

Tesis

Acciones quasi conformes en superficies

Marcos Barrios

Orientadora: Nancy Guelman

*Maestría en Matemática
Facultad de Ciencias
Universidad de la República
Uruguay*

Resumen

El objetivo de este trabajo es estudiar la alternativa de Tits en el contexto de superficies de Riemann compactas. En concreto, estudiar qué ocurre con las acciones quasi conformes.

En el primer capítulo introduciremos el problema, y motivaremos las hipótesis adicionales en comparación al problema en dimensión 1, además de algunos ejemplos sencillos en dimensión 2.

En el segundo capítulo estudiaremos las acciones K quasi conformes en superficies distinguiéndolas por su género. Concluyendo que estas son conjugadas a acciones conformes.

En el tercer capítulo probaremos la herramienta fundamental en la que se basa el capítulo 2 (solución a la ecuación de Beltrami).

Palabras claves: Quasi conforme, ecuación de Beltrami.

Índice general

1. Definiciones y conceptos básicos	2
1.1. Alternativa de Tits y acciones de grupos	2
1.1.1. Acciones C^∞ en variedades riemaniannas	4
1.1.2. Acciones conformes de $\mathbb{Z}$ y medidas invariantes en $\mathbb{S}^2$	7
1.2. Mapas Quasiconformes	9
2. Acciones quasi conformes en superficies riemaniannas	15
2.1. Acciones quasiconformes en superficies de Riemann	15
2.2. Acciones en $\mathbb{S}^2$	17
2.3. Acciones en $S_1 = \mathbb{T}^2$	25
2.4. Acciones en superficies de genero $n \geq 2$	26
3. Existencia de soluciones a la ecuación de Beltrami	28
3.1. Definición y propiedades de los operadores P y T	28
3.2. Derivadas en distribución	36
3.3. Soluciones al problema de mapeo	38
3.4. Desigualdad de Calderon-Zygmund	42
3.4.1. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin	64
Bibliografía	66

Capítulo 1

Definiciones y conceptos básicos

1.1. Alternativa de Tits y acciones de grupos

Fijemos primero los siguientes puntos, que se utilizarán durante toda la tesis:

- La identificación estandar de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ pasando de uno a otro de forma conveniente.
- Sea $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(X)$ una acción fiel, se identificará $\tau(g)$ con g para todo $g \in G$.
- Cuando se hable de medidas, o medidas invariantes en una variedad, siempre serán sobre la σ -álgebra de Borel de la misma.

La alternativa de Tits muestra una dicotomía en subgrupos finitamente generados de $GL_n(\mathbb{R})$.

Teorema 1.1.1 (*Alternativa de Tits [Tits]*) Sea $G < GL_n(\mathbb{R})$ un subgrupo finitamente generado. Entonces o bien G es virtualmente soluble, o bien tiene un subgrupo libre a dos generadores.

Existen otras versiones de este resultado, por ejemplo en [BG] se da una versión topológica. La definición de grupo libre puede encontrarse en [Mi], usamos además la notación habitual para el grupo libre con dos generadores, es decir $\mathbb{F}_2$.

Esta dicotomía es excluyente, pues $\mathbb{F}_2$ no es virtualmente soluble y si G es virtualmente soluble, entonces todo subgrupo $H < G$ también lo es.

El hecho de que un grupo sea virtualmente soluble se ve reflejado en las acciones del mismo.

Proposición 1.1.2 ([T], [G]) Sean G un grupo virtualmente soluble y M un espacio métrico compacto. Entonces toda acción de $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(M)$ admite una medida de probabilidad invariante.

Los grupos que verifican la tesis de esta proposición se llaman promediables.

Definición 1.1.3 Un grupo G es promediable si para todo espacio métrico compacto M , toda acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(M)$ admite una medida de probabilidad invariante.

Existen otras definiciones equivalentes, por ejemplo la de amenabilidad [G], que es intrínseca al grupo. Sin embargo, en esta tesis se trabajará con acciones y por tanto utilizaremos la de promediable.

Tenemos así que la alternativa de Tits implica el siguiente resultado.

Corolario 1.1.4 Sea $G < GL_n(\mathbb{R})$ un subgrupo finitamente generado que actúa en un espacio métrico compacto M . Entonces existe una medida de probabilidad invariante o tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{F}_2$.

Las acciones de un grupo, de hecho, pueden utilizarse para identificar subgrupos isomorfos a $\mathbb{F}_2$.

Lema 1.1.5 (*Lema del Ping Pong*) Sean G un grupo, X un espacio topológico y $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(X)$ una acción. Si existen dos subconjuntos no vacíos $X_1, X_2 \subset X$, y dos elementos $f, g \in G$ tales que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $\tau(f^n)(X_2) \subset X_1$ y $\tau(g^n)(X_1) \subset X_2$ para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, entonces $\langle f, g \rangle \cong \mathbb{F}_2$.

Demostración: Basta probar que cualquier palabra p en las letras f, g , no trivial e irreducible verifica que $\tau(p) \neq id$. Notar que si $\tau(p) \neq id$, entonces $\tau(f^n p f^{-n}) \neq id$, por lo que podemos suponer que p es de la forma $p = f^{n_{k+1}} g^{m_k} f^{n_k} \dots g^{m_1} f^{n_1}$ donde $n_i, m_j \neq 0$.

Si $k = 0$, dado $x \in X_2$ tenemos que $\tau(f^{n_1})(x) \in X_1$ y en particular $\tau(p)(x) \neq x$. Luego $\tau(p) \neq id$.

En caso de que $k > 0$, dado $x \in X_2$, aplicando inducción se tiene que $\tau(g^{m_k} f^{n_k} \dots g^{m_1} f^{n_1})(x) \in X_2$ y por tanto $\tau(p)(x) = \tau(f^{n_{k+1}}) \circ \dots \circ \tau(g^{m_1} f^{n_1})(x) \in X_1$, de donde se concluye la tesis. $\square$

Este lema nos permite encontrar un subgrupo libre dentro de $GL_2(\mathbb{R})$, y por tanto, incluyendo a éste en $GL_n(\mathbb{R})$, también dentro de $GL_n(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.1.6 Sea $\tau : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow Hom(\mathbb{S}^2)$ la acción por mapas de Möebius.

Notemos $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, es decir $f_1(z) = z + 1, \forall z \in \mathbb{C}$ y $h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, es decir $h(z) = 1/z, \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Afirmación: Existen $n, m \in \mathbb{N}$ tal que las funciones $f = f_1^n$ y $g = h f_1^m h^{-1}$ generan un grupo libre.

Para probar esta afirmación encontraremos m, n tal que f, g estén en las hipótesis del lema del Ping Pong.

Notar que ∞ es el único punto fijo de f_1 . Más aún, dado U entorno de ∞ y C compacto tal que $\infty \notin C$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f_1^{kn}(C) \subset U$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Fijemos así $X_2 = C = \overline{B}(0, 1)$ y $X_1 = U$ un entorno compacto de ∞ tal que $X_1 \cap X_2 = \emptyset$. Sea n tal que $f = f_1^n$ verifica que $f^k(X_2) \subset X_1$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Como $h f_1 h^{-1}$ es conjugado a f_1 , verifica las mismas propiedades dinámicas, en particular 0 es su único punto fijo. Luego existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(h f h^{-1})^{km}(X_1) = h f^{km} h^{-1}(X_1) \subset X_2$ para todo $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Tomando así $g = h f_1^m h^{-1}$, tenemos que f y g verifican las hipótesis del lema de Ping Pong.

La dicotomía del Corolario 1.1.4 no es excluyente incluso aunque la acción sea fiel. Por ejemplo, si existe un punto fijo global en la acción, ésta admite una medida de probabilidad invariante de forma trivial.

Ejemplo 1.1.7 La acción canónica por transformaciones lineales $\tau : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow Hom(\mathbb{R}^2)$ es fiel y se puede extender por continuidad a una acción $\tilde{\tau} : GL_2(\mathbb{R}) \rightarrow Hom(\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2)$. Como 0 es un punto fijo de la acción, la medida de probabilidad $\delta_0(N) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \in N \\ 0 & \text{si } 0 \notin N \end{cases}$ es invariante. Sin embargo, $GL_2(\mathbb{R})$ contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{F}_2$. como vimos en el Ejemplo 1.1.6.

Surgen así las siguientes preguntas, ¿Es válida la alternativa de Tits para cualquier grupo finitamente generado?

En caso de no ser así ¿Existe un análogo al corolario 1.1.4?, es decir ¿Fijado un espacio métrico M , existen familias, no triviales, de acciones τ para las sí vale 1.1.4?

Tenemos respuestas a ambas preguntas tomando $M = \mathbb{S}^1$. El grupo de Thompson, definido explícitamente a partir de su acción en $\mathbb{S}^1$, no es un grupo virtualmente soluble ni contiene ningún subgrupo isomorfo a $\mathbb{F}_2$. Luego la alternativa de Tits no es válida para grupos generales [N].

Sin embargo se verifica una versión débil de la alternativa de Tits en $\mathbb{S}^1$.

Teorema 1.1.8 (Alternativa de Tits débil [N]) Todo subgrupo $G < Hom_+(\mathbb{S}^1)$ admite una medida de probabilidad invariante o tiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{F}_2$.

De nuevo, surge la pregunta de si el resultado anterior vale para cualquier grupo y cualquier espacio métrico compacto. La respuesta a esto es no [M], incluso cuando el grupo es finitamente presentado [L-M].

Trataremos entonces en esta tesis el problema del Corolario 1.1.4 para grupos numerables y M superficie riemanniana cerrada. Sin embargo, daremos hipótesis adicionales a la acción. Pediremos que la acción sea K -quasiconforme donde K es una constante uniforme en todo el grupo (Capítulo 2, sección 1).

1.1.1. Acciones C^∞ en variedades riemanniannas

Veremos ahora algunos ejemplos de acciones C^∞ para motivar y entender como funciona la hipótesis de K quasiconformidad.

Definición 1.1.9 Sean M una variedad diferenciable cerrada orientable y $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo C^1 que preserva orientación. Decimos que f es un difeomorfismo K quasi conforme si para todo $a \in M$ se verifica que

$$\frac{\sup\{\|df_a(x)\| : x \in T_a M \text{ y } \|x\| = 1\}}{\inf\{\|df_a(x)\| : x \in T_a M \text{ y } \|x\| = 1\}} = \frac{\|df_a\|}{\inf\{\|df_a(x)\| : x \in T_a M \text{ y } \|x\| = 1\}} \leq K.$$

Decimos que una acción $\tau : G \rightarrow \text{Dif}_+(M)$ es K quasiconforme si $\tau(g)$ es un difeomorfismo K quasiconforme para todo $g \in G$.

Notar que si $f, g : M \rightarrow M$ son difeomorfismos K_1 y K_2 quasiconformes entonces $f \circ g$ y $g \circ f$ son difeomorfismos $K_1 K_2$ quasiconformes. Además f^{-1} y g^{-1} son difeomorfismos K_1 y K_2 quasiconformes respectivamente.

Observación 1.1.10 Si M es una superficie riemannianna y $g : M \rightarrow M$ un difeomorfismo K quasiconforme, entonces para todo $a \in M$ se tiene que $df_a(\mathbb{S}^1)$ es una elipse, y el cociente entre la longitud del eje mayor y la del eje menor es menor igual a K .

Observar que si M es cerrada, cualquier difeomorfismo C^1 , $g : M \rightarrow M$ que preserve orientación, es K quasiconforme para algún K . Sin embargo, esta cota podría no ser uniforme en todo un grupo, en particular $\{g^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ podría no ser K quasiconforme para ningún K .

Ejemplo 1.1.11 Sea $G < \text{Dif}_+(\mathbb{R}^2)$ el grupo generado por el difeomorfismo $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $g(x, y) = (\frac{x}{2}, y)$. La acción inducida no es K quasiconforme para ningún K .

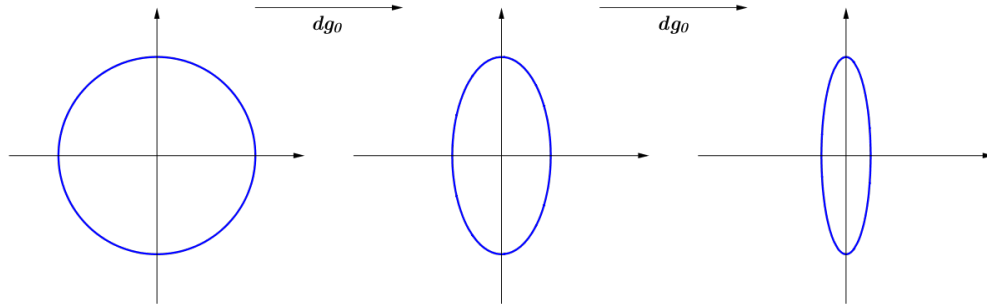


Figura 1.1: Primeros iterados de $dg_0(\mathbb{S}^1)$

Notar que este mapa se puede extender como difeomorfismo a $\mathbb{S}^2$, por lo que incluso aunque la variedad sea compacta el grupo $\mathbb{Z}$ podría admitir una acción no quasiconforme.

Para motivar la hipótesis de quasiconformidad nos apoyaremos en la prueba del Teorema 1.1.8 dada en [N]. Esta utiliza como resultado clave la siguiente dicotomía en $\text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$.

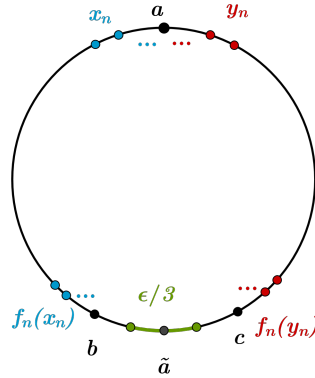
Proposición 1.1.12 Sea $\Gamma < \text{Hom}_+(\mathbb{S}^1)$ tal que las órbitas son densas. Entonces se tiene una de las siguientes propiedades

1. La acción es equicontinua: Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d(g(x), g(y)) < \epsilon$ para todo $g \in \Gamma$.
2. La acción es expansiva: Para cada $x \in \mathbb{S}^1$, existe un entorno abierto I de x y una sucesión $g_n \in \Gamma$ tal que la longitud de los intervalos $g_n(I)$ tiende a 0.

Idea de la demostración: Si la acción no es equicontinua, existen una cota $\epsilon \in (0, \frac{1}{2})$, un par de sucesiones de puntos $x_n, y_n \in \mathbb{S}^1$ y una sucesión de funciones $f_n \in \Gamma$, tales que $d(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$ y $d(f_n(x_n), f_n(y_n)) \geq \epsilon$. Notar que $\text{long}(f_n([x_n, y_n])) \geq \epsilon$. Luego, tomando subsucesiones, podemos suponer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) = b, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(y_n) = c.$$

Como $d(b, c) \geq \epsilon$, existe $\tilde{a} \in \mathbb{S}^1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $\tilde{a} \in f_n([x_n, y_n])$ y además $B(\tilde{a}, \frac{\epsilon}{3}) \subset f_n([x_n, y_n])$ para todo $n > n_0$.



Dado $x \in \mathbb{S}^1$, como las órbitas son densas, existe un elemento $g \in \Gamma$ tal que $g(x) \in B(\tilde{a}, \frac{\epsilon}{3})$. Sea $I = g^{-1}(B(\tilde{a}, \frac{\epsilon}{3}))$, tenemos que $x \in I$ y la sucesión de funciones $g_n = f_n^{-1} \circ g$ verifican que $g_n(I) \subset [x_n, y_n]$, de donde la acción es expansiva.

Sin embargo, un resultado análogo (redefiniendo expansividad) no es válido en superficies, incluso actuando por difeomorfismos lineales.

Definición 1.1.13 Sean G un grupo y M una variedad riemanianna. Decimos que una acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}_+(M)$ es expansiva si para cada $x \in M$, existe un entorno abierto I de x y una sucesión $g_n \in G$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{diam}(\tau(g_n)(I)) = 0.$$

Veamos un contraejemplo a la dicotomía presentada en la proposición 1.1.12 tomando como superficie $\mathbb{T}^2 = \frac{\mathbb{R}^2}{\mathbb{Z}^2}$.

Ejemplo 1.1.14 Sean $g, h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ definidas por $g(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ y $h(x, y) = (x, y) + (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. El subgrupo de $\text{Dif}_+(\mathbb{T}^2)$ dado por $\Gamma = \langle f, h \rangle$ tiene órbitas densas. Sin embargo, la acción no es equicontinua ni expansiva.

- La acción tiene órbitas densas.

Basta notar que $h^n(x_0, y_0) = (x_0, y_0) + n(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ es denso en $\mathbb{T}^2$.

- La acción no es equicontinua.

Sean v_1, v_2 vectores propios normales de g asociados a los valores propios $\lambda_1 < 1 < \lambda_2$. La acción por g deja invariante la recta $r_{v_2} = \{tv_2 : t \in \mathbb{R}\}$ y el punto $(0, 0)$ es un punto fijo repulsor en ésta, ya que $\lambda_2 > 1$. Concluimos así que la acción de Γ no puede ser equicontinua.

- La acción no es expansiva.

Observar primero que cualquier elemento de Γ se descompone como $T \circ g^n$ donde T es una traslación y $n \in \mathbb{Z}$. Como las traslaciones preservan distancia, tenemos que la acción de Γ es expansiva si solo si la acción de $\langle g \rangle$ lo es. Veamos que no se verifica la condición de expansividad en $(0, 0)$.

Sea I entorno abierto de $(0, 0)$ tal que $B((0, 0), \delta) \subset I \subset B((0, 0), \frac{1}{4})$. Dado $k > 0$ se tiene que $r_{v_2} \cap I \subset g^k(I)$, ya que $(0, 0)$ es un punto fijo repulsor de $g|_{r_{v_2}}$. De forma análoga, si $k < 0$ tomando r_{v_1} , la recta asociada al valor propio λ_1 , se tiene que $r_{v_1} \cap I \subset g^k(I)$. Por lo tanto la acción de $\langle g \rangle$ no es expansiva, luego la de Γ tampoco.

Las razones por las que no se puede adaptar la proposición 1.1.12 son basicamente dos:

- La relación de los ejes de las elipses $dg^n_{(0,0)}(\mathbb{S}^1)$ no están acotados uniformemente.
- Los conjuntos $B((0, 0), \delta) \cap r_{v_i}$ no son entornos de $(0, 0)$.

Para adaptar la primera basta pedir que la acción sea quasiconforme. La segunda en cambio es un poco mas delicada. Busquemos entonces alguna relación entre $d(f_n(x), f_n(y))$ y $d(f_n(x), f_n(z))$ cuando $d(x, y) = d(x, z)$. Para esto observemos algunos resultados básicos del cálculo diferencial.

Observación 1.1.15 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente un difeomorfismo de clase C^1 y K -quasiconforme. Entonces $\|df_a(v)\| \in \left[\frac{\|df_a\|\|v\|}{K}, \|df_a\|\|v\| \right]$ para todo $a \in \mathbb{R}^n$.

Lema 1.1.16 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente un difeomorfismo de clase C^∞ y K -quasiconforme. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, existe $\delta_x > 0$ tal que dado $\delta \in (0, \delta_x]$, para todo par $y, z \in \partial B(x, \delta)$ se tiene que

$$\log \left(\frac{d(f(x), f(y))}{d(f(x), f(z))} \right) \leq \log(\sqrt{n}K) + 2\delta L_{(x, \delta)},$$

donde $L_{(x, \delta)} = \sup\{\|d(\log(\|df\|))_c\| : c \in B(x, \delta)\}$.

Idea de la demostración: Aplicando valor medio en el segmento $[x, y]$ a la coordenada i -ésima, tenemos $|f(x)_i - f(y)_i| = |(df_{a_y}(x-y))_i| \leq \|df_{a_y}\|\delta$ donde $a_y \in [x, y]$. Luego, como $\|df\|$ es continua, existe $a \in B(x, \delta)$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq n\|df_a\|\delta$.

De forma análoga $|f(x)_i - f(z)_i| = |(df_{b_z}(z-x))_i|$ solo que ahora, aplicando la observación 1.1.15 se tiene que $|f(x)_i - f(z)_i| \geq \frac{\|df_{b_z}\|}{K}\delta$.

Dado que $\|\omega\|_2 \geq \frac{\|\omega\|_1}{\sqrt{n}}$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^n$, existe $b \in B(x, \delta)$ tal que $\|f(x) - f(z)\| \geq \sqrt{n} \frac{\|df_b\|}{K} \delta$. Sustituyendo estas desigualdades, se concluye que

$$\log \left(\frac{d(f(x), f(y))}{d(f(x), f(z))} \right) \leq \log \left(\frac{\sqrt{n}K\|df_a\|}{\|df_b\|} \right) = \log(\sqrt{n}K) + \log(\|df_a\|) - \log(\|df_b\|).$$

Aplicando valor medio a la función $\log(\|df\|)$ en el segmento $[a, b]$, se obtiene que existe $c \in [a, b] \subset B(x, \delta)$ tal que

$$\log(\|df_a\|) - \log(\|df_b\|) = d(\log(\|df\|))_c(b-a) \leq 2\delta\|d(\log(\|df\|))_c\|$$

de donde se concluye la tesis. $\square$

Notar que si f es un difeomorfismo C^∞ , entonces $L_{(x, \delta)}$ es finito para todo par x y δ . Sin embargo, $\{L_{(x, \delta)} : x \in \mathbb{R}^n, \delta > 0\}$ podría no estar acotado superiormente.

Corolario 1.1.17 Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ localmente un difeomorfismo de clase C^∞ y K -quasiconforme. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $d(x, y) = \delta > 0$, se verifica que

$$B \left(f(x), \frac{d(f(x), f(y))}{\sqrt{n}Ke^{2\delta L_{(x, \delta)}}} \right) \subset f \left(\overline{B(x, \delta)} \right) \subset \overline{B \left(f(x), \sqrt{n}Ke^{2\delta L_{(x, \delta)}} d(f(x), f(y)) \right)}.$$

Este último resultado se puede obtener también en variedades riemannianas a través de cartas recordando que la longitud de curvas puede definirse mediante cartas.

Corolario 1.1.18 Sea $f : M \rightarrow M$ un difeomorfismo de clase C^2 y K -quasiconforme. Dado $\epsilon > 0$, para todo $x \in M$, existe $\delta_x > 0$ tal que para todo $y \in \overline{B(x, \delta_x)}$, se verifica que

$$B \left(f(x), \frac{d(f(x), f(y))}{\sqrt{n}Ke^{2\delta_0 L_{(x, \delta_0)}}} \right) \subset \overline{f(B(x, \delta_0))} \subset \overline{B \left(f(x), \sqrt{n}Ke^{2\delta_0 L_{(x, \delta_0)}} d(f(x), f(y)) \right)}$$

donde $\delta_0 = d(x, y)$.

Si además nos restringimos a una compacto, o M es cerrada, existe un δ uniforme.

De esta forma obtenemos la dicotomía 1.1.12 en variedades.

Proposición 1.1.19 Sean G un grupo, M una variedad riemanniana de dimensión m cerrada, y $\tau : G \rightarrow \text{Diff}_+(M)$ una acción C^2 y K -quasiconforme con órbitas densas, tal que $\exists \hat{\delta} > 0$ para el cual el conjunto $\{L_{(x, \delta)}(\tau(g)) : g \in G\}$ está acotado. Entonces la acción es equicontinua o expansiva.

Demostración: Supongamos que la acción no es equicontinua. Dado δ como el Corolario 1.1.18, existe una cota $\epsilon \in (0, \delta)$, un par de sucesiones de puntos $\tilde{x}_n, \tilde{y}_n \in M$, y una sucesión de funciones $f_n \in \tau(G)$, tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) = 0$ y $d(f_n(\tilde{x}_n), f_n(\tilde{y}_n)) > \epsilon$.

Tomando subsucesiones podemos suponer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{x}_n = a = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{y}_n$. Luego, por continuidad existen x_n, y_n con $x_n \in [a, \tilde{x}_n]$ y $y_n \in [a, \tilde{y}_n]$ tal que $d(f_n(x_n), f_n(y_n)) = \epsilon$.

De nuevo, tomando subsucesiones, podemos asumir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(a) = \tilde{a}, \quad d(f_n(x_n), f_n(a)) \leq d(f_n(y_n), f_n(a)), \quad d(f_n(a), \tilde{a}) \leq \frac{\epsilon}{2n}$$

y

$$d(x_n, a) \leq \frac{\epsilon}{2n}, \quad d(y_n, a) \leq \frac{\epsilon}{2n}.$$

Por desigualdad triangular tenemos que

$$d(f_n(x_n), f_n(a)) + d(f_n(y_n), f_n(a)) \geq d(f_n(x_n), f_n(y_n)) = \epsilon,$$

de donde $d(f_n(y_n), f_n(a)) \geq \frac{\epsilon}{2}$. Aplicando el Corolario 1.1.18, podemos deducir las siguientes inclusiones

$$f_n \left(\overline{B \left(a, \frac{\epsilon}{2n} \right)} \right) \supset B \left(f_n(a), \frac{\epsilon}{2\sqrt{m}Ke^{\epsilon L}} \right) \supset B \left(f_n(a), \frac{\epsilon}{2\sqrt{m}Ke^{\epsilon L}} \right) \supset B \left(\tilde{a}, \frac{\epsilon}{2\sqrt{m}Ke^{\epsilon L}} - \frac{\epsilon}{2n} \right) \quad (1.1)$$

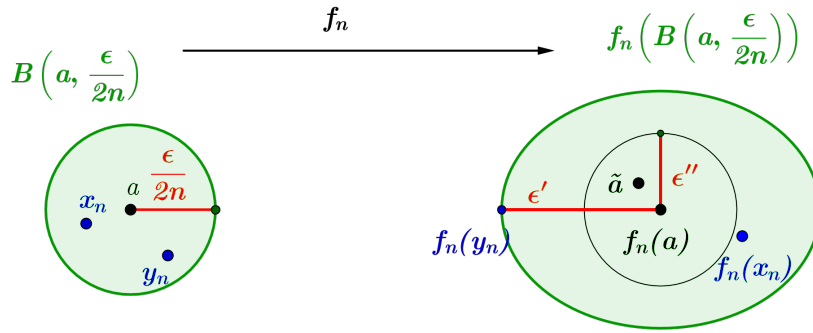


Figura 1.2: Bosquejo de la situación de las inclusiones 1.1, con $\epsilon' = d(f_n(y_n), f_n(a)) \geq \frac{\epsilon}{2}$ y $\epsilon'' \geq \frac{\epsilon'}{\sqrt{m}Ke^{\epsilon L}} \geq \frac{\epsilon}{2\sqrt{m}Ke^{\epsilon L}}$.

Concluimos así que existe un entorno U de $\tilde{a}$ y un n_0 tal que $f_n^{-1}(U) \subset (B(a, \frac{\epsilon}{2n}))$. En particular, el punto $\tilde{a}$ verifica la condición de expansividad.

Para el resto de los puntos basta aplicar el hecho de que la acción tiene órbitas densas. $\square$

Notar que solo la hipótesis sobre $d \log(\|df\|_1)$, y no quasiconformidad, no es suficiente, pues en el ejemplo 1.1.14 $\|df\|$ es constante.

1.1.2. Acciones conformes de $\mathbb{Z}$ y medidas invariantes en $\mathbb{S}^2$

Como $\mathbb{Z}$ es abeliano, aplicando la Proposición 1.1.2, cualquier acción por homeomorfismos en un espacio métrico compacto admite una medida de probabilidad invariante. Veremos aquí el caso sencillo de acciones de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{S}^2$ por difeomorfismos conformes. Este ejemplo será de utilidad en el Capítulo 2, Sección 2.

Todo difeomorfismo conforme $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ que preserve orientación es conjugado a uno de estos tres mapas:

- Es parabólico: $f_1(z) = z + 1, \forall z \in \mathbb{C}$;
- Es hiperbólico: $f_2(z) = rz, \forall z \in \mathbb{C}$, donde $r > 1$;
- Es elíptico: $f_3(z) = \lambda z : |\lambda| = 1, \forall z \in \mathbb{C}$.

Por tanto, tomando pull back, basta estudiar las medidas invariantes para estos 3 ejemplos.

Casos parabólico e hiperbólico

Proposición 1.1.20 Sea $\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ una acción conforme, tal que $\tau(1) = f_1$. Entonces la única medida de probabilidad invariante es δ_∞ .

Demostración: Sea μ una medida de probabilidad invariante en $\mathbb{S}^2$. Dado $p \neq \infty$, existe un entorno de p , más concretamente $W = B_{\mathbb{C}}(p, \frac{1}{4})$, tal que $f_1^n(W) \cap f_1^m(W) = \emptyset$ para cualquier par $n, m \in \mathbb{Z}$ tal que $n \neq m$. Por tanto $\mu(W) = 0$. Tenemos así que la única opción para μ es $\mu = \delta_\infty$. Como además $f_1(\infty) = \infty$, se tiene que es una medida invariante. $\square$

Proposición 1.1.21 Sea $\tau : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Diff}_+(\mathbb{S}^2)$ una acción conforme tal que $\tau(1) = f_2$. Entonces si μ es una medida de probabilidad invariante, $\exists \lambda \in [0, 1]$ tal que $\mu = \lambda\delta_0 + (1 - \lambda)\delta_\infty$.

Demostración: Como $\text{fix}(f_2) = \{0, \infty\}$, para todo $\lambda \in [0, 1]$ la medida de probabilidad μ_λ definida por $\mu_\lambda = \lambda\delta_0 + (1 - \lambda)\delta_\infty$ es invariante por f_2 . Dado $z \notin \{0, +\infty\}$, existe un entorno W_z , más concretamente $W_z = B_{\mathbb{C}}(z, \frac{|z|}{2r})$, tal que $f_2^n(W_z) \cap f_2^m(W_z) = \emptyset$ para cualquier par $n, m \in \mathbb{Z}$ con $n \neq m$. Por tanto $\mu(W_z) = 0$.

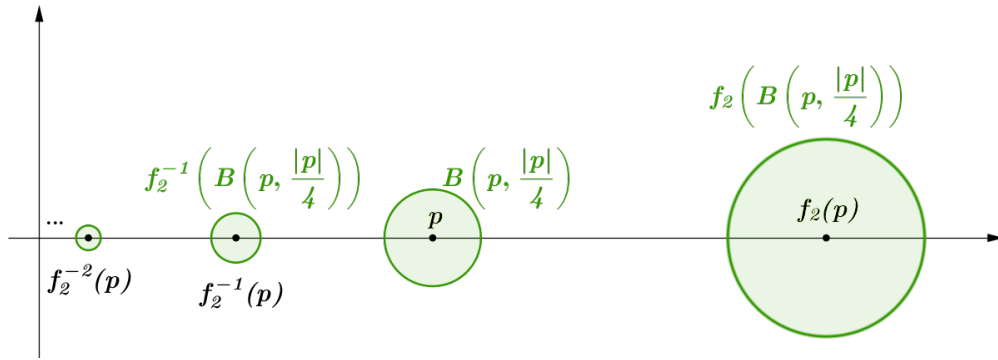


Figura 1.3: Iterados del mapa $f_2(z) = 2z$

Deducimos así que la única posibilidad para μ es $\mu_\lambda = \lambda\delta_0 + (1 - \lambda)\delta_\infty$ donde $\lambda \in [0, 1]$. $\square$

Caso elíptico, λ no periódico

Este caso es distinto dado que los puntos fijos no son atractores ni repulsores locales. Considerando $\mathbb{S}^2$ como subconjunto de $\mathbb{R}^3$ la función f_3 es una rotación. Luego se tiene que $\mu = \frac{\text{leb}_{\mathbb{S}^2}}{4\pi}$ se preserva. Sin embargo describir todas las medidas de probabilidad invariantes es un poco más delicado.

El caso de λ periódico es más complejo ya que se pueden definir medidas a partir de conjuntos periódicos.

Para calcular todas las posibles medidas μ , calcularemos primero restricciones en un generador de la σ algebra de Borel y luego definiremos a partir de estas μ . Recordar que si dos medidas son iguales en un generador entonces son iguales.

Notar que los únicos puntos periódicos de f_3 , que además son fijos, son ∞ y 0 , de donde $\mu(p) = 0$ para todo $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty\}$.

Los conjuntos $S_r = r\mathbb{S}^1$ son invariantes por g , y restringidos a ellos la función es una rotación de ángulo irracional. Por tanto $\mu|_{S_r} = k_r \text{leb}_{r\mathbb{S}^1}$ con $k_r \in [0, 1]$.

Se puede deducir de forma análoga una igualdad para rectángulos polares. Dados $I \subset \mathbb{R}^+$ y $J \subset \mathbb{S}^1$ medibles, definimos $C_{(I,J)} = \{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : r \in I, \theta \in J\}$. Como f_3 es una rotación irracional en $r\mathbb{S}^1$ con el mismo ángulo para todo $r \in \mathbb{R}^+$, se verifica que $\mu(C_{(I,J)}) = m(I)\text{leb}_{\mathbb{S}^1}(J)$, donde m es una medida en $\mathbb{R}^+$. Como $\{C_{(I,J)} : I \subset \mathbb{R}^+, J \subset \mathbb{S}^1 \text{ medibles}\} \cup \{0, \infty\}$ es un generador de la σ algebra, basta definir μ en ellos.

Tenemos así que μ restringida a $\mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ es una medida producto, por lo que

$$\mu = \mu(\{0\})\delta_{\{0\}} + \mu(\{\infty\})\delta_{\{\infty\}} + m_1 \times \text{leb}_{\mathbb{S}^1} + m_2 \times \text{leb}_{\mathbb{S}^1} \quad (1.2)$$

con $m_1 \ll \text{leb}_{\mathbb{R}^+}$, m_2 singular y $\mu(\mathbb{S}^2) = 1$.

Estas son todas las posibles medidas μ invariantes por f_3 . En particular, Lebesgue es de esta forma, es decir, $\exists \hat{m}_1$ con $\hat{m}_1 \ll \text{leb}_{\mathbb{R}^+} \ll \hat{m}_1$ tal que $\text{leb}_{\mathbb{S}^2} = \hat{m}_1 \times \text{leb}_{\mathbb{S}^1}$.

1.2. Mapas Quasiconformes

En esta sección desarrollaremos las propiedades básicas que se utilizarán en todo el trabajo sobre la hipótesis de quasiconformidad.

Fijemos algunas notaciones y consideraciones que aparecerán en toda la tesis.

- Se denominará con la letra U a un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y además se utilizará la identificación estándar de $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$ pasando de uno a otro de forma conveniente.
- Dados un punto $p \in E$ en un espacio métrico y $r \in \mathbb{R}^+$, tomaremos una notación estándar para sus entornos centrados, $B(p, r) = \{q \in E : d(p, q) < r\}$ y $\overline{B(p, r)} = \{q \in E : d(p, q) \leq r\}$.

La forma de trabajar con funciones quasiconformes varía según el contexto. Por ejemplo asumiendo que f es de clase C^1 [D-S], o teniendo en cuenta solo la métrica del espacio y no su estructura diferenciable. Aquí usaremos la definición de [Ah]. Para eso necesitamos unos pasos previos. En cualquier caso la idea intuitiva es la misma.

Definición 1.2.1 Sea $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que f es absolutamente continua en líneas (ACL) si para cada rectángulo cerrado $R = I \times J \subset U$ se tiene que f es absolutamente continua para casi toda línea horizontal, y para casi toda línea vertical.

Observar que cualquier función diferenciable es (ACL).

Como f es una función compleja se puede escribir como suma de dos funciones reales $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$, donde $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$. Tenemos así que si f es (ACL), existen las derivadas parciales de las funciones u, v para casi todo punto de U [R].

