Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales
Universidad de la República

Documentos de Trabajo

Oportunidades de comercio internacional eléctrico y reglas de reparto del beneficio modeladas por juegos de negociación repetidos

Mario Ibarburu

Documento No. 30/11
Diciembre 2011

ISSN 0797-7484

Oportunidades de comercio internacional eléctrico y reglas de reparto del beneficio modeladas por juegos de negociación repetidos

Mario Ibarburu

Departamento de Economía
Facultad de Ciencias Sociales

Septiembre de 2011

Resumen:

El comercio internacional spot bilateral de energía eléctrica entre los países de la región, puede modelarse como una sucesión de juegos de negociación, uno por cada oportunidad de negocio, en cada uno de los cuales existe un beneficio por unidad de tiempo que debe repartirse, y cuya duración es aleatoria. El juego de comercio internacional en cada oportunidad de negocio se puede hacer corresponder con el juego de reparto de una cantidad fija, estudiado por Rubinstein. Si en la negociación se admite la posibilidad de money burning, es decir acciones de los jugadores que reducen el valor total del juego para las partes, que pueden servir como amenaza contra el rechazo de una oferta, cada juego admite equilibrios de Nash perfectos en subjuegos ineficientes, es decir con demoras en el acuerdo. Se encuentran condiciones para que cuando dos partes participan de una sucesión de juegos de comercio, un acuerdo predefinido para repartir de manera inmediata los beneficios entre las partes en cada juego, sea sostenible como alternativa a recaer en los equilibrios ineficientes de negociación caso a caso.

Palabras clave: juegos de negociación, comercio internacional, energía

Abstract:

International electricity spot trade between two countries is modeled as a sequence of bargaining games, one for each trade opportunity. Each game has a benefit per time unit and random duration. There is a correspondence between this trade game and the bargaining game for the partition of a pie studied by Rubinstein. If the game admits the possibility of “money burning”, actions by a player to destroy surplus to punish the other player’s rejection of an offer, each game admits multiple inefficient perfect Nash equilibria, with delay in the partition. Conditions are found for the existence of predefined agreements between the players, sustaining efficient immediate partition in each game, as an alternative to inefficient Nash equilibria in the sequence of games.

Keywords: bargaining games, international trade, energy

JEL: C73, C78, L94

1 INTRODUCCIÓN

El comercio spot internacional bilateral de electricidad tiene dos características peculiares respecto al de otros bienes.

- Los costos de producción de la electricidad en cada uno de los países que pueden comerciar, y como consecuencia el sentido del comercio y sus beneficios potenciales por unidad de tiempo, están sujetos a aleatoriedad. Esto se debe a la variabilidad de la generación hidráulica y eólica, y de la disponibilidad de las centrales térmicas y a los ciclos no totalmente predecibles de sobreinversión o subinversión que suelen experimentar los sistemas de generación eléctrica. Debido a esto puede concebirse el comercio como una sucesión de oportunidades de comercio de duración y características aleatorias.
- Por razones técnicas ese comercio requiere la existencia de regulación.

En algunos casos, como en la Unión Europea, la regulación busca la creación de un mercado spot único de energía que unifica los mercados nacionales. El problema central de la regulación es asegurar la participación igualitaria en estos mercados de las empresas de todos los países interconectados.

En nuestra región en cambio, la regulación ha dado lugar a transacciones bilaterales entre los países donde se determinan explícitamente los precios del comercio entre ellos. El problema central en este caso es el reparto de los beneficios del comercio entre países. En un régimen de este tipo, se vuelve esencial crear acuerdos estables para fijar estos precios para evitar los costos de transacción de una negociación caso a caso, cada vez que aparece una nueva oportunidad de comercio.

Un primer problema económico de interés es diseñar, describir y analizar cualitativamente acuerdos de reparto del beneficio en el comercio spot de electricidad, que resulten institucionalmente factibles. Un segundo aspecto es el análisis formal, que debería explicar las ineficiencias en la negociación caso a caso en cada oportunidad de comercio y encontrar las condiciones que deben cumplir los acuerdos con reglas de precios para ser preferibles por ambas partes a dicha negociación caso a caso. Este segundo propósito motiva el presente trabajo.

El comercio spot internacional bilateral de electricidad podría modelarse como un juego que comprende una sucesión de oportunidades de comercio indicadas por el ordinal n= 1, 2,…..Cada oportunidad de comercio se extiende por una cantidad aleatoria de períodos de tiempo.

Los períodos de tiempo de igual duración se denotan por t=1,….

En cada oportunidad de comercio, existe un reparto de los papeles de comprador y vendedor, un beneficio b_n por unidad de tiempo a repartir entre los dos jugadores (igual a la diferencia entre el costo evitado del comprador y el costo incremental del vendedor, en caso de que el comercio tenga lugar) y una probabilidad p_n de que la oportunidad de comercio juego sobreviva en el siguiente período de tiempo. Al conjunto de esos parámetros aleatorios de la oportunidad de comercio n-ésima se los denotará con la variable aleatoria v_n.

Al desaparecer la oportunidad de comercio n-ésima, la naturaleza genera otra nueva n+1-ésima, cuyos parámetros resultan de los valores de una nueva variable aleatoria v_{n+1}.

En resumen el comercio internacional de energía entre dos países podría modelarse como una sucesión infinita de juegos de negociación, cada uno potencialmente infinito, uno por cada oportunidad de comercio. En cada oportunidad de comercio las dos partes deben acordar el reparto del beneficio por unidad de tiempo. Se supondrá que una vez que se ha llegado al acuerdo, este se mantiene en tanto no termine esa oportunidad de comercio. Se supondrá que los jugadores son neutrales al riesgo y por lo tanto buscan maximizar el valor esperado de sus beneficios por el comercio.

2 CORRESPONDENCIA DE UN JUEGO DE COMERCIO CON UNO DE RUBINSTEIN

Llamemos **juego del comercio (JC)** al juego de negociación correspondiente a una oportunidad de comercio.

Cada juego de comercio puede hacerse corresponder a un juego ampliamente estudiado en la literatura: el regateo bilateral por el reparto de una suma fija B, en el que alternativamente cada parte hace una oferta a la otra, la que puede o no ser aceptada. El juego puede extenderse indefinidamente si no se llega a acuerdo. Las partes tienen factores de descuento del beneficio, por lo que la demora en alcanzar el acuerdo es ineficiente, ya que contrae la frontera de utilidad de las partes en el problema. En adelante llamaremos a ese juego, **juego de Rubinstein (JR)**, ya que el trabajo inicial de esa literatura es el de Rubinstein (1982).

En esta sección se prueba que dado un JC es posible asociarle un JR particular y establecer una correspondencia entre ambos, donde existe correspondencia entre los subjuegos, las estrategias y los equilibrios de Nash en los subjuegos de ambos juegos. En particular se trata de probar que los valores esperados de los beneficios de ambas partes en el JC, descontados al inicio del juego, cuando juegan estrategias σ_1 y σ_2 son respectivamente iguales a los valores ciertos de los beneficios en el JR asociado, descontados al inicio del juego, cuando juegan las estrategias respectivamente correspondientes a las anteriores. Por lo tanto los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos (en adelante ENPS) del JC se corresponden de manera biunívoca con los ENPS del JR. Esto permite utilizar para los JC la abundante literatura que existe sobre los JR.

El artículo de Rubinstein obtuvo un resultado interesante: existe un único ENPS del regateo bilateral infinito en el que las partes acuerdan el reparto de inmediato, en el primer período de tiempo y dicho reparto está próximo a la mitad para cada jugador si los factores de descuento por unidad de tiempo, son iguales y cercanos a 1, con una leve ventaja para la parte a la que le ha tocado proponer primero.

En el JR, existe una cantidad B a repartir entre los dos jugadores 1 y 2, con factores de descuento por unidad de tiempo ρ_1 y ρ_2. La negociación por el reparto se desarrolla al cabo de períodos de tiempo de igual duración, t = 0,1,….. Mientras no se haya llegado al acuerdo, al comienzo de cada período t una de las partes i hace a la otra j una oferta **s**, que puede ser aceptada o no por j. Si es aceptada la oferta, la parte 1 tiene un beneficio sB y la parte 2 un beneficio (1-s)B, datados al inicio del período t, y descontados por cada parte con su factor respectivo. Si no es aceptada la oferta, en el período siguiente t+1, los papeles se invierten y j hace una oferta a i, que podrá o no ser aceptada, y así sucesivamente. Se conviene que la variable ofertada por cada parte es siempre la fracción del beneficio que le toca al jugador 1.

En el panel A) del Diagrama 1 en la página siguiente, se representa esquemáticamente el juego de Rubinstein JR. La negociación en cada oportunidad de comercio modelada mediante un juego de comercio JC, se representa en el panel B).

En el JC, hay un beneficio b por período a repartir entre los dos jugadores 1 y 2, con factores de descuento por unidad de tiempo δ_1 y δ_2. Si se demora el acuerdo en un período se pierde el beneficio b de ese período. Al comienzo del período t una de las partes i hace a la otra j una oferta **s**, que es aceptada o no. Si es aceptada tiene lugar un beneficio b datado al comienzo del período t y beneficios b datados en cada uno de los períodos siguientes mientras no desaparezca la oportunidad de comercio, y en cada período la parte 1 recibe una proporción s y la parte 2 una proporción (1-s) del beneficio por unidad de tiempo.

