

Febrero 2018



UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY



FACULTAD DE INGENIERÍA
PROYECTO FINAL
AGRIMENSURA



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA
INSTITUTO DE AGRIMENSURA

Tesis para optar al título de Ingeniero Agrimensor

**MODELO DE TRANSFORMACIÓN DE ALTURAS
LOCALIZADO EN LA CIUDAD DE DOLORES**

AUTORES:

Bach. Mauricio Gallo - CI. 4.670.508-0

Bach. Gisselle Mainé - CI. 4.341.200-4

TUTOR:

Prof. Agr. Ing. Agrim. Jorge Faure Valbi

Montevideo, Uruguay

Febrero 2018

PÁGINA DE APROBACIÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA, UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA

El tribunal docente integrado por los abajo firmantes aprueba el Proyecto de Grado:

Título

.....
.....

Autores

.....
.....

Tutor

.....

Carrera

.....

Puntaje

.....

Fecha

.....

Tribunal

Profesor (Nombre y firma)

Profesor (Nombre y firma)

Profesor (Nombre y firma)

RESUMEN

En el marco de la actividad de extensión realizada por el Instituto de Agrimensura en la Ciudad de Dolores, Soriano, se realizó la nivelación geométrica y posterior relevamiento con tecnología GNSS, de 38 puntos de interés para la Intendencia.

Se contó con el 100% de la información necesaria para realizar el procesamiento en gabinete, el cual tiene como objetivo principal generar un Modelo de Transformación de Alturas, localizado para la ciudad de Dolores, que permita obtener cotas referidas al cero oficial a partir de observaciones GNSS.

El procesamiento consistió en primera instancia en el análisis y ajuste de la red de nivelación geométrica, mediante el método de Mínimos Cuadrados, con el objetivo de dotar de cota a todos los puntos fijos de la red. Como resultado del análisis, se detectaron algunas inconsistencias en los datos por lo que se decidió concurrir nuevamente a la Ciudad de Dolores y relevar algunas líneas de la red. Por otra parte, a partir de los cierres de los circuitos y considerando la precisión requerida para los diferentes órdenes de nivelación, se concluye que los datos de partida no son de buena calidad, por lo que nuestro proyecto se enfocará mayoritariamente en la metodología a seguir, no siendo de relevancia los resultados numéricos y si los análisis realizados.

Continuando con el procesamiento, a partir de los datos GNSS se obtuvieron las coordenadas en el sistema de referencia WGS84 proyección UTM 21S (φ , λ , h) de cada punto de la red, así como también sus respectivas cotas ortométricas referidas al modelo geoidal EGM08. Se realizaron varios procesamientos obteniéndose diferentes grupos de coordenadas, las utilizadas para la mayoría de los cálculos y análisis del presente proyecto fueron aquellas obtenidas a partir del Post Proceso tomando como referencia las coordenadas publicadas por SIRGAS de la estación permanente UYSO que se actualizan semanalmente. Además se obtuvieron las coordenadas de todos los puntos trabajando en tiempo real vía RADIO-RTK, las cuales están asociadas al sistema de referencia SIRGAS ROU 98. Éstas son las utilizadas para determinar el modelo de transformación de alturas. Finalmente, se utilizó información gravimétrica proveniente de la Red Gravimétrica Nacional para dotar de valores de gravedad a nuestra red de puntos fijos y así complementar la nivelación geométrica. De esta forma se realizó un ajuste de la red de nivelación en términos de números geopotenciales, y de aquí se derivaron cotas ortométricas para cada punto, lo cual permitió una serie de fructíferos análisis.

Palabras Clave: Nivelación Geométrica, Compensación, Números Geopotenciales, Gravimetría, Modelo de Transformación de Alturas.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer a los docentes que han incidido en nuestra formación académica, especialmente aquellos que forman parte del Instituto de Agrimensura.

Por otra parte a los compañeros, que durante el campamento en Dolores realizaron las labores asignadas al Departamento de Geodesia del Instituto de Agrimensura, las cuales sirvieron como base para nuestro proyecto, especialmente a Laura Yañez quien además de compartir con nosotros las tareas Post Campamento fue de gran ayuda en la segunda ida a Dolores en la cual realizamos la nivelación de algunos tramos con el objetivo de tomar nuevos datos.

También le damos las gracias al docente Ing. Agrim. Ricardo Yelicich por haber suministrado material teórico, conocimientos propios y despejar dudas respecto a lo concerniente a las tecnologías GNSS.

Siguiendo la misma línea, agradecemos al Sr. Director del SGM Cnel. Norbertino Suárez que nos facilitó información valiosa para nuestro trabajo, como son los datos gravimétricos y altimétricos de la zona en estudio.

Finalmente agradecer particularmente a nuestro tutor Ing. Agrim. Jorge Faure por los conocimientos y ayuda brindada y sobre todo por estar a total disposición durante la ejecución de este proyecto final, incluso en partidos clave para sus equipos de preferencia, aunque sea mediante whatsapp y con monosílabos

Este trabajo va dedicado a nuestra familia y amigos, por el apoyo que recibimos de ellos durante el transcurso de la etapa universitaria, sin el mismo esto no hubiera sido posible.

TABLA DE CONTENIDOS

1. Introducción	5
2. Objetivo	6
3. Fundamento Teórico	7
3.1 Superficies Geodésicas de referencia	7
3.2 Alturas de un Punto sobre la Tierra	9
3.2.1 Altura Ortométrica (H)	9
3.2.2 Altura Elipsoidal (h)	9
3.3 Marcos y Sistemas de Referencia	10
3.3.1 SIRGAS	10
3.3.1.a Sistema de Referencia SIRGAS ROU98	11
3.3.1.b Marco de Referencia Geodésico Uruguay (REGNA-ROU)	11
3.3.1.c Sistema Altimétrico del Uruguay	11
3.4 Modelos Geopotenciales	12
3.4.1 Modelo Geoidal EGM08	12
3.5 Nivelación Geométrica Compuesta	13
3.6 Método de Ajuste de Mínimos Cuadrados	14
3.6.1 Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes	14
3.6.2 Ley General de Propagación de Varianzas y Covarianzas	16
3.6.3 Propagación de cofactores para AMC+M	17
3.7 GNSS	18
3.7.1 Posicionamiento Puntual o Absoluto	18
3.7.2 Método Diferencial	19
3.7.2.a Post Proceso	19
3.7.2.b Tiempo Real	19
3.7.2.b.i RADIO-RTK	20
3.7.2.b.ii NTRIP-RTK	20
3.8 Número Geopotencial	20
3.9 Anomalía de Gravedad	22
3.9.1 Anomalía de Bouguer	22
3.9.2 Reducción de Bouguer	22

4. Etapa previa al campamento	24
4.1 Nivelación Geométrica	24
4.2 GNSS	32
5. Relevamiento	34
5.1 Nivelación Geométrica	34
5.2 GNSS	36
6. Procesamiento en Gabinete	38
6.1 Nivelación	38
6.1.1 Segunda ida a Dolores	44
6.1.1.a Nivelación	44
6.1.2 Continuación del Procesamiento	46
6.2 GNSS	50
6.3 Gravedad	57
6.3.1 Descripción de la Metodología	57
6.3.2 Interpolación de Valores de Gravedad	58
6.3.3 Obtención de Números Geopotenciales	62
6.3.4 Obtención de Alturas Ortométricas a partir de NG	72
7. Análisis de los Resultados Obtenidos	76
7.1 Nivelación	76
7.1.1 Curvas de Iso Error en la Cota Ajustada	76
7.1.2 Análisis Absoluto sobre Puntos de la Red	78
7.1.3 Análisis Absoluto sobre Puntos Fijos del SGM	81
7.1.4 Análisis Relativo entre Puntos Fijos del SGM	83
7.2 Análisis de Datos obtenidos de Tecnologías GNSS	84
7.2.1 Análisis de la Ondulación Geoidal del EGM08	84
7.2.2 Análisis Absoluto sobre Puntos de la Red	87
7.3 Análisis de resultados obtenidos a partir de datos de gravedad	92
7.3.1 Comparación de Cierres de Circuitos	92
7.3.2 Curvas de Iso Error en el Número Geopotencial	93
7.3.3 Análisis absoluto de Puntos de la Red	96
7.3.3.a Alturas Ortométricas derivadas de NG y del EGM08	96

7.3.3.b	Alturas Ortométricas derivadas de NG y Altura Nivelada	99
7.3.4	Análisis Relativo entre Puntos de la Red y sus tipos de Altura	102
8.	Modelo de Transformación de Alturas	106
8.1	Metodología	106
8.2	Resultados	112
8.3	Evaluación y Análisis de los Resultados	116
8.3.1	Función Trigonométrica Clásica, 4 parámetros	117
8.3.2	Función Trigonométrica Clásica, 5 parámetros	120
8.3.3	Modelo de Transformación de similitud diferencial, 6 parámetros	123
8.3.4	Modelo de Transformación de similitud diferencial, 7 parámetros	124
8.4	Comparación de los Resultados	125
9.	Conclusiones	127
9.1	Conclusiones Generales	127
9.2	Sobre la Actividad de Extensión	127
9.3	Sobre Datos Obtenidos	128
9.4	Sobre Resultados Obtenidos luego de los Análisis	129
9.4.1	Nivelación	129
9.4.2	GNSS	129
9.4.3	Gravedad	130
9.4.4	Modelo de Transformación de Alturas	131
10.	Tabla de Cuadros e Ilustraciones	132
11.	Glosario	137
12.	Anexos	138
12.1	Monografías de los puntos fijos del SGM	138
12.2	Circuitos de nivelación	150
12.2.1	Grupo 1	150
12.2.2	Grupo 2	152
12.3	Planilla de Nivelación	154
12.4	Especificaciones técnicas del instrumental utilizado en campo	154
12.4.1	Receptor Leica Viva GNSS GS08	154
12.4.2	Receptor Prexiso G5	155

12.4.3 Nivel Automático Pentax AL-M4c	156
12.5 Algoritmo de Ajuste por Mínimos Cuadrados por Magnitudes	156
12.6 Archivo de salida del software PredGrav	157
12.7 Algoritmo de AMC para el cálculo de los parámetros del MTA	158
13. Bibliografía	159

1. Introducción

El presente trabajo se confecciona a los efectos de ser tomado como documento para la aprobación del proyecto final de grado, de la carrera de Ingeniero Agrimensor de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, plan de estudios 1997. En dicho plan se especifica que: *“El objetivo del proyecto de grado es, que el estudiante, mediante la realización de un trabajo específico referido a alguna de las áreas de la Agrimensura, efectúe una labor de síntesis e integración de conocimientos, la cual consista en una aplicación no rutinaria de los mismos”*.

Bajo las condiciones anteriores es que se optó por el abordaje del presente trabajo, el cual engloba y aplica diversas áreas estudiadas como futuros Ingenieros Agrimensores, y son de interés por quienes suscriben, como ser: Topografía y Geodesia, en especial Geodesia Física.

Por otra parte, y no de menor importancia que la anterior, se realiza este trabajo en el marco de la finalización de las tareas del departamento de Geodesia del Instituto de Agrimensura, correspondientes a la actividad de Extensión llevada a cabo en la Ciudad de Dolores, Soriano, en Octubre del año 2016.

Las mismas fueron originadas debido a los acontecimientos de pública notoriedad ocurridos el 15 de abril del mismo año. Un tornado de grandes dimensiones azotó la ciudad, dejando como resultado diversos daños materiales y familias sin hogar, sobre todo en la periferia, donde se concentran las construcciones más precarias.

Como se dijo, se consideró de vital importancia contribuir en forma satisfactoria en la prosecución de los objetivos principales de esta actividad de Extensión, en la cual se supo necesario contar con una red de apoyo de puntos fijos que sirva como base para todos los relevamientos a realizarse en la zona, tendientes a reconstruir la infraestructura civil y futuros emprendimientos que la Intendencia de Soriano disponga.

Se comenzó con las tareas de gabinete en febrero de 2017 bajo la tutoría del Prof. Agr. Ing. Agrim. Jorge Faure dándose por finalizado en febrero 2018.

2. Objetivo

El objetivo principal de este estudio es generar un Modelo de Transformación de Alturas que permita obtener cotas referidas al datum oficial a partir de observaciones GNSS. Esto es posible debido a que se cuenta con doble dato para cada punto fijo de la red: por un lado la altura obtenida a partir de la nivelación geométrica, y por otro, las alturas ortométricas a partir de los datos GNSS.

El referido MTA no es más que una función matemática que permite obtener la altura oficial, o cota, de un determinado punto, a partir de las coordenadas (φ, λ, h) obtenidas en campo mediante observaciones con GPS.

Por otro lado, al tener datos de diferente origen, ya que los puntos de la red han sido ocupados y medidos por diferentes técnicas geodésicas, siendo por tanto puntos de *co-location*, es que es posible realizar el análisis cruzado de los mismos.

Por último, se solicitará al SGM datos de la Red Nacional Gravimétrica en el entorno de la Ciudad de Dolores, así entonces, teniendo algunos puntos con gravedad conocida, se podrá dotar de valor de gravedad a todos los puntos de la red, a través de una interpolación basada en la tendencia de la Anomalía de Bouguer y por lo tanto, analizar la influencia de la gravedad en la zona.

La metodología empleada para lograr el cometido principal sirve de base para su aplicación en cualquier parte del territorio nacional, incluso en el exterior, he aquí su relevancia.

Finalmente, otro de los objetivos del presente trabajo es contar con la información que refiere a las labores del Departamento de Geodesia en el campamento de estudios, de forma unificada, previendo la necesidad de que en un futuro se requiera realizar alguna consulta. Por ello la idea de utilizar un CD como respaldo de información que fue relevada en campo por los estudiantes, así como las monografías realizadas de cada punto de la red determinada por la Intendencia de Soriano.

3. Fundamento Teórico

Para contextualizar este trabajo se incluyen en este informe, conceptos y definiciones que resultan fundamentales al momento de abordarlo para su mejor comprensión.

3.1 Superficies Geodésicas de referencia

La superficie equipotencial utilizada como superficie de referencia en Geodesia es el geode, que *“es la superficie matemática de la tierra, se define como una superficie equipotencial de la gravedad para un valor especial de constante W_0 ”*. Benavidez (2004).

Puede ser descrita como la superficie idealizada de los océanos ya que como la superficie de los mares es el 70% del área total superficial del planeta, se consideró apropiado visualizar la figura de la Tierra como aquella de la superficie oceánica, aunque es sabido, es una superficie dinámica en constante cambio. Sin embargo, estos efectos en nivel son generalmente del orden de un metro por lo que, para muchos propósitos, se puede identificar el nivel medio del mar con la superficie geoidal.

Por lo tanto, podríamos definir al geode como la superficie equipotencial que se corresponde con los océanos supuestos en reposo y prolongados debajo de los continentes. La desigualdad de la distribución de las masas continentales, así como la densidad variable de los materiales que componen el planeta Tierra, hacen que el geode sea una superficie irregular, que presenta protuberancias y depresiones.

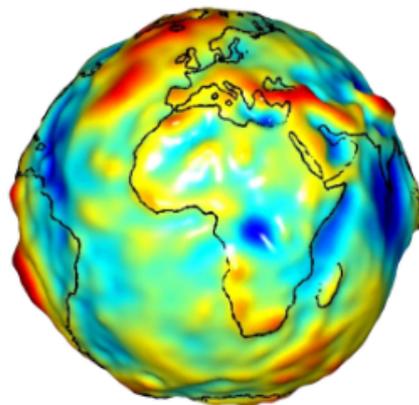


Figura 1 - Representación del geode

La superficie matemática que mejor se aproxima a la forma del geoide, es el "Elipsoide de Revolución", un elipsoide al que se lo hace girar sobre su eje menor y constituir un cuerpo con superficie. De esa manera, sobre la superficie del elipsoide, se pueden efectuar cálculos angulares de posicionamiento y los cálculos de distancias.

La fórmula general que representa el elipsoide de revolución geocéntrico es:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

donde a y b, son los semiejes mayor y menor respectivamente, de la elipse generatriz.

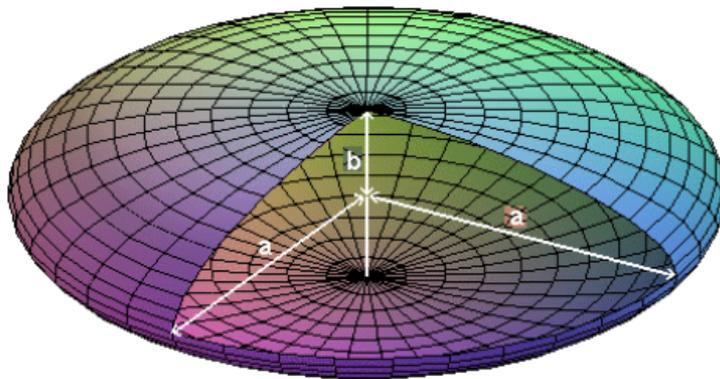


Figura 2 - Representación del elipsoide

Semieje mayor (a): Longitud del semieje correspondiente al ecuador, desde el centro de masas de la Tierra hasta la superficie terrestre.

Semieje menor (b): Longitud del semieje desde el centro de masas de la Tierra hasta uno de los polos. Alrededor de este eje se realiza la rotación de la elipse base.

3.2 Alturas de un Punto sobre la Tierra

Vinculado con las superficies descritas anteriormente se pueden determinar dos tipos de alturas: Altura Ortométrica (H), Altura Elipsoidal (h) y a partir de ellas determinar Ondulación Geoidal (N).

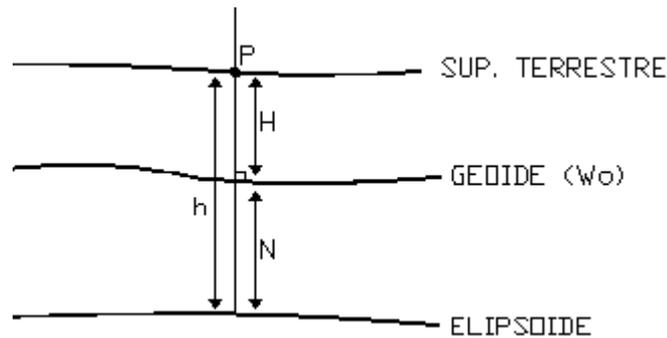


Figura 3 - Esquema de alturas

3.2.1 Altura Ortométrica (H)

La altura ortométrica se define como la distancia entre la superficie física de la Tierra y la superficie geoidal medida a lo largo de la vertical del lugar, la cual es la curva tangencial a la dirección de la gravedad, en cualquier punto.

La vertical del lugar tiene una leve curvatura y giro, debido al no paralelismo de las superficies equipotenciales de la gravedad.

3.2.2 Altura Elipsoidal (h)

La altura elipsoidal es la distancia medida a lo largo de la normal al elipsoide entre la superficie topográfica y el elipsoide. Esta altura es de tipo matemático, pues no responde a ningún principio físico.

La distancia medida sobre la normal elipsoidal que separa a la superficie elipsoidal de la superficie geoidal se le llama Ondulación Geoidal. Si el geoida se encuentra por encima del elipsoide, la distancia es positiva y si se encuentra por debajo, la distancia es negativa.

El ángulo llamado desviación relativa de la vertical Φ está determinado por la no coincidencia entre la normal al elipsoide y la vertical del lugar, como muestra la siguiente imagen. (Ver Figura 4)

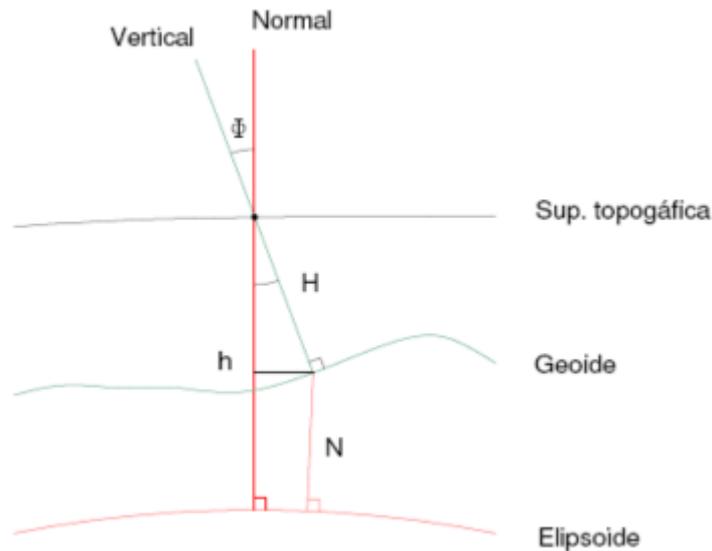


Figura 4 - Desviación relativa de la vertical

De lo anterior, se deduce la siguiente relación entre las alturas consideradas:

$$h = N + H \times \cos(\Phi)$$

Como el valor de la desviación relativa de la vertical son de algunos segundos, el valor del coseno es próximo a uno. Por este motivo, la ecuación anterior puede ser simplificada:

$$h = N + H \Rightarrow N = h - H \quad (2)$$

3.3 Marcos y Sistemas de Referencia

El Sistema de Referencia es la definición de modelos, parámetros, constantes, etc. que sirven como base para la descripción de los elementos a representar¹.

El Marco de Referencia es la materialización de un Sistema de Referencia por un juego de entidades físicas y matemáticas².

3.3.1 SIRGAS

SIRGAS es el Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas. Su realización es una densificación regional del Marco Internacional de Referencia Terrestre. Además del sistema de referencia geométrico, SIRGAS se ocupa de la definición y realización de un sistema vertical de referencia basado en alturas elipsoidales como componente geométrica y en números geopotenciales (referidos a un valor W_0 global convencional) como componente física³.

¹ Se obtiene de eva.fing.edu.uy, asignatura Sistemas de Referencia.

² Ídem ¹

³ Se obtiene de www.sirgas.org

3.3.1.a Sistema de Referencia SIRGAS ROU98

SIRGAS ha sido adoptado como Sistema de Referencia Nacional. Surge de la primera determinación de SIRGAS, época 1995.4, denominado SIRGAS95. Está dada por una red GPS de alta precisión con 58 estaciones distribuidas sobre América del Sur. Dado que el cálculo de los parámetros de transformación del Sistema de Referencia Local ROU-USAMS a SIRGAS95 fueron presentados y adoptados en el año 1998, se le llamó SIRGAS - ROU98.

3.3.1.b Marco de Referencia Geodésico Uruguay (REGNA-ROU)

En la actualidad, en la concepción de la Geodesia Espacial o Geodesia Satelital, estas infraestructuras están siendo sustituidas por Estaciones de Referencia de Observación Continua, instrumentos que utilizan los Sistemas de Posicionamiento Global, para la observación permanente de la posición. En este caso, además de las coordenadas geodésicas geocéntricas (centro de masas de la Tierra), se le suma lo que ha dado en llamarse una “cuarta coordenada”: el tiempo (t), mediante la cual se pueden observar los desplazamientos de la posición de los puntos de control⁴.

En Uruguay las coordenadas del marco de referencia están dadas en un determinado momento, o sea que éstas no varían con el tiempo.

3.3.1.c Sistema Altimétrico del Uruguay

En cuanto al sistema de referencia altimétrico Nacional, existen dos superficies de referencias o Datums verticales conocidas como "Nivel Medio de las Aguas en el Puerto de Montevideo", y el "Cero Wharton" que fueron fijadas en los decretos del 20 marzo de 1948 y modificativo del 20 de mayo de 1949⁵.

Ambos intentan representar el nivel medio de las aguas en el puerto de Montevideo. Para la definición del datum vertical se registraron observaciones en un período de 20 años

⁴ Se obtiene de “Geodesia. Revisión de conceptos”, Cnel. Norbertino Suárez.

⁵ Se obtiene de “Parámetros de Transformación entre el Sistema SIRGAS 95 y los Sistemas Locales CDM y ROU-USAMS (Yacaré)”, Prof. Ing. Agrim. Roberto Pérez Rodino.

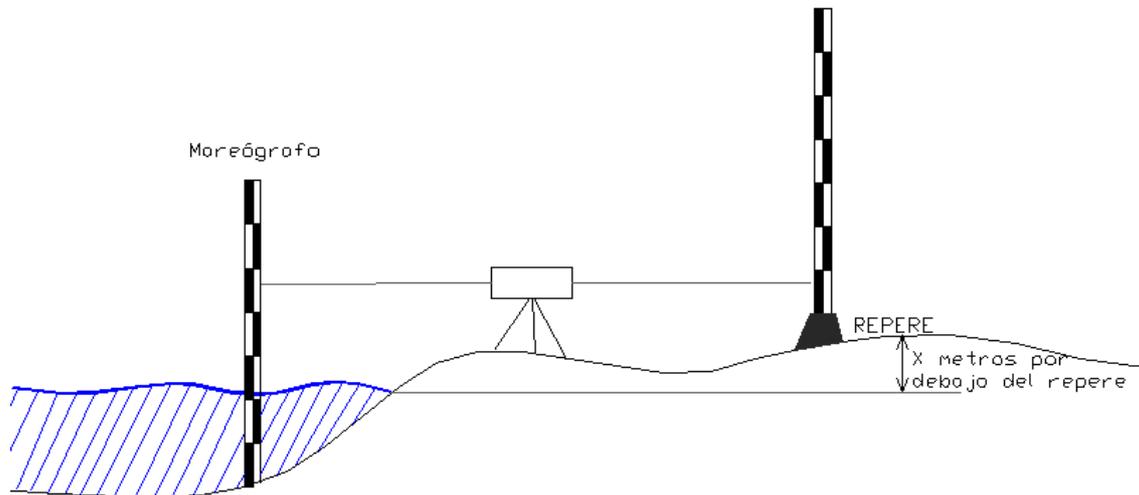


Figura 5 - Representación del cero oficial

3.4 Modelos Geopotenciales

Los modelos geopotenciales permiten calcular los valores de la altura geoidal (N) que vinculan la altura elipsoidal (h) con la ortométrica (H), y tienen asociado un conjunto de constantes: de atracción gravimétrica terrestre (GM), semieje mayor y aplastamiento del elipsoide terrestre, velocidad de rotación de la tierra y los coeficientes del desarrollo armónico. Este cálculo se realiza con un programa general que lee los coeficientes y calcula los valores relacionados con el potencial, entre ellos N .

Para el desarrollo de un modelo geopotencial de alto grado se utilizan tres tipos de información:

1. Obtenida a partir del estudio de las perturbaciones de órbitas de satélites.
2. Gravimétrica terrestre y aérea.
3. Altimétricas de satélites sobre los océanos.

Combinando estos tres tipos de soluciones se obtiene una mejor solución que utilizando una sola de ellas. Esta solución depende del tratamiento de las altimetrías de los satélites, la disponibilidad de datos en tierra firme y la resolución de buenas computadoras.

3.4.1 Modelo Geoidal EGM08

El Modelo Gravitacional EGM2008 ha sido publicado por la Agencia Nacional de Inteligencia Geoespacial (NGA). Los cálculos del geode local se han basado tradicionalmente en la filosofía Helmert de condensación: la topografía se condensa en una capa delgada sobre el geode, mientras que el efecto directo de la anomalía de la gravedad tiende hacia abajo del geode. Numéricamente, esto se hace mediante la sustitución de la anomalía de la gravedad por la anomalía de Faye. Este modelo ofrece una resolución y precisión mejores que el resto.

El logro alcanzado dependerá de la forma en que las reducciones topográfica y de gravedad se lleven a cabo.

3.5 Nivelación Geométrica Compuesta

Se entiende por nivelación geométrica al procedimiento que determina la diferencia de altura entre dos o más puntos mediante visuales horizontales a reglas (miras) verticales colocadas sobre dichos puntos.

Se utiliza la nivelación geométrica compuesta cuando la distancia entre los puntos cuyo desnivel se quiere hallar excede la máxima permitida entre miras, o su diferencia de nivel es mayor que la que puede realizarse con una sola puesta en estación; tomando una serie de puntos intermedios llamados puntos de cambio.

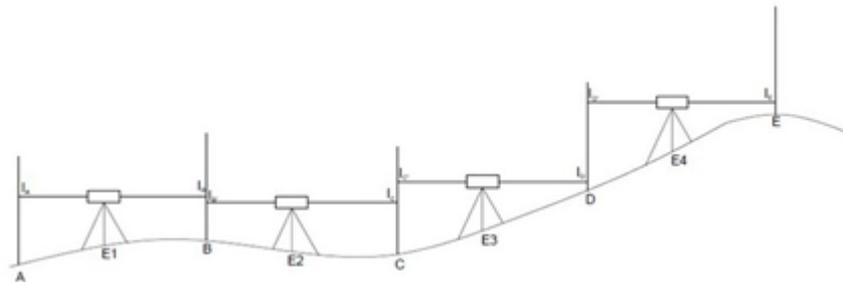


Figura 6 - Nivelación geométrica compuesta

Se sitúa una mira en el punto A , la otra en el B y el nivel en el punto medio de ambos puntos. Se efectúan las lecturas hacia atrás y hacia adelante, hacia los puntos A y B respectivamente. El desnivel estará dado por:

$$\Delta H_{AB} = l_A - l_B = l_{atrás\ 1} - l_{adelante\ 1}$$

A continuación, la mira en A se traslada al punto C y se efectúan las lecturas hacia B y C . En este caso, la lectura atrás será hacia el punto B .

$$\Delta H_{BC} = l_B - l_C = l_{atrás\ 2} - l_{adelante\ 2}$$

Si se repite el procedimiento para todos los tramos y se suman los desniveles, el desnivel entre A y E será la suma de los desniveles parciales de cada tramo:

$$\Delta H_{AE} = \sum l_{atrás} - \sum l_{adelante} \quad (3)$$

Para realizar el arrastre de cotas, se utiliza el método de nivelación geométrica doble simultánea, pues esto permite tener un control a medida que se realiza la nivelación.

El mismo consiste en cambiar el plano colimador en cada estación y volver a realizar las lecturas correspondientes, de esta forma se calculan dos desniveles en cada tramo, lo que equivale a efectuar simultáneamente la ida y el regreso, teniendo la ventaja de no tener que realizar el recorrido dos veces, economizando tiempo y trabajo, permitiendo además comprobar resultados cambio a cambio. Esto permite tener un control en la nivelación. Seguramente ambos desniveles no serán iguales, y el valor obtenido será un indicador para poder continuar con el siguiente tramo o realizar una tercer serie de lecturas.

Luego de calculado el desnivel entre los dos puntos A y E , conociendo la cota de A , la cota de E se calcula de la siguiente forma:

$$Cota E = \Delta H_{AE} + Cota A \quad (4)$$

3.6 Método de Ajuste de Mínimos Cuadrados

Este método realiza un ajuste de las observaciones de forma tal que la suma cuadrática de los residuales debe ser mínima, modificando mínimamente las observaciones realizadas y realizando un ajuste con independencia del observador. El método de Mínimos Cuadrados se puede aplicar mediante dos algoritmos de resolución:

- AMC – M → Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes
- AMC – C → Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Correcciones

Para la resolución de un problema se podrá optar por ambas técnicas.

3.6.1 Ajuste de Mínimos Cuadrados de las Magnitudes

Esta técnica mediante su proceso de resolución permite el cálculo directo de las magnitudes. Este tipo de ajuste tiene las siguientes características:

- Las ecuaciones de condición incluyen observaciones y parámetros incógnita.
- El número de ecuaciones de condición es el mismo que el de observaciones.
- Cada ecuación de condición contiene una sola observación con un coeficiente igual a 1.

La forma en que se escribe las ecuaciones es la siguiente: $l + B\Delta = d$

Donde: $\bar{l} = l + v$

B - formada por los coeficientes de los parámetros

Δ - contiene a los parámetros

d - formada por las constantes del método

Entonces:

$$(l + v) + B\Delta = d$$

$$v + B\Delta = d - l$$

siendo $d - l = f$

Por lo tanto la forma en la que se expresan las ecuaciones de condición es la siguiente:

$$v + B\Delta = f \tag{5}$$

$$\begin{aligned} v_1 + b_{11}\tau_1 + b_{12}\tau_2 + \dots + b_{1u}\tau_u &= f_1 \\ v_2 + b_{21}\tau_1 + b_{22}\tau_2 + \dots + b_{2u}\tau_u &= f_2 \\ &\vdots \\ v_n + b_{n1}\tau_1 + b_{n2}\tau_2 + \dots + b_{nu}\tau_u &= f_n \end{aligned}$$

Donde:

- $v \rightarrow$ Errores residuales
- $b \rightarrow$ Coeficientes numéricos de los parámetros
- $\tau \rightarrow$ Parámetros incógnitas
- $f \rightarrow$ Constantes numéricas

- $n =$ número de observaciones
- $n_0 =$ número mínimo de observaciones
- $r =$ ecuaciones redundantes
- $u =$ números de parámetros

Si lo expresamos en notación matricial, nos queda:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1u} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nu} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$$v + B\Delta = f \tag{6}$$

3.6.2 Ley General de Propagación de Varianzas y Covarianzas

Matriz Covarianza	Matriz Varianza
$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$	$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$
$\underbrace{Q_{XX}}_{\text{Matriz Cofactor}} = W^{-1} = \frac{1}{\sigma_0^2} \cdot \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \frac{\sigma_2^2}{\sigma_0^2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \frac{\sigma_n^2}{\sigma_0^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\omega_1} & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \frac{1}{\omega_2} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \frac{1}{\omega_n} \end{bmatrix}$	
$\Rightarrow \Sigma_{XX} = \sigma_0^2 \times Q_{XX}$	

Propagación de la matriz varianza y covarianza:

Para funciones lineales $y = ax + b \Rightarrow \Sigma_{YY} = A \times \Sigma_{XX} \times A^T$

Para funciones linealizadas $y = f(x) \Rightarrow \Sigma_{YY} = J_{YX} \times \Sigma_{XX} \times J_{YX}^T$

Sabemos que:

Para variables $X \quad \Sigma_{XX} = \sigma_0^2 \times Q_{XX}$

Para variables $Y \quad \Sigma_{YY} = \sigma_0^2 \times Q_{YY}$

Sustituyendo, se llega a la **Ley de Propagación de Cofactores**:

$$\Sigma_{YY} = A \times \sigma_0^2 \times Q_{XX} \times A^T \div \sigma_0^2 \Rightarrow Q_{YY} = A \times Q_{XX} \times A^T \quad (7)$$

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \times \sigma_0^2 \times Q_{XX} \times J_{YX}^T \div \sigma_0^2 \Rightarrow Q_{YY} = A \times Q_{XX} \times A^T \quad (8)$$

3.6.3 Propagación de cofactores para AMC+M

Ecuaciones de condición $\rightarrow v + b\Delta = f$ con $f = d - l$ donde:

d = datos numéricos

l = observaciones

Matriz cofactor asociada a las observaciones $\rightarrow Q_{ll} = Q = W^{-1}$

Algoritmo:

$$N = B^T \times W \times B$$

$$t = B^T \times W \times f$$

$$\Delta = N^{-1} \times t$$

$$v = f - B \times \Delta$$

$$\bar{l} = l + v$$

$$f = (-I) \times l + d \rightarrow Q_{ff} = (-I) \times Q_{ll} \times (-I)^T = Q \Rightarrow Q_{ff} = Q$$

$$\rightarrow Q_{tt} = N$$

$$\rightarrow Q_{\Delta\Delta} = N^{-1} \Rightarrow \sum_{\Delta\Delta} = \sigma_0^2 \times Q_{\Delta\Delta}$$

$$\rightarrow Q_{\Delta\Delta} = Q - B \times N^{-1} \times B^T \quad (9)$$

$$\Rightarrow \sum_{vv} = \sigma_0^2 \times Q_{vv}$$

Si trabajamos con \bar{l} ajustadas $\Rightarrow B \times \Delta = d - \bar{l} \Rightarrow \bar{l} = d - B \times \Delta$

$$\rightarrow Q_{\bar{l}\bar{l}} = B \times N^{-1} \times B^T \quad (10)$$

$$\Rightarrow \sum_{\bar{l}\bar{l}} = \sigma_0^2 \times Q_{\bar{l}\bar{l}}$$

Por (9) y (10) $\rightarrow Q_{\bar{l}\bar{l}} = Q - Q_{vv}$

Con la propagación de cofactores del AMC de las magnitudes, se puede calcular las σ^2 o σ de las magnitudes ajustadas, de las observaciones ajustadas y de los residuales de cada observación⁶.

⁶ Se obtiene de eva.fing.edu.uy, asignatura Teoría de Errores 2.

3.7 GNSS

El sistema global de navegación satelital (GNSS) es un sistema de posicionamiento basado en la medición de la distancia a un mínimo de cuatro satélites en simultáneo, que además transmiten sus posiciones estimadas. Las distancias son medidas comparando la señal recibida desde el satélite con una réplica generada por el receptor. La diferencia de fase entre la señal recibida y la generada localmente es proporcional al tiempo de propagación (distancia satélite-receptor). Como los receptores generan la señal local usando relojes de cuarzo, la diferencia de fase absorbe también sus inestabilidades. Observando un mínimo de cuatro satélites bien distribuidos en el cielo, el receptor puede calcular cuatro incógnitas: tres para la posición del receptor y una para la corrección al reloj local.

El principio del posicionamiento satelital se basa en relacionar tres componentes:

- Una cantidad conocida, que es la posición del satélite (X^S, Y^S, Z^S)
- Una cantidad mensurable, que es la distancia satélite-receptor (ρ)
- Una cantidad desconocida, que es la posición del receptor (X_R, Y_R, Z_R)

$$\rho = \sqrt{(X^S - X_R)^2 + (Y^S - Y_R)^2 + (Z^S - Z_R)^2} \quad (11)$$

El objetivo de la medición es obtener la posición de nuestro receptor en el mismo sistema de referencia en el que se dan las coordenadas de los satélites⁷.

3.7.1 Posicionamiento Puntual o Absoluto

Este consiste en determinar la posición de un punto próximo a la superficie terrestre utilizando un receptor y la medición de la pseudodistancia usando el código que contienen las ondas portadoras de la señal GPS. Para determinar la posición del receptor basta con determinar las pseudodistancias a 4 satélites en el mismo instante t de tiempo. El receptor mide la distancia satélite-receptor a partir del tiempo de propagación de la señal emitida desde el satélite. Los satélites y los receptores cuentan con relojes que controlan el tiempo de emisión y recepción de la señal respectivamente. De esta manera:

$$t_R - t^S = \Delta t \quad \Rightarrow \quad c \times \Delta t = \text{distancia} \quad (12)$$

Donde: t_R = Instante de recepción de la señal R

t^S = Instante de emisión de la señal S

Δt = Tiempo de propagación de la señal

c = Velocidad de la luz

⁷ Se obtiene de eva.fing.edu.uy, asignatura Geodesia 3.

Debido a que los relojes de los satélites y de los receptores no están sincronizados entre ellos, ni con el tiempo patrón GPS, es que la distancia determinada satélite-receptor se denomina pseudodistancia. Los errores en los relojes de los satélites se pueden corregir a partir de los datos enviados en el mensaje para tal fin⁸.

3.7.2 Método Diferencial

Este método consiste en el procesamiento de diferencias de observaciones simultáneas, realizadas por al menos dos estaciones a los mismos satélites. Se calculan las coordenadas de puntos respecto de al menos una estación de referencia que a priori debe tener coordenadas conocidas. En este caso, la exactitud de las coordenadas calculadas estará dada por la de las coordenadas de la estación de referencia.

El método diferencial se apoya en la utilización de dos equipos GNSS simultáneamente en dos posiciones diferentes, siendo una de ellas conocida, al posicionamiento de este receptor se le llama estación de referencia y al otro móvil o rover. Con este método se consigue cifrar y cuantificar algunos errores propios del sistema GNSS que afectan al modo absoluto⁹.

El método diferencial se puede implementar de varias maneras, existen dos que son las más importantes. Una de ellas es Post Proceso y la otra es Tiempo Real.

3.7.2.a Post Proceso

La obtención de coordenadas y líneas base se efectúa después de la observación, por eso es necesario guardar datos crudos (observables y mensaje de navegación) en base y móvil, y la utilización de un software específico para realizar el post proceso.

3.7.2.b Tiempo Real

Las correcciones diferenciales que realiza el móvil son en tiempo real, esto permite que la obtención de coordenadas y líneas base se efectúan en el mismo momento de la observación, de forma que el tiempo de cálculo es tan reducido que se puede considerar casi instantáneo o en tiempo real.

La corrección en tiempo real puede hacerse a partir de observable de código u observable de fase, habitualmente a la corrección de código se la denomina GPS Diferencial DGPS, DGNSS y se reserva el término de corrección cinemático en tiempo real RTK a la corrección en fase¹⁰. El posicionamiento en tiempo real implica que debe haber comunicación entre base y móvil. Esta comunicación puede ser a través de radio enlace (RADIO-RTK), a través de internet (NTRIP-RTK), entre otros.

⁸ Se obtiene de eva.fing.edu.uy, asignatura Geodesia 3.

⁹ Se obtiene “GNSS: GPS: fundamentos y aplicaciones en geomática.” Berné Valero, José Luis, Anquela Julián, Ana Belén, y Garrido Villén, Natalia.

¹⁰ Ídem ⁸

3.7.2.b.i RADIO-RTK

El receptor base tiene un radio-módem el cual transmite los datos recibidos de la unidad de control. El alcance de la transmisión depende de la potencia, cuan mayor sea ésta, más alcance tiene. El receptor móvil también tiene un radio-módem que recibe los datos que transmite la base y calcula los datos por cada época que recibe. El alcance o distancia entre base y móvil varía de 3 a 15 km dependiendo del tipo de radio y potencia de la misma.

3.7.2.b.ii NTRIP-RTK

NTRIP (Network Transport of RTCM via Internet Protocol) está diseñado para diseminar datos GNSS a través de Internet, especialmente correcciones diferenciales para posicionamiento preciso en tiempo real. La mayor parte de los receptores GNSS cuentan con software con un cliente NTRIP para usar estas correcciones diferenciales.

3.8 Número Geopotencial

Designamos por P_0 la intersección del geoide con la línea de la plomada que pasa por el punto A . Sea H la altura ortométrica de A y C su número geopotencial, esto es:

$$C = W - W_0$$

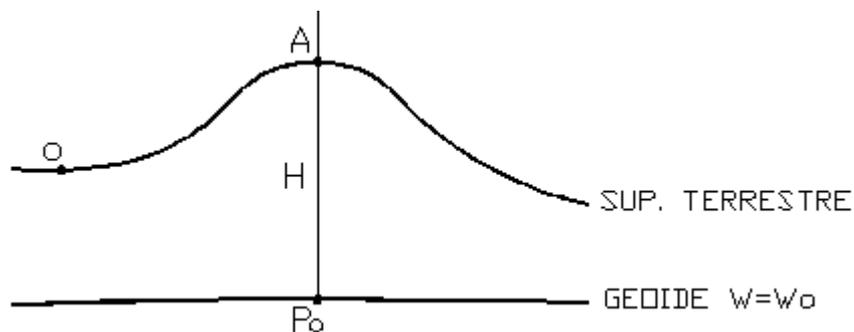


Figura 7 - Número Geopotencial (C)

Sea O un punto a nivel del mar, esto es, sobre el geoide. Sea A otro punto, conectado con O por una nivelación. Entonces puede determinarse la diferencia de potencial entre A y O .

$$\int_O^A g \, dn = W_0 - W_A = C$$

El número geopotencial C corresponde a la diferencia entre el potencial en el geoide y el potencial en el punto A . Como diferencia de potencial, C es independiente del itinerario de nivelación particular utilizado para relacionar el punto, con el nivel del mar y es el mismo para todos los puntos de una superficie de nivel.