Definición 1.2.2 Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ con $u, v : U \rightarrow \mathbb{R}$, tal que existen las derivadas parciales de u y v en un punto $p \in U$. Entonces definimos

$$f_x(p) = u_x(p) + iv_x(p), \quad f_y = u_y(p) + iv_y(p). \quad (1.3)$$

Además definimos las derivadas con respecto a z y a $\bar{z}$ como

$$\begin{aligned} f_z &= \frac{1}{2}(f_x - if_y) = \frac{1}{2}([u_x + iv_x] - i[u_y + iv_y]) = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(v_x - u_y)) \\ f_{\bar{z}} &= \frac{1}{2}(f_x + if_y) = \frac{1}{2}([u_x + iv_x] + i[u_y + iv_y]) = \frac{1}{2}(u_x - v_y + i(v_x + u_y)). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Para fijar conceptos calculemos f_z y $f_{\bar{z}}$ en algunos ejemplos lineales. Estos además simplificarán luego el estudio de la K quasiconformidad en el caso general.

Ejemplo 1.2.3 Transformaciones lineales.

La rotación de ángulo θ , que notaremos R_θ , cuya matriz asociada en la base canónica es $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ cumple que

$$(R_\theta)_z = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \quad \text{y} \quad (R_\theta)_{\bar{z}} = 0.$$

La reflexión de eje Ox , que notamos Sim , cuya matriz asociada en la base canónica es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ cumple que

$$Sim_z = 0 \quad \text{y} \quad Sim_{\bar{z}} = 1.$$

La composición de estas transformaciones verifican que

$$(Sim \circ R_\theta)_z = 0 = (R_\theta \circ Sim)_z, \quad (Sim \circ R_\theta)_{\bar{z}} = \cos(\theta) - i\sin(\theta) = \overline{(R_\theta \circ Sim)_{\bar{z}}}.$$

Veamos ahora la definición de K quasi conformidad con la que se trabajará en esta tesis.

Definición 1.2.4 Una función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ abierta, es K quasiconforme, con $K \in [1, +\infty)$, si

- f es ACL en U ;
- $|f_{\bar{z}}(p)| \leq k|f_z(p)|$, para casi todo punto en U , donde $k = \frac{K-1}{K+1}$.

Observar que la relación entre k y K es biyectiva.

Notamos $\bar{U} = \{z \in U : \exists f_z(z), f_{\bar{z}}(z) \text{ y } |f_{\bar{z}}(p)| \leq k|f_z(p)|\}$.

Antes de ver algunos ejemplos, empecemos a estudiar como identificar los parametros K , k a partir del diferencial de f en caso de que exista. Emplearemos una notación específica para el diferencial de f , que facilite esta identificación. En particular K debería coincidir con el relativo a la Definición 1.1.9. Luego veremos que la hipótesis de diferenciabilidad se tiene ctp a partir de la quasiconformidad (Proposición 1.2.17).

Proposición 1.2.5 Sean $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ y $p \in U$ tal que f es diferenciable en p , df_p es invertible y preserva orientación. Entonces existen $a, b \in \mathbb{R}^+$ con $a \geq b$ y $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ tales que

$$df_p = \left(\frac{a+b}{2} \right) R_{\alpha+\beta} \left(\text{Id} + \frac{a-b}{a+b} R_{-2\beta} \text{Sim} \right). \quad (1.5)$$

Demostración: Primero, notar que $df_p(\mathbb{S}^1)$ es una elipse, dado que es un conjunto de nivel de $h = g \circ df_p^{-1}$, con $g(x, y) = x^2 + y^2$, de donde h es una forma cuadrática definida positiva.

Podemos componer con una rotación, digamos $R_{-\alpha}$, para que la elipse sea de la forma $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y que $a \geq b > 0$. Luego componiendo con $\frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \text{Id} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \text{Sim} \right)$ obtenemos de nuevo $\mathbb{S}^1$. Concluimos así que

$$\frac{1}{2} \left(\left(\frac{a+b}{ab} \right) \text{Id} + \left(\frac{b-a}{ab} \right) \text{Sim} \right) \circ R_{-\alpha} \circ df_p$$

es una rotación, digamos R_β , dado que deja invariante $\mathbb{S}^1$ y preserva orientación por ser composición de 3 transformaciones lineales que también la preservan.

Deducimos así que

$$\begin{aligned} df_p &= R_\alpha \circ \left(\frac{1}{2} \left(\left(\frac{a+b}{ab} \right) \text{Id} + \left(\frac{b-a}{ab} \right) \text{Sim} \right)^{-1} \right) \circ R_\beta \\ &= R_\alpha \circ \left(\frac{1}{2} \right) ((a+b)\text{Id} + (a-b)\text{Sim}) \circ R_\beta = \left(\frac{a+b}{2} \right) R_{\alpha+\beta} \left(\text{Id} + \frac{a-b}{a+b} R_{-2\beta} \text{Sim} \right) \end{aligned}$$

dado que $R_\theta \circ \text{Sim} = \text{Sim} \circ R_{-\theta}$. □

A partir de esta forma de notar el diferencial, resulta sencillo obtener f_z y $f_{\bar{z}}$, y por tanto k y K . En particular, se tiene el siguiente resultado.

Observación 1.2.6 Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ y $p \in U$ tal que f es diferenciable en p , df_p es invertible y $df_p = \frac{a+b}{2} R_{\alpha+\beta} (\text{Id} + \frac{a-b}{a+b} R_{-2\beta} \text{Sim})$, con $a \geq b \in \mathbb{R}^+$. Entonces $f_z = \left(\frac{a+b}{2} \right) (\cos(\alpha+\beta) + i \sin(\alpha+\beta))$ y $f_{\bar{z}} = \left(\frac{a-b}{2} \right) (\cos(\alpha-\beta) + i \sin(\alpha-\beta))$. Tenemos además que $k = \frac{a-b}{a+b}$ y $K = \frac{a}{b}$.

Notar que en el caso de que $a = b$ ($K = 1$, $f_{\bar{z}} = 0$) obtenemos que el diferencial es $df_p = \left(\frac{a+b}{2} \right) R_{\alpha+\beta}$. Es decir, verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann, de donde se deduce el siguiente resultado.

Comentario 1.2.7 Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable y 1-quasi conforme, entonces f es holomorfa.

En este trabajo se necesitará una versión mas fuerte de este resultado, que se probará en el Capítulo 3, más precisamente en el Corolario 3.2.8.

Tenemos además que la relación entre $|f_z|$ y $|f_{\bar{z}}|$ determina si df preserva orientación.

Corolario 1.2.8 Sean $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ y $p \in U$ tales que f es diferenciable en p . Entonces:

- df_p preserva orientación si solo si $|f_z(p)| > |f_{\bar{z}}(p)|$;
- df_p no es invertible si solo si $|f_z(p)| = |f_{\bar{z}}(p)|$;
- df_p invierte orientación si solo si $|f_z(p)| < |f_{\bar{z}}(p)|$.

Veamos a partir de la Observación 1.2.6 algunos ejemplos lineales.

Ejemplo 1.2.9 Transformaciones lineales de $\mathbb{R}^2$

- Las transformaciones lineales $rR_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son 1-quasi conformes $\forall \theta \in \mathbb{S}^1, r \in \mathbb{R}^+$
- La transformación lineal Sim no es K -quasi conforme pues no preserva orientación.
- Sea T una transformación lineal con 2 valores propios positivos distintos, y con vectores propios asociados ortogonales. A partir de la prueba de la Proposición 1.2.5, y recordando que los valores a y b son los semi ejes mayor y menor de la elipse $T(\mathbb{S}^1)$, podemos concluir que $a = \lambda_1$, $b = \lambda_2$ donde λ_i son los valores propios distintos de T con $\lambda_1 > \lambda_2$. Tenemos así que $K = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Veamos además un ejemplo de función que no sea quasiconforme pero preserve orientación

Ejemplo 1.2.10 La función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (x, y^2)$ no es K -quasi conforme.

Siguiendo en hipótesis de diferenciabilidad la fórmula 1.4 permite vincular $f_{\bar{z}}$ con $\bar{f}_z$. En particular, se obtiene el siguiente resultado.

Observación 1.2.11 Dada $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciable se cumple que

$$\overline{(f_z)} = \frac{1}{2}(u_x + v_y + i(u_y - v_x)) = \frac{1}{2}(u_x + v_y - i(-u_y + v_x)) = (\bar{f})_{\bar{z}}.$$

Si bien la definición de K quasi conforme depende solo del módulo de $\frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$, muchas de las pruebas se basarán en conocer su valor.

Definición 1.2.12 Sea $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ tal que existen sus derivadas parciales en p y $f_z(p) \neq 0$. Definimos $\mu_f(p)$ como $\mu_f(p) = \frac{f_{\bar{z}}}{f_z}$.

Comentario 1.2.13 Dada $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ diferenciable en p tal que $f_{\bar{z}}(p) \neq 0$, entonces se verifican las siguientes igualdades

$$\mu_f(p) = \left(\frac{a-b}{a+b} \right) (\cos(-2\beta) + i \cos(-2\beta)) = \left(\frac{a-b}{a+b} \right) e^{-2\beta i} \quad y \quad |\mu_f(p)| = k.$$

Comentario 1.2.14 Notar que $kR_{-2\beta}$ es una rotohomotecia, es decir corresponde a la multiplicación por un complejo, que es de hecho μ . Podemos entonces decir, con un abuso de notación, que $\mu_f(p) = kR_{-2\beta}$.

Adaptando el Comentario 1.2.7 a la definición de μ , tenemos que si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es diferenciable y $\mu_f = 0$, entonces f es holomorfa.

Una de las propiedades de μ que necesitaremos en el Capítulo 2 es saber como se relaciona con la composición.

Proposición 1.2.15 Sean $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y $g : V \subset \mathbb{C} \rightarrow U$ funciones y $p \in V$ tal que g es diferenciable en p y f en $g(p)$. Si ambas diferenciales preservan orientación, entonces

$$\mu_{fg}(p) = \frac{\mu_g(p) + \mu_f(g(p))e^{(-2\alpha_1 - 2\beta_1)i}}{1 + \mu_g(p)\mu_f(g(p))e^{(2\beta_1 - 2\alpha_1)i}}. \quad (1.6)$$

Demostración: Tomando la notación de la fórmula (1.5) podemos escribir los diferenciales como $dg_p = \left(\frac{a_1+b_1}{2} \right) R_{\alpha_1+\beta_1} (Id + k_1 R_{-2\beta_1} Sim)$ y $df_{g(p)} = \left(\frac{a_2+b_2}{2} \right) R_{\alpha_2+\beta_2} (Id + k_2 R_{-2\beta_2} Sim)$.

Aplicando regla de la cadena, tenemos que

$$\begin{aligned} (df \circ g)_p &= df_{g(p)} \circ dg_p = \left(\frac{a_2+b_2}{2} \right) R_{\alpha_2+\beta_2} (Id + k_2 R_{-2\beta_2} Sim) \circ \left(\frac{a_1+b_1}{2} \right) R_{\alpha_1+\beta_1} (Id + k_1 R_{-2\beta_1} Sim) \\ &= \left(\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{4} \right) R_{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} (T_1 Id + T_2 Sim), \end{aligned}$$

donde $T_1 = Id + k_1 k_2 R_{-2\beta_2-2\alpha_1}$ y $T_2 = k_2 R_{-2\beta_2-2\alpha_1-2\beta_1} + k_1 R_{-2\beta_1}$. Esto último se deduce de $R_\theta Sim = R_{-\theta} Sim$ y $Sim \circ Sim = id$. Además, como $k_1 k_2 < 1$, se tiene que T_1 es invertible y por tanto

$$df \circ g_p = \left(\frac{(a_1+b_1)(a_2+b_2)}{4} \right) R_{\alpha_1+\alpha_2+\beta_1+\beta_2} T_1 (id + T_1^{-1} T_2 Sim).$$

Veamos ahora que esta es la descomposición del diferencial $d(f \circ g)$ de la Proposición 1.2.5.

Observar que T_1 y T_2 son sumas y productos de rotohomotecias, por lo tanto son rotohomotecias, y más aún $T_1^{-1}T_2$ es una rotohomotecia. Por lo que solo falta verificar que $\det(T_1^{-1}T_2) < 1$. Pero esto se deduce del hecho de que $d(f \circ g)$ preserva orientación, concluyendo así que era la descomposición de la ecuación 1.5.

Por el Comentario (1.2.14), tenemos que

$$\mu_{f \circ g}(p) = T_1^{-1}T_2 = \frac{k_2 R_{-2\beta_2-2\alpha_1-2\beta_1} + k_1 R_{-2\beta_1}}{Id + k_1 k_2 R_{-2\beta_2-2\alpha_1}} = \frac{\mu_g(p) + \mu_f(g(p))e^{(-2\alpha_1-2\beta_1)i}}{1 + \mu_g(p)\mu_f(g(p))e^{(2\beta_1-2\alpha_1)i}}$$

□

Corolario 1.2.16 Sean f y g en las hipótesis de la Proposición (1.2.15). Entonces f es conforme en p si y solo si $\mu_{f \circ g}(p) = \mu_g(p)$; y si g es conforme entonces $|\mu_{f \circ g}(p)| = |\mu_f(g(p))|$.

Para concluir esta sección veamos que si f es quasi conforme entonces es diferenciable ctp.

Proposición 1.2.17 Sea $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función localmente homeomorfa tal que existen sus derivadas parciales ctp. Entonces es diferenciable ctp.

Demostración: Fijamos $R \subset U$ rectángulo acotado tal que $f : R \rightarrow f(R)$ es un homeomorfismo. Notar que como ser diferenciable es una propiedad local, si obtenemos el resultado en cualquier rectángulo R bajo las hipótesis anteriores, entonces hemos probado la proposición.

Definimos las funciones $g_{(R,n)}, h_{(R,n)} : R \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como

$$g_{(R,n)}(z) = \begin{cases} \sup_{0 < |t| \leq 1/n} \left| \frac{f(z+t) - f(z)}{t} - f_x(z) \right| & \text{si } \bar{B}(z, 1/n) \subset U \text{ y } z \in \tilde{U} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$$h_{(R,n)}(z) = \begin{cases} \sup_{0 < |t| \leq 1/n} \left| \frac{f(z+it) - f(z)}{t} - f_y(z) \right| & \text{si } \bar{B}(z, 1/n) \subset U \text{ y } z \in \tilde{U} \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Notar que ambas funciones, $g_{(R,n)}$ y $h_{(R,n)}$, convergen puntualmente a 0. Aplicando el Teorema de Egoroff ([S]), se tiene que dado $m \in \mathbb{N}^+$ existe un conjunto medible $R_{(g,m)} \subset R$ tal que $\text{leb}(R \setminus R_{(g,m)}) < \frac{1}{2m}$ y $g_{(R,n)}$ converge uniformemente a 0 en $R_{(g,m)}$. De forma análoga podemos definir $R_{(h,m)}$. Luego notamos R_m a la intersección $R_m = R_{(g,m)} \cap R_{(h,m)} \cap \tilde{U}$. Tenemos entonces que $g_{(R,n)}$ y $h_{(R,n)}$ convergen uniformemente a 0 en R_m y

$$\text{leb}(R \setminus R_m) = \text{leb}(R \setminus [R_{(g,m)} \cap R_{(h,m)} \cap \tilde{U}]) \leq \text{leb}(R \setminus R_{(g,m)}) + \text{leb}(R \setminus R_{(h,m)}) + \text{leb}(R \setminus \tilde{U}) < \frac{1}{m}.$$

Veamos ahora que f_x es continua en $\overset{\circ}{R} \cap R_m$, el caso de f_y es análogo.

Fijo $z \in \overset{\circ}{R} \cap R_m$, tomamos $\delta_0 > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B\left(z, \delta_0 + \frac{3}{n_0}\right) \subset R$.

Para todo $w \in B(z, \delta_0) \cap (\overset{\circ}{R} \cap R_m)$, se cumple que

$$|f_x(z) - f_x(w)| \leq \left| \frac{f(z + \frac{1}{n_0}) - f(z)}{\frac{1}{n_0}} - f_x(z) \right| + \left| \frac{f(w + \frac{1}{n_0}) - f(w)}{\frac{1}{n_0}} - f_x(w) \right| + \left| \frac{f(z + \frac{1}{n_0}) - f(z)}{\frac{1}{n_0}} - \frac{f(w + \frac{1}{n_0}) - f(w)}{\frac{1}{n_0}} \right|.$$

Dado $\epsilon > 0$ arbitrario, como $g_{(R,n)}$ converge uniformemente a 0 en R_m , se tiene que existe $n_1 \geq n_0$ tal que

$$\left| \frac{f(z + \frac{1}{n_1}) - f(z)}{\frac{1}{n_1}} - f_x(z) \right| + \left| \frac{f(w + \frac{1}{n_1}) - f(w)}{\frac{1}{n_1}} - f_x(w) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Fijado n_1 , como f es uniformemente continua en R , la función $s_{n_1}(z) = \frac{f(z + \frac{1}{n_1}) - f(z)}{\frac{1}{n_1}}$ lo es en $B\left(z, \delta_0 + \frac{2}{n_1}\right)$. Por tanto existe $\delta_1 \leq \delta_0$ tal que $\forall w \in B(z, \delta_1)$, se cumple que

$$\left| \frac{f(z + \frac{1}{n_1}) - f(z)}{\frac{1}{n_1}} - \frac{f(w + \frac{1}{n_1}) - f(w)}{\frac{1}{n_1}} \right| < \frac{\epsilon}{2},$$

de donde podemos concluir que $\forall w \in B(z, \delta_1) \cap R_m$, se tiene que $|f_x(z) - f_x(w)| < \epsilon$. Como ϵ era arbitrario, probamos la continuidad de f_x en z . De forma análoga se tiene la continuidad de f_y . Notar que si $\overset{\circ}{R} \cap R_m = \overset{\circ}{R}$, entonces f diferenciable. Sin embargo, este no tiene por que ser el caso.

Observar que casi toda recta horizontal interseca a R_m en un conjunto medible, con respecto a la medida de Lebesgue en esa recta. De la misma manera se cumple para las rectas verticales, en caso contrario $R_m \subset \mathbb{R}^2$ no sería medible. Estudiemos ahora las rectas r , horizontales y verticales, para las cuales

$$leb_r(R_m \cap r) > 0, \quad (1.7)$$

donde leb_r es la medida de Lebesgue asociada a r . No perdemos generalidad con esto, ya que si definimos $E_{(h,m)} := \{r : (r \cap Ox = \emptyset \text{ y } leb_r(R_m \cap r) > 0)\}$, $E_{(v,m)} := \{r : (r \cap Oy = \emptyset \text{ y } leb_r(R_m \cap r) > 0)\}$ y $E_m = \left(\bigcup_{r \in E_{(h,m)}} R_m \cap r\right) \cap \left(\bigcup_{r \in E_{(v,m)}} R_m \cap r\right)$, tenemos que

$$E_m \subset R_m \quad \text{y} \quad leb(R_m \setminus E_m) = 0.$$

Dada $r \in E_{(h,m)}$, casi todo punto de $r \cap R_m$ tiene densidad lineal 1 en leb_r , esto es, el conjunto

$$W_{(r,m)} = \left\{ w \in r \cap R_m : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{leb_r(r \cap R_m \cap (w-t, w+t))}{2t} = 1 \right\}$$

verifica que $leb_r([r \cap R_m] \setminus W_{(r,m)}) = 0$ [S].

Notemos $\hat{E}_{(h,m)} = \{z \in R_m : \text{tiene densidad lineal horizontal 1 en } E_h\}$. De forma análoga podemos definir $\hat{E}_{(v,m)}$ para densidad lineal vertical 1 y $\hat{E}_m = \hat{E}_{(h,m)} \cap \hat{E}_{(v,m)}$. Además, tenemos que $leb(E_m \setminus \hat{E}_m) = 0$.

Supongamos que f es diferenciable en $\hat{E}_m$ para cualquier m . Observar que si tenemos este resultado para m y m' , entonces es válido para $\hat{E}_m \cup \hat{E}_{m'}$. De donde que f es diferenciable en $\hat{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \hat{E}_m$. Como se tiene la cadena de inclusiones $\hat{E}_m \subset E_m \subset R_m \subset R$, y

$$leb(E_m \setminus \hat{E}_m) = leb(R_m \setminus E_m) = 0 \quad \text{y} \quad leb(R \setminus R_m) \leq \frac{1}{m},$$

deducimos que $leb(R \setminus \hat{E}_m) < \frac{1}{m}$. Concluimos entonces que f es diferenciable ctp en R y por tanto ctp en U . Probemos entonces que f es diferenciable en $\hat{E}_m$.

Sea $z \in \hat{E}_m$, podemos asumir por comodidad que $z = 0$. Notar que no hay pérdida de generalidad en esta asunción.

Veamos ahora que f es diferenciable en 0. Es decir, dado $\epsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que, $\forall (x, y) \in B(0, \delta)$ se tiene que $|f(x, y) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)| < \epsilon \|(x, y)\|$.

Supongamos que $x \in R_m$, entonces por desigualdad triangular

$$|f(x, y) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)| \leq$$

$$|f(x + iy) - f(x) - yf_y(x)| + |f(x) - f(0) - xf_x(0)| + |y(f_y(x) - f_y(0))|.$$

Acotemos así cada término.

- Recordando la convergencia uniforme de $h_{(R,n)}$ en R_m se tiene que $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $|y| < \frac{1}{n_1}$. Entonces $|f(x + iy) - f(x) - yf_y(x)| \leq \frac{\epsilon}{3}|y| \leq \frac{\epsilon}{3}\|(x, y)\|$.
- De forma análoga existe $n_2 \geq n_1$ tal que si $|x| < \frac{1}{n_2}$. Entonces $|f(x) - f(0) - xf_x(0)| \leq \frac{\epsilon}{3}\|(x, y)\|$.
- Como f_y restringida a R_m es continua en 0, se tiene que $\exists \delta_2 > 0$, $\delta_2 < \frac{1}{n_2}$ tal que $|(f_y(x) - f_y(0))| < \frac{\epsilon}{3}$, luego $|y(f_y(x) - f_y(0))| \leq \frac{\epsilon}{3}|y| \leq \frac{\epsilon}{3}\|(x, y)\|$.

Podemos concluir así que

$$|f(x + iy) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)| \leq$$

$$|f(x + iy) - f(x) - yf_y(x)| + |f(x) - f(0) - xf_x(0)| + |y(f_y(x) - f_y(0))| \leq \epsilon|x + iy|. \quad (1.8)$$

Un razonamiento análogo nos permite concluir que $|f(x, y) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)| \leq \epsilon|x + iy|$ si $iy \in R_m$. Estudiaremos ahora el caso en que $x \notin R_m$ y $iy \notin R_m$.

Supongamos para simplificar notación que $x + iy$ está en el primer cuadrante, el resto de los casos son análogos.

Sea $l_1(x) = \text{leb}_r(R_m \cap (-x, x) \times \{0\})$. Como 0 es de densidad lineal 1, tenemos que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{l_1(x)}{2x} = 1$. Existe así δ_3 , con $0 < \delta_3 \leq \delta_2$, tal que $l_1(x) > \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon}x \ \forall x < \delta_3$. Por tanto el intervalo $(\frac{x}{1+\epsilon}, x)$ interseca R_m , ya que

$$\text{leb} \left([-x, x] \setminus \left(\frac{x}{1+\epsilon}, x \right) \right) < \frac{2+\epsilon}{1+\epsilon}x < l_1(x).$$

Sea x que verifica $x(1+\epsilon) < \delta_3$, tenemos entonces que existen $x_1, x_2 \in R_m$ tal que

$$\frac{x}{1+\epsilon} < x_1 < x < x_2 < (1+\epsilon)x.$$

Realizando el mismo procedimiento en y , existen y_1, y_2 tal que $iy_i \in R_m$ y

$$\frac{y}{1+\epsilon} < y_1 < y < y_2 < (1+\epsilon)y.$$

Concluimos así que se cumplen las desigualdades de 1.8 en el perímetro del rectángulo $C = [x_1, x_2] \times [iy_1, iy_2]$.

Para terminar utilizaremos el hecho de que f cumple el principio del módulo máximo. Dado $v \in \mathbb{C}$, el máximo de la función $\hat{f}_v(z) = |f(z) - v|$ restringida a C se da en su perímetro. Por lo que $\exists (x_v + iy_v) \in \partial C$ tal que $|f(x_v + iy_v) - v| \geq |f(z) - v|$. Fijamos $z = x + iy \in C$ y tomamos $v = f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)$, de donde existe $x_v + iy_v \in \partial C$ tal que

$$|f(x + iy) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)| \leq |f(x_v + iy_v) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)|.$$

Aplicando la desigualdad triangular en $-x_v f_x(0) - y_v f_y(0)$ tenemos

$$\begin{aligned} & |f(x_v + iy_v) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)| \leq \\ & \leq |f(x_v + iy_v) - f(0) - x_v f_x(0) - y_v f_y(0)| + |(x - x_v)f_x(0)| + |(y - y_v)f_y(0)|. \end{aligned}$$

Como $(x_v, y_v) \in \partial C$, se tiene que $|x - x_v| \leq x \max\{\epsilon, 1 - \frac{1}{1+\epsilon}\} = x\epsilon$ y de forma análoga $|y - y_v| \leq y\epsilon$. Tenemos así que $|(x - x_v)f_x(0)| \leq x\epsilon|f_x(0)|$; y la desigualdad análoga para y . Además podemos aplicar la ecuación 1.8 en (x_v, y_v) , y por tanto

$$\begin{aligned} |f(x_v + iy_v) - f(0) - xf_x(0) - yf_y(0)| & \leq \epsilon|x_v + iy_v| + x\epsilon|f_x(0)| + y\epsilon|f_y(0)| \leq \\ & \leq \epsilon[(1+\epsilon) + |f_x(0)| + |f_y(0)|]|x + iy|. \end{aligned}$$

Como ϵ es arbitrario, y $[(1+\epsilon) + |f_x(0)| + |f_y(0)|]$ esta acotado para $\epsilon < 1$, se tiene la desigualdad 1.8 con $\epsilon' = \epsilon[(1+\epsilon) + |f_x(0)| + |f_y(0)|]$ para cualquier $(x, y) \in D(0, \delta_3)$. Luego f es diferenciable en R_m . Por último f es diferenciable en $\hat{R} = \cup_{m \in \mathbb{N}} R_m$, de donde se obtiene la tesis. $\square$

De la prueba anterior, en particular de la continuidad ctp de f_x, f_y , se puede deducir el siguiente resultado.

Observación 1.2.18 Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ es K -quasiconforme, entonces $f_x, f_y, f_z, f_{\bar{z}}, \mu_f$ son medibles.

Capítulo 2

Acciones quasi conformes en superficies riemanniannas

En este capítulo abordaremos el problema central de la tesis, es decir estudiar cómo se comportan las acciones quasi conformes en superficies de Riemann cerradas. Para esto, primero generalizaremos las definiciones del capítulo anterior, luego centraremos nuestro estudio en la esfera, y a partir de ello obtendremos resultados en el resto de las superficies.

Concluiremos que este tipo de acciones en realidad provienen de acciones conformes, y por tanto basta con estudiar éstas.

2.1. Acciones quasiconformes en superficies de Riemann

Fijaremos la notación del género de una superficie cerrada como subíndice.

Notación 2.1.1 Dado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, notamos S_n a la superficie orientable y cerrada de género n . Recordemos que el género es una caracterización topológica de éstas.

La propiedad de K quasiconformidad de una función f (Definición 1.2.4) utiliza entre otras nociones, f_z y $f_{\bar{z}}$, lo que redundo en f_x y f_y . Para adaptarla a una superficie riemannianna, debemos o bien fijar dos campos X e Y ortonormales, o bien mostrar que no depende de éstos.

La Definición 1.1.9 en cambio, sí es válida para cualquier difeomorfismo $f : S \rightarrow S$, por lo que podríamos tomar ésta. Más aún, esta propiedad se preserva por conjugación de difeomorfismos y en particular, se tiene la siguiente obseervación.

Observación 2.1.2 Dadas S y $\tilde{S}$ superficies orientables cerradas y $f : S \rightarrow \tilde{S}$ un difeomorfismo que preserve. Entonces existe K tal que f verifica la Definición 1.1.9 para ese K .

Dados G un grupo y $\tau : G \rightarrow \text{Dif}_+(S)$ una acción tal que $\tau(g)$ verifica la Definición 1.1.9 para K_1 , $\forall g \in G$, entonces la acción $\tilde{\tau} : G \rightarrow \text{Dif}(\tilde{S})$ definida por $\tilde{\tau}(g) = f\tau(g)f^{-1}$ verifica la Definición 1.1.9 para K_1K^2

Sin embargo, para las pruebas de este capítulo y el siguiente necesitaremos el valor μ_f . Surge así el problema sobre como definir f_z y $f_{\bar{z}}$.

Daremos la definición de μ_f , y por tanto de K quasiconforme, fijando una métrica riemannianna, y en particular, un cubrimiento universal.

Género 1

Para S_1 tomaremos el cubrimiento canónico, de donde $S_1 = \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. En particular la métrica en S_1 es de curvatura constante igual a cero.

Definiremos μ a partir de un levantamiento, ya que diferentes levantamientos de un mismo mapa $f : S_1 \rightarrow S_1$ preservan la estructura que deseamos.

Observación 2.1.3

- Sea $f : S_1 \rightarrow S_1$ una función tal que existe un levantado $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que es K quasiconforme, entonces todos los levantados lo son (con el mismo K).
- Si $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son dos levantados de $f : S_1 \rightarrow S_1$, entonces $\mu_{\hat{f}_1} = \mu_{\hat{f}_2}$. En particular, $\mu_{\hat{f}_1}(z) = \mu_{\hat{f}_1}(z + (n, m))$ para todo $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$.

Podemos así definir mapas y acciones K quasiconformes en S_1 a partir de los levantamientos.

Definición 2.1.4 Diremos que una función $f : S_1 \rightarrow S_1$ es un mapa K -quasiconforme si existe un levantamiento $\hat{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que lo es (esto no depende del levantamiento).

Definimos la dilatación $\mu_f(z)$ como $\mu_f(z) = \mu_{\hat{f}}(\hat{z})$, donde $\hat{f}$ es un levantamiento de f y $\pi(\hat{z}) = z$ para $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ la proyección canónica.

Una acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(S_1)$ es K quasi conforme si cada mapa $\tau(g)$ lo es.

Veamos ahora una pequeña modificación de la Observación 2.1.2. Más en concreto, observar para un caso específico cómo afecta a la definición de K quasiconforme el hecho de conjugar por un difeomorfismo.

Supongamos que en S_1 damos otra métrica de curvatura constante, digamos $S_\Lambda = \mathbb{R}^2/\Lambda$, con Λ un látice. Podemos definir que un mapa sea K quasiconforme si su levantado lo es. Esta definición es equivalente a 2.1.4.

Observación 2.1.5 Sean Λ un látice en $\mathbb{R}^2$ y $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con $T(\mathbb{Z}^2) = \Lambda$. Notemos $g : S_1 \rightarrow S_\Lambda$ el difeomorfismo inducido por T en los cocientes. Observar que T es K_1 quasiconforme para algún K_1 .

Más aún, dado un mapa $f : S_1 \rightarrow S_1$, K quasiconforme, aplicando el Corolario 1.2.16, cualquier levantamiento de $g \circ f \circ g^{-1} : S_\Lambda \rightarrow S_\Lambda$ es KK_1^2 quasiconforme.

Tenemos así que la propiedad de ser K quasiconforme, para algún K , se preserva por difeomorfismos para los cocientes de la forma $\mathbb{R}^2/\Lambda$.

Para finalizar veamos un par de ejemplos.

Ejemplo 2.1.6

- La acción $\tau : \mathbb{R}^2 \rightarrow \text{Hom}(S_1)$ definida por $\tau(g)(v) = \pi(\hat{v} + g)$ donde $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$ es la proyección canónica y $\pi(\hat{v}) = v$, es una acción 1 quasiconforme (conforme).
- La acción del Ejemplo 1.1.14 no es K quasiconforme.

Género $n \geq 2$

En esta situación tomaremos como cubrimiento $\mathbb{D}$ con la métrica hiperbólica y como cociente uno simétrico, es decir, que admita como dominio fundamental un $2n$ -ágono regular.

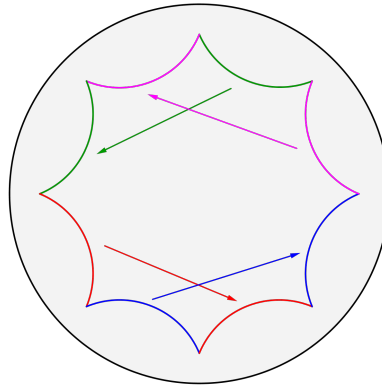


Figura 2.1: Dominio fundamental e identificaciones para $n = 2$.

Como en el caso anterior, podemos definir K quasiconforme a partir de levantamientos.

Definición 2.1.7 Una función $f : S_n \rightarrow S_n$ es un mapa K -quasiconforme si uno/cualquier levantamiento $\hat{f} : \mathbb{D}^2 \rightarrow \mathbb{D}^2$ lo es.

Definimos $\mu_f(z)$ como $\mu_f(z) = \mu_{\hat{f}}(\hat{z})$, donde $\hat{f}$ es un levantamiento de f y $\pi(\hat{z}) = z$ para $\pi : \mathbb{D} \rightarrow S_g$ la proyección canónica.

Una acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(S_n)$ es K quasi conforme si cada mapa $\tau(g)$ lo es.

Género $n = 0$

Para este caso, dado que el cubrimiento universal es la propia esfera, tomaremos la métrica de la inclusión en $\mathbb{R}^3$. Podríamos así tomar μ de un mapa a partir de las coordenadas en $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, utilizaremos las coordenadas en la proyección estereográfica.

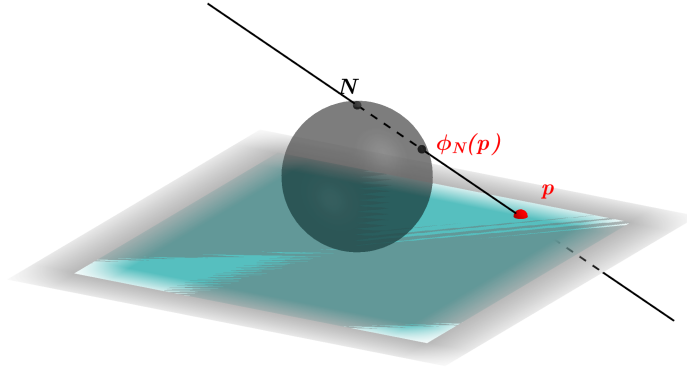


Figura 2.2: Representación del mapa $\phi_N : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\}$.

Definición 2.1.8 Un homeomorfismo $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ es K quasiconforme si la función $\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_N : \mathbb{R}^2 \setminus \{(\phi_N^{-1} \circ f^{-1}(\infty))\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ lo es, donde $\phi_N^{-1} : \mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ es la proyección estereográfica.

En caso de que f sea quasiconforme, definimos $\mu_f(z)$ para $z \notin \{\infty, f^{-1}(\infty)\}$, como $\mu_f(z) = \mu_{\phi_N^{-1} \circ f \circ \phi_N}(\phi_N^{-1}(z))$.

Decimos además que una acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{S}^2)$ es K quasi conforme si cada mapa $\tau(g)$ lo es.

Estudiaremos el problema de la definición de μ para distintas métricas, más en profundidad en la sección correspondiente a cada caso.

2.2. Acciones en $\mathbb{S}^2$

En esta sección estudiaremos todas las posibles acciones de grupos numerables en abiertos de $\mathbb{S}^2$ por homeomorfismos K quasiconformes, y probaremos que son conjugados a acciones conformes. En particular, las acciones en $\mathbb{S}^2$ son conjugadas a un subgrupo de Möbius, y por tanto de $GL_2(\mathbb{C}) \subset GL_4(\mathbb{R})$, de donde vale la alternativa de Tits. Para esto tomaremos como base el trabajo de P. Tukia en [Tu].

