



UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Bifurcaciones e histéresis en mapas logísticos acoplados

Caracé Gutiérrez Ibarra

Programa de Posgrado en Física  
Facultad de Ciencias  
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay  
Febrero de 2019





UNIVERSIDAD  
DE LA REPUBLICA  
URUGUAY



# Bifurcaciones e histéresis en mapas logísticos acoplados

Caracé Gutiérrez Ibarra

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado en Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Director:

Dra. Cecilia Cabeza Aceto

Codirector:

Dr. Nicolás Rubido Obrer

Montevideo – Uruguay

Febrero de 2019



Gutiérrez Ibarra, Caracé

Bifurcaciones e histéresis en mapas logísticos acoplados / Caracé Gutiérrez Ibarra. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2019.

XVII, 88 p. 29, 7cm.

Director:

Cecilia Cabeza Aceto

Codirector:

Nicolás Rubido Obrer

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa en Física, 2019.

Referencias bibliográficas: p. 73 – 78.

1. Bifurcaciones, 2. Histéresis, 3. Mapa logístico, 4. Mapas acoplados. I. Cabeza Aceto, Cecilia, *et al.* II. Universidad de la República, Programa de Posgrado en Física. III. Título.



INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

---

Prof. Dr. Arturo Martí

---

Prof. Dra. Hilda Cerdeira

---

Prof. Dr. Alejandro Romanelli

---

Dr. Pablo Monzón

---

Dr. Nicolás Rubido

Montevideo – Uruguay  
Febrero de 2019



A Lautaro, quien ha invertido  
todo su entusiasmo, sus esfuerzos  
y sus alegrías para que pudiera  
concretarse este trabajo.



## RESUMEN

El mapa logístico se popularizó inicialmente como un modelo simplificado de crecimiento poblacional. A pesar de su aparente simplicidad, este mapa exhibe un amplio rango de dinámicas a medida que se varía la tasa de crecimiento poblacional (el único parámetro del mapa), incluyendo soluciones periódicas como caóticas. En general, los cambios cualitativos en las dinámicas que exhibe un sistema debido a la variación de un parámetro de control se conocen como bifurcaciones. Por otro lado, el estudio de sistemas acoplados permite, además de caracterizar las bifurcaciones, identificar otros cambios cualitativos en las dinámicas colectivas, como la histéresis o la sincronización. En particular, la histéresis corresponde a que el conjunto de atracción del sistema es diferente cuando se incrementa o decrementa un parámetro de control. En esta tesis, se realiza un estudio experimental de bifurcaciones e histéresis en mapas logísticos acoplados. Los datos provienen de una implementación electrónica que modela mapas logísticos acoplados difusivamente en configuraciones controlables, los cuales se complementan con simulaciones numéricas. La caracterización experimental del mapa logístico aislado muestra una excelente concordancia con el modelo teórico. Cuando 2 mapas se acoplan, se observa la gran influencia de cambiar el parámetro de crecimiento poblacional de un mapa en las dinámicas que experimenta el otro, incluso para acoplamientos débiles. Tanto para 2 mapas acoplados como para 8, se observa la emergencia de histéresis cuando se cambia la intensidad del acoplamiento. En particular, se encuentra que entre todas las configuraciones estudiadas de acoplamientos entre mapas, el mayor grado de histéresis aparece en la configuración de mapas acoplados como anillo (la cual, es homogénea espacialmente y posee una gran diferencia entre el campo medio global y el local). En términos de un modelo ecológico que considera poblaciones interactuando, se interpretan estos resultados como que el acoplamiento entre poblaciones puede llevar a una población que individualmente evoluciona en un régimen oscilatorio a que experimente una evolución caótica, o viceversa. Por otro lado, el cambio entre aumentar o decrementar la interacción entre las poblaciones lleva a la aparición de comportamientos

irreversibles (histéresis).

Palabras claves:

Bifurcaciones, Histéresis, Mapa logístico, Mapas acoplados.

## ABSTRACT

Initially, the logistic map became popular as a simplified model for population growth. Despite of its apparent simplicity, this map exhibits a broad range of dynamics as the population growth-rate is changed (the only parameter of the map), which include periodic and chaotic solutions. In general, the qualitative changes in the dynamics that a system exhibits as a control parameter is changed are known as bifurcations. On the other hand, the study of coupled systems allows to, besides characterizing bifurcations, identify other qualitative changes in the collective dynamics, such as hysteresis and synchronization. Particularly, the hysteresis corresponds to having a different attracting set when a control parameter is increased than when is decreased. In this thesis, an experimental study on the bifurcations and hysteresis of coupled logistic maps is done. The data come from an electronic implementation that models diffusively coupled logistic maps in arbitrary configurations, which are complemented with numerical simulations. The experimental characterization of an isolated logistic map shows an excellent agreement with the theoretical model. When 2 maps are coupled, strong effects are observed in the dynamics of a map as the population growth-rate of the other map is changed, even for weak couplings. Both, for 2 coupled maps and for 8, the emergence of hysteresis is observed as the coupling strength is changed. In particular, it is found that among all the coupling configurations studied, the larger hysteresis is found for the configuration of coupled maps in a ring (which is spatially homogeneous and has a large difference between the global and local mean fields). In terms of an ecological model that considers population interactions, these results are interpreted as if the coupling between populations could drive a population that has an oscillatory evolution when isolated to experience a chaotic evolution, or viceversa. On the other hand, the change between increasing or decreasing the interaction strength between the populations leads to the emergence of

irreversible behaviours (hysteresis).

Keywords:

Bifurcations, Hysteresis, Logistic map, Coupled maps.

# Tabla de contenidos

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Dinámica de tiempo discreto</b>	<b>7</b>
2.1	Conceptos generales: dinámica de tiempo discreto . . . . .	7
2.1.1	Trayectorias y órbitas: representación gráfica . . . . .	11
2.1.2	Puntos fijos: características y estabilidad . . . . .	13
2.1.3	Soluciones periódicas: características y estabilidad . . . . .	16
2.2	El mapa logístico . . . . .	18
2.2.1	Bifurcaciones . . . . .	20
2.2.2	Caos . . . . .	24
2.2.3	Autosimilaridad y fractalidad . . . . .	28
2.3	Histéresis . . . . .	30
2.4	Mapas logísticos acoplados . . . . .	33
2.4.1	Dos Mapas logísticos . . . . .	33
2.4.2	$N$ Mapas logísticos . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Metodología</b>	<b>37</b>
3.1	Implementación electrónica . . . . .	37
3.1.1	Bloque mapa logístico . . . . .	38
3.1.2	Bloque de muestreo y retención . . . . .	40
3.1.3	Módulo de acoplamiento . . . . .	42
3.2	Análisis de datos . . . . .	44
3.2.1	Preprocesamiento . . . . .	44
3.2.2	Procesamiento . . . . .	45
3.3	Simulaciones . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Resultados y discusión</b>	<b>49</b>
4.1	Mapa logístico aislado . . . . .	49

4.1.1	Constante de Feigenbaum de cada ML . . . . .	51
4.2	Dos mapas acoplados . . . . .	52
4.2.1	Diagramas de bifurcaciones . . . . .	52
4.2.2	Histéresis en 2 mapas logísticos acoplados . . . . .	56
4.3	8 mapas logísticos acoplados . . . . .	60
4.3.1	Configuración <i>anillo</i> . . . . .	60
4.3.2	Configuración <i>todos con todos</i> . . . . .	62
4.3.3	Configuración <i>estrella</i> . . . . .	64
4.3.4	Comparación entre las configuraciones . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>69</b>
	<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>73</b>
	<b>Anexos</b>	<b>79</b>
Anexo 1	Diagrama de los circuitos . . . . .	81
Anexo 2	Ecuación del Bloque Mapa Logístico. . . . .	87

# Capítulo 1

## Introducción

Hoy en día se hace difícil pensar la investigación científica sin el sustento que brindan los sistemas dinámicos, es decir, sistemas que evolucionan con el tiempo. Desde que Newton publicó sus Principios Matemáticos en 1687, se extendió la idea de modelar la dinámica de un sistema real mediante ecuaciones diferenciales, y sus métodos se incorporaron para explicar la evolución en diferentes áreas, como por ejemplo en química o biología [Zill, 1997], e incluso en economía y en ciencias sociales [Kiel and Elliott, 1996]. Si bien las ecuaciones permitieron describir el comportamiento de diferentes sistemas, frecuentemente resultaba imposible encontrar soluciones analíticas. En general, se ha logrado encontrar soluciones para el caso de ecuaciones diferenciales lineales, pero los sistemas no lineales presentan una complejidad que los convierte en un reto aún vigente.

Los sistemas dinámicos presentan comportamientos sumamente variados y que muchas veces desafían la intuición. Por ejemplo, perturbaciones infinitesimales sobre alguna de las variables del sistema tienen efectos drásticos; sistemas que presentan simetría tienen soluciones asimétricas; el aumento de rugosidad puede llevar a que la velocidad de un flujo sea mayor o agregar calor a un sistema puede conducir a un enfriamiento. Un subconjunto interesante dentro de los sistemas dinámicos son los sistemas caóticos, que exhiben una gran sensibilidad a las condiciones iniciales [Guckenheimer, 1979], y por lo tanto existe una impredecibilidad sobre eventos futuros (con precisión finita nunca se puede saber exactamente la condición inicial, por lo que no se puede predecir el futuro de la trayectoria). Esta sensibilidad también se traduce en que las trayectorias que parten de puntos muy próximos se alejan entre sí de

forma exponencial. Lyapunov en su tesis doctoral [Lyapunov, 1892] abordó el problema general de la estabilidad de las soluciones de un sistema dinámico. Como consecuencia definió un parámetro que evalúa la rapidez con que divergen las órbitas, y que resultó fundamental para cuantificar la caoticidad de un sistema. Sistemas caóticos abundan en la naturaleza, desde la atmósfera terrestre [Lorenz, 1963] y los sistemas hidrodinámicos [Zielinska et al., 1985] hasta el sistema neuronal [Wang et al., 1993] o los láseres [Mujumdar et al., 2007].

La principal herramienta para la resolución de problemas en dinámica fue el Análisis Matemático, hasta que a fines del siglo XIX, Poincaré [Poincaré and Magini, 1899] fusionó el análisis con la geometría al desarrollar un nuevo punto de vista para el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias, sentando las bases de lo que actualmente se denomina la teoría de Sistemas Dinámicos. En su trabajo, Poincaré aplicó el método de considerar secciones transversales a soluciones de una ecuación diferencial ordinaria, para entender el comportamiento de las soluciones y observó que gran parte de la información importante está codificada en los puntos en los que la trayectoria pasa por esas secciones transversales. Con este procedimiento se obtiene otro tipo de sistemas dinámicos, que consiste en el estudio de las ecuaciones iterativas, y a los que denominamos *mapas*. Trabajar con mapas corresponde a inspeccionar la dinámica de un sistema en unidades discretas de tiempo.

Los mapas son cada vez más utilizados en diferentes áreas y pueden surgir de maneras distintas. Uno es el caso ya mencionado, el mapa de Poincaré, donde el mismo es creado para estudiar ecuaciones diferenciales, permitiendo en algunos casos, sin resolver el sistema, determinar el tipo de dinámica presente. Pero también se utilizan para modelar diversos fenómenos, especialmente en aquellos contextos donde resulta natural considerar el tiempo como una variable discreta. Este puede ser el caso de la electrónica digital, o algunas ramas de la teoría económica y financiera, donde se encuentra, por ejemplo, el modelo de Bass para la compra de productos [Enns, 2010], o también el de algunos sistemas biológicos, como el latido del corazón o las interacciones neuronales [Rodrigues et al., 2016], o incluso el estudio de ciertas dinámicas poblacionales [May, 1976]. Asimismo los mapas son interesantes de estudiar por sí solos, ya que pueden tener, para expresiones poco complejas, un comportamiento dinámico mucho más rico que las ecuaciones diferenciales, pudiendo, incluso un mapa unidimensional, exhibir dinámicas caóticas [Strogatz, 1994]. Otra gran ventaja que presentan los mapas es que el costo computacional de

estudiar su evolución es, en general, mucho menor que el requerido para el estudio de sistemas de tiempo continuo.

El mapa logístico es un modelo paradigmático que fue propuesto por el biólogo Robert May en 1976 [May, 1976] y se popularizó como un modelo simplificado de crecimiento poblacional. A diferencia de lo que sucede en un modelo de crecimiento exponencial, en el modelo logístico se contempla la capacidad del medio (i.e., número máximo de individuos). Se observa que a medida que varía la tasa de crecimiento de la población (el único parámetro de control), el sistema experimenta diferentes dinámicas. Estos cambios significativos en las dinámicas del sistema se conocen como bifurcaciones. Además, constituye un sistema dinámico fácilmente manejable para caracterizar el comportamiento caótico.

Los mapas logísticos tienen un gran número de aplicaciones. Se han empleado como máquina de encriptación, estudiándose tanto a nivel numérico [Kocarev and Jakimoski, 2001], como experimental [Pareek et al., 2006, Mazloom and Eftekhari-Moghadam, 2009, Singh and Sinha, 2010]. También han sido estudiados y utilizados como generadores de ruido [Phatak, 1995], observándose incluso que son capaces de aproximarse al ruido blanco [McGonigal and Elmasry, 1987]. Además el mapa logístico ha sido aplicado a la ecología [Stone, 1993, Storch et al., 2017], y como modelo demográfico, que es el sentido en que fue propuesto originalmente por May [May, 1976].

Esta tesis se enfoca en la investigación experimental de bifurcaciones e histéresis en mapas logísticos acoplados difusivamente.

Mapas logísticos acoplados han sido estudiados de forma numérica por diferentes investigadores [Perez et al., 1993, Vandermeer and Kaufmann, 1998], permitiendo identificar variados fenómenos colectivos. Un ejemplo de ello es la sincronización caótica [Viana et al., 2005, Martí, 2003], que refiere a un proceso en el que dos o más sistemas caóticos ajustan una propiedad dada de su movimiento a un comportamiento común debido a la presencia de acoplamiento. La sincronización caótica tiene relevancia en diferentes áreas, especialmente en fisiología, óptica no lineal y dinámica de fluidos [Boccaletti et al., 2002]. Por ejemplo, se conoce actualmente que ciertas patologías neurológicas, como la epilepsia [Rodrigues et al., 2016], se caracterizan por la presencia de un alto grado de sincronización entre las neuronas [Escalona-Morán et al., 2007]. Se ha observado también, que en un conjunto de mapas logísticos acoplados con dinámica local caótica, la sincronización depende fuertemente del acoplamiento.

to [Ponce C. et al., 2009]. Por otro lado, en [Lloyd, 1995] se han reportado resultados numéricos para modelos ecológicos que abordan los efectos de la diversidad y la heterogeneidad espacial en poblaciones en competencia. En ese trabajo al igual que en esta tesis, se implementa el acople entre mapas utilizando el modelo difusivo propuesto por Kaneko [Kaneko, 1990].

Implementar electrónicamente el mapa logístico [Madhekar, 2006] permite contrastar la dinámica y características del modelo con datos experimentales. En 2016 se publicó una implementación experimental simple de un sistema compuesto de dos mapas logísticos [LHer et al., 2016]. En el mismo se realiza un diseño de mapa en forma de bloque. Para su construcción se emplean componentes electrónicos de bajo costo, y los parámetros de interés pueden controlarse con facilidad. Otro bloque corresponde a la interacción entre mapas, el cual está diseñado para efectuar el acople en el estilo propuesto por Kaneko. Dicha implementación, extendida al caso de 8 mapas logísticos acoplados, se utiliza en este trabajo de tesis para estudiar experimentalmente la presencia de histéresis en el sistema.

Distintos trabajos han reportado histéresis en mapas acoplados [Neufeld and Vicsek, 1995, de San Roman et al., 1998, Gu et al., 1984]. En general, la histéresis está asociada al cambio en el conjunto de atracción del sistema en el proceso de incrementar y decrementar el parámetro de control. Por ejemplo [Neufeld and Vicsek, 1995] emplean una función gaussiana con un parámetro multiplicativo para modelar los mapas y un acople de tipo laplaciano. En ese caso se observa la histéresis en función del parámetro de los mapas. Por otro lado, el trabajo de [Gu et al., 1984] reporta histéresis en mapas logísticos acoplados al variar el parámetro de los mapas, cuyo acople incluye un término multiplicativo. Sin embargo, todos estos trabajos realizan una investigación exclusivamente numérica.

En esta tesis, los resultados se obtienen principalmente de la implementación electrónica de mapas logísticos acoplados difusivamente, complementándose con simulaciones numéricas. La implementación experimental permite confirmar la presencia de histéresis en un sistema real, donde existe ruido intrínseco electrónico y heterogeneidad entre los mapas. En particular, se destaca que la relación señal ruido es del orden de  $10^6$ , por lo que el efecto del ruido es prácticamente imperceptible. Por otro lado, el sistema electrónico utilizado reproduce el modelo teórico con una diferencia promedio menor al 5%, por lo que se puede calibrar al sistema para obtener mapas cuasi idénticos.

Para cuantificar el grado de histéresis, se emplea la varianza media como un parámetro de orden, el cual permite analizar la globalidad de los comportamientos observados. A partir de su análisis, se confirma la presencia de histéresis como un fenómeno robusto, observado para todas las realizaciones, incluso para diferentes configuraciones de acoplamiento y número de mapas.

Estos resultados obtenidos pueden interpretarse en términos del modelo ecológico. La configuración de mapas acoplados corresponde a la dinámica de poblaciones que compiten o cooperan para obtener recursos en un ecosistema común. Se observó que el acoplamiento entre las poblaciones puede llevar a subpoblaciones a un régimen constante u oscilante, aún cuando individualmente tendrían una evolución caótica (bifurcaciones debido al acoplamiento). Por otro lado, el cambio entre aumentar o decrementar la interacción entre las poblaciones lleva a comportamientos irreversibles (histéresis) o cambios de estado que podrían requerir un gran esfuerzo para ser restaurados [Gsell et al., 2016]. Es decir que esto plantea una gran advertencia sobre los efectos que el forzamiento antropogénico puede tener al afectar las interacciones entre poblaciones de un ecosistema balanceado.



# Capítulo 2

## Dinámica de tiempo discreto

Este capítulo se estructura en cuatro secciones. La inicial, en la que se introducen los conceptos generales asociados a la descripción de dinámicas de tiempo discreto. En la segunda, se realiza una descripción del mapa logístico, las diferentes dinámicas que presenta y algunos parámetros que permiten caracterizarlo. A continuación, una breve sección describe la *histéresis*. Por último, se realiza la descripción del acoplamiento utilizado en la tesis entre varios mapas logísticos. En ese sentido, se describe en primera instancia el caso de dos mapas acoplados, para luego generalizar a  $N$  mapas acoplados.

### 2.1. Conceptos generales: dinámica de tiempo discreto

Uno de los objetivos de la ciencia es predecir cómo evolucionará un sistema a medida que el tiempo avanza. Un **sistema dinámico** consiste en un conjunto de estados posibles, junto con una regla que determina el estado futuro en términos de estados pasados. Por el *estado del sistema*, se entiende cualquier información que sea necesaria para determinar su situación, composición, estructura, y/o evolución en un determinado tiempo. Es decir, el estado de un sistema se determina por un conjunto de variables, el cual evoluciona por medio de alguna regla. Por lo tanto, un sistema dinámico es la representación de un sistema por medio de ecuaciones que permiten predecir estados futuros en base a estados pasados. De esta manera surge la distinción entre sistemas dinámicos de tiempo continuo o discreto. Asimismo, esta definición de sistema dinámico diferencia entre sistemas deterministas y sistemas estocásticos.

La definición requiere que la regla sea **determinista**, es decir, que permita determinar el estado futuro de forma única a partir de los estados anteriores [Alligood et al., 1996]. Por lo tanto, esta definición de un sistema dinámico determinista no admite aleatoriedad. Por ejemplo, un modelo matemático para el precio de un producto en función del tiempo, que intenta predecir cuál será el precio de hoy en función del precio de ayer, asignándole al precio de ayer más o menos un dólar con las dos posibilidades equiprobables, no es un sistema dinámico. En lugar de sistema dinámico este modelo se denomina proceso aleatorio o estocástico. Este tipo de modelo no es determinista y por lo tanto no se ajusta a la definición de sistema dinámico.

Se destacan dos tipos de sistemas dinámicos, uno corresponde al caso en que la regla se aplica en intervalos de tiempo finitos y constantes, a los que se denominan **sistemas dinámicos de tiempo discreto**. Un sistema de tiempo discreto toma el estado futuro como entrada y se actualiza produciendo un nuevo estado como salida. La evolución de este proceso dinámico se refleja en la composición de alguna función  $f$ . Se define  $f^2(x) = f(f(x))$  y, en general,  $f^k(x)$  como el resultado de aplicar la función  $f$  al estado inicial  $k$  veces. Dado un valor inicial de  $x$ , se espera saber  $f^k(x)$  para  $k$  grande.

El otro tipo de sistema dinámico se obtiene midiendo el tiempo de forma continua. La regla que rige en ese caso se convierte en un conjunto de ecuaciones diferenciales, y en estos casos, se usa el término *sistema dinámico de tiempo continuo*. Muchos de los fenómenos naturales que se buscan explicar pueden describirse y explicarse en el contexto de los mapas; sin embargo, desde la época de Newton, ha predominado la visión científica de modelar la naturaleza mediante ecuaciones diferenciales [Alligood et al., 1996].

En 1798, Malthus para describir el crecimiento de la población humana [Malthus, 1798], empleó el modelo

$$f(x) = 2x, \tag{2.1}$$

en donde  $x$  representa la cantidad de individuos en un determinado momento, y  $f$  asigna a cada número un valor dos veces más grande. Dada una condición inicial  $x_0$  (población al comenzar el estudio), se obtiene que a la primer iteración  $f(x_0) = 2x_0$ , mientras que a la segunda iteración  $f(f(x_0)) = 4x_0$ , y así sucesivamente. Esta función experimenta un crecimiento exponencial, dado que para la  $k$  ésima iteración,  $f^k(x) = 2^k x$ .

Malthus predijo con ese modelo que se produciría una catástrofe, ya que si la población crece de forma exponencial y, según sus modelos, los recursos lo hacen de forma lineal, habría un momento donde las personas no tendrían alimentos para sobrevivir. En ese sentido, en 1972 se publicó el informe denominado «*Los límites del crecimiento*» [Meadows, 1972] en donde la tesis principal radica en la idea de que en un planeta limitado, las dinámicas de crecimiento exponencial no son sostenibles.

Generalizando la ec. (2.1), se obtiene

$$f(x) = rx, \text{ con } r > 0, \quad (2.2)$$

la cual también experimenta una evolución exponencial,  $f^k(x) = r^k x$ , para  $r \neq 1$ . Sin embargo, en este caso, el comportamiento depende del valor del parámetro  $r$ , incorporando la posibilidad de *decaimiento* exponencial para el intervalo  $0 < r < 1$ . Por ejemplo, en economía se emplea este modelo para describir la demanda de productos, mediante lo que se denomina *ley de la utilidad marginal decreciente*. Esta explica que cada unidad sucesiva de un bien tiene menos *utilidad marginal* (valor individual) para el consumidor que la anterior, y por lo tanto disminuye el valor que está dispuesto a pagar, lo que conduce a una curva descendente de demanda para ese bien [Case et al., 2012].

El modelo de crecimiento propuesto por Malthus, ec. (2.1), no responde adecuadamente a largo plazo. En algún punto, los recursos del medio se verán comprometidos por el aumento de la población, y el crecimiento se reducirá dejando de ser exponencial. En otras palabras, aunque la ec. (2.1) puede ser correcta para un cierto rango de poblaciones, pierde su aplicabilidad en otros rangos. Un modelo que toma en cuenta la existencia de una capacidad máxima poblacional debido a recursos limitados es dado por

$$f(x) = 2x(1 - x), \text{ con } x \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

En este modelo, cuando la población  $x$  es pequeña, el factor  $(1 - x)$  está cerca de uno, y  $f(x)$  se parece mucho a la función de duplicación, ec. (2.1). Por otro lado, si la población  $x$  está cerca de 1, entonces  $(1 - x)$  está cerca de 0 y  $f(x)$  se parece a la función de duplicación pero con pendiente negativa. Es decir

$$f(x) = 2x(1 - x) \text{ que con el C.V. } y = (1 - x) \Rightarrow f(y) = 2y(y - 1).$$

De este modo, cuando  $x \approx 1 \Rightarrow y \approx 0$ , y por lo tanto,  $f(y \approx 0) = 2y^2 - 2y \approx -2y$ . Este es un efecto no lineal, y el modelo dado por la ec. (2.3) es un ejemplo de un modelo de *crecimiento logístico*.

Así como el crecimiento logístico es un modelo para explicar el crecimiento de una población con recursos finitos, existen otros mapas que explican la evolución de otros sistemas. Por ejemplo, el siguiente mapa bidimensional es un modelo de la dinámica neuronal [Chialvo, 1995], y está dado por

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) = x_n^2 e^{(y_n - x_n)} + k \\ y_{n+1} &= g(y_n, x_n) = ay_n - bx_n + c, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde  $x$  actúa como el potencial de activación,  $y$  representa una variable de recuperación y  $n$  representa los pasos de iteración, correspondientes a la evolución del sistema de tiempo discreto. El modelo incluye además cuatro parámetros. El parámetro  $k$  que actúa como una perturbación aditiva dependiente del tiempo,  $a$ , la constante de tiempo de recuperación ( $a < 1$ );  $b$ , la dependencia de activación del proceso de recuperación ( $b < 1$ ) y  $c$  el desplazamiento (*offset*).

Este mapa, con pocos parámetros reproduce muchas dinámicas observadas en las neuronas y en otros sistemas excitables. Surge de considerar que las neuronas tienen las siguientes propiedades globales. (i) En ausencia de una perturbación externa, el sistema tiene un punto de equilibrio estable, generalmente llamado estado de reposo. (ii) El espacio de fase está dividido por una región umbral en dos dominios: subumbral y supraumbral. Al perturbarse instantáneamente al sistema que se encontraba en estado de reposo, éste pasa al dominio subumbral, y entonces se mueve rápidamente al equilibrio. Por otro lado, una perturbación lo suficientemente grande como para mover el sistema al dominio del supraumbral da como resultado una alteración mucho mayor de las variables de estado. Eventualmente, regresan al estado de reposo. En las células nerviosas, esta respuesta se llama *potencial de acción*. (iii) Durante un potencial de acción, y tras un intervalo de tiempo, el sistema puede no responder de la misma manera a las perturbaciones externas. En la fase temprana del potencial de acción (conocido como período refractario) el umbral se aleja del punto de reposo, e incluso puede desaparecer transitoriamente (período refractario absoluto), y luego se relaja progresivamente a la región asintótica. Por lo tanto, la amplitud mínima de una perturbación aplicada durante este período refractario es una función del tiempo. (iv) Bajo una polarización constante estos sistemas excitables pueden exhibir oscilaciones periódicas. Es-

tas oscilaciones, en algunos sistemas y para algunos valores de parámetros, pueden bifurcarse a soluciones caóticas.