Puesto que C no depende del camino seguido, integrando a lo largo de la línea de la plomada:

$$C = \int_0^H g \, dH = H \times \frac{1}{H} \int_0^H g \, dH$$

De modo que:

$$C = \bar{g} \times H \quad (13)$$

Donde:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g \, dH$$

El valor medio de la gravedad es aquel a lo largo de la línea de la plomada entre el geoide y la superficie terrestre. Despejando de la fórmula (13):

$$H = \frac{C}{\bar{g}} \quad (14)$$

Para determinar la altitud ortométrica necesitamos conocer la gravedad media a lo largo de la línea de la plomada. La aproximación más simple para su cálculo es la utilización de la reducción de Prey:

$$g(z) = g_A + 0.0848(H - z) \quad (15)$$

donde g_A es la gravedad media en el punto A . Sustituyendo la ecuación (15) en (14) e integrando:

$$\bar{g}_a = \frac{1}{H} \int_0^H [g + 0.0848(H - z)] dz = g_a + \frac{1}{H} 0.0848 \left[H_z - \frac{z^2}{2} \right]_0^H = g_a + 0.0424H$$

con g en gales y H en Km.

El factor 0.0424 es válido para la densidad normal = $2.67g/cm^3$. De esta forma obtendremos la llamada altitud de Helmert:

$$H = \frac{C}{g + 0.0424 \times H} \quad (16)$$

con g en gales, H en Km y C en unidades geopotenciales (u.g.p)¹¹.

¹¹ Se obtiene de "Determinación geométrica de la ondulación del geoide a lo largo de un tramo de la REDNAP, Ocaña-Cuenca y su comparación con el geoide geométrico", Javier Arias y Mario Rivas.

3.9 Anomalía de Gravedad

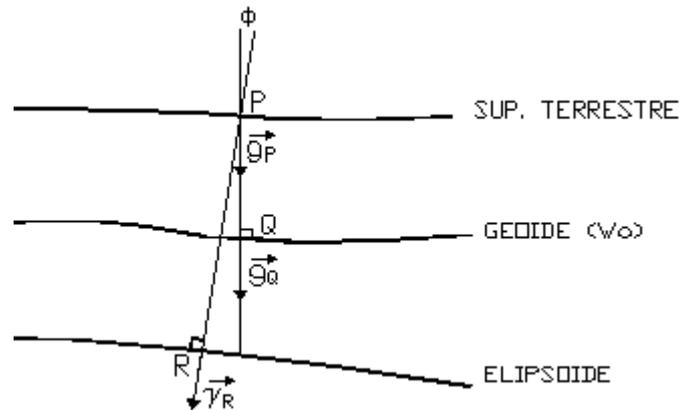


Figura 8 - Anomalía de la gravedad (Δ_g)

Se considera el vector gravedad en Q (\bar{g}_Q) y el vector gravedad normal en R ($\bar{\gamma}_R$). El vector anomalía de gravedad será: $\bar{\Delta}_g = \bar{g}_Q - \bar{\gamma}_R$. La diferencia en magnitud será la anomalía de la gravedad $\Delta_g = g_Q - \gamma_R$. La diferencia de las direcciones será la deflexión de la vertical Φ . Para calcular la anomalía de la gravedad debemos hacer comparables los valores de g y γ para lo cual llevamos el valor calculado de γ a la posición donde fue observado g . Estas correcciones (reducciones) se realizan paso a paso. Se debe hacer la reducción de aire libre, de Bouguer, de altitud y topográfica.

Se explicará únicamente la reducción de Bouguer, pues, es la única que vamos a utilizar en el presente trabajo.

3.9.1 Anomalía de Bouguer

La anomalía de la gravedad es la diferencia entre la gravedad real en el geoide y la gravedad calculada en el elipsoide. En este caso para calcular la anomalía se realiza la reducción de Bouguer, que se explica seguidamente.

3.9.2 Reducción de Bouguer

El objetivo de la reducción de Bouguer es la eliminación completa de las masas topográficas, es decir, las masas fuera del geoide. Se supone la tierra como una losa infinita alrededor del punto P y que las masas entre el geoide y la superficie terrestre tienen una densidad constante.

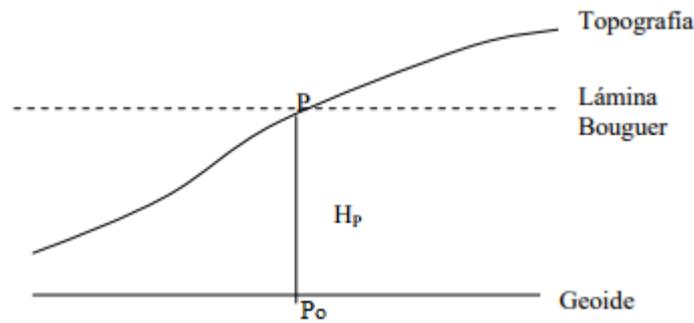


Figura 9 - Reducción de Bouguer

Entonces, la atracción A de la lámina de Bouguer se obtiene tendiendo a a infinito en la siguiente ecuación:

$$A_0 = 2\Pi G \rho \left[a + b - \sqrt{a^2 + b^2} \right]$$

ya que la lámina, considerada plana, puede considerarse como un cilindro circular de grosor $b = H$ y radio infinito, por reglas conocidas del cálculo, obtenemos $A_B = 2\Pi G \rho H$ como la atracción de una lámina infinita de Bouguer con densidad estándar $\rho = 2,67 \text{ g cm}^{-3} \Rightarrow A_B = 0,1119 \times H \text{ [mgal]}$.

Para continuar y completar la reducción de gravedad, se debe aplicar la reducción de aire libre: $F = -\frac{\partial \gamma}{\partial h} \times H = 0,3086 \times H$

Este proceso combinado de eliminación de las masas topográficas y aplicación de la reducción de aire libre se denomina reducción completa de Bouguer.

El resultado es la gravedad de Bouguer en el geoide: $g_B = g - A_B + F$

Con los valores numéricos asumidos, tenemos:

Gravedad medida en P	g
- Placa de Bouguer	$- 0.1119 \times H$
+ Reducción de aire libre	$+ 0.3086 \times H$
Gravedad de Bouguer en P_0	$g_B = g + 0.1967 \times H$

Dado que g_B ahora se refiere al geoide, obtenemos anomalías de gravedad genuinas, restando la gravedad normal (γ) referida al elipsoide:

$$\Delta g_B = g_B - \gamma \tag{17}$$

Denominada **Anomalía de Bouguer**¹².

¹² Se obtiene de "Physical Geodesy", Bernhard Hofmann-Wellenhof y Helmut Moritz

4. Etapa previa al campamento

Esta etapa comprende todo lo concerniente a la planificación de las actividades a ejecutar durante la estadía en la Ciudad de Dolores por el Departamento de Geodesia a raíz de la actividad de Extensión.

El Departamento fue encargado de realizar una nivelación geométrica y posterior relevamiento con tecnología GNSS de una red de puntos colocados por la Intendencia de Soriano, con el objetivo de obtener sus cotas referidas al cero oficial. A continuación se expresa lo contemplado para cada actividad, pautas y objetivos específicos.

4.1 Nivelación Geométrica

En cuanto a la planificación de la ejecución de actividades de esta área, hubo varios aspectos a tener en cuenta por parte de los docentes.

Uno de los objetivos consistió en la nivelación geométrica y posterior realización de las monografías de 38 puntos distribuidos a lo largo de la ciudad, previamente colocados por la Intendencia de Soriano de acuerdo a sus intereses. (Ver Figura 10).

Si bien el Departamento de Geodesia contaba con 10 estudiantes en total, dado que la nivelación implica a priori más tiempo y esfuerzo, se tomó 8 de estos 10 estudiantes para esta actividad, la cual debía contemplarse en los 3 días de estadía.

Se concurrió al SGM a consultar sobre la ubicación y disponibilidad de puntos de la Red Altimétrica Nacional en la zona y además se consultó la Carta Topográfica de Dolores a escala 1:50.000. Se optó por tomar como referencia en campo, aquellos puntos que no estuvieran muy alejados del centro de la ciudad, para que la nivelación no se tornara demasiado extensa (Ver Figura 11).

Finalmente se decide contar con las monografías de los siguientes puntos: 1.22.022 - 1.22.028 - 1.22.029 - 1.22.030 - 1.22.031 y el vértice geodésico perteneciente a la Red Geodésica Nacional Pasiva ADOL. Pueden consultarse dichas monografías y la Carta Topográfica en el capítulo Anexo.

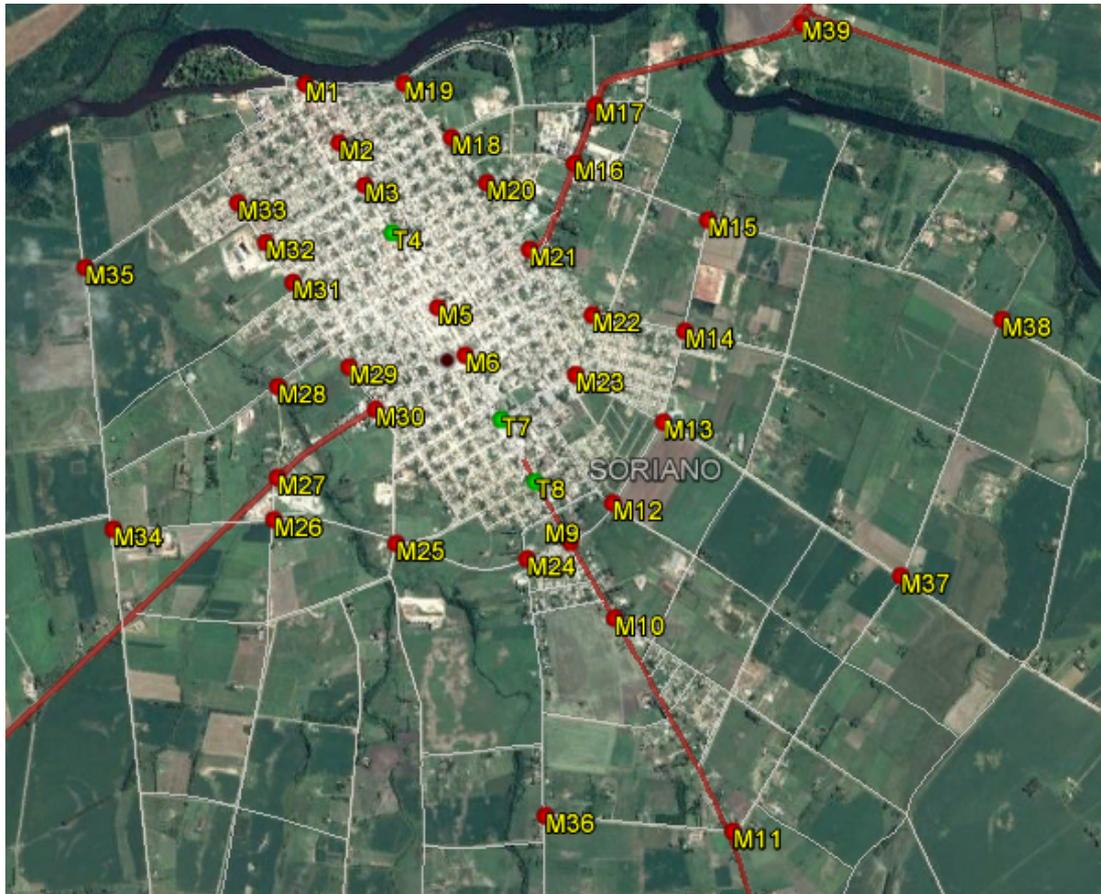


Figura 10 - PF colocados por la Intendencia de Soriano

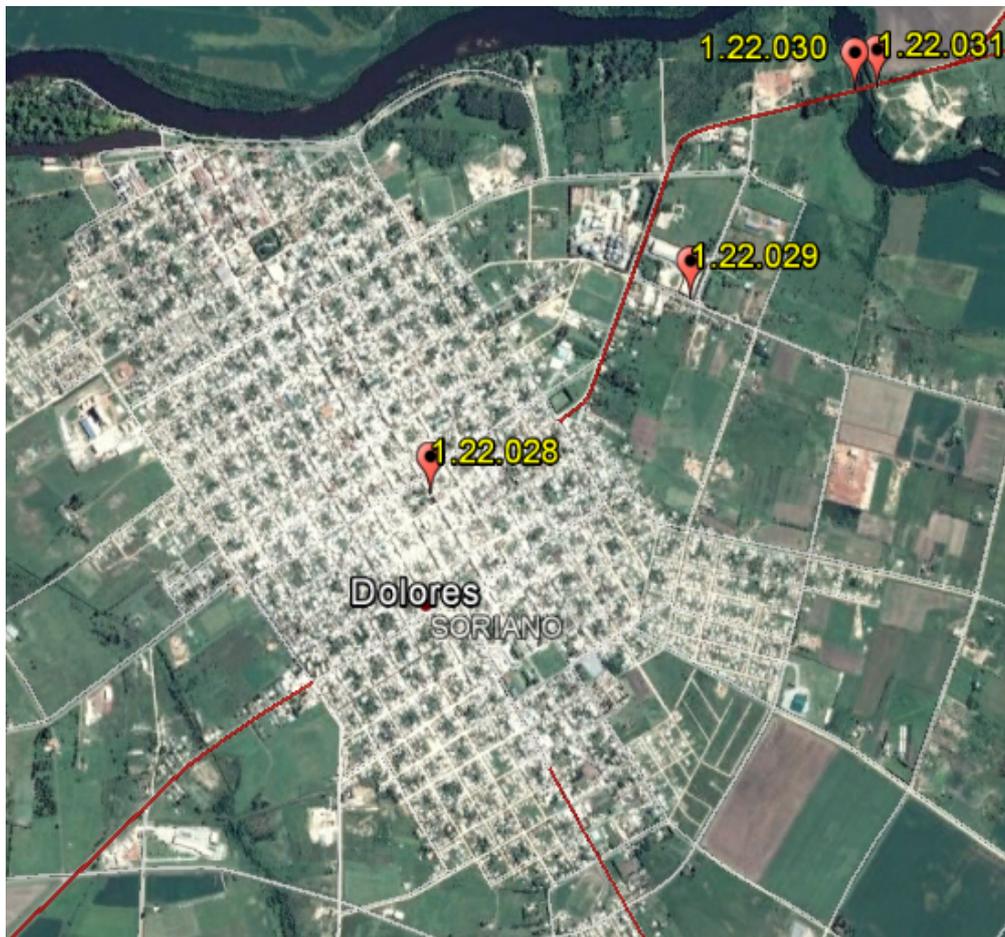


Figura 11 - PF del SGM en Dolores

A parte de la ubicación de los puntos mencionados anteriormente y los colocados por la Intendencia de Soriano, se tuvo en cuenta lo siguiente para optimizar todo lo concerniente a la nivelación:

- Realizar una nivelación geométrica doble simultánea y cerrada en cada circuito para poder controlarla y tener una noción de los errores de cierre.
- Jornadas de 8 horas de trabajo.
- Antes del arribo al lugar de trabajo, cada grupo deberá tener determinado el caminamiento con el objetivo de optimizar los tiempos.
- Se planeó que los dos grupos no cierren circuitos de forma independiente, sino que éstos se complementen con datos relevados por el otro equipo, evitando así cierres forzados.
- La conformación de los grupos sea de 4 integrantes cada uno, de tal forma que el operador no sea quien anote los resultados.

- El operador del equipo debe ser el mismo por lo menos de punto fijo a punto fijo, para que el error de lectura cometido sea siempre el mismo y no haya diferencias.

- Dados Δh_1 y Δh_2 obtenidos de la nivelación doble simultánea, se establece que la diferencia de estos desniveles sea menor o igual a 3 mm para continuar con la nivelación, de lo contrario debe repetirse el procedimiento (*Ver demostración en sección Preanálisis*), por lo que:

$$\Delta h_1 - \Delta h_2 \leq 3 \text{ mm} \quad (18)$$

- Dado que la nivelación implica un recorrido de alrededor de 45 km en total, se distribuyó en igual cantidad de kilómetros aproximadamente para cada grupo (22 km).

Se planificaron con rigurosidad los circuitos de cada grupo y se los distribuyó en los 3 días de trabajo, además se confeccionó la planilla de nivelación. Se agregan las imágenes descriptivas de cada uno, y de la planilla al capítulo ANEXO.

Circuito	Perimetro (Km)	Circuito	Perimetro (Km)
1	2700	8	2300
2	2300	9	2800
3	2950	10	2000
4	2900	11	3200
5	2600	12	4600
6	3700	13	6200
7	3200	14	6250
Total Circuitos (km)		47700	

Tabla 1 - Distancias de los circuitos cerrados

La distancia de los circuitos es aproximada ya que fue medida con Google Earth. Respecto al instrumental, fue considerado necesario para llevar a cabo los objetivos, contar en campo con:

- 2 niveles automáticos Pentax AL-M4c
- 4 miras
- 4 galápagos
- 4 niveletas
- 2 trípodes de patas extensibles
- 14 chalecos reflectores

Finalmente se hace una estimación de los posibles errores a cometer en campo y su valor máximo admisible, a continuación la explicación de la misma:

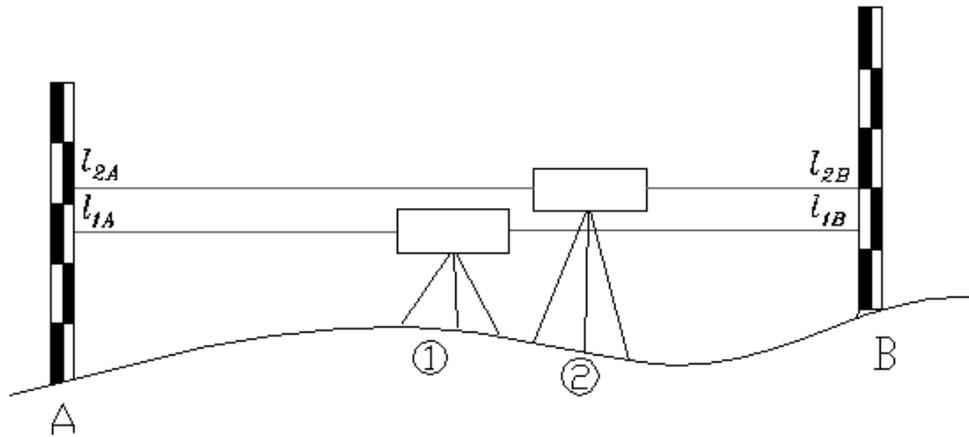


Figura 12 - Nivelación doble simultánea

Se quiere hallar el error en el desnivel entre los puntos A y B , como se dijo, se realizará una nivelación doble simultánea por lo que se obtendrán a priori dos desniveles, si la resta de ambos es menor a 3 mm entonces se considerará que el desnivel efectivo entre A y B es el promedio de ambos y se podrá proceder a nivelar el siguiente tramo, de lo contrario, deberá realizarse una tercera serie de lecturas para alcanzar ese valor menor a 3 mm. Por lo tanto:

$$\Delta H_{1AB} = l_{1A} - l_{1B}$$

$$\Delta H_{2AB} = l_{2A} - l_{2B}$$

$$\text{Si } \Delta H_{1AB} - \Delta H_{2AB} \leq 3mm \Rightarrow \Delta H_{AB} = \frac{\Delta H_{1AB} + \Delta H_{2AB}}{2} \quad (19)$$

Se procede a realizar la propagación de los errores para cada desnivel por separado:

$$\sigma_{\Delta H_{1AB}}^2 = \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial l_{1A}}\right)^2 \times \sigma_{l_{1A}}^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial l_{1B}}\right)^2 \times \sigma_{l_{1B}}^2$$

Se considera que: $\sigma_{l_{1A}}^2 = \sigma_{l_{1B}}^2 = \sigma_l^2$, el error a cometerse en las lecturas es el mismo, entonces:

$$\Rightarrow \sigma_{\Delta H_{1AB}}^2 = \left[\left(\frac{\partial \Delta H}{\partial l_{1A}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta H}{\partial l_{1B}}\right)^2 \right] \times \sigma_l^2 \Rightarrow \sigma_{\Delta H_{1AB}}^2 = 2\sigma_l^2$$

Por lo que, el error en el desnivel 1 nos queda:

$$\sigma_{\Delta H_{1AB}} = \sqrt{2}\sigma_l \quad (20)$$

Se observa que el procedimiento es idéntico para el cálculo del error en el desnivel 2, entonces, de la misma forma se llega al siguiente resultado:

$$\sigma_{\Delta H_{2AB}} = \sqrt{2}\sigma_l \quad (21)$$

Teniendo la fórmula del desnivel efectivo entre A y B (ΔH_{AB}) se propaga el error obteniéndose $\sigma_{\Delta H}$:

$$\Delta H_{AB} = \frac{\Delta H_{1AB} + \Delta H_{2AB}}{2}$$

$$\sigma_{\Delta H_{AB}}^2 = \left(\frac{\partial \Delta H_{AB}}{\partial \Delta H_{1AB}}\right)^2 \times \sigma_{\Delta H_{1AB}}^2 + \left(\frac{\partial \Delta H_{AB}}{\partial \Delta H_{2AB}}\right)^2 \times \sigma_{\Delta H_{2AB}}^2 \Rightarrow \sigma_{\Delta H_{AB}}^2 = \frac{1}{4} \times 2\sigma_l^2 + \frac{1}{4} \times 2\sigma_l^2$$

$$\Rightarrow \sigma_{\Delta H_{AB}}^2 = \sigma_l^2 \quad (22)$$

Sabiendo que la nivelación consta de n tramos: $\sigma_{\Delta H}^2 = \sigma_{l_1}^2 + \sigma_{l_2}^2 + \dots + \sigma_{l_n}^2$

Además, como: $\sigma_{l_1} = \sigma_{l_2} = \dots = \sigma_{l_n}$ el error a cometerse en una nivelación de n tramos será el siguiente:

$$\sigma_{\Delta H} = \sqrt{n} \times \sigma_l \quad (23)$$

Si D es la distancia total nivelada, y d la distancia entre miras, entonces:

$$n = \frac{D}{d} \Rightarrow \sigma_{\Delta H} = \sqrt{\frac{D}{d}} \times \sigma_l \quad (24)$$

Ahora, previo a la salida de campo, se plantea una tolerancia, la cual dependerá del orden de precisión en la nivelación que se pretenda obtener, para luego elegir un instrumental adecuado que permita obtener esos resultados. La tolerancia es el valor del error en el desnivel total máximo admisible a cometer, para ese orden de precisión.

La formulación de la tolerancia a utilizar es la planteada por el Instituto Geográfico Nacional de la República Argentina (IGN), en la cual se especifica que:

$$T = f \times \sqrt{k} \quad (25)$$

Donde f es el factor que refleja el orden de nivelación a realizarse y k es la longitud del tramo nivelado, expresado en kilómetros.

Para precisiones topográficas, $f = 7$, entonces a continuación la siguiente tabla expresa la tolerancia de cada circuito.

Circuito	Perímetro (Km)	Tol (mm)
A	2.69	11
B	2.31	11
C	2.93	12
D	2.85	12
E	2.59	11
F	3.72	14
G	3.20	13
H	2.31	11
I	2.78	12
J	2.02	10
K	3.21	13
L	4.65	15
M	6.20	17
N	6.25	18

Tabla 2 - Tolerancias para cada circuito

Por otro lado, la tolerancia se plantea como $T = 3\sigma_{\Delta H}$ para que el 99.7% de los valores se encuentren en el intervalo: $[\Delta H \pm \sigma_{\Delta H}]$, entonces:

$$\sigma_{\Delta H} = \frac{T}{3} \quad (26)$$

De la ecuación anterior es posible obtener el valor de $\sigma_{\Delta H}$, por otro lado, tomando en cuenta la ecuación (26), también es posible a partir del valor de $\sigma_{\Delta H}$ determinar el valor de σ_l . Por último, aplicando la fórmula $T = 3\sigma_{\Delta H}$ y recordando que $\sigma_{\Delta H_{AB}} = \sigma_l$ se recalcula la tolerancia para ese caso. (Ver Tabla 3)

Se agrega la siguiente tabla con los cálculos realizados para cada circuito de la red:

Circuito	Tol (mm)	$\sigma \Delta h$ (mm)	σl (mm)	Tol= 3* σl (mm)
A	12	3.83	0.7	2.2
B	11	3.54	0.7	2.2
C	12	4.01	0.7	2.2
D	12	3.97	0.7	2.2
E	11	3.76	0.7	2.2
F	13	4.49	0.7	2.2
G	13	4.17	0.7	2.2
H	11	3.54	0.7	2.2
I	12	3.90	0.7	2.2
J	10	3.30	0.7	2.2
K	13	4.17	0.7	2.2
L	15	5.00	0.7	2.2
M	17	5.81	0.7	2.2
N	18	5.83	0.7	2.2

Tabla 3 - Cálculos de Tolerancia por circuito

Como se observa, para nivelaciones de orden topográfico, y con los valores de distancia por circuito mencionados anteriormente, se cometen errores en la lectura del orden de 1 mm ($\sigma_l = 0.7$). Por último, según la tabla anterior, se toleran valores de una discrepancia máxima entre los desniveles de hasta 3mm por lo cual para una nivelación doble simultánea:

$$\Delta h_1 - \Delta h_2 \leq 3 \text{ mm}.$$

La experiencia en campo de los docentes encargados de los grupos de nivelación asegura que con tramos de entre 80 y 100 metros cada uno, es posible cometer errores entre 1 y 2 mm por lo cual si se quisiera obtener resultados correspondientes a nivelaciones de alta precisión tal vez serían necesarios tramos un poco más cortos.

Finalmente con el instrumental que se posee estamos en condiciones de obtener resultados del orden pretendido a priori, Topográfico.

Como anexo a lo expuesto anteriormente, se plantea como opción para el operador del nivel, detectar el error cometido en cada lectura de acuerdo al siguiente procedimiento:

- Medir el desnivel de dos puntos con cota conocida y libre de error.

4.2 GNSS

El siguiente punto corresponde a la planificación de las actividades a realizar en las tareas de relevamiento con tecnología GNSS de todos los puntos fijos de la red, la misma fue realizada por los docentes Jorge Faure y Ricardo Yelicich.

El instrumental disponible, el cual será mencionado próximamente, cubre las condiciones más restrictivas del trabajo.

Permite grabar datos crudos para realizar el postproceso y recibir correcciones diferenciales vía NTRIP-RTK o vía RADIO-RTK. Por ello, lo que se hizo fue planificar mediciones utilizando estas funcionalidades sin preocuparnos del equipamiento.

Trabajo de campo:

- 1) Ubicar punto base, medido con NTRIP-RTK a una estación permanente del SGM.
- 2) Medir vértices de la Red Dolores utilizando RADIO-RTK y NTRIP-RTK.
- 3) Medir vértices SGM (red geodésica, red pasiva, puntos de nivelación).
- 4) Medir 4 vértices de la Red Dolores utilizando modo estático o estático rápido en simultáneo para conformar 6 vectores.

Procesamiento de datos:

- 1) Cálculo diferencial de CORS SGM a punto base.
- 2) Cálculo diferencial de punto base a Red Dolores y vértices SGM.
- 3) Post proceso y ajuste de la red estática.
- 4) Proyecciones Cartográficas:
 - a. Sistema WGS84, proyección UTM Z21S
 - b. Sistema ROU-USAMS, proyección Gauss Krugger (se realizará la transformación correspondiente utilizando diferentes parámetros)
 - c. Cálculo de distancias proyectadas con a) y b)
- 5) Alturas:
 - a. Aplicación de Modelo Geoidal
 - b. Ajuste a Cero Oficial y/o Cero Wharton

Previo al relevamiento fue necesario tomar algunos recaudos mínimos para evitar contratiempos una vez en campo. Se controló que todo el instrumental a utilizar estuviera en óptimas condiciones y que las baterías estuvieran debidamente cargadas.

Previendo la necesidad de tener acceso a internet desde la controladora para poder utilizar NTRIP-RTK, fue necesario disponer de tarjeta SIM con tráfico de datos móviles a tales efectos.

Se solicitó a la Intendencia de Soriano la ubicación de los puntos de la Red Dolores y con esta información se realizó un archivo .kml para Google Earth, el cual con un celular se podría acceder in situ con el fin de saber la posición aproximada de los puntos de interés y realizar el recorrido del relevamiento lo más corto posible.

Respecto al instrumental, los que estuvieron disponibles para llevar a cabo los objetivos, fueron:

- 2 Receptores Leica Viva GNSS GS08
- Controladora Leica Viva CS10
- Receptor Prexiso G5
- Controladora Gtac
- Trípode de patas extensibles
- 2 Bastones

La necesidad de contar con dos receptores y dos controladoras se debe a que se realiza la toma de datos con tecnología GNSS simultáneamente con dos métodos diferentes.

El receptor Leica Viva GNSS GS08 y la controladora Leica Viva CS10 son utilizados para obtener los datos vía RADIO-RTK, y el receptor Prexiso G5 y la controladora Gtac para la toma de datos vía NTRIP- RTK.

5. Relevamiento

El presente capítulo detalla el procedimiento realizado en campo para el relevamiento de la RPF de Dolores, la cual densifica el marco de referencia ROU-98.

Dados los objetivos planteados, surgen dos procedimientos de relevamiento, aquel que se hizo mediante nivelación geométrica, y el resultante de la aplicación de tecnologías GNSS, por lo que finalizadas las tareas de campo se contará con el doble dato para cada vértice de la RPF.

5.1 Nivelación Geométrica

Como fue mencionado anteriormente, la IS fue la encargada de colocar los mojones que fueron nivelados.

Cada equipo fue designado para realizar tres circuitos diferentes, uno por cada día de estadía, realizando nivelaciones geométricas dobles simultáneas en circuitos cerrados con el objetivo de ir controlando instantáneamente los resultados. Como se dijo, el promedio del desnivel entre dos puntos debía ser menor a 3 mm para continuar con la nivelación.

Entre los vértices de la RPF se utilizaron puntos intermedios o puntos de cambio estableciendo tramos de aproximadamente 90 - 100 m medidos a pasos.

Esto es debido que a partir de distancias mayores a las mencionadas, las lecturas pueden verse influenciadas por un mayor error de estimación, considerando el aumento del anteojo del nivel utilizado. Además, se logra reducir los posibles errores asociados a la curvatura terrestre y la refracción atmosférica los cuales comienzan a influir a distancias por lo general, mayores a 200 m.

A su vez, en cada tramo se estacionó el equialtímetro aproximadamente sobre la mediatriz definida por el par de puntos entre los cuales se quiere medir el desnivel, con ello se minimiza el error de colimación del instrumento. Por otra parte, en los puntos de cambio se utilizaron galápagos para asegurarse que las determinaciones de las diferencias de nivel sean siempre entre los 2 mismos puntos.

Dado el procedimiento en campo descrito anteriormente no se tuvo mayores dificultades durante el primer día, los mojones fueron fácilmente identificables, cada equipo completó su respectivo itinerario cumpliendo con la tolerancia impuesta previamente de cambiar de tramo con la diferencia entre los dos desniveles menor o igual a 3 mm. La duración de las tareas fue mayor que la contemplada en un principio, por lo cual las condiciones de luz para realizar la nivelación no fueron las óptimas.

Al segundo día se debió concurrir a la periferia de la ciudad, la nivelación fue más ligera al no tener que sortear obstáculos constantemente como sí ocurrió en el centro. A pesar de eso, no fue posible terminar los circuitos planteados para ese día ya que los tramos que los componían eran demasiado largos, lo cual a priori fue planteado de esta manera. El caminamiento para el tercer día era relativamente corto, por lo que si no se alcanzaba con las metas propuestas los días anteriores, de todas formas daría el tiempo para terminarlas.

Arribado el último día, se comenzó por terminar las tareas estipuladas para el día anterior que no habían sido completadas, para lo cual se conformó un nuevo grupo con estudiantes encargados de otras áreas, quienes ya habían culminado sus tareas y se les solicitó apoyo para la finalización de estas actividades, por lo que el objetivo finalmente fue logrado.



Figura 13 - Relevamiento segundo día

Es de destacar que paralelamente al trabajo de campo, se llevó un control en gabinete por parte de dos estudiantes designados para tal tarea, quienes culminado cada día de trabajo, eran encargados de procesar los datos recabados en campo. (Ver Figura 14).

El grupo de apoyo, además de realizar el tramo faltante, procedió con la nivelación de un tramo con errores constatados desde gabinete.

Por último a destacar, dado que algunos de los puntos de la red no fueron encontrados, se colocaron mojones de madera debidamente señalizados, y en otros casos se utilizó pintura sobre el hormigón, indicando los puntos en bordes de cuneta.

Se decide la incorporación de un CD anexo al presente proyecto con los datos mencionados anteriormente diferenciados por grupo y por circuito.



Figura 14 - Procesamiento en gabinete durante el campamento

5.2 GNSS

La salida a campo para el módulo GNSS consistió en la obtención de coordenadas de los mojones a nivelar con el objetivo de determinar sus respectivas coordenadas en tiempo real con RADIO-RTK y NTRIP-RTK, dejando en ambos casos a los receptores móviles guardando datos crudos para luego en gabinete realizar el postproceso de los datos.

La utilización de tecnología GNSS se debe a que para la realización del MTA es necesario conseguir el doble dato, o sea, obtener las cotas de los puntos de interés con dos métodos diferentes, siendo el otro la nivelación geométrica.

El primer día de trabajo se buscó un sitio cerca del lugar de hospedaje, seguro y despejado, donde hubiera poca interferencia para poder estacionar la base. En este punto se colocó el rover, el cual obtuvo las coordenadas en tiempo real usando NTRIP-RTK conectado a la base permanente de Soriano (UYSO). Allí se estacionó la base y se le asignaron esas mismas coordenadas y su altura. La base quedó midiendo de forma permanente y fue configurada para guardar datos crudos, con el fin de poder realizar el postproceso.

Seguidamente, con el móvil se fue recorriendo los puntos de la Red Dolores y algunos de los puntos de la Red Geodésica Nacional utilizando el método RADIO-RTK. Con este método cada punto fue ocupado aproximadamente unos 30 segundos, para mejorar la precisión eventualmente en Post Proceso. (Ver Figura 15)

CIUDAD DE DOLORES

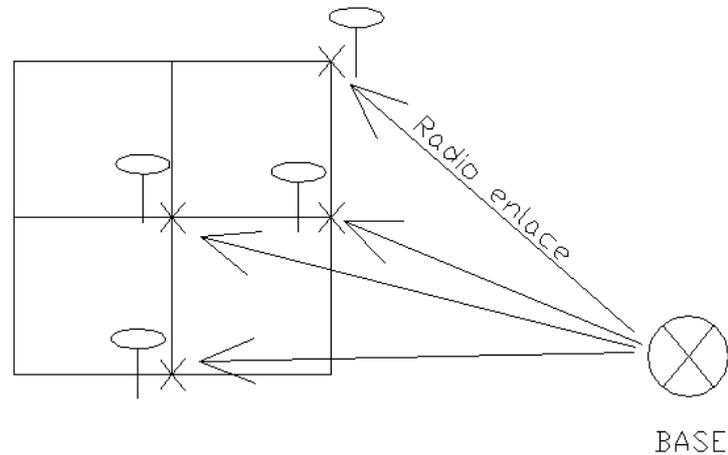


Figura 15 - Relevamiento con tecnología GNSS vía RADIO-RTK.

También se realizó una recorrida en tiempo real utilizando NTRIP-RTK por los puntos de la Red Dolores y de la Red Geodésica Nacional, aunque no por todos ellos. Cada punto fue ocupado el tiempo necesario para conseguir la precisión requerida por el usuario, preestablecida en el GPS.

Los puntos de nivelación 1.22.028 y 1.22.029 de la Red Geodésica Nacional se encuentran adosados a la pared, por eso no fue posible colocar el móvil sobre ellos, por lo que se colocó un punto excéntrico a cada uno de ellos, materializados momentáneamente, y luego se midieron con RADIO-RTK y NTRIP-RTK. Posteriormente se realizó una nivelación geométrica doble simultánea entre cada punto excéntrico y su correspondiente punto del SGM para poder hallar el desnivel entre cada par de puntos y así obtener la cota ortométrica de los puntos de la RGN, con el fin de conseguir el doble dato.

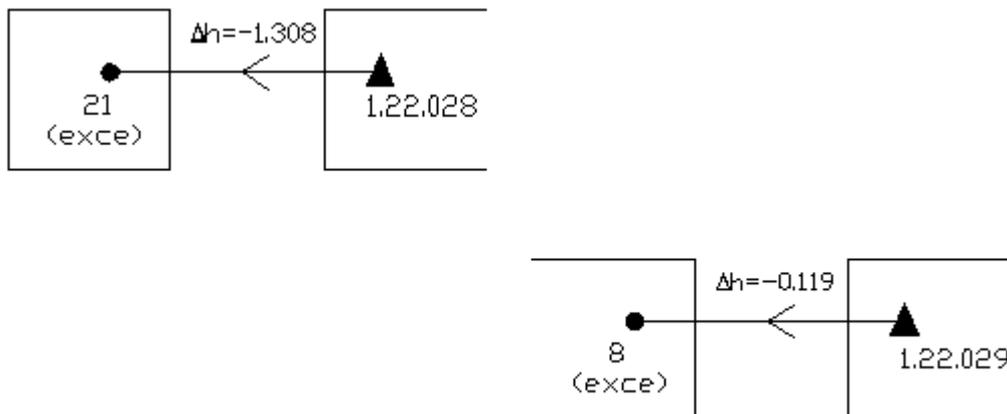


Figura 16 - Nivelación doble simultánea entre puntos excéntricos y puntos del SGM

6. Procesamiento en Gabinete

Este capítulo estará exclusivamente dedicado a todo lo relativo al procesamiento de datos recabados en campo durante los días 21, 22 y 23 de octubre de 2016 durante el campamento de estudios realizado en la Ciudad de Dolores.

Dado que hubo dos tipos de relevamientos de la RPF (colocados por la IS) se generan diferentes procesamientos en gabinete, y se incorpora el estudio de la magnitud de la influencia de la gravedad en la zona, por lo que se amplía el trabajo al tomar en cuenta lo relativo a la parte física de la Tierra.

6.1 Nivelación

Comenzando con el procesamiento de datos, el equipo conformado para el Post Campamento se encarga del traspaso de la información obtenida de las planillas de nivelación en papel a una planilla electrónica y la posterior verificación de los resultados obtenidos de este procedimiento.

En lo que al análisis de datos respecta, se comenzó por estudiar los cierres de los circuitos de la red original con el fin de detectar errores groseros o equivocaciones, ya que luego se procederá a realizar AMC. Dado que este tipo de ajuste es un modelo matemático, independientemente de la calidad de los datos que se utilicen para hacerlo, arrojará un resultado, el cual no será confiable sino se realiza previamente la correspondiente depuración. Luego se efectúa el AMC con el fin de modelar los errores aleatorios y así obtener las cotas ajustadas de cada PF de la red desde el Datum Vertical Oficial.

En primera instancia se detecta un error grosero en la medición del desnivel geométrico entre los puntos fijos del SGM 1.22.030 y 1.22.031, por lo cual se decide eliminarlos de la red original (*Ver Figura 17*) y continuar con el análisis. Se prosigue realizando el estudio de los cierres de los circuitos originales. Dado que los resultados obtenidos se encontraban fuera de la tolerancia admitida debido a errores groseros, se eliminan algunas líneas y puntos intermedios, generando líneas unidas únicamente mediante nodos. Luego de esto quedan conformados nuevos circuitos.

Posteriormente se realiza un ajuste por mínimos cuadrados de la red mediante el método de las correcciones (AMC+C), la cual incluye los PF del SGM 1.22.028 - 1.22.029. Este resultado no fue considerado aceptable debido a que la desviación estándar de las observaciones continuaban fuera de tolerancia, por lo cual se decide realizar diversos ajustes por mínimos cuadrados mediante ambos métodos, correcciones y magnitudes (AMC+M) probando utilizando un punto fijo u el otro, incluso ambos, con el fin de obtener mejores resultados y entrar en tolerancia.

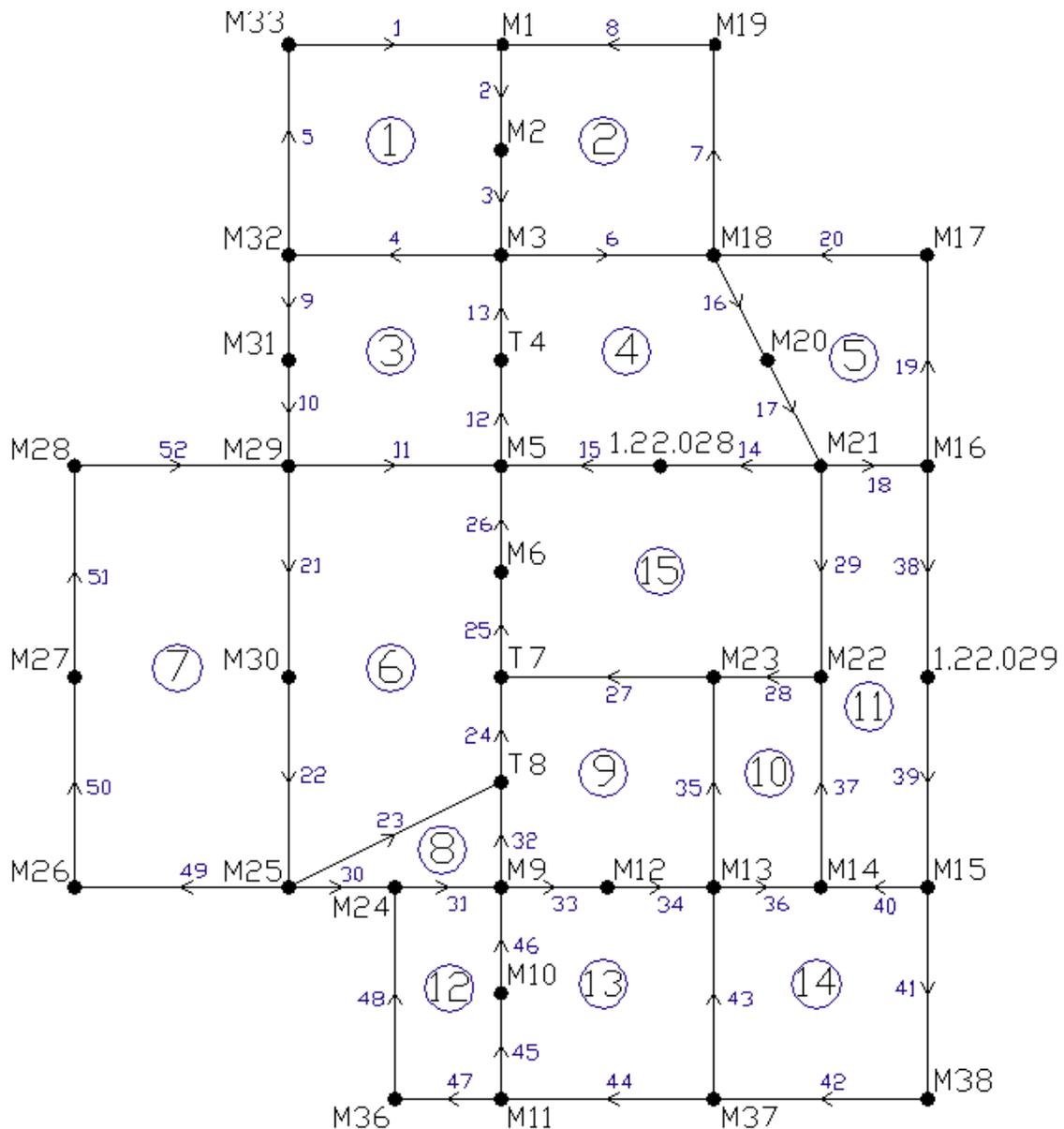


Figura 17 - Red alimétrica Original

Sin éxito, se continuó modificando la red, generando circuitos o mallas más grandes que arrojen errores de cierre aceptables. Finalmente se procedió a la eliminación de algunos nodos y líneas como por ejemplo M30 - M31 y M9 - M11. Habiendo realizado lo anterior, los vértices de la red se componen únicamente por nodos, quedando los puntos intermedios fuera de ella.