Teorema 2.2.1 Sea G un grupo numerable actuando de forma K -quasiconforme en $U \subset \mathbb{S}^2$. Entonces existe un homeomorfismo K -quasiconforme, $h : U \rightarrow V$ tal que la acción proveniente de la conjugación hGh^{-1} es holomorfa en V .

Además, h es la restricción de un mapa $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ tal que μ_f se anula ctp en U^c .

En particular, cuando la acción es sobre $\mathbb{S}^2$, podemos concluir que es conjugada a una acción por transformaciones de Möbius.

Notación 2.2.2 Trabajaremos en esta sección con algunas retriicciones y notaciones específicas.

- El grupo G es numerable. Recordar que si G es finitamente generado es numerable.
- La acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}_+(U)$ es fiel y K quasiconforme. Para simplificar, utilizaremos $g = \tau(g)$. Notar que si la acción no es fiel, esta induce una acción de $\hat{G} = G/\text{Ker}(\tau)$ que sí lo es, por lo que no se pierde generalidad al agregar esta hipótesis.
- En caso de que $U \neq \mathbb{S}^2$, fijaremos $\infty \notin U$. Dado $z \in U \setminus \{\infty\}$, denotaremos también z a su preimagen por ϕ_N (la proyección estereográfica).
- Definimos $\tilde{U} = \{z \in U : \forall g \in G \exists \mu_g(z) \text{ y } |\mu_g(z)| \leq k\}$. Recordar que por definición de μ_g , se tiene que $\infty \notin \tilde{U}$.

- $\mathcal{P}_0(\mathbb{D}) = \{X \subset \mathbb{D} : X \neq \emptyset \text{ y } X \text{ está acotado con la métrica hiperbólica}\}$

Observación 2.2.3 Dado $g \in G$, el conjunto $\tilde{U}_g = \{z \in U : \exists \mu_g(z) \text{ y } |\mu_g(z)| \leq k\}$ es medible. Más aún, $m(U \setminus \tilde{U}_g) = 0$. Como G es numerable se tiene que $m(U \setminus \bigcup_{g \in G} \tilde{U}_g) = m(U \setminus \tilde{U}) = 0$.

Dado $z \in \tilde{U}$, como G es K quasiconforme el conjunto $M_z = \{\mu_g(z) : g \in G\}$ está acotado, es decir $M_z \subset P_0(\mathbb{D})$.

Definiremos ahora un par de mapas auxiliares, $P : \mathcal{P}_0(\mathbb{D}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{D}$, y $r_X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ donde $X \in \mathcal{P}_0(\mathbb{D})$. La propiedad que buscamos en P es la siguiente: $P(T(X)) = T(P(X))$ para toda isometría T de $\mathbb{D}$. Recordar que las isometrías de $\mathbb{D}$ son las transformaciones de Möbius tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.

Definición 2.2.4 Dado $X \in \mathcal{P}_0(\mathbb{D})$, definimos la función $r_X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ como $r_X(z) = \inf\{r \in \mathbb{R}^+ : X \subset B(z, r)\}$.

Observación 2.2.5 Se cumplen las siguientes propiedades:

1. La función r_X es continua y propia, por lo tanto tiene mínimo.
2. Dado $X \in \mathcal{P}_0(\mathbb{D})$, se tiene que $X \subset \overline{B(z, r_X(z))}$. Si además X es compacto, existe $x \in X$ tal que $d(z, x) = r_X(z)$.
3. Dados $X, Y \in \mathcal{P}_0(\mathbb{D})$ tal que $X \subset Y$, entonces $\min(r_X) \leq \min(r_Y)$.
4. Dada $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ isometría, $\forall z \in \mathbb{D}$ se tiene que $r_{g(X)}(g(z)) = r_X(z)$.

Proposición 2.2.6 Dado $X \in \mathcal{P}_0(\mathbb{D})$, la función r_X tiene mínimo y éste se realiza en único punto, que notamos z_X .

Demostración: Sea r el mínimo de r_X . Supongamos que existen dos puntos distintos $z_1 \neq z_2$ que realizan el mínimo.

Sean t el segmento geodésico entre z_1 y z_2 , z el punto medio de t y s la geodésica por z tal que $t \perp s$. La geodésica s es, de hecho, la mediatriz entre z_1 y z_2 y divide a $\mathbb{D}$ en dos regiones, que notamos D_1, D_2 donde $z_1 \in D_1$ y $z_2 \in D_2$.

Notar que mediante una isometría, podemos suponer $z = 0$ y $\{0\} \subsetneq t \subsetneq (-1, 1)$.

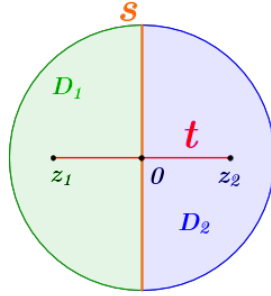


Figura 2.3: Visualización de elementos auxiliares de esta proposición.

Observar que, como $X \subset \overline{B(z_i, r)}$, se tiene que el conjunto $C = \overline{B(z_1, r)} \cap \overline{B(z_2, r)}$ contiene a X y por tanto $r = \min(r_X) \leq \min(r_C)$.

Veamos ahora que $r_C(0) < r$, lo cual es absurdo. Para esto basta probar que $\forall y \in C$, se tiene que $d(0, y) < \max\{d(z_1, y), d(z_2, y)\} \leq r$, ya que C es compacto.

Afirmación: Dado $y \in s$ se cumple que $d(0, y) < d(z_1, y)$.

Si $y = 0$, el resultado es trivial. Supongamos entonces que $y = ik$ con $k > 0$ (el caso $k < 0$ es análogo).

Sea γ la geodésica que une z_1 y y parametrizada por $\gamma(h) = (\gamma_1(h), h)$. Tenemos así que

$$\begin{aligned} d(z_1, y) &= \int_0^k \|\gamma'(h)\|_{\gamma(h)} dh = \int_0^k \|(\gamma_1'(h), 1)\|_{\gamma(h)} dh > \int_0^k \|(0, 1)\|_{\gamma(h)} dh = \\ &= \int_0^k \frac{2}{1 - \|\gamma(h)\|^2} dh \geq \int_0^k \frac{2}{1 - |h|^2} dh = \int_0^k \|(0, 1)\|_{(0, h)} dh \geq d(0, y), \end{aligned}$$

la última desigualdad es, de hecho, una igualdad.

Estudiemos ahora los puntos que no están en la geodésica s .

Sea $y \in C$ tal que $d(z_1, y) < d(z_2, y)$, es decir $y \in D_1$, veamos que $d(y, z_2) > d(y, 0)$. Sea γ la geodésica entre y y z_2 . Notar que como $y \in D_1$ se tiene que γ interseca a s y tomamos $y_0 \in \gamma \cap s$. Tenemos entonces las siguientes desigualdades

$$d(z_2, y) = d(z_2, y_0) + d(y_0, y) > d(0, y_0) + d(y_0, y) \geq d(0, y).$$

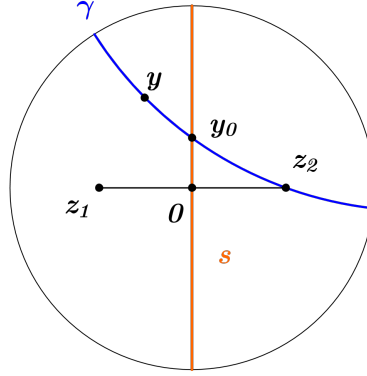


Figura 2.4: Representación del caso $y \notin s$.

De forma análoga, para $y \in C \cap D_2$ se tiene que $d(z_1, y) > d(0, y)$. Podemos concluir así que $r_C(z) < r_X(z_1) = r$, lo cual es absurdo. $\square$

Dado que el mínimo de r_X se realiza en un único punto, digamos z_X , podemos asociar a X ese punto.

Definición 2.2.7 Definimos la función $P : \mathcal{P}_0(\mathbb{D}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{D}) \rightarrow \mathbb{D}$ dada por $P(X) = z$ si solo si el mínimo de r_X se realiza en z .

Comentario 2.2.8 La función P cumple que:

1. $r_X(P(X)) = \min(r_X)$ y por tanto $X \subset \overline{B(P(X), r_X(P(X)))}$.
2. Para toda g isometría de $\mathbb{D}$, se tiene que $P(g(X)) = g(P(X))$.

Podemos redefinir P para el caso particular donde X es finito.

Definición 2.2.9 Definimos la función $P_n : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}$ como $P_n(z_1, \dots, z_n) = P(\{z_1, \dots, z_n\})$.

Comentario 2.2.10 Las funciones P_n son continuas y medibles Lebesgue.

Demostración de 2.2.1:

Primero buscaremos condiciones para la función f , de forma que de cumplirlas sea una solución a nuestro problema. Estas condiciones, además del hecho de ser un homeomorfismo, vendrán dadas por μ_f .

Veamos primero que si $\mu_{f \circ g \circ f^{-1}} = 0$ ctp en U para todo $g \in G$ entonces se cumple la tesis.

Para el caso $U \subsetneq \mathbb{S}^2$. Como la función $\phi_N^{-1} \circ f \circ g \circ f^{-1} \circ \phi_N$ es un homeomorfismo y $\mu_{\phi_N^{-1} \circ f \circ g \circ f^{-1} \circ \phi_N} = \mu_{f \circ g \circ f^{-1}} = 0$, aplicando el Corolario 3.2.8 es holomorfa. Este corolario será probado de forma independiente en el Capítulo 3.

Como ϕ_N y ϕ_N^{-1} son diferenciables y conformes, tenemos que $f \circ g \circ f^{-1}$ también lo es, luego es holomorfa.

En caso de que $U = \mathbb{S}^2$, solo falta estudiar el problema en 2 puntos aislados $A = \{\infty, (f \circ g \circ f^{-1})^{-1}(\infty)\}$. Es decir $f \circ g \circ f^{-1}$ es holomorfa salvo en a lo más A . Como $f \circ g \circ f^{-1}$ es continua, la singularidades en A son evitables, y por lo tanto $f \circ g \circ f^{-1}$ es holomorfa en $\mathbb{S}^2$, concluyendo así la tesis.

La propiedad $\mu_{f \circ g \circ f^{-1}} = 0$ ctp para un g fijo aplicando el Corolario (1.2.16) es equivalente a $\mu_f(z) = \mu_{f \circ g \circ f^{-1}}(z)$ ctp. Como a su vez $\mu_{f \circ g \circ f^{-1}}(p) = \mu_{fg}(p)$, basta encontrar f tal que $\mu_f(p) = \mu_{fg}(p)$ para casi todo p , para todo $g \in G$.

Aplicando la fórmula del resultado (1.2.15), tenemos que se verifica ctp la siguiente ecuación

$$\mu_f(p) = \mu_{f \circ g}(p) = \frac{\mu_g(p) + \mu_f(g(p))e^{(-2\alpha_1 - 2\beta_1)i}}{1 + \mu_g(p)\mu_f(g(p))e^{(2\beta_1 - 2\alpha_1)i}}. \quad (2.1)$$

Definimos la transformación de Möebius asociada a la igualdad anterior, tomando como variable $\mu_f(g(p))$,

$$T_g(p)(z) = \frac{\mu_g(p) + ze^{(-2\alpha_1 - 2\beta_1)i}}{1 + z\mu_g(p)e^{(2\beta_1 - 2\alpha_1)i}}.$$

Notar que para cualquier $g' \in G$, se verifica que

$$Tg(p)(\mu_{g'}(g(p))) = \frac{\mu_g(p) + \mu_{g'}(g(p))e^{(-2\alpha_1 - 2\beta_1)i}}{1 + \mu_{g'}(g(p))\mu_g(p)e^{(2\beta_1 - 2\alpha_1)i}} = \mu_{g' \circ g}(p). \quad (2.2)$$

Veamos que $T_g(p)(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$. Para esto recordemos que $\mu_g(p) = k_1 e^{-2\beta_1 i}$, de donde

$$T_g(p)(z) = \frac{\mu_g(p) + ze^{(-2\alpha_1 - 2\beta_1)i}}{1 + z\mu_g(p)e^{(2\beta_1 - 2\alpha_1)i}} = \frac{k_1 e^{(\alpha_1 - \beta_1)i} + ze^{(-\alpha_1 - \beta_1)i}}{e^{(\alpha_1 + \beta_1)i} + zk_1 e^{(-\alpha_1 + \beta_1)i}}. \quad (2.3)$$

Es decir $T(z) = \frac{\bar{a} + \bar{b}z}{b + az}$ donde $|a| < 1$ y $|b| = 1$, y por tanto T preserva $\mathbb{D}$.

Dado $p \in \tilde{U}$, los conjuntos $M_p = \{\mu_g(p) : g \in G\}$ están acotados uniformemente en $\mathbb{D}$, y además se tiene que

$$T_g(p)(M_{g(p)}) = \{T_g(p)(\mu_{g'}(g(p))) : g' \in G\} = \{\mu_{g' \circ g}(p) : g' \in G\} = M_p, \quad (2.4)$$

donde la segunda igualdad se da por la ecuación 2.2.

Definimos la función

$$\mu(z) = \begin{cases} P(M_z) & \text{si } z \in \tilde{U}; \\ 0 & \text{si } z \in \tilde{U}^C. \end{cases}$$

Observar que dado $g \in G$ y $p \in \tilde{U}$, aplicando la ecuación 2.4 y el Comentario 2.2.8, se tiene que

$$\mu(p) = P(M_p) = P(T_g(p)(M_{g(p)})) = T_g(p)(P(M_{g(p)})) = T_g(p)(\mu(g(p))).$$

Si $\mu_f = \mu$ entonces $\mu_f(z) = T_g(z)(\mu_f(g(z))) = \mu_{f \circ g}(z)$ para todo $z \in \tilde{U}$, de donde se verifica la tesis.

La existencia de una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ cuya dilatación μ_f sea una función dada μ , donde μ es medible y $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$ está garantizada por la existencia de soluciones a la ecuación de Beltrami (Capítulo 3). Además, podemos pedir a f que sea un homeomorfismo y $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$ (solución normal).

Basta entonces probar que μ es medible.

Sea g_n una numeración de G , definimos las funciones $\mu_n : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{D}$ como

$$\mu_n(z) = \begin{cases} P_n(\mu_{g_1}(z), \dots, \mu_{g_n}(z)) & \text{si } z \in \tilde{U}; \\ 0 & \text{si } z \in \tilde{U}^C. \end{cases}$$

El mapa P_n es medible, y por el Corolario 1.2.18, cada μ_{g_i} también lo es. Se deduce que μ_n es medible. Veamos ahora que μ_n tiende puntualmente a μ , de donde se obtiene que μ es medible y que está uniformemente acotada.

Afirmación: Dado $z \in \tilde{U}$, se tiene que $\mu_n(z) \rightarrow \mu(z)$.

Supongamos que $\exists z \in \tilde{U}$ tal que $\mu_n(z)$ no converge a $\mu(z)$. Notemos $X_n(z) = \{\mu_{g_1}(z), \dots, \mu_{g_n}(z)\}$ y $X(z) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$. Recordar que $P(X) = \mu(z)$.

Como $X_n \subset \overline{B(0, K)}$, se tiene que $\mu_n(z)$ está acotado. Luego, existe una subsucesión convergente $\mu_{n_l}(z) \rightarrow p \neq \mu(z)$. Sea d la distancia entre ellos, es decir $0 < d = d(p, \mu(z))$.

Sea r_n la sucesión dada por $r_n = r_{X_n}(P(X_n))$. r_n es monótona y está acotada por k , luego tiene límite. Como además $X_n \subset X$, se tiene que $r_n \rightarrow r \leq r_X(P(X))$.

Notar que $X_{n_l} \subset \overline{B(P(X_{n_l}), r_{X_{n_l}}(X_{n_l}))} \subset \overline{B(p, r_{X_{n_l}}(X_{n_l}) + d(p, P(X_{n_l})))}$, como además se tiene que $P(X_{n_l}) \rightarrow p$ y $X_{n_l} \subset X_{n_{l'}}$ si $l \leq l'$, entonces para todo l se tiene que $X_{n_l} \subset \overline{B(p, r)}$.

Dado que X_{n_l} es una subsucesión de X_n , que es a su vez una sucesión encajada de conjuntos, entonces $X = \bigcup X_{n_l}$ y por tanto $X \subset \overline{B(p, r)}$. Como $r \leq r_X(P(X))$, tenemos que $r = r_X(P(X))$ y $p = P(X)$ lo cual es absurdo.

Concluimos así que μ_n converge puntualmente a μ y por tanto ésta es medible y está uniformemente acotada. Es decir, existe $K < 1$ tal que $|\mu| \leq K$. $\square$

Tenemos entonces que en el caso de acciones de grupos numerables en $\mathbb{S}^2$ K -quasiconformes, son conjugadas a acciones holomorfas. Pero las únicas funciones holomorfas biyectivas en $\mathbb{S}^2$ son las transformaciones de Möbius. Luego si la acción es fiel, se tiene que $G \sim H \subset SL_2(\mathbb{C})$. Tenemos así que en este caso podemos aplicar la alternativa de Tits.

Corolario 2.2.11 *Sean G un grupo finitamente generado y $\tau : G \rightarrow Hom(\mathbb{S}^2)$ una acción K -quasiconforme. Entonces la acción admite una medida invariante o G tiene un subgrupo libre a dos generadores.*

Podemos preguntarnos ahora como identificar cada caso. Es decir, encontrar alguna medida invariante o determinar que no exista ninguna.

Como la acción es conjugada a una holomorfa, basta estudiar esas acciones, y por lo tanto las posibilidades para G son similares a la sección 1.1.2.

Observación 2.2.12 *Sea $\tau : G \rightarrow Hom_+(\mathbb{S}^2)$ una acción holomorfa.*

- Si $\tau(G)$ tiene un elemento hiperbólico, entonces existe $x \in \mathbb{S}^2$ tal que $\#orb_G(x) \leq 2$ o G contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{F}_2$.
- Si $\tau(G)$ tiene un elemento parabólico, entonces la acción admite un punto fijo global o G contiene un subgrupo isomorfo a $\mathbb{F}_2$.

Resta entonces estudiar el caso en que todos los elementos son elípticos.

Acciones elípticas

Fijemos ahora una acción holomorfa $\tau : G \rightarrow Dif(\mathbb{S}^2)$ tal que $\tau(g)$ es elíptica para todo $g \in G$.

Estudiaremos aquí condiciones para la existencia de medidas de probabilidad invariantes. Empezamos con algunos casos sencillos.

Observación 2.2.13

- Si $ord(\tau(g)) < \infty, \forall g \in G$, entonces no existen subgrupos isomorfos a $\mathbb{F}_2$ en G . Luego la acción admite medidas de probabilidad invariante.
- Si G es abeliano (no existen subgrupos isomorfos a $\mathbb{F}_2$), entonces la acción admite medidas de probabilidad invariantes, más aún, si $G \sim \mathbb{Z}$ la acción admite como medidas invariantes las descritas en la subsección (1.1.2).

Además hay otros ejemplos donde podemos dar explícitamente las medidas invariantes.

Ejemplo 2.2.14

- Si la acción admite un punto fijo global, digamos p , entonces δ_p es una medida de probabilidad invariante. Si la acción admite una órbita finita, digamos $\{p_1, \dots, p_m\}$, entonces $\mu = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \delta_{p_i}$ es una medida de probabilidad invariante.
- Si $G < SL_3(\mathbb{R})$ y la acción es la canónica en $\mathbb{S}^2$, entonces $\frac{leb_{\mathbb{S}^2}}{4\pi}$ es una medida de probabilidad invariante. Si la acción es conjugada a una de esta forma, la conjugación de $\frac{leb_{\mathbb{S}^2}}{4\pi}$ es una medida de probabilidad invariante.

Falta entonces estudiar los ejemplos en los que no se cumplen las hipótesis de 2.2.13 y 2.2.14. Es decir, podemos pedir para la acción las siguientes hipótesis:

- Existe un elemento $g \in G$ de orden infinito. Mediante conjugación podemos suponer que $g(z) = \lambda z$, con λ irracional (mapa f_3 de la sección 1.1.2).
- Para todo $z \in \mathbb{S}^2$ se cumple que $\#orb_G(z) \geq 3$. De hecho, se podría exigir que no existan órbitas periódicas, pero es suficiente con la restricción anterior.

Proposición 2.2.15 *Bajo las hipótesis antes mencionadas existe una función $h \in G$ conjugada a g tal que $fix(g) \cap fix(h) = \emptyset$.*

Procedimiento: Como no hay órbitas de orden menor a 3, existe un mapa $g_1 \in G$ tal que $g_1(0) \notin \text{fix}(g)$. Si además $g_1(\infty) \notin \text{fix}(g)$, entonces el mapa $h = g_1 \circ g \circ g_1^{-1}$ tiene orden infinito y $\text{fix}(g) \cap \text{fix}(h) = \emptyset$.

En caso de que $g_1(\infty) \in \text{fix}(g)$, de nuevo, como no hay órbitas de orden menor 3, existe $g_2 \in G$ tal que $g_2 \circ g_1(\infty) \notin \text{fix}(g)$. De forma análoga al caso anterior si $g_2 \circ g_1(0) \notin \text{fix}(g)$, tenemos que $h = (g_2 \circ g_1) \circ g \circ (g_2 \circ g_1)^{-1}$ tiene orden infinito y $\text{fix}(g) \cap \text{fix}(h) = \emptyset$.

Si por el contrario $g_2 \circ g_1(0) \in \text{fix}(g)$, lo que haremos será precomponer con g . Esto es porque $g_1(0) \notin \text{fix}(g)$, se tiene que $\# \text{orb}_g(g_1(0)) = \infty$, y por tanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $g_2 \circ g^m \circ g_1(0) \notin \text{fix}(g)$. Por otro lado, como $g_1(\infty) \in \text{fix}(g)$, tenemos que $g_2 \circ g^m \circ g_1(\infty) = g_2 \circ g_1(\infty) \in \text{fix}(f)$. Concluimos así que $h = (g_2 \circ g^m \circ g_1) \circ g \circ (g_2 \circ g^m \circ g_1)^{-1}$ tiene orden infinito y $\text{fix}(g) \cap \text{fix}(h) = \emptyset$. $\square$

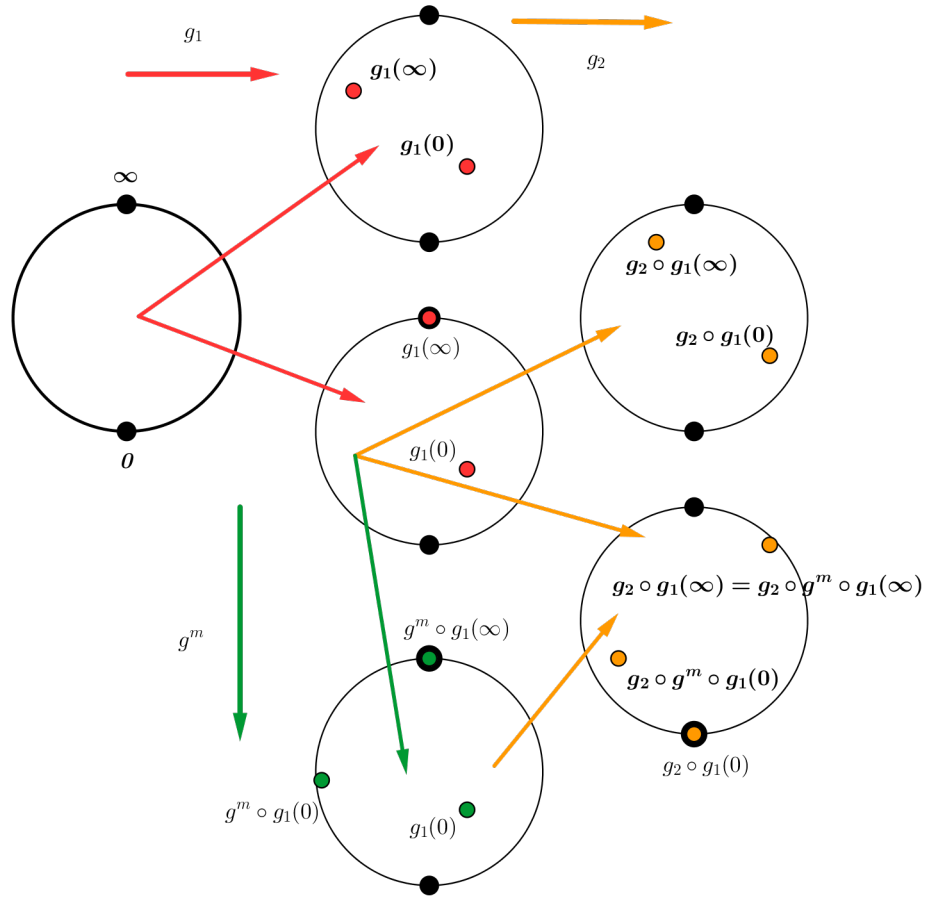


Figura 2.5: Representación del procedimiento de la construcción de h .

Comentario 2.2.16 Si existen $h, g \in G$ como en las condiciones de la proposición anterior entonces G no es abeliano, ya que hay conjugaciones no triviales.

Para saber si la acción preserva una medida, separaremos en dos casos. Si g y h admiten un círculo invariante o no. Es decir, si existe $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $\text{orb}_g(z) = \text{orb}_h(z)$.

Para $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $\overline{\text{orb}_g(z)} = r\mathbb{S}^1$ donde $r = |z|$. Además $\forall z' \in \overline{\text{orb}_g(z)}$ se verifica que $\overline{\text{orb}_g(z)} = \overline{\text{orb}_g(z')}$.

Como h es conjugado a g , se tiene que $ThT^{-1}(z) = \lambda z$, para todo $z \in \mathbb{C}$, donde T es una transformación de Möbius. En particular, si $\infty \notin T(r\mathbb{S}^1)$ se tiene que $h(T(r\mathbb{S}^1)) = T(r\mathbb{S}^1)$ y $h|_{T(r\mathbb{S}^1)}$ tiene órbitas densas.

Notación $r\hat{\mathbb{S}}^1 = T(r\mathbb{S}^1)$.

Observar que para $r > 0$, el conjunto $r\hat{\mathbb{S}}^1$ es un círculo en $\mathbb{C}$, pues es la imagen de un círculo por una transformación de Möbius y $\infty \notin T(r\mathbb{S}^1)$. En el caso que $\infty \in T(r\mathbb{S}^1)$, entonces $T(r\mathbb{S}^1) \cap \mathbb{C}$ es una recta.

Tenemos así que la condición $\overline{orb_h(z)} = \overline{orb_g(z)}$ es equivalente a que existan $r, s \in \mathbb{R}^+$ tales que $r\mathbb{S}^1 = s\hat{\mathbb{S}}^1$.

Caso 1: Los mapas g y h no admiten círculos invariantes comunes

Proposición 2.2.17 *Si $r\hat{\mathbb{S}}^1 \neq s\mathbb{S}^1$ para todo par $r, s \in \mathbb{R}^+$, entonces la órbita de z es densa para todo $z \in \mathbb{S}^2$.*

Demostración: Como la acción no tienen órbitas de orden menor a 3, basta probar la tesis para todo $z \in \mathbb{S}^2 \setminus \{0, \infty\}$.

Dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, tenemos que $\overline{orb_g(z)} = |z|\mathbb{S}^1$. Luego $\overline{orb(z)} = \overline{orb(|z|\mathbb{S}^1)}$. Definimos m_1, M_1 como

$$m_1 = \inf\{|h^n(\omega)| : \omega \in |z|\mathbb{S}^1, n \in \mathbb{Z}\},$$

$$M_1 = \begin{cases} \sup\{|h^n(\omega)| : \omega \in |z|\mathbb{S}^1, n \in \mathbb{Z}\} & \text{si } \{|h^n(\omega)| : \omega \in |z|\mathbb{S}^1, n \in \mathbb{Z}\} \text{ esta acotado;} \\ +\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $\omega \in |z|\mathbb{S}^1$, tenemos tres posibilidades para $orb_h(\omega)$:

1. $orb_h(\omega) = \omega$;
2. $\overline{orb_h(\omega)} \cap \mathbb{C}$ es una recta;
3. $\overline{orb_h(\omega)} \cap \mathbb{C}$ es un círculo.

Las condiciones 1 y 2 se dan en a lo sumo 4 puntos. En el caso de la condición 3 recordando que $\overline{orb_h(\omega)} = s_0\hat{\mathbb{S}}^1$ para algún s_0 , y que no hay círculos comunes a g y h , hay dos posibilidades para $orb_h(\omega)$:

- 3.1. $s_0\hat{\mathbb{S}}^1$ es tangente $|z|\mathbb{S}^1$;
- 3.2. $\#(s_0\hat{\mathbb{S}}^1 \cap |z|\mathbb{S}^1) = 2$.

Para el caso 3.1. como $r\mathbb{S}^1 \neq s\hat{\mathbb{S}}^1$, se tiene que $(s_0\hat{\mathbb{S}}^1 \cap |z|\mathbb{S}^1) = \{\omega\}$. Luego como las circunferencias $s\hat{\mathbb{S}}^1$ son encajadas, se tiene que existe $s' > s$, arbitrariamente cerca de s tal que $\#(s_0\hat{\mathbb{S}}^1 \cap |z|\mathbb{S}^1) = 2$.

Concluimos así que existe ω tal que $\#(s_0\hat{\mathbb{S}}^1 \cap |z|\mathbb{S}^1) = 2$. Por tanto $m_1 < |z| < M_1$.

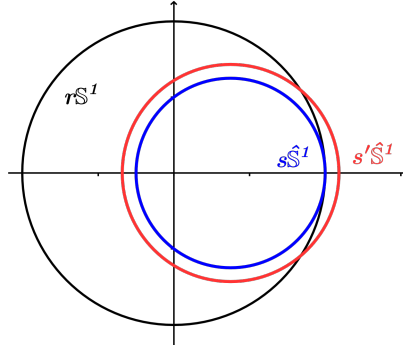


Figura 2.6: Situación $r\mathbb{S}^1$ y $s\hat{\mathbb{S}}^1$ tangentes.

Como $orb_g(z)$ es denso en $|z|\mathbb{S}^1$ y $|orb_h(|z|\mathbb{S}^1)|$ es denso en $[m_1, M_1]$ se tiene que $\overline{orb_g(orb_h(orb_g(z)))} = A_{[m_1, M_1]}$. En particular, la órbita de z es densa en el anillo $A_{[m_1, M_1]}$.

Definimos por inducción m_{i+1} y M_{i+1} como $m_{i+1} = \inf\{|h^n(\omega)| : n \in \mathbb{Z} \text{ y } \omega \in A_{[m_i, M_i]}\}$ y

$$M_{i+1} = \begin{cases} \sup\{|h^n(\omega)| : n \in \mathbb{Z} \text{ y } \omega \in A_{[m_i, M_i]}\} & \text{si } \{|h^n(\omega)| : n \in \mathbb{Z} \text{ y } \omega \in A_{[m_i, M_i]}\} \text{ esta acotado;} \\ +\infty & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De forma análoga al paso base, como no hay círculos comunes a h y g se tiene que $m_{n+1} < m_n < M_n < M_{n+1}$.

Las sucesiones m_n y M_n son monótonas y por tanto tienen límite. Probaremos ahora que $m_n \rightarrow 0$ y $M_n \rightarrow +\infty$, de donde se concluye que la órbita de z es densa.

Supongamos que $m_n \rightarrow m > 0$.

Repitiendo el procedimiento de $r\mathbb{S}^1$ para $m\mathbb{S}^1$, tenemos que $\overline{orb(m\mathbb{S}^1)} \supset A_{[\hat{m}_1, \hat{M}_1]}$ con $\hat{M}_1 > m$.

Como $m_n \rightarrow m$, existe n' tal que $m_{n'} < \hat{M}_1$, y por tanto existen $f \in \langle g, h \rangle$ y $\omega \in r\mathbb{S}^1$ talque $|f(\omega)| < \hat{M}_1$. Luego existe $k \in \mathbb{Z}$ con $|h^k \circ f(\omega)| < m$, lo que es absurdo. Concluimos así que $m = 0$.

Más aún, como $0 \notin \text{fix}(h) = \text{per}(h)$, se tiene que $\sup\{|h^k(0)| : k \in \mathbb{Z}\} > 0$, y por lo tanto existe n_0 tal que $m_{n_0} = 0$.

El procedimiento para ver que existe n_1 tal que $M_{n_1} = +\infty$ es análogo.

□

A partir de este resultado y asumiendo que la acción de G preserva una medida, veamos qué condiciones debe cumplir ésta.

Sabemos, por la sección (1.1.2), que μ es de la forma 1.2. De la demostración anterior se puede concluir la siguiente observación:

Observación 2.2.18 *Dados $r > 0$ y $\omega \in r\mathbb{S}^1$, se tiene que $\mu(r\mathbb{S}^1) = \mu(|h(\omega)|\mathbb{S}^1)$.*

Por tanto la medida μ no puede tener círculos singulares. Es decir, $\mu(r\mathbb{S}^1) = 0$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$ ya que dado $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ el conjunto $\{|h^n(\omega)| : \omega \in |z|\mathbb{S}^1, n \in \mathbb{Z}\}$ es infinito.

Como la acción tiene órbitas densas, $\mu(U) > 0$ para todo abierto U . Luego, recordando la descomposición de μ de la sección 1.2, tenemos que

$$\mu = m_1 \times \text{leb}_{\mathbb{S}^1},$$

donde m_1 y $\text{leb}_{\mathbb{R}^+}$ son equivalentes.

Existe así un homeomorfismo $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ diferenciable ctp tal que $\phi \times Id : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}^1$ verifica $(\phi \times Id)^*(\mu) = \frac{\text{leb}_{\mathbb{S}^2}}{4\pi}$.

Concluimos así que, en el caso 1, la medida μ es conjugada a $\frac{\text{leb}_{\mathbb{S}^2}}{4\pi}$.

Como ejemplo de grupo en estas condiciones basta tomar la acción de subgrupos de $SL_3(\mathbb{R}^3)$ finitamente generados sin puntos periodicos.

Caso 2: Los mapas g y h admiten algún círculo invariante común

Observación 2.2.19 *Los mapas g y h solo tienen un círculo en común.*

Idea de la demostración: Si se preserva $r\mathbb{S}^1$ y también se preservan las componentes de $\mathbb{S}^2 \setminus r\mathbb{S}^1$, ya que son rotaciones irracionales.

Asumiendo que $r = 1$ tenemos que preservan $\mathbb{D}$, y como son transformaciones de Möobius, son isometrías de $\mathbb{D}$. Luego, si el mapa h preserva algún otro círculo $r\mathbb{S}^1$ con $r < 1$, debería ser una rotación, sin embargo como $0 \notin \text{fix}(h)$, esto es absurdo.

El caso general se puede adaptar facilmente desde las asunciones anteriores.

Sea r_0 tal que $h(r_0\mathbb{S}^1) = r_0\mathbb{S}^1$. Observar que μ no es singular para este círculo, es decir, $\mu(r_0\mathbb{S}^1) = 0$. Ya que de otra forma h debería preservar Lebesgue, es decir, ser una rotación, lo cual es absurdo pues $h(0) \notin \{0, \infty\}$.

El conjunto $\mathbb{S}^2 \setminus r_0\mathbb{S}^1$ tiene dos componentes conexas. Como h es conjugada a g , es decir, una rotación irracional, preserva estas componentes.

Por la descomposición hecha en la sección 1.2, tenemos que $\mu_{r_0\mathbb{S}^1} = l \text{leb}_{\mathbb{S}^1}$. Si $l > 0$, entonces $h|_{r_0\mathbb{S}^1}$ debería ser una rotación, pero como $h(0) \neq 0$ esto es absurdo.

Reproduciendo la demostración de (2.2.17), tenemos que g y h actúan por órbitas densas $\overline{B(0, r_0)}$ y $\mathbb{S}^2 \setminus B(0, r_0)$, y en cada componente de $\mathbb{S}^2 \setminus r_0\mathbb{S}^1$.

