



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Propagación acústica no lineal en un medio de múltiple scattering

Gonzalo Garay Godoy

Programa de Posgrado de Física
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Montevideo – Uruguay
Octubre de 2018



UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY



Propagación acústica no lineal en un medio de múltiple scattering

Gonzalo Garay Godoy

Tesis de Maestría presentada al Programa de Posgrado de Física, Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, como parte de los requisitos necesarios para la obtención del título de Magíster en Física.

Director:

Dr. Carlos Negreira

Codirector:

Dr. Nicolás Benech

Montevideo – Uruguay

Octubre de 2018

Garay Godoy, Gonzalo

Propagación acústica no lineal en un medio de múltiple scattering / Gonzalo Garay Godoy. - Montevideo: Universidad de la República, Facultad de Ciencias, 2018.

XVII, 121 p. 29, 7cm.

Director:

Carlos Negreira

Codirector:

Nicolás Benech

Tesis de Maestría – Universidad de la República, Programa de Física, 2018.

Referencias bibliográficas: p. 119 – 121.

1. Acústica no lineal,
2. Múltiple scattering,
3. Inversión temporal. I. Negreira, Carlos, *et al.* II. Universidad de la República, Programa de Posgrado de Física. III. Título.

INTEGRANTES DEL TRIBUNAL DE DEFENSA DE TESIS

Dr. Guillermo Cortela

Dra. Cecilia Cabeza

Dr. Alejandro Romanelli

Ing. Rafael Canetti

Dr. Carlos Negreira

Montevideo – Uruguay

Octubre de 2018

Agradecimientos

A mi familia, y en especial a mi abuelo Héctor por toda el apoyo indispensable en la conclusión de este trabajo.

A Katy, por bancar tantos olvidos y demoras durante los últimos meses de escritura.

Al equipo de Acústica de la Facultad de Ciencias: a Carlos y a Nicolás, mis orientadores, por la disponibilidad y la dedicación mostrada; a Yamil, cuya ayuda sea a 0.5 m o a 10000 km ha sido fundamental para que esto salga bien; a Guillermo por todas las manos e ideas, que son parte de este trabajo y fundamentalmente por conseguir los equipos sin los cuales esta tesis no hubiese sido posible.

RESUMEN

Las ondas acústicas de potencia son esencialmente no lineales, característica que se manifiesta por una distorsión progresiva de las ondas acompañada de la aparición de armónicos de orden superior a la frecuencia fundamental. Algunas aplicaciones que se han desarrollado en el campo de la acústica no lineal involucran terapias ultrasónicas de alta intensidad (high intensity therapeutic ultrasound, HITU). Además, teniendo en cuenta la riqueza espectral presente en estas ondas, se han encontrado aplicaciones en imaginería acústica.

En esta tesis, se investiga la interacción de ondas acústicas no lineales con un medio de múltiple scattering. Este es un tema que ha sido escasamente estudiado. Uno de los pocos trabajos que se han realizado es el de N. Viard. El estudio que aquí presentamos, permite evaluar la posibilidad de focalizar ondas no lineales utilizando propiedades de la focalización por inversión temporal en un medio de múltiple scattering.

El trabajo se divide en cuatro partes. En primer lugar, se analizan las características de las ondas generadas con transductores de potencia en un medio homogéneo (agua). El objetivo de esta parte es caracterizar el instrumental y proponer elementos de análisis de las ondas no lineales. Además, los resultados experimentales son contrastados con modelos teóricos. En segundo lugar, se estudia la propagación a través de un medio de múltiple scattering. Teniendo en cuenta que una onda no lineal tiene mayor riqueza espectral que una onda lineal, buscamos responder qué efectos tiene el múltiple scattering sobre estas frecuencias. Además, se determina la dependencia frecuencial de parámetros de transporte que caracterizan este medio. En tercer lugar, analizaremos el proceso de inversión temporal y buscaremos estudiar la posibilidad de focalizar ondas no lineales con este proceso. Finalmente, investigaremos la posibilidad de aplicar la inversión temporal para generar ondas no lineales a través de un medio de múltiple scattering pero empleando equipos de baja potencia.

Palabras claves:

Acústica no lineal, Múltiple scattering, Inversión temporal.

ABSTRACT

High intensity acoustical waves are nonlinear, characteristic that is manifested by a progressive distortion of the waves with the presence of high-order harmonics. Some applications of nonlinear waves involve high intensity ultrasonic therapy (high intensity therapeutic ultrasound, HITU). In addition, taking into account the spectral richness present in these waves, applications in acoustic imagery have been found.

In this work, the interaction of nonlinear acoustic waves with a multiple scattering medium is investigated. There is a lack of studies in this field. One of the few authors that we found is N. Viard. The study that we present, allows us to evaluate the possibility of focusing non-linear waves using properties of time reversal in a multiple scattering medium.

The work is divided into four parts. First, we analyze the properties of waves generated with high-power transducers in water (homogeneous medium). The subject of this part is to characterize the instruments and propose elements of non-linear wave analysis. In addition, the experimental results are compared with theoretical models. Second, wave propagation is studied through a multiple scattering medium. Taking in mind the spectral richness of a non-linear wave, we study the effects of multiple scattering on this range of frequencies. In addition, the frequency dependence of transport parameters is determined. In the third place, the time reversal process is analyzed together with the possibility of focusing non-linear waves with this process. Finally, we investigate the possibility of applying time reversal to generate non-linear waves through a multiple scattering medium by using low-power electronics.

Keywords:

Nonlinear acoustics, Multiple scattering, Time reversal.

Tabla de contenidos

1	Introducción	1
2	Acústica no lineal	5
2.1	Teoría general	6
2.1.1	Ecuación de estado y parámetro B/A	7
2.1.2	Estimación del orden de los parámetros acústicos y número de Mach	7
2.1.3	Aproximación a primer orden: ecuación de ondas lineal	8
2.1.4	Aproximación a segundo orden: ecuación de Westervelt	9
2.1.5	Ecuación de Burguer	10
2.1.6	Solución de Riemann	11
2.1.7	Solución de Bessel-Fubini	13
2.1.8	Ecuación KZK	14
2.2	Estudio experimental de ondas acústicas no lineales	16
2.2.1	Dispositivo experimental	17
2.2.2	Elementos de análisis de ondas no lineales	20
2.2.3	Medida del campo acústico de un transductor plano	25
2.2.4	Medidas del campo acústico de un transductor focalizado	38
2.3	Conclusión	51
3	Scattering de ondas no lineales	53
3.1	Ecuación generalizada de Westervelt	53
3.2	Múltiple scattering. Características del campo coherente.	57
3.2.1	Características del medio de múltiple scattering y ondas transmitidas	57
3.2.2	Estimación de las fluctuaciones de densidad y de compresibilidad	60
3.2.3	Campo coherente	62

3.2.4	Velocidad de grupo	69
3.2.5	Decaimiento de la intensidad del campo coherente	71
3.3	Conclusión	77
4	Inversión temporal con ondas no lineales	79
4.1	Inversión temporal en sistemas lineales	81
4.2	Inversión temporal virtual con ondas no lineales	82
4.2.1	Focalización con ondas no lineales	83
4.2.2	Focalización en función del voltaje aplicado	88
4.2.3	Focalización con el segundo armónico	94
4.3	Conclusión	96
5	Focalización con guía de ondas	97
5.1	Inversión temporal a 1-bit	97
5.2	Generación de ondas no lineales a través del medio de múltiple scattering	104
5.2.1	Relación entre las amplitudes y el voltaje aplicado	108
5.2.2	Relación entre las amplitudes y el espesor del medio.	109
5.2.3	Focalización espacial	110
5.2.4	Características de la focalización	113
5.3	Conclusión	115
6	Conclusión	117
	Referencias bibliográficas	119

Capítulo 1

Introducción

La propagación de ondas es un tema de estudio que involucra diversas áreas de la Física. Esta tesis involucra un estudio experimental en el campo de la Acústica Ultrasonora. En particular, se trabajará la propagación de ondas en medios de múltiple scattering en régimen no lineal.

Las ondas acústicas ultrasonoras poseen, por definición, frecuencias mayores a los 20 kHz. En este trabajo, estudiaremos ondas con frecuencias en el orden del megahertz. Con estos valores de frecuencias las ondas se propagan en medios de densidad mucho mayor que el aire, como por ejemplo, agua, tejidos biológicos o metales. Esta característica ha encontrado aplicaciones en Física Médica, permitiendo en este campo desarrollar métodos no invasivos de diagnóstico. Un ejemplo muy conocido es la imaginería ecográfica. Además, para potencias altas, existen técnicas no invasivas (algunas en desarrollo) de cirugía acústica [1].

Una onda acústica que se propaga en un medio no homogéneo, sufre fenómenos de reflexión, refracción, absorción, difracción, etcétera. Nos referiremos al conjunto de estos fenómenos como *scattering* y llamaremos *medio de múltiple scattering* a un medio donde una onda sufre varios de estos eventos. En estas circunstancias, propiedades de la onda, como velocidad de grupo o amplitud, se alteran. Consecuentemente, se producen cambios en el campo acústico de la onda. Estas alteraciones dificultan (cuando no imposibilitan) la aplicación de las técnicas mencionadas en el párrafo anterior. Esta es una razón que motiva el estudio de la propagación de ondas acústicas en medios no homogéneos.

En general, los efectos de scattering vienen acompañados de una atenuación en la amplitud de la onda acústica y de una fase que se vuelve aleatoria,

provocando pérdida de coherencia. En la práctica, la atenuación puede causar que la amplitud de la onda sea significativamente pequeña como para no ser detectada por los instrumentos de medida. Una forma de contrarrestar este efecto es trabajar con ondas que, en el momento de ser emitidas, tengan una amplitud alta. El problema que surge es el siguiente: si la amplitud es suficientemente grande, efectos no lineales alteran aún más el campo acústico.

Conocer los efectos no lineales es importante para poder desarrollar aplicaciones de acústica de alta intensidad. En este trabajo de tesis estudiamos experimentalmente fenómenos no lineales y de múltiple scattering, además de su posible interacción. El trabajo fue realizado en el Laboratorio de Acústica Ultrasonora de la Facultad de Ciencias (UdelaR), donde los fenómenos de múltiple scattering han sido estudiados desde algún tiempo atrás. Tomaremos como referencia dos trabajos realizados en el laboratorio, donde los fenómenos de múltiple scattering fueron estudiados experimentalmente. El primero, es la tesis de maestría de G. Cortela [2]. En este trabajo se implementan técnicas experimentales para determinar parámetros de transporte que caracterizan el múltiple scattering. El segundo, es la tesis de Y. Abraham donde, además de caracterizar medios de múltiple scattering, se analiza el proceso de inversión temporal [3]. Este proceso ha permitido desarrollar técnicas que permiten focalizar la energía acústica a través de medios no homogéneos donde efectos disipativos pueden ser despreciados. Los dos trabajos fueron desarrollados en un régimen de acústica lineal, con ondas de amplitud pequeña. En nuestro trabajo damos un paso más, comenzando el estudio de la acústica no lineal. Esto implica implementar y caracterizar un sistema de emisión y recepción de ondas de alta amplitud, para las cuales los equipos convencionales resultan insuficientes.

Los resultados de esta tesis los distribuiremos en cuatro capítulos.

En el capítulo 2 se expondrán los fundamentos teóricos de la acústica no lineal. Siguiendo el esquema presentado por M. Hamilton y D. Blackstock en el libro *Nonlinear Acoustics* [4] repasaremos las principales ecuaciones que modelan los fenómenos no lineales. Algunas de ellas son la ecuación de Westervelt y la ecuación KZK. Esta última es útil para modelar la emisión de ondas no lineales con fuentes finitas, donde los fenómenos de difracción tienen una participación relevante. El software *HIFU Simulator*¹ [6] ha resultado útil pa-

¹*High-intensity focused ultrasound* (ultrasonido focalizado de alta intensidad), hace referencia a un transductor o conjunto de transductores ultrasónicos capaces de concentrar

ra resolver numéricamente esta ecuación. Como objetivo de este capítulo nos proponemos caracterizar los instrumentos de emisión y recepción empleados en las experiencias presentadas en esta tesis. Además, se propondrán y verificarán algunas hipótesis de trabajo consideradas en el resto de la tesis.

En el capítulo 3, comenzaremos el estudio de fenómenos de múltiple scattering. Un parámetro de transporte fundamental que caracteriza medios con estas características es el *libre recorrido medio elástico*. Este parámetro es estudiado por A. Tourin [7] en régimen lineal. En su trabajo se muestran técnicas experimentales para determinar dicho parámetro que seguiremos en esta tesis. En régimen no lineal, el fenómeno ha sido estudiado por N. Viard [8]. En el artículo citado, el autor analiza medidas del campo coherente de una onda no lineal que se propaga a través de un medio de múltiple scattering, llegando a la conclusión de que los fenómenos no lineales no interactúan con los fenómenos de scattering. En nuestro trabajo, expondremos la teoría que modela la propagación de ondas no lineales en medios no homogéneos y deduciremos la *ecuación generalizada de Westervelt*. Además, analizaremos su validez en el sistema que emplearemos y, siguiendo el trabajo de Viard, buscaremos verificar la independencia entre múltiple scattering y no linealidad en nuestras condiciones experimentales. Para esto, realizaremos medidas del libre recorrido medio elástico. Teniendo en cuenta que una onda no lineal tiene mayor riqueza espectral que una lineal, podemos medir este parámetro para cada una de las frecuencias involucradas. Los valores medidos los comparamos con resultados teóricos obtenidos a partir de un modelo lineal. La similitud entre resultados teóricos y experimentales, nos permiten evaluar la independencia entre no linealidad y múltiple scattering: si el modelo lineal resulta una buena descripción para los fenómenos de scattering, la no linealidad no interviene en este proceso.

Continuando el trabajo con medios no homogéneos analizaremos, en el capítulo 4, el proceso de inversión temporal. En acústica ultrasonora, este proceso viene siendo estudiado desde la década del 90 [9, 10]. En régimen no lineal, M. Tanter [11] mostró que la inversión temporal en un medio homogéneo es válida si la distancia de propagación de las ondas no es muy grande: esto es, una distancia menor a la *distancia de discontinuidad*, donde la onda sufre una transición a onda de shock. Esta distancia será definida en el capítulo 2. La

energía acústica en una región focalizada. Estos elementos han encontrado aplicación en física médica [5].

aplicación de este proceso tiene algunas dificultades experimentales. En este capítulo, realizaremos una inversión temporal virtual. Buscaremos establecer una relación entre la focalización con ondas no lineales a través de un medio de múltiple scattering y la independencia entre scattering y no linealidad. Para ello, estudiaremos la inversión temporal de una onda no lineal formada antes de atravesar el medio de múltiple scattering.

En el capítulo 5, investigaremos la posibilidad de generar por inversión temporal ondas focalizadas de alta amplitud a través de un medio de múltiple scattering. A diferencia de la experiencia realizada en el capítulo 4, la onda no lineal no atraviesa el medio de múltiple scattering, sino que se forma luego de atravesarlo. El método consiste en emplear una guía de ondas. Originalmente, fue desarrollado por G. Montaldo [12]. En su trabajo demostró que este método es efectivo para generar ondas de alta amplitud en un medio homogéneo. En esta tesis, aplicaremos esta idea en un medio de múltiple scattering y mostraremos que es posible alcanzar el régimen no lineal con equipos de baja potencia.

Capítulo 2

Acústica no lineal

En un medio continuo, una variable adecuada para describir la propagación de ondas es la *presión acústica* p . Esta variable cuantifica las fluctuaciones en la presión del medio cuando una onda se propaga en él. Por lo tanto, si P es la presión absoluta y P_0 es la presión de equilibrio (en ausencia de ondas propagándose), definimos la presión acústica de forma tal que,

$$P = P_0 + p \quad (2.1)$$

En función de esta variable, la ecuación de onda elemental puede expresarse como:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad (2.2)$$

donde t es la variable temporal y c_0 es la velocidad de propagación de la onda. La variable espacial la notaremos como \mathbf{r} y sus componentes como x , y y z .

La ecuación 2.2 es lineal: si $p_A(\mathbf{r}, t)$ y $p_B(\mathbf{r}, t)$ son soluciones, entonces cualquier combinación lineal de estas también lo será. Esta ecuación ampliamente aplicada en acústica, está limitada a ondas de baja amplitud. Si la amplitud de una onda es suficientemente grande, se observan fenómenos no lineales que no pueden ser descritos con la ecuación 2.2.

El estudio de estos fenómenos es el objeto de este capítulo. Para ello, desarrollaremos en la sección 2.1 la teoría que nos permita deducir una ecuación no lineal para describir la propagación de ondas de alta amplitud. Si bien las ecuaciones no lineales presentan dificultades en su resolución analítica, bajo algunas hipótesis y aproximaciones se pueden encontrar soluciones sencillas.

En la sección 2.2, contrastaremos la teoría con experiencias realizadas con

ondas acústicas ultrasonoras.

2.1. Teoría general

En esta sección desarrollamos la teoría que modela la propagación de ondas no lineales. El objetivo es encontrar una ecuación que modele la presión acústica cuando una onda se propaga en un medio homogéneo cuya viscosidad y conductividad térmica consideramos despreciable. El esquema que seguiremos se basa en el desarrollo presentado por M. Hamilton y D. Blackstock en el libro *Nonlinear Acoustics* [4]¹.

Partimos de ecuaciones fundamentales en la mecánica de fluidos. Estas son la ecuación de continuidad y la ecuación de conservación del momento. En función de la velocidad del fluido \mathbf{u} , su densidad ρ , la presión absoluta y considerando que las fuentes que perturban el medio son externas a la región de interés, toman la forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \nabla P = 0 \quad (2.4)$$

donde $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ es la derivada material.

Además de la presión, la velocidad y la densidad sufren fluctuaciones respecto a sus valores de equilibrio. La velocidad del fluido en equilibrio la consideramos nula. La densidad podemos expresarla como sigue:

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad (2.5)$$

donde ρ_0 es la densidad en equilibrio y ρ' su fluctuación. Sustituyendo las ecuaciones 2.1 y 2.5 en 2.3 y 2.4, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \rho' - \rho' \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (2.6)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = -\rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \rho' \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (2.7)$$

Como se ha dicho antes, buscamos una ecuación que describa la propagación

¹En la referencia citada se desarrolla un modelo donde se considera la viscosidad del fluido y efectos térmicos.

de ondas mediante la presión acústica. En las ecuaciones 2.6 y 2.7, tres variables acústicas intervienen. Por lo tanto, una ecuación más es necesaria para resolver el problema. Esta es una ecuación de estado, que relacione P y ρ .

2.1.1. Ecuación de estado y parámetro B/A

La ecuación de estado $P = P(\rho)$, la expresamos como un desarrollo de Taylor en torno al valor de equilibrio de la densidad:

$$P(\rho) = P_0 + \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2P}{d\rho^2}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0)^2 + \dots$$

Definimos dos parámetros A y B , tales que:

$$A = \rho_0 \left(\frac{dP}{d\rho}\right)_{\rho_0} \equiv \rho_0 c_0^2$$

$$B = \rho_0^2 \left(\frac{d^2P}{d\rho^2}\right)_{\rho_0}$$

De esta forma, el desarrollo de la ecuación de estado podemos expresarlo como:

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{1}{2} \frac{c_0^2 B}{\rho_0 A} \rho'^2 + \dots \quad (2.8)$$

El parámetro B/A caracteriza la contribución de segundo orden de la densidad en la presión acústica. Tiene una importancia fundamental en acústica no lineal. Más adelante en este capítulo, mostraremos su relación con las diferencias que presenta una onda no lineal respecto a una lineal.

2.1.2. Estimación del orden de los parámetros acústicos y número de Mach

Las ecuaciones 2.6 y 2.7, junto con la ecuación de estado $P = P(\rho)$ (cuya expresión no conocemos), describen exactamente la propagación de ondas acústicas en fluidos perfectos en función de tres variables. Para resolver este sistema y encontrar una ecuación que contenga únicamente la variable p debemos realizar algunas aproximaciones.

Comencemos por hacer una estimación del orden de las variables acústicas

en función de un parámetro denominado *número de Mach*, definido como:

$$\epsilon = \frac{u_{max}}{c_0} \quad (2.9)$$

donde u_{max} es un valor de velocidad de referencia. Si la onda fuese, por ejemplo, periódica, consideramos este valor como la amplitud de oscilación de la velocidad.

El número de Mach define el orden de magnitud de \mathbf{u} respecto a c_0 . Para determinar cómo se relaciona con el orden de las variables p y ρ , consideremos una onda plana que se propaga en la dirección z . La dependencia de las variables acústicas con t y z podemos escribirlas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \hat{\mathbf{z}}u_{max} \sin(\omega_0 t - k_0 z) \\ p &= p_{max} \sin(\omega_0 t - k_0 z) \\ \rho' &= \rho'_{max} \sin(\omega_0 t - k_0 z) \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde ω_0 es la frecuencia angular de la onda, k_0 su número de onda y el subíndice *max* refiere a la amplitud de las oscilaciones.

Asumamos que las fluctuaciones ρ' , p y u tienen valores pequeños y despreciemos términos de segundo orden y superiores en las ecuaciones 2.6 y 2.7. Con esta aproximación, podemos escribir:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.11)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (2.12)$$

Sustituyendo estas variables en 2.11 y 2.12, obtenemos:

$$\epsilon = \frac{\rho'_{max}}{\rho_0} \quad (2.13)$$

$$\epsilon = \frac{p_{max}}{\rho_0 c_0^2} \quad (2.14)$$

2.1.3. Aproximación a primer orden: ecuación de ondas lineal

Las ecuaciones 2.11 y 2.12 las obtenemos despreciando términos de orden ϵ^2 y superiores en 2.6 y 2.7. Con esta misma aproximación, la ecuación de

estado queda expresada como:

$$p = c_0^2 \rho' \quad (2.15)$$

Estas tres ecuaciones describen los fenómenos acústicos lineales, es decir, a orden ϵ . Es fácil mostrar que operando sobre las ecuaciones 2.11, 2.12 y 2.15 obtenemos la ecuación de ondas 2.2.

Como se ha mencionado antes, esta ecuación es lineal en p y modela bien la propagación acústica a baja amplitud. En esta tesis trabajamos con ondas de alta amplitud donde la ecuación 2.2 no es satisfactoria. Una ecuación más adecuada se obtiene manteniendo términos de orden ϵ^2 .

2.1.4. Aproximación a segundo orden: ecuación de Westervelt

La aproximación a segundo orden consiste en despreciar en las ecuaciones 2.6, 2.7 y 2.8 términos de orden ϵ^3 y superiores. Con esta aproximación, usando la propiedad $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \nabla \times \mathbf{u}$ y observando que la vorticidad es nula¹, obtenemos:

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = -\rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{1}{2} \rho_0 \nabla u^2 \quad (2.16)$$

$$p - c_0^2 \rho' = \frac{1}{2} \frac{c_0^2 B}{\rho_0 A} \rho'^2 \quad (2.17)$$

En las ecuaciones 2.6, 2.16 y 2.17, los términos de segundo orden han sido colocados a la derecha de la igualdad. En estos términos, podemos aproximar las variables acústicas por su aproximación a primer orden (dadas por las ecuaciones 2.17, 2.12 y 2.15), pues el error cometido es de tercer orden. Procediendo de esta forma, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial p^2}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2.18)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = -\nabla \mathcal{L} \quad (2.19)$$

$$p - c_0^2 \rho' = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \frac{B}{A} p^2 \quad (2.20)$$

¹El término que incluye la vorticidad es nulo siempre que consideremos la propagación lejos de bordes. Un análisis más detallado del orden de este término puede encontrarse en [4].

donde $\mathcal{L} = \frac{\rho_0}{2}u^2 - \frac{1}{2\rho_0 c_0^2}p^2$ es la *densidad lagrangiana de energía acústica*.

Eliminando p' entre 2.18 y 2.20 y definiendo $\beta = 1 + \frac{B}{2A}$ podemos escribir:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial p^2}{\partial t} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (2.21)$$

Derivando 2.21 respecto del tiempo, aplicando la divergencia en todos los términos de 2.19 y eliminando \mathbf{u} , obtenemos:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \left(\nabla^2 + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{L} \quad (2.22)$$

La ecuación de Westervelt se obtiene realizando la aproximación $\mathcal{L} = 0$. Este resultado es exacto en una onda plana, donde $p = \rho_0 c_0 u$. En general, la densidad lagrangiana de energía podemos asumirla nula si despreciamos efectos no lineales locales frente a efectos cumulativos.

Con esta aproximación, obtenemos:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (2.23)$$

Esta es la ecuación de Westervelt para un fluido ideal (sin conductividad térmica y sin viscosidad).

2.1.5. Ecuación de Burguer

La ecuación de Burguer modela ondas planas que se propagan en una dirección. En este trabajo, deduciremos la versión de esta ecuación para fluidos no disipativos. Para ello consideramos la ecuación 2.23 unidimensional:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (2.24)$$

Definiendo las variables $z_1 = \epsilon z$ y $\tau = t - \frac{z}{c_0}$ podemos expresar las derivadas parciales de la forma $\frac{\partial}{\partial z} = \epsilon \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{1}{c_0} \frac{\partial}{\partial \tau}$ y $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}$. Con este cambio, la ecuación 2.24 queda expresada como:

$$\epsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z_1^2} - \frac{2\epsilon}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z_1 \partial \tau} = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (2.25)$$

Notemos que el primer término es de orden ϵ^3 . Despreciando este término e

integrando en τ , obtenemos:

$$\epsilon \frac{\partial p}{\partial z_1} = \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^3} \frac{\partial p}{\partial \tau} \quad (2.26)$$

Finalmente, deshacemos los cambios de variables y obtenemos:

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (2.27)$$

donde

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{c_0} \left(1 - \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^2} \right) \quad (2.28)$$

2.1.6. Solución de Riemann

La ecuación 2.27 tiene la forma de la ecuación de ondas planas con velocidad de fase c . La solución exacta a esta ecuación se conoce como *solución de Riemann* y tiene la forma de una onda plana que se propaga con velocidad c , es decir

$$p = p_{max} \sin \left[\omega_0 \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (2.29)$$

donde, a primer orden en ϵ , podemos escribir

$$c \simeq c_0 \left(1 + \frac{\beta p}{\rho_0 c_0^2} \right) \quad (2.30)$$

Debemos notar que la velocidad de fase en 2.29 depende de p . En la figura 2.1 se muestra en forma de esquema la velocidad de fase de una onda sinusoidal en tres puntos distintos. En el punto donde la presión acústica es cero, la velocidad de fase es igual a c_0 , pero en el valle toma el valor $c = c_0 - \frac{\beta p_{max}}{\rho_0 c_0}$ y en la cresta $c = c_0 + \frac{\beta p_{max}}{\rho_0 c_0}$. Esto tiene como consecuencia una deformación de la onda a medida que se propaga: los puntos de máxima presión tenderán a adelantarse respecto a los puntos de mínima presión, tomando la onda una forma que tiende a la de un diente de sierra. Esta deformación se muestra en la figura 2.2.

En la figura mencionada en el párrafo anterior, podemos notar que existe una distancia z_D en la cual la derivada de la presión respecto a z diverge. Esta es la *distancia discontinuidad* y para distancias mayores la ecuación 2.29 se vuelve multivaluada y carece de significado físico. Para determinar esta distancia debemos encontrar aquella posición para la cual la derivada de p

respecto de z diverge. Realizando este cálculo obtenemos el valor:

$$z_D = \frac{\rho_0 c_0^3}{\beta \omega_0 p_{max}} \quad (2.31)$$

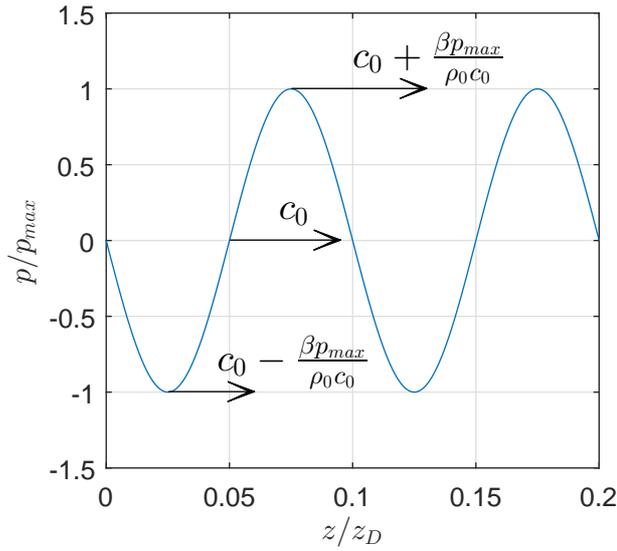


Figura 2.1: Esquema de una onda periódica no lineal en el tiempo en que es emitida, donde se representa la velocidad de fase en tres puntos. La diferencia entre los valores de estas velocidades tiene como consecuencia una deformación de la onda a medida que se propaga. z_D es la distancia de discontinuidad definida en la ecuación 2.31.

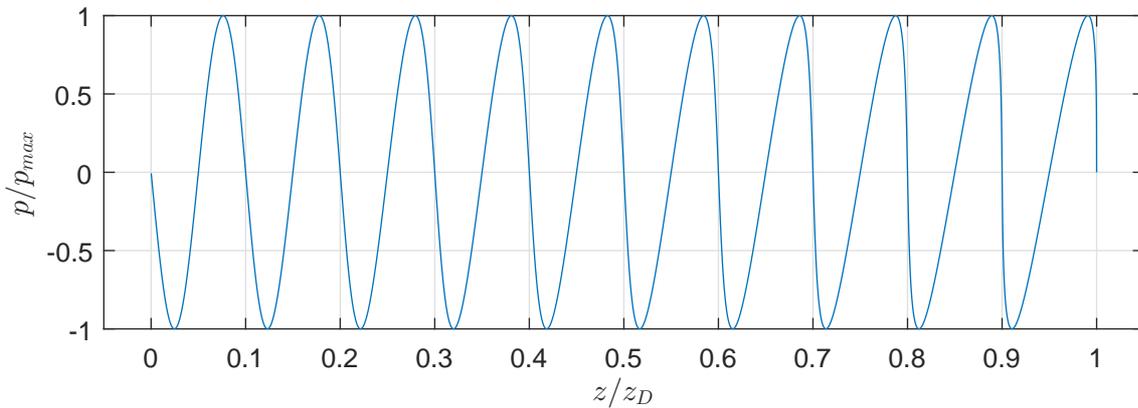


Figura 2.2: Deformación progresiva de una onda plana no lineal a medida que se propaga.

En la figura 2.3, mostramos la dependencia temporal de la presión en dis-

tintas posiciones. Cuando $z = 0$, la onda muestra una forma sinusoidal, pero a medida que se propaga comienza a distorsionarse. En la posición $z = z_D$, encontramos que la pendiente del gráfico diverge en los puntos donde la presión se anula.

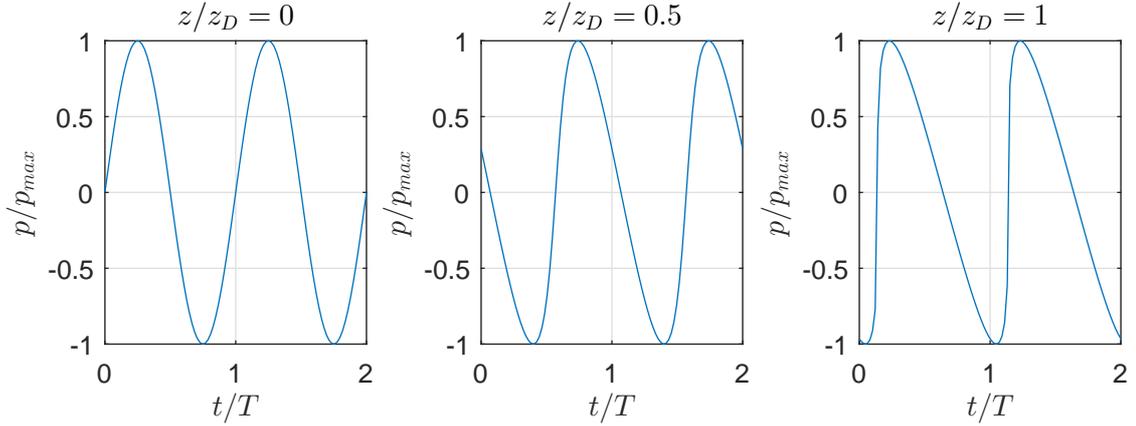


Figura 2.3: Dependencia temporal de la presión en una onda no lineal, en distintas posiciones de propagación. $T = 2\pi/\omega_0$ representa el período de la onda asociado a la frecuencia central.

2.1.7. Solución de Bessel-Fubini

La solución de Riemann puede ser escrita en forma de una serie de Fourier:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin \left[n\omega_0 \left(t - \frac{z}{c_0} \right) \right] \quad (2.32)$$

donde ω_0 es la frecuencia central de la onda. Esta es la *solución de Bessel-Fubini* de la ecuación 2.27 y describe la propagación de ondas planas no lineales cuando $z < z_D$. Los coeficientes p_n están dados por

$$p_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \sin(n\xi) p \quad (2.33)$$

donde p es la solución de Riemann. Para encontrar una expresión analítica de estos coeficientes sustituimos 2.29 en 2.28 con la velocidad de fase dada por 2.30, esto es:

$$p_n = \frac{p_{max}}{\pi} \int_0^{2\pi} d\xi \sin(n\xi) \sin \left(\xi + \frac{z\omega_0\beta p}{\rho_0 c_0^3} \right) \quad (2.34)$$

En un siguiente paso, podemos sustituir en 2.34, la expresión para la presión acústica de una onda plana, esto es $p = p_{max} \sin \omega_0 (t - z/c_0)$. Con esta aproximación, los errores cometidos son de orden ϵ^3 . El resultado tiene la forma:

$$p_n = \frac{2p_{max}}{\pi} \int_0^\pi d\xi \sin(n\xi) \sin\left(\xi + \frac{z}{z_D} \sin \xi\right) \quad (2.35)$$

Integrando 2.35, obtenemos:

$$p_n = 2p_{max} \frac{z_D}{nz} J_n\left(n \frac{z}{z_D}\right) \quad (2.36)$$

donde J_n es la función de Bessel de primera especie y orden n .

La solución de Bessel-Fubini muestra un fenómeno característico de las ondas no lineales: la formación de armónicos. Una onda plana de frecuencia angular ω_0 desarrollará, a medida que se propaga, componentes espectrales en frecuencias múltiplos de ω_0 . Este fenómeno no es exclusivo de ondas planas. En este trabajo mostraremos un estudio de ondas no lineales generadas con fuentes cuya emisión dista de aproximarse a ondas planas. Sin embargo, observaremos y analizaremos con detalle la generación de armónicos y les daremos una especial importancia al estudiar la propagación de ondas no lineales en medios de múltiple scattering.

2.1.8. Ecuación KZK

Ya hemos mencionado que las ondas que estudiaremos se generan con fuentes que, por su geometría finita, presentan diferencias importantes respecto a las ondas planas. Si bien en algunas aproximaciones podemos emplear el modelo de ondas planas, una ecuación mas adecuada que contempla efectos de difracción puede ser deducida de la ecuación de Westervelt. Esta es la *ecuación de Khokhlov-Zabolotskaya-Kuznetsov* (KZK). Esta ecuación describe la propagación de haces direccionales en la dirección z . Esto implica que la energía acústica esta localizada en la vecindad de la dirección de propagación. Consideremos una fuente de diámetro característico D , en la posición $z = 0$. La hipótesis de direccionalidad se asegura si se verifica $\frac{\omega_0 D}{2c_0} \gg 1$.

La ecuación KZK se obtiene redimensionando las coordenadas espaciales y

temporal. Definamos las coordenadas x_1, y_1, z_1 y τ , tal que:

$$(x_1, y_1, z_1) = (\sqrt{\epsilon}x, \sqrt{\epsilon}y, \epsilon z)$$

$$\tau = t - z/c_0$$

Este escalamiento de las coordenadas asegura que un observador que se mueve a velocidad c_0 en la dirección z , observará cambios más lentos en las direcciones transversales que en la dirección de propagación.

En las nuevas coordenadas, la ecuación 2.23 queda expresada como:

$$\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) p + \epsilon^2 \frac{\partial^2 p}{\partial z_1^2} - \epsilon \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z_1 \partial \tau} = - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}$$

Despreciando el segundo término de la izquierda por ser de orden ϵ^3 , obtenemos:

$$\epsilon \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) p - \epsilon \frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z_1 \partial \tau} = - \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2}$$

Finalmente, definimos el laplaciano transversal $\nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ y deshacemos el cambio de variables en las coordenadas espaciales. Con esto, obtenemos la ecuación KZK, para un fluido ideal:

$$\frac{2}{c_0} \frac{\partial^2 p}{\partial z \partial \tau} - \nabla_{\perp}^2 p = \frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial \tau^2} \quad (2.37)$$

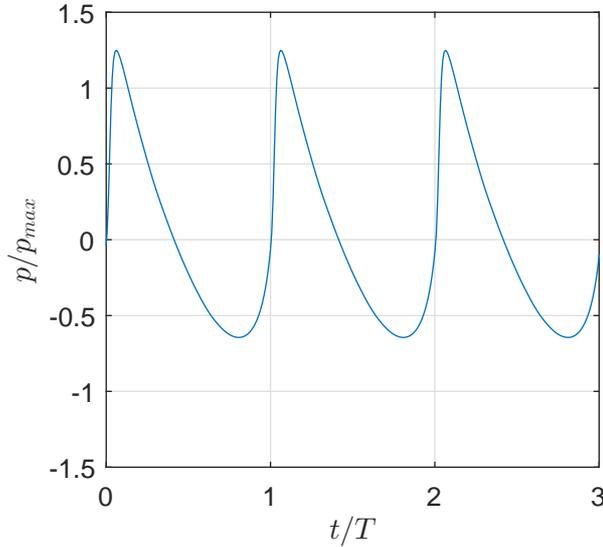


Figura 2.4: Dependencia temporal de una onda emitida por una fuente finita en $z = \frac{2\pi D^2}{4c_0\omega_0}$. $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ representa el período de la onda asociado a la frecuencia central.

La ecuación 2.37 puede ser resuelta numéricamente. En la figura 2.4 mostramos la presión acústica normalizada (respecto a la amplitud de presión en la fuente) obtenida como solución para una fuente circular de diámetro D a una distancia $\frac{2\pi D^2}{4c_0\omega_0}$ de la misma¹. Podemos notar que la presión mínima es menor en valor absoluto a la presión máxima. Esta es una característica de ondas no lineales generadas con fuentes finitas, donde los efectos de difracción son importantes. Las ondas planas (figura 2.3) no muestran esta característica.

2.2. Estudio experimental de ondas acústicas no lineales

En esta sección estudiamos experimentalmente las ondas no lineales emitidas por fuentes ultrasonoras. Este estudio tiene varios objetivos. En primer lugar, nos permite identificar los efectos no lineales presentes en la propagación de ondas acústicas y estimar parámetros característicos como el número de Mach y la distancia de discontinuidad. En segundo lugar, buscamos conocer las características del campo de intensidad acústica generado por las fuentes empleadas y encontrar modelos que permitan describirlos. Por último,

¹Esta distancia coincide con la distancia focal que será definida más adelante.

los resultados nos permiten caracterizar el sistema de generación y recepción de ondas no lineales.

En la subsección 2.2.1 daremos una descripción del dispositivo experimental y realizaremos algunas hipótesis de trabajo. En la subsección 2.2.2 mencionaremos elementos de la teoría acústica mediante los cuales realizaremos el análisis de ondas no lineales. En las subsecciones 2.2.3 y 2.2.4 mostraremos y analizaremos los resultados obtenidos. Estos serán comparados con la teoría desarrollada.

2.2.1. Dispositivo experimental

Las ondas no lineales son generadas con dos tipos de transductores. El primero es un transductor circular plano de inmersión (Harisonic, Olympus NDT), de diámetro nominal $D = 28.575$ mm y frecuencia central $f_0 = 1$ MHz. El segundo, es un transductor esférico focalizado (Imasonic) de diámetro nominal $D = 38$ mm, frecuencia central $f_0 = 2.25$ MHz y distancia focal $z_F = 38$ mm. Este último concentra una alta cantidad de intensidad acústica en una región localizada del espacio, pero esta decrece considerablemente fuera de esta región. El transductor plano también posee una focalización natural debido a efectos de difracción, pero la intensidad acústica que genera es menor que la generada por el transductor focalizado. Sin embargo, fuera de la región focal, la amplitud de la onda generada por el transductor plano es relativamente mayor a la generada por el transductor focalizado.

En la figura 2.5 se muestra el esquema del dispositivo experimental. Los transductores son excitados con una señal de cinco ciclos de senoide de frecuencia igual a su frecuencia central, emitida por un generador de funciones (Tektronix AFG 3021B) y amplificada con un amplificador de potencia (E&I RF Power Amplifier) cuya ganancia es de 50 dB. Esta señal es directamente proporcional a la presión en la cara del transductor [13]. Supondremos, como hipótesis de trabajo, que esta relación se mantiene en todo el rango de voltajes emitidos por el generador. La amplitud de la señal con la que es excitado el transductor la notaremos V_{in} . Nos referiremos a este valor como *voltaje en la entrada* o *voltaje aplicado*. Como consecuencia de la hipótesis realizada, V_{in} es directamente proporcional a la amplitud máxima de la presión en la cara del transductor p_{max} . Este valor de presión es de importancia para determinar el número de Mach, dado por la ecuación 2.14.

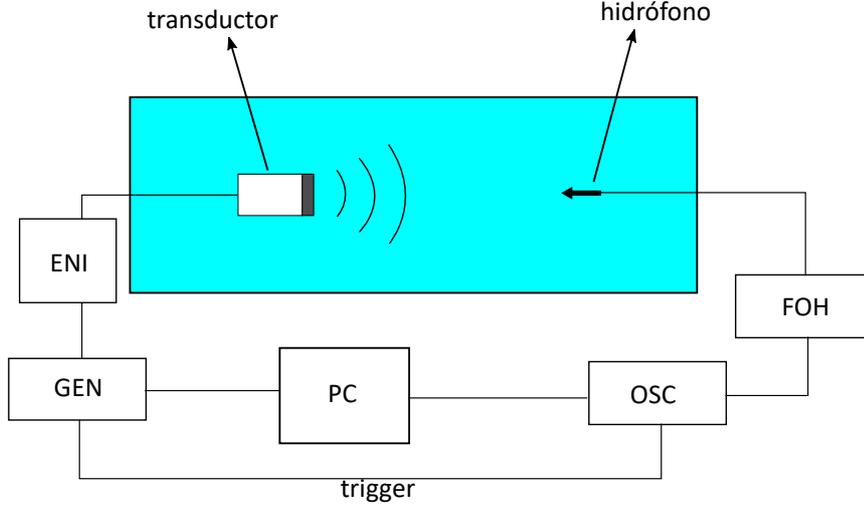


Figura 2.5: Dispositivo experimental. GEN: generador de señales Tektronix AFG 3021B, OSC: osciloscopio Tektronix 2024B, FOH: sistema controlador del hidrófono de fibra óptica (Fibre-optic Hydrophone System, Precision Acoustics), ENI: amplificador de potencia (E&I RF Power Amplifier).