Vértices Originales				
M33	M16	M18	M23	M29
M1	M26	M17	M22	M5
M19	M30	M31	F8	M21
M2	M6	F4	M25	M13
M32	M27	M20	M16	M14
M3	F7	M9	1.22.028	M10
M37	M28	M24	M21	M36
M38	M15	1.22.029	M12	M11

Tabla 4 - Nodos eliminados

Finalmente, habiéndose conformado la nueva red de ajuste se realiza nuevamente una evaluación de los cierres de las mallas (Ver Tabla 6) y además se procede a realizar un nuevo ajuste, en este caso AMC+M el cual arrojará directamente los valores de las cotas de los PF de la misma, y su desviación estándar. Habiéndose obtenido resultados aceptables se considera esta conformación de la red como definitiva, la cual incluye los PF del SGM 1.22.028 y 1.22.029 y 20 vértices fijos (Ver Figura 18). Es de destacar que en paralelo fue realizado el AMC+C de la mencionada red con el fin de verificar resultados.

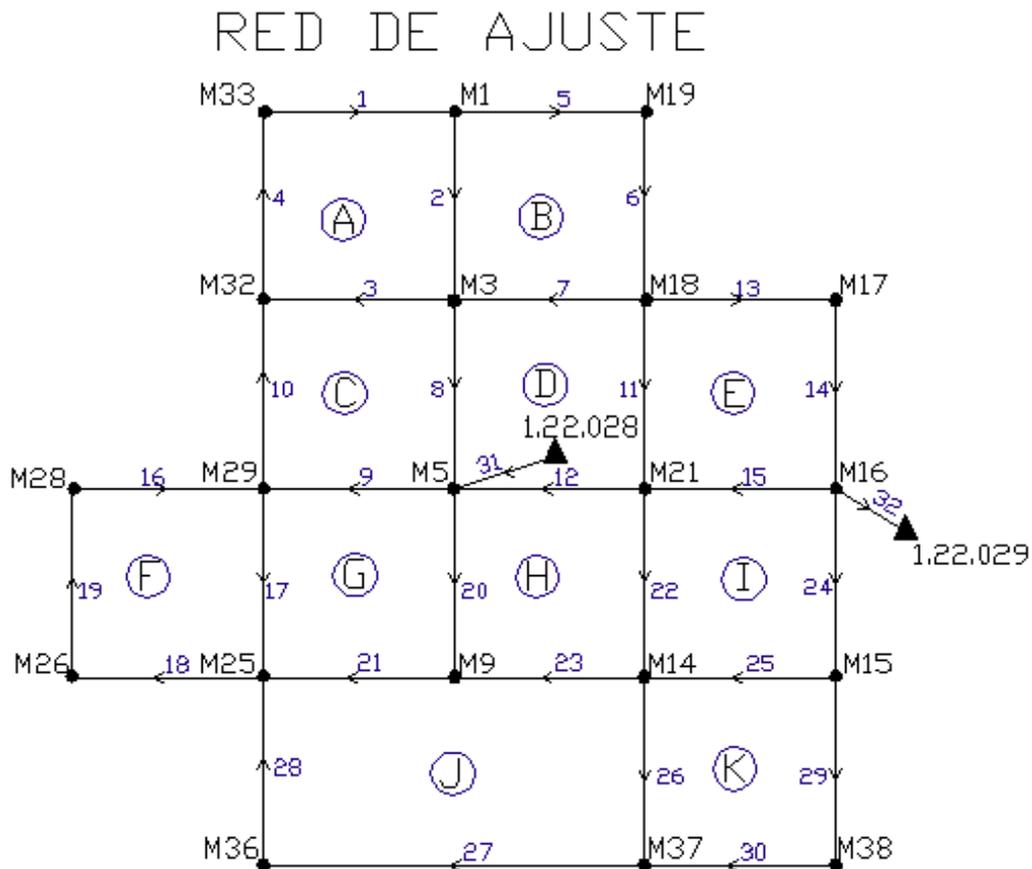


Figura 18 - Red alimétrica definitiva

Obs.	$\Delta h(m)$	Obs.	$\Delta h(m)$
L1	-4.709	L17	0.163
L2	5.860	L18	-1.549
L3	-0.508	L19	-1.916
L4	-0.643	L20	0.442
L5	-0.898	L21	-9.588
L6	4.224	L22	1.612
L7	2.533	L23	5.965
L8	9.445	L24	0.154
L9	-9.300	L25	3.946
L10	-0.657	L26	-0.021
L11	4.852	L27	6.77
L12	7.128	L28	-10.384
L13	1.509	L29	0.953
L14	0.873	L30	2.992
L15	2.487	L31	-1.732
L16	3.284	L32	-0.270

Tabla 5 - Datos de las observaciones

Tramo	Obs.	Dist. (m)	Tramo	Obs.	Dist. (m)
M33-M1	L1	1050	M29-M25	L17	1100
M1-M3	L2	675	M25-M26	L18	740
M3-M32	L3	650	M26-M28	L19	775
M32-M33	L4	280	M5-M9	L20	1525
M1-M19	L5	575	M9-M25	L21	1050
M19-M18	L6	485	M21-M14	L22	1100
M18-M3	L7	575	M14-M9	L23	1400
M3-M5	L8	815	M16-M15	L24	825
M5-M29	L9	610	M15-M14	L25	650
M29-M32	L10	860	M14-M37	L26	2250
M18-M21	L11	770	M37-M36	L27	2800
M21-M5	L12	680	M36-M25	L28	1500
M18-M17	L13	865	M15-M38	L29	1800
M17-M16	L14	360	M38-M37	L30	1550
M16-M21	L15	600	1.22.028-M5	L31	110
M28-M29	L16	550	M16-1.22.029	L32	25

Tabla 7 - Conformación de la Matriz Peso para el ajuste

Circuito	Cierres (m)	Distancia (m)
A	0.000	2655
B	-0.001	2310
C	-0.004	2935
D	0.002	2840
E	0.017	2595
F	-0.018	3165
G	-0.009	4285
H	0.007	4705
I	0.001	3175
J	-0.012	9000
K	0.020	6250

Tabla 6 - Datos de las mallas

Para este ajuste ($v + B \times \Delta = f$): $n = 32$; $n_0 = 20 \Rightarrow r = 12$ y dadas las condiciones de la red, las dimensiones de las matrices involucradas son las siguientes : $v_{32 \times 1}$; $B_{32 \times 20}$; $\Delta_{20 \times 1}$; $f_{32 \times 1}$.

Para obtener la matriz peso, la cual está implicada en el algoritmo de la propagación de errores de las cotas de los puntos, se tomó como referencia la distancia máxima d_0 entre dos puntos (tramo M36-M37), (Ver *Tabla 7*) dándole menor peso. Entonces la diagonal de la misma estará compuesta por los siguientes valores, mientras que fuera de la misma los valores serán cero:

$$w_i = \frac{d_0}{d_i} \quad (27)$$

Dadas las condiciones de la red, las dimensiones de las matrices involucradas en la propagación son: $W_{32 \times 32}$; $Q_{32 \times 32}$; $N_{20 \times 20}$; $T_{20 \times 20}$; $\Delta_{20 \times 1}$; $Q_{cc20 \times 20}$; $Q_{vv32 \times 32}$; $Q_{ll32 \times 32}$; $Q_{\Delta\Delta_{20 \times 20}}$. Finalmente los resultados del AMC+M son los siguientes:

Punto	Cotas (m)	Error en Cota (m)
M1	4.466	0.0169
M3	10.323	0.0137
M5	19.757	0.0065
M9	20.220	0.0175
M14	14.273	0.0156
M15	10.336	0.0154
M16	10.198	0.0033
M17	9.320	0.0117
M18	7.799	0.0132
M19	3.572	0.0171
M21	12.657	0.0107
M25	10.633	0.0181
M26	9.088	0.0210
M28	7.176	0.0192
M29	10.463	0.0142
M32	9.813	0.0163
M33	9.171	0.0182
M36	21.022	0.0267
M37	14.260	0.0249
M38	11.278	0.0261

Tabla 8 - Cotas ajustadas y sus desviaciones estándar

Como puede observarse en la planilla precedente, uno de los puntos más alejados de los puntos fijos del SGM es el que posee mayor error en la cota, y en contraposición a esto, es razonable que uno de los puntos más cercanos, tenga menor error. Se destacan en color celeste ambos.

Luego de realizado el AMC+M persiste un error entre los puntos fijos del SGM 1.22.028 y 1.22.029, para lo cual se realiza la comparación entre los desniveles geométricos medidos de estos dos puntos, utilizando: la nivelación geométrica realizada por los estudiantes, el desnivel de los puntos según las cotas que aparecen en sus respectivas monografías, el dato de la nivelación realizada por el SGM (dato que fue facilitado por dicha institución) y por último datos obtenidos de las mediciones GNSS, el resultado es el siguiente:

Descripción	Diferencia de nivel (m)
Campamento_Niv	11.08
SGM_Monografia	11.01
SGM_Niv	11.03
H_ort Ntrip	10.84
H_ort EGM08	10.85

Tabla 9 - Diferencias de nivel entre 1.22.028 - 1.22.029

Dada la notoria diferencia de datos que puede observarse en la tabla anterior, y para evitar ir a campo nuevamente, se estudia dónde podría hallarse el error. Por lo cual, mediante las coordenadas geodésicas se calcula la ondulación geoidal (N) en cada punto excéntrico correspondiente.

Punto (GPS excéntrico)	Punto Fijo_SGM	Ondulación Geoidal
8	1.22.029	17.066
21	1.22.028	17.067

Tabla 10 - Ondulaciones Geoidales

Como se observa, las ondulaciones geoidales son muy parecidas por lo cual se descarta que haya un error o discontinuidad en el modelo geoidal utilizado por el GPS.

Por último, sabiendo que las diferencias de nivel deberían dar coherentes entre sí, ya que se trata de distancias relativamente cortas, y al no tener éxito en la búsqueda de otro error a constatarse en gabinete, se decide concurrir nuevamente a la Ciudad de Dolores con el fin de tomar nuevos datos y contrastarlos con los análisis previos, velando por resultados que esclarezcan esta incertidumbre.

Se adjunta al capítulo Anexo el algoritmo realizado en MATLAB y las mencionadas matrices al CD.

6.1.1 Segunda ida a Dolores

Como se dijo en la sección anterior, se concurre a Dolores el 22 de abril de 2017 con el fin de obtener nuevos datos y constatar si persiste el error entre los puntos fijos 1.22.028 y 1.22.029 del SGM.

6.1.1.a Nivelación

El equipo de nivelación fue conformado por 4 integrantes, dos de ellos destinados a llevar las reglas, uno encargado de la libreta de campo y el restante se desarrolló como operador del nivel. En este caso el origen de la nivelación corresponde al PF 1.22.028, mientras que el punto de finalización fue el PF 1.22.030. Se trató de un circuito abierto (*Ver Figura 19*), a diferencia de la nivelación en el campamento que siempre fue realizada para circuitos cerrados.



Figura 19 - Tramo nivelado en la segunda ida a Dolores

Si bien como se ha mencionado varias veces, el error constatado se dio entre los puntos 1.22.028 y 1.22.029, se decide nivelar hasta el PF del SGM 1.22.030 para que este sirva de apoyo en el estudio de la determinación del desnivel entre los fijos que presentan error.

El procedimiento en campo consistió de la nivelación doble simultánea entre los puntos fijos 1.22.028 y 1.22.030 utilizándose puntos intermedios, los cuales fueron ubicados estableciéndose tramos de aproximadamente 80 metros, medidos a pasos. En este caminamiento se relevó el PF 1.22.029, de vital importancia para nuestro estudio.

Para continuar al siguiente tramo, al igual que durante el campamento, la diferencia de los desniveles medidos debió ser menor o igual a 3 mm. Se intentó estacionar sobre la mediatriz definida por los puntos de los cuales quiero hallar el desnivel, además, se utilizaron galápagos para no perder los puntos intermedios. El instrumental llevado a campo para realizar la nivelación fue el siguiente (*Ver Figura 20*):

- Nivel automático Pentax AL-M4c
- 2 miras
- 2 galápagos
- 2 niveletas
- Trípode de patas extensibles



Figura 20 - Instrumental llevado a Dolores

Se obtiene el desnivel entre los PF de interés y se observa que el mismo difiere en 2 centímetros con los datos obtenidos del campamento, por lo cual persiste la diferencia de desnivel entre los puntos fijos desde diversas fuentes, entonces la verificación con el tercer punto fijo (1.22.030) queda inutilizada.

Los resultados de la segunda ida a dolores contrastada con el análisis previo es el siguiente:

Descripción	Diferencia de nivel (m)
Campamento_Niv	11.08
2da ida a Dolores_Niv	11.06
SGM_Monografia	11.01
SGM_Niv	11.03
H_ort_Ntrip	10.84
H_ort_EGM08	10.85

Tabla 11 - Diferencias de nivel entre puntos del SGM, 1.22.028 y 1.22.029



Figura 21 - Segunda ida a Dolores

Se agregan al CD las planillas de nivelación obtenidas en campo, éstas contienen información de relevancia para este trabajo.

6.1.2 Continuación del Procesamiento

Luego de la ida a Dolores, como se dijo, persiste la diferencia de desnivel geométrico entre los puntos fijos mediante diversas fuentes, por lo que se toma como definitivo el AMC realizado previo a la segunda ida, mediante el cual, según el Método de las Magnitudes incluyendo dos puntos fijos del SGM (1.22.028 y 1.22.029), se obtuvieron cotas referidas al datum oficial para la RPF. Estos puntos fueron utilizados como puntos de control en la zona, dado que los mismos se encontraban en buenas condiciones y su cota es conocida.

Luego del respectivo ajuste, el cual arroja como resultado el valor ajustado de la cota oficial de cada punto de la red, se realizó la propagación de errores, con lo cual se obtuvo la desviación estándar de los parámetros calculados. (Ver Tabla 12).

Uno de los objetivos a cumplir por el grupo encargado del Post Campamento corresponde a la realización de las monografías de todos los puntos fijos de la red, entonces, dadas las cotas ajustadas oficiales halladas mediante el mencionado AMC+M, el equipo procede a realizarlas, se adjuntan las mismas al CD.

Finalizando con el análisis de los datos obtenidos del ajuste, se generaron las coordenadas planas: Este (E) y Norte (N) de cada punto de la RPF a partir de lo relevado con tecnología GNSS, y utilizando la desviación estándar de cada punto, se realizará una gráfica de iso-error, la cual dará como resultado curvas que unen puntos de la red con igual error en la altura oficial. Se pretende analizar si el comportamiento de estos puntos sigue algún patrón, y si permite visualizar la propagación del error según sus coordenadas. En la sección 7.1.1 Curvas de Iso Error en la Cota Ajustada se expondrá la misma y se analizará su comportamiento. A continuación los datos para realizar la mencionada gráfica:

Punto	E	N	σ_{CN}
M1	386190.555	6290497.74	0.0169
M3	386544.602	6289920.604	0.0137
M5	386982.964	6289207.06	0.0065
M9	387745.568	6287902.311	0.0175
M14	388373.126	6289092.578	0.0156
M15	388510.375	6289756.4	0.0154
M16	387724.147	6290053.732	0.0033
M17	387870.441	6290411.707	0.0117
M18	387034.532	6290205.969	0.0132
M19	386756.128	6290526.357	0.0171
M21	387486.533	6289553.867	0.0107
M25	386735.613	6287854.782	0.0181
M26	386040.438	6288007.461	0.0210
M28	386069.29	6288768.518	0.0192
M29	386465.294	6288870.428	0.0142
M32	385980.143	6289586.436	0.0163
M33	385805.631	6289818.034	0.0182
M36	387631.996	6286318.495	0.0267
M37	389643.695	6287694.298	0.0249
M38	390197.608	6289166.899	0.0261
1.22.028	387028.642	6289314.229	PF
1.22.029	387767.166	6290051.615	PF
1.22.030	388482.116	6290707.478	PF
1.22.031	388638.688	6290740.413	PF

Tabla 12 - Datos a graficar para curvas de iso-error

Continuando con el procesamiento en gabinete, se estudia el error por kilómetro alcanzado en la nivelación de Dolores realizada durante el campamento, mediante la siguiente fórmula (Ver Tabla 13):

$$\frac{Cierre_{malla X}}{Perímetro_{malla X}} = Error [mm/km] \quad (28)$$

Circuito	Cierres (m)	Perímetro (m)	Error [mm/km]
A	0.000	2655	0.0
B	-0.001	2310	0.4
C	-0.004	2935	1.4
D	0.002	2840	0.7
E	0.017	2595	6.6
F	-0.018	3165	5.7
G	-0.009	4285	2.1
H	0.007	4705	1.5
I	0.001	3175	0.3
J	-0.012	9000	1.3
K	0.020	6250	3.2

Tabla 13 - Cálculo del error por km en cada circuito

Lo anterior es realizado con el fin de saber si el error de cada malla se encuentra dentro o fuera de tolerancia. Tal como se hizo en el preanálisis, la formulación de la tolerancia a utilizar es la planteada por el IGN, se recuerda la misma:

$$T = f \times \sqrt{k} \quad (25)$$

Donde f depende del instrumental, el método de nivelación geométrica utilizado y sobre todo el orden de nivelación realizado. Se desea verificar el orden de precisión alcanzado luego de realizada la nivelación. El factor k es la longitud del tramo nivelado expresado en kilómetros.

A modo informativo, según el criterio de la IGN adoptado por quienes suscriben, las redes altimétricas, que se componen de líneas de nivelación, pueden clasificarse en diferentes órdenes de acuerdo a la precisión de sus líneas:

Tipo de línea	factor f
Alta precisión	3
Precisión	5
Topográficas	7

Tabla 14 - Factor de precisión de las líneas de nivelación

Es de destacar que para la fórmula de tolerancia (25), fue utilizado el factor $f = 7$ correspondiente a nivelaciones geométricas de precisión Topográfica, este orden es el mínimo en cuanto a precisiones. (Ver Tabla 14).

Las líneas topográficas según el IGN, densifican las mallas, tienen su propio punto de inicio y de cierre y estos se dan sobre puntos con cota conocida de Alta Precisión o Precisión.

Como puede observarse, luego de contrastarse los cierres de cada circuito contra la tolerancia admitida, se hallan tres mallas que no cumplen con los mínimos exigibles para ser considerados como nivelaciones topográficas y además la superan ampliamente. Estos son destacados en color celeste en la figura 15 para su mejor visualización. Como puede observarse, se está hablando de líneas principales de la red de las cuales, hay tres que ni siquiera cumplen con rigurosidad las tolerancias de las líneas de orden topográfico.

Tomando en cuenta lo expresado en los párrafos precedentes, de aquí en más se considerará que los datos de partida no son un producto de buena calidad, de todas maneras, la metodología que ha de emplearse para obtener el MTA será la correcta, y podrá ser aplicable a cualquier parte del territorio Nacional, incluso del exterior del país, por lo cual a efectos académicos y dada la imposibilidad de ir a medir nuevamente los circuitos, se proseguirá con el presente trabajo.

Circuito	Perimetro (Km)	Cierres (mm)	T (mm) (f=7)
A	2.655	0	11
B	2.310	1	11
C	2.935	4	12
D	2.840	2	12
E	2.595	17	11
F	3.165	18	12
G	4.285	9	14
H	4.705	7	15
I	3.175	1	12
J	9.000	12	21
K	6.250	20	18

Tabla 15 - Tolerancia admitida comparada con cierres de circuitos

En carácter informativo y culminando este análisis, como puede observarse en la imagen a continuación (*Ver Tabla 16*), los resultados obtenidos utilizando $f = 5$ (Líneas de Precisión) son los mismos que utilizando $f = 7$ (Líneas Topográficas). Sin embargo, al aplicar el factor $f = 3$ (Alta Precisión), que es el más restrictivo, pasan a ser 5 los circuitos de la red que quedan fuera de tolerancia, en un total de 11, poco menos del 50% de los circuitos se descartarían para un trabajo de alta precisión.

Circuito	Perimetro (Km)	Cierres (mm)	T (mm)(f=7)	T (mm)(f=5)	T (mm)(f=3)
A	2.655	0	11	8	5
B	2.310	1	11	8	5
C	2.935	4	12	9	5
D	2.840	2	12	8	5
E	2.595	17	11	8	5
F	3.165	18	12	9	5
G	4.285	9	14	10	6
H	4.705	7	15	11	7
I	3.175	1	12	9	5
J	9.000	12	21	15	9
K	6.250	20	18	13	8

Referencias	
	fuera de tolerancia f = 3
	fuera de tolerancia f = 5
	fuera de tolerancia f = 7

Tabla 16- Tolerancia admitida comparada con cierres de circuitos

6.2 GNSS

Luego de haber realizado el relevamiento en campo se comienza con la etapa de procesamiento de los datos. Para poder realizarlo fue necesario utilizar el software Leica Geo Office 8.4, el cual está instalado en las computadoras del Departamento de Geodesia del Instituto de Agrimensura.

Este programa permite a partir de los datos crudos obtenidos en campo determinar las coordenadas requeridas en el sistema de referencia adoptado, realizando la corrección diferencial entre los puntos medidos y su estación de referencia.

El primer paso fue la descarga de los archivos RINEX de la estación permanente UYSO para el período en el que fue realizado el relevamiento, desde la página web del Servicio Geográfico Militar. Seguidamente se hizo lo propio con las efemérides precisas finales para GPS y GLONASS desde la página web del IGS (International GNSS Service). Para obtener estas efemérides es necesario esperar que estén disponibles, esto es, hasta 13 días después de concluida la semana GPS, a las 24 horas UTC de cada sábado.

Una vez creado un nuevo proyecto en el software mencionado, se procedió a importar los archivos RINEX de UYSO, las efemérides precisas finales, los datos crudos del relevamiento y asignarle a la estación permanente sus coordenadas. Teniendo disponibles en el software todos los datos de partida necesarios para realizar el post-proceso, se procedió a efectuar el mismo.

El procesamiento fue realizado con las coordenadas de la estación permanente UYSO obtenidas de la web de SIRGAS, las cuales son actualizadas semanalmente. Este procesamiento fue realizado con el fin de utilizar estas coordenadas para compararlas con el resto de los juegos de coordenadas conseguidas.

La secuencia del procesamiento es la siguiente, primero se deben obtener las coordenadas de la base propia del trabajo. Para ello, se introducen las coordenadas antes mencionadas a la estación UYSO y se establecen como de control. Se resuelve el vector UYSO-base, lo que implica calcular las coordenadas de la base.

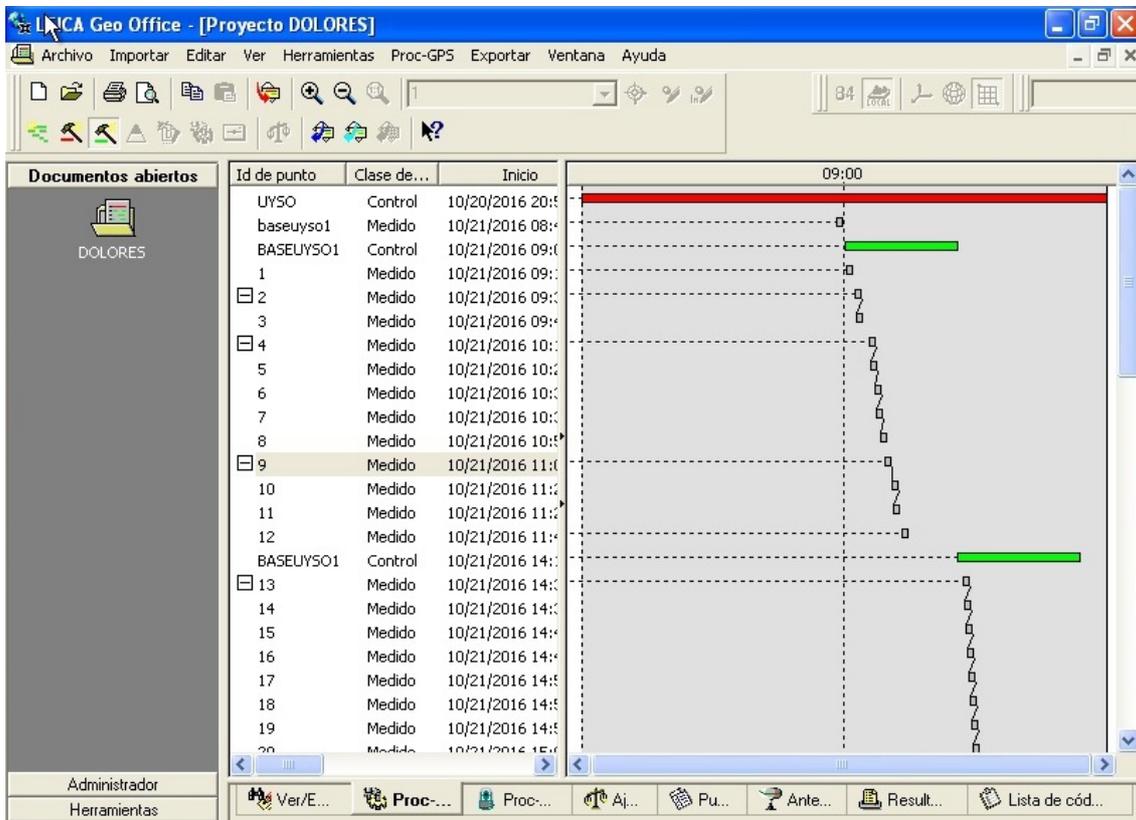


Figura 22 - Leica Geo Office. Cálculo de los vectores desde la estación permanente UYSO a la base

Al determinarse las coordenadas de la base y tener la red de puntos fijos mediante RADIO-RTK, se ajustan las coordenadas de la misma.

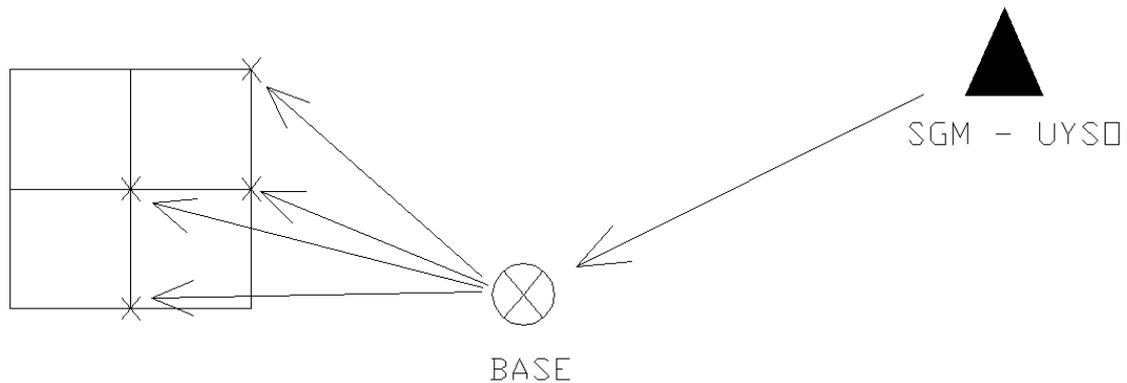


Figura 23 - Vectores determinados luego del post proceso

Luego de haber obtenido las coordenadas post procesadas, se originan diferentes análisis entre los distintos juegos de coordenadas obtenidas de los procesamientos.

Se utilizaron las obtenidas en tiempo real con NTRIP-RTK, con RADIO-RTK, las post procesadas, siendo éstas obtenidas ingresando a la estación UYSO sus coordenadas correspondientes a la semana del relevamiento. También se incluyeron las alturas oficiales halladas a partir de la nivelación geométrica doble simultánea. Estos análisis se representarán gráficamente en el capítulo 7. Análisis de los resultados obtenidos.



Figura 24 - Leica Geo Office. Propiedades del trabajo

A partir de las coordenadas geodésicas de los puntos, obtenidas en el post proceso, se determinaron las coordenadas cartográficas Este y Norte de cada punto de la red en el sistema de referencia WGS84 utilizando la proyección UTM 21S, así como también sus respectivas cotas ortométricas referidas al modelo geoidal EGM08.

Punto	E	N	h	Ond.Geoidal	Hort
M1	386190,555	6290497,740	21.599	17.076	4.523
M3	386544,602	6289920,604	27.520	17.071	10.449
M5	386982,964	6289207.06	36.986	17.065	19.921
M9	387745,568	6287902,311	37.353	17.053	20.300
M14	388373,126	6289092,578	31.411	17.059	14.352
M15	388510,375	6289756,400	27.463	17.063	10.400
M16	387724,147	6290053,732	27.296	17.067	10.229
M17	387870,441	6290411,707	26.438	17.069	9.369
M18	387034,532	6290205,969	24.929	17.070	7.859
M19	386756,128	6290526,357	20.689	17.073	3.616
M21	387486,533	6289553,867	29.834	17.065	12.769
M25	386735,613	6287854,782	27.812	17.057	10.755
M26	386040,438	6288007,461	26.259	17.062	9.197
M28	386069,288	6288768,518	24.352	17.066	7.286
M29	386465,294	6288870,428	27.608	17.065	10.543
M32	385980,143	6289586,436	26.967	17.071	9.896
M33	385805,631	6289818,034	26.327	17.074	9.253
M36	387631,996	6286318,495	38.196	17.042	21.154
M37	389643,695	6287694,298	31.406	17.045	14.361
M38	390197,608	6289166,899	28.444	17.055	11.389
1.22.028	387028,642	6289314,229	37.350	17.065	20.285
1.22.029	387767,166	6290051,615	27.695	17.067	10.628

Tabla 17 - Coordenadas cartográficas de los puntos de la red luego del post proceso

Punto	φ	λ	h	Ond.Geoidal	Hort
M1	33° 31' 08.54" S	58° 13' 31.80" W	21.599	17.076	4.523
M3	33° 31' 27.41" S	58° 13' 18.34" W	27.520	17.071	10.449
M5	33° 31' 50.74" S	58° 13' 01.67" W	36.986	17.065	19.921
M9	33° 32' 33.39" S	58° 12' 32.70" W	37.353	17.053	20.300
M14	33° 31' 54.99" S	58° 12' 07.84" W	31.411	17.059	14.352
M15	33° 31' 33.49" S	58° 12' 02.22" W	27.463	17.063	10.400
M16	33° 31' 23.54" S	58° 12' 32.56" W	27.296	17.067	10.229
M17	33° 31' 11.97" S	58° 12' 26.73" W	26.438	17.069	9.369
M18	33° 31' 18.34" S	58° 12' 59.22" W	24.929	17.070	7.859
M19	33° 31' 07.83" S	58° 13' 09.86" W	20.689	17.073	3.616
M21	33° 31' 39.68" S	58° 12' 42.00" W	29.834	17.065	12.769
M25	33° 32' 34.55" S	58° 13' 11.88" W	27.812	17.057	10.755
M26	33° 32' 29.33" S	58° 13' 38.76" W	26.259	17.062	9.197
M28	33° 32' 04.63" S	58° 13' 37.29" W	24.352	17.066	7.286
M29	33° 32' 01.47" S	58° 13' 21.89" W	27.608	17.065	10.543
M32	33° 31' 38.04" S	58° 13' 40.37" W	26.967	17.071	9.896
M33	33° 31' 30.46" S	58° 13' 47.03" W	26.327	17.074	9.253
M36	33° 33' 24.76" S	58° 12' 37.82" W	38.196	17.042	21.154
M37	33° 32' 40.85" S	58° 11' 19.21" W	31.406	17.045	14.361
M38	33° 31' 53.25" S	58° 10' 57.08" W	28.444	17.055	11.389
1.22.028	33° 31' 47.28" S	58° 12' 59.85" W	37.350	17.065	20.285
1.22.029	33° 31' 23.62" S	58° 12' 30.89" W	27.695	17.067	10.628

Tabla 18 - Coordenadas geodésicas de los puntos de la red luego del post proceso

Punto	E	N	h	Ond.Geoidal	Hort
M1	386190.502	6290498.065	21.618	17.076	4.542
M3	386544.602	6289920.604	27.520	17.071	10.449
M5	386982.964	6289207.06	36.986	17.065	19.921
M9	387745.514	6287902.634	37.384	17.053	20.331
M14	388373.126	6289092.578	31.411	17.059	14.352
M15	388510.324	6289756.725	27.478	17.063	10.415
M16	387724.095	6290054.059	27.312	17.067	10.245
M17	387870.39	6290412.033	26.452	17.069	9.383
M18	387034.48	6290206.295	24.941	17.070	7.871
M19	386756.078	6290526.682	20.698	17.073	3.625
M21	387486.533	6289553.867	29.834	17.065	12.769
M25	386735613	6287854782	27.812	17.057	10.755
M26	386040.391	6288007.787	26.266	17.062	9.204
M28	386069288	6288768518	24.352	17.066	7.286
M29	386465.294	6288870.428	27.608	17.065	10.543
M32	385980.143	6289586.436	26.967	17.071	9.896
M33	385805.631	6289818.034	26.327	17.074	9.253
M36	387631996	6286318495	38.196	17.042	21.154
M37	389643695	6287694298	31.406	17.045	14.361
M38	390197608	6289166899	28.444	17.055	11.389
1.22.028	387028.589	6289314.556	37.375	17.065	20.31
1.22.029	387767.118	6290051.936	27.731	17.067	10.664

Tabla 19 - Coordenadas cartográficas de los puntos de la red relevados con RADIO-RTK

Punto	φ	λ	h	Ond.Geoidal	Hort
M1	33° 31' 08.53" S	58° 13' 31.80" W	21.618	17.076	4.542
M3	33° 31' 27.41" S	58° 13' 18.34" W	27.520	17.071	10.449
M5	33° 31' 50.74" S	58° 13' 01.67" W	36.986	17.065	19.921
M9	33° 32' 33.38" S	58° 12' 32.70" W	37.384	17.053	20.331
M14	33° 31' 54.99" S	58° 12' 07.84" W	31.411	17.059	14.352
M15	33° 31' 33.48" S	58° 12' 02.22" W	27.478	17.063	10.415
M16	33° 31' 23.53" S	58° 12' 32.56" W	27.312	17.067	10.245
M17	33° 31' 11.96" S	58° 12' 26.73" W	26.452	17.069	9.383
M18	33° 31' 18.32" S	58° 12' 59.22" W	24.941	17.070	7.871
M19	33° 31' 07.82" S	58° 13' 09.87" W	20.698	17.073	3.625
M21	33° 31' 39.68" S	58° 12' 42.00" W	29.834	17.065	12.769
M25	33° 32' 34.55" S	58° 13' 11.88" W	27.812	17.057	10.755
M26	33° 32' 29.32" S	58° 13' 38.76" W	26.266	17.062	9.204
M28	33° 32' 04.63" S	58° 13' 37.29" W	24.352	17.066	7.286
M29	33° 32' 01.47" S	58° 13' 21.89" W	27.608	17.065	10.543
M32	33° 31' 38.04" S	58° 13' 40.37" W	26.967	17.071	9.896
M33	33° 31' 30.46" S	58° 13' 47.03" W	26.327	17.074	9.253
M36	33° 33' 24.76" S	58° 12' 37.82" W	38.196	17.042	21.154
M37	33° 32' 40.85" S	58° 11' 19.21" W	31.406	17.045	14.361
M38	33° 31' 53.25" S	58° 10' 57.08" W	28.444	17.055	11.389
1.22.028	33° 31' 47.27" S	58° 12' 59.86" W	37.375	17.065	20.310
1.22.029	33° 31' 23.61" S	58° 12' 30.90" W	27.731	17.067	10.664

Tabla 20 - Coordenadas geodésicas de los puntos de la red relevados con RADIO-RTK

Punto	E	N	h	Ond. Geoidal	Hort
M3	386544.690	6289920.290	27.561	17.071	10.490
M5	386983.100	6289206.690	36.985	17.065	19.920
M16	387724.200	6290053.770	27.417	17.067	10.350
M17	387870.500	6290411.730	26.549	17.069	9.480
M18	387034.560	6290206.020	25.02	17.07	7.950
M19	386756.160	6290526.380	20.793	17.073	3.720
M21	387486.580	6289553.540	29.915	17.065	12.850
M29	386465.360	6288870.070	27.735	17.065	10.670
M32	385980.200	6289586.120	27.081	17.071	10.010
1.22.028	387028.680	6289314.240	37.435	17.065	20.370
1.22.029	387767.180	6290051.580	27.817	17.067	10.750

Tabla 21 - Coordenadas cartográficas de los puntos de la red relevados con NTRIP-RTK

6.3 Gravedad

Esta sección está destinada a describir el procedimiento realizado en cuanto a la inclusión de la parte física de la tierra al presente trabajo, aportando información de relevancia así como también extendiendo los estudios y análisis geométricos ya realizados. El objetivo de introducir la parte física de la tierra radica en el estudio de la magnitud de la influencia de la gravedad en la zona de Dolores.

6.3.1 Descripción de la Metodología

Para estudiar la magnitud de la influencia de la gravedad en la zona de Dolores se debe dotar de gravedad a todos los puntos de la red altimétrica. Para ello, se realizó una nota dirigida al Director de Servicio Geográfico Militar solicitando información gravimétrica de puntos que se encontraran en el entorno de la zona de estudio. Dichos puntos pertenecen a la Red Gravimétrica Nacional, por tanto, sus valores de gravedad son conocidos.

Dicho lo anterior, y teniendo las coordenadas de todos los puntos fijos de nuestra red, se realizará una interpolación en la cual, partiendo de puntos con gravedad conocida, se arroje como resultado valores de gravedad aproximados para todos los puntos de la red en estudio. A partir de los datos de gravedad hallados de cada punto, se procederá a trabajar en base a diferencias de Números Geopotenciales (C). Se pondrá en evidencia que para trabajar en base a éstos, debió haber una previa integración de datos altimétricos y de gravedad.

Tal como fue realizado en el estudio de datos de la nivelación, se procederá a realizar un ajuste por mínimos cuadrados pero esta vez en términos de Diferencias de Números Geopotenciales, en el cual se obtendrá como resultado el Número Geopotencial de cada punto fijo de la red, una vez obtenidos estos, se derivarán cotas ortométricas.

En la práctica, los circuitos cerrados de nivelación se igualan a cero con el fin de eliminar los errores de cierre, pero esto no es estrictamente correcto debido a errores propios de las mediciones y al no paralelismo de las superficies equipotenciales. Cuando se concurre a campo con un nivel, y se procede a estacionarlo, lo que se está haciendo en definitiva es hacer coincidir el eje principal del mismo con la vertical del lugar por el centro del instrumento. El único caso en el cual en una nivelación geométrica el cierre de sus circuitos debería dar cero es cuando las verticales son paralelas, pero esto no así, como se dijo, debido al no paralelismo de las superficies equipotenciales. Sin embargo hablando en términos de diferencias de números geopotenciales, es correcto forzar a los circuitos cerrados para que den cero.

6.3.2 Interpolación de Valores de Gravedad

Como fue mencionado, se dotará de gravedad a todos los puntos de la red de estudio, estos valores de gravedad serán aproximados ya que surgirán de un proceso de interpolación. El mismo se realizará mediante el software PredGrav, un ejecutable creado por el Dr-Ing. Hermann Drewes una entidad de excelencia en la investigación geodésica.

Para interpolar, lo que hace el software es situarse en el punto donde se quiere predecir la gravedad, del cual conocemos sus coordenadas, y luego a partir de éste, mediante un procedimiento en forma de espiral utilizando un radio aproximado de 50 km, toma los puntos más próximos con gravedad conocida, los cuales fueron previamente cargados al software. A partir de esos valores de gravedad, calcula la anomalía de Bouguer de cada uno de ellos y finalmente procede a realizar los cálculos (Ver Figura 25) obteniendo la anomalía de Bouguer del punto de interés.

Con la anomalía de Bouguer de cada punto de la red se predice la gravedad del punto mediante la interpolación, pasando del valor de anomalía de Bouguer, a valor de gravedad.



Figura 25 - Interpolación de valores de Gravedad en todo el País

Como se dijo, el cálculo se basa en la interpolación de las anomalías de Bouguer de los puntos, ya que el comportamiento de las mismas resulta más eficaz para predecir la gravedad que el valor propio de los puntos con gravedad conocida.

Además se utiliza como herramienta el mapa de Anomalías de Bouguer para la zona deseada. El mapa de la derecha (*Ver Figura 26*) corresponde al mapa de Anomalías de Bouguer para todo el país, a la izquierda se muestra la ubicación de los puntos con gravedad interpolada que tienen menor precisión (mayor a 14 mGal), luego de realizada las interpolaciones. Es de notar que se encuentran en la misma zona donde los valores de la anomalía de Bouguer son más altos.

A modo informativo, estos valores igualmente pueden ser utilizados para realizar cálculos con diversos fines.



Figura 26 - Mapa de Anomalía de Bouguer para Uruguay y ubicación de los valores interpolados con menor precisión

A continuación se mostrará el procedimiento realizado en gabinete para obtener los valores aproximados de la gravedad y luego se expondrán los resultados. Los puntos de gravedad conocida utilizados como base o datum fueron los siguientes, todos pertenecientes a las líneas de primer orden del Uruguay. (*Ver Figura 27*)

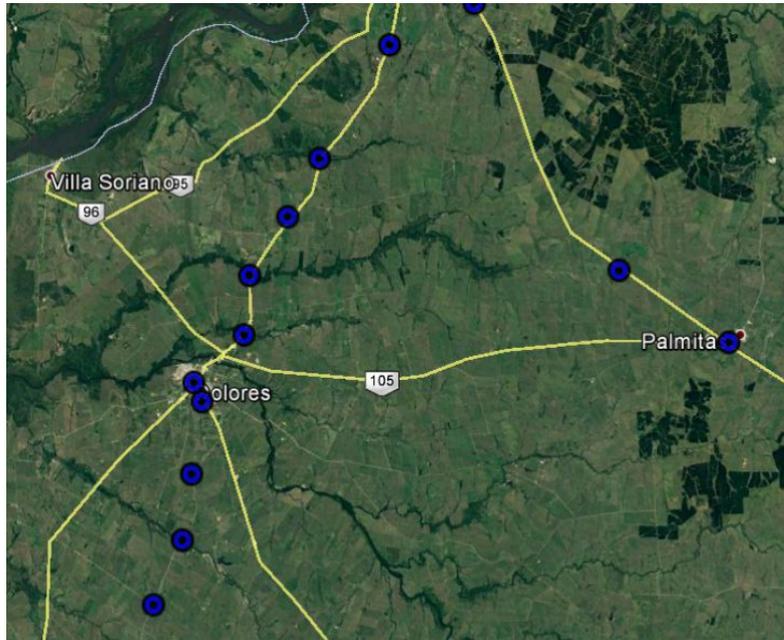


Figura 27 - Puntos de gravedad conocida utilizados para interpolación de la gravedad

La pantalla de inicio del ejecutable solicita un archivo de datos de referencia (Ver Figura 28).