De forma análoga a la conclusión del caso g y h sin círculos comunes, se tiene que μ es conjugada a $\frac{\text{leb}_{\mathbb{S}^2}}{4\pi}$ en cada una de las componentes.

De nuevo de forma análoga al caso 1, μ es equivalente a $\text{leb}_{\mathbb{S}^2}$. Es decir

$$\mu(A) = \int_A d\mu = \int_A f(z) d\text{leb}_{\mathbb{S}^2},$$

para todo A boreliano, donde f es una función medible positiva ctp.

Dado $\hat{g} \in G$, como es un difeomorfismo tenemos que

$$\mu(\hat{g}(A)) = \int_{\hat{g}(A)} f(z) d\text{leb}_{\mathbb{S}^2} = \int_A f(\hat{g}(z)) \|J(\hat{g})(z)\| d\text{leb}_{\mathbb{S}^2}.$$

Luego $f(z) = f(\hat{g}(z)) \|J(\hat{g})(z)\| \text{leb}_{\mathbb{S}^2}$ ctp.

Como

- la órbitas de $\langle g, h \rangle$ son densas;
- g, h son isometrías en $\mathbb{D}$;
- f constantes ctp en $r\mathbb{S}^1$;

se tiene que existe $c > 0$ tal que $f(z) = c \frac{1}{1-|z|^2}$ ctp, lo cual es absurdo pues μ no sería una medida finita.

Concluimos así que $\langle g, h \rangle$ no pueden tener medidas de probabilidad invariantes si tienen un círculo en común.

2.3. Acciones en $S_1 = \mathbb{T}^2$

En esta sección estudiaremos el problema para $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Para ello adaptaremos los resultados de la sección anterior llegando a conclusiones análogas. Es decir, que las acciones quasiconformes son conjugadas a conformes, lo que en este contexto es más restrictivo. En particular, no existen acciones $\tau : \mathbb{F}_2 \rightarrow \text{Hom}_+(\mathbb{T}^2)$ fieles y K quasi conformes.

Partimos así de una acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}_+(\mathbb{T}^2)$ fiel y K quasiconforme, donde G es un grupo numerable.

Para adaptar la prueba de 2.2.1 estudiaremos el levantamiento de la acción.

Definición 2.3.1 Definimos el grupo $\hat{G}$ como todos los levantamientos de $\tau(G)$. Notamos Z al subgrupo normal de los mapas de cubrimiento, que en este caso son $g(z) = z + (n, m)$ con $n, m \in \mathbb{Z}$, en particular $Z \sim \mathbb{Z}^2$.

Notamos además la acción $\hat{\tau} : \hat{G} \rightarrow \text{Hom}_+(\mathbb{R}^2)$ como $\hat{\tau}(g) = g$. Observar que esta acción es K quasiconforme.

Los grupos $\hat{G}$ y $\tau(G)$ están relacionados de la siguiente forma.

Observación 2.3.2 Dado que la acción τ es fiel, se tiene que $G \sim \tau(G) \sim \hat{G}/Z$.

Para poder aplicar el teorema 2.2.1 conjugamos por la proyección estereográfica.

Definición 2.3.3 Sea $\hat{\tau}_1 : \hat{G} \rightarrow \text{Hom}_+(\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\})$ la acción definida por $\hat{\tau}_1(g) = \phi_N \circ g \circ \phi_N^{-1}(z)$.

Observar que la acción $\hat{\tau}$ es fiel y K quasiconforme. Podemos ahora aplicar el Teorema 2.2.1 a la acción $\hat{\tau}_1$.

Corolario 2.3.4 Existe un homeomorfismo $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que la acción $\tau_1 : \hat{G} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\tau_1(g) = h\hat{\tau}_1(g)h^{-1}$ es conforme.

Si condieramos la extensión de la acción $\hat{\tau}_1$ a $\mathbb{S}^2$, ésta tiene a ∞ como punto fijo global. De donde δ_∞ es una medida de probabilidad invariante, pero ésta no se adapta a $\mathbb{R}^2$. Por lo que, a priori, no sabemos si preserva alguna medida en S_1 . Para probar que sí hay medidas invariantes en $\mathbb{T}^2$, usaremos la estructura de los homeomorfismos conformes de $\mathbb{R}^2$.

Corolario 2.3.5 El grupo $\tau_1(\hat{G})$ es un subgrupo de los mapas afines del plano

$$\text{Affin}(\mathbb{C}) = \{g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : g(z) = az + b \text{ con } a, b \in \mathbb{C}\}.$$

Notar que $\text{Affin}(\mathbb{C})$ es soluble, y por tanto $\hat{\tau}_1(\hat{G})$ también lo es. por ser un subgrupo de éste. Como $\hat{G} \sim \hat{\tau}_1(\hat{G})$, $\hat{G}$ es soluble. Por último, como los cocientes de un grupo soluble son solubles, tenemos la siguiente observación.

Observación 2.3.6 El grupo G es soluble y por tanto la acción $\tau : G \rightarrow \text{Hom}_+(\mathbb{T}^2)$ admite una medida de probabilidad invariante.

Dada h como en 2.2.1, el subgrupo $\Lambda = hZh^{-1}$ es conforme e isomorfo a $\mathbb{Z}^2$. Más aún se tiene que el conjunto $\text{orb}_\Lambda(0) = h(\mathbb{Z}^2)$ es infinito y discreto, de donde se tiene que es un látice.

Observación 2.3.7 Dado un mapa $g \in \Lambda$, se cumple que $g(z) = \lambda z + b$, con $|\lambda| = 1$.

Esta observación se debe a que, en caso contrario, g tendría un punto fijo atractor o repulsor. Luego $\text{orb}_g(h(\mathbb{Z}^2))$ no sería discreta ya que $h(\mathbb{Z}^2)$ es infinito.

Por otro lado, Λ no puede tener rotaciones, ya que sino se da una de las siguientes situaciones:

- Si $g \in \Lambda$ con $g(z) = \lambda z + b$, $|\lambda| = 1$, $\lambda \neq 1$ y de orden finito, entonces g tiene orden finito. Pero esto es absurdo pues $\Lambda \sim \mathbb{Z}^2$.
- Si $g \in \Lambda$ con $g(z) = \lambda z + b$, $|\lambda| = 1$, λ de orden infinito, entonces $\text{orb}_g(h(\mathbb{Z}^2))$ no es discreto, ya que el conjunto $h(\mathbb{Z}^2)$ es infinito y g es una rotación irracional.

Concluimos así el siguiente resultado.

Observación 2.3.8 *El grupo Λ está generado por dos traslaciones: $\Lambda = \langle z + \omega_1, z + \omega_2 \rangle$, donde $\{\omega_1, \omega_2\}$ es un conjunto LI en $\mathbb{R}$.*

El hecho de que $\{\omega_1, \omega_2\}$ sea LI en $\mathbb{R}$ se debe a que si no lo fueran, o bien son LI en $\mathbb{Q}$, y por tanto $\text{orb}_g(h(\mathbb{Z}^2))$ no sería discreta, o bien no son LI en $\mathbb{Q}$ y Λ no sería isomorfo a $\mathbb{Z}^2$, ya que habría otras relaciones entre los generadores.

Consideremos entonces la acción conjugada en el espacio cociente $\mathbb{T}_\Lambda = \mathbb{R}^2/\Lambda$. Que también es un toro.

Observación 2.3.9 *La conjugación por h es un isomorfismo de grupos ($h\hat{G}h^{-1} \sim \hat{G}$). En particular, el látice Λ es normal en $h\hat{G}h^{-1}$ y por tanto induce una acción $\tau' : G \rightarrow \mathbb{R}^2/\Lambda = \mathbb{T}_\Lambda$. Como la acción τ' es holomorfa y preserva un látice, entonces para todo $g \in G$, se tiene que $\hat{\tau}_1(g)(z) = \lambda z + \omega$ con $|\lambda| = 1$. En particular, $\hat{\tau}_1(G)$ preserva $\text{leb}_{\mathbb{R}^2}$. Luego, τ' preserva la medida estándar en $\mathbb{T}_\Lambda$.*

Tenemos entonces que, salvo conjugación, las acciones quasiconformes son conformes, preservan isometrías.

Antes de culiminar veamos una propiedad más de $\tau'(G)$.

Dados $g \in G$ y z_1, z_2 tales que $g(z) = \lambda z + \omega$ y $z_1 - z_2 \in \Lambda(0)$, se tiene que $g(z_1) - g(z_2) = \lambda(z_1 - z_2) \in \Lambda(0)$. Es decir, el mapa $z \rightarrow \lambda z$ es una rotación que preserva $\Lambda(0)$, y por tanto $\lambda \in \{1, i, -1, -i\}$.

Podemos resumir así los resultados de esta sección en el siguiente teorema.

Teorema 2.3.10 *Dado G un grupo finitamente generado y $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}^2)$ una acción K quasiconforme, existen Λ un látice y $f : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}_\Lambda$ un homeomorfismo quasiconforme tales que la acción $\tau' : G \rightarrow \text{Hom}(\mathbb{T}_\Lambda)$ definida por $\tau'(g) = f\tau(g)f^{-1}$, es conforme y preserva $\text{leb}_{\mathbb{T}_\Lambda}$.*

Además, si la acción τ es fiel entonces G es soluble. Más aún G es isomorfo o bien, a un subgrupo de

$$(\mathbb{C}/\Lambda) \rtimes Z_4 \text{ donde } (\omega_2, z_2)(\omega_1, z_1) = \left(\omega_2 + e^{\frac{i\pi z_2}{2}} \omega_1, z_1 z_2\right);$$

o bien, es un subgrupo de

$$(\mathbb{C}/\Lambda) \rtimes Z_2 \text{ donde } (\omega_2, z_2)(\omega_1, z_1) = (\omega_2 + e^{i\pi z_2} \omega_1, z_1 z_2).$$

2.4. Acciones en superficies de genero $n \geq 2$

Fijemos primero el género de nuestra superficie, digamos n . Al igual que para $\mathbb{T}^2$, para cualquier superficies S_n tenemos un cubrimiento simétrico.

Para adaptar la prueba de 2.2.1 estudiaremos el levantamiento de la acción.

Definición 2.4.1 *Definimos el grupo $\hat{G}$ como todos los levantamientos de $\tau(G)$. Notamos Z al subgrupo normal de los mapas de cubrimiento.*

Notamos $\hat{\tau} : \hat{G} \rightarrow \text{Hom}_+(\mathbb{D})$ a la acción $\hat{\tau}(g) = g$. Observar que esta acción es K quasiconforme. Los grupos $\hat{G}$ y $\tau(G)$ están relacionados de la siguiente forma:

Observación 2.4.2 *Dado que la acción τ es fiel, se tiene que $G \sim \tau(G) \sim \hat{G}/Z$.*

Para poder aplicar el Teorema 2.2.1 conjugamos por la proyección estereográfica.

Definición 2.4.3 *Sea $\hat{\tau}_1 : \hat{G} \rightarrow \text{hom}_+(\mathbb{S}^2 \setminus \{\infty\})$ la acción definida por $\hat{\tau}_1(g) = \phi_N \circ g \circ \phi_N^{-1}(z)$. Esta acción es fiel y K quasi conforme.*

Podemos ahora aplicar el teorema 2.2.1 a la acción $\hat{\tau}_1$.

Corolario 2.4.4 *Sea G un grupo finitamente generado y $\tau : G \rightarrow \text{Hom}_+(\mathbb{D})$ una acción K quasiconforme. Entonces existe un homeomorfismo $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que la acción $\tau_1 : G \rightarrow \mathbb{D}$ definida por $\tau_1(g) = h\tau_g h^{-1}$ es conforme.*

Si bien el resultado 2.2.1 no fija el dominio, podemos suponer que $h : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ya que, en cualquier caso, $h(\mathbb{D})$ es simplemente conexo y distinto de $\mathbb{S}^2 \setminus \{p\}$ para cualquier p . Por tanto podemos aplicar el teorema de Riemann.

Los únicos homeomorfismos conformes de $\mathbb{D}$ son las transformaciones de Möebius que lo fijan, pero estas, son además las isometrías de $\mathbb{D}$.

Como la conjugación por h es un isomorfismo de grupos, $hZh^{-1} \triangleleft h\hat{G}h^{-1}$, y en particular, $\mathbb{D}/hZh^{-1}$ es un n toro.

Por último, como la cantidad de automorfismos de una superficie hiperbólica es finitos [N A] podemos resumir toda la información en el siguiente resultado.

Teorema 2.4.5 *Sean G un grupo finitamente generado y $\tau : G \rightarrow \text{Hom}(S_n)$ una acción K quasiconforme. Entonces existe $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ un homeomorfismo quasiconforme tal que la acción $\tau' : G \rightarrow \text{Hom}(S_n)$ definida por $\tau'(g) = h\tau(g)h^{-1}$ es conforme. En particular, actúa por isometrías, de donde preservan la medida en el espacio cociente $\mathbb{D}/fZf^{-1}$. En particular, como son automorfismos de una superficie hiperbólica cerrada, si la acción es fiel, G es finito.*

Capítulo 3

Existencia de soluciones a la ecuación de Beltrami

En este capítulo probaremos la existencia de soluciones a la ecuación de Beltrami. Es decir, dada una función medible $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, encontrar $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ homeomorfismo K quasi conforme tal que $f_{\bar{z}} = \mu f_z$. Esto es lo que resta en la prueba del Teorema 2.2.1. Para esto seguiremos los pasos dados en el texto [Ah].

El mapa f resultará como punto fijo de un operador lineal contractivo, para llegar a éste, pasaremos por dos operadores auxiliares (P y T).

Notaciones a lo largo del capítulo:

- A menos que se explicita lo contrario, un número p cumple que $p \geq 2$ y en general estará asociado a un espacio L^p .
- Denotamos $C_0(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$, donde $\mathbb{K}, \mathbb{K}' \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, al conjunto de funciones continuas con soporte compacto, y $C_0^n(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$ a las funciones de clase C^n con soporte compacto. Dada una función $f \in C_0(\mathbb{K}, \mathbb{K}')$, notamos $R_f \in \mathbb{R}^+$ a cualquier número que verifique $\text{Sop}(f) \subset B(0, R_f)$.
- Fijaremos $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función medible tal que $\|\mu\|_\infty = k < 1$. En ciertos resultados pediremos hipótesis adicionales para μ .

3.1. Definición y propiedades de los operadores P y T

Definición 3.1.1 Sea $p > 2$. Definimos el operador lineal $P : L^p(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ como

$$Ph(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint h(z) \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z} \right) dx dy.$$

El operador P está bien definido pues $f(z) = \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z} \right) \in L^q(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ para todo $q \in (1, 2)$. En particular, para q_0 con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q_0} = 1$.

Proposición 3.1.2 Sea $h \in C_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Entonces $\forall \zeta \notin \overline{B(0, R_h)}$ se cumple que

$$\left| Ph(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h(z)}{z} dx dy \right| \leq \frac{R_h^2 \|h\|_\infty}{|\zeta| - R_h}.$$

Demostración: Notar que si $|\zeta| > R_h$ la función $g_\zeta(z) = \frac{h(z)}{z-\zeta}$ verifica que $g_\zeta \in C_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, pues la singularidad de $\frac{1}{z-\zeta}$ no pertenece al soporte de h . Además $\text{Sop}(h) = \text{Sop}(g_\zeta)$. Acotando el módulo de g_ζ tenemos que $|g_\zeta(z)| \leq \frac{\|h\|_\infty}{|\zeta| - R_h} \quad \forall z \in \text{Sop}(g_\zeta)$.

Tenemos así que

$$\left| Ph(\zeta) + \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h(z)}{z} dx dy \right| = \left| \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} g_\zeta(z) dx dy \right| \leq \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{\|h\|_\infty}{|\zeta| - R_h} dx dy = \frac{R_h^2 \|h\|_\infty}{|\zeta| - R_h}.$$

□

En particular, tenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.1.3 Sea $h \in C_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Entonces $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} Ph(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h(z)}{z}$.

Proposición 3.1.4 Sea $h \in L^p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Entonces la función Ph es continua y α -Hölder para el exponente $\alpha = 1 - \frac{2}{p}$.

Demostración: Sea q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Como $f(z) = \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z}\right) = \frac{\zeta}{z(z-\zeta)}$ cumple que $f \in L^q(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$|Ph(\zeta)| = \frac{1}{\pi} \|hf\|_1 \leq \|h\|_p \frac{|\zeta|}{\pi} \left\| \frac{1}{z(z-\zeta)} \right\|_q.$$

Acotemos ahora $\left\| \frac{1}{z(z-\zeta)} \right\|_q^q$. Aplicando el cambio de variable $z = \zeta \hat{z}$, tenemos que

$$\iint |z(z-\zeta)|^{-q} dxdy = \iint |\hat{z}\zeta(\hat{z}\zeta - \zeta)|^{-q} |\zeta|^2 d\hat{x}d\hat{y} = |\zeta|^{2-2q} \iint |(\hat{z}(\hat{z}-1))|^{-q} d\hat{x}d\hat{y}.$$

Como $\frac{1}{z(z-1)} \in L^q(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, tenemos que $\left\| \frac{1}{z(z-\zeta)} \right\|_q = |\zeta|^{\frac{2(1-q)}{q}} \left\| \frac{1}{z(z-1)} \right\|_q$, y por tanto

$$|Ph(\zeta)| \leq \frac{\|h\|_p}{\pi} |\zeta|^{\frac{2-2q}{q}+1} \left\| \frac{1}{z(z-1)} \right\|_q.$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene que $\frac{2-2q}{q} + 1 = \frac{2}{q} - 2 + 1 = 1 - \frac{2}{p}$, luego

$$|Ph(\zeta)| \leq \frac{\|h\|_p}{\pi} \left\| \frac{1}{z(z-1)} \right\|_q |\zeta|^{1-\frac{2}{p}}.$$

Notar que $\left\| \frac{1}{z(z-1)} \right\|_q$ solo depende de q , o lo que es igual de p . Tenemos así la desigualdad de Hölder entre 0 y ζ , ya que $Ph(0) = 0$, y por tanto

$$|Ph(0) - Ph(\zeta)| = |Ph(\zeta)| \leq \frac{\|h\|_p}{\pi} \left\| \frac{1}{z(z-1)} \right\|_q |\zeta|^{1-\frac{2}{p}}.$$

Veamos que el caso general se remite al anterior. Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} |Ph(\zeta_1) - Ph(\zeta_2)| &= \left| \frac{1}{\pi} \left[-\iint h(z) \left(\frac{1}{z-\zeta_1} - \frac{1}{z} \right) dxdy + \iint h(z) \left(\frac{1}{z-\zeta_2} - \frac{1}{z} \right) dxdy \right] \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\pi} \iint h(z) \left(\frac{-1}{z-\zeta_1} + \frac{1}{z-\zeta_2} \right) dxdy \right| = \left| -\frac{1}{\pi} \iint h(z+\zeta_2) \left(\frac{1}{z-\zeta_1+\zeta_2} - \frac{1}{z} \right) dxdy \right|, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene aplicando un cambio de variable lineal, de hecho una traslación.

Llamamos $h_1 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ a la función $h_1(z) = h(z+\zeta_2)$. Tenemos que $h_1 \in L^p(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, y más aún, $\|h_1\|_p = \|h\|_p$. Podemos vincular h con h_1 mediante las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} Ph(\zeta_1) - Ph(\zeta_2) &= -\frac{1}{\pi} \iint h(z+\zeta_2) \left(\frac{1}{z-\zeta_1+\zeta_2} - \frac{1}{z} \right) dxdy = \\ &= -\frac{1}{\pi} \iint h_1(z) \left(\frac{1}{z-\zeta_1+\zeta_2} - \frac{1}{z} \right) dxdy = Ph_1(\zeta_1 - \zeta_2), \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$|Ph(\zeta_1) - Ph(\zeta_2)| = |Ph_1(\zeta_1 - \zeta_2)| \leq \frac{1}{\pi} |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-\frac{2}{p}} K_p \|h_1\|_p = \frac{1}{\pi} |\zeta_1 - \zeta_2|^{1-\frac{2}{p}} K_p \|h\|_p.$$

Por tanto Ph es $1 - \frac{2}{p}$ Hölder. En particular, $Im(P) \subset C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. □

El operador T lo definiremos para funciones en $C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Probaremos que es un encaje isométrico de $C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ en L^2 , y en particular es Cauchy continua. De esto, vemos que podemos extenderlo a L^2 , pues $C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ es un conjunto denso. Probar que T pertenece L^p para $p > 2$, es más técnico y se realizará en la Sección (3.4).

Proposición 3.1.5 Dado $h \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, se tiene que existe el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|z| > \epsilon} \frac{h(z)}{z^2} dx dy.$$

Demostración: Notar que dado $\epsilon > 0$, la integral $\iint_{|z| > \epsilon} \frac{h(z)}{z^2} dx dy$ converge pues h es continua con soporte compacto. Más aún

$$\iint_{|z| > \epsilon} \frac{h(z)}{z^2} dx dy = \iint_{R_h > |z| > \epsilon} \frac{h(z)}{z^2} dx dy.$$

Sea $h(z) = h(0) + h_z(0)z + h_{\bar{z}}(0)\bar{z} + r_1(z)$ el desarrollo de Taylor de h de orden 1 en 0. Basta probar que para cada término $t(z)$ el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{R_h > |z| > \epsilon} \frac{t(z)}{z^2} dx dy$$

existe.

- La función $g(z) = \frac{h(0)}{z^2}$ cumple que $g(z) = -g(iz)$, de donde tenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{\substack{R_h > |z| > \epsilon \\ \arg(z) \in [0, \pi/2)}} \frac{h(0)}{z^2} dx dy = - \iint_{\substack{R_h > |z| > \epsilon \\ \arg(z) \in [\pi/2, \pi)}} \frac{h(0)}{z^2} dx dy = \\ & = \iint_{\substack{R_h > |z| > \epsilon \\ \arg(z) \in [\pi, 3\pi/2)}} \frac{h(0)}{z^2} dx dy = - \iint_{\substack{R_h > |z| > \epsilon \\ \arg(z) \in [3\pi/2, 2\pi)}} \frac{h(0)}{z^2} dx dy, \end{aligned}$$

y por tanto $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{R_h > |z| > \epsilon} g(z) dx dy = 0$.

- Las funciones $g_1(z) = \frac{h_z(0)z}{z^2} = \frac{h_z(0)}{z}$ y $g_2(z) = \frac{h_{\bar{z}}(0)\bar{z}}{z^2} = \frac{h_{\bar{z}}(0)\bar{z}^3}{|z|^2}$ cumplen que $g_i(z) = -g_i(-z)$. Luego, de forma análoga al caso anterior, se tiene que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{R_h > |z| > \epsilon} g_i(z) = 0$.
- La función $g(z) = \frac{r_1(z)}{z}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y cumple que $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$. Luego g se puede extender continuamente en 0. Como $\frac{1}{z} \in L_{loc}^1$, el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{R_h > |z| > \epsilon} \frac{t(z)}{z^2} dx dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{R_h > |z| > \epsilon} \frac{g(z)}{z} dx dy$ existe.

□

Notar que la proposición anterior se puede extender a un punto arbitrario. Dado $\zeta \in \mathbb{C}$, el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|z-\zeta| > \epsilon} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} dx dy$ existe. Podemos así definir el operador T .

Definición 3.1.6 Definimos el operador $T : C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ como

$$Th(\zeta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\pi} \iint_{|z-\zeta| > \epsilon} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} dx dy.$$

Veamos ahora una cota análoga a la de la Proposición 3.1.2 para el operador T .

Lema 3.1.7 Sea $h \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Entonces $\forall \zeta \in \mathbb{C}$ con $|\zeta| > R_h$, se cumple la desigualdad $|Th(\zeta)| \leq \frac{R_h^2 \|h\|_{\infty}}{(|\zeta| - R_h)^2}$.

Demostración: Fijemos $\zeta \notin \overline{B(0, R_h)}$. Se tiene que

$$Th(\zeta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} -\frac{1}{\pi} \iint_{\epsilon < |z-\zeta| < R_h} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} dx dy = -\frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} dx dy,$$

pues la función $g(z) = \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2}$ no tiene singularidades.

Acotando factor a factor para todo $z \in B(0, R_h)$, tenemos que

$$|g(z)| \leq \left| \frac{1}{(z-\zeta)^2} \right| \|h\|_{\infty} \leq \frac{1}{(|\zeta| - R_h)^2} \|h\|_{\infty}.$$

Luego, podemos acotar $Th(\zeta)$ por

$$|Th(\zeta)| = \left| \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h(z)}{(z - \zeta)^2} dx dy \right| \leq \iint_{|z| < R_h} \left| \frac{h(z)}{(z - \zeta)^2} \right| dx dy \leq \frac{R_h^2 \|h\|_\infty}{(|\zeta| - R_h)^2}.$$

□

Estudiemos ahora la regularidad de Ph a partir de la regularidad de h , y vinculemos ambos operadores.

Proposición 3.1.8 *Dada $h \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la función Ph es de clase C^1 . Además, se cumplen las igualdades*

$$(Ph)_{\bar{z}} = h, \quad (Ph)_z = Th. \quad (3.1)$$

Demostración: Calculemos las derivadas parciales de Ph , empezando por la derivada con respecto a x . Por definición

$$Ph_x(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{Ph(\zeta + r) - Ph(\zeta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-1}{\pi r} \left(\iint h(z) \left(\frac{1}{z - (\zeta + r)} - \frac{1}{z - \zeta} \right) dx dy \right).$$

Dado que h tiene soporte compacto, si $\zeta \notin \overline{B(0, R_h)}$, tenemos que $Ph_x(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint h(z) \left(\frac{1}{z - \zeta} \right)_x$. Luego Ph_x es continua en $\mathbb{C} \setminus \overline{B(0, R_h)}$. Sin embargo, esta igualdad no es cierta en $\overline{B(0, R_h)}$.

Como h tiene soporte compacto, tenemos que

$$Ph_x(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-1}{\pi r} \left(\iint_{|z| < R_{h+1}} \frac{h(z)}{z - (\zeta + r)} dx dy - \iint_{|z| < R_{h+1}} \frac{h(z)}{z - \zeta} dx dy \right),$$

ya que ambos convergen. Si $|r| < 1$, aplicando el cambio de variable lineal $z - r = \hat{z}$, en la primer integral obtenemos

$$Ph_x(\zeta) = \frac{-1}{\pi} \left(\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{|z| < R_{h+1}} \frac{h(z+r) - h(z)}{r} \left(\frac{1}{z - \zeta} \right) dx dy \right).$$

Recordemos que existen $u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $h(z) = u(z) + iv(z)$ con u, v en C^1 . Por valor medio tenemos que existe $\theta_u, \theta_v : (0, R_f + 1) \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tales que

$$Ph_x(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-1}{\pi} \iint_{|z| < R_{h+1}} \frac{u_x(z + \theta_u(z, r)r) + iv_x(z + \theta_v(z, r)r)}{z - \zeta}.$$

Dado un par de sucesiones $a_n, b_n \rightarrow 0$, podemos aplicar convergencia dominada, es decir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\pi} \iint_{|z| < R_{h+1}} \frac{u_x(z + \theta_u(z, a_n)a_n) + iv_x(z + \theta_v(z, b_n)b_n)}{z - \zeta} = \frac{-1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h_x(z)}{z - \zeta}.$$

Como ésto es válido para cualquier par de sucesiones, repitiendo el argumento en Ph_y obtenemos las fórmulas

$$\begin{aligned} Ph_x(\zeta) &= \frac{-1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h_x(z)}{z - \zeta} = \frac{-1}{\pi} \iint \frac{h_x(z + \zeta)}{z}; \\ Ph_y(\zeta) &= \frac{-1}{\pi} \iint_{|z| < R_h} \frac{h_y(z)}{z - \zeta} = \frac{-1}{\pi} \iint \frac{h_y(z + \zeta)}{z}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por tanto deducimos que Ph_x y Ph_y son continuas, y que $Ph \in C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Verifiquemos ahora las igualdades (3.1). Para eso veamos otra expresión para Ph_x y el resultado análogo en Ph_y .

Primero separemos el dominio en 5 regiones, en función de un parametro $\delta_0 \in (0, 1)$:

- $C_{(\delta_0, 0)} = \{(x, y) \in \mathbb{C} : \|(x, y)\| < \delta_0\}$
- $C_{(\delta_0, 1)} = \{(x, y) : y \in [-\delta_0, \delta_0], x \in [\sqrt{\delta_0^2 - y^2}, R_h + |\zeta| + 1]\}$
- $C_{(\delta_0, 2)} = \{(x, y) : y \in [-\delta_0, \delta_0], x \in [-(R_h + |\zeta| + 1), -\sqrt{\delta_0^2 - y^2}]\}$
- $C_{(\delta_0, 3)} = \{(x, y) : y \in [\delta_0, R_f + |\zeta| + 1], x \in [-(R_h + |\zeta| + 1), R_h + |\zeta| + 1]\}$

$$\blacksquare C_{(\delta_0,4)} = \{(x, y) : y \in [-(R_f + |\zeta| + 1), -\delta_0], x \in [-(R_h + |\zeta| + 1), R_h + |\zeta| + 1]\}$$

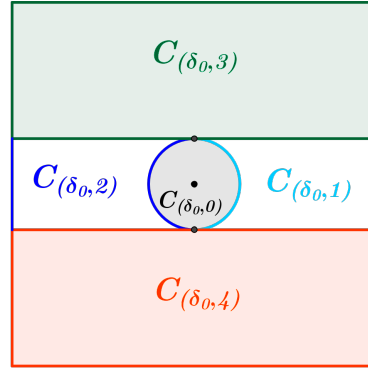


Figura 3.1: regiones $C_{(\delta_0, i)}$.

Notemos $\hat{C} = \cup_{i=0}^4 C_{(\delta_0, i)}$ y $C_{\delta_0} = \hat{C} \setminus C_{(\delta_0, 0)} = \cup_{i=1}^4 C_{(\delta_0, i)}$. Observar que $h(z + \zeta) = 0 \forall z \notin \hat{C}$. Luego

$$-\pi Ph_x(\zeta) = \iint_{\hat{C}} \frac{h_x(z + \zeta)}{z} dx dy = \sum_{i=0}^4 \iint_{C_i} \frac{h_x(z + \zeta)}{z} dx dy.$$

Aplicaremos ahora partes en la variable x en cada dominio C_i con $i > 0$, ya que $0 \notin \overline{C_{(\delta_0, i)}}$. En el dominio $C_{(\delta_0, 1)}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{C_{(\delta_0, 1)}} \frac{h_x(z + \zeta)}{z} dx dy &= \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left(\int_{\sqrt{\delta_0^2 - y^2}}^{R_h + |\zeta| + 1} \frac{h_x(z + \zeta)}{z} dx \right) dy = \\ &= \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left(\frac{h(R_h + |\zeta| + 1 + iy + \zeta)}{R_h + |\zeta| + 1 + iy} \right) dy - \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left(\frac{h(\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy + \zeta)}{\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy} \right) dy - \iint_{z \in C_{(\delta_0, 1)}} h(z + \zeta) \left(\frac{1}{z} \right)_x dx dy = \\ &= - \int_{-\delta_0}^{\delta_0} \left(\frac{h(\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy + \zeta)}{\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy} \right) dy - \iint_{z \in C_{(\delta_0, 1)}} h(z + \zeta) \left(\frac{1}{z} \right)_x dx dy, \end{aligned}$$

donde la última igualdad es debido a que $(R_h + |\zeta| + 1 + iy + \zeta) \notin \text{Sop}(h)$ para todo par y, ζ donde $y \in (-\delta_0, \delta_0)$ y $\zeta \in \mathbb{C}$.

Razonando de forma análoga en el resto de los $C_{(\delta_0, i)}$, y recordando que

$$\left(\frac{1}{z} \right)_x = \left(\frac{1}{x + iy} \right)_x = - \left(\frac{1}{x + iy} \right)^2, \text{ obtenemos}$$

$$\begin{aligned} -\pi Ph_x(z) &= \iint_{|z| < \delta_0} \frac{h_x(z + \zeta)}{z} dx dy + \iint_{|z| > \delta_0} \frac{h(z + \zeta)}{z^2} dx dy + \\ &+ \int_{\delta_0}^{\delta_0} \frac{h(-\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy + \zeta))}{-\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy} dy - \int_{\delta_0}^{\delta_0} \frac{h(\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy + \zeta))}{\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy} dy. \end{aligned}$$

Aplicando el cambio de variable $y = \delta_0 \hat{y}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\delta_0}^{\delta_0} \frac{h(-\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy + \zeta))}{-\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy} dy - \int_{\delta_0}^{\delta_0} \frac{h(\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy + \zeta))}{\sqrt{\delta_0^2 - y^2} + iy} dy = \\ = \int_{-1}^1 \left[\frac{h(-\delta_0 \sqrt{1 - \hat{y}^2} + i\delta_0 \hat{y} + \zeta)}{\delta_0(-\sqrt{1 - \hat{y}^2} + i\hat{y})} - \frac{h(\delta_0 \sqrt{1 - \hat{y}^2} + i\delta_0 \hat{y} + \zeta)}{\delta_0(\sqrt{1 - \hat{y}^2} + i\hat{y})} \right] \delta_0 d\hat{y}. \end{aligned}$$

Como $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(y) = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2} + iy}$ es continua, h también lo es. Como

$\lim_{\delta_0 \rightarrow 0^+} \pm \delta_0 \sqrt{1 - \hat{y}^2} + i\delta_0 \hat{y} + \zeta = \zeta$, tenemos que

$$\lim_{\delta_0 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h(-\delta_0 \sqrt{1 - \hat{y}^2} + i\delta_0 \hat{y} + \zeta)}{-\sqrt{1 - \hat{y}^2} + i\hat{y}} dy = h(\zeta) \int_{-1}^1 \frac{1}{-\sqrt{1 - y^2} + iy} dy.$$

Dado que $\frac{1}{-\sqrt{1-y^2+iy}} - \frac{1}{\sqrt{1-y^2+iy}} = -2\sqrt{1-y^2}$, tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{h(\zeta)}{-\sqrt{1-\hat{y}^2}+i\hat{y}} dy - \int_{-1}^1 \frac{h(\zeta)}{\sqrt{1-\hat{y}^2}+i\hat{y}} dy = -2h(\zeta) \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy = -\pi h(\zeta).$$

Como h_x es continua y $\frac{1}{z} \in L_{loc}^1$, se tiene que

$$\lim_{\delta_0 \rightarrow 0^+} \iint_{C_{(\delta_0, 0)}} \frac{h_x(z + \zeta)}{z} = 0.$$

Obtenemos así que

$$\begin{aligned} -\pi(Ph_x(\zeta)) &= \\ \lim_{\delta_0 \rightarrow 0^+} \int_{-1}^1 \frac{h(-\delta_0\sqrt{1-\hat{y}^2}+i\delta_0\hat{y}+\zeta)}{-\sqrt{1-\hat{y}^2}+i\hat{y}} - \frac{h(-\delta_0\sqrt{1-\hat{y}^2}+i\delta_0\hat{y}+\zeta)}{\sqrt{1-\hat{y}^2}+i\hat{y}} d\hat{y} &+ \iint_{C_{(\delta_0, 0)}} \frac{h(z+\zeta)}{z^2} dx dy = \\ -\pi h(\zeta) + \lim_{\delta_0 \rightarrow 0^+} \iint_{|z|<\delta_0} \frac{h(z+\zeta)}{z^2} dx dy. \end{aligned}$$

Por definición

$$-\pi Th(\zeta) = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0^+} \iint_{|z-\zeta|>\delta_0} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} = \lim_{\delta_0 \rightarrow 0^+} \iint_{|z|>\delta_0} \frac{h(z+\zeta)}{z^2} dx dy,$$

de donde podemos concluir que $Ph_x(\zeta) = h(\zeta) + Th(\zeta)$.

Para Ph_y se puede reproducir todo el argumento de Ph_x , salvo que $\left(\frac{1}{x+iy}\right)_y = \frac{-i}{(x+iy)^2}$, de donde $Ph_y = -ih(\zeta) + iTh(\zeta)$ obteniendo así la tesis. $\square$

Corolario 3.1.9 Dada un función $h \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la función Th es continua.

