjunto se seleccionaron 10 tambos al azar de los proporcionados por la empresa. Cabe acotar que se realizaron modificaciones a los conjuntos para que solo el conjunto 2 tuviera un tambo con frecuencia de visita  $f = 4$  y que el conjunto 3 incluyera sólo tambos de frecuencia 1 quedando así el resto de los conjuntos con tambos de frecuencia  $f = 1$  y  $f = 2$ . Mediante esta selección se llegó a poder analizar 67 de los 85 tambos. En la Tabla 34 se mencionan las características generales de los distintos conjuntos.

Conjunto	f=1	f=2	f=4	Total de tambos	Total de visitas	Total de litros	Tamaño mínimo requerido de camión
1	5	5	0	10	15	19631	15000
2	5	4	1	10	17	28164	15000
3	10	0	0	10	10	15882	15000
4	5	5	0	10	15	22711	15000
5	5	5	0	10	15	26711	15000
6	3	7	0	10	17	31135	15000
7	6	4	0	10	14	26795	15000
8	3	7	0	10	17	26759	15000
9	4	6	0	10	16	27671	15000
10	4	6	0	10	16	33662	15000

Tabla 34: Características principales de los conjuntos estudiados: frecuencia, litros y capacidad mínima requerida por conjunto

Para completar la información necesaria se cuenta con los parámetros referentes a los vehículos basada en la información otorgada por la empresa<sup>5</sup> expresados en la Tabla 35 los cuales son utilizados en los 10 conjuntos.

<sup>5</sup>Para proteger información sensible de la empresa se utilizaron valores similares a los datos reales.

Vehículo	Capacidad	$\alpha$ (\$/metro)	$\beta$ (\$/tambo)	$\delta$ (\$/s)	$\gamma$ (\$/vehículo)
K1	15000	0,02533	43,49	0,006333	800
K2	18000	0,02791	47,86	0,006978	900
K3	21000	0,02791	47,86	0,006978	1000
K4	27000	0,02791	47,86	0,006978	1100

Tabla 35: Características de los vehículos en los conjuntos de estudio.

## 7.1. Distribución de costos

Para ver como interactúan los distintos parámetros se obtuvieron las soluciones de los 10 conjuntos. En las Figuras 7 y 8 se puede observar el peso de cada parámetro en la función objetivo tanto en valores absolutos como en porcentaje.

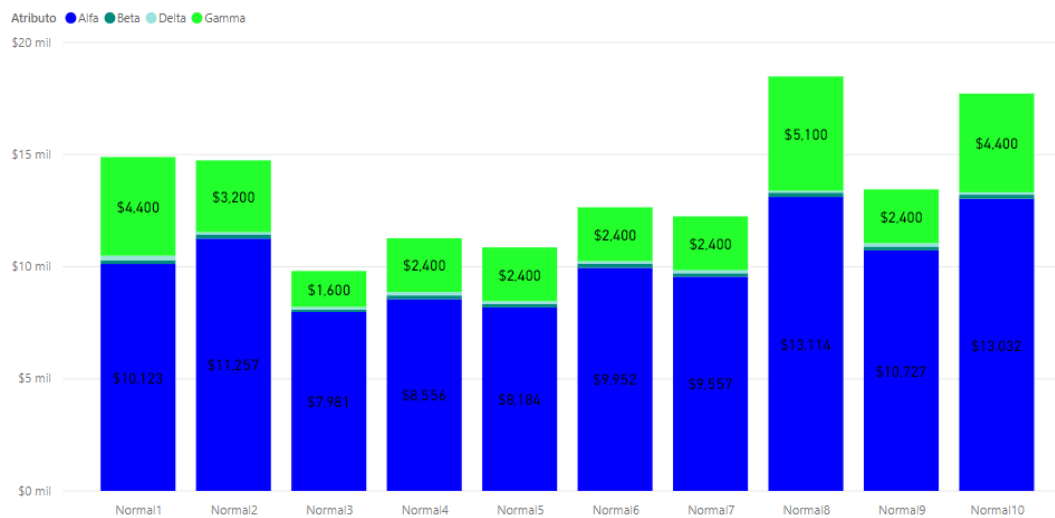


Figura 7: Distribución Costos (\$)

Es interesante notar el peso de cada uno de los parámetros en la función objetivo. El costo asociado a  $\alpha$  (costo por metro recorrido) varía entre 67% y 81%, siendo este el parámetro que afecta en mayor medida al valor de la función objetivo. Luego, en segundo lugar, aparece el costo asociado a  $\gamma$  (costo de activación de vehículo) variando entre 16% y 29%. En tercer y cuarto lugar y ya en menor medida,  $\beta$  (costo entrada a tambo) y  $\delta$  (costo de espera) teniendo un peso muy similar entre sí.

Esta información es de utilidad para poder entender en la Sección 8 como varía la función objetivo al variar cada uno de los parámetros.

Es conveniente analizar la salida esperada antes de realizar el análisis de sensibilidad para ver si el modelo se comporta según lo esperado. De los diez casos

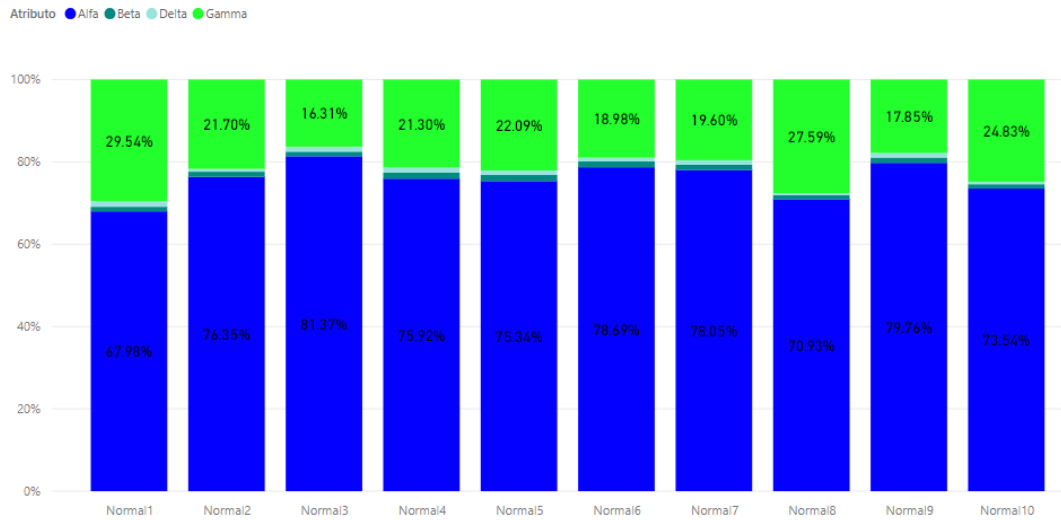


Figura 8: Distribución Costos (%)

corridos, el vehículo *K1* siempre debe salir ya que en todos los casos hay algún tambo que requiere el menor tamaño de camión de los existentes (15.000 litros). De los casos del 2 al 9, sólo sale el vehículo *K1*, y en los casos 1 y 10 sale también el vehículo *K2*. Ante esta situación, vale la pena estudiar cómo se espera que se altere la solución del modelo según la variante de distintos parámetros. En términos generales, se resume en la Tabla 36.

Parámetro/ Variable	Costo de traslado ( $\alpha$ )	Costo de entrada a tambo ( $\beta$ )	Costo de espera ( $\delta$ )	Costo de activación de ruta ( $\gamma$ )	Capacidad	Litros
Kilómetros	↓↓ -	↑	↑↑ -	↑	↓	↑ -
Entradas	-	-	-	-	-	-
Espera	↑↑ -	-	↓↓	↑↑ -	↑↓	↑↓
Activación	-	↑	↑	↓↓	↓↓	↑↑

Tabla 36: Modificación de variables en función de parámetros

Lo que se pretende ilustrar con la Tabla 36 es: qué variable se verá afectada al modificar un parámetro, con respecto a la solución original (con ↑↑ y ↓↓); qué variable podría ser afectada en casos particulares (con ↑ o ↓); qué variable podría afectarse en uno u otro sentido dependiendo del caso particular (↑↓); y qué variable permanecería constante (-). El sentido de la flecha indica si la relación es directa (↑), es decir que a medida que el costo aumenta, el valor de la variable aumenta, o inversa (↓), si al aumentar el costo, el valor de la variable disminuye.

Por otro lado, en la Figura 9 se puede observar la ocupación para los distintos casos que servirá como insumo para el análisis de sensibilidad de la sección 8 donde se estudia el comportamiento ante la variación de parámetros de cada uno de los 10 conjuntos presentados.

Como se puede ver en la Figura 9, el conjunto 1 de tambos tiene una ocupación promedio menor al 30 % en las rutas, es decir los vehículos retornan a la planta con 70 % de su capacidad ociosa. Lo cual al momento de variar los parámetros debe de ser considerado porque la limitante no es su capacidad sino las ventanas de visita y la topología del caso. Por situaciones como estas es que se opto por estudiar 10 conjuntos de tambos y poder tener mejores conclusiones finales.

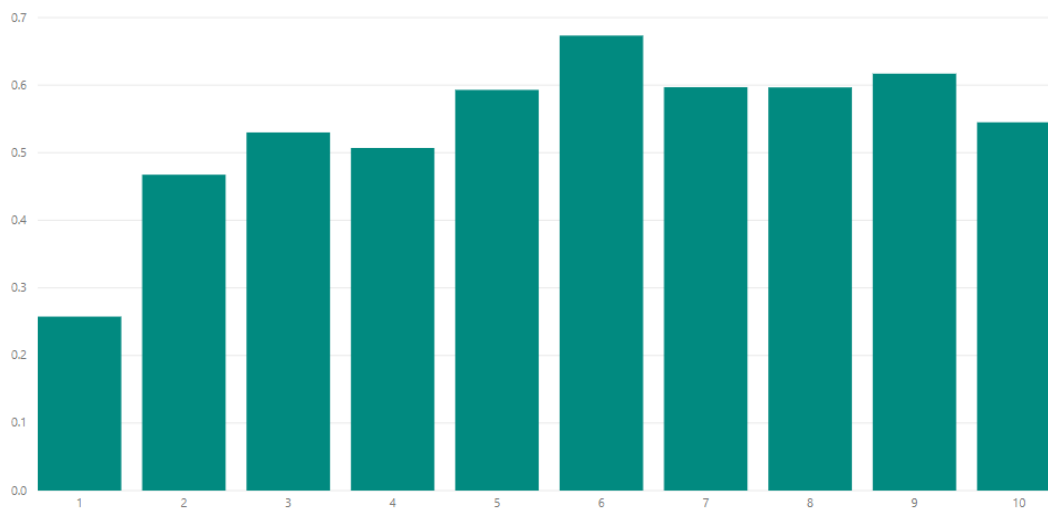


Figura 9: Ocupación del Caso Normal



## 8. Análisis de Sensibilidad

El objetivo del análisis de sensibilidad es estudiar la variación de las soluciones ante cambios en los valores de los parámetros, tratando de identificar aquellos cambios que generan mayor impacto, y poder responder a preguntas como: ¿Qué sucede si varían los costos de transporte, fletes, etc? ¿Cómo varía la solución si se tienen camiones de mayor capacidad? ¿Cuánto cambia si los tambos tienen mayor capacidad de almacenamiento y se visitan con menor frecuencia? Las respuestas a estas interrogantes aportan valor al trabajo realizado y al modelo propuesto.

Para poder realizar el análisis de sensibilidad, en primer lugar se identificaron los parámetros que tienen mayor impacto en la función objetivo. Por otro lado, se determinaron aquellos parámetros que son posibles variar en la realidad al hacer distinto tipo de inversiones, como lo es, la capacidad de los camiones. De esta manera, los parámetros a estudiar su impacto fueron los siguientes:

- Costos de Transporte
  - $\alpha$ : costo por metro recorrido
  - $\beta$ : costo de visita a tambo
  - $\gamma$ : costo por utilizar el vehículo
  - $\delta$ : costo por espera
- Capacidad de los camiones
- Producción de cada tambo
- Frecuencia de visita a cada tambo
- Ventanas permitidas de visita

Como se comentó inicialmente, se resolvió y halló el valor de cada solución de los diez conjuntos vistos en la Sección 7. Estas ejecuciones se llaman “Normal” y son las referencias con las cuales se compararán los resultados de las variaciones.

Para el análisis de la sensibilidad de los costos de transporte se ejecutan los casos variando un parámetro a la vez entre la mitad (0,5) y el doble (2) de su valor para analizar la solución obtenida.

Una variación en el parámetro  $\alpha$  (costo por metro recorrido) se puede asociar a una variación en el precio por parte de la empresa fletera, variación del costo del combustible, etc. Estos escenarios son posibles y de ahí la importancia de calcular el efecto en el costo de transporte por litro, metros recorridos y espera entre otros parámetros medidos.

Para aquellos casos que no se llega a una solución óptima por tiempo de ejecución limitado, el solver utilizado indica la brecha de dualidad<sup>6</sup> obtenida para

---

<sup>6</sup>En inglés: *duality gap*

dicha solución. La brecha de dualidad nos da una noción del valor óptimo de la función objetivo. Como estamos minimizando costos, el valor primal será el costo mínimo hallado para todas las soluciones encontradas durante la ejecución de ese caso. El valor dual, por otra parte, es el costo mínimo potencial que podría tomar la solución, de ser factible. De esta forma tenemos un rango de costos de la solución, donde la cota superior es la mejor solución encontrada por el solver y la cota inferior es un cálculo a partir de la mejor solución y el gap.

## 8.1. Análisis del costo por litro al variar parámetros

En esta sección se analizará como varía el costo por litro de leche recogida, al modificar los distintos parámetros del modelo.

En el caso de modificar los costos de transporte, como siempre se debe recoger la misma cantidad de litros, el denominador permanece constante en cada conjunto. En estos casos, una variación del parámetro podría afectar la solución, pero sin dudas afectará el valor de la función objetivo y por tanto el costo por litro.

La capacidad de los vehículos y las frecuencias influyen indirectamente en las cuatro variables, por lo que su modificación puede variar la solución significativamente. Los litros recogidos, por otra parte, variarán la solución y su valor, así como también al denominador, pudiendo modificar por completo la solución con respecto al caso “Normal”.

El costo por litro es el valor de la función objetivo sobre la cantidad total de litros. Para aquellos casos en los que no se llegó a una solución óptima (corte de la ejecución por tiempo) podremos calcular un rango de costos por litro (máximo y mínimo) a partir del valor de la solución y el gap de dualidad.

Ante el incremento del valor de un parámetro positivo, es de esperar que la variación en el valor de la función objetivo sea menor o igual al impacto de dicho incremento: por ejemplo, si el costo de traslado por metro se duplicara de \$2 a \$4, y en la solución se recorren  $200\text{km}$ , si se mantuviera la solución, el valor de la función objetivo deberá aumentar en, a lo sumo,  $(4 - 2) \frac{\$}{\text{km}} \cdot 200\text{km} = \$400$ . Sin embargo, puede que la solución se ajuste a un nuevo óptimo, donde recorra menos kilómetros, por ejemplo si en la nueva solución espera más, lo que se traduce en un incremento del valor de la función objetivo menor a \$400.

Por otro lado, si se tratara de una disminución de un parámetro positivo, la variación en el valor de la función objetivo será mayor o igual al impacto de dicha disminución: por ejemplo, si el costo se redujera de \$2 a \$1, se ahorraría como mínimo \$200 (manteniendo la solución original). Se puede obtener mayores ahorros si con el nuevo costo de traslado, ahora fuera más conveniente esperar menos y recorrer más.

### 8.1.1. Costo por litro ( $\$/L$ ) en función del costo por metro ( $\alpha$ )

La Figura 10 expone el costo por litro del caso normal y de los obtenidos al variar  $\alpha$ . Dado que las nuevas ejecuciones para  $\alpha$  se realizaron con límite de tiempo, se representan las mejores soluciones obtenidas en la ejecución (valor primal), así como los obtenidos a partir del gap (valor dual). Por tanto, “0,5 dual” y “0,5 primal” son las cotas de la ejecución con el parámetro a la mitad y “2 dual” y “2 primal” son las cotas de la ejecución al duplicar el parámetro. Esta notación se conservará para los análisis posteriores.

Se corrobora mediante la observación de la Figura 10 que en general no se duplica el costo total, ya que no todos los costos dependen directamente de este parámetro (sólo distancia recorrida). Sólo supera el doble en el caso 6, que no llegó al óptimo. Lo curioso es que el mismo no cubre la diferencia entre lo observado y lo esperado. También se visualiza con claridad el alto impacto del parámetro  $\alpha$  sobre el valor del costo por litro, lo que es consistente con la Figura 8. En ningún caso, más allá del 6, el valor de la nueva solución escapa del valor comprendido entre la mitad y el doble del valor de la solución óptima del caso normal.

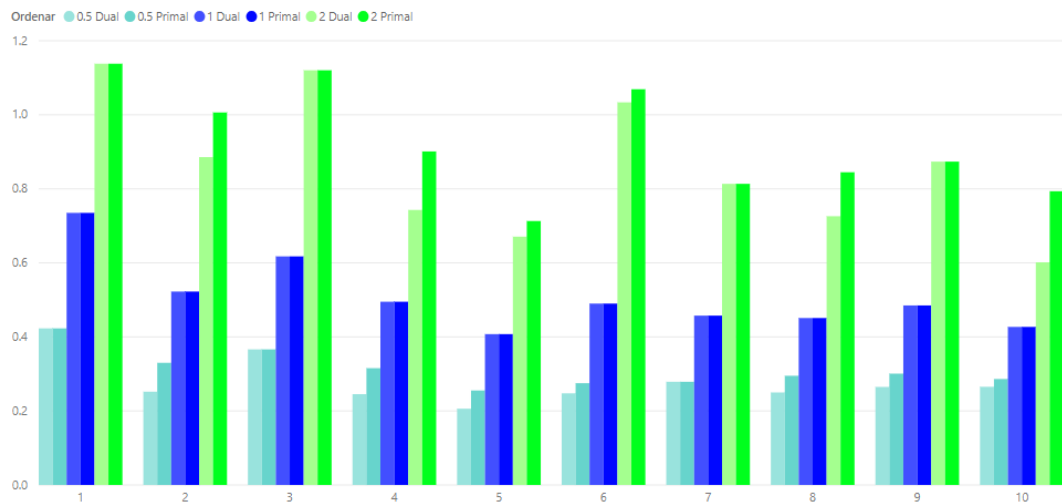


Figura 10: Variación el costo por litro ( $\$/L$ ) en función del parámetro  $\alpha$

### 8.1.2. Costo por litro ( $\$/L$ ) en función del costo por ingreso al tambo ( $\beta$ )

En la Figura 11 se observan los resultados obtenidos al variar el costo de ingreso a tambo ( $\beta$ ).

Como se observa en la distribución de los costos, una variación en  $\beta$  no debería acarrear una gran diferencia en el valor de la función objetivo. Esto se cumple en todos los casos excepto en el conjunto 6 lo cual se analizará en la Sección 8.4.

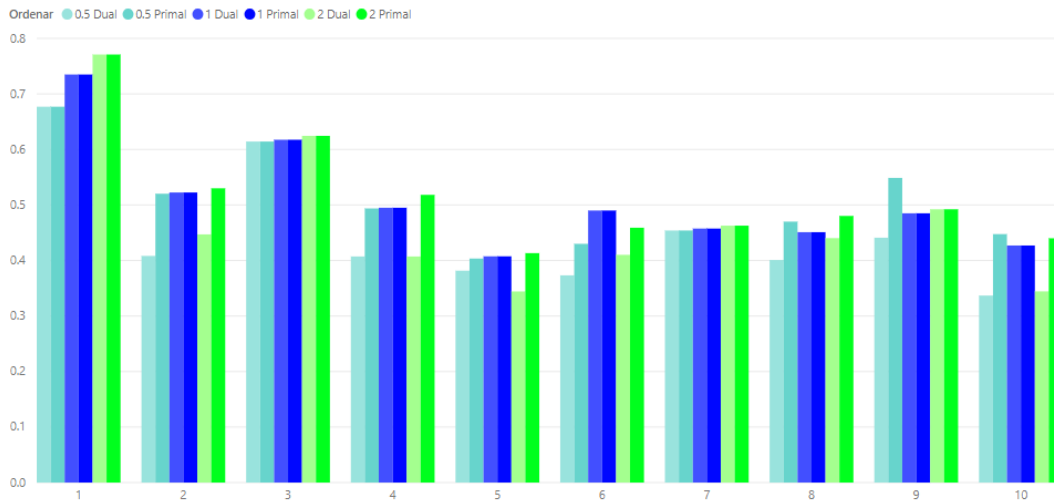


Figura 11: Variación el costo por litro (\$/L) en función del parámetro  $\beta$

### 8.1.3. Costo por litro (\$/L) en función del costo por espera ( $\delta$ )

En la Figura 12 se observan los resultados obtenidos al variar el costo de espera ( $\delta$ ).