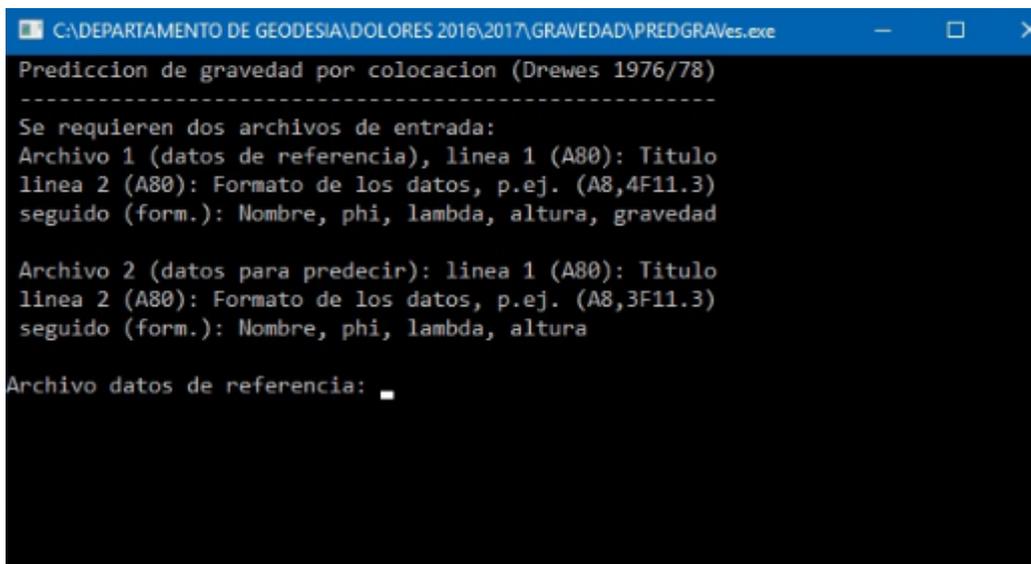


Figura 28 - Pantalla de inicio PredGrav

El archivo de referencia en este caso es denominado PGC.IN, el cual tiene los siguientes datos, que corresponden a los puntos de gravedad conocida:

Punto	Latitud	Longitud	Altura Oficial	Gravedad (conocida)
-------	---------	----------	----------------	---------------------

El archivo de datos de predicción corresponde al denominado RPF.IN el cual contiene los siguientes datos, correspondientes a los puntos pertenecientes a nuestra red de estudio:

Punto	Latitud	Longitud	Altura Oficial
-------	---------	----------	----------------

Se cuenta con las coordenadas $\varphi, \lambda, h_{oficial}$ de cada punto de la red, la altura es necesaria porque como ya fue mencionado, el software se basa en la interpolación de Anomalías de Bouguer, por lo cual se tiene que reducir la gravedad medida en la superficie del geoide. Si bien se necesita la altura ortométrica, la oficial es similar y es la que se usará, pues para esta interpolación la precisión no es muy importante debido a que la precisión de la gravedad para puntos próximos a la superficie del geoide no es un elemento determinante.

El archivo de salida NOV17.OUT contendrá la información deseada, la cual contiene la gravedad de todos los puntos de la red, además de otros datos:

Radio	dg	Sigma	G-normal	Aire	Bouguer	Gravedad
-------	----	-------	----------	------	---------	----------

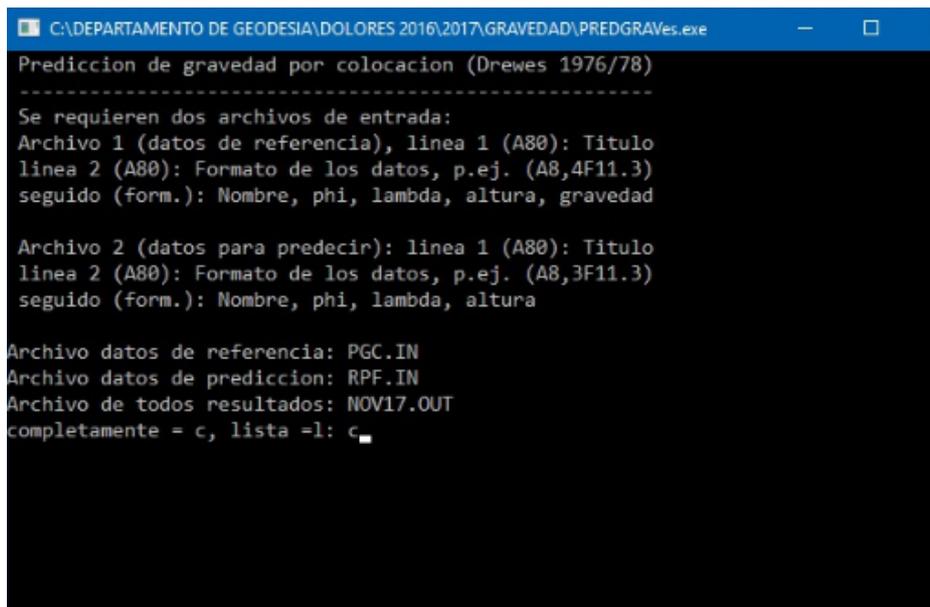


Figura 29 - Pantalla de inicio PredGrav

Se agrega al Anexo la planilla completa NOV17.OUT que arroja el software con todos los datos. A continuación se muestra una planilla con los datos de interés para el presente estudio.

Red	Nombre	Phi	Lambda	Altura (m)	Boug.	Gravedad
M33	33	-33.525	-58.230	9.3	1.0	979621.1
M1	16	-33.519	-58.225	4.5	0.5	979621.6
M19	15	-33.519	-58.219	3.6	0.4	979621.5
M32	32	-33.527	-58.228	9.9	1.1	979620.8
M3	18	-33.524	-58.222	10.4	1.2	979620.1
M18	14	-33.522	-58.216	7.9	0.9	979620.5
M17	6	-33.520	-58.207	9.4	1.0	979620.4
M28	1101	-33.535	-58.227	7.4	0.8	979621.8
M29	30	-33.534	-58.223	10.5	1.2	979620.5
M5	20	-33.531	-58.217	19.9	2.2	979617.3
M21	36	-33.528	-58.212	12.8	1.4	979619.1
M16	7	-33.523	-58.209	10.2	1.1	979620.1
M26	34	-33.541	-58.227	9.2	1.0	979622.5
M25	1108	-33.543	-58.220	10.8	1.2	979621.7
M9	25	-33.543	-58.209	20.3	2.3	979618.7
M14	10	-33.532	-58.202	14.4	1.6	979619.9
M15	9	-33.526	-58.201	10.4	1.2	979620.6
M36	1107	-33.557	-58.211	21.2	2.4	979622.8
M37	1106	-33.545	-58.189	14.4	1.6	979622.2
M38	1105	-33.531	-58.183	11.4	1.3	979621.7

Tabla 22 - Gravedad obtenida a partir de PredGrav

Punto Fijo	Gravedad
1.22.029	979620,00
1.22.028	979617,00

Tabla 23 - Gravedad de los puntos del SGM

6.3.3 Obtención de Números Geopotenciales

Una vez hallada la gravedad de todos los puntos fijos de la red, se procederá al cálculo de la diferencia de Números Geopotenciales, por lo tanto teniendo el desnivel geométrico entre todos los puntos, el cálculo se reduce a:

$$dC_{1-2} = g_m \times dn \quad (29)$$

Donde: dC = diferencia de número geopotencial entre los puntos A y B

g_m = gravedad media entre 1 y 2 (promedio de las gravedades en cada punto)

dn = desnivel medido entre 1 y 2

A modo de ejemplo se tiene el circuito A de la siguiente red:

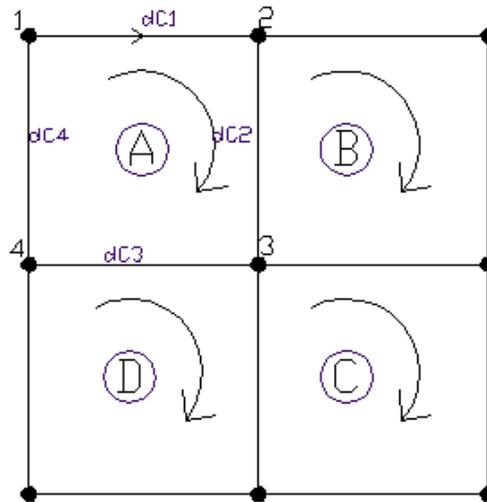


Figura 30 - Ejemplo de Red en términos de dC

Volviendo a la ecuación (28), tenemos todos los datos para calcular las dC pertenecientes a la nueva Red de Ajuste (Ver Figura 31), idéntica a la red de nivelación geométrica en su morfología pero conformada en términos de Diferencias de Números Geopotenciales.

$$dC_1 = g_{m1-2} \times dn_{1-2}$$

$$dC_2 = g_{m2-3} \times dn_{2-3}$$

⋮

$$dC_n = g_m \times dn$$

De aquí en más se trabajará con el mismo procedimiento que se utilizó para los datos altimétricos, por lo tanto en primer lugar se estudiarán los valores obtenidos de los cierres de los circuitos y posteriormente se hará un ajuste por mínimos cuadrados (AMC+M), en el cual se obtendrán los Números Geopotenciales (C).

RED DE AJUSTE

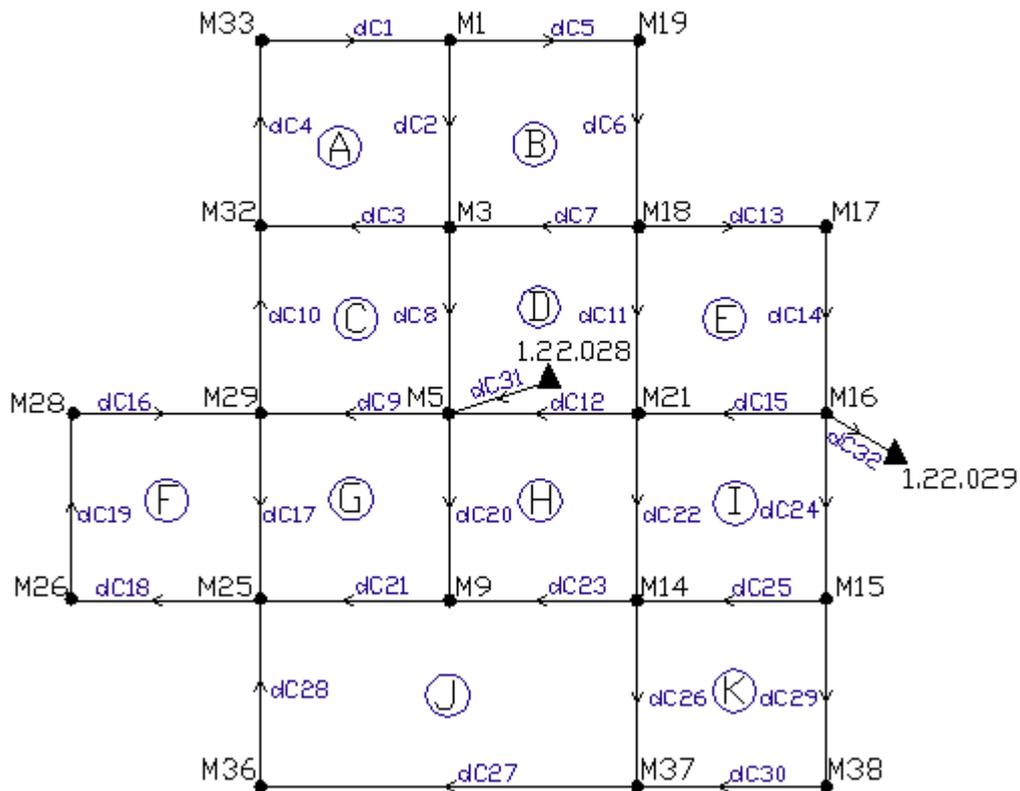


Figura 31 - Red de ajuste en términos de Números Geopotenciales

Para calcular los cierres de cada circuito tenemos los siguientes datos:

- Los desniveles medidos de la red en *metros (m)*. (Ver Tabla 24)
- La gravedad de cada punto de la red en *mGal (cm/s²)*.

A partir de estos datos podemos calcular la diferencia de Número Geopotencial (*dC*) de cada tramo, utilizando la siguiente ecuación:

$$dC = g_m \times dn \quad (30)$$

siendo: $[g_m] = m/s^2$ y $[dn] = m$

Las conversiones utilizadas para las cuentas fueron las siguientes:

$$1 \text{ Gal} = [cm/s^2] = [10^{-2}m/s^2] \quad \Rightarrow \quad 1 \text{ mGal} = [10^{-2}m/10^3s^2]$$

$$\text{Por lo tanto: } 1 \text{ mGal} = [10^{-5}m/s^2]$$

Finalmente, sumando las dC de cada circuito obtenemos el cierre de cada uno de los mismos en (m^2/s^2) . Es de destacar que si los cierres no dan cero, se deberá exclusivamente a errores propios en las mediciones. (Ver Tablas 25 y 26)

Desniveles medidos (m)			Desniveles medidos (m)		
M33-M1	L1	-4,709	M29-M25	L17	0,163
M1-M3	L2	5,860	M25-M26	L18	-1,549
M3-M32	L3	-0,508	M26-M28	L19	-1,916
M32-M33	L4	-0,643	M5-M9	L20	0,442
M1-M19	L5	-0,898	M9-M25	L21	-9,588
M19-M18	L6	4,224	M21-M14	L22	1,612
M18-M3	L7	2,533	M14-M9	L23	5,965
M3-M5	L8	9,445	M16-M15	L24	0,154
M5-M29	L9	-9,300	M15-M14	L25	3,946
M29-M32	L10	-0,657	M14-M37	L26	-0,021
M18-M21	L11	4,852	M37-M36	L27	6,770
M21-M5	L12	7,128	M36-M25	L28	-10,384
M18-M17	L13	1,509	M15-M38	L29	0,953
M17-M16	L14	0,873	M38-M37	L30	2,992
M16-M21	L15	2,487	1.22.028-M5	L31	-1,732
M28-M29	L16	3,284	1.22.029-M16	L32	-0,270

Tabla 24 - Desniveles medidos

g_media(mGal)	Circuito	g_m/s^2	dC	Cierre dc(m2/s2)
979621,35	A	9,7962135	-46,1303694	0,000
979620,85		9,7962085	57,4057818	
979620,45		9,7962045	-4,9764719	
979620,95		9,7962095	-6,2989627	
979621,55	B	9,7962155	-8,7970015	-0,010
979621,00		9,7962100	41,3791910	
979620,30		9,7962030	24,8137822	
979620,85		9,7962085	-57,4057818	
979620,45	C	9,7962045	4,9764719	-0,039
979618,70		9,7961870	92,5249862	
979618,90		9,7961890	-91,1045577	
979620,65		9,7962065	-6,4361077	
979620,30	D	9,7962030	-24,8137822	0,020
979619,80		9,7961980	47,5311527	
979618,20		9,7961820	69,8271853	
979618,70		9,7961870	-92,5249862	
979620,45	E	9,7962045	14,7824726	0,167
979620,25		9,7962025	8,5520848	
979619,60		9,7961960	24,3631395	
979619,80		9,7961980	-47,5311527	
979621,15	F	9,7962115	32,1707586	-0,176
979621,10		9,7962110	1,5967824	
979622,10		9,7962210	-15,1743463	
979622,15		9,7962215	-18,7695604	

Tabla 25 - Gravedades y cierres de circuitos A-F

g_media(mGal)	Circuito	g_m/s^2	dC	Cierre dc(m2/s2)
979618,90	G	9,7961890	91,1045577	-0,088
979618,00		9,7961800	4,3299116	
979620,20		9,7962020	-93,9259848	
979621,10		9,7962110	-1,5967824	
979618,20	H	9,7961820	-69,8271853	0,069
979619,50		9,7961950	15,7914663	
979619,30		9,7961930	58,4342912	
979618,00		9,7961800	-4,3299116	
979619,60	I	9,7961960	-24,3631395	0,010
979620,35		9,7962035	1,5086153	
979620,25		9,7962025	38,6558151	
979619,50		9,7961950	-15,7914663	
979620,20	J	9,7962020	93,9259848	-0,118
979619,30		9,7961930	-58,4342912	
979621,05		9,7962105	-0,2057204	
979622,50		9,7962250	66,3204433	
979622,25		9,7962225	-101,7239744	
979620,25	K	9,7962025	-38,6558151	0,196
979621,20		9,7962120	9,3357900	
979622,00		9,7962200	29,3102902	
979621,05		9,7962105	0,2057204	

Tabla 26 - Gravedades y cierres de circuitos G-K

Efectivamente los cierres no dan cero, por lo cual se concluye que se cometieron errores en la toma de datos. Por otro lado, la unidad en la que se presenta el cierre de los circuitos en términos de Diferencias de Números Geopotenciales no es del todo tangible, por lo cual se hará una conversión para obtener este cierre en metros y poder tener una noción más práctica de los resultados obtenidos.

La mencionada conversión consiste en dividir al valor del cierre del circuito en (m^2/s^2) entre el promedio de las gravedades medias del mismo, el cual se encuentra en, obteniendo así un valor en metros (m) . (Ver Tabla 27)

Con el fin de exponer de forma práctica el procedimiento descrito anteriormente para hallar el error de dC en metros, se lo realizará para el circuito A de la figura del ejemplo (Ver Figura 32):

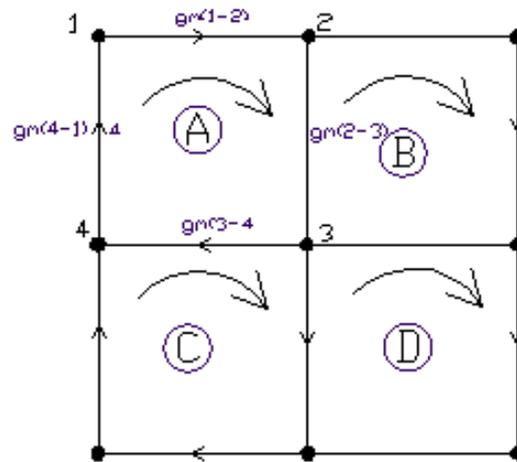


Figura 32 - Ejemplo de Red en términos de dC

Tenemos las siguientes gravidades medias: $g_{m(1-2)}$, $g_{m(2-3)}$, $g_{m(3-4)}$, $g_{m(4-1)}$

$$G_T = (g_{m(1-2)} + g_{m(2-3)} + g_{m(3-4)} + g_{m(4-1)}) / 4 \quad (31)$$

Entonces el Cierre a partir de NG: $dC [m] = \frac{\text{Cierre } dC}{G_T} = \frac{[m^2/s^2]}{[m/s^2]}$ (32)

Circuito	Cierre dC (m2/s2)	Prom_grav(m/s2)	Cierre dC (m)
A	0,000	9,7962090	0,000
B	-0,010	9,7962093	-0,001
C	-0,039	9,7961968	-0,004
D	0,020	9,7961925	0,002
E	0,167	9,7962003	0,017
F	-0,176	9,7962163	-0,018
G	-0,088	9,7961955	-0,009
H	0,069	9,7961875	0,007
I	0,010	9,7961993	0,001
J	-0,118	9,7962106	-0,012
K	0,196	9,7962113	0,020

Tabla 27 - Cierres de los circuitos en metros, a partir de dC

Ahora bien, con los datos locales gravimétricos de cada punto de la red, se realiza el mismo ajuste (AMC+M) mediante el cual fueron calculadas las alturas oficiales, pero esta vez en términos de diferencias de Números Geopotenciales.

Habiendo finalizado el mencionado ajuste, obtenemos los Números Geopotenciales (C) de cada punto de la red, a partir de los cuales será posible derivar sus cotas ortométricas.

Para este ajuste, al igual que para el correspondiente a la nivelación geométrica se debe verificar que $v + B \times \Delta = f$ donde: $n = 32$; $n_0 = 20 \Rightarrow r = 12$, dadas las condiciones de la red las dimensiones de las matrices involucradas son las siguientes: $v_{32 \times 1}$; $B_{32 \times 20}$; $\Delta_{20 \times 1}$; $f_{32 \times 1}$.

En la propagación de los errores de los Números Geopotenciales (C), para obtener la matriz peso se toma también como referencia la distancia máxima d_0 entre los dos puntos del tramo M36-M37 (Ver Tabla 7), dándole menor peso, entonces la diagonal de dicha matriz estará compuesta por los siguientes valores, y fuera de la misma serán cero:

$$w_i = \frac{d_0}{d_i} \quad (27)$$

Dadas las condiciones de la red, las dimensiones de las matrices involucradas en la propagación son: $W_{32 \times 32}$; $Q_{32 \times 32}$; $N_{20 \times 20}$; $T_{20 \times 20}$; $\Delta_{20 \times 1}$; $Q_{cc20 \times 20}$; $Q_{vv32 \times 32}$; $Q_{ll32 \times 32}$; $Q_{\Delta\Delta_{20 \times 20}}$.

Los resultados del AMC+M son los siguientes:

Punto	Num Geo (C)	Error(m2/s2)
M1	43,70820	0,12960
M3	101,09820	0,10470
M5	193,54540	0,04990
M9	198,05260	0,13410
M14	139,75930	0,11960
M15	101,16720	0,11800
M16	99,78420	0,02520
M17	91,20150	0,08960
M18	76,34550	0,10110
M19	34,94110	0,13070
M21	123,93300	0,08220
M25	104,14290	0,13850
M26	89,00870	0,16070
M28	70,28110	0,14720
M29	102,48170	0,10870
M32	96,09960	0,12460
M33	89,80860	0,13880
M36	205,89650	0,20440
M37	139,63140	0,19030
M38	110,40520	0,19940
1.22.028	210,447	-
1.22.029	102,444	-

Tabla 28 - Números Geopotenciales y su desviación estándar

Nuevamente, para hacer más tangible este error, el cual se encuentra en (m^2/s^2) se procede a tomar el error obtenido del ajuste y dividirlo entre el promedio de las gravedades de los puntos que conforman el circuito correspondiente, obteniéndose así, un error asociado al Número Geopotencial de cada punto, en metros. (Ver Tabla 29)

Punto	grv. (mGal)	grv.(m/s ²)	Error(m ² /s ²)	Error(m)
M1	979621,6	9,796216	0,12960	0,013
M3	979620,1	9,796201	0,10470	0,011
M5	979617,3	9,796173	0,04990	0,005
M9	979618,7	9,796187	0,13410	0,014
M14	979619,9	9,796199	0,11960	0,012
M15	979620,6	9,796206	0,11800	0,012
M16	979620,1	9,796201	0,02520	0,003
M17	979620,4	9,796204	0,08960	0,009
M18	979620,5	9,796205	0,10110	0,010
M19	979621,5	9,796215	0,13070	0,013
M21	979619,1	9,796191	0,08220	0,008
M25	979621,7	9,796217	0,13850	0,014
M26	979622,5	9,796225	0,16070	0,016
M28	979621,8	9,796218	0,14720	0,015
M29	979620,5	9,796205	0,10870	0,011
M32	979620,8	9,796208	0,12460	0,013
M33	979621,1	9,796211	0,13880	0,014
M36	979622,8	9,796228	0,20440	0,021
M37	979622,2	9,796222	0,19030	0,019
M38	979621,8	9,796218	0,19940	0,020

Tabla 29 - Error en metros del Número Geopotencial

Se obtiene la siguiente tabla (Ver Tabla 30), la cual contiene los vértices de la Red de Ajuste, su Número Geopotencial correspondiente y el valor de la desviación estándar asociado a estos, en las diferentes unidades.

Punto	Num Geo (C)	Error(m2/s2)	Error(m)
M1	43,70820	0,12960	0,013
M3	101,09820	0,10470	0,011
M5	193,54540	0,04990	0,005
M9	198,05260	0,13410	0,014
M14	139,75930	0,11960	0,012
M15	101,16720	0,11800	0,012
M16	99,78420	0,02520	0,003
M17	91,20150	0,08960	0,009
M18	76,34550	0,10110	0,010
M19	34,94110	0,13070	0,013
M21	123,93300	0,08220	0,008
M25	104,14290	0,13850	0,014
M26	89,00870	0,16070	0,016
M28	70,28110	0,14720	0,015
M29	102,48170	0,10870	0,011
M32	96,09960	0,12460	0,013
M33	89,80860	0,13880	0,014
M36	205,89650	0,20440	0,021
M37	139,63140	0,19030	0,019
M38	110,40520	0,19940	0,020

Tabla 30 - Números Geopotenciales y su error asociado

6.3.4 Obtención de Alturas Ortométricas a partir de NG

Tal cual fue descrito anteriormente, luego de obtenidos los Números Geopotenciales correspondientes a los puntos fijos de la red a partir del ajuste de mínimos cuadrados, se derivarán alturas ortométricas según la siguiente ecuación:

$$H^{ort} = \frac{C}{g} \quad (14)$$

Donde: H^{ort} = Altura Ortométrica

C = Número Geopotencial

\bar{g} = Gravedad Reducida

Cada término de la ecuación anterior corresponde a un mismo punto fijo de la red.

La gravedad reducida se calcula mediante la siguiente ecuación y se define como la integral de los valores de gravedad real de cada punto entre la superficie topográfica y el geode:

$$\bar{g} = g + 0.0424 \times H \quad (33)$$

Donde: \bar{g} = gravedad reducida

g = gravedad en Gal

H = altura nivelada en Km

Por lo tanto la gravedad reducida tiene las siguientes unidades: $[\bar{g}] = m/s^2$

Punto	g (Gal)	H_Niv (m)	H_Niv (km)	g techo (Gal)	g techo (m/s2)
M33	979,6211	9,171	0,009171	979,6214888	9,796214888
M1	979,6216	4,466	0,004466	979,6217893	9,796217893
M19	979,6215	3,572	0,003572	979,6216514	9,796216514
M32	979,6208	9,813	0,009813	979,6212161	9,796212161
M3	979,6201	10,323	0,010323	979,6205377	9,796205377
M18	979,6205	7,799	0,007799	979,6208307	9,796208307
M17	979,6204	9,320	0,009320	979,6207952	9,796207952
M28	979,6218	7,176	0,007176	979,6221043	9,796221043
M29	979,6205	10,463	0,010463	979,6209436	9,796209436
M5	979,6173	19,757	0,019757	979,6181377	9,796181377
M21	979,6191	12,657	0,012657	979,6196367	9,796196367
M16	979,6201	10,198	0,010198	979,6205324	9,796205324
M26	979,6225	9,088	0,009088	979,6228853	9,796228853
M25	979,6217	10,633	0,010633	979,6221509	9,796221509
M9	979,6187	20,220	0,020220	979,6195573	9,796195573
M14	979,6199	14,273	0,014273	979,6205052	9,796205052
M15	979,6206	10,336	0,010336	979,6210382	9,796210382
M36	979,6228	21,022	0,021022	979,6236913	9,796236913
M37	979,6222	14,260	0,014260	979,6228046	9,796228046
M38	979,6218	11,278	0,011278	979,6222782	9,796222782

Tabla 31 - Obtención de la gravedad reducida

La gravedad reducida (\bar{g}) de los puntos fijos del SGM es:

$$1.22.028 - 9,796179108 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

$$1.22.029 - 9,796204439 \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Habiendo obtenido la gravedad reducida se procede a calcular la altura ortométrica derivada de los Números Geopotenciales mediante la ecuación: $H^{ort} = \frac{C}{g}$.

El procedimiento para el cálculo de la altura ortométrica a partir de Números Geopotenciales consiste en realizar una serie de iteraciones, partiendo de la base de que la gravedad reducida fue calculada a priori utilizando la altura nivelada.

Por lo tanto, luego de obtenida la primera altura ortométrica (H_{ort_1}) se sustituyó la misma en la fórmula de la gravedad reducida (33), y así se obtiene un nuevo valor de gravedad reducida (g_{Techo2}) y por consiguiente un nuevo valor de altura ortométrica (H_{ort_2}). Este proceso se vuelve a repetir una vez más constatando que las alturas ortométricas obtenidas son iguales hasta el orden de magnitud correspondiente al milímetro, por lo cual se decide culminar la iteración, dando como definitivo el valor H_{ort_3} . Por lo tanto, ese será el valor de altura ortométrica obtenida a partir de los NG.

Se considera válida la altura ortométrica final hallada, y respaldada por el estudio realizado por SIRGAS (Ver Figura 26) en el cual los valores interpolados de la gravedad con precisiones más bajas se encuentran en el este del país.

Hort_1	gTecho2(m/s2)	Hort_2	gTecho3(m/s2)	Hort_3 (m)	Punto
9,168	9,796215	9,168	9,796215	9,168	M33
4,462	9,796218	4,462	9,796218	4,462	M1
3,567	9,796217	3,567	9,796217	3,567	M19
9,810	9,796212	9,810	9,796212	9,810	M32
10,320	9,796205	10,320	9,796205	10,320	M3
7,793	9,796208	7,793	9,796208	7,793	M18
9,310	9,796208	9,310	9,796208	9,310	M17
7,174	9,796221	7,174	9,796221	7,174	M28
10,461	9,796209	10,461	9,796209	10,461	M29
19,757	9,796181	19,757	9,796181	19,757	M5
12,651	9,796196	12,651	9,796196	12,651	M21
10,186	9,796205	10,186	9,796205	10,186	M16
9,086	9,796229	9,086	9,796229	9,086	M26
10,631	9,796222	10,631	9,796222	10,631	M25
20,217	9,796196	20,217	9,796196	20,217	M9
14,267	9,796205	14,267	9,796205	14,267	M14
10,327	9,796210	10,327	9,796210	10,327	M15
21,018	9,796237	21,018	9,796237	21,018	M36
14,254	9,796228	14,254	9,796228	14,254	M37
11,270	9,796223	11,270	9,796223	11,270	M38

Tabla 32 - Iteraciones realizadas para obtención de altura ortométrica a partir de NG

A modo de resumen se expone la siguiente tabla, en la cual se expresa el Número Geopotencial de cada punto y la Altura Ortométrica derivada del mismo.

Punto	Num Geo (C)	H_ort (m)
M1	43,70820	4,462
M3	101,09820	10,320
M5	193,54540	19,757
M9	198,05260	20,217
M14	139,75930	14,267
M15	101,16720	10,327
M16	99,78420	10,186
M17	91,20150	9,310
M18	76,34550	7,793
M19	34,94110	3,567
M21	123,93300	12,651
M25	104,14290	10,631
M26	89,00870	9,086
M28	70,28110	7,174
M29	102,48170	10,461
M32	96,09960	9,810
M33	89,80860	9,168
M36	205,89650	21,018
M37	139,63140	14,254
M38	110,40520	11,270

Tabla 33 - Números Geopotenciales y Alturas ortométricas derivadas de los mismos

La Altura Ortométrica de los puntos fijos del SGM derivada de los NG es:

1.22.028 - 21,483 m

1.22.029 - 10,458 m

7. Análisis de los Resultados Obtenidos

Este capítulo estará destinado a manifestar los resultados obtenidos luego de aplicados varios tipos de análisis a los datos obtenidos a partir de la nivelación geométrica, de las interpolaciones de gravedad, y de la utilización de las tecnologías GNSS (RADIO-RTK, NTRIP-RTK, POSTPROCESO). Se expondrán también una serie de análisis en los cuales se hará una integración de las tres ramas de datos de este estudio, lo que conlleva a obtener valiosos resultados. Se pondrá en evidencia la relevancia de dichos análisis y finalmente las conclusiones extraídas al respecto.

7.1 Nivelación

En cuanto a la nivelación geométrica, es muy variada y fructífera la gama de análisis realizados, estos se basan en comparaciones con los datos obtenidos de tecnologías GNSS, aunque también, con la mencionada intención de la integración de todos los tipos de datos, habrá involucradas también valores derivados de la interpolación de la gravedad.

7.1.1 Curvas de Iso Error en la Cota Ajustada

En primera instancia se procedió a realizar un análisis gráfico de la propagación del error en la cota ajustada de cada punto de la red, obtenida a partir del AMC+M. Teniendo las coordenadas planas de cada punto, su cota y su desviación estándar se procederá a realizar la mencionada gráfica mediante un procedimiento idéntico al realizado para obtener curvas de nivel, pero en este caso se gratificará Este, Norte y Desviación Estándar. El resultado será curvas que unan puntos con misma desviación estándar, las llamaremos curvas de iso-error.

Para realizar las curvas de iso-error fue utilizado el software TopoStudio el cual tiene dentro de sus principales cometidos ser funcional para la agrimensura y la topografía, se desarrolla bajo la plataforma BricsCAD. El mismo fue desarrollado por los Ing. Agrim. Héctor Acevedo e Ing. Agrim. Álvaro Acquistapace quienes otorgaron licencias a quienes suscriben con validez de un año por su calidad de estudiantes.

A continuación los datos utilizados para realizar el mencionado estudio, vale destacar que el valor de la desviación estándar de las cotas ajustadas fue expresado en milímetros para hacer más visibles los resultados (*Ver Tabla 34*):

Punto	E	N	σ_{CN}
M1	386190.555	6290497.74	0.0169
M3	386544.602	6289920.604	0.0137
M5	386982.964	6289207.06	0.0065
M9	387745.568	6287902.311	0.0175
M14	388373.126	6289092.578	0.0156
M15	388510.375	6289756.4	0.0154
M16	387724.147	6290053.732	0.0033
M17	387870.441	6290411.707	0.0117
M18	387034.532	6290205.969	0.0132
M19	386756.128	6290526.357	0.0171
M21	387486.533	6289553.867	0.0107
M25	386735.613	6287854.782	0.0181
M26	386040.438	6288007.461	0.0210
M28	386069.29	6288768.518	0.0192
M29	386465.294	6288870.428	0.0142
M32	385980.143	6289586.436	0.0163
M33	385805.631	6289818.034	0.0182
M36	387631.996	6286318.495	0.0267
M37	389643.695	6287694.298	0.0249
M38	390197.608	6289166.899	0.0261

Tabla 34 - Datos para graficar curvas de iso-error, en metros

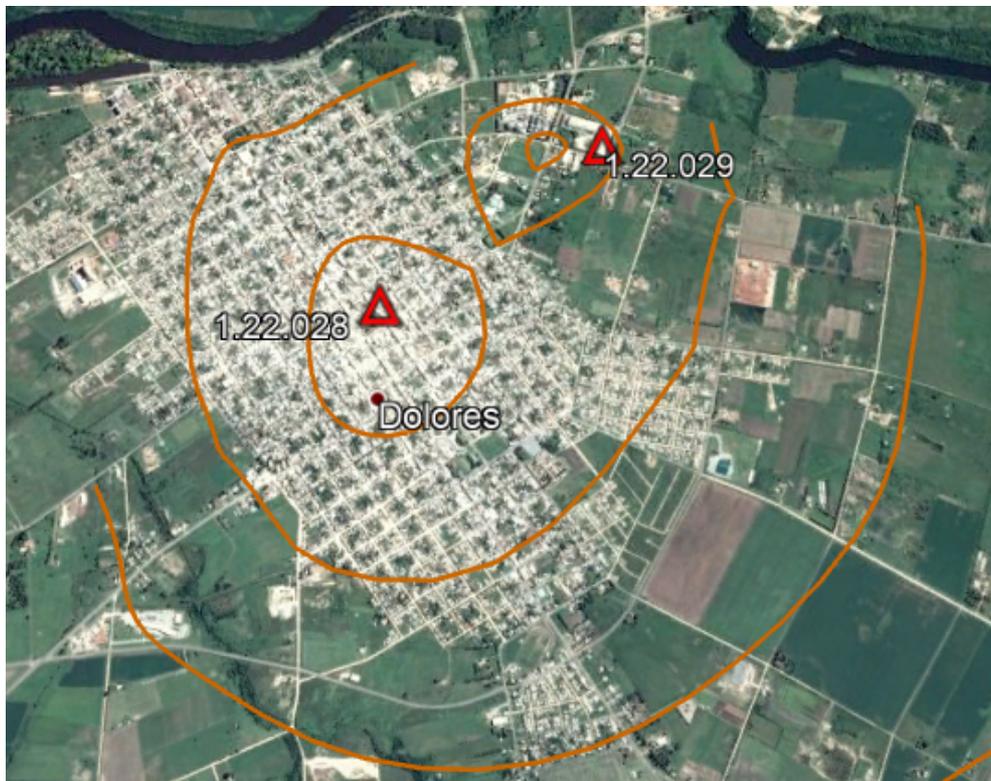


Figura 33: Curvas de iso-error en Dolores. Google Earth

Como puede observarse, el comportamiento de las curvas sigue cierto patrón, no es considerado aleatorio, lo cual es razonable. Cuanto más alejado de los PF se encuentre un punto, se supondrá con mayor error, y viceversa, por lo tanto la gráfica nos da una noción de las zonas donde se obtuvo datos con mayor o menor precisión.

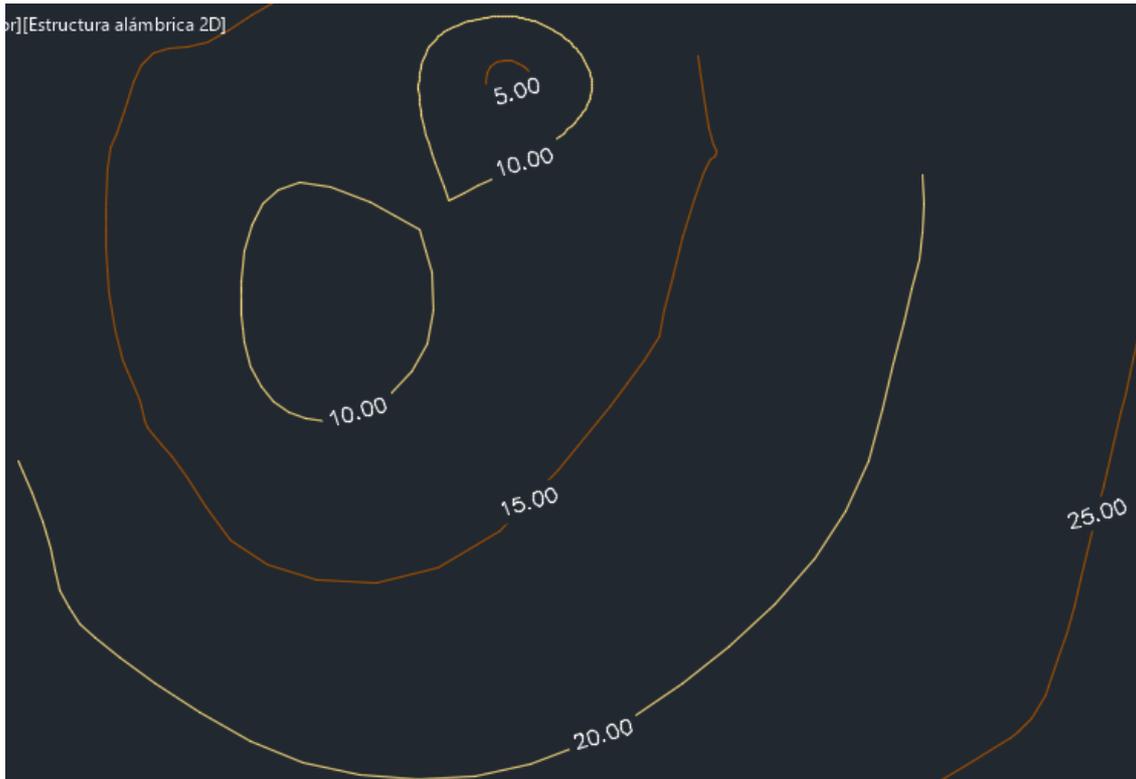


Figura 34: Curvas de iso-error en Dolores, en milímetros. TopoStudio

7.1.2 Análisis Absoluto sobre Puntos de la Red

Tal como adelanta el título de esta sección, se realizará un análisis absoluto sobre puntos. Esto implica evaluar en un mismo punto las diferencias que hay entre diferentes tipos de alturas, o sea, alturas derivadas de distintos procedimientos para su cálculo.

El mencionado análisis involucra las alturas niveladas de cada punto junto con sus respectivas cotas ortométricas a partir del modelo geoidal EGM08.

En particular este análisis es de los más valiosos del presente trabajo, ya que si bien en principio se estudiarán gráficamente las diferencias entre los dos tipos de cotas, obteniendo como resultado curvas de iso-diferencia (un en puntos con la misma diferencia entre los 2 tipos de altura), se estudiará, analíticamente las mencionadas diferencias, con el objetivo de poder modelar el comportamiento de las curvas, hallándose una función paramétrica que me permita pasar de un tipo de altura a otro.