Antes de probar que T es un encaje isométrico en L^2 , necesitamos verificar algunas igualdades más con respecto a las derivadas de P y T . Más en concreto, vincularlas con las derivadas de h .

Corolario 3.1.10 Sea $h \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Entonces se cumple que

$$P(h_z)(\zeta) = Th(\zeta) - Th(0) \quad y \quad P(h_{\bar{z}})(\zeta) = h(\zeta) - h(0). \quad (3.3)$$

Demostración: Tomando la expresión 3.2 para Ph_x y Ph_y , tenemos que

$Ph_z(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<R_h} h_z(z) \left(\frac{1}{z-\zeta}\right) dx dy$. Luego por definición

$$P(h_z)(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint_{|z|<R_h} h_z(z) \left(\frac{1}{z-\zeta} - \frac{1}{z}\right) dx dy = Ph_z(\zeta) - Ph_z(0) = Th(\zeta) - Th(0).$$

El resultado en $P(h_{\bar{z}})$ es análogo.

Observación 3.1.11 Sea $h \in C_0^3(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, entonces $P(h) \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y $T(h) \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Además, se verifican las igualdades

$$(Th)_{\bar{z}} = P(h_z)_{\bar{z}} = h_z, \quad (Th)_z = P(h_{zz}) + T(h_z)(0). \quad (3.4)$$

A partir de la ecuación 3.3 obtenemos que $(Th)_{\bar{z}} = P(h_z)_{\bar{z}} = h_z$ y $(Th)_z = P(h_z)_z = T(h_z) = P(h_{zz}) + T(h_z)(0)$.

Teorema 3.1.12 El operador $T : C_0^3(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2$ es un encaje isométrico y se puede extender de forma continua a un operador $T : L^2 \rightarrow L^2$. Además, esta extensión coincide con la Definición 3.1.6 en $C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Demostración: Calculemos explícitamente las igualdades. Por la ecuación 3.1 y la observación (1.2.11), tenemos que

$$\iint |Th(\zeta)|^2 d\xi d\nu = \iint (Ph)_z(\zeta) \overline{(Ph)_z(\zeta)} d\xi d\nu = \iint (Ph)_z(\zeta) \overline{(Ph)}_{\bar{z}}(\zeta) d\xi d\nu.$$

Estudiamos la integral en el cuadrado $C_R = [-R, R] \times [-R, R]$, ya que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C_R} (Ph)_z(\zeta) (\overline{Ph})_{\bar{z}}(\zeta) d\xi d\nu = \iint (Ph)_z(\zeta) (\overline{Ph})_{\bar{z}}(\zeta) d\xi d\nu.$$

Como

$$(Ph)_z(\zeta) (\overline{Ph})_{\bar{z}}(\zeta) = \frac{(Ph)_z(\zeta) (\overline{Ph})_x(\zeta) + i(Ph)_z(\zeta) (\overline{Ph})_{\bar{y}}(\zeta)}{2},$$

calcularemos la integral de cada término.

Aplicando partes, tenemos que

$$\begin{aligned} & \iint_{C_R} Ph_z(\zeta) (\overline{Ph}_x(\zeta)) d\xi d\nu = \\ &= \int_{-R}^R Ph_z(R+i\nu) \overline{Ph}(R+i\nu) d\nu - \int_{-R}^R Ph_z(-R+i\nu) \overline{Ph}(-R+i\nu) d\nu - \iint_{C_R} (Ph_z)_x(\zeta) (\overline{Ph}(\zeta)) d\xi d\nu. \end{aligned}$$

Acotemos ahora $\int_{-R}^R Ph_z(R+i\nu) \overline{Ph}(R+i\nu) d\nu$, el caso de $\int_{-R}^R Ph_z(-R+i\nu) \overline{Ph}(-R+i\nu) d\nu$ es análogo.

Aplicando 3.1.3, existen m y R_0 tal que $|\overline{Ph}(R+i\nu)| \leq m$ para todo $R \geq R_0$. Luego aplicando el Lema 3.1.7 se tiene que

$$\begin{aligned} \left| \int_{-R}^R Ph_z(R+i\nu) \overline{Ph}(R+i\nu) d\nu \right| &\leq \int_{-R}^R |Th(R+i\nu) \overline{Ph}(R+i\nu)| d\nu \leq \\ &\leq \int_{-R}^R \frac{\pi R_h^2 m \|h\|_{\infty}}{(R-R_h)^2} k d\nu = \frac{2Rm\pi R_h^2 \|h\|_{\infty}}{(R-R_h)^2}. \end{aligned}$$

Tomando límite en R , se tiene que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{-R}^R Ph_z(R+i\nu) \overline{Ph}(R+i\nu) d\nu \right| = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left| \int_{-R}^R Ph_z(-R+i\nu) \overline{Ph}(-R+i\nu) d\nu \right| = 0.$$

Obtenemos así que

$$\iint Ph_z(\zeta) (\overline{Ph}_x(\zeta)) d\xi d\nu = - \iint (Ph_z)_x(\zeta) (\overline{Ph}(\zeta)) d\xi d\nu,$$

y de forma análoga

$$\iint Ph_z(\zeta) (\overline{Ph}_y(\zeta)) d\xi d\nu = - \iint (Ph_z)_y(\zeta) (\overline{Ph}(\zeta)) d\xi d\nu.$$

Por lo tanto

$$\iint Ph_z(\zeta) (\overline{Ph}_{\bar{z}}(\zeta)) d\xi d\nu = - \iint (Ph_z)_{\bar{z}}(\zeta) (\overline{Ph}(\zeta)) d\xi d\nu.$$

Como Ph es de clase C^3 , tenemos que $(Ph_z)_{\bar{z}}(\zeta) = (Ph_{\bar{z}})_z(\zeta) = h_z(\zeta)$, de donde

$$\iint |Th(\zeta)| d\xi d\nu = - \iint h_z(\zeta) \overline{Ph}(\zeta) d\xi d\nu.$$

Aplicando partes nuevamente, y recordando que h tiene soporte compacto, obtenemos que

$$- \iint h_z(\zeta) \overline{Ph}(\zeta) d\xi d\nu = \iint h(\zeta) \overline{Ph}_z(\zeta) d\xi d\nu.$$

Por último, aplicando (1.2.11) y la ecuación (3.1), se tiene que $\overline{Ph}_z(\zeta) = \overline{Ph_{\bar{z}}(\zeta)} = \overline{h(z)}$, de donde concluimos que

$$\iint |Th(\zeta)|^2 d\xi d\nu = \iint h(\zeta) \overline{Ph}_z(\zeta) d\xi d\nu = \iint |h(\zeta)|^2 d\xi d\nu.$$

Por lo tanto $T : C_0^3(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2$ es un encaje isométrico. En particular, como $C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset L^2$ es denso, podemos extender la definición de T de forma continua a $L^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. $\square$

Desafortunadamente el operador P no se puede extender a L^2 , por tanto probaremos que el operador T esta en L^p para $p > 2$. Más aún, se tiene el siguiente teorema que será probado en la Sección 3.4.1.

Teorema 3.1.13 (*Desigualdad de Calderon-Zygmund*).

El operador $T : C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow L^p$ con $p \geq 2$ está acotado, es decir, existen constantes C_p tales que $\|Th\|_p \leq C_p \|h\|_p$. En particular, la definición del operador T se puede extender de forma continua al espacio L^p para $p \geq 2$. Además, se puede tomar C_p de forma que $\lim_{p \rightarrow 2^+} C_p = 1$.

También necesitaremos resultados análogos a los que hemos visto pero para funciones en L^p y no solo en $C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Para esto trabajaremos con igualdades en distribución. Las propiedades básicas que necesitamos se tratan en la Sección 3.2.

Veamos ahora la ecuación 3.1 en una versión más general.

Lema 3.1.14 Dada $h \in L^p$ con $p > 2$, las igualdades

$$(Ph)_{\bar{z}} = h, \quad (Ph)_z = Th \quad (3.5)$$

se dan en distribución.

Demostración: Debemos probar que

$$\iint (Ph)\phi_z = - \iint \phi Th \quad \text{y} \quad \iint (Ph)\phi_{\bar{z}} = - \iint \phi h, \quad (3.6)$$

para toda $\phi \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Para ver la igualdad tomaremos límites a partir de funciones ϕ en $C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \subset L^p$, ya que para tales funciones la tesis es válida por la ecuación 3.1 y la Proposición 3.2.3.

Probaremos así la primer igualdad, la segunda es análoga.

Sea $h_n \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ sucesión de funciones tales que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|h_n - h\|_p = 0$, notar que $\iint (Ph_n)\phi_z = - \iint \phi Th_n, \forall n$.

Como P es un operador lineal tenemos que

$$\left| \iint (Ph)\phi_z - Ph_n\phi_z \right| \leq \iint |(P(h - h_n)\phi_z)|,$$

y aplicando la Proposición 3.1.4, tenemos que

$$|P(h - h_n)(\zeta)| \leq \frac{K_q |\zeta|^{1-\frac{2}{p}} \|h - h_n\|_p}{\pi}.$$

Por tanto $P(h - h_n)$, converge uniformemente a 0 en $\text{Sop}(\phi)$. Luego

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \iint (Ph)\phi_z - (Ph_n)\phi_z \right| = 0.$$

Por otro lado, aplicando 3.1.13 y la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\left| \iint \phi(Th) - \phi Th_n \right| \leq \iint |\phi(T(h - h_n))| \leq \|\phi\|_q C_p \|h - h_n\|_p.$$

Como $\phi \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, en particular está en L^q , de donde podemos deducir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \iint \phi(T(h) - T(h_n)) \right| = 0.$$

Por último, aplicando la desigualdad triangular con h_n , dado que el resultado es válido para está, tenemos

$$\left| \iint Ph\phi_z + \phi Th \right| \leq \left| \iint (Ph)\phi_z - Ph_n\phi_z \right| + \left| \iint \phi(T(h) - T(h_n)) \right| \rightarrow 0,$$

de donde se concluye la tesis. □

3.2. Derivadas en distribución

Para poder probar la existencia de soluciones a la ecuación de Beltrami, necesitaremos trabajar con derivadas en distribución.

Aunque la definición puede variar según el contexto, aquí usaremos la siguiente.

Definición 3.2.1 Dada $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, decimos que tiene derivadas en distribución si existen $a, b : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que para toda función $\phi \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, se verifica que

$$\iint f \phi_x = - \iint a \phi, \quad \iint f \phi_y = - \iint b \phi. \quad (3.7)$$

Observar que para todo cuadrado K , existe una función $\phi \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tal que $\phi(x, y) = x$ para $(x, y) \in K$, de donde $(\phi_x)|_K = 1$. Luego f es medible. Más aún, $f \in L_{loc}^1$. De forma análoga, existe $\phi \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tal que $\phi(x, y) = 1$, por lo cual a y b son medibles y están en L_{loc}^1 .

Observación 3.2.2 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una función con derivadas en distribución, entonces sus derivadas son únicas ctp.

Esta definición, en esencia, nos está diciendo que podemos aplicar el método de integración por partes. De hecho, si f tiene derivadas parciales, por ejemplo $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, entonces f tiene derivadas en distribución. Más específicamente, se tiene la siguiente proposición.

Proposición 3.2.3 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que tiene derivadas parciales, entonces $a = f_x$ y $b = f_y$

Demostración: Probemos la ecuación $a = f_x$. La prueba para $b = f_y$ es análoga.

Fijemos $K = [-R_\phi, R_\phi] \times [-R_\phi, R_\phi]$, como $\text{sop}(\phi) \subset B(0, R_\phi)$, se tiene que

$$\iint f \phi_x = \iint_K f \phi_x = \int_{-R_\phi}^{R_\phi} \left(\int_{-R_\phi}^{R_\phi} f(x + iy) \phi_x(x + iy) dx \right) dy.$$

Aplicando partes en la variable x , obtenemos

$$\iint f \phi_x = \int_{-R_\phi}^{R_\phi} f(R_\phi + iy) \phi(R_\phi + iy) dy - \int_{-R_\phi}^{R_\phi} f(-R_\phi + iy) \phi(-R_\phi + iy) dy - \int_{-R_\phi}^{R_\phi} \left(\int_{-R_\phi}^{R_\phi} f_x(x + iy) \phi(x + iy) dx \right) dy.$$

Luego, como $\text{Sop}(\phi) \subset B(0, R_\phi)$, tenemos que

$$\iint f \phi_x = - \int_{-R_\phi}^{R_\phi} \left(\int_{-R_\phi}^{R_\phi} f_x(x + iy) \phi(x + iy) dx \right) dy = - \iint f_x \phi.$$

□

Tenemos así que las derivadas en distribución son realmente una generalización de las derivadas parciales. Además, muchas de las propiedades de éstas se siguen cumpliendo.

Notación 3.2.4 Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que es derivable en distribución.

Decimos así que $a = f_x$ y $b = f_y$ en distribución. Notamos además $f_z = \frac{1}{2}(a - ib)$ y $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(a + ib)$ en distribución.

Otras de las propiedades necesarias para la próxima sección vienen dadas por relaciones de igualdad de derivadas en distribución. En particular, una generalización de la ecuación de Cauchy Riemann.

Definición 3.2.5 Sean $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Definimos, en caso de que exista, la función $f * g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $(f * g)(\zeta) = \iint f(z)g(\zeta - z)dx dy$. Llamamos a esta operación, convolución de f con g .

Notar que ese operador cumple algunas propiedades básicas.

1. La operación de convolución es conmutativa y asociativa.
2. Dadas $f \in C_0^0$ y g de clase C^n , entonces $f * g$ es de clase C^{n+1} .
3. Dadas $f \in C^0$ tal que tiene derivadas en distribución y $g \in C_0^1$, entonces $(f * g) \in C^1$ y se verifican las ecuaciones $(f * g)_x = (f * g_x)(p) = (f_x * g)(p)$ y $(f * g)_y = (f * g_y)(p) = (f_y * g)(p)$.

Lema 3.2.6 Sean $g \in C^0$ tal que existen sus derivadas parciales en distribución y $\delta_\epsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $\delta_\epsilon(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\epsilon^2} & \text{si } |z| \leq \epsilon \\ 0 & \text{si } |z| > \epsilon \end{cases}$, entonces $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (g * \delta_\epsilon)(\zeta) = g(\zeta)$. Más aún, la convergencia es uniforme en compactos.

Demostración: Dado $l > 0$, existe $r > 0$ tal que si $|\zeta - \zeta'| < r$ entonces $|g(\zeta) - g(\zeta')| \leq l$. Tenemos así que dado $\epsilon \leq r$

$$\left| \iint \delta_\epsilon(z) g(\zeta - z) dx dy - g(\zeta) \right| = \left| \iint_{B(0, \epsilon)} \frac{g(\zeta - z)}{\pi\epsilon^2} - \frac{g(\zeta)}{\pi\epsilon^2} dx dy \right| \leq \iint_{B(0, \epsilon)} \frac{l}{\pi\epsilon^2} dx dy = l.$$

Como l era un número arbitrario, obtenemos que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (g * \delta_\epsilon)(\zeta) = g(\zeta)$. Por último, como g es uniformemente continua en compactos, podemos tomar r de forma que no dependa de ζ , de donde se tiene la convergencia uniforme. $\square$

Proposición 3.2.7 Sean $p, q : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ funciones continuas tales que existen las derivadas parciales en distribución y además $p_{\bar{z}} = q_z$ en distribución. Entonces existe una función $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tal que $f_z = p$ y $f_{\bar{z}} = q$.

Demostración: Por el teorema de Morera, tenemos que si $r : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua que cumple que para todo rectángulo R se verifica $\oint_\gamma r dz = 0$ donde $\gamma = \partial R$, entonces r es holomorfa, y por tanto existe $\hat{h}$ tal que $\hat{h}_z = r$ y $\hat{h}_{\bar{z}} = 0$. De hecho, podemos tomar $\hat{h} = \int_0^1 zr(z)dt$.

De forma análoga, para funciones $s : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\oint_\gamma s d\bar{z} = 0$, se cumple que $\bar{s}$ es holomorfa, de donde existe $\tilde{h}$ tal que $\tilde{h}_z = \bar{s}$ y $\tilde{h}_{\bar{z}} = 0$. Luego la función $\hat{h} = \tilde{h}$ verifica que $\hat{h}_z = 0$ y $\hat{h}_{\bar{z}} = s$.

Adaptando la prueba de Morera, basta probar que para todo rectángulo R se tiene que $\oint_\gamma p dz + q d\bar{z} = 0$ donde $\gamma = \partial R$, ya que en ese caso, la función $f(z) = \int_0^1 zp(tz) + zq(tz)dt$ verifica la tesis. Esto último se deduce de que $f_x(z) = p(z) + q(z)$ y $f_y(z) = ip(z) - iq(z)$.

Veamos primero el resultado en condiciones de $p, q \in C^1$.

Sean g una función y R un rectángulo, $\gamma = \partial R$, donde $g(z) = u(z) + iv(z)$ con $u, v \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ y $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ los vértices opuestos de R , con $a < c$ y $b < d$. Por definición se tienen las siguientes igualdades

$$\oint_\gamma g d\bar{z} = \int_a^c g(t + ib)dt + \int_b^d -ig(c + it)dt + \int_c^a g(t + id) + \int_d^b -ig(a + it)dt.$$

Podemos llevar la integral de g a integrales de funciones reales. Para las funciones $g_1, g_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por $g_1(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ y $g_2(x, y) = (v(x, y), -u(x, y))$, se da la igualdad

$$\oint_\gamma g(z) d\bar{z} = \int_{\partial\gamma} g_1 + i \int_{\partial\gamma} g_2.$$

Aplicando Stokes a g_i , obtenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\gamma} g_1 &= \iint_\gamma \nabla \times g_1 dx dy = \iint_\gamma v_x(x, y) - u_y(x, y) dx dy, \\ \int_{\partial\gamma} g_2 &= \iint_\gamma \nabla \times g_2 dx dy = \iint_\gamma -u_x(x, y) - v_y(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Por tanto, concluimos que

$$\oint_\gamma g(z) d\bar{z} = \iint_\gamma \nabla \times (g_1 + ig_2) dx dy = \frac{1}{i} \iint_\gamma g_z dx dy,$$

y de forma análoga

$$\oint_\gamma g(z) dz = \frac{-1}{i} \iint_\gamma g_{\bar{z}} dx dy.$$

Aplicando ésto a las funciones p y q , obtenemos que

$$\oint_\gamma p dz + q d\bar{z} = \iint_\gamma i(p_{\bar{z}} - q_z) dx dy = 0,$$

de donde se concluye la tesis para el caso $p, q \in C^1$.

Para el caso general, suavizamos p y q mediante convoluciones.

Dado $\epsilon > 0$, definimos la función $\delta_\epsilon : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $\delta_\epsilon(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\epsilon^2} & \text{si } |z| \leq \epsilon; \\ 0 & \text{si } |z| > \epsilon. \end{cases}$

La función de convolución $\hat{\delta} = \delta_\epsilon * \delta_{\epsilon'}$ cumple que

$$\hat{\delta}(\zeta) = \iint \delta_\epsilon(z) \delta_{\epsilon'}(\zeta - z) dx dy = \iint_{B(0, \epsilon)} \frac{\delta_{\epsilon'}(\zeta - z)}{\pi\epsilon^2} dx dy = \text{leb}(B(0, \epsilon) \cap B(\zeta, \epsilon')) \left(\frac{1}{\pi\epsilon\epsilon'} \right)^2,$$

y por tanto, es continua como función de ζ .

Definimos ahora la función $\delta = \delta_{\epsilon_1} * \dots * \delta_{\epsilon_4}$. Observar que $\delta \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y por tanto $p * \delta + q * \delta \in C^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Tomando la conclusión anterior para $p * \delta$ y $q * \delta$, obtenemos

$$\oint_{\gamma} p * \delta dz + q * \delta d\bar{z} = \iint_{\gamma} i[(p * \delta)_{\bar{z}} - (q * \delta)_z] dx dy = \iint_{\gamma} i[(p_{\bar{z}} * \delta) - (q_z * \delta)] dx dy = 0.$$

Por último, tomemos límites iterados en ϵ_i desde ϵ_4 a ϵ_1 . Aplicando 3.2.6, concluimos la proposición. $\square$

En particular, las ecuaciones de Cauchy-Riemann en distribución garantizan la propiedad de ser holomorfa, y la función f de la proposición anterior es única salvo constantes.

Corolario 3.2.8 *Sea $f \in C^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ tal que existen sus derivadas parciales en distribución y $f_{\bar{z}} = 0$. Entonces f es holomorfa.*

Por último mencionemos una propiedad que vincula derivadas en distribución con las funciones quasiconformes.

Observación 3.2.9 *Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua tal que tiene derivadas en distribución. Entonces es ACL. [Ah]*

Además, si f es diferenciable en un punto p , entonces $f_x(p)$ y $f_y(p)$ son sus derivadas en distribución.

Esta observación nos permite deducir que si una función continua tiene derivadas en distribución y verifica que $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$, entonces es K quasi conforme.

3.3. Soluciones al problema de mapeo

Buscamos una función f que cumpla $f_z = \mu f_{\bar{z}}$. Recordemos que μ es medible y $\|\mu\|_\infty = k < 1$. Fijemos además $p > 2$ tal que

$$C_p k < 1, \tag{3.8}$$

donde C_p es la constante del Teorema 3.1.13 (desigualdad de Zygmund-Calderon).

Esta función f será en esencia un punto fijo de un operador lineal contractivo.

Lo probaremos primero para el caso en que μ tenga soporte compacto, y luego a partir de este, realizaremos la prueba general.

Teorema 3.3.1 *Dada μ con soporte compacto, existe una única función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ continua solución al problema tal que $f(0) = 0$ y $f_z - 1 \in L^p$.*

Demostración: Empecemos por la unicidad, esto dará una idea sobre la existencia.

Dada f una solución, estudiaremos la expresión asociada a ésta dada por $F = f - P(f_{\bar{z}})$. Necesitamos así que $f_{\bar{z}} \in L^p$.

Dado que $f_z - 1 \in L^p$, se tiene que $f_z \in L_{loc}^p$. Luego, como $|f_{\bar{z}}| \leq k|f_z|$, tenemos que $f_{\bar{z}}$ también está en L_{loc}^p . Por último, dado que $f_{\bar{z}}$ tiene soporte compacto, concluimos que $f_{\bar{z}} \in L^p$, de donde está bien definido $P(f_{\bar{z}})$.

Notar que la función F es continua. Luego aplicando el Lema 3.1.14, tenemos que $F_{\bar{z}} = 0$ en distribución y por el Corolario 3.2.8 es holomorfa. A partir de esto podemos dar una expresión a F .

Por el Lema 3.1.14, se tiene que $F' = F_z = f_z - T(f_z)$ en distribución. Como f es solución a nuestro problema, se tiene que $f_z - 1 \in L^p$. Además $f_{\bar{z}} \in L^p$, por lo que $T(f_{\bar{z}})$ también lo esta. Concluimos así que $F' - 1 \in L^p$ y por tanto $F(z) = z + a$.

Como $f(0) = 0 = P(f_z)(0)$, tenemos que $a = 0$, y por tanto $f(z) = P(f_z)(z) + z$. Además $f_z = T(\mu f_z) + 1$ en distribución.

Supongamos que existe $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ una solución distinta a f . Derivando con respecto a z tenemos que $f_z - g_z = T[\mu(f_z - g_z)]$ en distribución. En particular, se cumple que $f_z - g_z \in L^p$.

Si $f_z - g_z \neq 0$, aplicando la desigualdad de Zygmund-Calderon y la ecuación 3.8, tenemos

$$\|f_z - g_z\|_p = \|T[\mu(f_z - g_z)]\|_p \leq C_p k \|f_z - g_z\|_p < \|f_z - g_z\|_p,$$

lo que es absurdo. Luego la igualdad $f_z = g_z$ se da en casi todo punto. Como además, ambas verifican la igualdad de Beltrami $f_{\bar{z}} = g_{\bar{z}}$ casi todo punto, obtenemos así que $f - g$ y $\bar{f} - \bar{g}$ son holomorfas, y por tanto $f - g$ es constante. Como normalizamos en 0, concluimos que $f = g$.

Probaremos ahora la existencia. Sea $S : L^p \rightarrow L^p$ el operador lineal definido por $S(g) = T(\mu g)$. Notar que $\|S(g)\|_p = \|T(\mu g)\|_p \leq C_p k \|g\|_p < \|g\|_p$, es decir, S es una contracción, cuya constante de contracción es menor igual a $C_p k$. Definimos el operador $\hat{S} : L^p \rightarrow L^p$ como una traslación de S dado por $\hat{S}(g) = T(\mu g) + T(\mu) = S(g) + T(\mu)$. En particular el operador $\hat{S}$ también es una contracción.

La sucesión $h_n = \hat{S}^n(0)$, es una sucesión de Cauchy en L^p , de donde tiene límite. Notemos $h = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$. Como $\hat{S}$ es una contracción, h es el único punto fijo de $\hat{S}$.

Veamos ahora que $f = P[\mu(h+1)] + z$ es una solución a la ecuación de Beltrami.

Debemos verificar que $\mu(h+1)$ esta en L^p . Para esto basta con notar que, como $h \in L^p$, entonces $h+1 \in L^p_{loc}$. Luego como μ tiene soporte compacto, y $\|\mu\|_\infty < 1$, entonces $\mu(h+1) \in L^p$.

Tenemos así que $P[\mu(h+1)]$ es continua, de donde f lo es. Por el Lema 3.1.14, tenemos las siguientes igualdades en distribución

$$f_{\bar{z}} = \mu(h+1), \quad f_z = T[\mu(h+1)] + 1 = T(\mu h) + T(\mu) + 1 = h+1, \quad (3.9)$$

de donde $f_z - 1 = h \in L^p$.

□

La función f es denominada como la solución normal del problema $f_{\bar{z}} = \mu f_z$.

Para que la solución normal f sea la solución buscada en 2.2.1, necesitamos además probar que es un homeomorfismo.

Para esto seguiremos los siguientes pasos:

- Propiedades básicas de la solución normal f .
- Ver como se relacionan soluciones normales para μ cercanos.
- Vincular la regularidad de μ con la de f .
- Tomar aproximaciones con μ_n regulares a la función μ que deseamos.

El procedimiento de tomar aproximaciones lo repetiremos para el caso en que μ no tenga soporte compacto.

Observación 3.3.2 *La función h definida en el teorema anterior cumple que*

$$\|h\|_p \leq k C_p \|h\|_p + C_p \|\mu\|_p, \text{ y por tanto } \|h\|_p \leq \frac{C_p \|\mu\|_p}{1 - k C_p}.$$

Corolario 3.3.3 *La solución normal f cumple*

$$\|f_{\bar{z}}\|_p = \|(P[\mu(h+1)])_{\bar{z}}\|_p = \|\mu(h+1)\|_p \leq \|\mu h\|_p + \|\mu\|_p \leq k \|h\|_p + \|\mu\|_p \leq \frac{\|\mu\|_p}{1 - k C_p}.$$

Observación 3.3.4 *Aplicando el Corolario 3.1.3 a la solución normal $f = P(\mu(h+1)) + z$, tenemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$. Además, de la demostración de la Proposición 3.1.4, se tiene que*

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leq \frac{K_p \|\mu\|_p}{\pi(1 - k C_p)} |\zeta_1 - \zeta_2|^{1 - \frac{2}{p}} + |\zeta_1 - \zeta_2|.$$

Notación 3.3.5 *Fijemos ahora como notación μ y μ_n a los coeficientes de Beltrami, f y g_n a sus respectivas soluciones normales. Como estudiaremos el caso de $\mu_n \rightarrow \mu$, podemos suponer que $\sup\{\|\mu_n\|_\infty, \|\mu\|_\infty\} \leq k$ para algún $k < 1$.*

Comparemos soluciones normales para dos funciones μ y ν . En particular, ver como se relacionan en función de $\|\mu - \nu\|_p$.

Observación 3.3.6 Sean μ y ν coeficientes de Beltrami con soporte compacto, tales que $\max\{\|\mu\|_\infty, \|\nu\|_\infty\} \leq k < 1$ y f, g sus soluciones normales respectivamente.

Entonces se verifica, en distribución, que

$$f_z - g_z = T(f_{\bar{z}}) + 1 - (T(g_{\bar{z}}) + 1) = T(\mu f_z - \nu g_z),$$

y por tanto

$$\|f_z - g_z\|_p \leq \|T[\nu(f_z - g_z)]\|_p + \|T[(\mu - \nu)f_z]\|_p \leq kC_p\|f_z - g_z\|_p + C_p\|(\mu - \nu)f_z\|_p.$$

A partir de la observación anterior obtenemos el siguiente lema.

Lema 3.3.7 Sean μ_n y μ en las hipótesis del Teorema 3.3.1 tales que existe M compacto con $Sop(\mu_n) \subset M$ y $\mu_n \rightarrow \mu$ ctp. Entonces $\|(g_n)_z - f_z\|_p \rightarrow 0$ y por tanto aplicando 3.3.4 se deduce que $g_n \rightarrow f$ uniformemente en compactos.

Probaremos ahora que f es un difeomorfismo si μ tiene derivadas en distribución.

Lema 3.3.8 Si μ es continua y tiene derivadas en distribución, con $\mu_z \in L^p$ para algún $p > 2$, entonces f , la solución normal, cumple que $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y es un homeomorfismo.

Demostración: Intentemos determinar $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que el sistema $f_z = \lambda$ y $f_{\bar{z}} = \mu\lambda$ tenga solución. Imponedremos además hipótesis adicionales a esta función. Si λ es continua y cumple que

$$\lambda_{\bar{z}} = (\mu\lambda)_z = \lambda_z\mu + \lambda\mu_z, \quad (3.10)$$

aplicando la Proposición 3.2.7, obtenemos que $f \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Si $\lambda \neq 0$ podemos cambiar la ecuación (3.11) por la siguiente

$$\frac{\lambda_{\bar{z}}}{\lambda} = \mu \frac{\lambda_z}{\lambda} + \mu_z \quad (3.11)$$

Notar que el hecho de que $\lambda \neq 0$ es de cierta forma es esperable, dado que buscamos que f sea un homeomorfismo. Bajo esa hipótesis, el diferencial, en caso de existir es no nulo.

Si además λ tiene derivadas en distribución, obtenemos que la ecuación

$$(\log(\lambda))_{\bar{z}} = \mu(\log(\lambda))_z + \mu_z \quad (3.12)$$

implica la ecuación (3.11). Notar que esta última ecuación es independiente de la rama de log que se elija.

Busquemos así una función θ tal que $\lambda = e^\theta$ verifique las condiciones deseadas.

En la prueba de 3.3.1 se ve que el mapa $g \rightarrow T(\mu g)$ es una contracción, por lo que existe $q \in L^p$ tal que $q = T(\mu q) + T\mu_z$. Fijemos así $\theta = P(\mu q + \mu_z) + k_1$, donde k_1 es una constante de forma que $\lim_{z \rightarrow \infty} \theta(z) = 0$. Dicha constante k_1 existe por el Corolario 3.1.3.

Tenemos así que θ es continua y $\theta_{\bar{z}} = \mu q + \mu_z$ y $\theta_z = T(\mu q + \mu_z) = q$ en distribución. Y por tanto, como $\theta = \log(\lambda)$ localmente, se verifica la ecuación (3.12). Concluimos así que existe f solución a nuestro problema con $f_z = \lambda$ y $f(0) = 0$. Sin embargo, necesitamos que sea la solución normal, es decir verificar que $f_z - 1 \in L^p$. Como $\theta = P(\mu q + \mu_z) + k_1$, θ es continua, y $\lim_{z \rightarrow \infty} \theta(z) = 0$.

Aplicando la Proposición 3.1.2, obtenemos que $\theta \in L^p$. Luego, como $e^\theta - 1 \sim \theta$ en ∞ tenemos que $e^\theta - 1 \in L^p$. Como $f_z - 1 = e^\theta - 1$ en distribución, y ambas son continuas, se concluye entonces que $f_z - 1 \in L^p$,

Recordando que $\lambda \neq 0$ se tiene que el jacobiano de f es $|f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0$, de donde f es localmente un difeomorfismo. Como además, $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$, por ser la solución normal, es decir f es propia, se tiene que $Im(f)$ es cerrada. Concluimos así que f es sobreyectiva.

Para verificar la inyectividad, basta con notar que $\mathbb{C}$ es simplemente conexo y recordar que f es un difeomorfismo local.

□

Para probar que f es un homeomorfismo cuando μ tiene soporte compacto, utilizaremos algunas propiedades de f^{-1} en el caso ya visto.

Bajo las hipótesis del lema anterior, en donde la función f es un difeomorfismo, tenemos que f^{-1} también es un difeomorfismo K quasi conforme, y por tanto es solución del problema para alguna $\hat{\mu}$. Notar que $|\mu_f(z)| = |\mu_{f^{-1}}(f(z))|$ por lo que $\hat{\mu}$ también tiene soporte compacto.

Recordando la ecuación de la observación 3.3.4 y aplicandola a f^{-1} en los puntos $f(\zeta_i)$ obtenemos obtenemos la ecuación

$$|\zeta_1 - \zeta_2| \leq \frac{K_p \|\hat{\mu}\|_p}{\pi(1 - kC_p)} |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)|^{1-\frac{2}{p}} + |f(\zeta_1) - f(\zeta_2)|, \quad (3.13)$$

por lo que solo resta acotar de forma uniforme $\|\hat{\mu}\|_p$ en función de $\|\mu\|_p$

Sea $\hat{\mu} = \mu_{f^{-1}}$, utilizando la igualdad $|\mu_f(z)| = |\mu_{f^{-1}}(f(z))|$, podemos estimar $\|\hat{\mu}\|_p$. Aplicando el cambio de variable $z = f(\hat{z})$ se, tiene que

$$\begin{aligned} \iint |\hat{\mu}(z)|^p dx dy &= \iint |\hat{\mu}(f(\hat{z}))|^p (|f_z(\hat{z})|^2 - |f_{\bar{z}}(\hat{z})|^2) d\hat{x} d\hat{y} = \iint |\mu(\hat{z})|^p (|f_z(\hat{z})|^2 - |f_{\bar{z}}(\hat{z})|^2) d\hat{x} d\hat{y} \leq \\ &\leq \iint |\mu(\hat{z})|^p |f_z(\hat{z})|^2 = \iint |\mu(\hat{z})|^{p-2} |f_{\bar{z}}(\hat{z})|^2. \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy Schwarz para $p' = \frac{p}{2}$ en $|f_{\bar{z}}|^2$ y $q' = \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{-1} = \frac{p}{p-2}$ en $|\mu|^{p-2}$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \iint |\hat{\mu}(z)|^p &\leq \iint |\mu(\hat{z})|^{p-2} |f_{\bar{z}}(\hat{z})|^2 \leq \|\mu|^{p-2}\|_{\frac{p}{p-2}} \|f_{\bar{z}}^2\|_{\frac{p}{2}} = \\ &= \left(\iint |\mu|^p(z)\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\iint |f_{\bar{z}}(z)|^p\right)^{\frac{2}{p}} = (\|\mu\|_p)^{p-2} (\|f_{\bar{z}}\|_p)^2. \end{aligned}$$

Luego por la desigualdad del Corolario 3.3.3, tenemos que $\|\hat{\mu}\|_p \leq (1 - kC_p)^{-\frac{2}{p}} \|\mu\|_p$.
 Probemos ahora que f es un homeomorfismo cuando μ tiene soporte compacto.

