

Tesis presentada para la obtención del título de  
*Magíster en Ingeniería Matemática*

# **Búsqueda de grafos cúbicos de máxima confiabilidad**

**Autor: Julián Alberto Viera Méndez**

Orientadores: Dr. Ing. Franco Robledo  
Dr. Ing. Pablo Romero

Tribunal: Dr. Diego Bravo  
Dr. Eduardo Canale  
Dr. Héctor Cancela  
Dr. Gerardo Rubino

Instituto de Matemática y Estadística  
Facultad de Ingeniería



## Resumen

Un modelo muy popular para el estudio de confiabilidad en redes consiste en modelar la red como un grafo no dirigido, en el que los nodos no fallan y las arista sí lo hacen pero en forma independiente y con la misma probabilidad. La magnitud de interés en este caso es la probabilidad de que el grafo se mantenga conexo frente a dichas fallas, lo que se conoce como confiabilidad *all-terminal* del grafo. Se ha probado que para ciertas familias de  $(p,q)$ -grafos existen grafos que maximizan esta medida de confiabilidad para toda probabilidad de falla de las aristas, los que son conocidos como grafos uniformemente confiables.

En este trabajo investigamos la existencia de grafos uniformemente confiables para la familia de  $(12,18)$ -grafos y probamos matemáticamente la existencia de un único grafo cúbico uniformemente confiable para la misma, el denominado grafo Yutsis 18j-symbol label F.



# Índice general

<b>1. Revisión de resultados en Confiabilidad Uniforme de Grafos</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación . . . . .	1
1.2. Grafos uniformemente confiables . . . . .	2
1.3. Algunos resultados sobre grafos uniformemente confiables . . . . .	4
1.3.1. Confiabilidad uniforme en grafos de baja densidad . . . . .	4
1.3.2. $t$ -optimalidad en grafos densos . . . . .	8
1.3.3. $t$ -optimalidad en grafos regulares multipartitos completos . . . . .	9
1.4. Conjeturas y problemas abiertos sobre grafos uniformemente confiables . . . . .	10
<b>2. Contribuciones</b>	<b>13</b>
2.1. Búsqueda de (12,18)-grafos uniformemente confiables . . . . .	13
2.2. Determinación del (12,18)-grafo candidato . . . . .	15
2.3. El grafo Yutsis 18jF . . . . .	16
2.3.1. Propiedades generales del grafo Yutsis 18jF . . . . .	16
2.3.2. Valor de los coeficientes $m_k$ para el grafo Yutsis 18jF . . . . .	18
2.4. Prueba de que Yutsis 18jF es uniformemente confiable . . . . .	22
2.4.1. Características generales de la prueba . . . . .	22
2.4.2. Una cota útil para el número de árboles de un $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo con nodos colgantes . . . . .	24
2.4.3. El coeficiente $m_3$ se minimiza en Yutsis 18jF . . . . .	28
2.4.4. El coeficiente $m_4$ se minimiza en Yutsis 18jF . . . . .	28
2.4.5. El coeficiente $m_5$ se minimiza en Yutsis 18jF . . . . .	29
2.4.6. El coeficiente $m_6$ se minimiza en Yutsis 18jF . . . . .	33
2.4.7. El coeficiente $m_7$ se minimiza en Yutsis 18jF . . . . .	46
<b>3. Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>47</b>
3.1. Conclusiones . . . . .	47
3.2. Trabajo Futuro . . . . .	48

<b>Apéndice A.</b>	<b>49</b>
A.1. Prueba de que el grafo Yutis 18jF es $t$ -óptimo . . . . .	49
A.2. Programa que calcula el número de árboles de cubrimiento de un grafo . . .	91
A.3. Programa que calcula el número de desconectores de tamaño $k$ de un grafo .	92
<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>

# Capítulo 1

## Revisión de resultados en Confiabilidad Uniforme de Grafos

En este capítulo se presentan los principales conceptos vinculados al problema de interés abordado en esta tesis. La Sección 1.1 plantea el contexto de aplicación práctica que justifica en forma genérica la ejecución de estudios como el que se plantea en este trabajo. En la Sección 1.2 se establecen los conceptos matemáticos básicos relacionados con la confiabilidad uniforme de grafos, en particular se define cuando un grafo es uniformemente confiable y se dan por un lado condiciones necesarias y por otro condiciones suficientes de confiabilidad uniforme. En la sección 1.3 se enumeran resultados conocidos de confiabilidad uniforme para distintas familias de grafos, con hincapié en aquellas familias que incluyen a los grafos cúbicos. Finalmente en la Sección 1.4 se presentan algunas conjeturas y problemas abiertos sobre grafos uniformemente confiables.

### 1.1. Motivación

En el análisis de confiabilidad de redes, el objetivo es hallar la probabilidad de funcionamiento correcto del sistema [1], [2]. Un problema fundamental es encontrar la probabilidad de que un grafo dado se mantenga conexo frente a fallas equiprobables de sus aristas, denominándose dicha probabilidad la *confiabilidad all-terminal* del grafo.

En el contexto de redes de comunicaciones, el análisis de confiabilidad de los enlaces es muchas veces adecuado. Un ejemplo lo constituyen los protocolos peer-to-peer (P2P) para compartir recursos en una red, en donde la falla de un enlace (link) afecta a todo el sistema, y en donde la confiabilidad all-terminal es una primera aproximación conveniente para modelar el fenómeno. El problema práctico que abordaremos es como conectar  $p$  lugares

(nodos) usando  $q$  enlaces (aristas) de la mejor manera posible, esto es encontrar el grafo con mayor confiabilidad all-terminal entre todos los grafos no dirigidos con  $p$  nodos y  $q$  aristas (en adelante denotados como  $(p,q)$ -grafos). Este tipo de grafos son conocidos como *grafos uniformemente confiables* (uniformly optimally reliable graphs / uniformly most reliable graphs). Orientamos nuestra búsqueda de grafos de máxima confiabilidad hacia las familias que incluyen a los grafos cúbicos, debido a que:

- los grafos cúbicos son una clase de grafos relevantes en si mismos en el contexto de la Teoría de Grafos.
- pueden jugar un rol importante en el diseño de redes óptimas 3-aristas-conexas, de gran confiabilidad.

## 1.2. Grafos uniformemente confiables

A continuación se presentan algunas definiciones y propiedades que serán utilizadas a lo largo de esta tesis. Se considera un grafo simple  $G = (V, E)$  conexo con nodos perfectos (sin fallas) y con aristas falibles con una misma probabilidad de falla  $\rho$ . Asumimos que  $p = |V|$  y  $q = |E|$ , es decir que  $G$  es un  $(p,q)$ -grafo. La **all-terminal reliability**  $R(G, \rho)$  mide la probabilidad de que el subgrafo resultante luego de las fallas sea conexo, y es un polinomio en  $\rho$  de grado  $q$ . Puede expresarse como:

$$R(G, \rho) = \sum_{k=0}^q n_k(G) \rho^{q-k} (1 - \rho)^k \quad (1.1)$$

donde  $n_k(G)$  es el número de subgrafos conexos de  $G$  con exactamente  $k$  aristas, es decir el número de subconjuntos  $E' \subseteq E$  con  $|E'| = k$  y tales que  $G' = (V, E')$  es conexo.

En esta tesis por conveniencia trabajaremos con la **unreliability** o no confiabilidad de un grafo definida como  $U(G, \rho) = 1 - R(G, \rho)$  que tiene la siguiente expresión, obtenida a partir de la regla de la suma:

$$U(G, \rho) = \sum_{k=0}^q m_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{q-k} \quad (1.2)$$

donde en este caso  $m_k(G)$  es el número de conjuntos desconectores de aristas de cardinalidad  $k$ , es decir la cantidad de subconjuntos  $E' \subseteq E$  con  $|E'| = k$  y tales que  $G' = (V, E - E')$  es desconexo.

Resulta claro que si consideramos un valor de  $\rho$  fijo, existe al menos un grafo  $H$  que presenta mínima no-confiabilidad, en el sentido de que  $U(H, \rho) \leq U(G, \rho)$  para todo  $(p,q)$ -grafo  $G$ . Lo interesante es determinar si existe un grafo que verifique esta propiedad para toda

probabilidad de falla  $\rho$ .

**Definición 1.1:** Un  $(p,q)$ -grafo  $H$  es *uniformemente confiable* si  $R(H, \rho) \geq R(G, \rho)$  para todo  $(p,q)$ -grafo  $G$  y para todo  $\rho \in [0, 1]$ . Alternativamente,  $H$  es uniformemente confiable si  $U(H, \rho) \leq U(G, \rho)$  para todo  $(p,q)$ -grafo  $G$  y para todo  $\rho \in [0, 1]$

Sea  $\lambda$  la arista conectividad del grafo  $G$  y  $\tau(G)$  el número de árboles de cubrimiento de  $G$ . Se verifican los siguientes resultados para los  $m_k(G)$  (en adelante denotados  $m_k$ ):

- $m_k = 0$  si  $k < \lambda$  (no hay conjuntos desconectores de cardinalidad menor a la arista conectividad del grafo)
- $m_{q-p+1} = \binom{q}{q-p+1} - \tau(G)$
- $m_k = \binom{q}{k}$  si  $k > q - p + 1$

Tomando esto en cuenta estas observaciones, podemos escribir el polinomio de no-confiabilidad como

$$U(G, \rho) = m_\lambda \rho^\lambda (1 - \rho)^{q-\lambda} + \sum_{k=\lambda+1}^{q-p} m_k(G) \rho^k (1 - \rho)^{q-k} + \left( \binom{q}{q-p+1} - \tau(G) \right) \rho^{q-p+1} (1 - \rho)^{p-1} + \sum_{k=q-p+2}^q \binom{q}{k} \rho^k (1 - \rho)^{q-k} \quad (1.3)$$

Esta expresión es válida siempre que  $\lambda + 1 \leq q - p$ . Observamos entonces que la determinación del polinomio de no-confiabilidad se reduce a calcular los coeficientes  $\{m_k\}_{k=\lambda, \dots, q-p+1}$ . Ball y Provan demostraron que el problema de encontrar todos los  $m_k$  es *NP-completo* [3]. También mostraron que el coeficiente  $m_\lambda$  puede hallarse en tiempo polinomial. Gustav Kirchoff estableció las ecuaciones lineales modernas de los circuitos eléctricos, y como parte de su trabajo encontró una manera eficiente de contar los árboles de cubrimiento de un grafo ( $\tau(G)$ ), calculando el determinante de una matriz [4]. De la ecuación 1.2 y de la definición 1.1 de confiabilidad uniforme se puede concluir que si  $m_k(H) \leq m_k(G)$  para todo  $k$  y para todo  $(p,q)$ -grafo  $G$ , entonces  $H$  es uniformemente confiable para la clase  $(p, q)$ . Es una condición suficiente para que un grafo sea uniformemente confiable, pero hasta donde sabemos no está probado que sea condición necesaria. Boesch et.al. [5] conjeturaron que el recíproco también se cumple, y probaron los siguientes resultados:

**Proposición 1.1** Si existe un entero  $k$  tal que  $m_i(H) = m_i(G) \forall i < k$  pero  $m_k(H) < m_k(G)$ , entonces existe  $\rho_0 > 0$  tal que  $U(H, \rho) < U(G, \rho) \forall \rho \in (0, \rho_0)$ .

**Proposición 1.2** Si existe un entero  $k$  tal que  $m_i(H) = m_i(G) \forall i > k$  pero  $m_k(H) < m_k(G)$ , entonces existe  $\rho_1 > 0$  tal que  $U(H, \rho) < U(G, \rho) \forall \rho \in (\rho_1, 1)$ .

Combinando estas dos proposiciones con los resultados para los  $m_k$  enunciados anteriormente, se puede derivar el siguiente corolario que establece condiciones necesarias que deben cumplir los grafos uniformemente confiables.

**Corolario 1.1** *Un grafo uniformemente confiable  $H$  debe tener:*

- Máxima conectividad  $\lambda(H)$  ( $\lambda = \lfloor \frac{2q}{p} \rfloor$ )
- Mínimo valor de  $m_\lambda(H)$
- Máxima cantidad de árboles de cubrimiento  $\tau(H)$

**Definición 1.2:** Un  $(p,q)$ -grafo  $H$  es  $t$ -óptimo si  $\tau(H) \geq \tau(G)$  para todo  $(p,q)$ -grafo  $G$ . Teniendo en cuenta la expresión 1.3 para el polinomio de no-confiabilidad  $U$ , la condición de  $t$ -optimalidad de  $H$  implica que  $m_{q-p+1}(H) \leq m_{q-p+1}(G)$  para todo  $(p,q)$ -grafo  $G$ .

El Corolario 1.1 enunciado en forma abreviada dice que los grafos uniformemente confiables deben ser  $t$ -óptimos y  $\max\text{-}\lambda$   $\min\text{-}m_\lambda$ , siendo  $\lambda$  la arista conectividad. Estas condiciones necesarias nos ayudan a acotar el espacio de búsqueda de los grafos candidatos a ser uniformemente confiables para cada clase  $(p,q)$  particular de grafos.

### 1.3. Algunos resultados sobre grafos uniformemente confiables

Se presentan en esta sección algunos resultados conocidos de confiabilidad uniforme para grafos poco densos (*sparse graphs*) y de  $t$ -optimalidad para grafos densos.

#### 1.3.1. Confiabilidad uniforme en grafos de baja densidad

Se muestran aquí resultados sobre confiabilidad uniforme de las familias de  $(p,p+i)$ -grafos.

- Caso  $i = -1$ .