En definitiva se calculará el Modelo de Transformación de Alturas localizado para la Ciudad de Dolores que permita calcular cotas oficiales a partir de cotas ortométricas derivadas del modelo geoidal EGM08, uno de los objetivos principales del presente trabajo, lo cual será realizado en el Capítulo 8. A continuación la tabla con los datos necesarios para realizar el análisis gráfico:

Punto	E	N	Hort-Hniv (m)
M1	386190.555	6290497.74	0.057
M3	386544.602	6289920.604	0.126
M5	386982.964	6289207.06	0.164
M9	387745.568	6287902.311	0.080
M14	388373.126	6289092.578	0.079
M15	388510.375	6289756.4	0.064
M16	387724.147	6290053.732	0.031
M17	387870.441	6290411.707	0.049
M18	387034.532	6290205.969	0.060
M19	386756.128	6290526.357	0.044
M21	387486.533	6289553.867	0.112
M25	386735.613	6287854.782	0.122
M26	386040.438	6288007.461	0.109
M28	386069.29	6288768.518	0.110
M29	386465.294	6288870.428	0.080
M32	385980.143	6289586.436	0.083
M33	385805.631	6289818.034	0.082
M36	387631.996	6286318.495	0.132
M37	389643.695	6287694.298	0.101
M38	390197.608	6289166.899	0.111
1.22.028	387028.642	6289314.229	0.113
1.22.029	387767.166	6290051.615	0.039

Tabla 35 - Datos para graficar curvas de iso-diferencia de alturas

Seguidamente se presentará un archivo .kml donde puede verse las curvas sobre la ciudad de Dolores en Google Earth (*Ver Figura 35*), con el fin de que su visualización sea más práctica o tangible, además a posteriori se expondrán también las curvas realizadas en TopoStudio, donde es posible observar los valores de iso-diferencia de cada curva, expresadas en metros. (*Ver Figura 36*)

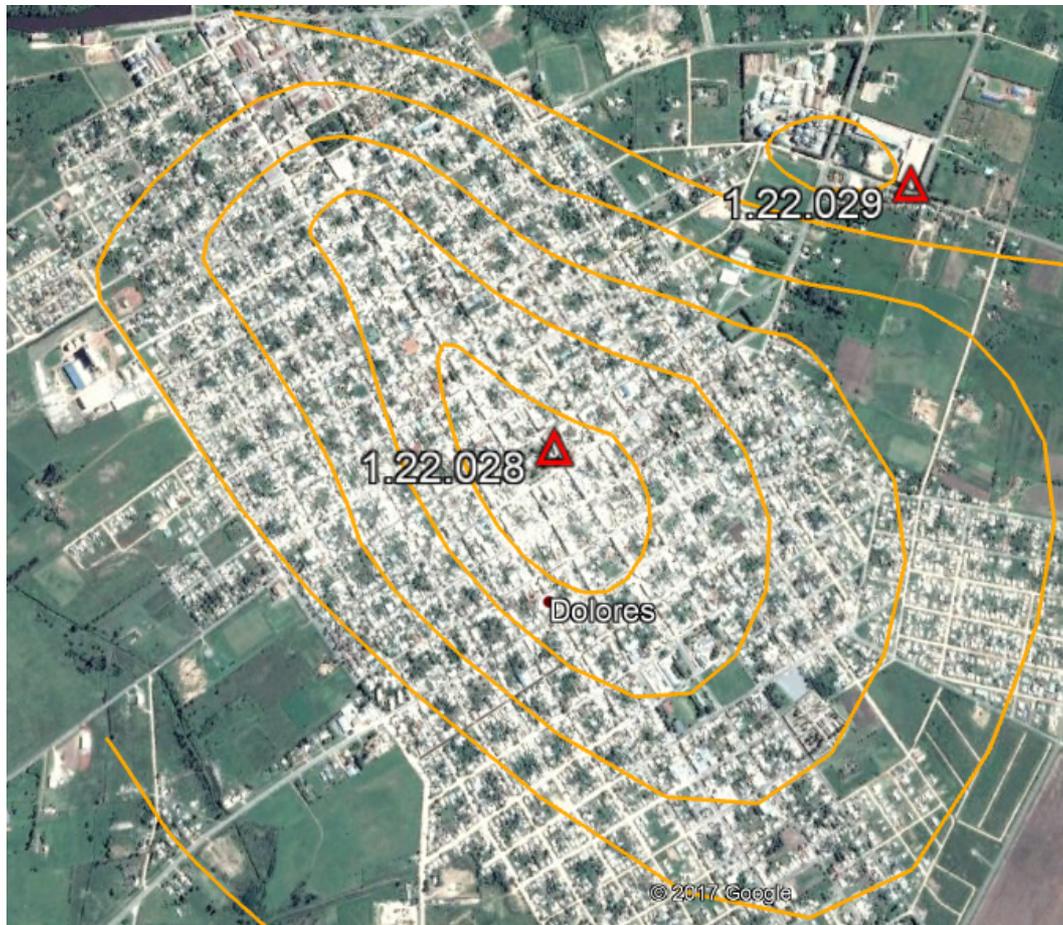


Figura 35: Curvas de iso-diferencia en Dolores. Google Earth



Figura 36: Curvas de iso - diferencia en TopoStudio

Era esperable un comportamiento que siguiera algún tipo de modelo, pero este no resultó ser constante, por lo que se hallará el mismo mediante una superficie matemática que configure esas diferencias. Este Modelo permitirá que se estimen valores de cota oficial para todos los puntos de la red a partir de coordenadas geodésicas.

7.1.3 Análisis Absoluto sobre Puntos Fijos del SGM

En este caso el análisis punto a punto se hizo con el fin de observar que tan compatible es la superficie que representa al modelo geoidal EGM08 con aquella a la cual están referidas las alturas en Uruguay. Como es de notar en la siguiente tabla (Ver Tabla 36), la comparación involucra a todos los puntos fijos del SGM incluidos dentro de la zona de Dolores y sus alrededores.

La mayoría de los puntos del SGM se descartaron de la red original por diferentes motivos, por lo que se terminó trabajando con una red que cuenta solamente con 1.22.028 y 1.22.029. De todas formas, involucrar los restantes puntos se considera relevante ya que puede ser útil para otros cometidos, como por ejemplo a la Intendencia de Soriano para múltiples trabajos o como base para nuevos estudios académicos en la zona.

Para poder realizar el mencionado análisis, en primera instancia deberán calcularse los diferentes tipos de alturas correspondientes a cada punto para luego hacer las debidas comparaciones. La siguiente tabla expone los resultados obtenidos, a continuación de la misma se explicará su conformación para una mejor comprensión en lo que a ella respecta, y por último, el procedimiento mediante el cual se obtuvieron los datos exhibidos.

# Pto_Gps	Pto_Red	h_elip	N	H_ort (m)	H_of (m)	Δn	H_ort - H_of
39 (exe)	-	59.544	17.021	42.52	42.38	-1.938	0.14
21 (exe)	-	37.35	17.065	20.29	20.17	-1.308	0.11
8 (exe)	-	27.695	17.067	10.63	10.59	0.119	0.04
4	1.22.030	27.036	17.070	9.97	9.88		0.09
2	ADOL	38.376	17.115	21.26	21.62		-0.36
-	1.22.022			44.46	44.32		0.14
-	1.22.028			21.59	21.48		0.11
-	1.22.029			10.51	10.47		0.04

REFERENCIAS	
# Pto_gps	Número de punto tomado via RADIO-RTK
Pto_Red	Número de punto correspondiente a la Red de Ajuste
h_elip	Altura elipsoidal
N	Ondulación Geoidal
H_ort (m)	Altura Ortométrica derivada del EGM08
H_of (m)	Altura Oficial
Δn	Desnivel entre el punto excéntrico medido y el punto fijo
H_ort - H_of	Diferencia entre Altura Ortométrica y Altura Oficial

Tabla 36 - Análisis Absoluto de Puntos Fijos del SGM en la zona de Dolores

Como se observa, se exhiben los puntos excéntricos utilizados, junto con sus respectivas cotas ortométricas obtenidas vía RADIO-RTK. Éstas se utilizaron junto con las diferencias de nivel entre el punto excéntrico y el fijo correspondiente, para hallar las cotas ortométricas derivadas del EGM08 de los puntos fijos del SGM: 1.22.022 - 1.22.028 - 1.22.029. Las alturas ortométricas calculadas se destacan en color celeste (Ver Tabla 36). De forma inversa, se calcularon las cotas oficiales de los excéntricos, destacados en la tabla en color verde (Ver Tabla 36).

Observando la localización de los mismos (Ver Figura 11) y los resultados obtenidos, no se visualiza algún comportamiento notorio.

7.1.4 Análisis Relativo entre Puntos Fijos del SGM

Ahora se procederá a realizar un análisis relativo entre los puntos fijos del SGM, lo que implica evaluar las diferencias de alturas entre dos puntos dados. Este estudio se hará con dos tipos de alturas, Altura Oficial y Altura Ortométrica derivada del EGM08.

El fin del mismo es observar que tan bien se aproxima el modelo geoidal con respecto a los desniveles en la realidad. Se confeccionaron las siguientes tablas, las cuales poseen sus valores en metros:

d_Hof	1.22.022	1.22.028	1.22.029	1.22.030	ADOL
1.22.022	0	22.84	33.85	34.44	22.7
1.22.028		0	11.01	11.6	-0.14
1.22.029			0	0.59	-11.15
1.22.030				0	-11.74
ADOL					0

Tabla 37 - Diferencia de Alturas Oficiales entre puntos del SGM

d_Hort	1.22.022	1.22.028	1.22.029	1.22.030	ADOL
1.22.022	0	22.87	33.71	34.50	23.20
1.22.028		0	10.85	11.63	0.33
1.22.029			0	0.78	-10.51
1.22.030				0	-11.30
ADOL					0

Tabla 38 - Diferencia de Alturas Ortométricas derivadas del EGM08 entre puntos del SGM

Ahora se procederá a realizar la diferencia entre los puntos fijos de las diferencias ya realizadas anteriormente, se agrega la siguiente tabla 39 realizada a modo de ejemplo para los puntos 1.22.022 y 1.22.028.

1.22.022 - 1.22.028	
d_Hof (m)	22.84
d_Hort (m)	22.87
diferencia (m)	-0.03

Tabla 39 -Cálculo de la diferencia de alturas ortométricas

Siguiendo esa metodología es que se obtiene la siguiente tabla, la cual refleja un análisis relativo entre todos los puntos fijos del SGM:

dif_dHof-dHort	1.22.022	1.22.028	1.22.029	1.22.030	ADOL
1.22.022	0	-0.03	0.14	-0.06	-0.50
1.22.028		0	0.16	-0.03	-0.47
1.22.029			0	-0.19	-0.64
1.22.030				0	-0.45
ADOL					0

Tabla 40 - Diferencia entre diferencias de altura nivelada y ortométrica entre los puntos del SGM.

Como puede observarse, para la zona en estudio el punto ADOL presenta las mayores diferencias, y coincide con el punto más alejado de los puntos fijos de la red 1.22.028 y 1.22.029, sin embargo se desconoce el verdadero motivo de esos resultados. Por otro lado, se observa la diferencia encontrada al principio del presente estudio, los demás puntos tienen una diferencia máxima de 20 cm, por lo que en forma relativa el modelo EGM08 se ajusta de buena manera en la zona.

7.2 Análisis de Datos obtenidos de Tecnologías GNSS

Continuando con los análisis luego de los resultados obtenidos en gabinete, tal como se realizó en la sección dedicada a la nivelación geométrica, se utilizará la misma metodología pero en este caso destinada a estudiar las diferencias de alturas entre puntos tomados con diferentes métodos GNSS.

7.2.1 Análisis de la Ondulación Geoidal del EGM08

Como se explicó en los fundamentos teóricos, la Ondulación Geoidal (N) es un instrumento que nos permite vincular alturas del tipo físico con alturas del tipo matemático.

Este estudio básicamente fue realizado para visualizar el comportamiento del modelo geoidal en la zona, para verificar que no tenga discontinuidades o cambios bruscos.

La siguiente tabla corresponde a todos los puntos tomados vía RADIO-RTK, por lo cual excede a la cantidad de puntos de la red en estudio. Dichos puntos fueron agregados debido a que se está estudiando el modelo geoidal y se lo considera un estudio más global que lo que abarca el presente trabajo, por lo cual, cuanto mayor cantidad de puntos utilizados, el resultado será mejor, más representativo de la zona.

Se agrega la misma (Ver Tabla 41) con los datos necesarios para realizar el gráfico (Ver Figuras 37 y 38):

#	E	N	N	#	E	N	N
1	387496.963	6289803.086	17.067	28	387487.568	6287787.872	17.053
2	390980.740	6296551.883	17.115	29	386645.393	6288644.504	17.063
3	390980.943	6296552.241	17.115	30	386465.294	6288870.428	17.065
4	388482.116	6290707.478	17.070	31	386133.301	6289343.585	17.069
5	388638.688	6290740.413	17.069	32	385980.143	6289586.436	17.071
6	387870.441	6290411.707	17.069	33	385805.631	6289818.034	17.074
7	387724.147	6290053.732	17.067	34	386040.438	6288007.461	17.062
8	387767.166	6290051.615	17.067	35	386064.125	6288221.914	17.063
9	388510.375	6289756.400	17.063	36	387486.533	6289553.867	17.065
10	388373.126	6289092.578	17.059	37	387861.951	6289193.288	17.061
11	388260.399	6288565.412	17.055	38	387747.668	6288848.601	17.060
12	388689.125	6286265.283	17.036	39	386895.532	6282937.278	17.021
13	387232.121	6289944.375	17.068	40	386429.665	6282355.515	17.019
14	387034.532	6290205.969	17.070	41	386429.664	6282355.509	17.019
15	386756.128	6290526.357	17.073	pf1	387424.174	6288891.415	17.061
16	386190.555	6290497.740	17.076	pf2	387116.502	6289176.482	17.064
17	386386.301	6290181.201	17.073	pf3	387399.057	6289500.363	17.065
18	386544.602	6289920.604	17.071	pf4	387622.383	6289139.894	17.062
19	386703.690	6289658.612	17.069	pf5	387070.808	6289628.185	17.067
20	386982.964	6289207.060	17.065	pf6	386793.820	6289699.796	17.069
21	387028.642	6289314.229	17.065	pf7	386334.091	6289667.258	17.070
22	387137.570	6288942.861	17.063	pf8	385710.392	6289962.737	17.075
23	387340.442	6288596.055	17.060	pf9	385478.568	6289800.631	17.075
24	387554.107	6288231.115	17.056	pf10	385761.427	6289641.301	17.073
25	387745.568	6287902.311	17.053	pf11	386495.800	6289407.768	17.068
26	388007.743	6287461.544	17.048	pf12	386721.192	6289040.625	17.065
27	387989.168	6288094.993	17.053	pf13	386781.226	6289329.613	17.067

Tabla 41 - Datos para graficar



Figura 37: Curvas iso ondulación geoidal en Dolores. Google Earth

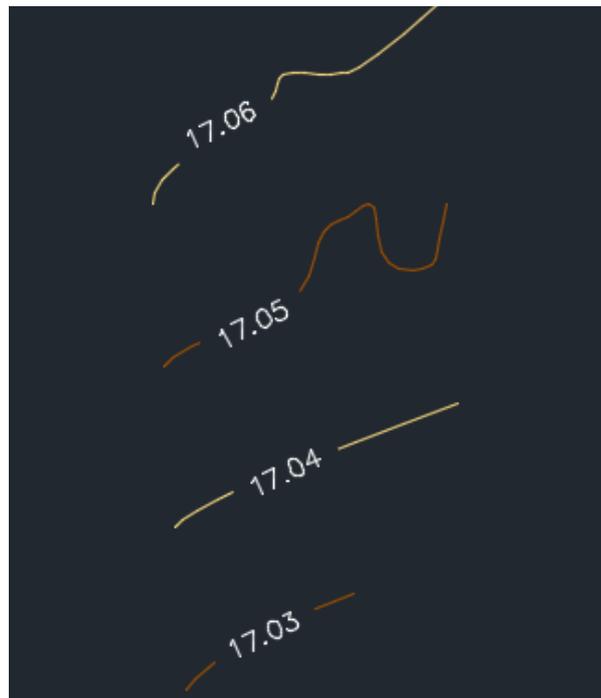


Figura 38: Curvas iso ondulación geoidal en TopoStudio

Como puede observarse, dentro de la Ciudad, se considera que se está trabajando con prácticamente el mismo N , a medida que nos vamos alejando de la misma, a razón de 1.5 km la Ondulación Geoidal varía en 1 cm. No se muestran imperfecciones ni algún tipo de discontinuidad en la zona de estudio en la cual N es aproximadamente 17.06 m.

7.2.2 Análisis Absoluto sobre Puntos de la Red

Se realizará un análisis absoluto sobre puntos de la red tomados por NTRIP-RTK y RADIO-RTK y se realizará un breve análisis estadístico de estas diferencias (Ver Tablas 43 y 44).

Todos los puntos de la red fueron tomados vía RADIO-RTK, sin embargo solo algunos se midieron vía NTRIP-RTK, esto debido a que el operador en cada caso no fue el mismo, lo que conlleva a que la comparación sea menos extensa que otras. La misma se realizó con el fin de observar la bondad entre los métodos de medición GNSS, que tan próximos están las coordenadas y sus respectivas alturas.

El mencionado análisis se hará gráficamente para su mejor visualización (Ver Figuras 40 y 41). A continuación la tabla de datos, las diferencias de altura obtenidas. E , N y H_{ort} se encuentran expresadas en metros.

Red	NTRIP-RTK			RADIO-RTK		
	E	N	H_ort	E	N	H_ort
M21	387486.580	6289553.540	12.850	387486.533	6289553.867	12.769
M16	387724.200	6290053.770	10.350	387724.095	6290054.059	10.245
1.22.029	387767.180	6290051.580	10.750	387767.118	6290051.936	10.664
M17	387870.500	6290411.730	9.480	387870.390	6290412.033	9.383
1.22.030	388482.130	6290707.500	10.140	388482.065	6290707.804	9.980
1.22.031	388638.730	6290740.410	10.120	388638.637	6290740.741	9.983
M19	386756.160	6290526.380	3.720	386756.078	6290526.682	3.625
M18	387034.560	6290206.020	7.950	387034.480	6290206.295	7.871
M3	386544.690	6289920.290	10.490	386544.602	6289920.604	10.449
M32	385980.200	6289586.120	10.010	385980.143	6289586.436	9.896
M29	386465.360	6288870.070	10.670	386465.294	6288870.428	10.543
1.22.028	387028.680	6289314.240	20.370	387028.591	6289314.554	20.301
M5	386983.100	6289206.690	19.920	386982.964	6289207.059	19.921

Tabla 42 - Datos de alturas de algunos puntos de la red tomados vía NTRIP- RTK y RADIO-RTK

Red	Diferencias		
	ΔE	ΔN	ΔH_{ort}
M21	0.047	-0.327	0.081
M16	0.105	-0.289	0.105
1.22.029	0.062	-0.356	0.086
M17	0.110	-0.303	0.097
1.22.030	0.065	-0.304	0.160
1.22.031	0.093	-0.331	0.137
M19	0.082	-0.302	0.095
M18	0.080	-0.275	0.079
M3	0.088	-0.314	0.041
M32	0.057	-0.316	0.114
M29	0.066	-0.358	0.127
1.22.028	0.089	-0.314	0.069
M5	0.136	-0.369	-0.001

Tabla 43 - Diferencia de Alturas Ortométricas RADIO-RTK - NTRIP-RTK

	ΔH_{ort}	ΔE (m)	ΔN (m)
Promedio	0.092	0.083	-0.320
Desv. Estand	0.041	0.025	0.028

Tabla 44 - Análisis estadístico de los resultados

Dados los resultados obtenidos se observa que son similares las diferencias entre los puntos en cuanto a las Alturas Ortométricas y las coordenadas Este, sin embargo hay una discrepancia significativa con el promedio de las diferencias de las coordenadas Norte de todos los puntos.

En la imagen siguiente, se puede ver la ubicación de los puntos utilizados para realizar la gráfica:

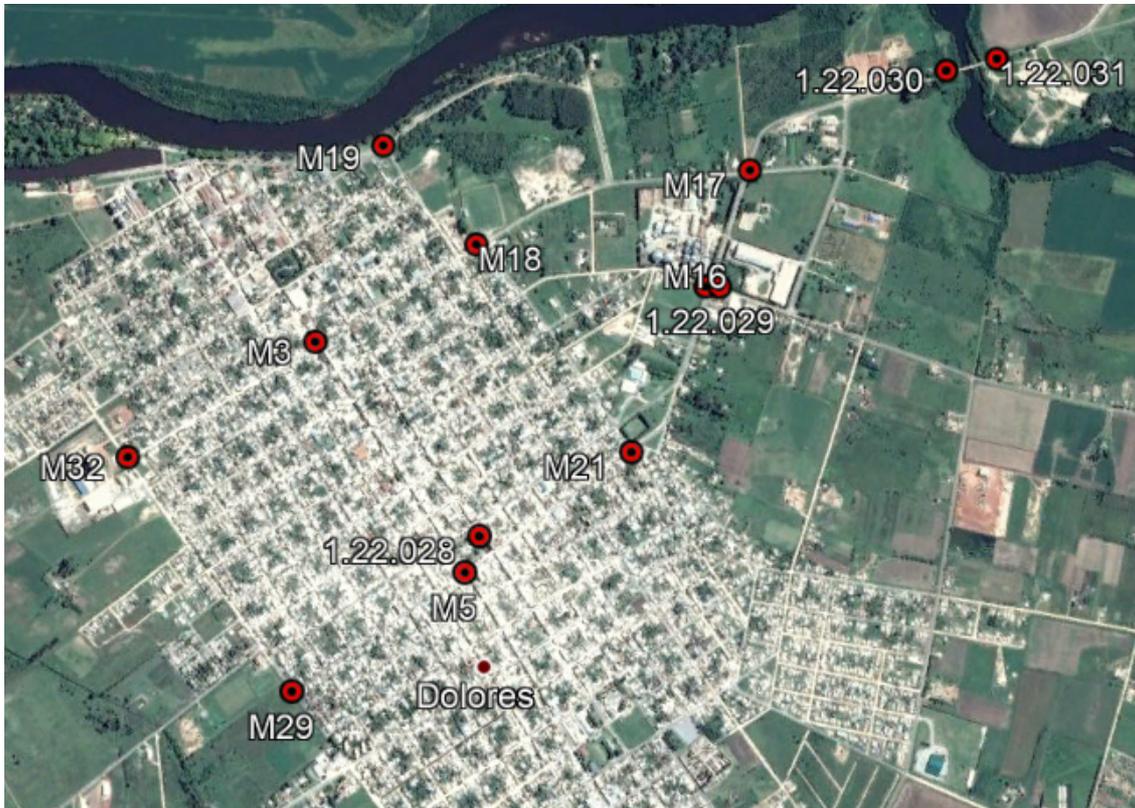


Figura 39 - Ubicación de los puntos que se analizaron

Observando las diferencias entre los puntos en las tres componentes, y la localización de los mismos, a priori no se pueden extraer conclusiones concretas sobre los resultados obtenidos.

He aquí la imagen en Google Earth que corresponde al comportamiento, en la zona de estudio, a la diferencia entre los dos tipos de alturas mencionados anteriormente en un mismo punto y a posteriori la gráfica realizada en TopoStudio con los valores correspondientes a esas diferencias:

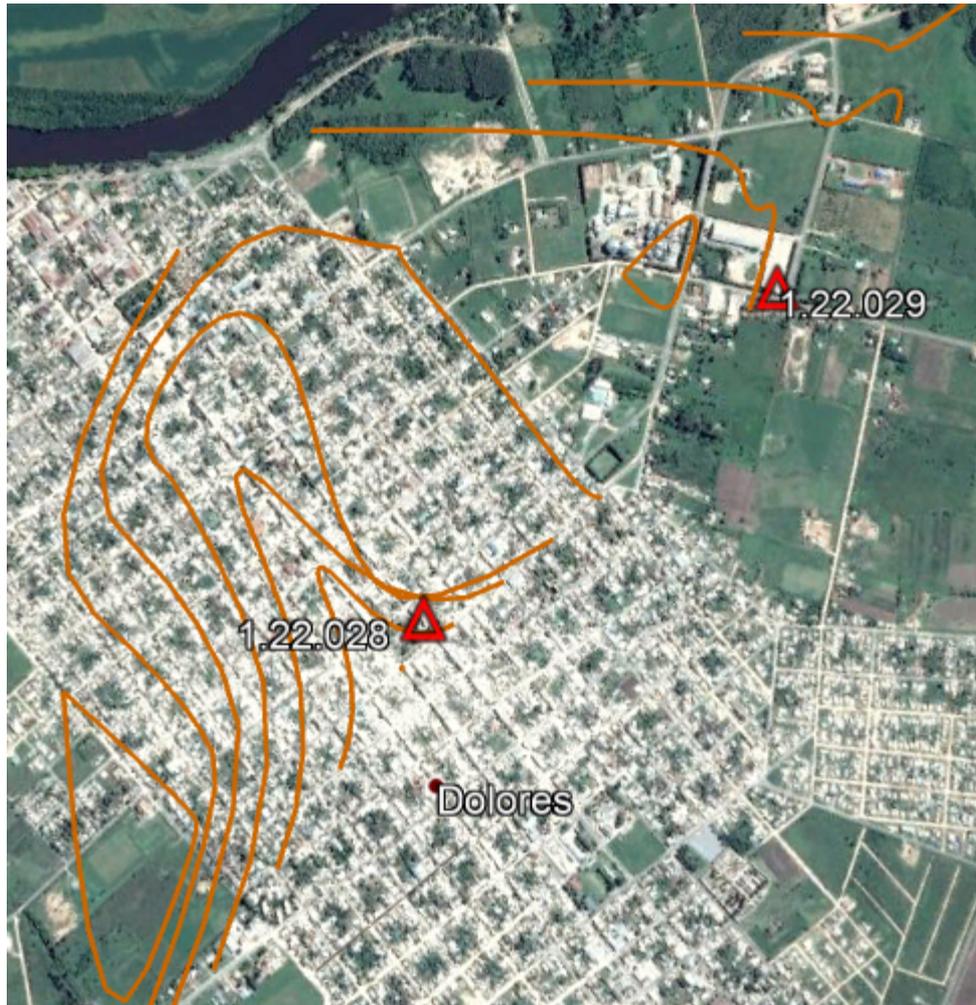


Figura 40 - Imagen en Google Earth de la diferencia de alturas ortométricas RADIO-RTK - NTRIP-RTK

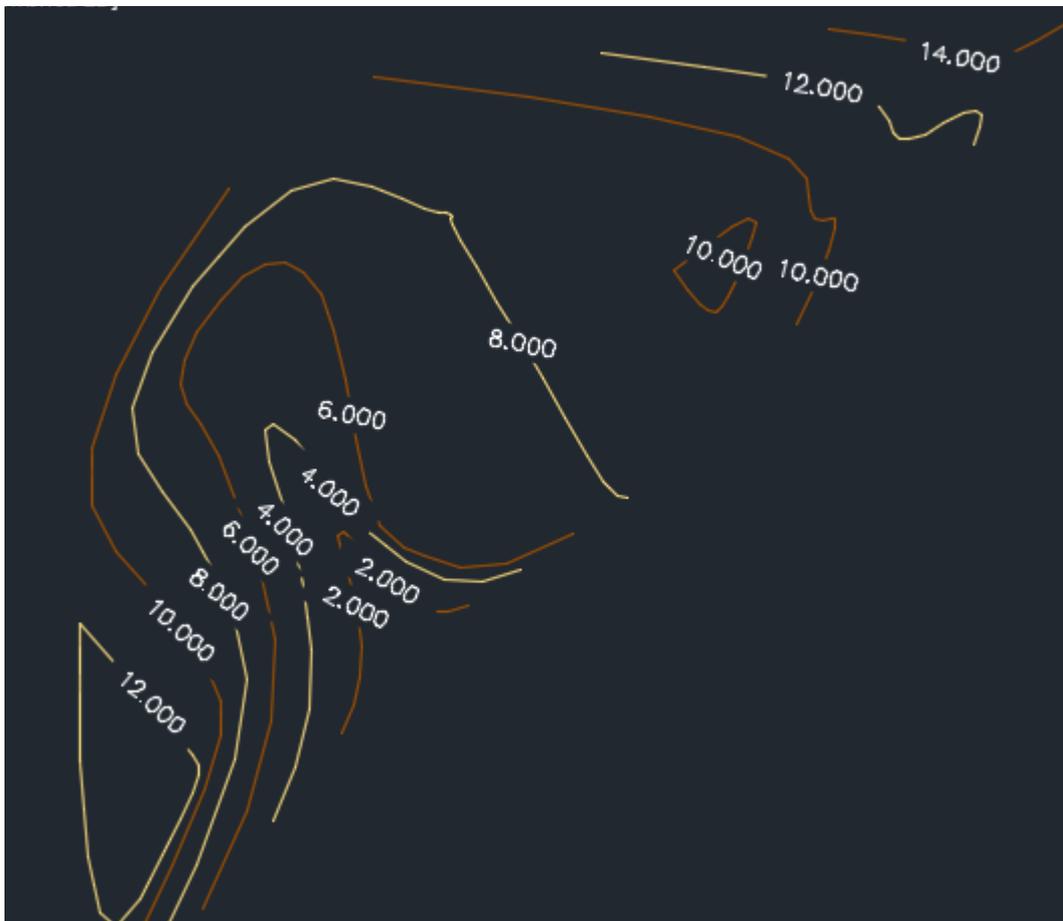


Figura 41: Gráfica de diferencia de Alturas Ortométricas NTRIP-RTK

Dicha gráfica tiene cierto comportamiento, no se lo considera aleatorio.

7.3 Análisis de resultados obtenidos a partir de datos de gravedad

Continuando con lo que son los análisis de datos, en este caso se utilizará todo resultado derivado de operaciones realizadas con datos de gravedad. Tal como en las secciones anteriores, se harán diversas comparaciones y estudios que revelarán la magnitud de la influencia de la gravedad en las nivelaciones geométricas realizadas en la zona de estudio.

7.3.1 Comparación de Cierres de Circuitos

En este caso se estudiarán los cierres de cada circuito de la red obtenidos mediante la sumatoria de los desniveles geométricos y por otro lado, aquellos cierres obtenidos mediante la sumatoria de diferencias de números geopotenciales. Estos ya fueron calculados en las siguientes secciones: 5.2.1 Continuación del procesamiento en gabinete y 5.3.2 Obtención de Números Geopotenciales.

Ahora bien, se exhibirá un cuadro comparativo de los mismos, en los cuales se podrá observar que dichos cierres son iguales hasta por lo menos el milímetro.

Circuito	Cierre dC(m)	Cierre-Niv(m)
A	0,000	0,000
B	-0,001	-0,001
C	-0,004	-0,004
D	0,002	0,002
E	0,017	0,017
F	-0,018	-0,018
G	-0,009	-0,009
H	0,007	0,007
I	0,001	0,001
J	-0,012	-0,012
K	0,020	0,020

Tabla 45 - Comparación de cierres

Del cuadro comparativo anterior es posible afirmar que si existiera influencia de la gravedad en la zona de estudio, su magnitud sería uniforme en toda esa superficie, ya que al realizar la comparación de cierres de circuitos, en definitiva se está haciendo un análisis relativo, en el cual, esa influencia que podría estar afectando, se compensaría al cerrar el circuito. Por lo tanto se descarta una influencia dispar de la gravedad.

7.3.2 Curvas de Iso Error en el Número Geopotencial

Tal como se explicó en la sección 5.3.3 Obtención de Números Geopotenciales, los mismos se obtienen mediante un procedimiento de ajuste por mínimos cuadrados, por lo cual, luego del mismo, se obtienen los Números Geopotenciales ajustados correspondientes a cada uno de los vértices de la red y realizando la propagación de cofactores se obtuvo su desviación estándar. Se realizará en este caso el estudio del comportamiento de la desviación estándar de cada uno de éstos de forma gráfica (Ver Figuras 42 y 43), al igual que se hizo con la desviación en las cotas ajustadas. También en este caso el error se expresará en milímetros, a continuación la tabla con los datos correspondientes:

Punto	E	N	Error (mm)
M1	386190,555	6290497,74	13,2
M3	386544,602	6289920,604	10,7
M5	386982,964	6289207,06	5,1
M9	387745,568	6287902,311	13,7
M14	388373,126	6289092,578	12,2
M15	388510,375	6289756,4	12,0
M16	387724,147	6290053,732	2,6
M17	387870,441	6290411,707	9,1
M18	387034,532	6290205,969	10,3
M19	386756,128	6290526,357	13,3
M21	387486,533	6289553,867	8,4
M25	386735,613	6287854,782	14,1
M26	386040,438	6288007,461	16,4
M28	386069,29	6288768,518	15,0
M29	386465,294	6288870,428	11,1
M32	385980,143	6289586,436	12,7
M33	385805,631	6289818,034	14,2
M36	387631,996	6286318,495	20,9
M37	389643,695	6287694,298	19,4
M38	390197,608	6289166,899	20,4

Tabla 46 - Datos para calcular las curvas de iso-error

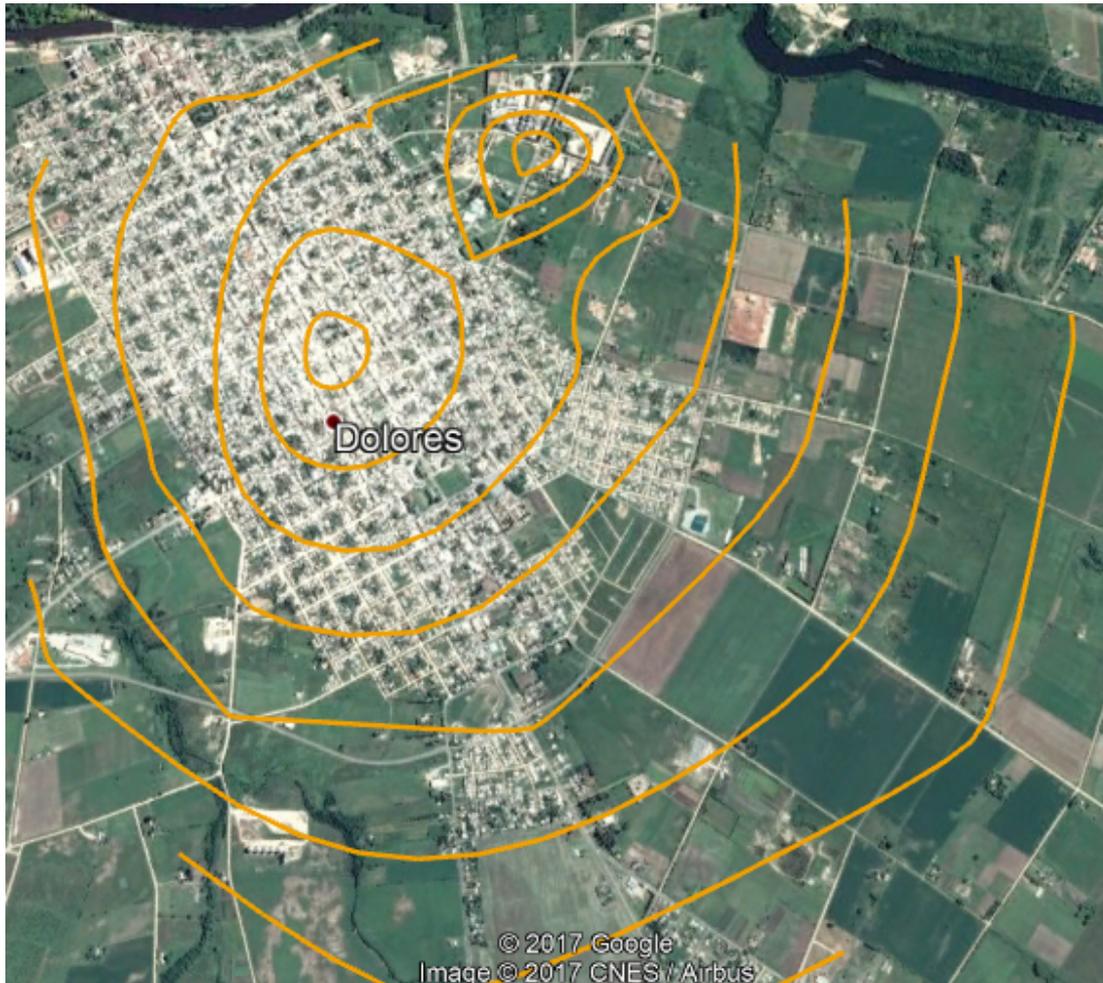


Figura 42 - Curvas de Iso error en NG visto en Google Earth

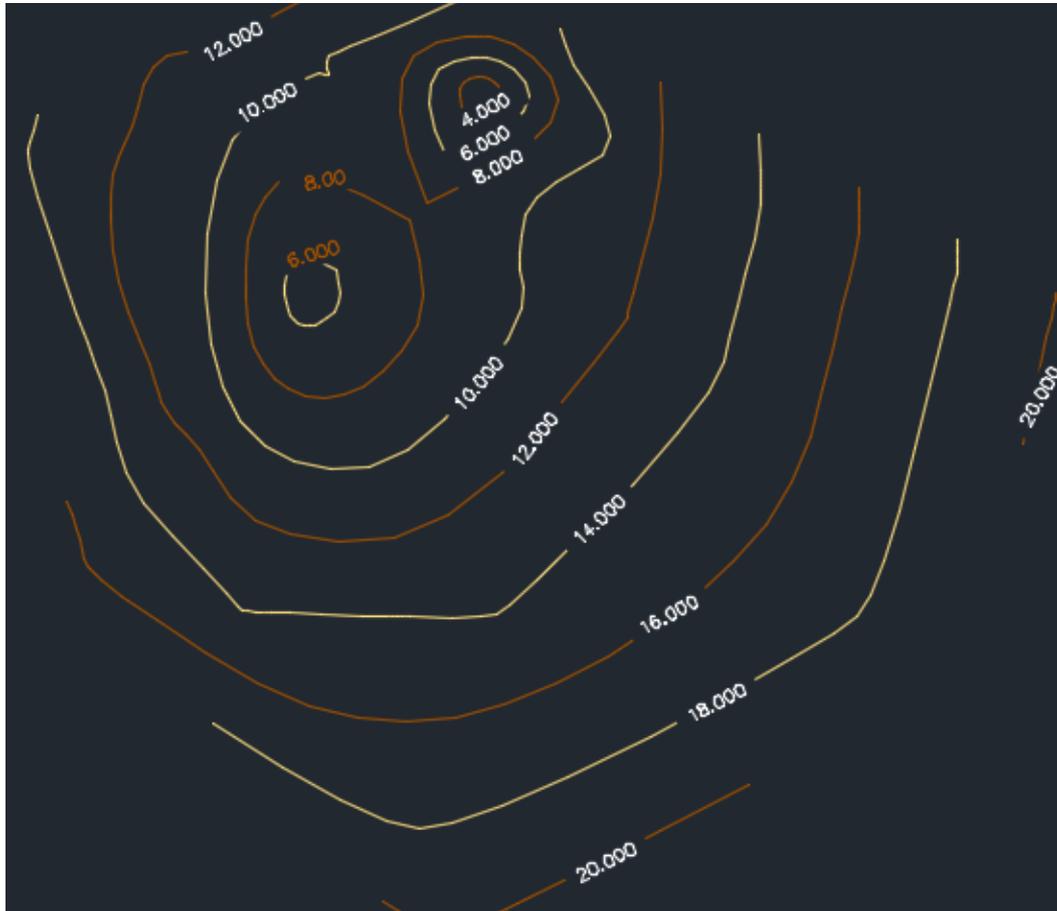


Figura 43 - Curvas de iso desviación estándar de los NG en TopoStudio

Como puede observarse, las curvas resultantes de graficar $f(E, N, \sigma C)$ tienen un comportamiento particular, el cual es similar al de la desviación estándar en las cotas ajustadas, a medida que un punto se aleja de los puntos fijos del SGM, el error en el NG se va acumulando y por lo tanto haciéndose mayor.

7.3.3 Análisis absoluto de Puntos de la Red

7.3.3.a Alturas Ortométricas derivadas de NG y del EGM08

Dichas alturas no son derivadas de la misma superficie de referencia pero deberían ser relativamente similares ya que así lo son las superficies a las que están referidas.

La tabla con los datos es la siguiente, vale destacar que estas diferencias están expresadas en mm:

Punto	E	N	Hort_grav-Hort_EGM08
M1	386190,555	6290497,74	-61,26
M3	386544,602	6289920,604	-128,86
M5	386982,964	6289207,06	-163,77
M9	387745,568	6287902,311	-82,70
M14	388373,126	6289092,578	-85,32
M15	388510,375	6289756,4	-72,82
M16	387724,147	6290053,732	-42,99
M17	387870,441	6290411,707	-59,12
M18	387034,532	6290205,969	-65,63
M19	386756,128	6290526,357	-49,20
M21	387486,533	6289553,867	-117,87
M25	386735,613	6287854,782	-124,07
M26	386040,438	6288007,461	-110,98
M28	386069,29	6288768,518	-111,69
M29	386465,294	6288870,428	-81,64
M32	385980,143	6289586,436	-86,13
M33	385805,631	6289818,034	-85,32
M36	387631,996	6286318,495	-136,08
M37	389643,695	6287694,298	-107,41
M38	390197,608	6289166,899	-118,82
1.22.028	387028,642	6289314,229	1197,56
1.22.029	387767,166	6290051,615	-170,48

Tabla 47 - Datos para graficar la diferencia entre Alturas Ortométricas

Si las superficies fueran paralelas, la diferencia entre ambas alturas debería ser constante, de hecho no lo es como puede observarse en la Tabla 47. Además si las diferencias fueran constantes podrían obtenerse desniveles ortométricos con buena precisión a partir del EGM08.

El comportamiento de las curvas que modelan estas diferencias puede observarse en las Figuras 44 y 45, dicho comportamiento no es aleatorio, sin embargo no pueden extraerse conclusiones, la discrepancia entre los puntos del SGM distorsionan estas gráficas, como por ejemplo el punto 1.22.028, es el cual presenta una diferencia mayor en el orden del metro.