Las ondas generadas son medidas con un transductor de fibra óptica (Precision Acoustics). El mecanismo de transducción está basado en la detección de cambios en el espesor de una capa polímera, que funciona como interferómetro de Fabry-Pérot, colocada en la punta del sensor [14]. Este sistema tiene la capacidad de soportar campos acústicos de alta intensidad.

La señal recibida es digitalizada con un osciloscopio (Tektronix TDS 2024B) y almacenada en la PC.

La posición del hidrófono es controlada con un sistema de motores bidireccional, que permite desplazar el hidrófono en dos direcciones perpendiculares con un paso de 0.127 mm.

La *sensibilidad* M del sensor se define como la relación entre la amplitud del voltaje en la salida del hidrófono y la amplitud de presión de la onda que sensa. En general, la sensibilidad depende de la frecuencia. En la figura 2.6, se grafica la curva de sensibilidad en función de la frecuencia f . Esta información es brindada por el fabricante. Para realizar la conversión de mV a MPa, realizamos la siguiente deconvolución:

$$p(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\mathcal{F}[g(t)](f)}{M(f)} \right\}$$

donde \mathcal{F} es la transformada de Fourier y $g(t)$ es la señal temporal en volts que se mide en el osciloscopio.

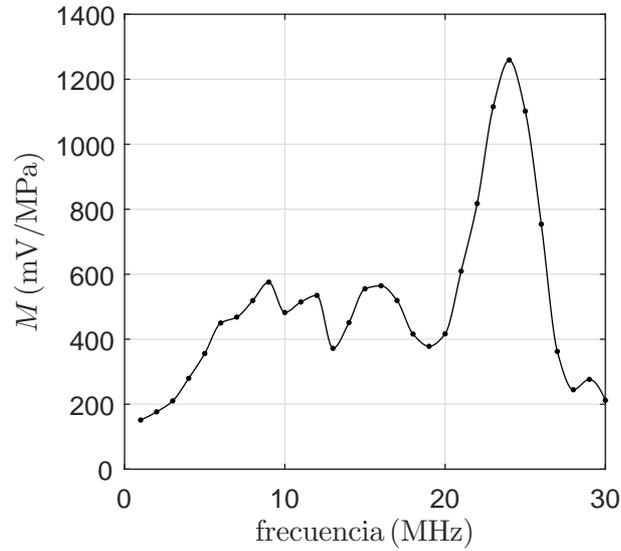


Figura 2.6: Curva de sensibilidad del hidrófono de fibra óptica.

La curva de sensibilidad no posee información de fase. Por lo tanto, no conocemos posibles diferencias de fase que puedan ser introducidas por el sensor entre las componentes espectrales de g y p . Propondremos como hipótesis de trabajo, que no existe esta diferencia en el rango de frecuencia trabajado. Algunas observaciones que realizaremos en secciones posteriores nos permitirán verificar la validez de esta hipótesis.

El transductor y el hidrófono se sumergen en agua. Las características de las ondas que se propagan en este medio dependen de algunos parámetros que listamos en la tabla 2.1. Estos valores serán empleados en los cálculos y simulaciones que se presentan en esta tesis.

Tabla 2.1: Densidad, velocidad de propagación y parámetro de no linealidad del agua a 20°C [15].

ρ_0 ($\mu\text{g}/\text{mm}^3$)	c_0 ($\text{mm}/\mu\text{s}$)	β
1.00×10^3	1.4823	3.48

Por último, debemos mencionar que los valores de intensidades acústicas es conveniente expresarlos en decibeles. Los valores son convertidos mediante la siguiente ecuación:

$$I \text{ (dB)} = 20 \log \frac{p}{p_{ref}}$$

donde I (dB) es la intensidad en decibeles y p_{ref} es un valor de presión de

referencia que, en este trabajo, es igual al máximo valor de presión obtenido en cada experiencia.

2.2.2. Elementos de análisis de ondas no lineales

Analizaremos tres aspectos de las ondas no lineales: la generación de armónicos, la intensidad del campo acústico y la diferencia de fase entre el primer y el segundo armónico.

A partir de la medida de la amplitud de los armónicos, podemos estimar parámetros característicos de las ondas no lineales, como por ejemplo, el número de Mach. La intensidad del campo acústico la comparamos con resultados analíticos y numéricos, pudiéndose así validar el modelo teórico presentado en la sección 2.1. Con el análisis de la diferencia de fase entre el primer y el segundo armónico podemos comprender las características de la forma de las ondas no lineales que estudiamos.

En la figura 2.7 se muestran los esquemas de los transductores empleados y la definición de los ejes que se emplean para describir el campo acústico.

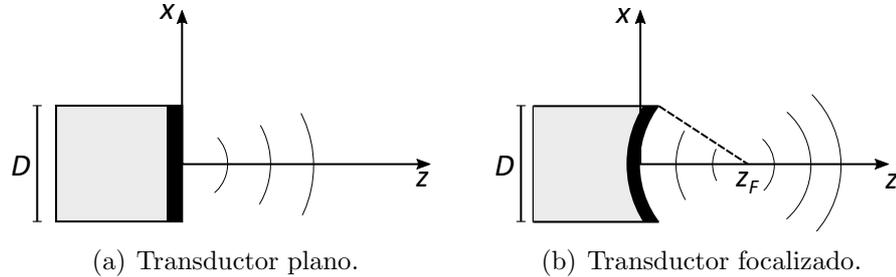


Figura 2.7: Esquema de transductores y definición de ejes.

Generación de armónicos de orden superior

La generación de armónicos es una característica propia de los fenómenos no lineales. Un transductor excitado con una señal de frecuencia f_0 , emitirá una onda que, en régimen no lineal, presentará a medida que se propaga frecuencias que serán múltiplos de f_0 . El régimen no lineal se alcanza cuando la amplitud del voltaje con que se excita el transductor y, por lo tanto, la amplitud de la onda que emite, es elevada. El parámetro que cuantifica dicho régimen es el número de Mach, definido en la sección 2.1.2. En esa misma sección fue deducida la solución de Bessel-Fubini, que describe la presión acústica de una onda armónica no lineal y permite describir la generación de armónicos de

orden superior. Obtenemos una expresión sencilla si suponemos $z \ll z_D$. Bajo esta hipótesis, podemos aproximar a primer orden las funciones de Bessel de la ecuación 2.36, obteniéndose:

$$p_n = \frac{1}{n!} \left(n \frac{z}{z_D} \right)^{n-1} p_{max}^n \quad (2.38)$$

Como se ha propuesto antes, identifiquemos p_{max} con la presión máxima en la superficie del transductor. Este valor es proporcional al voltaje de excitación del transductor. Por lo tanto, de la ecuación 2.38 interpretamos que la amplitud del armónico n es directamente proporcional a la n -ésima potencia del voltaje de excitación, es decir:

$$p_n \propto V_{in}^n \quad (2.39)$$

Si bien los transductores que se emplearon en este trabajo no emiten ondas planas, las experiencias que mostraremos verifican esta relación cuando la amplitud de excitación es tal que z es un orden menor que z_D .

Campo de intensidad acústica

La intensidad del campo acústico la analizaremos en comparación con resultados de la teoría lineal y no lineal. La relación que existe entre la intensidad acústica I y la presión acústica, es la siguiente [16]:

$$I(x, z) = \frac{|p(x, z)|^2}{2\rho_0 c_0} \quad (2.40)$$

En régimen lineal, la distribución espacial de la presión que genera una fuente acústica plana y circular de diámetro D que vibra armónicamente con velocidad uniforme en toda su superficie, esta dada por [15]:

$$p(x, z) = i \frac{k_0 p_{max}}{z} \exp\left(-i \frac{k_0 x^2}{2z}\right) \int_0^{D/2} \exp\left(-i \frac{k_0 x'^2}{2z}\right) J_0\left(\frac{k_0 x x'}{z}\right) x' dx' \quad (2.41)$$

donde $k_0 = \frac{2\pi f_0}{c_0}$ es el número de onda.

En el eje z , con $x = 0$, obtenemos:

$$I(0, z) = \frac{p_{max}^2}{\rho_0 c_0} \left[1 - \cos \left(\frac{k_0 D^2}{8z} \right) \right] \quad (2.42)$$

En la ecuación 2.42 podemos notar que la intensidad acústica presentará máximos locales cuando $z = \frac{k_0 D^2}{8\pi(2m+1)}$ donde m es un número natural. El máximo de estos valores se obtiene cuando $m = 0$ y es este punto al que denominaremos posición focal. Notaremos z_F a la posición focal, dada por:

$$z_F = \frac{k_0 D^2}{8\pi} \quad (2.43)$$

La intensidad acústica en una dirección transversal alrededor de estos puntos está dada por:

$$I(x, z_F) = \frac{1}{2\rho_0 c_0} \left(\frac{8\pi p_{max}}{D^2} \right)^2 \left| \int_0^{D/2} \exp \left(i4\pi \frac{x'^2}{D^2} \right) J_0 \left(\frac{8\pi x x'}{D^2} \right) x' dx' \right|^2 \quad (2.44)$$

En una fuente focalizada, la posición focal depende de su construcción. Si la fuente tiene geometría esférica, la posición focal se encuentra en el centro de curvatura. La presión acústica de un transductor focalizado se obtiene sustituyendo $1/z$ por $1/z_F - 1/z$ en la integral de la ecuación 2.41 [15]:

$$p(x, z) = \frac{ik_0 p_{max}}{z} \exp \left(-ik_0 \frac{x^2}{2z} \right) \int_0^{D/2} \exp \left[ik_0 \frac{x'^2}{2} \left(\frac{1}{z_F} - \frac{1}{z} \right) \right] J_0 \left(\frac{k_0 x x'}{z} \right) x' dx' \quad (2.45)$$

La intensidad acústica sobre el eje del transductor, está dada por:

$$I(0, z) = \frac{1}{\rho_0 c_0} \left(\frac{p_{max}}{\frac{z}{z_F} - 1} \right)^2 \left\{ 1 - \cos \left[k_0 \frac{D^2}{8} \left(\frac{1}{z_F} - \frac{1}{z} \right) \right] \right\} \quad (2.46)$$

En una dirección transversal que contenga al foco, se obtiene:

$$I(x, z_F) = \frac{1}{4\rho_0 c_0} \left(\frac{k_0 D^2 p_0}{z_F} \right)^2 \left[\frac{J_1(k_0 D x / 2 z_F)}{k_0 D x / 2 z_F} \right]^2 \quad (2.47)$$

Los resultados experimentales que serán presentados más adelante en es-

te capítulo muestran que estas ecuaciones describen bien el campo acústico correspondiente al armónico fundamental. Para describir la contribución a la intensidad acústica generada por armónicos superiores, necesitamos emplear un modelo no lineal.

La ecuación KZK, deducida en la sección 2.1, modela la propagación de ondas no lineales generadas con transductores. Su solución numérica la realizamos con el software *HIFU Simulator* desarrollado por Soneson e implementado para Matlab [6]. La ecuación KZK es resuelta usando un método *step by step* que permite integrar los términos lineales y no lineales usando diferentes técnicas. La parte lineal de la ecuación es integrada con un método de diferencias finitas en el dominio frecuencial para cada uno de los armónicos presentes en la ecuación. En este trabajo, empleamos 128 armónicos. Con este número la simulación se mantiene estable y no insume demasiado tiempo (veinte minutos aproximadamente¹). En cada paso de integración, la solución es convertida al dominio temporal y la parte no lineal de la ecuación KZK es resuelta. Por defecto, las condiciones de contorno del simulador están implementadas para resolver el campo acústico de un transductor focalizado con una apertura angular máxima de 40°. Para ángulos mayores la simulación todavía funciona pero los resultados se encuentran fuera del rango de validez. Para resolver el campo de un transductor plano, modificamos estas condiciones.

Asociado a los valores de intensidad del campo acústico, definimos el ancho focal Δx como la distancia medida sobre el eje x entre los puntos donde la intensidad acústica decrece a un cuarto de su valor máximo. Si medimos la intensidad en decibeles, esto corresponde a un decaimiento de -6 dB. Como ejemplo, en la figura 2.8 se grafica un campo acústico calculado a partir de la ecuación 2.47, donde se señala el ancho focal.

¹Procesador Intel Core i3 (1.70 GHz), 4 GB de memoria RAM

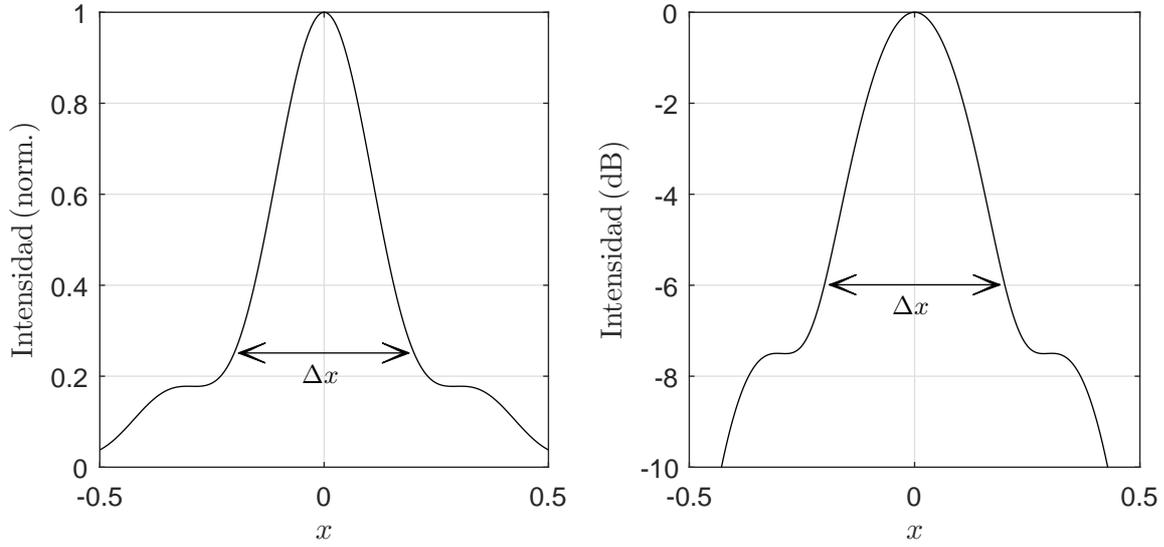


Figura 2.8: Campo acústico calculado a partir de la ecuación 2.47, normalizado y en decibeles. La distancia Δx representa el ancho focal a -6 dB.

Parámetro de fase

La ecuación 2.32 describe la descomposición en serie de Fourier de una onda plana no lineal donde la perturbación en $z = 0$ es de la forma $p_{max} \sin(\omega_0 t)$. Si introducimos una constante de fase ϕ_0 tal que en $z = 0$ la onda tenga la forma $p_{max} \sin(\omega_0 t + \phi_0)$, la ecuación 2.32 la escribimos como:

$$p = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \sin [n(\omega_0 t - k_0 z + \phi_0)] \quad (2.48)$$

Notemos que en el primer término de esta ecuación, la constante de fase es $\phi_1 = \phi_0$, mientras que en el segundo término es $\phi_2 = 2\phi_0$. Definamos el *parámetro de fase* θ , tal que

$$\theta = \phi_2 - 2\phi_1 \quad (2.49)$$

Es evidente que este parámetro es nulo en la ecuación 2.48, que describe la propagación de una onda no lineal plana. En un artículo publicada por B. Lucas [17], donde se analiza el campo acústico de fuentes acústicas focalizadas, se muestra que este resultado puede generalizarse para una onda esférica divergente, pero en el caso de una fuente focalizada, el parámetro de fase tiene valores distintos dependiendo de la distancia que se propaga la onda. Este

resultado debemos tenerlo en cuenta cuando caractericemos el campo acústico del transductor focalizado.

Como ejemplo mostramos en la figura 2.9 la forma que adquiere una onda no lineal con distintos valores de θ . Con $\theta = 0$, la onda tiene la forma que se ha mostrado antes para una onda plana. Con $\theta = \pi$, la onda se muestra inclinada hacia el otro lado.

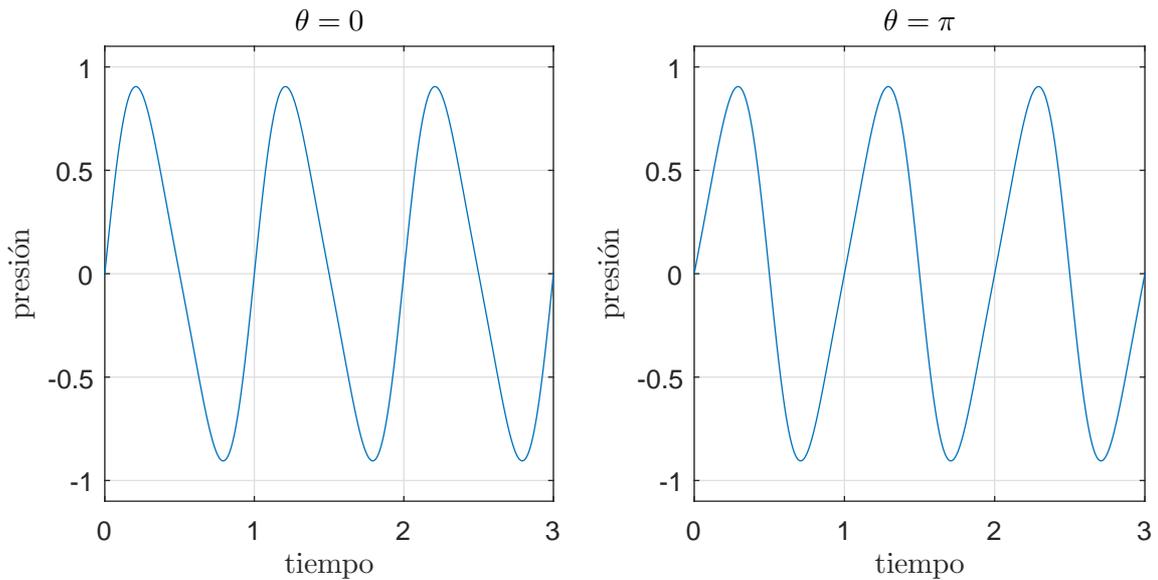


Figura 2.9: Forma de la onda no lineal con distintos parámetros de fase.

2.2.3. Medida del campo acústico de un transductor plano

El transductor plano que empleamos para realizar las medidas del campo acústico se representa en la figura 2.7. Ya se ha mencionado que el diámetro nominal del mismo es $D = 28.575$ mm y su frecuencia de trabajo $f_0 = 1$ MHz. Debido a efectos de difracción, un transductor plano posee un foco que se encuentra a una distancia sobre el eje z dada por la ecuación 2.43. Para calcular esta distancia, usamos la velocidad del sonido en agua presentada en la tabla 2.1. Con este dato, obtenemos un número de onda $k_0 = 4.2 \text{ mm}^{-1}$ y con la ecuación 2.43 la distancia focal resulta $z_F = 138$ mm.

La posición focal puede ser medida experimentalmente de manera sencilla. El procedimiento consiste en ubicar con el hidrófono la posición dónde la amplitud de la señal recibida se maximiza y medir la distancia a la que se encuentra del transductor. Con este método hemos determinado que la posición

focal es 113 mm. Este valor es significativamente menor al obtenido a partir de la ecuación 2.43 y el diámetro nominal del transductor. Esta diferencia es comprensible si tenemos en cuenta que el modelo del que se deriva la ecuación 2.43 corresponde a un transductor que vibra uniformemente. Un modelo más realista consiste en asumir que el borde de la superficie del transductor está fijo. Con este supuesto, corregimos el primer modelo considerando para el transductor un diámetro efectivo menor al nominal. A partir de la medida experimental de la posición focal, obtenemos con la ecuación 2.43 un diámetro efectivo $D_{ef} = 26.1$ mm que difiere apenas en un 8.8% del diámetro nominal. Este diámetro efectivo será empleado en los cálculos teóricos y simulaciones de esta sección.

Campo acústico en el foco

Con el hidrófono colocado en la posición focal generamos ondas acústicas excitando el transductor con cinco ciclos de senoide cuyas amplitudes abarcan un rango entre 32 V y 253 V.

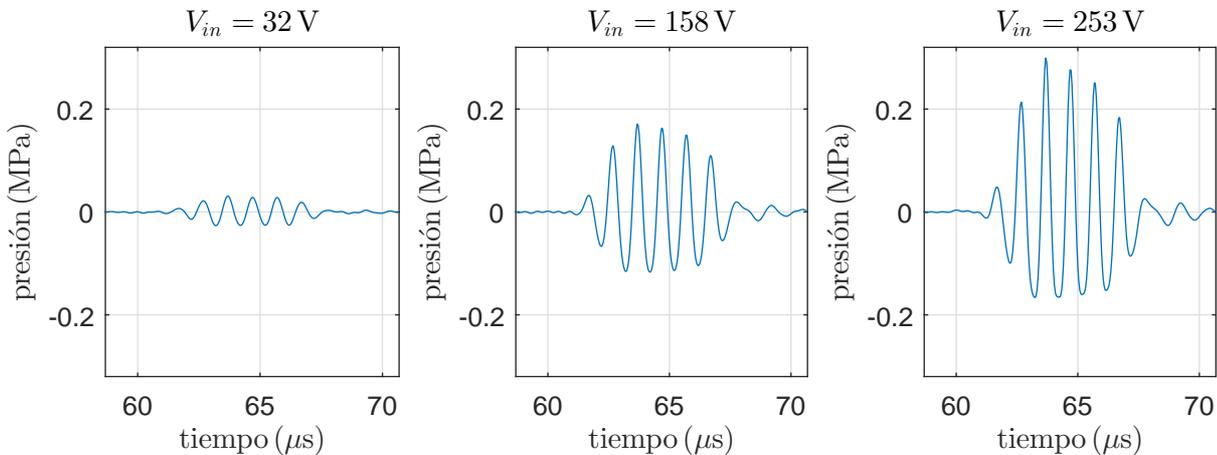


Figura 2.10: Señales obtenidas a 113 mm del transductor sobre su eje, excitando el transductor con voltajes de 32 V, 158 V y 253 V.

La figura 2.10 muestra las señales obtenidas con voltajes de excitación de 32 V, 158 V y 253 V. La diferencia entre las señales es notable. En primer lugar, observemos la diferencia en la amplitud de las señales: a mayor voltaje de excitación, mayor es la amplitud de la señal adquirida. Esta observación es esperable incluso en un régimen lineal. En segundo lugar, observemos una diferencia que sólo puede ser explicada bajo hipótesis de no linealidad: a medida que aumenta el voltaje en la entrada, se acentúa la diferencia entre el

valor absoluto de la presión mínima y el valor de la presión máxima. Para hacer mas explícita esta diferencia en la forma, graficamos en la figura 2.11 la señal obtenida con 32 V y la obtenida con 253 V superpuestas y normalizadas respecto a la máxima amplitud de cada una. Como se mostró en la sección 2.1, este resultado está contemplado por la ecuación KZK, que modela la emisión de ondas por fuentes finitas.

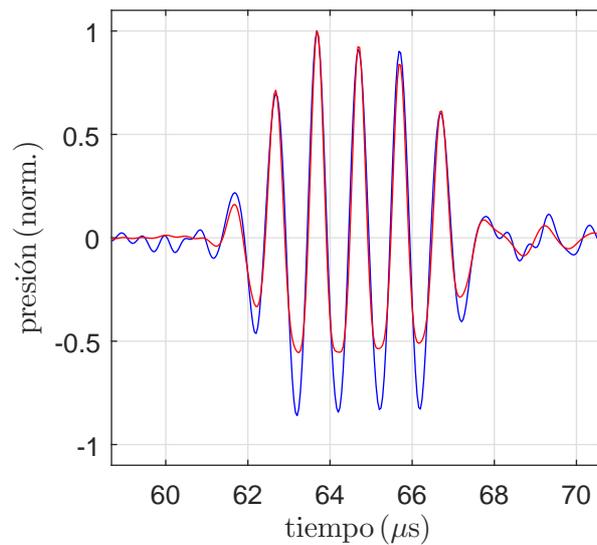


Figura 2.11: Comparación de señales normalizadas, obtenidas excitando el transductor con voltajes de 32 V (azul) y 253 V (rojo).

La deformación que presentan las ondas cuando aumenta su amplitud, está fuertemente vinculada con la presencia de armónicos de orden superior. En la figura 2.12 se muestran los espectros de las señales obtenidas. El espectro de la onda de baja amplitud, muestra una frecuencia bien definida en la frecuencia central del transductor (1 MHz), mientras que a medida que la amplitud aumenta el espectro muestra amplitudes bien definidas en frecuencias que son múltiplos de la frecuencia central.

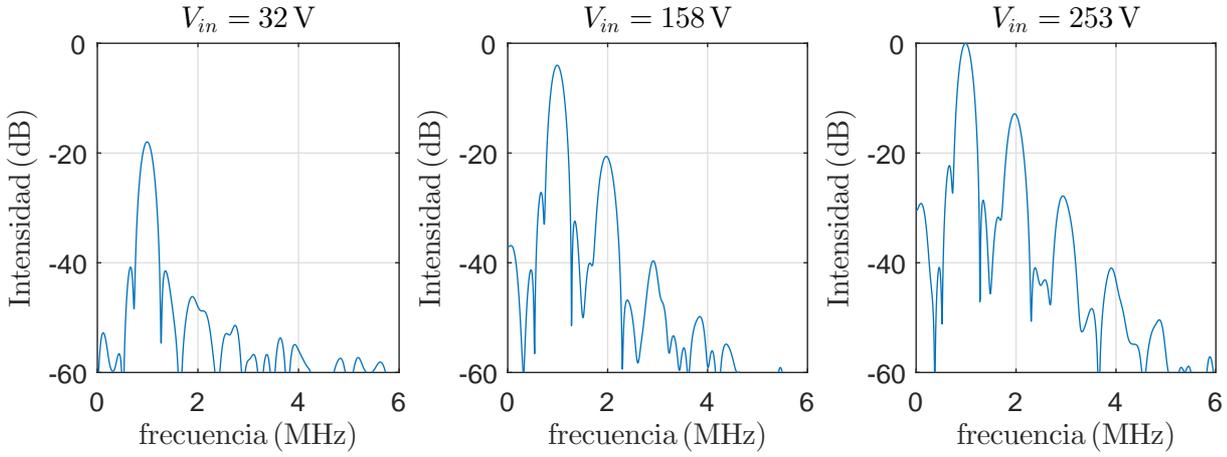


Figura 2.12: Espectros de las señales obtenidas a 113 mm del transductor sobre su eje, excitando el transductor con voltajes de 32 V, 158 V y 253 V.

Se ha propuesto en la subsección 2.2.2, una relación sencilla entre la amplitud de los armónicos y el voltaje en la entrada, dada por 2.39. Si bien esta relación es obtenida para ondas planas, mostraremos que la experiencia la verifica. Para ello, excitamos el transductor con voltajes en la entrada entre 32 V y 253 V, con un paso de 32 V. En la figura 2.13 se muestra el crecimiento de las amplitudes de cada armónico cuando aumenta V_{in} . Teniendo en cuenta la relación 2.39, los datos experimentales son ajustados con polinomios de la forma $p_n = a_n V_{in}^n$, donde a_n es un parámetro de ajuste. Los primeros tres armónicos verifican en buena medida esta relación ($R > 0.98$). El cuarto armónico muestra una mayor dispersión ($R = 0.861$), por tener este menor amplitud y estar más afectado por el ruido.

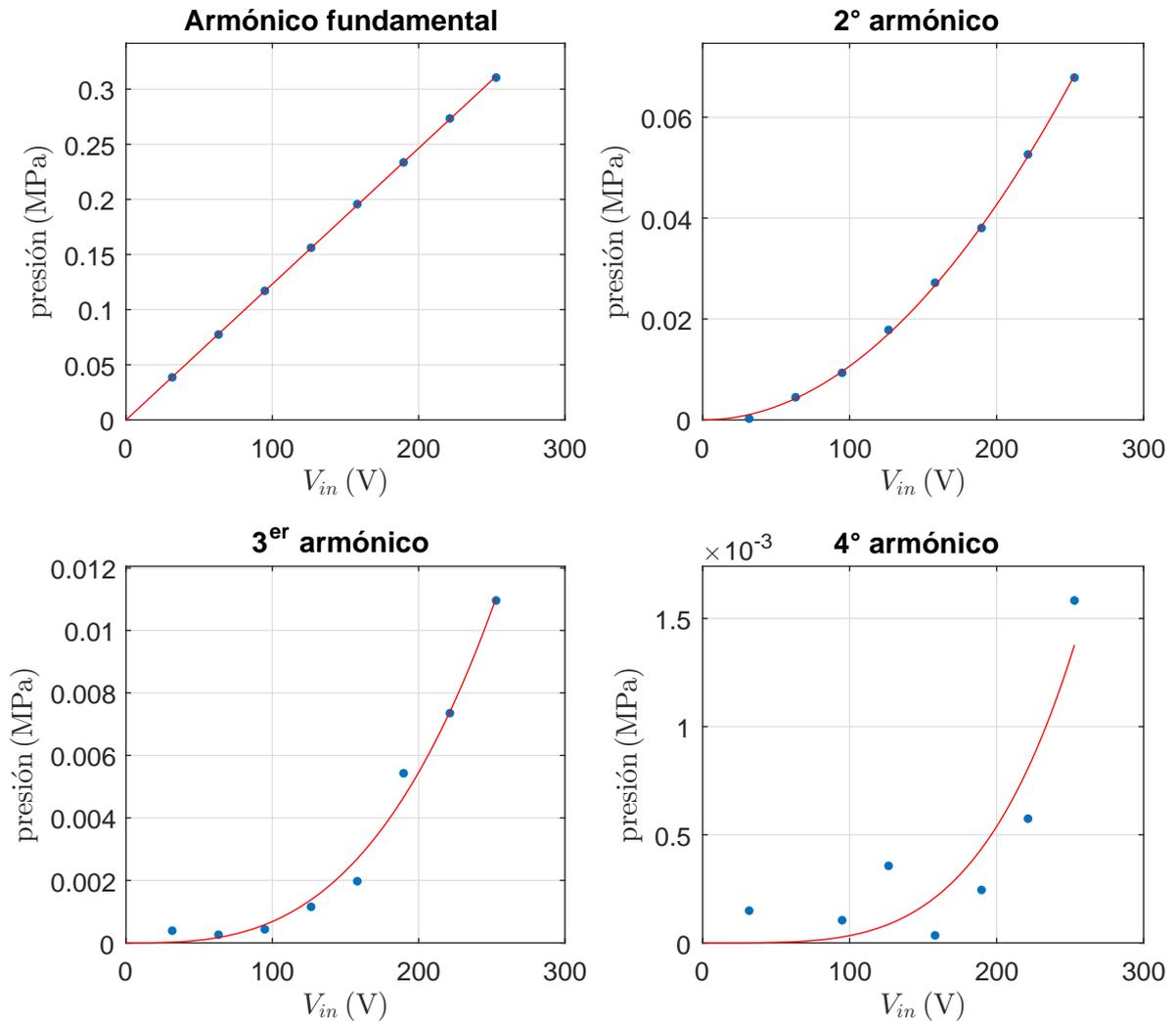


Figura 2.13: Amplitud de los armónicos presentes en la onda no lineal en función de la amplitud del voltaje con que se excita el transductor. En azul se grafican los datos experimentales y en rojo el ajuste polinómico de la forma $p_n = a_n V_{in}^n$. Los coeficientes de determinación R^2 calculados para cada ajuste son 1.000 para el primer y el segundo armónico, 0.988 para el tercero y 0.861 para el cuarto.

Estimación de parámetros de no linealidad

Los resultados mostrados anteriormente concuerdan con el resultado dado por la relación 2.39. Sin embargo, esta relación se dedujo bajo la hipótesis $z \ll z_D$. Por lo tanto, debemos verificar si esta hipótesis es válida.

De acuerdo a la ecuación 2.31, z_D es inversamente proporcional a la amplitud p_{max} . Esta amplitud, que en teoría es la de una onda plana, la identificamos

con la amplitud de la presión en la cara del transductor. Su valor, se consigue de manera sencilla: en un transductor plano, la presión en el foco p_F es el doble de la presión en la cara del transductor. Este resultado se obtiene evaluando la ecuación 2.41 en las coordenadas $(x, z) = (0, z_F)$, donde z_F está dada por 2.43. La ecuación 2.31, la reescribimos como sigue:

$$z_D = \frac{2\rho_0 c_0^3}{\beta\omega_0 p_F} \quad (2.50)$$

Para realizar este cálculo, empleamos las amplitudes y frecuencia angular del primer armónico. La tabla 2.2 muestra el resultado de z_D y del número de Mach calculado a partir de 2.14, para distintos voltajes de excitación. Con el mayor valor de V_{in} empleado obtenemos $z_D = 1.0 \times 10^3$ mm. Este valor es bastante mayor a la distancia focal (113 mm), donde fue realizada la medida. Por lo tanto, la hipótesis $z \ll z_D$ es válida para estas amplitudes.

Tabla 2.2: Estimación de ϵ y z_D .

V_{in} (V)	ϵ ($\times 10^{-4}$)	z_D ($\times 10^3$ mm)
32	0.087	7.8
63	0.17	3.9
95	0.26	2.6
126	0.34	2.0
158	0.43	1.6
190	0.52	1.3
221	0.61	1.1
253	0.69	1.0

Campo de intensidad acústica

El campo de intensidad acústica lo estudiamos en las direcciones dadas por el eje z y en torno a la posición focal en una dirección paralela al eje x . Las medias sobre el eje z las realizamos desde $z = 37.0$ mm hasta $z = 256.0$ mm, con un paso de 3.2 mm aproximadamente. Sobre el eje transversal realizamos un barrido desde $x = 0$ hasta $x = 20.0$ mm con un paso 0.4 mm aproximadamente. Las medidas se repiten para voltajes en la entrada de 63 V, 126 V, 190 V y 253 V.

En las figuras 2.14 y 2.15 se muestran las intensidades de los primeros cuatro armónicos para los distintos voltajes empleados. Algunos de los valores graficados están por debajo del nivel del ruido, calculado en -40 dB. Estos

datos no serán considerados posteriormente.

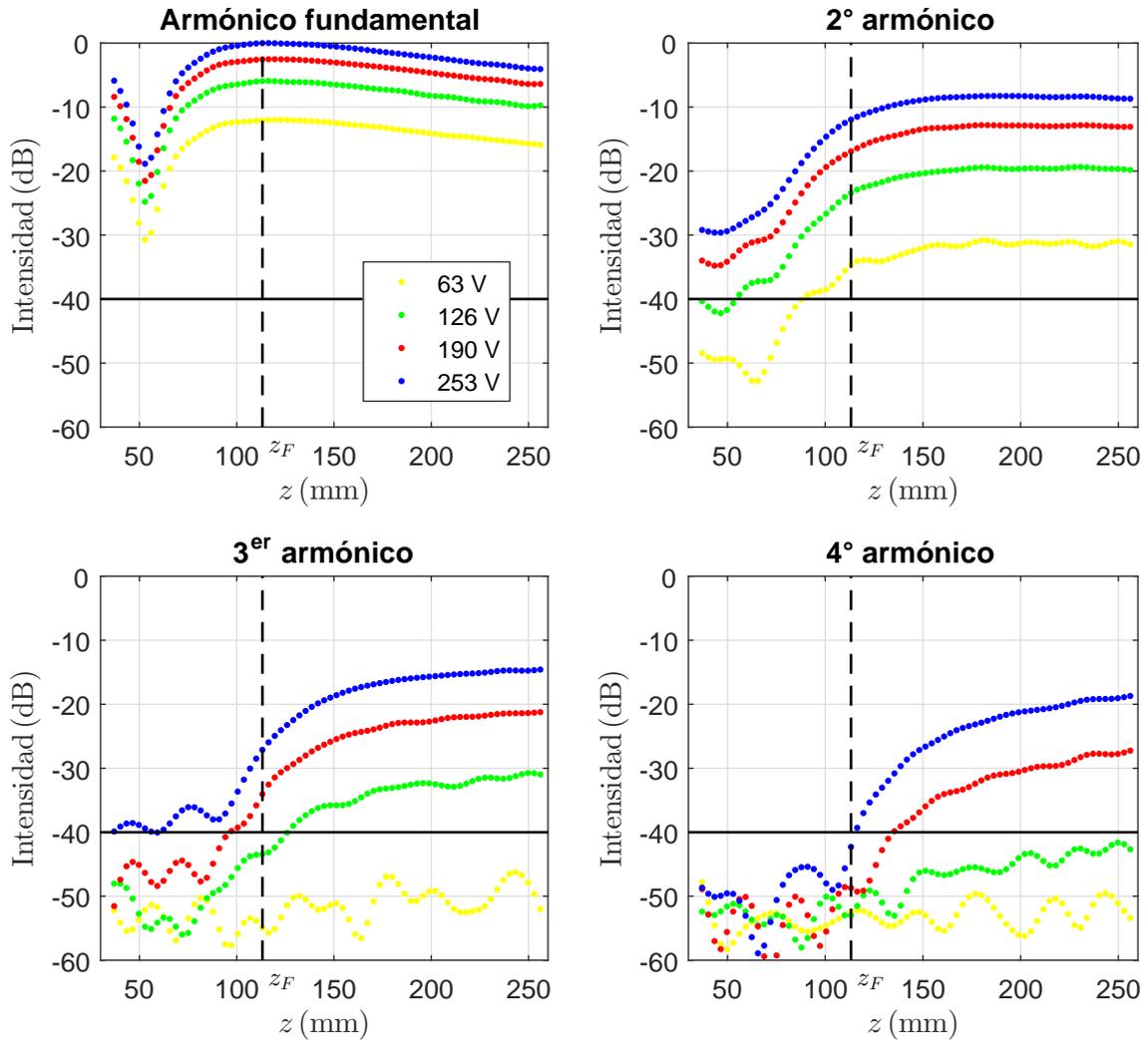


Figura 2.14: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de z . Las intensidades se grafican en decibeles, utilizándose como valor de referencia la amplitud máxima obtenida para el armónico fundamental. Cada color identifica la amplitud del voltaje con el que se excita el transductor. La línea punteada indica la posición focal y la línea continua el nivel del ruido, calculado en -40 dB.

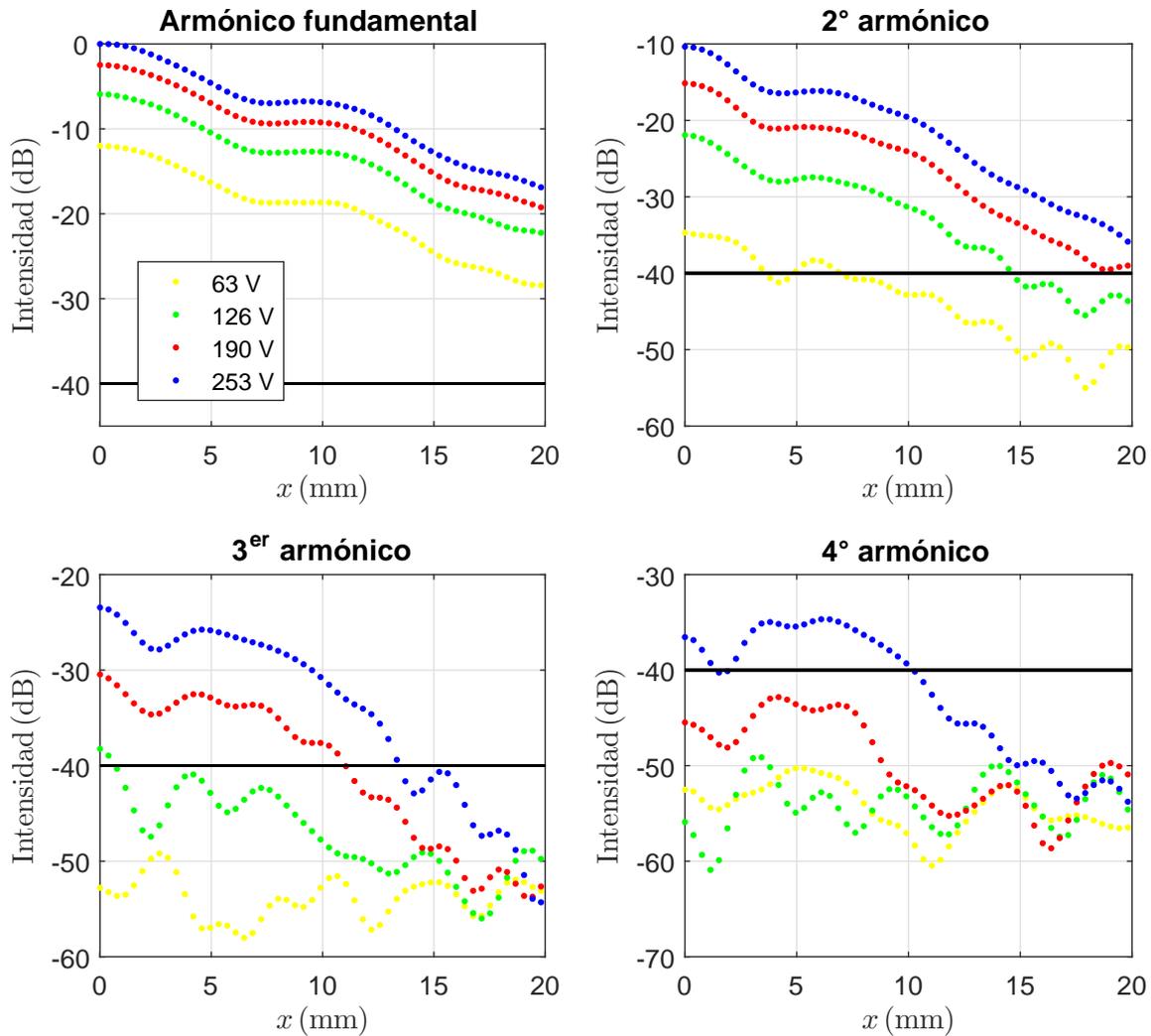


Figura 2.15: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de x , en torno a la posición focal. Las intensidades se grafican en decibeles utilizándose como valor de referencia la amplitud máxima obtenida para el armónico fundamental. Cada color identifica la amplitud del voltaje con el que se excita el transductor. La línea continua indica el nivel del ruido.