Dado que una oportunidad de comercio existe en un período t, hay una probabilidad p de que la naturaleza elija "sigue" y continúe la misma en el período siguiente y 1-p de que la naturaleza elija "fin" y la oportunidad de comercio desaparezca. Esto ocurre tanto si se ha llegado al acuerdo como si no se ha llegado al mismo. Las decisiones de la naturalaza se suponen variables aleatorias independientes entre sí, y cuyo valor no se ve afectado de modo alguno por las estrategias de los jugadores.

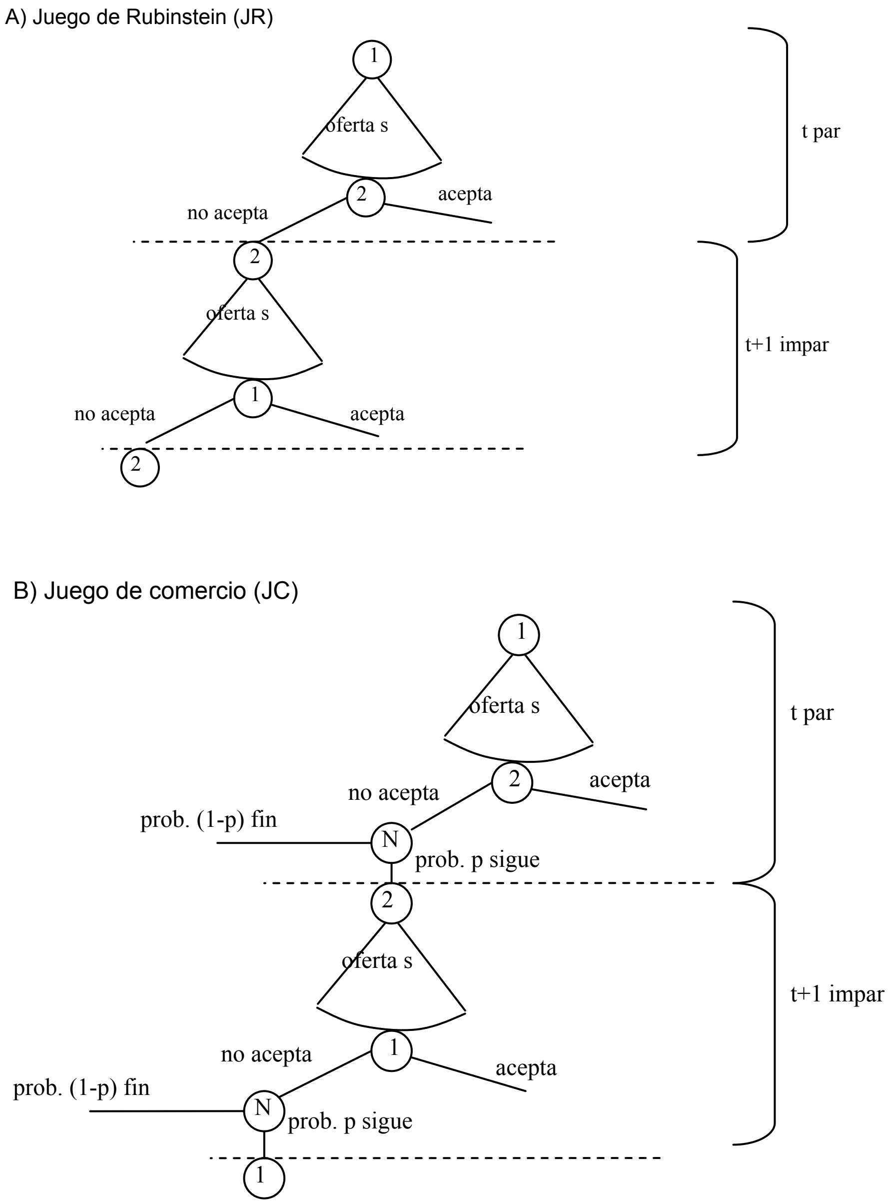
Al salir el juego por "acepta" con partición s, en el período t

- en el JR los jugadores 1 y 2 perciben respectivamente unos ingresos seguros sB y (1-s)B datados al inicio de t
- en el JC los jugadores 1 y 2 perciben respectivamente unos ingresos aleatorios cuyos valores esperados (dado que se ha llegado a t) descontados al inicio de t se denotan por $B^C{}_1(s,b,\delta_1,p)$ y $B^C{}_2(s,b,\delta_2,p)$.

La probabilidad de que el JC iniciado en el período 0, sobreviva hasta el período t, y por lo tanto exista el beneficio potencial b en el período t, es igual a p^t.

Los beneficios de cada parte en el JC, actualizados al inicio de t=0, dado un acuerdo en t=0, son aleatorios, porque la duración del negocio una vez alcanzado el acuerdo es aleatoria.

Diagrama 1



Los valores esperados de beneficios para cada parte en un JC, descontados al inicio del período 0, de un acuerdo alcanzado en 0, con reparto s, beneficio por unidad de tiempo b, probabilidad de sobrevivencia p, cuando las tasas de descuento de ambos jugadores son δ_1 y δ_2, que se denotan por $B^C{}_1(s,b,\delta_1,p)$ y $B^C{}_2(s,b,\delta_2,p)$ vienen dados por las siguientes expresiones:

$$B^C{}_1(s,b,\delta_1,p) = sb\sum_{t=0}^{\infty}\delta_1{}^t p^t = \frac{sb}{1-\delta_1 p} = sB^{\infty}(b, p\delta_1) \qquad (1)$$

$$B^C{}_2(s,b,\delta_2,p) = (1-s)b\sum_{t=0}^{\infty}\delta_2{}^t p^t = \frac{(1-s)b}{1-\delta_2 p} = (1-s)B^{\infty}(b, p\delta_2)$$

donde $B^{\infty}(b, \rho) = \dfrac{b}{1-\rho}$

$B^{\infty}(b, \rho)$ es el valor actual de un flujo infinito de beneficios b por unidad de tiempo, comenzando en t=0, actualizados a t=0 con tasa ρ.

En adelante se supondrá $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, con lo que (1) toma la forma:

$$B^C{}_1(s,b,\delta,p) = \frac{sb}{1-\delta p} = sB^{\infty}(b, p\delta) \qquad (2)$$

$$B^C{}_2(s,b,\delta,p) = \frac{(1-s)b}{1-\delta p} = (1-s)B^{\infty}(b, p\delta)$$

Esos valores $B^C{}_1(.)$ y $B^C{}_2(.)$ son también los beneficios esperados de un acuerdo con reparto s, obtenido en cualquier período t, actualizados al inicio de dicho período, dado el evento de que el juego ha sobrevivido hasta dicho período t.

La tabla siguiente compara esquemáticamente los beneficios en el JR y el JC, para un acuerdo obtenido en un período t, con reparto s.

Juego	Jugador	Períodos	0, 1, …., t-1	t(acuerdo)	t+1, t+2,….
JR	1	Beneficio cierto	0	sB	--
	2	Beneficio cierto	0	(1-s)B	--
JC	1	Beneficios corrientes por período mientras el juego sobreviva	0	sb	sb
		Beneficio esperado actualizado a t		$sB^{\infty}(b, p\delta)$	
	2	Beneficios corrientes por período mientras el juego sobreviva	0	(1-s)b	(1-s)b
		Beneficio esperado actualizado a t		$(1-s)B^{\infty}(b,p\delta)$	

Llamemos $\mathbb{S}_{\mathbf{R}}$ y $\mathbb{S}_{\mathbf{C}}$ respectivamente a los conjuntos de subjuegos del juego de Rubinstein JR y del juego del comercio JC.

Hay una correspondencia biunívoca $\mathcal{B}_{\mathbf{H}}$ entre los subjuegos del juego de Rubinstein y del juego de comercio JC, donde los subjuegos que se corresponden son los que tienen en su historia las mismas acciones de cada uno de los jugadores, y en el juego de comercio, la naturaleza ha jugado "sigue" en todos sus nodos.

Sean Σ_1 y Σ_2 los conjuntos de estrategias posibles en el juego de Rubinstein JR y $\Sigma^C{}_1$ y $\Sigma^C{}_2$ los conjuntos de estrategias posibles en el juego de comercio JC.

Dada cualquier estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ en el juego de Rubinstein JR, definamos la estrategia $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{C}}{}_{\mathbf{i}}(\sigma_i)$ correspondiente de σ_i en el juego de comercio, como la que toma en cada subjuego del juego de comercio las mismas decisiones de ofertar y de aceptar, o rechazar ofertas, según el t sea par o impar, que las tomadas por σ_i en el subjuego de JR correspondiente en la correspondencia $\mathcal{B}_{\mathbf{H}}$.

Simétricamente se puede definir $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}(\sigma^C{}_i)$ para toda $\sigma^C{}_i \in \Sigma^C{}_i$.

Es decir que el par de funciones $\boldsymbol{\sigma^C_i}$: $\Sigma_i \rightarrow \Sigma^C_i$ y $\boldsymbol{\sigma_i}$: $\Sigma_i \rightarrow \Sigma^C_i$, i=1,2, establecen para cada jugador una correspondencia biunívoca $\mathcal{B}_\Sigma$ entre las estrategias del jugador en ambos juegos JR y JC.