### 2.1.1. Trayectorias y órbitas: representación gráfica

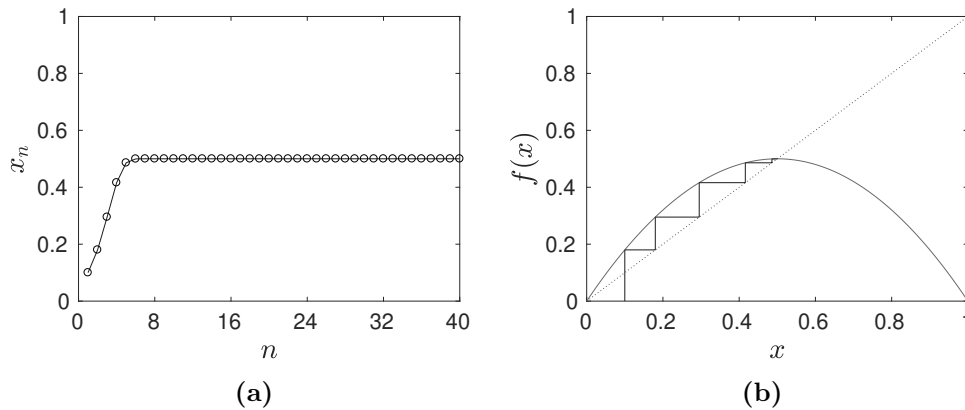
La **trayectoria** de un mapa  $f$  es la representación de las sucesivas iteraciones en función del tiempo  $n$ , es decir, la representación de la serie temporal. La secuencia  $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$  se denomina **órbita** del mapa con condición inicial  $x_0$  [Strogatz, 1994].

Dada una condición inicial  $x_0$  y un mapa  $f$  diferenciable, existe una única órbita, que representa la solución del sistema [Berinde, 2010, Gill, 2017]. La misma puede: tender asintóticamente a un valor constante, tener un comportamiento asintótico oscilante, o bien, nunca converger a ninguno de los casos anteriores.

El comportamiento asintótico del sistema dinámico se denomina régimen *estacionario*. En contraposición, el régimen *transitorio* surge a partir de un cambio o perturbación en el sistema, es por definición aquel comportamiento que desaparece cuando *el tiempo tiende a infinito*. Aunque para sistemas altamente disipativos, el régimen transitorio se aprecia durante un corto intervalo de tiempo [Panchev, 2003]. El régimen *estacionario* o *permanente*, puede ser trivial, oscilante o incluso exhibir dinámicas más complicadas. En muchos casos el interés se centra en el comportamiento asintótico del sistema, debiéndose por tanto dejar extinguir el transitorio. Pero en otros casos es dicho transitorio el que se hace necesario comprender, por ejemplo, en algunos estudios de dinámicas neuronales donde los tiempos involucrados en el sistema no permiten alcanzar un régimen asintótico [Rabinovich et al., 2006].

Para representar una trayectoria de un mapa, basta graficar los valores del mapa en las sucesivas iteraciones,  $f^n(x)$ , en función de la iteración,  $n$ . Por otro lado, para representar la órbita de un mapa en la recta real, se puede hacer un gráfico llamado **diagrama de telaraña**. La fig. 2.1 (a) muestra la trayectoria de un sistema que experimenta una solución constante. Se observa un régimen transitorio para  $n < 8$ , estabilizándose en una solución estacionaria constante  $x_n = 0.5$  para  $n > 8$ . En la fig. 2.1 (b) se presenta el diagrama de telaraña correspondiente. Para su construcción se representa la función a estudiar junto con la recta diagonal  $y = x$ . Se comienza la órbita a partir de la condición inicial dada, en este caso  $x_0 = 0.1$ . Tomando como valor de salida  $f(x_0)$ , se traza el

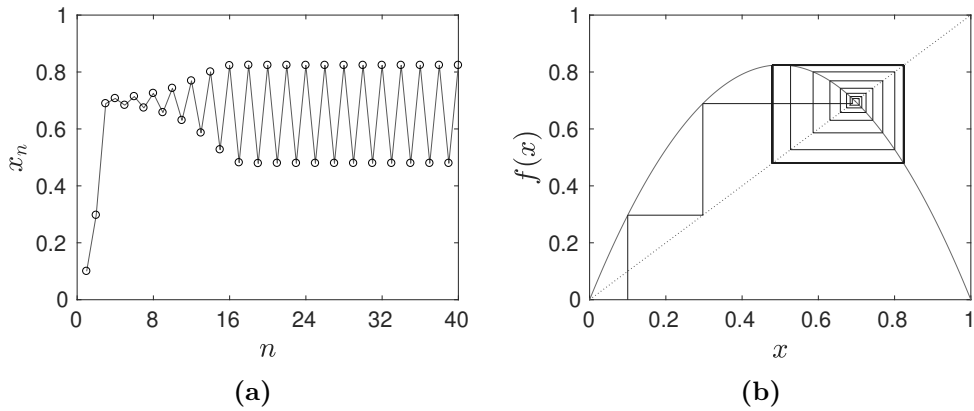
valor de la función por encima de  $x_0$ . En la fig. 2.1 (b) el valor de salida es 0.18. Luego, para encontrar  $f(0.18)$ , es necesario considerar 0.18 como el nuevo valor de entrada. Para convertir un valor de salida en un valor de entrada, se dibuja una línea horizontal desde el par de entrada-salida (0.1, 0.18) hasta la diagonal  $y = x$ . Reiterando el procedimiento con el nuevo valor  $x = 0.18$ , se dibuja un nuevo par de segmentos verticales y horizontales. Se encuentra  $f(f(0.1)) = f(0.18) = 0.295$  en la gráfica de  $f$ , y al moverse horizontalmente la salida se convierte en la posición de entrada. Continuando de esta manera, se obtiene una representación gráfica de la órbita  $\{0.1, 0.18, 0.295, \dots\}$  la cual está constituida por la trayectoria de segmentos. De la figura se desprende claramente que la órbita converge al punto  $x_n = 0.5$ , como ya se observó en la representación de la trayectoria.



**Figura 2.1:** Representaciones correspondientes a una dinámica constante: (a) trayectoria y (b) diagrama de telaraña.

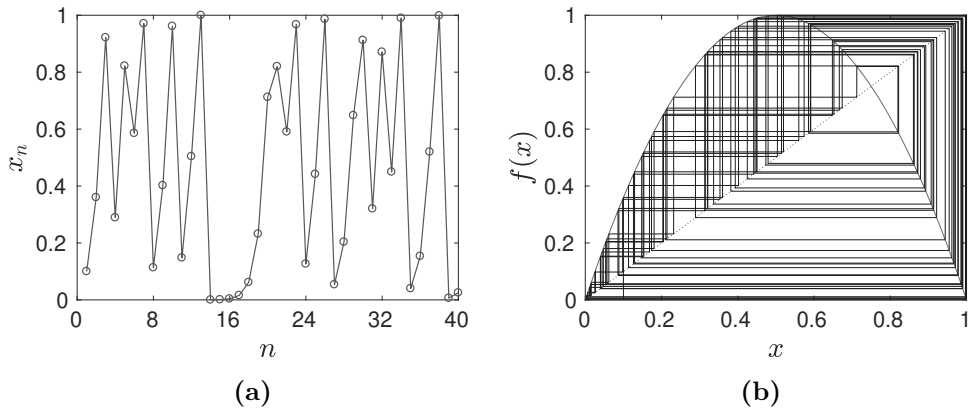
La fig. 2.2 (a) muestra la trayectoria de un sistema que experimenta una dinámica oscilante. Hasta  $n = 16$  se observa un régimen transitorio, iniciando a continuación el régimen estacionario, que consiste en una oscilación periódica entre dos estados,  $x_n \approx 0.82$  y  $x_n \approx 0.48$ . El diagrama de telaraña para tal caso se representa en la fig. 2.2 (b), y muestra la evolución de la órbita a través del transitorio para luego de ello quedar confinada al par de valores ya identificados en la trayectoria.

En la fig. 2.3 (a) se representa la trayectoria de un mapa en el que no hay una oscilación evidente entre ningún conjunto de valores, se observa que los estados recorren todo el rango de valores,  $[0, 1]$ . El diagrama de telaraña correspondiente se representa en la fig. 2.3 (b), y muestra que la órbita completa



**Figura 2.2:** Representaciones correspondientes a una dinámica periódica: (a) trayectoria y (b) diagrama de telaraña.

todo el intervalo.



**Figura 2.3:** Representaciones correspondientes a una dinámica aperiódica: (a) trayectoria y (b) diagrama de telaraña.

La importancia de la construcción del diagrama de telaraña de un mapa es que muestra la existencia o no de un conjunto de valores a los que el mapa converge. Es decir, la existencia de un conjunto estacionario atractivo. Además, da una idea de cuán larga fue la transición desde el punto inicial a dicho conjunto.

### 2.1.2. Puntos fijos: características y estabilidad

Dado un mapa  $f$ , se define  $x^*$  como **punto fijo** de  $f$  si verifica que  $f(x^*) = x^*$ . Esto implica que  $x_{n+1} = f(x_n) = x^*$ , y por lo tanto, la órbita permanece

en  $x^*$  para todas las iteraciones siguientes [Strogatz, 1994].

Un punto fijo  $x^*$  de  $f$  se denomina **estable** si para cada  $\delta > 0$  existe  $\gamma > 0$  tal que si  $|x_0 - x^*| < \gamma$  y  $x_n = f^n(x_0)$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

$$|x_n - x^*| < \delta$$

Por el contrario,  $x^*$  se denomina un punto fijo **inestable** de  $f$  si  $x^*$  *no es estable*, es decir, si  $\exists \delta > 0$  tal que para cada  $\gamma > 0$  se pueden determinar  $x_0$  y  $\tilde{k}$  que satisfagan

$$|x_0 - x^*| < \gamma, \quad |x_{\tilde{k}} - x^*| > \delta.$$

El **entorno delta**  $E_\delta(x^*)$  es el conjunto de todos los números reales dentro de una distancia  $\delta$  de  $x^*$ , es decir,  $E_\delta(x^*) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x^*| < \delta\}$ .

Se define  $x^* \in \mathbb{R}$  como un **punto fijo de atracción global** o **sumidero global** de  $f$  si  $f(x^*) = x^*$  y para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^*$ . Se denomina a  $x^* \in \mathbb{R}$  como un **punto fijo de atracción local** o **sumidero local** de  $f$  si  $f(x^*) = x^*$  y todas las órbitas que comienzan en puntos suficientemente cercanos a  $x^*$  son atraídos a  $x^*$ , es decir, si existe un  $\delta > 0$  tal que para todo  $x \in E_\delta(x^*)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^*$ . Por el contrario, si puntos suficientemente cercanos a  $x^*$  se repelen de  $x^*$ , entonces  $x^*$  se llama **fuelle**, **repelidor** o **punto fijo de repulsión** [Alligood et al., 1996].

Para aplicar el concepto, se considera el ejemplo (2.3),  $f(x) = 2x(1 - x)$  (cuya órbita se presentó en la fig. 2.1(b)). Partiendo de la definición se obtiene que

$$f(x^*) = x^* \Rightarrow x^* = 2x^*(1 - x^*),$$

de donde los dos puntos fijos son

$$x_1^* = 0 \text{ y } x_2^* = \frac{1}{2}. \quad (2.5)$$

La derivada del mapa en un punto fijo  $x^*$  es una medida de cómo la distancia entre  $x^*$  y un punto cercano se amplía o reduce con  $f$ . Es decir, los puntos 0 y 0.1 comienzan exactamente 0.1 unidades separadas. Después de aplicar la regla  $f$  a ambos puntos, la distancia entre los mismos aumenta. Por lo que, el punto fijo 0 es *inestable*.

El siguiente Teorema de Estabilidad [Layek, 2015, Lyapunov, 1892] aporta un criterio local de clasificación de los puntos fijos:

Sea  $f$  un mapa (suave) en  $\mathbb{R}$ , y  $x^*$  un punto fijo de  $f$ .

1. Si  $|f'(x^*)| < 1$ , entonces  $x^*$  es un sumidero (estable).
2. Si  $|f'(x^*)| > 1$ , entonces  $x^*$  es una fuente (inestable).

Para aplicar el teorema anterior al ejemplo (2.3), se determina la derivada de  $f$ ,

$$f'(x) = 2 - 4x.$$

El teorema de estabilidad clasifica los puntos fijos presentados en la ec. (2.5):  $x_1^*$  localmente inestable, ya que  $f'(0) = 2 > 1$  y  $x_2^* = \frac{1}{2}$  localmente estable, dado que  $f'(\frac{1}{2}) = 0 < 1$ . Esto implica que los puntos cercanos a  $x_1^* = 0$  son repelidos tras la aplicación de  $f$  y los cercanos a  $x_2^* = \frac{1}{2}$  son atraídos.

El conjunto de todas las condiciones iniciales cuyas órbitas convergen a un punto fijo atractivo (estable) determinado de un mapa se denomina **cuenca de atracción**. La cuenca de atracción de un punto fijo  $x^*$  de un mapa  $f$  se denota por  $W^s(x^*)$ , y se define como [Layek, 2015]

$$W^s(x^*) = \left\{ x : \lim_{k \rightarrow \infty} f^k(x) = x^* \right\}.$$

Este conjunto es un conjunto estable del punto  $x^*$ . El conjunto correspondiente a la cuenca de un punto inestable se define como

$$W^u(x^*) = \left\{ x : f^k(x) \notin E_\epsilon(x^*), \forall n > N, \text{ un entero positivo} \right\}.$$

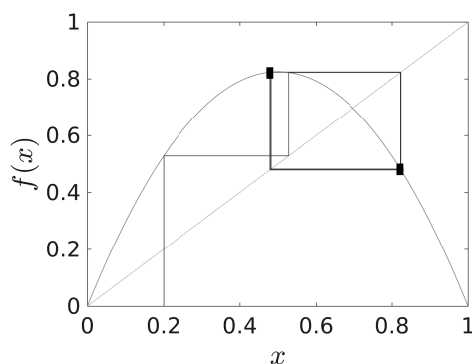
Analizando cualitativamente la cuenca de atracción de  $x_2^* = \frac{1}{2}$  en el ejemplo, puede considerarse los extremos del intervalo  $[0,1]$ . El punto 0 no pertenece a la cuenca de atracción, ya que es un punto fijo. Además, 1 no pertenece, ya que  $f(1) = 0$  y sucesivas iteraciones de  $f$  no pueden cambiarlo. Sin embargo, todas las demás condiciones iniciales del intervalo  $(0, 1)$  producirán órbitas que convergen al sumidero  $x_2^* = \frac{1}{2}$ .

Hay un caso que no está cubierto por el Teorema de Estabilidad enunciado, y corresponde a la estabilidad de un punto fijo  $x^*$  para el cual  $|f'(x^*)| = 1$ . En este caso el punto fijo se denomina no hiperbólico. Resulta difícil concluir si un punto fijo no hiperbólico atrae o repele. Para esos casos se puede utilizar un diagrama de telaraña y así analizar la naturaleza del punto fijo, o estudiar las derivadas de orden superior [Layek, 2015].

### 2.1.3. Soluciones periódicas: características y estabilidad

Se define  $x^*$  como un **punto periódico de período  $k$**  de un mapa  $f$  en  $\mathbb{R}$  si  $f^k(x^*) = x^*$ , y si  $k > 1$  es el menor entero positivo. La órbita con el punto inicial  $x^*$  (que consta de  $k$  puntos) se denomina **órbita periódica de período  $k$** . [Alligood et al., 1996].

Si se cambia la constante en el mapa logístico, tomando por ejemplo,  $f(x) = 3.3x(1 - x)$ , se obtiene una órbita de período 2 como se muestra en la fig. 2.4.



**Figura 2.4:** Diagrama de telaraña para la función  $f(x) = 3.3x(1 - x)$ , en todo el rango  $[0,1]$ .

En este caso, los puntos fijos son  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = \frac{23}{33}$ , ambos repelores. Ahora que no hay puntos fijos atractores para casi todas las opciones de condición inicial, las órbitas describen un patrón de valores alternados entre  $p_1 = 0.4794$  y  $p_2 = 0.8236$ . La órbita con la condición inicial  $x_0 = 0.2$  se grafica en la fig. 2.4, la cual muestra el comportamiento típico de una órbita que converge a un sumidero del período 2. Se atrae a  $p_1$  cada dos iteraciones, y a  $p_2$  en iteraciones alternadas.

Deben destacarse dos partes importantes en este comportamiento. Primero, se observa que  $f(p_1) = p_2$  y  $f(p_2) = p_1$ . Otra forma de ver esto es que  $f^2(p_1) = p_1$ ; entonces  $p_1$  es un punto fijo de  $h = f^2$ . (Lo mismo podría decirse para  $p_2$ ). En segundo lugar, esta oscilación periódica entre  $p_1$  y  $p_2$  es estable y atrae a las órbitas, por lo tanto este comportamiento periódico es observable en un sistema real modelado por  $f$ . El par  $\{p_1, p_2\}$  es un ejemplo de una órbita periódica.

Si  $x^*$  es un punto periódico de período 2 para el mapa  $f$ , entonces  $x^*$  es un punto fijo del mapa  $h = f^2$ . Sin embargo, el recíproco no es cierto, un punto fijo

de  $h = f^2$  también puede ser un punto fijo de un valor inferior. Generalizando, si  $f$  es un mapa con  $x^*$  un punto de *período*  $k$ , la órbita *período*  $k$  de  $x^*$  es un sumidero periódico si  $x^*$  es un sumidero para el mapa  $f^k$ . La órbita de  $x^*$  es una fuente periódica si  $x^*$  es una fuente para el mapa  $f^k$ .

De este modo, aplicando la regla de la cadena y el Teorema de Estabilidad, se tiene que la órbita periódica  $\{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  es:

1. un sumidero, si  $|f'(p_k) \dots f'(p_2) f'(p_1)| < 1$ , o
2. una fuente, si  $|f'(p_k) \dots f'(p_2) f'(p_1)| > 1$ .

Estas inecuaciones expresan que la derivada de la  $k$ -ésima iteración  $f^k$  de  $f$  en un punto de una órbita  $k$  es el producto de las derivadas de  $f$  en los  $k$  puntos de la órbita [Alligood et al., 1996].

Por lo tanto, para determinar la estabilidad de las órbitas periódicas se debe analizar el comportamiento de los puntos cercanos, como en el caso de un punto fijo, ya que los puntos cercanos a la órbita periódica pueden ser atrapados o repelidos por ella. El hecho clave es que un punto periódico para  $f$  es un punto fijo para  $f^k$ . Entonces puede aplicarse el Teorema de Estabilidad para investigar el comportamiento de una órbita periódica. En el caso de una órbita de periodo  $k$ , se plantea el teorema al mapa  $f^k$  (en lugar de  $f$ ).

Un mapa continuo  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$  puede tener un punto fijo y ninguna otra órbita periódica (como el ejemplo de la ec. (2.1),  $f(x) = 2x$ ). Puede presentar un punto fijo, y órbitas de período 2 y ninguna otra órbita periódica (como en el ejemplo representado en la fig. 2.4). Sin embargo, la existencia de una órbita periódica de período tres, implica la existencia de órbitas de todos los períodos. En 1964, el matemático soviético, A.N. Sharkovskii publicó un artículo en el que demostró un notable teorema para sistemas dinámicos discretos. El teorema permite verificar la existencia de ciclos periódicos de ciertos períodos de un mapa unidimensional a partir de la existencia de otros ciclos periódicos de diferentes períodos del mapa [Layek, 2015].

Para enunciar el teorema de Sharkovskii, previamente es necesario disponer los números naturales en el *orden de Sharkovskii*:

$$\begin{aligned}
 3 \prec 5 \prec 7 \prec \dots \prec 2 \cdot 3 \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 7 \prec \dots \prec 2^2 \cdot 3 \prec 2^2 \cdot 5 \prec 2^2 \cdot 7 \prec \dots \\
 2^n \cdot 3 \prec 2^n \cdot 5 \prec 2^n \cdot 7 \prec \dots \prec 2^n \prec \dots \prec 2^4 \prec 2^3 \prec 2^2 \prec 2 \prec 1. \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

Este ordenamiento se construye de la siguiente manera: primero, se enumera todos los enteros impares positivos mayores que 1 en orden creciente. Luego se

hace una lista de los enteros que son 2 veces los enteros impares mayores que 1 en orden creciente y luego los números que son  $2^2$  veces de los enteros impares, y así sucesivamente. Finalmente, se enumeran los enteros en orden decreciente que son las potencias integrales de 2. En el orden de Sharkovskii, el entero 3 es el número más pequeño y el 1 es el más grande.

El Teorema de Sharkovskii afirma que, un mapa continuo  $f$  en un intervalo con una órbita de período  $p$ , si  $p \prec q$  según el orden de Sharkovskii ec. (2.6), entonces  $f$  tiene una órbita de período  $q$ . Esto implica que, si un mapa  $f$  tiene una órbita de período 8, entonces también tiene al menos una de período 4, una de período 2 y un punto fijo. De igual modo, si  $f$  tiene un ciclo de período 3, entonces tiene todos los ciclos periódicos.

## 2.2. El mapa logístico

Un mapa logístico se obtiene al iterar la ecuación

$$x_{n+1} = f(r, x_n) = rx_n(1 - x_n), \quad (2.7)$$

a partir de una condición inicial  $x_0$ , donde  $x_n$  y  $x_{n+1}$  son dos estados consecutivos del mapa, y  $r$  es el parámetro de control. En 1976, el biólogo Robert May [May, 1976] propuso el mapa logístico como un modelo de población en un sistema en el que los recursos son limitados. El crecimiento exponencial dado por la parte  $x_{n+1} = rx_n$  resulta limitado por la no linealidad  $-rx_n^2$ , que representa la competencia entre los individuos por los recursos compartidos. May observó que aunque el sistema se presenta como matemáticamente sencillo, sus órbitas tienen un comportamiento complejo. Se restringe el parámetro de control  $r$  al rango  $(0, 4]$  para que  $f(r, x_n)$  mapee el intervalo  $0 \leq x_n \leq 1$  en sí mismo.

Para poder analizar la dinámica del mapa, en primer lugar se determinan los puntos fijos, en función del parámetro  $r$ ,

$$f(r, x^*) = x^* \Rightarrow x^* = rx^*(1 - x^*)$$

de donde se obtienen dos puntos fijos  $x_1^* = 0$  y  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$ . Además, para poder clasificar dichos puntos, se determina  $f'(r, x)$

$$f'(r, x) = r(1 - 2x). \quad (2.8)$$

Cuando  $0 < r < 1$ , el mapa sólo presenta el punto fijo en  $x_1^* = 0$  ya que en ese rango  $x_2^* < 0$ . Evaluando la derivada, ec. (2.8), en el punto fijo se obtiene que  $|f'(r, 0)| = r < 1$ , y por el Teorema de Estabilidad se tiene que  $x_1^* = 0$  es un punto fijo estable. De este modo, cada condición inicial entre 0 y 1 es atraída a este sumidero. En términos del modelo poblacional, con tasas de reproducción bajas, las poblaciones pequeñas tienden a desaparecer.

Si  $1 < r < 3$ , entonces  $x_1^* = 0$  es un punto fijo inestable, ya que  $|f'(r, 0)| = r > 1$ . El mapa además tiene un punto fijo estable en  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$ , ya que al evaluar la derivada, ec. (2.8), se obtiene  $|f'(r, x_2^*)| = |2 - r|$ , que es menor que 1 en el intervalo. Esto se interpreta en el modelo poblacional, que las poblaciones pequeñas crecen a un estado estable de valor  $x = \frac{r-1}{r}$ .

Para  $r > 3$ , el punto fijo  $x_2^* = \frac{r-1}{r}$  es inestable ya que  $|f'(r, x_2^*)| > 1$ , y un período 2 estable toma su lugar. Para confirmarlo se analiza la segunda iteración del mapa

$$f^2(r, x) = r^2x(1-x)[1-rx(1-x)]. \quad (2.9)$$

Con el fin de encontrar los valores  $p_1$  y  $p_2$ , se resuelve la ecuación de cuarto grado  $f^2(r, x) = x$ ,

$$r^2x(1-x)[1-rx(1-x)] = x.$$

Se observa que los puntos fijos  $x^* = 0$  y  $x^* = 1$  son soluciones triviales de esta ecuación, y corresponden a los puntos fijos de  $f(r, x)$ . Además se obtienen las raíces

$$p_1, p_2 = \frac{(r+1) \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r} \quad (2.10)$$

que son reales para  $r > 3$ . Por lo tanto, existe un período 2 para todo  $r > 3$ . En  $r = 3$  las raíces coinciden en  $x^* = 1 - \frac{1}{r} = \frac{2}{3}$ . Para  $r < 3$  las raíces son complejas, lo que significa que no existe una órbita de período 2.

Cuando  $r$  crece por encima de  $1 + \sqrt{6} \approx 3.45$ , el período 2 se vuelve inestable. Esto puede verificarse, derivando  $f^2(r, x)$ , ec. (2.9),

$$(f^2(r, x))' = r^2 - 2r^2x - 2r^3x + 6r^3x^2 - 4r^3x^3,$$

y sustituyendo  $r = 1 + \sqrt{6}$ , para obtener

$$(f^2(1 + \sqrt{6}, x))' = (1 + \sqrt{6})^2 - 2(1 + \sqrt{6})^2x - 2(1 + \sqrt{6})^3x + 6(1 + \sqrt{6})^3x^2 - 4(1 + \sqrt{6})^3x^3,$$

cuyas raíces

$$p_1^*, p_2^* = \frac{(1 + \sqrt{6} \pm \sqrt{5})}{(2 + 2\sqrt{6})}$$

coinciden con la ec. (2.10) para ese valor de  $r$ .

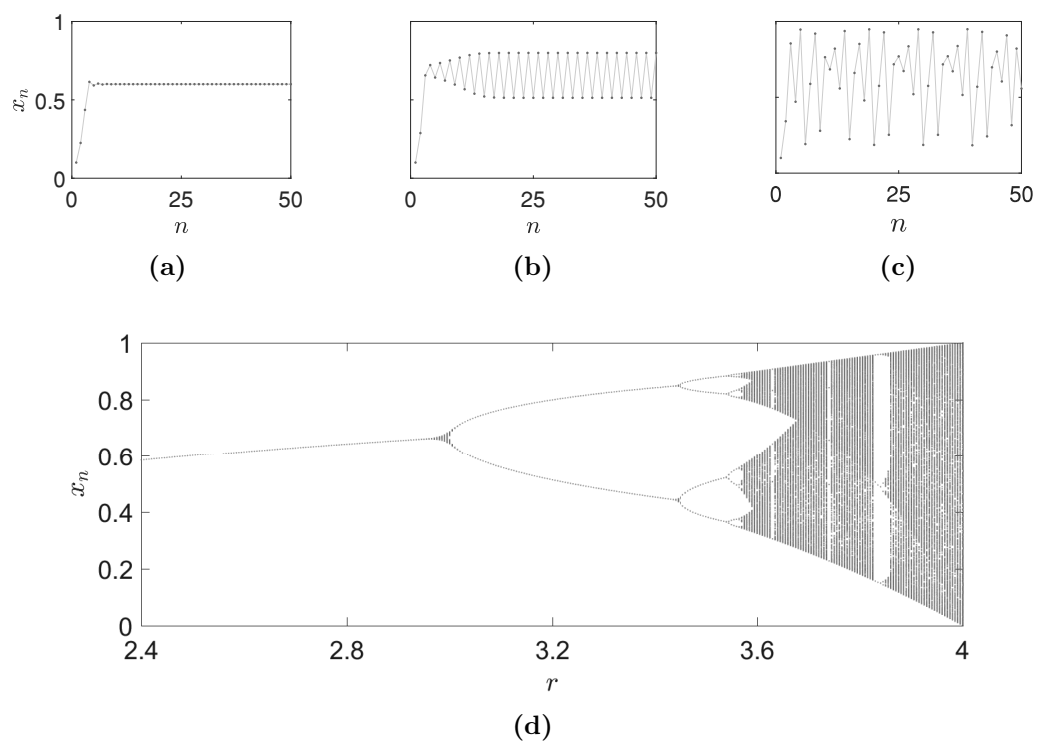
Para valores ligeramente más grandes de  $r$ , el comportamiento de los puntos periódicos de  $f(r, x)$  se vuelve más complicado. Nuevas órbitas periódicas surgen a medida que se incrementa de 3.45 a 4.