La intensidad del primer armónico la comparamos con los resultados de la teoría lineal planteados en la subsección 2.2.2. La ecuación 2.42 nos permite calcular las intensidades en el eje z y la ecuación 2.44 en el x . En las figuras 2.16 y 2.17 se comparan estos cálculos con los resultados experimentales. Si bien el régimen es no lineal, la teoría lineal concuerda en buena medida con la experiencia.

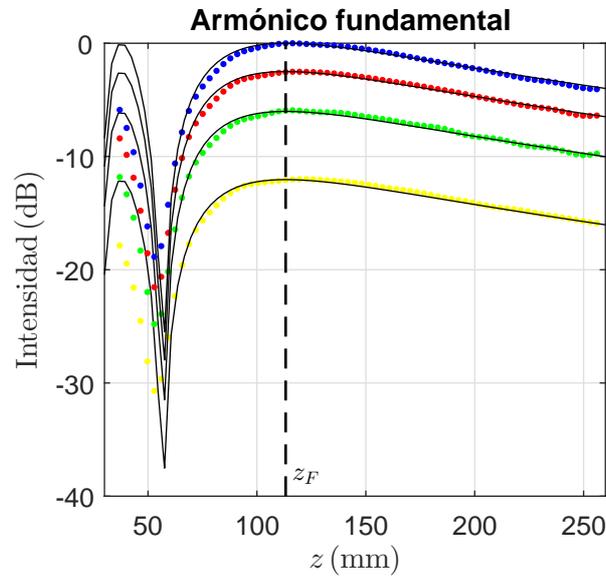


Figura 2.16: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de z . Comparación entre los resultados experimentales y valores calculados a partir de una teoría lineal (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 253 V (azul), 190 V (rojo), 126 V (verde) y 63 V (amarillo).

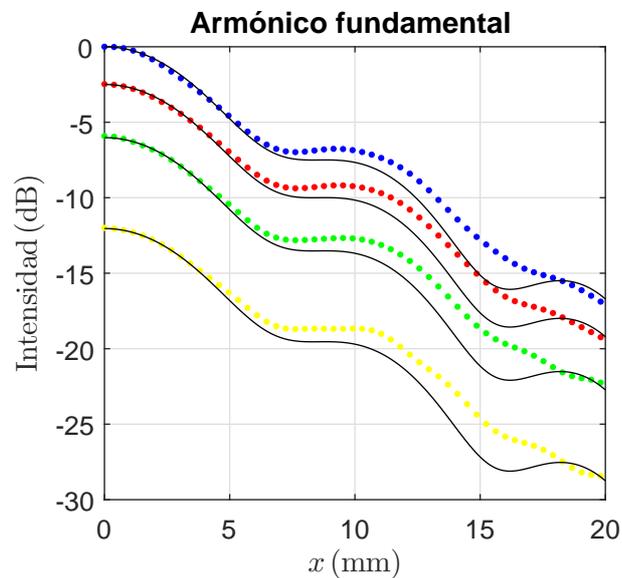


Figura 2.17: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de x . Comparación entre los resultados experimentales y valores calculados a partir de una teoría lineal (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 253 V (azul), 190 V (rojo), 126 V (verde) y 63 V (amarillo).

Con este resultado tenemos una forma analítica y rápida para estimar el campo acústico del armónico fundamental.

En la tabla 2.3 se muestran valores del ancho focal y la diferencia relativa entre el resultado experimental y el cálculo teórico. Las diferencias son mínimas.

Tabla 2.3: Ancho focal a -6 dB del armónico fundamental y diferencia relativa porcentual respecto al ancho focal calculado con la teoría lineal.

V_{in} (V)	Δx (mm)	ε %
63	12.5	7.6
126	12.0	3.5
290	12.2	4.9
253	12.0	3.5

La teoría lineal no predice la presencia de armónicos de orden superior. Por lo tanto, el campo acústico de estos debemos analizarlo a partir de la ecuación KZK. Esta ecuación la resolvemos numéricamente con la simulación mencionada en la subsección 2.2.2. En las figuras 2.18 y 2.19 se comparan los resultados experimentales con la simulación. La comparación muestra buenos resultados en la región posterior al punto focal ($z > z_F$). La diferencia que se observa para posiciones menores a la posición focal se la atribuimos al hecho de que la simulación resuelve la ecuación KZK para ondas armónicas (régimen continuo) pero, en esta experiencia, hemos excitado el transductor con cinco ciclos de senoide (régimen pulsado). En la dirección x la simulación muestra buenos resultados en comparación con los resultados experimentales obtenidos con el primer y segundo armónico, que son los que presentan intensidades mayores.

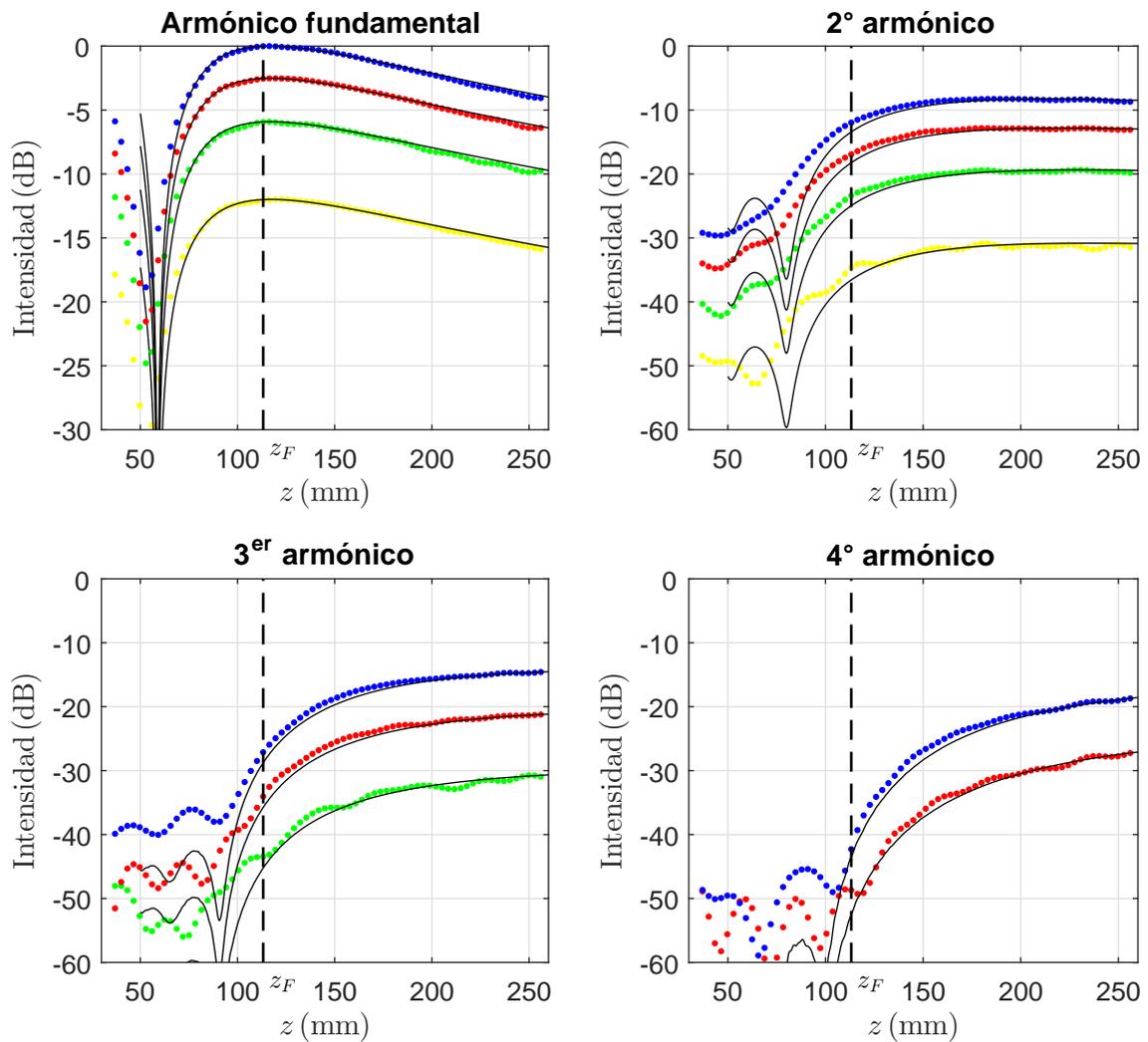


Figura 2.18: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de z . Comparación entre los resultados experimentales y valores calculados numéricamente (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 253 V (azul), 190 V (rojo), 126 V (verde) y 63 V (amarillo).

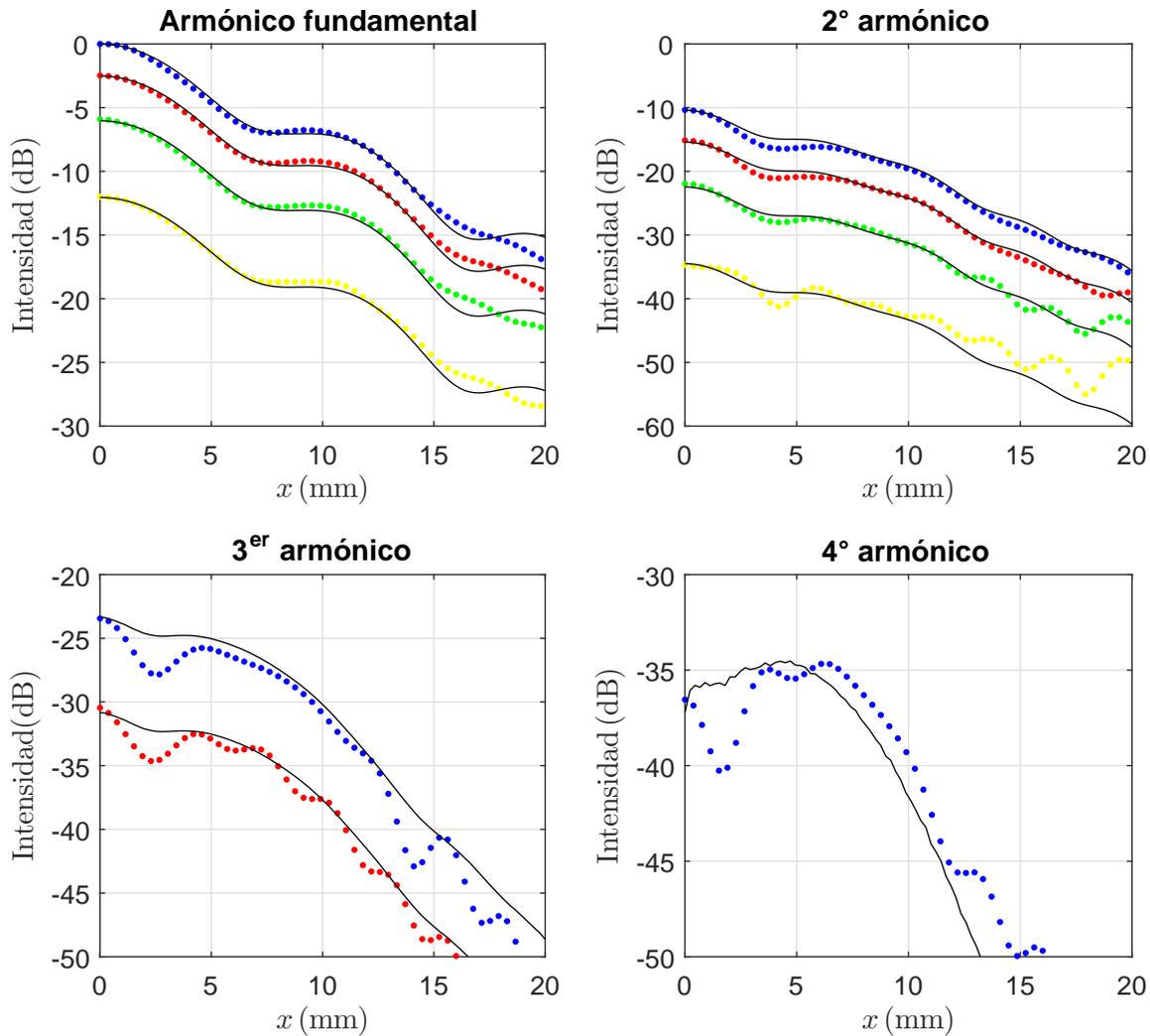


Figura 2.19: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de x . Comparación entre los resultados experimentales y valores calculados numéricamente (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 253 V (azul), 190 V (rojo), 126 V (verde) y 63 V (amarillo).

Parámetro de fase

El parámetro de fase ha sido definido con la ecuación 2.49. En la figura 2.20 se grafica este parámetro calculado con las señales obtenidas con $V_{in} = 258$ V. En posiciones mayores a la posición focal este parámetro se hace igual a cero. En la figura 2.21 se compara una señal obtenida antes del foco ($z = 63.4$ mm) con otra obtenida después ($z = 222.2$ mm). En el primer caso, el parámetro de fase es menor a cero, observándose que la inclinación de la onda no lineal es

contraria al esperado para una onda plana o una onda esférica divergente.

Teóricamente, la onda que emite un transductor plano, tiene características de onda esférica cuando se propaga más allá de la posición focal. Podemos fundamentar esta afirmación realizando la aproximación $z \gg z_F$ en la ecuación 2.42, obteniéndose el siguiente resultado:

$$I(0, z) = \frac{p_{max}^2}{\rho_0 c_0} \left(\frac{k_0 D^2}{8z} \right)^2 \quad (2.51)$$

Observemos que la intensidad acústica decae como z^{-2} , como corresponde a una onda esférica. Resulta razonable que el parámetro de fase también tenga las características de una onda de este tipo en la región post focal, es decir, que sea nulo, como se verifica en la experiencia.

En la sección 2.2.1 supusimos que el hidrófono no introduce una diferencia de fase entre las componentes espectrales de la onda que mide. El hecho de que el parámetro de fase verifique el resultado esperado, refuerza esta hipótesis al menos en un rango que comprenda las frecuencias del primer y del segundo armónico.

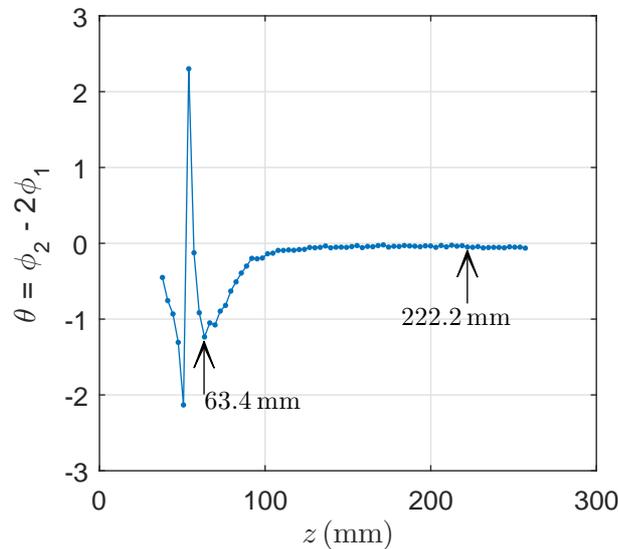


Figura 2.20: Coeficiente de fase del transductor plano en función de la distancia axial. $V_{in} = 258$ V.

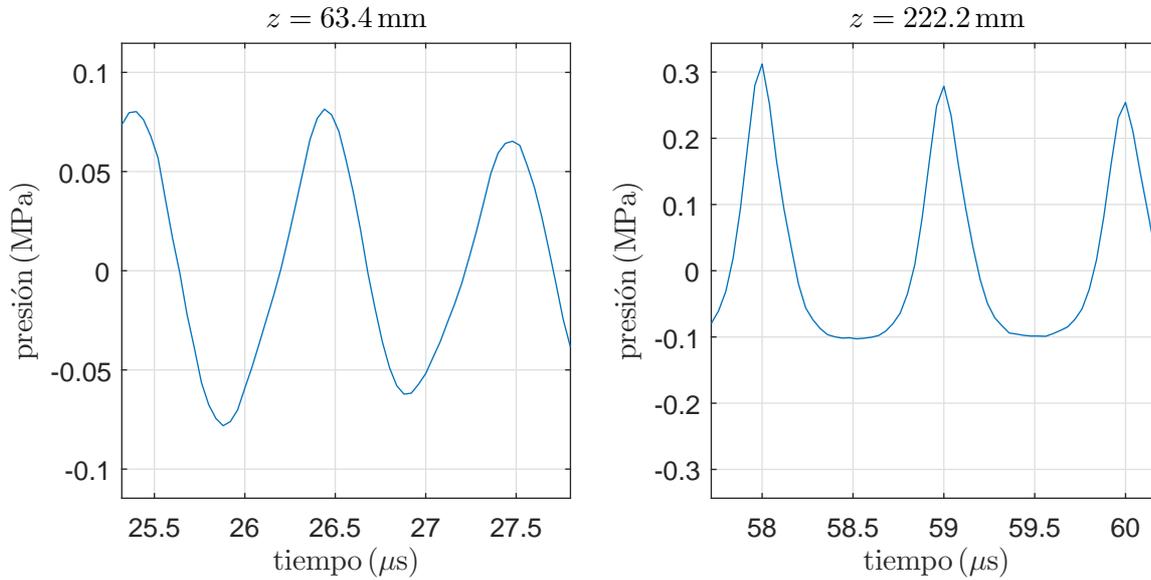


Figura 2.21: Señales en $z = 63.4$ mm y en $z = 222.2$ mm. $V_{in} = 258$ V.

2.2.4. Medidas del campo acústico de un transductor focalizado

En esta sección estudiamos las ondas acústicas no lineales generadas con un transductor esférico focalizado cuya geometría se representa en la figura 2.7. El diámetro nominal del transductor es $D = 38$ mm al igual que su distancia focal. Su frecuencia de trabajo es $f_0 = 2.25$ MHz.

El transductor está diseñado para concentrar una gran cantidad de energía acústica en una región localizada del espacio. Como consecuencia de esto, se produce en la región focal un gran incremento de la presión acústica en comparación con un transductor plano. Por esta razón, trabajaremos con voltajes menores a los empleados en la sección que precede, con el fin de preservar la integridad de los instrumentos de medida.

Campo acústico en el foco

Como se hizo con el transductor plano, la posición focal se determina colocando el hidrófono en el punto donde la amplitud de la señal recibida se maximiza. Esta coincide con la posición focal nominal del transductor.

Señales medidas en el foco, excitando el transductor con voltajes de amplitud 16 V, 87 V y 158 V, se muestran en la figura 2.22. La señal de mayor amplitud se muestra distorsionada en comparación con la señal de baja am-

plitud. Este es un claro efecto no lineal, que también ha sido observado con el transductor plano.

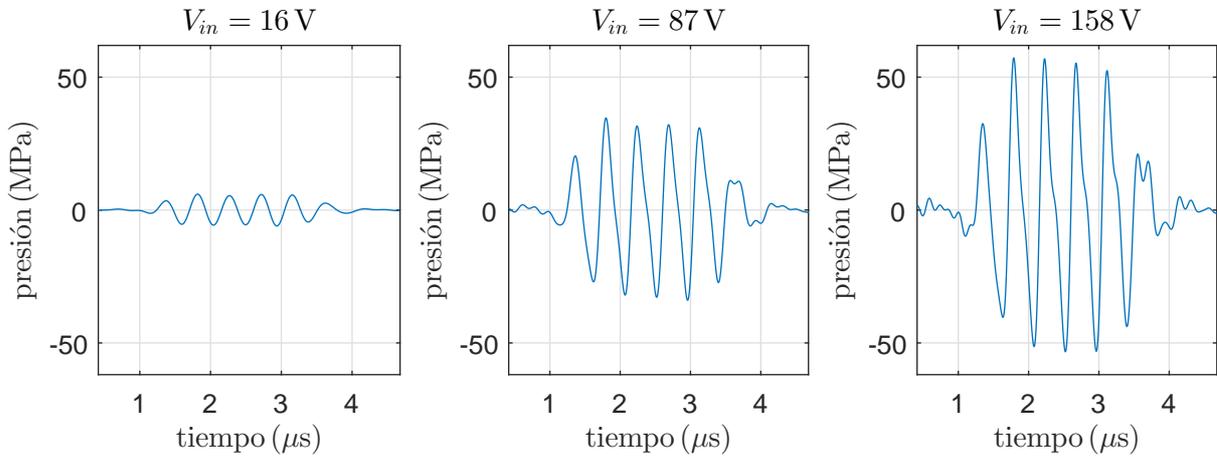


Figura 2.22: Señales obtenidas en la posición focal con distintos voltajes en la entrada.

De la misma forma que hicimos en la subsección 2.2.3, analizaremos el espectro de las señales y estudiaremos el crecimiento de los armónicos presentes en función del voltaje de entrada.

En la figura 2.23 se grafican los espectros correspondientes a las señales de la figura 2.22. En la señal de baja amplitud podemos distinguir un pico bien definido en torno a la frecuencia central de la emisión (2.25 MHz). Con un voltaje en la entrada de 87 V, ya es posible distinguir la amplitud correspondiente al segundo armónico, en la frecuencia 4.50 MHz. Con 158 V, se pueden distinguir los armónicos de tercer y cuarto orden, en las frecuencias 6.75 MHz y 9.00 MHz, respectivamente.

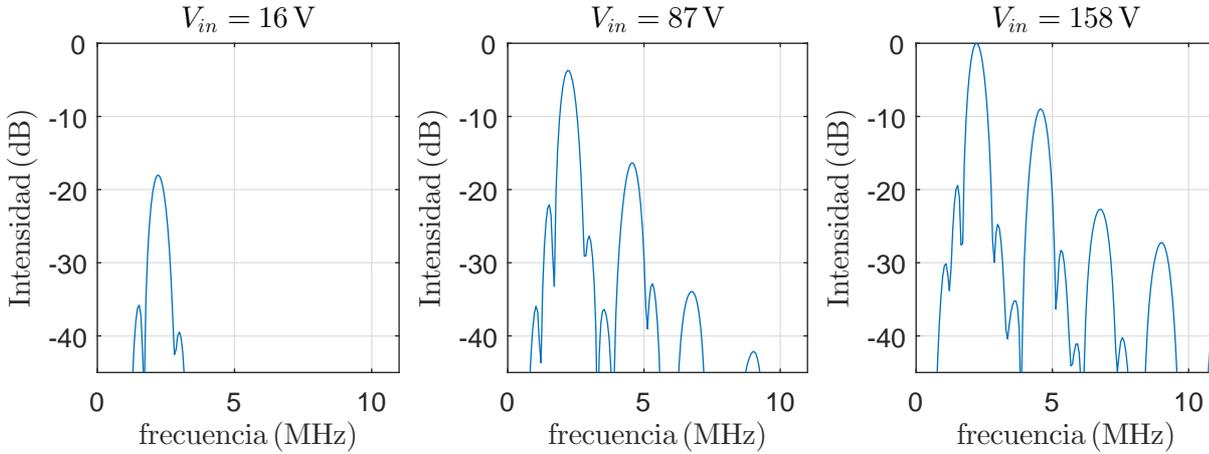


Figura 2.23: Espectros de las señales obtenidas en la posición focal con distintos voltajes en la entrada.

La figura 2.24 muestra la amplitud de los primeros cuatro armónicos en función de V_{in} . En cada gráfica, las amplitudes experimentales correspondientes al armónico n se ajustan con un polinomio de la forma $a_n V_{in}^n$ (que responde a la relación 2.39) donde a_n es un parámetro de ajuste. El ajuste muestra buenos resultados si se realiza con los datos obtenidos con un voltaje en la entrada menor a 100 V ($R^2 = 1.0000$); con voltaje mayores, los datos experimentales se separan significativamente de la curva de ajuste. La razón de esta diferencia se debe a que la relación 2.39 se dedujo bajo la hipótesis $z \ll z_D$. Por lo tanto, debemos suponer que para un voltaje de 100 V la posición focal (donde se hicieron las medidas) es comparable a la distancia de discontinuidad. A continuación, realizaremos una estimación de los parámetros de no linealidad, donde verificaremos este supuesto.

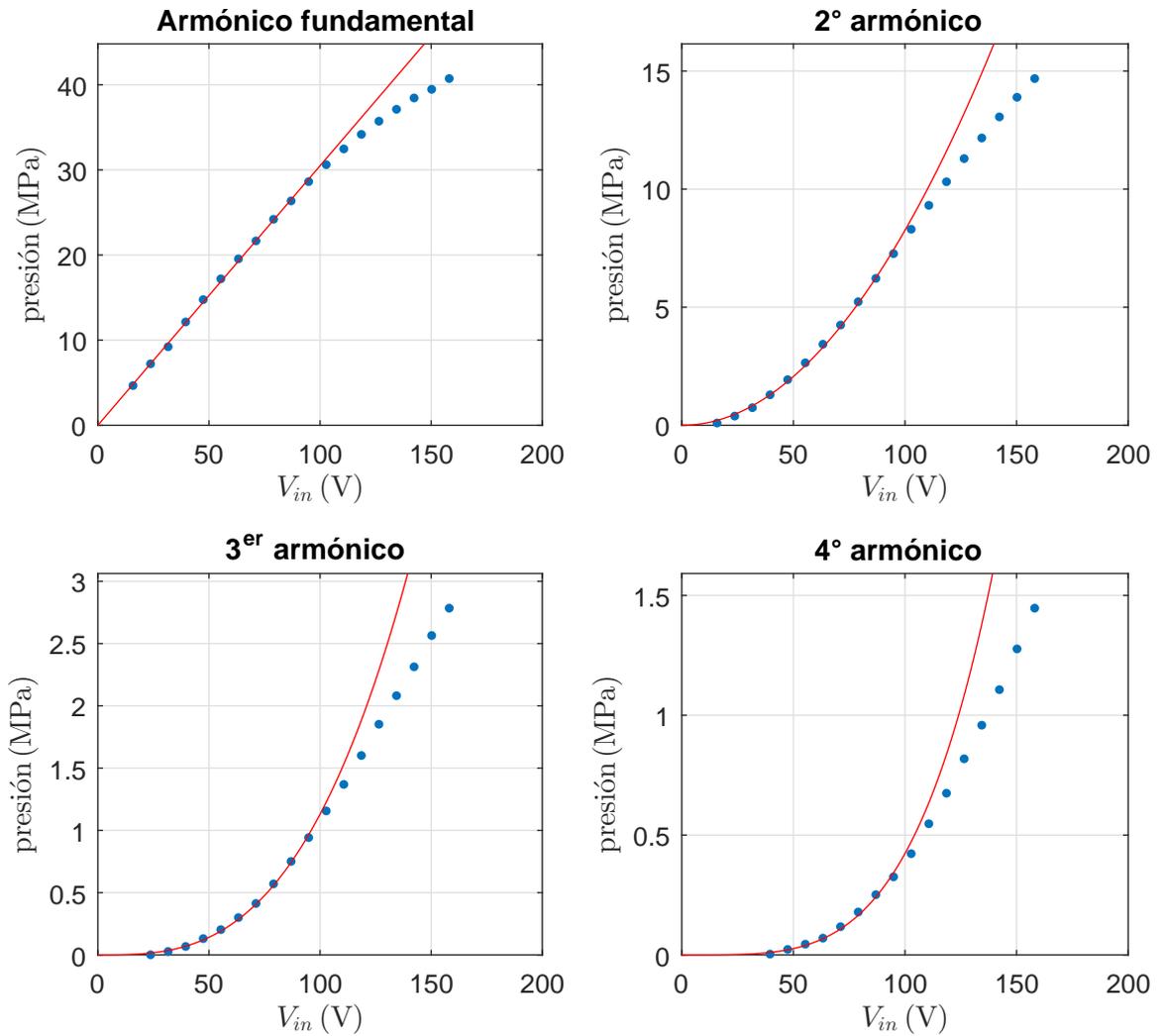


Figura 2.24: Amplitud de los armónicos en función del voltaje en la entrada. En azul se grafican los datos experimentales y en rojo el ajuste teórico. El ajuste se realiza con los datos obtenidos con un voltaje menor a 100 V. El coeficiente de determinación R^2 es 1.000 para todos los casos.

Estimación de parámetros de no linealidad

La estimación de z_D la realizamos teniendo en cuenta que la relación entre la amplitud de la presión en la cara del transductor p_{max} y la amplitud presión en el foco p_F se relacionan como sigue:

$$p_F = \frac{\pi f_0 D^2}{4c_0 z_F} p_{max} \quad (2.52)$$

Este resultado se obtiene evaluando 2.45 en las coordenadas $(x, z) = (0, z_F)$.

Sustituyendo 2.52 en 2.31 obtenemos:

$$z_D = \frac{\rho_0 c_0^2 D^2}{8\beta z_F p_F} \quad (2.53)$$

La tabla 2.4 muestra los valores calculados de z_D junto con el número de Mach calculado con 2.14. Podemos observar que para voltajes de excitación mayores a 103 V, la distancia de discontinuidad se vuelve del orden de la distancia focal. Esto justifica la discrepancia entre los datos experimentales y los ajustes teóricos mostrados en la figura 2.24.

Tabla 2.4: Estimación de ϵ y z_D .

V_{in} (V)	$\epsilon (\times 10^{-4})$	$z_D (\times 10 \text{ mm})$
16	0.51	60
24	0.77	40
32	0.97	32
40	1.3	25
47	1.5	20
55	1.8	18
63	2.0	16
71	2.2	14
79	2.5	13
87	2.7	12
95	2.9	11
103	3.1	10
111	3.3	9.4
119	3.4	9.0
126	3.6	8.6
134	3.7	8.3
142	3.9	8.0
150	4.0	7.8
158	4.1	7.5

Campo de intensidad acústica

El campo de intensidad acústica lo estudiamos en las direcciones dadas por el eje z y en torno a la posición focal en una dirección paralela al eje x . Las medias sobre el eje z las realizamos desde desde $z = 26 \text{ mm}$ hasta $z = 61 \text{ mm}$, aproximadamente, con un paso de 0.254 mm . Sobre el eje transversal, realizamos un barrido desde $x = 0$ hasta aproximadamente $x = 2 \text{ mm}$ con un

paso 0.127 mm. Las medidas se repiten para voltajes en la entrada de 13 V, 38 V, 63 V y 89 V. Con estos voltajes, la distancia de discontinuidad se mantiene mucho mayor al rango de medidas donde se realiza el barrido.

Las intensidades de los primero cuatro armónicos se muestran en las figuras 2.25 y 2.26. El nivel del ruido a sido calculado en -40 dB. Este nivel lo tomaremos como referencia para no considerar aquellas medidas que estén por debajo de este nivel.

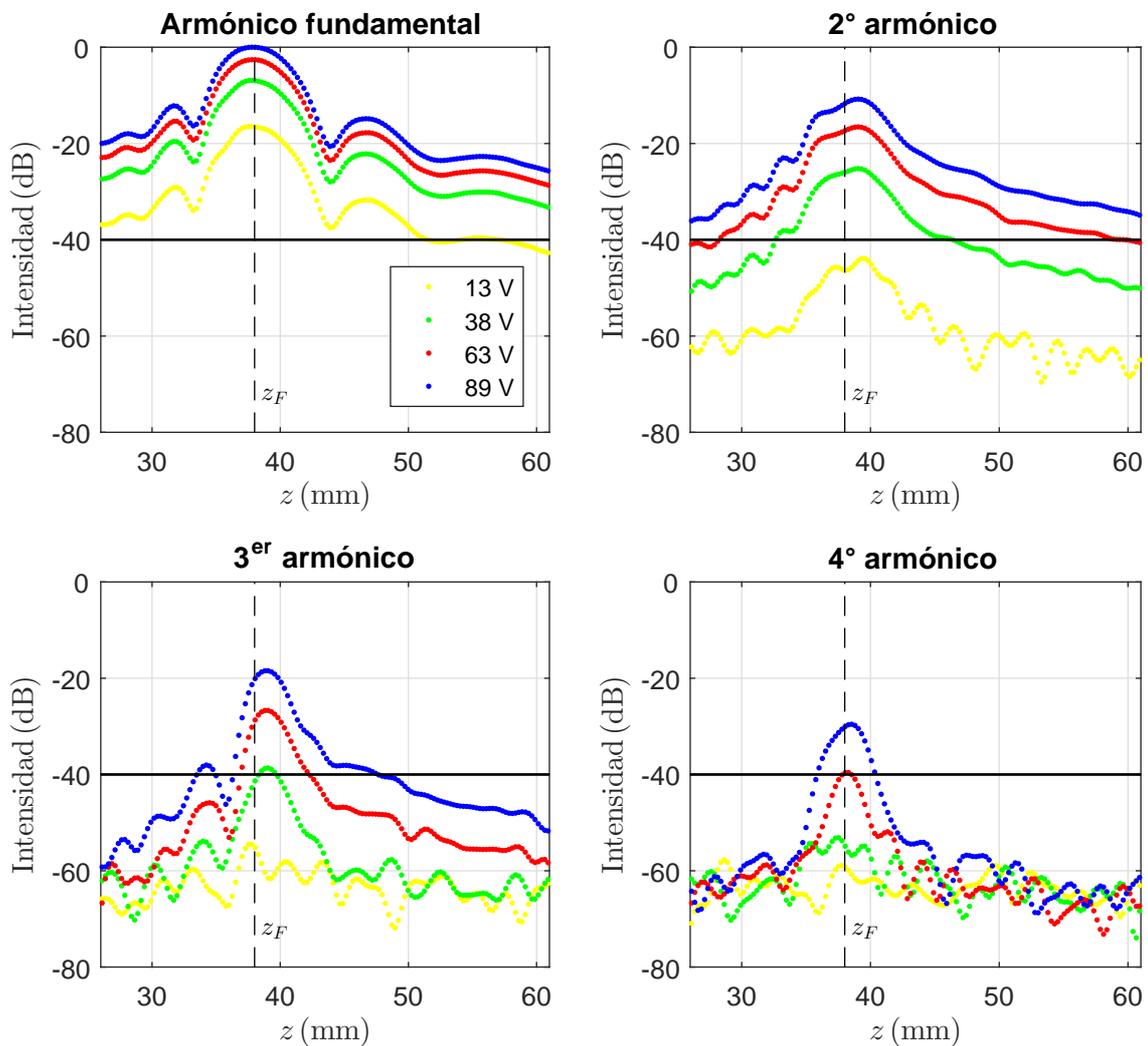


Figura 2.25: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de z . Las intensidades se grafican en decibeles, utilizándose como valor de referencia la amplitud máxima obtenida para el armónico fundamental. Cada color identifica la amplitud del voltaje con el que se excita el transductor. La línea punteada indica la posición focal y la línea continua el nivel del ruido, calculado en -40 dB.

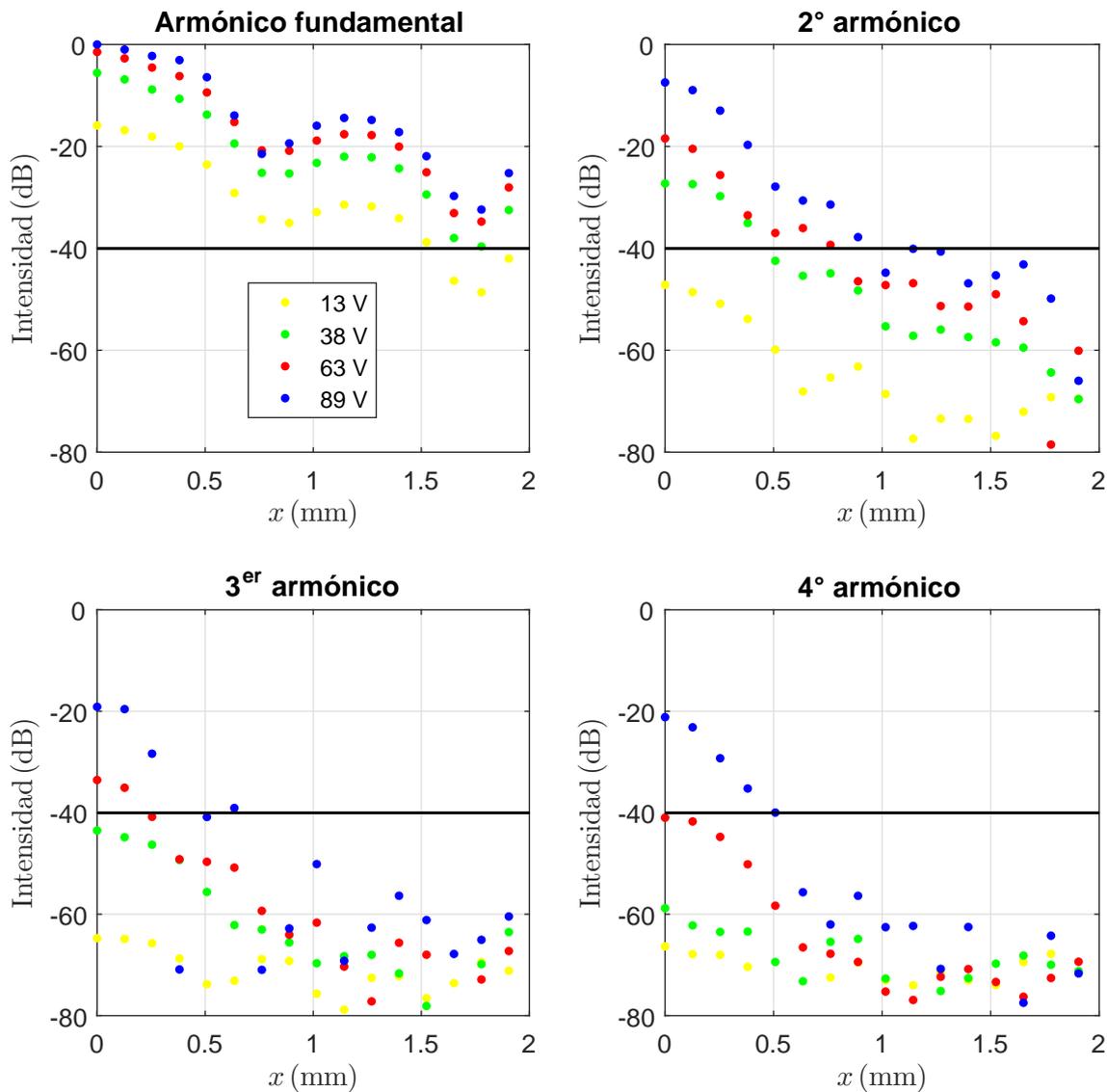


Figura 2.26: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de x en torno a la posición focal. Las intensidades se grafican en decibeles, utilizándose como valor de referencia la amplitud máxima obtenida para el armónico fundamental. Cada color identifica la amplitud del voltaje con el que se excita el transductor. La línea punteada indica la posición focal y la línea continua el nivel del ruido, calculado en -40 dB.

Comparemos el campo acústico del primer armónico con cálculos realizados a partir de la teoría lineal. En la figura 2.27 se grafican los datos experimentales y la curva teórica calculada con la ecuación 2.46. Esta comparación muestra un buen acuerdo entre teoría y experiencia, principalmente en la zona focal.

En la figura 2.28 se comparan los resultados experimentales obtenidos con el barrido en x y la teoría lineal. En esta dirección también se observa una buena concordancia en la zona focal.

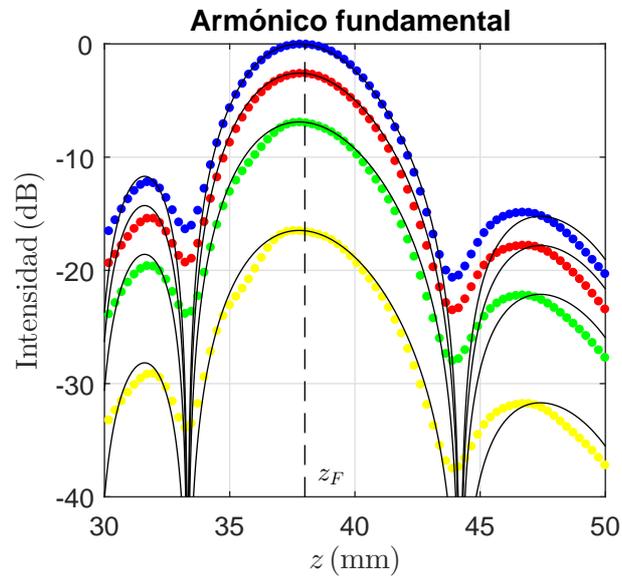


Figura 2.27: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de z . La intensidad de cada armónico se compara con valores calculados a partir de una teoría lineal (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 89 V (azul), 63 V (rojo), 38 V (verde) y 13 V (amarillo).

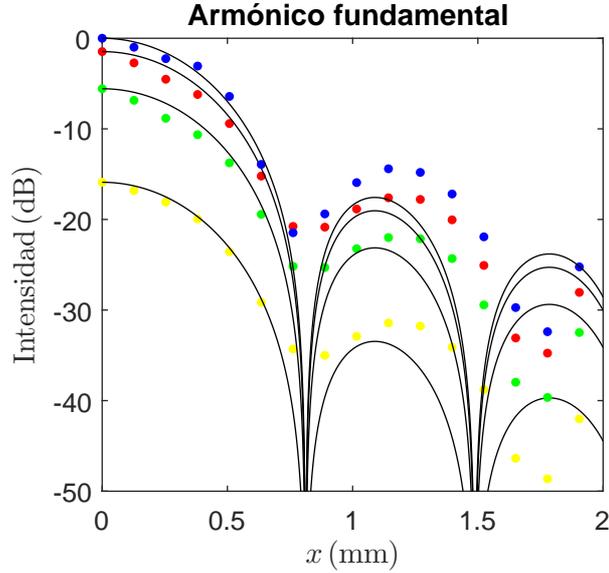


Figura 2.28: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de x . La intensidad de cada armónico se compara con valores calculados a partir de una teoría lineal (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 89 V (azul), 63 V (rojo), 38 V (verde) y 13 V (amarillo).

Como se hizo cuando se estudió el campo acústico del transductor plano, calculamos el ancho focal a -6 dB y lo comparamos con el cálculo teórico. El resultado se muestra en la tabla 2.5. Para el armónico fundamental, la teoría lineal es un buen elemento para realizar estimaciones del campo acústico en un entorno de la posición focal.

Tabla 2.5: Ancho focal a -6 dB del armónico fundamental y diferencia relativa porcentual respecto al ancho focal calculado con la teoría lineal.