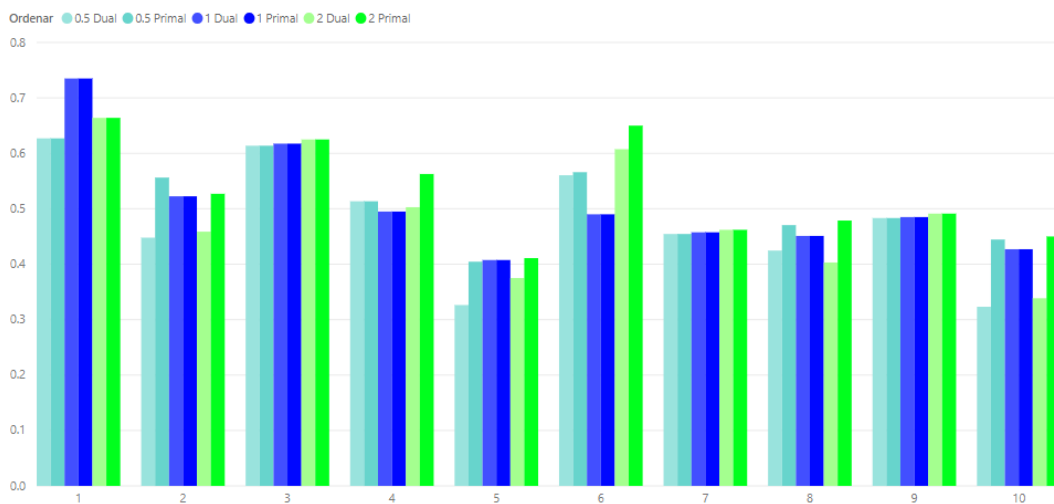


Figura 12: Variación el costo por litro (\$/L) en función del parámetro  $\delta$

Se puede ver un comportamiento similar al de la Figura 11. Esto se debe a que ambos parámetros tienen un peso similar en la función objetivo, por lo que es esperable observar comportamientos similares.

Es razonable que al aumentar el costo de la espera, ésta no aumente. Podría llegar a disminuir, pero dado que el costo de espera en relación a los otros costos es tan bajo, podría mantenerse invariante, ya que no hay otra variable que afecte

menos al valor de la función objetivo. Pero sin dudas, no era de esperar el comportamiento del conjunto 6: donde al disminuir el costo de demora, aumenta el costo por litro. El conjunto 1 también tiene un comportamiento anormal que se analizará con el conjunto 6 en la Sección 8.4.

En general se puede concluir que como el costo de demora es muy pequeño en relación a los otros costos, la variación del mismo no afecta significativamente al costo por litro.

#### 8.1.4. Costo por litro ( $\$/L$ ) en función del costo por activación de ruta ( $\gamma$ )

En la Figura 13 se observan los resultados obtenidos al variar el costo por activación de ruta  $\gamma$ . Donde el comportamiento es más similar al caso de  $\alpha$ . El costo asociado a la activación se incrementa al incrementar  $\gamma$ .

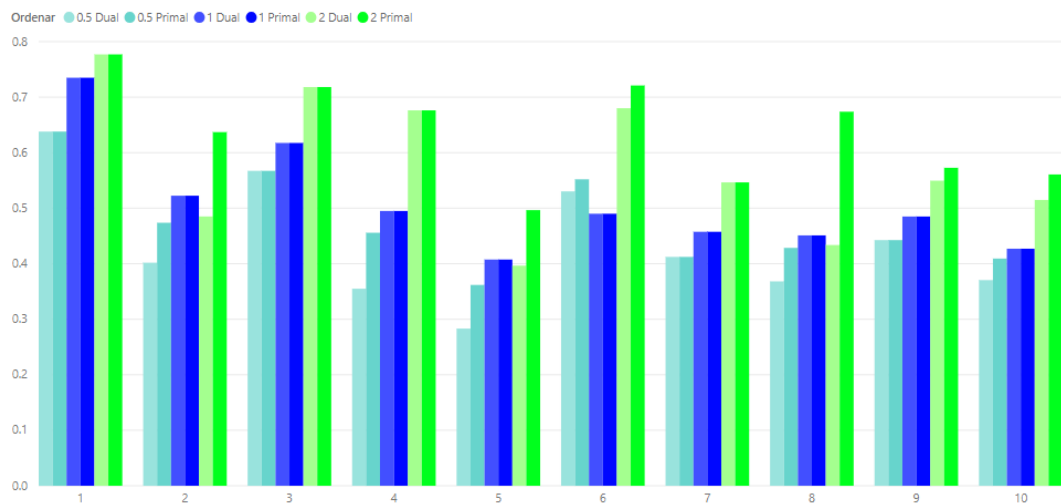


Figura 13: Variación el costo por litro ( $\$/L$ ) en función del parámetro  $\gamma$

Esto coincide con lo observado en la distribución por costos en la Tabla 36, excepto para el conjunto 6, que también se mencionará en la Sección 8.4

#### 8.1.5. Costo por litro ( $\$/L$ ) en función de la capacidad de los vehículos ( $c_k$ )

Para las ejecuciones con capacidad modificada, las restricciones de entrada no se consideraron dado que si el vehículo tuviera el doble de capacidad no entraría en ningún tambo, y si tuviera la mitad, todos entrarían en todos los tambos.

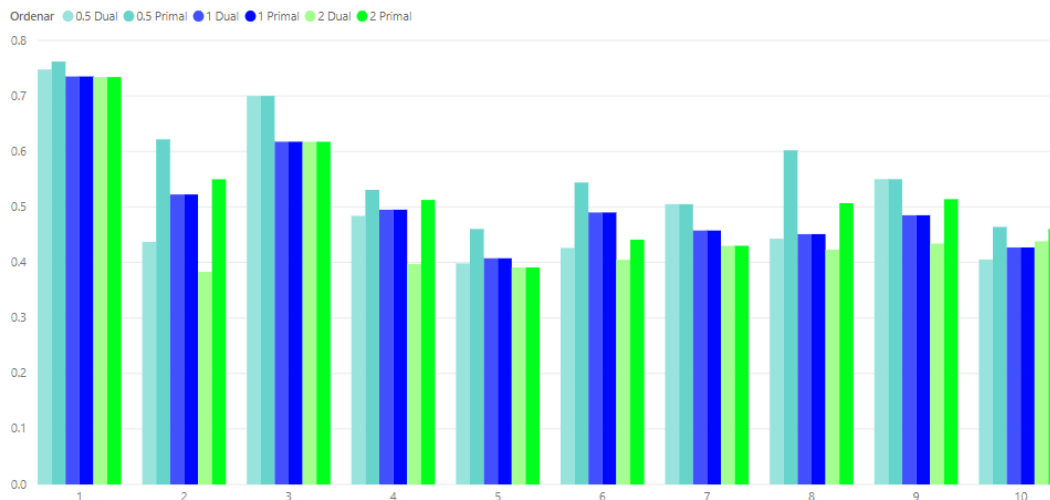


Figura 14: Variación el costo por litro (\$/L) en función de la capacidad

A partir de la observación de la Figura 14 no se puede deducir una tendencia generalizada para este caso. Como de alguna forma los costos dependen del tamaño del vehículo se tomó la siguiente consideración: los vehículos de la mitad de tamaño tienen un costo del 90% respecto al normal, en costo por metro, costo de entrada, costo de activación, y costo de espera. Análogamente, los vehículos del doble de tamaño tienen un costo del 110% respecto al normal. Por tanto, utilizar vehículos más pequeños llevaría a una reducción del 10% por cada ruta si en el caso normal la ocupación es menor a un 50% (misma solución).

Por otra parte, utilizar vehículos más grandes, puede evitarle a los camiones volver a planta, evitando por tanto costos de activación de ruta (por utilizar menos cantidad de vehículos) y ahorro en recorrer menos kilómetros (desigualdad triangular en distribución: una ruta con un vehículo más grande hará a lo sumo los mismos kms que otro vehículo más pequeño con más rutas).

Otro punto a tomar en cuenta es la espera. Si en el caso normal, la espera está en el máximo o cerca de este, más capacidad puede no ser aprovechada si tuviera que esperar para atender a un tambo adicional. Por otra parte, hay que tomar en cuenta que en una misma ruta no se puede visitar al mismo tambo más de una vez, por lo que un camión de grandes dimensiones jamás podría atender a todos los tambos en una sola ruta. Como se ve, hay varios escenarios contrapuestos por lo que no se puede asegurar a priori un comportamiento específico.

### 8.1.6. Costo por litro (\$/L) en función de los litros a recoger en cada tambo ( $l_i$ )

En la Figura 15 se observan los resultados obtenidos al variar los litros recogidos.

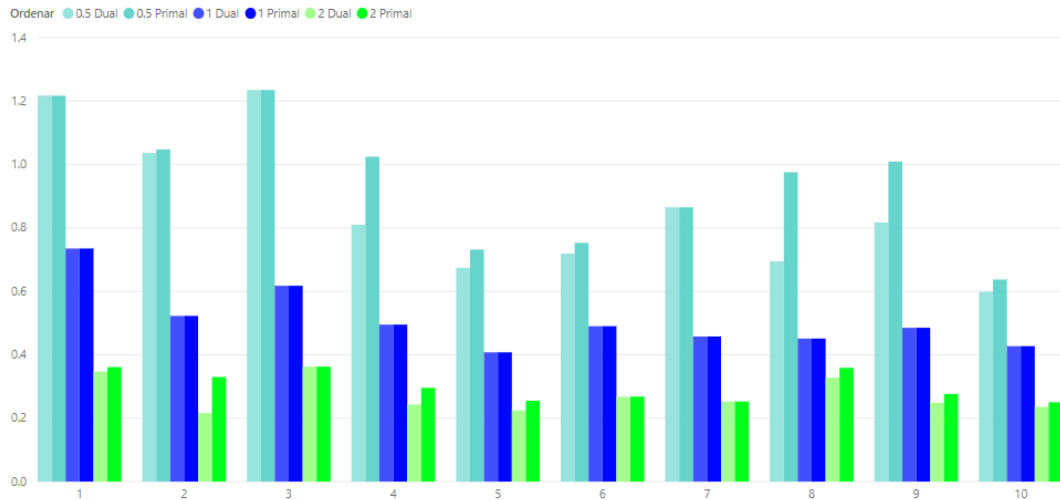


Figura 15: Variación el costo por litro (\$/L) en función de los litros producidos por los tambos

Varios de los costos podrían considerarse prácticamente fijos al atender los tambos, invariantes al volumen, como la activación de los camiones, el costo por entrar y el traslado. Sin embargo, estos dependen del tamaño del camión, del tiempo de espera, etc. Por ejemplo, si el tambo tiene más litros para recoger demorará más tiempo en atenderlo, por lo que sí en la anterior solución esperaba antes de entrar al tambo siguiente, tendrá que esperar menos tiempo porque llegaría más tarde. También este efecto puede resultar en lo opuesto, no pudiendo llegar al segundo tambo en el horario correspondiente. Por otro lado, podría suceder que un camión ahora tenga menos demora, y por tanto pueda atender a algún tambo que antes no podía por el tope de la espera.

A su vez, puede suceder que al estar más llenos los camiones, si tienen ocupación en el caso normal por debajo del 50%, no agregue nada de costos extras el transportar el doble de litros, y por tanto el costo por litro baje a la mitad, o que al tener ocupación cercana al 100% en el normal, que precise activar el doble de rutas, duplicando los kilómetros, manteniendo más o menos invariante la espera y las entradas a tambos. Por este motivo para este análisis fue necesario considerar también la ocupación del caso normal y ver elementos particulares. La ocupación se puede observar en la Figura 9.

Se observa en la Figura 15 que el conjunto 1 al tener una ocupación por debajo del 50% los costos no se duplicaron, ya que se pudo redistribuir la carga en menos cantidad de camiones, para los demás casos se observa un comportamiento de acuerdo a lo esperado (directamente proporcional).

### 8.1.7. Costo por litro (\$/L) en función del cambio de frecuencia

Además de las variaciones en los parámetros vistos anteriormente, se realizaron otros cambios para estudiar la variación de la función objetivo al flexibilizar las

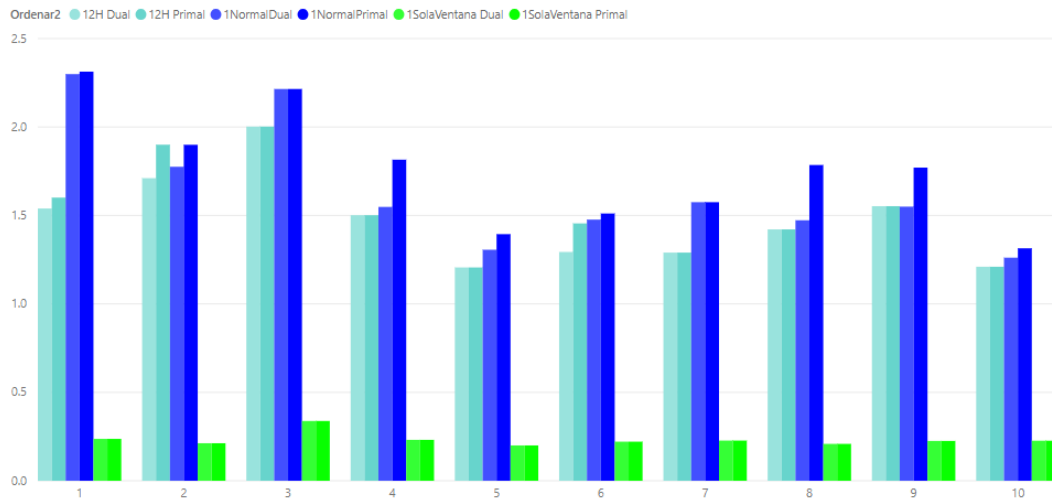


Figura 16: Variación el costo por litro (\$/L) en función de las ventanas y frecuencias

visitas a los tambos. En primer lugar, se modificaron las ventanas de visita tomando como nuevo valor 4 ventanas de 12hrs iguales para todos los tambos. Esto podría asociarse a un aumento de capacidad de almacenamiento de los tambos, quedando la recolección desacoplada del ordeño ya que habría un stock funcionando como amortiguador. Para este primer caso no se modificaron las frecuencias de visita.

En un segundo caso, se estudió como variaría la solución si se recogiera toda la leche en una única visita y se permitiera ir en cualquier momento de los 2 días. Se pasó de 4 ventanas a una única ventana, por lo que al tambo de frecuencia 2, se asignó el doble de producción, y al de frecuencia 4, se cuadruplicó. De esta forma los litros recogidos totales serían los mismos que en el caso original.

Al igual que en los casos anteriores, se ejecutó el modelo para 10 conjuntos distintos, y como se configuró un límite de tiempo, también se graficó la solución del problema dual en los casos que no se llegó al óptimo dentro del tiempo establecido. En la Figura 16 se puede ver las distintas soluciones de los 3 casos considerados:

- Caso original
- Ventanas 12hrs
- 1 sola ventana

Es notoria la variación de los costos por litro al flexibilizar las visitas. Es esperable tener una mejora respecto al problema original en cualquiera de los 2 nuevos casos estudiados.

Como se vio en la Figura 7, el costo por metro es el que tiene mayor peso por lo que es entendible que el caso con una sola ventana sea el de menor costo, siendo



significativamente menor en todos los casos. Esto se puede deber a que tambos que eran visitados 2 o más veces en el período, ahora solo se requiera ir una única vez. Si el tambo se encontraba a una distancia muy lejana, el impacto de una sola ventana se traduce en un ahorro mayor.

Tanto el caso de 12hrs como el de una sola visita podrían evitar incompatibilidad entre ventanas. Evidentemente, esto generaría ahorros en las esperas que prácticamente ya no serían necesarias. En cuanto a los kilómetros recorridos, en los casos de ventanas de 12hrs intuitivamente sería de esperar que se mantuvieran. Sin embargo, éstos también pueden reducirse si tambos que eran incompatibles en la misma ruta por restricciones de horarios ahora se pueden atender en el mismo viaje. De esta forma se evitarían los kilómetros adicionales que se hacían cuando el vehículo se veía obligado a volver a planta para no exceder el máximo de espera permitido, aunque tuviera capacidad ociosa. Como depende mucho del caso particular, se observa que en algún caso el ahorro en el caso 12hrs es significativo, mientras en otros es despreciable respecto al caso original. En la Figura 17 se pueden ver los kilómetros recorridos en el caso original y en las dos variantes planteadas para completar la comprensión del caso.

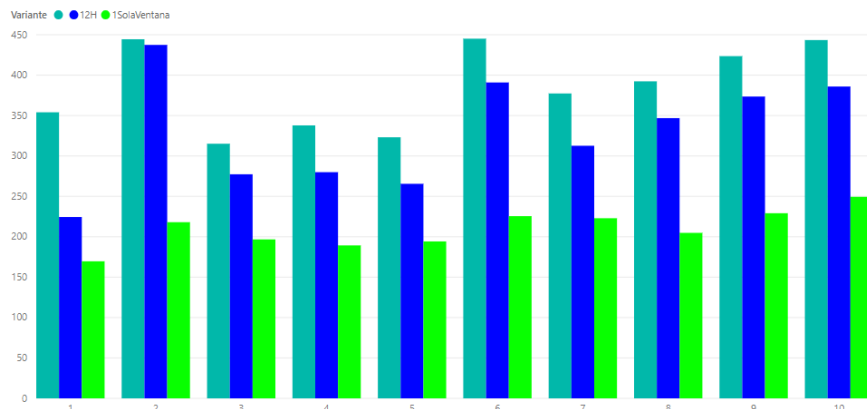


Figura 17: Kilómetros recorridos en función del cambio de frecuencia

El análisis realizado en esta sección reafirma lo observado en primera instancia, los kilómetros recorridos son el mayor componente de costos en el valor de la función objetivo y por tanto es interesante estudiar cómo minimizar el recorrido.

## 8.2. Análisis de kilómetros recorridos al variar parámetros

En esta sección se analizará el impacto sobre los kilómetros recorridos entre todas las rutas para cada conjunto. A diferencia del costo por litro, a partir del gap de dualidad no podemos inferir acerca de los kilómetros. Simplemente sabemos que a mayor gap de dualidad, podría haber más variaciones de la solución y por tanto de kilómetros que en otro caso con un gap de dualidad menor.

Creemos, no obstante, que a partir de este análisis podemos ver cómo afectan otros parámetros a los kilómetros recorridos y a su vez evaluar si el modelo se comporta como es esperado en este concepto.

### 8.2.1. Kilómetros en función de costo por metro ( $\alpha$ )

En la Figura 18 observamos que para el caso 2 y 10, se realizan más kilómetros que en el caso original cuando se duplica  $\alpha$ . Dado que tiene un gap de dualidad importante (12 % y 24 % respectivamente), sería de esperar que con una ejecución más larga los kilómetros fueran que ser a lo sumo iguales al caso original (ante un traslado más costoso el nuevo óptimo debería tener igual o menor desplazamiento). Para el caso 1 y 5, el comportamiento es el esperado, disminuyendo los kilómetros en el caso que  $\alpha$  aumenta, y aumentando en algún caso si  $\alpha$  disminuye. En los otros casos (3, 4, 7, 8 y 9) los kilómetros se mantienen, lo que sugiere una región de estabilidad de la solución para los valores de los parámetros modificados. Esto quiere decir que no se podría cumplir con todas las restricciones con menos kilómetros y que hacer más kilómetros no evita un costo mayor, o que para los valores de  $\alpha$  evaluados no representa un ahorro hacer más o menos kilómetros que con el valor de  $\alpha$  original.

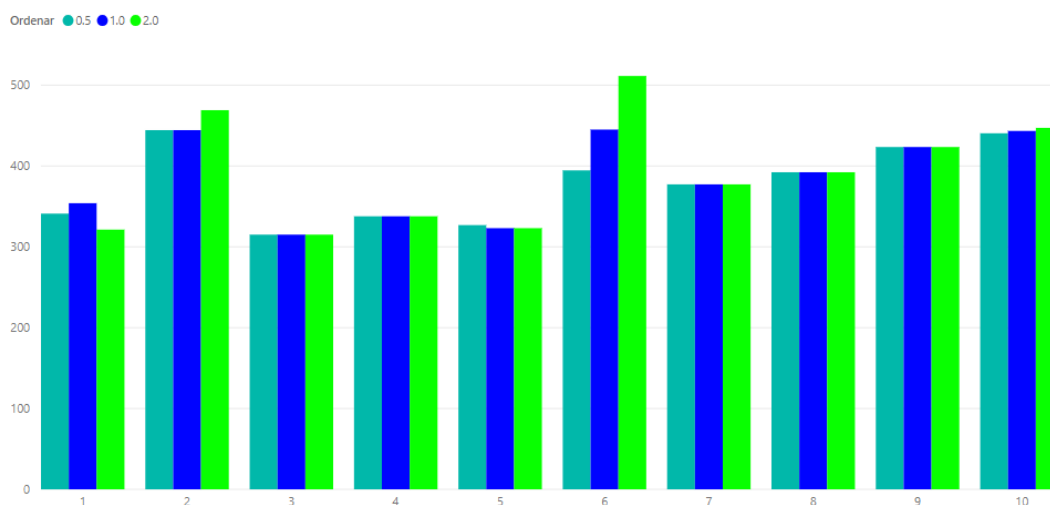


Figura 18: Kilómetros recorridos en función del parámetro  $\alpha$

### 8.2.2. Kilómetros en función de costo por ingreso al tambo ( $\beta$ )

Para este caso era de esperar que los kilómetros permanecieran prácticamente invariantes ante  $\beta$ . Una vez más, el caso 6 no concuerda con lo previsto. Por otra parte, la diferencia del caso 9 y 10 se atribuye al gap de dualidad presente (del orden del 25 %), mientras que el conjunto 1, para el caso que se duplica  $\beta$  no se obtiene un resultado consistente, a pesar de haberse ejecutado repetidas veces el mismo caso. Esto se podría deber a una deficiencia del modelo o de la ejecución

(proceso, CPU o solver). El resto de los casos se comportaron según lo esperado teniendo en cuenta que las ligeras variaciones pueden deberse a la cercanía al óptimo. En la Figura 19 se pueden observar los datos de este caso.