### 2.2.1. Bifurcaciones

El término **bifurcación** se refiere a cambios significativos en el conjunto de puntos fijos, periódicos u otros conjuntos de interés dinámico [Alligood et al., 1996]. La bifurcación de un sistema fue reportada por primera vez por el matemático francés Henri Poincaré [Poincaré, 1885]. El estudio de la bifurcación se ocupa de cómo ocurre el cambio estructural cuando los parámetros están cambiando. El cambio estructural y el comportamiento de transición de un sistema son la parte central de la evolución dinámica. El punto en el que se produce la bifurcación se conoce como punto de bifurcación o crítico. El comportamiento del punto fijo y la naturaleza de las trayectorias pueden cambiar drásticamente en los puntos de bifurcación. Cuando ocurre la bifurcación, la condición de atractor y repelente se altera en general. El diagrama de los conjuntos localmente atractivos del sistema en función de los valores de los parámetros se conoce como diagrama de bifurcaciones [Layek, 2015].

Un **diagrama de bifurcación** muestra los valores asintóticos (puntos fijos, órbitas periódicas u otros conjuntos de atracción) de un sistema en función de un parámetro de control. Esta representación permite ver el comportamiento a largo plazo para todos los valores de  $r$  a la vez, ya que representa el atractor del sistema en función de  $r$ .

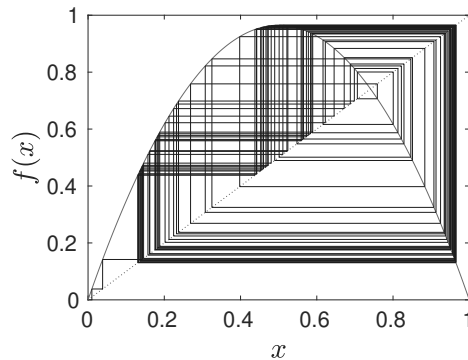
Los tres paneles superiores de la fig. 2.5 muestran series temporales correspondientes a diferentes dinámicas del mapa logístico, las cuales incluyen el comportamiento transitorio y asintótico. El panel inferior de la fig. 2.5 mues-



**Figura 2.5:** Señales temporales para 3 dinámicas diferentes de un mapa logístico: (a) punto fijo con  $r = 2.5$ , (b) señal periódica con  $r = 3.2$  y (c) señal caótica correspondiente a  $r = 3.8$ . (d) Diagrama de bifurcaciones obtenido numéricamente al iterar el mapa logístico  $2^{12}$  veces para cada valor del parámetro  $r$  considerado en el intervalo  $2.4 \leq r \leq 4.0$ .

tra el correspondiente diagrama de bifurcaciones, el cual exhibe únicamente el comportamiento asintótico.

La dinámica de punto fijo se mantiene hasta  $r = 3.0$ , donde se produce la primer bifurcación que conduce a un período 2. En  $r \approx 3.45$  comienza una solución de período 4, la cual se mantiene hasta  $r \approx 3.54$ , donde se duplicará nuevamente el período, comenzando así una cascada de bifurcaciones. De hecho, hay una secuencia completa de sumideros periódicos, uno para cada período  $2^n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Dicha secuencia se denomina *cascada de duplicación de período*. En  $r \approx 3.57$  comienza a observarse la dinámica caótica. Para otros valores del parámetro  $r$ , la órbita parece completar aleatoriamente todo el intervalo  $[0, 1]$ , o un subintervalo. En la fig. 2.6 se muestra el diagrama de telaraña para  $r = 3.86$ . Estos conjuntos de atracción, llamados *atractores extraños*, pueden aparecer o desaparecer abruptamente, o cambiar el tamaño de forma discontinua. Este fenómeno llamado *crisis* es evidente en varios valores del parámetro  $r$ .

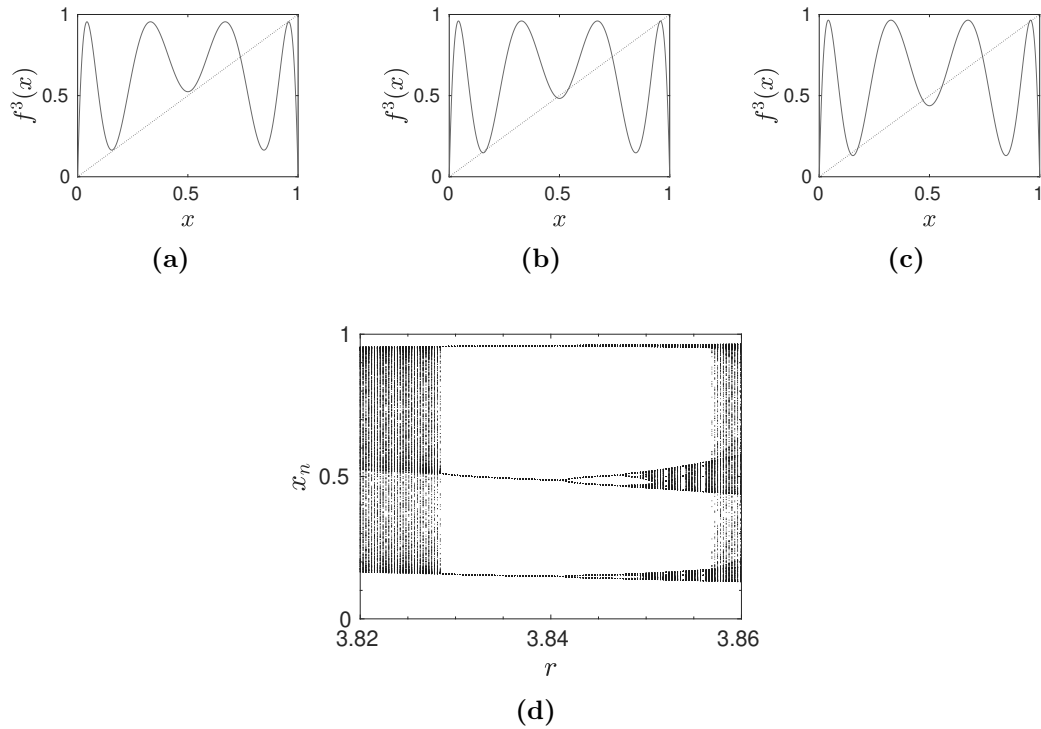


**Figura 2.6:** Diagrama de telaraña de la trayectoria de  $f(x) = 3.86x(1 - x)$ , en el rango  $[0,1]$ , y cuya condición inicial  $x_0 = 0.01$ .

Las explosiones sucesivas de los diagramas de bifurcación revelan otra característica interesante, las **ventanas periódicas**. Una ventana de período tres, por ejemplo, se aprecia en en la fig. 2.5(d), en el rango  $3.83 \lesssim r \lesssim 3.85$ . Esto se refiere a un conjunto de valores del parámetro para los cuales hay un sumidero periódico, en este caso un sumidero de período tres, que se ubica entre dos zonas caóticas. Dado que un punto de período tres de  $f(r, x)$  es un punto fijo de la tercera iteración  $f^3(r, x)$ , la creación del sumidero de período tres se puede apreciar al ver el desarrollo de la gráfica de  $f^3(r, x)$  como un movimiento de 3.82 a 3.86.

En la fig. 2.7 se representa la tercera iteración,  $f^3(r, x)$ , del mapa logístico,

ec. (2.7), para 3 valores del parámetro  $r$  en torno a una ventana periódica. También se muestra el diagrama de bifurcaciones en el mismo rango de valores. El panel (a), revela que para  $r = 3.82$  la órbita de período tres aún no se ha formado. Este valor del parámetro ( $r = 3.82$ ) corresponde al extremo izquierdo de la ventana periódica que se observa en el panel (d). En la fig. 2.7 (b), la órbita de período 3 se ha formado, y aparece como tres intersecciones con la diagonal  $y = x$ , ya que cada punto de un período 3 de  $f$  es un punto fijo de  $f^3$ . Como se desprende de la figura, la forma del gráfico obliga a que se creen simultáneamente dos órbitas de período 3.



**Figura 2.7:** (Arriba) Gráficos de la tercera iteración,  $f^3(r, x)$ , del mapa logístico  $f(r, x) = rx(1 - x)$ . Se muestran tres valores diferentes del parámetro: (a)  $r = 3.82$  (b)  $r = 3.84$  (c)  $r = 3.86$ . (Abajo, d) Diagrama de bifurcaciones del mapa logístico en función del parámetro, en el intervalo  $3.82 \leq r \leq 3.86$ , donde se observa en detalle una ventana periódica.

Un corte vertical al centro del diagrama del panel (d) muestra que existe un sumidero de período 3. En el panel (c) de la fig. 2.7, donde  $r = 3.86$ , el período de tres sumideros se ha convertido en una fuente, lo que se corresponde al lado derecho del diagrama (d). La desaparición del período tres como un atractor coincide con una bifurcación de duplicación de período, que crea un sumidero

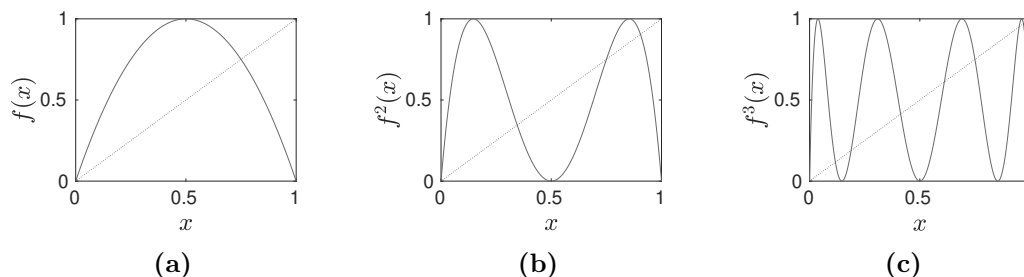
de período seis, que luego tiene un destino similar [Alligood et al., 1996].

## 2.2.2. Caos

El caso  $r = 4.0$  resulta de especial interés. La gráfica de  $f(x) = 4x(1-x)$  se muestra en la fig. 2.8(a), la cual si bien es una parábola, el mapa definido por  $f$  tiene un comportamiento dinámico muy rico. Para empezar, se distinguen dos intersecciones con la recta  $y = x$  en los puntos  $x = 0$  y  $x = \frac{3}{4}$ , por lo que hay dos puntos fijos. Dado que

$$f'(r, x) = 4(1 - 2x)$$

se obtiene que  $f'(r, 0) = 4 > 1$  y  $f'(r, \frac{3}{4}) = 2 > 1$ , por lo que ambos puntos fijos son inestables. Para buscar órbitas periódicas se representan las gráficas de  $y = f^k(r, x)$ .



**Figura 2.8:** Gráficos con  $r = 4.0$  de (a) el mapa logístico  $f(x) = rx(1-x)$ , (b) la segunda iteración  $f^2(x)$  y (c) la tercera iteración  $f^3(x)$ .

La gráfica de  $y = f^2(r, x)$  se presenta en la fig. 2.8(b). Se observa que la imagen de  $f$  en  $[0,1]$  es  $[0,1]$ , por lo que la gráfica se mantiene completamente dentro del cuadrado unitario, además  $f(r, \frac{1}{2}) = 1$  y  $f(1) = 0$  lo cual implica que  $f^2(r, \frac{1}{2}) = 0$ . Por otro lado, existen dos valores  $\{a_1, a_2\} \in [0, 1]$  tales que  $f^2(r, a_1) = f^2(r, a_2) = 1$ , esto es

$$f(r, a) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4a(1-a) = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 - a + \frac{1}{8} = 0$$

de donde se obtienen dos raíces que son

$$\{a_1, a_2\} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

De este análisis se desprende que  $f^2(r, x)$  tiene cuatro puntos fijos y, por lo tanto,  $f(r, x)$  tiene cuatro puntos de período uno o dos, dos de los cuales ya fueron identificados como los puntos fijos de  $f$ . El nuevo par de puntos,  $p_1$  y  $p_2$ , forman una órbita de período dos: es decir,  $f(r, p_1) = p_2$  y  $f(r, p_2) = p_1$ . Análogamente se encuentran los 8 puntos fijos de  $f^3(r, x)$ , resolviendo la ecuación  $f^3(r, x^*) = x^*$ .

Con cada iteración sucesiva de  $f$ , el número de puntos fijos se duplica, observándose en general, que  $f^k$  tiene  $2^k$  puntos fijos en  $[0, 1]$ . Por supuesto, para  $k > 1$ ,  $f^k$  tiene menos de  $2^k$  puntos del período  $k$ . Por ejemplo,  $x = 0$  es un punto de período uno y, por lo tanto, no un punto período  $k$  para  $k > 1$ , aunque es uno de los  $2^k$  puntos fijos de  $f^k$ .

La existencia de infinitas órbitas periódicas no implica en sí misma el tipo de imprevisibilidad generalmente asociada con los *mapas caóticos*, aunque sí la rica dinámica presente. El *caos* se identifica con la aperiodicidad de sus órbitas y la *dependencia sensible de las condiciones iniciales* [Guckenheimer, 1979]. La más conocida, y tal vez la más útil propiedad de un sistema caótico refiere de la separación exponencial de las órbitas, responsable de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Dado un mapa  $f$  en  $\mathbb{R}$ , decimos que un punto  $x_0$  tiene una **dependencia sensible de las condiciones iniciales** si hay una distancia  $d$  distinta de cero, de tal manera que puntos arbitrariamente cercanos de  $x_0$  finalmente superan la distancia  $d$  de la imagen correspondiente ( $f(x_0)$ ). Más precisamente, existe  $d > 0$  tal que cualquier vecindad  $E$  de  $x_0$  contiene un punto  $x$  tal que  $|f^k(x) - f^k(x_0)| \geq d$  para algún entero  $k$  no negativo [Alligood et al., 1996].

### Solución analítica y medida invariante para $r = 4$

A pesar de la sensibilidad a las condiciones iniciales, y a la impredecibilidad que esto conlleva para predecir el futuro de los estados del mapa, se puede deducir una solución analítica para el mapa logístico en  $r = 4$  [Poulin and Touchette, 2008]

$$x_n = \text{sen}^2(2^n \pi \theta_0), \quad (2.11)$$

donde  $\theta_0 = \frac{1}{\pi} \text{sin}^{-1} \sqrt{x_0}$ . La misma se obtiene por sustitución en la ec. (2.7) haciendo el cambio de coordenadas  $x_n = \text{sin}^2(\pi \theta_n)$ .

La importancia de este resultado se basa en el hecho de que  $x_n$  puede

evaluarse directamente, para cualquier condición inicial  $x_0$ , sin determinar los valores intermedios  $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ . Sin embargo, este resultado es válido únicamente para un mapa logístico con  $r = 4$ , y no se conocen resultados teóricos como (2.11) para otros valores del parámetro.

Para describir la evolución del sistema, generalmente se estudian las órbitas y sus propiedades. Sin embargo, también se puede extraer información relevante al estudiar cuál es la probabilidad de encontrar al sistema en uno u otro estado. Es decir, en vez de mirar la evolución temporal del sistema, se puede estudiar cómo se distribuyen los estados posibles en el dominio del mapa, i.e., el espacio de estados. Para esto, se necesita conocer la medida invariante del sistema dinámico. Se denomina *medida* a un método de asignación de un número a cada conjunto cerrado para el que se cumpla que:

1. para cualquier conjunto toma un valor no negativo, y
2. el valor correspondiente a la unión disjunta de un grupo de conjuntos es igual a la suma de los valores asignados de los conjuntos individuales.

Si una medida además verifica que su valor para todo el espacio es igual a 1, entonces se denomina *medida de probabilidad* [Alligood et al., 1996]. La *medida invariante* de un mapa puede entenderse como aquella que no cambia durante el curso de la evolución de las iteraciones del mismo. Más precisamente, dado un mapa  $f$  en el intervalo  $[0, 1]$ , se dice que una medida  $\mu$  es invariante bajo el mapa  $f$ , si para cualquier subconjunto  $S \subset [0, 1]$ , entonces [Shivamoggi, 2014]

$$\mu(S) = \mu[f(S)].$$

Para el caso particular del mapa logístico con  $r = 4$  se ha determinado la medida invariante del sistema [Poulin and Touchette, 2008] a partir de su densidad de probabilidad,  $\rho(x)$ . Específicamente, por medio de  $\mu(S) = \int_S \rho(x) dx$ , donde para  $x \in (0, 1)$  la densidad de probabilidad está dada por

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{x(1-x)}}. \tag{2.12}$$

Esta medida invariante se puede utilizar para caracterizar las propiedades del atractor. Un sistema dinámico dado puede tener muchos atractores, cada uno de ellos con su propia cuenca de atracción (diferentes conjuntos de condiciones iniciales conducen a diferentes atractores). Sin embargo, para una

cuenca dada de atracción, el atractor es el conjunto cerrado más pequeño. Para dinámicas caóticas, el límite que separa las cuencas de atracción suele ser un fractal, en cuyo caso, un cambio arbitrariamente pequeño en la condición inicial puede llevar a un comportamiento asintótico completamente diferente [Shivamoggi, 2014].

## Exponentes de Lyapunov

Aleksandr Mijáilovich Lyapunov (físico y matemático ruso) estudió, entre otras cosas, la estabilidad de sistemas dinámicos [Lyapunov, 1892]. En particular, aportó una herramienta para evaluar la *caoticidad promedio* de un sistema: los exponentes de Lyapunov. Estos exponentes miden la tasa media de divergencia (o convergencia) exponencial de trayectorias en el espacio de fase para cada condición inicial. Entonces, cualquier sistema que contenga al menos un exponente de Lyapunov positivo, se define como *caótico*.

Los exponentes de Lyapunov ( $\lambda$ ) proporcionan una caracterización útil de un sistema dinámico en términos de qué tan sensible es el sistema a pequeños cambios en sus condiciones iniciales [Alligood et al., 1996]. En muchas aplicaciones, es suficiente calcular solo el mayor exponente de Lyapunov,  $\lambda_{max}$ , ya que, en general,  $\lambda_{max} > 0$  implica la presencia de un comportamiento caótico, mientras que  $\lambda_{max} \leq 0$  indica un comportamiento periódico.

Para aplicar a un mapa unidimensional el concepto de exponente de Lyapunov, se considera una condición inicial  $x_0$  y otra muy próxima,  $x_0 + \delta_0$ . Tomando logaritmos y notando que  $\delta_n = f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)$ , se tiene que

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|, \quad (2.13)$$

donde se ha considerado el límite  $\delta_0 \rightarrow 0$ . Aplicando la regla de la cadena se tiene

$$(f^n)'(x_0) = \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i).$$

Sustituyendo este resultado en (2.13) se obtiene

$$\lambda(x_0) = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|. \quad (2.14)$$

Si la expresión (2.14) tiene límite para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \right\}, \quad (2.15)$$

a ese límite se le llama exponente de Lyapunov para la órbita que comienza en  $x_0$ . Cuando  $f$  tiene un único atractor,  $\lambda$  es independiente de  $x_0$ .

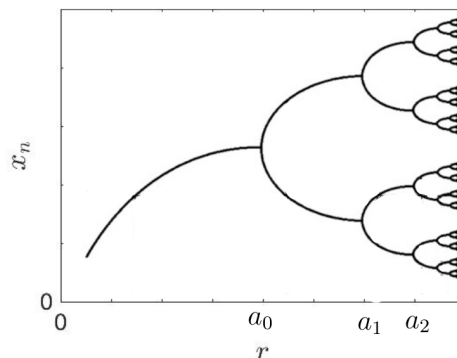
De este modo, considerando dos condiciones iniciales que difieren en una cantidad pequeña  $\delta_0$  se observa que cada una da lugar a una órbita, las cuales convergen o divergen exponencialmente dependiendo del valor de  $\lambda$ , ya que después de  $n$  iteraciones  $|\delta_n| = |\delta_0|e^{n\lambda}$ .

Para el caso del mapa logístico, se sustituye la expresión de la derivada de  $f$ , ec. (2.8), en (2.15), obteniéndose

$$\lambda(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-1} \ln |r(1 - 2x_n)| \quad (2.16)$$

### 2.2.3. Autosimilaridad y fractalidad

*Cascadas de bifurcaciones de duplicación de período* se han visto en gran cantidad de sistemas de baja dimensión que exhiben un comportamiento caótico, como por ejemplo modelos de osciladores neuronales [Ngouonkadi et al., 2016] o láseres [Hohl and Gavrielides, 1999]. Su relevancia yace en que la cascada de duplicación de período es quizás la ruta más fácilmente identificable hacia el caos para un sistema dinámico. Los trabajos experimentales que intentan identificar y estudiar el caos en sistemas reales a menudo se concentran en esta característica.



**Figura 2.9:** Esquema de un diagrama de bifurcaciones en función del parámetro  $r$ , donde se identifican los puntos de bifurcación  $\{a_0, a_1, \dots\}$ .

En dichas cascadas se observa que una órbita periódica estable se vuelve

inestable a medida que se varía el parámetro de control y es reemplazada por una órbita periódica estable con el doble de su período. Al continuar variando el parámetro de control, esta nueva órbita se vuelve inestable y es a su vez reemplazada por una nueva órbita estable con un período nuevamente duplicado. El proceso continúa a través de una infinidad de bifurcaciones de duplicación de período, como se esquematiza en la fig. 2.9. La secuencia de bifurcaciones de duplicación de período se da de la siguiente manera

$$\text{Período } 1 \rightarrow \text{Período } 2 \rightarrow \text{Período } 2^2 \rightarrow \dots \rightarrow \text{Período } \infty$$

Poincaré fue el primero en dar una descripción matemática completa de una bifurcación que duplicaba el período, y Myrberg [Myrberg, 1962] describió por primera vez una cascada. Las cascadas se hicieron muy conocidas con las aplicaciones publicadas por May [May, 1976].

En 1978, M. Feigenbaum observó que las razones de la distancia del parámetro entre dos duplicaciones sucesivas del período se aproximan a una constante a medida que los períodos aumentan hasta el infinito [Feigenbaum, 1978]. Además, esta constante es universal en el sentido de que se observa en una variedad de sistemas dinámicos. Específicamente, si la  $n$ -ésima duplicación del período ocurre en  $a = a_n$  (ver fig. 2.9), entonces [Feigenbaum, 1978]

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_n - a_{n-1}} = 4.669201609\dots \quad (2.17)$$

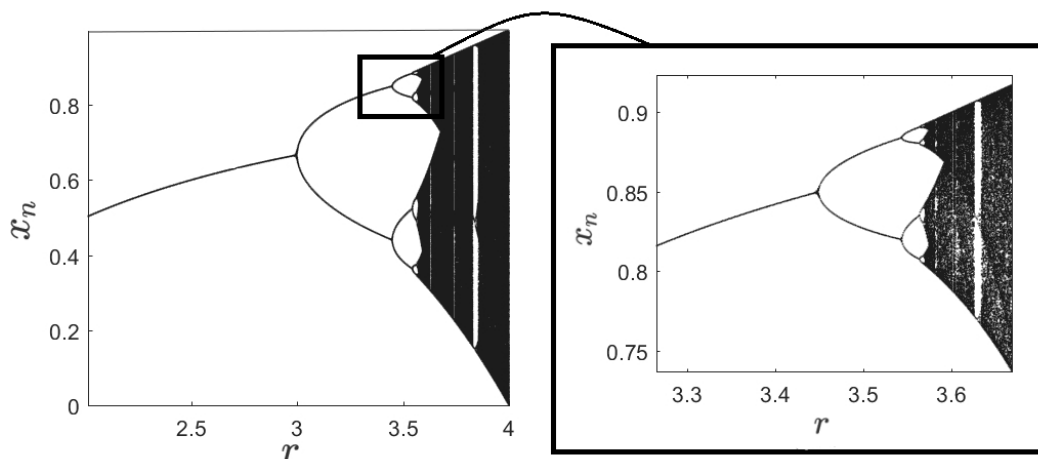
En la actualidad,  $\delta$  se conoce como la *constante de Feigenbaum*, y el valor de  $\delta_n$  para las primeras bifurcaciones del mapa logístico es [Layek, 2015]

$$\delta_1 = \frac{a_1 - a_0}{a_2 - a_1} = 4.75031. \quad (2.18)$$

En 1981, el grupo formado por los investigadores Giglio, Musazzi y Perini encontraron una cascada de período 2, y hasta el período 16, al medir temperaturas en una celda de Rayleigh-Bénard. Utilizando el gradiente de temperatura como parámetro de bifurcación, estimaron la constante de Feigenbaum en aproximadamente 4.3 [Giglio et al., 1981]. En el mismo año, P. Linsay produjo una cascada similar al variar el voltaje de activación en un circuito RLC controlado periódicamente [Linsay, 1981]. Su estimación de la constante de Feigenbaum fue de  $4.5 \pm 0.6$ . Estos resultados confirmaron la universalidad del fenómeno.

En ejemplos anteriores, como el de la fig. 2.6, se observó cómo se conforman conjuntos *complicados* en el espacio de fase. Este tipo de conjuntos se

denominan *atractores extraños*. En 1963, Lorenz [Lorenz, 1963] observó que la geometría de este conjunto debe ser muy peculiar, algo así como un *complejo infinito de superficies*. Las herramientas para analizarlos provienen de la geometría fractal. En términos generales, los fractales son formas geométricas complejas con una estructura fina en escalas arbitrariamente pequeñas [Strogatz, 1994]. Por lo general, tienen algún grado de autosimilitud. En otras palabras, si ampliamos una pequeña parte de un fractal, veremos características que recuerdan al conjunto. A veces la similitud es exacta; más a menudo es sólo aproximada. Los diagramas de bifurcaciones muestran un comportamiento de escala autosimilar en la cascada del mapa, como se muestra en la fig. 2.10.



**Figura 2.10:** Diagrama de bifurcaciones correspondiente al mapa logístico en el intervalo  $2 \leq r \leq 4$ , y su ampliación en el intervalo  $3.28 \leq r \leq 3.68$ , en donde se pone de manifiesto el comportamiento de escala.