V_{in} (V)	Δx (mm)	ε %
12	0.91	2.6
36	0.86	8.5
64	0.88	5.6
88	1.00	6.3

El análisis de los efectos no lineales lo realizamos con la herramienta HIFU Simulator. Este programa, por defecto, resuelve la ecuación KZK con condiciones de borde adecuadas a la geometría de un transductor focalizado. La validez de la simulación requiere que la apertura focal del transductor sea menor a 40° [6, 17]. El transductor que empleamos en la experiencia tiene una apertura focal de 53° . Esto indica que nuestro transductor no verifica las hipótesis re-

queridas por la simulación. Sin embargo, el objetivo de la comparación que se realiza es evaluar qué características del campo acústico pueden ser analizadas con este método.

En las figuras 2.29 y 2.30 se comparan los resultados experimentales con la simulación. El campo de intensidad acústica muestra en ambas direcciones un buen acuerdo entre simulación y experiencia para el primer armónico, especialmente en la región focal. Para los armónicos de orden superior existen diferencias significativas en la dirección z . No resulta extraño encontrar discrepancias como estas, pues las hipótesis requeridas por la simulación no son satisfechas por la geometría del transductor. Sin embargo, encontramos que en la dirección x la experiencia y la simulación concuerdan para aquellos valores de presión significativamente superiores al nivel del ruido (-40 dB).

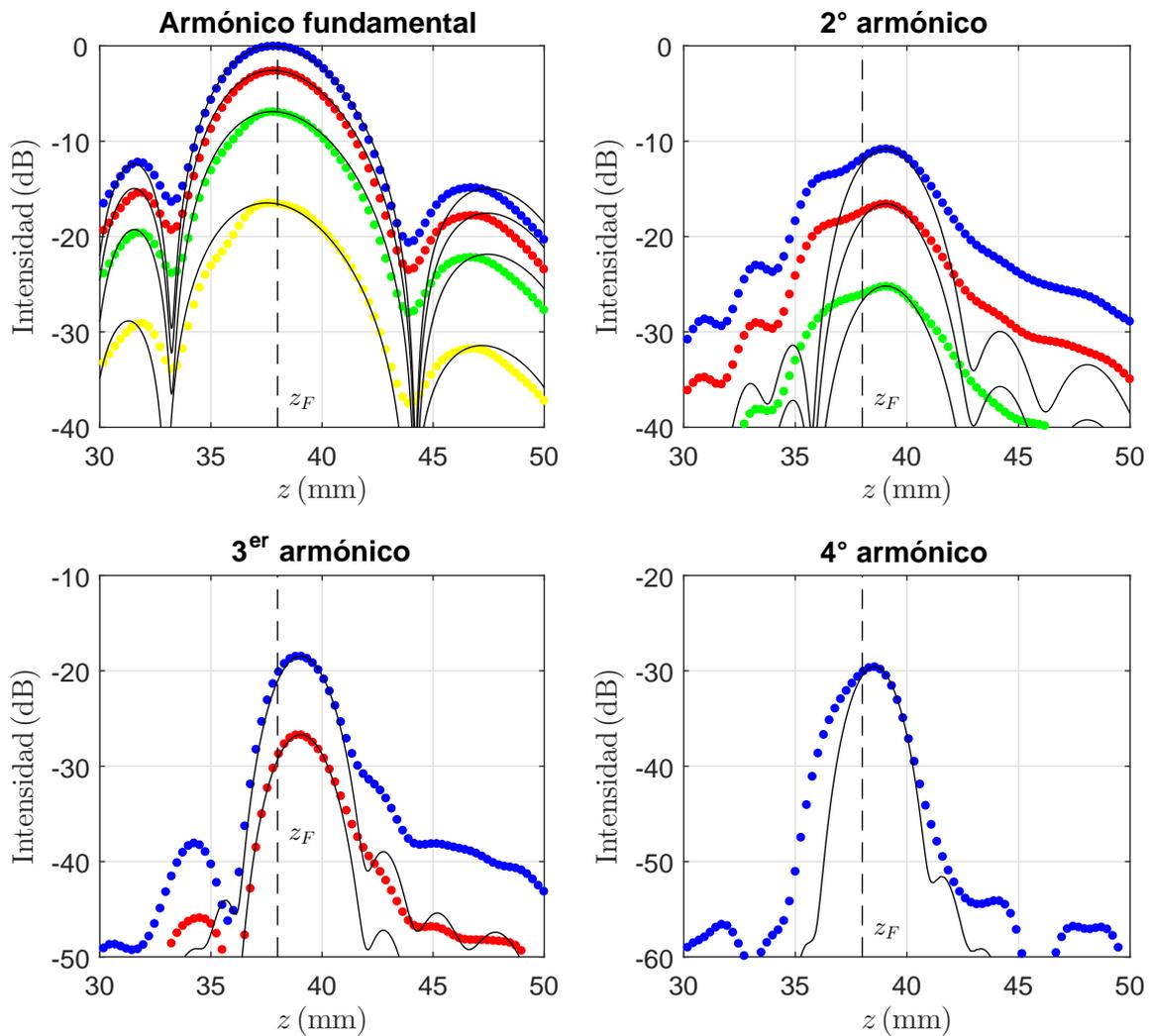


Figura 2.29: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de z . La intensidad de cada armónico se compara con valores calculados numéricamente (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 89 V (azul), 63 V (rojo), 38 V (verde) y 13 V (amarillo).

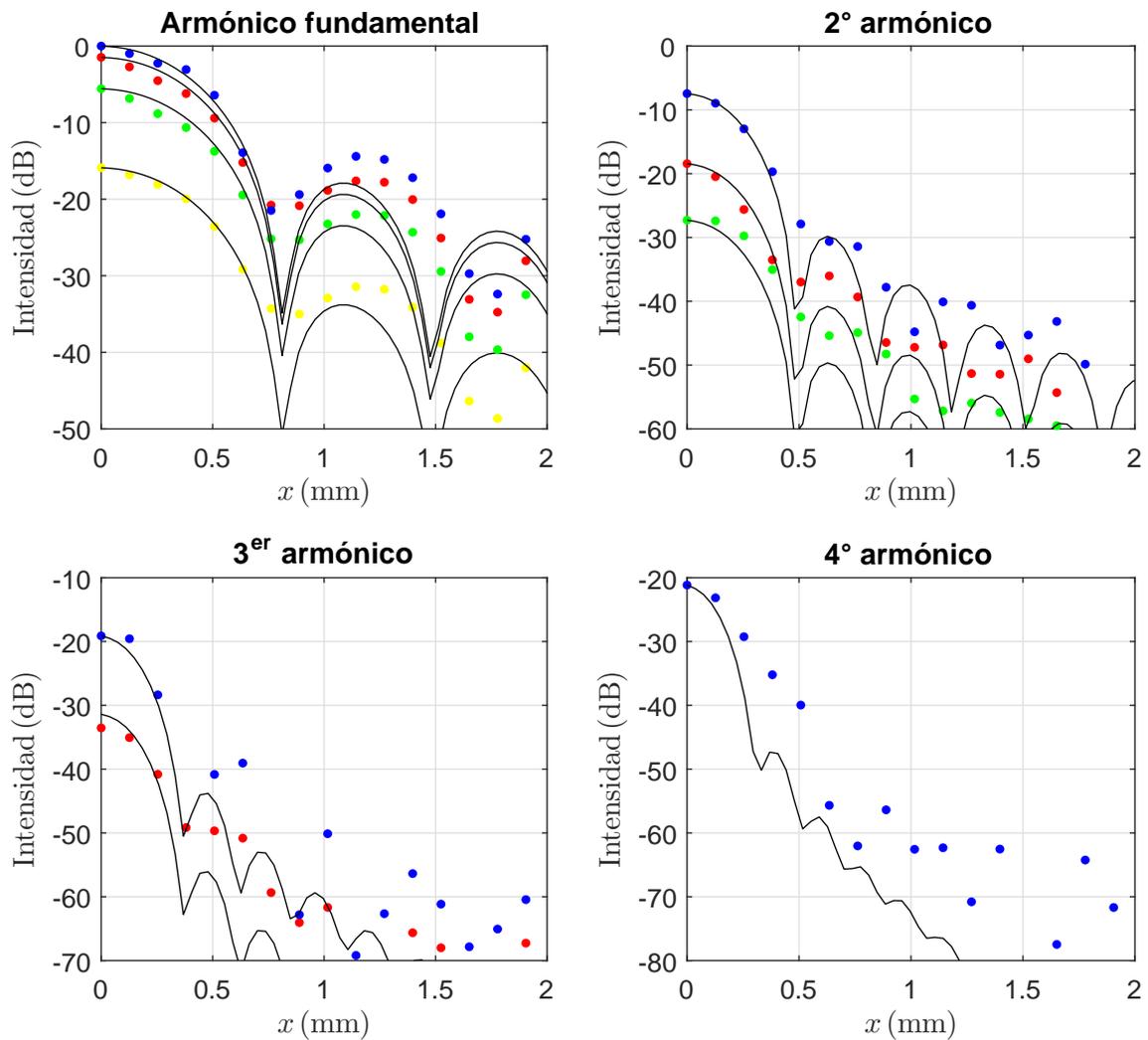


Figura 2.30: Intensidad de los primeros cuatro armónicos en función de x . La intensidad de cada armónico se compara con valores calculados numéricamente (negro). La experiencia se realizó excitando el transductor con voltajes de amplitud 89 V (azul), 63 V (rojo), 38 V (verde) y 13 V (amarillo).

Parámetro de fase

La figura 2.31 muestra el parámetro de fase calculado sobre la dirección z . Podemos notar que en la zona focal este parámetro tiene un cambio aproximadamente entre 0 y $\frac{3}{2}\pi$. Esto produce un cambio progresivo en la forma de la distorsión de las ondas no lineales generadas con el transductor focalizado. Esta diferencia se muestra en la figura 2.32, donde se grafica señales medidas en $z = 35.8\text{mm}$ y $z = 40.2\text{mm}$.

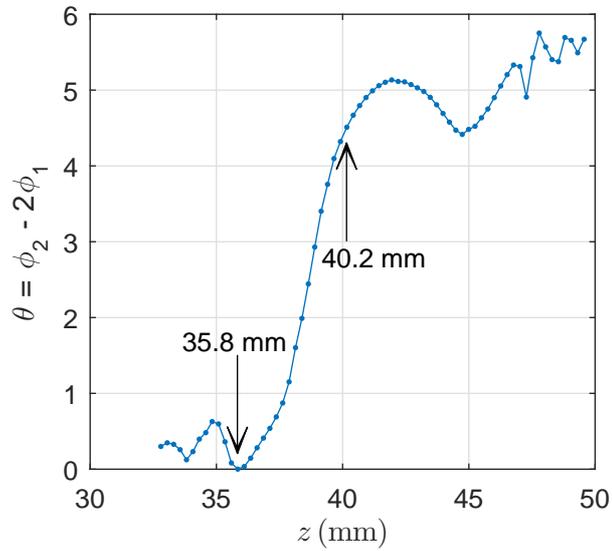


Figura 2.31: Parámetro de fase del transductor focalizado en dirección z .

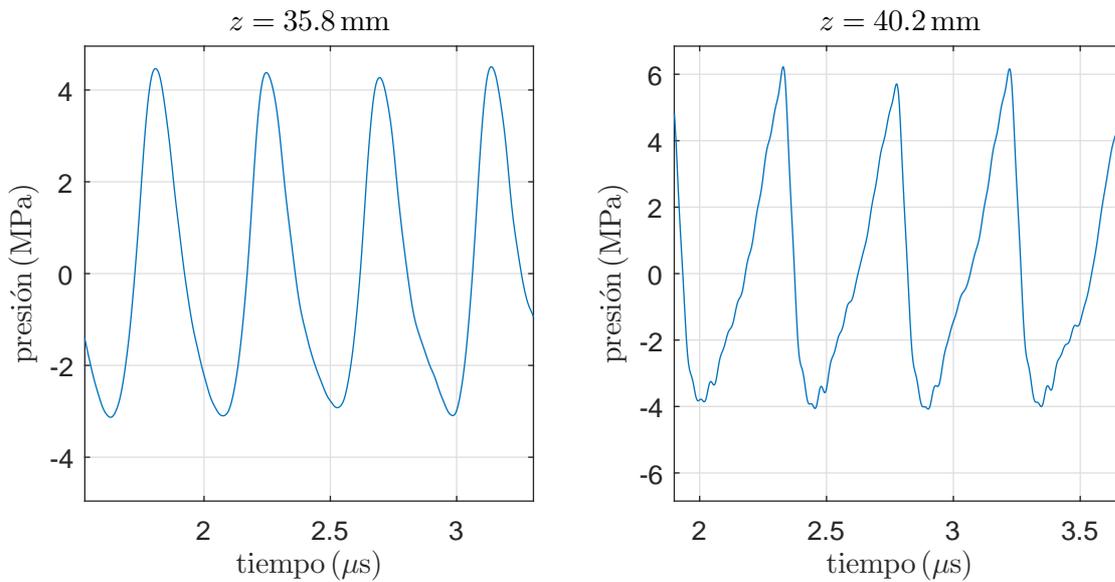


Figura 2.32: Señales medidas en $z = 35.8$ mm y en $z = 40.2$ mm. Las señales se muestran «inclinadas» en sentidos opuestos.

Antes del foco, el parámetro de fase se mantiene cercano a cero, con algunas fluctuaciones. El cambio que se produce cuando la onda atraviesa el foco puede entenderse si tenemos en cuenta que, en esta zona, la onda sufre un cambio de fase de $-\pi$ [17]. Supongamos que inicialmente el primer armónico tiene una fase ϕ_0 y el segundo armónico una fase de $2\phi_0$. Esto nos da un parámetro de fase $\theta = 0$ antes del foco. Si durante la focalización la fase de cada armónico

sufre un cambio de $-\pi$, luego del foco el parámetro de fase será $\theta = 2\phi_0 - \pi - 2(\phi_0 - \pi) = \pi$. Esto explica con buena aproximación el cambio en el parámetro de fase observado en la experiencia.

2.3. Conclusión

Un primer objetivo que nos planteamos en esta tesis fue instrumentar un sistema que nos permita realizar un estudio de ondas en régimen no lineal. Los resultados mostrados en este capítulo permiten concluir que el sistema de medición compuesto por el hidrófono de fibra óptica es adecuado para realizar medidas con estas características. Esta conclusión se fundamenta en que las hipótesis de trabajo que se plantearon para este sistema fueron verificadas por la experiencia. En primer lugar, se mostró que la amplitud de los armónicos presentes en la onda no lineal obedecen una relación deducida de la teoría: el armónico de orden n es directamente proporcional a la n -ésima potencia del voltaje en la entrada. En segundo lugar, el estudio realizado sobre la diferencia de fase entre el primer y segundo armónico permiten mostrar que el sistema de medida no introduce una diferencia de fase entre estas componentes espectrales. Por último, las estimaciones de parámetros de no linealidad realizadas permiten verificar la buena calibración del sistema.

En relación al último punto, debemos mencionar que el método desarrollado para estimar parámetros de no linealidad ha resultado efectivo. Medidas del número de Mach serán de importancia para realizar algunas hipótesis en el capítulo que sigue.

Por otro lado, se ha logrado realizar una buena caracterización del campo acústico de los transductores empleados. Hemos mostrado que la teoría lineal es un buen elemento para determinar el campo acústico del armónico fundamental de una onda no lineal. El campo acústico del segundo armónico, presente en régimen no lineal, pudo ser calculado con una simulación numérica que, si bien tiene algunas limitaciones, ha resultado ser una buena herramienta.

Sobre los dos transductores caracterizados debemos mencionar que el transductor focalizado logra generar ondas de mayor intensidad que el transductor plano. Sin embargo, la energía acústica se concentra en una región muy acotada del espacio. Para estudiar la propagación de ondas no lineales, un transductor plano resulta más adecuado. En el capítulo que sigue, se empleará un transductor con esta característica para estudiar la propagación de una onda no

lineal a través de un medio de múltiple scattering.

Capítulo 3

Scattering de ondas no lineales

En este capítulo estudiaremos las características de la propagación de ondas no lineales en medios de múltiple scattering. Concretamente, investigaremos cómo interactúan los efectos no lineales y los efectos de múltiple scattering. El análisis se centra en la caracterización del *campo coherente* de las ondas transmitidas a través de un medio de estas características. Este campo será definido en la sección 3.2. En particular, estudiaremos sus componentes espectrales y analizaremos cómo son afectadas cuando la onda se propaga a través del medio.

Comenzaremos el capítulo desarrollando la teoría que permite obtener una ecuación diferencial para describir la propagación de ondas no lineales en medios no homogéneos. Esta es la ecuación *generalizada de Westervelt* [18]. Luego, procederemos a definir y determinar experimentalmente la intensidad acústica del campo coherente. La experiencia nos permite determinar parámetros de transporte fundamentales que caracterizan el múltiple scattering; estos son, la *velocidad de grupo* y el *libre recorrido medio elástico*. Las características de estas magnitudes nos permiten evaluar algunas hipótesis de trabajo pero, principalmente, nos permiten evaluar el grado de interacción entre no linealidad y múltiple scattering.

3.1. Ecuación generalizada de Westervelt

Consideremos un medio inhomogéneo, con variaciones espaciales en la densidad ρ_0 y en la compresibilidad κ_0 . Sean $\bar{\rho}_0$ y $\bar{\kappa}_0$ valores de referencia de densidad y compresibilidad, respectivamente. Podemos expresar estas magnitudes como:

$$\rho_0(\mathbf{r}) = \bar{\rho}_0 + \bar{\rho}_0 \eta(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

$$\kappa_0(\mathbf{r}) = \bar{\kappa}_0 + \bar{\kappa}_0 \delta(\mathbf{r}) \quad (3.2)$$

donde los parámetros η y δ describen la variación relativa de densidad y compresibilidad del medio respecto al valor de referencia. En el resto del capítulo, la dependencia espacial en los parámetros involucrados en las ecuaciones 3.1 y 3.2 serán omitidos.

En ausencia de una onda, la derivada material de la densidad y la compresibilidad es nula. Por lo tanto,

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \rho_0 \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial \kappa_0}{\partial t} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \kappa_0 \quad (3.4)$$

donde \mathbf{u} es la velocidad del medio en que se propaga la onda.

La descripción de la propagación de ondas la obtenemos a partir de la ecuación de continuidad y de conservación del momento:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.5)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla P = 0 \quad (3.6)$$

donde $\rho = \rho_0 + \rho'$ y $P = p_0 + p$. Combinemos las ecuaciones 3.3, 3.5 y 3.6. Además, despreciemos términos de orden mayor a ϵ^2 . Teniendo en cuenta que la vorticidad es nula, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{u} \cdot \nabla \rho' - \rho' \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.7)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = -\rho' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \rho_0 \frac{1}{2} \nabla u^2 \quad (3.8)$$

Consideremos, además, la ecuación de estado $P = P(\rho)$, aproximada a segundo orden:

$$p = \frac{1}{\rho_0 \kappa_0} \rho' + \frac{1}{\rho_0^2 \kappa_0} \frac{B}{2A} \rho'^2 \quad (3.9)$$

Observemos que despreciando términos de segundo orden, obtenemos:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.10)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla p = 0 \quad (3.11)$$

$$p - \frac{1}{\rho_0 \kappa_0} \rho' = 0 \quad (3.12)$$

Combinando 3.3 y 3.4 con 3.10, 3.11 y 3.12, deducimos la *ecuación de scattering lineal*:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p = 0 \quad (3.13)$$

En esta ecuación la velocidad de fase c_0 es igual a $(\rho_0 \kappa_0)^{-1/2}$. Por lo tanto, depende de la variable espacial \mathbf{r} .

Para deducir la ecuación generalizada de Westervelt, procederemos a aproximar los términos no lineales en las ecuaciones 3.7 y 3.8 por las ecuaciones lineales 3.10, 3.11 y 3.12. De esta forma el error cometido es de orden ϵ^3 . Además, aproximamos las fluctuaciones debidas a las inhomogeneidades a primer orden: términos de orden superior a η y δ son despreciados. Finalmente, realizamos una aproximación más, despreciando términos de orden $\eta \epsilon^2$ y $\delta \epsilon^2$. De esta forma obtenemos:

$$\left(\nabla^2 - \rho_0 \kappa_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p = -\rho_0 \kappa_0^2 \beta \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} - \left(\nabla^2 + \rho_0 \kappa_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathcal{L}$$

Con los mismos argumentos planteados en el capítulo 2, despreciamos los términos que incluyen la densidad lagrangiana de energía. Obtenemos entonces, la ecuación generalizada de Westervelt:

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) p - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p = -\frac{\beta}{\rho_0 c_0^4} \frac{\partial^2 p^2}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

Observemos que si el medio es homogéneo, c_0 y ρ_0 son uniformes y esta ecuación se reduce a 2.23 (ecuación de Westervelt). Si en cambio, despreciamos el término de orden ϵ^2 , la ecuación se reduce a 3.13 (de scattering lineal). Esto sugiere que podrían existir circunstancias donde exista una independencia

entre efectos no lineales y de scattering. Podemos justificar este hecho suponiendo una solución de la ecuación 3.14 en forma de serie de Fourier, es decir, $p = \sum_n p_n \exp(in\omega_0 t)$, donde p_n incluye una dependencia espacial. Sustituyendo en 3.14, obtenemos para los primeros cuatro armónicos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla^2 + k_1^2) p_1 - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p_1 = 0 \\ (\nabla^2 + k_2^2) p_2 - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p_2 = \frac{\omega_2^2 \beta}{\rho_0 c_0^4} p_1^2 \\ (\nabla^2 + k_3^2) p_3 - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p_3 = 2 \frac{\omega_3^2 \beta}{\rho_0 c_0^4} p_1 p_2 \\ (\nabla^2 + k_4^2) p_4 - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p_4 = \frac{\omega_4^2 \beta}{\rho_0 c_0^4} (p_2^2 + 2p_1 p_3) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

donde $\omega_n = n\omega_0$ y $k_n = n\omega_0/c_0$.

Este conjunto de ecuaciones, que describe la propagación de los primeros cuatro armónicos en el medio no homogéneo, forman un sistema acoplado. La primera de estas ecuaciones es una ecuación de scattering lineal para el armónico fundamental (igual a 3.13). Esto muestra que este armónico se comporta en el medio no homogéneo como si se propagara en régimen lineal. La segunda ecuación, que describe la propagación del segundo armónico está acoplada al primero. Sin embargo, considerando que uno de los efectos del scattering es un decaimiento en la amplitud, propondremos como hipótesis que el primer armónico decae de manera tal que el término que contiene p_1^2 puede ser despreciado. De esta forma, la ecuación de propagación del segundo armónico verifica una ecuación de scattering lineal. Con el mismo argumento, podemos despreciar en las ecuaciones restantes del sistema los términos que contienen $p_1 p_2$ y $p_2^2 + 2p_1 p_3$, obteniendo ecuaciones de scattering lineal para cada armónico. En general, podemos escribir

$$(\nabla^2 + k_n^2) p_n - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \cdot \nabla p_n = 0 \quad (3.16)$$

La ecuación 3.16 representa un sistema de ecuaciones desacoplado. Su validez esta sujeta a que los efectos de scattering sean tales que la amplitud de cada armónico decaiga lo suficiente. En estas condiciones, no existe interacción entre no linealidad y múltiple scattering: los efectos no lineales se manifiestan por la generación de armónicos pero la propagación de cada uno de ellos en el medio no homogéneo, obedece una ecuación lineal. En lo que sigue del capítulo, mostraremos una experiencia que permite verificar la ecuación 3.16 a partir de medidas del decaimiento del campo coherente.

3.2. Múltiple scattering. Características del campo coherente.

En esta sección mostraremos una experiencia donde se manifiesta una independencia entre efectos no lineales y efectos de múltiple scattering. Siguiendo el trabajo de N. Viard [8], estudiaremos el decaimiento de la intensidad del campo coherente de una onda no lineal que atraviesa un medio de múltiple scattering. Mostraremos que la no linealidad se manifiesta por la presencia de armónicos cuyos niveles de intensidad dependen de la amplitud con que la onda es emitida. Esta dependencia es la misma que fue analizada en el capítulo 2: la amplitud del n -ésimo armónico crece con la n -ésima potencia de la amplitud con que la onda es emitida (que a su vez, es proporcional al voltaje en la entrada). De manera independiente, la intensidad de cada uno de estos armónicos decrece obedeciendo la ecuación de scattering lineal 3.16.

3.2.1. Características del medio de múltiple scattering y ondas transmitidas

El medio de múltiple scattering está compuesto por alambres verticales de cobre de diámetro $a = 0.7$ mm colocados en una grilla cuadrículada. Nos referiremos a ellos como *difusores*. En la figura 3.1 se muestra un esquema del medio. La distancia mínima entre dos puntos de la grilla es $l = 2.5$ mm. De todos los puntos disponibles, las tres cuartas partes se llenan con alambres distribuidos de manera aleatoria. Por lo tanto, la densidad promedio de alambres en el sistema es $d = 0.12$ alambres/mm². Este sistema es sumergido en agua.

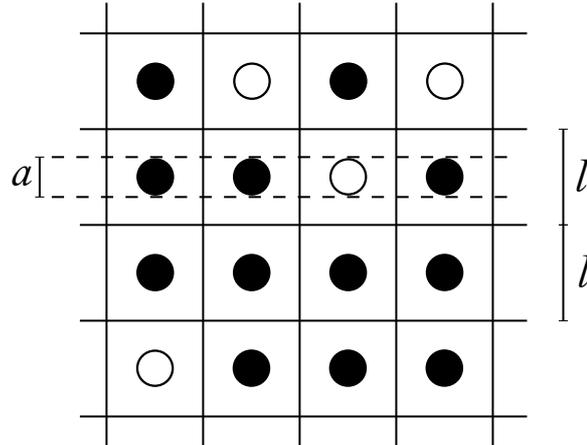


Figura 3.1: Dimensiones y características del medio de múltiple scattering. La distancia entre dos puntos de la grilla es $l = 2.5$ mm y el diámetro de cada difusor es $a = 0.7$ mm.

Las ondas acústicas no lineales son generadas con un transductor plano de fisioterapia cuya frecuencia central es 1 MHz. El transductor es excitado con una señal de cinco ciclos de senoide de amplitud 253 V. La figura 3.2 muestra la disposición del dispositivo experimental. La electrónica del dispositivo es la misma que a sido descrita en el capítulo 2.

El medio de múltiple scattering se coloca a 150 mm del transductor. De esta forma, nos aseguramos que los armónicos alcanzan buena amplitud antes de ingresar al medio de múltiple scattering. La distancia entre el transductor y el hidrófono es de 250 mm.

En ausencia del medio de múltiple scattering, la onda tiene la forma mostrada en la figura 3.3. Esta señal de referencia tiene una duración de aproximadamente $10 \mu s$. Si interponemos el medio de múltiple scattering obtenemos señales como las mostradas en la figura 3.4. El múltiple scattering se manifiesta de dos maneras: por un lado, la señales se atenúan; por otro, tienen mayor duración respecto a la señal de referencia. Estos efectos son más relevantes cuanto mayor es el espesor del medio.

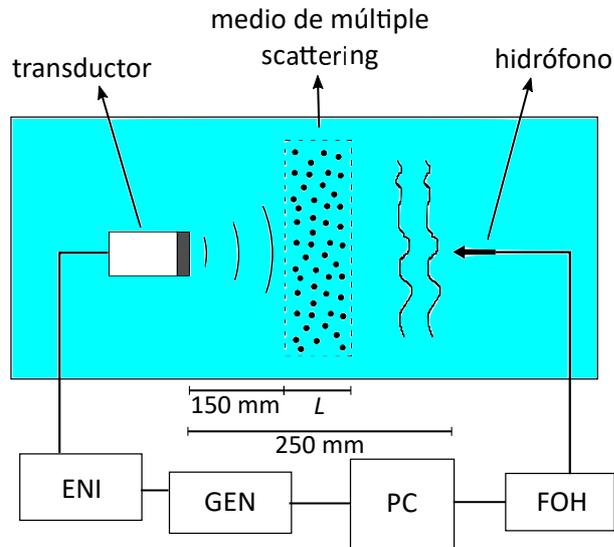


Figura 3.2: Dispositivo experimental. El sistema de emisión y recepción es el mismo descrito en el capítulo 2. El medio de múltiple scattering tiene un espesor L y es colocado a 150 mm del transductor. La distancia entre el transductor y el hidrófono es 250 mm.

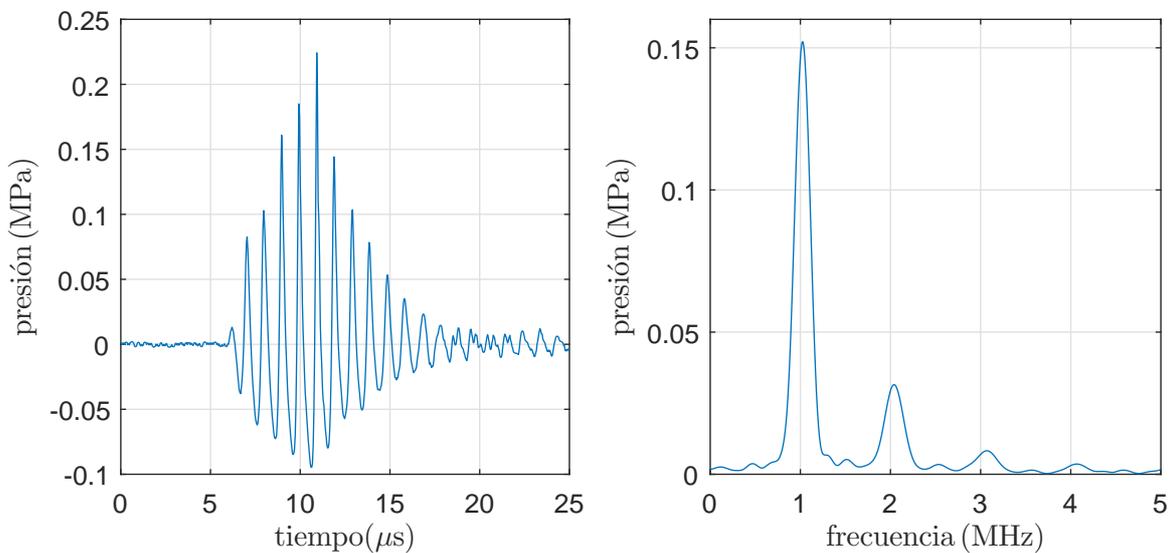


Figura 3.3: Respuesta del transductor en ausencia del medio de múltiple scattering. Esta señal, que no sufre efectos de múltiple scattering, será usada como señal de referencia.

En la figura 3.5, mostramos los espectrogramas de las señales de la figura 3.4, junto con el de la señal de referencia. En estas imágenes es posible notar los efectos no lineales: además del armónico fundamental en la frecuencia 1 MHz, tenemos amplitudes en armónicos de orden superior, en particular, en

las frecuencias 2 MHz y 3 MHz. Además, podemos notar los efectos del múltiple scattering: todos los armónicos están distribuidos en el tiempo. Este efecto no se manifiesta en la señal de referencia.

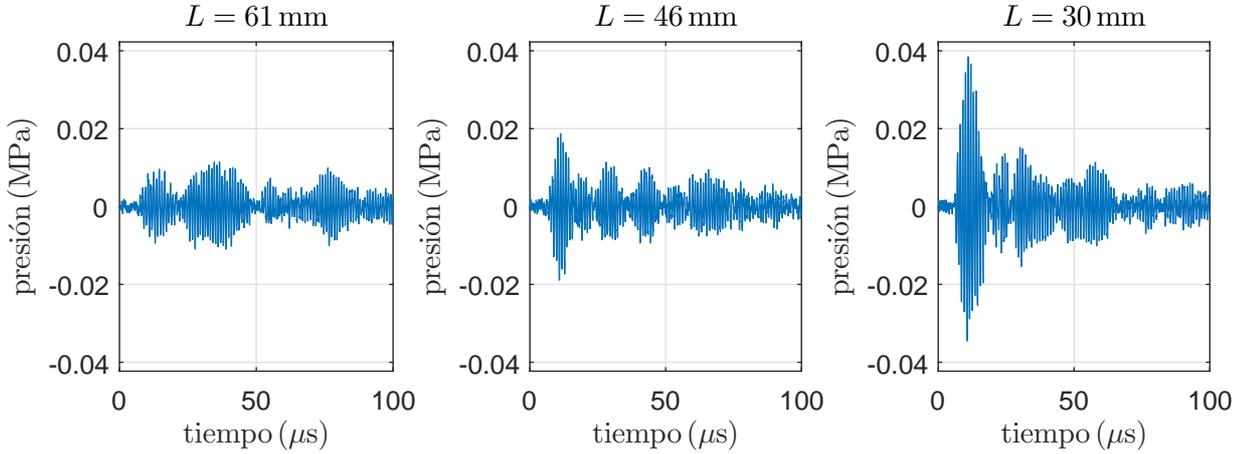


Figura 3.4: Señales de coda obtenidas para medios de múltiple scattering de distinto espesor. Para obtenerlas, el transductor se excita con un voltaje de amplitud 253 V.

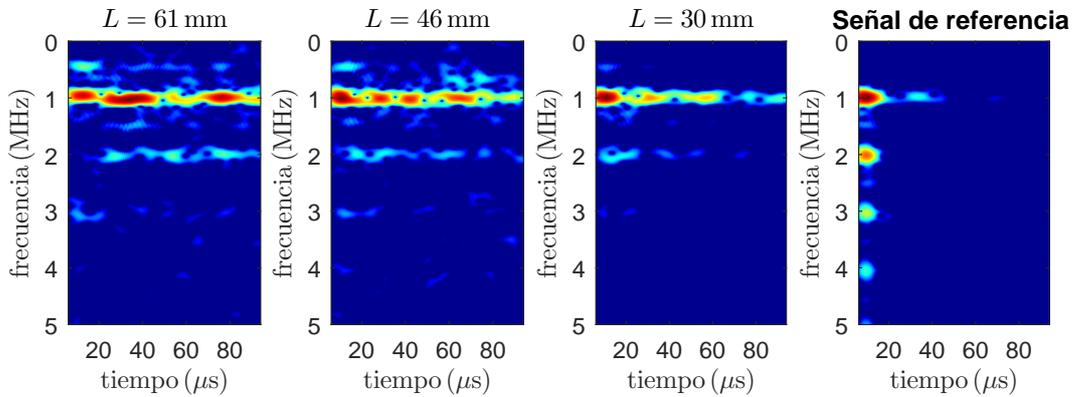


Figura 3.5: Espectrogramas de las señales de coda y de la señal de referencia.

3.2.2. Estimación de las fluctuaciones de densidad y de compresibilidad

La ecuación 3.14 fue deducida despreciando términos de orden $\eta\epsilon^2$ y $\delta\epsilon^2$. Realizaremos una estimación de estos órdenes en el sistema que empleamos con el fin de verificar la validez de esta ecuación.

El factor η cuantifica los cambios en la densidad del medio de múltiple scattering. De la ecuación 3.1, tenemos que:

$$\eta = \frac{\rho_0 - \bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_0}$$

Consideremos la densidad de referencia $\bar{\rho}_0$ como la densidad media del sistema. Para calcularla, consideremos cuatro puntos de la grilla donde se monta el sistema de múltiple scattering. El área efectiva de los cuatro puntos es $A_T = 4l^2$, donde $l = 2.5$ mm es la distancia mínima entre puntos. Por otro lado, teniendo en cuenta que sólo tres de estos puntos están ocupados por alambres, el área que ocupan es $A = 3\pi a^2/4$, donde $a = 0.7$ mm es el diámetro de cada alambre. Con esta información, podemos realizar el siguiente cálculo:

$$\bar{\rho}_0 = \frac{A\rho_{Cu} + (A_T - A)\rho_{H_2O}}{A_T}$$

donde $\rho_{Cu} = 8.93 \times 10^3 \mu\text{g}/\text{mm}^3$ es la densidad del cobre [13] y $\rho_{H_2O} = 1.00 \times 10^3 \mu\text{g}/\text{mm}^3$ es la densidad del agua (tabla 2.1). El cálculo nos da un valor $\bar{\rho}_0 = 1360 \mu\text{g}/\text{mm}^3$.

Teniendo en cuenta que la propagación de las ondas se produce mayormente en agua, una estimación del orden del parámetro η puede obtenerse como

$$\eta \sim \left| \frac{\rho_{H_2O} - \bar{\rho}_0}{\bar{\rho}_0} \right| = 0.26$$

Ahora determinamos el número de Mach. Para esto consideramos la señal de referencia de la figura 3.3 y medimos la presión acústica del armónico fundamental. El valor de la señal en la frecuencia 1 MHz es 23.1 mV, que corresponde a un valor de presión $p_1 = 0.153$ MPa, según la curva de calibración del sensor. De acuerdo a la ecuación 2.14, el número de Mach es

$$\epsilon = \frac{p_1}{\rho_{H_2O} c_{H_2O}^2} = 6.96 \times 10^{-5}$$

donde $c_{H_2O} = 1.4823$ mm/ μs es la velocidad del sonido en agua (tabla 2.1). Con este resultado, tenemos que el orden de $\eta\epsilon^2$ es 10^{-9} , mucho menor que el orden de η ($\sim 10^{-1}$) y $\eta\epsilon$ ($\sim 10^{-5}$).

Análogamente, podemos estimar el orden del parámetro δ definido en 3.2 escribiéndolo de la forma:

$$\delta = \frac{\kappa_0 - \bar{\kappa}_0}{\bar{\kappa}_0}$$

El valor de $\bar{\kappa}_0$ lo obtenemos de forma análoga que $\bar{\rho}_0$:

$$\bar{\kappa}_0 = \frac{A\kappa_{Cu} + (A_T - A)\kappa_{H_2O}}{A_T}$$

donde $\kappa_{Cu} = 5.07 \times 10^{-6} \text{ MPa}^{-1}$ es la compresibilidad del cobre y $\kappa_{H_2O} = 4.55 \times 10^{-4} \text{ MPa}^{-1}$ es la compresibilidad del agua¹. El cálculo nos da un valor $\bar{\kappa}_0 = 4.34 \times 10^{-4} \text{ MPa}^{-1}$.

Una estimación del orden del parámetro δ puede obtenerse como

$$\delta \sim \left| \frac{\kappa_{H_2O} - \bar{\kappa}_0}{\bar{\kappa}_0} \right| = 0.048$$

Por lo tanto, el orden de $\delta\epsilon^2$ es 10^{-10} , menor que el orden de δ ($\sim 10^{-2}$) y $\delta\epsilon$ ($\sim 10^{-6}$).

Los cálculos realizados en esta sección fundamentan las aproximaciones realizadas en la deducción de la ecuación generalizada de Westervelt. Una observación más podemos hacer notando que el orden de ϵ^2 ($\sim 10^{-9}$) es mucho menor que el orden de η ($\sim 10^{-1}$) y δ ($\sim 10^{-2}$). En el dispositivo experimental empleado la onda se propaga por agua (que es un medio homogéneo) antes de transmitirse a través del medio de múltiple scattering. Es en el primer recorrido donde se produce la generación de armónicos. Al propagarse a través del segundo medio, los efectos de múltiple scattering predominan frente a los efectos no lineales. Esto refuerza la hipótesis planteada en la sección 3.1, donde se propuso que cada armónico obedece una ecuación de la forma 3.16.

3.2.3. Campo coherente

En la sección 3.2.1, se mostraron algunas ondas transmitidas a través del medio de múltiple scattering. Si cambiamos la configuración de los alambres pero manteniendo constantes la densidad, la aleatoriedad y el espesor del medio, es evidente que se producirán cambios en la onda que lo atraviesa. Esto se debe a que la distribución aleatoria de las inhomogeneidades produce fluctuaciones aleatorias en la onda. Sin embargo, puede existir una componente independiente de las fluctuaciones aleatorias introducidas por el medio de múltiple scattering. Esta componente se denomina *campo coherente*. Daremos a continuación una definición más precisa.

Supongamos que tenemos N configuraciones diferentes de un medio de múltiple scattering. Cada configuración está compuesta por el mismo tipo y

¹Los valores de compresibilidad los calculamos como $\kappa = \frac{1}{c^2\rho}$

densidad de difusores distribuidos aleatoriamente. Además, cada una ocupa la misma región del espacio. El conjunto de todas las configuraciones posibles constituyen lo que en física estadística se conoce como *ensemble*. Ahora, supongamos que una onda atraviesa una de estas configuraciones. Como se ha señalado antes, la onda resultante sufre cambios en el tiempo y en el espacio que dependen de la posición de cada difusor. Notemos $s_i(\mathbf{r}, t)$ a esta onda, donde el índice i varía entre 1 y N . El campo coherente $s_c(\mathbf{r}, t)$, se define como el promedio en el ensemble de $s_i(\mathbf{r}, t)$, es decir:

$$s_c(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i(\mathbf{r}, t) \quad (3.17)$$

Realizar una medida del campo coherente tiene algunas dificultades experimentales: cambiar de configuración implica alterar la posición de cada uno de los difusores. Este cambio además de llevar tiempo, implica desarmar el sistema en cada cambio lo cual introduce errores en el proceso de medición. Una buena alternativa es acoplar el sistema a un motor posicionador y moverlo en la dirección transversal a la de propagación. De este modo, en cada movimiento, el frente de onda incidirá sobre una configuración de alambres diferente. Este método emplearemos en este trabajo. El transductor empleado y la señal emitida tienen las mismas características mencionadas en la subsección 3.2.1: cinco ciclos de senoide de frecuencia central 1 MHz. Mediremos el campo coherente sobre 60 configuraciones de cinco medios de múltiple scattering, todos construidos con la misma densidad y tipo de difusores. La diferencia en cada uno está en su espesor L , los cuales tienen valores que van de 23 mm a 61 mm. Además, para cada configuración emitiremos ondas de distinta amplitud, empleando voltajes de excitación del transductor entre $V_{in} = 32 \text{ V}$ y $V_{in} = 253 \text{ V}$. La variación en el espesor la realizamos para estudiar cambios en la intensidad del campo coherente y la variación en el voltaje de excitación para estudiar como se manifiestan los efectos no lineales.