Para el caso en que  $q = p - 1$ , tenemos que todos los árboles de  $p$  nodos verifican las tres condiciones necesarias del corolario 1.1 (con valor 1 en los tres items), y tienen el mismo polinomio de confiabilidad  $R(G, \rho) = (1 - \rho)^q$ . Son claramente uniformemente confiables, dado que la confiabilidad de los  $(p,p-1)$ -grafos no conexos vale 0.

- Caso  $i = 0$ .

En este caso  $q = p$  y el ciclo elemental  $C_p$  es uniformemente confiable. Ningún otro grafo de la clase tiene conectividad 2, por lo que  $m_1(C_p) = 0$  es mínimo para la clase, y los conjuntos desconectores con cantidad de aristas  $k \geq 2$  desconectan a todos los grafos de la clase, por lo que los coeficientes  $m_k$  con  $k \geq 2$  son iguales para todos los grafos de la clase.

- Caso  $i = 1$ .

Para el caso  $q = p + 1$ , Boesch et.al. [6] encontraron, basados en resultados previos de Bauer et.al. para la construcción de grafos  $\max\text{-}\lambda$   $\min\text{-}m_\lambda$  [7], que los grafos de Monma cuyos caminos difieren en a lo sumo un nodo (grafos de Monma “balanceados”) son los grafos uniformemente confiables de esta clase. Se requiere que se minimizen  $m_0$ ,  $m_1$  y  $m_2$ , ya que  $q - p + 1 = 2$ . Los grafos balanceados de Monma son los  $(p, p+1)$ -grafos que satisfacen la condición  $\max\text{-}2$   $\min m_2$ . En la Figura 1.1 se muestra un ejemplo de grafo de Monma. Se requiere para confiabilidad uniforme que  $|l_i - l_j| \leq 1 \forall i, j$ .

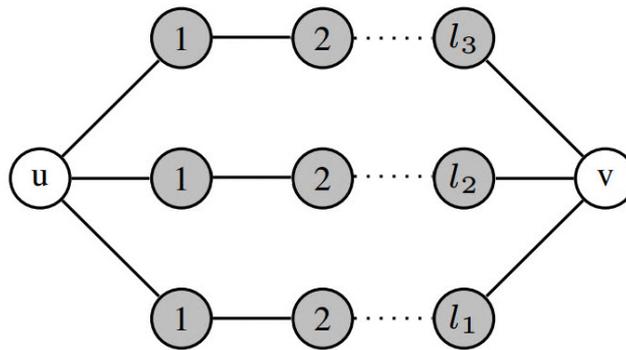


Figura 1.1 Grafo de Monma  $M_{(l_1, l_2, l_3)}$

- Caso  $i = 2$ .

En el caso  $q = p + 2$ , Boesch et. al. en [6] probaron que los grafos uniformemente confiables de esta familia pueden obtenerse a partir de subdivisiones particulares de  $K_4$ . Teniendo en cuenta que  $K_4$  tiene tres emparejamientos perfectos (perfect matchings), se obtiene un grafo uniformemente confiable a partir de  $K_4$  insertando  $p - 4$  nodos en los tres emparejamientos perfectos de  $K_4$ , de forma que:

1. La cantidad de nodos insertada en cualquier par de aristas difiere a lo sumo en uno.

2. Si en cualquier par de emparejamientos perfectos el número de nodos insertados es el mismo, entonces el número de nodos insertados en cada una de las cuatro aristas de ese par de emparejamientos debe ser el mismo.

Como caso particular tenemos que  $K_4$  es el grafo uniformemente confiable de la primera familia ( $p = 4$ ) en la secuencia de  $(p, \frac{3}{2}p)$ -grafos conexos que incluyen a los grafos cúbicos (es el único grafo de la familia).

■ Caso  $i = 3$ .

Para el caso  $q = p + 3$ , Boesch et.al. [6] conjeturaron que los grafos uniformemente confiables de este tipo son subdivisiones particulares de  $K_{3,3}$ , lo cual fue probado por Wang [8].

Como caso particular tenemos que el grafo  $K_{3,3}$  que se muestra en la Figura 1.2 es el grafo uniformemente confiable de la segunda familia ( $p = 6$ ) en la secuencia de  $(p, \frac{3}{2}p)$ -grafos conexos que incluye a los grafos cúbicos.

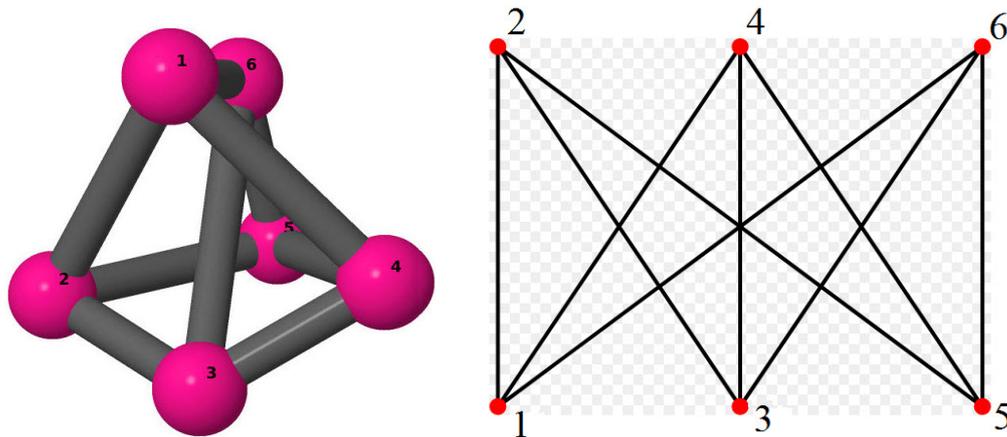


Figura 1.2 Grafo bipartito  $K_{3,3}$

■ Caso  $i = 4$ .

En el caso  $q = p + 4$ , y para los  $(8,12)$ -grafos, Romero [9] probó, mediante conteo de conjuntos desconectores, que el grafo de Wagner (o grafo de Möbius  $M_4$ ) de la Figura 1.3 tiene los menores coeficientes  $m_3$ ,  $m_4$  y  $m_5$  de la clase y por lo tanto es uniformemente confiable para dicha clase. En dicho trabajo se formula también la conjetura de que todo  $(p, p+4)$ -grafo uniformemente confiable con  $p \geq 8$  puede obtenerse a partir de subdivisiones particulares del grafo de Wagner. El grafo de Wagner es un grafo cúbico hamiltoniano que resulta ser el grafo uniformemente confiable de la tercera familia ( $p = 8$ ) en la secuencia de  $(p, \frac{3}{2}p)$ -grafos conexos que incluye a los grafos cúbicos.

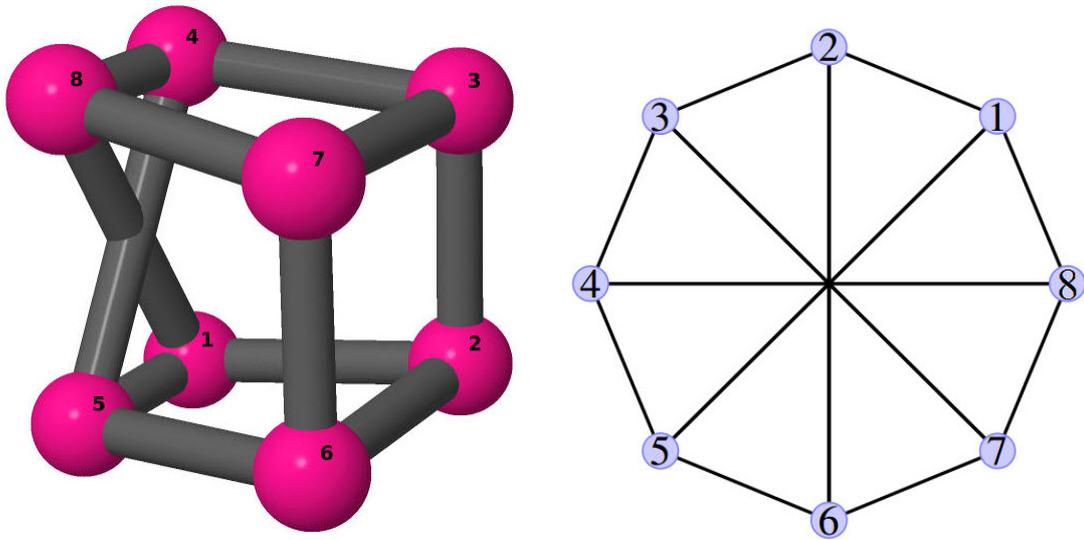


Figura 1.3 Grafo de Wagner

■ Caso  $i = 5$ .

En el caso  $q = p + 5$ , y específicamente para los (10,15)-grafos, Rela et.al. [10] demostraron, mediante conteo de conjuntos desconectores, que el grafo de Petersen de la Figura 1.4 minimiza todos los coeficientes  $\{m_k\}_{k=3,\dots,6}$  para todos los grafos de la clase y por lo tanto es uniformemente confiable para dicha clase.

El grafo de Petersen es un grafo cúbico que resulta ser uniformemente confiable para la cuarta familia ( $p = 10$ ) en la secuencia de  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafos conexos que incluye a los grafos cúbicos.

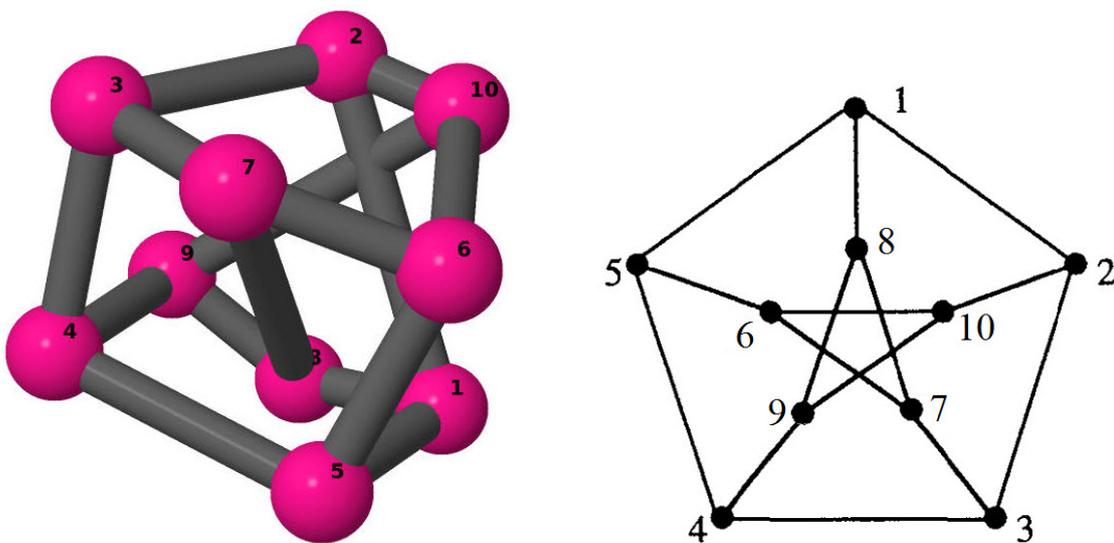


Figura 1.4 Grafo de Petersen

### 1.3.2. $t$ -optimalidad en grafos densos

Se han logrado obtener resultados de  $t$ -optimalidad para grafos cuyo número de aristas es del orden de las del grafo completo correspondiente. En todos los casos los grafos  $t$ -óptimos han resultado ser casi regulares (*almost regular*).

Mostraremos en esta sección resultados para  $(p,q)$ -grafos cuya cantidad de aristas es inferior en a lo sumo  $p$  aristas a la cantidad de aristas del  $(p, p(p-1)/2)$ -grafo completo correspondiente. Es decir que consideraremos  $(p,q)$ -grafos donde  $q = \binom{p}{2} - m$ , con  $p \geq m \geq 0$  y  $m$  es la cantidad de aristas del grafo complemento, siendo práctica común caracterizar los grafos  $t$ -óptimos densos en función de la caracterización de su grafo complemento.

#### Caso $m \leq p/2$

En este caso la topología que presenta el mayor número de árboles de cubrimiento fue descubierta en forma independiente por Kelmans [11] y Shier [12]. El resultado es que el grafo  $G$  es  $t$ -óptimo si su complemento  $G^c$  es un emparejamiento (*matching*). También se pudo demostrar posteriormente que  $G$  es uniformemente confiable, empleando la técnica de *Swing Surgery*, que es una transformación local de un grafo simple que mejora su confiabilidad, descubierta en forma independiente por Kelmans [13] y Satyanarayana [14].

En lo que sigue denotaremos como  $P_k$  un camino con  $k$  nodos ( $k$ -*path*) y con  $C_k$  un ciclo de  $k$  nodos. La unión nodo-disjunta de varios caminos de  $k$  nodos se denota como  $P_k$ 's, y en forma análoga la unión nodo-disjunta de varios ciclos de largo  $k$  se expresa como  $C_k$ 's.