<u>Proposición I</u>:

Dados:

- un juego de comercio JC(δ,b,p) en el que la tasa de descuento es δ igual para ambos jugadores, el beneficio por unidad de tiempo es b, y la probabilidad de supervivencia de la oportunidad de comercio es p,
- y un juego de Rubinstein $JR(B^\infty(b, p\delta), p\delta)$ en el que se reparte una cantidad $B^\infty(b,p\delta)$ y los jugadores tienen tasas de descuento iguales a pδ,

los beneficios esperados actualizados a t, en JC(δ,b,p), dado que el juego se encuentra en el inicio del subjuego H^C datado en t, cuando en el juego total se juegan las estrategias σ^C_1, σ^C_2, son iguales a los beneficios ciertos actualizados a t, en $JR(B^\infty(b, p\delta), p\delta)$, cuando se parte del subjuego H correspondiente a H^C, y los jugadores juegan las estrategias σ_1, σ_2 correspondientes en $\mathcal{B}_\Sigma$ de σ^C_1, σ^C_2 . Esto vale en particular para los juegos JC y JR totales, que son subjuegos datados en t=1.

Prueba:

Sea el juego de Rubinstein JR de reparto de una cantidad B.

Sea $T^R(H, \sigma_1, \sigma_2)$: $\mathbb{S}_\mathbf{R} \times \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \{N \cup \infty\}$ la función que determina el período t del acuerdo (o infinito, es decir sin acuerdo) en el JR, cuando a partir del inicio del subjuego $H \in \mathbb{S}_\mathbf{R}$, se aplican las estrategias del juego total σ_1 y σ_2. Si el subjuego H está datado en t, $T^R(H, \sigma_1, \sigma_2) \geq t$.

Sea $S^R(H, \sigma_1, \sigma_2)$ $\mathbb{S}_\mathbf{R} \times \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \{[0, 1] \cup SA\}$ la función que determina la partición alcanzada en el JR, cuando a partir del inicio del subjuego $H \in \mathbb{S}_\mathbf{R}$, se aplican las estrategias σ_1 y σ_2 del juego total, donde SA quiere decir sin acuerdo.

Tanto $T^R(.)$, como $S^R(.)$ son independientes del valor total de B que se está negociando en el JR.

Sea un subjuego H del JR datado en t, es decir que se inicia al comienzo del período t. Los beneficios para los jugadores en el JR con beneficio total B y factores de descuento ρ_1 y ρ_2, descontados al instante t, cuando se parte del inicio del subjuego H y las estrategias en el juego total son σ_1 y σ_2, son:

$$\Pi_1^R(H,\sigma_1,\sigma_2) = \rho_1^{T^R(H,\sigma_1,\sigma_2)-t} S^R(H,\sigma_1,\sigma_2)B \qquad (3)$$
$$\Pi_2^R(H,\sigma_1,\sigma_2) = \rho_2^{T^R(H,\sigma_1,\sigma_2)-t}\left[1 - S^R(H,\sigma_1,\sigma_2)\right]B$$

Sea $T^C(H^C, \sigma^C{}_1, \sigma^C{}_2) : \mathbb{S}_C \times \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \{N \cup \infty\}$ la función que determina el instante del acuerdo en un JC (o infinito, es decir sin acuerdo) dado que se está en el inicio del subjuego H^C, y los jugadores están empleando en el juego total las estrategias $\sigma^C{}_1$, $\sigma^C{}_2$, cuando la naturaleza juega "sigue" hasta llegar al acuerdo. Si el subjuego $H^C{}_t$ está datado en t, $T^C(H_t, \sigma_1, \sigma_2) \geq t$.

Sea $S^C(H^C, \sigma^C{}_1, \sigma^C{}_2) : \mathbb{S}_C \times \Sigma_1 \times \Sigma_2 \rightarrow \{[0, 1] \cup SA\}$ la función que determina la partición alcanzada (o SA sin acuerdo) en un JC dado que se está en el inicio del subjuego H^C, y los jugadores están empleando en el juego total las estrategias $\sigma^C{}_1$, $\sigma^C{}_2$, cuando la naturaleza juega "sigue" hasta llegar al acuerdo.

Por la existencia de las correspondencias $\mathcal{B}_\Sigma$ y $\mathcal{B}_H$, si H^C y H son subjuegos correspondientes del JC y del JR, y la naturaleza juega siempre "sigue" hasta el acuerdo, se cumple que:

$T^C(H^C, \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{C}}{}_{\mathbf{1}}(\sigma_1), \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{C}}{}_{\mathbf{2}}(\sigma_2)) = T^R(H, \sigma_1, \sigma_2)$ (4)

$S^C(H^C, \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{C}}{}_{\mathbf{1}}(\sigma_1), \boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{C}}{}_{\mathbf{2}}(\sigma_2)) = S^R(H, \sigma_1, \sigma_2)$

para cualesquiera $\sigma_1 \in \Sigma_1$ y $\sigma_2 \in \Sigma_2$,

y simétricamente :

$T^C(H^C, \sigma^C{}_1, \sigma^C{}_2) = T^R(H, \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{1}}(\sigma^C{}_1), \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{2}}(\sigma^C{}_2))$

$S^C(H^C, \sigma^C{}_1, \sigma^C{}_2) = S^R(H, \boldsymbol{\sigma_1}(\sigma^C{}_1), \boldsymbol{\sigma_2}(\sigma^C{}_2))$
para cualesquiera $\sigma^C{}_1 \in \Sigma^C{}_1$ y $\sigma^C{}_2 \in \Sigma^C{}_2$.

Sean dos subjuegos H y H^C, correspondientes en los juegos JR y JC respectivamente, datados en t (pueden ser subjuegos que comienzan en una oferta de un jugador, o en los que un jugador decide aceptar o rechazar una oferta).

Los beneficios esperados actualizados a t, en el juego del comercio JC dado el evento de que el juego ha llegado en t al inicio del subjuego H^C, las estrategias en el juego total son $\sigma^C{}_1$, $\sigma^C{}_2$, y los factores de descuento son iguales a δ, se escriben como:

$$\Pi_1^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C) = \delta^{T^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C)-t} p^{T^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C)-t} B_1^C(S^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C),b,\delta,p)$$
$$\Pi_2^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C) = \delta^{T^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C)-t} p^{T^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C)-t} B_2^C(S^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C),b,\delta,p)$$

y sustituyendo $B^C{}_1$ (.) y $B^C{}_2$ (.) de (1):

$$\Pi_1^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C) = (p\delta)^{T^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C)-t} S^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C) B^\infty(b,p\delta) \qquad (5)$$
$$\Pi_2^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C) = (p\delta)^{T^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C)-t} \left[1 - S^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C)\right] B^\infty(b,p\delta)$$

donde:
$\delta_i{}^{T(.)-t}$ es el descuento entre los períodos t y T() para el jugador i
$p^{T(.)-t}$ es la probabilidad de que el negocio se mantenga hasta llegar al T del acuerdo, dado que ha llegado a t.

Llamemos σ_1 y σ_2 a las estrategias del JR respectivamente correspondientes de $\sigma^C{}_1$ y $\sigma^C{}_2$ en $\mathcal{B}_\Sigma$.

Por (4) vale:

$$\Pi_1^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C) = (p\delta)^{T^R(H,\sigma_1,\sigma_2)-t} S^R(H,\sigma_1,\sigma_2) B^\infty(b,p\delta) \qquad (6)$$
$$\Pi_1^C(H^C,\sigma_1^C,\sigma_2^C) = (p\delta)^{T^R(H,\sigma_1,\sigma_2)-t} \left[1 - S^R(H,\sigma_1,\sigma_2)\right] B^\infty(b,p\delta)$$

Los beneficios del juego de Rubinstein de beneficio total B, y suponiendo que ambas tasas de descuento son iguales a ρ se tienen por (3) y son:

$$\Pi_1^R(H,\sigma_1,\sigma_2) = \rho^{T^R(H,\sigma_1,\sigma_2)-t} S^R(H,\sigma_1,\sigma_2)B$$
$$\Pi_2^R(H,\sigma_1,\sigma_2) = \rho^{T^R(H,\sigma_1,\sigma_2)-t} \left[1 - S^R(H,\sigma_1,\sigma_2)\right]B$$

Entonces hay una correspondencia biunívoca entre los ENPS de JC(δ, b, p) y los ENPS de JR(B^∞(b, pδ), pδ) en la que los beneficios ciertos actualizados a t=0 en los equilibrios del JR son los beneficios esperados en t=0 y actualizados a t=0 en el JC correspondiente.

Fin de la prueba

Por lo tanto hay un único ENPS en el JC, que se obtiene en t=0, como correspondencia del único ENPS del JR, y ambos tienen el mismo valor de s.

Como el interés es encontrar equilibrios ineficientes, con acuerdo en t>0 en el JC, se definirán en el punto siguiente juegos de Rubinstein y de comercio modificados, entre los que habrá una correspondencia semejante.

3 EXTENSIÓN A JUEGOS DE COMERCIO CON POSIBILIDAD DE MONEY BURNING POR RETRASO EN LA JUGADA

El resultado de unicidad del ENPS de Rubinstein se contradice con la percepción intuitiva de la realidad en las negociaciones, que muestra la posibilidad de regateos prolongados antes de llegar a un acuerdo, es decir la existencia de resultados no eficientes en sentido de Pareto. Por lo anterior se ha generado una literatura buscando mostrar que, modificando adecuadamente las hipótesis del JR, en esos nuevos juegos de negociación existen otros ENPS en los que el resultado de la negociación es ineficiente, es decir las partes demoran en alcanzar el acuerdo.