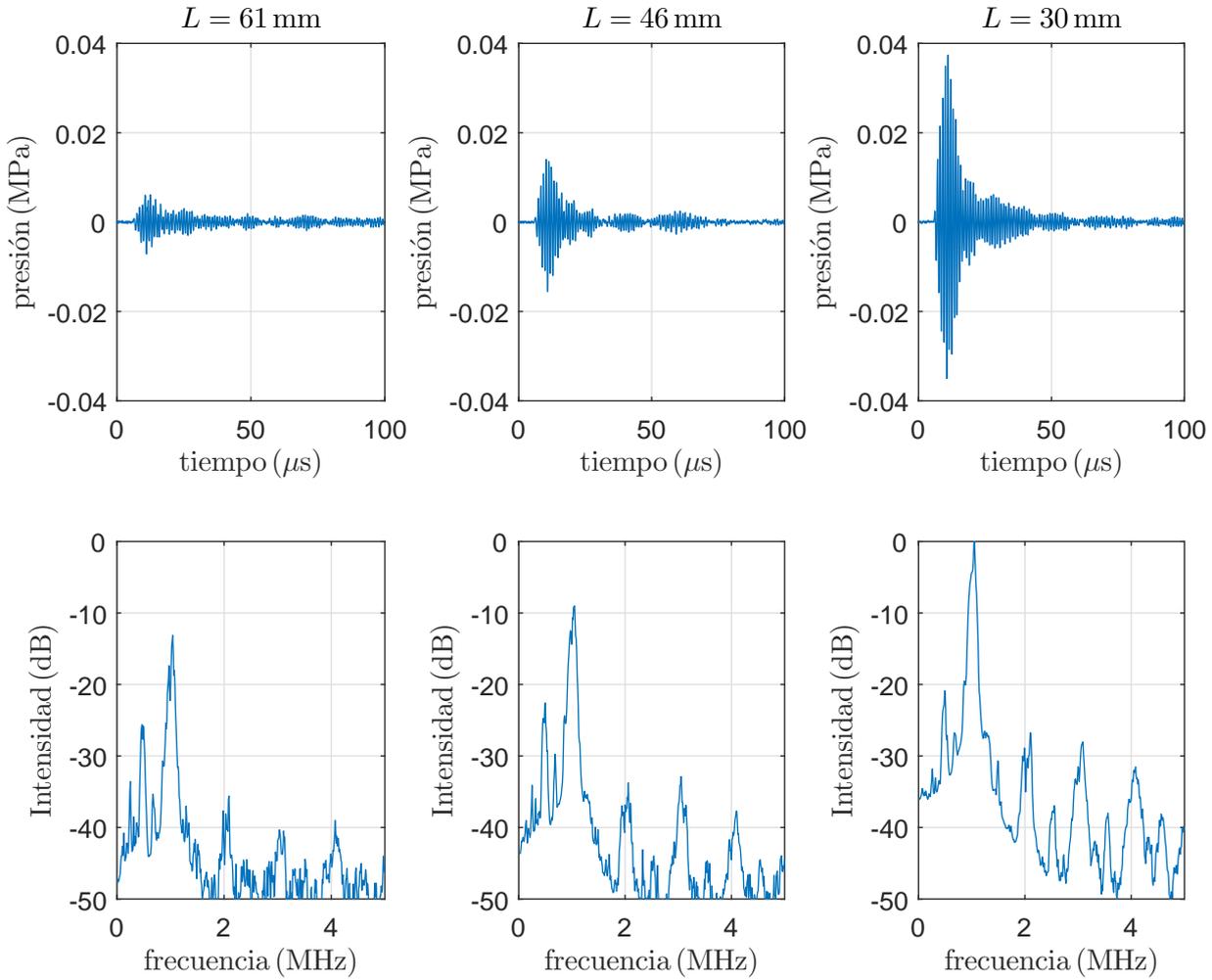


Figura 3.6: Campos coherentes y sus espectros para medios de múltiple scattering de distintos espesores, obtenidos con un voltaje aplicado $V_{in} = 253$ V.

En las figuras 3.6 y 3.7 se muestra los campos coherentes medidos para voltajes de excitación del transductor $V_{in} = 253$ V y $V_{in} = 126$ V, respectivamente. Además, se muestran sus espectros. En las señales temporales se puede observar que un aumento en el espesor del medio de múltiple scattering produce un decaimiento en la amplitud (y por lo tanto, de la intensidad) del campo coherente. Este decaimiento también se observa en la amplitud de cada armónico. En la figura 3.6, donde el voltaje empleado para excitar el transductor es 253 V, se observan picos bien definidos en las frecuencias de los primeros cuatro armónicos, pero sus amplitudes decrecen cuando aumenta el espesor del medio de múltiple scattering. En la figura 3.7, donde el voltaje empleado para excitar

el transductor es 126 V, el armónico fundamental está bien definido pero los armónicos superiores tienen un nivel muy bajo; a través del medio de mayor espesor, estos son imperceptibles. Tanto el decaimiento en la amplitud en función del espesor del medio como el crecimiento de los armónicos en función del voltaje en la entrada serán analizados con detalle en secciones posteriores.

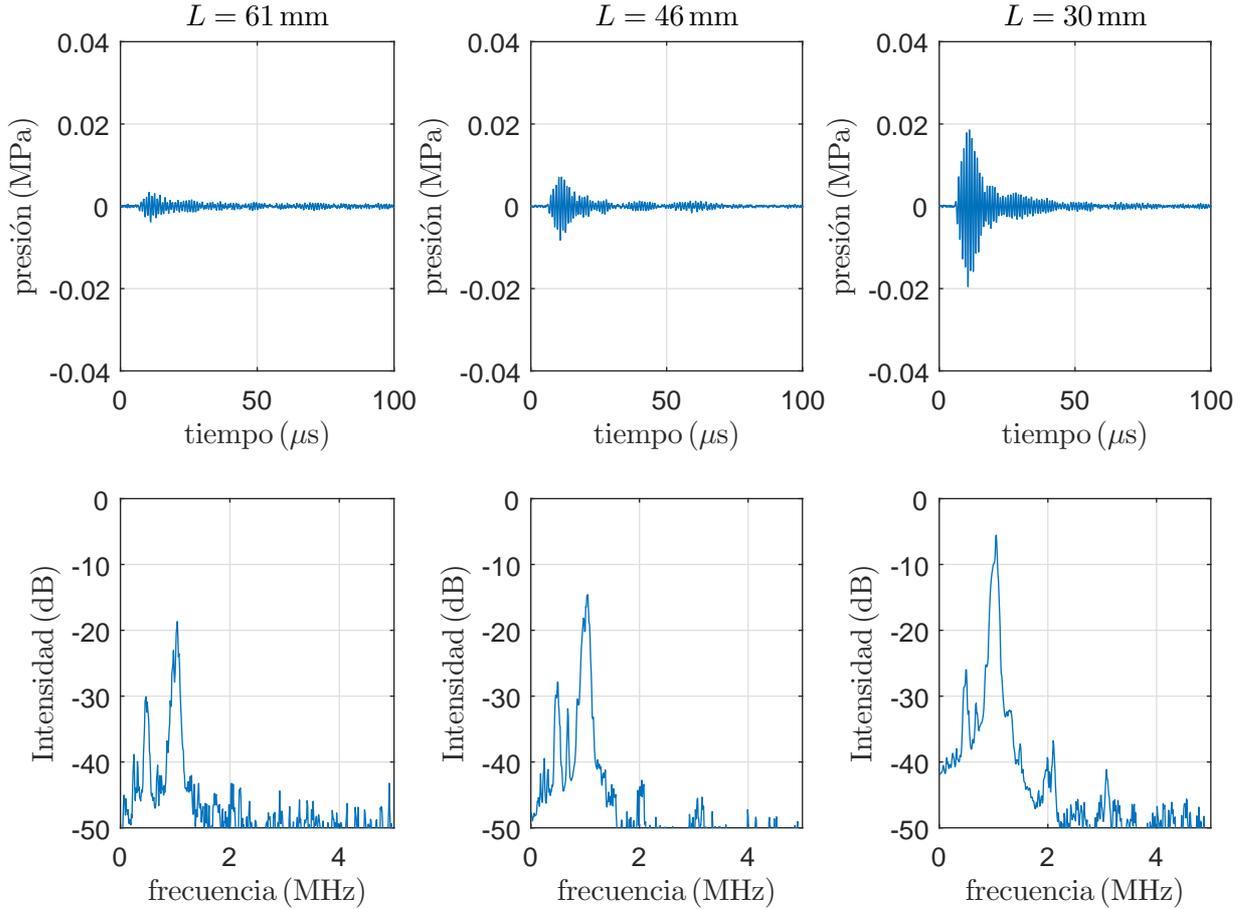


Figura 3.7: Campos coherentes y sus espectros para medios de múltiple scattering de distintos espesores, obtenidos con un voltaje aplicado $V_{in} = 126$ V.

Los espectros en las figuras 3.6 y 3.7 corresponden a la señal completa. Para obtenerlos empleamos una alternativa a la transformada de Fourier, que en este caso, da mejores resultados.

La componente de la señal $s_{cf}(t)$ asociada a una frecuencia f , puede obtenerse con la siguiente operación:

$$s_{cf}(t) = s_c(t) * g_s(f, t) \quad (3.18)$$

donde $g_s(f, t)$ es una senoide de frecuencia f , modulada por una función gaussiana de ancho $\sigma = F_s/N_s$, siendo F_s la frecuencia de muestreo y N_s el número de puntos de la señal adquirida. El valor de σ corresponde a la resolución espectral que tienen nuestras señales.

El producto de convolución en 3.18 funciona como filtro, de manera que el resultado tiene sólo la amplitud en la frecuencia f . El resultado de este producto se muestra para la frecuencia fundamental y algunos armónicos en las figuras 3.7. Este procedimiento nos permite medir las intensidades de las componentes espectrales y la velocidad de grupo de cada armónico (como se muestra en la sección 3.2.4).

La intensidad $I(f)$ de cada frecuencia la obtenemos realizamos la siguiente integral:

$$I_c(f) = \int s_{cf}^2(t) dt \quad (3.19)$$

La integral se realiza de forma discreta sobre todos los puntos de la señal.

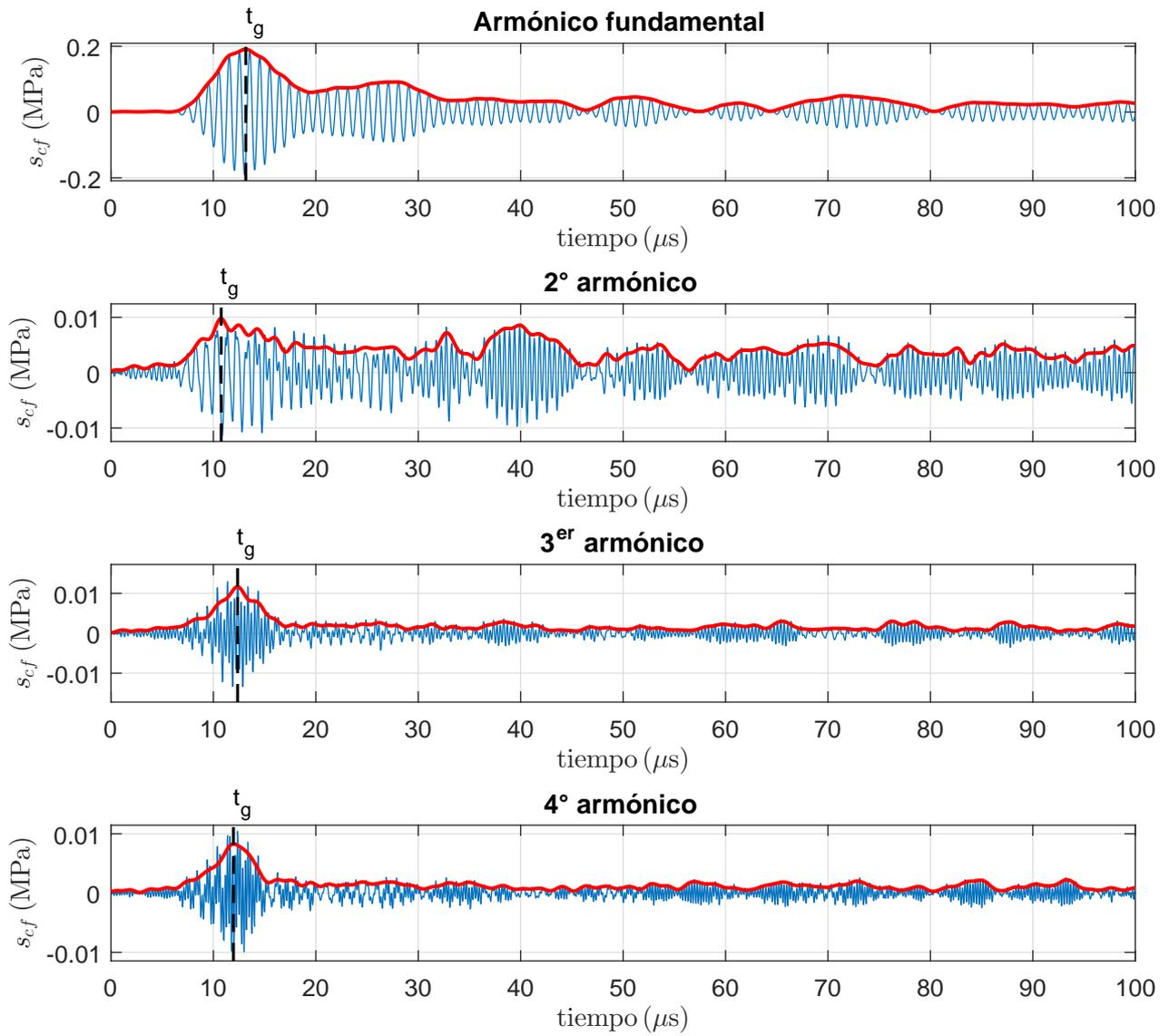


Figura 3.8: Amplitudes calculadas para cada armónico con el medio de espesor 61 mm. La curva roja representa la envolvente de la señal.

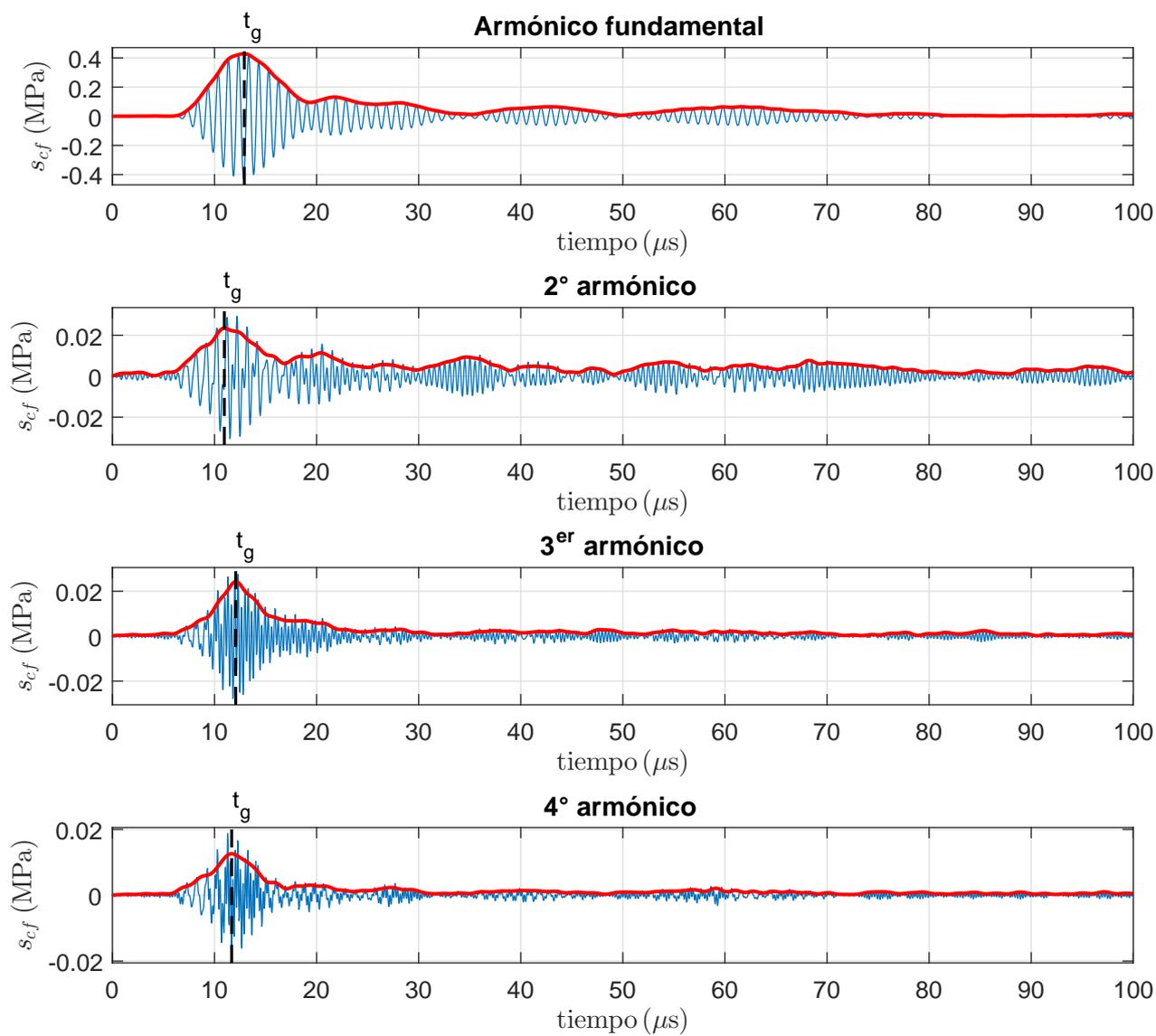


Figura 3.9: Amplitudes calculadas para cada armónico con el medio de espesor 46 mm. La curva roja representa la envolvente de la señal.

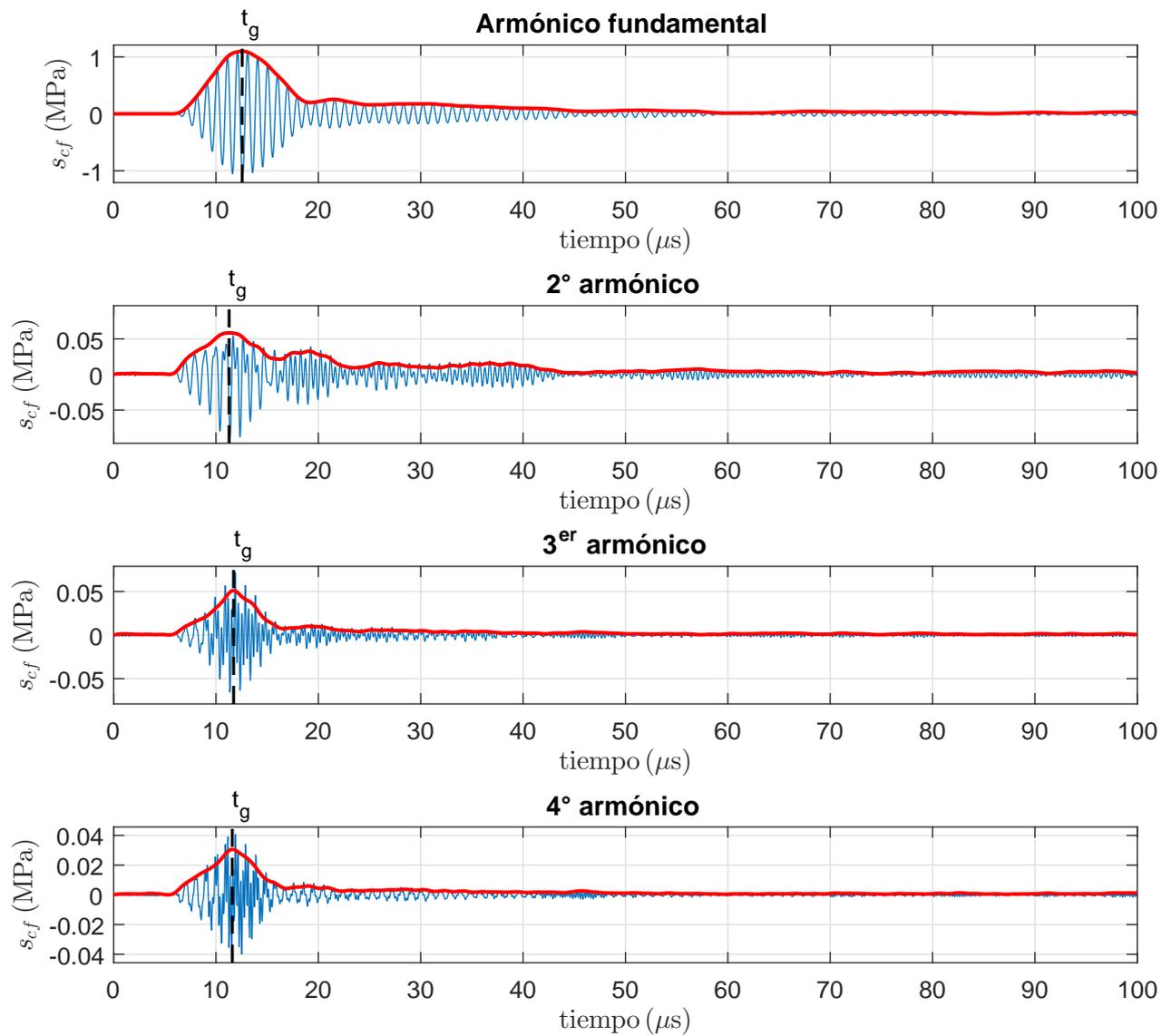


Figura 3.10: Amplitudes calculadas para cada armónico con el medio de espesor 30 mm. La curva roja representa la envolvente de la señal.

3.2.4. Velocidad de grupo

En esta sección mostramos una medida de las velocidades de grupo asociadas a los primeros cuatro armónicos presentes en el campo coherente. El cálculo lo realizamos a partir del campo coherente obtenido con el mayor vol-

taje en la entrada ($V_{in} = 253 \text{ V}$), donde los armónicos alcanzan una amplitud mayor. El procedimiento comienza realizando el producto de convolución de la ecuación 3.18. De esta forma filtramos la señal, obteniendo las amplitudes de las frecuencias de los armónicos. En las figuras 3.8, 3.9 y 3.10, se muestran las convoluciones para las frecuencias de los primeros cuatro armónicos, con medios de espesores $L = 61 \text{ mm}$, $L = 46 \text{ mm}$ y $L = 30 \text{ mm}$, respectivamente.

Para obtener la velocidad de grupo, observemos que el tiempo que tarda una onda en viajar entre el emisor y el receptor es

$$t_g = \frac{L}{c_g} + t_h \quad (3.20)$$

donde c_g es la velocidad de grupo de la onda en el medio de múltiple scattering y t_h es el tiempo que viaja la onda fuera de este medio. Supongamos, ahora que retiramos el medio de múltiple scattering y adquirimos una señal que realiza todo el recorrido en el medio homogéneo. El tiempo que tarda, será:

$$t_{ref} = \frac{L}{c_0} + t_h \quad (3.21)$$

donde c_0 es la velocidad de la onda en el medio homogéneo. En esta experiencia este medio es agua.

Restando t y t_{ref} obtenemos:

$$c_g = \frac{c_0}{1 + c_0 \frac{t_g - t_{ref}}{L}} \quad (3.22)$$

El tiempo t_g corresponde al tiempo donde la envolvente de las señales $s_{cf}(t)$ alcanza el máximo valor. El tiempo t_{ref} lo obtenemos de manera análoga, pero con una señal de referencia.

Las velocidades de grupo calculadas para cada armónico se muestran en la figura 3.11 en función del espesor del medio. El gráfico muestra que las velocidades de grupo no varían sensiblemente respecto al valor de la velocidad de una onda acústica en agua ($c_0 \simeq 1.5 \text{ mm}/\mu\text{s}$). La mayor diferencia es del 4 %, observada en la velocidad de grupo del segundo armónico medida a través de un medio de múltiple scattering de 23 mm. Algunos artículos donde se realizan experiencias similares [19, 8], muestran variaciones en la velocidades de grupo de aquellas frecuencias que corresponden a frecuencias de resonancia de los cilindros que componen el medio de múltiple scattering. Por lo tanto, los resultados obtenidos en esta tesis refuerzan el modelo de cilindros rígidos,

los cuales no poseen frecuencias de resonancia.

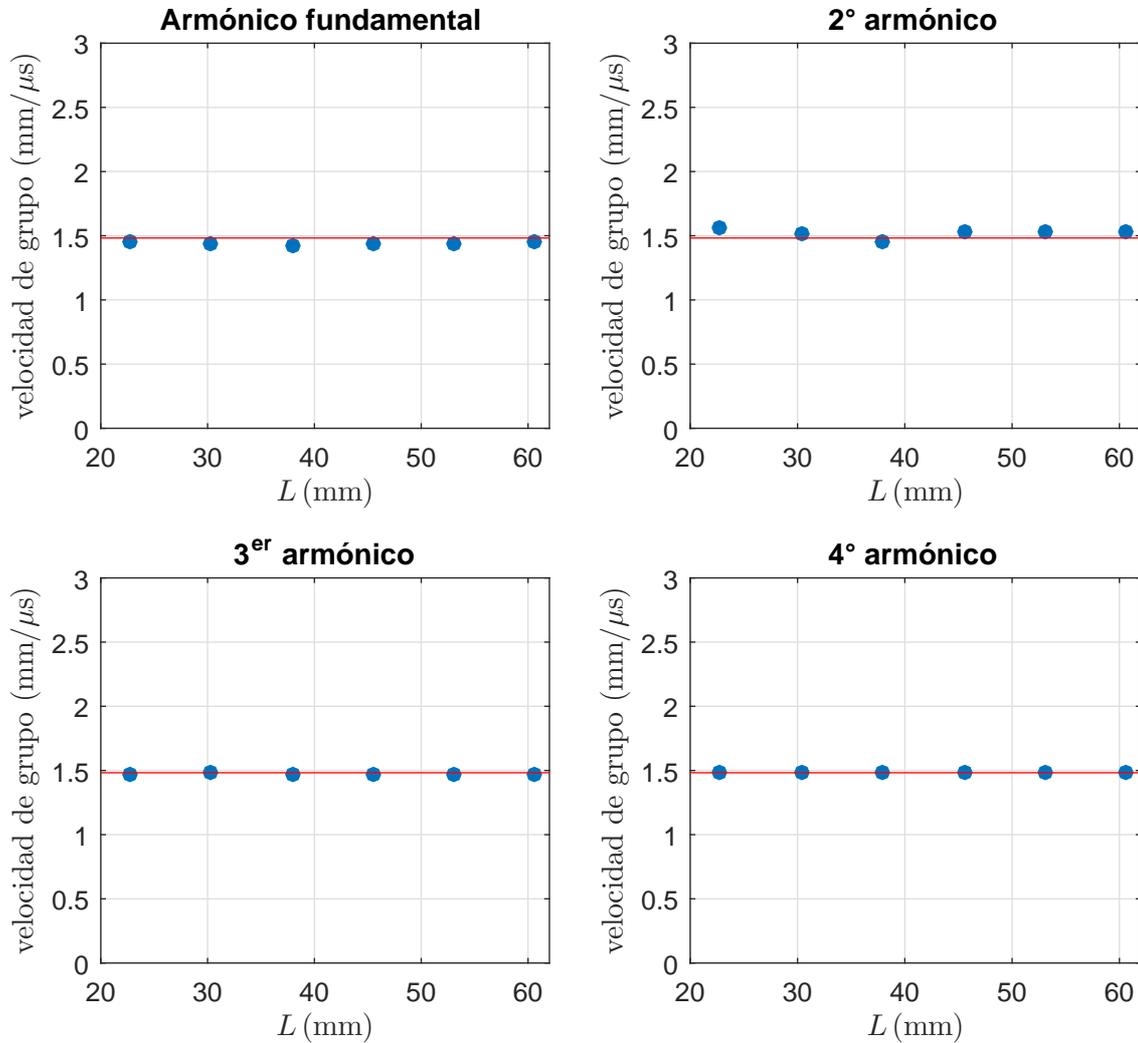


Figura 3.11: Velocidad de grupo medida para cada armónico en función del espesor del medio de múltiple scattering.

3.2.5. Decaimiento de la intensidad del campo coherente

El decaimiento en la intensidad del campo coherente cuando aumenta el espesor del medio de múltiple scattering ha sido estudiado en diversas publicaciones [2, 3, 7]. En estos trabajos se ha demostrado que, en régimen lineal, dicha intensidad decae exponencialmente cuando se aumenta el espesor del

medio. En esta sección determinamos la intensidad acústica asociada a la frecuencia de cada armónico presente en el campo coherente y contrastaremos los resultados con el modelo teórico propuesto.

Considerando que los armónicos se generan durante la propagación de la onda en agua, podemos suponer que la amplitud del armónico n -ésimo, p_n , es directamente proporcional a V_{in}^n . Sea I_n la intensidad acústica correspondiente al armónico n -ésimo del campo coherente. Esta es directamente proporcional al cuadrado de p_n . Con estas consideraciones, proponemos la siguiente relación:

$$I_n \propto V_{in}^{2n} \quad (3.23)$$

Suponiendo que durante la propagación en el medio del múltiple scattering cada armónico verifica una ecuación de scattering lineal, es esperable que la intensidad de cada armónico presente en el campo coherente decaiga exponencialmente en función del espesor del medio. Esto es:

$$I_n \propto \exp\left(-\frac{L}{l_e}\right) \quad (3.24)$$

donde el coeficiente l_e se denomina *libre recorrido medio elástico* y, en general, depende de la frecuencia, pudiendo ser distinto para cada armónico.

Combinando 3.23 y 3.24, obtenemos la siguiente ecuación:

$$I_n = b_n \exp\left(-\frac{L}{l_e}\right) V_{in}^{2n} \quad (3.25)$$

donde b_n es una constante de proporcionalidad, independiente de L y V_{in} .

Para verificar experimentalmente la ecuación 3.25, calculamos la intensidad del campo coherente asociada a cada armónico de la siguiente manera:

$$I_n = \int_{nf_0 - \Delta f}^{nf_0 + \Delta f} I_c(f) df \quad (3.26)$$

donde $I_c(f)$ ha sido definida en la ecuación 3.19 y nf_0 es la frecuencia de cada armónico ($n = 1$ corresponde a la frecuencia del armónico fundamental). Δf se elige de manera tal que la integral se realice en un entorno de nf_0 en el cual $I_c(nf_0)$ decae -3 dB. La integral se realiza de forma discreta.

Estudiamos la ecuación 3.25 en dos partes.

En primer lugar, analizamos la dependencia de la intensidad con el voltaje

en la entrada. Las figuras 3.12, 3.13 y 3.14 muestran las intensidades I_1 , I_2 , I_3 y I_4 (correspondientes a los primeros 4 armónicos) en función del voltaje de excitación del transductor para medios de múltiple scattering de espesores 61 mm, 46 mm y 30 mm, respectivamente. Los datos experimentales son ajustados con polinomios de la forma $\alpha_n V_{in}^{2n}$. Esta relación se verifica razonablemente. En la figura 3.12 donde los armónicos tienen intensidades bajas el ajuste no es tan bueno, pero mejora sensiblemente en los gráficos 3.13 y 3.14 donde la intensidad de los armónicos es mayor.

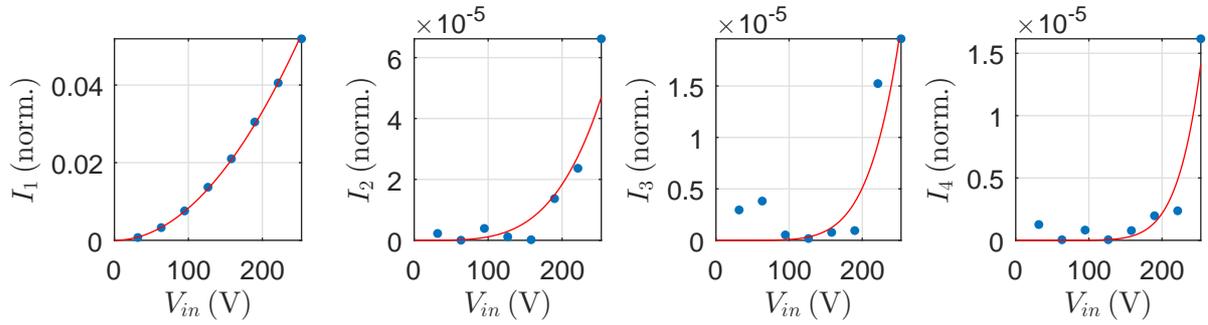


Figura 3.12: Intensidad de las componentes espectrales del campo coherente en función del voltaje aplicado. $L = 61$ mm.

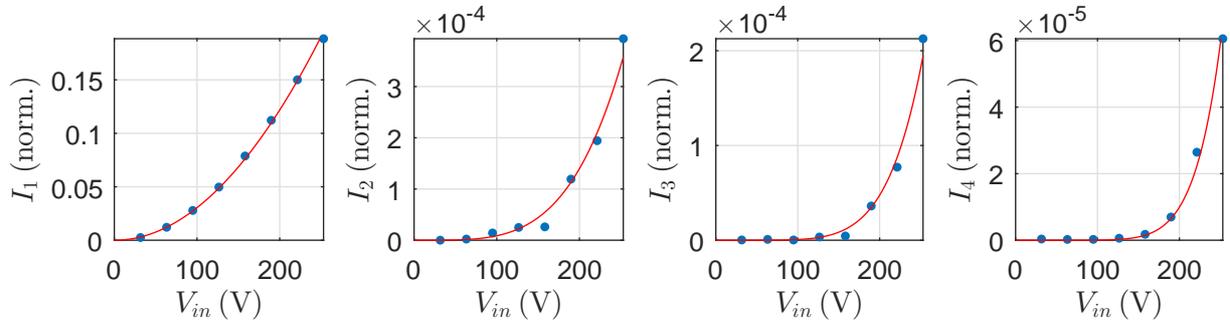


Figura 3.13: Intensidad de las componentes espectrales del campo coherente en función del voltaje aplicado. $L = 46$ mm.

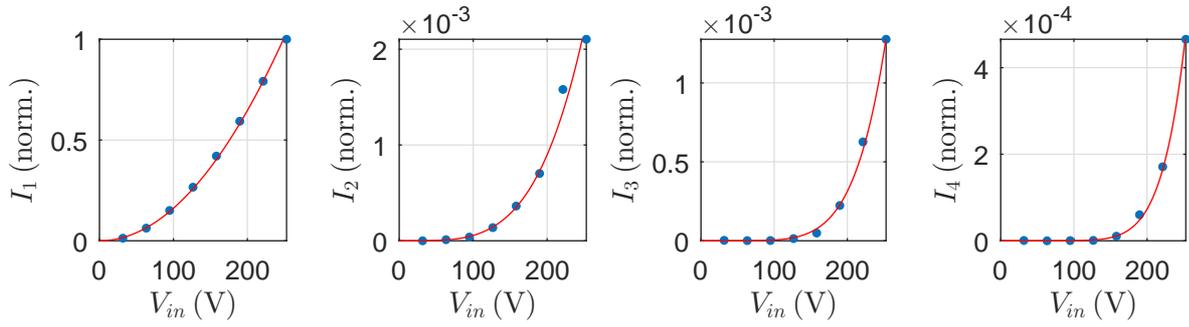


Figura 3.14: Intensidad de las componentes espectrales del campo coherente en función del voltaje aplicado. $L = 30$ mm.

El aumento en la amplitud de los armónicos se produce cuando disminuye el espesor del medio de múltiple scattering. Este resultado está de acuerdo con la ecuación 3.25 donde se muestra que la intensidad de los armónicos decrece exponencialmente con L . Para verificar que el decaimiento es realmente exponencial, notemos que $\alpha_n = b_n \exp\left(-\frac{L}{t_e}\right)$. Este valor es obtenido a partir de los ajustes mostrados en las figuras 3.12, 3.13 y 3.14.

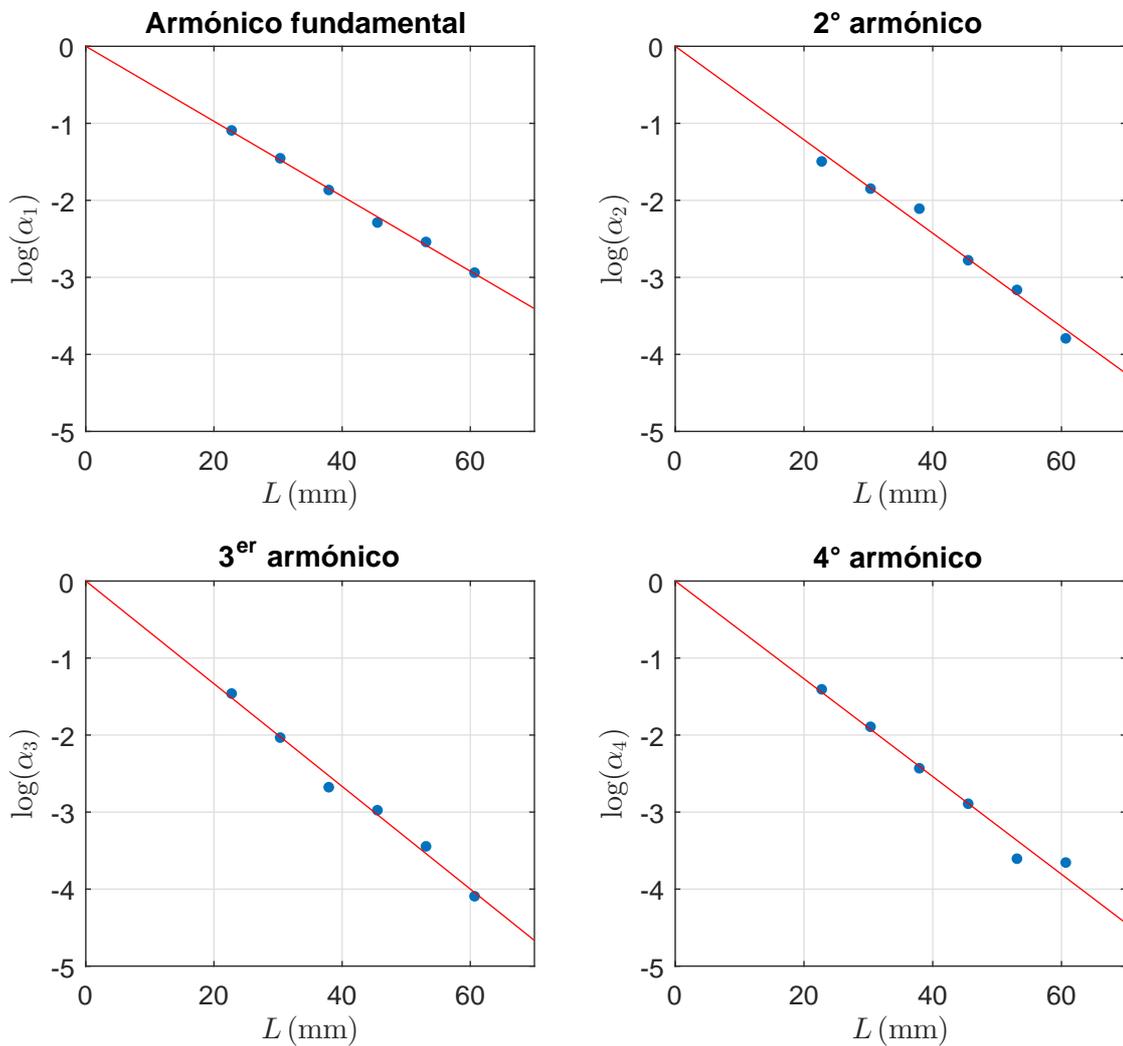


Figura 3.15: Intensidad coherente en función del espesor del medio multidifusor. Resultados experimentales (puntos azules) y ajuste lineal (curva roja).

En la figura 3.15 se grafica $\log(\alpha_n)$ en función de L para cada armónico. Los resultados experimentales se ajustan linealmente. Este ajuste verifica la relación propuesta en 3.24. Además, la pendiente en cada recta corresponde al valor de $1/l_e$. Los valores de libre recorrido medio elástico obtenidos con este procedimiento, se muestran en la tabla 3.1.

Tabla 3.1: Valores de libres recorrido medio elástico obtenidos experimentalmente.

Armónico	frecuencia (MHz)	l_e (mm)
Fundamental	1	10.27 ± 0.31
Segundo	2	8.24 ± 0.55
Tercero	3	7.50 ± 0.35
Cuarto	4	7.88 ± 0.61

Los resultados experimentales mostrados verifican la ecuación 3.25, propuesta bajo la suposición de que los efectos no lineales son independientes del múltiple scattering. Para terminar de validar el modelo, comparamos los valores de libre recorrido medio elástico obtenidos experimentalmente con valores teóricos. El cálculo teórico lo realizamos con un modelo de scattering lineal, denominado *aproximación de scattering independiente* (ISA) [7]. En este modelo, el libre recorrido medio elástico es obtenido de la siguiente manera:

$$l_e = \frac{1}{d\sigma_T} \quad (3.27)$$

donde d es la densidad de alambres que componen el medio y σ_T es la sección eficaz total de cada uno. Esta última depende de las características geométricas de los alambres y de la frecuencia. Estos valores son calculados a partir de un modelo de scattering para cilindros rígidos desarrollado en *Theoretical Acoustics* de P. Morse y otros [16].

En la figura 3.16, comparamos los valores de l_e calculados teóricamente en un rango de frecuencias entre 0 y 5 MHz con los valores obtenidos experimentalmente. La comparación muestra una coincidencia entre la teoría y la experiencia.

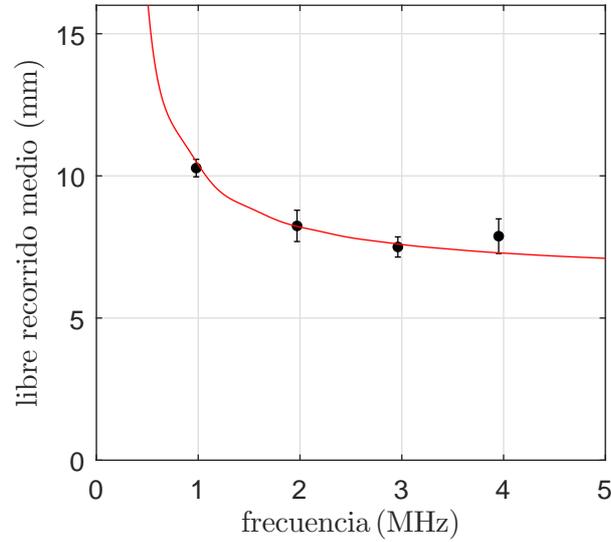


Figura 3.16: Libre recorrido medio elástico en función de la frecuencia. Comparación entre resultados experimentales (negro) y teoría (rojo).