## 2.3. Histéresis

La palabra histéresis deriva del griego «ὕστέρησις», que significa *retraso*. Fue introducida en el vocabulario científico hace más de 120 años por el físico escocés, Alfred Ewing, de la siguiente manera: «Cuando hay dos cantidades  $M$  y  $N$ , de tal manera que las variaciones cíclicas  $N$  causan una variación cíclica  $M$ , entonces, si los cambios de  $M$  se retrasan con respecto a los de  $N$ , podemos decir que existe histéresis en la relación de  $M$  y  $N$ » [Ewing, 1885]. La histéresis corresponde a cambiar de conjunto de atracción cuando se incrementa respecto a cuando se decrementa el parámetro de control [Shivamoggi, 2014].

Desde su introducción, el fenómeno de histéresis es principalmente conocido en los materiales ferromagnéticos. Cuando está presente un campo externo  $\vec{B}_0$ , los dominios magnéticos del material tienden a orientarse paralelamente al campo. A medida que se incrementa el campo externo, se alcanza un punto en que casi todos los momentos magnéticos en el material ferromagnético están alineados en forma paralela con  $\vec{B}_0$ . Esta condición se llama *magnetización de saturación*; una vez que ésta se alcanza, un mayor incremento del campo externo ya no ocasiona un aumento en la magnetización ni en el campo adicional causado por la magnetización [Young et al., 2009].

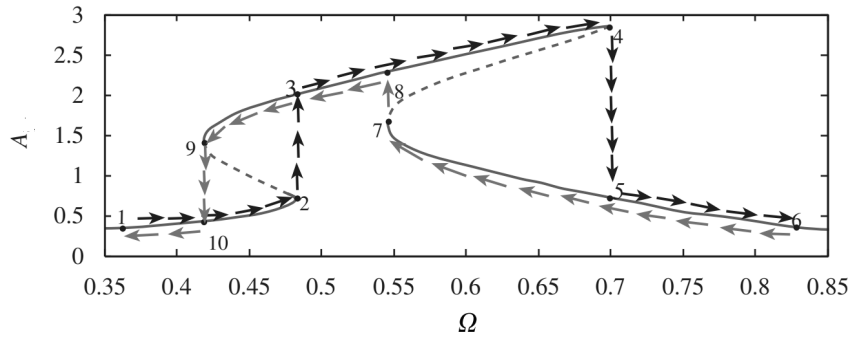
Sin embargo, los fenómenos de histéresis son comunes en numerosos sistemas físicos, además de en los ferromagnéticos. Por ejemplo en sistemas mecánicos, ecológicos y biológicos, donde reflejan los efectos de la memoria y la irreversibilidad [Krasnosel'skii, 1983]. En particular, el modelo de oscilador de Duffing es un ejemplo de sistema en el que se observa la histéresis [Kovacic et al., 2008], y está dado por

$$\ddot{y} + 2\zeta\dot{y} + \gamma y^3 = f_0 + f_1 \cos(\Omega t), \quad (2.19)$$

donde  $y$  es el desplazamiento,  $\zeta$  es la razón de amortiguamiento,  $\gamma$  es un parámetro relacionado con la no linealidad,  $f_0$  es una fuerza constante y  $f_1$  y  $\Omega$  son el valor y la frecuencia de la excitación armónica, respectivamente. En dicho trabajo la fuerza de excitación y la relación de amortiguación se mantienen fijas, mientras que la frecuencia se incrementa y decremanta. La fig. 2.11 muestra la amplitud del desplazamiento,  $A$  (adimensionada), en función de la frecuencia obtenidas en tal caso. A medida que la frecuencia aumenta la amplitud, sigue la ruta indicada como 1–2–3–4–5–6. El punto 2 y el punto 4 son puntos de salto. Al reducir la frecuencia partir del punto 6, se sigue la ruta 6–7–8–9–10. En este sentido, el punto 7 y el punto 9 corresponden a puntos de saltos.

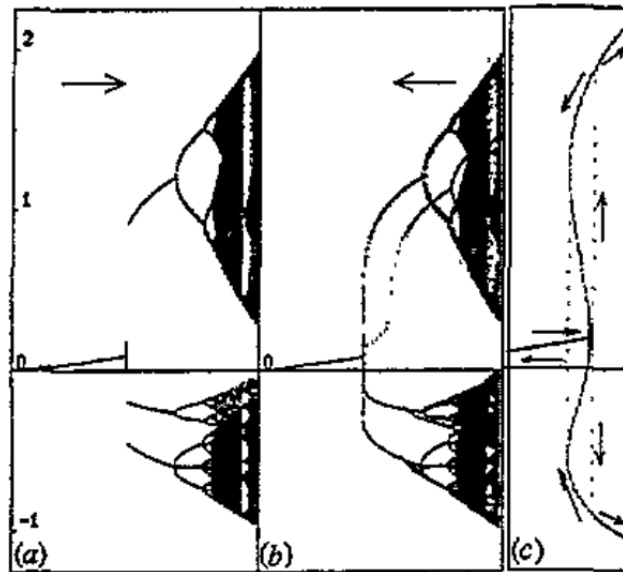
También se ha observado, por ejemplo, un comportamiento que muestra la presencia de histéresis al estudiar la fuerza de fricción en sistemas experimentales [Wojewoda et al., 2008], e incluso se ha demostrado que la histéresis está presente a nivel atómico [Benson et al., 1994].

En el estudio de mapas, la histéresis está asociada al cambio en el conjunto de atracción del sistema en el proceso de incrementar y decrementar el parámetro de control. La histéresis se ha observado en mapas caóticos acoplados, por ejemplo, variando el parámetro multiplicativo del mapa. En



**Figura 2.11:** Saltos observados en los valores de la amplitud al incrementar y decrementar la frecuencia de forzamiento  $\Omega$  para un oscilador de Duffing [Kovacic et al., 2008].

[Neufeld and Vicsek, 1995] se analizan diferentes dinámicas de un sistema formado por mapas gaussianos con un acople *no* difusivo. La fig. 2.12 muestra los diagramas de bifurcaciones correspondientes y el ciclo de histéresis obtenido. También se ha reportado histéresis en mapas logísticos acoplados, como por



**Figura 2.12:** Diagrama de bifurcaciones obtenido al aumentar el parámetro del mapa entre los valores 0 y 1, y (b) al disminuir el parámetro nuevamente hasta cero. De esta manera se observa una histéresis en el intervalo (0.41 – 0.48). En (c) el ciclo de histéresis se amplía [Neufeld and Vicsek, 1995].

ejemplo [Gu et al., 1984]. Allí se estudian numéricamente mapas logísticos con acople multiplicativo, y se observa la histéresis en función del parámetro de los mapas.

## 2.4. Mapas logísticos acoplados

### 2.4.1. Dos Mapas logísticos

A continuación se considera el caso de dos mapas acoplados, los cuales serán representados por las variables de estado  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$ , siendo los parámetros de control  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente. La evolución de estos mapas acoplados se determina a partir de [LHer et al., 2016]

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = (1 - \varepsilon)f(r_1, x_n^{(1)}) + \varepsilon f(r_2, x_n^{(2)}) \\ x_{n+1}^{(2)} = (1 - \varepsilon)f(r_2, x_n^{(2)}) + \varepsilon f(r_1, x_n^{(1)}) \end{cases}, \quad (2.20)$$

donde  $\varepsilon$  representa la intensidad del acople y  $f(r, x_n)$  corresponde la función logística (2.7).

La ec. (2.20) puede reescribirse como

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = f(r_1, x_n^{(1)}) - \varepsilon [f(r_1, x_n^{(1)}) - f(r_2, x_n^{(2)})] \\ x_{n+1}^{(2)} = f(r_2, x_n^{(2)}) - \varepsilon [f(r_2, x_n^{(2)}) - f(r_1, x_n^{(1)})] \end{cases}. \quad (2.21)$$

Como es esperable para una intensidad de acoplamiento nula,  $\varepsilon = 0$ , el segundo término de cada ecuación en (2.21) se anula, y el sistema se reduce a

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = f(r_1, x_n^{(1)}) \\ x_{n+1}^{(2)} = f(r_2, x_n^{(2)}) \end{cases}, \quad (2.22)$$

que corresponde a dos mapas aislados. Para el caso de acoplamiento máximo,  $\varepsilon = 1$ , se obtiene

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = f(r_2, x_n^{(2)}) \\ x_{n+1}^{(2)} = f(r_1, x_n^{(1)}) \end{cases}, \quad (2.23)$$

lo que implica que cada mapa responde completamente condicionado a la dinámica del otro mapa. Otro caso en el que el sistema responde completamente desacoplado independientemente de la intensidad del acople es cuando

$$[f(r_1, x_n^{(1)}) - f(r_2, x_n^{(2)})] = 0 \quad (2.24)$$

y por lo tanto el sistema se reduce al de la ec. (2.22). Por ejemplo, el término de acoplamiento se vuelve nulo cuando los sistemas están síncronos, ya que la

evolución de ambos es idéntica, de manera que  $f(r_1, x_n^{(1)}) = f(r_2, x_n^{(2)})$ . O sea, que cuando los sistemas están síncronos se verifica la ec. (2.24), y efectivamente están desacoplados y actuando como un único sistema aislado.

Si se cambia  $\varepsilon$  por  $(1 - \varepsilon)$ , el sistema (2.21) se convierte en

$$\begin{cases} x_{n+1}^{(1)} = f(r_2, x_n^{(2)}) - \varepsilon \left[ f(r_2, x_n^{(2)}) - f(r_1, x_n^{(1)}) \right] \\ x_{n+1}^{(2)} = f(r_1, x_n^{(1)}) - \varepsilon \left[ f(r_1, x_n^{(1)}) - f(r_2, x_n^{(2)}) \right] \end{cases}, \quad (2.25)$$

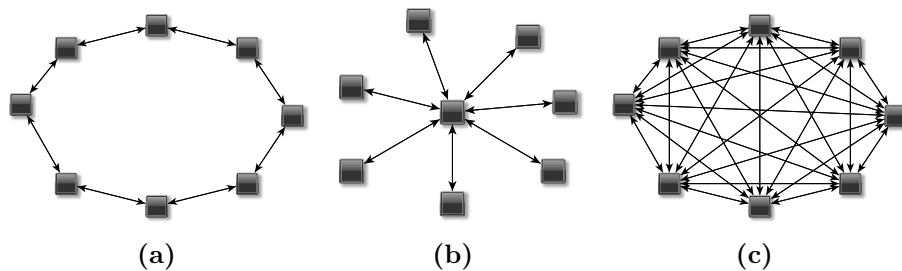
que es en esencia el mismo sistema. Lo mismo sucede si se intercambian los parámetros  $r_1$  por  $r_2$ , ya que el sistema (2.21) se reduce al (2.25).

## 2.4.2. $N$ Mapas logísticos

La ecuación de acople (2.20) propuesta para dos mapas puede generalizarse, resultando [Kaneko, 1990]

$$x_{n+1}^{(i)} = (1 - \varepsilon)f(r_i, x_n^{(i)}) + \varepsilon \sum_{j=1}^N \frac{A_{ij}}{d_i} f(r_j, x_n^{(j)}) \quad (2.26)$$

donde  $A_{ij}$  corresponde a la entrada  $ij$  de la matriz de adyacencia, y  $d_i = \sum_j A_{ij}$  es el grado del  $i$ -ésimo mapa. La configuración puede caracterizarse por una *matriz de adyacencia*, en la cual cada elemento ( $A_{ij}$ ) de la matriz es  $A_{ij} = 1$  si el par de mapas  $i, j$  están conectados entre sí, y  $A_{ij} = 0$ , si no hay conexión. En esta tesis la matriz de adyacencia es siempre simétrica, como en la fig. 2.13.



**Figura 2.13:** Tres configuraciones de una red de 8 nodos: (a) anillo, (b) estrella y (c) todos con todos.

Para generalizar el análisis realizado para el caso de dos mapas obsérvese la fig. 2.13, donde se presentan tres posibles configuraciones para ocho mapas acoplados. El primero de los casos presentados es el *anillo*, en el cual cada

mapa del conjunto está conectado únicamente con los dos mapas adyacentes a cada lado. Luego se presenta una configuración de *estrella*, donde el mapa central está conectado a todos los de la periferia, pero éstos sólo interactúan directamente con el central. Por último, la configuración completa o *todos con todos* corresponde al caso en que cada mapa del conjunto se interconecta con todos los demás.

Se define el campo medio global instantáneo,  $h_g(n)$ , para la ec. (2.26) como

$$h_g(n) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(r_i, x_n^{(i)}), \quad (2.27)$$

y se define el campo medio local instantáneo,  $h_i^{(i)}(n)$ , para el  $i$ -ésimo mapa de la ec. (2.26) como

$$h_i^{(i)}(n) = \frac{1}{d_i} \sum_{j=1}^N A_{ij} f(r_j, x_n^{(j)}). \quad (2.28)$$

Analizando el caso del anillo, fig. 2.13 (a), se observa que es una configuración homogénea ya que cada mapa del conjunto tiene exactamente las mismas conexiones que los demás. Sin embargo, para esta configuración existe una gran diferencia entre el campo medio global, ec. 2.27, que involucra a los 8 mapas, y el campo medio local, ec. 2.28, que involucra únicamente a 2 mapas vecinos.

La configuración todos con todos, fig. 2.13 (c), también es homogénea en sus conexiones, ya que cada mapa tiene la misma cantidad de vecinos. Además, en este caso, el campo medio local y el global son aproximadamente idénticos. Específicamente, en la ec. (2.28)  $d_i = N - 1$  para todos los  $i$  y  $A_{ij} = 1 - \delta_{ij}$ , donde  $\delta_{ij}$  es la función de Kronecker.

La configuración estrella, que se representa en el panel 2.13 (b), es altamente heterogénea. Esto se debe a que si bien entre los mapas integrantes de la periferia las conexiones son idénticas (únicamente 1 enlace con el centro), el mapa central tiene la mayor diferencia posible, es decir,  $N - 1$  conexiones. De igual modo, al analizar el campo medio, se observa que el mapa central experimenta un campo medio local debido a todo el conjunto, y por lo tanto coincidente con el campo global. Sin embargo, los mapas integrantes de la periferia experimentan un campo medio local debido únicamente a la conexión con el mapa central, y por lo tanto muy diferente al global.



# Capítulo 3

## Metodología

En este capítulo se realiza una descripción de la metodología de trabajo, tanto del sistema experimental como de la implementación numérica y del análisis de los datos obtenidos. En la primera sección se presenta el montaje general, donde se detalla la implementación electrónica y el acoplamiento de los mapas. En la segunda sección se describe el proceso de análisis de los datos, la discretización de la señal y se introducen los parámetros de orden que se emplean para analizar el comportamiento del sistema. En la última sección se brindan los detalles de la simulación.

### 3.1. Implementación electrónica

En este trabajo de tesis se realizó la implementación de un circuito electrónico que simula el comportamiento de un mapa logístico, de acuerdo con la ec. (2.7). El proceso de adquisición de los datos, la variación del parámetro de control y de la intensidad del acoplamiento fue automatizado. Para ello se empleó una tarjeta adquisidora NI USB 6216. La misma posee una resolución de 16 bits y cuenta con hasta 32 líneas de entrada (o salida) digitales, 16 entradas y 2 salidas analógicas (cuya resolución es  $\approx 3.5\mu V$ ), siendo su frecuencia de muestreo máxima de  $400\text{KHz}$  [NI, 2009]. Trabajando en el rango  $\pm 10V$ , la resolución de las entradas analógicas es de  $305\mu V$ .

El diseño del circuito<sup>1</sup> empleado está dividido en dos grandes bloques: el *bloque mapa logístico* (BML), el cual efectúa analógicamente la función logística, y el *bloque de muestreo y retención* (BMR), que es el responsable de generar

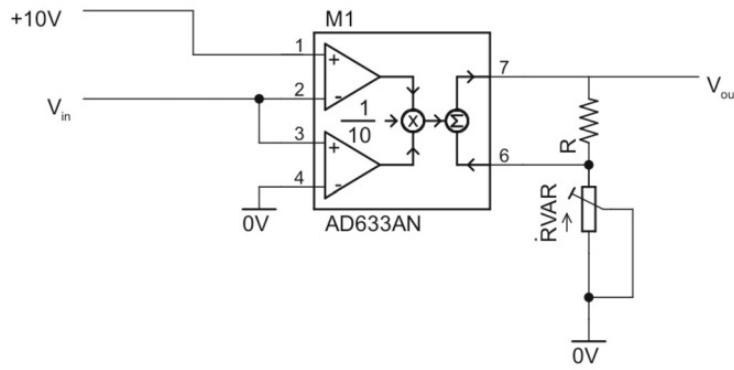
---

<sup>1</sup>En el anexo 1 se presentan todos los diagramas de los circuitos empleados.

la señal a trazos [Horowitz and Hill, 2015]. Cabe resaltar que en esta implementación electrónica no es posible controlar las condiciones iniciales.

### 3.1.1. Bloque mapa logístico

La fig. 3.1 muestra un esquema del circuito que implementa la función logística. Para su construcción se utilizó un multiplicador analógico AD633AN, cuyo rango de entrada es  $\pm 10V$ , el de salida  $\pm 11V$  y el voltaje de saturación,  $V_s = 10V$ , (dato proporcionado por el fabricante). Este dispositivo permite realizar el producto de dos señales eléctricas analógicas de entrada ( $V_{in}$  y  $+10V$  en este caso) generando la señal  $V_{out}$  a la salida del sistema. Se utilizó una resistencia  $R = 1K\Omega$  con una precisión de 1% y una resistencia variable  $R_{var}$  en el rango de entre 0 y  $3K\Omega$ .



**Figura 3.1:** Diagrama del circuito electrónico que reproduce la función logística [LHer et al., 2016].

Aplicando las leyes de Kirchhoff, el voltaje a la salida del multiplicador está dado por<sup>1</sup> [LHer et al., 2016]:

$$V_{out}(t) = \left(1 + \frac{R_{var}}{R}\right) \frac{V_{in}(t)(V_s - V_{in}(t))}{V_s}. \quad (3.1)$$

Los voltajes del circuito electrónico pueden identificarse con las variables de estado de la ec. (2.7) mediante la siguiente transformación:  $x_n \rightarrow V_{in}/V_s$ ,  $x_{n+1} \rightarrow V_{out}/V_s$ , y el parámetro de control está dado por

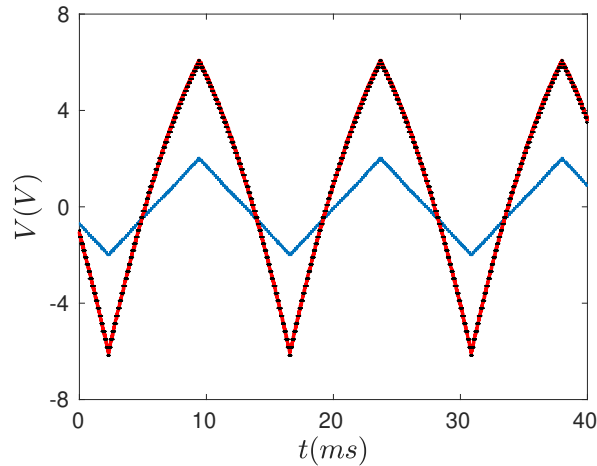
$$r \equiv \left(1 + \frac{R_{var}}{R}\right) \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Deducción en Anexo2.

Obsérvese que, a partir de la ec. (3.1), cuando  $r = 4$ , el voltaje puede superar  $V_s$  debido al ruido electrónico, saturando el multiplicador analógico. En consecuencia, en el análisis para caracterizar el sistema se establece  $r < 4$ , para que la saturación del multiplicador no constituya un problema.

La ec. (3.2) muestra que el control del parámetro  $r$  del mapa se logra a partir de la variación de la resistencia  $R_{var}$ . Para automatizar ese proceso se realizó una implementación electromecánica, que consiste en un motor *paso a paso* controlado desde la tarjeta, el cual se acopla a una resistencia variable. Así, cada posición del motor implica un valor de la variable  $R_{var}$ . De este modo, se logró un sistema automatizado de variación del parámetro del mapa, que permite barrer todo el rango de interés,  $1 \leq r < 4$ , respondiendo adecuadamente para incrementos ( $dr$ ) a partir de  $dr_{min} = 0.003$ . Como ese valor es el *paso mínimo*, se considera también la incertidumbre en el parámetro ( $\delta r$ ).

En la fig. 3.2 se muestra la respuesta medida del bloque BML. La línea azul muestra la señal de entrada, línea roja continua muestra la respuesta del bloque BML mientras que la línea negra a trazos representa la respuesta teórica obtenida mediante la ec. (3.1). Se obtiene una excelente concordancia entre la respuesta del BML y el modelo planteado en la ec. (3.1), con un error inferior al 3%.



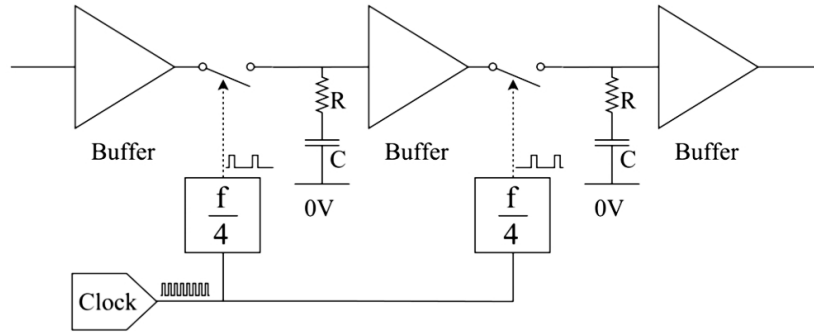
**Figura 3.2:** Voltajes medidos a la entrada (azul) y la salida (rojo) del bloque que implementa el mapa logístico. En negro se representa el  $V_{out}$  calculado.

### 3.1.2. Bloque de muestreo y retención

El bloque BMR, muestrea el voltaje de la señal analógica proveniente del BML y mantiene su valor constante durante un período de tiempo específico. De este modo, el resultado es una serie temporal analógica que varía sus valores paso a paso, modelando la evolución discreta de un mapa [LHer et al., 2016].

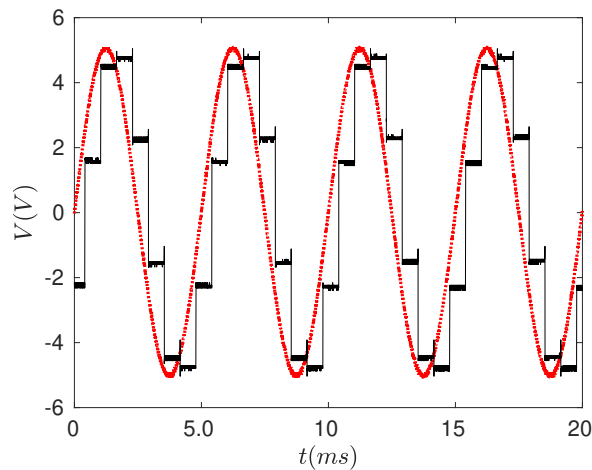
Dos conceptos temporales tienen especial importancia en el estudio de circuitos de muestreo y retención (*sample-and-hold*), y son el «tiempo de muestreo» y el «tiempo de retención». El primero marca el tiempo mínimo necesario para almacenar correctamente el valor de la entrada, y en este caso está dado por la frecuencia de muestreo de la tarjeta utilizada. El segundo es el tiempo que el dispositivo retiene la señal, y que está determinado por la que se llamará frecuencia del BMR ( $f_{MR}$ ).

Para la implementación de este bloque se utilizaron dos operacionales LF398 representados en la fig. 3.3 por los dos *buffers* más a la izquierda y un amplificador operacional, el *buffer* de la derecha [Suneel, 2006]. Su funcionamiento básicamente consiste en muestrear el voltaje desde el terminal de entrada en un instante, manteniendo su valor en el condensador un cierto tiempo (tiempo de retención) y luego liberar la señal desde el terminal de salida un período de reloj posterior. Cada dos períodos de reloj, los roles de ambos LF398 se intercambian. Este cambio resulta en una evolución discontinua del circuito completo (BML más BMR), donde en cada instante de tiempo se obtiene un valor de  $x_n$ . La frecuencia óptima del reloj, que establece el lapso de tiempo entre valores consecutivos del voltaje de salida, se debe elegir teniendo en cuenta algunas restricciones experimentales. Por un lado, hay un límite dado por el tiempo que demora el BMR en cargar los condensadores y por otro lado, la existencia de capacitancia parásita, corrientes de polarización en los amplificadores operacionales u otros componentes. Además, el tiempo de respuesta para que el resto del circuito se estabilice después de cualquier cambio, es decir, el tiempo requerido por el BML y el acoplamiento para estabilizar la salida, constituye un límite superior para la frecuencia del reloj. Sin embargo, desde un punto de vista práctico, la frecuencia del reloj debe ser lo más alta posible para reducir el tiempo necesario para realizar los experimentos y obtener series temporales largas. En consecuencia, se ha elegido una frecuencia de trabajo en el rango entre  $10kHz$  y  $20kHz$ .



**Figura 3.3:** Diagrama esquemático del bloque de muestreo y retención. Este bloque produce una evolución paso a paso, modelando la evolución discreta de un mapa [LHer et al., 2016].

Para evaluar el funcionamiento del bloque, se lo alimentó con una señal sinusoidal y se analizó el voltaje a la salida del mismo. La fig. 3.4 muestra la señal de entrada (rojo) y la señal a trazos a la salida del BMR (negro). En el caso que se muestra, correspondiente al prototipo montado inicialmente, la frecuencia del BMR es  $f_{MR} = 1,6KHz$ , la cual permite registrar 8 puntos por ciclo de la señal senoidal de  $0,20KHz$  analizada. Para las demás medidas se ajustó  $f_{MR} \simeq 3.5KHz$ , con la cual es posible registrar 18 puntos por ciclo de esta señal, y permitió optimizar las mediciones posteriores.



**Figura 3.4:** Voltajes medidos a la entrada (línea roja a trazos) y a la salida (línea negra continua) del bloque de muestreo y retención.

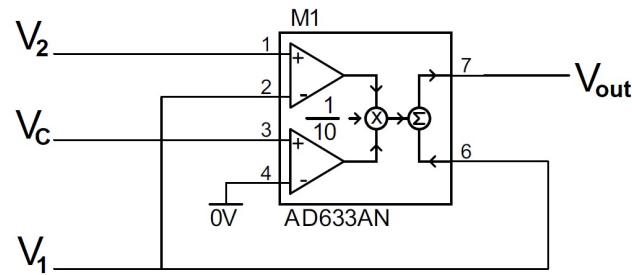
Tras la acción del bloque BMR la señal de salida se compone de *mesetas*, cada una de las cuales representan diferentes estados, que al seleccionar un

punto por meseta podrá considerarse un sistema discreto. La longitud de las mesetas está determinada por el tiempo de retención que se haya seleccionado.

### 3.1.3. Módulo de acoplamiento

Para acoplar dos mapas logísticos se implementó el circuito esquematizado en la fig. 3.5, denominado bloque de acoplamiento (BA).  $V_1$  y  $V_2$  representan el voltaje del mapa 1 y 2 respectivamente, mientras que  $V_C$  respresenta el voltaje de control del acoplamiento.

El BML está conectado al BMR para definir la evolución en tiempo discreto de cada mapa y además está conectado al bloque de acoplamiento (BA) para implementar la evolución acoplada del sistema acuerdo con la ec. (2.20).