Esas modificaciones pueden consistir en admitir:

- La existencia de información imperfecta de un jugador respecto al otro, por ejemplo sobre la tasa de descuento del otro. Sobre este punto no se avanza en este trabajo.

- O bien la posibilidad para cada parte de generar perjuicios para la otra parte o para ambas, como castigo al otro jugador por rechazar ofertas.

Un artículo que resume parte de la literatura sobre la segunda de las modificaciones mencionadas es el de Avery y Zemsky (1994). La intuición es que cuando una parte puede empeorar el resultado de un posible acuerdo, cada vez que una propuesta suya es rechazada, amenazará con recurrir a estos recursos (lo que AyZ llaman "money burning"), lo que favorece su posición negociadora. Una forma particular de money burning ocurre cuando un jugador tiene la opción de demorar el juego cuando su oferta es rechazada. Llamaremos JRM al juego de Rubinstein modificado para permitir esa demora.

El resultado que muestran Avery y Zemsky es que existen en un JRM infinitos ENPS con repartos s pertenecientes a un segmento $[s_{min}, s_{max}]$ y con acuerdo en un t cualquiera, entre 1 y una cota superior que depende de los parámetros del problema.

Llamaremos JRM y JCM respectivamente a los juegos de Rubinstein y de comercio modificados para permitir money burning por demoras deliberadas en la negociación. Se mostrará que sigue existiendo una corespondencia entre un JCM y un JRM definido adecuadamente. Los Diagramas 2 y 3 de la página siguiente buscan explicar ambos juegos.

Para definir los JRM y JCM se permite que en ambos juegos, el de Rubinstein y el de comercio, exista la posibilidad de que el jugador i pueda detener el juego durante k períodos si su oferta es rechazada por el jugador j, o lo que es equivalente ocasione un cambio de la tasa de descuento (supuesta igual para ambos jugadores) entre el período t y el t+1, de δ a δ^{k+1}.

Se supondrá que los parámetros del problema son tales, que existen ENPS en los JCM y en los JRM correspondientes, con rezago suficiente para hacerlos inconvenientes como resultado de la negociación de los JCM.

Diagrama 2 - Juego de Rubinstein con posibilidad para 2 de suspender el juego k períodos

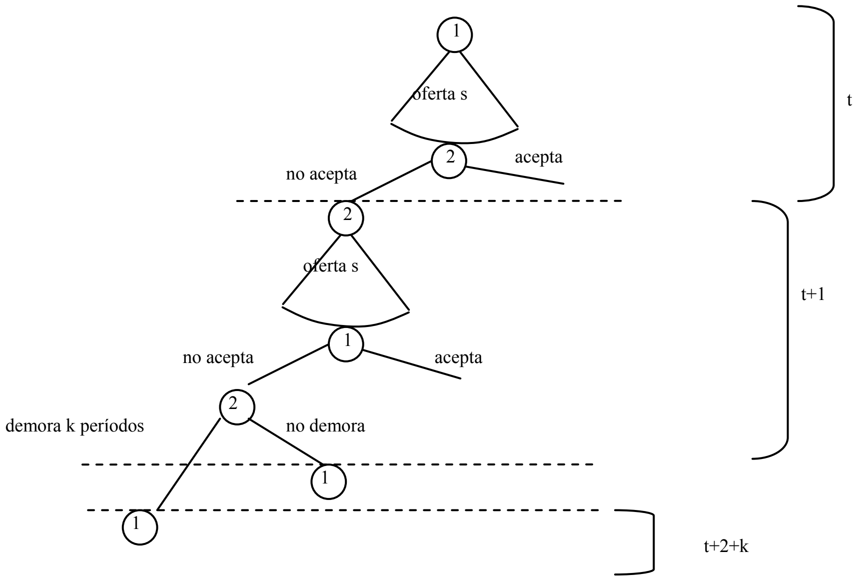
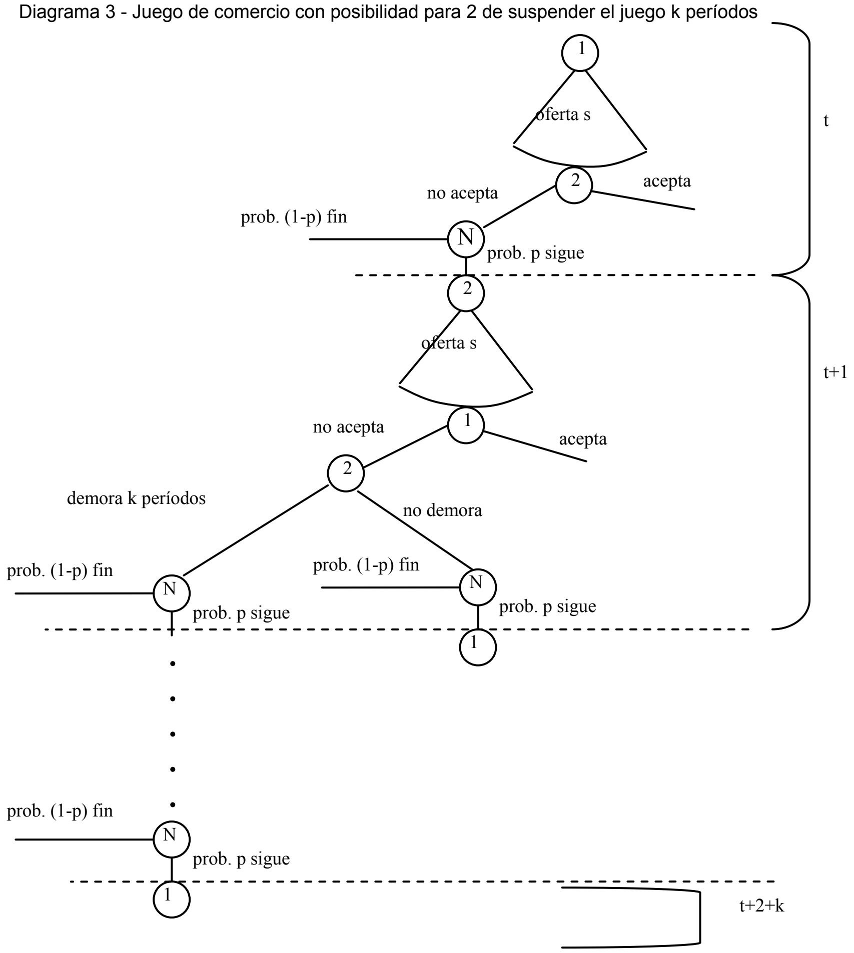


Diagrama 3 - Juego de comercio con posibilidad para 2 de suspender el juego k períodos



Los subjuegos de ambos juegos siguen estando en una correspondencia biunívoca que seguiremos llamando $\mathcal{B}_{\mathbf{H}}$. Se mantiene que dada una estrategia $\sigma_i \in \Sigma_i$ en el juego de Rubinstein modificado JRM, se puede definir la estrategia correspondiente $\boldsymbol{\sigma}^{\mathbf{C}}_{\mathbf{i}}(\sigma_i)$ en el juego de comercio modificado JCM, como la que toma en cada subjuego del juego de comercio las mismas decisiones de ofertar y de aceptar, o rechazar ofertas (según el t) **y** ahora también de demorar el juego, que las tomadas por σ_i en el subjuego de JR correspondiente en la correspondencia $\mathcal{B}_{\mathbf{H}}$. Simétricamente se puede definir $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{i}}(\sigma^C{}_i)$ para toda $\sigma^C{}_i \in \Sigma^C{}_i$.

Se tiene entonces la siguiente proposición que repite la Proposición I pero aplicada a JCM y JRM.

<u>Proposición II</u>,

Dados:

- un juego de comercio con posibilidad de demoras JCM (δ,b,p) en el que la tasa de descuento es δ igual para ambos jugadores, el beneficio por unidad de tiempo es b, y la probabilidad de supervivencia de la oportunidad de comercio es p,
- y un juego de Rubinstein con posibilidad de demoras de igual cantidad de períodos JRM(B^{∞}(b, pδ), pδ) en el que se reparte una cantidad B^{∞}(b, pδ), y los jugadores tienen tasas de descuento iguales a pδ,

Los beneficios esperados actualizados a t, en JCM(δ,b,p), dado que el juego se encuentra en el inicio del subjuego H^C datado en t, cuando en el juego total se juegan las estrategias $\sigma^C{}_1$, $\sigma^C{}_2$, son iguales a los beneficios ciertos actualizados a t, en JRM(B^{∞}(b, pδ), pδ), cuando se parte del subjuego H correspondiente a H^C, y los jugadores juegan las estrategias σ_1, σ_2 correspondientes en $\mathcal{B}_{\Sigma}$ de $\sigma^C{}_1$, $\sigma^C{}_2$. Esto vale en particular para los juegos JC y JR totales, que son subjuegos datados en t=0.

Prueba

Sean $\mathcal{S}_{RM}$, Σ_{M1} y Σ_{M2} respectivamente el conjunto de subjuegos y los conjuntos de estrategias posibles de ambos jugadores en el JRM.