3.3. Conclusión

En este capítulo se han analizado principalmente las características del campo coherente de una onda no lineal que atraviesa un medio de múltiple scattering. Las medidas realizadas muestran que las componentes espectrales de la onda no lineal obedecen la relación discutida en el capítulo 2: la amplitud del armónico n es proporcional a la n -ésima potencia del voltaje en la entrada. Esto permite verificar la presencia del régimen no lineal. Por otro lado, se mostró que la amplitud de cada armónico decrece cuando se aumenta el espesor del medio de múltiple scattering y que este decrecimiento obedece, para cada armónico, un resultado de la teoría de scattering lineal. Esto permite concluir que los efectos no lineales y de múltiple scattering están desacoplados en el rango de amplitudes trabajado. Esto significa que los armónicos se generan por efectos no lineales, pero, a través del medio de múltiple scattering, se propagan como describe la teoría lineal.

Teniendo en cuenta estos resultados procederemos, en el capítulo siguiente, a realizar una experiencia de inversión temporal virtual. Este proceso que se fundamenta teóricamente en una teoría lineal, puede llegar a ser aplicado si tenemos en cuenta la independencia mostrada entre efectos no lineales y de múltiple scattering.

Capítulo 4

Inversión temporal con ondas no lineales

El proceso de inversión temporal ha sido ampliamente estudiado y aplicado en diversos sistemas acústicos. En régimen lineal, ha sido estudiado por M. Fink desde la década del 90 [9]. La utilidad de este proceso se encuentra en la posibilidad de generar ondas acústicas focalizadas, cuya energía acústica se concentra en una región localizada del espacio y del tiempo. Se ha mostrado que es posible generar ondas focalizadas a través de medios de múltiple scattering, cuya calidad focal mejora cuanto mayor es el espesor del medio [20].

Si bien existen variantes en la aplicación del proceso de inversión temporal, el procedimiento mas sencillo puede describirse como sigue:

1. Una onda es emitida desde un punto A y adquirida en un conjunto de puntos $\{B_i\}$;
2. Las ondas adquiridas en cada punto B_i , se emiten invertidas temporalmente desde estos puntos y se reciben en el punto A .

Un análisis de la ecuación de ondas lineal muestra que, si el conjunto $\{B_i\}$ forma una superficie continua que envuelve completamente al punto A , se obtiene en el segundo paso la onda que fue emitida originalmente. Esta situación constituye el ideal de inversión temporal. Sin embargo, en el laboratorio, los puntos $\{B_i\}$ forman un conjunto discreto y finito de emisores/receptores. En estas condiciones, es posible recuperar en buena medida la señal original si este conjunto tiene un número adecuado de emisores.

Recuperar la señal original en el punto desde donde fue emitida, implica focalizar la energía contenida en las ondas acústicas. Cuanto menor sean las

dimensiones del foco generado, mejor será la resolución espacial que podemos obtener si, por ejemplo, aplicamos esta técnica para realizar imágenes acústicas.

En este trabajo, analizamos el proceso de inversión temporal con ondas acústicas no lineales. En el capítulo 3 se ha mostrado que, en el rango de amplitudes trabajado, los efectos no lineales y de múltiple scattering están desacoplados. En este contexto, analizaremos el proceso de inversión temporal y estudiaremos la posibilidad de focalizar ondas no lineales que atraviesan este tipo de medios. La calidad de la focalización la evaluaremos en función de las dimensiones del foco, las cuales determinamos midiendo el ancho espacial del foco donde la intensidad acústica decae -3 dB respecto al valor máximo. Cuánto menor este último, mejor es la focalización.

Existen antecedentes donde se aplica inversión temporal con ondas acústicas no lineales. M. Tanter, mostró que una onda no lineal que se propaga en un medio homogéneo es invariante frente a una inversión temporal si esta se propaga una distancia menor a la distancia de discontinuidad z_D (definida en el capítulo 2) [11]. A continuación, desarrollaremos en forma breve el fundamento presentado en la referencia citada.

La ecuación 2.27 describe la propagación de una onda plana no lineal en sentido de $+z$. Fue obtenida realizando el cambio de variable $\tau = t - \frac{z}{c_0}$ en la ecuación de Westervelt unidimensional (2.1.5). Si realizamos el cambio de variables $\tau = t + \frac{z}{c_0}$, la ecuación de Burguer obtenida describe la propagación de una onda plana que se propaga en sentido de $-z$. En general, podemos escribir

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (4.1)$$

si la propagación es en sentido de $+z$ y

$$\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (4.2)$$

si la propagación es en sentido de $-z$. Es inmediato chequear que si $p(z, t)$ es solución de 4.1, $p(z, -t)$ es solución de 4.2.

4.1. Inversión temporal en sistemas lineales

En esta sección damos una descripción del proceso de inversión temporal, empleando elementos de la teoría de sistemas lineales y propondremos el método con el que se procederá para estudiar la inversión temporal con ondas no lineales.

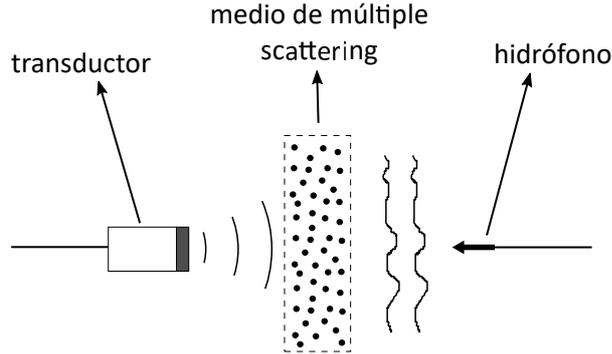


Figura 4.1: Esquema del dispositivo donde se aplica la inversión temporal.

Consideremos un sistema compuesto por un transductor y un hidrófono sumergidos en agua. Entre ellos, un medio de múltiple scattering. En régimen lineal, el sistema está caracterizado por su respuesta al impulso $h(\mathbf{r}_0, t)$. Esta función representa la señal registrada por el hidrófono en la posición \mathbf{r}_0 cuando el transductor es excitado por una señal cuya dependencia temporal es la de una delta de Dirac $\delta(t)$. Si el transductor emite una señal con una dependencia temporal arbitraria $e(t)$, la señal recibida en el hidrófono es de la forma

$$s(\mathbf{r}_0, t) = e(t) * h(\mathbf{r}_0, t) \quad (4.3)$$

donde $*$ representa el producto de convolución temporal. Si además de lineal, consideramos que el sistema es recíproco y hacemos que el transductor emita la señal $s(\mathbf{r}_0, -t)$, el hidrófono recibirá en la posición \mathbf{r} la señal

$$\gamma(\mathbf{r}, t) = [e(t) * h(\mathbf{r}_0, t)] \star h(\mathbf{r}, t) \quad (4.4)$$

donde \star representa el producto de correlación.

Observemos que $\gamma(\mathbf{r}, t)$ alcanza su valor máximo cuando $t = 0$ y $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$. Esto indica que en la posición \mathbf{r}_0 la energía de la emisión está focalizada temporal y espacialmente. Además, si $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, $\gamma(\mathbf{r}, t)$ se acercará a cero en la medida en que $h(\mathbf{r}, t)$ y $h(\mathbf{r}_0, t)$ estén poco correlacionadas. Esta última condición se ve-

rifica en un medio de múltiple scattering. La posibilidad de focalizar la energía en tiempo y espacio con este procedimiento motiva el estudio de este proceso.

Distinguiremos ahora, dos formas de proceder al investigar experimentalmente el proceso de inversión temporal.

El procedimiento que consiste en adquirir la señal $\gamma(\mathbf{r}, t)$ luego de adquirir, invertir temporalmente y reemitir $s(\mathbf{r}_0, t)$, se conoce como *inversión temporal real*.

Si, en cambio, se adquiere $s(\mathbf{r}, t)$ y se calcula el producto

$$\gamma_c(\mathbf{r}, t) = s(\mathbf{r}, t) \star s(\mathbf{r}_0, t) \quad (4.5)$$

el procedimiento se denomina *inversión temporal virtual*.

Observemos que ambos procedimientos son equivalentes si $e(t)$ es igual a $\delta(t)$. En la experiencia, ambos procedimientos muestran una equivalencia razonable cuando $e(t)$ es una señal de corta duración.

La inversión temporal real tiene una importante limitante experimental cuando se aplica a ondas no lineales: las componentes espectrales de $s(\mathbf{r}_0, -t)$ están condicionadas al ancho de banda del transductor que deberá emitirlas. Supongamos que trabajamos con un transductor de frecuencia central 1 MHz con un ancho de banda del 50%. Es decir, que la máxima frecuencia que puede emitir adecuadamente es 1.5 MHz. Si la señal $s(\mathbf{r}_0, t)$, que se obtiene luego de que la onda no lineal atraviesa el medio de múltiple scattering, contiene una componente frecuencial en su segundo armónico (2 MHz), el transductor no podrá emitirla. Por lo tanto, la focalización solo contendrá frecuencias en un entorno de la frecuencia del primer armónico. En este trabajo, buscamos estudiar la focalización de ondas no lineales con todas las componentes espectrales generadas por efectos no lineales. Teniendo esto en cuenta, realizaremos un análisis de la inversión temporal virtual.

4.2. Inversión temporal virtual con ondas no lineales

Las ondas no lineales son emitidas con un transductor plano de frecuencia central $f_0 = 1$ MHz. Se emiten cinco ciclos de senoide, excitando el transductor con voltajes entre 158 V y 253 V. El transductor permanece fijo en toda la experiencia.

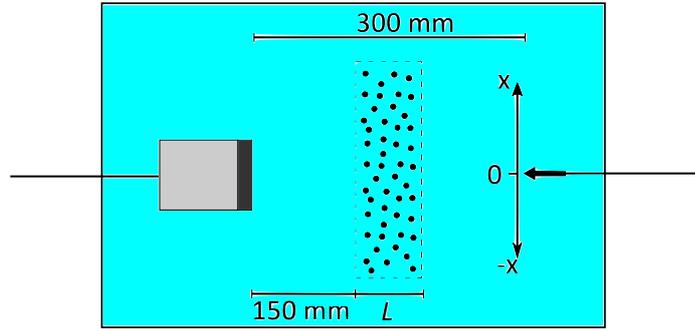


Figura 4.2: Dispositivo experimental. La posición $x = 0$ se encuentra sobre el eje axial del transductor. El barrido se realiza en dirección transversal.

En la figura 4.2 se muestra el dispositivo experimental. La onda emitida atraviesa un medio de múltiple scattering compuesto por alambres de cobre verticales distribuidos aleatoriamente. Los alambres se distribuyen en una grilla cuadrículada, donde cada cuadrícula tiene 2.5 mm de lado. De los espacios disponibles en la grilla, el 75 % se ocupa con alambres. Por lo tanto, la densidad es $d = 0.12$ alambres/mm².

Una vez que la onda atraviesa el medio de multiple scattering, es recibida en el hidrófono, digitalizada en el osciloscopio y almacenada en la PC. Luego, el hidrófono se mueve 0.25 mm en la dirección x y la emisión se repite. De esta forma, obtenemos una colección de señales $s(x, t)$, donde x varía entre -2.50 mm y 12.23 mm con pasos de 0.25 mm. En primer lugar, este procedimiento se realizó con un medio de múltiple scattering de espesor $L = 53$ mm. Luego, se repitió la experiencia con medios de menor espesor, siendo $L = 8$ mm el menor de todos.

A continuación, dividiremos la sección en tres partes. En la primera, estudiaremos ondas generadas con la máxima amplitud posible y analizaremos la focalización obtenida. En la segunda parte, evaluaremos las características de la focalización en función de la amplitud con la que se generan las ondas, con el fin de evaluar cómo la no linealidad influye en la inversión temporal virtual. Finalmente, evaluaremos la posibilidad de realizar una focalización con el segundo armónico.

4.2.1. Focalización con ondas no lineales

La figura 4.3 muestra la intensidad de $s(x, t)$, obtenida con medios de múltiple scattering de espesores entre 8 mm y 53 mm. El transductor es exci-

tado con un voltaje de 253 V. Puede notarse que para el medio menos espeso, la señal se encuentra distribuida alrededor de los tiempos menores, mostrando que los efectos de múltiple scattering se reducen cuando disminuye el espesor del medio.

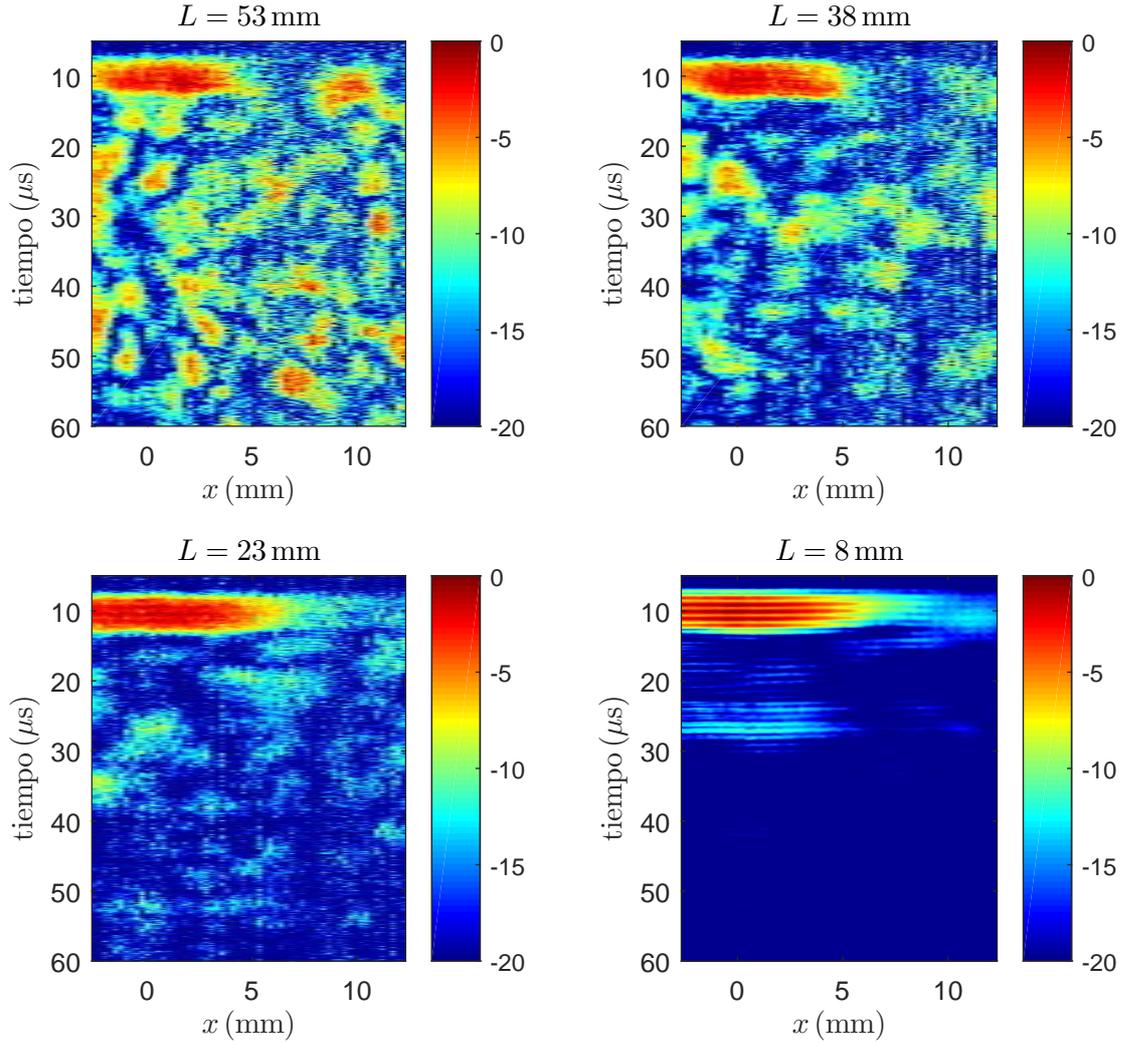


Figura 4.3: Intensidad de las señales $s(x, t)$ obtenidas con medios de múltiple scattering de distintos espesores. La escala de colores se muestra en decibeles, siendo el nivel de referencia la máxima amplitud obtenida para cada espesor.

La posición $x = 0$ se define de forma tal que se encuentra sobre el eje del transductor y es esta posición la que elegiremos como punto focal. Es decir, que el producto 4.5, toma la forma:

$$\gamma_c(x, t) = s(x, t) \star s(0, t) \quad (4.6)$$

Consideremos el medio de espesor $L = 23$ mm. En la figura 4.4 se muestran, en la primer columna, las señales $s(x, t)$ en $x = 0$, $x = 2.54$ mm y $x = 5.08$ mm. Además, mostramos la señal con la que se realiza el producto de correlación; en este caso, $s(0, t)$. En la tercera columna se muestra el resultado de este producto. Este resultado muestra que la señal está focalizada temporalmente: tiene un máximo en $t = 0$ y decrece considerablemente fuera de este entorno. Además, podemos notar que la amplitud del foco decrece a medida que x se aleja de cero: esto muestra que la onda está focalizada en el espacio.

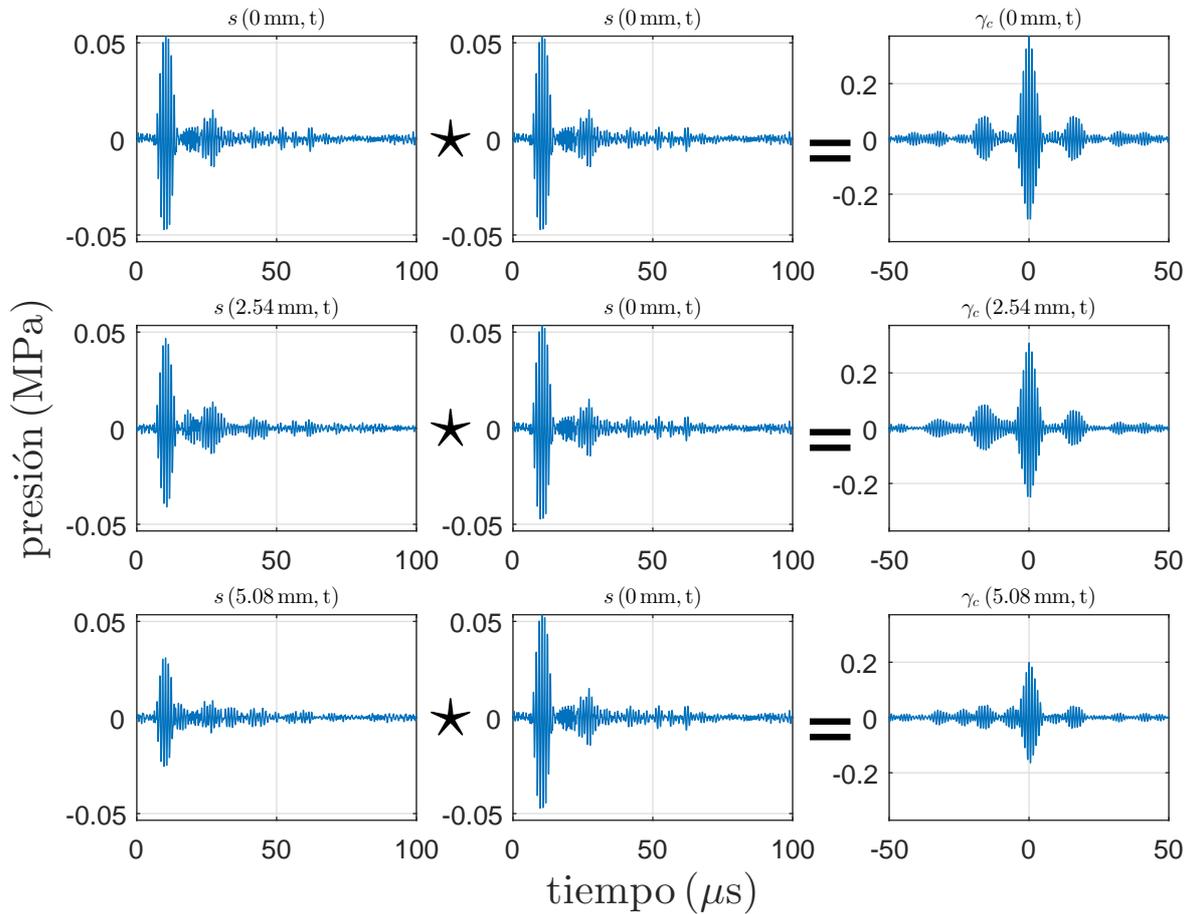


Figura 4.4: Señales obtenidas a través del medio de espesor $L = 23$ mm, para las posiciones $x = 0$ mm, $x = 2.54$ mm y $x = 5.08$ mm.

Ahora, consideremos un medio de espesor $L = 53$ mm. La figura 4.5 está diagramada de la misma manera que la figura 4.4. Se muestran algu-

nas señales $s(x, t)$ y el resultado de la correlación. Existen algunas diferencias respecto a la figura 4.4. En primer lugar, cada señal $s(x, t)$ está más distribuida en el tiempo. Este es un efecto propio del múltiple scattering y ya había sido anticipado en la figura 4.3. En segundo lugar, observemos que la focalización en la correlación decrece cuando x se aleja de cero, pero este decrecimiento es mas abrupto en comparación con el caso anterior. Esto también es efecto del múltiple scattering: cuanto mayor es el espesor del medio, menor es la correlación entre dos señales obtenidas en posiciones distintas y el ancho focal decrece.

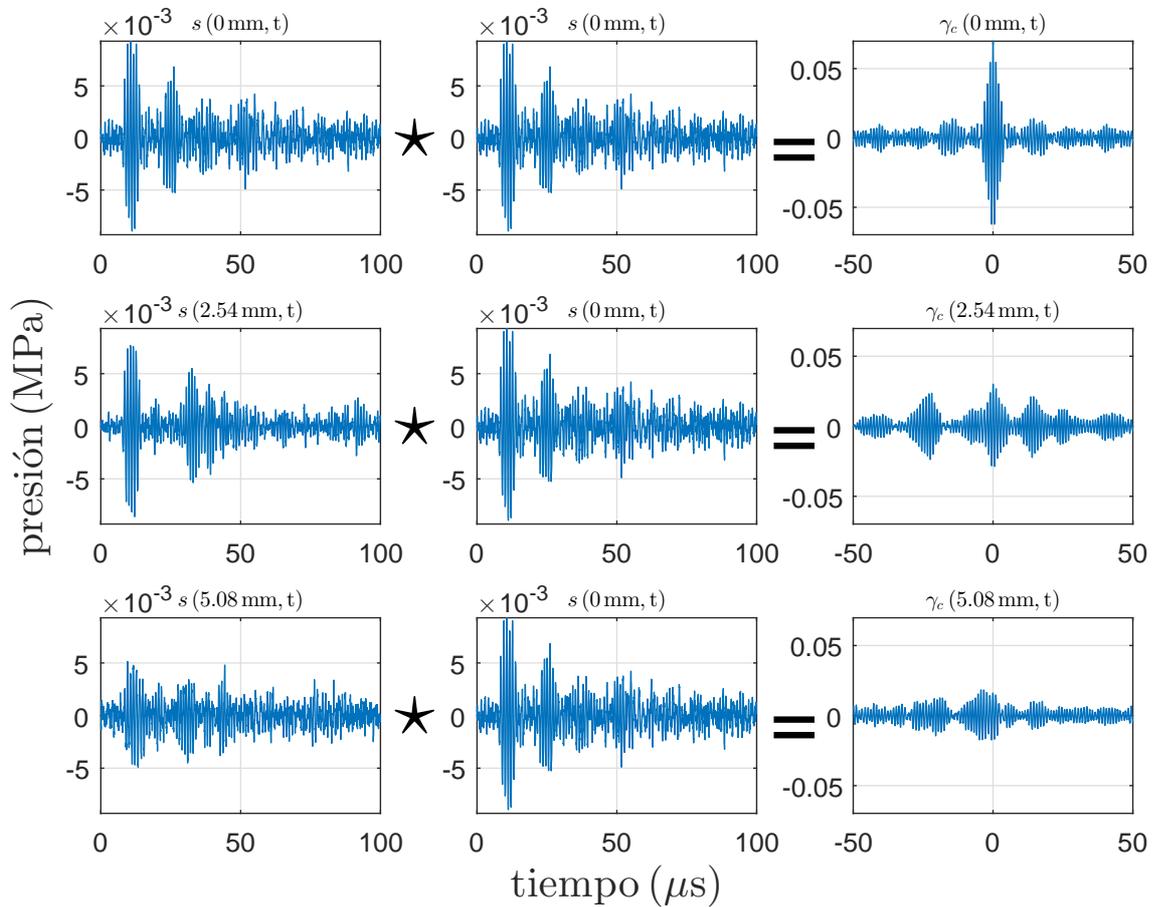


Figura 4.5: Señales obtenidas a través de medios de múltiple scattering de espesor $L = 53$ mm, para las posiciones $x = 0$ mm, $x = 2.54$ mm y $x = 5.08$ mm.

De los resultados mostrados en las figuras 4.4 y 4.5 se desprende que la señal está focalizada en el tiempo y en el espacio. En las coordenadas $(x, t) = (0, 0)$, se encuentra la máxima amplitud y para tiempos y posiciones distintos de estos

valores, la amplitud decrece. Además, se verifica que un aumento en el espesor del medio de múltiple scattering produce una mejora en la calidad focal.

Estos resultados se visualizan de forma clara en la figura 4.6. Las imágenes muestran la intensidad de la focalización. Podemos notar claramente que la onda está focalizada en el tiempo y en el espacio y que la focalización espacial mejora sensiblemente cuando se aumenta el espesor del medio de múltiple scattering.

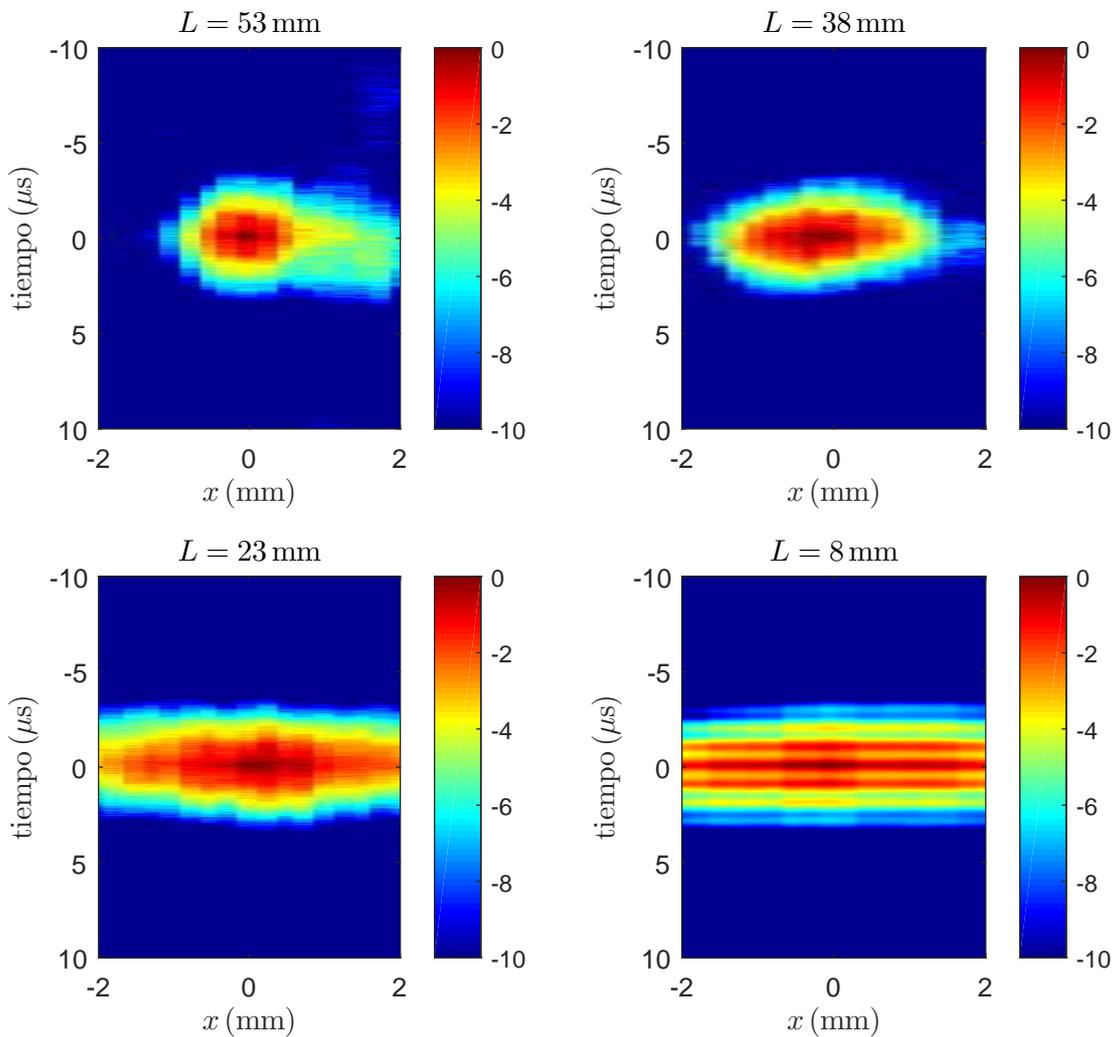


Figura 4.6: Intensidad de la inversión temporal. Las imágenes muestran como, a medida que el espesor del medio de múltiple scattering aumenta, el ancho focal disminuye.

El resultado de la correlación en distintas posiciones para medios de dis-

tintos espesores se muestra en la figura 4.7. En los cuatro casos se verifica que la máxima amplitud de la señal decrece cuando la correlación se realiza en posiciones más alejadas de $x = 0$. Además, decrece mucho más cuanto mayor es el espesor del medio.

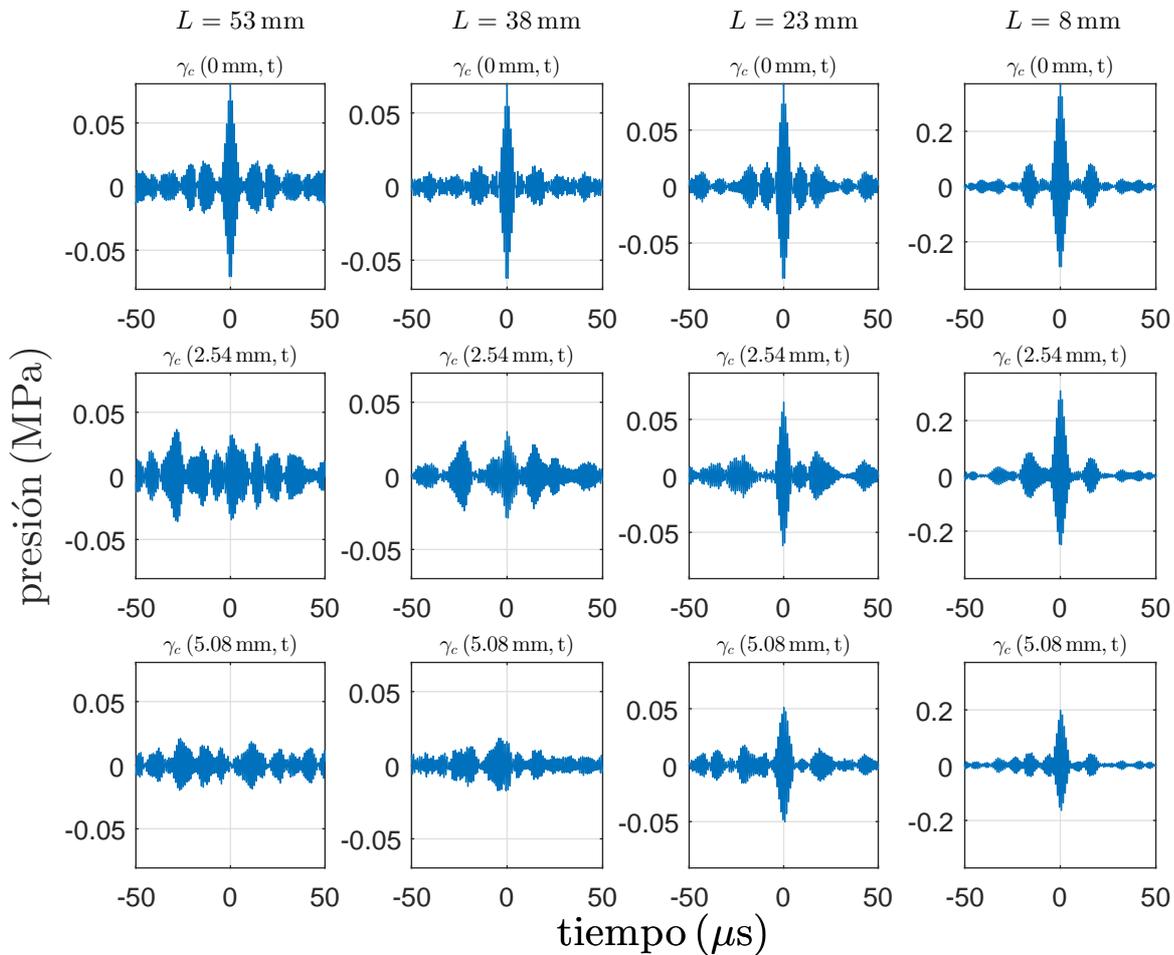


Figura 4.7: Resultado de la correlación en distintas posiciones con medios de distinto espesor. Cada columna corresponde a medios de espesores $L = 53$ mm, $L = 38$ mm, $L = 23$ mm y $L = 8$ mm. Cada fila corresponde a las posiciones dónde se realizó la correlación: $x = 0$ mm, $x = 2.54$ mm y $x = 5.08$ mm. En cada gráfico, el eje de abscisas corresponde al tiempo, medido en microsegundos y el eje de ordenadas a presión, medida en megapascuales.

4.2.2. Focalización en función del voltaje aplicado

Debemos preguntarnos qué influencia tienen los efectos no lineales en la focalización obtenida con la correlación. Para ello, repetimos las medidas mostradas en la sección anterior con diferentes voltajes en la entrada: $V_{in} = 158$ V,

$V_{in} = 190 \text{ V}$, $V_{in} = 221 \text{ V}$ y $V_{in} = 253 \text{ V}$.

En las figuras 4.8 a 4.11 graficamos los resultados del producto de correlación en la posición focal ($x = 0$), obtenidos con medios de espesor $L = 53 \text{ mm}$ y $L = 8 \text{ mm}$. Las señales temporales muestran diferencia en la amplitud, pero no en la forma. Sí encontramos diferencias en los espectros. En todas las imágenes, podemos observar que la intensidad del armónico fundamental y la del segundo armónico decaen cuando aumenta el espesor del medio de múltiple scattering. Además, estas amplitudes también decaen cuando decrece el voltaje en la entrada. Si comparamos, por ejemplo, la figura 4.8 con la figura 4.11, observamos que la intensidad de cada armónico decae aproximadamente 10 dB. En la figura 4.8, donde se empleó el menor voltaje, la intensidad del segundo armónico es prácticamente imperceptible. Por lo tanto, la intensidad de los armónicos obtenidos focalizando por correlación decaen cuando se aumenta el espesor del medio y decaen cuando se reduce la amplitud del voltaje con la que se excita el transductor.

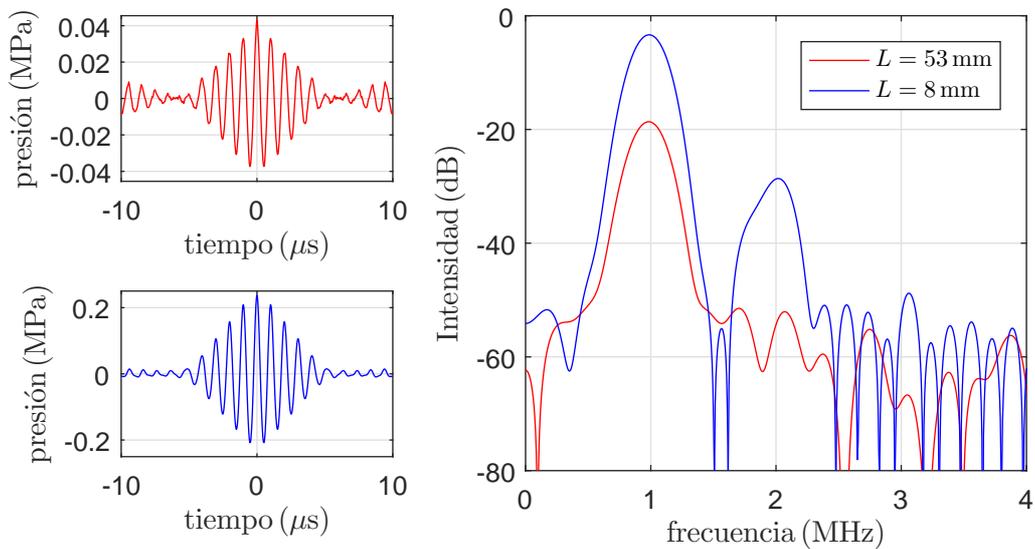


Figura 4.8: Comparación de las señales y sus espectros obtenidos para medios de distinto espesor, con un voltaje aplicado de 158 V

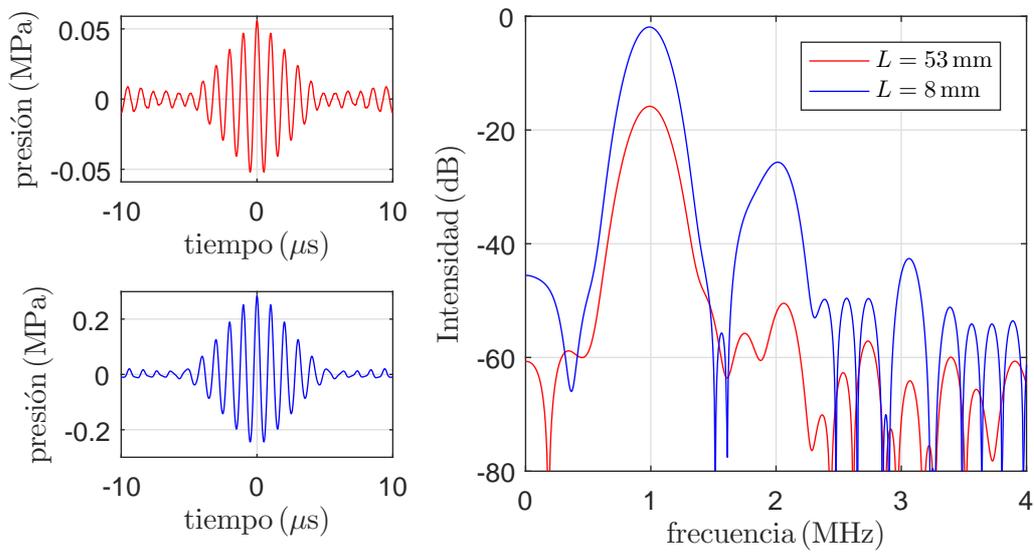


Figura 4.9: Comparación de las señales y sus espectros obtenidos para medios de distinto espesor, con un voltaje aplicado de 190 V.

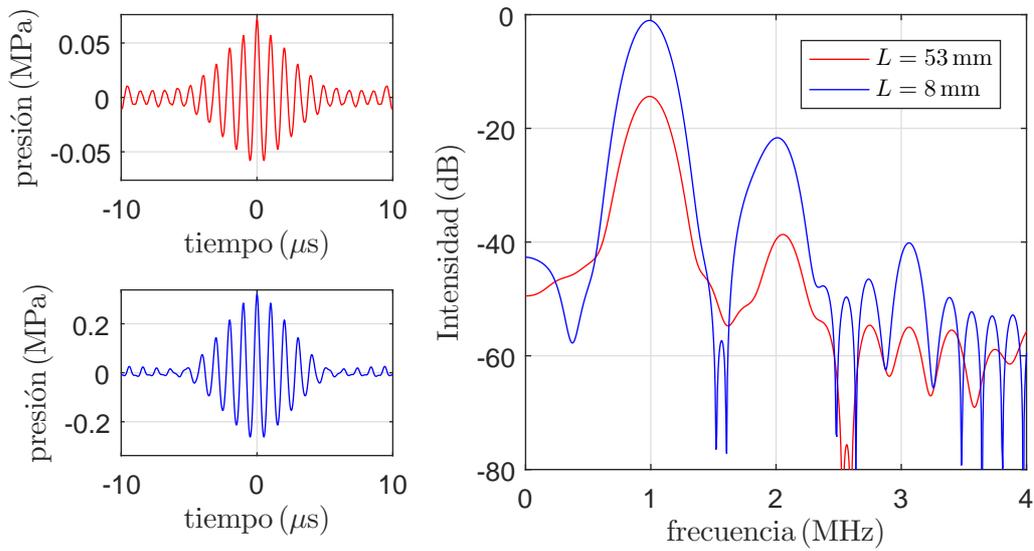


Figura 4.10: Comparación de las señales y sus espectros obtenidos para medios de distinto espesor, con un voltaje aplicado de 221 V.

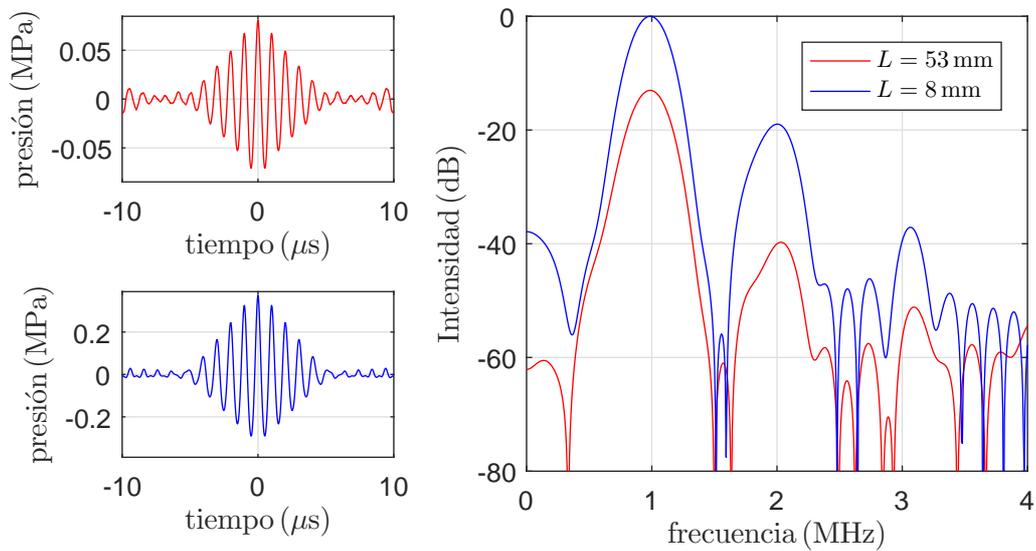


Figura 4.11: Comparación de las señales y sus espectros obtenidos para medios de distinto espesor, con un voltaje aplicado de 253 V.