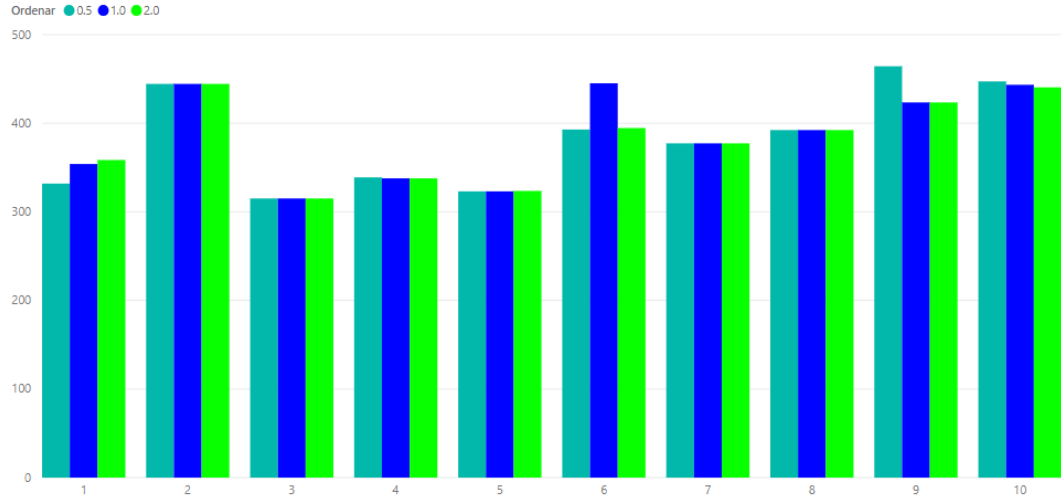


Figura 19: Variación de kilómetros en función del parámetro  $\beta$

### 8.2.3. Kilómetros en función de costo por espera $\delta$

Como se observó anteriormente, es de esperar que si el costo  $\delta$  aumenta, el óptimo del nuevo caso pueda desplazarse hacia casos donde haya mayor recorrido pero menor espera, y si el costo de espera disminuye, los kilómetros disminuyan a cambio de un incremento de la espera.

A partir de lo que se observa en la Figura 20, el conjunto 1 parece ser el único que refleja esta tendencia. Por otra parte, se confirma para el caso 6, una vez más, que no dio resultados coherentes con el resto de los conjuntos, y la pequeña diferencia del caso 2 se atribuye al gap de dualidad que posee la solución. Como parece ser prácticamente invariante al doble y a la mitad de este, y viendo la repartición de los costos según parámetro, se concluye que requiere una variación mayor del costo por demora para que el impacto sobre los kilómetros sea significativo.

### 8.2.4. Kilómetros en función de costo por activación de ruta ( $\gamma$ )

La variación en el costo activar un vehículo puede tener las siguientes consecuencias: si el costo de activación predomina y  $\gamma$  aumenta, se intentaría minimizar la cantidad de camiones utilizados incurriendo en mayores costos por metro y espera. Sin embargo, como se vio previamente en la distribución de costos, el costo asociado a  $\alpha$  es el de mayor peso, seguido por  $\gamma$  en importancia, por lo que no es tan probable que esto suceda. Lo que se observa en la Figura 21 es que, la variación

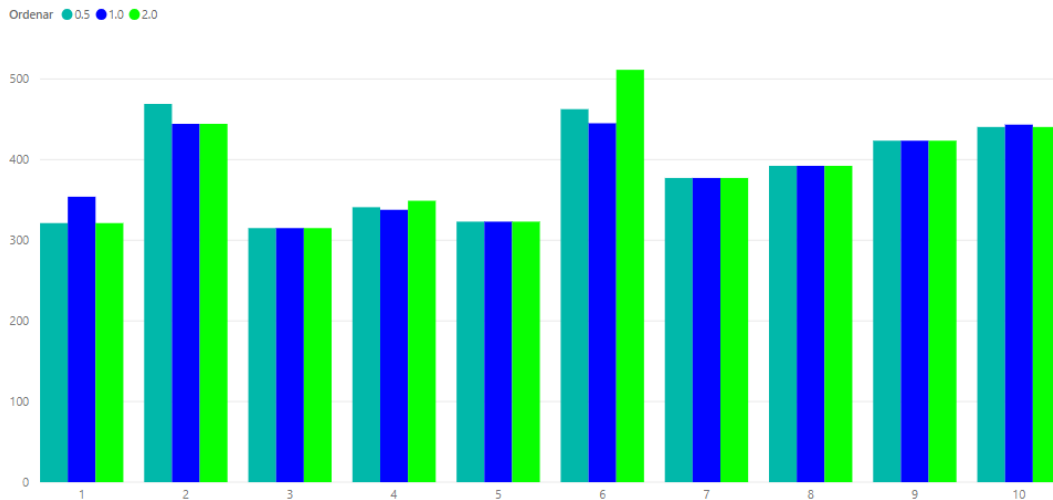


Figura 20: Variación de kilómetros en función del parámetro  $\delta$

en  $\gamma$  no es lo suficientemente grande como para generar cambios en los kilómetros recorridos.

En el caso que  $\gamma$  disminuyera, no se debería activar más camiones dado que se incrementaría los kilómetros y los costos de transporte ya que son mucho más significativos que los de espera, siendo estos los que se podrían evitar.

En la Figura 21 se puede observar los kilómetros recorridos en cada uno de los conjuntos. Se puede visualizar como los kilómetros recorridos son prácticamente invariantes.

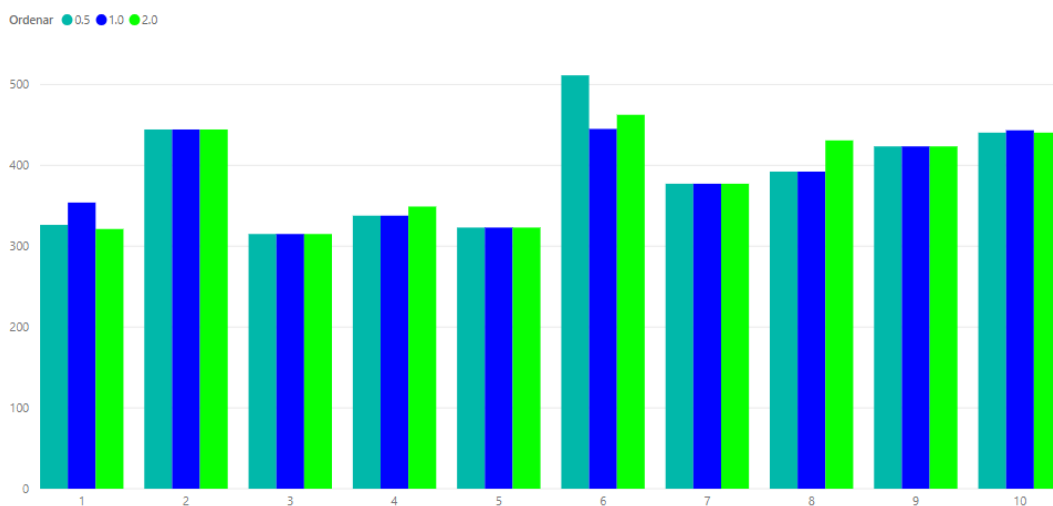


Figura 21: Variación de kilómetros en función del parámetro  $\gamma$

Sin embargo, en este caso se observa que el conjunto 1 presenta una ligera desviación respecto a lo esperado, pero es consistente con lo observado en otros

casos.

### 8.2.5. Kilómetros en función de capacidad de vehículos ( $c_k$ )

El recorrido en kilómetros de los camiones no se ve alterado significativamente al modificar la capacidad de los mismos, ya sea porque la componente de costos por metro es de mayor peso o porque la solución está cerca del óptimo en kilómetros.

Sin embargo para el caso 10 se puede ver que, a una menor capacidad de los camiones, se tiene una menor cantidad de kilómetros recorridos. Esto lo atribuimos a que el resultado para este escenario obtuvo un gap de dualidad del 13% y no se puede estimar qué tan distante está de la solución óptima en kilómetros. En la Figura 22 se pueden observar los resultados obtenidos.

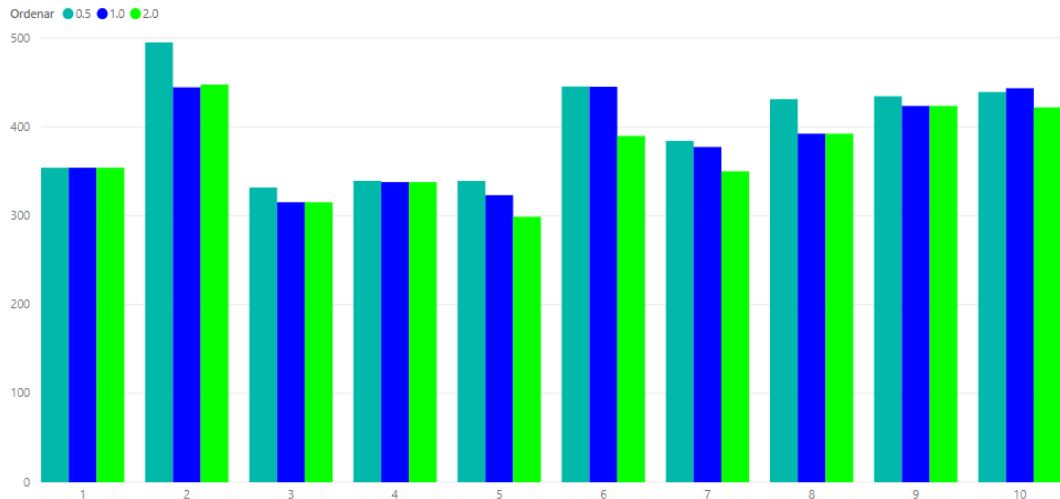


Figura 22: Variación de kilómetros en función de la capacidad

### 8.2.6. Kilómetros en función de litros a recoger en cada tambo ( $l_i$ )

La variación de los litros a recoger puede afectar los kilómetros del recorrido. Para casos con vehículo con alta ocupación (cercana al 100%), duplicar los litros a recoger requiere que se realicen rutas adicionales. Contrariamente, en el caso que los litros a recoger sean la mitad, puede traducirse en menos kilómetros al requerir menos rutas, aunque también pueden mantenerse constantes los kilómetros en casos originales con pocas rutas o por restricciones de ventanas. También podría suceder que se incrementaran los kilómetros al llegar al límite diario de espera.

En la Figura 23 se pueden ver los kilómetros recorridos en cada uno de los 10 conjuntos al variar los litros a recolectar.

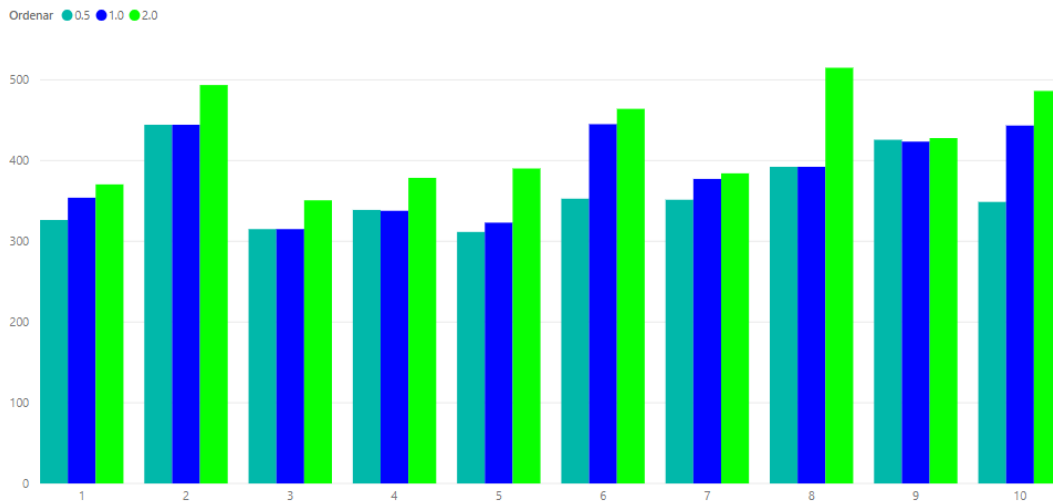


Figura 23: Variación de kilómetros en función de los litros producidos por los tanques

Es interesante ver como al duplicar los litros siempre aumentaron los kilómetros pero al disminuirlos, en varios casos, los kilómetros permanecieron invariantes, terminando con capacidad ociosa.

### 8.3. Análisis de tiempos de espera al variar parámetros

En esta sección se analizará la variación de la espera de todas las rutas ante los distintos parámetros, luego de haber salido de planta por primera vez. A diferencia del costo por litro, a partir del gap de dualidad no podemos inferir acerca de la espera. Creemos, no obstante, que a partir de este análisis podemos ver cómo afectan otros parámetros a la espera y a su vez entender si el modelo se comporta como es esperado en este concepto.

#### 8.3.1. Espera en función de costo por metro ( $\alpha$ )

Es de esperar que al aumentar el costo por metro, la nueva solución busque minimizarlos, ya que este es el principal costo del problema. La espera es una de las variables principales que puede lograr este objetivo, por lo que se espera un incremento de la misma al incrementar el costo de recorrido y una posible disminución de la misma al disminuir  $\alpha$ , aunque menos probable debido a que el impacto económico de la espera seguiría siendo menor. Se observa en la Figura 24 un comportamiento errático respecto a lo esperado. En algunos casos, como el 2, 3, 5, 6, 7 y 8, los comportamientos son aproximadamente los esperados, destacándose los casos 4 y 10 como anormales. El caso 1 y el caso 6 se consideran poco confiables debido a su comportamiento con otros parámetros. De todas formas, al ser el costo de espera tan bajo, la espera es en general es muy volátil y susceptible a grandes cambios incluso a gap de dualidad muy bajos.

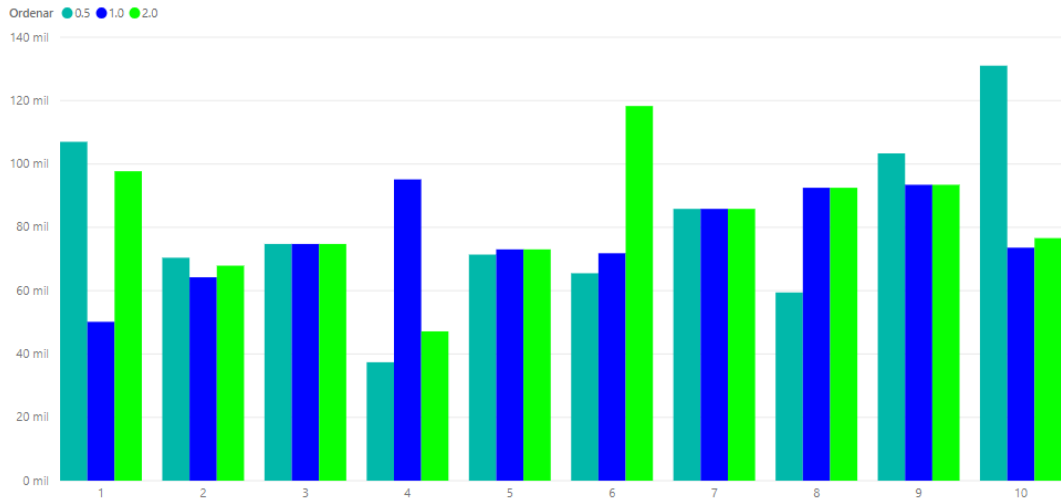


Figura 24: Espera en función de  $\alpha$

### 8.3.2. Espera en función de costo por ingreso al tambo ( $\beta$ )

En este caso, a priori es esperable que no se vea una modificación en la espera al variar el costo de entrada a tambo. Tal vez podría verse si un camión más chico (que tiene costo  $\beta$  menor) puede entrar a un tambo esperando más y por la variación en  $\beta$  decida hacer cambios en la espera. Sin embargo, el peso del costo de ingreso a tambo es prácticamente insignificante por lo que se espera observar esperas invariantes a lo largo de todas las pruebas. En la Figura 25 se pueden ver todos los resultados.

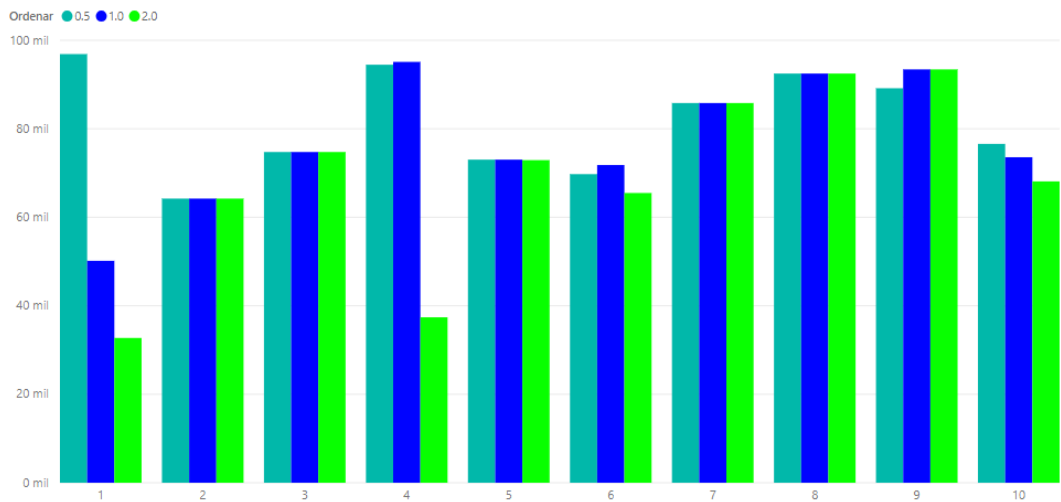


Figura 25: Espera en función de  $\beta$

Como era de esperarse, la espera se visualiza invariante a lo largo de todos los

casos excepto en el 1, 4, 6 y 10. El 1 muestra una variación mayor a la esperada, y el 6 presenta un comportamiento extraño, consistente con lo visto previamente. El comportamiento de los casos 4 y 10 puede atribuirse a que en los casos en los cuales se duplicó el costo de  $\beta$  el gap de dualidad que se obtuvo fue de 21 % y 22 % respectivamente.

### 8.3.3. Espera en función de costo por activación de ruta ( $\gamma$ )

Es de esperar que las variaciones en los costos de activación de los camiones afecten los tamaños de los camiones que realizan los recorridos, por lo que se pueden ver modificados los kilómetros y las esperas en la solución. Es por ello que no se puede predecir de antemano el comportamiento de la espera al variar el costo de activación, lo que se observó en los casos ejecutados.

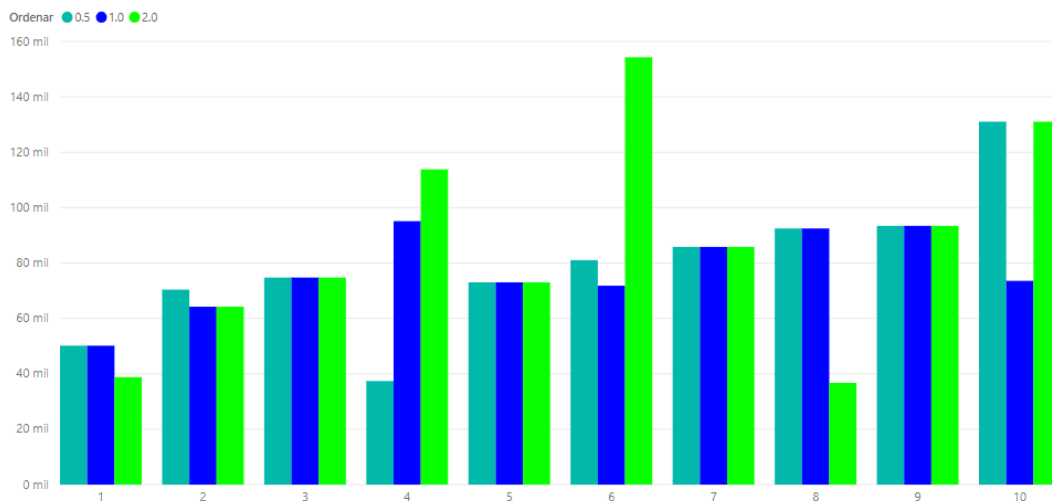


Figura 26: Espera en función de  $\gamma$



### 8.3.4. Espera en función de costo por espera ( $\delta$ )

Para esta sección del análisis de sensibilidad, se previó que si el costo de espera disminuía lo suficiente, se esperaría más, con el fin de evitar hacer kilómetros. Por lo observado se mantienen los valores de espera, esto se puede atribuir a su baja repercusión en el valor de la función objetivo. En particular se observa una variación grande para el caso 4 y 6. Para el caso 6, como ya se ha visto en otras ocasiones, los resultados obtenidos no parecen ser consistentes.

Para el caso 4, con un multiplicador de 0,5, la solución encontrada recorre menos kilómetros, lo que conlleva a una nueva solución y, contrario a lo anticipado, baja la espera.