Sean:

$T^{RM}(H, \sigma_1, \sigma_2)$: $\mathcal{S}_{MR} \times \Sigma_{M1} \times \Sigma_{M2} \rightarrow \{N \cup \infty\}$

$S^{RM}(H, \sigma_1, \sigma_2)$ $\mathbb{S}_{MR} \times \Sigma_{M1} \times \Sigma_{M2} \rightarrow \{[0, 1] \cup SA\}$

las funciones que determinan el instante t del acuerdo (o infinito, es decir sin acuerdo) y la partición respectivamente en el JRM cuando a partir del subjuego $H \in \mathbb{S}_{MR}$, se aplican las estrategias σ_1 y σ_2. Si el subjuego H_t está datado en t, $T^{RM}(H_t, \sigma_1, \sigma_2) \geq t$.

Análogamente se definen $T^{CM}(H, \sigma^C{}_1, \sigma^C{}_2)$ y $S^{CM}(H, \sigma^C{}_1, \sigma^C{}_2)$ para el JCM.

Valen fórmulas análogas a las (1) a (7), sustituyendo los supraíndices R y C por RM y CM respectivamente.

Por lo tanto hay una correspondencia biunívoca entre los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos de JCM(δ,b,p) y los equilibrios de Nash perfectos en subjuegos de JRM(B^∞(b, pδ), pδ), en la que los beneficios ciertos en los equilibrios de JRM son los beneficios esperados en JCM en los equilibrios correspondientes.

Fin de la prueba

Toda proposición sobre los ENPS en JRM con money burning por demora en el juego, será cierta también para los ENPS en JCM con igual posibilidad de demora.

En particular, los ENPS con resultados ineficientes en el JRM, cuando se admite que un jugador demore el juego cuando su oferta es rechazada, dan lugar a ENPS ineficientes correspondientes en el JCM.

4 SOSTENIBILIDAD DE REGLAS EFICIENTES COMO ENPS CUANDO SE JUEGAN INFINITOS JCM

Si las negociaciones bilaterales en cada oportunidad de comercio dan lugar a resultados ineficientes, se plantea la siguiente pregunta: ¿no será conveniente que las partes, que saben que interactuarán en repetidas negociaciones, una por cada oportunidad de comercio, predefinan de una vez por todas una regla de reparto que resuelva el acuerdo al comienzo de cada JCM, de una manera preestablecida y en función de los parámetros del JCM?

Se considerará un juego SJ consistente en jugar una sucesión infinita de JCM, y una regla para que ambos jugadores jueguen cada JCM. Esa regla en general no determina que se juegue un ENPS en cada JCM correspondiente a una oportunidad de comercio. Intuitivamente, a pesar de esto, una regla podría persistir en el tiempo si: i) cada parte piensa que si quiebra unilateralmente la regla, todo el comercio internacional en infinitos JCM desde ese momento en adelante, recaerá en los ENPS de las negociaciones ineficientes de cada JCM, ii) esa situación de recaída en los ENPS es indeseable.

En lo que sigue se encuentra una condición para que una regla de reparto de beneficio sea sostenible en el tiempo frente a la recaída en los ENPS ineficientes de cada JCM, es decir para que el par de estrategias en las que cada parte juega de acuerdo a esa regla en cada JCM sea un ENPS del juego SJ.

4.1 ENPS ineficiente en el juego SJ de repetición de infinitos juegos de comercio

Llamaremos t=0, 1, …. a la sucesión infinita de períodos de tiempo, de igual duración.

Sea una sucesión de juegos de comercio JCM entre dos jugadores: $\{JCM_n\}$, n = 1,……

v_1, v_2, …. es la sucesión de variables aleatorias independientes que determinan los parámetros que describen los respectivos juegos, que toman valores en una sucesión de conjuntos $\{\Omega_n\}$ y que tienen respectivamente distribuciones $\{\phi_n(.)\}$, n=1…..

$v_n = (r_n, b_n, p_n)$, donde:

- r_n es una variable que describe los papeles en el JCM_n, en principio quién es el jugador que juega primero, y quién es el comprador y quién el vendedor. Este último dato no resulta relevante en el JR y el JC, pero puede incidir en el hecho de cuál de los ENPS de JRM y JCM se juega.
- b_n es el valor del beneficio por unidad de tiempo en el JCM_n.
- p_n es la probabilidad de supervivencia de la oportunidad de comercio de un período al siguiente en el JCM_n.

Sea $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup$ ......

Llamemos JCM(v) al juego de comercio que queda definido para una realización $v \in \Omega$ de las variables aleatorias. Por lo tanto $JCM_n = JCM(v_n)$

Sea un juego que llamaremos **SJ** cuya evolución se describe como sigue:

1) Inicialmente n=1, t=0.

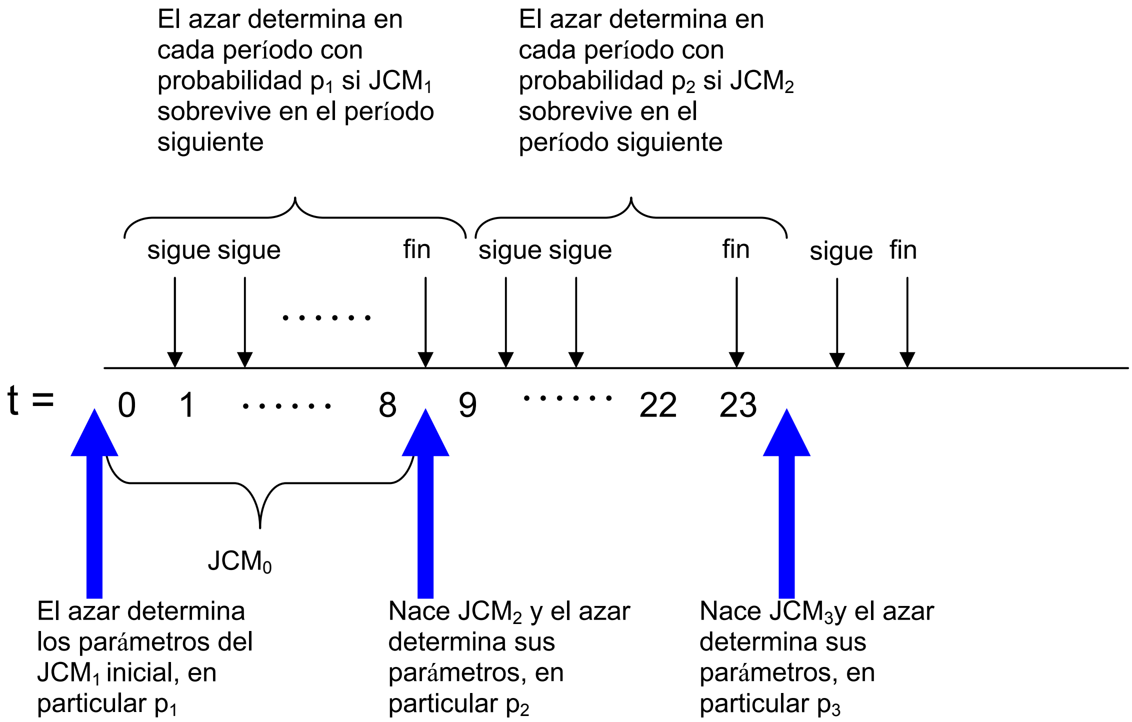
2) La naturaleza elige los parámetros $v_n = (r_n, b_n, p_n)$ del juego n-ésimo. Queda así definido $JCM_n=JCM(v_n)$

3) Los jugadores juegan en el período de tiempo t, el juego JCM_n con los parámetros v_n elegidos por la naturaleza. En ese período de tiempo puede ya haber ocurrido acuerdo en JCM_n, con partición s_n, en cuyo caso las partes 1 y 2 obtienen beneficios s_nb_n y $(1-s_n)b_n$ respectivamente. De lo contrario las partes no obtienen beneficios en el período y continúan haciendo y recibiendo ofertas y posiblemente demorando el juego.

4) Al fin del período t, la naturaleza decide si sigue el JCM_n, es decir la oportunidad de comercio n-esima, en el período de tiempo siguiente t+1. La elección "sigue" tiene probabilidad p_n.

- Si se termina JCM_n porque la naturaleza elige "fin", lo que ocurre con probabilidad $(1-p_n)$, se vuelve al paso 2) para iniciar un nuevo juego de comercio JCM_{n+1} en t+1.
- Si continúa JCM_n porque la naturaleza elige "sigue", lo que ocurre con probabilidad p_n, se vuelve al paso 3) en el período siguiente t+1.

El gráfico siguiente busca ejemplificar una realización de este juego SJ



El período de tiempo de inicio del JCM_n, es decir del n-ésimo JCM, al que llamaremos t_n, no está predeterminado sino que es una variable aleatoria que es la suma de n-1 tiempos de espera hasta obtener el primer fracaso en cada una de n-1 series sucesivas de ensayos de Bernoulli independientes de probabilidades de éxito p_μ, con μ=1,….n-1.

Una estrategia del jugador i para jugar el SJ debe especificar una acción a tomar en el inicio de cada uno de los subjuegos del SJ, es decir que debe especificar una acción en cada período t, dependiendo de las jugadas anteriores de los dos jugadores hasta t-1 (si la jugada de i es ofertar) o hasta t (si la jugada de i es aceptar o rechazar una oferta) y de la naturaleza, desde el inicio de SJ hasta t.