A continuación, estudiamos las características de la focalización espacial del primer armónico en función del espesor del medio de múltiple scattering y del voltaje en la entrada. En la figura 4.12, se muestra dicha focalización espacial. En cada gráfica se compara el foco obtenido con medios de distintos espesores. En todos los casos el ancho focal disminuye cuando aumenta el espesor del medio de múltiple scattering. En la figura 4.13 se grafican los ancho focales a -3 dB, medidos con medios de distinto espesor, en función del voltaje en la entrada. Las líneas punteadas indican el valor medio del ancho focal para cada espesor. A menos de algunas fluctuaciones, podemos notar que el ancho focal no varía considerablemente cuando se cambia el voltaje en la entrada. Sí se observa que el ancho focal decrece cuando se aumenta el espesor del medio. En la figura 4.14 se grafica el ancho focal, esta vez en función del espesor del medio de múltiple scattering. En este gráfico se muestra que el ancho focal decrece hasta alcanzar un valor aproximadamente igual a 1 mm, que coincide con la longitud de onda en agua correspondiente a esta frecuencia.

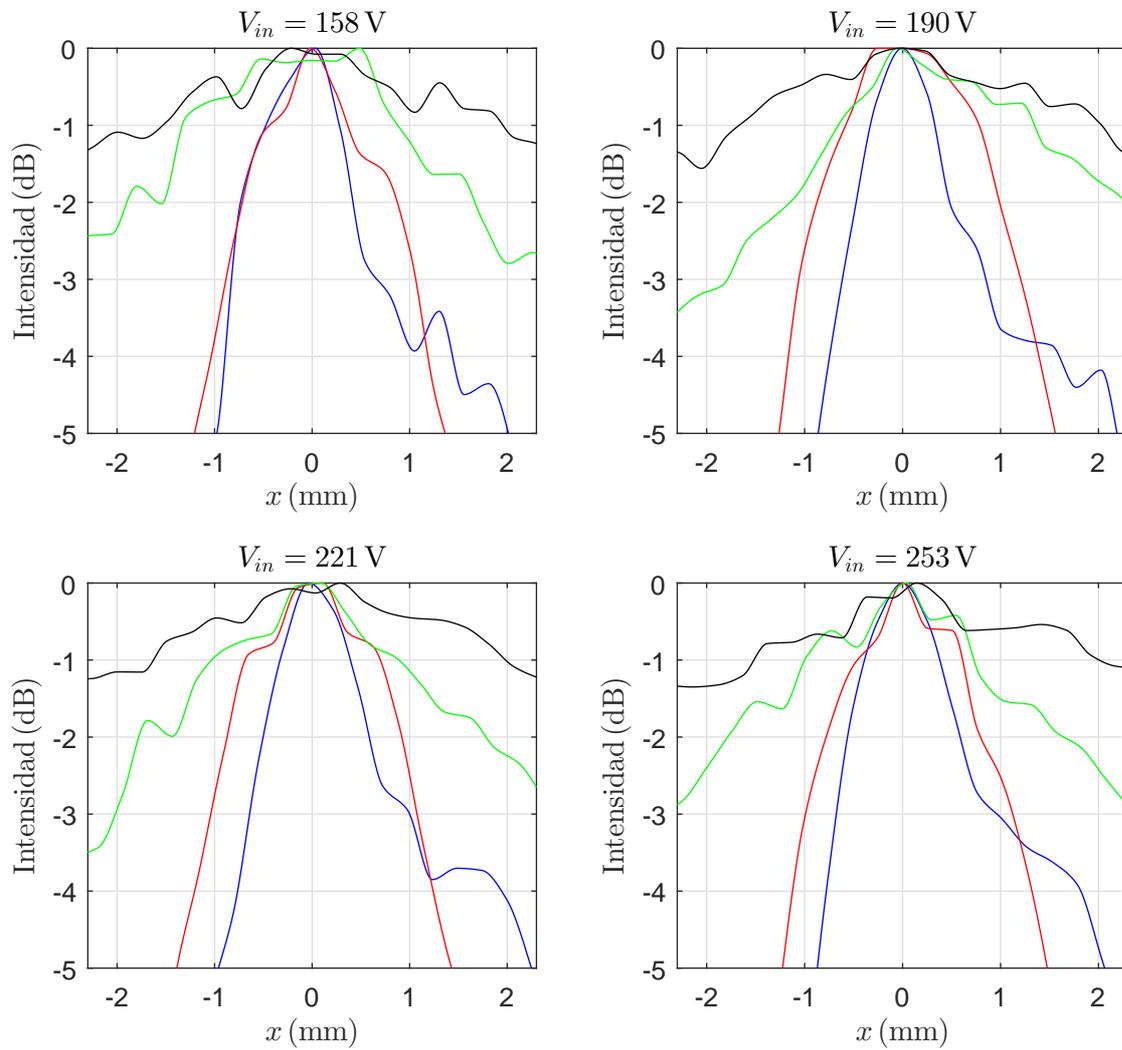


Figura 4.12: Focalización espacial. Azul: $L = 53$ mm; rojo: $L = 38$ mm; verde: $L = 23$ mm; negro: $L = 8$ mm.

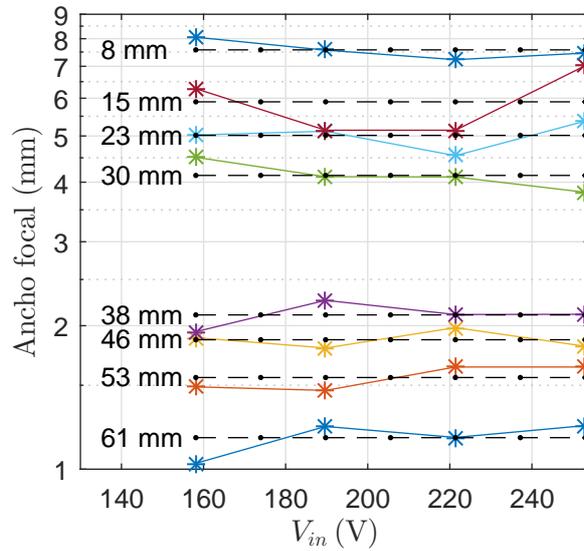


Figura 4.13: Ancho focal en función del voltaje de excitación del transductor. La línea punteada indica el valor medio del ancho focal para cada espesor.

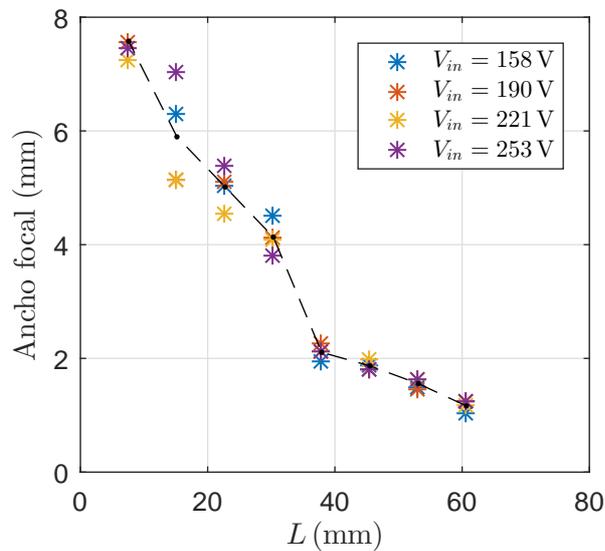


Figura 4.14: Ancho focal en función del espesor del medio de múltiple scattering.

Los resultados mostrados en este capítulo nos permiten concluir que la amplitud de las ondas que atraviesan el medio de múltiple scattering, no afectan sensiblemente el ancho focal obtenido mediante inversión temporal virtual. Es decir, que los efectos no lineales no influyen en la calidad de la focalización. Esta conclusión es consistente con los resultados obtenidos en el capítulo 3. En dicho capítulo se observó, mediante el estudio del campo coherente de una

onda no lineal, que los efectos no lineales son independientes de los efectos de múltiple scattering. En este capítulo, se ha mostrado la misma independencia mediante el estudio de la focalización por inversión temporal virtual. Los efectos del múltiple scattering se manifiestan por la disminución del ancho focal a medida que aumenta el espesor del medio de múltiple scattering pero las dimensiones del foco no varían sensiblemente cuando los efectos no lineales se intensifican.

El principal efecto no lineal se observa por la presencia del segundo armónico. Este tiene una amplitud mayor para voltajes más altos. En la siguiente sección, estudiaremos la presencia de esta componente espectral en la focalización.

4.2.3. Focalización con el segundo armónico

Las componentes espectrales en la focalización correspondientes al primer y segundo armónico son estudiadas con un voltaje en la entrada de 253 V. Con este voltaje se obtiene la mayor amplitud del segundo armónico. En la figura 4.15 se comparan las intensidades de estas frecuencias en el entorno de $x = 0$, obtenidas con medios de múltiple scattering de espesores entre 53 mm y 8 mm. Con ambas frecuencias se verifica que cuanto mayor el espesor del medio de múltiple scattering, menor el ancho focal. Además, el ancho focal del segundo armónico alcanza valores menores que el ancho focal del primero.

En la figura 4.16 se grafica el ancho focal del primer y segundo armónico en función del espesor del medio. Con ambas frecuencias, el ancho focal alcanza un límite, pero para el segundo armónico este límite es menor.

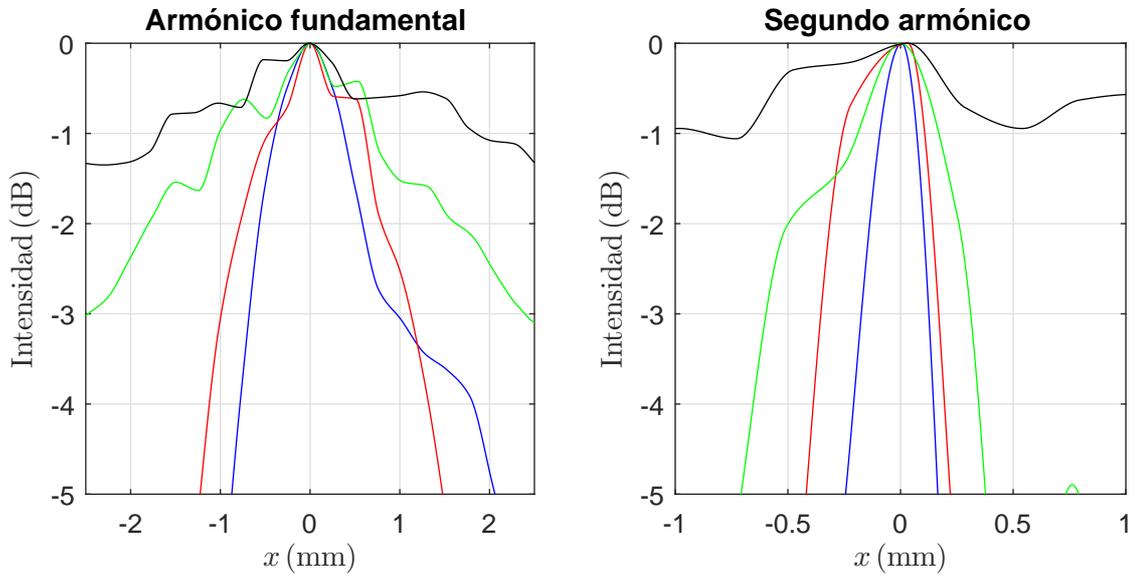


Figura 4.15: Focalización espacial a través de medios de múltiple scattering de espesores 53 mm (azul), 38 mm (rojo), 23 mm (verde) y 8 mm (negro).

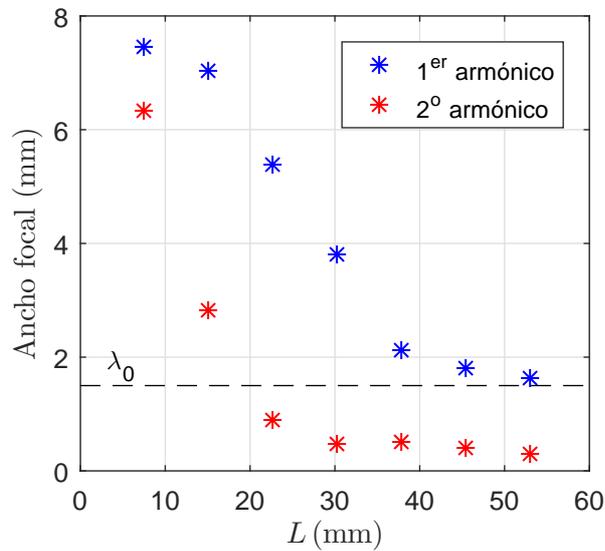


Figura 4.16: Ancho focal vs. espesor del medio. La línea punteada indica el valor de la longitud de onda del armónico central: $\lambda_0 = \frac{c_0}{f_0}$.

La focalización con ondas no lineales tiene una ventaja respecto a la focalización con ondas lineales. La generación del segundo armónico permite obtener, cuando se focaliza con esta frecuencia, un foco más estrecho. En aplicaciones donde se desea concentrar la energía acústica en una pequeña región del espacio, usar inversión temporal para focalizar con el segundo armónico es

una opción más conveniente que focalizar con el primero.

4.3. Conclusión

Las experiencias mostradas en este capítulo verifican un resultado esperable en la inversión temporal con ondas lineales: la focalización espacial mejora cuando la inversión temporal se efectúa a través de un medio de múltiple scattering. Como novedad, hemos mostrado que, con ondas no lineales, este resultado involucra al armónico fundamental y se extiende al segundo armónico. En particular, el ancho focal espacial en esta frecuencia, muestra ser menor que para el armónico fundamental. Esto último es esperable, dado que la longitud de onda del segundo armónico es menor que la del armónico fundamental. Poder disponer del segundo armónico, aprovechando las propiedades de la inversión temporal a través de un medio de múltiple scattering, nos permite resolver por debajo del valor de la longitud de onda central en un proceso de focalización.

Ahora, debemos mencionar un hecho que debe ser tenido en cuenta: en este estudio se aplicaron fundamentos de la teoría de inversión temporal lineal con ondas no lineales. Si efectuáramos una inversión temporal real, el resultado podría no coincidir con el obtenido en este trabajo. Sin embargo, en el capítulo previo se han mostrado evidencias de que los efectos no lineales están desacoplados de los efectos del múltiple scattering. Por lo tanto, las características de la focalización por inversión temporal virtual observadas con ondas no lineales podrían llegar a observarse en una experiencia de inversión temporal real.

La posibilidad de que esto suceda y los resultados mostrados en este capítulo, nos motivan a realizar futuros trabajos donde la inversión temporal real sea investigada.

Capítulo 5

Focalización con guía de ondas

En el capítulo 4 de esta tesis, se estudió la inversión temporal virtual con ondas no lineales. Para ello, se empleó un transductor de potencia. Las ondas no lineales eran emitidas desde el transductor y los efectos no lineales estaban presentes cuando la onda atravesaba el medio de múltiple scattering. En cambio, en este capítulo, estudiamos un proceso de inversión temporal real empleando transductores de baja potencia. Con este proceso buscamos generar ondas que focalicen luego de atravesar el medio de múltiple scattering. La onda atraviesa el medio con baja amplitud, pero en la posición focal alcanza una amplitud suficiente para que los efectos no lineales sean apreciables.

Para realizar estas experiencias, empleamos un proceso de inversión temporal a 1-bit en una guía de ondas sólida. La técnica fue desarrollada por G. Montaldo [12], mostrando que el método es efectivo para generar ondas no lineales en un medio homogéneo. En este trabajo, extendemos la aplicación de la técnica a un medio de múltiple scattering, como el empleado en los capítulos previos. Con esto buscamos estudiar dos fenómenos: la generación de ondas de alta amplitud a través de este medio, donde se observan fenómenos no lineales y la mejora en la calidad focal debido a los efectos del múltiple scattering.

5.1. Inversión temporal a 1-bit

En esta sección explicaremos el método empleado. Además, mostraremos las características de la focalización por inversión temporal en agua. En las secciones siguientes, aplicaremos el método para generar ondas no lineales a través de un medio de múltiple scattering.

El dispositivo empleado se muestra en la figura 5.1. La emisión de ondas ultrasonoras se realiza mediante siete cerámicas piezoeléctricas de frecuencia central 1.75 MHz. Estas se acoplan a uno de los extremos de una guía de ondas cilíndrica maciza de aluminio, de 32 mm de diámetro y 250 mm de largo. El otro extremo de la guía se sumerge en agua.

La generación de los pulsos ultrasonoros se realizó con el sistema Open Lecoour. La electrónica del sistema permite emitir señales en 32 canales independientes y además, amplificar la emisión hasta una amplitud máxima de 200 V. Para la recepción, también dispone de 32 canales independientes. En la experiencia aquí presentada, se emplearon siete canales en la emisión (uno por cada cerámica) y un canal para la recepción.

A continuación describimos el proceso de inversión temporal aplicado en este sistema. A diferencia de la experiencias mostradas en el capítulo que precede, aplicamos un proceso de inversión temporal real.

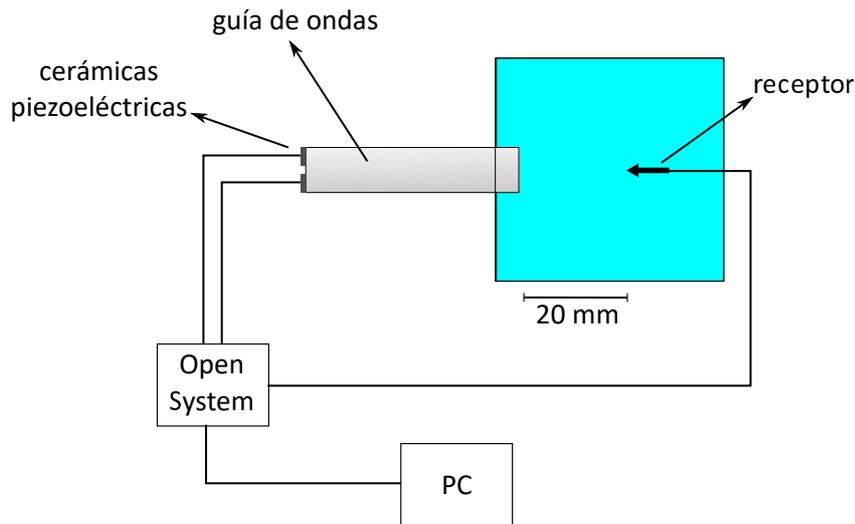


Figura 5.1: Dispositivo experimental. El sistema de emisión recepción es controlado por el sistema OPEN. El receptor es un array de 32 canales, pero en la experiencia se utiliza uno.

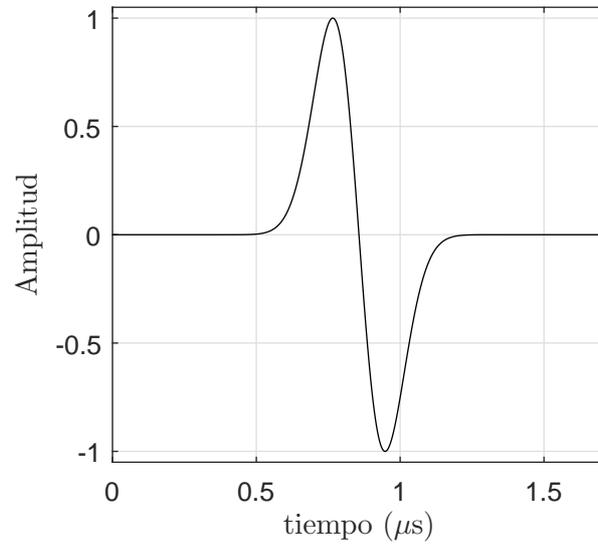


Figura 5.2: Derivada primera de la función gaussiana con frecuencia central 1.75 MHz.

En primer lugar, creamos en la PC una señal de corta duración $e(t)$, cuya dependencia temporal es la primera derivada de la función gaussiana con frecuencia central $f_0 = 1.75$ MHz. Esta señal se muestra en la figura 5.2. La señal se ingresa en el sistema Open y se emite en una de las cerámicas piezoeléctricas con una amplitud de 20 V. En el receptor, se recibe una señal de larga duración, debido a efectos dispersivos y múltiples reflexiones en la guía. Este paso se repite, en forma independiente, con cada una de las cerámicas. El resultado es un conjunto de señales $s_i(t)$ donde el índice i corresponde a cada una de las cerámicas, variando de 1 a 7. En la figura 5.3 se muestran algunas de estas señales normalizadas.

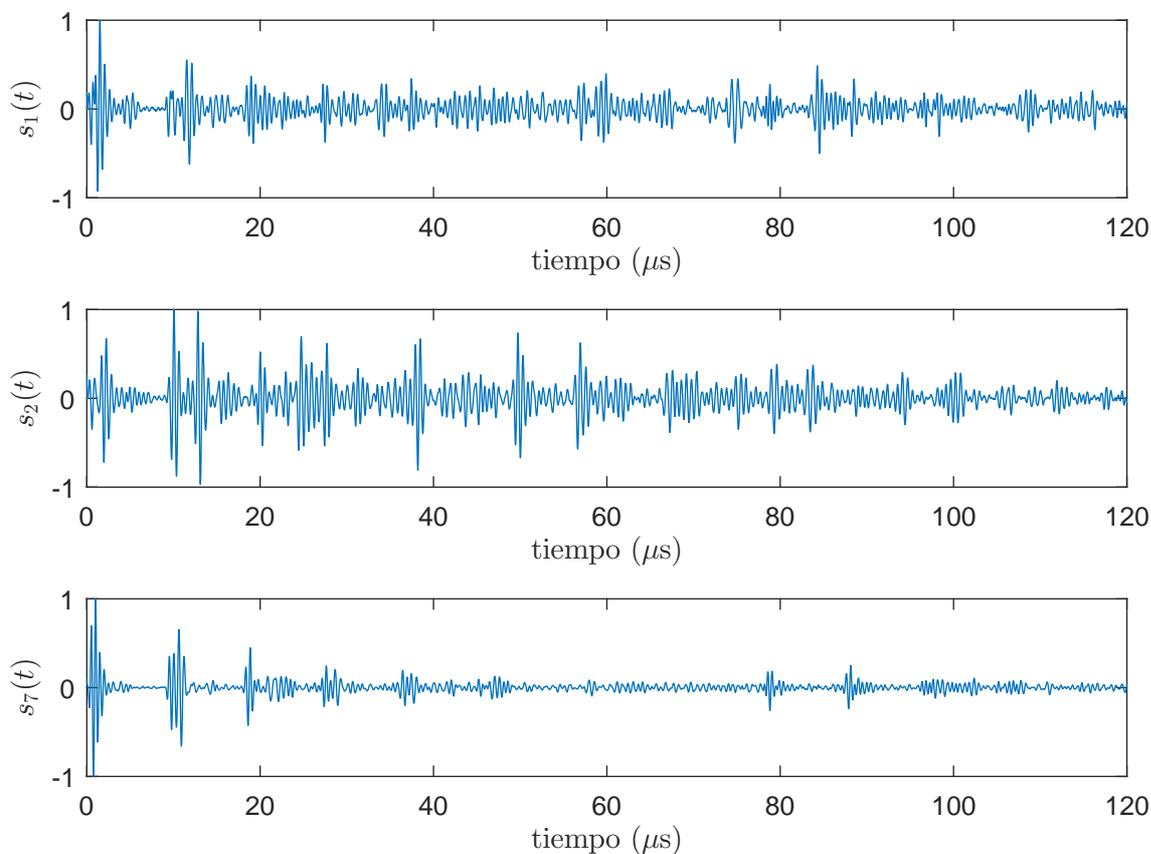


Figura 5.3: Señales recibidas al emitir con las cerámicas 1, 2 y 7.

En segundo lugar, las señales $s_i(t)$ se invierten temporalmente de manera digital. Si asumimos el sistema lineal y recíproco, la emisión de $s_i(-t)$ por la cerámica i , genera una onda focalizada en la posición en la que se encuentra el receptor. Supongamos que la emisión de $s_i(-t)$ se realiza con la misma amplitud que inicialmente se emitió $e(t)$. Por ser la primera de mayor duración, estará transportando una mayor cantidad de energía. Esta energía se concentra en el punto focal. Por lo tanto, el pulso generado por inversión temporal tiene mayor amplitud que la onda transmitida directamente. Un procedimiento más se le puede aplicar a $s_i(-t)$, denominado *inversión temporal a 1 bit*. Con este procedimiento se obtiene la máxima amplitud que es posible en un proceso de inversión temporal [21, 12]. Consiste en tomar el signo de $s_i(-t)$; esto es, asignarle el valor +1 a los valores positivos de la señal y -1 a los valores negativos. El resultado se muestra en la figura 5.4.

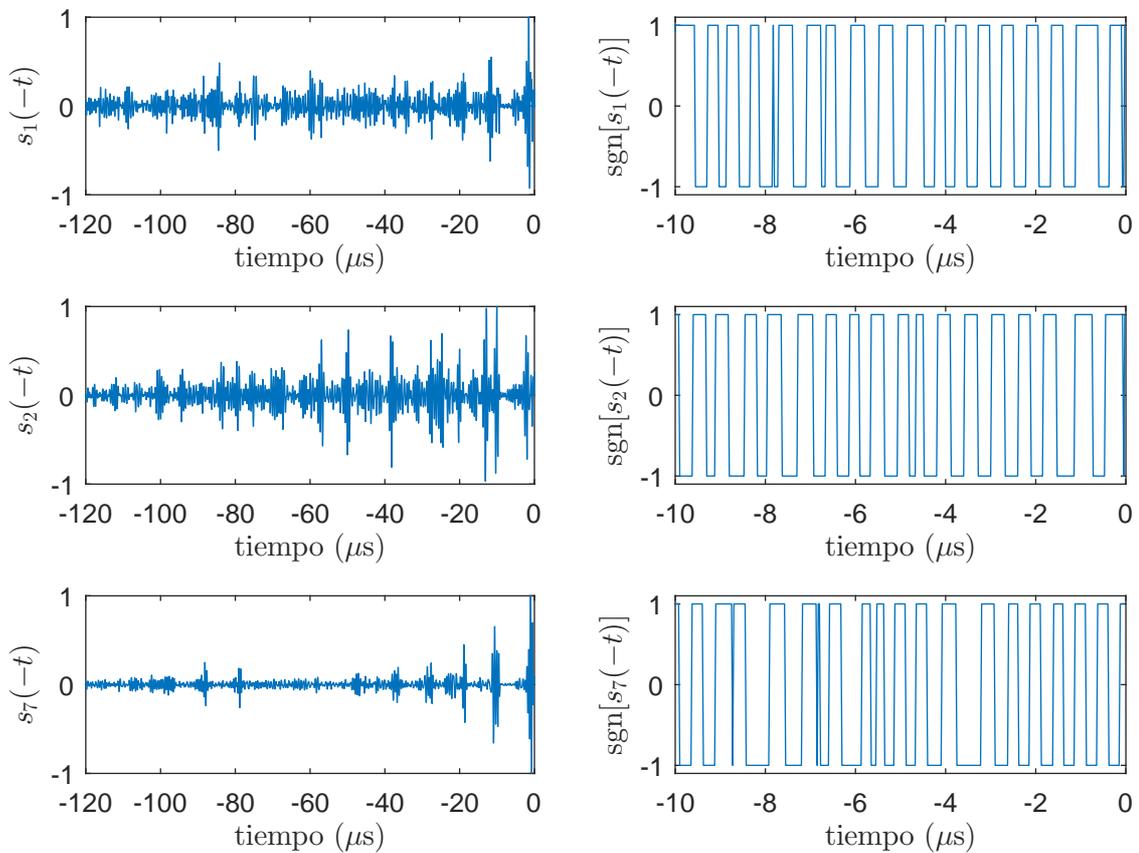


Figura 5.4: Inversión de las señales $s_i(t)$ (primera columna) y normalización a 1 bit (segunda columna). La escala temporal en la segunda columna se ha recortado con el fin de mostrar el efecto que tiene en la señal considerar solo el signo.

Por último, realizamos efectivamente la inversión temporal. Las señales $\text{sgn}[s_i(-t)]$ se ingresan en el sistema Open y se emiten cada una en la cerámica que se usó para adquirirla. Como se ha hecho en capítulos previos, notaremos V_{in} al voltaje con que se emiten las señales. En el receptor se adquieren señales focalizadas en el tiempo, como las que se muestran en la figura 5.5(a). Estas están normalizadas respecto a la máxima amplitud de la señal mas intensa (mostrada en rojo), obtenida con un voltaje $V_{in} = 14\text{ V}$. La señal de menor amplitud (mostrada en azul) se obtuvo con un voltaje de $V_{in} = 2\text{ V}$.

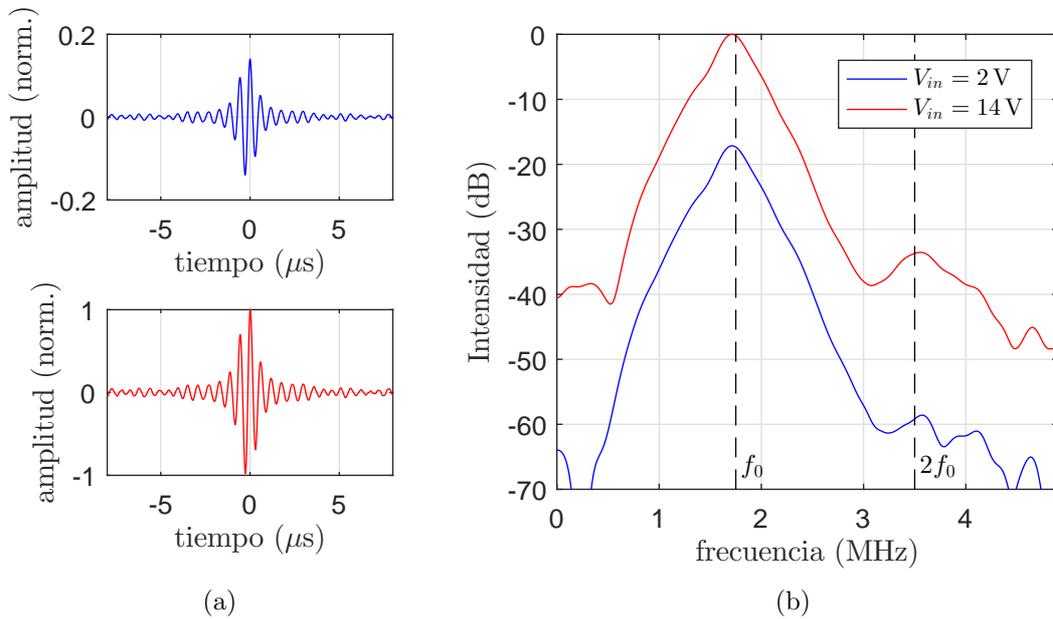


Figura 5.5: Señales temporales y espectros obtenidos por inversión temporal a 1 bit.

En la figura 5.5(b), se muestran los espectros de las señales generadas con inversión temporal. Los dos espectros muestran su máximo en la frecuencia central de la emisión ($f_0 = 1.75$ MHz). En la señal obtenida con un voltaje en la entrada de 14 V, se distingue un máximo local en la frecuencia $2f_0 = 3.50$ MHz. Esta frecuencia, correspondiente al segundo armónico, es generada si efectos no lineales están presentes.

Para verificar que la amplitud del segundo armónico responde a efectos no lineales, realizamos una experiencia que nos permite caracterizar el crecimiento del segundo armónico. En el capítulo 2 se mostró teóricamente que, en una onda plana, la amplitud del armónico fundamental es directamente proporcional a la amplitud del voltaje en la entrada y la amplitud del segundo armónico, directamente proporcional al cuadrado de dicho voltaje (ecuación 2.39). Esta relación se verificó experimentalmente para las ondas generadas con un transductor plano y para el campo coherente de una onda que atraviesa un medio de múltiple scattering. En este capítulo, analizaremos si esta relación se verifica para la onda generada por inversión temporal.

Con este fin, generamos ondas con amplitudes de voltaje entre $V_{in} = 2$ V y $V_{in} = 14$ V, con un paso de 2 V. La amplitud del primer y del segundo armónico se muestran en la figura 5.6 en función del voltaje en la entrada. La amplitud

del primer armónico se ajusta con un polinomio de la forma $p_1 = a_1 V_{in}$ y la amplitud del segundo armónico con uno de la forma $p_2 = a_2 V_{in}^2$. a_1 y a_2 son los únicos parámetros a ajustar. El resultado del ajuste se muestra en rojo. La buena relación entre los resultados experimentales y el ajuste ($R^2 = 1.000$ en el primer ajuste y $R^2 = 0.998$ en el segundo), indica que la amplitud del segundo armónico es directamente proporcional al cuadrado del voltaje en la entrada. Por lo tanto, podemos concluir que la presencia de esta frecuencia en el espectro de la onda generada con inversión temporal, corresponde a un efecto no lineal.

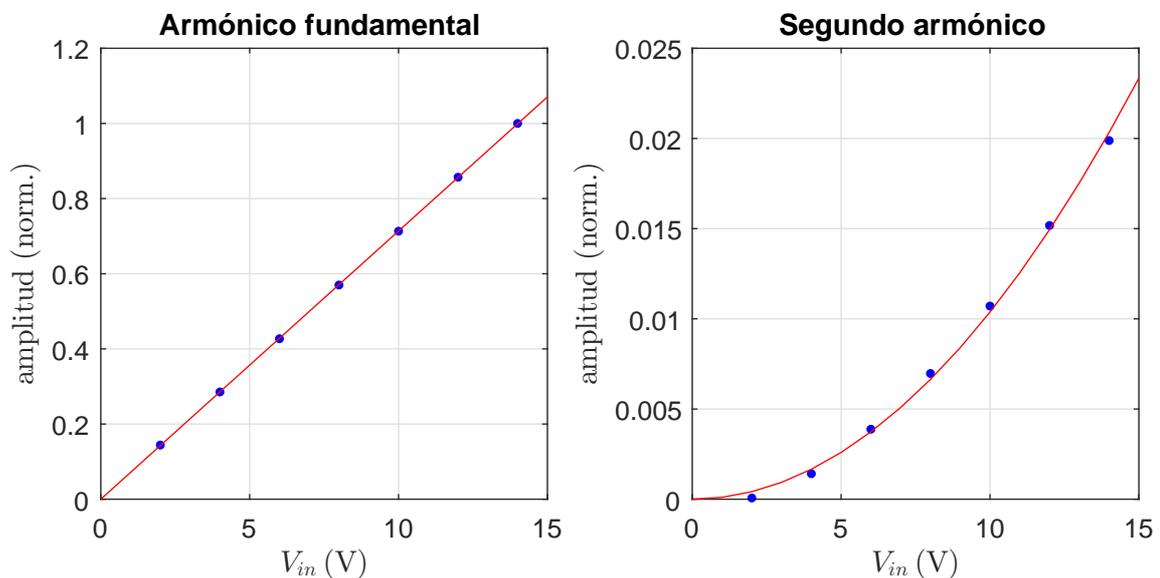


Figura 5.6: Amplitud de los dos primeros armónicos en función del voltaje en la entrada. En azul graficamos los datos experimentales; en rojo, el ajuste. En el primer ajuste el coeficiente de determinación es $R^2 = 1.000$ y en el segundo $R^2 = 0.998$.

El proceso aquí mostrado, permite generar ondas focalizadas de amplitud aún mayor si elevamos el voltaje en la entrada. En esta sección estudiamos este proceso con un voltaje máximo de 14 V porque que si empleamos voltajes mayores, la amplitud de la onda focalizada satura el instrumento receptor. En las secciones que siguen aplicamos este proceso para generar ondas focalizadas a través de un medio de múltiple scattering. En estas condiciones, la onda focalizada alcanza amplitudes menores, por lo que es posible elevar el voltaje en la entrada sin llegar al nivel de saturación.

5.2. Generación de ondas no lineales a través del medio de múltiple scattering

En esta sección investigamos la posibilidad de generar ondas no lineales con una inversión temporal a 1-bit a través de un medio de múltiple scattering. El arreglo experimental se muestra en la figura 5.7. El medio de múltiple scattering se interpone entre la guía de ondas y el receptor. Este medio tiene las mismas características que los empleados en los capítulos anteriores: alambres de cobre paralelos distribuidos aleatoriamente con una densidad $d = 0.12$ alambres/mm².

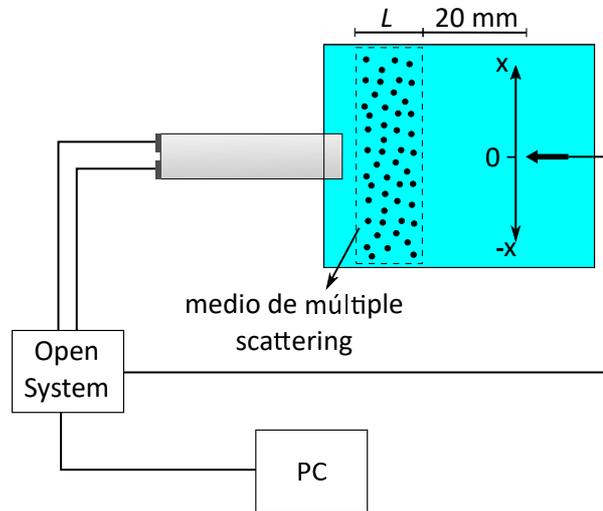


Figura 5.7: Dispositivo experimental. El sistema de emmisión y recepción es el mismo empleado en la sección anterior. En este caso, se interpone entre la guía de ondas y el receptor, un medio de multiple scattering.

El procedimiento de inversión temporal se realiza siguiendo los pasos explicados en la sección 5.1. A diferencia de la experiencia mostrada en dicha sección, la onda emitida por cada cerámica en el primer paso de inversión temporal atraviesa, además de la guía de ondas, el medio de múltiple scattering. Por lo tanto, el conjunto de señales $s_i(t)$ sufrirá efectos de dispersión y de múltiple scattering. Como ejemplo, mostramos en la figura 5.8 las señales obtenidas con la cerámica 1 para medios de múltiple scattering de distintos espesores. El segundo efecto podemos notarlo comparando, por ejemplo, la señal obtenida con $L = 26$ mm con la señal obtenida con $L = 39$ mm. En la primera es posible distinguir, en torno a $t = 0$, un pulso directo (o balístico); en la segunda, este pulso es indistinguible.

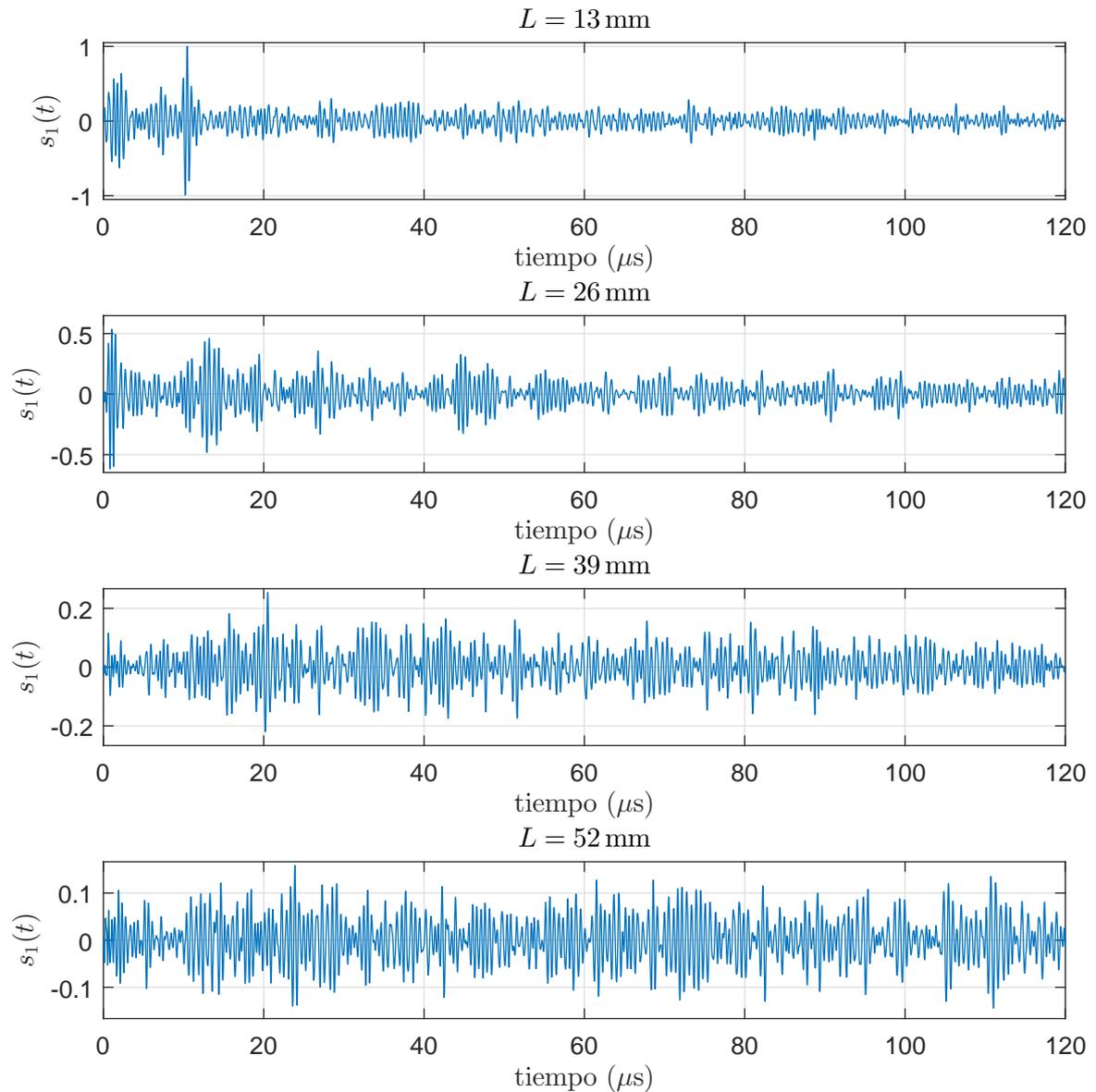


Figura 5.8: Señales obtenidas a través de medios de múltiple scattering de espesores 13 mm, 26 mm, 39 mm y 52 mm.

Las figuras 5.9 a 5.12 muestran el resultado de la inversión temporal empleando medios de distinto espesor. En cada una se muestran las ondas generadas con voltajes de amplitud 10 V y 32 V, junto con sus espectros. En las señales temporales se observan cambios en sus amplitudes: mayor voltaje implica mayor amplitud y mayor espesor del medio de múltiple scattering

implica menor amplitud. Esta observación también se verifica en los espectros de las señales. En las cuatro figuras puede notarse que la intensidad en la frecuencia del primer armónico (f_0) decae aproximadamente 10 dB cuando el voltaje decrece de 32 V a 10 V. En la frecuencia del segundo armónico ($2f_0$), la intensidad decrece entre 15 dB y 20 dB.