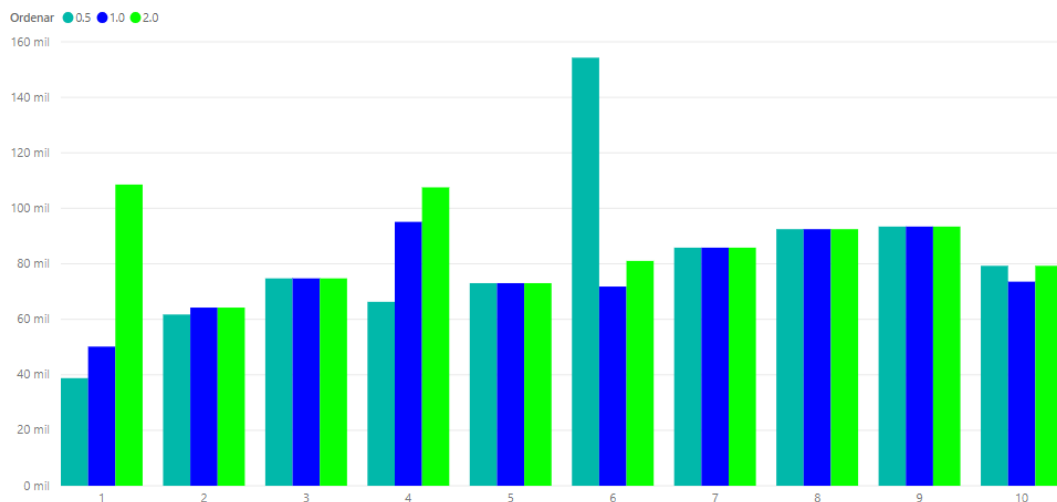


Figura 27: Espera en función de  $\delta$

### 8.3.5. Espera en función de capacidad de vehículos ( $c_k$ )

Variar la capacidad de los camiones puede tener variadas repercusiones en la espera. Por un lado, en el extremo que el camión solo pueda pasar por un tambo antes de llenarse, la espera sería 0. Pasaría por el tambo en el momento más conveniente y volvería inmediatamente a planta para luego salir a recoger la leche por el próximo tambo. En el caso que la capacidad se duplique, podría llegar a aumentar la espera, porque en la nueva realidad podría ser posible pasar por todos los tambos en un único recorrido, aumentando la espera, pero disminuyendo los kilómetros recorridos que es el factor que mayor peso tiene en la función objetivo.

En la Figura 28 se pueden visualizar ambos casos descritos previamente. Se pueden ver casos donde se observa el primer comportamiento descrito, como lo es el caso 3 y se puede ver el segundo comportamiento en el caso 10.

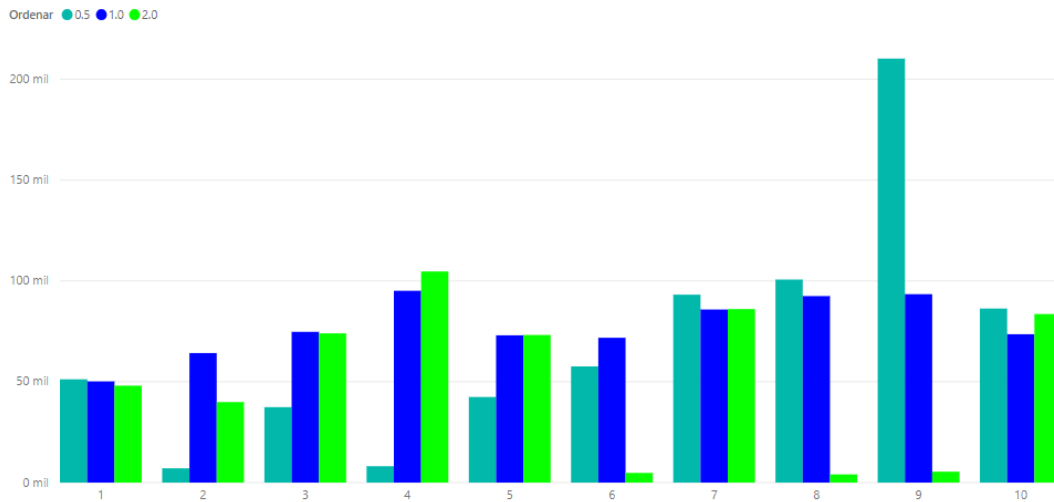


Figura 28: Espera en función de la capacidad

### 8.3.6. Espera en función de litros a recoger en cada tambo ( $l_i$ )

El valor de la espera al cambiar los litros debería seguir un comportamiento similar al variar la capacidad de los camiones. Si se duplican los litros que produce cada tambo, cada camión podría llenarse con una única visita y en caso que se divida la producción, la espera podría aumentar porque a un camión le podría alcanzar la capacidad para pasar por todos los tambos antes de tener que volver a la planta.

En la Figura 29 se pueden observar todos los casos estudiados.

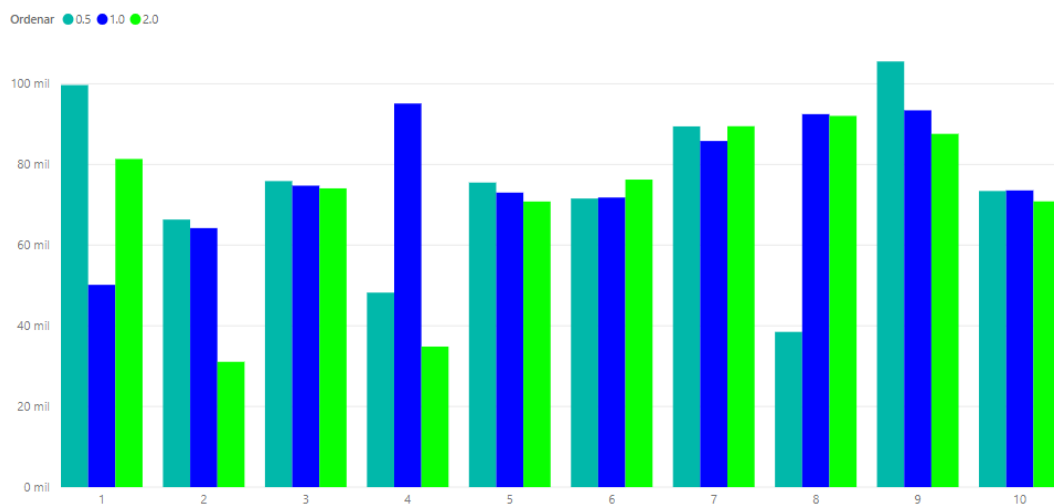


Figura 29: Espera en función de litros

En este caso, la espera se mantiene prácticamente igual en todos los casos

estudiados, excepto en los casos 1, 4 y 8. De todas formas, se logran ver variaciones en algunos de los casos como lo es el 2 que al duplicar los litros baja la espera. Esto es coherente con lo observado al analizar los cambios en la espera al variar la capacidad. En este mismo conjunto, cuando la capacidad se dividió en la mitad, la espera bajó. De todas formas, como se mencionó antes, la espera es altamente volátil a cambios de otras variable por su bajo costo.

#### 8.4. Observaciones del Análisis de Sensibilidad

A lo largo de la Sección 8 se vieron varios casos donde se identificaron comportamientos que no eran los esperados. El costo subía donde no se esperaba suba, la espera aumentaba cuando no era previsto, entre otros. En esta Sección lo que se intentó determinar fue la causa de estas diferencias.

En el caso 6 se detectaron varias diferencias en cuanto a lo que uno esperaría. Para eso, se tomó el estudio realizado en la Sección 8.1.2 y se realizó un análisis en profundidad de las soluciones obtenidas. Se tomó la solución del caso 0,5 y se vio la factibilidad de dicha solución con los parámetros del caso normal. La solución del caso 0,5 era efectivamente factible con los parámetros del caso normal, y además se observó que la función objetivo para ese caso era menor a la ejecución obtenida para el caso normal. A partir de esto se puede afirmar que la solución a la ejecución que obtuvimos para el caso normal no fue la óptima (dado que existe otra de menor valor).

La afirmación realizada permite concluir que el solver en algunos casos no parece llegar al óptimo aunque el programa haya indicado que sí. Probablemente algo similar haya pasado en todos los otros casos en los que se observó una incoherencia. Nos pusimos en contacto con el equipo de soporte de AMPL/CPLEX para poder tener mayores explicaciones y detalle al respecto de lo ocurrido pero a la fecha no se obtuvo respuesta. Es importante comentar que debido al gran número de casos ejecutados, se realizaron en distintos equipos con distintas características y versiones del software mencionado, lo que podría tener injerencia en el fenómeno observado.



## 9. Conclusiones y trabajos futuros

Esta sección comienza con las observaciones obtenidas de la operativa de la empresa y las conclusiones que se pudieron obtener principalmente mediante el análisis de sensibilidad. Posteriormente, se profundiza sobre algunas direcciones para trabajos futuros que no estaban enmarcadas dentro del alcance del proyecto.

### 9.1. Conclusiones

En el presente informe se presenta el trabajo realizado sobre la realidad de Conaprole acerca de la recolección periódica de leche en tambos y la entrega de ésta a distintas plantas de procesamiento, visto en la Sección 3. Como el servicio de recolección es tercerizado, Conaprole ejecuta un programa que optimiza las rutas realizadas por los fleteros y luego las valoriza, definiendo el importe a retribuir a las empresas transportistas. Conaprole planteó que era de su interés el estudio de este caso por las siguientes limitantes en su forma de trabajo: se basa sobre las rutas ya realizadas y eventualmente no impide que un tambo de frecuencia 24 horas se visite en dos ordeños seguidos (entre otros aspectos que fueron considerados en el modelo). La forma de trabajo actual tiene el inconveniente de mejorar el recorrido luego de incurrido el gasto, por lo que las empresas transportistas pierden la posibilidad evitar dicho sobrecosto. Por otra parte, hoy en día no es posible utilizar la herramienta para situaciones diferentes a lo ya sucedido, como por ejemplo, planificar mantenimientos de planta.

Al momento de optimizar las rutas, el software que utiliza Conaprole, primero busca reducir kilómetros, y sucesivamente mejorar la ocupación, por lo que se consideró dentro de los requisitos del modelo que se ponderaran todas las variables en términos económicos, para tomar en cuenta en profundidad la interacción entre ellas.

Al realizar el modelo, el problema derivó en un Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Depósitos y Múltiples Ventanas de Tiempo (en inglés Multi-Depot Heterogeneous Fleet Vehicle Routing Problem With Multiple Time Windows and Assignment Restrictions o M-VRPTWAR), dicha formulación se puede ver en la Sección 4. En este problema, los tambos debían ser visitados con distintas frecuencias y en distintos horarios en el período de planificación, utilizando una flota heterogénea que entregue la leche en una de las varias plantas y volviendo a salir para realizar otro recorrido si es necesario.

Se consideraron las restricciones más relevantes del caso. El modelo incorporó elementos adicionales a la forma actual de trabajo que fueron validados con Conaprole. Los parámetros utilizados se basaron en los datos facilitados por la empresa ya que muchos de éstos son utilizados día por medio en la operativa.

Debido a la gran cantidad de variables, y complejidad del problema (NP-hard), fue necesario simplificar el problema al momento de resolverlo, para que se completara la ejecución y se pudieran obtener conclusiones en cuanto al comportamiento de la solución. El modelo completo fue validado, pero se estudiaron casos simplificados: Problema de Ruteo de Vehículos con Flota Heterogénea, Múltiples Viajes, Múltiples Ventanas de Tiempo y Restricciones de Asignación. Es importante aclarar que al no incluir múltiples depósitos y con conjuntos pequeños de tambos, no es totalmente precisa la comparación con la forma actual de operar de Conaprole, ya que a su vez es resuelto con métodos aproximados y utiliza otro modelo.

Como era de esperar, por las dimensiones del problema y lo visto en las Secciones 5 y 6, en términos computacionales es muy costoso de resolver ya que es altamente combinatorio. En un principio, el modelo se resolvió utilizando GLPK. Como notamos una demora de 70 minutos en casos sencillos (5 tambos y 2 plantas) y en casos de mayor complejidad (15 tambos y 2 plantas) no terminó de ejecutar en 40 horas, se optó por utilizar AMPL/CPLEX. Con CPLEX, el mismo caso se resolvió en menos de 80 segundos pero el caso de 15 tambos no se pudo resolver en menos de 24 horas.

Si bien no se pudo ejecutar el modelo completo que representa la realidad de Conaprole debido a su dimensión, consideramos positivos los aportes del modelo desarrollado en cuanto a la periodicidad y al enfoque distinto de la ocupación del camión, donde no se asigna un valor económico por alta ocupación, sino que la solución es global, tomando en cuenta la interacción entre costo por kilómetros, visitas a tambos, espera y utilización de camión.

En la ejecución de este trabajo, se realizó un análisis de sensibilidad en base a 10 casos de prueba con 10 tambos cada uno. Se optó primero por resolver los casos base para el análisis de sensibilidad sin límite de tiempo, y para el resto de los casos se estableció un límite de tiempo entre 15 minutos y una hora de ejecución, utilizando el gap de dualidad para tener medida de la calidad de la solución obtenida. Este análisis permitió arribar a conclusiones de interés para la contraparte, abriendo camino a futuras investigaciones en la misma línea.

En cuanto a lo observado en la Sección 7 respecto a los casos de estudio, detectamos que el factor principal de costos en la mayoría de los casos es el costo de traslado, siendo entre 68 % y 82 %.

Por otra parte, tanto en la Sección 7 de casos de estudio, como en la Sección 8 de análisis de sensibilidad, en todos los casos de prueba utilizados, los conjuntos contaban con algún cliente que presentaba la restricción de entrada de vehículos mayores a 15.000 litros, obligando la utilización de este vehículo, pero no es por

este motivo que se realizan 4 viajes en cada prueba para este vehículo, ya que el tambo con dicho requisito presentaba frecuencia menor a 4 veces en el período.

Concluimos por tanto, que el modelo prioriza camiones de baja capacidad, ya que es más barato el costo por kilómetro recorrido y siendo este es el costo más significativo, a pesar de que con muchos vehículos pequeños se puede terminar incurriendo en más kilómetros. Esto podría estudiarse con mayor detalle en casos de mayor magnitud, donde se ahorren más kilómetros por usar vehículos grandes y se prefiera, más allá de ser más caro el valor unitario. Es decir queda reflejado que a priori no se puede definir una estrategia de los tamaños de vehículos a utilizar, dado que la solución óptima esta condicionada por el tamaño de los clientes.

Concluimos también que el valor del costo de espera es demasiado bajo para todos los casos en comparación con el de traslado. Si no existiera restricción de límite de espera, la misma sería mucho mayor dado que se podría ahorrar kilómetros que representan un valor de costos mucho mayor. Como no es una variable que utilice actualmente Conaprole en su modelo entendemos que podría ser interesante calcular este parámetro con mayor grado de detalle.

Entendemos que hay fenómenos que surgen a partir de la interacción de los tambos y al ser casos tan pequeños, no se visualizan con tanta claridad. Sin embargo, estos podrían llevar tanto a eficiencias (varios clientes juntos que se pueden hacer en la misma ruta) como ineficiencias (si hubiera tambos cercanos entre sí pero distantes de la planta, con ventanas de visita incompatibles para la misma ruta). Por este motivo se sugiere un estudio con más clientes para esclarecer estos fenómenos. En la Sección 9.2 se propone el uso de clusterización para resolver el problema en su totalidad con sus 80 tambos.

Por otra parte, como actualmente Conaprole paga a las empresas fleteras según los kilómetros, hay conceptos como el de activación o espera que no fueron lo suficientemente desarrollados. Resta analizar si es posible una mejor estructura de costos y si la limitante de las dos horas de espera total en la misma ruta es la más adecuada para esta realidad.

Entendemos también que dentro de los costos de kilómetros hay muchos otros costos que las empresas fleteras agregan al ser éste la principal variable de cobro para las empresas. Seguramente dentro del costo por kilómetro están las horas de chofer, la amortización del vehículo, mantenimiento, horas administrativas, etc. Por otra parte, otro punto que faltó incorporar al modelo, es la espera en planta por tener ocupada la manguera de descarga y los muelles de lavado de los camiones, creemos que esto le podría aportar un grado más de valor, ya que esta demora se termina traduciendo también en un costo que está pagando la empresa fletera y también Conaprole. Con esto decimos que puede ser beneficioso para ambas partes revisar la forma de pago incluyendo nuevos componentes a costa de un ajuste del costo de traslado.

## 9.2. Trabajos futuros

Como trabajos futuros, sería interesante evaluar la resolución mediante un enfoque heurístico, como puede ser un procedimiento basado en una metaheurística. De esta forma se lograrían tener tiempos de ejecución razonables, que con métodos exactos no se obtienen debido a la complejidad del problema. Un trabajo en esta dirección agregaría mucho valor al modelo propuesto en el trabajo.

Para resolver el caso completo actual de 80 tambos se propone clusterizar el caso completo en conjuntos de 10 tambos y resolverlos sucesivamente, de forma que, si un vehículo fue utilizado en la resolución del conjunto anterior, sean considerados los momentos en los cuales está ocupado. En este caso cobra gran importancia el clusterizado ya que dependiendo de éste cambiará considerablemente el resultado e incluso la factibilidad del problema. Si se lograra resolver podríamos obtener un caso comparable con el caso brindado por Conaprole y observar si las diferencias son considerables. Si el resultado fuera bueno auguraría buenos caminos para seguir trabajando.

En este sentido, sería interesante también combinar el trabajo con heurísticas de selección de los 10 tambos, para probar más casos posibles de la versión completa (otros clusterizados).

Creemos que hay un análisis interesante por delante con las empresas fleteras. Como se mencionó a lo largo del informe, a estas se les paga principalmente según la ocupación de los camiones y kilómetros recorridos. Por otra parte, el pago se realiza en base a la mejor solución obtenida por Conaprole luego de realizada la recolección. Esta solución no siempre es la mejor para la empresa, ya que el recorrido de la empresa no comienza en la planta, donde lo considera Conaprole. Por lo que, podría ser beneficioso trabajar en relaciones ganar-ganar con las empresas fleteras, tomando en cuenta los intereses de ambas empresas para maximizar el beneficio total, sin obtener la eficiencia de uno en detrimento del otro. Por otra parte, como se mencionó en la Sección 9.1, los kilómetros recorridos incluyen otros conceptos asociados. Tener información más detallada de la composición de los costos puede ayudar a determinar qué aspectos a trabajar para poder obtener un beneficio mutuo.

Un punto a trabajar en la operativa actual, es que ante variaciones en la producción de leche en los tambos, las empresas fleteras desconocen cuál será la mejor solución antes de realizar el recorrido, lo que lleva a ineficiencias en las rutas escogidas. Sin dudas, esto ya está contemplado en el sistema tarifario, por lo que si se mejorara se podría renegociar con las empresas fleteras logrando un ahorro para ambas partes.

Para atacar este punto, planteamos dos enfoques de trabajo. Por un lado, trabajar sobre la predicción de la producción, se plantea como sugerencias tomar



fenómenos climáticos, costo del litro de leche y tipo de alimentación del tambo, para saber el impacto que tendrá variaciones climáticas, así como la estacionalidad de la producción. Por otra parte, se puede implementar tecnología SCADA, distribuida estratégicamente, para saber la cantidad de litros con los que cuenta cada tambo previo a que la empresa fletera comience su recorrido.

De esta forma se podría planificar horas antes de salir a recolectar, con datos aproximados pero confiables, reduciendo los costos para las empresas fleteras y por tanto generando también ahorros para Conaprole si se trabaja este punto en conjunto.

Si ejecuciones tan inmediatas no fueran posibles, se puede trabajar en base a datos estadísticos, creando una serie de casos para cada región independiente, que considere los parámetros mencionados y las fluctuaciones a lo largo del año. Como generalmente hay variaciones mínimas entre un día y el siguiente, se puede modelar como varios casos cuasi estáticos, para lo que habría que detectar qué fenómenos desencadenarían un ajuste y variación de caso. De esta forma, las empresas fleteras podrían tener una idea previa de una solución cercana al óptimo. Con esta forma de trabajo, habría que analizar la forma de retribución, por ejemplo abonando el mínimo entre lo realizado por la empresa fletera y la mejor solución obtenida el día anterior.

Mediante análisis de sensibilidad se podría calcular el costo de la solución para una producción de tambos ligeramente mayor a la actual. De esta forma se obtendría una solución más robusta y no debería resolverse el software tan a menudo, dándole la posibilidad a las empresas fleteras de conocer las rutas con menor costo antes de incurrir en el gasto. Por lo que pudimos observar en el análisis de sensibilidad, al variar poco la producción no se debería esperar cambios significativos en el valor de la función objetivo.

Una funcionalidad de la herramienta que no fue testeada para este caso es la de planificar eventualidades. En este trabajo no se hizo foco sobre este punto, pero la herramienta debería permitirlo, para casos por ejemplo donde se debe realizar una parada de planta, abrir una planta nueva, o ver si se generarían mejores resultados al atender a un tambo desde otra planta o cambiando la asignación de tambos a una zona para recolección de leche.

Otro punto interesante para trabajar es buscando los proyectos de mayor impacto para la empresa: ¿Qué proyectos reeditarían más para el negocio con un presupuesto dado?: Cambiar a sistema de conexión eléctrica trifásica que permita enfriar la leche más rápido; aumentar la capacidad de almacenamiento de un tambo para disminuir la frecuencia de visita; aumentar el tamaño de la entrada al tambo; etc. También es de gran interés definir las ventanas de tiempo para cada tambo que maximicen la ganancia. Como se comentó previamente, los horarios de ordeño de un tambo no se pueden modificar constantemente ya que someten a

stress al ganado, por lo que producen menos leche. Sería interesante estudiar cuál es la ventana horaria para cada tambo que minimice costos de recolección a lo largo del año, tomando en cuenta la estacionalidad y posibles fenómenos climatológicos adversos. La adición de tanques incluso podría levantar la restricción de ventanas en algunos casos, si el tambero trabaja con dos conjuntos de tanques distintos, o normalmente dejando un remanente de leche para que el ordeño nuevo se realice sobre leche fría, minimizando el tiempo de enfriado previo a la recolección. Es decir utilizar los tanques como amortiguación entre la producción y la recolección.