**Figura 3.5:** Diagrama del circuito de acoplamiento. El voltaje de salida ( $V_{out}$ ) de este circuito relaciona linealmente ambos voltajes de entrada,  $V_1$  y  $V_2$ , con una intensidad de acoplamiento dada por  $V_C$  [LHer et al., 2016].

Analizando los voltajes en el multiplicador AD633 de la fig. 3.5, se obtiene  $V_{out}$  [LHer et al., 2016]

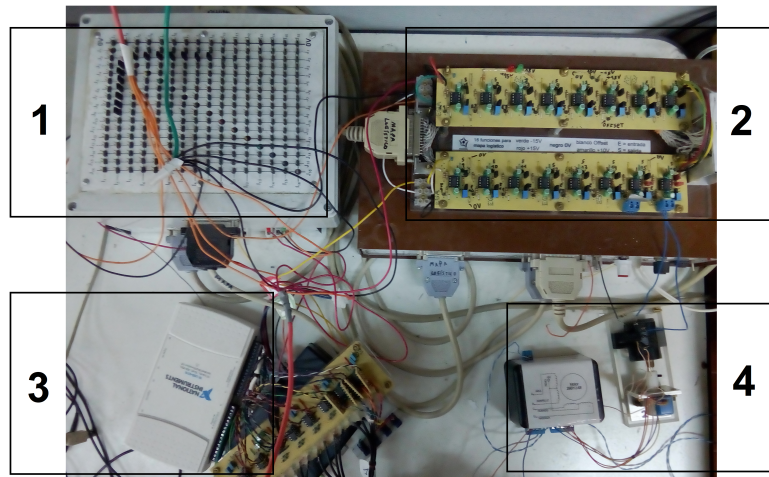
$$V_{out}(t) = \left(1 - \frac{V_C}{V_S}\right) V_1(t) + \frac{V_C}{V_S} V_2(t) \quad (3.3)$$

donde  $V_S$  es el voltaje de saturación del multiplicador,  $V_C$  es el voltaje de control del BA y la intensidad del acople entre los mapas está dada por  $\varepsilon \equiv \frac{V_C}{V_S}$ . Identificando  $x_{out} \rightarrow V_{out}/V_s$ , se observa que la ec. (3.3) corresponde a la ec. (2.20) para 2 mapas.

Para variar la intensidad del acople,  $\varepsilon$ , se empleó una salida analógica de la tarjeta, que tiene una resolución de  $3.5\mu V$ , y por lo tanto los valores de  $\varepsilon$  serán confiables hasta el orden de las millonésimas, siendo más que satisfactorio para los requerimientos del experimento.

Para realizar el acople de  $N$  mapas, se implementó la matriz de acoplamiento que se representa como  $A_{ij}$  en la ec. (2.26). La misma es un dispositivo formado por  $N \times N$  conectores (ver fig. 3.6), que permiten definir como 0 (desconectado) o 1 (conectado) los enlaces entre los  $N$  mapas acoplados. Se implementan además  $N^2$  circuitos de acoplamiento como el descrito en la fig. 3.5, ya que los acoples son bidireccionales.

La fig. 3.6 muestra una fotografía del montaje experimental empleado, en la que se distinguen: (1) la matriz de acoplamiento, representada por  $A_{ij}$  en la ec. (2.26), (2) los mapas logísticos, (3) la tarjeta adquisidora y (4) la implementación que permite el control del parámetro  $r$ .

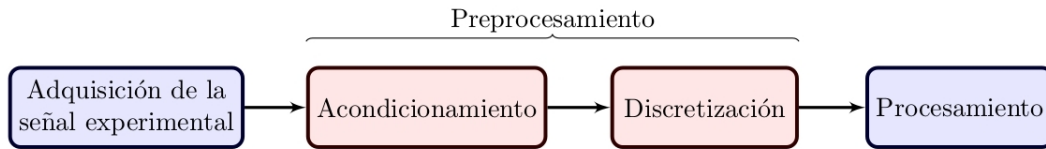


**Figura 3.6:** Montaje experimental. 1- Matriz de acoplamiento, 2- Mapas logísticos, 3- Tarjeta de adquisición, 4- Control del parámetro  $r$ .

De este modo, con la calibración y la programación adecuada, se dispone de un sistema automatizado de variación de parámetros y recolección de series temporales.

## 3.2. Análisis de datos

La fig. 3.7 muestra un diagrama de flujo que describe las distintas etapas seguidas para procesar los datos experimentales.

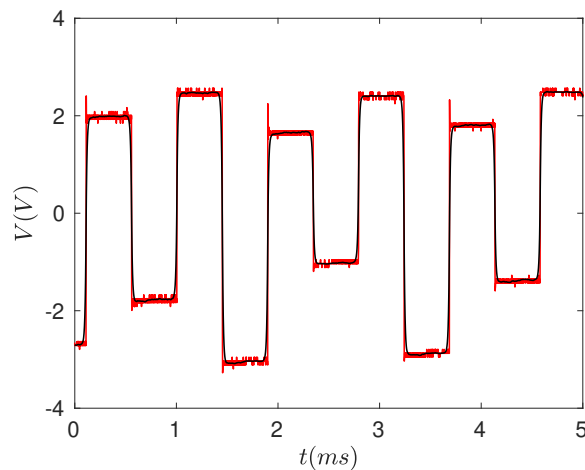


**Figura 3.7:** Diagrama de flujo correspondiente a las distintas etapas del análisis de los datos.

### 3.2.1. Preprocesamiento

#### Acondicionamiento de la señal

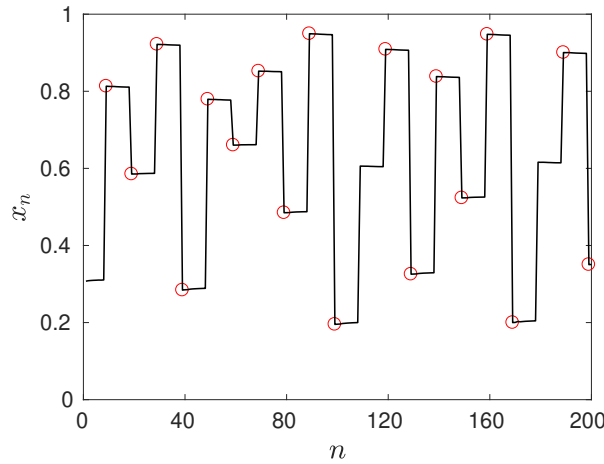
Para efectuar el análisis de los datos experimentales es necesario acondicionar las señales. Esto significa, en primera instancia, aplicar un filtro pasa bajos, de modo de evitar frecuencias espúreas al momento de construir el mapa. La fig. 3.8 muestra una señal experimental (*en bruto*) superpuesta a su versión acondicionada mediante un filtro pasa bajos.



**Figura 3.8:** Señal experimental directa (rojo) y la misma señal tras aplicarle un filtro pasa bajos (negro).

### Proceso de discretización.

Para que la señal que se recoge en el sistema de adquisición pueda entenderse como la representación de un mapa, es necesario almacenar *un punto por cada estado del sistema*. Cuando el sistema se encuentra en un determinado estado, la señal experimental presenta una *meseta*, que tomará diferentes valores conforme el sistema evoluciona. Es necesario, entonces, registrar solamente *un punto por meseta*, para lo cual se emplearon algoritmos desarrollados en *Matlab*. La fig. 3.9 permite visualizar el resultado de este proceso, donde los marcadores rojos corresponden a los puntos que conforman el mapa.



**Figura 3.9:** Señal experimental (línea continua) que permite visualizar que cada *meseta* de la curva corresponde a un punto del mapa  $x_n = f(n)$  (círculos).

### 3.2.2. Procesamiento

El empleo de un parámetro de orden<sup>1</sup> permite analizar la globalidad del sistema, evitando el análisis individual de cada diagrama de bifurcaciones. Para ello se introduce la varianza de cada mapa, según la ecuación

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T \left( x_n^{(i)} - \overline{X}^{(i)} \right)^2. \quad (3.4)$$

donde  $x_n$  son los elementos de la serie temporal,  $T$  es la longitud de cada serie y  $\overline{X}^{(i)}$  el valor medio temporal de la serie, es decir,  $\overline{X}^{(i)} = \frac{1}{T} \sum_{n=1}^T x_n$ .

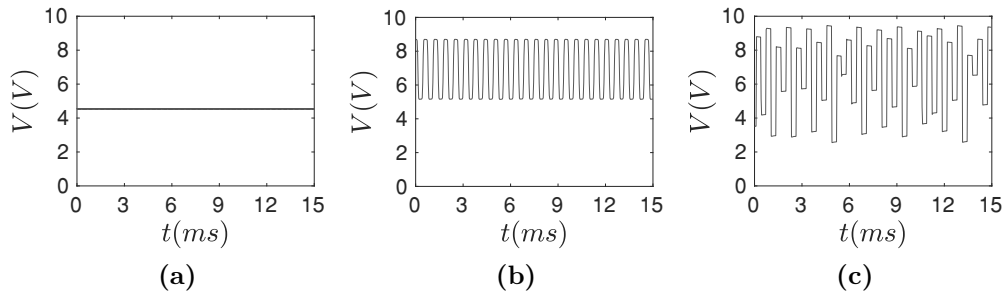
<sup>1</sup>Entendido como un parámetro que indica el grado de orden del sistema [Costa, 2005]

A partir de la varianza de cada uno de los mapas, se define la varianza media del sistema ( $\overline{\sigma^2}$ ) como

$$\overline{\sigma^2} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i^2 \quad (3.5)$$

donde  $N$  es el número de mapas y  $\sigma_i^2$  corresponde a la varianza del  $i$ -ésimo mapa.

Como la varianza es una medida de la dispersión de las órbitas, para el caso de un punto fijo teórico se obtiene  $\sigma^2 = 0$ , lo cual es consistente con el valor obtenido para un punto fijo experimental, como el que se muestra en la fig. 3.10 (a), donde  $\sigma^2 = 2 \times 10^{-5}V^2$ . En el panel (b) se muestra una señal periódica cuyo  $\sigma^2 = 2.6V^2$ , mientras que para la señal caótica, panel (c) se obtuvo  $\sigma^2 = 6.0V^2$ , lo que indica una mayor dispersión en las órbitas.



**Figura 3.10:** Señales experimentales correspondientes a: (a) punto fijo, (b) régimen periódico y (c) régimen caótico.

Para cuantificar el cambio en la varianza media al aumentar o disminuir el parámetro, se determina en cada caso el incremento relativo ( $I_r$ ) como

$$I_r = 2 \left| \frac{\overline{\sigma^2}_{\rightarrow} - \overline{\sigma^2}_{\leftarrow}}{\overline{\sigma^2}_{\rightarrow} + \overline{\sigma^2}_{\leftarrow}} \right| \quad (3.6)$$

donde  $\overline{\sigma^2}_{\rightarrow}$  representa la varianza media al incrementar el parámetro y  $\overline{\sigma^2}_{\leftarrow}$  al decrementarlo. Se dispone entonces de un parámetro de orden, la varianza media, que permite realizar un estudio global del sistema. El mismo se emplea para caracterizar el sistema en diferentes casos, y especialmente para identificar el fenómeno de histéresis. Además, el cálculo del incremento relativo en la varianza media, permite discutir en qué caso es más significativa la histéresis.

### 3.3. Simulaciones

En cada una de las etapas del trabajo experimental se realizaron simulaciones del modelo teórico, las cuales son un aporte principalmente en dos aspectos: por un lado validar el montaje experimental y por otro optimizar el trabajo experimental.

En cuanto al primer aspecto, las simulaciones permiten contrastar el comportamiento esperado para un sistema que responda según el modelo propuesto con los datos experimentales procedentes de la implementación electrónica. Por otro lado, también acompañan el trabajo experimental haciéndolo más eficiente, ya que permiten identificar regiones en los valores de los parámetros donde centrar la recolección de datos.

Las simulaciones se realizaron, en general, sobre 4096 iteraciones, desechándose las primeras 1024 para descartar el régimen transitorio. En aquellos casos en que se implementó un conjunto de mapas cuasidénticos, las heterogeneidades experimentales se incorporaron a la simulación. Con tal fin, considerando la incertidumbre en las medidas de los parámetros como cota superior de las diferencias entre los mismos para la simulación, se generó aleatoriamente un vector  $r = \{r_1, r_2, \dots, r_N\}$ , formado por los parámetros de los  $N$  mapas.

Las simulaciones se realizaron tomando como condición inicial de cada nueva trayectoria el último punto de la trayectoria anterior. De este modo se logró reproducir satisfactoriamente las dinámicas observadas en la implementación electrónica.



# Capítulo 4

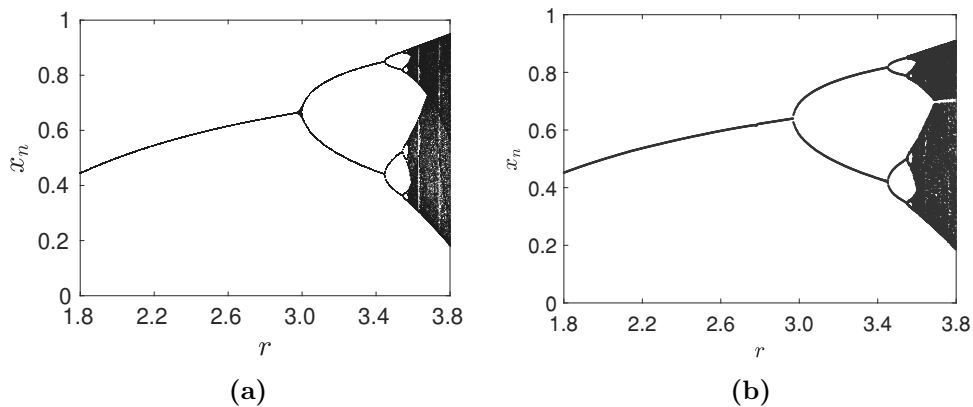
## Resultados y discusión

En el desarrollo de este capítulo se presentarán los resultados experimentales y la discusión de los mismos. Está estructurado en tres partes. La primera de ellas muestra la caracterización experimental del circuito, realizándose el estudio de un mapa logístico aislado. La parte central corresponde al estudio de dos mapas logísticos acoplados. En la misma se analizan los diagramas de bifurcaciones al variar el parámetro de un mapa, así como también al variar la intensidad del acople. En este sentido se analiza lo que sucede al incrementar y decrementar dicha intensidad. Además se emplea la varianza media como un parámetro de orden que permite analizar la globalidad del sistema. Por último, y como forma de ampliar el estudio, se analiza el comportamiento de ocho mapas acoplados bajo diferentes configuraciones. Para obtener los datos que se presentan en las distintas secciones se efectuaron más de 100 realizaciones considerando los diferentes casos, confirmando que las observaciones corresponden a fenómenos robustos. Se muestran, por lo tanto, sólo algunos resultados representativos.

### 4.1. Mapa logístico aislado

Para el estudio de un mapa logístico aislado, se realizó el montaje del bloque BML (según fig. 3.1) y del BMR, para registrar las series temporales ( $V_{out} = f(t)$ ) correspondientes a diferentes valores del parámetro  $r$ . En la fig. 4.1 se muestra el diagrama de bifurcaciones, donde el panel izquierdo corresponde a la simulación numérica y el panel derecho a los resultados experimentales. El diagrama pone de manifiesto las diferentes dinámicas que

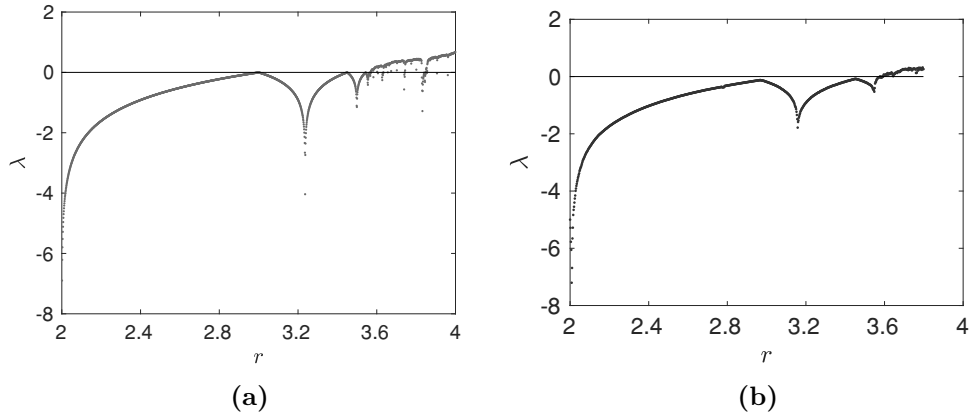
experimenta el sistema según el valor del parámetro  $r$ . Con  $r < 3.00$  se observa que el sistema se encuentra en la cuenca de atracción de un punto fijo, lo que se identifica en el diagrama como una línea fina de puntos. En  $r = 3.00$  se produce la primera bifurcación, y el sistema comienza a experimentar soluciones periódicas, las cuales oscilan entre dos valores. Al llegar a  $r \approx 3.45$ , se produce una bifurcación en cada rama del período 2, ingresando el sistema en un régimen de período 4. Cuando el parámetro supera ligeramente el valor 3.54 se aprecia un pequeño intervalo de período 8 y comienza una cascada de bifurcaciones que derivan en el ingreso al caos para  $r \approx 3.57$ , lo que en el diagrama se observa como regiones donde los puntos se extienden verticalmente. Esta dinámica se corresponde con lo esperado teóricamente, destacándose una excelente concordancia.



**Figura 4.1:** Diagrama de bifurcaciones obtenido: (a) numéricamente y (b) a partir de los datos experimentales, de un mapa logístico aislado a medida que se incrementa el parámetro  $r$  del mismo.

Continuando con el análisis del comportamiento dinámico del mapa implementado electrónicamente, se comparan los exponentes de Lyapunov calculados a partir de la ec. (2.16) sobre las series temporales obtenidas numérica y experimentalmente. Las series experimentales sobre las que se calculan los exponentes de Lyapunov son de  $N = 256$  puntos, mientras que las simulaciones numéricas se realizaron sobre  $N = 1024$  iteraciones. Numéricamente se analizó el intervalo  $2 \leq r \leq 4$ . Sin embargo, las series experimentales se obtuvieron en el rango  $2 \leq r \leq 3.8$ , para evitar la saturación del multiplicador que se produce en  $r \approx 4$ .

Los exponentes de Lyapunov obtenidos para ambos casos se presentan en la



**Figura 4.2:** Exponente de Lyapunov ( $\lambda$ ) en función del parámetro  $r$ : (a) determinado numéricamente en el rango  $2 \leq r \leq 4$  y (b) calculado sobre serie experimental, con  $2 \leq r \leq 3.8$ . La recta horizontal permite identificar los cambios de signo de  $\lambda$ .

fig. 4.2, la cual muestra que hay un notable acuerdo entre los datos numéricos (panel a) y los experimentales (panel b). La respuesta del circuito en términos del exponente de Lyapunov, así como el diagrama de bifurcaciones muestran que esta implementación electrónica reproduce de buena manera el comportamiento del mapa logístico.

#### 4.1.1. Constante de Feigenbaum de cada ML

Se determinó experimentalmente la constante de Feigenbaum ( $\delta$ ) según la ec. (2.18) para cada uno de los 8 mapas a utilizar. Los resultados se presentan en la tabla 4.1, donde se muestra además su desviación respecto al valor teórico.

**Tabla 4.1:** Valores de la constante de Feigenbaum para los 8 mapas y su correspondiente desviación del valor teórico  $\delta_{teo} = 4.75031$  [ec. (2.18)].

<i>mapa</i>	1	2	3	4	5	6	7	8
$\delta_{mapa}$	5.00	5.10	4.98	4.62	4.66	4.86	4.72	4.60
$\Delta\delta$	6%	8%	5%	3%	2%	2%	1%	3%

Como reflejan los datos presentados en la tabla 4.1, el porcentaje de discrepancia con el valor teórico de la constante de Feigenbaum fue para todos los mapas seleccionados inferior al 10%, incluso solamente 2 de ellos superaron el 5%, lo que representa una muy buena concordancia entre la implementación electrónica y el modelo.

## 4.2. Dos mapas acoplados

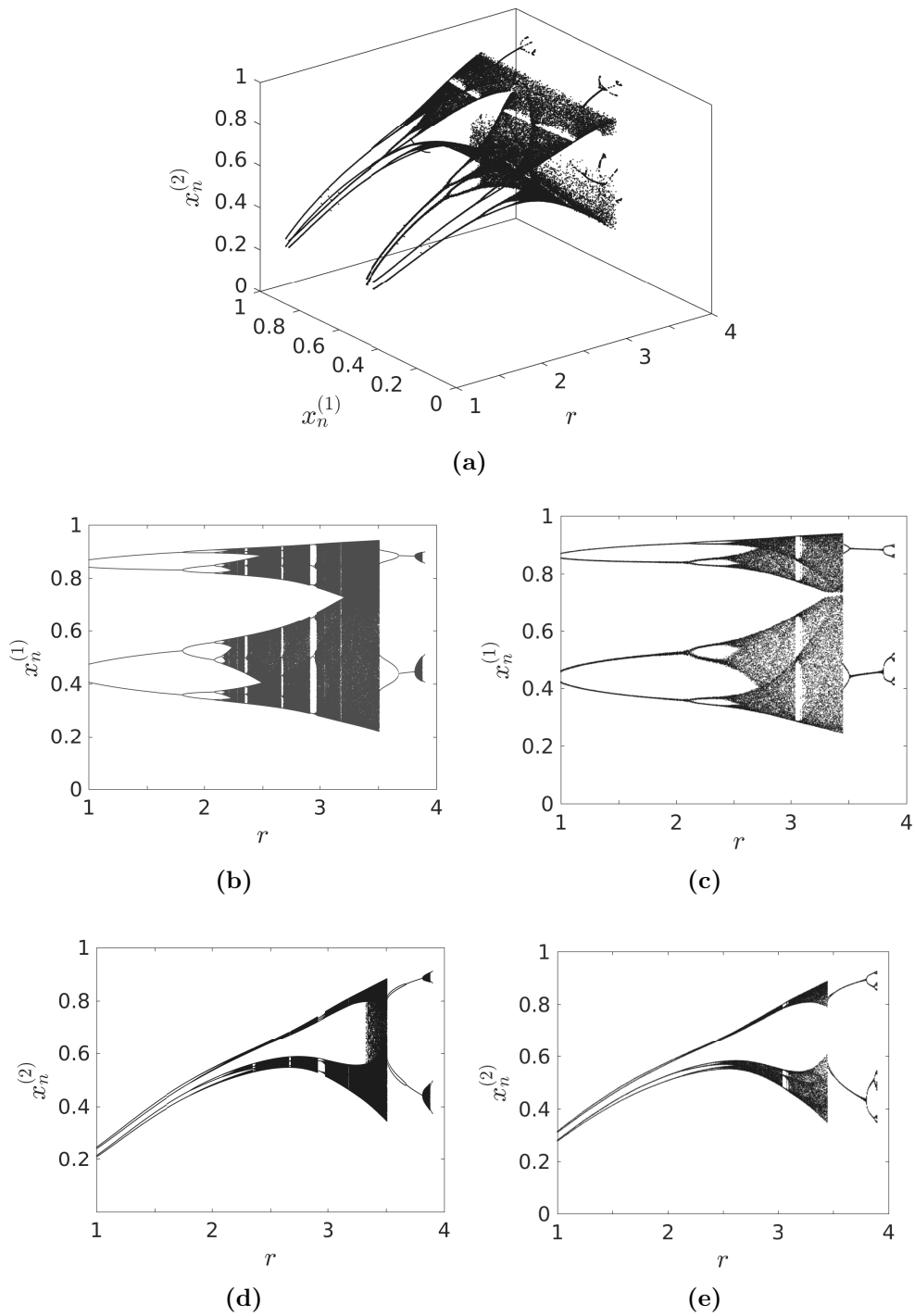
En esta sección se presentan los resultados obtenidos para la implementación de dos mapas logísticos acoplados según la ec. (2.20). En primera instancia se presentan los diagramas de bifurcaciones obtenidos al incrementar el parámetro de uno de los mapas ( $r_2$ ) manteniendo el parámetro del otro mapa fijo en  $r_1 = 3.80$ , que correspondería a dinámica caótica para el mapa aislado. La intensidad del acople se fijó en  $\varepsilon = 0.1$ . A continuación se muestran los resultados correspondientes a mantener fijos los parámetros ( $r_1$  y  $r_2$ ) e incrementar la intensidad del acople en el rango  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . Este estudio se realizó sobre dos configuraciones diferentes: una con  $r_1 = r_2 = 3.80$  y otra con  $r_1 = 3.80$  y  $r_2 = 3.20$ . Por último el análisis se centra en el estudio de la histéresis que se observa al incrementar y decrementar  $\varepsilon$ .

### 4.2.1. Diagramas de bifurcaciones

Primeramente se estudió el comportamiento del sistema al incrementar el parámetro  $r$  del mapa 2 manteniendo fijos el parámetro  $r_1 = 3.80$  y la intensidad del acople  $\varepsilon = 0.1$ . Los resultados experimentales se muestran en la fig. 4.3, en donde además de la representación tridimensional del diagrama de bifurcaciones de ambos mapas,  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$ , a medida que se varía el parámetro  $r$  en el intervalo  $1 \leq r < 3.90$  (panel a), se muestran sus correspondientes proyecciones (paneles c y e).

Este diagrama cuantifica cómo la variación del parámetro de uno de los mapas, en este caso del mapa 2, produce el surgimiento de bifurcaciones en ambos mapas. Puede observarse en la fig. 4.3 (c), que el mapa  $x_n^{(1)}$  aunque mantiene su parámetro  $r_1$  fijo, experimenta diferentes dinámicas conforme el valor del parámetro  $r$  ( $= r_2$ ) del segundo mapa, aumenta. Una dinámica de período 4 se mantiene hasta las proximidades de  $r = 2$  donde comienza una dinámica de período 8, produciéndose luego una cascada de bifurcaciones que derivan en una dinámica caótica. Próximo a  $r = 3$  se observa una pequeña ventana periódica, para continuar el régimen caótico hasta  $r \approx 3.5$ . Allí el sistema vuelve a experimentar regímenes periódicos. Se observa que  $x_n^{(1)}$  pasa por una órbita de período 4, para luego llegar a una de período 2. En  $r \approx 3.8$ , comienza a visualizarse una nueva cascada de bifurcaciones.

Aunque  $r_1 = 3.80$  corresponde a una dinámica caótica para un mapa logístico aislado, el acoplamiento débil ( $\varepsilon = 0.1$ ) determina que las dinámicas del



**Figura 4.3:** (a) Diagrama de bifurcaciones obtenido experimentalmente al acoplar 2 mapas logísticos  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$  con  $r_1 = 3.80 \pm 0.03$ ,  $\varepsilon = 0.1$  y el parámetro  $r$  del mapa 2 incrementándose en el intervalo  $1 \leq r < 3.90$ . Proyecciones: (c) en el plano  $x_n^{(1)} - r$  y (e) en el plano  $x_n^{(2)} - r$ . Resultados numéricos para: (b)  $x_n^{(1)}$ , y (d)  $x_n^{(2)}$ .

mapa  $x_n^{(1)}$  se alteren en función del segundo mapa,  $x_n^{(2)}$ .