#### Caso $p/2 \leq m \leq p-2$

Para este caso, Petingi, Boesch y Suffel [15] probaron que los grafos con mayor número de árboles de cubrimiento son aquellos cuyos complementos están formados por la unión de los siguientes ciclos y caminos disjuntos:

- $C_3$ 's  $\cup$   $P_2$ 's
- $C_3$ 's  $\cup$   $P_2$ 's  $\cup$   $P_3$
- $C_3$ 's  $\cup$   $P_2$ 's  $\cup$   $2P_3$ 's

**Casos  $m = p - 1$  y  $m = p$** 

Para estos casos la caracterización de la grafos  $t$ -óptimos fue dada por Gilbert y Myrvold [16]. Para  $m = p - 1$  los grafos  $t$ -óptimos son aquellos cuyos complementos son la unión de los siguientes ciclos y caminos disjuntos:

- $C_3$ 's  $\cup$   $P_2$ 's
- $C_3$ 's  $\cup$   $P_2$ 's  $\cup$   $P_3$
- $C_3$ 's  $\cup$   $P_2$ 's  $\cup$   $P_4$ 's

Para  $m = p$  los grafos  $t$ -óptimos son aquellos cuyos complementos son la unión de los siguientes ciclos disjuntos:

- $C_4 \cup C_3$ 's
- $C_5 \cup C_3$ 's

**1.3.3.  $t$ -optimalidad en grafos regulares multipartitos completos**

Cheng [17] demostró utilizando técnicas de autovalores que los grafos regulares multipartitos completos son  $t$ -óptimos. Estos  $(p,q)$ -grafos verifican las siguientes ecuaciones, para  $s$  y  $t$  enteros positivos y  $s > 1$ :  $p = st$  y  $q = (s(s-1)/2)t^2$ .

No se conoce si estos grafos son uniformemente confiables. En la Figura 1.5 se muestra un ejemplo de un grafo regular multipartito completo (*16-cell graph*), con  $p = 8$  y  $q = 24$ , que corresponde a los valores  $s = 4$  y  $t = 2$  en la fórmula precedente.

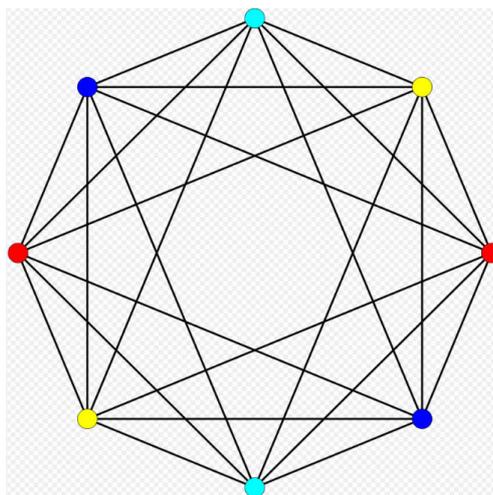


Figura 1.5 Grafo  $K_{2,2,2,2}$

## 1.4. Conjeturas y problemas abiertos sobre grafos uniformemente confiables

Presentamos en esta sección varias de las conjeturas que históricamente se han formulado sobre grafos uniformemente confiables, y que en algunos casos han resultado ser falsas, así como un par de problemas abiertos referidos al tema.

### Para toda clase de $(p,q)$ -grafos existe un grafo uniformemente confiable

Boesch conjeturó [18] que los grafos uniformemente confiables para una clase de  $(p,q)$ -grafos existen siempre, lo que resulta ser falso, tal como lo muestran Myrvold et.al. al presentar una familia infinita de contraejemplos [19].

### Los grafos $t$ -óptimos son casi regulares

Esta conjetura establece que si existe un grafo  $t$ -óptimo para una clase de  $(p,q)$ -grafos, necesariamente los grados de sus nodos no deben diferir en más de una unidad (condición de grafo "almost regular"). Exceptuando el caso de los árboles, que no la verifican, no se han encontrado hasta el momento otros contraejemplos.

### Los grafos uniformemente confiables son de "girth" máximo

Esta conjetura sostiene que el largo del ciclo de largo mínimo de un grafo uniformemente confiable debe ser máximo dentro de los grafos de su clase. Ath y Sobel [20] encontraron que girth máximo no necesariamente implica mayor confiabilidad. Para ello presentaron dos grafos de una misma clase en la que uno de ellos tiene menor "girth" pero es uniformemente mas confiable que el otro (estrictamente no es un contraejemplo para la conjetura pues no se probó que el grafo de menor "girth" fuera efectivamente uniformemente confiable para la clase).

### Los grafos uniformemente confiables son de diámetro mínimo

Esta conjetura propone que el diámetro de un grafo uniformemente confiable debe ser mínimo dentro de los grafos de su clase. Ath y Sobel [20] la probaron falsa, mediante un contraejemplo. Para ello presentaron los dos  $(6,8)$ -grafos de la Figura 1.6, en la que  $G_1$  es uniformemente confiable para la clase, ya que se obtiene como subdivisión de  $K_4$  según lo establecido en el caso  $i = 2$  de la sección 1.3, y  $G_2$  no lo es. Sin embargo el diámetro de  $G_1$  es 3 y el de  $G_2$  es 2.

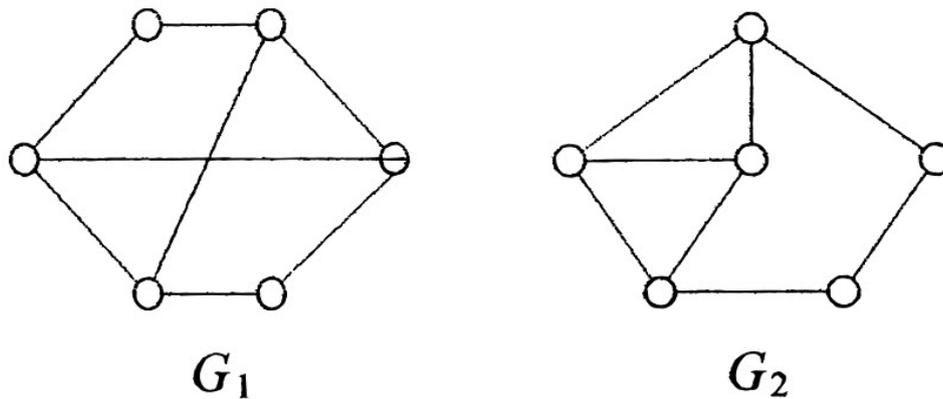


Figura 1.6 Contraejemplo para la conjetura de diámetro máximo

**Para todo  $p$  par y  $p \geq 4$ , existe un único  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo cúbico que es uniformemente confiable**

Esta conjetura viene avalada por lo que se conoce hasta el momento sobre grafos uniformemente confiables para las familias de  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafos que incluyen a los grafos cúbicos, habiéndose verificado ya para  $p = 4, 6, 8, 10$  y tal como se muestra en el presente trabajo también para  $p = 12$ .

**Los grafos regulares multipartitos completos son uniformemente confiables**

Esta conjetura se basa en el resultado de Cheng [17] de que los grafos regulares multipartitos completos son  $t$ -óptimos.

**Los grafos de Möbius  $M_n$  son uniformemente confiables para todo  $n \neq 5$**

Esta conjetura se motiva en el hecho de que los grafos  $M_2 = K_4$ ,  $M_3 = K_{3,3}$  y  $M_4 = \text{Wagner}$  son uniformemente confiables, y en que el grafo de Petersen es un contraejemplo para gran cantidad de conjeturas en teoría de grafos; se asume entonces que Petersen es el único contraejemplo. En el presente trabajo se muestra que esta conjetura es falsa.

**$t$ -optimalidad y regularidad**

Esta conjetura sostiene que si  $G$  es un  $(p, q)$ -grafo  $t$ -óptimo, y se cumple  $2q = rp$ , con  $r > 2$ , entonces  $G$  debe ser  $r$ -regular.

**unicidad**

Si se considera una familia de  $(p,q)$ -grafos para la cual existe un grafo  $G$  uniformemente confiable, no se puede asegurar a priori que  $G$  sea único. Este problema abierto es equivalente al planteo de si el polinomio de confiabilidad caracteriza a un grafo. Observar que esto no es cierto en el caso de árboles, pues comparten el mismo polinomio de confiabilidad.

 **$t$ -optimalidad**

La determinación de grafos  $t$ -óptimos es fundamental en el contexto de búsqueda de grafos uniformemente confiables, ya que es una condición necesaria para la misma. Aún se desconoce una forma eficiente de determinar el grafo  $t$ -óptimo para una familia genérica de  $(p,q)$ -grafos, un conjunto de cardinalidad  $\binom{\frac{p(p-1)}{2}}{q}$ . Existen fórmulas para clases particulares de grafos, por ejemplo grafos densos casi-completos, o para grafos circulantes.

# Capítulo 2

## Contribuciones

En este capítulo se presentan los principales resultados aportados por este trabajo. En la Sección 2.1 se establece el problema particular de confiabilidad uniforme de la clase de los  $(12,18)$ -grafos encarado en esta tesis. En la Sección 2.2 se determina el grafo candidato a ser uniformemente confiable para la clase  $(12,18)$ . En la Sección 2.3 se muestran las características y propiedades del  $(12,18)$ -grafo candidato encontrado. Finalmente, la prueba de confiabilidad uniforme para el grafo candidato aparece en la Sección 2.4.

### 2.1. Búsqueda de $(12,18)$ -grafos uniformemente confiables

Las clases de grafos que son objeto de interés para este trabajo son las que incluyen a los grafos cúbicos, es decir las clases de la forma  $(p, \frac{3}{2}p)$  con  $p$  par.

Como se indicó en el Capítulo 1, para los grafos de este tipo el mayor valor de  $p$  para el cual tenemos conocimiento de la existencia de resultados de confiabilidad uniforme es  $p = 10$ , el grafo de Petersen, para el cual fue probada la confiabilidad uniforme. El objetivo planteado en esta tesis es entonces investigar la existencia de confiabilidad uniforme para  $p = 12$ , la clase de los  $(12,18)$ -grafos que es la siguiente en la secuencia.

Dentro de los  $(12,18)$ -grafos resultan de especial interés los grafos cúbicos. Existen 85  $(12,18)$ -grafos cúbicos conexos no isomorfos, resultado obtenido por búsqueda computacional por Bussemaker et.al. [21].

En relación a la arista-conectividad, de los 85 grafos cúbicos  $(12,18)$ , hay 4 que son 1-conexos, 24 2-conexos y 57 3-conexos. Entre los  $(12,18)$ -grafos 3-conexos, hay varios con nombre propio, que se ilustran a continuación.