Teorema 3.3.9 *Sea μ con soporte compacto tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, entonces la solución normal a la ecuación de Beltrami es un homeomorfismo quasi conforme con $\mu_f = \mu$.*

Demostración: Sea $\mu_n \in C^1$ sucesión de funciones medibles tales que $\|\mu_n - \mu\|_p \rightarrow 0$, $\|\mu_n\|_\infty \leq \|\mu\|_\infty = k < 1$ y existe L compacto con $Sop(\mu_n) \subset L$ para todo n . Como $\|\mu_n - \mu\|_p \rightarrow 0$, aplicando el Lema 3.3.7 a las soluciones normales f_n , se tiene que $f_n \rightrightarrows f$ en compactos. Por tanto, como f_n verifica la ecuación (3.13), la función f también, luego es inyectiva. Recordando además que f es continua y propia, se tiene que es cerrada, de donde es sobreyectiva. Concluimos así que f es un homeomorfismo.

Culminemos con el teorema que prueba la existencia de soluciones para cualquier función de μ , de nuevo aproximando por las de soporte compacto.

Teorema 3.3.10 *Para cualquier función $\mu : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ medible con $\|\mu\|_\infty < 1$ existe una única solución normal quasi conforme f^μ con dilatación compleja μ , que fija 0, 1 y ∞ .*

Demostración: El caso en que μ tiene soporte compacto se vió en el teorema anterior.

Si $\mu = 0$ en un entorno de 0, definimos $\tilde{\mu} = \mu(\frac{1}{z}) \frac{z^2}{\bar{z}^2}$. Tenemos así que $\tilde{\mu}$ tiene soporte compacto, de donde existe solución normal, digamos $f^{\tilde{\mu}}$. Sea $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f(z) = \begin{cases} \frac{1}{f^{\tilde{\mu}}(\frac{1}{z})} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$.

Como $g(z) = \frac{1}{z}$ es un difeomorfismo sobre su imagen, se tiene que

$$f_z = \frac{1}{(f^{\tilde{\mu}}(\frac{1}{z}))^2} \frac{1}{z^2} f_z^{\tilde{\mu}} \left(\frac{1}{z}\right), \quad f_{\bar{z}} = \frac{1}{(f^{\tilde{\mu}}(\frac{1}{z}))^2} \frac{1}{\bar{z}^2} f_{\bar{z}}^{\tilde{\mu}} \left(\frac{1}{z}\right),$$

de donde $f = f^\mu$ es solución a nuestro problema.

Para el caso general, busquemos dos funciones medibles μ_1 y μ_2 tales que

- $\|\mu_i\|_\infty < 1$.
- $\mu_1 = 0$ en un entorno de ∞ y $\mu_2 = 0$ en un entorno de 0.
- $f^{\mu_2} \circ f^{\mu_1}$ sea solución al problema.

Notar que en estas condiciones, f^μ es un homeomorfismo por ser composición de ellos. Fijemos μ_1 tal que sea 0 en un entorno de ∞ y además $\mu_1 = \mu$ en un entorno de 0. Más específicamente, $\mu_1 = \chi\mu$, con χ una función chichón. Sea f^{μ_1} solución normal de μ_1 . Busquemos entonces qué condiciones tiene que cumplir g para que se cumpla que $\mu_{g \circ f^{\mu_1}} = \mu$. Aplicando la fórmula (1.6), se tiene que

$$\mu_{g \circ f^{\mu_1}}(p) = \frac{\mu_1(p) + \mu_g(f^{\mu_1}(p))e^{-2(\alpha+\beta)i}}{1 + \mu_1(p)\mu_g(f^{\mu_1}(p))e^{2(\alpha+\beta)i}}.$$

Si igualamos a $\mu(p)$ y despejamos μ_g , obtenemos que

$$\mu_g(f^{\mu_1}(p)) = \frac{\mu(p) - \mu_1(p)}{e^{-2(\alpha+\beta)i} - \mu(p)\mu_1(p)e^{2(\alpha+\beta)i}} = \frac{\mu(p)(1 - \chi(p))}{e^{-2\beta i}(1 - |\mu(p)|^2\chi(p)e^{2\alpha i})}.$$

Concluimos así que $\mu_g(p) = 0$ para todo $p \notin (f^{\mu_1})^{-1}(Sop(1 - \chi))$, y por tanto, como f^{μ_1} es continua $f^{\mu_1}(0) = 0$, tenemos que $\mu_g = 0$ en un entorno de 0. Además se tiene que $|\mu_g(f^{\mu_1}(p))| \leq \frac{\mu(p)(1 - \chi(p))}{1 - |\mu(p)|^2\chi(p)}$. El máximo de la función $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(u, v) = \frac{u(1-v)}{1-u^2v}$ se da en el segmento $u = 1$ donde h es constante 1, por tanto $\|\mu_g\| < 1$.

Tomando así

$$\mu_2(p) = \frac{\mu((f^{\mu_1})^{-1}(p)(1 - \chi((f^{\mu_1})^{-1}(p))))}{e^{-2\beta i}(1 - |\mu((f^{\mu_1})^{-1}(p))|^2\chi(p)e^{2\alpha i})},$$

obtenemos las propiedades del caso anterior, de donde podemos concluir que $f^{\mu_2} \circ f^{\mu_1}$ cumple la tesis. □

3.4. Desigualdad de Calderon-Zygmund

Para probar ésta desigualdad utilizaremos un argumento de convexidad dado en la ultima seccion, para el cual basta con probar que para algun $p > 2$ el operador T tiene norma acotada en L^p , sin embargo esto último es bastante técnico.

Veamos primero una versión análoga en dimensión 1. Veamos así un lema análogo a (3.1.6).

Lema 3.4.1 Sea $f \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, existe el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx$.

Demostración: Es claro que $\int_{|x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx$ está bien definida para cualquier $\epsilon > 0$, pues el integrando es continuo. Además $\int_{|x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{R_f > |x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx$ pues $Sop(f) \subset B(0, R_f)$.

Tomando el desarrollo de Taylor de orden 1 de f en 0, esto es $f(x) = f(0) + f'(0)x + r_1(x)$, tenemos que

$$\int_{R_f > |x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{R_f > |x| > \epsilon} \frac{f(0)}{x} + \int_{R_f > |x| > \epsilon} f'(0) dx + \int_{R_f > |x| > \epsilon} \frac{r_1(x)}{x} dx.$$

Veamos que cada término tiene límite en ϵ , de donde se concluye la tesis.

- El término $\int_{R_f > |x| > \epsilon} \frac{f(0)}{x} = 0$ pues $\frac{f(0)}{x}$ es impar en x y el dominio es simétrico.
- El término $\int_{R_f > |x| > \epsilon} f'(0) dx$ tiene integrando constante.
- La función $\frac{r_1(x)}{x}$ es continua fuera de 0 y como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{r_1(x)}{x} = 0$, se puede extender continuamente. Tenemos así que $\int_{R_f > |x|} \frac{r_1(x)}{x} dx$ converge pues su integrando es continuo.

Luego, como los tres terminos convergen, tenemos que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \epsilon} \frac{f(x)}{x} dx$ existe. □

Esto nos permite definir el siguiente operador, análogo a T en dimensión 1.

Definición 3.4.2 Definimos el operador lineal $H : C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ como

$$H(f)(\xi) = Hf(\xi) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x - \xi| > \epsilon} \frac{f(x)}{x - \xi} dx.$$

Notar que dada $f \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, se tiene que $Hf(\xi) = \frac{1}{\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{R_f + |\xi| > |x - \xi| > \epsilon} \frac{f(x)}{x - \xi}$. Además de la demostración de (3.4.1), se tiene que $Hf(\xi) = \frac{1}{\pi} \left(\int_{L > |x - \xi|} f'(\zeta) + \int_{L > |x - \xi|} \frac{r_1(x - \xi)}{x - \xi} \right)$ para todo L tal que $sop(f) \subset (\xi - L, \xi + L)$.

Veamos ahora que el operador H toma su imagen en L^p .

Proposición 3.4.3 *Para toda $f \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, se tiene que la función Hf es continua y $Hf \in L^p$ para $p > 1$.*

Demostración: Veamos primero que Hf es continua en $\xi_0 \in \mathbb{R}$. Fijemos $\delta_0 > 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} |Hf(\xi_0) - Hf(\xi)| &= \\ \frac{1}{\pi} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-\xi_0|>\epsilon} \frac{f(x)}{x-\xi_0} - \int_{|x-\xi|>\epsilon} \frac{f(x)}{x-\xi} \right| &= \frac{1}{\pi} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x-\xi_0|>\epsilon} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} \right| = \\ \frac{1}{\pi} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_0 > |x-\xi_0|>\epsilon} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} + \int_{|x-\xi_0|>\delta_0} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} \right|. \end{aligned}$$

Aplicando valor medio tenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_0 > |x-\xi_0|>\epsilon} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} \right| = \\ &= \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_0 > |x-\xi_0|>\epsilon} \frac{f(\xi_0) + f'(\xi_0 + (x - \xi_0)\theta_1(x))(x - \xi_0) - [f(\xi) + f'(\xi + (x - \xi_0)\theta_2(x))(x - \xi_0)]}{x - \xi_0} \right|, \end{aligned}$$

donde $\theta_i(x) \in [0, 1]$. Por paridad, tenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_0 > |x-\xi_0|>\epsilon} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} \right| = \\ &\left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_0 > |x-\xi_0|>\epsilon} f'(\xi_0 + (x - \xi_0)\theta_1(x)) - f'(\xi + (x - \xi_0)\theta_2(x)) \right| \end{aligned}$$

Como f y f' son uniformemente continuas, dado $\epsilon' > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| < \pi\epsilon'$ y $|f'(x) - f'(y)| < \pi\epsilon'$ si $|x - y| < \delta_1$.

Tomando $\delta_0 = \delta_1/2$, para todo ξ tal que $|\xi - \xi_0| < \delta_0$, tenemos

$$\frac{1}{\pi} \left| \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\delta_0 > |x-\xi_0|>\epsilon} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} \right| \leq 2\delta_0\epsilon'$$

dado que $|(\xi_0 + (x - \xi_0)\theta_1(x)) - (\xi + (x - \xi_0)\theta_2(x))| \leq |\xi - \xi_0| + |x - \xi_0| < \delta_1$.

Por otro lado, como fijamos δ_0 y f tiene soporte compacto, aplicando de nuevo valor medio tenemos que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{|x-\xi_0|>\delta_0} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} \right| = \\ &\left| \int_{R_f + \delta_0 + |\xi_0| > |x-\xi_0|>\delta_0} \frac{f(x) - f(x + (\xi - \xi_0))}{x - \xi_0} \right| \leq 2(R_f + \delta_0 + |\xi_0|)\epsilon' \end{aligned}$$

Utilizando de nuevo la continuidad uniforme, existe $\delta \leq \delta_1$ donde para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que $|f'(x) - f'(y)| \leq \frac{\pi\epsilon'}{2(R_f + 2\delta_0 + |\xi_0|)}$. Luego concluimos que para $\xi \in B(\xi_0, \delta)$, se cumple que $|Hf(\xi) - Hf(\xi_0)| < \epsilon'$. Como ϵ' es arbitrario concluimos que Hf es continua.

Recordemos que $\int_{\xi \in (-K, K)} |Hf(\xi)|^p < \infty$ para todo K , por ser Hf continua. Para ξ_1 tal que $|\xi_1| > R_f + T$, donde $T > 0$, se tiene que $|Hf(\xi_1)| = \left| \int_{x \in (-R_f, R_f)} \frac{f(x)}{x - \xi_1} dx \right|$. Dado que la singularidad $x = \xi_1$ esta fuera del soporte de f , podemos acotar entonces $|Hf(\xi_1)|$ por

$$|Hf(\xi_1)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{x \in (-R_f, R_f)} \left| \frac{f(x)}{x - \xi_1} \right| dx \leq \frac{1}{\pi} \int_{\xi \in (-R_f, R_f)} \frac{\|f\|_\infty}{|x - \xi_1|} \leq \|f\|_\infty \frac{1}{\pi T} 2R_f. \quad (3.14)$$

Por tanto, se deduce que $\int_{|\xi|>R_f+1} |Hf(\xi)|^p d\xi \leq \int_{|T|>1} \left| \frac{2R_f\|f\|_\infty}{\pi T} \right|^p dT$, y que converge para todo $p > 1$. Concluimos así que $Hf \in L^p$.

□

Definiremos ahora otro operador auxiliar, en cierta medida una extensión de H , con dominio para $H(f)$ el plano $\mathbb{H}^2$.

Definición 3.4.4 Definimos el operador lineal $F : C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{H}^2}$ como $F(f)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x-\zeta} dx$.

Para verificar que F está bien definida, basta con notar que $\forall \zeta \in \mathbb{H}^2$, la función $\frac{f(x)}{x-\zeta}$ es continua y con soporte compacto para la variable x .

Proposición 3.4.5 Dada $f \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la función $F(f)$ es holomorfa en $\mathbb{H}^2$ y se puede extender de forma continua a $\mathbb{R}$.

Demostración: La función $F(f)$ es holomorfa en $\mathbb{H}^2$ pues $\frac{f(x)}{x-\zeta}$ lo es en la variable ζ y tiene soporte compacto en x , por tanto, para verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann, basta aplicar la fórmula de Leibnitz.

Estudiemos ahora cómo extender F a $\mathbb{R}$. Separando en parte real e imaginaria, tenemos que

$$F(\zeta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - (\xi + i\nu)} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx.$$

Notamos $u(\xi, \nu) = \operatorname{Re}(F(\xi + i\nu)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx$ y $v(\xi, \nu) = \operatorname{Im}(F(\xi + i\nu)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\xi \geq 0$.

Veremos ahora que los límites de u y v existen en $\mathbb{R}$. Más aún $\lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} u(\xi, \nu) = Hf(\xi)$ y $\lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} v(\xi, \nu) = f(\xi)$. Como además f y $H(f)$ son continuas en $\mathbb{R}$, la extensión

$$F(f)(\xi, \nu) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - \zeta} dx & \text{si } \nu > 0; \\ H(f)(\xi) + if(\xi) & \text{si } \nu = 0, \end{cases}$$

es continua.

Para calcular el límite de v , separamos la integral en 2 regiones

$$v(\xi, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{|x - \xi| > \delta_0} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx + \frac{1}{\pi} \int_{|x - \xi| < \delta_0} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx,$$

para cualquier $\delta_0 > 0$.

Fijemos $\delta_0 > 0$, aplicando convergencia monótona se tiene que

$$\lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} \frac{1}{\pi} \int_{|x - \xi| > \delta_0} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx = \lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} \frac{1}{\pi} \int_{R_f + |\xi| + 1 > |x - \xi| > \delta_0} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx = 0.$$

Para el término $|x - \xi| < \delta_0$, tomaremos valor medio en ξ , esto es $f(x) = f(\xi) + f'(\theta(x))x - (1 - \theta(x))\xi$, de donde

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{|x - \xi| < \delta_0} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{|x - \xi| < \delta_0} \frac{f(\xi)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx + \int_{|x - \xi| < \delta_0} \frac{f'(\theta(x))x - (1 - \theta(x))\xi}{(x - \xi)^2 + \nu^2} \nu dx \right). \end{aligned}$$

Como $\left| \frac{(x - \xi)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} \right| \leq \frac{1}{2}$, podemos acotar en función de δ_0 el término

$$\left| \int_{|x - \xi| < \delta_0} \frac{f'(\theta(x))x - (1 - \theta(x))\xi}{(x - \xi)^2 + \nu^2} \nu dx \right| \leq \delta_0 \|f'\|_{\infty}.$$

Dado que

$$\frac{1}{\pi} \int_{|x - \xi| < \delta_0} \frac{f(\xi)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx = \frac{f(\xi)}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{\delta_0}{\nu}\right) - \arctan\left(\frac{-\delta_0}{\nu}\right) \right),$$

como $\delta_0 > 0$ es un valor fijo y f es continua, se tiene que

$$\lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} \frac{f(\xi)}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{\delta_0}{\nu}\right) - \arctan\left(\frac{-\delta_0}{\nu}\right) \right) = f(\xi_0).$$

Tomando ahora límite en $\delta_0 \rightarrow 0^+$, se tiene que

$$\lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} v(\xi, \nu) = \lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx = f(\xi_0).$$

Veamos ahora $Re(F)$.

Tomamos $K > 1$ tal que $\text{Sop}(f) \subset (\xi_0 - (K-1), \xi_0 + (K-1))$ y $\delta_0 \in (0, K)$ fijo. Si $|\xi - \xi_0| < 1$ se tiene que,

$$u(\xi, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{|x-\xi| < K} \frac{f(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} = \frac{1}{\pi} \left(\int_{\delta_0 \leq |x-\xi| < K} \frac{f(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} + \int_{|x-\xi| \leq \delta_0} \frac{f(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} \right).$$

Para el término $|x - \xi| < \delta_0$, aplicando valor medio en ξ , tenemos que

$$\int_{|x-\xi| \leq \delta_0} \frac{f(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} = \int_{|x-\xi| \leq \delta_0} \frac{f(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} + \int_{|x-\xi| \leq \delta_0} \frac{f'(\theta(x)\xi + (1-\theta(x))x)(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + \nu^2}.$$

Como $\frac{f(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2}$ es impar en ξ , se cumple que

$$\int_{|x-\xi| \leq \delta_0} \frac{f(\xi)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} = 0,$$

mientras que

$$\left| \frac{f'(\theta(x)\xi + (1-\theta(x))x)(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + \nu^2} \right| \leq \|f'\|_\infty.$$

Luego

$$\int_{|x-\xi| \leq \delta_0} \frac{f'(\theta(x)\xi + (1-\theta(x))x)(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2 + \nu^2} \leq 2\delta_0 \|f'\|_\infty,$$

y entonces $\left| \int_{|x-\xi| \leq \delta_0} \frac{f(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} \right| \leq 2\delta_0 \|f'\|_\infty$.

Para el término restante, como se da la desigualdad $\left| \frac{f(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} \right| \leq \left| \frac{f(x)}{(x-\xi)} \right|$ y δ_0 es un valor fijo, aplicando convergencia dominada, se tiene que

$$\lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} \frac{1}{\pi} \int_{\delta_0 \leq |x-\xi| < K} \frac{f(x)(x-\xi)}{(x-\xi)^2 + \nu^2} = \frac{1}{\pi} \int_{\delta_0 \leq |x-\xi_0| < K} \frac{f(x)}{(x-\xi_0)}.$$

Por último, tomando límite $\delta_0 \rightarrow 0^+$, podemos concluir que $\lim_{(\xi, \nu) \rightarrow (\xi_0, 0)} u(\xi, \nu) = Hf(\xi_0)$. □

Comentario 3.4.6 De forma análoga a la Proposición 3.4.3, se tiene que $g_{\nu_0}(\xi) = F(f)(\xi, \nu_0)$ es continua y está en $L^p \forall \nu_0 > 0$. Para el caso de $\nu = 0$, la función $g_0(\xi) = F(f)(\xi, 0) = H(f)(\xi) + if(\xi)$ esta en L^p pues su parte real e imaginaria lo están.

Proposición 3.4.7 La función $F(f)$ cumple que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \|F(f)(\xi, \nu)\|_p^p = \|F(f)(\xi, 0)\|_p^p.$$

Demostración: Por la Proposición 3.4.5, sabemos que $\lim_{\nu_0 \rightarrow 0^+} F(f)(\xi, \nu_0) = F(f)(\xi, 0)$, es decir, hay convergencia puntual. Como además $F(f)$ es continua, la igualdad de la tesis es válida en cualquier compacto. Más en concreto, dado $K > 0$, se tiene que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \int_{|\xi| < K} |F(f)(\xi, \nu)|^p d\xi = \int_{|\xi| < K} |F(f)(\xi, 0)|^p d\xi.$$

Dado $\epsilon > 0$, como $F(f)(\xi, 0) \in L^p$, $\exists K' \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{|\xi| > K'} |F(f)(\xi, 0)|^p d\xi < \frac{\epsilon}{3}$.

Afirmación: Basta probar la existencia de $\nu_0 > 0$ y $K > K'$ tales que $\int_{|\xi| > K} |F(f)(\xi, \nu)|^p d\xi \leq \frac{\epsilon}{3}$ para todo $\nu \leq \nu_0$.

Por la desigualdad triangular, se tiene que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\xi \in \mathbb{R}} |F(f)(\xi, \nu)|^p - |F(f)(\xi, 0)|^p d\xi \right| \leq \\ & \leq \left| \int_{|\xi| < K} |F(f)(\xi, \nu)|^p - |F(f)(\xi, 0)|^p \right| + \left| \int_{|\xi| > K} |F(f)(\xi, \nu)|^p - |F(f)(\xi, 0)|^p \right| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left| \int_{|\xi|<K} |F(f)(\xi, \nu)|^p - |F(f)(\xi, 0)|^p \right| + \int_{|\xi|>K} |F(f)(\xi, \nu)|^p + \int_{|\xi|>K} |F(f)(\xi, 0)|^p \leq \\ &\leq \left| \int_{|\xi|<K} |F(f)(\xi, \nu)|^p - |F(f)(\xi, 0)|^p \right| + \frac{2\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

si $\nu \leq \nu_0$. Mientras que $\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \left| \int_{|\xi|<K} |F(f)(\xi, \nu)|^p - |F(f)(\xi, 0)|^p \right| = 0$, de donde concluimos que $\exists \nu_1$ tal que

$$\left| \int_{\xi \in \mathbb{R}} |F(f)(\xi, \nu)|^p - |F(f)(\xi, 0)|^p \right| \leq \epsilon,$$

para todo $\nu \leq \nu_1$, de donde se deduce la tesis.

Probemos así la existencia de ν_0 y K .

Sea g una función tal que $g \in C_0^1$ y $|f(x)| \leq g(x)$. Como antes se tiene que $F(g)$ es continua. Observar que $\text{sop}(f) \subset \text{sop}(g)$, podemos tomar así $R_f \leq R_g$.

Fijemos $M > R_g + 1 \geq R_f + 1$ y estudiemos la integral impropia $\int_{\xi < -M} |F(f)(\xi, \nu)|^p d\xi$. El razonamiento para $\xi > M$ es análogo.

Por definición

$$\int_{\xi < -M} |F(f)(\xi, \nu)|^p d\xi = \int_{\xi < -M} \left| \frac{1}{\pi} \left(\int_{|x| \leq R_f} \frac{f(x)}{(x - \xi) + i\nu} dx \right) \right|^p d\xi.$$

Como $\nu \geq 0$ y para todo par x, ξ tal que $x \in \text{Sop}(f)$ y $\xi < -M < -R_f$, se tiene que $(x - \xi) > 0$, obtenemos la desigualdad

$$\left| \int_{|x| \leq R_f} \frac{f(x)}{(x - \xi) + i\nu} dx \right| \leq \int_{|x| \leq R_f} \frac{|f(x)|(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + \nu^2} + \frac{|f(x)|\nu}{(x - \xi)^2 + \nu^2} dx.$$

Podemos concluir así que

$$\int_{\xi < -M} \left| \left(\int_{|x| \leq R_f} \frac{f(x)}{(x - \xi) + i\nu} dx \right) \right|^p d\xi \leq \int_{\xi < -M} \left| \left(\int_{|x| \leq R_f} \frac{|f(x)|}{(x - \xi) + i\nu} dx \right) \right|^p d\xi.$$

Recordando que $|f(x)| \leq g(x)$ y que $\xi < -R_g$, tenemos que

$$\begin{aligned} &\int_{\xi < -M} \left| \frac{1}{\pi} \left(\int_{x \in \mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{(x - \xi) + i\nu} dx \right) \right|^p d\xi \leq \\ &\int_{\xi < -M} \left| \frac{1}{\pi} \left(\int_{x \in \mathbb{R}} \frac{g(x)}{(x - \xi) + i\nu} dx \right) \right|^p d\xi = \int_{\xi < -M} |F(g)(\xi, \nu)|^p d\xi \end{aligned}$$

Dados ν y $\epsilon > 0$, como $F(g) \in L^p$, existe $K_\nu > R_g$ tal que $\int_{\xi < -K_\nu} |F(g)(\xi, \nu)|^p d\xi \leq \epsilon/6$. Probaremos ahora que podemos elegir K independiente de ν . Notemos u_g, v_g la parte real e imaginaria de $F(g)$, esto es, $u_g(\xi, \nu) = \text{Re}(F(g)(\xi, \nu)) = \int_{|x| < R_g} \frac{g(x)(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + \nu^2}$ y $v_g(\xi, \nu) = \text{Im}(F(g)) = \int_{|x| < R_g} \frac{g(x)(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + \nu^2}$. Como $F(g) = u_g + iv_g$, tomando norma p , tenemos

$$\left(\int_{\xi < -K_\nu} |F(g)(\xi, \nu)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\xi < -K_\nu} |u_g(\xi, \nu)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\xi < -K_\nu} |v_g(\xi, \nu)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Acotemos ahora los términos de u_g y v_g .

■ Acotación de u_g :

Para $\xi < -R_g$, la función $\frac{g(x)(x - \xi)}{(x - \xi)^2 + \nu^2}$ es no negativa y decreciente en $\nu \in \mathbb{R}^+ \cap \{0\}$. Como además hay convergencia puntal $\lim_{\nu \rightarrow 0^+} u_g(\xi, \nu) = Hg(\xi)$, por convergencia monotona se tiene que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \left(\int_{\xi < -K_\nu} |u_g(\xi, \nu)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\xi < -R_g} |Hg(\xi)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $H(g) \in L^p$, existe $K_1 > R_g$ tal que $\int_{\xi < -K_1} |H(g)(\xi)|^p d\xi \leq \frac{\epsilon}{12}$ y por tanto $\exists \nu_1$ tal que

$$\left(\int_{\xi < -K_1} |u_g(\xi, \nu)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\epsilon}{12}$$

para todo $\nu \leq \nu_1$.

- Acotacion de v_g :

Sea $l_{(x,\xi)} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $l_{(x,\xi)}(\nu) = \frac{g(x)\nu}{(x-\xi)^2 + \nu^2}$. Notar que l es no negativa.

La derivada de $l_{(x,\xi)}$ es

$$l'_{(x,\xi)} = \frac{g(x)(\nu^2 + (x-\xi)^2) - 2g(x)\nu^2}{((x-\xi)^2 + \nu^2)^2} = \frac{g(x)((x-\xi)^2 - \nu^2)}{((x-\xi)^2 + \nu^2)^2},$$

de donde, si $\xi < -(R_g + 1)$ y $\nu \in (0, 1)$, se tiene que $l'_{(x,\xi)} \geq 0$. Es decir, la función $l_{(x,\xi)}$ es no decreciente en ν .

Tomamos $\nu_0 = \min\{\frac{1}{2}, \nu_1\}$. Existe $K > \max\{K_1, R_g + 1\}$ tal que $\int_{\xi < -K} |v_g(\xi, \nu_0)|^p d\xi \leq \frac{\epsilon}{12}$.

Como $l'_{(x,\xi)}(\nu) \geq 0$ para todo $\xi < -K$, y $\nu \leq \nu_0$ tenemos que

$$\int_{\xi < -K} |v_g(\xi, \nu)|^p d\xi \leq \int_{\xi < -K} |v_g(\xi, \nu_0)|^p d\xi \leq \frac{\epsilon}{12},$$

de donde se concluye la desigualdad deseada. □

Comentario 3.4.8 Las funciones $u = \operatorname{Re}(F)$ y $v = \operatorname{Im}(F)$ son armónicas en $\mathbb{H}^2$.

Lema 3.4.9 Dados $p \geq 2$ y $f \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ se verifican las siguiente formulas para $F(f)$, $u = \operatorname{Re}(F)$ y $v = \operatorname{Im}(F)$

1. $\Delta|u|^p = p(p-1)|u|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2)$
2. $\Delta|v|^p = p(p-1)|v|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2)$
3. $\Delta|F|^p = p^2|F|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2)$

Demostracion: Empecemos por u ,

$$(|u|^p)_x = p|u|^{p-1}u_x, \quad (|u|^p)_{xx} = p(p-1)|u|^{p-2}u_x^2 + p|u|^{p-1}u_{xx}$$

y

$$(|u|^p)_y = p|u|^{p-1}u_y, \quad (|u|^p)_{yy} = p(p-1)|u|^{p-2}u_y^2 + p|u|^{p-1}u_{yy}.$$

Como u es armónica, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, por tanto

$$\Delta|u|^p = (|u|^p)_{xx} + (|u|^p)_{yy} = p(p-1)|u|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2).$$

Procediendo de forma análoga en v y recordando que F es holomorfa, es decir se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann ($u_x = v_y, u_y = -v_x$), se tiene que

$$\Delta|v|^p = p(p-1)|v|^{p-2}(u_x^2 + u_y^2).$$

Por último, para F tenemos que

$$\begin{aligned} (|F|^p)_x &= [(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}}]_x = p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1}(uu_x + vv_x), \\ (|F|^p)_{xx} &= p(p-2)(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-2}(uu_x + vv_x)^2 + p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1}(u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx}) = \\ &= 2p(p-2)(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-2}(uu_xvv_x) + p(p-2)(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-2}(u_x^2u_x^2 + v_x^2v_x^2) + \\ &\quad p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1}(u_x^2 + uu_{xx} + v_x^2 + vv_{xx}). \end{aligned}$$

Analicemos ahora término a término, con su correspondiente en $|F|_{yy}^p$

- Los términos $p(p-2)(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-2}(uu_xvv_x)$ y $p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1}(uu_{xx} + vv_{xx})$ se cancelarán con el correspondiente en $|F|_{yy}^p$, por ser F holomorfa.
- El término $p(u^2 + v^2)^{\frac{p}{2}-1}(u_x^2 + v_x^2)$ es simétrico en las variables, luego el correspondiente en $|F|_{yy}^p$ es el igual.

- El término correspondiente a $p(p-2)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-2}(u^2u_x^2+v^2v_x^2)$ en $|F|_{yy}^p$ es $p(p-2)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-2}(u^2u_y^2+v^2v_y^2)$, luego como F holomorfa ($u_x = v_y, u_y = -v_x$), se deduce que

$$\begin{aligned} & p(p-2)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-2}[(u^2u_x^2+v^2v_x^2) + (u^2u_y^2+v^2v_y^2)] = \\ & = p(p-2)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-2}(u^2+v^2)(u_x^2+u_y^2) = p(p-2)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-1}(u_x^2+u_y^2). \end{aligned}$$

Podemos concluir así que que

$$\Delta|F|^p = p(p-2)(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-1}(u_x^2+u_y^2) + 2p(u^2+v^2)^{\frac{p}{2}-1}(u_x^2+u_y^2) = p^2|F|^{p-2}(u_x^2+u_y^2).$$

Corolario 3.4.10 *Se cumple la siguiente desigualdad*

$$\Delta \left(|F|^p - \frac{p}{p-1}|u|^p \right) = p^2(|F|^{p-2} - |u|^{p-2})(u_x^2+u_y^2) \geq 0.$$

Proposición 3.4.11 *Existe una función $A : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que, $\forall f \in C_0^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, se tiene que $\|Hf\|_p \leq A(p)\|f\|_p$.*

Demostración:

Dejaremos $A(p)$ como parámetro positivo hasta obtener más información sobre esta función.

Recordemos que $\|Hf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |u(\xi, 0)|^p d\xi$ y $\|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}} |v(\xi, 0)|^p d\xi$, por tanto sustituyendo tenemos que probar que

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{|u(\xi, 0)|^p}{A(p)^p} d\xi \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |v(\xi, 0)|^p d\xi \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si elevamos al cuadrado, esto es equivalente a probar

$$\frac{\|u^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}}{A(p)^2} \leq \|v^2\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}.$$

Dado que $\|u^2\|_{\frac{p}{2}} + \|v^2\|_{\frac{p}{2}} \geq \|u^2 + v^2\|_{\frac{p}{2}} = \| |F|^2 \|_{\frac{p}{2}}$, es suficiente con ver que

$$\| |F|^2 \|_{\frac{p}{2}} - \left(1 + \frac{1}{A(p)^2} \right) \|u^2\|_{\frac{p}{2}} = \| |F|^2 \|_{\frac{p}{2}} - \left\| \left(1 + \frac{1}{A(p)^2} \right) u^2 \right\|_{\frac{p}{2}} \geq 0.$$

Sea $B(p) = \left(1 + \frac{1}{A(p)^2} \right)^{\frac{p}{2}}$, probemos que $\int_{\mathbb{R}} |F(\xi, 0)|^p - B(p)|u(\xi, 0)|^p d\xi \geq 0$. Esto último, por la observación (3.4.7), es equivalente a probar

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi \geq 0.$$

Para eso veamos que $\int_{\mathbb{R}} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi$ es monótona decreciente en ν y que $\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi = 0$.

Estudiaremos el decrecimiento en la variable ν a partir de compactos, ya que dados $\nu_0 < \nu_1$, si $\exists K_0$ tal que $\int_{|\xi| < K} |F(\xi, \nu_0)|^p - B(p)|u(\xi, \nu_0)|^p d\xi \geq \int_{|\xi| < K} |F(\xi, \nu_1)|^p - B(p)|u(\xi, \nu_1)|^p d\xi$ para todo $K > K_0$, entonces

$$\int |F(\xi, \nu_0)|^p - B(p)|u(\xi, \nu_0)|^p d\xi \geq \int |F(\xi, \nu_1)|^p - B(p)|u(\xi, \nu_1)|^p d\xi,$$

de donde la expresión es monótona decreciente en ν .

Esto se puede deducir derivando en ν , es decir, verificando la desigualdad

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\int_{|\xi| < K} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi \right) \leq 0.$$

Por Leibniz es igual a probar

$$\int_{|\xi| < K} (|F(\xi, \nu)|^p)_y - B(p)(|u(\xi, \nu)|^p)_y d\xi \leq 0.$$

Para verificar esta desigualdad, aplicaremos Stokes en un semicírculo $\tilde{C}_k$, con base el segmento $(-K, K) \times \{\nu\}$, a un campo cuya primer coordenada sea $(|F(\xi, \nu)|^p)_y - B(p)(|u(\xi, \nu)|^p)_y$.

Definimos así $G : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo vectorial dado por

$$G(\xi, \nu) = ([F(\xi, \nu)]^p]_y - B(p)[|u(\xi, \nu)|^p]_y, -([F(\xi, \nu)]^p]_x - B(p)[|u(\xi, \nu)|^p]_x)).$$

Afirmación: La integral del campo G en el arco de circunferencia de $\tilde{C}_k$, que notaremos $\mathcal{C}_K$, tiende a 0 cuando K tiende a infinito.

Acotaremos $(|u|^p)_x$ para $K > R_f$, el resto de los casos es análogo.

Como $u(\xi, \nu) = \int_{R_f} \frac{f(t)(t-\xi)}{(t-\xi)^2 + \nu^2} dt$, por Leibniz se tiene que

$$\begin{aligned} |u_x(\xi, \nu)| &= \left| \int_{|t| < R_f} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{f(t)(t-\xi)}{(t-\xi)^2 + \nu^2} \right) dt \right| = \left| \int_{|t| < R_f} \frac{f(t)(-((t-\xi)^2 + \nu^2) + 2(t-\xi)^2)}{((t-\xi)^2 + \nu^2)^2} dt \right| = \\ &= \left| \int_{|t| < R_f} \frac{-f(t)(\nu^2 - (t-\xi)^2)}{((t-\xi)^2 + \nu^2)^2} dt \right| \leq \frac{2R_f \|f\|_\infty}{(\xi - R_f)^2 + \nu^2}. \end{aligned}$$

Podemos acotar además $|u|$, cuando $|(\xi, \nu)| = K$, por

$$|u(\xi, \nu)| = \left| \int_{|t| < R_f} \frac{f(t)(t-\xi)}{(t-\xi)^2 + \nu^2} dt \right| \leq \frac{K 2R_f \|f\|_\infty}{(\xi - R_f)^2 + \nu^2}.$$

Aplicando ambas desigualdades y la igualdad $(|u|^p)_x = p|u|^{p-1}u_x$, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}_k} (|u|^p)_x &\leq 2\pi K \max_\theta (|u(K \cos(\theta), K \sin(\theta))|_x^p) \leq \\ &\leq 2\pi K p \left(\frac{K 2R_f \|f\|_\infty}{(\xi - R_f)^2 + \nu^2} \right)^{p-1} \left(\frac{2R_f \|f\|_\infty}{(\xi - R_f)^2 + \nu^2} \right) \leq 2\pi 2^p (R_f \|f\|_\infty)^p \left(\frac{K}{(K - R_f)^2} \right)^p. \end{aligned}$$

Concluimos así que

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}_k} (|u|^p)_x = 0. \quad (3.15)$$

De forma análoga se puede probar para $(|u|^p)_y$, y por tanto, para las derivadas de v , donde también se deduce para $(|F|^p)_x$ y $(|F|^p)_y$.