Análogamente, aunque  $r_2 = 1$  correspondería a un estado de punto fijo para un mapa logístico aislado, en el panel (e) puede apreciarse que debido al acoplamiento el mapa  $x_n^{(2)}$  presenta una órbita periódica. En las proximidades de  $r = 2$  experimenta una bifurcación, al igual que el mapa 1, donde comienza una cascada de bifurcaciones que derivan en una dinámica caótica. Para valores de  $r$  cercanos a 3 se observa una ventana periódica, y luego continúa el régimen caótico hasta  $r \approx 3.5$ , como se observó con el primer mapa. Inclusive las dinámicas a partir de ahí continúan coincidiendo para ambos mapas, ya que para  $r$  algo mayor a 3.5 el mapa 2 también recorre una órbita de período 4 para luego experimentar un régimen de período 2. Finalmente, en  $r \approx 3.8$ , comienza a serie de bifurcaciones de duplicación de período.

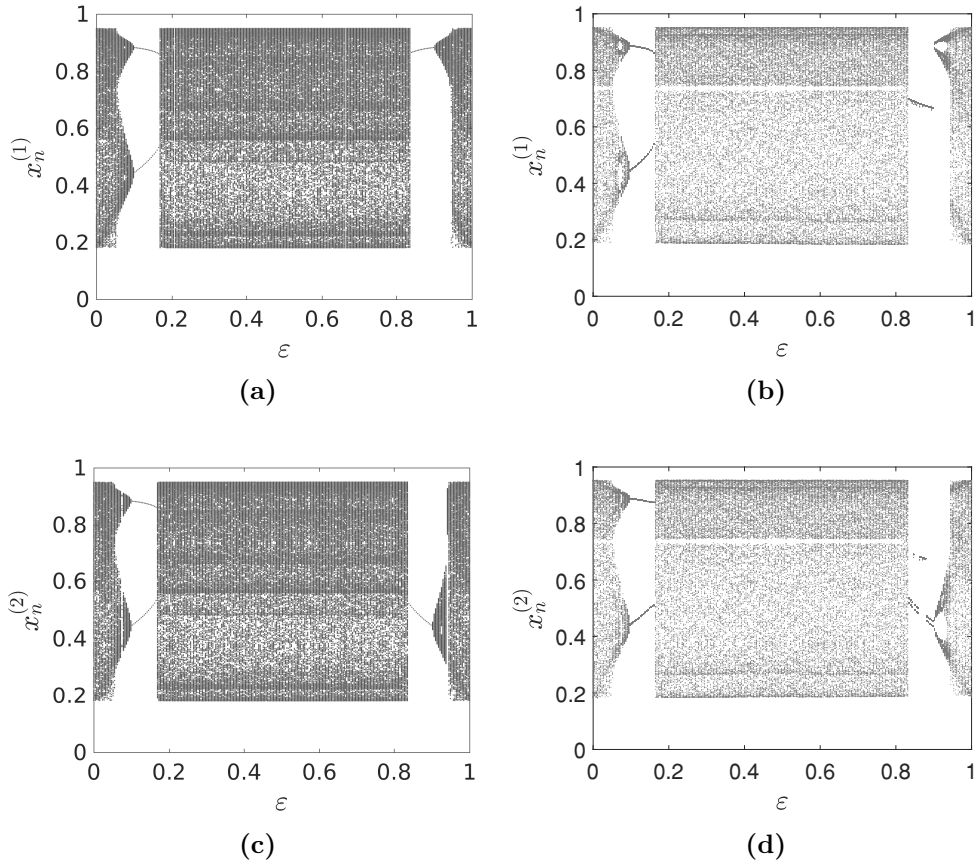
Los paneles (b) y (d) de la fig. 4.3, muestran una simulación del caso analizado experimentalmente. Los resultados numéricos confirman las dinámicas observadas, mostrando una muy buena concordancia entre ambos.

## Dos mapas cuasi idénticos acoplados

Los diagramas de bifurcaciones para mapas cuasi idénticos en función de la intensidad del acoplamiento se muestran en la fig. 4.4, donde los parámetros de los mapas se fijaron en  $r_1 = r_2 = 3.80$ .

Debido a la presencia de acoplamiento entre los mapas la dinámica resultante se muestra en algunos casos caótica, y en otros casos periódica. Esto contrasta con el comportamiento exclusivamente caótico que muestran los mapas aislados para este valor de parámetro,  $r = 3.80$ , en ausencia de acoplamiento.

Respecto a la primera ventana periódica que se distingue en los diagramas de la fig. 4.4, en el intervalo  $0.10 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.16$ , puede observarse una notable simetría entre ambos mapas, donde el panel (b) corresponde a  $x_n^{(1)}$  y el panel (d) a  $x_n^{(2)}$ . Sin embargo, la segunda ventana periódica que puede distinguirse en las proximidades del intervalo  $0.84 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.92$ , exhibe una mayor complejidad. Mientras que el primer mapa ( $x_n^{(1)}$ ) se encuentra en la cuenca de atracción de un punto fijo de valor próximo a 0.7, el segundo ( $x_n^{(2)}$ ) fluctúa entre dos atractores dependiendo de las condiciones iniciales. De hecho, oscila entre el punto fijo en el que se encuentra el primer nodo, y una señal de período 2, con valores de  $x_n^{(2)}$  próximos a 0.5. Los paneles (a) y (c) de la fig. 4.4, corresponden a una simulación del caso analizado experimentalmente. Los resultados numéricos

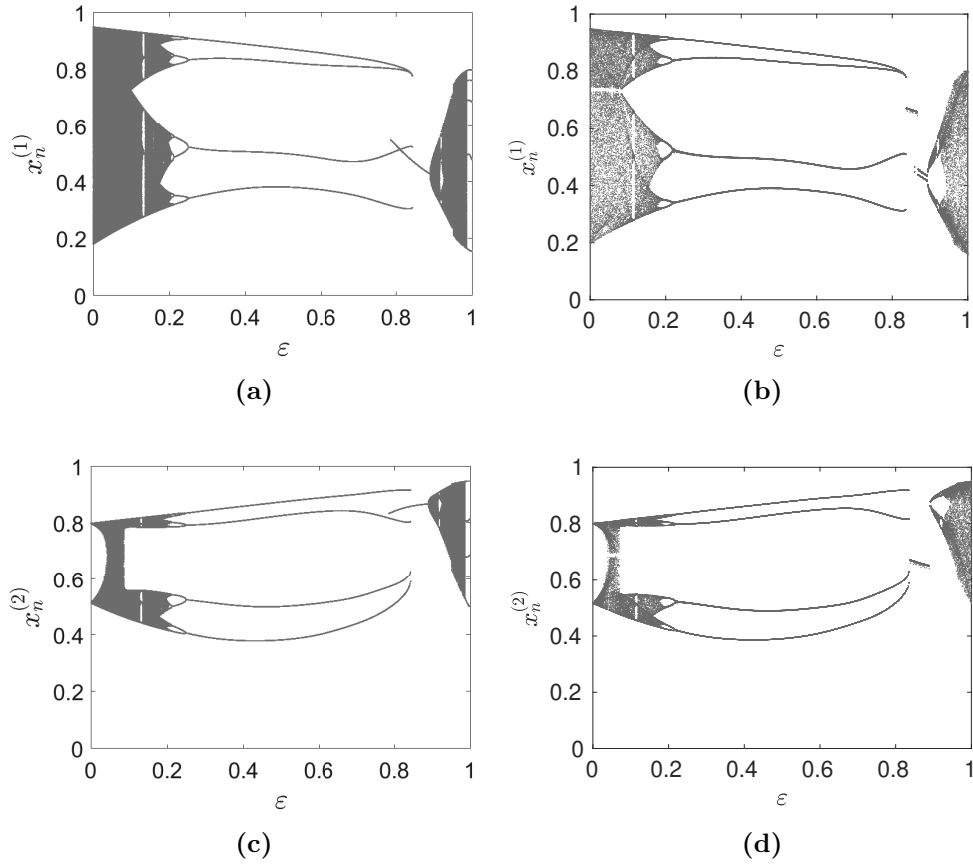


**Figura 4.4:** Diagramas de bifurcaciones obtenidos al incrementar la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre dos mapas logísticos  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$  casi idénticos, con  $r_1 = r_2 = 3.80 \pm 0.03$ . (a)  $x_n^{(1)}$  numérico. (b)  $x_n^{(1)}$  experimental. (c)  $x_n^{(2)}$  numérico. (d)  $x_n^{(2)}$  experimental.

muestran una buena concordancia en general.

### Dos mapas diferentes acoplados

La fig. 4.5 muestra los resultados numéricos, paneles (a) y (c), y experimentales, paneles (b) y (d), de un estudio análogo para dos mapas a los que se han ajustado sus parámetros en  $r_1 = 3.80$  y  $r_2 = 3.20$ . Puede observarse que para  $\varepsilon = 0$ ,  $x_n^{(1)}$  se encuentra en régimen caótico, mientras que  $x_n^{(2)}$  se encuentra en régimen de período 2, que son los resultados esperados para un mapa logístico aislado con  $r_1 = 3.80$  y  $r_2 = 3.20$ , respectivamente. Al incrementar la intensidad del acople, incluso para valores de  $\varepsilon < 0.10$ , el segundo mapa comienza a experimentar una dinámica caótica, aunque su parámetro corresponda a régimen periódico para un mapa aislado. Cuando la intensi-



**Figura 4.5:** Diagramas de bifurcaciones obtenidos al incrementar la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre dos mapas logísticos  $x_n^{(1)}$  con  $r_1 = 3.80 \pm 0.03$  y  $x_n^{(2)}$  con  $r_2 = 3.20 \pm 0.03$ . (a)  $x_n^{(1)}$  numérico. (b)  $x_n^{(1)}$  experimental. (c)  $x_n^{(2)}$  numérico. (d)  $x_n^{(2)}$  experimental.

dad del acople alcanza valores próximos a 0.20 ambos mapas ingresan a un régimen periódico de período 8, y luego pasan a un período 4 para  $\varepsilon > 0.20$ , dinámica que se mantiene hasta valores próximos a 0.80. En el intervalo aproximado  $0.80 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.85$ , puede apreciarse que cada unos de los mapas que se encontraban en régimen de período 4 colapsan a puntos fijos. A partir de  $\varepsilon \approx 0.89$  ambos mapas experimentan una cascada de bifurcaciones, introduciéndose nuevamente en caos en  $\varepsilon \approx 0.95$ .

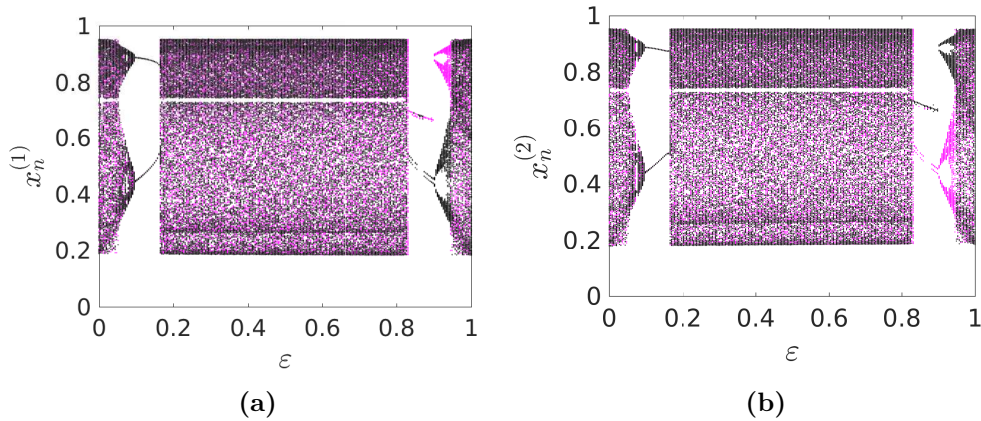
#### 4.2.2. Histéresis en 2 mapas logísticos acoplados

Para estudiar la histéresis del sistema se implementaron dos diseños diferentes del mismo, uno con mapas cuasi idénticos y otro con mapas diferentes.

En cada caso se incrementó la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre los mapas, para luego decrementarla en el mismo rango de valores. Este proceso permitió detectar si se observan cambios en la dinámica del sistema para un mismo valor de  $\varepsilon$  dependiendo del modo en que varía. Se registraron más de 20 series de datos para cada diseño, que permiten afirmar que el fenómeno es robusto. Se muestran, por lo tanto, sólo algunos resultados representativos.

### Dos mapas cuasi idénticos acoplados

La fig. 4.6 muestra los resultados obtenidos para el caso de dos mapas,  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$ , cuasi idénticos, con  $r_1 = r_2 = 3.80$ , representándose en magenta los correspondientes a incrementar  $\varepsilon$  y en negro a decrementarlo.



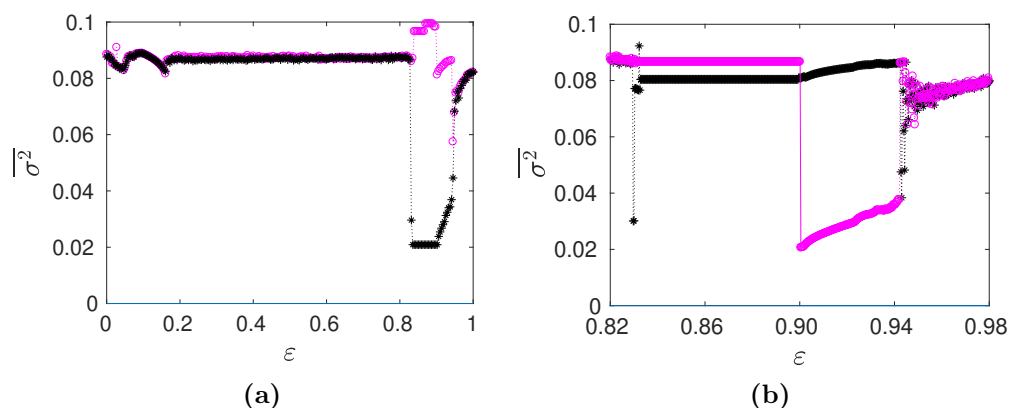
**Figura 4.6:** Diagramas de bifurcaciones obtenidos experimentalmente al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre dos mapas logísticos  $x_n^{(1)}$  (a) y  $x_n^{(2)}$  (b), con  $r_1 = r_2 = 3.80 \pm 0.03$ .

La segunda ventana periódica que ya fue identificada para esta configuración en el intervalo aproximado  $0.84 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.92$ , es donde se exhibe más claramente el fenómeno de histéresis. Observando el mapa  $x_n^{(1)}$ , fig. 4.6 (a), en ese intervalo, puede verse que mientras se incrementa la intensidad del acople el mapa se encuentra en la cuenca de atracción del punto fijo de valor próximo a 0.70, mientras que al decrementar  $\varepsilon$  el mapa presenta un comportamiento que fluctúa entre el punto fijo y una señal de período 2 de pequeña amplitud.

Análogamente, la fig. 4.6 (b) muestra que el mapa  $x_n^{(2)}$  en ese intervalo presenta dinámicas alternadas a  $x_n^{(1)}$ , ya que exhibe el comportamiento fluctuante entre un punto fijo y una señal de período 2, al incrementar el valor del acople, mientras que al decrementar  $\varepsilon$  el mapa se encuentra en la cuenca de

atracción del punto fijo de valor próximo a 0.70. Por su parte, las cascadas de bifurcaciones se producen en el caso del mapa 1 en  $x_n^{(1)} \approx 0.90$  al incrementar  $\varepsilon$  y en  $x_n^{(1)} \approx 0.45$  al decrementarlo. También en este sentido,  $x_n^{(2)}$  presenta un comportamiento alternado con  $x_n^{(1)}$ , produciéndose en  $x_n^{(2)} \approx 0.90$ , decrementando  $\varepsilon$ , una cascada similar a la descrita al incrementar la intensidad del acople para  $x_n^{(1)}$  y en  $x_n^{(2)} \approx 0.45$  al incrementarlo.

El análisis individual de los diagramas de bifurcaciones para cada mapa permitió identificar el fenómeno de histéresis, y aproximadamente el rango de valores de  $\varepsilon$  en que se produce,  $0.84 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.94$ .



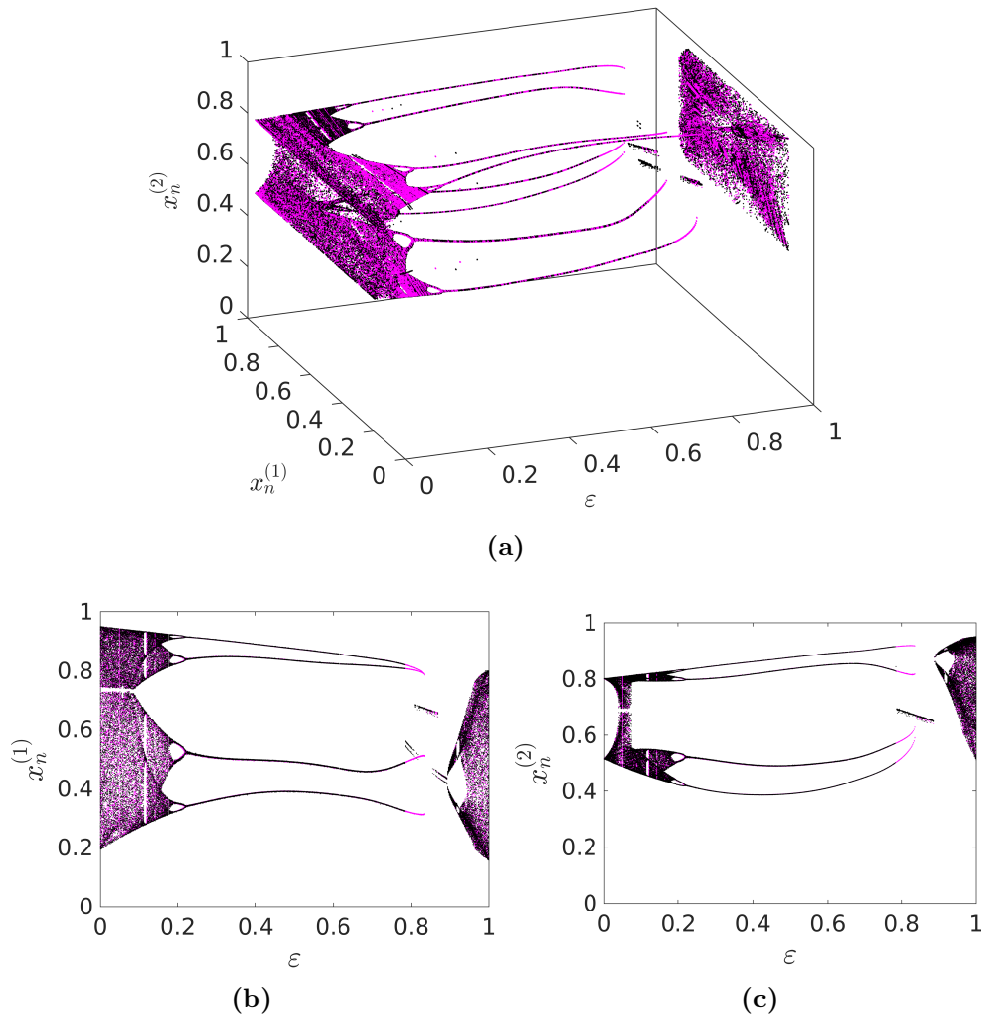
**Figura 4.7:** Varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople,  $\varepsilon$ , entre 2 mapas logísticos casi idénticos con  $r_1 = r_2 = 3.80 \pm 0.03$ . (a) Resultados obtenidos con  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , y (b) barrido fino en la zona de interés,  $0.82 \leq \varepsilon \leq 0.98$ .

La fig. 4.7 (a), muestra los valores de la varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) para el caso,  $r_1 = r_2 = 3.80$ , obtenidos en todo el rango de valores  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ . El panel (b) corresponde a una nueva realización con un barrido más fino en la zona de interés,  $0.82 \leq \varepsilon \leq 0.98$ , que es el rango de valores en que se hace apreciable la histéresis.

## Dos mapas diferentes acoplados

Los resultados obtenidos experimentalmente para el caso de dos mapas,  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$ , con  $r_1 = 3.80$  y  $r_2 = 3.20$ , respectivamente, se muestran en la fig. 4.8 (a).

En el intervalo  $0.78 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.84$  puede apreciarse para ambos mapas la histéresis. Observando la fig. 4.8 (b), se distingue que el mapa  $x_n^{(1)}$  al incremen-

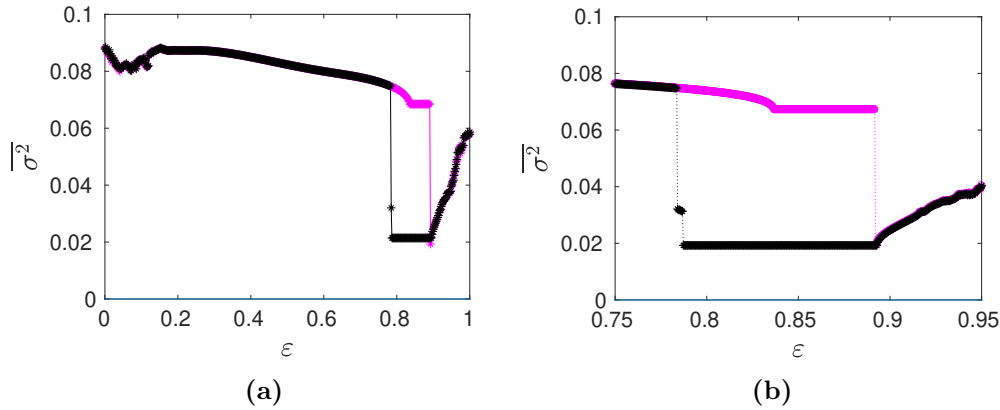


**Figura 4.8:** (a) Diagrama de bifurcaciones obtenido experimentalmente al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre dos mapas logísticos  $x_n^{(1)}$  y  $x_n^{(2)}$ , con  $r_1 = 3.80 \pm 0.03$  y  $r_2 = 3.20 \pm 0.03$ . Proyecciones de mismo diagrama en, (b) el plano  $x_n^{(1)} - \varepsilon$  y (c) en el plano  $x_n^{(2)} - \varepsilon$ .

tar el acople experimenta un período 4, en el mencionado intervalo, mientras que al decrementar  $\varepsilon$  fluctúa entre un punto fijo y una señal de período 2 con pequeña amplitud. Por su parte,  $x_n^{(2)}$ , si bien al incrementar el acople experimenta un período 4, en el mencionado intervalo, al decrementarlo el mapa se encuentra en la cuenca de atracción de un punto fijo, siendo la única solución observada (ver fig. 4.8 (c)).

Los valores de la varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) para la configuración  $r_1 = 3.80$  y  $r_2 = 3.20$ , se muestran en la fig. 4.9, el panel (a) corresponde a todo el rango de  $\varepsilon$ , y el panel (b) a un barrido más fino en la zona de interés,  $0.75 \leq \varepsilon \leq 0.95$ ,

donde se hace más notoria la histéresis. Ambas gráficas ponen de manifiesto que la varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) al incrementar la intensidad del acople,  $\varepsilon$ , en dicho intervalo, toma valores de  $\overline{\sigma^2} \approx 0.07$  y al decrementar  $\varepsilon$ ,  $\overline{\sigma^2} \approx 0.02$ . Por lo tanto se detecta un cambio en el parámetro de orden en un factor mayor a 3, o en términos del incremento relativo, que se define en la ec. (3.6), experimenta un  $I_r \approx 120\%$ .



**Figura 4.9:** Varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople,  $\varepsilon$ , entre 2 mapas logísticos con  $r_1 = 3.80 \pm 0.03$  y  $r_2 = 3.20 \pm 0.03$ . (a) Resultados obtenidos con  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , y (b) barrido fino en la zona de interés,  $0.75 \leq \varepsilon \leq 0.95$ .

### 4.3. 8 mapas logísticos acoplados

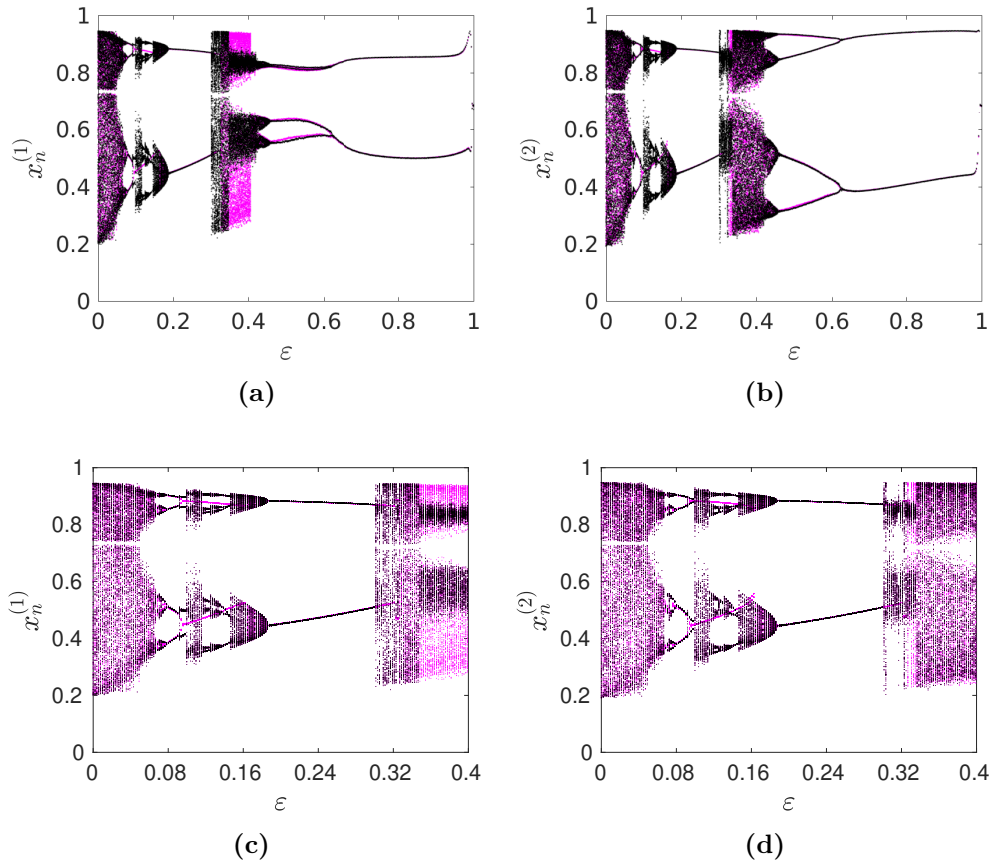
En esta sección se presentan los resultados obtenidos al variar la intensidad del acople,  $\varepsilon$ , entre 8 mapas logísticos, cuasi idénticos, con  $r = (3.80 \pm 0.03)$ . Se estudian tres configuraciones en particular, que son las presentadas en la fig. 2.13: anillo, todos con todos y estrella.