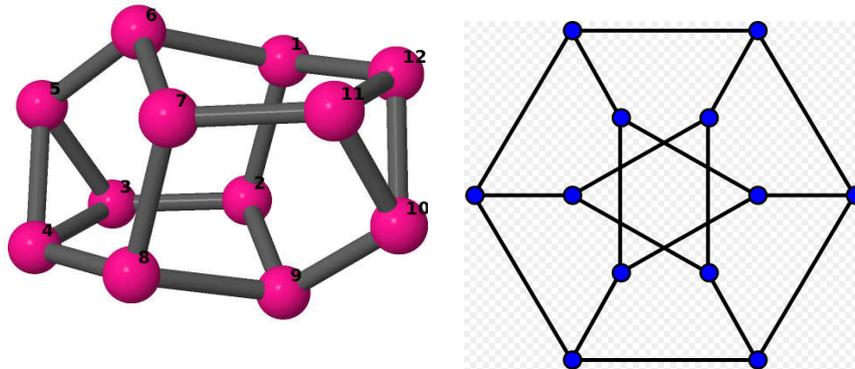


Figura 2.1 El grafo de Dürero

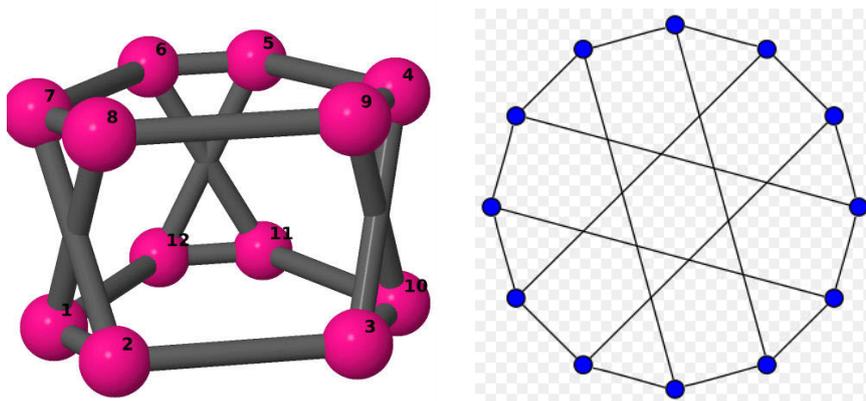


Figura 2.2 El grafo de Franklin

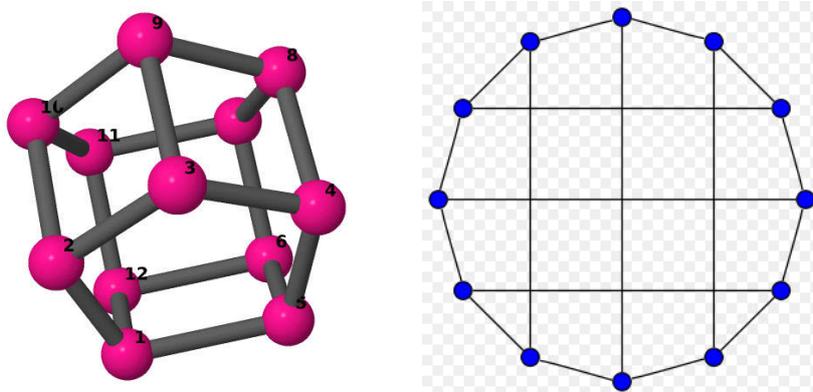


Figura 2.3 El cubo de Bidiakis

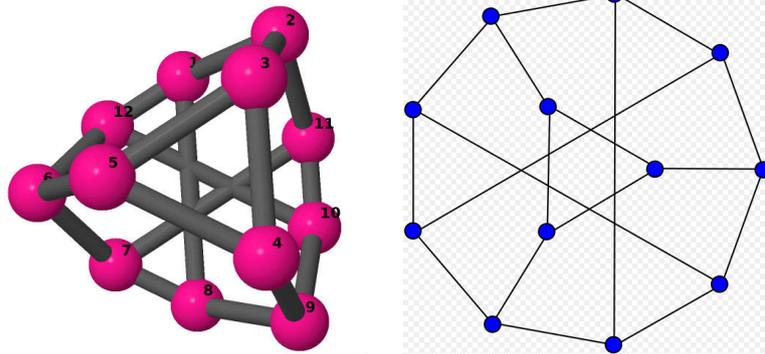


Figura 2.4 El grafo de Tietze

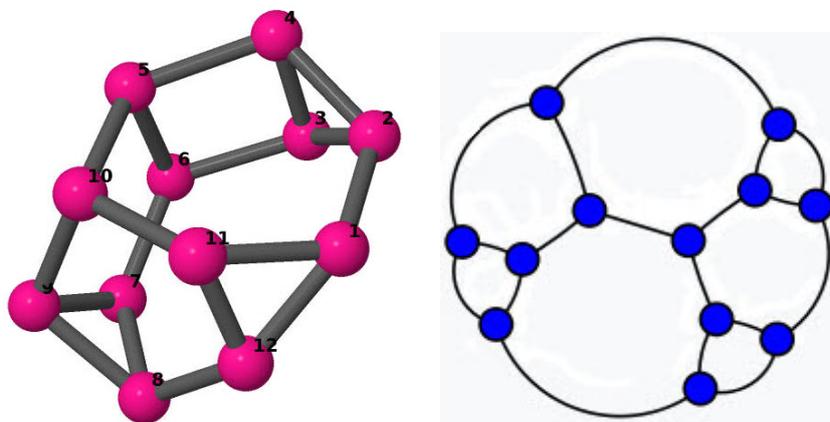


Figura 2.5 El grafo de Frucht

## 2.2. Determinación del (12,18)-grafo candidato

Para buscar un (12,18)-grafo candidato a ser uniformemente confiable, nos apoyamos en el Corolario 1.1 que establece condiciones necesarias que debe cumplir un grafo para ser uniformemente confiable. En este caso como la conectividad  $\lambda$  debe ser máxima, y la mayor conectividad posible para un (12,18)-grafo es  $\lambda = 3$ , buscamos el candidato dentro del conjunto de grafos cúbicos (12,18) 3-conexos (57 grafos).

Para imponer la condición necesaria de que el número de árboles de cubrimiento debe ser máximo ( $t$ -optimalidad del candidato), elaboramos un programa que toma como entrada el conjunto de aristas de un grafo  $H$ , calcula su matriz laplaciana  $\mathcal{L}(H)$  y determina  $\tau(H)$  en base a ella, utilizando el teorema de teoría algebraica de grafos [22] que establece que el número de árboles de cubrimiento de un grafo simple es igual a cualquier cofactor de su

matriz Laplaciana:

$$\tau(H) = \text{cofactor}(\mathcal{L}(H)) \quad (2.1)$$

Con este programa calculamos el número de árboles para cada uno de los 57 (12,18)-grafos 3-conexos. La estructura de cada uno de estos grafos se obtuvo de una tabla de grafos simples cúbicos que figura en el trabajo de Bussemaker et.al. mencionado anteriormente [21]. El programa fuente se presenta en la sección A.2 del Apéndice de esta tesis.

El resultado al que se llega es que para los (12,18)-grafos cúbicos existe un único grafo con máximo número de árboles de cubrimiento ( $\tau = 9800$ ), denominado Yutsis 18jF, que se muestra en la Figura 2.6, y el cual es entonces el único candidato a ser uniformemente confiable.

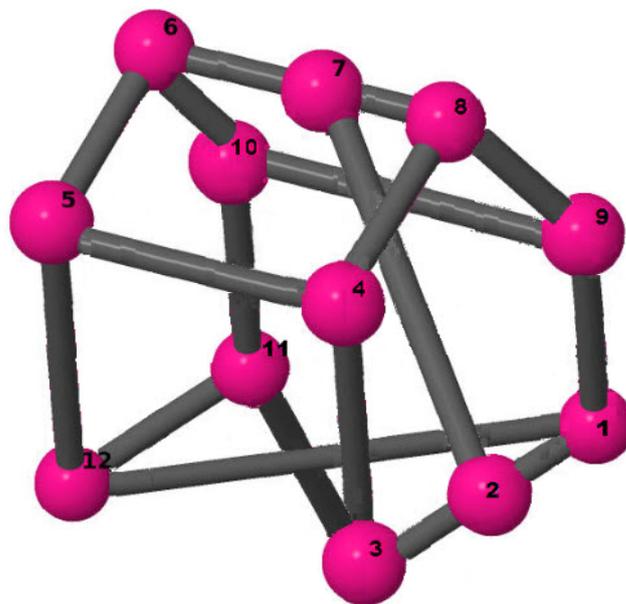


Figura 2.6 Grafo Yutsis 18jF

## 2.3. El grafo Yutsis 18jF

### 2.3.1. Propiedades generales del grafo Yutsis 18jF

El (12-18)-grafo candidato Yutsis 18jF es un grafo cúbico hamiltoniano como se puede observar de la Figura 2.6 siguiendo el ciclo numerado de los vértices.

La notación LCF (Lederberg,Coxeter,Frucht) para grafos cúbicos hamiltonianos que lo denota es  $LCF = [-4, 5, -4, 4, -5, 4, -5, 4, 4, -4, 4, 5]$ , correspondiente al ciclo de la figura.

En esta notación, para la posición de cada nodo se indica la posición relativa al mismo de su tercer nodo adyacente que no forma parte del ciclo hamiltoniano considerado.

El grafo Yutsis 18jF es un grafo de diámetro 3, no tiene ciclos de menos de 5 nodos ( $girth = 5$ ) y tiene 8 ciclos de largo 5.

Tiene super-conectividad  $\lambda = 3$ , es decir que los únicos grupos desconectores de aristas de cardinalidad tres que desconectan el grafo son los que aíslan trivialmente un nodo.

En general, un grafo Yutsis de orden  $n$  tiene  $2n$  nodos y  $3n$  aristas, y posee la propiedad de tener un corte con  $n + 2$  aristas, de forma que los subgrafos inducidos por los nodos de cada uno de los conjuntos del corte son árboles con igual cantidad de nodos y aristas. En el caso particular del grafo Yutsis 18jF, se tiene  $n = 6$  y pueden tomarse los nodos 1 a 6 de la Figura 2.6 como integrantes del subconjunto  $S$  del corte  $(S, T)$  del grafo y los nodos 7 a 12 como pertenecientes al subconjunto  $T$ . Los grafos Yutsis aparecen y son de interés en el contexto de la teoría cuántica de momento angular.

Se muestran a continuación algunos resultados de teoría algebraica de grafos aplicada al grafo Yutsis 18jF.

El polinomio característico  $\det(\lambda * I - A)$  del grafo Yutsis 18jF es:

$$\chi(\lambda) = \lambda^{12} - 18\lambda^{10} + 117\lambda^8 - 16\lambda^7 - 160\lambda^6 + 112\lambda^5 + 532\lambda^4 - 256\lambda^3 - 304\lambda^2 + 192\lambda.$$

Los valores propios del grafo y su multiplicidad correspondiente se muestran en la tabla siguiente.

Valor Propio	Multiplicidad
3	1
$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$	1
$\sqrt{2}$	2
1	2
0	1
$-\sqrt{2}$	2
-2	2
$\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$	1

Cuadro 2.1 Espectro del grafo Yutsis 18jF

El número de árboles  $\tau(Y)$  del grafo Yutsis 18jF puede obtenerse a partir de la tabla anterior mediante la fórmula que relaciona  $\tau$  con los valores propios del grafo y sus multiplicidades para un grafo  $k$ -regular [22]:

$$\tau = \frac{1}{n} \prod_{i=1}^{s_i-1} (k - \lambda_i)^{m_i} \quad (2.2)$$

Para Yutsis 18jF se tiene  $\tau(Y) = \frac{1}{12} \prod_{i=1}^7 (3 - \lambda_i)^{m_i} = 9800$ .

### 2.3.2. Valor de los coeficientes $m_k$ para el grafo Yutsis 18jF

En esta sección se presenta la deducción de los coeficientes  $m_k$  del grafo Yutsis 18jF, en adelante denotados como  $m_k(Y)$ . Inicialmente se especifica terminología y notación a usar y luego se calculan los coeficientes  $m_i(Y), 0 \leq i \leq 7$ .

#### Terminología y notación

Presentamos a continuación terminología y notación que se emplea recurrentemente en esta tesis y en particular en esta sección.

**Definición 2.1** *Un conjunto desconector **n-trivial** de tamaño  $k$  es un subconjunto de aristas  $U$  que verifica  $|U| = k$  y  $G - U$  tiene al menos un vértice aislado.*

**Definición 2.2** *Un conjunto desconector **l-trivial** de tamaño  $k$  es un subconjunto de aristas  $U$  que verifica  $|U| = k$  y  $G - U$  tiene al menos una arista aislada.*

Estas definiciones implican que un conjunto desconector n-trivial debe remover todas las aristas del grafo incidentes en por lo menos un nodo, mientras que un conjunto desconector l-trivial debe remover todas las aristas adyacentes a por lo menos una arista.

Un camino elemental de  $n$  vértices se denota como  $P_n$ . Alternativamente se lo denota como un (n-1)-path.

Un ciclo de  $n$  vértices se denota como  $C_n$ .

Un subgrafo formado por un nodo y sus tres nodos adyacentes se denota como  $K_{(1,3)}$ .

El grado de un nodo  $v$  se denota como  $deg(v)$

Una arista con un nodo extremo de grado  $r$  y el otro de grado  $s$  se denota como una arista r-s.

El grado mínimo de un grafo  $G$  se denota como  $\delta(G)$ .

#### Valor de los coeficientes $m_0, m_1$ y $m_2$ para el grafo Yutsis 18jF

Como la arista-conectividad de Yutsis 18jF es  $\lambda = 3$ , tenemos que  $m_0(Y) = m_1(Y) = m_2(Y) = 0$ .

#### Valor del coeficiente $m_3$ para el grafo Yutsis 18jF

Los únicos grupos de desconectores de tres aristas del grafo Yutsis 18jF son los desconectores n-triviales, por lo que resulta que  $m_3(Y) = 12$ , su número de vértices.

**Valor del coeficiente  $m_4$  para el grafo Yutsis 18jF**

Por inspección, se observa que todos los conjuntos desconectores de 4 aristas están formados ya sea por tres aristas incidentes a un nodo dado y otra arista cualquiera, o por las 4 aristas incidentes a un arista dada. Es así que identificamos la siguiente partición de los grupos de desconectores de cardinalidad 4:

- $12 \times 15 = 180$  desconectores n-triviales.
- 18 desconectores l-triviales.

Resulta entonces  $m_4(Y) = 180 + 18 = 198$ .

**Valor del coeficiente  $m_5$  para el grafo Yutsis 18jF**

Los conjuntos de desconectores de tamaño 5 de Yutsis 18jF se pueden particionar en los siguientes subconjuntos disjuntos:

- $12 \times \binom{15}{2} - 18 = 1242$  desconectores n-triviales.
- $18 \times 13 = 234$  desconectores l-triviales.
- $12 \times 3 = 36$  desconectores de  $P_3$  (cada nodo del grafo es el nodo central de tres 2-paths).
- 8 desconectores de  $C_5$ .

El coeficiente  $m_5$  resulta ser entonces  $m_5(Y) = 1242 + 234 + 36 + 8 = 1520$ .

**Valor del coeficiente  $m_6$  para el grafo Yutsis 18jF**

Los conjuntos de desconectores de tamaño 6 de Yutsis 18jF se pueden particionar en los siguientes subconjuntos disjuntos:

- $12 \times \binom{15}{3} - 48 - 18 \times 13 = 5178$  desconectores n-triviales.
- $18 \times \binom{13}{2} - 72 = 1332$  desconectores l-triviales.
- $12 \times 3 \times 11 = 396$  desconectores de  $P_3$ .
- $18 \times 4 = 72$  desconectores de  $P_4$ .
- 12 desconectores de  $K_{(1,3)}$ .
- $8 \times 13 = 104$  desconectores de  $C_5$  asociados a los 8 ciclos de largo 5 del grafo.

- 12 desconectores de  $C_6$  asociados a los 12 ciclos de largo 6 del grafo.
- $\frac{8 \times 5 - 12}{2} = 14$  desconectores que aíslan a los subgrafos inducidos por los nodos de los ciclos de largo 5 y por un nodo adyacente a uno de los nodos del ciclo. Se considera aquí que cada  $C_5$  + nodo adyacente comparte un conjunto desconector con un  $C_6$  o con otro  $C_5$  + nodo adyacente.

El coeficiente  $m_6$  de Yutsis 18jF vale entonces  $m_6(Y) = 5178 + 1332 + 396 + 72 + 12 + 104 + 12 + 14 = 7120$ .

### Valor del coeficiente $m_7$ para el grafo Yutsis 18jF

Como Yutsis 18jF es un  $(12,18)$ -grafo, la cantidad total de conjuntos de siete aristas vale  $\binom{18}{7}$ . Para determinar la cantidad de éstos que desconectan al grafo, hay que restarle el número de árboles de cubrimiento del grafo, que son los grupos de siete aristas que mantienen la conectividad.