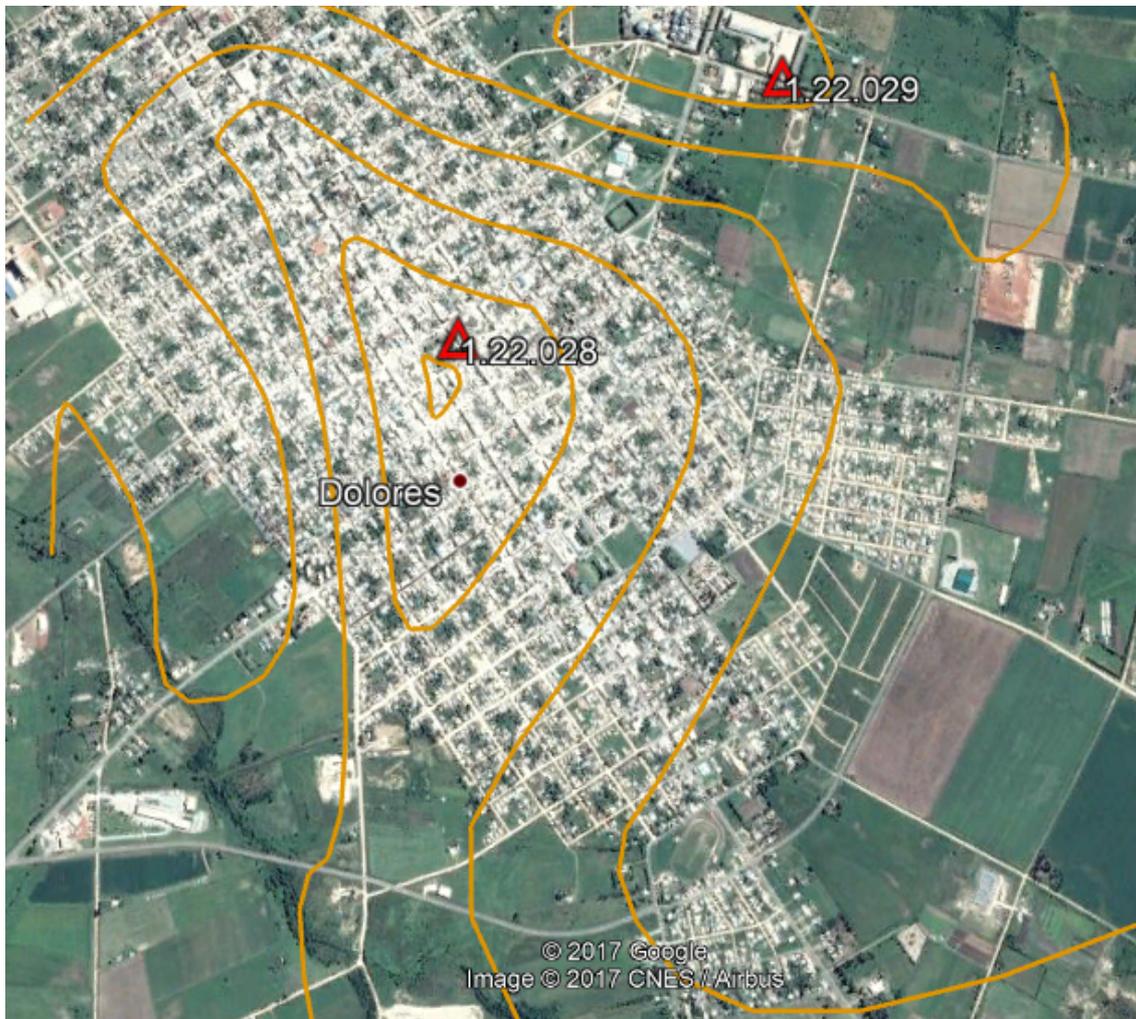


Figura 44 - Curvas de igual diferencia entre alturas ortométricas en Google Earth

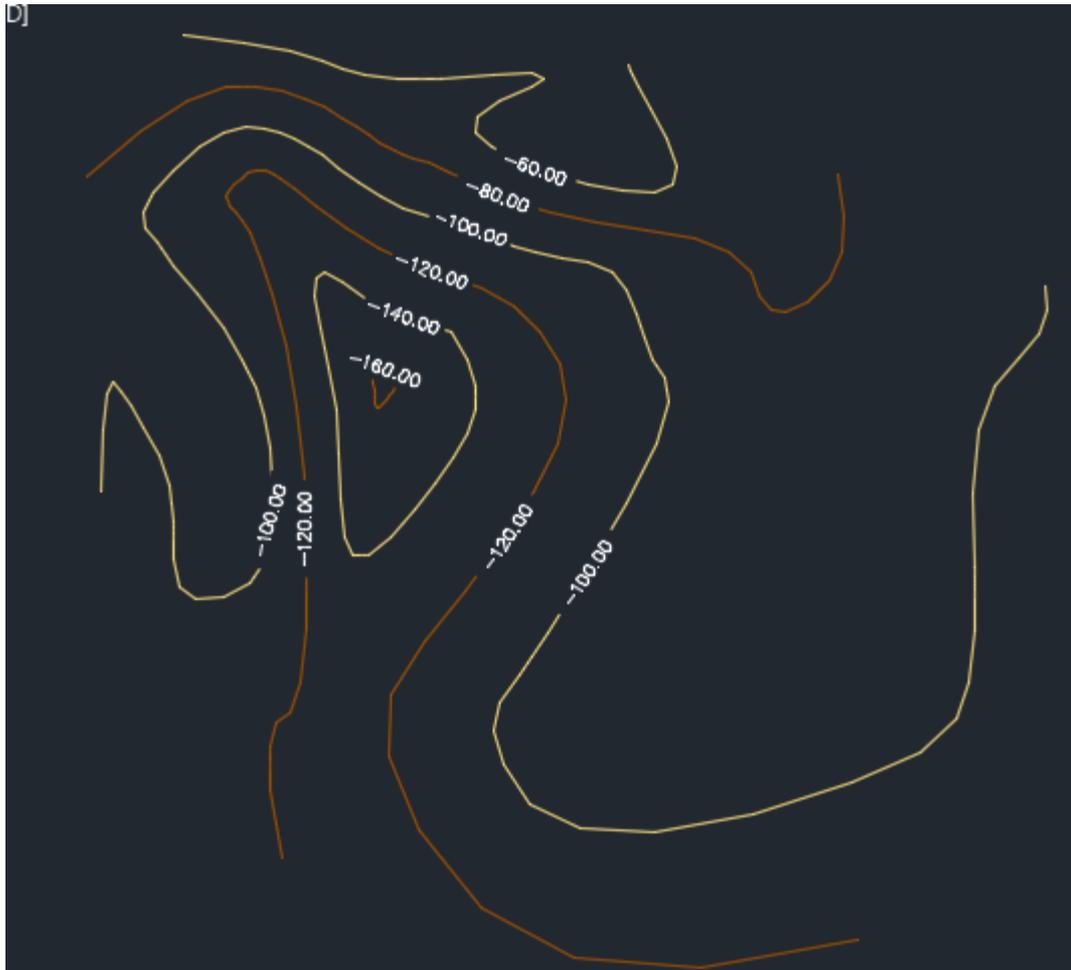


Figura 45 - Curvas de igual diferencia entre alturas ortométricas en Topostudio

7.3.3.b Alturas Ortométricas derivadas de NG y Altura Nivelada

A continuación la tabla con los datos para realizar la gráfica (Ver Figura 46 y 47) que expone la diferencia entre la altura resultante de la nivelación y la altura a partir de los NG. Las diferencias de Alturas se encuentran expresadas en mm:

Punto	E	N	H_Niv - Hort_NG
M1	386190,555	6290497,74	3,76
M3	386544,602	6289920,604	3,16
M5	386982,964	6289207,06	-0,43
M9	387745,568	6287902,311	2,90
M14	388373,126	6289092,578	6,62
M15	388510,375	6289756,4	8,72
M16	387724,147	6290053,732	11,99
M17	387870,441	6290411,707	10,12
M18	387034,532	6290205,969	5,63
M19	386756,128	6290526,357	4,70
M21	387486,533	6289553,867	6,07
M25	386735,613	6287854,782	2,37
M26	386040,438	6288007,461	1,98
M28	386069,29	6288768,518	1,69
M29	386465,294	6288870,428	1,34
M32	385980,143	6289586,436	2,73
M33	385805,631	6289818,034	2,92
M36	387631,996	6286318,495	3,78
M37	389643,695	6287694,298	6,21
M38	390197,608	6289166,899	7,42

Tabla 48 - Datos para graficar la diferencia entre Alturas Nivelada y Altura Ortométrica derivada de NG

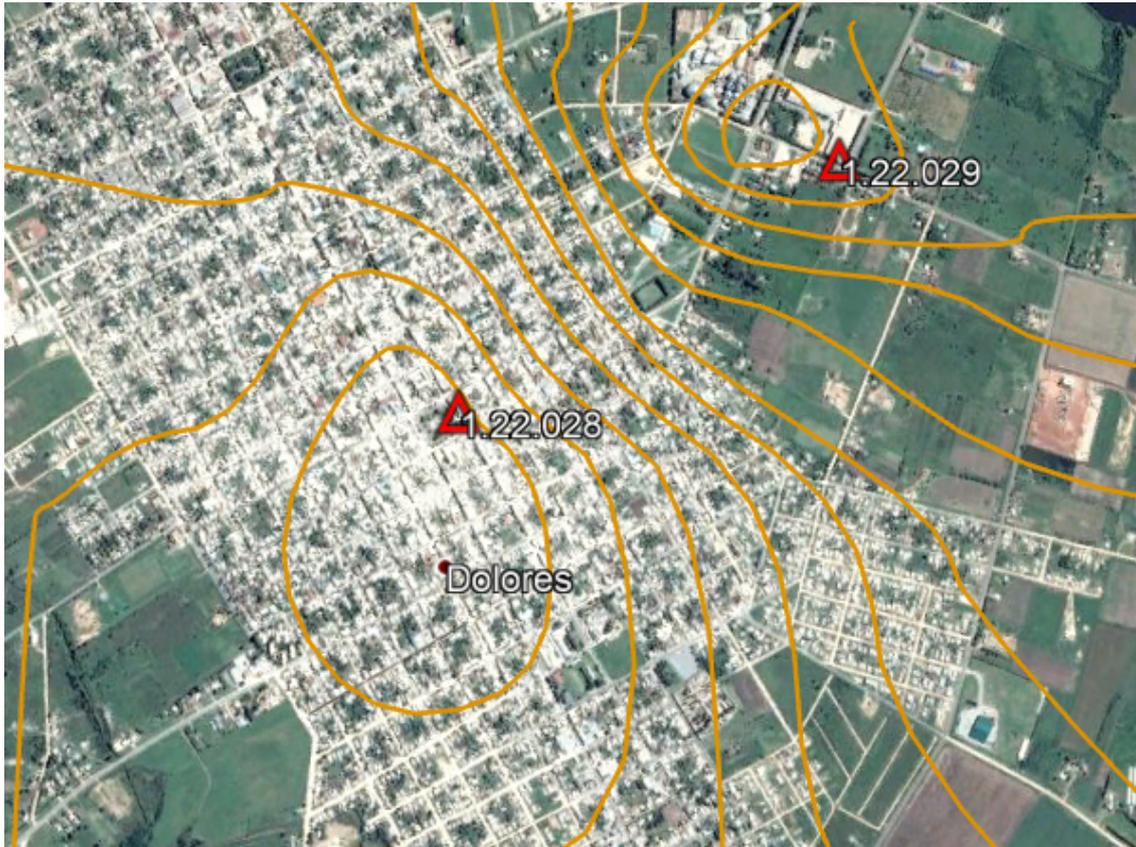


Figura 46 - Curvas de igual diferencia entre altura nivelada y altura ortométrica derivadas de los NG en Google Earth

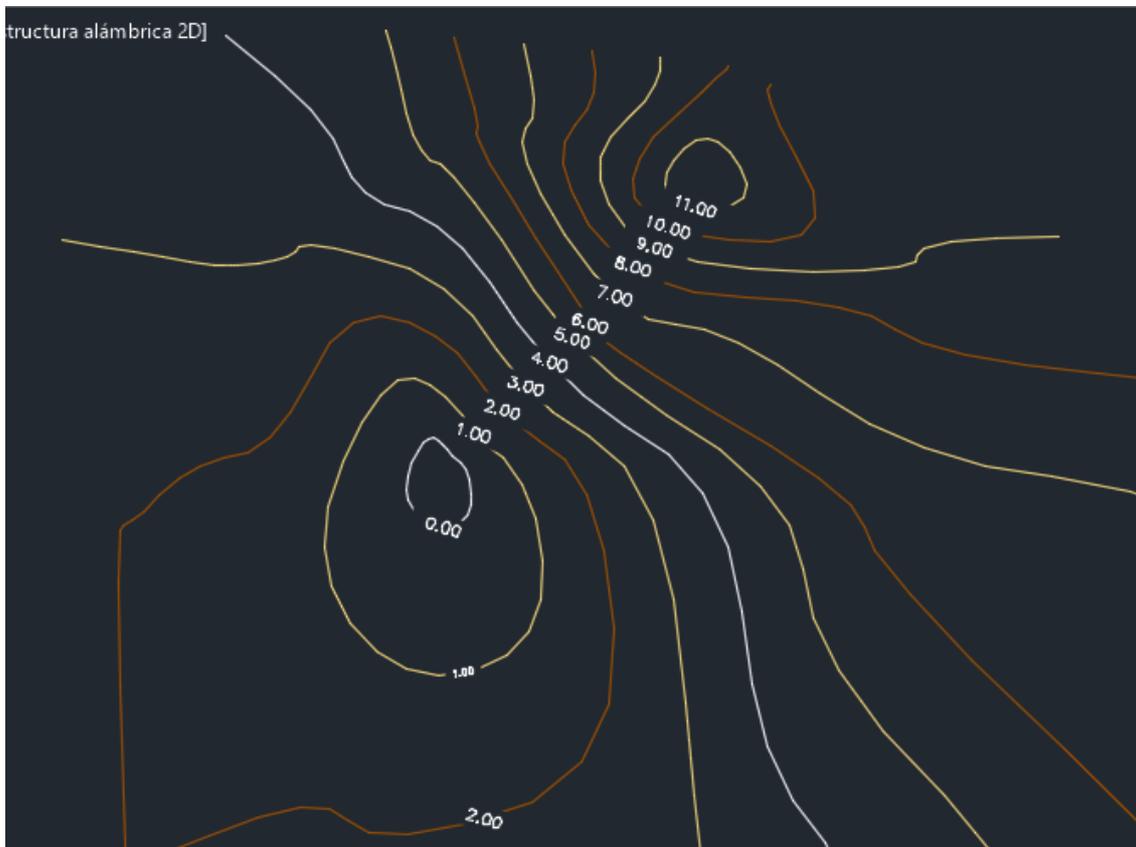


Figura 47 - Curvas de igual diferencia entre altura nivelada y altura ortométrica derivas de los NG en Topostudio, en mm

Como es sabido desde un principio, los datos de partida de la nivelación no son buenos, por lo tanto esto se transmite a los resultados numéricos de los análisis realizados.

El mayor valor arrojado por estas diferencias de altura en la Tabla 48 es de 1.1 cm, sin embargo no podemos concluir sobre la magnitud de la influencia de la gravedad, ya que se estudian diferencias en el entorno del milímetro, y los puntos de partida del SGM, además de como se dijo, tener una discrepancia entre ellos, están dados al centímetro en sus respectivas monografías, lo cual podría cambiar significativamente estos resultados.

7.3.4 Análisis Relativo entre Puntos de la Red y sus tipos de Altura

Para comenzar con el análisis relativo, se expone la siguiente tabla, en la cual se observa las diferentes alturas en metros de cada punto de la red, siendo éstas halladas a partir de:

- Nivelación Geométrica (H_{Niv})
- Interpolación de la Gravedad y Números Geopotenciales ($Hort_{NG}$)
- Modelo geoidal EGM08 ($Hort_{EGM08}$)

Punto	H_Niv	Hort_NG	Hort_EGM08
M1	4,466	4,462	4,523
M3	10,323	10,320	10,449
M5	19,757	19,757	19,921
M9	20,220	20,217	20,300
M14	14,273	14,267	14,352
M15	10,336	10,327	10,400
M16	10,198	10,186	10,229
M17	9,320	9,310	9,369
M18	7,799	7,793	7,859
M19	3,572	3,567	3,616
M21	12,657	12,651	12,769
M25	10,633	10,631	10,755
M26	9,088	9,086	9,197
M28	7,176	7,174	7,286
M29	10,463	10,461	10,543
M32	9,813	9,810	9,896
M33	9,171	9,168	9,253
M36	21,022	21,018	21,154
M37	14,260	14,254	14,361
M38	11,278	11,270	11,389
0.28	21,480	21,483	20,285
0.29	10,470	10,458	10,628

Tabla 49 - Diferentes tipos de alturas de los puntos de la red

Luego de obtener las cotas de cada punto mediante los métodos mencionados anteriormente, se calculará el desnivel de cada tramo. (Ver Tabla 50)

Para una mejor comprensión de lo mencionado previamente se explica la conformación de la siguiente tabla. La primer columna corresponde a cada tramo de la red, y las siguientes tres columnas corresponden a los desniveles hallados de cada tramo según el tipo de altura.

Tramo	Des_H (niv)	Des_Hort (NG)	Des_Hort (EGM08)
M33-M1	-4,705	-4,706	-4,730
M1-M3	5,858	5,858	5,926
M3-M32	-0,511	-0,510	-0,553
M32-M33	-0,642	-0,642	-0,643
M1-M19	-0,894	-0,895	-0,907
M19-M18	4,228	4,227	4,243
M18-M3	2,524	2,527	2,590
M3-M5	9,434	9,437	9,472
M5-M29	-9,294	-9,296	-9,378
M29-M32	-0,650	-0,651	-0,647
M18-M21	4,858	4,858	4,910
M21-M5	7,100	7,106	7,152
M18-M17	1,521	1,517	1,510
M17-M16	0,878	0,876	0,860
M16-M21	2,459	2,465	2,540
M28-M29	3,287	3,287	3,257
M29-M25	0,171	0,170	0,212
M25-M26	-1,545	-1,545	-1,558
M26-M28	-1,912	-1,912	-1,911
M5-M9	0,463	0,460	0,379
M9-M25	-9,587	-9,586	-9,545
M21-M14	1,616	1,616	1,583
M14-M9	5,947	5,951	5,948
M16-M15	0,138	0,141	0,171
M15-M14	3,937	3,940	3,952
M14-M37	-0,014	-0,013	0,009
M37-M36	6,762	6,764	6,793
M36-M25	-10,388	-10,387	-10,399
M15-M38	0,942	0,943	0,989
M38-M37	2,982	2,983	2,972
1.22.028-M5	-1,723	-1,725	-0,364
M16-1.22.029	0,272	0,272	0,399

Tabla 50 - Desniveles hallados utilizando diferentes tipos de alturas

Una vez hallados los mismos, se los comparará, uno a uno, realizando entonces un análisis relativo de los desniveles hallados, dicho estudio mostrará la diferencia de desniveles por cada uno de los métodos utilizados. (Ver Tabla 51)

Previamente se hace una explicación breve del significado de cada columna de la misma:

REFERENCIAS	
Columna 1	Diferencia entre los desniveles hallados por medio de alturas geométricas y alturas ortométricas a partir de NG
Columna 2	Diferencia entre los desniveles hallados por medio de alturas geométricas y ortométricas a partir del modelo geoideal EGM08
Columna 3	Diferencia entre los desniveles hallados por medio de alturas ortométricas a partir de NG y a partir del modelo geoideal EGM08

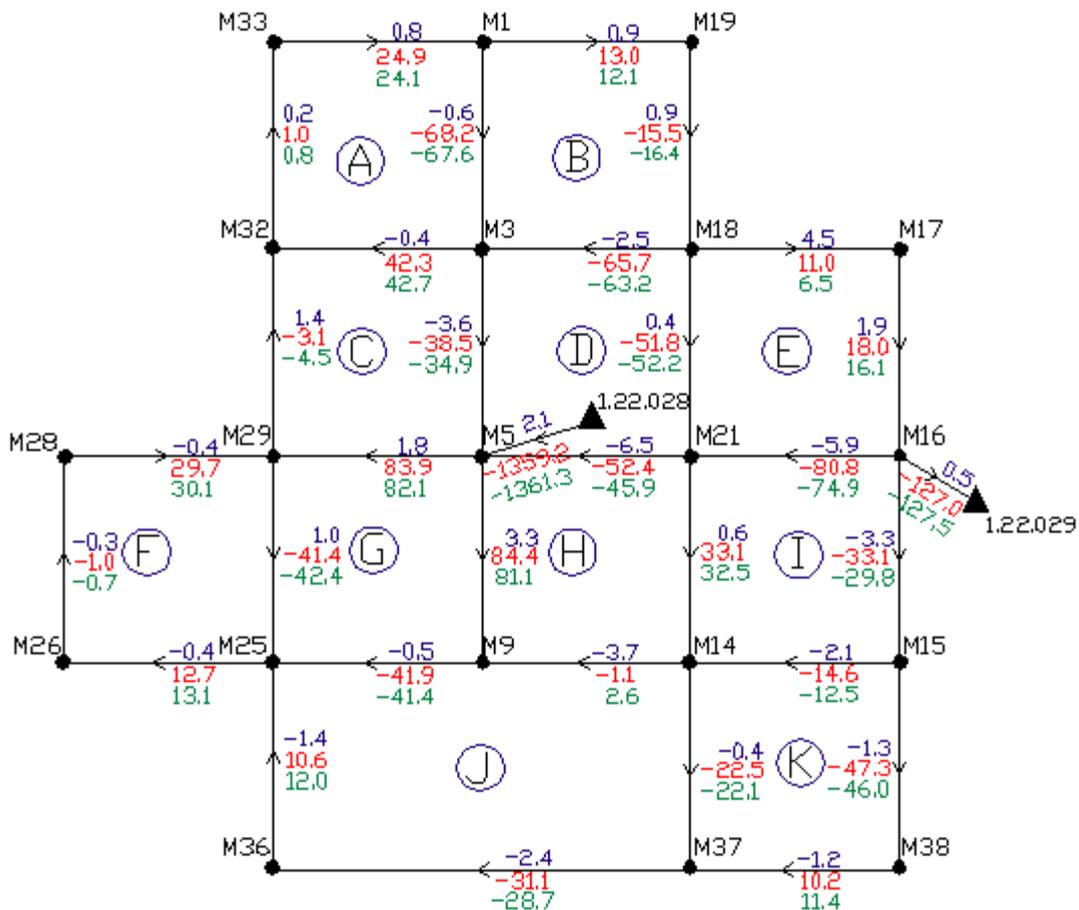
Tramo	1	2	3
M33-M1	0,8	24,9	24,1
M1-M3	-0,6	-68,2	-67,6
M3-M32	-0,4	42,3	42,7
M32-M33	0,2	1,0	0,8
M1-M19	0,9	13,0	12,1
M19-M18	0,9	-15,5	-16,4
M18-M3	-2,5	-65,7	-63,2
M3-M5	-3,6	-38,5	-34,9
M5-M29	1,8	83,9	82,1
M29-M32	1,4	-3,1	-4,5
M18-M21	0,4	-51,8	-52,2
M21-M5	-6,5	-52,4	-45,9
M18-M17	4,5	11,0	6,5
M17-M16	1,9	18,0	16,1
M16-M21	-5,9	-80,8	-74,9
M28-M29	-0,4	29,7	30,1
M29-M25	1,0	-41,4	-42,4
M25-M26	-0,4	12,7	13,1
M26-M28	-0,3	-1,0	-0,7
M5-M9	3,3	84,4	81,1
M9-M25	-0,5	-41,9	-41,4
M21-M14	0,6	33,1	32,5
M14-M9	-3,7	-1,1	2,6
M16-M15	-3,3	-33,1	-29,8
M15-M14	-2,1	-14,6	-12,5
M14-M37	-0,4	-22,5	-22,1
M37-M36	-2,4	-31,1	-28,7
M36-M25	-1,4	10,6	12,0
M15-M38	-1,3	-47,3	-46,0
M38-M37	-1,2	10,2	11,4
1.22.028-M5	2,1	-1359,2	-1361,3
M16-1.22.029	0,5	-127,0	-127,5

Tabla 51 - Diferencia de desniveles entre los tres tipos de altura

Los resultados de la primer columna evidencian que de forma relativa la diferencia de esas alturas son similares ($H_{niv} - H_{NG}$), los valores de las otras dos columnas son similares entre ellos y visiblemente mayores que la anterior. De la tercer columna podrían extraerse conclusiones sobre la tendencia en forma relativa del comportamiento del modelo geoidal EGM08 con respecto a la superficie de la zona ya que estoy comparando desniveles ortométricos.

Para visualizar el análisis de manera más práctica se realizó el siguiente esquema en el que se pueden ver las diferencias entre los distintos desniveles:

DIFERENCIA DE DESNIVELES



REFERENCIAS	
Des_H Niv - Des_H Ort (Grav) (columna 1)	Diferencia entre los desniveles hallados por medio de alturas geométricas y ortométricas a partir de NG
Des_H Niv - Des_H Ort (EGM08) (columna 2)	Diferencia entre los desniveles hallados por medio de alturas geométricas y ortométricas a partir del modelo geoidal EGM08
Des_H Ort (Grav) - Des_H Ort (EGM08) (columna 3)	Diferencia entre los desniveles hallados por medio de alturas ortométricas a partir de NG y del modelo geoidal EGM08

Figura 48 - Esquema de diferencia de desniveles entre los tres tipos de altura expresados en mm

8. Modelo de Transformación de Alturas

Tal como se dijo en el capítulo 2. Objetivo, el fin principal de este estudio consiste en generar un Modelo de Transformación de Alturas que permitiera obtener cotas referidas al datum oficial a partir de observaciones GNSS. Esto es posible debido a que se cuenta con doble dato para cada punto fijo de la red: por un lado la altura obtenida a partir de la nivelación geométrica, y por otro, la altura ortométrica a partir de los datos GNSS y el modelo geoidal EGM08.

El referido MTA es una superficie paramétrica que permite obtener la altura oficial, o cota, de un determinado punto, a partir de las coordenadas (φ, λ, h) obtenidas en campo mediante observaciones GNSS.

A continuación se procederá a describir el procedimiento por el cual se resuelve analíticamente esta función, además se evaluará la misma en cuanto a su precisión y a que tan bien se ajusta la función modelada, a los valores conocidos. Vale recordar que esta función ya fue resuelta gráficamente (*Ver Figuras 35 y 36*), en la misma se puede ver el comportamiento del valor $\Delta N = H_{of} - H_{ort}$

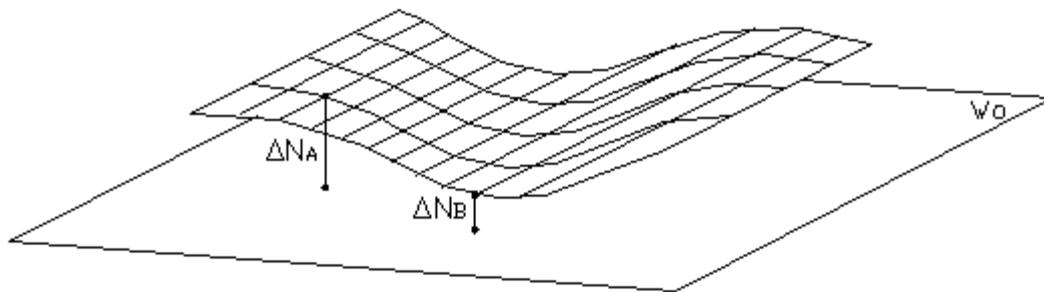


Figura 49 - Esquema de la modelación matemática de ΔN

8.1 Metodología

La altura elipsoidal (h) se expresa de la siguiente manera, siendo 1 un punto de la red:

$$h_1 = H_1 + N_1 \quad (34)$$

$$h_1 = H_{of1} + N_{of1} \quad (35)$$

En la ecuación anterior se toma como superficie equipotencial de la gravedad aquella que contiene el Datum Vertical del Uruguay. Por lo tanto, igualando las ecuaciones (34) y (35) obtenemos la siguiente ecuación:

$$H_1 + N_1 = H_{of1} + N_{of1} \quad (36)$$

Despejando H_{of1} se obtiene $H_{of1} = H_1 + (N_{EGM08} - N_{of1})$, entonces:

$$H_{of1} = H_{EGM08} + \Delta N \quad (37)$$

Finalmente se modelará matemáticamente ΔN , valor que conocemos para cada punto de la red ($\Delta N = H_{Of1} - H_{EGM08}$) (Ver Tabla 35). A partir de estos valores, se efectúa un modelamiento matemático, generando una función con la cual se podrá estimar dicho valor para todos los puntos de la zona en estudio. Entonces, partiendo de las coordenadas geodésicas (φ, λ, h) de un punto, se obtendrá la Altura Oficial del mismo.

Como se observa, la Altura Ortométrica se encuentra involucrada en el cálculo de ΔN . En este caso, a diferencia de todos los cálculos anteriores, no se utilizarán efemérides precisas, ya que no son las que se reciben en el momento del relevamiento, y el objetivo principal de resolver dicha función es que tenga fines prácticos. Por lo tanto, se utilizarán coordenadas obtenidas vía RADIO-RTK y a partir de ellas obtendremos una corrección que nos permitirá pasar de una altura ortométrica a una altura oficial, esta corrección es el denominado ΔN .

En cuanto a las alturas niveladas, se utilizarán aquellas resultantes del ajuste por mínimos cuadrados.

Respecto a la construcción de la función matemática, de acuerdo a Vergos G. S. y M. G. Sideris docentes de las Universidades de Tesalónica y Calgary respectivamente, con una muestra de datos de ΔN distribuida homogéneamente en una zona de estudio, es posible modelar dicha diferencia. Para el modelado, se pueden utilizar distintas funciones paramétricas:

1) Trigonométrica Clásica, 4 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 + X_2(\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3(\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4\text{sen}\varphi_i + v_i$$

2) Trigonométrica Clásica, 5 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 + X_2(\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3(\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4\text{sen}\varphi_i + X_5\text{sen}^2\varphi_i + v_i$$

3) Modelo de transformación de similitud diferencial, 6 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1(\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2(\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3\text{sen}\varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} \right) +$$

$$+ X_5 \left(\frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} \right) + X_6(a \times W_i + h_i) + v_i$$

4) Modelo de transformación de similitud diferencial, 7 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1(\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2(\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3\text{sen}\varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} \right) +$$

$$+ X_5 \left(\frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} \right) + X_6(a \times W_i + h_i) + X_7 \left(\frac{1-f^2 \times \text{sen}^2\varphi_i}{W_i} \right) + v_i$$

Donde a , e y f son el eje mayor, excentricidad y achatamiento, respectivamente, referidos al elipsoide $WGS84$ y $W_i = \sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 \varphi_i}$.

Deteniéndose por ejemplo en la función de 4 parámetros, si se consideran n puntos, se generarán n ecuaciones, por lo que se obtendrá un sistema lineal de n ecuaciones con 4 incógnitas. O sea que, si n es mayor a 4 el sistema es compatible indeterminado y su solución se halla por el método de mínimos cuadrados.

1) Trigonometría Clásica, 4 parámetros

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1 + X_2(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + X_3(\cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1) + X_4 \text{sen} \varphi_1 + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1 + X_2(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + X_3(\cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2) + X_4 \text{sen} \varphi_2 + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1 + X_2(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_3(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_4 \text{sen} \varphi_i + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1 + X_2(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + X_3(\cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n) + X_4 \text{sen} \varphi_n + v_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix} \\ f \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \text{sen} \lambda_1 & \text{sen} \varphi_1 \\ 1 & \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \cos \varphi_2 \text{sen} \lambda_2 & \text{sen} \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \text{sen} \lambda_i & \text{sen} \varphi_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \cos \varphi_n \text{sen} \lambda_n & \text{sen} \varphi_n \end{bmatrix} \\ A \end{matrix} * \begin{matrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} \\ \Delta \end{matrix} \Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$$

2) Trigonometría Clásica, 5 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1 + X_2(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + X_3(\cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1) + X_4 \text{sen} \varphi_1 + X_5 \text{sen}^2 \varphi_1 + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1 + X_2(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + X_3(\cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2) + X_4 \text{sen} \varphi_2 + X_5 \text{sen}^2 \varphi_2 + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1 + X_2(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_3(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_4 \text{sen} \varphi_i + X_5 \text{sen}^2 \varphi_i + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1 + X_2(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + X_3(\cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n) + X_4 \text{sen} \varphi_n + X_5 \text{sen}^2 \varphi_n + v_n \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \text{sen} \lambda_1 & \text{sen} \varphi_1 & \text{sen}^2 \varphi_1 \\ 1 & \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \cos \varphi_2 \text{sen} \lambda_2 & \text{sen} \varphi_2 & \text{sen}^2 \varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \text{sen} \lambda_i & \text{sen} \varphi_i & \text{sen}^2 \varphi_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \cos \varphi_n \text{sen} \lambda_n & \text{sen} \varphi_n & \text{sen}^2 \varphi_n \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$f \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad \Delta$

$$\Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$$

3) Modelo de transformación de similitud diferencial, 6 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + X_2(\cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1) + X_3 \text{sen} \varphi_1 + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \text{sen} \lambda_1}{W_1} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} \right) + X_6(aW_1 + h_1) + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + X_2(\cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2) + X_3 \text{sen} \varphi_2 + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \text{sen} \lambda_2}{W_2} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} \right) + X_6(aW_2 + h_2) + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + X_2(\cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i) + X_3 \text{sen} \varphi_i + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \text{sen} \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + X_6(aW_i + h_i) + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + X_2(\cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n) + X_3 \text{sen} \varphi_n + X_4 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \text{sen} \lambda_n}{W_n} \right) + X_5 \left(\frac{\text{sen} \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} \right) + X_6(aW_n + h_n) + v_n \end{aligned} \right\}$$

$$\underset{f}{\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \cos \varphi_1 \sin \lambda_1 & \sin \varphi_1 & \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \lambda_1}{W_1} & \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} & aW_1 + h_1 \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \cos \varphi_2 \sin \lambda_2 & \sin \varphi_2 & \frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2}{W_2} & \frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} & aW_2 + h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \cos \varphi_i \sin \lambda_i & \sin \varphi_i & \frac{\sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \lambda_i}{W_i} & \frac{\sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} & aW_i + h_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \cos \varphi_n \sin \lambda_n & \sin \varphi_n & \frac{\sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \sin \lambda_n}{W_n} & \frac{\sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} & aW_n + h_n \end{bmatrix}} \underset{\Delta}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$$

4) Modelo de transformación de similitud diferencial, 7 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1(\cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1) + \dots + X_4 \left(\frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \lambda_1}{W_1} \right) + X_5 \left(\frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} \right) + X_6(aW_1 + h_1) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_1} \right) + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1(\cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2) + \dots + X_4 \left(\frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2}{W_2} \right) + X_5 \left(\frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} \right) + X_6(aW_2 + h_2) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_2} \right) + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1(\cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i) + \dots + X_4 \left(\frac{\sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} \right) + X_6(aW_i + h_i) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_i} \right) + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1(\cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n) + \dots + X_4 \left(\frac{\sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \sin \lambda_n}{W_n} \right) + X_5 \left(\frac{\sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} \right) + X_6(aW_n + h_n) + X_7 \left(\frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_n} \right) + v_n \end{aligned} \right\} \\
 \underset{f}{\begin{bmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} \cos \varphi_1 \cos \lambda_1 & \dots & \dots & \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \sin \lambda_1}{W_1} & \frac{\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot \cos \lambda_1}{W_1} & aW_1 + h_1 & \frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_1} \\ \cos \varphi_2 \cos \lambda_2 & \dots & \dots & \frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \sin \lambda_2}{W_2} & \frac{\sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_2 \cdot \cos \lambda_2}{W_2} & aW_2 + h_2 & \frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_i \cos \lambda_i & \dots & \dots & \frac{\sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \sin \lambda_i}{W_i} & \frac{\sin \varphi_i \cdot \cos \varphi_i \cdot \cos \lambda_i}{W_i} & aW_i + h_i & \frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos \varphi_n \cos \lambda_n & \dots & \dots & \frac{\sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \sin \lambda_n}{W_n} & \frac{\sin \varphi_n \cdot \cos \varphi_n \cdot \cos \lambda_n}{W_n} & aW_n + h_n & \frac{1 - f^2 \cdot \sin^2 \varphi}{W_n} \end{bmatrix}} \underset{\Delta}{\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$$

La resolución de los sistemas expresados anteriormente es la siguiente, la cual se realizará en MatLab. Se agrega una captura de pantalla del mismo al Anexo.

$$\begin{aligned} A\Delta = f &\Rightarrow (A^T A)\Delta = A^T f \Rightarrow (A^T A)^{-1}(A^T A)\Delta = (A^T A)^{-1}A^T f \\ &\Rightarrow \Delta = (A^T A)^{-1}A^T f \end{aligned} \quad (38)$$

Una vez calculados los parámetros de cada tipo de función, se obtiene el valor de ΔN para todos los puntos de la superficie, con lo cual, partiendo de las coordenadas geodésicas de un punto y aplicando la ecuación $H_{Of1} = H_{EGM08} + \Delta N$, queda determinada la altura oficial de éste, referida al Datum Vertical del Uruguay.

8.2 Resultados

En esta sección se expondrán los resultados obtenidos luego de aplicar las funciones paramétricas descritas anteriormente a los puntos de la Red de Dolores, con el fin de modelar matemáticamente el denominado ΔN . Como se expuso en la sección anterior, para la construcción de la función son necesarias las coordenadas geodésicas de los puntos de la red, las cuales pueden consultarse en la Tabla 20, por lo tanto la función será del estilo $\Delta N = f(\varphi, \lambda)$.

Vale mencionar que esta función será construida a partir de una muestra de 17 de los 22 puntos fijos de la Red, debido a que se realizará una evaluación externa de la misma con esos 5 puntos restantes, denominados puntos testigo, con el fin de visualizar la proximidad entre los valores conocidos y los estimados por la función.

1) Trigonometría Clásica, 4 parámetros:

Nº punto	MATRIZ f (ΔN)	MATRIZ A			
		1	$\cos\varphi * \cos\lambda$	$\cos\varphi * \sen\lambda$	$\sen\varphi$
M17	-0.063	1.000	0.439228	-0.708607	-0.552228
M16	-0.047	1.000	0.439191	-0.708593	-0.552275
M14	-0.079	1.000	0.439232	-0.708469	-0.552402
M18	-0.072	1.000	0.439107	-0.708661	-0.552254
M3	-0.126	1.000	0.439029	-0.708681	-0.552290
M5	-0.164	1.000	0.439053	-0.708593	-0.552385
1.22.028	-0.138	1.000	0.439064	-0.708597	-0.552371
M29	-0.080	1.000	0.438968	-0.708611	-0.552428
M32	-0.083	1.000	0.438938	-0.708704	-0.552333
M33	-0.082	1.000	0.438926	-0.708736	-0.552303
M26	-0.116	1.000	0.438871	-0.708584	-0.552540
M21	-0.112	1.000	0.439136	-0.708576	-0.552340
M28	-0.110	1.000	0.438911	-0.708637	-0.552441
M38	-0.111	1.000	0.439477	-0.708322	-0.552395
M37	-0.101	1.000	0.439334	-0.708261	-0.552587
M36	-0.132	1.000	0.439002	-0.708328	-0.552765
M25	-0.122	1.000	0.438956	-0.708515	-0.552562

Tabla 52 - Datos para realizar el Ajuste en MatLab. (4 Parámetros)

MATRIZ Δ	
X1	180046.909
X2	-79022.165
X3	127526.808
X4	99545.692

Tabla 53 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste

A modo de ejemplo, recordando que la función de 4 parámetros es:

$$\Delta N_i = X_1 + X_2(\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3(\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4\text{sen}\varphi_i + v_i$$

y habiendo calculado éstos mediante el algoritmo descrito (Ver Tabla 54), la misma será la siguiente:

$$\Delta N = 1800046.909 - 79022.165(\cos\varphi.\cos\lambda) + 127526.808(\cos\varphi.\text{sen}\lambda) + 99545.692\text{sen}\varphi$$

2) Trigonométrica Clásica, 5 parámetros:

Nº punto	MATRIZ f (ΔN)	MATRIZ A				
		1	cosφ*cosλ	cosφ*senλ	sen φ	sen^2 (φ)
M17	-0.063	1	0.439228	-0.708607	-0.552228	0.304956
M16	-0.047	1	0.439191	-0.708593	-0.552275	0.305007
M14	-0.079	1	0.439232	-0.708469	-0.552402	0.305148
M18	-0.072	1	0.439107	-0.708661	-0.552254	0.304984
M3	-0.126	1	0.439029	-0.708681	-0.552290	0.305025
M5	-0.164	1	0.439053	-0.708593	-0.552385	0.305129
1.22.028	-0.138	1	0.439064	-0.708597	-0.552371	0.305113
M29	-0.08	1	0.438968	-0.708611	-0.552428	0.305177
M32	-0.083	1	0.438938	-0.708704	-0.552333	0.305072
M33	-0.082	1	0.438926	-0.708736	-0.552303	0.305038
M26	-0.116	1	0.438871	-0.708584	-0.552540	0.305301
M21	-0.112	1	0.439136	-0.708576	-0.552340	0.305079
M28	-0.11	1	0.438911	-0.708637	-0.552441	0.305191
M38	-0.111	1	0.439477	-0.708322	-0.552395	0.305140
M37	-0.101	1	0.439334	-0.708261	-0.552587	0.305353
M36	-0.132	1	0.439002	-0.708328	-0.552765	0.305549
M25	-0.122	1	0.438956	-0.708515	-0.552562	0.305324

Tabla 54 - Datos para realizar el algoritmo en MatLab. (5 Parámetros)

MATRIZ Δ	
X1	222494.9262
X2	-60049.80724
X3	96915.97405
X4	385750.1743
X5	280623.8997

Tabla 55 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste

3) Modelo de Transformación de similitud diferencial 6 parámetros:

Nº punto	MATRIZ f (ΔN)	MATRIZ A					
		$\cos\phi*\cos\lambda$	$\cos\phi*\sin\lambda$	$\sin\phi$	$(\sin\phi*\cos\phi*\sin\lambda)/W$	$(\sin\phi*\cos\phi*\cos\lambda)/W$	aW+h
M17	-0.063	0.439228	-0.708607	-0.552228	0.391712	-0.242802	6371649.678
M16	-0.047	0.439191	-0.708593	-0.552275	0.391738	-0.242802	6371649.435
M14	-0.079	0.439232	-0.708469	-0.552402	0.391760	-0.242881	6371650.532
M18	-0.072	0.439107	-0.708661	-0.552254	0.391761	-0.242746	6371647.560
M3	-0.126	0.439029	-0.708681	-0.552290	0.391798	-0.242719	6371649.272
M5	-0.164	0.439053	-0.708593	-0.552385	0.391816	-0.242774	6371656.512
1.22.028	-0.138	0.439064	-0.708597	-0.552371	0.391808	-0.242774	6371657.232
M29	-0.08	0.438968	-0.708611	-0.552428	0.391857	-0.242746	6371646.110
M32	-0.083	0.438938	-0.708704	-0.552333	0.391841	-0.242688	6371647.705
M33	-0.082	0.438926	-0.708736	-0.552303	0.391837	-0.242668	6371647.788
M26	-0.116	0.438871	-0.708584	-0.552540	0.391922	-0.242742	6371642.111
M21	-0.112	0.439136	-0.708576	-0.552340	0.391775	-0.242800	6371650.416
M28	-0.11	0.438911	-0.708637	-0.552441	0.391880	-0.242720	6371642.552
M38	-0.111	0.439477	-0.708322	-0.552395	0.391673	-0.243013	6371647.730
M37	-0.101	0.439334	-0.708261	-0.552587	0.391776	-0.243019	6371646.150
M36	-0.132	0.439002	-0.708328	-0.552765	0.391940	-0.242913	6371648.749
M25	-0.122	0.438956	-0.708515	-0.552562	0.391899	-0.242799	6371643.157

Tabla 56 - Datos para realizar el algoritmo en MatLab. (6 Parámetros)

MATRIZ Δ	
X1	9494.605383
X2	-84531.46325
X3	-203783.9255
X4	-311731.3447
X5	115561.9021
X6	-0.004149227

Tabla 57 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste

4) Modelo de Transformación de similitud diferencial 7 parámetros:

Nº punto	MATRIZ f (ΔN)	MATRIZ A						
		$\cos\phi*\cos\lambda$	$\cos\phi*\sin\lambda$	$\sin\phi$	$(\sin\phi*\cos\phi*\sin\lambda)/W$	$(\sin\phi*\cos\phi*\cos\lambda)/W$	aW+h	$(1-f^2*(\sin^2(\phi)))/W$
M17	-0.063	0.439228	-0.708607	-0.552228	0.391712	-0.242802	6371649.678	1.00102
M16	-0.047	0.439191	-0.708593	-0.552275	0.391738	-0.242802	6371649.435	1.00102
M14	-0.079	0.439232	-0.708469	-0.552402	0.391760	-0.242881	6371650.532	1.00102
M18	-0.072	0.439107	-0.708661	-0.552254	0.391761	-0.242746	6371647.560	1.00102
M3	-0.126	0.439029	-0.708681	-0.552290	0.391798	-0.242719	6371649.272	1.00102
M5	-0.164	0.439053	-0.708593	-0.552385	0.391816	-0.242774	6371656.512	1.00102
1.22.028	-0.138	0.439064	-0.708597	-0.552371	0.391808	-0.242774	6371657.232	1.00102
M29	-0.08	0.438968	-0.708611	-0.552428	0.391857	-0.242746	6371646.110	1.00102
M32	-0.083	0.438938	-0.708704	-0.552333	0.391841	-0.242688	6371647.705	1.00102
M33	-0.082	0.438926	-0.708736	-0.552303	0.391837	-0.242668	6371647.788	1.00102
M26	-0.116	0.438871	-0.708584	-0.552540	0.391922	-0.242742	6371642.111	1.00102
M21	-0.112	0.439136	-0.708576	-0.552340	0.391775	-0.242800	6371650.416	1.00102
M28	-0.11	0.438911	-0.708637	-0.552441	0.391880	-0.242720	6371642.552	1.00102
M38	-0.111	0.439477	-0.708322	-0.552395	0.391673	-0.243013	6371647.730	1.00102
M37	-0.101	0.439334	-0.708261	-0.552587	0.391776	-0.243019	6371646.150	1.00102
M36	-0.132	0.439002	-0.708328	-0.552765	0.391940	-0.242913	6371648.749	1.00102
M25	-0.122	0.438956	-0.708515	-0.552562	0.391899	-0.242799	6371643.157	1.00102

Tabla 58 - Datos para realizar el algoritmo en MatLab. (7 Parámetros)

MATRIZ Δ	
X1	104378.184
X2	-249918.991
X3	-388933.001
X4	-423084.812
X5	170780.911
X6	-0.0045244
X7	-201492.800

Tabla 59 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste

8.3 Evaluación y Análisis de los Resultados

En primer lugar se realizó una evaluación de cada una de las funciones halladas mediante los 17 puntos utilizados para su construcción. Puede considerarse redundante, ya que los mismos deberían verificar dicha función, sin embargo se desea analizar su consistencia interna.