Notar que por (3.4.10), se tiene que $\partial G = -\Delta(|F|^p - B(p)|u|^p) \leq 0$ si tomamos como $B(p) = \frac{p}{p-1}$. Además $\partial G = 0$ en un conjunto de medida nula, pues F es holomorfa no constante. Por tanto existe $c < 0$ tal que

$$\iint_{\tilde{C}_k} \partial G(\xi, \nu) d\xi d\nu \leq c < 0. \quad (3.16)$$

Aplicando el teorema de Stokes al campo G en $\mathcal{C}_K$, por (3.15) y (3.16), existe $K_0 \geq 1$ tal que

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \left(\int_{|\xi| < K} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi \right) = \int_{|\xi| < K} (|F(\xi, \nu)|^p)_y - B(p)(|u(\xi, \nu)|^p)_y d\xi \leq \frac{c}{2} < 0$$

para todo $K > K_0$, y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi$$

es decreciente en ν .

Para concluir que

$$\lim_{\nu \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi \geq 0$$

basta con aplicar convergencia monótona a $|F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p$, y que

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi \right) = 0.$$

Esto último se debe a que

$$\left| \left(\int_{\mathbb{R}} |F(\xi, \nu)|^p - B(p)|u(\xi, \nu)|^p d\xi \right) \right| \leq \frac{2R_f \|f\|_\infty}{\pi|\nu| - R_f}$$

para todo $\nu > R_f$.

Terminamos así la demostración de la desigualdad para dimensión 1. Observar que

$$A(p) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{2}{p}} - 1}}.$$

□

Definiremos ahora otro operador auxiliar similar a T . Para eso veremos unas observaciones previas.

Extenderemos la notación R_f a funciones $f \in C_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, esto es, notamos R_f a cualquier real positivo tal que $\text{Sop}(f) \subset B(0, R_f)$.

Observación 3.4.12 Dada $f \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, existe el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| > \epsilon} \frac{f(z)}{z|z|} dx dy$.

Demostración: Notar que como f tiene soporte compacto, se cumple la igualdad

$$\iint_{|z| > \epsilon} \frac{f(z)}{z|z|} dx dy = \iint_{R_f > |z| > \epsilon} \frac{f(z)}{z|z|} dx dy.$$

Basta con tomar el desarrollo de Taylor de f en 0, esto es, $f(z) = f(0) + f_z(0)z + f_{\bar{z}}(0)\bar{z} + r_1(z)$, como en (3.1.6), y verificar que en cada termino es convergente.

- La función $g(z) = \frac{f(0)}{z|z|}$ es impar, de donde $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \iint_{R_f > |z| > \epsilon} \frac{f(0)}{z|z|} dx dy = 0$.
- Las funciones $g_1(z) = \frac{f_z(0)z}{z|z|}$ y $g_2(z) = \frac{f_{\bar{z}}(0)\bar{z}}{z|z|}$ están acotadas por $|g_i(z)| \leq \left|\frac{M}{z}\right| = \hat{g}(z)$ donde $M = \max\{|f_z(0)|, |f_{\bar{z}}(0)|\}$. Como $\hat{g}(z)$ es absolutamente convergente y g_i son continuas salvo en a lo más 0, se tiene que existe el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \iint_{R_f > |z| > \epsilon} g_i(z) dx dy$.
- Por último, la función $g(z) = \frac{r_1(z)}{|z|}$ es continua en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ y se puede extender continuamente a 0 como $g(0) = 0$. Por tanto, existe el límite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \iint_{R_f > |z| > \epsilon} \frac{g(z)}{z} dx dy$ ya que la integral $\iint_{R_f > |z|} \frac{1}{z} dx dy$ converge absolutamente.

Concluimos así la tesis.

□

Podemos ahora definir T^*

Definición 3.4.13 Definimos el operador lineal $T^* : C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ como

$$T^*(f)(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|z| > \epsilon} \frac{f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy.$$

Probaremos ahora que $T^*(C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})) \subset L^p$ y extenderemos su definición a un operador lineal $T^* : L^p \rightarrow L^p$. Para esto seguiremos los siguientes pasos:

- Para toda $f \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la función $T^*(f)$ es continua.
- Para toda $f \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la función $T^*(f) \in L^p$.
- Existe una función $C : [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que para toda $f \in C_0^2$, se cumple que $\|T^*(f)\|_p \leq C(p)\|f\|_p$. Podemos así extender T^* a L^p de forma continua y además $\forall f \in L^p$ se cumple la desigualdad $\|T^*(f)\|_p \leq \sqrt{C(p)}\|f\|_p$.

Por último, probaremos que $-T^* \circ T^*(f) = T(f)$ para toda $f \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, de donde T se puede extender continuamente a L^p . Además, a partir de esta igualdad, y $\|T^*(f)\|_p \leq C(p)\|f\|_p$, obtendremos la desigualdad de Calderon-Zygmund.

Observación 3.4.14 Dada $f \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la función $T^*(f)$ es continua.

Demostración: Imitaremos la prueba de (3.4.3), es decir, fijado $\zeta_0 \in \mathbb{C}$, veamos que $T^*(f)$ es continua en ζ_0 , a partir de una separación en el dominio de integración. Notemos $f_1 = \text{Re}(f)$ y $f_2 = \text{Im}(f)$.

Recordar que como $f \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, el operador df verifica que $|df(p)(v)| \leq \|df\|_\infty |v| < +\infty$, y como además $df = df_1 + i df_2$, se cumple que $\|df_i\|_\infty \leq \|df\|_\infty \leq \|df_1\|_\infty + \|df_2\|_\infty$.

Dado $\delta_0 > 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} |T^*(f)(\zeta_0) - T^*(f)(\zeta)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{|z| > \epsilon} \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy \right| \leq \\ &\leq \left| \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| > \delta_0} \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy \right|. \end{aligned}$$

Para acotar $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy$ lo haremos por términos. Veamos primero en $f(z + \zeta_0)$. Aplicando valor medio, existen $\theta_i : \mathbb{C} \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(z + \zeta_0) = f(\zeta_0) + (df_1[\zeta_0 + \theta_1(z)z](z) + i df_2[\zeta_0 + \theta_2(z)z](z)).$$

Tenemos así que

$$\begin{aligned} \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{f(z + \zeta_0)}{z|z|} dx dy &= \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{f(\zeta_0)}{z|z|} + \frac{(df_1[\zeta_0 + \theta_1(z)z](z) + i df_2[\zeta_0 + \theta_2(z)z](z))}{z|z|} dx dy = \\ &= \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{(df_1[\zeta_0 + \theta_1(z)z](z) + i df_2[\zeta_0 + \theta_2(z)z](z))}{z|z|} dx dy, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por paridad.

Podemos acotar el término en df_i por

$$\begin{aligned} \left| \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{df_i[\zeta_0 + \theta_i(z)z](z)}{z|z|} dx dy \right| &\leq \\ \iint_{\delta_0 > |z| > 0} \left| \frac{df_i[\zeta_0 + \theta_i(z)z](z)}{z|z|} \right| dx dy &\leq \iint_{\delta_0 > |z| > 0} \frac{\|df\|_\infty}{|z|} dx dy. \end{aligned}$$

El término en $f(z + \zeta)$ se puede acotar de forma análoga. Tenemos así que existe el límite

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy.$$

Luego existe $\delta_0 \in (0, 1)$ tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left| \iint_{\delta_0 > |z| > \epsilon} \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy \right| < \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Acotemos ahora el término $\frac{1}{2\pi} \iint_{|z| > \delta_0} \left| \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} \right| dx dy$.

Dado ζ tal que $|\zeta - \zeta_0| < \delta_0 < 1$, se tiene que $f(z + \zeta) = 0$ si $|z| \geq R_f + |\zeta| + 1$. Entonces

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{|z| > \delta_0} \left| \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} \right| dx dy = \frac{1}{2\pi} \iint_{R_f + 1 + |\zeta_0| > |z| > \delta_0} \left| \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} \right| dx dy.$$

Dado $\delta_0 > 0$ fijo, como f es uniformemente continua, existe $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tal que si $|\omega_0 - \omega| < \delta_1$, entonces $|f(\omega) - f(\omega')| \leq \frac{\epsilon_0 \delta_0^2}{(R_f + 1 + |\zeta_0|)^2}$. Luego

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| > \delta_0} \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} dx dy \right| &\leq \frac{1}{2\pi} \iint_{|z| > \delta_0} \left| \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} \right| dx dy \leq \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{R_f + 1 + |\zeta_0| > |z| > \delta_0} \left| \frac{f(z + \zeta_0) - f(z + \zeta)}{z|z|} \right| dx dy. \end{aligned}$$

Acotando por el supremo de las diferencias obtenemos

$$\frac{1}{2\pi} \iint_{R_f+1+|\zeta_0|>|z|>\delta_0} \left| \frac{f(z+\zeta_0) - f(z+\zeta)}{z|z|} \right| dx dy \leq \frac{\epsilon_0 \delta_0^2}{2\pi(R_f+1+|\zeta_0|)^2} \iint_{R_f+1+|\zeta_0|\geq|z|>\delta_0} \frac{1}{|z|^2} \leq \frac{\epsilon_0}{2}.$$

Podemos concluir que si $|\zeta_0 - \zeta| < \delta_1$, entonces $|T^*(f)(\zeta_0) - T^*(f)(\zeta)| < \epsilon_0$ y por tanto $T^*(f)$ es continua. $\square$

En particular, obtenemos que $T^*(f) \in L^p_{loc}$. Veamos ahora que está en L^p . Para probar esto redefiniremos H para $C^1_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Comentario 3.4.15 *El operador H puede extenderse a $C^1_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ como*

$$H(f)(\zeta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{|r|>\epsilon} \frac{f(r+\zeta)}{r} dr = \int_0^{+\infty} \frac{f(r+\zeta) - f(\zeta-r)}{r} dr.$$

Notando $H_1 = \text{Re}(H)$, $H_2 = \text{Im}(H)$, $f_1 = \text{Re}(f)$ y $f_2 = \text{Im}(f)$, entonces $H_1 = H(f_1)$ y $H_2 = H(f_2)$.

Deduciremos una cota similar a la de (3.4.11) para esta extensión de H .

Proposición 3.4.16 *Dada $f \in C^1_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, se cumple la desigualdad $\|H(f)\|_p \leq 2A(p)\|f\|_p$, donde $A(p)$ es la función definida en (3.4.11).*

Demostración: Como $|H(f)(\zeta)| \leq |H_1(\zeta)| + |H_2(\zeta)| = |H(f_1)(\zeta)| + |H(f_2)(\zeta)|$, basta acotar la norma p de $H(f_i)$.

Fijado $\zeta \in \mathbb{C}$, dado que $f_i \in C^2_0(\mathbb{C}, \mathbb{R})$, podemos aplicar la Proposición (3.4.11) para la función $g_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g_i(\xi) = f_i(\xi + \zeta)$, de donde se verifica la desigualdad

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |H(f_i)(\zeta + \xi)|^p d\xi \right) \leq A(p)^p \left(\int_{\mathbb{R}} |f_i(\zeta + \xi)|^p d\xi \right).$$

Por tanto, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |H(f_i)(\xi + i\nu)|^p d\xi \right) d\nu \leq A(p)^p \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f_i(\xi + i\nu)|^p d\xi \right) d\nu.$$

Concluimos así que $H(f_i)$ está en L^p y se da la desigualdad $\|H(f_i)\|_p \leq A(p)\|f_i\|_p$. Recordando que $f_1 = \text{Re}(f)$, $f_2 = \text{Im}(f)$, concluimos que

$$\|H(f)\|_p \leq \|H(f_1)\|_p + \|H(f_2)\|_p \leq A(p)(\|f_1\|_p + \|f_2\|_p) = 2A(p)\|f\|_p.$$

$\square$

Corolario 3.4.17 *El operador H se puede extender continuamente a $L^p(\mathbb{C})$, y además $\|Hf\|_p \leq 2A(p)\|f\|_p$.*

Veamos ahora que $T^*(f) \in L^p$ para $f \in C^2_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Proposición 3.4.18 *Dada $f \in C^2_0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, la función $T^*(f)$ está en L^p . Además, se tiene que*

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} T^*(f)(\zeta) = 0.$$

Demostración: Como $T^*(f)$ es continua, entonces $T^*(f) \in L^p_{loc}$. Luego basta probar que existe $R > 0$ tal que $\iint_{|\zeta|>R} |T^*(f)(\zeta)|^p$ está acotado.

Realizando el cambio de variable $z = x + iy = re^{i\theta}$ en la definición de $T^*(f)$, tenemos

$$T^*(f)(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \iint_{r>\epsilon} \frac{f(\zeta + re^{i\theta})}{re^{i\theta}} d\theta dr =$$

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_0^\pi \left(\int_\epsilon^{+\infty} \frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r} dr \right) e^{-i\theta} d\theta.$$

Definiendo la función f_θ como $f_\theta(z) = f(ze^{i\theta})$, tenemos que

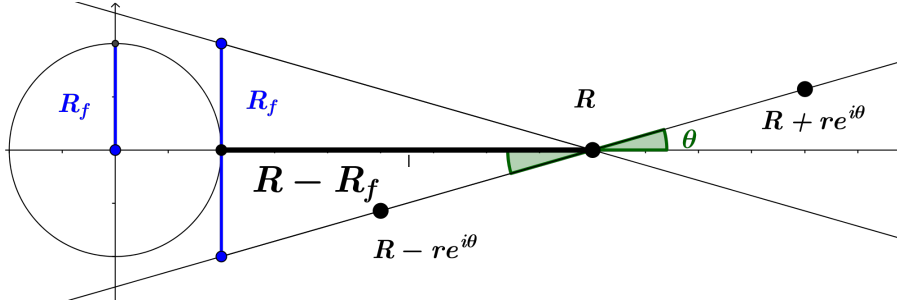
$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_\epsilon^{+\infty} \frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r} dr = Hf_\theta(e^{-i\theta}\zeta),$$

por tanto

$$T^*(f)(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Hf_\theta(e^{-i\theta}\zeta) e^{-i\theta} d\theta.$$

Observar que dado $R \in \mathbb{R}$ tal que $R > R_f$, entonces $Hf_\theta(Re^{-i\theta}) = 0$ para todo

$$\theta \notin I \text{ donde } I = \left[\pi - \arctan\left(\frac{R_f}{R - R_f}\right), \pi \right] \cup \left[0, \arctan\left(\frac{R_f}{R - R_f}\right) \right].$$



Podemos así acotar $T^*(f)$ por

$$\begin{aligned} |T^*(f)(R)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi |Hf_\theta(Re^{-i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{\theta \in I} |Hf_\theta(Re^{-i\theta})| d\theta \leq \\ &\leq \int_{\theta \in I} \sup_{\theta} \{|Hf_\theta(Re^{-i\theta})|\} d\theta \leq \frac{2R_f \arctan\left(\frac{R_f}{R - R_f}\right) \|f\|_\infty}{\pi(R - R_f)}, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se obtiene al aplicar la ecuación (3.14).

El mismo argumento vale para probar que la desigualdad

$$|T^*(f)(\zeta)| \leq \frac{2R_f \arctan\left(\frac{R_f}{|\zeta| - R_f}\right) \|f\|_\infty}{\pi(|\zeta| - R_f)} \quad (3.17)$$

vale para todo ζ con $|\zeta| = R > R_f$, ya que si $\zeta = Re^{i\theta_1}$, entonces $Hf_\theta(\zeta e^{-i\theta}) = 0$ para todo ángulo θ tal que

$$\theta - \theta_1 \notin \left[\pi - \arctan\left(\frac{R_f}{R - R_f}\right), \pi \right] \cup \left[0, \arctan\left(\frac{R_f}{R - R_f}\right) \right] \subset \mathbb{S}^1.$$

Notar que la ecuación 3.17 nos permite deducir que

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} T^*(f)(\zeta) = 0.$$

Falta entonces probar que la integral impropia

$$\iint_{|\zeta| > R_f + 1} \left(\frac{2R_f \arctan\left(\frac{R_f}{|\zeta| - R_f}\right) \|f\|_\infty}{\pi(|\zeta| - R_f)} \right)^p$$

converge.

Notar que

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{2R_f \arctan\left(\frac{R_f}{|\zeta| - R_f}\right) \|f\|_\infty}{\pi(|\zeta| - R_f)} \right)^p}{\frac{2R_f^2 \|f\|_\infty}{\pi|\zeta|^2}} = 1,$$

es decir, son equivalentes, y como la integral $\int_{|\zeta| > R_f+1} \left(\frac{1}{|\zeta|^2}\right)^p$ converge para todo $p > 1$, entonces la integral $\int_{|\zeta| > R_f+1} |T^*(f)(\zeta)|^p$ también, concluyendo así la tesis. $\square$

Daremos ahora una cota para $\|T^*(f)\|_p$ en función de $\|f\|_p$.

Lema 3.4.19 *La función $(\theta, \zeta) \rightarrow Hf_\theta(\zeta e^{-i\theta})$ es continua.*

Demostración: Esta prueba es similar a (3.4.3). Separaremos el dominio de integración a partir de un valor $\delta_0 > 0$.

Fijado (ζ, θ) definimos $f_1, f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como $f_1(r) = \operatorname{Re}(f(\zeta + re^{i\theta}))$ y $f_2(r) = \operatorname{Im}(f(\zeta + re^{i\theta}))$. Tomando valor medio en $f_i(r) - f_i(-r)$, tenemos que existe $s_{\zeta, \theta, i} : \mathbb{R}^+ \rightarrow [-1, 1]$ tal que

$$Hf_\theta(\zeta e^{-i\theta}) = \int_0^{+\infty} \frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r} dr = 2 \int_0^{R_f+|\zeta|} f'_1(s_{(\zeta, \theta, 1)}(r)) + if'_2(s_{(\zeta, \theta, 2)}(r)) dr.$$

Dado $\epsilon > 0$, como $\|f'_i\|_\infty \leq \|df\|_\infty$, tomando $\delta_0 = \frac{\epsilon}{12(\|df\|_\infty + 1)} > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} \left| Hf_\theta(\zeta e^{-i\theta}) - \int_{\delta_0}^{+\infty} \frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r} dr \right| &= \left| 2 \int_0^{\delta_0} f'_1(s_{(\zeta, \theta, 1)}(r)) + if'_2(s_{(\zeta, \theta, 2)}(r)) dr \right| \leq \\ &\leq 4\delta_0 \|df\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{3}. \end{aligned}$$

Notar que δ_0 es independiente de (ζ, θ) y por tanto basta estudiar la función $\int_{\delta_0}^{+\infty} \frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r} dr$.

Fijado (ζ_0, θ_0) , la función $G : [\delta_0, R_f + |\zeta_0| + 1] \times \bar{B}(\zeta_0, 1) \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $G(r, \zeta, \theta) = \frac{f(\zeta + re^{i\theta}) - f(\zeta - re^{i\theta})}{r}$ es uniformemente continua. Tomando límite, tenemos que

$$\lim_{(\zeta, \theta) \rightarrow (\zeta_0, \theta_0)} \int_{\delta_0}^{R_f+|\zeta_0|+1} G(r, \zeta, \theta) dr = \int_{\delta_0}^{R_f+|\zeta_0|+1} G(r, \zeta_0, \theta_0) dr = \int_{\delta_0}^{R_f+|\zeta_0|} G(r, \zeta_0, \theta_0) dr.$$

Existe así δ con $0 < \delta \leq \min\{1, \delta_0\}$ tal que si $\|(\zeta, \theta) - (\zeta_0, \theta_0)\| \leq \delta$, entonces

$$\left| Hf_\theta(\zeta e^{i\theta}) - Hf_{\theta_0}(\zeta_0 e^{-i\theta_0}) \right| \leq \left| \int_{\delta_0}^{R_f+|\zeta_0|+1} G(r, \zeta, \theta) - G(r, \zeta_0, \theta_0) dr \right| + \frac{2\epsilon}{3} \leq \epsilon,$$

de donde se concluye la tesis. $\square$

Teorema 3.4.20 *La norma p de T^* esta acotada por $\|T^*(f)\|_p \leq A(p)\|f\|_p$.*

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, como $T^*(f) \in L^p$, existe $R \in \mathbb{R}$ tal que

$$\|T^*(f)\|_p \leq \left(\iint_{|\zeta| < R} |T^*(f)(\zeta)|^p d\xi d\nu \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{\epsilon}{2}. \quad (3.18)$$

Notemos $TR^*(f)$ a la función definida por $TR^*(f)(\zeta) = \begin{cases} T^*(f)(\zeta) & \text{si } |\zeta| \leq R, \\ 0 & \text{si } |\zeta| > R. \end{cases}$

La función $\hat{H} : [0, \pi] \times B(0, R+1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\hat{H}(\zeta, \theta) = Hf_\theta(\zeta e^{-i\theta})e^{-i\theta}$ es continua, podemos así aproximar la integral de $\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Hf_\theta(\zeta e^{-i\theta})e^{-i\theta} d\theta = T^*(f)(\zeta)$ por sumas de Riemann a partir de una equipartición. Es decir, existe $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned} \left| T^*(f)(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n Hf_{\frac{k\pi}{n}}(\zeta e^{-i\frac{k\pi}{n}}) e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right| &= \\ = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi Hf_\theta(\zeta e^{-i\theta}) e^{-i\frac{k\pi}{n}} - \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n Hf_{\frac{k\pi}{n}}(\zeta e^{-i\frac{k\pi}{n}}) e^{-i\frac{k\pi}{n}} \right| &< \frac{\epsilon}{(2\pi R^2)^{\frac{1}{p}}}. \end{aligned}$$

Como además H es uniformemente continua, existe un n uniforme en ζ para $\zeta \in B(0, R)$.

Por desigualdad triangular

$$\|TR^*\|_p \leq \frac{\epsilon}{3} + \sum_{k=1}^n \left(\iint_{|\zeta| < R} \left| \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{n} Hf_{\frac{k\pi}{n}}(\zeta e^{-i\frac{k\pi}{n}}) \right|^p d\xi d\nu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando el Corolario (3.4.17) y tomando supremos en k , existe k_0 tal que

$$\|TR^*(f)\|_p \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2} \|Hf_{\frac{k_0\pi}{n}}\|_p \leq \frac{\epsilon}{2} + A(p)\|f\|_p.$$

Sustituyendo en 3.18

$$\|T^*(f)\|_p \leq \epsilon + A(p)\|f\|_p,$$

para ϵ arbitrario, de donde se deduce la tesis. $\square$

Para concluir la desigualdad de Calderon-Zygmund, daremos otras fórmulas para el operador T^* . Podemos definir T^* por extensión continua a L^p .

Proposición 3.4.21 *Dada $f \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, se verifican las igualdades*

$$\begin{aligned} T^*(f)(\zeta) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{-1}{\pi} \iint_{|z| > \epsilon} f(z + \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z|} \right) dx dy = \frac{1}{\pi} \iint \frac{f_z(z + \zeta)}{|z|} dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\iint f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right). \end{aligned}$$

Demostracion: Veamos igualdad por igualdad.

1- Basta calcular $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z|} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|z|} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_x - i \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)_y \right] = \frac{1}{2z|z|}.$$

2- Esta prueba sera similar a la de 3.1. Fijado $\epsilon_0 \in (0, 1)$, como f tiene soporte compacto, se da la igualdad

$$\frac{-1}{\pi} \iint_{|z| > \epsilon_0} f(z + \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z|} \right) dx dy = \frac{-1}{\pi} \iint_{R > |z| > \epsilon_0} f(z + \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z|} \right) dx dy,$$

donde $R \geq R_f + 1 + |\zeta|$.

Recordar que para probar una igualdad en $\frac{\partial}{\partial z}$, basta hacerlo en derivadas parciales.

Probemos entonces que

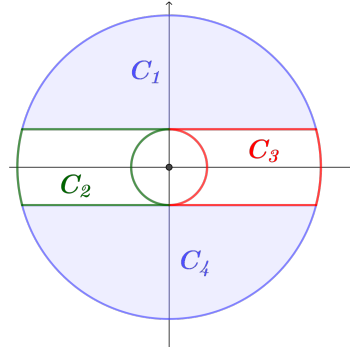
$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0^+} \iint_{R > |z| > \epsilon_0} f(z + \zeta) \left(\frac{1}{|z|} \right)_x dx dy = - \iint_{R > |z|} \frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} dx dy.$$

Notar que como la función $\frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} \in L^1$, basta probar

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0^+} \iint_{R > |z| > \epsilon_0} f(z + \zeta) \left(\frac{1}{|z|} \right)_x dx dy = \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0^+} - \iint_{R > |z| > \epsilon_0} \frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} dx dy.$$

Para caluclar la integral, separaremos en las regiones

- $C_1 = \{(x, y) \in B(0, R) : y > \epsilon_0, x \in (-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2})\}$
- $C_2 = \{(x, y) \in B(0, R) : y \in (-\epsilon_0, \epsilon_0), x \in (-\sqrt{R^2 - y^2}, -\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2})\}$
- $C_3 = \{(x, y) \in B(0, R) : y \in (-\epsilon_0, \epsilon_0), x \in (\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2})\}$
- $C_4 = \{(x, y) \in B(0, R) : y < -\epsilon_0, x \in (-\sqrt{R^2 - y^2}, \sqrt{R^2 - y^2})\}.$



Aplicando el metodo de partes en C_3 , obtenemos

$$\begin{aligned} \iint_{C_3} f(z + \zeta) \left(\frac{1}{|z|} \right)_x dx dy &= \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \left(\int_{\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} f(z + \zeta) \left(\frac{1}{|z|} \right)_x dx \right) dy = \\ &= \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{f(\sqrt{R^2 - y^2} + \zeta)}{\sqrt{R^2 - y^2}} dy - \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{f(\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta)}{\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2}} dy - \iint_{R > |z| > \epsilon_0} \frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} dx dy = \\ &= - \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{f(\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta)}{\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2}} dy - \iint_{R > |z| > \epsilon_0} \frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} dx dy, \end{aligned}$$

donde la última igualdad se deduce de que $\sqrt{R^2 - y^2} + \zeta \notin \text{Sop}(f)$ para todo $y \in (-\epsilon, \epsilon)$. De forma análoga se puede aplicar partes para el resto de los C_i , de donde deducimos que

$$\begin{aligned} \iint_{R > |z| > \epsilon_0} f(z + \zeta) \left(\frac{1}{|z|} \right)_x dx dy &= \\ &= - \iint_{R > |z| > \epsilon_0} \frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} dx dy + \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{f(-\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta) - f(\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta)}{\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2}} dy. \end{aligned}$$

Falta entonces probar que

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0^+} \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{f(-\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta) - f(\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta)}{\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2}} dy = 0.$$

Realizando el cambio de variable $y' = \frac{y}{\epsilon_0}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon_0}^{\epsilon_0} \frac{f(-\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta) - f(\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2} + \zeta)}{\sqrt{\epsilon_0^2 - y^2}} dy &= \\ &= \int_{-1}^1 \frac{f(-\epsilon_0 \sqrt{1 - (y')^2} + \zeta) - f(\epsilon_0 \sqrt{1 - (y')^2} + \zeta)}{\epsilon_0 \sqrt{1 - (y')^2}} \epsilon_0 dy'. \end{aligned}$$

Como la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{1 dy'}{\sqrt{1 - (y')^2}} = \int_{-1}^1 \frac{1 dy'}{\sqrt{(1 - y')(1 + y')}}$$

es absolutamente convergente y f cumple que

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0^+} f(\pm \epsilon_0 \sqrt{1 - (y')^2} + \zeta) = f(\zeta) \quad \forall y' \in [-1, 1],$$

podemos concluir que

$$\lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0^+} \iint_{R > |z| > \epsilon_0} f(z + \zeta) \left(\frac{1}{|z|} \right)_x dx dy = - \iint_{R > |z| > \epsilon_0} \frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} dx dy.$$

Como el caso de la derivada parcial en y es análogo, se obtiene así la igualdad para $\frac{\partial}{\partial z}$. Luego $T^*(f)(\zeta) = \iint \frac{f_z(z + \zeta)}{|z|}$.

3- Fijamos $\epsilon_0 > 0$ y $R > R_f + |\zeta| + 2$. Tomando un cambio de variable lineal tenemos

$$\iint_{R > |z| > \epsilon} f(z + \zeta) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z|} \right) dx dy = \iint_{R > |z - \zeta| > \epsilon} f(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} \right) dx dy.$$

Notar que $\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} \right) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right)$, por tanto

$$\begin{aligned} \iint_{R > |z - \zeta| > \epsilon} f(z) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} \right) dx dy &= \iint_{R > |z - \zeta| > \epsilon} f(z) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy = \\ &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\iint_{R > |z - \zeta| > \epsilon} f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right), \end{aligned}$$

donde la última igualdad se da por la regla de Leibnitz y de que $\frac{f(z)}{|z - \zeta|} \in L^p$.

Sea $G : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la función definida por

$$G(\zeta) = \iint_{R > |z - \zeta|} f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy$$

probemos que

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (G(\zeta)) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\iint_{R > |z - \zeta| > \epsilon} f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right) = 2\pi T^*(f)(\zeta).$$

Calculemos ahora las derivadas parciales de G con respecto a x

$$\begin{aligned} G_x(\zeta) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{G(\zeta + r) - G(\zeta)}{r} = \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} \left[\iint_{R > |z - (\zeta + r)|} f(z) \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy - \iint_{R > |z - \zeta|} f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right]. \end{aligned}$$

El caso en y es análogo.

Como $R > R_f + |\zeta| + 2$, se tiene que si $|r| < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_{R > |z - (\zeta + r)|} f(z) \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy &= \iint_{R > |z - \zeta|} f(z) \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy = \\ &= \iint_{R > |z - \zeta|} \frac{f(z)}{|z - (\zeta + r)|} dx dy - \iint_{R > |z - \zeta|} \frac{f(z)}{|z|} dx dy = \\ &= \iint_{R > |z|} \frac{f(z + (\zeta + r))}{|z|} dx dy - \iint_{R > |z - \zeta|} \frac{f(z)}{|z|} dx dy. \end{aligned}$$

Tenemos así que

$$G_x(\zeta) = \lim_{r \rightarrow 0} \iint_{R > |z|} \frac{f(z + \zeta + r) - f(z + \zeta)}{r} \left(\frac{1}{|z|} \right) dx dy.$$

Sean $f_1, f_2 : B(0, R) \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f_1(z) = \operatorname{Re}(f(z + \zeta))$, $f_2 = \operatorname{Im}(f(z + \zeta))$. Aplicando valor medio, existe $\theta_i : [0, 1] \times B(0, R) \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$G_x(\zeta) = \iint_{R > |z|} \left(\frac{(f_1)_x(z + \zeta + \theta_1(r, z)r) + i(f_2)_x(z + \zeta + \theta_2(r, z)r)}{|z|} \right) dx dy.$$

Como $(f_i)_x \in C_0(B(0, R), \mathbb{R})$ se tiene que $(f_i)_x(z + \zeta + \theta(r, z)r)$ converge uniformemente con r a $(f_i)_x(z + \zeta)$ y $\frac{1}{|z|} \in L^1_{loc}$ se tiene que

$$G_x(\zeta) = \iint_{R > |z|} \frac{f_x(z + \zeta)}{|z|} dx dy,$$

concluyendo así la tesis.

□

Notar que para $f \in \mathbb{C}_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, se tiene que

$$\frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\iint f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\iint \frac{f(z)}{|z - \zeta|} dx dy \right).$$

Sin embargo, para funciones $f \in L^p$ con $p > 1$, la función $\frac{f(z)}{|z - \zeta|}$ puede no estar en L^1 , en cambio $f(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right)$ sí lo está.

Veamos ahora que la igualdad

$$T^*(g)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \left(\iint g(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right)$$

también se da para $g = T^*(f)$, donde $f \in C_0^1$.

Lema 3.4.22 Sea $f \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, entonces $T^*(f) \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Además $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} dT^*(f)(\zeta) = 0$.

Demostración: Para probar que $T^*(f) \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, basta con verificar que $T^*(f)_x$ y $T^*(f)_y$ son continuas.

Fijemos $\zeta \in \mathbb{C}$ y calculemos $T^*(f)_x(\zeta)$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{T^*(f)(\zeta + r) - T^*(f)(\zeta)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \iint_{R_f + |\zeta| + 1 > |z|} \frac{f_z(z + \zeta + r) - f_z(z + \zeta)}{r|z|} dx dy.$$

Dadas $f_1, f_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ la parte real e imaginaria de f_z , respectivamente, aplicamos valor medio y obtenemos que

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T^*(f)(\zeta + r) - T^*(f)(\zeta)}{r} = \\ & = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \iint_{R_f + |\zeta| + 1 \geq |z|} \frac{(f_1)_{xz}(z + \zeta + \theta_1(z, r)r) + i(f_2)_{xz}(z + \zeta + \theta_2(z, r)r)}{|z|} dx dy. \end{aligned}$$

Como $f \in C^2$ y $\theta_i \in [0, 1]$, se tiene que $(f_i)_{xz}(z + \zeta + \theta_i(z, r)r) \rightrightarrows (f_i)_{xz}(z + \zeta)$, de donde podemos concluir que

$$T^*(f)_x(\zeta) = \frac{1}{\pi} \iint_{R_f + |\zeta| \geq |z|} \frac{f_{xz}(z + \zeta)}{|z|} dx dy = \frac{1}{\pi} \iint_{R_f \geq |z|} \frac{f_{xz}(z)}{|z + \zeta|} dx dy.$$

Como $f_{xz} \in C_0^0(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, obtenemos que $T^*(f)_x$ es continua.

De forma análoga, obtenemos que $T^*(f)_y$ es continua. Luego $T^*(f) \in C^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Por último, para ζ tal que $|\zeta| > R_f$, podemos dar una cota para $T^*(f)_x$ en función de ζ . Más precisamente

$$|T^*(f)_x(\zeta)| = \left| \frac{1}{\pi} \iint_{R_f \geq |z|} \frac{f_{xz}(z)}{|z + \zeta|} dx dy \right| \leq \frac{R_f^2 \|f_{xz}\|_\infty}{|\zeta| - R_f}.$$

De forma análoga se tiene una cota para $T^*(f)_y$, de donde concluimos que $\lim_{\zeta \rightarrow \infty} dT^*(f)(\zeta) = 0$.

□

Lema 3.4.23 Sean $f \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y $g = T^*(f)$, entonces la función

$$G(\zeta) = \left(\iint g(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right)$$

es de clase C^1 . Más aún, se tiene que

$$G_x(\zeta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{|z| < R} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|}, \quad G_y(\zeta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{|z| < R} \frac{g_y(z)}{|z - \zeta|}.$$

Demostración: Notar que la integral $\left(\iint g(z) \left(\frac{1}{|z-\zeta|} - \frac{1}{|z|}\right) dx dy\right)$ converge absolutamente pues $g \in L^p$ y $\left(\frac{1}{|z-\zeta|} - \frac{1}{|z|}\right) \in L^q$ para $q \in (1, 2)$.

Calculemos ahora el límite de la derivada parcial en x para un ζ fijo, es decir

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) - \iint \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right).$$

El caso en y es análogo.