Resulta entonces que el coeficiente  $m_7(Y)$ , cantidad de conjuntos desconectores de tamaño 7 del grafo Yutsis 18jF vale  $m_7(Y) = \binom{18}{7} - \tau(Y) = \binom{18}{7} - 9800 = 22024$ .

La cantidad de desconectores de cada tamaño del grafo Yutsis 18jF se resume en la siguiente tabla:

$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$
0	0	12	198	1520	7120	22024

Cuadro 2.2 Cantidad de desconectores de cada tamaño del grafo Yutsis 18jF

### Polinomio de no-confiabilidad $U$ del grafo Yutsis 18jF

A partir de los coeficientes  $m_k$  calculados y empleando la ecuación 1.3 queda completamente determinado el polinomio de no-confiabilidad  $U$  del grafo Yutsis18jF, cuya gráfica se muestra en la Figura 2.7, y que tiene la siguiente expresión:

$$U(Y, \rho) = 12\rho^3(1 - \rho)^{15} + 198\rho^4(1 - \rho)^{14} + 1520\rho^5(1 - \rho)^{13} + 7120\rho^6(1 - \rho)^{12} + 22024\rho^7(1 - \rho)^{11} + \sum_{k=8}^{18} \binom{18}{k} \rho^k(1 - \rho)^{18-k}$$

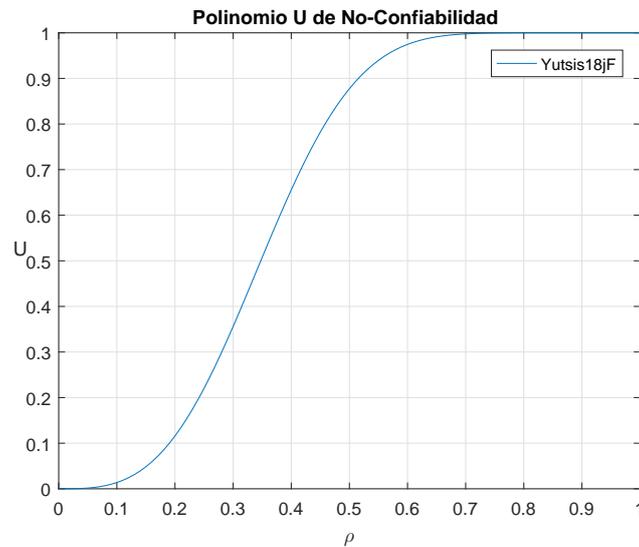


Figura 2.7 Polinomio U del grafo Yutsis 18jF

Puede observarse que para una probabilidad de falla de arista  $\rho = 0,35$  hay un 50% de probabilidad de que el grafo Yutsis18jF quede desconexo, y para valores de  $\rho \geq 0,7$  la probabilidad de desconexión del grafo es muy cercana a la unidad.

En la Figura 2.8 se comparan los polinomios  $U$  de no-confiabilidad de varios grafos cúbicos destacados con el del grafo Yutsis 18jF.

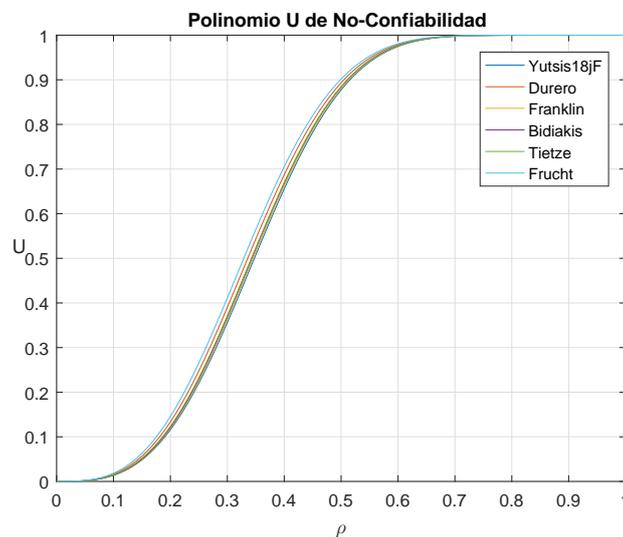


Figura 2.8 Polinomio U de varios grafos cúbicos

De la gráfica comparativa se concluye que el grafo Yutsis18jF es uniformemente más confiable que todos los grafos cúbicos considerados.

## 2.4. Prueba de que Yutsis 18jF es uniformemente confiable

### 2.4.1. Características generales de la prueba

Cualquier (12,18)-grafo pertenece a una de las siguientes categorías:

- Es un grafo cúbico.
- Tiene algún nodo de grado 1.
- No tiene nodos de grado 1 pero tiene algún nodo de grado 2

La estrategia empleada en la prueba consiste en demostrar que los coeficientes  $\{m_k(Y)\}_{k=3,\dots,7}$  del grafo Yutsis 18jF son menores o iguales que los coeficientes  $m_k$  de todos los (12,18)-grafos de cada una de las tres categorías de grafos mencionadas. Si se cumple esto, se verifica la condición suficiente para confiabilidad uniforme presentada en el Capítulo 1 y queda probada la confiabilidad uniforme del grafo Yutsis 18jF.

Características generales del procedimiento de prueba:

- Para cada una de las tres categorías de (12,18)-grafos y para cada coeficiente  $m_k$ , se van contando y acumulando distintos conjuntos desconectores de aristas de cardinalidad  $k$  hasta igualar o superar el valor de  $m_k(Y)$ .
- Los conjuntos de desconectores son listados en forma secuencial, y son calculados de forma de asegurar que cada conjunto sea disjunto con cada uno de los conjuntos que lo preceden en el listado. Es decir que se aplica el principio de inclusión-exclusión, incluyendo solo nuevos desconectores y excluyendo grupos de desconectores ya contabilizados previamente. Esto lleva a que en la sumatoria de conteo de desconectores puedan aparecer términos negativos, que evitan que un mismo conjunto desconector sea contado más de una vez.
- En cada prueba, se comienza siempre considerando desconectores n-triviales y l-triviales, y en caso de ser necesario se consideran a continuación otro tipo de desconectores, como por ejemplo los desconectores de  $P_3$  y de  $P_4$  o de  $C_3$  y de  $C_4$ .
- Para cada tipo de desconector considerado se trabaja con el grafo del peor caso para ese tipo de desconector (el grafo que presenta mínima cantidad de desconectores de ese tipo).

- En particular para los casos de grafos sin nodos de grado 1 y con dos o más nodos de grado dos, se considera el peor caso para la cantidad de desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado tres y  $l$ -triviales de aristas 3-3, trabajando en general con el grafo con menor número de nodos de grado tres.
- Para el caso de los grafos cúbicos, a fin de corroborar la prueba matemática se desarrolló un programa que dado un grafo simple y un tamaño  $k$  de conjunto desconector, calcula todos los desconectores distintos de  $k$  aristas del grafo. Este programa se lista en la sección A.3 del Apéndice.

Para cada uno de los 85 (12,18)-grafos cúbicos no isomorfos, se computaron los coeficientes  $m_3..m_7$ , verificándose que en todos los casos los coeficientes  $m_k(Y)$  del grafo Yutis 18jF son mínimos.

### 2.4.2. Una cota útil para el número de árboles de un $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo con nodos colgantes

Lo que presentamos aquí es un resultado que permite simplificar la prueba para el coeficiente  $m_7$  del (12,18)-grafo candidato Yutis 18jF, pero que es aplicable también para en el caso mas general del coeficiente  $m_{q-p+1}$  de un  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo.

Este resultado se basa en la transformación *Swing Surgery* mencionada en el Capítulo 1. La definición de esta transformación que vamos a utilizar es la descrita en [23].

#### La transformación de *Swing Surgery* y sus propiedades

Dados un grafo simple  $G = (V, E)$  y un nodo  $u \in V$ , denotamos como  $N_G(u)$  al conjunto de nodos adyacentes a  $u$  (vecindad de  $u$ ). Suponemos que hay dos nodos  $u, v \in V$  de forma que  $N_G(v) = u_1, u_2, \dots, u_i$  y  $N_G(u) = u_1, u_2, \dots, u_j$  con  $i < j - 1$ . Decimos que el grafo  $\tilde{G}$  se obtiene a partir de  $G$  por *Swing Surgery* eliminando las aristas  $\{\{u, u_{i+1}\}, \dots, \{u, u_k\}\}$  de  $G$  e insertando las nuevas aristas  $\{\{v, u_{i+1}\}, \dots, \{v, u_k\}\}$ , con  $i + 1 \leq k \leq j - 1$ , tal como se muestra en la Figura 2.9 en un ejemplo con  $i = 2, k = 3, j = 5$ .

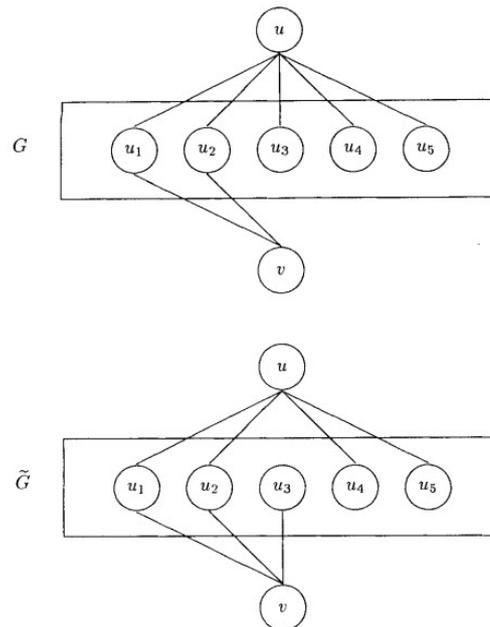


Figura 2.9 La transformación *Swing Surgery*

La propiedad que se cumple para la transformación *Swing Surgery* descrita es que  $R(\tilde{G}, \rho) \geq R(G, \rho)$  para toda probabilidad de falla  $\rho \in (0, 1)$ .

Si además se cumple la condición adicional de que existan en  $G$  aristas  $\{u_r, u_s\}$  y  $\{u_s, u_t\}$  tales que  $1 \leq r \leq i, i + 1 \leq s \leq k$  y  $k + 1 \leq t \leq j$ , entonces se verifica que  $R(\tilde{G}, \rho) > R(G, \rho)$ .

### Cota para el número de árboles de un $(p, 3/2p)$ -grafo con nodos colgantes

**Lema 2.1** *Todo  $(p, \frac{3}{2}p)$ -grafo  $G$  conexo con  $p$  par,  $p \geq 6$  y  $\delta(G) = 1$ , se puede transformar en otro  $(p, \frac{3}{2}p)$ -grafo  $H$  conexo con  $\delta(H) = 2$  que verifica  $\tau(H) \geq \tau(G)$ .*

Este lema asegura que si un grafo conexo de la clase  $(p, \frac{3}{2}p)$  tiene nodos colgantes, siempre se puede encontrar otro grafo de la clase sin nodos colgantes y que tiene mayor o igual cantidad de árboles de cubrimiento.

*Prueba:* Probaremos primero que se puede transformar el grafo  $G$  en otro grafo  $H$  sin nodos colgantes y con igual o mayor confiabilidad. Sea  $G = (V, E)$  un  $(p, \frac{3}{2}p)$ -grafo conexo y sea  $v \in V$  con  $\deg(v) = 1$ . Sin perder generalidad asumiremos que  $v$  es el único nodo de grado 1 en  $G$ , de no ser así la demostración se puede extender fácilmente pues se pueden eliminar uno a uno en forma secuencial los nodos colgantes de  $G$ . Sea  $w \in V$  el nodo adyacente a  $v$  en  $G$ . Consideramos un 2-path  $v - w - u$  desde el nodo colgante  $v$  a un nodo  $u \in V$ , con  $\deg(u) \geq 2$ . Este camino siempre existe por la relación que hay entre el número de aristas y vértices de  $G$  y por ser  $G$  conexo. Podemos distinguir tres casos:

1. Si  $\deg(u) \geq 3$ , se elimina la arista  $(u, x)$  entre  $u$  y un nodo  $x \in V$  adyacente a  $u$ , y se agrega la arista  $(v, x)$ , obteniéndose el nuevo grafo  $H$  que se muestra en la Figura 2.10. Por aplicación directa de la propiedad de Swing Surgery, resulta que  $R(H, \rho) \geq R(G, \rho) \forall \rho \in (0, 1)$ .

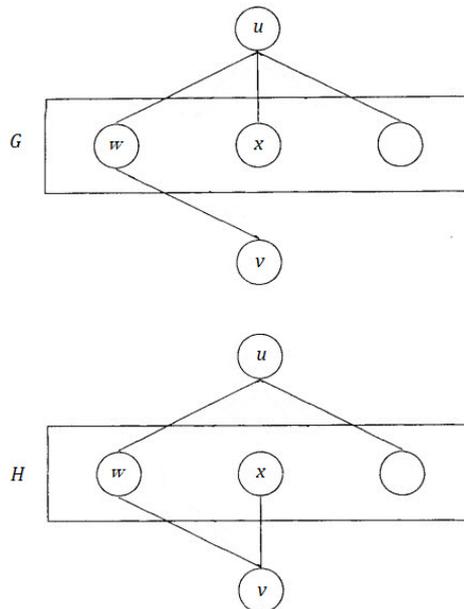


Figura 2.10 Aplicación de Swing Surgery para el caso 1

2. Si  $\deg(u) = 2$  y  $\deg(w) \geq 3$ , se elimina la arista  $(u, w)$  y se agrega la arista  $(v, u)$  para obtener el grafo  $H$ , como ilustra la Figura 2.11.