Creemos que el campo de trabajos futuros es muy rico y sin dudas resultará de interés para Conaprole seguir profundizando en estos temas para el desarrollo futuro de su negocio.

## Referencias

1. Beltrami, E. J., y Bodin, L. D. (1974). Networks and vehicle routing for municipal waste collection. *Networks*, 4(1), 65.
2. Braekers, K., Ramaekers, K., y Van Nieuwenhuysse, I. (2016). The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 - 313.
3. Campbell, A., y Wilson, J. (2014). Forty years of periodic vehicle routing. *Networks*, 63(1), 2-15.
4. Christofides, N., y Beasley, J. E. (1984). The period routing problem. *Networks*, 14(2), 237.
5. Dayarian, I., Crainic, T. G., Gendreau, M., y Rei, W. (2015). A branch-and-price approach for a multi-period vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 55, 167 - 184.
6. Francis, P., Smilowitz, K., y Tzur, M. (2008). The period vehicle routing problem and its extensions. *Operations Research/ Computer Science Interfaces Series*, 43, 73-102.
7. Gaudioso, M., y Paletta, G. (1992). A heuristic for the periodic vehicle routing problem. *Transportation Science*(2), 86.
8. G. B. Dantzig, a., y J. H. Ramser, a. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*(1), 80.
9. Golden, B., Raghavan, S., y Wasil, E. (2008). The vehicle routing problem: Latest advances and new challenges. , 43.
10. Hoffman, K. L., Padberg, M., y Rinaldi, G. (2013). Traveling salesman problem. En S. I. Gass y M. C. Fu (Eds.), *Encyclopedia of operations research and management science* (pp. 1573–1578).
11. Michallet, J., Prins, C., Amodeo, L., Yalaoui, F., y Vitry, G. (2014). Multi-start iterated local search for the periodic vehicle routing problem with time windows and time spread constraints on services. *Computers Operations Research*, 41, 196 - 207.
12. Rego, C., Gamboa, D., Glover, F., y Osterman, C. (2011). Invited review: Traveling salesman problem heuristics: Leading methods, implementations and latest advances. *European Journal of Operational Research*, 211, 427 - 441.
13. Russell, R., y Igo, W. (1979). An assignment routing problem. *Networks*, 9(1), 1.
14. Tan, C., y Beasley, J. (1984). A heuristic algorithm for the period vehicle routing problem. *Omega*, 12(5), 497-504.
15. Toth, P., y Vigo, D. (2002). Models, relaxations and exact approaches for the capacitated vehicle routing problem. *Discrete Applied Mathematics*, 123(1-3), 487-512.
16. Tummel, C., Franzen, C., Hauck, E., y Jeschke, S. (2013). The multi-depot heterogeneous fleet vehicle routing problem with time windows and

assignment restrictions (m-vrptwar)..



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
FACULTAD DE INGENIERÍA



# Anexo: Estado del Arte

## Problema de ruteo de vehículos periódico.

ALUMNOS

Danilo Alvez, Juan Pablo Chalupa, Diego Correa

TUTOR

Ing. Pedro Piñeyro



## Resumen

En este trabajo se realiza una revisión bibliográfica del estado del arte del Problema de Ruteo de Vehículos Periódico (PVRP: Periodic Vehicle Routing Problem). Se presentan los primeros modelos de problema de ruteo de vehículos: Problema del Vendedor Viajante (TSP: Travelling Salesman Problem) y las primeras formulaciones genéricas del Problema de Ruteo de Vehículos (VRP: Vehicle Routing Problem). Se presenta también el primer modelo de PVRP y algunas de sus variantes más conocidas, así como sus modelos más recientes y técnicas de resolución. El PVRP se puede modelar como un problema de programación matemática del tipo MILP (programación lineal entera mixta) que involucra variables enteras y continuas, y que resulta ser NP-Hard, por lo cual no es posible obtener una solución óptima en un tiempo de cómputo razonable para instancias reales. La revisión observa lo publicado hasta el año 2018.





## Introducción

El ruteo de vehículos consiste en decidir como asignar de forma ordenada un conjunto de clientes a vehículos, satisfaciendo ciertas condiciones para cumplir con un servicio. Las restricciones más comunes suelen ser la máxima capacidad de carga de los vehículos, satisfacer la demanda de todos los clientes y restricciones propias del modelo como que el vehículo parta y retorne al depósito. El problema de ruteo de vehículos no termina al encontrar una solución que cumple todas las restricciones (solución factible), sino que además busca la optimalidad. Suele ser el objetivo del problema encontrar las rutas con menor costo, con menores distancias totales recorridas, minimizar el tiempo total de transporte o minimizar la flota requerida entre otros.

En el Problema de Ruteo de Vehículos Periódico (PVRP) clientes requieren visitas en uno o más días dentro de un período de planificación, donde cada cliente tiene un conjunto días posibles a ser visitado. Por tanto, se debe asignar a cada cliente un día de visita dentro de los posibles, y se debe resolver a la vez un Problema de Ruteo de Vehículos (VRP) para cada día del período de planificación.

Es así que, el PVRP se puede considerar una extensión del VRP, siendo el TSP el primer problema planteado formalmente como un problema de ruteo de vehículos.

## Traveling Salesman Problem

El problema original que inspira la posterior investigación del VRP surge del problema conocido como TSP (“Traveling Salesman Problem” o Problema del Vendedor Viajero). (Rego, Gamboa, Glover, y Osterman, 2011) es uno de los tantos artículos que se pueden encontrar sobre este tema. Como mencionan los autores, este problema ha recibido la atención de muchos matemáticos y científicos porque es un problema fácil de plantear pero la complejidad yace en su resolución. Es un problema atractivo debido a todos los escenarios con los que se los puede relacionar en la práctica.

El problema originalmente se plantea como un vendedor ambulante que desea visitar exactamente una vez cada ciudad, definidas como una lista de  $n$  nodos, donde el costo de traslado entre la ciudad  $i$  y la  $j$  es  $c_{ij}$ , retornando finalmente al lugar de partida. El problema a resolver consiste en lograr determinar cuál es la ruta menos costosa para hacer todo el recorrido.

La dificultad del TSP radica en que es un problema altamente combinatorio, siendo representativo de los problemas de optimización combinatoria y pertenece a la clase de problemas  $NP - completo$ . Ver [Problemas NP](#) para una descripción

de la clase de complejidad  $NP - completo$ .

A la fecha del artículo [Hoffman, Padberg, y Rinaldi \(2013\)](#), nadie había encontrado un algoritmo que resuelva el problema en tiempo polinomial. Esto, sin embargo, no significa que estos problemas sean inabordables. Todo lo contrario, este tipo de problemas al día de hoy, se están resolviendo todo el tiempo. El problema TSP es aplicable a diversos problemas y esto junto a su dificultad hace que el problema sea altamente estudiado y derive en muchos subproblemas teniendo cada uno un distinto conjunto de restricciones.

A continuación se buscará ilustrar la dificultad combinatoria del problema a través de un ejemplo: El vendedor parte del punto 0 y se debe entregar mercadería a los 15 puntos de la Figura 30.

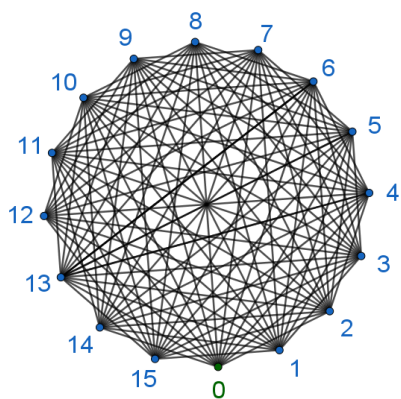


Figura 30: Todas las rutas posibles (elaboración propia)

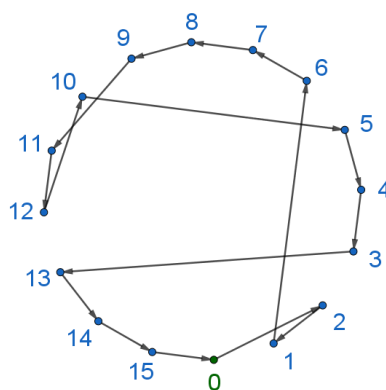


Figura 31: Una de las rutas posibles (elaboración propia)

La pregunta a responder es ¿Cuál es la ruta de menor costo? Si uno fuera a evaluar todas las rutas posibles sin tomar en cuenta el sentido de recorrido, debería comparar 653.837.184.000 rutas, mostrándose en la Figura 31 una de esas posibles rutas. La pregunta a responder es cómo se abordan estos problemas sin evaluar todas las rutas. A lo largo de los años se han desarrollado algoritmos buenos que eliminan muchas rutas que ya se sabe que no van a ser la solución óptima. La eliminación de estas rutas hace que el problema se pueda resolver en menos tiempo.

El TSP admite distintas formulaciones matemáticas, pudiéndose representar mediante un grafo donde cada ciudad es un nodo y las líneas dibujadas entre cada dos nodos llamados arcos. Cada arco tiene asociado una distancia o costo que es lo que se buscará optimizar. Cuando el vendedor puede ir a cada ciudad directamente, se dice que el grafo está completo. Una ruta corresponde a un subconjunto de líneas llamado un tour. El largo del tour, o costo, se determina sumando el valor de cada arco. El TSP se va a diferenciar en dos casos, el primero importa si el

arco va del nodo  $i$  al  $j$  o del  $j$  al  $i$ , conocido como el problema asimétrico. En el segundo caso, moverse del primer nodo al segundo o viceversa, es lo mismo. Este problema se conoce como el problema simétrico del TSP. Se introducirá el modelo presentado por [Hoffman et al. \(2013\)](#), primero del caso asimétrico y luego simétrico, con notación modificada respecto a la formulación original, que se mantendrá a lo largo del documento:

Dado un grafo dirigido  $G = (N, A)$ , donde  $N = \{0, 1, \dots, n\}$  conjunto de  $n + 1$  nodos y  $A$  es el conjunto de arcos. El nodo 0 representa el depósito, mientras que los nodos restantes corresponden a los clientes.

### Caso asimétrico

Se define la variable:

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \text{ esta en el tour} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Dado el hecho de que cada nodo del grafo debe contener exactamente un arco apuntando hacia él y otro saliendo de él, se obtiene de esta forma el clásico problema de asignación. Estas restricciones solas no son suficientes para evitar los subtours, es decir, visitar un punto ya visitado o que se formen tours aislados y cerrados. Por eso, una correcta formulación del problema debe impedir que ocurran los subtours con restricciones adicionales, ya que no permiten soluciones factibles. Para una mejor descripción de los mismo ver [Subtour](#). Entonces el problema se puede formular de la siguiente manera según ([Hoffman et al., 2013](#)):

$$\min \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \quad (49)$$

$$s.a : \quad \sum_{j=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (50)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i,j} = 1 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (51)$$

$$\sum_{i \in K} \sum_{j \in K} x_{ij} \leq |K| - 1 \quad \forall K \subseteq \{1, \dots, n\} \quad (52)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (53)$$

Donde  $K$  es un subconjunto no vacío de nodos  $1, \dots, n$ . El costo  $c_{ij}$  puede ser distinto al costo  $c_{ji}$ . Observar que hay  $n(n - 1)$  variables que pueden tomar el valor de 0 o 1 en esta formulación. La función objetivo (49) busca quedarse con la ruta de menor costo cumpliendo las restricciones. La sumatoria recorre los arcos pertenecientes a la ruta sumando sus costos asociados.

Las restricciones (50), limitan la cantidad de arcos salientes del nodo  $i$  a otro cualesquiera, es decir, solo hay un nodo visitado inmediatamente siguiente al nodo  $i$ . Las restricciones (51) acotan la cantidad de arcos entrantes, limitando también a uno. Las restricciones (52) evitan los subtours. Y por último, las restricciones (53) definen el dominio de las variables de decisión.

**Caso simétrico** Para la formulación del problema simétrico lo que cambia es que el costo asociado a trasladarse del nodo  $i$  al nodo  $j$  es igual al costo de trasladarse del nodo  $j$  al nodo  $i$  ( $c_{ij} = c_{ji}$ ). Como el sentido ahora no importa, se puede considerar sólo un arco entre cada posible par de nodos. Entonces, sea  $x_r = \{0, 1\}$  la variable de decisión donde  $r \in A$  son todos los arcos del grafo y  $c_r$  es el costo de recorrer el arco  $r$ . Para encontrar un tour en este grafo se debe seleccionar un subconjunto de arcos de tal forma que contenga a todos los nodos en exactamente dos de los arcos seleccionados. Entonces en la formulación del problema la cantidad de variables es  $n(n - 1)/2$ , que pueden tomar el valor de 0 o 1, lo cual es la mitad de variables del problema anterior. La formulación del problema queda de la siguiente manera.

$$\min \quad \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k \in J(i)} c_k x_k \quad (54)$$

$$s.a : \quad \sum_{k \in J(i)} x_k = 2 \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (55)$$

$$\sum_{j \in E(K)} x_j \leq |K| - 1 \quad \forall K \subset \{1, \dots, n\} \quad (56)$$

$$x_r = \{0, 1\} \quad \forall r \in E \quad (57)$$

donde  $J(j)$  es un conjunto de todos los arcos sin dirección conectados al nodo  $j$  y  $E(K)$  un subconjunto de todos los arcos sin dirección que conectan el subconjunto no vacío de ciudades  $K$ .

En primer lugar, al igual que en el modelo anterior, se puede observar la función objetivo (54) similarmente al caso anterior, lo que se busca es encontrar aquellos arcos que minimicen el costo total de recorrerlos. La primera restricción (55), indica que solo pueden existir dos arcos conectados al nodo  $j$ , y la segunda restricción (56) evita los subtours en el armado de las rutas. Por último, la tercera restricción (57) lo que quiere decir es que  $x_j$  vale 1 si el arco se recorre, y 0 en caso contrario. El problema simétrico es un caso especial del caso asimétrico, pero la experiencia práctica ha mostrado que los algoritmos para resolver el problema asimétrico no son buenos para resolver el problema simétrico en general. Por eso es que se necesitan formulaciones distintas para cada caso.

## Procedimientos de resolución

Ya definido el problema y el modelo matemático, lo que resta ver es la forma de llegar a una solución para este problema. Se hablará un poco de los algoritmos existentes para el TSP.

Cualquier ruta que pase por todos los nodos del problema y cumpla con las restricciones del problema es considerada una solución factible del problema. Dicha solución tiene asociado un valor en la función objetivo que es lo que se comparará para determinar la mejor solución.

Los algoritmos que construyen soluciones factibles en un tiempo de cómputo razonable son llamadas heurísticas. En este tipo de problemas computacionalmente difíciles de resolver, acudir a métodos que nos den una solución exacta puede implicar un tiempo de ejecución no aplicable en la práctica. Por esta razón existe un amplio estudio sobre diversas heurísticas; contar con una heurística que dé una solución cercana al óptimo en un tiempo de ejecución razonable es vital.

[Hoffman et al. \(2013\)](#) diferencian las heurísticas que construyen soluciones factibles en una sola etapa, llamadas heurísticas constructivas, de los algoritmos iterativos que tratan de modificar y mejorar la solución, llamadas heurísticas mejoradas. Cuando se usa un algoritmo en el cual la solución que se obtiene depende del punto de partida, el mismo algoritmo puede ser usado varias veces con distintos valores iniciales elegidos al azar. A menudo, si se necesita una solución rápida, suele utilizarse una heurística que haya demostrado empíricamente encontrar soluciones cercanas al óptimo en ese tipo de modelo.

Investigaciones realizadas por Golden y Stewart (1985), Junger, Reinelt y Rinaldi (1994), Johnson y McGeoch (2002), y Applegate et al. (2006) describen algoritmos capaces de encontrar buenas soluciones en problemas de gran tamaño de TSP. Es decir encuentran soluciones cercanas al óptimo en tiempos de ejecución relativamente bajos. Uno de los algoritmos que parece ser de los más efectivos en términos de la calidad de la solución es uno propuesto por Lin y Kernighan y en particular con las variantes propuestas por Helsgaun (2000).

**Aplicaciones** Este problema ha sido objeto de estudio en los últimos años debido a las muchas aplicaciones prácticas de importancia que tiene. Es un problema simple de plantear, pero como se ha visto, difícil de resolver. Hay casos prácticos importantes que pueden ser formulados como TSP y muchos otros problemas que son generalizaciones de este caso.

[\(Hoffman et al., 2013\)](#) plantea los siguientes problemas como ejemplos de aplicación del TSP:

- Análisis de estructuras de cristal.
- Overhauling en motores de turbinas a gas.
- Manejo de material en depósitos.

- Minimización de mermas en recortes de materiales.
- Programación de la producción para una maquina.
- Asignación de rutas y aviones de una flota específica.
- Secuenciación del ADN.

Como se puede ver, este modelo es aplicable a diversos problemas, y además este problema se ha ido expandiendo a lo largo del tiempo.

Por último, generalmente el TSP aparece como un subproblema del Vehicle Routing Problem (VRP) que es un problema aún más complejo y quizá el problema más conocido. El VRP es una extensión del TSP donde se permite más de una ruta.

### Vehicle Routing Problem

Como se verá a lo largo de este documento cuando se cambian las restricciones o planteamientos de un problema matemático incurrimos en una nueva variante del mismo.

Es así que [G. B. Dantzig y J. H. Ramser \(1959\)](#) presentan por primera vez el VRP como una extensión del TSP. Esta generalización se debe a que la capacidad de transporte del vehículo es menor a la suma total de las demandas de los clientes, por ende es necesario generar más de una ruta, en cambio si la capacidad fuese mayor que la suma total de las entregas, estaríamos en la presencia del TSP.

Del problema de VRP surgen variantes como por ejemplo, CVRP (Capacitated VRP) en el cual se cuenta con una flota homogénea de vehículos en el cual la restricción es la capacidad. Otro caso es el VRP con Ventanas de Tiempo (en inglés VRPTW) en el cual las visitas están sujetas a ventanas horarias que dependen del nodo.

Más recientemente, se han empezado a estudiar los problemas conocidos como rich VRPs que intentan acercarse más a lo que sucede en la realidad. Estos problemas tratan de adoptar los mayores elementos de la realidad posible como por ejemplo; contar con varios depósitos, tener que realizar varios viajes, capacidad de los camiones, ventanas de tiempo, entre otros. A continuación se presenta el VRP según lo describe [Toth y Vigo \(2002\)](#)

**Notación y variantes** Dado un grafo dirigido  $G = (N, A)$ , donde  $N = \{0, 1, \dots, n\}$  conjunto de  $n+1$  nodos y  $A$  es el conjunto de arcos. El nodo 0 representa el depósito, mientras que los nodos restantes corresponden a los clientes. Dicho conjunto se representa de la siguiente manera  $C = N \setminus \{0\}$ .

Cada cliente  $i \in C$  requiere que le entreguen una cantidad de unidades  $q_i$  desde el depósito. Una flota homogénea de  $K$  vehículos idénticos con una capacidad  $Q$

sale desde el depósito para cumplir con la entrega de los productos a todos los clientes. Además el se tiene el costo no negativo  $c_{ij}$ , correspondiente a recorrer el arco  $(i, j) \in A$ . Una ruta se define eligiendo los nodos que se visitarán y se indica también su orden, dando lugar al conjunto  $\{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ , con  $i_1 = i_n = 0$ , es decir, tiene que comenzar y terminar en el depósito.  $\{i_2, \dots, i_n - 1\} \subseteq C$  es un circuito simple en  $G$  que contiene al depósito.

La versión del VRP con flota homogénea, consiste en encontrar un conjunto de rutas que cumplan que:

1. Cada cliente es visitado por una única ruta una sola vez.
2. Todas las rutas parten y regresan al deposito.
3. La suma de la demanda total de los clientes pertenecientes a la ruta es menor o igual a la capacidad del vehículo.

Minimizando el costo total de la ruta que corresponde a la suma de los costos de los arcos recorridos.

Al igual que el desarrollo visto del problema TSP, surgen dos casos del problema de VRP. El problema simétrico y el asimétrico que se diferencian en el costo de recorrer cada arco. En el caso simétrico el costo  $c_{ij} = c_{ji}$ , en el caso asimétrico esto no se cumple.

A continuación se presenta la formulación matemática de [Toth y Vigo \(2002\)](#) con el uso de la variable entera:

$$x_{ij} \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo viaja del nodo } i \text{ al } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El modelo matemático con su notación modificada para mantener una coherencia en el documento es:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \quad (58)$$

$$s.a : \quad \sum_{i \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in C \quad (59)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in C \quad (60)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j} = K \quad (61)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0} = K \quad (62)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{i \notin S} x_{ij} \geq \gamma(S) \quad \forall S \subseteq C, S \neq \emptyset \quad (63)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall i, j \in N \quad (64)$$

En donde se busca minimizar la función objetivo (58) que es la suma de todos los costos de recorrer los arcos de las rutas. Las restricciones (59) y (60) aseguran que un cliente solo debe ser visitado una vez y que si un camión visita un cliente, el camión debe salir de ese nodo. Las restricciones (61) y (62) establecen que un número  $K$  de vehículos debe de partir y volver al depósito respectivamente. Las restricciones (63) conocidas con el nombre de “capacity-cut” (corte-capacidad) imponen el requisito de capacidad de los vehículos y la eliminación de los subtours, estipulan que cada corte de  $S$  y su complemento  $(V \setminus S, S)$  es atravesado por al menos  $\gamma(S)$  arcos, siendo  $\gamma(S)$  la cantidad mínima de vehículos necesarios para atender a todos los clientes comprendidos en  $S$ . Y por último las restricciones (64) definen el dominio de las variables de decisión.