#### 4.3.1. Configuración *anillo*

La configuración tipo *anillo* implica que cada nodo se interconecte con los dos nodos contiguos. Sólo se presentan, en la fig. 4.10, los diagramas de bifurcaciones para dos mapas vecinos, integrantes del anillo de ocho mapas, ya que los resultados obtenidos para los restantes mapas son similares. Los dos diagramas, que se muestran en los paneles (a) y (b), evidencian histéresis en un amplio rango de valores,  $0 \leq \varepsilon \lesssim 0.4$ . Para  $\varepsilon \gtrsim 0.4$  los mapas recorren

las mismas ramas periódicas al incrementar o decrementar la intensidad del acople.

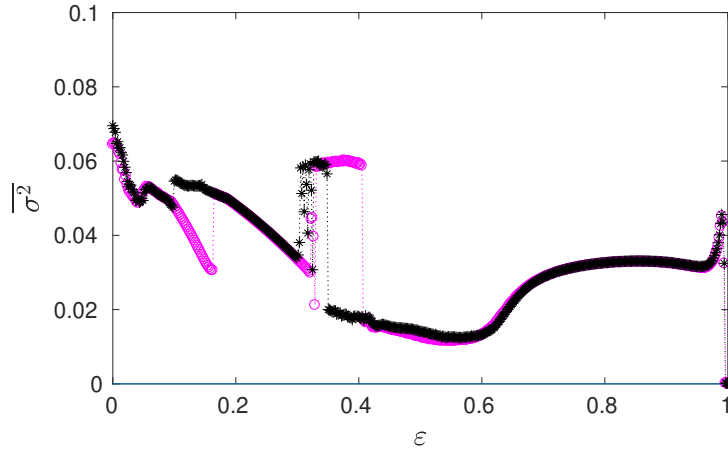
Observando los paneles (c) y (d) puede distinguirse un comportamiento especialmente interesante el intervalo  $0.08 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.16$ , donde ambos mapas describen órbitas periódicas a medida que se incrementa  $\varepsilon$ , pero al decrementarlo se evidencian soluciones caóticas para el mismo rango de valores del parámetro de acople. Además en el panel (c), correspondiente a  $x_n^{(1)}$ , se observa caos en el intervalo  $0.34 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.40$  al incrementar o decrementar el acople, pero en un rango de valores de  $x_n$  muy diferente.



**Figura 4.10:** Diagramas de bifurcaciones de 2 mapas logísticos en una configuración de anillo de 8 mapas, obtenidos al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ). (a) Mapa 1,  $x_n^{(1)}$ . (b) Mapa 2,  $x_n^{(2)}$ . (c) Ampliación en el rango  $0 \leq \varepsilon \leq 0.4$  correspondiente al mapa 1,  $x_n^{(1)}$ . (d) Ampliación en el rango  $0 \leq \varepsilon \leq 0.4$  correspondiente al mapa 2,  $x_n^{(2)}$ .

Los valores de la varianza media del sistema ( $\overline{\sigma^2}$ ) en todo el rango de  $\varepsilon$  para la configuración en anillo descrita, se muestran en la fig. 4.11. La gráfica

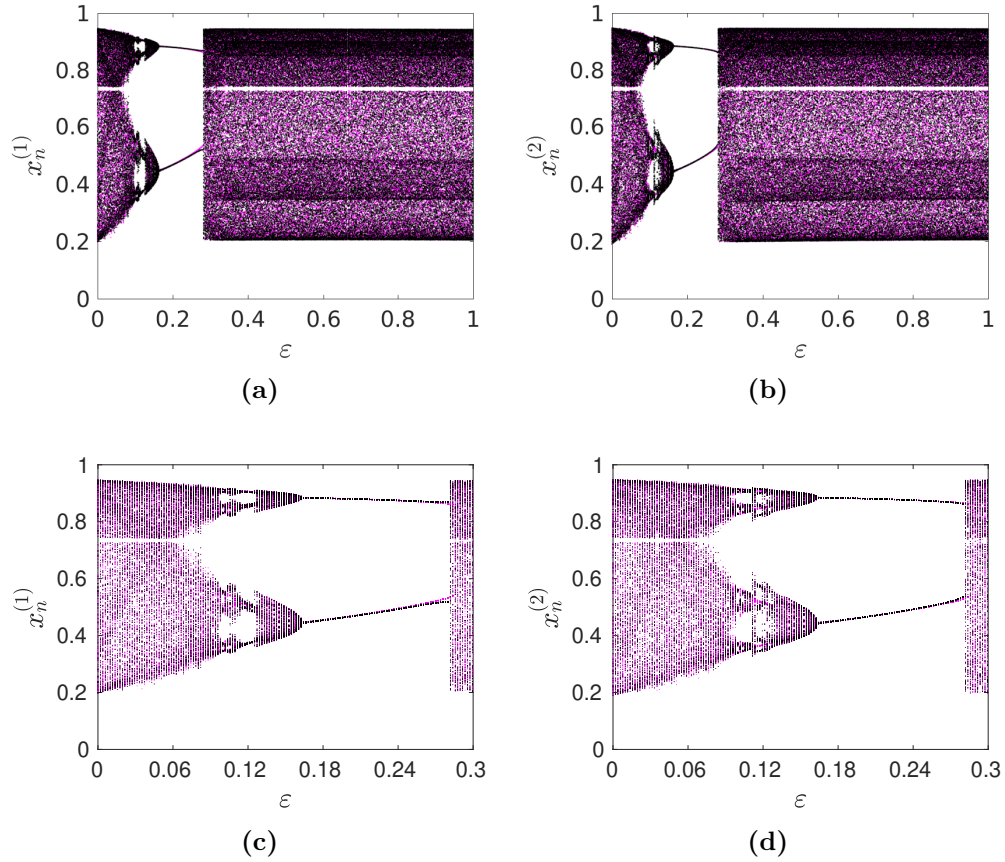
muestra que la varianza media presenta cambios significativos en los intervalos ya detectados en los diagramas de bifurcaciones, alcanzando un incremento relativo  $I_r \approx 110\%$ . Se verifica, como ya se discutió, que al incrementar o decrementar la intensidad del acople, las dinámicas del sistema difieren notablemente.



**Figura 4.11:** Varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre 8 mapas logísticos cuasi idénticos ( $r = 3.80 \pm 0.03$ ) en configuración de anillo.

### 4.3.2. Configuración *todos con todos*

Para la configuración de los mapas conectados *todos con todos* (según se describe en la sección 2.4.2), se obtuvo los 8 diagramas de bifurcaciones, los cuales son muy similares entre sí debido a la simetría que presenta el sistema. En la fig. 4.12 (a) y (b) se muestran los diagramas correspondientes a dos de los mapas del conjunto. Se observa un régimen caótico en el intervalo  $0 < \varepsilon \lesssim 0.16$ . A partir de ese valor del parámetro de acople se distingue una ventana de período 2, hasta  $\varepsilon \approx 0.28$  ingresando allí ambos mapas en un régimen caótico hasta el máximo valor de acople ( $\varepsilon = 1$ ), dinámica en la cual permanecen incluso cuando se decrementa el parámetro de acople, hasta llegar nuevamente a  $\varepsilon \approx 0.28$ , recorriendo la ventana periódica ya descrita para nuevamente en  $\varepsilon < 0.16$  experimentar dinámicas caóticas. A simple vista sobre los diagramas de bifurcaciones es casi imposible detectar en este caso la histeresis. Para analizar con más detalle se presentan los paneles (c) y (d) en la fig. 4.12, los que corresponden a una ampliación de los diagramas para el in-



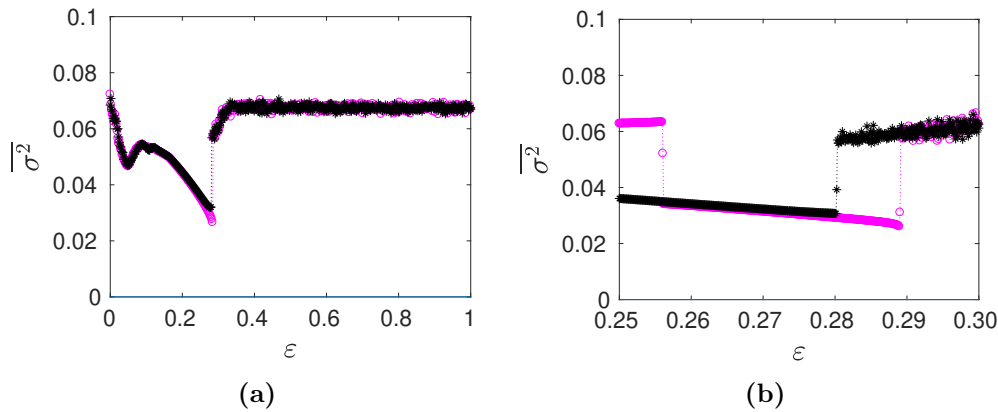
**Figura 4.12:** Diagramas de bifurcaciones de 2 mapas logísticos en una configuración de 8 mapas, conectados todos con todos, obtenidos al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ). (a) Mapa 1,  $x_n^{(1)}$ . (b) Mapa 2,  $x_n^{(2)}$ . (c) Ampliación en el rango  $0 \leq \varepsilon \leq 0.3$  correspondiente al mapa 1,  $x_n^{(1)}$ . (d) Ampliación en el rango  $0 \leq \varepsilon \leq 0.3$  correspondiente al mapa 2,  $x_n^{(2)}$ .

intervalo  $0 \leq \varepsilon \leq 0.3$ . Para  $\varepsilon \approx 0.12$ , pueden distinguirse en el panel (d) pequeñas diferencias entre las cascadas de bifurcaciones obtenidas al incrementar  $\varepsilon$  respecto a las obtenidas al decrementarlo. También se observan diferencias en los valores que recorren las órbitas periódicas con  $\varepsilon \approx 0.28$ , en las proximidades de la región caótica.

Para confirmar la presencia de histéresis se analiza la varianza media del sistema ( $\overline{\sigma^2}$ ), cuyos valores en todo el rango de  $\varepsilon$ , se muestran en la fig. 4.13 (a). La gráfica pone de manifiesto que la varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) presenta cambios sutiles en el intervalo  $0.25 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.30$ .

El panel (b) corresponde a una nueva realización con un barrido más fino en la zona  $0.25 \leq \varepsilon \leq 0.30$ , que es el rango de valores en que se hace apreciable

la histéresis alcanzando la varianza media a duplicar su valor en el proceso de decrementar  $\varepsilon$  respecto al caso de incrementarlo. A partir de la ec. (3.6), se determinó el incremento relativo ( $I_r$ ) de la varianza media del sistema para el intervalo aproximado  $0.28 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.28$  obteniéndose  $I_r \approx 70\%$ . Ello indica que, aunque para un estrecho rango de valores de la intensidad del acople, la histéresis se produce y es significativa en términos de  $\overline{\sigma^2}$ .

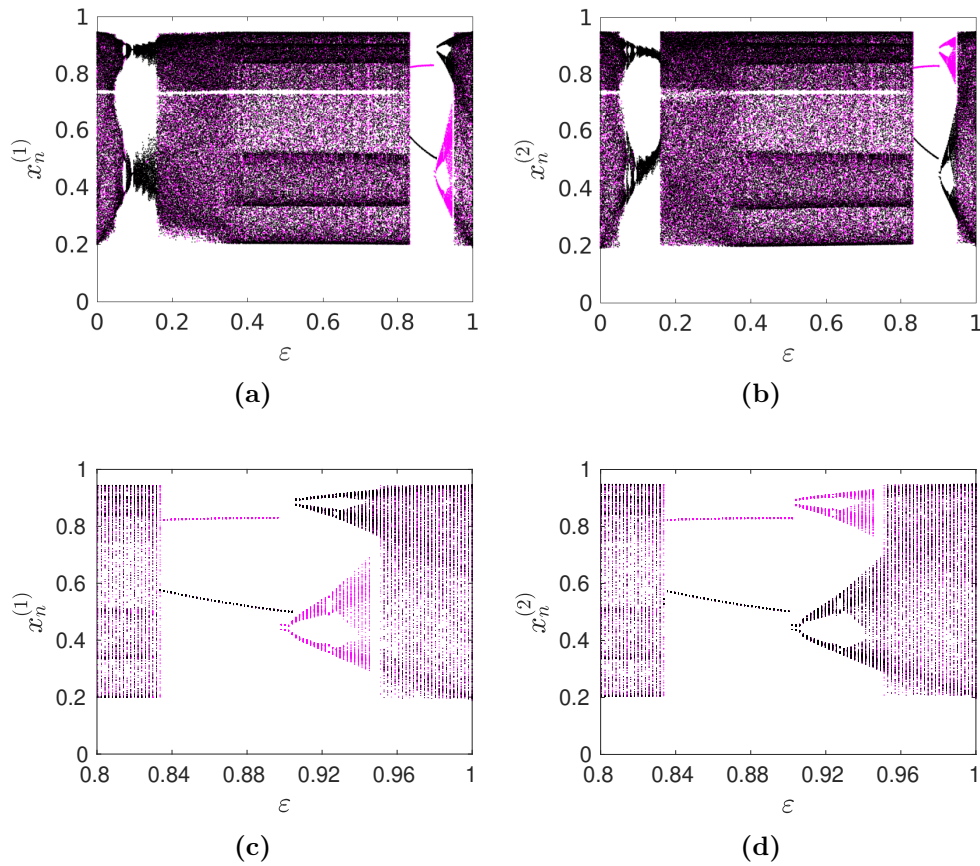


**Figura 4.13:** Varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre 8 mapas logísticos casi idénticos,  $r = (3.80 \pm 0.03)$ , donde se han interconectado todos con todos. (a) Resultados obtenidos con  $0 \leq \varepsilon \leq 1$ , y en (b) barrido fino en la zona de interés ( $0.25 \leq \varepsilon \leq 0.30$ ).

### 4.3.3. Configuración *estrella*

La configuración tipo *estrella* resulta de conectar un mapa central con cada uno de los siete restantes que componen la periferia, y los integrantes de dicha periferia únicamente con el mapa central (ver sección 2.4.2), Para tal caso se obtuvo los 8 diagramas de bifurcaciones. En la fig. 4.14 se muestran los diagramas correspondientes al mapa central, representado como  $x_n^{(1)}$  (panel a), y para uno de los siete mapas de la periferia,  $x_n^{(2)}$  (panel b).

Es interesante la similitud, especialmente en el panel derecho, con los diagramas presentados en la fig. 4.6, correspondientes a sólo dos mapas con  $r_1 = r_2 = 3.80$ . Considerando que en la configuración tipo estrella los nodos de la periferia sólo se conectan al nodo central, es esperable que respondan con cierta similitud al caso de únicamente dos nodos. Aún así, la *primera ventana periódica* que para tal caso se identificó en las proximidades del intervalo  $0.06 \lesssim \varepsilon \lesssim 0.16$ , en el caso de los diagramas presentados en la fig. 4.14 la pe-

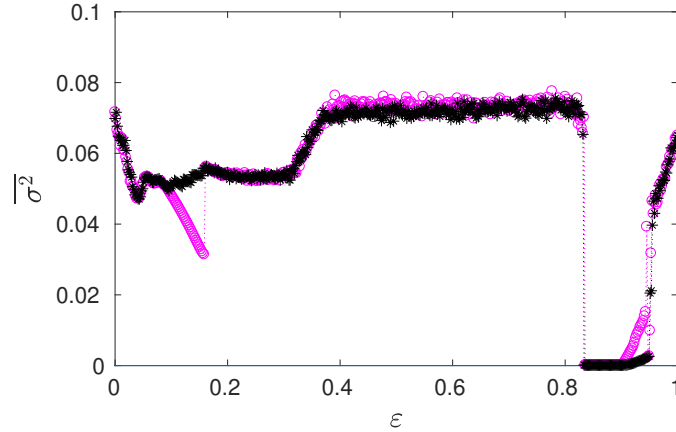


**Figura 4.14:** Diagramas de bifurcaciones de 2 mapas logísticos en una configuración de estrella de 8 mapas, obtenidos al incrementar (magenta) y decrementar (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ). (a) Mapa central,  $x_n^{(1)}$ . (b) Un mapa de la periferia,  $x_n^{(2)}$ . (c) Ampliación en el rango  $0.8 \leq \varepsilon \leq 1$  correspondiente al mapa 1,  $x_n^{(1)}$ . (d) Ampliación en el rango  $0.8 \leq \varepsilon \leq 1$  correspondiente al mapa 2,  $x_n^{(2)}$ .

riedad puede discutirse. Si bien hay atractores que podrían identificarse en  $x_n \approx 0.9$  y  $x_n \approx 0.5$ , los valores oscilan notoriamente en un rango que podría cuantificarse como  $\Delta x_n \approx 0.05$ . Ello se hace incluso más notorio al analizar la segunda ventana periódica, en la cual los diagramas muestran líneas estrechas, y que puede identificarse en las proximidades del intervalo  $0.84 < \varepsilon < 0.92$ . Además, allí se exhibe claramente el fenómeno de histéresis. Observando el mapa  $x_n^{(1)}$  en ese intervalo, puede verse que mientras se incrementa la intensidad del acople el mapa se encuentra en la cuenca de atracción del punto fijo de valor próximo a 0.82, para luego experimentar una cascada de bifurcaciones en las proximidades de  $x_n^{(1)} \approx 0.45$ , mientras que al decrementar  $\varepsilon$  la cascada de bifurcaciones la experimenta en  $x_n^{(1)} \approx 0.88$ , y luego el mapa se encuentra en

la cuenca de atracción de un punto fijo de valor próximo a 0.53.

Respecto a  $x_n^{(2)}$  en ese intervalo, comparte con el  $x_n^{(1)}$  el recorrido de los puntos fijos, pero se diferencia de aquel si se analizan las cascadas de bifurcaciones, correspondiendo la que se encuentra en  $x_n^{(2)} \approx 0.88$  al caso en que se incrementa  $\varepsilon$ , y  $x_n^{(2)} \approx 0.45$  a cuando se decremента.



**Figura 4.15:** Varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) al incrementar (magenta) y decremента (negro) la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ) entre 8 mapas logísticos cuasi idénticos ( $r = 3.80 \pm 0.03$ ) en configuración de estrella.

La fig. 4.15 muestra que la varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) presenta cambios significativos en dos intervalos muy próximos a donde se han analizado las venanatas periódicas en los diagramas de bifurcaciones. De este modo, se confirma que al incrementar o decremента la intensidad del acople, las dinámicas del sistema difieren.

#### 4.3.4. Comparación entre las configuraciones

Si bien en las tres configuraciones se detectó histéresis en términos de la varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ) considerando como parámetro la intensidad del acople ( $\varepsilon$ ), no ha sido igualmente significativa en todos los casos. Para cuantificar este hecho, se determinó en cada caso el máximo incremento relativo ( $I_r$ ) según la ec. (3.6).

En la tabla 4.2 se muestran los valores de  $I_r$  para cada una de las configuraciones de 8 mapas estudiadas. En la misma, se pone de manifiesto que en la configuración tipo anillo es en la cual la histéresis es más significativa, obteniéndose diferencias superiores al 100 % en los valores de varianza media.

**Tabla 4.2:** Valores del incremento relativo ( $I_r$ ) determinado según la ec. (3.6) para las tres configuraciones analizadas.

Configuración	<i>Anillo</i>	<i>Completa</i>	<i>Estrella</i>
$I_r$	120 %	70 %	55 %

Se hace evidente además, la importancia de la configuración en el acople de los mapas para el estudio del fenómeno de histéresis.

De todas las configuraciones, la estrella es la que presenta menor incremento relativo ( $I_r$ ) en su histéresis. Aún así, puede apreciarse el fenómeno incluso en los diagramas de bifurcaciones para un amplio rango de valores de la intensidad del acople.

En la configuración completa la histéresis se detecta en un rango muy acotado de valores de  $\varepsilon$ , siendo poco apreciable sobre los diagramas de bifurcaciones. En esta configuración, queda de manifiesto la importancia de analizar un parámetro de orden como la varianza media ( $\overline{\sigma^2}$ ). Sin embargo, el incremento relativo de la configuración completa es algo mayor al de la configuración estrella. Por otro lado, en la configuración anillo es donde la histéresis es más claramente apreciable. Se observa para un amplio rango de valores de  $\varepsilon$  y se detectan los más altos valores de  $I_r$ .

De la comparación de estos resultados surge que la configuración de anillo, que presenta homogeneidad espacial (igual número de conexiones para todos los mapas) y heterogeneidad dinámica (diferencias entre el campo medio global y local), es la que posee el mayor incremento relativo. Por el contrario, la configuración de estrella, que presenta heterogeneidad espacial y dinámica, es la que posee el menor incremento relativo. Esto llevaría a pensar que la histéresis se ve principalmente favorecida (desfavorecida) cuando la configuración del acoplamiento conlleva homogeneidad (heterogeneidad) espacial.



# Capítulo 5

## Conclusiones y perspectivas

El mapa logístico constituye un sistema que, a pesar de su simplicidad, posee una dinámica compleja y sirve como un modelo cuyas aplicaciones se encuentran en diferentes áreas (por ejemplo, el estudio de poblaciones o la encriptación de datos). Como modelo poblacional, el mapa logístico describe la evolución de una determinada comunidad en un medio con una capacidad finita, dependiendo de un único parámetro que representa la tasa de crecimiento de esa población. Como instrumento de encriptación de datos permite el cifrado de información basado en la sensibilidad que presenta a las condiciones iniciales.

En el desarrollo de este trabajo de tesis, como primera etapa, se caracterizó una implementación electrónica que permite reproducir las dinámicas del mapa logístico, y se identificaron experimentalmente las mismas. De este análisis se concluye que es un muy buen modelo experimental, obteniéndose valores de la constante Feigenbaum que en promedio difieren en menos del 5% del valor teórico.

Los mapas logísticos acoplados exhiben un rango de comportamientos dinámicos mucho más amplio que el mapa logístico aislado. En particular, el acoplamiento entre mapas logísticos permite modelar la dinámica de la interacción entre poblaciones.

En este trabajo se estudiaron experimentalmente las respuestas de dos mapas logísticos acoplados. Se observó la influencia del parámetro de un mapa en las dinámicas que experimenta el segundo, incluso para acoplamientos débiles. En el modelo poblacional, significaría que variaciones en las tasas de crecimiento de poblaciones que conviven en un determinado ambiente se afectan mutua-

mente. Por otro lado, en mapas acoplados el comportamiento de crisis puede ser más dramático, donde cambios repentinos en el comportamiento dinámico ocurren debido a pequeños cambios en la intensidad del acoplamiento. Concretamente en esta tesis se reporta que en el sistema acoplado se produce el fenómeno de histéresis, entendida como el cambio en el conjunto de atracción del sistema en el proceso de incrementar y decrementar la intensidad del acoplamiento. Ello implica que, si el sistema modela la evolución conjunta de dos poblaciones en un determinado hábitat, la histéresis implica el surgimiento de crisis ecológicas y las dificultades para revertir tales procesos. Se observó que el acoplamiento puede llevar a un régimen periódico a subpoblaciones individualmente caóticas, y dando como resultando dinámicas periódicas de la población en su conjunto. Pero también es posible que un cambio repentino en las poblaciones debido a algún agente externo, pueda hacer variar al sistema, por ejemplo, de una dinámica periódica a una caótica.

Para modelar un ecosistema más variado, es decir, un sistema que presente más poblaciones interactuando, se incrementó el número de mapas logísticos acoplados. Si bien la histéresis se detectó en todas las realizaciones, se observó que las dinámicas que emergen del conjunto de 8 mapas cuasi idénticos acoplados difusivamente, dependen fuertemente de la configuración. En general, el campo medio contiene información relevante sobre el comportamiento colectivo del sistema. En ese sentido, la configuración en anillo fue la que mostró el mayor grado de histéresis, que siendo espacialmente homogénea igual presenta una gran diferencia entre el campo medio global y el local. Para identificar y cuantificar dicho fenómeno, se empleó la varianza media del sistema como parámetro de orden.

Los resultados obtenidos resaltan los efectos ecológicos que puede tener el forzamiento antropogénico en la convivencia de especies, provocando por ejemplo, cambios repentinos de estado irreversibles o de difícil restauración. Estos resultados también pueden ser un insumo en otros campos en donde se emplean mapas logísticos acoplados difusivamente, como por ejemplo en mecanismos de encriptación de imágenes [[Mazloom and Eftekhari-Moghadam, 2009](#)]. En ese sentido, los resultados de esta tesis alertan sobre posibles dificultades en el proceso de desencriptación en caso de configurarse el sistema de tal modo que experimente histéresis.

Según la literatura consultada, ésta es la primera observación experimental de histéresis en mapas logísticos acoplados. El fenómeno reportado es robusto,

ya que los resultados experimentales han evidenciado la presencia de histéresis en todas las realizaciones y considerando todas las diferentes configuraciones (más de 100 mediciones). Posibles trabajos futuros incluyen la idea de modificar la implementación electrónica, de modo que permita controlar las condiciones iniciales, así como también extender el número de mapas acoplados para estudiar en qué medida la histéresis depende de homogeneidad de la configuración. Es decir, realizar un estudio exhaustivo de la importancia de las distintas formas de acoplamiento y la escalabilidad de los resultados cuando se incluyen más mapas.



# Referencias bibliográficas

- [Alligood et al., 1996] Alligood, K., D. Sauer, T., and A. Yorke, J. (1996). *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, volume 1. Springer, 1 edition.
- [Benson et al., 1994] Benson, O., Raithel, G., and Walther, H. (1994). Quantum jumps of the micromaser field: Dynamic behavior close to phase transition points. *Phys. Rev. Lett.*, 72:3506–3509.
- [Berinde, 2010] Berinde, V. (2010). Existence and approximation of solutions of some first order iterative differential equations. *Miskolc Mathematical Notes*, 11(1):13 – 26.
- [Boccaletti et al., 2002] Boccaletti, S., Kurths, J., Osipov, G., Valladares, D., and Zhou, C. (2002). The synchronization of chaotic systems. *Physics Reports*, 366(1):1 – 101.
- [Case et al., 2012] Case, K., Fair, R., and Oster, S. (2012). *Principles of Macroeconomics*, volume 1. Prentice Hall, 10 edition.
- [Chialvo, 1995] Chialvo, D. R. (1995). Generic excitable dynamics on a two-dimensional map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 5(3):461 – 479. Nonlinear Phenomena in Excitable Physiological Systems.
- [Costa, 2005] Costa, J. (2005). *Diccionario de química física.*, volume 1. Diaz de Santos Ediciones, 1 edition.
- [de San Roman et al., 1998] de San Roman, F. S., Boccaletti, S., Maza, D., and Mancini, H. (1998). Weak synchronization of chaotic coupled map lattices. *Phys. Rev. Lett.*, 81:3639–3642.
- [Enns, 2010] Enns, R. H. (2010). *It's a Nonlinear World*. Springer Publishing Company, Incorporated, 1st edition.