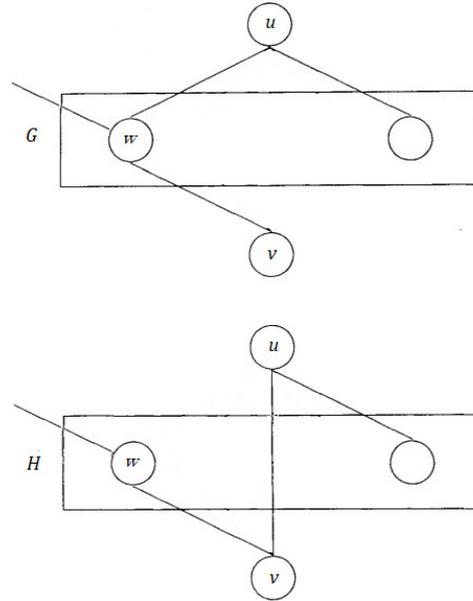


Figura 2.11 Transformación del grafo  $G$  en el caso 2

En este caso puede observarse que:

- Todo conjunto de desconectores de  $H$  que incluya a la arista  $(v, w)$  va a desconectar también a  $G$ , pues  $v$  es colgante en  $G$ . El recíproco no es necesariamente cierto, pues pueden existir conjuntos de desconectores de  $G$  que incluyan a  $(v, w)$  que no desconecten a  $H$ .
- Si el conjunto de desconectores de  $H$  considerado no incluye a la arista  $(v, w)$  ni a la arista  $(v, u)$ , los caminos que pasan por la arista  $(u, w)$  en  $G$  pasan ahora por el 2-path  $u - v - w$  en  $H$  y se tiene que los conjuntos de desconectores de  $H$  que no incluyen a las aristas  $(v, w)$  y  $(v, u)$ , coinciden exactamente con los conjuntos de desconectores de  $G$  que no incluyen a las aristas  $(v, w)$  y  $(u, w)$ .
- Si el conjunto de desconectores de  $H$  considerado no incluye a la arista  $(v, w)$  pero sí a la arista  $(v, u)$ , dicho número de desconectores va a ser exactamente igual al número de desconectores de  $G$  que incluyen a la arista  $(u, w)$ .

Teniendo en cuenta estas tres observaciones podemos concluir que para todo conjunto de desconectores de tamaño dado  $k$ , se verifica que  $m_k(H) \leq m_k(G)$ , y por lo tanto la no-confiabilidad de  $H$  es menor que la de  $G$ , cumpliéndose también para este caso que  $R(H, \rho) \geq R(G, \rho) \forall \rho \in (0, 1)$ .

3. Si  $\deg(u) = 2$  y  $\deg(w) = 2$ , la idea es moverse a partir de  $u$  hasta llegar a un nodo  $x$  con  $\deg(x) \geq 3$ , lo que necesariamente se va a tener que dar en algún momento por las características de  $G$ , ya que es un  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo conexo. Sea  $y$  un nodo adyacente a  $x$  que no está en el camino encontrado desde  $u$  a  $x$ . Se elimina la arista  $(x, y)$  y se agrega la arista  $(v, y)$  obteniéndose un grafo  $H$  sin nodos colgantes, como se ilustra en la Figura 2.12. Por argumentos similares a los del caso 2), se prueba que  $R(H, \rho) \geq R(G, \rho) \forall \rho \in (0, 1)$ . En este caso el nodo  $y$  juega el papel del nodo  $u$  del caso 2) y el camino  $v, w, u, \dots, x$  juega el papel de la arista  $(v, w)$  del caso 2).

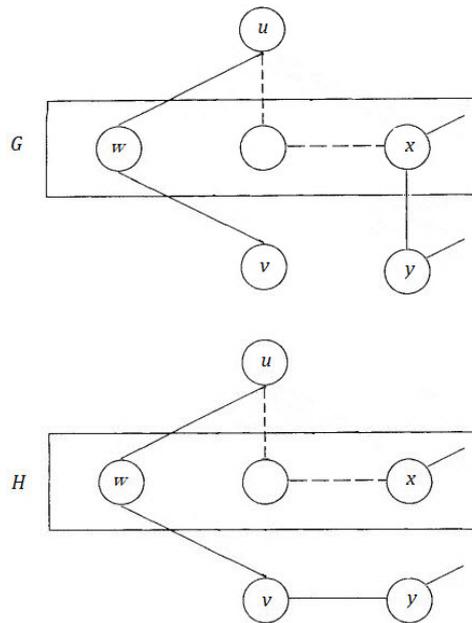


Figura 2.12 Transformación del grafo  $G$  en el caso 3

Hasta aquí se ha probado que a partir de  $G$  siempre se puede encontrar un grafo  $H$  con  $\delta(H) = 2$  tal que  $U(H, \rho) \leq U(G, \rho) \forall \rho \in (0, 1)$ . Combinando este resultado con la proposición 1.2 del Capítulo 1, y empleando el contrareciproco de la misma se deriva que  $m_{q-p+1}(H) \leq m_{q-p+1}(G)$ . A partir del resultado general  $m_{q-p+1} = \binom{q}{q-p+1} - \tau$  podemos concluir entonces que  $\tau(H) \geq \tau(G)$  QED.  $\square$

La aplicación práctica de este lema en el contexto de la prueba de  $t$ -optimalidad del grafo Yutsis 18jF, radica en que no es necesario comparar el coeficiente  $m_7(Y)$  con los coeficientes  $m_7$  de los (12-18)-grafos que tienen nodos colgantes, ya que por el lema resulta suficiente compararlo con los coeficientes  $m_7$  de los (12-18)-grafos  $G$  con  $\delta(G) \geq 2$ . Este resultado es aplicable en forma más general para cualquier  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo que sea candidato a ser uniformemente confiable.

### 2.4.3. El coeficiente $m_3$ se minimiza en Yutsis 18jF

#### Grafos cúbicos (12,18)

Todos los grafos cúbicos (12,18) tienen como mínimo una cantidad de desconectores de tamaño tres, igual al número de nodos (12), por que se verifica trivialmente. Para probarlo para el resto de los (12,18)-grafos, es suficiente mostrar que se cumple para los que tienen algún nodo de grado 1 y para los que no tienen nodos de grado 1 pero sí algún nodo de grado 2.

#### (12,18)-grafos con nodos de grado 1

Sea  $H$  un (12,18)-grafo con un nodo de grado 1. Considerando desconectores  $n$ -triviales de dicho nodo se cumple que  $m_3(H) \geq \binom{17}{2} = 136 > 12 = m_3(Y)$ .

#### (12,18)-grafos sin nodos de grado 1 y con nodos de grado 2

Sea  $H$  un (12,18)-grafo sin nodos de grado 1 y con al menos un nodo de grado 2. Considerando desconectores  $n$ -triviales de dicho nodo se cumple que  $m_3(H) \geq 16 > 12 = m_3(Y)$ .

### 2.4.4. El coeficiente $m_4$ se minimiza en Yutsis 18jF

#### Grafos cúbicos (12,18)

Todos los grafos cúbicos (12,18) poseen como mínimo los mismos desconectores de tamaño cuatro que el Yutsis 18jF:

- 180 desconectores de  $n$ -triviales.
- 18 desconectores  $l$ -triviales

Puede afirmarse entonces que  $m_4(Y) = 198$  es el menor valor de  $m_4$  entre todos los grafos cúbicos.

#### (12,18)-grafos con nodos de grado 1

Sea  $H$  un (12,18)-grafo con un nodo de grado 1, se cumple que  $m_4(H) \geq \binom{17}{3} = 680 > 198 = m_4(Y)$ .

**(12,18)-grafos sin nodos de grado 1 y con nodos de grado 2**

Sea  $H$  un (12,18)-grafo sin nodos de grado 1 y con al menos un nodo de grado 2. Consideramos solo desconectores n-triviales y distinguimos 3 casos posibles para  $H$ :

(i)  $H$  tiene dos nodos adyacentes  $v_1$  y  $v_2$  tales que  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$ . Se verifica en este caso que  $m_4(H) \geq 2 \times \binom{16}{2} - 15 = 225 > 198 = m_4(Y)$ .

(ii)  $H$  tiene dos nodos no adyacentes  $v_1$  y  $v_2$  tales que  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$ . Se cumple entonces que  $m_4(H) \geq 2 \times \binom{16}{2} - 1 = 239 > 198 = m_4(Y)$ .

(iii)  $H$  tiene un único nodo  $v_1$  con  $\deg(v_1) = 2$ . Por el *Handshaking Lemma*, la secuencia de grados de vértices de  $H$  debe ser (4,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2). Resulta entonces que en  $H$  hay al menos 8 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$ . Tomando esto en cuenta resulta  $m_4(H) \geq \binom{16}{2} + 8 \times 15 = 240 > 198 = m_4(Y)$ .

**2.4.5. El coeficiente  $m_5$  se minimiza en Yutsis 18jF****Grafos cúbicos (12,18)**

Distinguimos 3 casos:

(i)  $H$  tiene un ciclo de largo 3. Consideramos el peor caso en que haya un único  $C_3$ , ya que si hay más de uno es claro que la cantidad de desconectores que desconectan a  $C_3$  es mayor y por lo tanto también es mayor el número de desconectores de cardinalidad cinco. En este caso se cumple que  $H$  tiene al menos las cantidades de desconectores de tamaño 5 siguientes:

- $12 \times \binom{15}{2} - 18 = 1242$  desconectores n-triviales.
- $18 \times 13 - 3 = 231$  desconectores l-triviales.
- $\binom{12}{2} - 3 = 63$  desconectores de  $C_3$ .

Se verifica entonces que  $m_5(H) \geq 1242 + 231 + 63 = 1536 > 1520 = m_5(Y)$ .

(ii)  $H$  no tiene ciclos de largo 3 pero tiene un ciclo de largo 4. Consideramos el peor caso en que haya un único  $C_4$ , ya que si hay más de uno es claro que la cantidad de desconectores que desconectan a  $C_4$  es mayor y por lo tanto también es mayor el número de desconectores de cardinalidad cinco. Para este caso se cumple que  $H$  tiene al menos las cantidades de desconectores de tamaño 5 siguientes:

- $12 \times \binom{15}{2} - 18 = 1242$  desconectores n-triviales.
- $18 \times 13 = 234$  desconectores l-triviales.

- $12 \times 3 = 36$  desconectores de  $P_3$ .
- 10 desconectores de  $C_4$ .

Se verifica entonces que  $m_5(H) \geq 1242 + 234 + 36 + 10 = 1522 > 1520 = m_5(Y)$ .

(iii)  $H$  no tiene ciclos de largo 3 o 4. De los 85 grafos cúbicos (12,18) no isomorfos, hay únicamente 2 en estas condiciones, con  $girth = 5$ . Uno es el candidato y el otro es el grafo denominado Yutxis 18jH que se muestra en la 2.13.

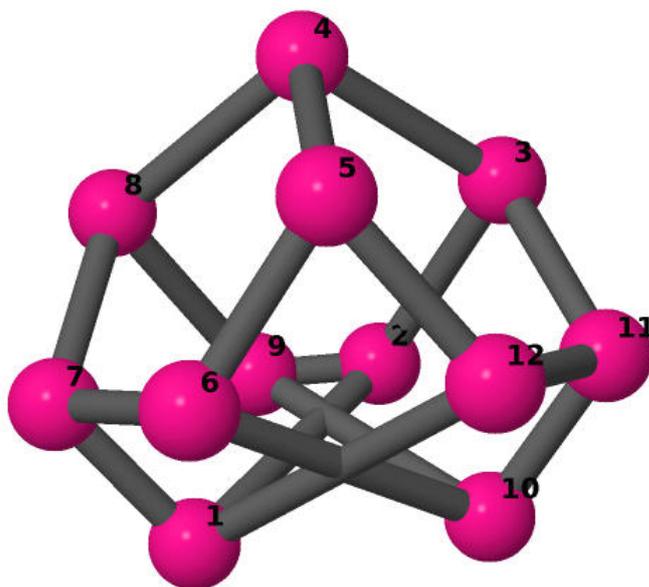


Figura 2.13 Grafo Yutxis 18jH

Por inspección se observa que este último tiene 9 ciclos de largo 5, un ciclo más que el grafo candidato, por lo que su cantidad de desconectores de tamaño 5 es  $m_5(H) = 1521 > 1520 = m_5(Y)$ .

Concluimos entonces que Yutxis 18jF tiene el mínimo coeficiente  $m_5$  entre los grafos cúbicos (12,18).

### (12,18)-grafos con nodos de grado 1

Sea  $H$  un grafo (12,18) con un nodo de grado 1, se cumple que  $m_5(H) \geq \binom{17}{4} = 2380 > 1520 = m_5(Y)$ .

**(12,18)-grafos sin nodos de grado 1 y con nodos de grado 2**

Distinguimos tres casos, según el grafo  $H$  tenga un único nodo de grado 2, exactamente dos nodos de grado 2 o tres ó más nodos de grado 2.