Para calcular este límite separaremos los dominios de cada integral en 3 regiones. Fijos $r \in (-1, 1)$, $R > 2|\zeta| + r$, sean C_i, D_i las regiones definidas por

- $C_1 = B(r, R)$, $D_1 = B(0, R)$,
- $C_2 = B(0, R + r) \setminus B(r, R)$, $D_2 = B(0, R + r) \setminus B(\zeta, R)$,
- $C_3 = B(0, R)^c = D_3$.

Dado que los $C_i \cap C_j = \emptyset$ si $i \neq j$ y $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \mathbb{R}^2$ tenemos que

$$\iint \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) = \sum_i \iint_{C_i} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right).$$

De forma análoga, tenemos que

$$\iint \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) = \sum_i \iint_{D_i} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right).$$

Analicemos ahora para cada i la expresión

$$\iint_{C_i} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) - \iint_{D_i} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right),$$

tomando luego límite en r .

(Caso $i = 1$) Como C_1 y D_1 son acotados y cada término esta localmente en L^1 ; podemos reagrupar los terminos

$$\begin{aligned} & \iint_{C_1} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) - \iint_{D_1} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) = \\ &= \frac{1}{r} \left(\iint_{C_1} \frac{g(z)}{|z - (\zeta + r)|} - \iint_{D_1} \frac{g(z)}{|z - \zeta|} \right) + \frac{1}{r} \left(\iint_{C_1} \frac{g(z)}{|z|} - \iint_{D_1} \frac{g(z)}{|z|} \right). \end{aligned}$$

Tomando como cambio de variable la traslación $z - r \rightarrow z$, tenemos que $\iint_{C_1} \frac{g(z)}{|z - (\zeta + r)|} = \iint_{D_1} \frac{g(z+r)}{|z - \zeta|}$. Por lo que tomando valor medio en g_1, g_2 , parte real e imaginaria de g respectivamente, tenemos que

$$\begin{aligned} & \left(\iint_{C_1} \frac{g(z)}{r|z - (\zeta + r)|} - \iint_{D_1} \frac{g(z)}{r|z - \zeta|} \right) = \iint_{D_1} \frac{g(z+r) - g(z)}{r|z - \zeta|} = \\ &= \iint_{D_1} \frac{(g_1)_x(z + \theta_1(z, r)r) + i(g_2)_x(z + \theta_2(z, r)r)}{|z - \zeta|}, \end{aligned}$$

donde $\theta_i \in [0, 1]$.

Como g_x es uniformemente continua en compactos, se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \iint_{D_1} \frac{(g_1)_x(z + \theta_1(z, r)r) + i(g_2)_x(z + \theta_2(z, r)r)}{|z - \zeta|} = \iint_{D_1} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|}.$$

El término restante lo acotaremos en módulo. Como el integrando es igual, tenemos que

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{r} \left(\iint_{C_1} \frac{g(z)}{|z|} - \iint_{D_1} \frac{g(z)}{|z|} \right) \right| = \left| \iint_{C_1 \triangle D_1} \frac{g(z)}{r|z|} \right| \leq \text{área}(C_1 \triangle D_1) \frac{\sup\{|g(z)| : z \in C_1 \triangle D_1\}}{R - r} \leq \\ & \leq 2\pi(R^2 - (R - r)^2) \frac{\sup\{|g(z)| : z \in C_1 \triangle D_1\}}{r(R - r)} = \frac{2\pi(2R - r) \sup\{|g(z)| : z \in C_1 \triangle D_1\}}{R - r}. \end{aligned}$$

Dado que g es continua, se tiene que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{2\pi(2R-r) \sup\{|g(z)| : z \in C_1 \triangle D_1\}}{R-r} = 4\pi \sup\{|g(z)| : z \in \partial D_1\},$$

y por tanto, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_0 > 0$ tal que para todo r con $|r| < \delta_0$, se cumple que

$$\left| \frac{1}{r} \left(\iint_{C_1} \frac{g(z)}{|z|} - \iint_{D_1} \frac{g(z)}{|z|} \right) \right| \leq 4\pi \sup\{|g(z)| : z \in \partial D_1\} + \epsilon.$$

Rercordando la proposición 3.4.18 tenemos que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, luego existe R_0 tal que para todo $R > R_0$, existe un $\delta_0 > 0$ para el cual

$$\left| \frac{1}{r} \left(\iint_{C_1} \frac{g(z)}{|z|} - \iint_{D_1} \frac{g(z)}{|z|} \right) \right| \leq \epsilon,$$

para todo r con $|r| < \delta_0$.

(Caso i = 2) Para este caso realizaremos un estudio similar al de la última parte del caso $i = 1$. Dado que los dominios de integración están acotados, podemos separar por términos. Acotemos así el término $\iint_{C_2} \frac{g(z)}{r|z-(\zeta+r)|}$. El resto es análogo.

Al igual que el caso anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \left| \iint_{C_2} \frac{g(z)}{r|z-(\zeta+r)|} \right| &\leq \frac{\pi((R+r)^2 - R^2) \sup\{|g(z)| : z \in C_2\}}{r(R-(|\zeta|+r))} = \\ &= \frac{\pi(2R+r) \sup\{|g(z)| : z \in C_2\}}{(R-(|\zeta|+r))} \leq 2\pi \left(2 + \frac{r}{R} \right) \sup\{|g(z)| : z \in C_2\}. \end{aligned}$$

Dado que g es continua, tomando límite en r , tenemos que

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2\pi \left(2 + \frac{r}{R} \right) \sup\{|g(z)| : z \in C_2\} = 4\pi \sup\{|g(z)| : z \in D_2\}.$$

De forma análoga al caso anterior, existe $R_1 \geq R_0$ tal que para todo $R > R_1$, existe $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ tal que

$$\left| \iint_{C_2} \frac{g(z)}{r|z-(\zeta+r)|} \right| \leq \epsilon,$$

para todo r con $|r| < \delta_1$. El resto de términos se acotan de forma análoga.

(Caso i = 3) Para este caso trabajaremos de nuevo con valor medio como en $i = 1$.

Dado que en este caso $C_3 = D_3$, tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{D_3} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z-(\zeta+r)|} - \frac{1}{|z|} \right) - \iint_{D_3} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z-\zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) = \\ \iint_{D_3} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z-(\zeta+r)|} - \frac{1}{|z-\zeta|} \right). \end{aligned}$$

Aplicando valor medio a la función $\frac{1}{|z-\zeta|}$ tenemos que

$$\iint_{D_3} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z-(\zeta+r)|} - \frac{1}{|z-\zeta|} \right) = \iint_{D_3} g(z) \left(\frac{1}{|z-(\zeta+\theta(z,r)r)|} \right)_x.$$

Recordando que

$$\left(\frac{1}{|z-(\zeta+\theta(z,r)r)|} \right)_x = \frac{\operatorname{Re}(z-(\zeta+\theta(z,r)r))}{|z-(\zeta+\theta(z,r)r)|} \left(\frac{1}{|z-(\zeta+\theta(z,r)r)|} \right)^2,$$

podemos dar la siguiente acotación a la integral

$$\left| \iint_{D_3} g(z) \left(\frac{1}{|z-(\zeta+\theta(z,r)r)|} \right)_x \right| \leq \iint_{D_3} \left| \frac{g(z)}{(|z|-|\zeta|-1)^2} \right|.$$

Dado que $D_3 \subset B(0, R)^c$, que esta última cota no depende de r . Como $g(z) \in L^p$ y $\frac{1}{(|z|-|\zeta|-1)^2} \in L^q(B(0, |\zeta|+2)^c)$ existe $R_2 > R_1$ tal que

$$\left| \iint_{D_3} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z-(\zeta+r)|} - \frac{1}{|z|} \right) - \iint_{D_3} \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z-\zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) \right| \leq \epsilon$$

Juntando todas las acotaciones, tenemos que existen $\hat{R}$ y $\hat{\delta} > 0$ para los que

$$\left| \iint \frac{g(z)}{r} \left(\frac{1}{|z - (\zeta + r)|} - \frac{1}{|z|} \right) - \iint_{z \in D_1} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|} \right| \leq \epsilon.$$

Por lo tanto si existe el límite

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint \frac{g_x(z)}{|z|},$$

G es de clase C^1 , y se da la igualdad

$$G(\zeta)_x = \lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{|z| < R} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|}.$$

Dado $R_0 \geq 2|\zeta| + 1$, notar que la integral $\iint_{|z| < R_0} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|}$ converge, por lo que basta acotar $\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{R_0 \leq |z| < R} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|}$.

Aplicando partes como en (3.4.21), tenemos que

$$\begin{aligned} \iint_{R_0 \leq |z| < R} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|} &= \int_{-R_0}^{R_0} \frac{g(-\sqrt{R_0 - y^2} + iy)}{|-\sqrt{R_0 - y^2} + iy - \zeta|} - \frac{g(\sqrt{R_0 - y^2} + iy)}{|\sqrt{R_0 - y^2} + iy - \zeta|} dy + \\ &+ \int_{-R}^R \frac{g(\sqrt{R^2 - y^2} + iy)}{|\sqrt{R^2 - y^2} + iy - \zeta|} - \frac{g(-\sqrt{R^2 - y^2} + iy)}{|-\sqrt{R^2 - y^2} + iy - \zeta|} dy + \iint_{R_0 \leq |z| < R} \frac{g(z)}{|z - \zeta|_x}. \end{aligned}$$

La integral $\iint_{R_0 \leq |z|} \left| \frac{g(z)}{|z|_x} \right|$ converge pues $\frac{1}{|z - \zeta|_x}$ esta en L^q para todo q mayor que 1 y $g \in L^p$ para $p \geq 2$.

Para acotar $\int_{-R}^R \frac{g(\sqrt{R^2 - y^2} + iy)}{|\sqrt{R^2 - y^2} + iy - \zeta|}$ basta tomar el cambio de variable $u = \frac{y}{R}$, de donde

$$\int_{-R}^R \frac{g(\sqrt{R^2 - y^2} + iy)}{|\sqrt{R^2 - y^2} + iy - \zeta|} dy = \int_{-1}^1 \frac{g(\sqrt{R^2 - u^2 R^2} + iuR)}{|\sqrt{R^2 - u^2 R^2} + iuR - \zeta|} R du \leq 2 \sup \{|g(z)| : |z| = R\},$$

donde la ultima igualdad se da por que $2|\zeta| < R$.

De nuevo usando que $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0$, tenemos que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R \frac{g(\sqrt{R^2 - y^2} + iy)}{|\sqrt{R^2 - y^2} + iy - \zeta|} - \frac{g(-\sqrt{R^2 - y^2} + iy)}{|-\sqrt{R^2 - y^2} + iy - \zeta|} dy = 0.$$

Concluimos que G_x existe. Además como $G_x(\zeta) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{|z| < R} \frac{g_x(z)}{|z - \zeta|}$ es continua, deducimos que G es de clase C^1 . □

Proposición 3.4.24 *Dados $p \in [2, \infty)$, $f \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ y $g = T^*(f)$, se tiene*

$$T^*(g)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\iint g(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy \right).$$

Demostración: Por el lema anterior sabemos que la función $G(\zeta) = \iint g(z) \left(\frac{1}{|z - \zeta|} - \frac{1}{|z|} \right) dx dy$ es de clase C^1 y tenemos un fórmula para sus derivadas parciales.

Aproximemos ahora la función g por funciones $f_n \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, donde por la Proposición 3.4.21, si verifican la igualdad de la tesis. Sean $f_n \in C_0^1(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ definida como

$$f_n(\zeta) = \begin{cases} g(\zeta) & \text{si } |\zeta| \leq n; \\ g(\zeta)\psi(|\zeta| - n) & \text{si } |\zeta| > n, \end{cases}$$

donde ψ es una función chichón. Notar que $R_{f_n} \leq n + 1$.

Como $f_n \rightarrow g$, en L^p aplicando 3.4.20 tenemos que $T^*(f_n) \rightarrow T^*(g)$ también en L^p . Por tanto

$$\text{leb} \left(\left\{ \zeta : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} T^*(f_n)(\zeta) \right\} \setminus \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : \lim_{n \rightarrow \infty} T^*(f_n)(\zeta) = T^*(g)(\zeta) \right\}^c \right) = 0.$$

Probemos ahora que $\forall \zeta, \lim_{n \rightarrow \infty} T^*(f_n)(\zeta) = \frac{1}{\pi} G_\zeta(\zeta)$.

Dados $\zeta \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$, aplicando el lema anterior, existe $R_0 > 2|\zeta|$ tal que para todo $R > R_0$, se cumple que $\left| \frac{1}{\pi} \frac{\partial G}{\partial \zeta}(\zeta) - \frac{1}{\pi} \iint_{|z| < R} \frac{g_\zeta(z)}{|z - \zeta|} \right| < \frac{\epsilon}{2}$.

Dado $n > R_0$ tenemos que

$$\iint_{|z| < n} \frac{g_\zeta(z)}{|z - \zeta|} = \iint_{|z| < n} \frac{f_\zeta(z)}{|z - \zeta|} - \iint_{n < |z| < n+1} \frac{f_\zeta(z)}{|z - \zeta|} = T^*(f)(\zeta) - \iint_{n < |z| < n+1} \frac{f_\zeta(z)}{|z - \zeta|},$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \left| \iint_{|z| < n} \frac{g_\zeta(z)}{|z - \zeta|} - T^*(f_n)(\zeta) \right| &\leq \iint_{n < |z| < n+1} \frac{|g_\zeta(z)|}{|z - \zeta|} + \iint_{n < |z| < n+1} \frac{|g(z)\psi_z(z)|}{|z - \zeta|} \leq \\ &\leq 2\pi(2n+1) \frac{\sup\{|g_\zeta(z)| + \|\psi_\zeta\|_\infty |g(z)| : |z| \in (n, n+1)\}}{n}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} g_\zeta(z) = 0$, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se verifica la desigualdad

$$\left| \iint_{|z| < n} \frac{g_\zeta(z)}{|z - \zeta|} - T^*(f_n)(\zeta) \right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

de donde se concluye que $|T^*(f_n)(\zeta) - \frac{1}{\pi} G_\zeta(\zeta)| < \epsilon$.

Como ϵ es un número arbitrario, obtenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} T^*(f_n)(\zeta) = \frac{1}{\pi} G_\zeta(\zeta)$.

Obtenemos así que $T^*(g)(\zeta) = \frac{1}{\pi} G_\zeta(\zeta)$ casi todo punto, lo que basta para nuestro caso, pues el operado T^* esta definido en el espacio L^p . Notar además que $T^*(g)$ es continua. $\square$

Lema 3.4.25 Para $\omega \in \mathbb{C}$ fijo, la función $G(z) = \left[\iint \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \right]$ tiene derivadas parciales para todo $z \notin \{0, \omega\}$, y además $\frac{\partial G}{\partial z} = \pi \left(\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{z} \right)$.

La demostración de este lema es similar a la del Lema 3.4.23, basta así adaptar esa prueba.

Demostración: Calcularemos primero G_x , el caso de G_y es análogo. Veamos primero que, en caso de existir G_x , se cumple que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\iint \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\iint_{|\zeta| < R} \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) \right),$$

y para ésto basta reproducir el argumento del caso 3 del Lema 3.4.23. Es decir, dado $\epsilon > 0$ existe $R_0 > 0$ tal que para todo $|r| < 1$ y $R > R_0$, se cumple que

$$\left| \left(\iint_{|\zeta| > R} \frac{1}{|z + r - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) \right) - \left(\iint_{|\zeta| > R} \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) \right) \right| < |r|\epsilon.$$

Calculemos ahora la derivada con respecto a x de cada término, empezando por $\frac{\partial}{\partial x} \left(\iint_{|z - \zeta| < R} \frac{1}{|z - \zeta|} \frac{1}{|\zeta|} \right)$, el otro caso es análogo. Aplicando el cambio de variable $\zeta' = \frac{\zeta}{|z|}$

$$\iint_{|\zeta| < R} \frac{1}{|z - \zeta|} \frac{1}{|\zeta|} = \iint_{|\zeta'| < \frac{R}{|z|}} \frac{|z|^2}{|z(1 - \zeta')|} \frac{1}{|z\zeta'|} = \iint_{|\zeta'| < \frac{R}{|z|}} \frac{1}{|1 - \zeta'|} \frac{1}{|\zeta'|}.$$

Realizando ahora el cambio de variable polares $\zeta' = \rho e^{i\theta}$, tenemos la igualdad

$$\iint_{|\zeta'| < \frac{R}{|z|}} \frac{1}{|1 - \zeta'|} \frac{1}{|\zeta'|} = \int_{\rho < \frac{R}{|z|}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \rho e^{i\theta}} d\theta d\rho.$$

Como el límite de integración en $d\rho$ depende solamente de la variable z , aplicando el teorema fundamental del cálculo, obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{\rho < \frac{R}{|z|}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \rho e^{i\theta}} d\theta d\rho \right) = \left[\frac{1}{|z|} \right]_x \int_0^{2\pi} \frac{R}{1 - \frac{R e^{i\theta}}{|z|}} d\theta.$$

Por último, tomando límite en R se obtiene que

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(\iint_{|\zeta| < R} \frac{1}{|z - \zeta|} \frac{1}{|\zeta|} \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{|z|} \right]_x \int_0^{2\pi} \frac{R}{1 - \frac{Re^{i\theta}}{|z|}} d\theta = \left[\frac{\pi}{|z|} \right]_x.$$

De forma análoga se puede calcular $\frac{\partial}{\partial x} \left(\iint_{|z - \zeta| < R} \frac{1}{|z - \zeta|} \frac{1}{|\zeta - \omega|} \right)$ y las correspondientes derivadas con respecto a y . Podemos concluir así que $G(z)$ es C^1 , y además

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \pi \left(\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{z} \right)$$

□

Podemos ahora probar que el operador T esta acotado en L^p , a partir de la igualdad $T^*T^*(f) = -T(f)$.

Proposición 3.4.26 Sea $f \in C_0^2(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, entonces $T^*T^*(f) = -T(f)$.

Demostracion: Aplicando la Proposición (3.4.24), se tiene que

$$T^*T^*(f)(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \iint T^*(f)(\zeta) \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu.$$

Luego, aplicando la Proposición (3.4.21), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} \iint T^*(f)(\zeta) \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \iint \left(\iint \frac{f_z(z)}{|z - \zeta|} dx dy \right) \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \iint \left[\iint \frac{f_z(z)}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) dx dy \right] d\xi d\nu. \end{aligned}$$

Como la función $\frac{f_z(z)}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right)$ está en $L^1(\mathbb{C}^2, \mathbb{C})$, podemos aplicar Fubini. Por lo tanto

$$\begin{aligned} T^*T^*(f)(\omega) &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \iint \left[\iint \frac{f_z(z)}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \right] dx dy = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \iint f_z(z) \left[\iint \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \right] dx dy. \end{aligned}$$

Fijado $z \notin \{0, \omega\}$ aplicando partes en la variable x , y dado que existe la derivada con respecto a x de la función $\left[\iint \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \right]$, por el Lema (3.4.25), obtenemos que

$$\begin{aligned} \iint f_x(z) \left[\iint \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \right] dx dy &= \\ = \iint f(z) \left[\iint \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \right]_x dx dy. \end{aligned}$$

De forma análoga se puede realizar la derivada con respecto a y , obtenemos así que

$$T^*T^*(f)(\omega) = \frac{1}{\pi^2} \frac{\partial}{\partial \omega} \iint f(z) \frac{\partial}{\partial z} \left[\iint \frac{1}{|z - \zeta|} \left(\frac{1}{|\zeta - \omega|} - \frac{1}{|\zeta|} \right) d\xi d\nu \right] dx dy.$$

Luego aplicando (3.4.25)

$$T^*T^*(f)(\omega) = \frac{\partial}{\partial \omega} \frac{1}{\pi} \iint f(z) \left(\frac{1}{z - \omega} - \frac{1}{z} \right) = \frac{\partial}{\partial \omega} - Pf(\omega),$$

y por 3.1.14 concluimos que

$$T^*T^*(f)(\omega) = -T(f)(\omega) \quad \mu \text{ ctp.}$$

□

Obtenemos así el siguiente corolario.

Corolario 3.4.27 El operador T tiene norma finita el L^p .

Para finalizar el capítulo, y por tanto la desigualdad, veremos algunos resultados que tienen interés por sí mismos, por lo cual están en un subsección propia.

3.4.1. Teorema de interpolación de Riesz-Thorin

Este resultado de desigualdades en normas L^p es interesante más allá de la aplicación en este trabajo, por eso lo vemos en una sección aparte.

Si bien las normas L^p no son equivalentes, sí hay resultados para una combinación convexa.

Lema 3.4.28 (*Desigualdad de Lyapunov*). Sean $p_0, p_1 \in [1, +\infty]$ y $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$. Fijemos $\theta \in [0, 1]$ y sea p tal que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Para toda $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, se cumple que $f \in L^p$. Más aún, se verifica la desigualdad en norma dada por la ecuación

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^\theta.$$

Demostración:

El caso para $\theta \in \{0, 1\}$ es trivial, fijemos así $\theta \in (0, 1)$.

Notar que para cualquier $q \geq 1$ se tiene que $\|g\|_q = \|(|g|)\|_q$, por lo que podemos suponer que $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Aplicando la definición de norma p para f , tenemos que $\|f\|_p^p = \|f^p\|_1$.

Sean a, b tales que $\frac{1}{a} = \frac{(1-\theta)p}{p_0}$ y $\frac{1}{b} = \frac{\theta p}{p_1}$. En particular $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$.

Separemos f^p en dos factores $f^p = f^{p(1-\theta)} f^{p\theta}$. La función $f^{p(1-\theta)}$ está en L^a , además podemos acotar su norma por

$$\|f^{p(1-\theta)}\|_a = (\|f^{p_0}\|_1)^{\frac{1}{a}} = (\|f\|_{p_0})^{\frac{p_0}{a}} = \|f\|_{p_0}^{p(1-\theta)}$$

De forma análoga se tiene que $f^{p\theta} \in L^b$ y $\|f^{p\theta}\|_b = \|f\|_{p_1}^{p\theta}$.

Aplicando la desigualdad de Hölder, obtenemos que

$$\|f\|_p = \left(\|f^{p(1-\theta)} f^{p\theta}\|_1 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\|f^{p(1-\theta)}\|_a \|f^{p\theta}\|_b \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^\theta.$$

□

Necesitamos ahora otro resultado básico, esta vez de análisis complejo.

Lema 3.4.29 Sean $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \in [0, 1]\}$ y $F : S \rightarrow \mathbb{C}$ tal que F esta acotada, continua y analítica en S° . Para $\theta \in [0, 1]$, definimos $M_\theta(F) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \{|F(\theta + iy)|\}$. Entonces se tiene la desigualdad $M_\theta(F) \leq [M_0(F)]^{1-\theta} [M_1(F)]^\theta$.

Demostración: Notar que si $F \equiv 0$, la tesis se cumple de forma inmediata.

Probemos primero para el caso en que $M_0(F) = M_1(F) = 1$, en donde basta con probar que $M_\theta(F) \leq 1$. Definamos ahora una función auxiliar F_ϵ a partir de F presente un máximo en ∂S .

Dado $\epsilon > 0$, definimos la función F_ϵ como $F_\epsilon(z) = \frac{F(z)}{1+\epsilon z}$. Notar que F_ϵ está en las hipótesis del lema y que además $\lim_{|y| \rightarrow \infty} |F_\epsilon(x + iy)| = 0$ uniformemente en x , ya que $|F_\epsilon(x + iy)| \leq \left| \frac{\|F\|_\infty}{\epsilon y} \right|$. Por tanto F_ϵ tiene máximo.

Fijado $z \in S$, la función $\epsilon \rightarrow |F_\epsilon|$ es decreciente. Tenemos así que $M_\theta(F_\epsilon) \leq M_\theta(F)$ para todo ϵ , además $\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F_\epsilon(z) = F(z)$.

Como F_ϵ analítica en S° , podemos aplicar el principio del módulo máximo a un dominio de la forma $[\delta, 1 - \delta] \times [-r, r]$. Dado que F_ϵ es continua en S , tomando límite $\delta \rightarrow 0$ tenemos que $\exists z_r(\epsilon)$ con $\operatorname{Re}(z_r(\epsilon)) = \{0, 1\}$ tal que $\max\{|F_\epsilon(z)| : z \in [0, 1] \times [-r, r]\} = F_\epsilon(z_r)$. Luego como $\lim_{|y| \rightarrow \infty} |F_\epsilon(x + iy)| = 0$ uniformemente en x , existe z_ϵ con $\operatorname{Re}(z_\epsilon) \in \{0, 1\}$ tal que $\max(F_\epsilon) = F_\epsilon(z_\epsilon)$.

Deducimos así que $M_\theta(F_\epsilon) \leq \max\{M_0(F_\epsilon), M_1(F_\epsilon)\}$.

Notemos $M_{(\theta, r)}(F) = \sup\{|F(\theta + iy)| : y \in [-r, r]\}$.

Dado $\epsilon_0 > 0$, como F continua y acotada existe un $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $M_\theta(F) - M_{(\theta, r)}(F) < \frac{\epsilon_0}{2}$. Como F_ϵ converge uniformemente en compactos a F , $\exists \bar{\epsilon}$ tal que $M_{(\theta, r)}(F) - M_{(\theta, r)}(F_\epsilon) \leq \frac{\epsilon_0}{2}$. Como además $M_{(\theta, r)}(F_\epsilon) \leq M_{(\theta)}(F_\epsilon) \leq \max\{M_0(F_\epsilon), M_1(F_\epsilon)\} \leq \max\{M_0(F), M_1(F)\} = 1$, tenemos que se verifica la desigualdad $M_\theta(F) - 1 \leq \epsilon_0$.

Dado que ϵ_0 es un número arbitrario, se concluye la tesis para el caso $M_0 = M_1 = 1$. Veamos ahora como pasar del caso general a este.

Dada F en las hipótesis del lema, tanto M_0 como M_1 son distintos de 0, ya que F también cumple módulo máximo y no es idénticamente nula. Luego, la función G definida por

$$G(z) = \frac{F(z)}{e^{z \log\left(\left(\frac{M_0}{M_1}\right)\right) + \log(M_0)}}$$

también las verifica.

Para $z = iy$ se tiene que $|G(z)| = \frac{|F(z)|}{M_0}$, por lo que $M_0(G) = 1$, mientras que para $z = 1 + iy$ se tiene que $|G(1 + iy)| = \left| \frac{F(z)}{e^{(1+iy) \log((\frac{M_1}{M_0}) + \log(M_0))}} \right| = \frac{|F(z)|}{M_1}$ de donde $M_1(G) = 1$.

Dado que G está en el caso anterior, se tiene que $M_\theta(G) \leq 1$. Dado $z = \theta + iy$, el módulo de $G(z)$ cumple que

$$|G(\theta + iy)| = \left| \frac{F(z)}{e^{(\theta+iy) \log((\frac{M_1}{M_0}) + \log(M_0))}} \right| = \frac{|F(z)|}{M_0^{1-\theta} M_1^\theta},$$

de donde se deduce que $M_\theta(F) = M_\theta(G) M_0^{1-\theta} M_1^\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$, concluyendo así la tesis. $\square$

Por último, antes de ver la demostración del Teorema, veamos una propiedad de los espacios L^p .

Comentario 3.4.30 Sean p y q conjugados, es decir $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ entonces para toda $f \in L^p$ se verifica la igualdad $\|f\|_p = \sup_{g \in L^q} \int fg$

Veamos ahora la prueba del teorema de interpolación de Riesz-Thorin, para el caso $p > 1$.

Teorema 3.4.31 (Interpolación de Riesz-Thorin) Sean $p_0, p_1, q_0, q_1 > 1$ y $\theta \in [0, 1]$. Definimos p y q como $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ y $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$. Sea T es un operador lineal tal que $T : L^{p_i} \rightarrow L^{q_i}$ tiene norma finita dada por $\|T\|_{L^{p_i} \rightarrow L^{q_i}} = N_i$. Entonces se tiene que $\|Tf\|_q \leq N_0^{1-\theta} N_1^\theta \|f\|_p$ para toda $f \in L^{p_0}(\mathbb{C}) \cap L^{p_1}(\mathbb{C})$.

Demostración: Como las funciones simples son densas en $L^{p_0} \cap L^{p_1}$ basta con probarlo para dichas funciones. A su vez, por el comentario anterior, es suficiente probar que

$$\left| \int (Tf)g \right| \leq N_0^{1-\theta} N_1^\theta \quad (3.19)$$

para todo par de funciones simples f, g tales que $\|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1$ donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1$. Notamos además $(q_i)'$ al conjugado de q_i .

Tomemos así $f = \sum_{j=1}^J a_j \chi_{A_j}$ y $g = \sum_{k=1}^K b_k \chi_{B_k}$ funciones simples de norma 1, es decir

$$\|f\|_p^p = \sum_{j=1}^J |a_j|^p \mu(A_j) = 1 \text{ y } \|g\|_{q'}^{q'} = \sum_{k=1}^K |b_k|^{q'} \mu(B_k) = 1,$$

donde μ es Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y los conjuntos A_k son disjuntos 2 a 2, de igual forma los conjuntos B_j .

Definimos ahora p y q como funciones de ω de la siguiente forma: dado $\omega \in \mathbb{C}$,

$$\frac{1}{p(\omega)} = \frac{1-\omega}{p_0} + \frac{\omega}{p_1}, \quad \frac{1}{q(\omega)} = \frac{1-\omega}{q_0} + \frac{\omega}{q_1}, \quad \frac{1}{q'(\omega)} = \frac{1-\omega}{q'_0} + \frac{\omega}{q'_1}.$$

Tenemos así que $p(0) = p_0$, $p(1) = p_1$ y $p(\theta) = p$, de igual forma para q , $q(0) = q_0$, $q(1) = q_1$ y $q(\theta) = q$ y q' .

Notando la convención $\frac{0}{0} = 0$, definimos las funciones $f_\omega = |f|^{\frac{p}{p(\omega)}} \frac{f}{|f|}$ y $g_\omega = |g|^{\frac{q'}{q'(\omega)}} \frac{g}{|g|}$.

Las funciones f_ω y g_ω son funciones simples con soporte compacto. Luego $f_\omega \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$, lo que implica que $T(f_\omega)$ está bien definida.

Finalmente, definimos la función $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ como $F(\omega) = \int (Tf_\omega)g_\omega$. Por linealidad tenemos que

$$F(\omega) = \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K |a_j|^{\frac{p}{p(\omega)}} \frac{a_j}{|a_j|} |b_k|^{\frac{q'}{q'(\omega)}} \frac{b_k}{|b_k|} \int_{B_k} T(\chi_{A_j}).$$

Dado que $\frac{1}{p(\omega)} = \frac{1}{p_0} + \omega \left(\frac{p_0 - p_1}{p_0 p_1} \right)$, obtenemos así que F es una combinación lineal de términos de la forma αu^ω con $\alpha > 0$ y $u \in \mathbb{R}$. Luego F es analítica y satisface las hipótesis del Lema 3.4.29, ya que cada función γ^z está acotada en S por $|\gamma^{x+iy}| = |\gamma^x| \leq \max \{1, \gamma\} \forall x + iy \in S$.

Estimemos ahora $|F(iy)|$ y $|F(1 + iy)|$. Aplicando la desigualdad de Hölder tenemos que

$$|F(iy)| \leq \|Tf_{iy}\|_{q_0} \|g_{iy}\|_{q'_0} \leq N_0 \|f_{iy}\|_{p_0} \|g_{iy}\|_{q'_0}.$$

Dado que $\operatorname{Re} \left(\frac{pp_0}{p(iy)} \right) = \operatorname{Re} \left(p_0 p \left(\frac{(1-iy)}{p_0} + \frac{iy}{p_1} \right) \right) = p$, podemos acotar f_{iy} y tenemos que

$$\|f_{iy}\|_{p_0}^{p_0} = \sum_{j=1}^J \left| |a_j|^{\frac{pp_0}{p(iy)}} \right| \mu(A_j) = \sum_{j=1}^J |a_j|^p \mu(A_j) = \|f\|_p^p.$$

De forma análoga $\|g_{iy}\|_{q_0'}^{q_0'} = 1$.

Utilizando la notación de 3.4.29, obtenemos que $M_0(F) \leq N_0$, y repitiendo para $1 + iy$, obtenemos $M_1(F) \leq N_1$.

Finalmente aplicando el Lema 3.4.29, tenemos que

$$\int |T(f)g| = F(\theta) \leq M_\theta(F) \leq N_0^{1-\theta} N_1^\theta,$$

de donde concluimos la tesis. □

Apliquemos ahora este teorema a nuestras condiciones.

Demostración de 3.1.13: Por el Corolario 3.4.27 sabemos que $T : L^p \rightarrow L^p$ es un operador acotado $\forall p \geq 2$, Notemos $C_3 = \|T\|_3$ y además T es una isometría en L^2 (teorema 3.1.12) $C_2 = \|T\|_2 = 1$.

Notar que para todo número $p \in [2, 3]$, existe un único $\theta(p) \in [0, 1]$ tal que $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta(p)}{2} + \frac{\theta(p)}{3}$. Además $\lim_{p \rightarrow 2^+} \theta(p) = 0$. Definimos ahora C_p como $C_p = C_3^{\theta(p)} C_2^{(1-\theta(p))} = C_3^{\theta(p)}$.

Aplicando el teorema de interpolación, se tiene que $\|T\|_p \leq C_3^{\theta(p)}$ y además $\lim_{p \rightarrow 2^+} C_p = 1$.

Bibliografía

- [Ah] AHLFORS, L.V.: Lectures on Quasiconformal Mappings. Princeton: Van Nostrand mathematical studies.
- [BG] BREUILLARD, E. ,GELANDER, T.: A topological Tits alternative [en linea], marzo 2, 2004 [citado enero 30, 2018]. Disponible en Web: <<https://arxiv.org/abs/math/0403043>>
- [D-S] BIS, A. HECTOR, G. Denjoy-Sacksteder theory for groups of diffeomorphisms. J. Math. Soc. Japan volumen 63, número 3 (2011), 985-1000 p.
- [G] GARRIDO, A.: An introduction to amenable groups [en linea]. 2013 [citado enero 30, 2018]. Disponible en Web: <<http://people.maths.ox.ac.uk/kar/amenable.pdf>>.
- [L-M] LODHA, Y. , MOORE, J.T.: A non amenable finitely presented group of piecewise projective homeomorphisms [en linea], agosto 20, 2013. Disponible en Web: <<https://arxiv.org/abs/1308.4250>>.
- [M] MONOD, N.: Groups of piecewise projective homeomorphisms [en linea]. National Academy of Sciences. Proceedings of the National Academy of Sciences, marzo, 2013, volumen 110, número (12) 4524-4527 p [citado enero 30, 2018]. Disponible en Web: <<http://www.pnas.org/content/110/12/4524>>
- [Mi] MILNE, J.S.: Group Theory (v3.13) [en linea]. 2013 [citado enero 30, 2018]. Disponible en Web <<http://www.jmilne.org/math/>>
- [N] NAVAS, A.: Grupos de difeomorfismos del círculo. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matematica, Ensaios Matemáticos 2007, volumen 13, 1 -249 p.
- [N A] NIMA ANVARI, B.SC.: Automorphisms of Riemann surfaces [en linea]. McMaster university (Agosto 2009). Disponible en Web: <<https://macsphere.mcmaster.ca/handle/11375/9044>>.
- [R] RUDIN, W.: Real and complex analysis. McGraw-Hills international edition (1987)
- [S] STEIN, E. SHAKARCHI, R.: Real Analysis. Princeton university press (2007).
- [T] TAO, T.: Some notes on amenability [en linea]. Abril 14, 2009 [citado enero 30, 2018]. Disponible en Web: < <https://terrytao.wordpress.com/2009/04/14/some-notes-on-amenability/>>.
- [Tits] TITS , J. Free subgroups in linear groups. Jounrnal of Algebra, volumen 20, febrero 1972, 250-270 p.
- [Tu] TUKIA, P. On two-dimensional quasiconformal groups. Annals Academic Scientiarum Fennicæ, Serie A.I. Mathematica, volumen 5, 1980, 73 - 79 p.