- [Escalona-Morán et al., 2007] Escalona-Morán, M., Cosenza, M., Guillén, P., and Coutin, P. (2007). Synchronization and clustering in electroencephalographic signals. *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(4):820 – 825.
- [Ewing, 1885] Ewing, J. (1885). Experimental research in magnetism. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 176:523–640.
- [Feigenbaum, 1978] Feigenbaum, M. J. (1978). Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *Journal of Statistical Physics*, 19(1):25–52.
- [Giglio et al., 1981] Giglio, M., Musazzi, S., and Perini, U. (1981). Transition to chaotic behavior via a reproducible sequence of period-doubling bifurcations. *Phys. Rev. Lett.*, 47:243–246.
- [Gill, 2017] Gill, J. (2017). A primer on the elementary theory of infinite compositions of complex functions.
- [Gsell et al., 2016] Gsell, A. S., Scharfenberger, U., Özkundakci, D., Walters, A., Hansson, L.-A., Janssen, A. B. G., Nöges, P., Reid, P. C., Schindler, D. E., Van Donk, E., Dakos, V., and Adrian, R. (2016). Evaluating early-warning indicators of critical transitions in natural aquatic ecosystems. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 113(50):E8089–E8095.
- [Gu et al., 1984] Gu, Y., Tung, M., Yuan, J.-M., Feng, D. H., and Narducci, L. M. (1984). Crises and hysteresis in coupled logistic maps. *Phys. Rev. Lett.*, 52:701–704.
- [Guckenheimer, 1979] Guckenheimer, J. (1979). Sensitive dependence to initial conditions for one dimensional maps. *Communications in Mathematical Physics*, 70(2):133–160.
- [Hohl and Gavrielides, 1999] Hohl, A. and Gavrielides, A. (1999). Bifurcation cascade in a semiconductor laser subject to optical feedback. *Phys. Rev. Lett.*, 82:1148–1151.
- [Horowitz and Hill, 2015] Horowitz, P. and Hill, W. (2015). *The Art of Electronics*. Cambridge University Press, 3 edition.

- [Kaneko, 1990] Kaneko, K. (1990). Clustering, coding, switching, hierarchical ordering, and control in a network of chaotic elements. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 41(2):137 – 172.
- [Kiel and Elliott, 1996] Kiel, D. and Elliott, E. (1996). *Chaos Theory in the Social Sciences: Foundations and Applications*. University of Michigan Press.
- [Kocarev and Jakimoski, 2001] Kocarev, L. and Jakimoski, G. (2001). Logistic map as a block encryption algorithm. *Physics Letters A*, 289(4):199 – 206.
- [Kovacic et al., 2008] Kovacic, I., Brennan, M., and Lineton, B. (2008). On the resonance response of an asymmetric duffing oscillator. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43:858–867.
- [Krasnosel'skii, 1983] Krasnosel'skii, M. Pokrovskii, A. (1983). *Systems with Hysteresis*. Springer-Verlag.
- [Layek, 2015] Layek, G. (2015). *An Introduction to Dynamical Systems and Chaos*, volume 1. Springer, 1 edition.
- [LHer et al., 2016] LHer, A., Amil, P., Rubido, N., and et al. (2016). Electronically-implemented coupled logistic maps. *Eur. Phys. J. B*, 89:81.
- [Linsay, 1981] Linsay, P. S. (1981). Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator. *Phys. Rev. Lett.*, 47:1349–1352.
- [Lloyd, 1995] Lloyd, A. L. (1995). The coupled logistic map: a simple model for the effects of spatial heterogeneity on population dynamics. *Journal of Theoretical Biology*, 173(3):217 – 230.
- [Lorenz, 1963] Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20(2):130–141.
- [Lyapunov, 1892] Lyapunov, A. (1892). The general problem of the stability of motion (in russian). *Kharkov Mathematical Society*.
- [Madhekar, 2006] Madhekar, S. (2006). Electronic circuit realization of the logistic map. *Sadhana - Academy Proceedings in Engineering Sciences*, 31.
- [Malthus, 1798] Malthus, T. (1798). *An Essay on the Principle of Population*. J. Johnson.

- [Martí, 2003] Martí, AC y Masoller, C. (2003). Delay-induced synchronization phenomena in an array of globally coupled logistic maps. *Phys. Rev. E*.
- [May, 1976] May, R. (1976). Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature*, 261:459–467.
- [Mazloom and Eftekhari-Moghadam, 2009] Mazloom, S. and Eftekhari-Moghadam, A. M. (2009). Color image encryption based on coupled nonlinear chaotic map. *Chaos, Solitons & Fractals*, 42(3):1745 – 1754.
- [McGonigal and Elmasry, 1987] McGonigal, G. and Elmasry, M. (1987). Generation of noise by electronic iteration of the logistic map. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 34(8):981–983.
- [Meadows, 1972] Meadows, D. H. ([1972]). *The Limits to growth; a report for the Club of Rome*. New York: Universe Books, [1972]. Potomac Associates book.
- [Mujumdar et al., 2007] Mujumdar, S., Türk, V., Torre, R., and Wiersma, D. S. (2007). Chaotic behavior of a random laser with static disorder. *Phys. Rev. A*, 76:033807.
- [Myrberg, 1962] Myrberg, P. (1962). Sur l’itération des polynomes réels quadratiques. *J. Math. Pures Appl.*, 41:339–351.
- [Neufeld and Vicsek, 1995] Neufeld, Z. and Vicsek, T. (1995). Spatiotemporal chaos in a coupled map lattice with unstable couplings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(18):5257–5266.
- [Ngouonkadi et al., 2016] Ngouonkadi, E. M., Fotsin, H., Fotso, P. L., Tamba, V. K., and Cerdeira, H. A. (2016). Bifurcations and multistability in the extended hindmarsh–rose neuronal oscillator. *Chaos, Solitons & Fractals*, 85:151–163.
- [NI, 2009] NI, C. (2009). *NI USB-621x User Manual*. [www.ni.com/pdf/manuals/371931f.pdf](http://www.ni.com/pdf/manuals/371931f.pdf).
- [Panchev, 2003] Panchev, S. (2003). Transient and permanent regimes of nonlinear dynamical systems. general analytical approach and examples. *Comptes Rendus de l’Academie Bulgare des Sciences*, 56:37.

- [Pareek et al., 2006] Pareek, N., Patidar, V., and Sud, K. (2006). Image encryption using chaotic logistic map. *Image and Vision Computing*, 24(9):926 – 934.
- [Perez et al., 1993] Perez, G., Sinha, S., and Cerdeira, H. A. (1993). Order in the turbulent phase of globally coupled maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 63(3):341 – 349.
- [Phatak, 1995] Phatak, SC y Rao, S. S. (1995). Mapa logístico: un posible generador de números aleatorios. *Phys. Rev. E*.
- [Poincaré, 1885] Poincaré, H. (1885). Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. *Acta Mathematica*, 7(1):259–380.
- [Poincaré and Magini, 1899] Poincaré, H. and Magini, R. (1899). Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste. *Il Nuovo Cimento (1895-1900)*, 10(1):128–130.
- [Ponce C. et al., 2009] Ponce C., M., Masoller, C., and Martí, A. C. (2009). Synchronizability of chaotic logistic maps in delayed complex networks. *The European Physical Journal B*, 67(1):83–93.
- [Poulin and Touchette, 2008] Poulin, V. and Touchette, H. (2008). On a generalization of the logistic map.
- [Rabinovich et al., 2006] Rabinovich, M. I., Varona, P., Selverston, A. I., and Abarbanel, H. D. I. (2006). Dynamical principles in neuroscience. *Rev. Mod. Phys.*, 78:1213–1265.
- [Rodrigues et al., 2016] Rodrigues, A. C., Cerdeira, H. A., and Machado, B. S. (2016). The influence of hubs in the structure of a neuronal network during an epileptic seizure. *The European Physical Journal Special Topics*, 225(1):75–82.
- [Shivamoggi, 2014] Shivamoggi, B. K. ([2014]). *Nonlinear Dynamics and Chaotic Phenomena: An Introduction*, volume 1. Springer, 2 edition.
- [Singh and Sinha, 2010] Singh, N. and Sinha, A. (2010). Chaos-based secure communication system using logistic map. *Optics and Lasers in Engineering*, 48:398–404.

- [Stone, 1993] Stone, L. (1993). Period-doubling reversals and chaos in simple ecological models. *Nature*, 365(6447):617–620.
- [Storch et al., 2017] Storch, L. S., Pringle, J. M., Alexander, K. E., and Jones, D. O. (2017). Revisiting the logistic map: A closer look at the dynamics of a classic chaotic population model with ecologically realistic spatial structure and dispersal. *Theoretical Population Biology*, 114:10 – 18.
- [Strogatz, 1994] Strogatz, S. (1994). *Non linear Dynamics and Chaos*, volume 1. Addison Wesley, 1 edition.
- [Suneel, 2006] Suneel, M. (2006). Electronic circuit realization of the logistic map. *Sadhana*, 31(1):69–78.
- [Vandermeer and Kaufmann, 1998] Vandermeer, J. and Kaufmann, A. (1998). Models of coupled population oscillators using 1-d maps. *Journal of Mathematical Biology*, 37(2):178–202.
- [Viana et al., 2005] Viana, R., Grebogi, C., de S.Pinto, S., Lopes, S., Batista, A., and Kurths, J. (2005). Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 206(1):94 – 108.
- [Wang et al., 1993] Wang, W., Perez, G., and Cerdeira, H. A. (1993). Dynamical behavior of the firings in a coupled neuronal system. *Phys. Rev. E*, 47:2893–2898.
- [Wojewoda et al., 2008] Wojewoda, J., Stefański, A., Wiercigroch, M., and Kapitaniak, T. (2008). Hysteretic effects of dry friction: modelling and experimental studies. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 366(1866):747–765.
- [Young et al., 2009] Young, H. D., Freedman, R. A., Sears, F., and Zemansky, M. (2009). *Física Universitaria*, volume 2. Pearson Educación, 12 edition.
- [Zielinska et al., 1985] Zielinska, B. J. A., Mukamel, D., Steinberg, V., and Fishman, S. (1985). Chaotic behavior in externally modulated hydrodynamic systems. *Phys. Rev. A*, 32:702–705.
- [Zill, 1997] Zill, D. G. (1997). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*, volume 1. International Thomson Publishing Company, 6 edition.

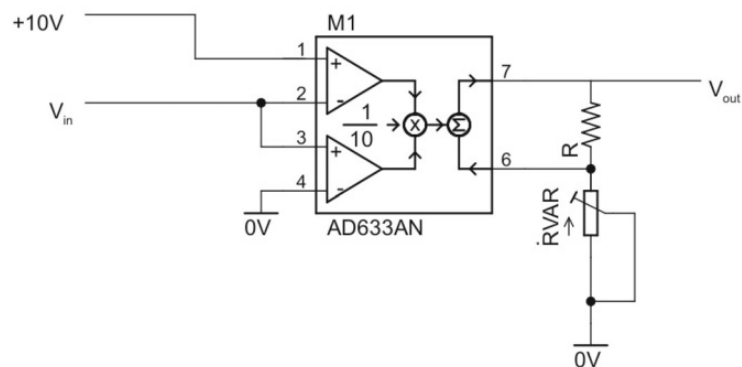
# ANEXOS



# Anexo 1

## Diagrama de los circuitos

En este anexo se presentan los diagramas de los circuitos implementados para la realización de este trabajo de tesis.



**Figura 1.1:** Esquema del circuito para implementar un mapa logístico.  $R = 1K\Omega$ ;  $R_{var} = [0 - 3]K\Omega$

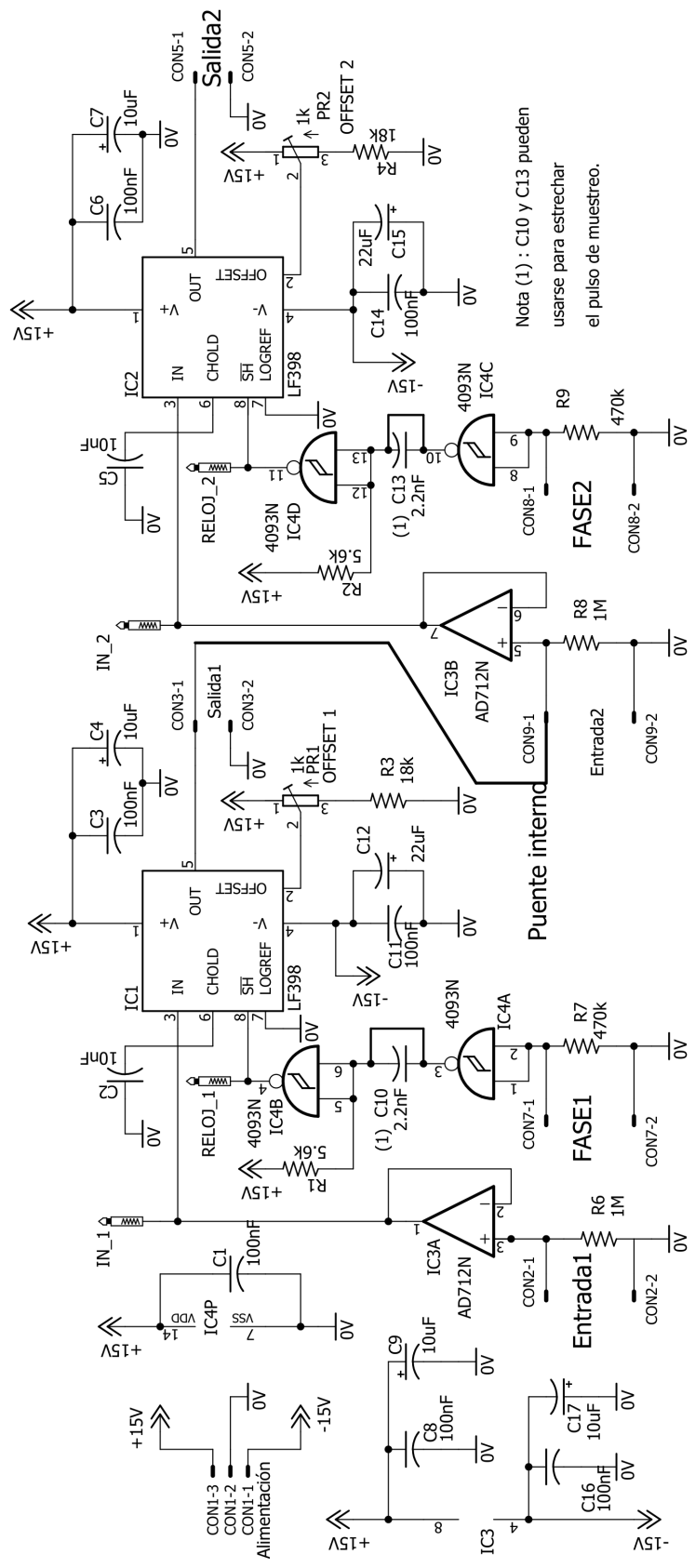


Figura 1.2: Esquema del circuito de muestreo y retención.



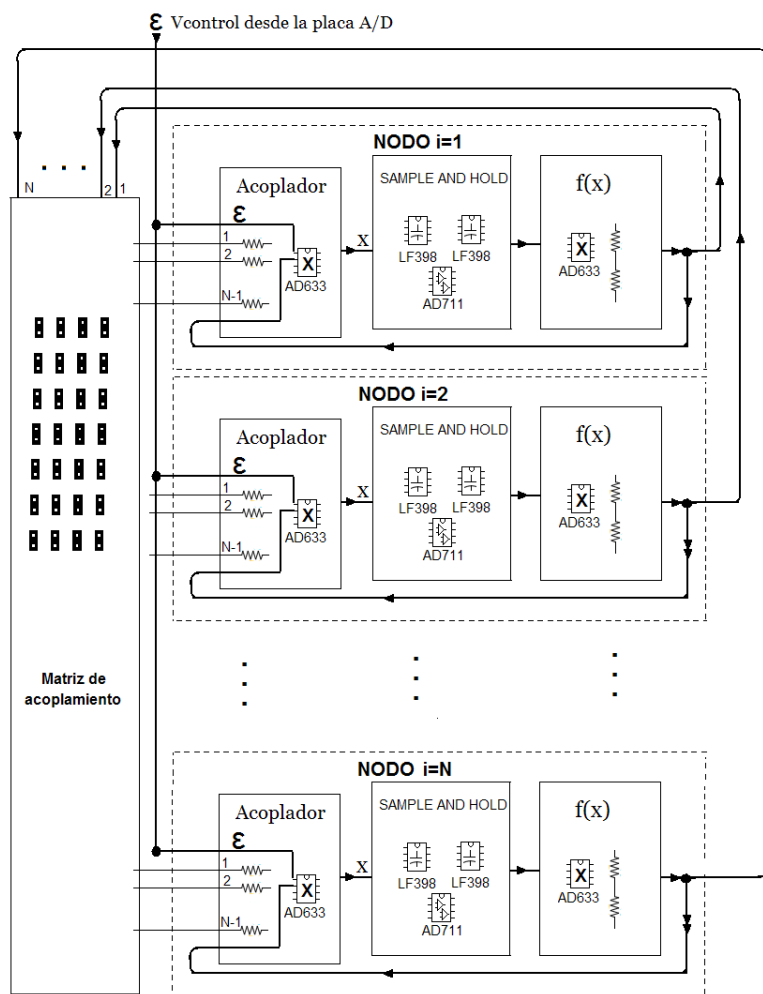


Figura 1.4: Diagrama de bloques del circuito de mapas acoplados.

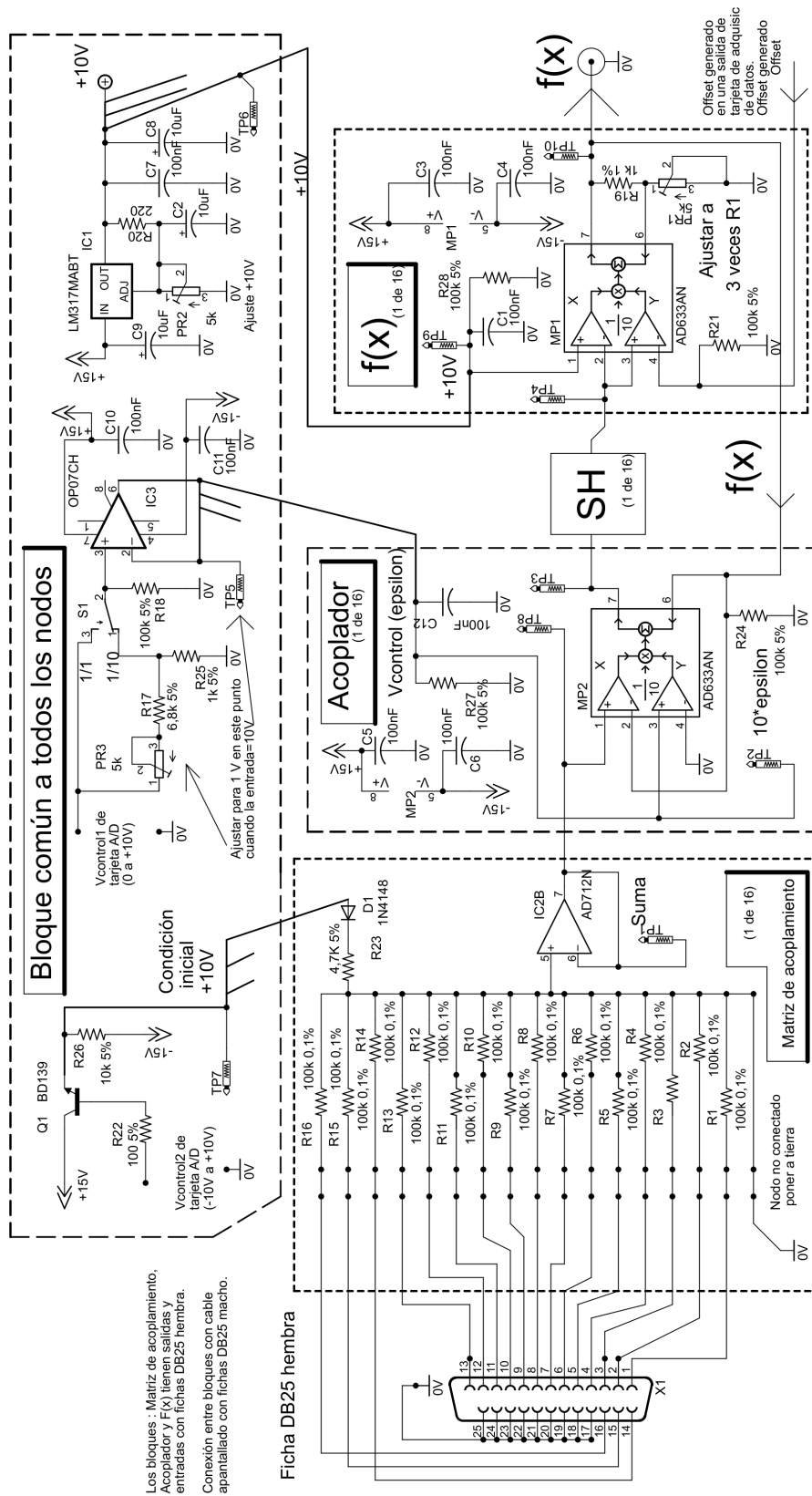


Figura 1.5: Esquema del circuito de mapas acoplados.

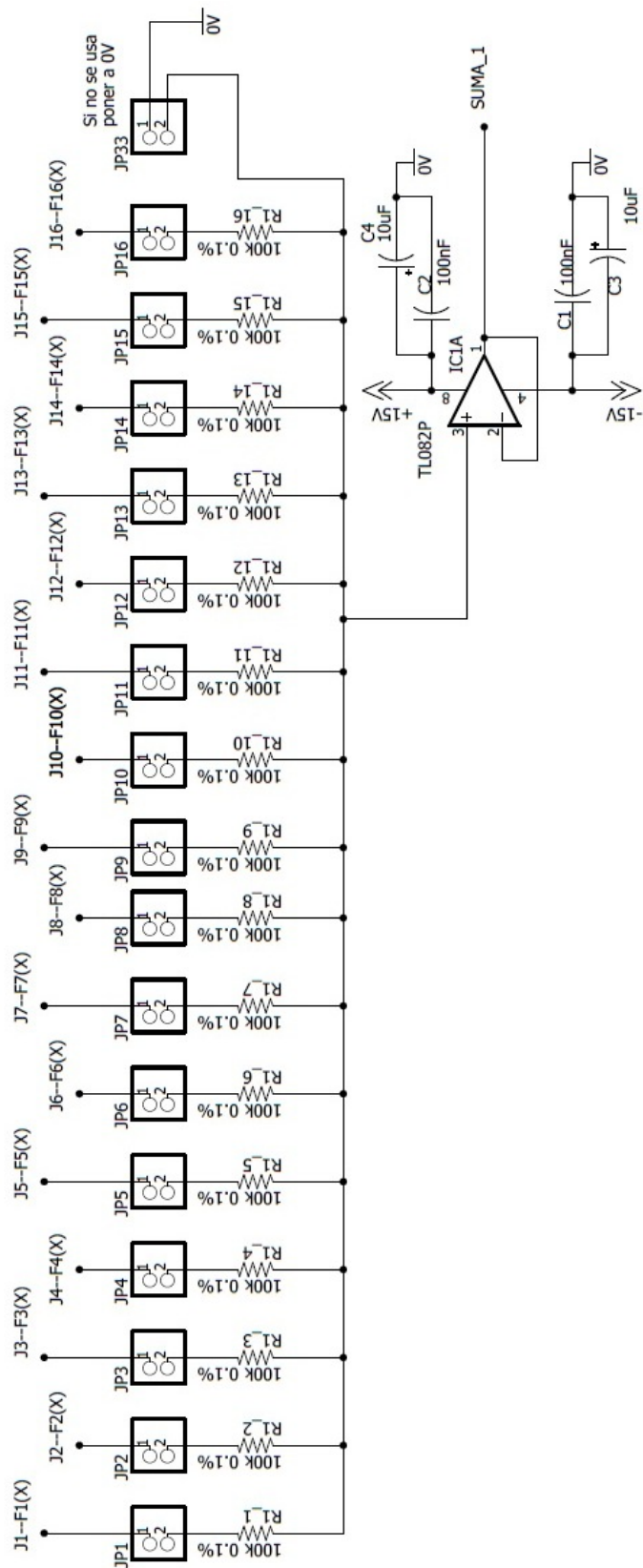
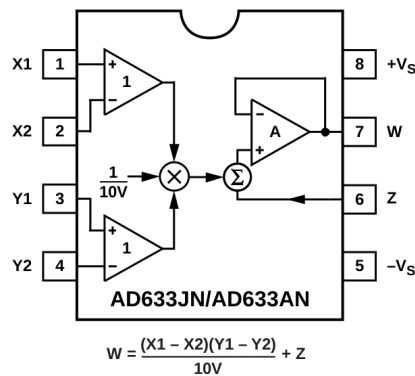


Figura 1.6: Circuito que implementa la primera línea de la matriz de acoplamiento.

## Anexo 2

# Ecuación del Bloque Mapa Logístico

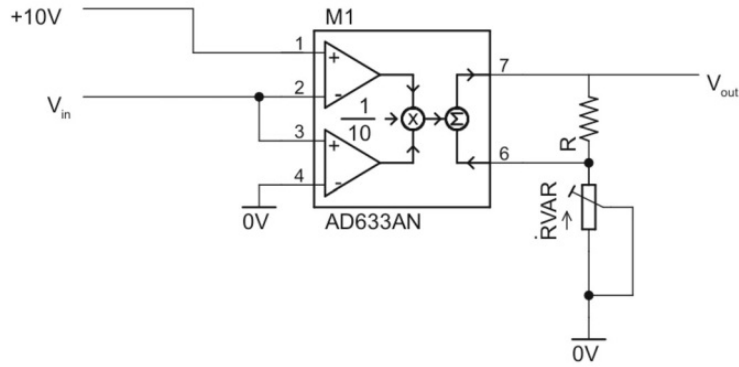
El circuito que implementa la función logística se basa en el multiplicador analógico AD633AN<sup>1</sup>, cuyo rango de entrada es  $\pm 10V$ , el de salida  $\pm 11V$  y el voltaje de saturación,  $V_s = 10V$ . Este dispositivo permite realizar el producto de dos señales eléctricas analógicas y sumar una tercera (ver fig. 2.1).



**Figura 2.1:** Diagrama del multiplicador analógico empleado.

La fig. 3.1 muestra un esquema del circuito completo, donde  $R = 1K\Omega$  y  $R_{var}$  representa una resistencia variable en el rango de 0 a  $3K\Omega$ .

<sup>1</sup>Hoja de datos disponible en:  
[www.analog.com/media/en/technical\\_documentation/data\\_sheets/ad633.pdf](http://www.analog.com/media/en/technical_documentation/data_sheets/ad633.pdf)



**Figura 2.2:** Diagrama del circuito electrónico que reproduce la función logística [LHer et al., 2016].

El voltaje a la salida del multiplicador a partir de su ecuación indicada en la fig. 2.1 resulta

$$V_{out} = \frac{V_{in}(V_s - V_{in})}{V_s} + V_6. \quad (2.1)$$

Considerando despreciable la corriente en las entradas, se tiene que

$$V_{out} - V_6 = R \cdot i,$$

y

$$V_{out} = (R + R_{var}) \cdot i,$$

de donde

$$V_6 = V_{out} \left(1 - \frac{R}{R + R_{var}}\right). \quad (2.2)$$

Sustituyendo la ec. (2.2) en la (2.1), se obtiene que el voltaje a la salida del multiplicador está dado por

$$V_{out}(t) = \left(1 + \frac{R_{var}}{R}\right) \frac{V_{in}(t)(V_s - V_{in}(t))}{V_s}$$

que corresponde a la ecuación (3.1).