(i)  $H$  tiene un único nodo  $v_1$  con  $\deg(v_1) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  debe ser  $(4,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2)$ , y  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 5:

- $\binom{16}{3} = 560$  desconectores que aíslan  $v_1$ .
- $8 \times \binom{15}{2} - 21 = 820$  desconectores n-triviales de 8 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$ . Corresponde a un peor caso en el que el nodo de grado 4 es adyacente a  $v_1$ , y por lo tanto el grafo tiene trece aristas 3-3, cantidad que debe restarse al calcular los desconectores n triviales para evitar contar duplicados (los restantes ocho que se restan son para no duplicar desconectores que incluyen a  $v_1$ ).
- $12 \times 13 - 4 = 152$  desconectores que aíslan 12 aristas de  $H$  cuyos extremos son ambos de grado 3. Corresponde a un peor caso en el que cuatro de estas aristas inciden en nodos de grado 3 adyacentes a  $v_1$ .

Resulta así que  $m_5(H) \geq 560 + 820 + 152 = 1532 > 1520 = m_5(Y)$ .

(ii)  $H$  tiene exactamente dos nodos  $v_1$  y  $v_2$  con  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  debe ser  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$  o  $(5,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$ . Aquí a su vez distinguimos tres subcasos:

(ii\_a) Los nodos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes. Podemos asegurar que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 5:

- $2 \times \binom{16}{3} - \binom{15}{2} = 1015$  desconectores n-triviales de  $v_1$  y  $v_2$ .
- $6 \times \binom{15}{2} - 27 = 603$  desconectores n-triviales de 6 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  ni a  $v_2$ . Corresponde a un peor caso en el que  $H$  tiene dos nodos de grado cuatro.

Tenemos entonces que  $m_5(H) \geq 1015 + 603 = 1618 > 1520 = m_5(Y)$ .

(ii\_b) Los nodos  $v_1$  y  $v_2$  no son adyacentes, y la secuencia de grados de los vértices de  $H$  es  $(5,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$ . Podemos comprobar en este caso que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 5:

- $2 \times \binom{16}{3} - 14 = 1106$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ .
- $5 \times \left( \binom{15}{2} - 2 \right) - 7 = 508$  desconectores n-triviales de 5 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  ni a  $v_2$ . Corresponde a un peor caso en que el subgrafo inducido por los 5 nodos de grado 3 tiene el número máximo posible de 7 aristas 3-3.

Se verifica entonces que  $m_5(H) \geq 1106 + 508 = 1614 > 1520 = m_5(Y)$ .

(ii\_c) Los nodos  $v_1$  y  $v_2$  no son adyacentes, y la secuencia de grados de los vértices de  $H$  es  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$ . Se observa en este caso que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 5:

- $2 \times \binom{16}{3} - 14 = 1106$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ .
- $4 \times \left( \binom{15}{2} - 2 \right) - 5 = 407$  desconectores n-triviales de 4 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  ni a  $v_2$ . Corresponde a un peor caso en que el subgrafo inducido por los 4 nodos de grado 3 tiene el número máximo posible de 5 aristas 3-3.
- 12 desconectores n-triviales de uno de los 2 nodos de grado 4. Corresponde a un peor caso en el que el nodo de grado 4 es adyacente a  $v_1$  y a  $v_2$ .

Resulta entonces que  $m_5(H) \geq 1106 + 407 + 12 = 1525 > 1520 = m_5(Y)$ .

(iii)  $H$  tiene tres o más nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  con  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$ . Consideramos tres subcasos:

(iii\_a)  $v_1$  es adyacente tanto a  $v_2$  como a  $v_3$ . Se constata que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 5:

- $3 \times \binom{14}{3} = 1092$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .
- $2 \times \binom{14}{3} = 728$  desconectores l-triviales las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_1, v_3)$ .

Tenemos entonces que  $m_5(H) \geq 5 \times \binom{14}{3} = 1820 > 1520 = m_5(Y)$ .

(iii\_b) Los nodos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes, y no son adyacentes a  $v_3$ . Para este caso encontramos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 5 de  $H$ :

- $\binom{16}{3} + \binom{15}{3} + \binom{13}{3} + 3 \times \binom{13}{2} + 13 = 1548$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ .

Se cumple entonces que  $m_5(H) \geq 1548 > 1520 = m_5(Y)$ .

(iii\_c) Los nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$  no son adyacentes entre sí. Se puede confirmar en este caso que  $H$  tiene al menos la siguiente cantidad de desconectores de tamaño 5:

- $3 \times \binom{16}{3} - 3 \times 14 = 1638$  desconectores n-triviales de los nodos individuales  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .

Resulta entonces que  $m_5(H) \geq 1638 > 1520 = m_5(Y)$ .

### 2.4.6. El coeficiente $m_6$ se minimiza en Yutsis 18jF

#### Grafos cúbicos (12,18)

Distinguimos 3 casos:

(i)  $H$  tiene un ciclo de largo 3. Consideramos al igual que para la prueba de  $m_5$  el peor caso en que haya un único  $C_3$ . En este caso se cumple que  $H$  tiene al menos las cantidades de desconectores de tamaño 6 siguientes:

- $12 \times \binom{15}{3} - 18 \times 13 - 48 + 1 = 5179$  desconectores n-triviales.
- $15 \times \left( \binom{13}{2} - 4 \right) + 3 \times \left( \binom{12}{2} - 3 \right) = 1299$  desconectores l-triviales.
- $9 \times 3 \times 11 + 3 \times 20 + 3 \times \left( \binom{12}{2} - 3 \right) = 546$  desconectores de  $P_3$ .
- $\binom{12}{3} - 3 \times 10 - 12 = 178$  desconectores de  $C_3$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 5179 + 1299 + 546 + 178 = 7202 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii)  $H$  no tiene ciclos de largo 3 pero tiene un ciclo de largo 4. Consideramos al igual que para la prueba de  $m_5$  el peor caso en que haya un único  $C_4$ . Para este caso se cumple que  $H$  tiene al menos las cantidades de desconectores de tamaño 6 siguientes:

- $12 \times \binom{15}{3} - 18 \times 13 - 48 = 5178$  desconectores n-triviales.
- $18 \times \left( \binom{13}{2} - 4 \right) - 2 = 1330$  desconectores l-triviales.
- $12 \times 3 \times 11 - 4 = 392$  desconectores de  $P_3$ .
- 12 desconectores de subgrafos  $K_{(1,3)}$ .
- $14 \times 4 + 4 \times 13 = 108$  desconectores de  $P_4$ .

- $\binom{10}{2} - 6 = 39$  desconectores de  $C_4$ .
- $12 \times 4 = 48$  desconectores de los cuatro nodos del ciclo de largo 4 y de un nodo adyacente al ciclo, que no contienen el link que une el nodo adyacente con el ciclo.
- 6 desconectores de los subgrafos de 6 nodos formados por los cuatro nodos del ciclo de largo 4 y 2 nodos adyacentes al ciclo.
- 8 desconectores de los subgrafos de 6 nodos inducidos por los cuatro nodos del ciclo de largo 4, un nodo adyacente al ciclo y otro nodo adyacente a este último.

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 5178 + 1330 + 392 + 12 + 108 + 39 + 48 + 6 + 8 = 7121 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iii)  $H$  no tiene ciclos de largo 3 o 4. El único otro grafo cúbico (12,18) con esta propiedad aparte del candidato es el Yutsis 18jH, mostrado en la Figura 2.13, que tiene las cantidades siguientes de conjuntos desconectores de tamaño 6:

- $12 \times \binom{15}{3} - 48 - 18 \times 13 = 5178$  desconectores n-triviales.
- $18 \times \binom{13}{2} - 72 = 1332$  desconectores l-triviales.
- $12 \times 3 \times 11 = 396$  desconectores de  $P_3$ .
- $18 \times 4 = 72$  desconectores de  $P_4$ .
- 12 desconectores de los subgrafos  $K_{(1,3)}$ .
- $9 \times 13 = 117$  desconectores asociados a los 9 ciclos de largo 5 del grafo.
- 9 desconectores de  $C_6$ .
- $\frac{9 \times 5 - 9}{2} = 18$  desconectores que aíslan a los subgrafos inducidos por los ciclos de largo 5 y por un nodo adyacente a uno de los nodos del ciclo.

El coeficiente  $m_6$  de Yutsis 18jH vale entonces  $m_6 = 5178 + 1332 + 396 + 72 + 12 + 117 + 9 + 18 = 7134 > 7120 = m_6(Y)$

**(12,18)-grafos con nodos de grado 1)**

Distinguimos dos casos, según el grafo  $H$  tenga dos ó más nodos de grado 1 o un único nodo de grado 1 .

(i)  $H$  tiene al menos dos nodos  $v_1$  y  $v_2$  tales que  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 1$ . Se cumple en este caso que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $2 \times \binom{17}{5} - \binom{16}{4} = 10556$  desconectores no simultáneos de los nodos individuales  $v_1$  y  $v_2$

Tenemos así que  $m_6(H) \geq 10556 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii)  $H$  tiene un único nodo  $v_1$  con  $\deg(v_1) = 1$ . Aquí a su vez distinguimos tres subcasos:

(ii\_a)  $H$  tiene al menos un nodo  $v_2$  de grado 2 y que es adyacente a  $v_1$ . Podemos asegurar que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{17}{5} = 6188$  desconectores n-triviales de  $v_1$ .
- $\binom{16}{5} = 4368$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 6188 + 4368 = 10556 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii\_b)  $H$  tiene al menos un nodo  $v_2$  de grado 2 y que no es adyacente a  $v_1$ . Para este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{17}{5} = 6188$  desconectores n-triviales de  $v_1$ .
- $\binom{15}{4} = 1365$  desconectores n-triviales de  $v_2$ .

Se deduce entonces que  $m_6(H) \geq 6188 + 1365 = 7553 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii\_c)  $H$  no tiene nodos de grado 2. La secuencia de grados de vértices de  $H$  puede ser  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,1)$  o  $(5,3,3,3,3,3,3,3,3,1)$ . Esto indica que  $H$  tiene como mínimo nueve vértices de grado 3, por lo que se verifica que en  $H$  hay al menos tres vértices  $v_2, v_3$  y  $v_4$  de grado 3 que no son adyacentes a  $v_1$  ni adyacentes entre sí. Se cumple que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{17}{5} = 6188$  desconectores n-triviales de  $v_1$ .
- $3 \times \binom{15}{3} - 3 \times \binom{14}{2} - 3 = 1089$  desconectores n-triviales de  $v_2, v_3$  y  $v_4$ .

Concluimos entonces que  $m_6(H) \geq 6188 + 1089 = 7277 > 7120 = m_6(Y)$ .

**(12,18)-grafos sin nodos de grado 1 y con nodos de grado 2**

Distinguimos seis casos, según el grafo  $H$  tenga un único nodo de grado 2, exactamente dos, tres, cuatro o cinco nodos de grado 2 o seis o más nodos de grado 2.

(i)  $H$  tiene un único nodo  $v_1$  con  $\deg(v_1) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  debe ser  $(4,3,3,3,3,3,3,3,3,3,2)$ . Aquí a su vez distinguimos cuatro subcasos:

(i\_a) Los dos nodos de  $H$   $v_2$  y  $v_3$  adyacentes a  $v_1$  verifican  $\deg(v_2) = \deg(v_3) = 3$  y no son adyacentes entre sí. En la Figura 2.14 se ilustra este subcaso. En este caso  $H$  tiene al menos

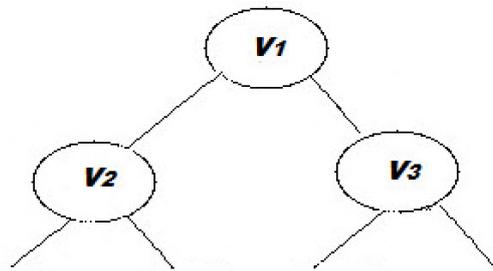


Figura 2.14 m6 - un nodo de grado 2 - Subcaso a

las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{16}{4} = 1820$  desconectores n-triviales de  $v_1$ .
- $8 \times \left( \binom{15}{3} - 13 \right) + 2 \times \binom{14}{3} - (12 \times 13) - 33 = 4075$  desconectores n-triviales de los 10 nodos de grado 3.
- $8 \times \left( \binom{13}{2} - 5 \right) + 4 \times \left( \binom{12}{2} - 3 \right) = 836$  desconectores l-triviales de las doce aristas 3-3.
- $2 \times \left( \binom{14}{3} - 48 \right) = 632$  desconectores l-triviales de las dos aristas incidentes en  $v_1$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 1820 + 4075 + 836 + 632 = 7363 > 7120 = m_6(Y)$ .

(i\_b) Los dos nodos de  $H$   $v_2$  y  $v_3$  adyacentes a  $v_1$  verifican  $\deg(v_2) = \deg(v_3) = 3$  y son adyacentes entre sí. En la Figura 2.15 se muestra este subcaso.

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{16}{4} = 1820$  desconectores n-triviales de  $v_1$ .
- $8 \times \left( \binom{15}{3} - 13 \right) + 2 \times \binom{14}{3} - 11 \times 13 - 33 = 4088$  desconectores n-triviales de los 10 nodos de grado 3.

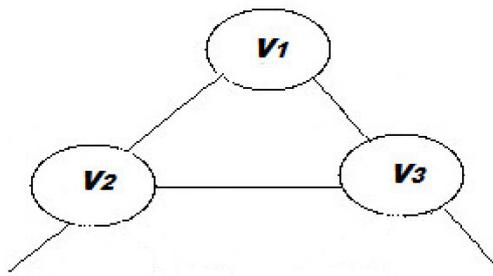


Figura 2.15 m6 - un nodo de grado 2 - Subcaso b

- $\binom{15}{3} = 715$  desconectores de  $C_3$
- $2 \times \left( \binom{13}{3} - 17 \right) = 538$  desconectores l-triviales de las dos aristas incidentes en  $v_1$ .