Luego, tal como fue mencionado anteriormente, las funciones paramétricas calculadas de 4, 5, 6 y 7 parámetros, serán evaluadas en 5 puntos testigos seleccionados de la Red de Ajuste, los cuales como es sabido no participaron en el proceso de construcción. Dicha evaluación se realiza con el objetivo de validar en puntos ajenos a la función, su desempeño.

De la evaluación de las mismas en los puntos testigos y de la evaluación en los 17 puntos utilizados para la construcción, se determinará cuál de las funciones se aproxima mejor al ΔN obtenido de campo.

En cuanto a la selección de los puntos testigos, se buscó a priori que no fueran puntos extremistas¹³ con lo cual aseguramos la consistencia externa de la función, por otro lado, debido a un criterio geográfico, se buscó que la ubicación de los mismos fuera lo más homogénea posible. (Ver Figura 50)

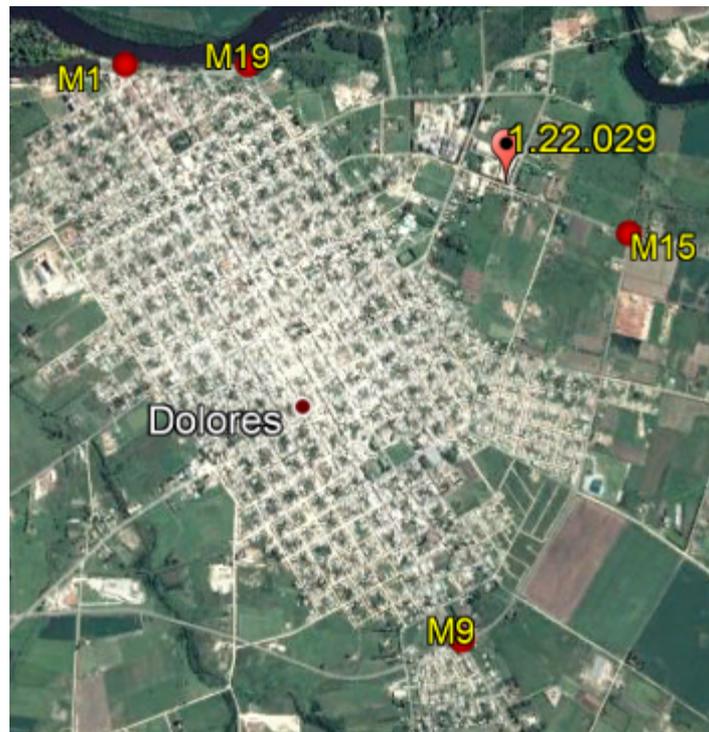


Figura 50 - Los 5 puntos testigos elegidos para evaluar las funciones

¹³ Puntos a mitad de tabla en cuanto a los resultados obtenidos de su evaluación en un MTA hallado con 22 puntos fijos en vez de 17.

8.3.1 Función Trigonométrica Clásica, 4 parámetros

La siguiente tabla muestra la diferencia entre el ΔN hallado a partir de los datos conocidos ($H_{Ort} - H_{niv}$) y el ΔN (denominado verificación en la tabla 60), que resulta de modelar ΔN mediante la función de 4 parámetros. La siguiente tabla expresa la diferencia en metros de estos dos tipos de ΔN :

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia
M17	-0.063	-0.066	0.003
M16	-0.047	-0.075	0.028
M14	-0.079	-0.090	0.011
M18	-0.072	-0.072	0.000
M3	-0.126	-0.077	-0.049
M5	-0.164	-0.091	-0.073
1.22.028	-0.138	-0.089	-0.049
M29	-0.080	-0.096	0.016
M32	-0.083	-0.081	-0.002
M33	-0.082	-0.076	-0.006
M26	-0.116	-0.106	-0.010
M21	-0.112	-0.085	-0.027
M28	-0.110	-0.096	-0.014
M38	-0.111	-0.072	-0.039
M37	-0.101	-0.099	-0.002
M36	-0.132	-0.122	-0.010
M25	-0.122	-0.110	-0.012

Tabla 60 - Evaluación de los 17 puntos en la función de 4 parámetros

En cuanto a los parámetros estadísticos de la diferencia que resulta de esta evaluación, se expresa lo siguiente:

Promedio: -0.014 m

Desviación Estándar: 0.024 m

Dados estos resultados, para mejorar la aproximación de la función a los puntos utilizados, se decide sumar al primer parámetro el promedio de estas diferencias, siendo este el valor -0.014, resultando el nuevo parámetro $X1'$:

MATRIZ Δ'	
$X1'$	180046.895
$X2$	-79022.165
$X3$	127526.808
$X4$	99545.692

Tabla 61 - Nuevos parámetros

Lo anterior es posible de realizar porque en la función de 4 parámetros, el primero de ellos es un término independiente, por ende una constante y puede corregirse el sesgo apreciado en el promedio. La evaluación con los nuevos parámetros resulta la siguiente:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia	Diferencia
M17	-0.063	-0.080	0.017	0.017
M16	-0.047	-0.088	0.041	0.041
M14	-0.079	-0.104	0.025	0.025
M18	-0.072	-0.086	0.014	0.014
M3	-0.126	-0.091	-0.035	0.035
M5	-0.164	-0.105	-0.059	0.059
1.22.028	-0.138	-0.103	-0.035	0.035
M29	-0.080	-0.110	0.030	0.030
M32	-0.083	-0.095	0.012	0.012
M33	-0.082	-0.090	0.008	0.008
M26	-0.116	-0.120	0.004	0.004
M21	-0.112	-0.099	-0.013	0.013
M28	-0.110	-0.110	0.000	0.000
M38	-0.111	-0.086	-0.025	0.025
M37	-0.101	-0.112	0.011	0.011
M36	-0.132	-0.135	0.003	0.003
M25	-0.122	-0.124	0.002	0.002

Tabla 62 - Evaluación de los 17 puntos en la función de los 4 parámetros nuevos, en metros

Nuevamente se calculan los parámetros estadísticos de la diferencia resultante:

Promedio: 0.000 m

Desviación Estándar: 0.026 m

Como puede observarse, el sesgo del promedio fue corregido. Posteriormente se recalculan los parámetros, pero ahora tomando en cuenta el valor absoluto de la diferencia, siendo el resultado el siguiente:

Promedio: 0.020 m

Desviación Estándar: 0.016 m

Lo anterior se realiza basándose en que el promedio de una serie que contiene valores positivos y negativos, podría ser cero debido a que estos valores se compensarán y sin embargo, su desviación estándar podría ser alta.

En nuestro caso es importante saber cuánto se alejan de la media los valores utilizados, por eso considerar el signo no es representativo y se procede a tomar el valor absoluto de las diferencias.

Finalmente se procede a realizar la evaluación de la función hallada con los 5 puntos testigos, con el fin de evaluar su comportamiento. A continuación la siguiente Tabla, la cual se interpreta de la misma manera que las anteriores:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia
1.22.029	-0.075	-0.074	-0.001
M15	-0.079	-0.077	-0.002
M19	-0.053	-0.064	0.011
M1	-0.076	-0.063	-0.013
M9	-0.111	-0.109	-0.002

Tabla 63 - Evaluación de los 5 puntos en la función de 4 parámetros, en metros

Promedio: -0.001 m

Desviación Estándar: 0.009 m

Como fue mencionado, uno de los parámetros calculados a priori fue recalculado, por lo cual se encontrarán nuevas diferencias entre el ΔN ($H_{Ort} - H_{niv}$) y el ΔN (verificación), modelado mediante la función:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia
1.22.029	-0.075	-0.088	0.013
M15	-0.079	-0.091	0.012
M19	-0.053	-0.078	0.025
M1	-0.076	-0.077	0.001
M9	-0.111	-0.123	0.012

Tabla 64 - Evaluación de los 5 puntos en la función de 4 parámetros nuevos, en metros

Por lo tanto los nuevos estadísticos son:

Promedio: 0.013 m

Desviación Estándar: 0.009 m

No se considerará el valor absoluto de la diferencia ya que los valores resultantes fueron todos positivos.

8.3.2 Función Trigonométrica Clásica, 5 parámetros

De forma análoga al procedimiento realizado para la función de 4 parámetros, se tratará las demás funciones, por lo que a continuación se muestra la diferencia entre el ΔN hallado a partir de los datos obtenidos en campo ($H_{Ort} - H_{niv}$) y el ΔN (verificación), el cual es modelado mediante la función de 5 parámetros hallada con los 17 puntos.

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia
M17	-0.063	-0.079	0.016
M16	-0.047	-0.093	0.046
M14	-0.079	-0.117	0.038
M18	-0.072	-0.088	0.016
M3	-0.126	-0.097	-0.029
M5	-0.164	-0.118	-0.046
1.22.028	-0.138	-0.115	-0.023
M29	-0.080	-0.124	0.044
M32	-0.083	-0.106	0.023
M33	-0.082	-0.098	0.016
M26	-0.116	-0.134	0.018
M21	-0.112	-0.109	-0.003
M28	-0.110	-0.125	0.015
M38	-0.111	-0.102	-0.009
M37	-0.101	-0.126	0.025
M36	-0.132	-0.129	-0.003
M25	-0.122	-0.137	0.015

Tabla 65 - Evaluación de los 17 puntos en la función de 5 parámetros, en metros

En cuanto a los parámetros estadísticos de la diferencia resultante de esta evaluación se expresa lo siguiente:

Promedio: 0.009 m

Desviación Estándar: 0.025 m

Tal como sucedió para la función de 4 parámetros, el primer término de esta función también es independiente, por lo cual es posible corregir el sesgo del promedio sumándole este valor (0.009) al parámetro X1 resultante del primer cálculo. Por lo tanto, los nuevos parámetros son los siguientes:

MATRIZ Δ'	
X1'	222494.935
X2	-60049.807
X3	96915.974
X4	385750.174
X5	280623.900

Tabla 66 - Nuevos parámetros

Por lo tanto la evaluación con los parámetros anteriores resulta la siguiente:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia	Diferencia
M17	-0.063	-0.070	0.007	0.007
M16	-0.047	-0.083	0.036	0.036
M14	-0.079	-0.108	0.029	0.029
M18	-0.072	-0.079	0.007	0.007
M3	-0.126	-0.088	-0.038	0.038
M5	-0.164	-0.108	-0.056	0.056
1.22.028	-0.138	-0.106	-0.032	0.032
M29	-0.080	-0.115	0.035	0.035
M32	-0.083	-0.097	0.014	0.014
M33	-0.082	-0.089	0.007	0.007
M26	-0.116	-0.125	0.009	0.009
M21	-0.112	-0.099	-0.013	0.013
M28	-0.110	-0.116	0.006	0.006
M38	-0.111	-0.092	-0.019	0.019
M37	-0.101	-0.116	0.015	0.015
M36	-0.132	-0.119	-0.013	0.013
M25	-0.122	-0.127	0.005	0.005

Tabla 67 - Evaluación de los 17 puntos en la función de 5 parámetros nuevos, en metros

Nuevamente se calculan los parámetros estadísticos de la diferencia resultante:

Promedio: 0.000 m

Desviación Estándar: 0.025 m

Posteriormente se recalculan los mismos, pero ahora tomando en cuenta el valor absoluto de la diferencia, el resultado es el siguiente:

Promedio: 0.020 m

Desviación Estándar: 0.015 m

Finalmente se procede a realizar la evaluación de la función hallada con los 5 puntos testigo:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia
1.22.029	-0.075	-0.093	0.018
M15	-0.079	-0.099	0.020
M19	-0.053	-0.076	0.023
M1	-0.076	-0.076	0.000
M9	-0.111	-0.135	0.024

Tabla 68 - Evaluación de los 5 puntos en la función de 5 parámetros, en metros

Promedio: 0.017 m

Desviación Estándar: 0.010 m

Como fue mencionado, uno de los parámetros calculados a priori fue recalculado por lo cual se encontrarán nuevas diferencias entre el $\Delta N (H_{Ort} - H_{niv})$ y el $\Delta N (verificación)$ modelado mediante la función:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia	Diferencia
1.22.029	-0.075	-0.083	0.008	0.008
M15	-0.079	-0.090	0.011	0.011
M19	-0.053	-0.066	0.013	0.013
M1	-0.076	-0.066	-0.010	0.010
M9	-0.111	-0.126	0.015	0.015

Tabla 69 - Evaluación de los 5 puntos en la función de 5 parámetros nuevos, en metros

Por lo tanto los nuevos estadísticos son:

Promedio: 0.008 m

Desviación Estándar: 0.010 m

Como puede observarse, la diferencia posee un valor negativo por lo tanto como se dijo, es de interés en este estudio evaluar la separación de los valores respecto a un valor medio, por lo tanto se tomará en cuenta el valor absoluto de esa diferencia:

Promedio: 0.012 m

Desviación Estándar: 0.003 m

8.3.3 Modelo de Transformación de similitud diferencial, 6 parámetros

A continuación, nuevamente la diferencia entre el $\Delta N (H_{Ort} - H_{niv})$ y el $\Delta N (verificación)$, modelado mediante la función de 6 parámetros hallada con los 17 puntos.

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia	Diferencia
M17	-0.063	-0.068	0.005	0.005
M16	-0.047	-0.081	0.034	0.034
M14	-0.079	-0.082	0.007	0.007
M18	-0.072	-0.083	0.004	0.004
M3	-0.126	-0.110	0.031	0.031
M5	-0.164	-0.069	-0.003	0.003
1.22.028	-0.138	-0.043	-0.010	0.010
M29	-0.080	-0.047	-0.029	0.029
M32	-0.083	-0.087	-0.039	0.039
M33	-0.082	-0.139	-0.025	0.025
M26	-0.116	-0.139	0.001	0.001
M21	-0.112	-0.147	0.036	0.036
M28	-0.110	-0.106	0.026	0.026
M38	-0.111	-0.092	0.009	0.009
M37	-0.101	-0.084	0.002	0.002
M36	-0.132	-0.107	-0.009	0.009
M25	-0.122	-0.102	-0.010	0.010

Tabla 70 - Evaluación de los 17 puntos en la función de 6 parámetros, en metros

En cuanto a los parámetros estadísticos de la diferencia resultante de esta evaluación se expresa lo siguiente:

Promedio: 0.002 m

Desviación Estándar: 0.022 m

Posteriormente se recalculan los mismos, pero ahora tomando en cuenta el valor absoluto de la diferencia, el resultado es el siguiente:

Promedio: 0.016 m

Desviación Estándar: 0.014 m

Se recuerda que la función de 6 parámetros no posee términos independientes por lo tanto no es posible recalcular parámetros con el fin de corregir algún sesgo.

Finalmente se procede a realizar la evaluación de la función hallada con los 5 puntos testigo, a continuación la siguiente tabla:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia	Diferencia
1.22.029	-0.075	-0.094	-0.016	0.016
M15	-0.079	-0.079	-0.032	0.032
M19	-0.053	-0.102	0.001	0.001
M1	-0.076	-0.138	0.006	0.006
M9	-0.111	-0.112	-0.010	0.010

Tabla 71 - Evaluación de los 5 puntos en la función de 6 parámetros

Promedio: -0.01 m

Desviación Estándar: 0.015 m

Dado que la diferencia posee algunos valores negativos, se toma el valor absoluto:

Promedio: 0.013 m

Desviación Estándar: 0.012 m

8.3.4 Modelo de Transformación de similitud diferencial, 7 parámetros

Finalmente se expone la diferencia entre el $\Delta N (H_{Ort} - H_{niv})$ y el $\Delta N (verificación)$, modelado en este caso mediante la función de 7 parámetros hallada con los 17 puntos.

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia	Diferencia
M17	-0.063	-0.040	-0.023	0.023
M16	-0.047	-0.052	0.005	0.005
M14	-0.079	-0.082	0.003	0.003
M18	-0.072	-0.041	-0.031	0.031
M3	-0.126	-0.061	-0.065	0.065
M5	-0.164	-0.114	-0.050	0.050
1.22.028	-0.138	-0.114	-0.024	0.024
M29	-0.080	-0.079	-0.001	0.001
M32	-0.083	-0.068	-0.015	0.015
M33	-0.082	-0.062	-0.020	0.020
M26	-0.116	-0.083	-0.033	0.033
M21	-0.112	-0.073	-0.039	0.039
M28	-0.110	-0.068	-0.042	0.042
M38	-0.111	-0.059	-0.052	0.052
M37	-0.101	-0.077	-0.024	0.024
M36	-0.132	-0.111	-0.021	0.021
M25	-0.122	-0.084	-0.038	0.038

Tabla 72 - Evaluación de los 17 puntos en la función de 7 parámetros

En cuanto a los parámetros estadísticos de la diferencia resultante de esta evaluación se expresa lo siguiente:

Promedio: -0.028 m

Desviación Estándar: 0.019 m

Posteriormente se recalculan los mismos, pero ahora tomando en cuenta el valor absoluto de la diferencia, el resultado es el siguiente:

Promedio: 0.029 m

Desviación Estándar: 0.018 m

Finalmente se procede a realizar la evaluación de la función hallada con los 5 puntos testigo:

Punto	ΔN	Verificación	Diferencia	Diferencia
1.22.029	-0.075	-0.054	-0.021	0.021
M15	-0.079	-0.055	-0.024	0.024
M19	-0.053	-0.015	-0.038	0.038
M1	-0.076	-0.022	-0.054	0.054
M9	-0.111	-0.119	0.008	0.008

Tabla 73 - Evaluación de los 5 puntos en la función de 7 parámetros

Promedio: -0.026 m

Desviación Estándar: 0.023 m

Posteriormente se recalculan los mismos, pero ahora tomando en cuenta el valor absoluto de la diferencia, el resultado es el siguiente:

Promedio: 0.029 m

Desviación Estándar: 0.018 m

8. 4 Comparación de los Resultados

El objetivo de esta sección es hacer una síntesis de los resultados obtenidos anteriormente y obtener una conclusión con respecto a cuál de las funciones de transformación halladas es la más conveniente para modelar ΔN .

Como fue mencionado anteriormente, la elección de una determinada función dependerá por un lado de los estadísticos resultantes de evaluar los 17 puntos en las funciones de 4, 5, 6 y 7 parámetros respectivamente, y por otro de la evaluación de los 5 puntos testigo en las mismas. Ambos resultados están estrechamente relacionados por lo que es esperable que los estadísticos calculados sean similares.

A priori se maneja la hipótesis de que cuantos más parámetros tenga una función, mejores serán los resultados.

La siguiente tabla expresa de acuerdo a la cantidad de parámetros de una función, los estadísticos resultantes (Promedio y Desviación Estándar) de las evaluaciones de 17 y 5 puntos respectivamente, los mismos se encuentran expresados en metros:

Nº	Parámetros							
	4		5		6		7	
Verificación	17	5	17	5	17	5	17	5
PROM.	0.020	0.013	0.020	0.012	0.016	0.013	0.029	0.029
DESV.	0.016	0.009	0.015	0.003	0.014	0.012	0.018	0.018

Tabla 74 - Cuadro Comparativo de los Resultados

Como puede observarse, la **Función de Transformación de Similitud Diferencial de 6 parámetros** es la que arroja los mejores resultados teniendo en cuenta ambas evaluaciones. A continuación se muestra la función expresada matemáticamente y los valores obtenidos:

$$\Delta N_i = X_1(\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2(\cos\varphi_i \times \sen\lambda_i) + X_3\sen\varphi_i + X_4 \left(\frac{\sen\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \sen\lambda_i}{W_i} \right) + X_5 \left(\frac{\sen\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} \right) + X_6(a \times W_i + h_i) + v_i$$

Nº de Puntos	Promedio	Desviación Estándar
17	0.016	0.014
5	0.013	0.012

Tabla 75 - Estadísticos de la función de 6 parámetros

9. Conclusiones

9.1 Conclusiones Generales

El proyecto de grado es considerado como el trabajo final del proceso de formación del estudiante terciario y su elaboración se da dentro del marco de conocimientos que le fueron impartidos a lo largo de la carrera. El objetivo del mismo es que sea una síntesis de los conocimientos integrados en esta etapa, bajo ese contexto, se considera que el objetivo ha sido cumplido satisfactoriamente ya que el presente trabajo aborda y aplica diversas áreas estudiadas a lo largo de la carrera como son: Topografía, Geodesia, en especial Geodesia Física, y Teoría de Errores. Se considera que los conocimientos adquiridos en esas áreas han sido asentados y hasta podría decirse, ampliados.

Por otra parte, se logró obtener nociones sobre futuros trabajos a desempeñar como futuros Ingenieros Agrimensores, enfrentándonos a desafíos propios de la actividad profesional.

Se concluye que la relevancia del presente trabajo radica en la metodología empleada para la prosecución de los objetivos principales, no así en los resultados obtenidos debido a la discrepancia entre los puntos fijos, y a la poca calidad en los datos de partida los cuales se transmitieron a los resultados, por lo cual, sin temor a ser redundantes, este estudio puede ser aplicable a cualquier parte del territorio Nacional incluso del exterior, ya que la metodología empleada fue la correcta. Incluso puede servir de base a futuros estudios académicos en la zona.

9.2 Sobre la Actividad de Extensión

Como es sabido, el presente estudio se realizó a raíz de una actividad de extensión planteada por el Instituto de Agrimensura, llevada a cabo en la Ciudad de Dolores, la cual permitió la integración entre estudiantes de diferentes generaciones y el equipo Docente. Las actividades desarrolladas durante el Campamento de Estudios estuvieron estrechamente relacionadas con la actividad profesional, como por ejemplo en la planificación y ejecución de las mismas.

La extensión busca ser un proceso educativo transformador donde ocurra un intercambio horizontal entre docentes, estudiantes y actores sociales enfocado en resolver problemáticas de la sociedad. En esa línea se considera que el trabajo realizado en Dolores fue ampliamente aceptable, habiendo culminado de forma satisfactoria las tareas planteadas durante la permanencia en la ciudad, habiéndose producido dicho intercambio y aportado en la resolución de alguna de las problemáticas que aqueja esa ciudad.

Se considera que el presente estudio fue desarrollado de tal manera que los objetivos planteados se lograron de forma satisfactoria, por lo que no solo fueron cumplidos los objetivos durante la estadía en Dolores, sino que las tareas asignadas al Departamento de Geodesia fueron también satisfactoriamente resueltas, habiéndose alcanzado el objetivo principal: Realizar las monografías de los puntos colocados por la IS.

Las mismas fueron realizadas tomando como cota oficial aquella obtenida de la nivelación geométrica y luego de haber aplicado AMC+M. Consideramos fue lo correcto para cumplir con los plazos estipulados, sin embargo, teniendo presente que luego se calcularon las cotas a partir de los NG, consideramos que éstas serían las más adecuadas de publicar, las mismas pueden consultarse en la Tabla 33.

9.3 Sobre Datos Obtenidos

En cuanto a los datos obtenidos a partir de la nivelación, como fue demostrado en la sección 6.1.2 se concluye que la nivelación no fue favorable, incluso tres circuitos no cumplen ni siquiera con los mínimos exigibles para pertenecer al orden Topográfico (el menos estricto) (Tabla 15). Por lo tanto, desde un principio se contó, además de con datos de partida que no fueron buenos, con discrepancias entre los puntos fijos del SGM que no pudieron ser resueltas y por lo tanto condicionó todos los análisis realizados. De lo anterior se concluye y enfatiza que la relevancia del presente trabajo radica en la metodología empleada y no en los valores numéricos obtenidos.

Es de destacar que según los análisis realizados se concluye que para obtener mayores precisiones en la nivelación no era necesario utilizar un mejor instrumental, sino realizar una mejor planificación de las tareas y metodología de trabajo. Para este cometido hubiera sido útil realizar tramos más cortos, y pasar menos horas en campo, de todas maneras cabe recordar que la nivelación fue realizada por estudiantes de todas las generaciones en el marco de una actividad de extensión.

Lo que respecta a la toma de datos con tecnologías GNSS, se consideran aceptables en cuanto a su precisión, sin embargo se realizarán algunas sugerencias para futuros trabajos en cuanto a la metodología empleada en el relevamiento. Por ejemplo, las mediciones en Tiempo Real sean repetidas en épocas distintas, con el fin de contar con diferentes configuraciones de los satélites, o sea, que se modifique su geometría y así poder minimizar los efectos del multicamino.

Finalmente tal como fue expresado en la sección 6.3, los datos de gravedad utilizados durante este estudio fueron obtenidos a partir de interpolaciones. Éstas se basan en interpolaciones de Anomalías de Bouguer, ya que resultan más eficaces a la hora de predecir valores de gravedad, por lo tanto fue utilizado el mapa de Anomalías de Bouguer, en el cual puede observarse que los valores interpolados de la gravedad de menor precisión (14 mGal) se encuentran al este del país, exonerando por lo tanto a nuestra zona de estudio.

De todas maneras en las mencionadas interpolaciones la precisión no es muy relevante debido a que la precisión de la gravedad para puntos próximos a la superficie del geoide no es un elemento determinante.

9.4 Sobre Resultados Obtenidos luego de los Análisis

9.4.1 Nivelación

Se realizó un análisis de la desviación estándar de las cotas ajustadas mediante el AMC+M, éste fue realizado gráficamente, efectuando curvas de iso-error. Como puede observarse en la Figura 34, cuanto más alejado de los puntos del SGM se encuentren los puntos de la red, mayor desviación estándar tendrán, algo que es razonable debido a que cuanto más distancia es recorrida en una nivelación, mayor será la acumulación de los errores.

Seguidamente se realizó un análisis absoluto de los puntos de la red, que implicó evaluar en un mismo punto la diferencia entre la altura nivelada y la altura ortométrica derivada del modelo geoidal EGM08. La diferencia calculada no fue constante, dichos resultados fueron graficados y como era de esperar, se tuvo como resultado un comportamiento no aleatorio debido a que faltaría involucrar la componente gravimétrica en la cual radica la diferencia entre estos dos tipos de altura. (Ver Figura 36).

También se realizó un análisis absoluto sobre puntos fijos del SGM con el fin de observar que tan compatible resulta el modelo geoidal con la superficie a la que están referidas las alturas en Uruguay. Como puede observarse en la Tabla 36 no se visualiza ningún comportamiento notorio.

Por último, se realizó un análisis relativo entre los puntos fijos del SGM, que implicó evaluar la diferencia de Altura Oficial y Altura Ortométrica derivada del EGM08 entre dos puntos. Como puede observarse en la Tabla 40, el punto ADOL presenta las mayores diferencias, y coincide con el punto más alejado de los puntos fijos de la red 1.22.028 y 1.22.029, sin embargo se desconoce el motivo de estas diferencias.

9.4.2 GNSS

Se comenzó por estudiar la Ondulación del Geoide con el fin de verificar que no hubiera discontinuidades del modelo en la zona o algún cambio brusco que entorpeciera los estudios. Se graficó N en función de las coordenadas planas de todos los puntos tomados vía RADIO-RTK (Ver Tabla 41). En la Figura 38 puede observarse que no se muestran imperfecciones, el N varía 1 cm aproximadamente cada 1.5 km y en la zona de Dolores N es de aproximadamente 17.06 m.

Por último se realizó un análisis absoluto sobre los puntos de la red tomados vía NTRIP-RTK Y RADIO-RTK, con el fin de observar la bondad entre los métodos. Se realizó un análisis estadístico de estas diferencias el cual se puede observar en la Tabla 44, como resultado se observa que son similares las diferencias entre los puntos en cuanto a la Altura Ortométrica y la Coordenada Este, sin embargo se encuentra una discrepancia significativa en la coordenada Norte. Observando las diferencias entre los puntos, y la localización de los mismos (Figura 39), a priori no se pueden extraer conclusiones concretas sobre los resultados obtenidos. Finalmente se graficaron estas diferencias, las cuales denotan un comportamiento no aleatorio. (Ver Figura 41)

9.4.3 Gravedad

Se comenzó por hacer una comparación entre los valores de los cierres de los circuitos obtenidos de la nivelación geométrica y aquellos derivados de los NG, como puede observarse en la Tabla 45 los valores resultaron iguales hasta por lo menos el milímetro, lo que permitió concluir que si existe alguna influencia de la gravedad en la zona de estudio ésta sería uniforme, no dispar.

Se continuó con analizar las desviaciones estándar en los NG ajustados mediante AMC+M, se hizo un análisis gráfico basándose en la Tabla 46 mediante curvas de iso-error, con el fin de observar su comportamiento a lo largo de la zona de estudio. En la Figura 43 puede apreciarse que a medida que un punto se aleja de los puntos fijos del SGM 1.22.028 y 1.22.029, el error en el NG se va acumulando.

Luego se realizó un análisis absoluto sobre los puntos de la red a partir de las alturas ortométricas derivadas de los NG y del modelo geoidal EGM08. Las diferencias entre estas alturas no son constante (Tabla 47), por lo tanto las superficies a la que refieren dichas alturas no son paralelas. También fue realizado un análisis gráfico de estas diferencias, las curvas obtenidas no poseen un comportamiento aleatorio (Figura 45), sin embargo no pueden extraerse más conclusiones al respecto ya que como ha sido mencionado, los errores que poseen los puntos fijos del SGM se transmitieron a todos los análisis realizados, como ejemplo, el tramo que involucra al punto 1.22.028 arroja una diferencia mayor a un metro.

A continuación se realizó un análisis absoluto a partir de las alturas obtenidas de la nivelación y aquellas derivadas de los NG. En este caso la mayor diferencia la arrojó el punto M16 con 1 cm de diferencia, mientras que en la mayoría de los puntos restantes las diferencias estuvieron por debajo del $\frac{1}{2}$ cm. (Ver Tabla 49), sin embargo no podemos concluir sobre la magnitud de la influencia de la gravedad ya que se estudian diferencias en el entorno del milímetro y los puntos de partida utilizados del SGM se publican al centímetro en sus respectivas monografías lo cual podría cambiar significativamente estos resultados.

Por último se realizó un análisis relativo entre los desniveles de cada tramo de la red, en el cual se contó con tres tipos de alturas (Ver Tabla 51), alturas obtenidas de la nivelación geométrica, alturas derivadas de los NG (ambas ajustadas mediante AMC+M) y por último las alturas obtenidas a partir del modelo geoidal EGM08.

Puede observarse que las diferencias halladas entre los desniveles de las alturas niveladas y ortométricas del EGM08 son similares a las diferencias halladas entre los desniveles de las alturas derivadas de los NG y ortométricas del EGM08, de éstas últimas podrían extraerse conclusiones sobre la tendencia en forma relativa del modelo geoidal EGM08 con respecto a la superficie de la zona por estar comparando desniveles geométricos. Por otro lado las diferencias halladas entre los desniveles de las alturas niveladas y aquellas obtenidas a partir de los NG son significativamente menores a las anteriores y muy similares en forma relativa, algo que era esperable ya que se lo observó en el análisis absoluto entre estos dos tipos de altura (Tabla 48).

9.4.4 Modelo de Transformación de Alturas

El objetivo principal del presente estudio fue construir una función matemática que permitiera modelar la diferencia entre la Altura Oficial y la Altura Ortométrica (EGM08) de todos los puntos de la red (Ver Figura 49). Se realizaron funciones de 4, 5, 6 y 7 parámetros con el fin de optar por aquella que mejor represente esa diferencia.

La función en cuestión, $\Delta N = f(\varphi, \lambda)$ da una estimación del valor de ΔN para todos los puntos de la zona en estudio, lo cual permite obtener la altura oficial de un punto, a partir de sus coordenadas (φ, λ, h) , obtenidas en campo mediante tecnologías GNSS.

Se realizó un análisis de las 4 funciones calculadas, en primera instancia mediante la evaluación en cada función, de los puntos utilizados para su construcción con el fin de observar la consistencia interna de las funciones y luego mediante la evaluación de los puntos testigos para visualizar el desempeño de puntos ajenos a las mismas. De los resultados obtenidos en ambas evaluaciones resultó la función que mejor configura esas diferencias.

Finalmente, la función paramétrica que mejor modela ΔN es la correspondiente a la de 6 parámetros, lo cual refuta la hipótesis inicial sobre que la función con mejor desempeño sería aquella con mayor cantidad de parámetros. Esa función es la que arroja los resultados estadísticos más aceptables y coherentes entre sí.

10. Tabla de Cuadros e Ilustraciones

Figura 1 - Representación del geoide	7
Figura 2 - Representación del elipsoide	8
Figura 3 - Esquema de alturas	9
Figura 4 - Desviación relativa de la vertical	10
Figura 5 - Representación del cero oficial	12
Figura 6 - Nivelación geométrica compuesta	13
Figura 7 - Número Geopotencial (C)	20
Figura 8 - Anomalía de la gravedad (Δ_g)	22
Figura 9 - Reducción de Bouguer	23
Figura 10 - PF colocados por la Intendencia de Soriano	25
Figura 11 - PF del SGM en Dolores	26
Figura 12 - Nivelación doble simultánea	28
Figura 13 - Relevamiento segundo día	35
Figura 14 - Procesamiento en gabinete durante el campamento	36
Figura 15 - Relevamiento con tecnología GNSS vía RADIO-RTK	37
Figura 16 - Nivelación doble simultánea entre puntos excéntricos y puntos del SGM	37
Figura 17 - Red altimétrica Original	39
Figura 18 - Red altimétrica definitiva	40
Figura 19 - Tramo nivelado en la segunda ida a Dolores	44
Figura 20 - Instrumental llevado a Dolores	45
Figura 21 - Segunda ida a Dolores	46
Figura 22 - Leica Geo Office. Cálculo de los vectores desde la estación permanente UYSO a la base	51
Figura 23 - Vectores determinados luego del post proceso	52
Figura 24 - Leica Geo Office. Propiedades del trabajo	52
Figura 25 - Interpolación de valores de Gravedad en todo el País	58
Figura 26 - Mapa de Anomalía de Bouguer para Uruguay y ubicación de los valores interpolados con menor precisión	59
Figura 27 - Puntos de gravedad conocida utilizados para interpolación de la gravedad	60
Figura 28 - Pantalla de inicio PredGrav	60

Figura 29 - Pantalla de inicio PredGrav	61
Figura 30 - Ejemplo de Red en términos de dC	63
Figura 31 - Red de ajuste en términos de Números Geopotenciales	64
Figura 32 - Ejemplo de Red en términos de dC	68
Figura 33: Curvas de iso-error en Dolores. Google Earth	77
Figura 34: Curvas de iso-error en Dolores. TopoStudio, expresadas en milímetros	78
Figura 35: Curvas de iso-diferencia en Dolores. Google Earth	80
Figura 36: Curvas de iso-diferencia en Dolores. TopoStudio	81
Figura 37: Curvas iso-ondulación geoidal en Dolores. Google Earth	86
Figura 38: Curvas iso-ondulación geoidal en Dolores. TopoStudio	86
Figura 39 - Ubicación de los puntos que se analizaron	89
Figura 40 - Diferencia de alturas ortométricas RADIO-RTK - NTRIP-RTK .Google Earth	90
Figura 41: Gráfica de diferencia de Alturas Ortométricas NTRIP-RTK	91
Figura 42 - Curvas de Iso error en NG. Google Earth	94
Figura 43 - Curvas de iso desviación estándar de los NG. TopoStudio	95
Figura 44 - Curvas de igual diferencia entre alturas ortométricas. Google Earth	97
Figura 45 - Curvas de igual diferencia entre alturas ortométricas. Topostudio	98
Figura 46 - Curvas de igual diferencia entre altura nivelada y altura ortométrica derivadas de los NG. Google Earth	100
Figura 47 - Curvas de igual diferencia entre altura nivelada y altura ortométrica derivadas de los NG, en mm. Topostudio	101
Figura 48 - Esquema de diferencia de desniveles entre los tres tipos de altura	105
Figura 49 - Esquema de la modelación matemática de ΔN	106
Figura 50 - Los 5 puntos testigos elegidos para evaluar las funciones	116

Tabla 1 - Distancias de los circuitos cerrados	27
Tabla 2 - Tolerancias para cada circuito	30
Tabla 3 - Cálculos de Tolerancia por circuito	31
Tabla 4 - Nodos eliminados	40
Tabla 5 - Datos de las observaciones	41
Tabla 6 - Datos de las mallas	41
Tabla 7 - Conformación de la Matriz Peso para el ajuste	41
Tabla 8 - Cotas ajustadas y sus desviaciones estándar	42
Tabla 9 - Diferencias de nivel entre 1.22.028 - 1.22.029	43
Tabla 10 - Ondulaciones Geoidales	43
Tabla 11 - Diferencias de nivel entre puntos del SGM, 1.22.028 y 1.22.029	46
Tabla 12 - Datos a graficar para curvas de iso-error	47
Tabla 13 - Cálculo del error por km en cada circuito	48
Tabla 14 - Factor de precisión de las líneas de nivelación	48
Tabla 15 - Tolerancia admitida comparada con cierres de circuitos	49
Tabla 16 - Tolerancia admitida comparada con cierres de circuitos	50
Tabla 17 - Coordenadas cartográficas de los puntos de la red luego del post proceso	53
Tabla 18 - Coordenadas geodésicas de los puntos de la red luego del post proceso	54
Tabla 19 - Coordenadas cartográficas de los puntos de la red relevados con RADIO-RTK	55
Tabla 20 - Coordenadas geodésicas de los puntos de la red relevados con RADIO-RTK	56
Tabla 21 - Coordenadas cartográficas de los puntos de la red relevados con NTRIP-RTK	56
Tabla 22 - Gravedad obtenida a partir de PredGrav	62
Tabla 23 - Gravedad de los puntos del SGM	62
Tabla 24 - Desniveles medidos	65
Tabla 25 - Gravedades y cierres de circuitos A-F	66
Tabla 26 - Gravedades y cierres de circuitos G-K	67
Tabla 27 - Cierres de los circuitos en metros, a partir de dC	68
Tabla 28 - Números Geopotenciales y su desviación estándar	70

Tabla 29 - Error en metros del Número Geopotencial	71
Tabla 30 - Números Geopotenciales y su error asociado	72
Tabla 31 - Obtención de la gravedad reducida	73
Tabla 32 - Iteraciones realizadas para obtención de altura ortométrica a partir de NG	74
Tabla 33 - Números Geopotenciales y Alturas ortométricas derivadas de los mismos	75
Tabla 34 - Datos para graficar curvas de iso-error, en metros	77
Tabla 35 - Datos para graficar curvas de iso-diferencia de alturas	79
Tabla 36 - Análisis Absoluto de Puntos Fijos del SGM en la zona de Dolores	82
Tabla 37 - Diferencia de Alturas Oficiales entre puntos del SGM	83
Tabla 38 - Diferencia de Alturas Ortométricas derivadas del EGM08 entre puntos del SGM	83
Tabla 39 -Cálculo de la diferencia de alturas ortométricas	83
Tabla 40 - Diferencia entre diferencias de altura nivelada y ortométrica entre los puntos del SGM	84
Tabla 41 - Datos para graficar	85
Tabla 42 - Datos de alturas de algunos puntos de la red tomados vía NTRIP-RTK y RADIO-RTK	87
Tabla 43 - Diferencia de Alturas Ortométricas RADIO-RTK - NTRIP-RTK	88
Tabla 44 - Análisis estadístico de los resultados	88
Tabla 45 - Comparación de cierres	92
Tabla 46 - Comparación de cierres	93
Tabla 47 - Datos para graficar la diferencia entre Alturas Ortométricas	96
Tabla 48 - Datos para graficar la diferencia entre Alturas Nivelada y Altura Ortométrica derivada de N	99
Tabla 49 - Diferentes tipos de alturas de los puntos de la red	102
Tabla 50 - Desniveles hallados utilizando diferentes tipos de alturas	103
Tabla 51 - Diferencia de desniveles entre los tres tipos de altura	104
Tabla 52 - Datos para realizar el Ajuste en MatLab. (4 Parámetros)	112
Tabla 53 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste	112
Tabla 54 - Datos para realizar el algoritmo en MatLab. (5 Parámetros)	113
Tabla 55 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste	113
Tabla 56 - Datos para realizar el algoritmo en MatLab. (6 Parámetros)	114
Tabla 57 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste	114

Tabla 58 - Datos para realizar el algoritmo en MatLab. (7 Parámetros)	115
Tabla 59 - Parámetros obtenidos luego de realizado el Ajuste	115
Tabla 60 - Verificación de los 17 puntos en la función de 4 parámetros	117
Tabla 61 - Parámetros nuevos	117
Tabla 62 - Verificación de los 17 puntos en la función de 4 parámetros nuevos, en metros	118
Tabla 63 - Verificación de los 5 puntos en la función de 4 parámetros, en metros	119
Tabla 64 - Verificación de los 5 puntos en la función de 4 parámetros nuevos, en metros	119
Tabla 65 - Verificación de los 17 puntos en la función de 5 parámetros, en metros	120
Tabla 66 - Nuevos parámetros	121
Tabla 67 - Verificación de los 17 puntos en la función de 5 parámetros nuevos, en metros	121
Tabla 68 - Verificación de los 5 puntos en la función de 5 parámetros, en metros	122
Tabla 69 - Verificación de los 5 puntos en la función de 5 parámetros nuevos, en metros	122
Tabla 70 - Verificación de los 17 puntos en la función de 6 parámetros, en metros	123
Tabla 71 - Verificación de los 5 puntos en la función de 6 parámetros	124
Tabla 72 - Verificación de los 17 puntos en la función de 7 parámetros	124
Tabla 73 - Verificación de los 5 puntos en la función de 7 parámetros	125
Tabla 74 - Cuadro Comparativo de los Resultados	126
Tabla 75 - Estadísticos de la función de 6 parámetros	126

11. Glosario

σ . - Desviación Estándar.

AMC. - Ajuste por Mínimos Cuadrados.

AMC+C. - Ajuste por Mínimos Cuadrados por el método de las Correcciones.

AMC+M. - Ajuste por Mínimos Cuadrados por el método de las Magnitudes.

Co-Location - Mediciones por diferentes técnicas geodésicas de los puntos de la red.

E. - Coordenada Este.

GNSS. - Global Navigation Satellite System (Sistema Global de Navegación por Satélite).

GPS. - Global Positioning System (Sistema de Posicionamiento Global).

h. - Altura Elipsoidal.

H. - Altura Ortométrica.

IS. - Intendencia de Soriano.

MTA. - Modelo de Transformación de Alturas.

N. - Coordenada Norte.

PF. - Punto Fijo.

RINEX. - Receiver Independent Exchange Format (Formato de intercambio de información GPS).

RPF. - Red de Puntos Fijos.

SGM. - Servicio Geográfico Militar.

SIRGAS. - Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas.

UDELAR. - Universidad de la República.

UTC. - Tiempo universal coordinado.

UYSO. - Estación GNSS de funcionamiento continuo ubicada en el Departamento de Soriano.