Obsérvese que en un período de tiempo t, y según las jugadas previas de la naturaleza, se puede estar jugando cualquiera de los JCM_n con n entre 1 y t+1. En el primer caso (n=1) la naturaleza ha jugado "sigue" en todos los períodos y se continúa en el JCM_1. En el segundo caso (n=t+1) la naturaleza ha jugado "fin" en todos los períodos y se está en el JCM_{t+1}.

$\Sigma_1(v)$ y $\Sigma_2(v)$ son los conjuntos de estrategias de ambos jugadores en el JCM(v).

Sean las funciones:
$\sigma^*_1(v): \Omega \rightarrow \Sigma_1(v)$
$\sigma^*_2(v): \Omega \rightarrow \Sigma_2(v)$
que para cada valor $v \in \Omega$ determinan un par de estrategias $(\sigma^*_1(v), \sigma^*_2(v))$ que constituyen un ENPS del juego JCM(v) para todo $v \in \Omega$.

Se sabe que existen infinitos ENPS ineficientes en el JCM(v), con distintos repartos y demoras en obtener el acuerdo. Estamos suponiendo que como resultado de la historia anterior del juego, los jugadores esperan en cada JCM que se juegue un ENPS en particular $(\sigma^*_1(v), \sigma^*_2(v))$, donde $v \in \Omega$ es la variable aleatoria del JCM.

Según el valor de v_n del JCM_n el resultado de $(\sigma^*_1(v_n), \sigma^*_2(v_n))$ puede ser más o menos favorable para cada jugador. Por ejemplo, el resultado puede ser sistemáticamente más desfavorable para el comprador, lo que reflejaría que en el comercio internacional de energía el país comprador puede requerir la energía comprada para evitar racionamientos, lo que debilita su posición negociadora.

Definamos un par de estrategias S^*_1 y S^*_2 para jugar el SJ de la siguiente manera: el jugador i juega en el JCM_n, de parámetros v_n, la estrategia $\sigma^*_i(v_n)$.

Es decir que en cada juego JCM_n del SJ, cada jugador i juega $\sigma^*_i(v_n)$ no importa cuál haya sido la historia del juego SJ en los n-1 juegos JCM anteriores, es decir cualesquiera hayan sido las estrategias y los valores de los parámetros aleatorios de esos n-1 juegos anteriores.

<u>Proposición III:</u>

El par de estrategias (S^*_1, S^*_2) es un ENPS del juego SJ.

Prueba

Consideremos un subjuego H cualquiera de SJ datado en el período t. Debemos probar que (S^*_1, S^*_2) es un equilibrio de Nash de dicho subjuego del SJ.

Un subjuego datado en t se determina por las decisiones de la naturaleza y de los dos jugadores en toda la historia del juego hasta t-1 (si en el subjuego debe hacerse una oferta) o hasta t (si en el subjuego debe aceptarse o rechazarse una oferta).

Sea JCM_n el JCM al que pertenece el subjuego H.

Supongamos que (S^*_1, S^*_2) no fuese un equilibrio de Nash en el subjuego H.

Esto significa que para uno de los jugadores, por ejemplo el 1, existe una estrategia S'_1 para jugar el SJ que le reporta un beneficio esperado actualizado a t, mayor estricto que S^*_1, dado que se parte del inicio del subjuego H, cuando el jugador 2 juega S^*_2.

El beneficio esperado actualizado de 1 dado que se parte de H, es la suma infinita de los beneficios esperados actualizados a t, que obtiene en los juegos JCM_n (partiendo de H), JCM_{n+1}, JCM_{n+2}, …..

Llamemos BS^*_m al sumando valor esperado del beneficio de 1 dado que se está en H, y actualizado a t, obtenido en el JCM_m, cuando 1 juega S^*_1 y 2 juega S^*_2, con m=n, n+1,…..

Llamemos BS'_m al mismo sumando cuando 1 juega S'_1 y 2 juega S^*_2.

Para que el beneficio esperado actualizado para 1 con S'_1 sea mayor que el de S^*_1, debe existir al menos un $\mu \geq n$ tal que en el JCM_μ, BS'_μ es mayor que BS^*_μ.

- Si μ=n, eso significa que S'_1 es una mejor estrategia que S^*_1 en el subjuego de JCM_n que empieza en H. Al enfrentar S^*_1 y S^*_2 se están enfrentando $\sigma^*_1(v_n)$ y $\sigma^*_2(v_n)$ que constituyen un equilibrio de Nash en el subjuego de JCM_n que empieza en H. Por lo tanto no puede existir una estrategia S'_1 de SJ que en el subjuego H del JCM_n reporte a 1 un beneficio mayor que $\sigma^*_1(v_n)$ al enfrentar a $\sigma^*_2(v_n)$.

- Si μ>n, eso significa que S'_1 es mejor que S^*_1 en el juego JCM_μ al enfrentar a S^*_2, contra la hipótesis de que $(\sigma^*_1(v_\mu), \sigma^*_2(v_\mu))$ es un ENPS de JCM_μ. para todas las realizaciones posibles de v_μ.

4.2 Sostenibilidad de un acuerdo mediante una estrategia gatillo ("Nash reversion")

Si el resultado del ENPS de negociación en cada juego JCM_n es lo bastante malo, es decir si la demora en lograr el acuerdo es lo suficientemente grande, se harán posibles otros ENPS de SJ en los que los jugadores juegan cada JCM según estrategias resultantes de un acuerdo, que no son ENPS de cada juego JCM individual.

El razonamiento que se sigue a continuación para explorar la existencia de esos nuevos ENPS es del tipo "Nash reversion strategy", al que se recurre en el análisis de numerosos juegos repetidos, por ejemplo el que muestra que los resultados cooperativos en juegos infinitamente repetidos de oligopolio son sostenibles como ENPS, ante la amenaza de recaer en los equilibrios de Nash (peores en sentido de Pareto) de cada juego.

Un acuerdo A para jugar un JCM es una función A: $\Omega \rightarrow \Sigma_1(v) \times \Sigma_1(v)$, que para cada valor v posible de los parámetros del JCM, determina las estrategias $A_1(v)$, $A_2(v)$ que deben jugar ambos jugadores en el JCM.

Un acuerdo A para jugar JCM es Pareto óptimo si cualquiera sea $v \in \Omega$, los dos jugadores acuerdan un reparto s(A, v) en el primer período de tiempo.

Llamemos t = 0, …. a los períodos de tiempo, y N(t) al ordinal del JCM que se está jugando en el período t, comenzando con N(0)=1. N(t) es una variable aleatoria tal que $N(t) \leq t+1$, porque la cantidad de períodos que dura cada JCM es aleatoria.

Sea A un acuerdo Pareto óptimo.

Sea **$G_i(A)$ (Gatillo de A para el jugador i)** la siguiente estrategia para el jugador i, para jugar un SJ.

- En t=0, jugar $A_1(v_1)$, donde v_1 es el conjunto de parámetros del JCM_1 que la naturaleza determine al comienzo de t=0, y que son observados por los dos jugadores.
- En t>0:
  - jugar $A_i(v_{N(t)})$ si en toda la historia anterior del juego SJ, los dos jugadores han jugado sus respectivas $A_1(v_n)$, $A_2(v_n)$ para todo n=1, …..N(t),
  - jugar $\sigma^*_i(v_{N(t)})$ en todo otro caso.

Es decir que en el primer período cada JCM_n y suponiendo que los dos jugadores han jugado siempre $A_i(v_\mu)$ para todo $\mu<N(t)$:

- Si ambos jugadores juegan $A_i(v_n)$, alcanzan de inmediato el acuerdo $s(A,v_n)$.
- Si alguno de los jugadores i se aparta de $A_i(v_n)$, los dos jugadores pasan a jugar las estrategias del equilibrio de Nash perfecto en subjuegos $(\sigma^*_1(v_n), \sigma^*_2(v_n))$ del JCM_n y continúan jugando las estrategias $\sigma^*_1(v_m)$, $\sigma^*_2(v_m)$ para m> N(t) en todos los JCM siguientes.

Se trata de encontrar condiciones para que el par de estrategias $G_1(A)$, $G_2(A)$ sea un ENPS de SJ con certeza, es decir para cualquier realización del azar. Esto equivale sin pérdida de generalidad a que $G_1(A)$ sea una mejor respuesta ante $G_2(A)$ en todos los subjuegos de SJ (ya que la demostración para el jugador 2 es simétrica) y para todas las posibles realizaciones del azar de los v_n.

<u>Supongamos para simplificar que se cumplen la siguientes hipótesis restrictivas:</u>

- **Las probabilidades de supervivencia de la oportunidad de comercio p_n son conocidas de antemano y no aleatorias. La probabilidad de supervivencia del JCM_1 es p^1 conocida y fija. La probabilidad de supervivencia de los siguientes JCM_n, con n>1 es igual a p^d conocida y fija.**
- **Las distribuciones de probabilidad ϕ_n de los parámetros v_n son idénticas para n>1: $\phi_n \equiv \phi^d$, para todo n>1.**

La sucesión de probabilidades de supervivencia p_n es ahora:

$p_1 = p^1$

$p_n = p^d$ para todo n>1.