**Procedimientos de resolución** En esta sección se presentarán algunos de los procedimientos de resolución existentes en la literatura para encontrar soluciones al problema de VRP. Existen métodos exactos, métodos heurísticos y metaheurísticas. Una metaheurística es un procedimiento de alto nivel diseñado para generar una buena solución a los problemas altamente combinatorios. Estos métodos de resolución tienen el atractivo que pueden ser aplicables a diferentes problemas, en contrapartida con las heurísticas constructivas que son métodos específicos de resolución.

Sería poco viable resolver los problemas de VRP utilizando métodos exactos... Los problemas de VRP, y sus variantes, al ser altamente combinatorios requieren que el método para llegar a una solución obtenga una buena solución en el menor tiempo posible. El método que logre balancear el tiempo de ejecución y la calidad de la solución de la mejor manera va a ser el método que resulte más atractivo. Los métodos exactos pueden tener un tiempo de ejecución muy alto, por lo que muchas veces se dejan de lado. Se opta por usar heurísticas y metaheurísticas que logren dar una buena solución en tiempos menores. Como ejemplo se adjuntan en el [Heurísticas](#) dos heurísticas.

## Periodic Vehicle Routing Problem

El problema de ruteo de vehículos periódico (PVRP por sus siglas en inglés) es una generalización del problema clásico de ruteo de vehículos, en el cual se considera un horizonte de tiempo y se construyen rutas para los distintos días (de aquí en adelante tomaremos día como unidad de tiempo). Para cada día, una flota de vehículos con cierta capacidad, recorre las rutas que comienzan y terminan en el mismo depósito, buscando minimizar el costo total de traslado cumpliendo con las restricciones operacionales. Hasta donde se pudo averiguar, el PVRP es introducido en primera instancia por [Beltrami y Bodin \(1974\)](#) en un artículo acerca



de recolección de residuos, dejando planteado el problema y dos enfoques para su resolución.

### Definición

El problema considerado por [Beltrami y Bodin \(1974\)](#), consiste en la recolección de residuos en la ciudad de Nueva York, donde es necesario que algunos sitios sean visitados todos los días laborables (de lunes a sábado) mientras otros tres veces por semana: lunes, miércoles y viernes; o martes, jueves y sábado. La decisión de asignar un nodo a un subconjunto de días impacta en los tiempos de recorrido y el número de vehículos requeridos.

Si bien [Beltrami y Bodin \(1974\)](#) introducen la idea de considerar la periodicidad de las visitas con los costos de las rutas, no son ellos quienes nombran el problema. [Russell y Igo \(1979\)](#) lo llaman “Problema de asignación de rutas”, definiendo las “agendas”, donde el cliente  $i$  puede ser visitado cierta cantidad de días a la semana, además de especificar qué días puede ser visitado. Aunque no realizan una formulación matemática del problema, proponen tres heurísticas para su resolución. El enfoque de [Russell y Igo \(1979\)](#) señala la dificultad de elegir una combinación válida de días para la frecuencia de servicio especificada.

[Christofides y Beasley \(1984\)](#) introducen “El problema de ruteo periódico” y formulan el problema matemáticamente, con clientes que requieren exactamente  $f$  visitas durante el periodo de planificación. De manera que se tienen que considerar las combinaciones de las  $f$  visitas en el horizonte de tiempo respetando los requerimientos de los clientes.

El término “Problema de Ruteo de Vehículos Periódico” es introducido por [Gaudioso y Paletta \(1992\)](#), centrándose, a diferencia de los anteriores, en minimizar la flota necesaria. Los autores introducen otra definición de periodicidad, distinta a las tres anteriores que consiste en forzar a que el tiempo entre visitas consecutivas al cliente  $i$  sea mayor a un tiempo mínimo  $L_i$  y menor a uno máximo  $U_i$ .

Se define una agenda  $s$  como un subconjunto de días dentro del horizonte de planificación. Si un cliente  $i$  está asociado a la agenda  $s$ , el mismo debe poder recibir todos los días de la agenda. Cabe acotar que un cliente puede tener más de una agenda posible, por ejemplo: si el cliente 1 puede ser visitado lunes y miércoles, las agendas posibles son: {lunes y miércoles}, {lunes} y {miércoles}. Una vez asignado a una agenda, debe recibir el servicio todos los días de la misma, recibiendo todos los días cantidades iguales, y no puede ser asignado a más de una agenda. Cada agenda está completamente definida por el vector  $a_{st}$  tal que:

$$a_{st} \begin{cases} 1 & \text{si el día } t \text{ pertenece a la agenda } s \in S \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

A continuación se introduce la formalización del PVRP realizada por [Francis, Smilowitz, y Tzur \(2008\)](#):

**Dado** el grafo de red completo  $G = (N, A)$ , con los costos de arcos conocidos  $c_{(i,j)}$ ,  $\forall (i,j) \in A$ ; un período de planificación  $T$ , con  $t \in T$ ; el depósito identificado con el nodo  $i = 0$ ; un conjunto de nodos de clientes  $C = N \setminus \{0\}$  tal que cada nodo  $i \in C$  tiene una demanda total de  $W_i$  para todo el periodo de planificación y un número fijo de visitas  $f_i$ ; un conjunto  $K$  de vehículos, todos con capacidad  $Q$ ; un conjunto  $S$  de las posibles agendas de días en los que podrán ser visitados los clientes.

**Encontrar** las asignaciones de las agendas de visita para cada cliente de forma que cada nodo sea visitado el número requerido de veces y se le entregue la demanda  $w_i = \frac{W_i}{f_i}$  en cada una de las visitas; las rutas para cada día de los vehículos que visitaran los clientes.

**Con el objetivo** de obtener costos totales mínimos de visitas.

A continuación se introduce la formulación del PVRP de [Christofides y Beasley \(1984\)](#), con modificaciones para continuar con la nomenclatura utilizada:

### Variables de decisión

$$x_{ijk}^t = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo } k \in K \text{ transita el arco } (i,j) \in A \text{ en el día } t \in T \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$z_i^s = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \in C \text{ es visitado en la agenda } s \in S \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$v_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \in C \text{ es visitado el día } t \in T \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$\mathbf{min} \quad \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk}^t \quad (65)$$

$$s.a : \quad \sum_{s \in S_i} z_i^s = 1 \quad \forall i \in C \quad (66)$$

$$v_i^t = \sum_{s \in S_i} z_i^s a_{st} \quad \forall t \in T; i \in C \quad (67)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ijk}^t \leq \frac{v_i^t + v_j^t}{2} \quad \forall t \in T; i, j \in C (i \neq j) \quad (68)$$

$$\sum_{j \in C} x_{ijk}^t = \sum_{j \in C} x_{jik}^t \quad \forall i \in N, k \in K; t \in T \quad (69)$$

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N} x_{ijk}^t = \begin{cases} v_j^t & \forall j \in C \\ |K| & j = 0 \end{cases} \quad \forall t \in T \quad (70)$$

$$\sum_{i,j \in Q} x_{ijk}^t \leq |Z| - 1 \quad \forall Z \subseteq C; k \in K; t \in T \quad (71)$$

$$\sum_{j \in C} x_{0jk}^t \leq 1 \quad \forall k \in K; t \in T \quad (72)$$

$$\sum_{i \in C} w_i \sum_{j \in N} x_{ijk}^t \leq Q \quad \forall k \in K; t \in T \quad (73)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ijk}^t \leq L \quad \forall k \in K; t \in T \quad (74)$$

$$z_i^s \in \{1, 0\} \quad \forall i \in C; s \in S_i \quad (75)$$

$$x_{ijk}^t \in \{1, 0\} \quad \forall (i, j) \in A; k \in K; t \in T \quad (76)$$

La función objetivo (65) minimiza los costos de los arcos de traslado. Las restricciones (66) aseguran que cada nodo tenga asociado una agenda factible, mientras las (67) definen  $v_i^t$  en los días de visita dentro de la agenda asignada. (68) permiten arcos sólo entre clientes asignados para la entrega en el día  $t$  de  $T$ . Las restricciones (69) introducen la conservación de flujo. (70) aseguran que los nodos sean incluidos en rutas para los días dentro de la agenda. (71) son las restricciones de eliminación de subtours. (72) aseguran que un vehículo no se utilice más de una vez por día. (73) y (74) son las restricciones de capacidad física y de largo de rutas respectivamente. Finalmente, (75) y (76) definen un conjunto de variables.

Si bien [Christofides y Beasley \(1984\)](#) no intentan resolver el problema de forma óptima debido a la alta complejidad del mismo, proponen una relajación mediana para aproximar el costo como la suma de la distancia radial entre nodos y el depósito.

Posteriores formulaciones, como la de [Tan y Beasley \(1984\)](#), proponen un modelo para luego de asignados los días para cada agenda.

En conclusión, hay dos enfoques principales para definir el PVRP: [Russell y Igo \(1979\)](#), y [Tan y Beasley \(1984\)](#) afrontan el PVRP como la extensión de un problema de asignación con un componente de ruteo, mientras que [Christofides y Beasley \(1984\)](#) formulan el PVRP como un problema de ruteo con una decisión de selección involucrada.

## Extensiones y aplicaciones

En esta sección se presentarán algunas de las extensiones recabadas en la revisión bibliográfica y sus aplicaciones.

[Campbell y Wilson \(2014\)](#) recopila información de las publicaciones más importantes en la materia desde 1974 hasta 2014, enfocándose en las aplicaciones y métodos de resolución de lo relevado.

Este artículo, clasifica las distintas publicaciones según su aplicación en tres categorías: visita para recolección; visita para entrega; y visita para brindar un servicio in situ.

Dentro de los servicios de recolección, las aplicaciones más comunes son: basura, reciclaje, desperdicios, deshechos infecciosos, deshechos animales, leche de cabra, repuestos de automóviles, aceite y bienes para la industria. En cuanto a la entrega: bebida, verduras, mercadería para tiendas, ropa de cama de hospitales, mercadería para máquinas expendedoras y sangre. Se destaca un caso que combina los dos anteriores en un servicio de préstamo de libros entre bibliotecas, donde camionetas levantan y entregan libros en el recorrido. Dentro de los servicios in situ: vendedores de lotería, personal de mantenimiento, inspectores de calidad, profesores que visitaban a domicilio a alumnos con discapacidades, enfermeras de casas de salud, recopilar datos de routers de móviles y vehículos submarinos no tripulados de monitoreo.

Cabe resaltar que por la naturaleza de estas situaciones es necesario modelarlas como PVRP: la basura no puede estar mucho tiempo sin ser recogida por cuestiones higiénicas: evitar transmisión de enfermedades y pestes; la entrega de bienes tiene que ser constante para evitar quiebres de stock en depósitos con capacidad limitada y productos perecederos; los servicios de mantenimiento preventivo tienen que visitar a sus clientes cada cierto tiempo. Y la característica en común de estas aplicaciones que las lleva a ser modeladas como PVRP es que no todos los puntos/clientes requieren la misma periodicidad de visitas.

Por otra parte, [Braekers, Ramaekers, y Van Nieuwenhuysse \(2016\)](#) recopila publicaciones referidas a VRP y sus variantes, analizando 277 casos entre 2009 y 2015. Estas publicaciones son clasificadas en tres niveles de profundidad y cinco grupos principales: tipo del estudio; características de los escenarios a estudiar; características físicas del problema; características de la información; y características de los datos.

Los autores analizaron cada una de las publicaciones y las categorizaron dentro del árbol de clasificaciones definidas para luego contabilizar la cantidad de publicaciones por categoría, permitiendo colocar a una publicación en más de una categoría si corresponde ya que los niveles no son necesariamente excluyentes.

En un primer análisis se observa que de las 277 publicaciones analizadas 29 corresponden a problemas de ruteo de vehículos con múltiples períodos, lo que sería aproximadamente 10,5 %. En la Tabla 37 se presentan las cantidades de las publicaciones categorizadas solo correspondientes a PVRP. Se puede observar que de las 29 publicaciones 23 corresponden a estudios de PVRP basados en metaheurísticas lo cual es casi un 80 %, lo que va de la mano con que es un problema NP-Hard que

de otra forma puede resultar inabarcable.

Con respecto a las características de los escenarios, se destaca que en la mayoría de los estudios es conocido de manera determinista el número de paradas en la ruta y la demanda de los clientes. También la mayoría de los estudios son basados en modelos que no permiten la división de la carga a entregar en más de un vehículo. Según lo recopilado en varios artículos esto último presuntamente puede deberse a que los clientes no desean ser visitados con mucha frecuencia y que las empresas cuidan las relaciones cliente-delivery (Coene, Arnout, y Spieksma, 2010).

En el grupo de las características físicas de los problemas, la totalidad de los problemas son con clientes ubicados en los nodos del grafo y la mayoría son de simple deposito y de un único origen. En lo que concierne a los vehículos, sigue predominando en menor medida que sea de capacidad limitada, flota homogénea o de similares capacidades, en su mayoría con un límite de flota mayor a 1 y con tiempos de viaje deterministas.

Es fácil observar que las opciones de modelos simple origen, único deposito y vehículos homogéneos son las de menor complejidad ya que sus alternativas (múltiple deposito, varios puntos de origen y flota heterogénea) agregan un nivel considerable en la necesidad de poder de cálculo.

Por último, cabe destacar que la mayoría de los modelos se basan en información determinista, siendo los modelos matemáticos estocásticos toda un área aparte con su propia complejidad y que los datos utilizados para validar y calcular las eficiencias de los modelos son datos sintéticos (no propios de la realidad).

1. Type of Study	1.1. Theory		1
	1.2. Applied methods	1.2.1. Exact methods	3
		1.2.2. Classic Heuristics	2
		1.2.3. Metaheuristics	23
1.2.4. Simulation		1	
	1.3. Implementation documented		3
2. Scenario Characteristics	2.1. Number of stops on route	2.1.1. Known (deterministic)	27
		2.1.2. Partially known, partially probabilistic	2
	2.2. Load splitting constraint	2.2.1. Splitting allowed	3
		2.2.2. Splitting not allowed	26
	2.3. Customer service demand quantity	2.3.1. Deterministic	28
	2.4. Request times of new customers	2.4.2. Stochastic	1
		2.4.3. Unknown	1
		2.5. On site service/waiting times	2.5.1. Deterministic
		2.5.2. Dependent	1
		2.5.4. Unknown	1
	2.6. Time window structure	2.6.1. Soft time windows	2
		2.6.2. Strict time windows	13
	2.7. Time horizon	2.7.2. Multi period	29
	2.8. Backhauls	2.8.1. Nodes request simultaneous pick ups and deliveries	2
	2.9. Node/Arc covering constraints	2.9.1. Precedence and coupling constraints	1
2.9.2. Subset covering constraints		2	
2.9.3. Recourse allowed		1	
3. Problem Physical Characteristics	3.1. Transportation network design	3.1.1. Directed network	9
		3.1.2. Undirected network	11
	3.2. Location of addresses (customers)	3.2.1. Customers on nodes	29
	3.3. Number of points of origin	3.3.1. Single origin	23
		3.3.2. Multiple origins	6
	3.4. Number of points of loading/unloading facilities (depot)	3.4.1. Single depot	23
		3.4.2. Multiple depots	6
	3.5. Time window type	3.5.1. Restriction on customers	13
		3.5.2. Restriction on depot/hubs	4
		3.5.3. Restriction on drivers/vehicle	6
3.6. Number of vehicles	3.6.2. Limited number of vehicles ( $n > 1$ )	22	
	3.6.3. Unlimited number of vehicles	7	
3.7. Capacity consideration	3.7.1. Capacitated vehicles	25	
	3.7.2. Uncapacitated vehicles	5	
3.8. Vehicle homogeneity (Capacity)	3.8.1. Similar vehicles	21	
	3.8.2. Load-specific vehicles	2	
	3.8.3. Heterogeneous vehicles	4	
	3.8.4. Customer-specific vehicles	4	
3.9. Travel time	3.9.1. Deterministic	29	
3.10. Objective	3.10.1. Travel time dependent	9	
	3.10.2. Distance dependent	19	
	3.10.3. Vehicle dependent	12	
	3.10.4. Function of lateness	3	
	3.10.5. Implied hazard/risk related	1	
	3.10.6. Other	5	
4. Information Characteristics	4.1. Evolution of information	4.1.1. Static	27
		4.1.2. Partially dynamic	2
	4.2. Quality of information	4.2.1. Known (deterministic)	26
		4.2.2. Stochastic	1
		4.2.4. Unknown (Real-time)	2
4.3. Availability of information	4.3.2. Global	29	
4.4. Processing of information	4.4.1. Centralized	29	
5. Data Characteristics	5.1. Data Used	5.1.1. Real world data	4
		5.1.2. Synthetic data	21
		5.1.3. Both real and synthetic data	4

Tabla 37: Cantidad de artículos de PVRP por clasificación (Braekers et al., 2016)

**Flexible Periodic Vehicle Routing Problem** Como se ha visto una de las características del modelo clásico de PVRP es que a cada cliente se le asigna una agenda de días en que sera visitado y se le entrega la misma cantidad cada uno de esos días. En cambio el modelo propuesto por [Archetti, Fernández, y Huerta-Muñoz \(2017\)](#) llamado Problema de Ruteo de Vehículos Periódico Flexible (FPVRP por sus siglas en inglés) no restringe los días de visita mediante la asignación de una agenda, solo impone un límite en la cantidad máxima que se puede entregar en cada visita, cumpliendo con la demanda total del cliente en el horizonte de tiempo.

Otra de las particularidades presentadas en el modelo es el uso de las formulaciones basadas en la carga, en las cuales las variables de decisión identifican en las soluciones los arcos usados sin hacer explícitos los vehículos que los transitan ([Archetti, Bianchessi, Irnich, y Speranza, 2014](#)) a diferencia de las formulaciones tradicionales, con una flota de vehículos homogénea.

Para esto, se necesita un conjunto adicional de variables continuas que se asocian al flujo por los arcos garantizando de esta forma que las rutas estén definidas adecuadamente. Estas formulaciones basadas en la carga tienden a ser efectivas en la práctica (lo cual se demuestra en los resultados prácticos de los autores), aunque sus relajaciones de programación lineal suelen ser más débiles que las ya conocidas restricciones de sub-tour. Aunque por otro lado, tienen un menor número de variables.

El estudio mencionado presenta formulaciones basadas en las cargas para los modelos PVRP, FPVRP y FPVRP-IC (Problema de Ruteo de Vehículos Periódico Flexible con restricciones de inventario).

El modelo matemático de PVRP basado en las cargas queda presentado a continuación, teniendo en cuenta que se modificó la nomenclatura de los modelos presentados en [Archetti et al. \(2017\)](#) para que coincidiera con la usada anteriormente. Las variables del modelo son:

$$z_i^t = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \in C \text{ es visitado en el periodo } t \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$y_{ij}^t = \begin{cases} 1 & \text{si el arco } (i, j) \in A \text{ es atravesado en el periodo } t \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$z_0^t : \text{Número de vehículos usados en el periodo } t \in T.$$

$l_{ij}^t$  : Carga con la que el vehículo atraviesa el arco  $(i, j) \in A$ , en el periodo  $t \in T$ .

$q_i^t$  : Cantidad entregada al cliente  $i \in C$ , en el periodo  $t \in T$ .

$$v_i^s = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } i \in C \text{ es visitado de acuerdo a la agenda } s \in S_i \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Dado el grafo de red completo  $G = (N, A)$ , con los costos de arcos conocidos  $c_{(i,j)}$ ,  $\forall (i, j) \in A$ ; un período de planificación  $T$ , con  $t$  días; el depósito identificado con el nodo  $i = 0$ ; un conjunto de nodos de clientes  $C = N \setminus \{0\}$  tal que cada nodo  $i \in C$  tiene una demanda total de  $W_i$  para todo el periodo de planificación y una capacidad de almacenamiento  $w_i$ ; un conjunto  $K$  de vehículos, cada uno con capacidad  $Q$ .

$$\min \quad \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij}^t \quad (77)$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{s \in S_i} v_i^s = 1 \quad \forall i \in C \quad (78)$$

$$z_i^t = \sum_{s \in S_i} v_i^s a_{st} \quad \forall i \in C, t \in T \quad (79)$$

$$y_{ij}^t \leq \frac{z_i^t + z_j^t}{2} \quad \forall i, j \in C (i \neq j), t \in T \quad (80)$$

$$\sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}^t - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ji}^t = \begin{cases} -w_i z_i^t, & \forall i \in C \\ \sum_{j \in C} w_j z_j^t, & i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in N, t \in T \quad (81)$$

$$\sum_{i \in C} q_i^t \leq Q z_0^t \quad \forall t \in T \quad (82)$$

$$\sum_{j|(i,j) \in A} y_{ij}^t = z_i^t \quad \forall i \in C, t \in T \quad (83)$$

$$\sum_{j|(i,j) \in A} y_{ij}^t = \sum_{j|(i,j) \in A} y_{ji}^t \quad \forall i \in N, t \in T; \quad (84)$$

$$l_{ij}^t \leq Q y_{ij}^t \quad \forall (i, j) \in A, t \in T \quad (85)$$

$$\sum_{j|(0,j) \in A} y_{0j}^t \leq |K| \quad \forall t \in T \quad (86)$$

$$z_i^t \in \{0, 1\} \quad \forall i \in C, t \in T \quad (87)$$

$$y_{ij}^t \in \{0, 1\}, l_{ij}^t \geq 0 \quad \forall (i, j) \in A, t \in T \quad (88)$$

$$v_i^s \in \{0, 1\} \quad \forall i \in C, s \in S_i \quad (89)$$

La función objetivo (77) minimiza el costo total de transporte para todo el horizonte de tiempo. Las restricciones (78) aseguran que cada cliente tendrá solo una agenda asignada. Las restricciones (79) relacionan la agenda seleccionada con la visita al cliente. Las restricciones (80) permiten el uso de una arista conectada a dos clientes solo si ambos clientes están asignados en el mismo periodo. Las restricciones (81) son restricciones de flujo con respecto a la carga por los arcos. Las



restricciones (82) establecen que la cantidad total entregada en el instante  $t$  no exceda la capacidad total de los vehículos utilizados en el instante  $t$ . Las restricciones (83) expresan que para un cliente visitado sale un solo arco del mismo. Las restricciones (84) son restricciones de flujo con respecto al tránsito en los arcos. Las restricciones (85) imponen que la carga de los arcos no exceda la capacidad de los vehículos y vincula las variables  $l$  e  $y$ . Las restricciones (86) aseguran que la cantidad de vehículos usados es a lo sumo  $|K|$  (cantidad total de vehículos). Las restricciones de la (87) a la (89) definen los dominios de las variables.