12. Anexos

12.1 Monografías de los puntos fijos del SGM

- 1.22.022

REPÚBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY
 SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR
 DIVISIÓN GEODESIA Y TOPOGRAFIA



RED GEODÉSICA NACIONAL MONOGRAFÍA DE PUNTO DE NIVELACIÓN

ID: 1.22.022				
COORDENADAS	SIRGAS ROU 98	LAT.:		LONG.:
	PLANAS UTM	X:	Y:	ZONA.:
	GEOG.ROU	LAT.:		LONG.:
	PLANAS ROU	X:	Y:	
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO		TIPO	
ALTITUD	TIPO	Nivel medio del mar		Z: 44.32 mts.
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO Geométrica Ida y Vuelta		TIPO Compensada	
REFERENCIA GRÁFICA	HOJA	ESCALA: 1/50.000		
DEPARTAMENTO	Soriano	LOCALIDAD	Dolores	PARAJE: Cerro Espinillo
SEÑALIZACIÓN:	UBICACIÓN GENERAL:			
Externo tipo bulón	UBICACIÓN PARTICULAR: Colocado en la pared E. del edificio de la Escuela Pública N° 43 a 0,46 mts. del suelo, a 0,30 del ángulo N.E. del centro de la puerta de entrada, a 18,50 mts. del portón de entrada.			
	ACCESO: Ruta Nueva Palmira - Dolores			
	OBSERVACIONES:			
	FECHA CREADO:			
HISTORIAL DE INSPECCIONES				
FECHA :				OPERADOR:
FECHA:				OPERADOR:
FECHA :	04/11/08			OPERADOR:
ESTADO:	Localizado en buen estado			



● 1.22.028

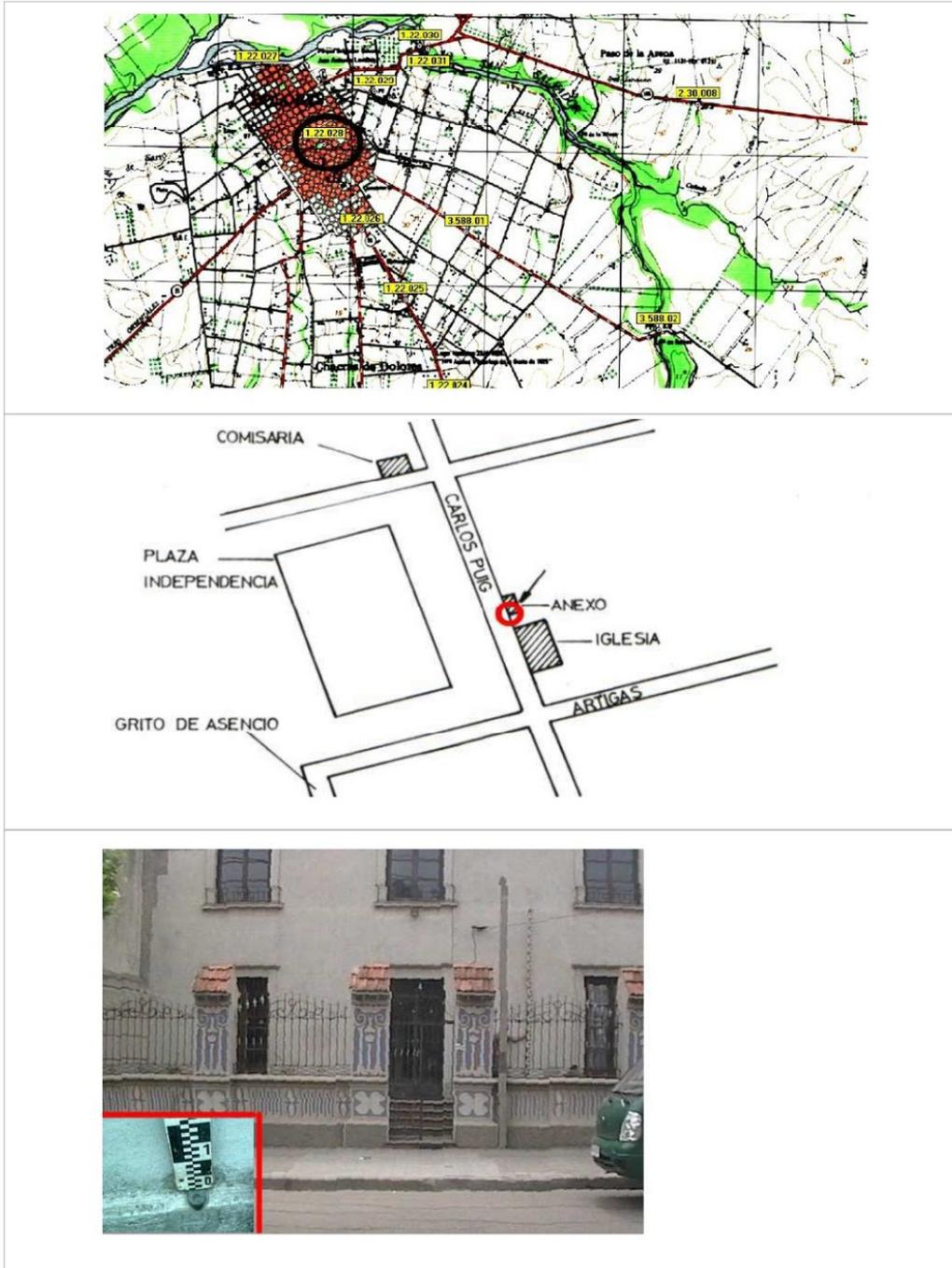
REPÚBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY
 SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR
 DIVISIÓN GEODESIA Y TOPOGRAFIA



RED GEODÉSICA NACIONAL

MONOGRAFÍA DE PUNTO DE NIVELACIÓN

ID: 1.22.028				
COORDENADAS	SIRGAS ROU 98	LAT.:		LONG.:
	PLANAS UTM	X:	Y:	ZONA.:
	GEOG.ROU	LAT.:		LONG.:
	PLANAS ROU	X:		Y:
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO			TIPO
ALTITUD	TIPO	Nivel medio del mar		Z: 21.48 mts.
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO Geométrica Ida y Vuelta			TIPO Compensada
REFERENCIA GRÁFICA	HOJA P-22			ESCALA: 1/50.000
DEPARTAMENTO	Soriano	LOCALIDAD	Dolores	
SEÑALIZACIÓN: Externo tipo planchuela.		UBICACIÓN GENERAL: Edificio Anexo Iglesia.		
		UBICACIÓN PARTICULAR: Colocado en el edificio anexo de la Iglesia ubicada en la intersección de las calles Artigas y Carlos Puig, en la pared W. a 2 mts. al S. de la puerta de entrada, a 0,48 mts. del nivel de la vereda, a 4,50 mts. al E. de la verja de entrada y a 3,15 mts. de la verja que rodea el edificio.		
		ACCESO: Calle Carlos Puig y Calle Artigas, ciudad de Dolores.		
		OBSERVACIONES:		
FECHA CREADO:				
HISTORIAL DE INSPECCIONES				
FECHA :		OPERADOR:		
FECHA:		OPERADOR:		
FECHA :		OPERADOR:		
		04/11/08	Tte.Martínez	
ESTADO: Localizado en buen estado				



● 1.22.029

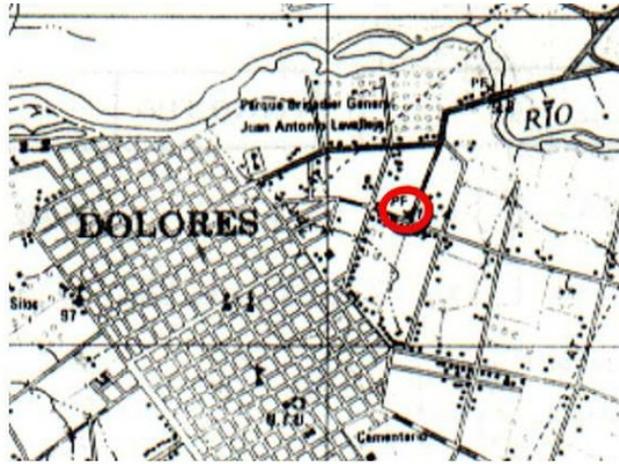
REPÚBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY
 SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR
 DIVISIÓN GEODESIA Y TOPOGRAFIA



RED GEODÉSICA NACIONAL

MONOGRAFÍA DE PUNTO DE NIVELACIÓN

ID: 1.22.029				
COORDENADAS	SIRGAS ROU 98	LAT.:		LONG.:
	PLANAS UTM	X:	Y:	ZONA.:
	GEOG.ROU	LAT.:		LONG.:
	PLANAS ROU	X: 276350.000		Y: 6288850.000
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO Leídas de carta.			TIPO
ALTITUD	TIPO	Nivel medio del mar		Z: 10.47 mts.
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO Geométrica Ida y Vuelta			TIPO Compensada
REFERENCIA GRÁFICA	HOJA P - 22			ESCALA: 1/50.000
DEPARTAMENTO	Soriano	LOCALIDAD	Dolores	
SEÑALIZACIÓN: Externo tipo planchuela.	UBICACIÓN GENERAL: Frente a esquina S.W. de cancha de fútbol, ubicada en calle a la Tablada Circunvalación Este, en salida a ruta 21 que conduce a la ciudad de Mercedes.			
	UBICACIÓN PARTICULAR: Casa de material el Sr. G. Lorenzi, lado izquierdo de la carretera a Mercedes, en la pared del W., ángulo S.W., a 0,45 mts. de la misma esquina, a 0,35 mts. del suelo, a 3,50 mts. de la vereda, y a 6,45 mts. al E. de la puerta de entrada.			
	ACCESO: Intersección de calle Circunvalación Este y A la Tablada.			
	OBSERVACIONES:			
FECHA CREADO:				
HISTORIAL DE INSPECCIONES				
FECHA :	04/11/08	OPERADOR:	Tte.Martínez	
FECHA:	13/05/16	OPERADOR:	Tte. Teixeira - Sgto. Pereda	
FECHA :		OPERADOR:		
ESTADO:	Localizado en buen estado			



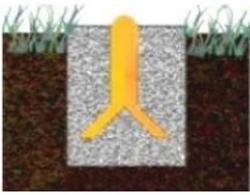
• 1.22.030

REPÚBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY
 SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR
 DIVISIÓN GEODESIA Y TOPOGRAFIA



RED GEODÉSICA NACIONAL

MONOGRAFÍA DE PUNTO DE NIVELACIÓN

ID: 1.22.030			
COORDENADAS	SIRGAS ROU 98	LAT.:	LONG.:
	PLANAS UTM	X:	Y:
	GEOG.ROU	LAT.:	LONG.:
	PLANAS ROU	X:	Y:
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO		TIPO
ALTITUD	TIPO Nivel medio del mar		Z: 9.88 mts.
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO Geométrica Ida y Vuelta		TIPO Compensada
REFERENCIA GRÁFICA	HOJA P - 22		ESCALA: 1/50.000
DEPARTAMENTO	Soriano	LOCALIDAD	Dolores
SEÑALIZACIÓN: Externo tipo bulón. 		UBICACIÓN GENERAL: Ruta 21, puente sobre el Río San Salvador.	
		UBICACIÓN PARTICULAR: En cabecera N.W. del puente, 450 mts. al S.W. de Y de caminos, 320 mts. al N.E. de codo pronunciado de la ruta.	
		ACCESO: Desde Dolores por Ruta 21, 2300 mts.	
		OBSERVACIONES: Coor. Planas leídas de la carta.	
FECHA CREADO:			
HISTORIAL DE INSPECCIONES			
FECHA :	04/11/08	OPERADOR:	Tte.Martínez
FECHA:	13/05/16	OPERADOR:	Tte. Teixeira - Sgto. Pereda
FECHA :		OPERADOR:	
ESTADO: Localizado en buen estado			



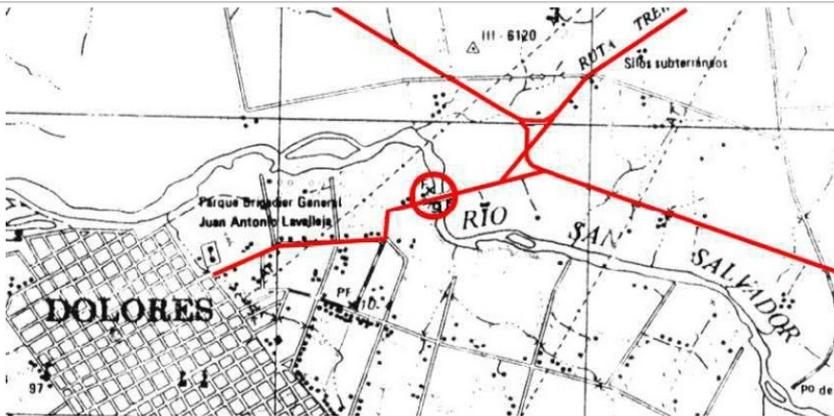
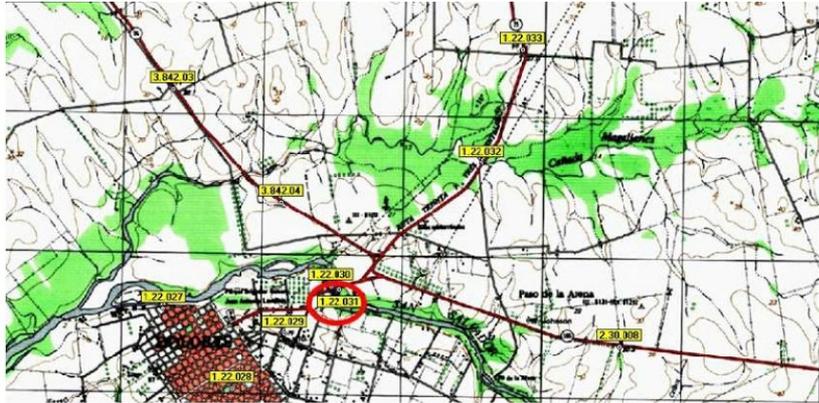
● 1.22.031

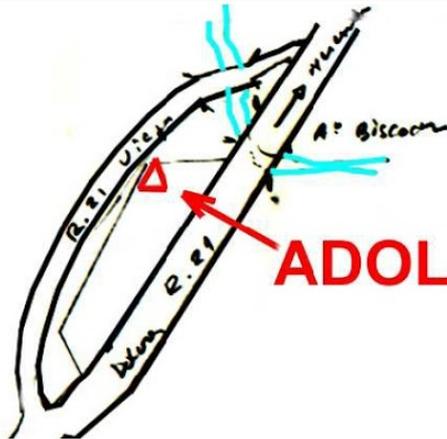
REPÚBLICA ORIENTAL DEL URUGUAY
 SERVICIO GEOGRÁFICO MILITAR
 DIVISIÓN GEODESIA Y TOPOGRAFIA



RED GEODÉSICA NACIONAL
MONOGRAFÍA DE PUNTO DE NIVELACIÓN

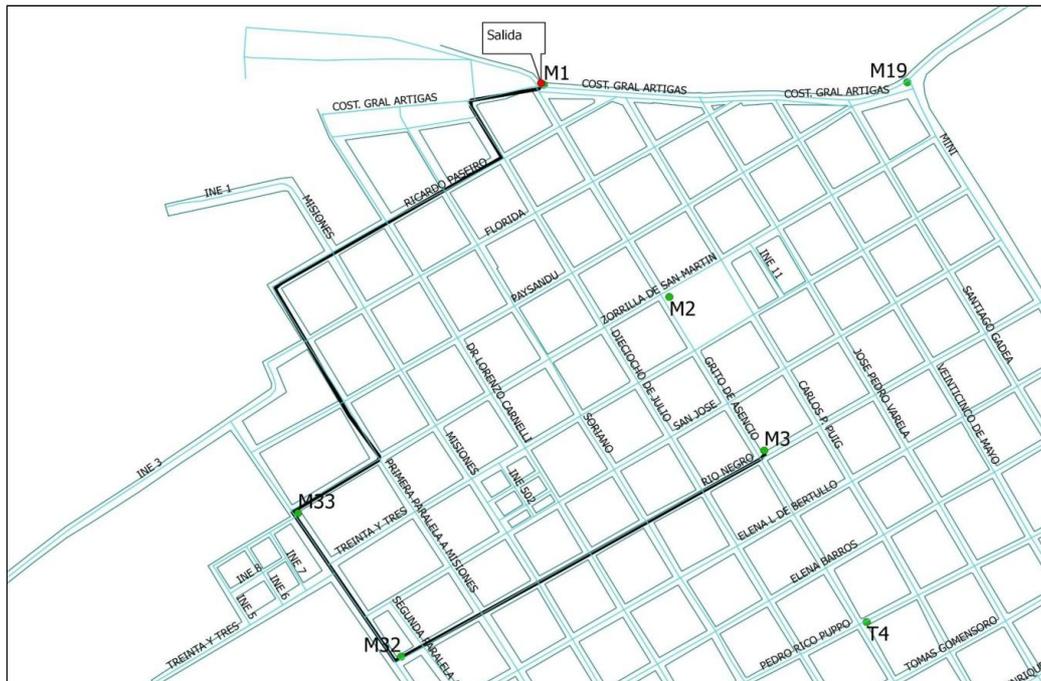
ID: 1.22.031				
COORDENADAS	SIRGAS ROU 98	LAT. 33°31'01"623 S		LONG. 58°11'56"820 W
	PLANAS UTM	X: 388638,332	Y: 6290739,441	ZONA.:
	GEOG.ROU	LAT.:		LONG.:
	PLANAS ROU	X:	Y:	
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO		TIPO	
ALTITUD	TIPO	Nivel medio del mar		Z: 9.88 mts.
DETERMINACIÓN	MÉTODO Y PROCEDIMIENTO Geométrica Ida y Vuelta		TIPO Compensada	
REFERENCIA GRÁFICA	HOJA	P - 22		ESCALA: 1/50.000
DEPARTAMENTO	Soriano		LOCALIDAD	Dolores
			PARAJE:	Dolores
SEÑALIZACIÓN: Externo tipo bulón.	UBICACIÓN GENERAL: Ruta 21, puente sobre el Río San Salvador.			
	UBICACIÓN PARTICULAR: En cabecera S.E. del puente, parte interior, a un 1m40 de la parte superior del pilar sobre un descanso a nivel del puente, 0m75 al W. 600 mts. al N.E. de codo pronunciado de la ruta, 240 mts. al S.W. de Y de caminos.			
	ACCESO: Desde Dolores, por Ruta 21 al N.E., 2400 mts.			
	OBSERVACIONES:			
FECHA CREADO:				
HISTORIAL DE INSPECCIONES				
FECHA :	13/05/16	OPERADOR:	Tte. Teixeira - Sto. Pereda	
FECHA :	04/11/08	OPERADOR:	Tte. Martínez	
FECHA :		OPERADOR:		
ESTADO: Localizado en buen estado				



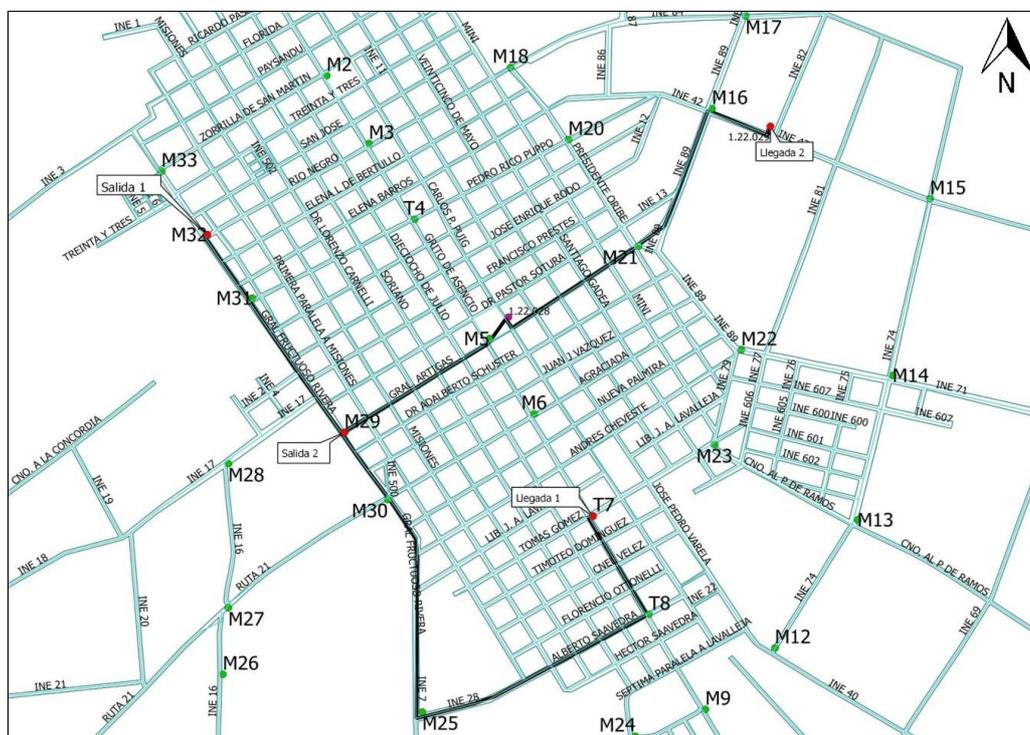


12.2 Circuitos de nivelación

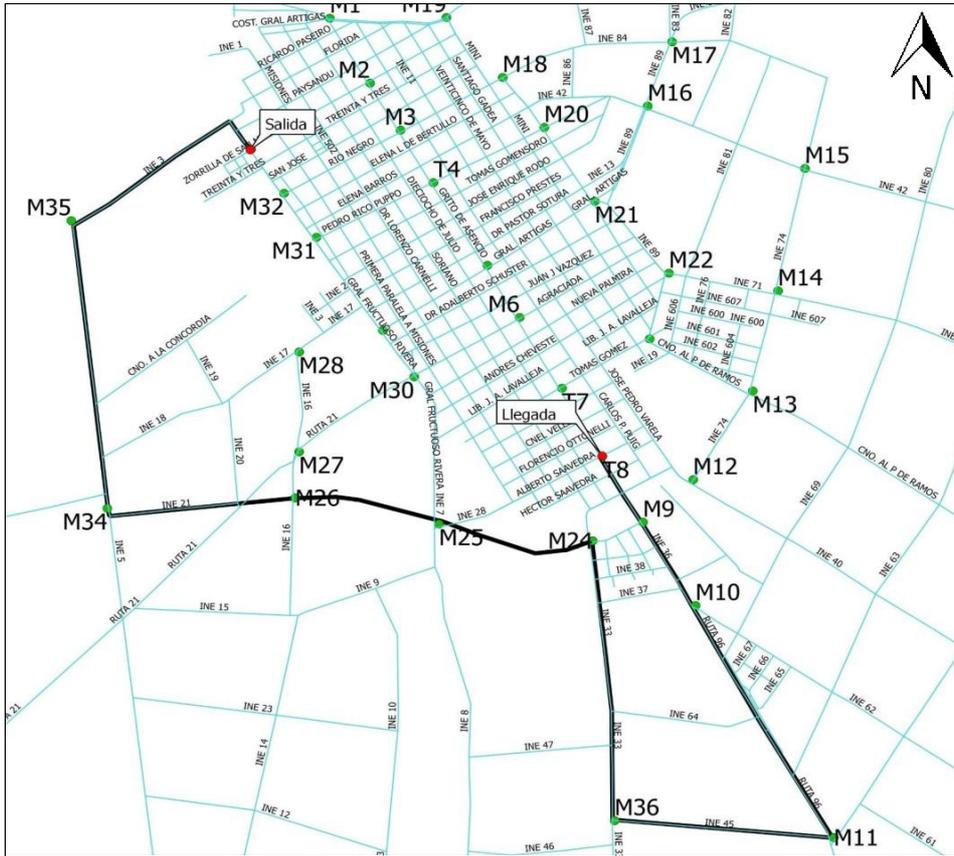
12.2.1 Grupo 1



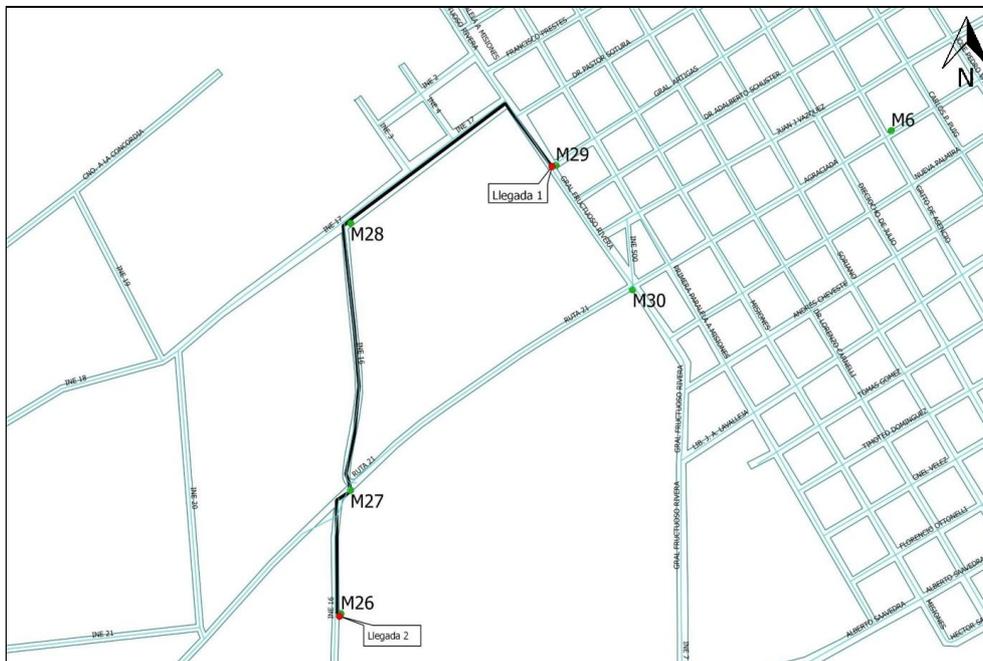
Día 1 Circuito 1



Día 1 Circuito 2



Día 2 Circuito 3

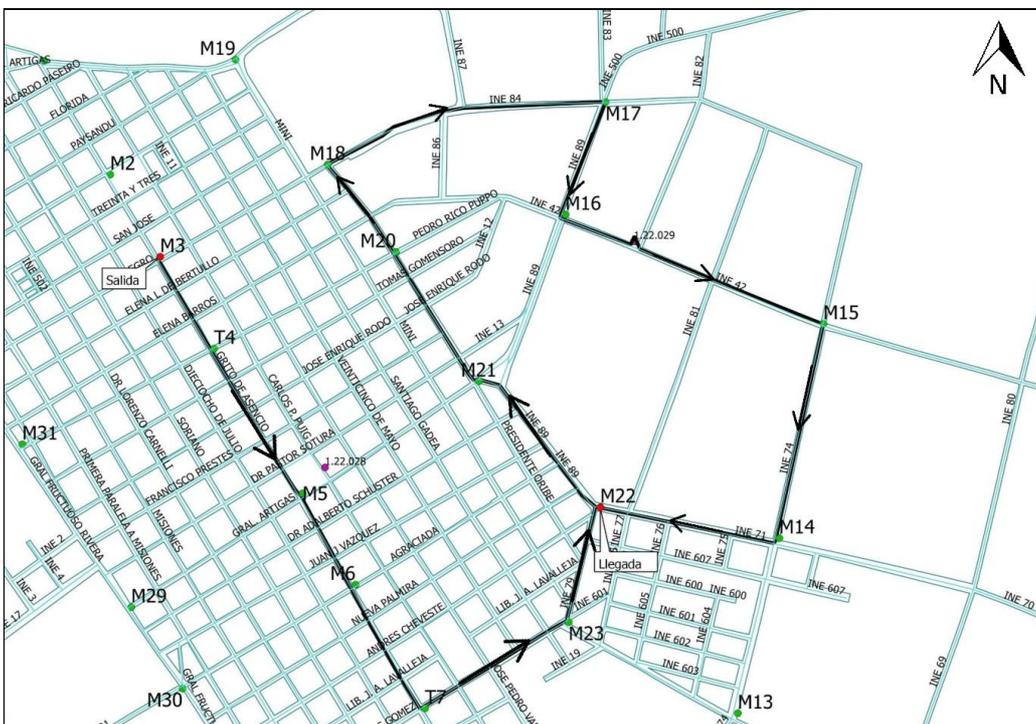


Día 3 Circuito 4

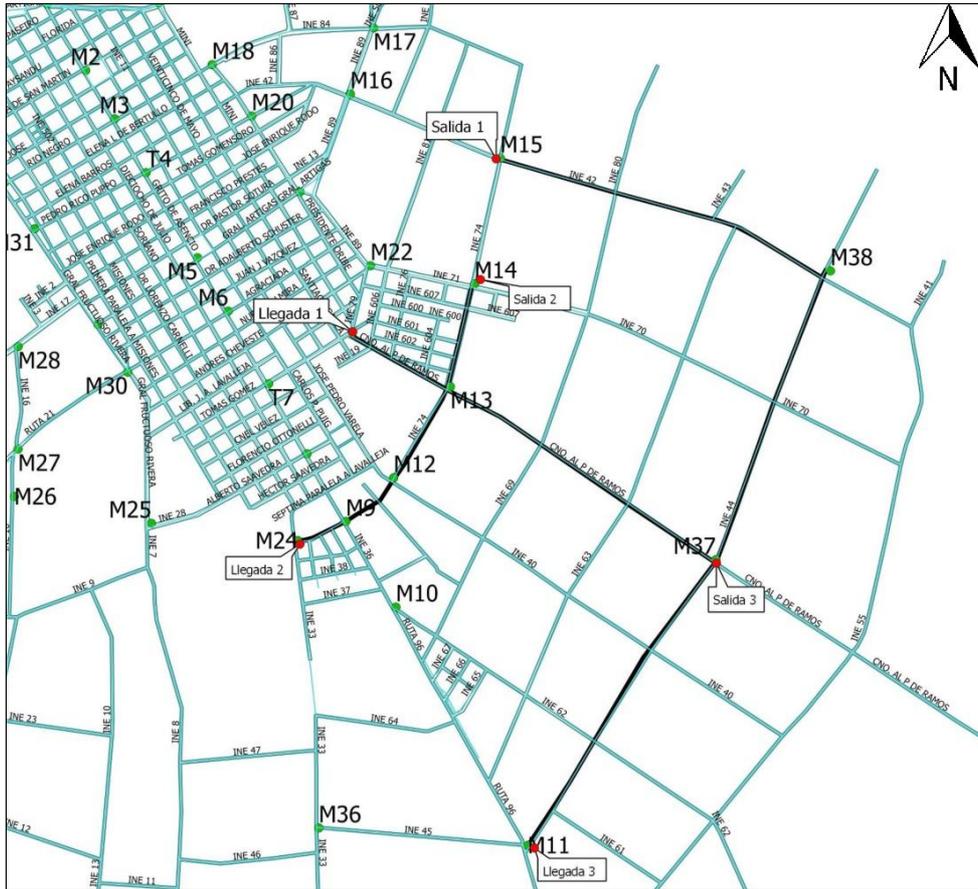
12.2.2 Grupo 2



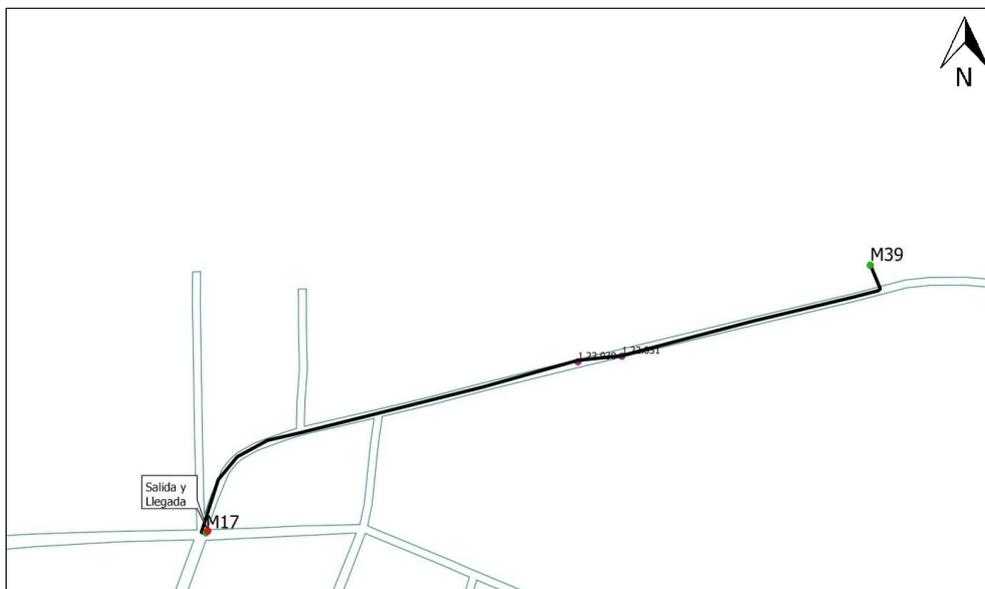
Día 1 Circuito 1



Día 2 Circuito 2



Día 2 Circuito 3



Día 3 Circuito 3

FASE DIFERENCIAL EN POST-PROCESO			
Estático y estático rápido			
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
5 mm + 0,5ppm	10 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm
Estático con observaciones largas			
Estático		Cinemático	
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
3 mm + 0,5ppm	6 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm
FASE DIFERENCIAL EN TIEMPO REAL			
Estático		Cinemático	
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
5 mm + 0,5ppm	10 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm

12.4.2 Receptor Prexiso G5

- Canales del instrumento: Hasta 16 canales para seguimiento continuo en L1, L2 (GPS); hasta 14 canales para seguimiento continuo en L1 y L2 (GLONASS); Galileo.
- Precisión: La precisión depende de varios factores, incluyendo el número de satélites rastreados, la geometría de la constelación, el tiempo de observación, la precisión de las efemérides, las perturbaciones ionosféricas, el efecto multitrayectoria y las ambigüedades resueltas. Las siguientes precisiones, indicadas como error medio cuadrático, están basadas en mediciones procesadas empleando Prexiso Geo Office y en mediciones en tiempo real. El uso de múltiples sistemas GNSS puede incrementar la precisión hasta en un 30% comparada con la utilización exclusiva de satélites GPS.
- Código diferencial: La precisión de la línea base con una solución de código diferencial para levantamientos estáticos y cinemáticos es de 25 cm.

FASE DIFERENCIAL EN POST-PROCESO			
Estático y estático rápido			
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
5 mm + 0,5ppm	10 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm
FASE DIFERENCIAL EN TIEMPO REAL			
Estático		Cinemático	
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
5 mm + 0,5ppm	10 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm

12.4.3 Nivel Automático Pentax AL-M4c

Aumento del anteojo: 28X

Apertura del objetivo: 42mm

Distancia mínima de enfoque: 0,5m

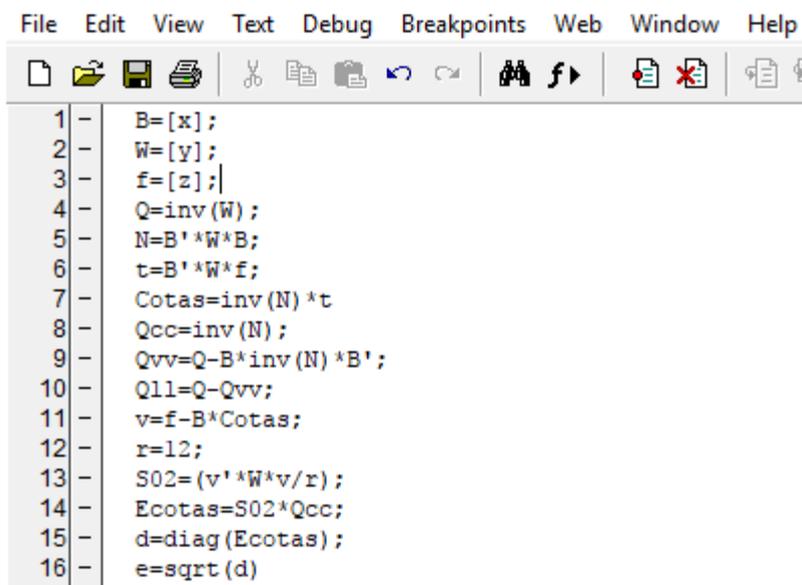
Constante de multiplicación: 100

Rango del compensador: 12'

Diámetro del círculo horizontal: 100mm

Sensibilidad nivel esférico: 8'/2mm

12.5 Algoritmo de Ajuste por Mínimos Cuadrados por Magnitudes

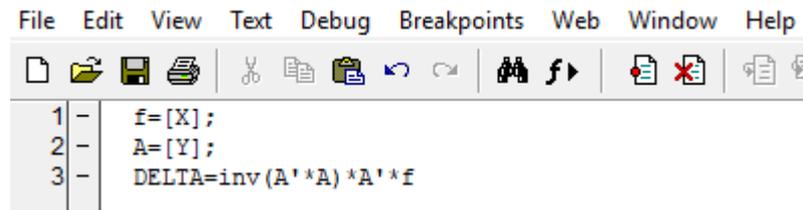


```
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
[Icons]
1 - B=[x];
2 - W=[y];
3 - f=[z];
4 - Q=inv(W);
5 - N=B'*W*B;
6 - t=B'*W*f;
7 - Cotas=inv(N)*t
8 - Qcc=inv(N);
9 - Qvv=Q-B*inv(N)*B';
10 - Q11=Q-Qvv;
11 - v=f-B*Cotas;
12 - r=l2;
13 - S02=(v'*W*v/r);
14 - Ecotas=S02*Qcc;
15 - d=diag(Ecotas);
16 - e=sqrt(d)
```

12.6 Archivo de salida del software PredGrav

Red	Nombre	Phi	Lambda	Altura	Radio	dg	Sigma	G-normal	Aire	Boug.	Gravedad
M33	33	-33.525	-58.230	9.3	53.6	13.1	3.4	979609.8	2.9	1.0	979621.1
M1	16	-33.519	-58.225	4.5	53.3	13.3	3.4	979609.3	1.4	0.5	979621.6
M19	15	-33.519	-58.219	3.6	52.8	13.0	3.3	979609.2	1.1	0.4	979621.5
M32	32	-33.527	-58.228	9.9	53.3	12.8	3.3	979609.9	3.0	1.1	979620.8
M3	18	-33.524	-58.222	10.4	52.9	12.4	3.0	979609.7	3.2	1.2	979620.1
M18	14	-33.522	-58.216	7.9	52.4	12.5	3.1	979609.5	2.4	0.9	979620.5
M17	6	-33.520	-58.207	9.4	51.7	12.9	3.4	979609.3	2.9	1.0	979620.4
M28	1101	-33.535	-58.227	7.4	53.1	12.7	3.2	979610.6	2.3	0.8	979621.8
M29	30	-33.534	-58.223	10.5	52.7	12.0	2.9	979610.5	3.2	1.2	979620.5
M5	20	-33.531	-58.217	19.9	52.3	10.9	1.5	979610.2	6.1	2.2	979617.3
M21	36	-33.528	-58.212	12.8	51.9	11.6	2.5	979610.0	3.9	1.4	979619.1
M16	7	-33.523	-58.209	10.2	51.7	12.5	3.2	979609.6	3.2	1.1	979620.1
M26	34	-33.541	-58.227	9.2	53.0	13.2	3.4	979611.1	2.8	1.0	979622.5
M25	1108	-33.543	-58.220	10.8	52.3	12.5	3.0	979611.3	3.3	1.2	979621.7
M9	25	-33.543	-58.209	20.3	51.3	11.4	1.3	979611.2	6.3	2.3	979618.7
M14	10	-33.532	-58.202	14.4	50.9	12.4	3.2	979610.3	4.4	1.6	979619.9
M15	9	-33.526	-58.201	10.4	50.9	12.8	3.4	979609.8	3.2	1.2	979620.6
M36	1107	-33.557	-58.211	21.2	51.2	14.5	3.5	979612.4	6.5	2.4	979622.8
M37	1106	-33.545	-58.189	14.4	49.4	13.7	3.5	979611.4	4.4	1.6	979622.2
M38	1105	-33.531	-58.183	11.4	49.1	13.6	3.6	979610.3	3.5	1.3	979621.7

12.7 Algoritmo de AMC para el cálculo de los parámetros del MTA



```
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
[Icons]
1 - f=[X];
2 - A=[Y];
3 - DELTA=inv(A'*A)*A'*f
```

13. Bibliografía

- Alvez. P; Lluviera. A. P. (2010). *MRGMVD 2010 y su modelo de transformación de alturas asociado*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Udelar
- Anquela. A. B.; Berné. J. L.; Garrido. N. (2014). *GNSS: GPS: fundamentos y aplicaciones en geomática*.
- Arias. J.; Rivas. M. (2011). *Determinación geométrica de la ondulación del geoide a lo largo de un tramo de la REDNAP, Ocaña-Cuenca y su comparación con el geoide geométrico*. Universidad politécnica de Madrid.
- Bermúdez. H.; Cánneva. N. (2009). *Pautas para la presentación de trabajos*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Udelar.
- Betancur. J.; Villaluenga. A. (2009). *Estudio y refinamiento de modelos geoidales*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Udelar
- Blanco. D. (2012). *Método de mínimos cuadrados*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Udelar.
- Extensión Universitaria, Mesa de debate.
[a/http://udelar.edu.uy/maggiolo/eventos/mesa-de-debate-que-es-la-extension-universitaria](http://udelar.edu.uy/maggiolo/eventos/mesa-de-debate-que-es-la-extension-universitaria). [Consulta: Julio de 2017]
- Faure. J.; Sandoval P.; Suárez. N. (2016). *Avances en la determinación de números geopotenciales para la Red Geodésica Nacional Vertical (RGNV) del Uruguay*.
- Geodesia 3, Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UDELAR.
<https://eva.fing.edu.uy/course/view.php?id=283>. [Consulta: Agosto 2017]
- Google Earth, Street View. <https://www.google.com/intl/es/earth>
- Hofmann-Wellenhof. B.; Moritz. H. (2005). *Physical Geodesy*.
- Huerta, E.; Mangiaterra, A.; Noguera, G. (2005). *GPS: Posicionamiento satelital*. Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
- Instituto Geográfico Nacional (IGN).
<http://www.ign.gob.ar/NuestrasActividades/Geodesia/Nivelacion/Introduccion>.
[Consulta: Setiembre de 2017]
- International GNSS Service (IGS)
<ftp://igs.org/pub/product/>. [Consulta: Mayo 2017]

- Leica CS10/CS15. Manual de empleo.

- Pérez Rodino. R. *Parámetros de Transformación entre el Sistema SIRGAS 95 y los Sistemas Locales CDM y ROU-USAMS (Yacaré)*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Udelar.

- Propuesta de Plan de Estudios 1997 para la carrera de Agrimensura.
<https://www.fing.edu.uy/carrera/grado/agrimensura>. [Consulta: Julio de 2017]

- Servicio Geográfico Militar. www.sgm.gub.uy

- Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas. www.sirgas.org/es/.

- Sistema de Referencia, Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UDELAR.
<https://eva.fing.edu.uy/course/view.php?id=255>. [Consulta: Julio 2017]

- Software Tacuabé. (s.f.). TopoStudio. Software para Agrimensura y Topografía. Manual del usuario – Versión 11.04.16. Montevideo, Uruguay.

- Suárez. N. (2014). *Geodesia. Revisión de conceptos*. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Udelar.

- Teoría de Errores 2, Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UDELAR.
<https://eva.fing.edu.uy/course/view.php?id=282>. [Consulta: Agosto 2017]