La sucesión de conjuntos donde toman valores las variables v_n es ahora Ω_n, n=1,…., con:

$\Omega_1 = \Omega^1$

$\Omega_n = \Omega^d$, para todo n>1

Siendo $\Omega^1 = \{v: v(r,b,\pi) \in \Omega, \pi = p^1\}$ y $\Omega^d = \{v: v(r,b,\pi) \in \Omega, \pi = p^d\}$

<u>Proposición IV</u>

La condición necesaria y suficiente para que el par de estrategias $G_1(A)$, $G_2(A)$ sea un ENPS de SJ con certeza es que:

i) para cualquier estrategia S'$_1$ del jugador 1, alternativa a $G_1(A)$, cualquier $v_n \in \Omega_n$ y todo n, se cumpla $\Delta' < 0$, donde:

$$\Delta' = \Pi_{1,n}(S'_1, G_2(A), v_n) - s(A, v_n) B^{\infty}(b_n, p_n\delta) - (\Pi_1^A - \Pi_1^*)\left[(1-p^d)\frac{\delta}{1-\delta} + (p^d - p_n)\frac{\delta}{1-p_n\delta}\right]$$

y siendo:

- $\Pi_{1,n}(S'_1, G_2(A), v_n)$ el beneficio esperado para el jugador 1 en el JCM_n, actualizado al inicio t del JCM_n, cuando el jugador 1 emplea en SJ la estrategia alternativa S'$_1$, para enfrentar a $G_2(A)$.

- $\Pi*_1$ el beneficio esperado para el jugador 1 en todos los ENPS $\sigma*_1(v_n)$, $\sigma*_2(v_n)$ de cada JCM_n, para n>1.
- $\Pi^A{}_1$ el beneficio esperado para el jugador 1 en los ENPS cuando se aplica el acuerdo A a los JCM_n, para n>1.

ii) valga la condición simétrica para el jugador 2, sustituyendo $s(A,v_n)$ por la participación de 2 en el beneficio: 1- $s(A,v_n)$

Clasifiquemos los subjuegos de SJ en cuyo inicio juega 1, en dos conjuntos:

- El conjunto C_a de los subjuegos en cuya historia los dos jugadores han jugado siempre $G_1(A)$, y $G_2(A)$ sin apartarse del acuerdo A. Se trata de subjuegos cuyo inicio se encuentra en el primer período de tiempo de un JCM:
  - O bien el jugador 1 inicia las ofertas y debe hacer la primera de ellas.
  - O bien la primera oferta la hizo el jugador 2 siguiendo el acuerdo A y el jugador 1 debe decidir si aceptarla según A o rechazarla.
- El conjunto C_b de los restantes subjuegos iniciados por una jugada de 1, en cuya historia ha habido algún apartamiento de cualquiera de los dos jugadores respecto a su respectiva $G_i(A)$.

Se trata de probar que ($G_1(A)$, $G_2(A)$) son un equilibrio de Nash con certeza para los subjuegos de ambos conjuntos.

Lema 1: El par de estrategias ($G_1(A)$, $G_2(A)$) es un equilibrio de Nash en todos los subjuegos del conjunto C_b, para cualquier realización del azar.

Prueba

Sea H un subjuego del conjunto C_b, datado en el período t y perteneciente al n-ésimo JCM. La estrategia de 2 en $G_2(A)$ es jugar $\sigma*_2(v_m)$ en el JC m-ésimo para todo $m \geq n$, incondicionalmente. La estrategia de 1 en $G_1(A)$ es jugar $\sigma*_2(v_m)$ para todo $m \geq n$. Es decir que la regla A se ha quebrado en algún período anterior a t y los dos jugadores juegan sus estrategias en el ENPS ($\sigma*_1(v)$, $\sigma*_2(v)$) en cada JCM, a partir de t. Por lo tanto el par de estrategias $G_1(A)$, $G_2(A)$) se comporta igual que el par de estrategias ($S*_1$, $S*_2$) en todos los subjuegos de C_b. Como por la proposición III ($S*_1$, $S*_2$) son un ENPS de SJ, entonces el par de estrategias ($G_1(A)$, $G_2(A)$) es un equilibrio de Nash en todos los subjuegos del conjunto C_b.

Fin de la prueba

Lema 2: Las condiciones i) y ii) son necesarias y suficientes para que ($G_1(A)$, G_2A)) sea con certeza un equilibrio de Nash en cualquier subjuego del conjunto C_a.

Prueba

Sea JCM_n el juego al que pertenece el subjuego $H \in C_a$ del SJ. H se inicia en t_n, el primer período del JCM_n.

Sea S'_1 una estrategia de 1 distinta de $G_1(A)$ para jugar el SJ, y sea $\sigma'_{1,\mu}$ la estrategia que S'_1 emplea en el juego JCM_μ.

Sea $g_{i,n}(A)$ la estrategia del jugador i en el JCM_n.

Para que $G_1(A)$ sea mejor respuesta no estricta que cualquier S'_1, en cualquier subjuego $H \in C_a$, cuyo inicio está datado en t_n, período inicial del JCM_n, dado que 2 juega $G_2(A)$, debe cumplirse[1]:

$$\begin{aligned}\Delta = \Pi_{1,n}(S'_1, G_2(A), v_n) + \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\tau=\mu}^{\infty}\delta^{\tau}P(\mu,\tau)E\left[\Pi_{1,n+\mu}(S'_1, G_2(A), v_{n+\mu})\right] \\ - s(A, v_n)B^{\infty}(b_n, p_n\delta) - \sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\tau=\mu}^{\infty}\delta^{\tau}P(\mu,\tau,n)E\left[s(A, v_{n+\mu})B^{\infty}(b_{n+\mu}, p^d\delta)\right] < 0\end{aligned} \qquad (8)$$

para todo S'_1, para todo $v_n \in \Omega_n$, para todo n.

donde:

$\Pi_{1,n+\mu}(S'_1, G_2(A), v_{n+\mu})$ es el beneficio esperado para el jugador 1, actualizado al inicio del $JCM_{n+\mu}$, en dicho $JCM_{n+\mu}$, dado que los parámetros de ese JCM toman los valores de $v_{n+\mu}$, cuando el jugador 1 juega la estrategia S'_1 en el SJ, lo que implica jugar $\sigma'_1(v_{n+\mu})$ en

[1] La sumatoria en μ recorre los índices de los JCM, la sumatoria en τ los casos posibles para calcular la esperanza condicional, dado que el JCM_μ comienza τ períodos después de n. El beneficio esperado en un JCM_μ no depende del ordinal del juego ni del período de su inicio.

$JCM_{n+\mu}$ y el jugador 2 juega la estrategia $G_2(A)$ en el SJ lo que implica jugar $\sigma^*_2(v_{n+\mu})$ en $JCM_{n+\mu}$. . El beneficio para 1 es aleatorio porque la duración del juego lo es.
$E[\Pi_{1,n+\mu}(S'_1, G_2(A), v_{n+\mu})]$ es la esperanza de la variable anterior en los posibles valores de $v_{n+\mu}$.

$s(A,v_\mu)B^\infty(b_\mu,p_\mu\delta)$ es el beneficio esperado para el jugador 1, actualizado a t, en el JCM_n, de probabilidad de sobrevivencia p_μ si el jugador 1 continúa jugando $G_1(A)$, con lo que el acuerdo se obtiene en el primer período del JCM_μ.

$E[s(A,v_\mu)B^\infty(b_\mu,p_n\delta)]$ es la esperanza de la variable anterior en los posibles valores de v_μ.

$P(\mu,\tau, n)$ es la probabilidad condicional de que el $JCM_{n+\mu}$ (el $(n+\mu)$-ésimo JCM) comience τ períodos después de t, dado que en t se está jugando el JCM_n (n-ésimo JCM). $P(\mu,\tau, n)$ depende de los valores que tomen los parámetros p^1 y p^d. Obsérvese que es imposible que el JCM $n+\mu$-ésimo comience antes del período $t+\mu$, dado que en se está jugando el juego n-ésimo, porque cada JCM vive al menos un período.

En la fórmula (8) anterior para calcular los beneficios esperados en los JCM posteriores al n, se ha sumado en μ los valores esperados de beneficios en los $JCM_{n+\mu}$ en adelante (sumatoria en $\mu =1, 2, ...$ que recorre los JCM posteriores a n), y para cada $JCM_{n+\mu}$ se ha considerado que el tiempo de espera a partir de t para el inicio del $JCM_{n+\mu}$ puede ser cualquiera a partir de μ, (sumatoria en los tiempos de espera τ para el $JCM_{n+\mu}$ mayores o iguales a μ). El descuento por esperar τ pasos de tiempo es δ_1^τ.

Por ser $(\sigma^*_1(v_{n+\mu}), \sigma^*_2(v_{n+\mu}))$ un equilibrio de Nash de $JCM(v_{n+\mu})$, y dado que $G_2(A)$ juega $\sigma^*_2(v_{n+\mu})$ en todos los juegos siguientes al JCM_n, se cumple que:

$$\Pi_{1,n+\mu}(S'_1(v_{n+\mu}),\ G_2(A), v_{n+\mu}) \leq \Pi_{1,n+\mu}(G_1(A),\ G_2(A), v_{n+\mu})$$

Es decir que cuando se enfrenta a $G_2(A)$, cualquier estrategia S'_1 que no juegue $\sigma^*_1(v_{n+\mu})$ en los siguientes JCM es dominada por otra que si lo hace.