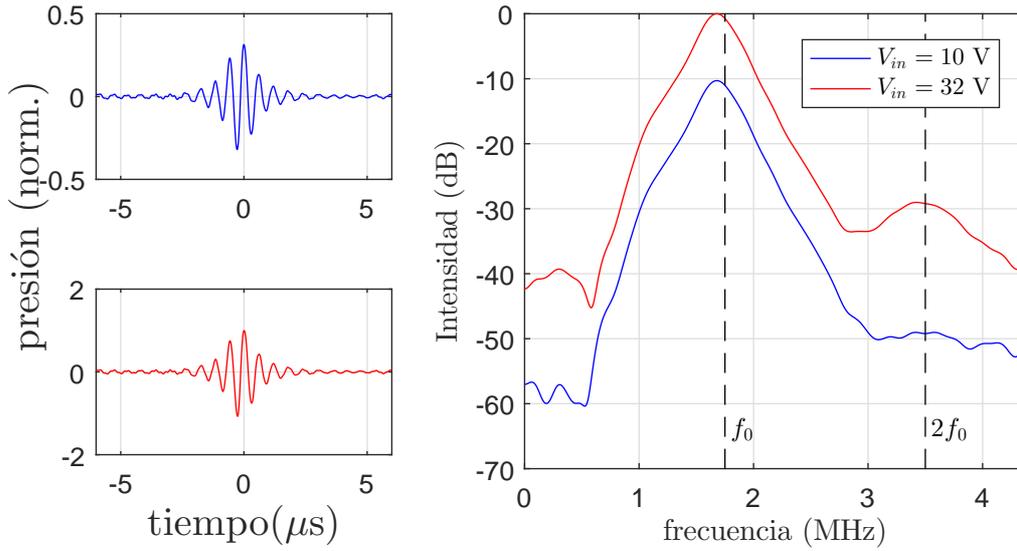


Figura 5.9: Inversión temporal en un medio de múltiple scattering de espesor $L = 13$ mm.

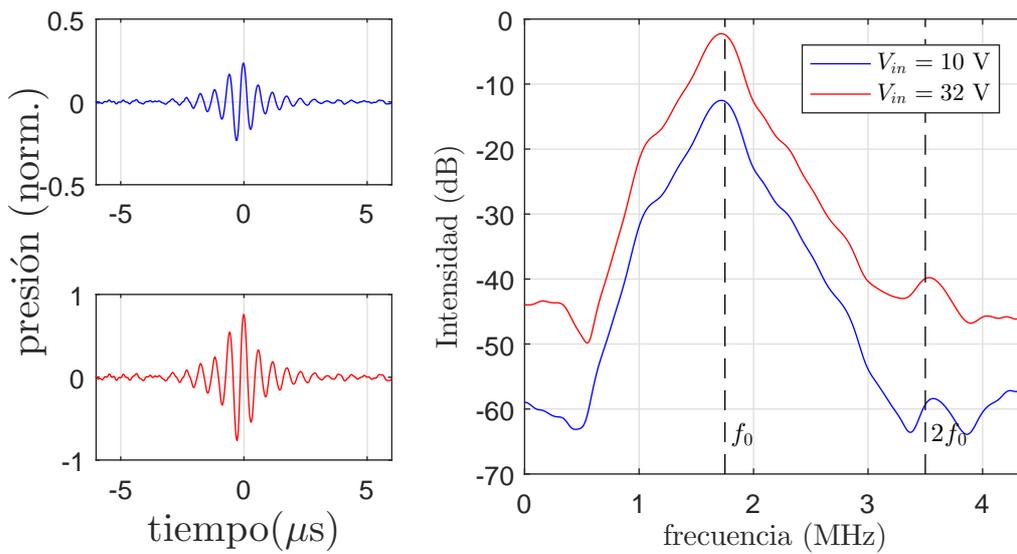


Figura 5.10: Inversión temporal en un medio de múltiple scattering de espesor $L = 26$ mm.

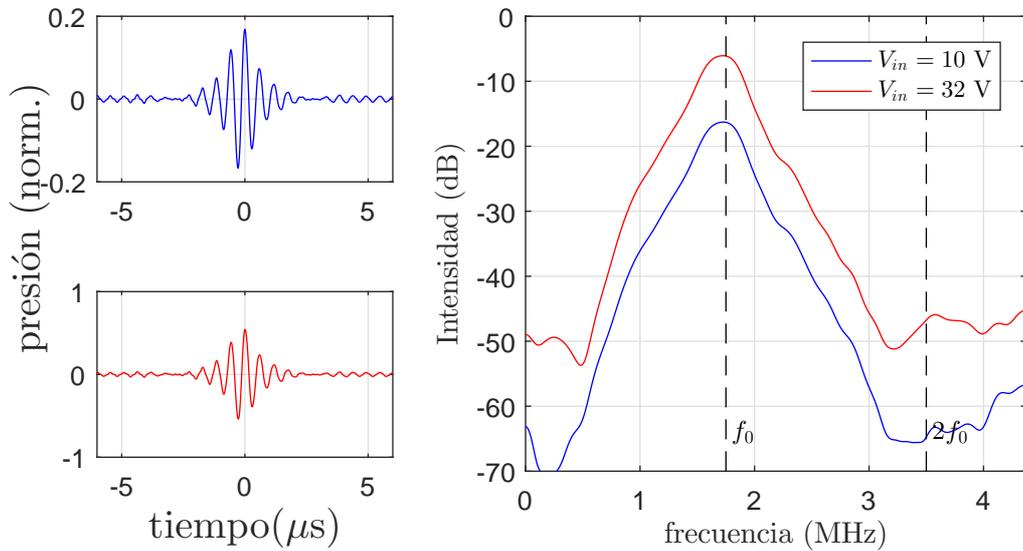


Figura 5.11: Inversión temporal en un medio de múltiple scattering de espesor $L = 39$ mm.

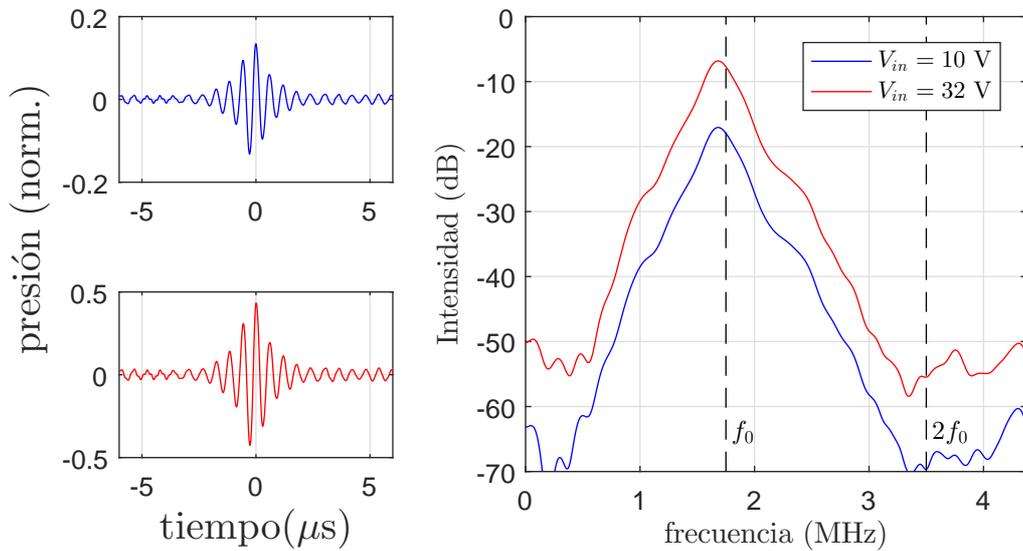


Figura 5.12: Inversión temporal en un medio de múltiple scattering de espesor $L = 52$ mm.

La dependencia de la amplitud de cada armónico con el espesor del medio de múltiple scattering y con el voltaje aplicado, la caracterizaremos considerando un modelo similar al propuesto en el capítulo 3 para caracterizar la intensidad del campo coherente. Por un lado, supondremos que la amplitud del primer armónico es directamente proporcional al voltaje aplicado y que la amplitud

del segundo armónico es directamente proporcional al cuadrado de este voltaje. Esta relación fue verificada en la sección previa, donde el medio de múltiple scattering no fue empleado. Por otro lado, supondremos que las amplitudes de ambos armónicos decaen exponencialmente cuando se aumenta el espesor del medio. Estos supuestos, podemos expresarlos como:

$$p_1 \propto \exp\left(-\frac{L}{l_1}\right) V_{in} \quad (5.1)$$

$$p_2 \propto \exp\left(-\frac{L}{l_2}\right) V_{in}^2 \quad (5.2)$$

Los parámetros l_1 y l_2 caracterizan el decaimiento exponencial de las amplitudes.

5.2.1. Relación entre las amplitudes y el voltaje aplicado

El crecimiento de la amplitud de cada armónico en función del voltaje aplicado lo caracterizamos con un método ya presentado en esta tesis: realizamos un barrido en voltaje, desde 10 V a 32 V con un paso de 2 V. Este barrido se repite con medios de múltiple scattering de distinto espesor. Las amplitudes las ajustamos con polinomios de la forma

$$p_1 = \alpha_1(L) V_{in} \quad (5.3)$$

$$p_2 = \alpha_2(L) V_{in}^2 \quad (5.4)$$

donde $\alpha_1(L)$ y $\alpha_2(L)$ son los únicos parámetros a ajustar.

En la figura 5.13 se grafican los resultados de esta experiencia. Para mejorar la visualización de los resultados los ejes se presentan en escala logarítmica. Los puntos representan los datos experimentales, mientras que en negro se grafica la curva de tendencia correspondiente a cada serie de datos. La experiencia se ajusta al modelo propuesto; esto nos permite verificar que la presencia del segundo armónico efectivamente responde a un régimen no lineal.

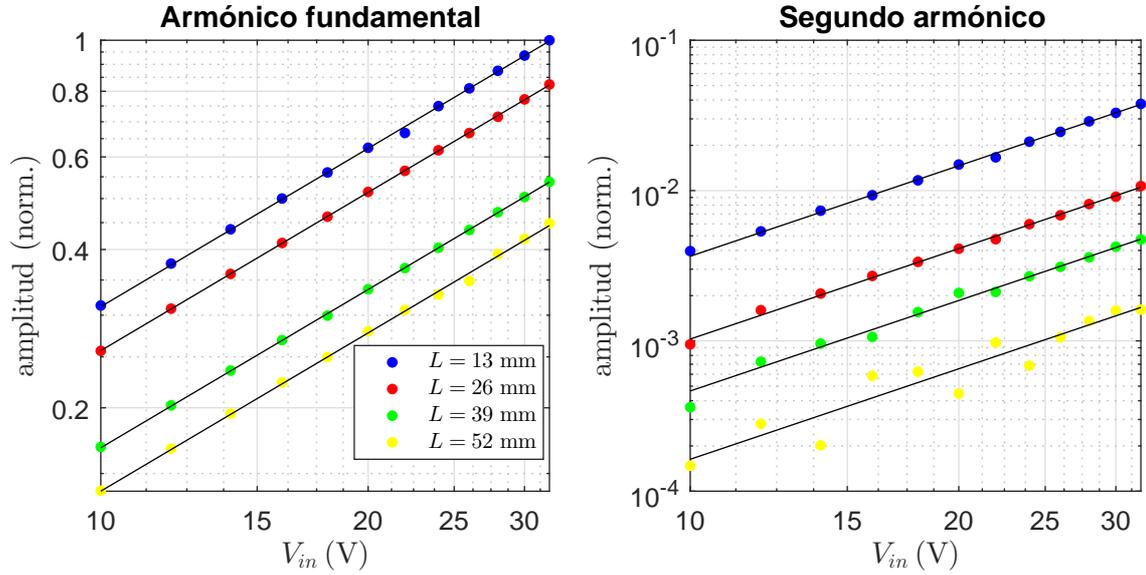


Figura 5.13: Crecimiento de la amplitud de los armónicos en función del voltaje en la entrada. En negro se muestra el ajuste correspondiente a cada serie de datos.

5.2.2. Relación entre las amplitudes y el espesor del medio.

Si comparamos las ecuaciones 5.3 y 5.4 con 5.1 y 5.2, es inmediato notar las siguientes relaciones:

$$\alpha_1(L) \propto \exp\left(-\frac{L}{l_1}\right) \quad (5.5)$$

$$\alpha_2(L) \propto \exp\left(-\frac{L}{l_2}\right) \quad (5.6)$$

Los valores de α_1 y α_2 los obtenemos para cada valor de L de los ajustes mostrados en la figura 5.13. En la figura 5.14, graficamos con puntos azules, $\log(\alpha_1)$ y $\log(\alpha_2)$ en función de L . Podemos notar que estas variables verifican una relación lineal. Con un ajuste lineal (mostrado en rojo en el gráfico), obtenemos los parámetros de decaimiento:

$$l_1 = (53.0 \pm 4.4) \text{ mm}$$

$$l_2 = (14.3 \pm 1.0) \text{ mm}$$

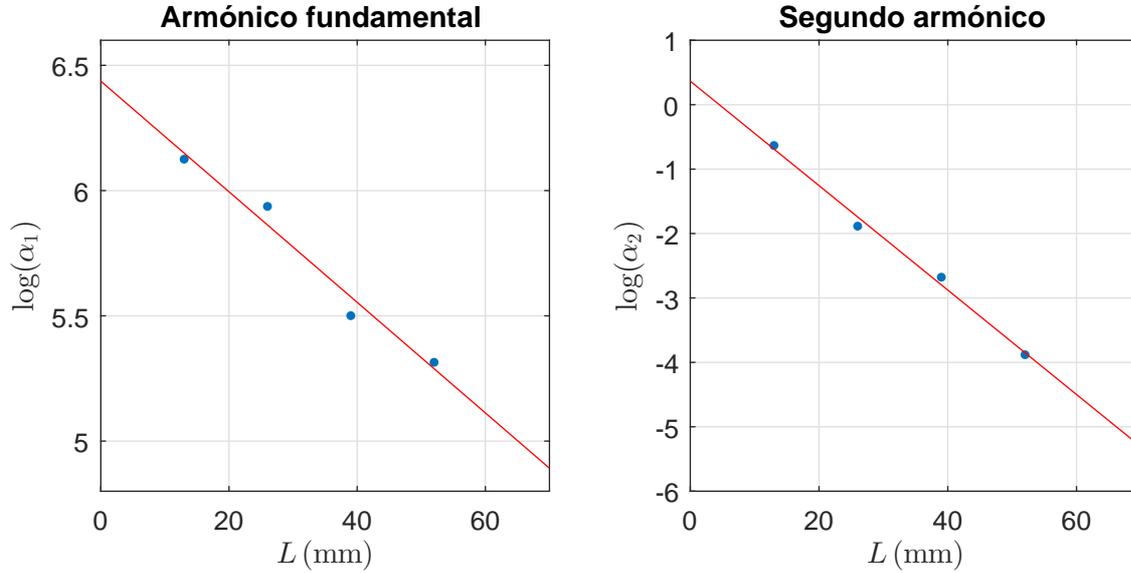


Figura 5.14: Decaimiento de la amplitud del primer y segundo armónico en función del espesor del medio de múltiple scattering. En azul se muestran los datos experimentales y en rojo un ajuste lineal.

Estos parámetros permiten realizar estimaciones de la amplitud del primer y segundo armónico. Por ejemplo, supongamos que realizamos la experiencia con un voltaje V_0 y medimos las amplitudes que alcanzan el primer armónico y el segundo armónico cuando se focaliza a través de un medio de espesor L_0 . Notemos estos valores como p_{01} y p_{02} . Para estimar la amplitudes p_1 y p_2 que alcanzan estos armónicos cuando se aplica un voltaje V y se focaliza a través de un medio de espesor L , basta realizar las siguientes operaciones:

$$p_1 = p_{01} \exp\left(\frac{L_0 - L}{l_1}\right) \frac{V}{V_0}$$

$$p_2 = p_{02} \exp\left(\frac{L_0 - L}{l_2}\right) \left(\frac{V}{V_0}\right)^2$$

5.2.3. Focalización espacial

En esta sección estudiaremos el ancho focal espacial de la onda generada por inversión temporal a 1 bit a través del medio de múltiple scattering. Esto implica estudiar la amplitud de la onda generada alrededor del punto focal, en el instante en que focaliza. Para ello adquirimos señales en distintos puntos de la dirección transversal x (definida en la figura 5.7), desde $x = 0.0$ hasta $x = 3.0$ mm, con un paso de 0.1 mm. En la figura 5.15, mostramos el campo

espacio-temporal de la intensidad del foco de inversión temporal simetrizado respecto a $x = 0$, obtenido con medios de múltiple scattering de distintos espesores. Notemos que el ancho focal espacial decrece cuando se aumenta el espesor del medio.

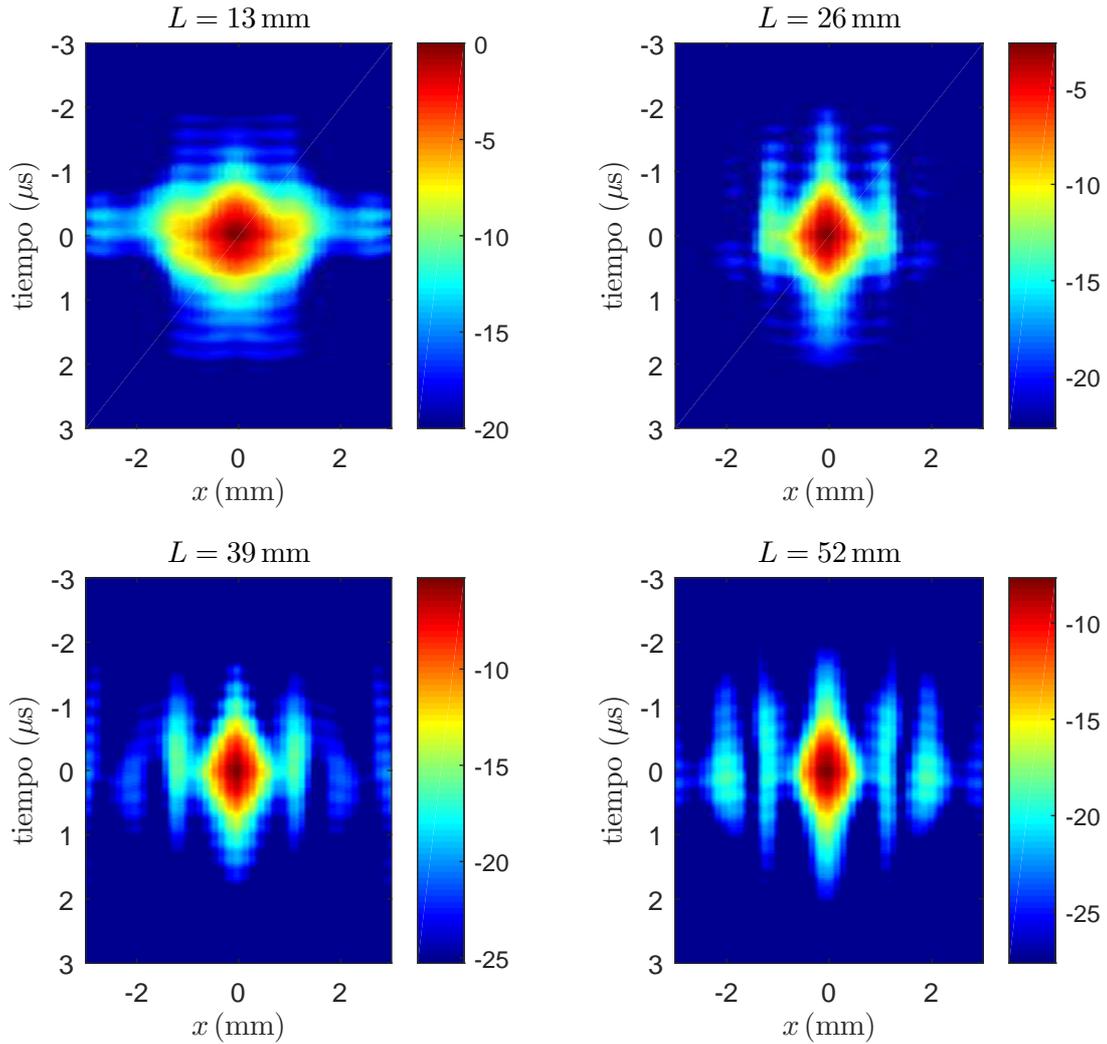


Figura 5.15: Intensidad en torno al foco generado por inversión temporal.

En la figura 5.16 se grafica el foco espacial en el tiempo $t = 0$. Para comparar el ancho de la focalización obtenida con los distintos espesores, las intensidades las normalizamos respecto al valor máximo obtenido con cada espesor. Para cada espesor, medimos el ancho focal a -3 dB, -6 dB y -9 dB. El resultado de esta medida se muestra la figura 5.17. En el eje de las abscisas se representa

el espesor del medio de múltiple scattering dividido el libre recorrido medio elástico calculado para la frecuencia central de la emisión: $l_e = 8.3$ mm. Cuando el espesor del medio de múltiple scattering tiene un espesor entre 5 y 6 veces el libre recorrido medio elástico, el ancho focal a -3 dB alcanza su valor mínimo.

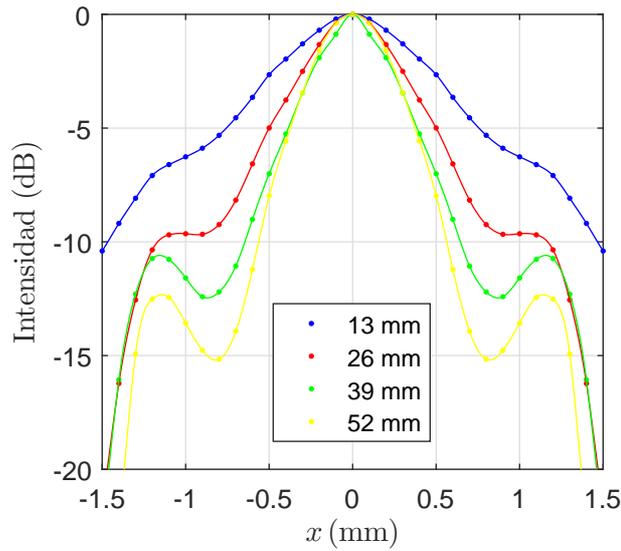


Figura 5.16: Focalización espacial.

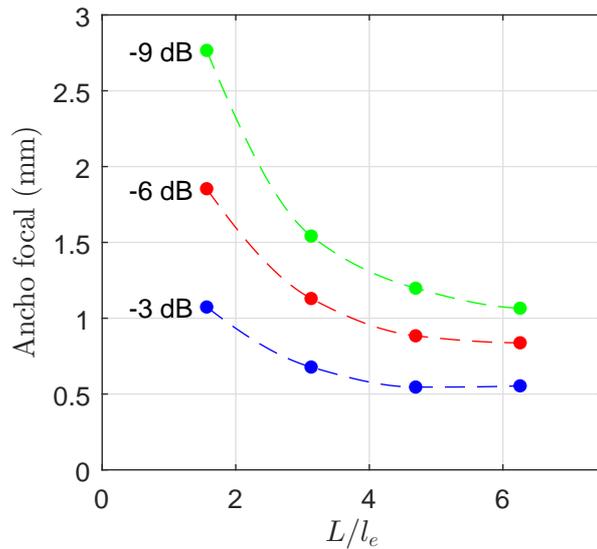


Figura 5.17: Ancho focal espacial en función de L/l_e , donde l_e es el libre recorrido medio elástico correspondiente a la frecuencia fundamental.

5.2.4. Características de la focalización

Hasta este punto se ha mostrado que es posible focalizar ondas de alta amplitud a través de un medio de múltiple scattering con una buena calidad focal y efectos no lineales apreciables. Una diferencia que tiene el método propuesto en este capítulo respecto a transmitir ondas no lineales a través del medio con un transductor de potencia (cómo se hizo en el capítulo 3) es que la onda mantiene una amplitud baja durante la transmisión. Este método puede resultar útil en aplicaciones donde una onda intensa pueda tener efectos indeseables cuando atraviesa el medio de múltiple scattering. Con una inversión temporal a 1-bit, la amplitud de la onda se mantiene baja hasta el momento de focalizar. En esta sección argumentaremos esta afirmación.

En primer lugar, analizaremos las señales directas las cuales hemos notado como $s_i(t)$. Para ello, realicemos una inversión temporal virtual a 1-bit. Esto implica realizar el producto de correlación $\text{sgn}[s_i(t)] \star s_i(t)$ y sumar el resultado para las siete señales. El cálculo es el siguiente:

$$\gamma_T(t) = \sum_{i=1}^7 \text{sgn}[s_i(t)] \star s_i(t) \quad (5.7)$$

El resultado de la ecuación 5.7 podemos calcularlo para los distintos espesores del medio de múltiple scattering estudiado en este capítulo. El objetivo es observar el espectro que resulta. Si las señales $s_i(t)$ tienen componentes espectrales en la frecuencia del segundo armónico, estas deberían manifestarse en el espectro de $\gamma_T(t)$. Esto es lo que ocurría en el análisis realizado en el capítulo 3.

En la figura 5.18 mostramos los espectros de $\gamma_T(t)$ obtenidos para medios de distinto espesor y los comparamos con los espectros obtenidos mediante la inversión temporal real. Para facilitar la comparación, normalizamos cada espectro respecto a su valor máximo. Además, cada espectro se obtuvo con un voltaje $V_{in} = 20 \text{ V}$.

En un entorno de la frecuencia central, donde los valores de intensidad se mantienen mayores a -20 dB, los espectros no presentan diferencias significativas. Sin embargo, en la frecuencia correspondiente al segundo armónico, existen claras diferencias entre los espectros: la inversión temporal real tiene una componente en esta frecuencia por encima de la inversión temporal virtual. Podemos afirmar en base a esta observación, que el segundo armónico se gene-

ra en el proceso de focalización por inversión temporal y no en la transmisión de la señal directa.

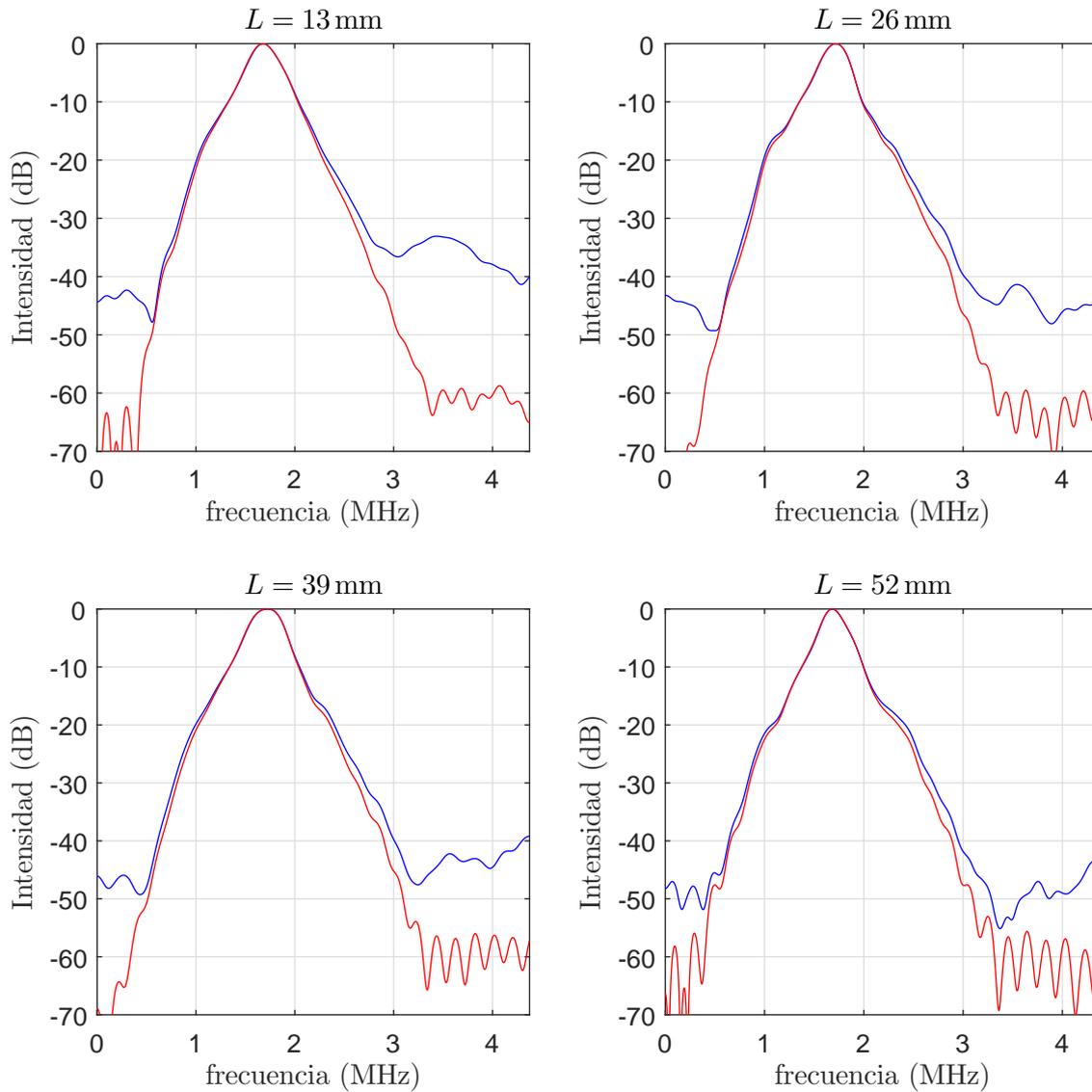


Figura 5.18: Comparación de espectros obtenidos por inversión temporal virtual (rojo) y real (azul). Todos fueron obtenidos con un voltaje aplicado de 20 V.

Ahora mostraremos que los efectos no lineales se manifiestan en torno al foco. Para ello realizamos un barrido en la dirección z . A las señales obtenidas en cada posición les realizamos una transformada de Fourier, lo que nos permite estudiar el campo de intensidad acústica del primer y del segundo armónico. En la figura 5.19 se muestran los campos de intensidad acústica correspondientes

a estos armónicos para medios de múltiple scattering de distinto espesor. Cada serie de datos esta normalizada respecto al máximo valor obtenido para poder comparar mejor la distribución de la intensidad. Notemos que la intensidad acústica del primer armónico se encuentra focalizada alrededor de la posición focal. La curva azul, que se muestra menos focalizada, fue obtenida con el medio de menor espesor. Este hecho es consistente con los resultados mostrados en la sección previa.

Observando la distribución de la intensidad del segundo armónico, encontramos que en posiciones anteriores al foco esta decae considerablemente. Esto implica que el segundo armónico se genera cuando la onda focaliza. Con esto confirmamos que la no linealidad (manifiesta por la generación del segundo armónico) se observa en la focalización y no mientras la onda se propaga a través del medio de múltiple scattering.

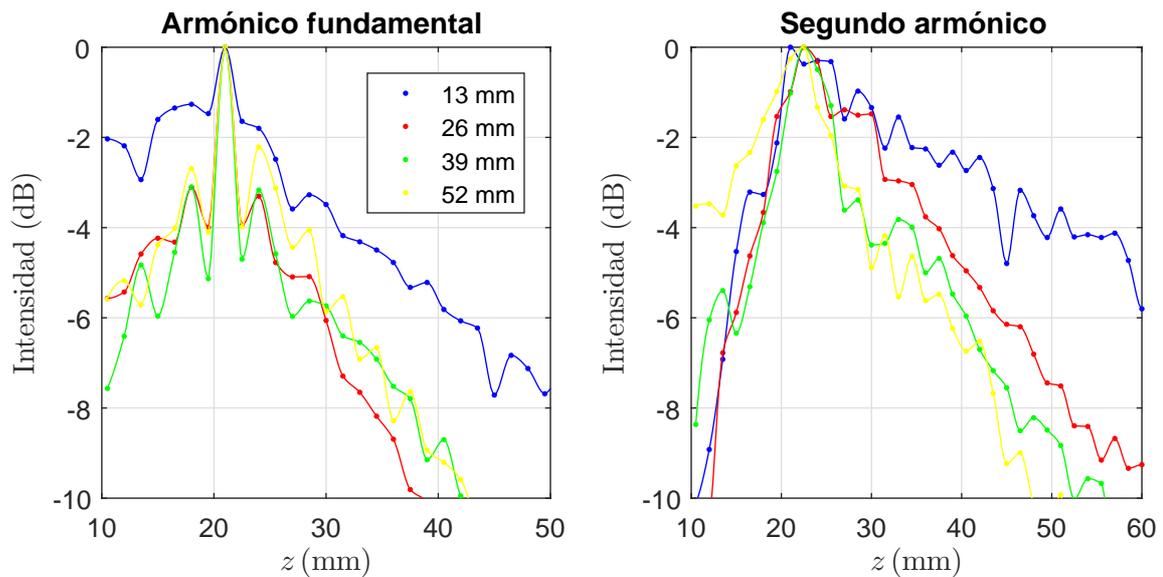


Figura 5.19: Campos de intensidad acústica correspondientes al primer y al segundo armónico. Los colores corresponden a distintos espesores del medio de múltiple scattering.

5.3. Conclusión

Con el método desarrollado en este capítulo hemos logrado generar ondas focalizadas no lineales a través de un medio de múltiple scattering. Lo novedoso del método es que puede realizarse con electrónica de baja potencia y que la propagación de la onda es lineal hasta que focaliza. En torno al punto focal, la

amplitud de la onda crece y los efectos no lineales -que producen la generación del segundo armónico- son apreciables. Con un transductor, como el empleado en el capítulo previo, es posible transmitir ondas no lineales a través del medio de múltiple scattering, pero es necesario un amplificador de potencia. Además, la onda debe atravesar el medio con una intensidad alta para que su amplitud no se extinga durante la propagación.

Dos efectos relacionados con el medio de múltiple scattering han sido analizados. Primero, se ha mostrado como el medio contribuye a mejorar la calidad focal: cuanto más espeso, mejor es la focalización espacial. Sin embargo, existe un efecto adverso: la amplitud de la onda decae cuando se incrementa el espesor del medio. Por lo tanto, existe un compromiso entre la calidad del ancho focal espacial y la amplitud de la onda. En este trabajo se ha logrado caracterizar el decaimiento de la onda. Con este estudio, es posible realizar una estimación del voltaje que es necesario aplicar para lograr la amplitud que se desee. Por otro lado, se ha caracterizado la relación entre el ancho focal y el espesor del medio, mostrándose que existe un límite de saturación para el cual se alcanza el ancho focal mínimo. Si se deseara usar un medio de múltiple scattering con el fin de mejorar la calidad del foco espacial, basta con que sea del ancho suficiente para alcanzar el nivel de saturación.

Capítulo 6

Conclusión

En este trabajo, nos propusimos estudiar ondas acústicas no lineales y su interacción con medios de múltiple scattering.

En el capítulo 2, estudiamos ondas que se propagan en agua; esto es, un medio homogéneo. El objetivo planteado fue estudiar fenómenos que caracterizan la no linealidad de la propagación acústica. En particular, se obtuvieron buenos resultados en la caracterización del campo acústico de ondas generadas con un transductor plano y se encontró una buena herramienta de cálculo numérico (HIFU Simulator) que en futuras aplicaciones nos permitirán realizar estimaciones del campo acústico de ondas no lineales. Por otro lado, se verificó el buen funcionamiento de los equipos empleados y su calibración. El trabajo realizado en este capítulo, además de dar el paso inicial al estudio de fenómenos de scattering que se realizó en capítulos posteriores, nos deja la posibilidad de realizar futuros trabajos de caracterización de medios en régimen no lineal. Un ejemplo de es esto, es la posibilidad de realizar medidas del parámetro de no linealidad β en medios distintos al agua.

En el capítulo 3, analizando la interacción de ondas no lineales con medios de múltiple scattering, buscamos verificar la independencia entre múltiple scattering y no linealidad en nuestras condiciones experimentales. Pudimos verificar que en el rango de intensidades trabajado, el libre recorrido medio elástico correspondiente a cada frecuencia presente en la onda no lineal, puede ser obtenido mediante cálculos deducidos en el contexto de una teoría lineal. Esto implica que, durante la propagación de la onda en el medio de múltiple scattering, la no linealidad se mantiene independiente del scattering. Este resultado nos permite desarrollar aplicaciones en la caracterización de medios de

este tipo, con la ventaja que el estudio se puede hacer en un rango de frecuencias mayor que con una onda lineal. Dos cuestiones asociadas a este fenómeno se buscarán investigar en trabajos futuros. Primero, ¿cuál es el límite de intensidad para el cuál se mantiene la independencia? Pues, si la intensidad de la onda es lo suficientemente alta, algunas de las hipótesis que justifican el desacople dejarían de ser válidas. Segundo, ¿qué sucede si el medio no es lo suficientemente espeso o denso? Por ejemplo, si el espesor del medio es menor al libre recorrido medio, es posible que exista una interacción entre los fenómenos no lineales y de múltiple scattering.

Continuando el estudio que involucra estos fenómenos, en el capítulo 4 estudiamos el múltiple scattering de ondas no lineales, empleando el proceso de inversión temporal. En este capítulo, se encontró que la onda no lineal, verifica características ya observadas en el régimen lineal. Un ejemplo de esto, es la disminución del ancho focal (tanto para el armónico fundamental como para el segundo armónico) cuando se aumenta el espesor del medio. Esta experiencia, a diferencia de la realizada en el capítulo 3, involucra a la onda completa, es decir, a sus componentes coherentes e incoherentes. El estudio nos permite proponer la inversión temporal virtual como una herramienta más para evaluar el desacople entre scattering y no linealidad. Sin embargo, nos quedan algunas preguntas pendientes por responder: ¿hasta qué límite de intensidad la focalización es posible? ¿Estaría este límite vinculado con el acople entre estos fenómenos? Las investigaciones futuras, buscaran responder estas cuestiones.

Finalmente, en el capítulo 5, se implementó un método que permite focalizar por inversión temporal ondas no lineales. Existe una diferencia importante entre esto y lo realizado en capítulos previos 3 y 4: la onda no lineal no atraviesa el medio de múltiple scattering, sino que se forma en la región focal. Esto es importante en aplicaciones donde las ondas de alta amplitud puedan tener un efecto no deseado en el medio que atraviesa. Con este método la onda se mantiene con baja amplitud hasta que termina de propagarse en el medio.

Estos resultados muestran que hemos logrado desarrollar buenas técnicas para estudiar ondas no lineales, tanto en medios homogéneos como de múltiple scattering. El estudio aquí presentado, abre un amplio campo de estudio, nuevo en el Laboratorio de Acústica, con muchas cuestiones por resolver y aplicaciones por desarrollar.

Referencias bibliográficas

- [1] JE Kennedy, GR Ter Haar, and D Cranston. High intensity focused ultrasound: surgery of the future? *The British journal of radiology*, 76(909):590–599, 2003.
- [2] Guillermo Cortela Tiboni. Estudio experimental de parámetros de scattering y transporte en la propagación de un pulso acústico. Tesis de maestría, Universidad de la República (Uruguay), Facultad de Ciencias - PEDECIBA, 2002.
- [3] Yamil Abraham. Estudio y caracterización de inversión temporal acústica a través de medios de scattering múltiple. Tesis de maestría, Universidad de la República (Uruguay), Facultad de Ciencias - PEDECIBA, 2017.
- [4] Mark F Hamilton, David T Blackstock, et al. *Nonlinear acoustics*, volume 1. Academic press San Diego, 1998.
- [5] Kevin D Evans, Brandon Weiss, and Michael Knopp. High-intensity focused ultrasound (hifu) for specific therapeutic treatments: a literature review. *Journal of Diagnostic Medical Sonography*, 23(6):319–327, 2007.
- [6] Joshua E Soneson. A user-friendly software package for hifu simulation. In *AIP Conference Proceedings*, volume 1113, pages 165–169. AIP, 2009.
- [7] Arnaud Tourin, Arnaud Derode, Aymeric Peyre, and Mathias Fink. Transport parameters for an ultrasonic pulsed wave propagating in a multiple scattering medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 108(2):503–512, 2000.
- [8] Nicolas Viard, Bruno Giammarinaro, Arnaud Derode, and Christophe Barriere. Coherent transmission of an ultrasonic shock wave through a multiple scattering medium. *Physical Review E*, 88(2):023201, 2013.

- [9] Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. i. basic principles. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5):555–566, 1992.
- [10] Francois Wu, J-L Thomas, and Mathias Fink. Time reversal of ultrasonic fields. il. experimental results. *IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control*, 39(5):567–578, 1992.
- [11] Mickaël Tanter, Jean-Louis Thomas, François Coulouvrat, and Mathias Fink. Breaking of time reversal invariance in nonlinear acoustics. *Physical review E*, 64(1):016602, 2001.
- [12] Gabriel Montaldo, Phillippe Roux, Arnaud Derode, Carlos Negreira, and Mathias Fink. Generation of very high pressure pulses with 1-bit time reversal in a solid waveguide. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 110(6):2849–2857, 2001.
- [13] Gordon S Kino. *Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal processing* Prentice-Hall Signal Processing Series. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1987.
- [14] Paul Morris, Andrew Hurrell, Adam Shaw, Edward Zhang, and Paul Beard. A fabry–pérot fiber-optic ultrasonic hydrophone for the simultaneous measurement of temperature and acoustic pressure. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 125(6):3611–3622, 2009.
- [15] Thomas L Szabo. *Diagnostic ultrasound imaging: inside out*. Academic Press, 2004.
- [16] Philip McCord Morse and K Uno Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton university press, 1986.
- [17] Bernard G Lucas and Thomas G Muir. Field of a finite-amplitude focusing source. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 74(5):1522–1528, 1983.
- [18] Yuan Jing and Robin O Cleveland. Modeling the propagation of nonlinear three-dimensional acoustic beams in inhomogeneous media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 122(3):1352–1364, 2007.

- [19] Arnaud Derode, Victor Mamou, and Arnaud Tourin. Influence of correlations between scatterers on the attenuation of the coherent wave in a random medium. *Physical Review E*, 74(3):036606, 2006.
- [20] Arnaud Derode, Arnaud Tourin, and Mathias Fink. Random multiple scattering of ultrasound. ii. is time reversal a self-averaging process? *Physical Review E*, 64(3):036606, 2001.
- [21] Arnaud Derode, Arnaud Tourin, and Mathias Fink. Ultrasonic pulse compression with one-bit time reversal through multiple scattering. *Journal of applied physics*, 85(9):6343–6352, 1999.