Como se mencionó anteriormente el modelo FPVRP no toma en cuenta las agendas de entrega, por lo que para su formulación se prescinde de la variable  $v_i^s$ .

El modelo matemático de FPVRP basado en las cargas (Archetti et al., 2017) queda presentado a continuación, ajustado a la nomenclatura utilizada:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij}^t \quad (90)$$

$$\mathbf{s.a:} \quad q_i^t \leq w_i z_i^t \quad \forall i \in C, t \in T \quad (91)$$

$$\sum_{j|(i,j) \in A} l_{ij}^t - \sum_{j|(i,j) \in A} l_{ji}^t = \begin{cases} -q_i^t & \forall i \in C \\ \sum_{i' \in C} q_{i'}^t & i = 0 \end{cases} \quad \forall i \in N, t \in T \quad (92)$$

Ecuaciones (82) a (86)

$$\sum_{t \in T} q_i^t = W_i \quad \forall i \in C \quad (93)$$

$$z_0^t = \sum_{i \in C} y_{0i}^t \quad \forall t \in T \quad (94)$$

$$q_i^t \geq 0 \quad \forall i \in C, t \in T \quad (95)$$

$$z_0^t \in \mathbb{Z} \quad \forall t \in T \quad (96)$$

Ecuaciones (87) a (88)

La función objetivo (90) minimiza el costo total de transporte para todo el horizonte de tiempo. Las restricciones (91) imponen que la cantidad entregada a cada cliente no exceda el límite de entrega  $w_i$ . Las restricciones (92) son restricciones de flujo con respecto a la carga por los arcos. Las restricciones (93) imponen que la cantidad total entregada a cada cliente al final del horizonte de tiempo sea igual al total establecido  $W_i$ . Las restricciones (94) definen cuántos vehículos se utilizan cada día. Las restricciones de la (95) a la (96) definen los dominios de las variables.

Dadas las características que comparten el modelo FPVRP y el IRP es que los autores Archetti et al. deciden incluirlo en el estudio, pero con el fin de que

sea comparable con las otras formulaciones no se toman en cuenta ni los costos de mantenimiento de inventario en la función objetivo ni las restricciones de inventario en los proveedores, es así que dicha versión del IRP se la define como FPVRP-IC. Con respecto a las variables, toma las mismas utilizadas para el FPVRP y le suma la variable  $l_i^t$ .

$l_i^t$  : Nivel de inventario del cliente  $i \in C$  al final del período de tiempo  $t \in T$ .

El modelo matemático de FPVRP-IC basado en las cargas (Archetti et al., 2017) queda presentado a continuación:

$$\mathbf{min} \quad \sum_{t \in T} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij}^t \quad (97)$$

$$\mathbf{s.a:} \quad l_i^t = l_i^{t-1} - d_i^t + q_i^t \quad i \in C, t \in T \quad (98)$$

$$q_i^t \leq w_i - l_i^{t-1} \quad i \in C, t \in T \quad (99)$$

$$l_i^t \geq 0 \quad i \in N, t \in T \quad (100)$$

Ecuaciones (82) a (86)

Ecuaciones (91) a (92)

Ecuaciones (94) a (96)

Ecuaciones (87) a (88)

La función objetivo (97) minimiza el costo total de transporte para todo el horizonte de tiempo. Las restricciones (98) y (100) determinan el nivel de inventario dentro del horizonte de tiempo y evitan situaciones de quiebre de stock. Las restricciones (99) aseguran que las cantidades entregadas a cada cliente no excedan la máxima cantidad necesaria para cada cliente en cada periodo dentro del horizonte de tiempo.

**Periodic Vehicle Routing Problem with Reassignment Constraints and Balance Constraints** Existen casos en que es necesario considerar que se modifiquen lo menos posible los días de entrega, debido a que se cambiarían las rutas de entrega y con ello se incurre en costos administrativos y de procesamiento, disminuyendo la eficiencia de los choferes al estar cambiando de clientes. También existen clientes que prefieren ser atendidos ciertos días y ven la reasignación como un inconveniente (Gulczynski et al., 2011). Por esto es que se pretende modificar lo menos posible los días de entrega para cada cliente, reasignando sus agendas la menor cantidad de veces a lo largo del período.

La variante de PVRP que modela este requerimiento es conocida como Problema de Ruteo de Vehículos Periódico con Restricciones de Reasignación (PVRP-RC por sus siglas en inglés) y es estudiada en el trabajo de Gulczynski et al. (2011) donde los autores desarrollaron una heurística basada en programación entera (IPH por sus siglas en inglés) y el algoritmo para la resolución del PVRP. No se dará detalle del procedimiento de la heurística, basta con saber que parte de una solución inicial y de manera iterativa busca nuevas soluciones que mejoren (disminuyan) el valor del costo total de transporte.

Los autores muestran como con simples modificaciones a la IPH se pueden incorporar las restricciones de reasignación. Dada una solución  $S'$  se busca mejorar (disminuir) el costo total de transporte mientras se restringe la cantidad de cambios realizados en las rutas de los clientes obteniendo así una nueva solución  $S^*$ . Para esto implementan tres tipos de restricciones dando lugar a tres modelos distintos de PVRP.

1. En el PVRP con restricción de reasignación dura (PVRP-RCH) se da que dada la solución  $S'$  se busca una mejor solución, o sea con un costo total de transporte menor  $S^*$  sujeto a que la cantidad de clientes a los que se les cambia la agenda de entregas al pasar de la solución  $S'$  a la  $S^*$  es menor que un limite especificado. Para ello se hace uso de la variable de decisión  $w_{ik} = 1$  si el cliente  $i$  es reasignado a la agenda  $k$  y 0 en otro caso.
2. En el PVRP con restricción de reasignación blanda (PVRP-RCS) Se introduce una penalización en la función objetivo de modo que aumenta el valor de la misma cada vez que a un cliente se le modifica la agenda de entregas al pasar de la solución  $S'$  a la  $S^*$ . Por lo que se introduce en la función objetivo el termino  $\sum_{i \in V} p_i q_i$ , siendo  $p_i$  la penalización por reasignar el cliente  $i$  en una nueva agenda y  $q_i$  una variable binaria igual a 1 si el cliente  $i$  es asignado a una agenda diferente a la que esta en  $S'$  y 0 en otro caso.
3. El PVRP con restricción de reasignación restrictiva (PVRP-RCR) solo permite cambios en las agendas de aquellos clientes que son atendidos un solo día en el horizonte de tiempo. Utilizando la variable definida anteriormente se la define  $w_{ik} = 0$  para todos los clientes  $i$  que son visitados en mas de una ocasión y para todas las agendas  $k$ .

Otra realidad que los autores observaron es que los gestores de ruteo si bien buscan obtener rutas con el menor costo total de transporte posible, también se esfuerzan en lograr un balance entre los distintos choferes. Una posible medida del balance es que la cantidad de clientes asignados a las distintas rutas sea lo más similar posible. Y el modelo que establecieron para contemplar esta realidad es el Problema de Ruteo de Vehículos Periódico con Restricciones de Balanceo (PVRP-BC por sus siglas en inglés).

Al igual que con las restricciones de reasignación en el PVRP-BC se busca una solución de menor costo total de transporte que la actual  $S'$  y mientras que se penaliza el desbalance a través de la introducción en la función objetivo del término  $\varphi(u - l)$  donde  $\varphi$  es una constante escalar,  $u$  es una variable a la que se le asigna la cantidad de clientes de la ruta más larga de la solución y  $l$  es una variable que toma el valor de la cantidad de clientes en la ruta más corta de la solución.

Para analizar las distintas soluciones se propone establecer  $\varphi = \rho C$  donde  $\rho$  es la fracción de la penalización por desbalance y  $C$  es el costo de la solución inicial (o línea base). En la Figura 32 se representa en el eje de las ordenadas el porcentaje del costo total de transporte de la nueva solución sobre el costo de la solución inicial y en el eje de las abscisas se tiene una serie de valores para  $\rho$ . El gráfico corresponde al resultado de distintas soluciones para sus correspondientes valores de  $\rho$  y entre paréntesis se obtiene la diferencia de la cantidad de clientes entre la ruta más larga y la más corta. Para valores de  $\rho = 0$  la penalización no tiene efecto y la solución inicial no se ve modificada, a medida que se eleva el valor de  $\rho$  se observa que el desbalance se reduce y el costo de las soluciones se eleva.

Este tipo de gráficos es de gran utilidad para el gestor de ruteo debido al compromiso entre el costo de transporte y el balance de la solución, en el ejemplo de la Figura 32 podemos ver que para el valor de  $\rho = 0,01$  se obtiene una medida de desbalance igual a 2 y un costo de transporte del 3% por encima de la línea base, convirtiéndola en una excelente candidata.

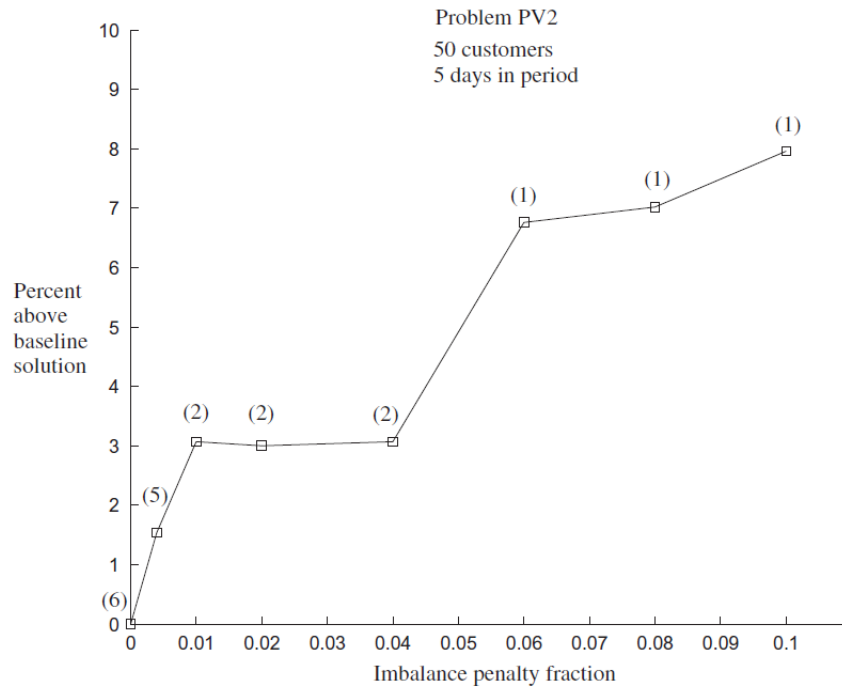


Figura 32: Relación de costo total de transporte y penalización por desbalance (Gulczynski et al., 2011).

**Periodic Vehicle Routing Problem with Service Choice** Hasta donde se ha podido investigar el primer trabajo que aborda la resolución exacta del PVRP es el presentado por Francis, Smilowitz, y Tzur (2006) donde por un lado se presenta una variante del PRVRP asociada al nivel de servicio y por otro lado una metodología de resolución exacta para dicha variante.

La variante se enfoca en el nivel de servicio brindado al cliente, siendo este caracterizado por la agenda y la frecuencia de visitas. Se asume que cada cliente requiere un mínimo de visitas y además están dispuestos a recibir un mayor número de visitas.

El beneficio de recibir una mayor cantidad de visitas se debe a un ahorro en los costos de almacenamiento, lo cual se refleja en la función objetivo dado que este modelo introduce un término de costos por parada y beneficios por nivel de servicio. Por lo que el PVRP-SC determina en simultáneo el ruteo de los vehículos y las frecuencias de visitas.

A continuación se presenta las notaciones y la formulación introducida por Francis et al. (2006) con algunas modificaciones para mantener la coherencia en el estado del arte.

Dado el grafo de red completo  $G = (N, A)$ ; con  $N$  el conjunto de nodos,  $N = \{0, \dots, n\}$  donde 0 representa el depósito;  $A$  el conjunto de arcos,  $A = \{(i, j) : i, j \in N\}$ ;  $K$  el conjunto de vehículos;  $Q$  la capacidad de los vehículos;  $T$  el periodo

de días con  $T = \{1, \dots, t\}$  siendo  $t$  la cantidad de días en el horizonte de tiempo;  $S$  el conjunto de las agendas con  $S = \{1, \dots, |S|\}$ ; sea  $U$  el conjunto de agendas disjuntas (agendas que no comparten días del horizonte de tiempo)  $U = \{1, \dots, |S| - 1\}$ , cabe acotar que si todas las agendas son disjuntas no hay diferencia entre  $u$  y  $s$ ; el parámetro  $a_{su}$

$$a_{su} = \begin{cases} 1 & \text{si } s = u; s \in S, u \in U \\ 1 & \text{si } s = |S|; u \in U \\ 0 & \text{si } s \neq u; s \in S \setminus \{|S|\}, u \in U \end{cases}$$

$c_{i,j}$  el costo de atravesar el arco  $(i, j)$ ;  $w_i$  la demanda del nodo  $i \in C$ ;  $f_i$  la frecuencia mínima de visita del nodo  $i \in C$ ,  $\gamma^s$  la frecuencia de servicio para la agenda  $s \in S$ ;  $\tau^s$  el costo de parada del nodo  $i \in C$  en la agenda  $s \in S$  el cual es función de la demanda y la agenda de dicho modo;  $\alpha^s$  el beneficio de la agenda  $s \in S$  y  $\beta^s$  el factor de ajuste de la demanda acumulada para la agenda  $s \in S$ .

Las variables de decisión son:

$$y_{ik}^s = \begin{cases} 1 & \text{si el nodo } i \in C \text{ es visitado por el vehículo } k \text{ en la agenda } s \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

$$x_{ijk}^u = \begin{cases} 1 & \text{si el vehículo } k \text{ atraviesa el arco } (i, j) \in A \text{ en el periodo } t \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

Y el problema matemático queda definido de la siguiente manera.

$$\min \sum_{k \in K} \left[ \sum_{u \in U} \sum_{(i,j) \in A} \gamma^u c_{ij} x_{ijk}^u + \sum_{s \in S} \sum_{i \in C} (\gamma^s \tau_i^s - w_i \alpha^s) y_{ik}^s \right] \quad (101)$$

$$-\mathbf{s.a:} \quad \sum_{s \in S} \sum_{k \in K} \gamma^s y_{ik}^s \geq f_i \quad \forall i \in C \quad (102)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{k \in K} y_{ik}^s \leq 1 \quad \forall i \in C \quad (103)$$

$$\sum_{s \in S} \sum_{i \in C} (\beta^s w_i) a_{su} y_{ik}^s \leq Q \quad \forall k \in K; \forall u \in U \quad (104)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ijk}^u = \sum_{s \in S} a_{su} y_{ik}^s \quad \forall i \in C; \forall k \in K; \forall u \in U \quad (105)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ijk}^u = \sum_{j \in N} x_{jik}^u \quad \forall i \in N \quad (106)$$

$$\sum_{i,j \in Z} x_{ijk}^u \leq |Z| - 1 \quad \forall Z \subseteq C; \forall k \in K; \forall u \in U \quad (107)$$

$$y_{ik}^s \in \{0, 1\} \quad \forall i \in C; \forall k \in K; \forall s \in S \quad (108)$$

$$x_{ijk}^u \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in N; \forall k \in K; \quad (109)$$

$$\forall u \in U$$

La función objetivo (101) minimiza el costo total de transporte, el costo de parada con el beneficio de nivel de servicio restado para todo el horizonte de tiempo. Las restricciones (102) imponen cada cliente sea visitado un mínimo  $f_i$  de veces. Las restricciones (103) establecen que a cada nodo se le asigne una única agenda y sea visitado por un único vehículo. Las restricciones (104) limitan la capacidad de carga del vehículo. Las restricciones (105) enlazan las variables de asignación y las de ruteo. Las restricciones (70) son restricciones de flujo con respecto al tránsito en los arcos. Las restricciones (107) son de eliminación de subtour y aseguran que todas las rutas pasen por el depósito. Las restricciones (108) y (109) definen los dominios de las variables.

El mencionado método exacto que se presenta está compuesto por dos partes. El primer componente es una relajación Lagrangiana de las restricciones (105) creándose dos subproblemas debido a que las variables de asignación  $y_{ik}^s$  quedan totalmente separadas de las variables de ruteo  $x_{ijk}^u$ . Es crítico para la relajación los valores iniciales de las cotas y los métodos utilizados para actualizarlas. Cuando las cotas superiores e inferiores del método alcanzan el mismo valor se ha llegado al óptimo y por ende a su solución.

Si las cotas no convergen en valores idénticos, se utiliza el segundo componente el cual se trata del método de Ramificación y Poda (Branch and Bound). De esta forma se reduce la brecha entre las cotas hasta llegar al valor óptimo y su solución. Los autores mencionan que si bien la Ramificación y Poda no es un método preferido para problemas combinatorios como el PVRP-SC, ya que se requieren un considerable esfuerzo de cálculo y tiempo, existen dos factores que facilitan el procedimiento. Uno es que el límite superior de la fase de relajación Lagrangiana está relativamente cerca de la solución óptima. Y el otro es que para el componente de Ramificación y Poda se utiliza información útil de la relajación de Lagrange para mejorar el rendimiento.

Como complemento, para instancias de gran tamaño se presenta un algoritmo heurístico. Ya que el algoritmo de relajación Lagrangiana cuenta con paradas por tiempo, una heurística es modificarlos para establecer cotas de tiempo en los problemas de instancias grandes, los autores recomiendan evaluar las cotas de tiempo dependiendo de los parámetros del problema. Desde luego el acotamiento del tiempo de ejecución repercute directamente en la calidad de la solución, por lo que otra heurística presentada es la de mantener la fase de LR invariable y asignar un porcentaje  $\delta$  de la brecha entre las cotas superior e inferior como condición de parada en la fase de Ramificación y Poda.

**Multi-period vehicle routing problem with time Windows and limited visiting Quota** En esta sección se verá Otra variante del PVRP que es el MVRPTW-LVQ . En este modelo, al igual que en el PVRP-SC, aparece la variable de nivel de servicio, aunque en esta investigación aparece de forma distinta.

Este problema es introducido por primera vez por [Zhu, Zhu, Che, y Lim \(2008\)](#) que identifican la necesidad de resolver un problema de una cadena de restaurantes importante en Hong Kong. El problema busca determinar de que manera le serán suministrados los bienes a todos los clientes, teniendo en cuenta que todos los bienes deben entregarse en un horizonte de planificación. Cada cliente tiene una ventana de tiempo en el día en el cual se le pueden realizar las entregas y además el modelo tiene la particularidad de que los bienes requeridos pueden ser entregados por más de un camión. Los autores plantean que manejar el horario de entrega y la cantidad de camiones influyen en el nivel de servicio suministrado. Por una parte, entregar siempre en los mismos horarios permite a los clientes realizar su planificación tomando como dado que los bienes serán entregados siempre en el mismo rango de horas. Por otro lado, si son entregados siempre por el mismo camión, que esto implica que será entregado por la misma persona, esto ayuda a establecer relaciones personales y vínculos que termina influenciando en el nivel de servicio.

Esto funciona bien cuando la demanda no tiene grandes variaciones. Cada ruta define que clientes son visitados por que camiones. Si la variación de la demanda es significativa en relación con la capacidad de los camiones, esto puede resultar en que un único camión no pueda satisfacer los requerimientos de la ruta. Esto se puede solucionar de dos formas, la primera es reduciendo el número de clientes por ruta, lo cual implicaría más camiones más mano de obra, y la segunda sería permitiendo que más de un camión, y por ende, persona, realice las entregas al mismo cliente, lo cual iría en contra de lo que se quiere lograr. La primera solución tiene asociado un costo mayor. Estos casos son los que se deben estudiar y se debe determinar que se valora más, menores costos o mejor servicio.

Los autores [Luo, Qin, Che, y Lim \(2015\)](#) vuelven a retomar el tema y plantean un enfoque distinto al que se ve en el problema de la cadena de restaurantes de Hong Kong. Concluyeron que, según pruebas realizadas con los mismos datos del problema original, lograron mejores resultados en cinco de seis veces. En esta sección no se entrará en detalle en el modelo y la forma de resolución, solo se buscaba dar una introducción a esta nueva variante del problema. Para un mejor estudio del caso se recomienda leer el artículo publicado por [Luo et al. \(2015\)](#).



**Multi Periodic Vehicle Routing Problem with Due Date** A raíz de diferentes estudios de sistemas de transportes congestionados en áreas urbanas, surge el desarrollo por parte de [Archetti, Speranza, y Jabali \(2015\)](#) donde se presenta el modelo de Problema de Ruteo de Vehículos con Múltiple Periodo y Fechas de Vencimiento (MVRPD por sus siglas en ingles). Los autores presentan 3 formulaciones; una formulación basado en flujo, una extinción de la anterior con variables de asignación y una formulación basada en cargas, para las tres formulaciones también se presentan inecuaciones validas para las tres.