Por tener las v_n idéntica distribución para todo n>1 los beneficios esperados para los $JCM_{n+\mu}$, para μ=1,2,..., son constantes y no varían con el μ y por lo tanto pueden definirse las constantes:

$\Pi*_1 = E[\Pi_{1,n+\mu}(G_1(A), G_2(A), v_{n+\mu})]$,para todo $\mu\geq 1$. (9)

$\Pi^A{}_1 = E[s(A,v_{n+\mu})B^{\infty}(b_{n+\mu},p^d\delta)]$, para todo $\mu\geq 1$.

Por lo tanto, eliminando sin pérdida de generalidad las estrategias dominadas, y sustituyendo las constantes definidas en (9) la condición (8) se transforma en:

$$\Delta' = \Pi_{1,n}(S'_1, G_2(A), v_n) - s(A, v_n) B^{\infty}(b_n, p_n\delta) - (\Pi_1^A - \Pi_1^*) \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{\tau=\mu}^{\infty} \delta_1{}^{\tau} P(\mu, \tau, n) \leq 0 \quad (10)$$

para todo S'_1, para todo $v_n \in \Omega_n$, para todo n.

En el Anexo se encuentra la expresión (A3) para la sumatoria doble de (10), que sustituida en (10) da lugar a:

$$\Delta' = \Pi_{1,n}(S'_1, G_2(A), v_n) - s(A, v_n) B^{\infty}(b_n, p_n\delta) - (\Pi_1^A - \Pi_1^*) \left[(1-p^d)\frac{\delta}{1-\delta} + (p^d - p_n)\frac{\delta}{1-p_n\delta} \right] \leq 0$$

para todo S'_1, para todo $v_n \in \Omega_n$, para todo n. (11)

$\Gamma_{1,n} = \Pi_{1,n}(S'_1, G_2(A), v_n) - s(A,v_n)B^{\infty}(b_n,p_n\delta)$ es la ganancia esperada "presente" para el jugador 1 por apartarse de la regla A en el JCM_n.

$(\Pi_1^A - \Pi_1^*)$ es el valor esperado de la pérdida en cada JCM_m (para m>n), por apartarse de la regla y recaer en los ENPS ineficientes, actualizado al inicio del JCM_m. Si el ENPS es lo bastante ineficiente, y la regla A es equitativa para las partes, es esperable que $(\Pi_i^A - \Pi_i^*)$ sea mayor que cero para i=1, 2.

$(\Pi_1^A - \Pi_1^*) \left[(1-p^d)\frac{\delta}{1-\delta} + (p^d - p_n)\frac{\delta}{1-p_n\delta} \right]$ es la pérdida esperada "futura" total para el jugador 1 por apartarse de la regla A, incurrida en los JCM_m (para m>n hasta el infinito).

Para n=1, como $p_n=p^1$, la condición que debe cumplirse en el primer juego de comercio para la sostenibilidad del acuerdo A resulta:

$$\Delta' = \Pi_{1,1}(S'_1, G_2(A), v_1) - s(A, v_1)B^{\infty}(b_1, p_1\delta) - (\Pi_1^A - \Pi_1^*)\left[(1-p^d)\frac{\delta}{1-\delta} + (p^d - p^1)\frac{\delta}{1-p_1\delta}\right] < 0$$

para todo S'_1, para todo $v_1 \in \Omega^1$ (12)

y su simétrica para 2, sustituyendo $s(A,v_1)$ por $1 - s(A,v_1)$

La expresión $\left[(1-p^d)\frac{\delta}{1-\delta} + (p^d - p^1)\frac{\delta}{1-p^1\delta}\right]$ es decreciente en p_1, y es nula cuando p^1 vale 1.

Obsérvese que $(\Pi_1^A - \Pi_1^*)$ no depende de p^1, sino de p^d.

Eso significa que al aumentar la probabilidad p^1 de supervivencia del JCM_1, la magnitud de la pérdida futura por apartarse de la regla se hace menor, o lo que es equivalente, la ganancia por apartarse de la regla se hace mayor.

Para n>1, como $p_n=p^d$, la condición necesaria para la sostenibilidad del acuerdo A resulta:

$$\Delta' = \Pi_{1,n}(S'_1, G_2(A)) - s(A, v_n)B^{\infty}(b_n, p^d\delta) - (\Pi_1^A - \Pi_1^*)\left[(1-p^d)\frac{\delta_1}{1-\delta_1}\right] < 0$$

para todo S'_1, para todo $v_n \in \Omega^d$

$\Pi_1^A - \Pi_1^*$ podría depender de p, según cuál sea el contenido exacto del acuerdo A y la forma del ENPS en cada JCM.

Una interpretación intuitiva de las condiciones halladas es que:

- Al inicio de cualquier JCM_n las eventuales ganancias "presentes" (es decir en el propio JCM_n) por un apartamiento oportunista de la regla A deben ser menores que las pérdidas “futuras” por apartarse de A y recaer en los ENPS ineficientes, en los infinitos JCM posteriores.

- Para que existan pérdidas futuras por apartarse de A y recaer en los ENPS ineficientes debe cumplirse $(\Pi_i^A - \Pi_i^*) > 0$ para i=1,2, lo que ocurre si la regla A es equitativa (en el sentido de que el valor esperado del beneficio en cada juego JCM es mayor para los dos jugadores con la regla que en el ENPS del JCM).
- Para que la ganancia para un jugador por apartarse de A sea negativa, la probabilidad de sobrevivencia p^1 del juego “presente” 1, debe ser suficientemente pequeña, de modo que un jugador, aún con muy buena suerte en el presente no se sienta tentado a apartarse de la regla.

Las consecuencias para la obtención de acuerdos respecto a reglas para fijar precios en el comercio internacional spot son también intuitivas:

- **En la medida en que un país atribuya una probabilidad alta al mantenimiento de las condiciones (económicas y técnicas) favorables de negociación que tiene en el presente, será renuente a aceptar reglas de largo plazo que limitan la posibilidad de ventajas oportunistas.**
- **En la medida en que los resultados de la negociación tal cual ocurre en la actualidad sean más ineficientes, es decir se demore la ejecución de transacciones potencialmente convenientes o en la práctica se pierdan por completo esas oportunidades, será más probable que se creen esas reglas.**

5 Anexo

Llamemos $SUM(\delta,n)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\tau=\mu}^{\infty}\delta^{\tau}P(\mu,\tau,n)$

Si se cambia el orden de las dos sumatorias se tiene:

$$SUM(\delta,n)=\sum_{(\tau,\mu)\in N_+\times N_+:\tau\geq\mu}\delta_1^{\tau}P(\mu,\tau,n)=\sum_{\tau=1}^{\infty}\delta_1^{\tau}\sum_{\mu=1}^{\tau}P(\mu,\tau,n) \qquad \text{(A1)}$$

Recordemos que $P(\mu,\tau,n)$ es la probabilidad condicional de que el $JCM_{n+\mu}$ (el $(n+\mu)$-ésimo JCM) comience τ períodos después de t, dado que en t se está jugando el JCM_n (n-ésimo JCM)

Es conveniente separar la sumatoria de (A1) en:

$$SUM(\delta_1,p_n,p,n)=\sum_{\tau=1}^{\infty}\delta_1^{\tau}\left[P(1,\tau,n)+\sum_{\mu=2}^{\tau}P(\mu,\tau,n)\right] \qquad \text{(A2)}$$

$P(1,\tau, n)$ es la probabilidad de que en $t+\tau$ comience el JCM_{n+1}, dado que en t se estaba en el JCM_n. Es decir es la probabilidad de τ-1 éxitos, sucedidos por un fracaso, en τ ensayos de Bernoulli de probabilidad p_n. Por lo tanto vale:
$P(1,\tau, n) = p_n^{\tau-1}(1-p_n)$

La sumatoria en μ, es la probabilidad condicional, dato que en t se está en JCM_n, de que en $t+\tau$ comience cualquiera de los JCM_{n+2}, JCM_{n+3},… $JCM_{n+\tau}$, o lo que es equivalente es la probabilidad de que en el período $t+\tau-1$ se esté en alguno de esos JCM distintos del JCM_n, (es decir $1-p_n^{\tau-1}$) por la probabilidad de que en dicho período termine dicho JCM (es decir $1-p^d$). Por lo tanto esa sumatoria vale $(1-p_n^{\tau-1})(1-p^d)$.

Por lo anterior resulta:

$$SUM(\delta,n)=\sum_{\tau=1}^{\infty}\delta^{\tau}\left[p_n^{\tau-1}(1-p_n)+(1-p_n^{\tau-1})(1-p^d)\right]=\sum_{\tau=1}^{\infty}\delta^{\tau}\left[(1-p^d)+p_n^{\tau-1}(p^d-p_n)\right]=$$

$$= (1 - p^d)\sum_{\tau=1}^{\infty}\delta^{\tau} + (p^d - p_n)\sum_{\tau=1}^{\infty}\delta^{\tau} p_n{}^{\tau-1} = (1 - p^d)\frac{\delta_1}{1-\delta_1} + (p^d - p_n)\frac{\delta}{1 - p_n\delta} \qquad \text{(A3)}$$

6 REFERENCIAS

Avery, C. and P. B. Zemsky (1994). Money burning and multiple equilibria in bargaining. *Games and Economic Behavior* 7, 154-168.

Rubinstein, A. (1982). Perfect equilibrium in a bargaining model. *Econometrica* 50, 97-109.