Si bien no se transcriben los modelos (disponibles en el artículo de referencia) se deja planteada la definición del problema que como ya se menciono tiene como aplicación practica la de colaborar a la reducción de molestias en las zonas urbanas a través de solucionar el problema de diseñar una distribución diaria de rutas para todo el horizonte de tiempo con los mínimos costos de distribución del problema planteado a continuación (con la notación acorde al estado del arte).

Se considera un horizonte de planificación de  $T = \{1, \dots, H\}$ ; se define un grafo completo  $G = (N, A)$  con  $N = \{0, \dots, n\}$  vértices siendo 0 el deposito y los restantes los clientes; los arcos del grafo  $A = \{(i, j) : i, j \in N\}$ ; el costo  $c_{ij}$  por recorrer el arco  $(i, j) \in A$  desde el nodo  $i$  al nodo  $j$ ;  $m$  vehículos con capacidad  $Q$  que parten del deposito; una demanda  $w_i$  para cada cliente  $i$  junto a una fecha de liberación del pedido  $r_i$  con  $1 \leq r_i \leq H$  y una fecha de vencimiento  $d_i$  tal que  $d_i \geq r_i$ ; la fecha de vencimiento puede exceder el horizonte de planificación  $H$  y de ser así la entrega puede ser pospuesta, en tal caso se incurre en un costo de penalización  $p_i$ ; cada ruta comienza y termina en el deposito y la cantidad total transportada en la ruta no puede exceder la capacidad  $Q$  del vehículo, además las rutas deben contemplar que no se entregue mercadería al cliente  $i$  antes de la fecha de liberación  $r_i$ . A cada cliente  $i$  se le carga un costo  $h_i$  por cada día que el pedido permanece en el deposito (no es entregado).

Entonces el problema consiste en encontrar la planificación dentro del horizonte de tiempo que cumpla las restricciones y minimice el costo total comprendido en los siguientes tres elementos:

1. Los costos de transporte por la distancia recorrida para realizar las entregas para cumplir con los pedidos.
2. Los costos de mantener inventario en el deposito desde la fecha de liberación del pedido  $r_i$  hasta la fecha de entrega si el pedido es cumplido, o hasta  $H$  si el pedido no se cumple.
3. Costos de penalización por no cumplir con los pedidos.

**PVRP en la recolección de leche** Otra de las aplicaciones encontradas es la propuesta por [Dayarian, Crainic, Gendreau, y Rei \(2015\)](#) en la industria lechera de Quebec donde se desarrolló un modelo del Problema de Ruteo de Vehículos de Múltiple Periodo (MPVRP por sus siglas en inglés) que implica la optimización de la recolección diaria por un conjunto de productores locales en un horizonte

de tiempo, teniendo en cuenta que los productores pueden tener variaciones en sus niveles de producción en distintas temporadas. La mercadería que se recoge de los distintos productores es leche (un único producto) para luego enviarla a un conjunto de plantas de procesamiento. A diferencia del modelo clásico, el conjunto de vehículos parten de diferentes depósitos, recojen la leche de los productores y lo envían a plantas de procesamiento. Cada productor es visitado solamente por un único vehículo y este visita una única planta por día, se asume que la producción total satisface la demanda de las plantas.

Los autores deciden modelar bajo la variante de múltiples periodos debido a que los productores tienen variaciones en su producción y la forma de representarlo es asignar diferentes niveles de producción dentro del horizonte de tiempo.

**PVRP en el reparto de ropa hospitalaria** En el caso de estudio ([Banerjea-Brodeur, Cordeau, Laporte, y Lasry, 1998](#)), un empleado de un sanatorio, debe entregar blancos hospitalarios a 58 clínicas repartidas en 6 pabellones utilizando para este propósito un carrito. El trabajo busca minimizar los tiempos de entrega cumpliendo los requisitos operacionales, equilibrando el trabajo a lo largo de la semana. Los arcos  $c_{ij}$  por tanto refieren al tiempo de traslado del nodo  $i$  al  $j$ , y además, considera un tiempo de servicio y un tiempo para cambiar de piso dentro del hospital.

Luego de obtener una solución mediante el algoritmo de inserción GENIUS (Gendreau, Hertz y Laporte, 1992) combinado con una búsqueda Tabú (Cordeau, Gendreau y Laporte, 1997) fue necesario realizar ajustes manuales. Si bien en primera instancia los encargados del hospital solicitaron una solución que balanceara mejor la carga de trabajo a lo largo de la semana, terminaron usando la solución original ya que ésta requería tiempos menores. Luego de meses de estudio para la aplicación, la solución obtenida logró una reducción del tiempo de entrega planificado de un 25 %, pero en la práctica una reducción de cerca de un 50 % si se considera que las entregas especiales ya no eran necesarias por el cese de quiebres de stock. Si bien se encontró una solución que cumplía con lo solicitado, los autores aclaran que es necesario revisar periódicamente la agenda de forma manual y correr nuevamente el programa con información nueva cada cuatrimestre o cada cambio significativo de la operativa, no conviene hacerlo con pequeños cambios porque puede perturbar la estructura de la solución innecesariamente, generando cambios significativos en la operativa sin obtener reducciones de tiempo tan significativas.

## Conclusiones

En este documento se presenta una revisión actual, hasta donde se pudo investigar, de la literatura sobre el problema de ruteo de vehículos periódico (PVRP) enfocado en las formulaciones matemáticas propuestas. Debido al gran número de aplicaciones encontradas se optó por seleccionar una muestra representativa de la bibliografía revisada.

En la mayoría de los artículos revisados se hace referencia a la complejidad combinatorial que el problema posee, que devienen del tipo de problema de ruteo de vehículos:  $NP - Hard$ ; que además le agrega la variable tiempo, que deben ser asignadas agendas a los clientes. Además, es notorio que dentro de los métodos de resolución de los problemas, son escasas las metodologías exactas mientras que la gran mayoría de las investigaciones relevadas se centran en métodos de resolución aproximados (metaheurísticas), recurriendo a métodos exactos principalmente para cuantificar la precisión de estas últimas.

Adicionalmente, se destaca dentro de nuestra revisión, que para problemas grandes, las soluciones exactas no son viables tanto por recursos informáticos como en los tiempos de resolución. Incluso en investigaciones con resoluciones exactas (Francis et al., 2006) se proponen modificaciones a dichas resoluciones para llevarlas a heurísticas y así resolver problemas de gran escala.

En función a los artículos leídos, concluimos que en los últimos 10 años son escasas las nuevas formulaciones matemáticas de PVRP, salvo por excepciones como Archetti et al. (2017), que presenta PVRP basado en cargas e introduce el modelo de Flexible Periodic Vehicle Routing Problem. Esto nos hace pensar que es un área a la cual aún le queda por explorar en un futuro.

Si bien el PVRP es una extensión del VRP, éste sigue siendo un tema muy amplio y complejo de resolver. A lo largo de la literatura revisada se encontraron muchas variantes, cada una haciendo foco sobre distintos aspectos de la realidad, pero por la complejidad que posee el problema es muy difícil abarcar a todas ellas en un único modelo. Por este motivo es recurrente, por ejemplo, hallar una solución que minimice los costos y que luego es sometida a un proceso de emparejamiento de carga entre los distintos días. De todas maneras, es importante resaltar, que por más bueno que sea el modelo, en ocasiones hay factores de la realidad que no se pueden o son difíciles de representar. Esto resulta en que no necesariamente siempre la mejor solución es la óptima, es importante siempre tener en cuenta el contexto en el cual se encuentra la empresa ya que se encontraron trabajos (Gulczynski et al., 2011; Luo et al., 2015) en los que se procesaban las soluciones a costo de reducir su eficiencia para que sean viables de aplicar.

Adicionalmente, hemos observado que cada modelo cumple un fin específico y uno que puede ser muy útil para un problema de cierto tamaño pasa a no ser la mejor opción al cambiar alguno de sus parámetros, como por ejemplo la cantidad de clientes.



## Definiciones

Con el fin de brindar una mayor profundización de ciertas temáticas que se mencionan en el estado del arte a contención se presentaran en mayor detalle.

### Problemas NP

En computación, el grado de complejidad de un problema está relacionado con el tiempo de ejecución del mismo. Por ejemplo, cuando el tiempo de ejecución de un algoritmo (mediante el cual se obtiene la solución al problema) es menor a un cierto valor calculado a partir del número de variables implicadas usando una fórmula polinómica, se dice que dicho problema se puede resolver en tiempo polinómico.

Lo que se buscará en esta sección es dar una idea de que se refiere en la práctica los conceptos de problemas P, NP y NP-completo. No se busca ver el tema con detalle y profundidad sino intentar dejar en claro algunos conceptos.

Por ejemplo, si un problema se puede resolver en menos de  $50n^2 + 50$  operaciones, el tiempo de ejecución es polinomial. Ahora si el problema se puede resolver en menos de  $2^n$  operaciones, el tiempo de ejecución ya deja de ser polinomial. Los problemas que se pueden resolver en tiempo polinomial son problemas de complejidad P y los segundos mencionados son de complejidad NP. Los problemas de ruteo, entran dentro de la categoría de complejidad NP y la relación entre los problemas NP y P es un tema muy estudiado en la actualidad. Su interés se intentará mostrar con el siguiente ejemplo.

Si un problema pide que se compruebe si un número  $x$  es la raíz cuadrada de  $z$ , se puede hacer de dos maneras distintas:

- Calculando la raíz de  $z$  y comparando con  $x$
- Elevando  $x$  al cuadrado y comparando con  $z$

La conclusión que se saca de este sencillo ejemplo es que hay problemas en que es más fácil comparar la solución que calcularla. El problema de resolver la raíz cuadrada de un número  $z$  se encuentra dentro de la categoría de NP.

La clase de complejidad NP contiene problemas que no pueden resolverse en un tiempo polinómico. Cuando se dice que un algoritmo no puede obtener una solución a un problema en tiempo polinómico siempre se intenta buscar otro procedimiento que lo consiga mejorar. Frente a los problemas contenidos en P tienen métodos de resolución menos eficaces. Se puede ver que la operación de calcular la raíz cuadrada se encuentra contenida en esta clase.

Si resulta sencillo encontrar una solución para un determinado problema, se puede comprobar si la solución es cierta (simplemente comparar), por lo que P es un subconjunto de la clase NP. La gran cuestión es si ocurre lo mismo a la inversa, es decir, si se tiene un problema que se puede comprobar fácilmente si un

resultado es una solución, ¿Se puede calcular una solución sencillamente? El tema en cuestión es si es posible demostrar que los conjuntos de problemas  $P = NP$ .

Pero los problemas de ruteo entran dentro de la categoría  $NP - completo$ . Un problema  $C$  es  $NP - completo$  si:

- $C$  es un problema  $NP$
- Todo problema  $NP$  se puede transformar polinómicamente en  $C$ , que es una manera de relacionar dos problemas de decisión, de manera que la existencia de un algoritmo que resuelve el primer problema, garantiza inmediatamente, y a través de un tiempo polinómico, la existencia de un algoritmo que resuelve el segundo.

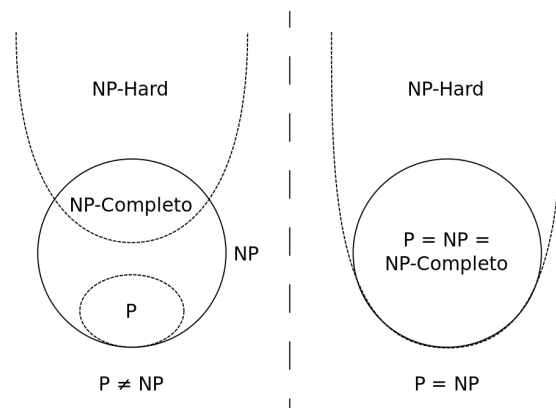


Figura 33:  $NP = P$  (elaboración propia)

Como consecuencia de esta definición, de tenerse un algoritmo en  $P$  para  $C$ , se tendría una solución en  $P$  para todos los problemas de  $NP$ .

Si uno es capaz de encontrar un algoritmo eficiente para un problema  $NP - completo$  entonces se podría encontrar un algoritmo eficiente para todos los problemas de esta clase.

## Subtour

Se puede considerar a los subtours como parte de una solución o subrutas cerradas de un conjunto de clientes que no visitan al depósito. Considerando el modelo de TSP asimétrico, se puede ver como la solución de la Figura 34 cumple con las restricciones del modelo de que a cada nodo sale (50) y llega (51) un solo arco respectivamente, incluso respetando la geometría de la Figura 34 si no se considera la restricción de subtour esta podría ser la solución de menor costo, sin embargo no es una ruta posible de cumplir.

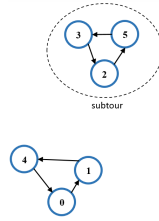


Figura 34: Ejemplo de solución con subtour (elaboración propia)

Para evitar este tipo de soluciones se introduce en el modelo las restricciones de eliminación de subtour (SCE por sus siglas en inglés). La ecuación (52) del modelo presentado por G. Dantzig, R. Fulkerson, y S. Johnson (1954) actúa sobre un conjunto de  $|K|$  elementos, condicionando que los arcos entre dichos nodos sean menor que la cantidad de elementos del mismo. Se puede observar que por el hecho de ser  $\forall K \subseteq \{1, \dots, n\}$  el número de restricciones crece de manera exponencial  $o(2^{|n|})$  siendo la fuente de dificultad de la resolución del problema.

Una restricción de eliminación de subtour equivalente a (52) se puede ver en (110), la misma establece que para todo conjunto  $S$  cualquiera que sea, al menos uno de sus elementos debe de estar conectado a un elemento externo al mismo. De esta forma se evita la posible creación de una subruta cerrada ya que debería de estar conectada a un nodo no perteneciente a la ruta. En la ecuación (110) vemos como al menos un elemento  $i$  perteneciente a  $S$  debe de estar conectado con un elemento  $j$  no perteneciente a  $S$ , en esta restricción también se generan cantidades exponenciales de restricciones debido a la construcción de los conjuntos  $S$ .

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \notin S} x_{ij} \geq 1 \quad \forall S \subseteq V, |S| \geq 2 \quad (110)$$

Un método diferente de evitar los subtour es usando las restricciones (111) de cantidad polinomial de ecuaciones, estas son conocidas como restricciones MTZ por ser introducidas por Miller, Zemlin, y Tucker (1960). El beneficio de obtener una cantidad polinomial de restricciones se ve reflejado en la desventaja de la introducción de las variables enteras  $u_i \geq 0$  con  $i = 1, \dots, n$ .

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \quad i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j \quad (111)$$

## Heurísticas

A continuación se describen dos heurísticas constructivas para resolver el VRP:

### Algoritmo de Clarke y Wright (1964)

Este algoritmo propuesto por primera vez en 1964 permite encontrar la solución de CVRPs en el cual la cantidad de vehículos es libre. El método comienza con rutas de vehículos conteniendo el depósito y otro vértice. En cada paso, dos rutas son combinadas de acuerdo al “ahorro” más grande generado.

- Paso 1 Generar los “ahorros”  $s_{ij} = c_{i1} + c_{1j} - c_{ij}$  para  $i, j = 2, \dots, n$  y  $i \neq j$ . Crear  $n - 1$  rutas de vehículos  $(1, i, 1)$  ( $i=2, \dots, n$ )
- Paso 2 Ordenar los “ahorros” de una manera no creciente.
- Paso 3 Considerar dos rutas conteniendo a los arcos  $(i, 1)$  y  $(1, j)$ , respectivamente. Si  $s_{ij} \geq 0$ , ver si es posible combinar las rutas introduciendo el arco  $(i, j)$  y eliminar los arcos  $(i, 1)$  y  $(1, j)$ . Implementar la combinación si la ruta es factible. Repetir lo pasos hasta que no se encuentren mejoras.

Este procedimiento puede ser ejecutado en  $O(n^2 \log n)$  tiempo. El algoritmo de Clarke y Wright ignora el tamaño de la flota y los costos fijos. Los costos de los vehículos pueden ser incorporados fácilmente añadiendo una constante a cada  $c_{ij}$ . Soluciones con una cantidad fija de vehículos puede ser incorporada repitiendo el paso 3 hasta que el número de vehículos se alcance, incluso si los “ahorros” son negativos.

Sweep algorithm o algoritmo de barrido (Wren, 1971; Wren and Holliday, 1972; Gillet and Miller, 1974)

Los orígenes de este algoritmos puede ser encontrado en el trabajo de Wren (1971) y Wren y Holliday (1972) para CVRPs con múltiples depósitos, y vértices encontrados en un plano euclidiano. El método se lo atribuye a Gillet y Miller (1974) que le dieron el nombre. Para facilitar la implementación, es mejor representar los vértices en coordenadas polares  $(\theta_i, \rho_i)$  donde  $\theta_i$  es el ángulo y  $\rho_i$  la distancia. Asignar valor  $\theta_i = 0$  a un vértice  $i$  arbitrario y determinar los ángulos desde  $(1, i)$ . Ordenar los vértices en orden creciente de ángulo. Una posible implantación del modelo es la siguiente.

- Paso 1 Elegir un vehículo  $k$  no usado.
- Paso 2 Empezar desde el vértice en cuestión y considerando el ángulo más chico, asignar vértices al vehículo hasta que no exceda la capacidad. Si existen vértices sin asignar, volver al paso 1.
- Paso 3 Optimizar cada ruta de vehículo por separado resolviendo el TSP correspondiente. Intercambiar vértices adyacentes si ahorra espacio. Reoptimizar y parar.



## Referencias del Estado del Arte

1. Archetti, C., Bianchessi, N., Irnich, S., y Speranza, M. G. (2014). Formulations for an inventory routing problem. *International Transactions in Operational Research*, 21(3), 353.
2. Archetti, C., Fernández, E., y Huerta-Muñoz, D. L. (2017). The flexible periodic vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 85, 58 - 70.
3. Archetti, C., Speranza, M., y Jabali, O. (2015). Multi-period vehicle routing problem with due dates. *Computers and Operations Research*, 61, 122-134.
4. Banerjea-Brodeur, M., Cordeau, J.-F., Laporte, G., y Lasry, A. (1998). Scheduling linen deliveries in a large hospital. *Journal of the Operational Research Society*, 49(8), 777-780.
5. Beltrami, E. J., y Bodin, L. D. (1974). Networks and vehicle routing for municipal waste collection. *Networks*, 4(1), 65.
6. Braekers, K., Ramaekers, K., y Van Nieuwenhuysse, I. (2016). The vehicle routing problem: State of the art classification and review. *Computers & Industrial Engineering*, 99, 300 - 313.
7. Campbell, A., y Wilson, J. (2014). Forty years of periodic vehicle routing. *Networks*, 63(1), 2-15.
8. Christofides, N., y Beasley, J. E. (1984). The period routing problem. *Networks*, 14(2), 237.
9. Coene, S., Arnout, A., y Spieksma, F. C. R. (2010). On a periodic vehicle routing problem. *Journal of the Operational Research Society*, 61(12), 1719 - 1728.
10. Dayarian, I., Crainic, T. G., Gendreau, M., y Rei, W. (2015). A branch-and-price approach for a multi-period vehicle routing problem. *Computers and Operations Research*, 55, 167 - 184.
11. Francis, P., Smilowitz, K., y Tzur, M. (2006). The period vehicle routing problem with service choice. *Transportation Science*, 40(4), 439-454.
12. Francis, P., Smilowitz, K., y Tzur, M. (2008). The period vehicle routing problem and its extensions. *Operations Research/ Computer Science Interfaces Series*, 43, 73-102.
13. Gaudioso, M., y Paletta, G. (1992). A heuristic for the periodic vehicle routing problem. *Transportation Science*(2), 86.
14. G. B. Dantzig, a., y J. H. Ramser, a. (1959). The truck dispatching problem. *Management Science*(1), 80.
15. G. Dantzig, a., R. Fulkerson, a., y S. Johnson, a. (1954). Solution of a large-scale traveling-salesman problem. *Journal of the Operations Research Society of America*(4), 393.
16. Gulczynski, D., Golden, B., y Wasil, E. (2011). The period vehicle routing problem: New heuristics and real-world variants. *Transportation*

*Research Part E*, 47, 648 - 668.

17. Hoffman, K. L., Padberg, M., y Rinaldi, G. (2013). Traveling salesman problem. En S. I. Gass y M. C. Fu (Eds.), *Encyclopedia of operations research and management science* (pp. 1573–1578).
18. Luo, Z., Qin, H., Che, C., y Lim, A. (2015). On service consistency in multi-period vehicle routing. *European Journal of Operational Research*, 243(3), 731-744.
19. Miller, C., Zemlin, R., y Tucker, A. (1960). Integer programming formulation of traveling salesman problems. *Journal of the ACM (JACM)*, 7(4), 326-329.
20. Rego, C., Gamboa, D., Glover, F., y Osterman, C. (2011). Invited review: Traveling salesman problem heuristics: Leading methods, implementations and latest advances. *European Journal of Operational Research*, 211, 427 - 441.
21. Russell, R., y Igo, W. (1979). An assignment routing problem. *Networks*, 9(1), 1.
22. Tan, C., y Beasley, J. (1984). A heuristic algorithm for the period vehicle routing problem. *Omega*, 12(5), 497-504.
23. Toth, P., y Vigo, D. (2002). Models, relaxations and exact approaches for the capacitated vehicle routing problem. *Discrete Applied Mathematics*, 123(1-3), 487-512.
24. Zhu, J., Zhu, W., Che, C., y Lim, A. (2008). A vehicle routing system to solve a periodic vehicle routing problem for a food chain in hong kong. En (Vol. 3, p. 1763-1768).