Se cumple entonces que  $m_6(H) \geq 1820 + 4088 + 715 + 538 = 7161 > 7120 = m_6(Y)$ .

(i\_c) Los dos nodos de  $H$   $v_2$  y  $v_3$  adyacentes a  $v_1$  verifican  $\deg(v_2) = 3$  y  $\deg(v_3) = 4$  y no son adyacentes entre sí. En la Figura 2.16 se muestra este subcaso.

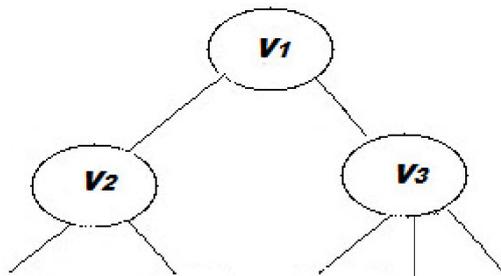


Figura 2.16 m6 - un nodo de grado 2 - Subcaso c

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{16}{4} = 1820$  desconectores n-triviales de  $v_1$ .
- $9 \times \left( \binom{15}{3} - 13 \right) + \binom{14}{3} - 13 \times 13 - 32 = 4141$  desconectores n-triviales de los 10 nodos de grado 3.
- $11 \times \left( \binom{13}{2} - 5 \right) + 2 \times \left( \binom{12}{2} - 3 \right) = 929$  desconectores l-triviales de los trece links 3-3.
- $\binom{14}{3} - 35 = 329$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 1820 + 4141 + 929 + 329 = 7219 > 7120 = m_6(Y)$ .

(i\_d) Los dos nodos de  $H$   $v_2$  y  $v_3$  adyacentes a  $v_1$  verifican  $\deg(v_2) = 3$  y  $\deg(v_3) = 4$  y son adyacentes entre sí. En la Figura 2.17 se refleja este subcaso. En este caso  $H$  tiene al

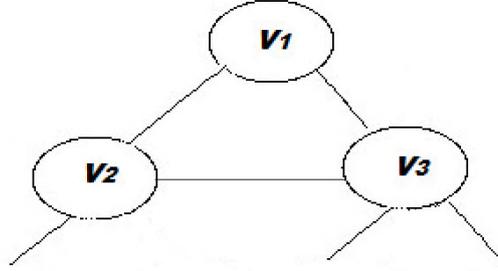


Figura 2.17 m6 - un nodo de grado 2 - Subcaso d

menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{16}{4} = 1820$  desconectores n-triviales de  $v_1$ .
- $9 \times \left( \binom{15}{3} - 13 \right) + \binom{14}{3} - 13 \times 13 - 32 = 4141$  desconectores n-triviales de los 10 nodos de grado 3.
- $12 \times \left( \binom{13}{2} - 5 \right) + \binom{12}{2} - 2 = 940$  desconectores l-triviales de los trece links 3-3.
- $\binom{14}{3} - 22 = 342$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 1820 + 4141 + 940 + 342 = 7243 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii)  $H$  tiene dos nodos  $v_1$  y  $v_2$  con  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  puede ser tanto  $(5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2)$  como  $(4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2)$ . Aquí a su vez distinguimos cuatro subcasos:

(ii\_a) La secuencia de grados de vértices de  $H$  es  $(5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2, 2)$  y  $v_1$  y  $v_2$  no son adyacentes. Consideramos un peor caso en cuanto al número de desconectores n-triviales de nodos de grado 3 y l-triviales de aristas 3-3, consistente en que los cuatro nodos adyacentes a  $v_1$  y  $v_2$  sean todos distintos y de grado 3. En la Figura 2.18 se muestra este subcaso.

En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $2 \times \binom{16}{4} - \binom{14}{2} = 3549$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ .
- $5 \times \left( \binom{15}{3} - 26 \right) - 4 \times \left( \binom{14}{2} - 12 \right) - 9 \times 13 - 21 = 3415$  desconectores n-triviales de los 9 nodos de grado 3 de  $H$ .

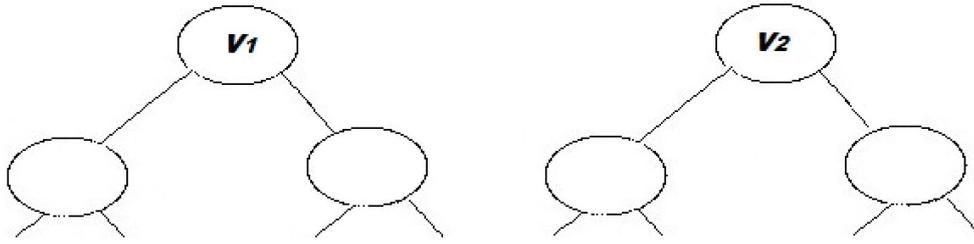


Figura 2.18 m6 - dos nodos de grado 2 - Subcaso a

- $9 \times \binom{13}{2} - 8 \times 16 - 6 = 568$  desconectores 1-triviales de las 9 aristas 3-3. Corresponde a un peor caso en que 8 de las aristas 3-3 tengan un extremo en un nodo adyacente a  $v_1$  o a  $v_2$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 3549 + 3415 + 568 = 7536 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii\_b) La secuencia de vértices de  $H$  es  $(5,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$  y  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes. Consideramos un peor caso en cuanto al número de desconectores n-triviales de nodos de grado 3, en el que los dos nodos adyacentes a  $v_1$  y  $v_2$  son distintos y de grado 3. En la Figura 2.19 se muestra este subcaso.

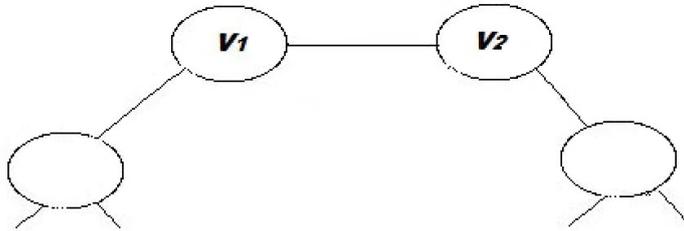


Figura 2.19 m6 - dos nodos de grado 2 - Subcaso b

En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $2 \times \binom{16}{4} - \binom{15}{3} = 3185$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ .
- $\binom{15}{4} = 1365$  desconectores de la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $7 \times \left( \binom{15}{3} - 37 \right) + 3 \times \left( \binom{15}{3} - 2 \times \binom{15}{3} - 13 \right) - 10 \times 13 - 26 = 3342$  desconectores n-triviales de los 9 nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 3185 + 1365 + 3342 = 7892 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii\_c) La secuencia de vértices de  $H$  es  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$  y  $v_1$  y  $v_2$  no son adyacentes. Consideramos el mismo peor caso que en ii\_a) en cuanto al número de desconectores de nodo y de aristas con extremos de grado 3, y le agregamos la condición de que los dos nodos de grado 4 no son adyacentes entre sí, lo que constituye un peor caso para la cantidad de desconectores l-triviales de las aristas 3-3. Asimismo consideramos el peor caso para los desconectores l-triviales en que las 6 aristas 3-3 tienen un extremo adyacente a un nodo de grado 2. El esquema es el mismo de la Figura 2.18. En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $2 \times \binom{16}{4} - \binom{14}{2} = 3549$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ .
- $8 \times \binom{15}{3} - 4 \times 26 - 4 \times \left( \binom{14}{2} + 12 \right) - 6 \times 12 - 20 = 3032$  desconectores n-triviales de los 8 nodos de grado 3.
- $2 \times \left( \binom{14}{2} - 12 \right) = 170$  desconectores n-triviales de los 2 nodos de grado 4.
- $6 \times \left( \binom{13}{2} - 16 \right) = 372$  desconectores l-triviales de las 6 aristas 3-3.

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 3549 + 3032 + 170 + 372 = 7123 > 7120 = m_6(Y)$ .

(ii\_d) La secuencia de vértices de  $H$  es  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$  y  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes. Consideramos el mismo peor caso que en (ii\_b) en cuanto al número de desconectores n-triviales de nodos de grado 3, ilustrado en la Figura 2.19. Asimismo asumimos el peor caso para los desconectores n-triviales de nodos de grado 3, en el que los dos nodos de grado 4 son adyacentes entre sí y el grafo tiene 10 aristas 3-3, su mayor cantidad posible. En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $2 \times \binom{16}{4} - \binom{15}{3} = 3185$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1$  y  $v_2$ .
- $\binom{15}{4} = 1365$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $6 \times \left( \binom{12}{3} + 3 \times \binom{12}{2} \right) + 2 \times \binom{13}{3} - 10 \times 13 - 18 = 2932$  desconectores n-triviales de los 8 nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 3185 + 1365 + 2932 = 7482 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iii)  $H$  tiene exactamente tres nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$  con  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  puede ser  $(6,3,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$ ,  $(5,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  o  $(4,4,4,3,3,3,3,3,2,2,2)$ . Aquí a su vez distinguimos tres subcasos:  
 (iii\_a) Los tres nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Considerando solamente

la suma de conjuntos desconectores triviales de nodos de grado dos y grado tres, el peor caso ((menor suma de desconectores) corresponde a  $H$  con secuencia de grados de vértice  $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  y a que los nodos adyacentes a los tres nodos de grado 2 sean todos distintos y de grado 3. Éste es un peor caso para el caso de que los tres nodos de grado 2 no sean adyacentes, ya que el número de nodos de grado 3 es mínimo (6) y al ser adyacente cada nodo de grado 3 a un solo nodo de grado 2, se minimiza la cantidad de desconectores  $n$ -triviales ya que se hace máxima la cantidad de desconectores que aíslan en forma simultánea a los nodos de grado 2 y 3. Asimismo el número de aristas 3-3 de  $H$  es tres, el máximo posible bajo las condiciones anteriores, lo que contribuye a minimizar los desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado 3. El esquema correspondiente a este subcaso se muestra en la Figura 2.20.

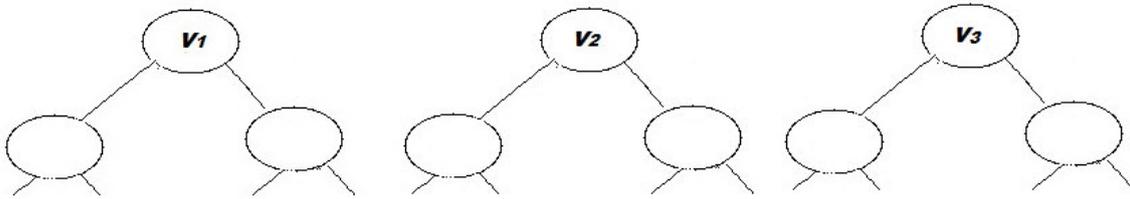


Figura 2.20 m6 - tres nodos de grado 2 - Subcaso a

En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $3 \times \binom{16}{4} - 3 \times \binom{14}{2} + 1 = 5188$  desconectores  $n$ -triviales de los nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .
- $6 \times \binom{15}{3} - 6 \times (\binom{14}{2} + 24) - 3 \times 11 - 9 = 1998$  desconectores  $n$ -triviales de los 6 nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 5188 + 1998 = 7186 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iii\_b) De los tres nodos de grado 2 de  $H$ , solo dos de ellos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes entre sí. Considerando solamente la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado dos y grado tres y los desconectores  $l$ -triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ , el peor caso (menor suma de desconectores) corresponde a  $H$  con secuencia de grados de nodo  $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  y con los nodos adyacentes a los tres nodos de grado 2 todos distintos y de grado 3. Asimismo el número de aristas con ambos extremos de grado 3 de  $H$  es cuatro, el máximo posible bajo las condiciones anteriores, lo contribuye a minimizar los desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado 3. El esquema correspondiente a este subcaso se muestra en la Figura 2.21.

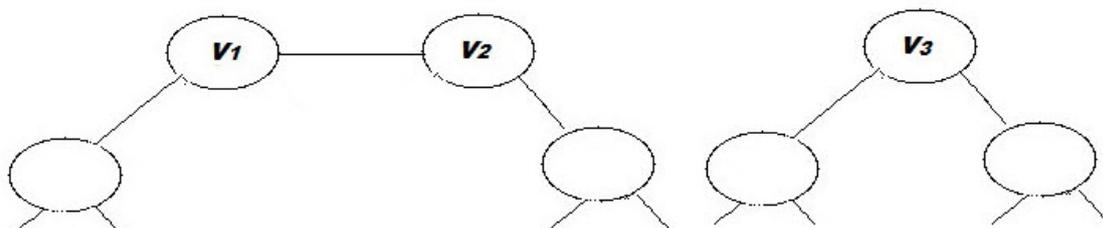


Figura 2.21  $m_6$  - tres nodos de grado 2 - Subcaso b

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $\binom{16}{4} + \binom{15}{4} + \binom{13}{4} + 3 \times \binom{13}{3+} + \binom{13}{4} = 4836$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .
- $\binom{15}{4} - \binom{13}{2} = 1287$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $2 \times \left( \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} \right) + 2 \times \left( \binom{11}{3} + 3 \times \binom{11}{2} \right) + 2 \times \left( \binom{10}{3} + 5 \times \binom{10}{2} + 60 \right) - 4 \times 13 - 11 = 1957$  desconectores n-triviales de los 6 nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 4836 + 1287 + 1957 = 8080 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iii\_c) Uno de los tres nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a los otros dos ( $v_2$  es adyacente a  $v_1$  y a  $v_3$ ). En la Figura 2.22 se muestra este subcaso. En este caso  $H$  tiene al menos

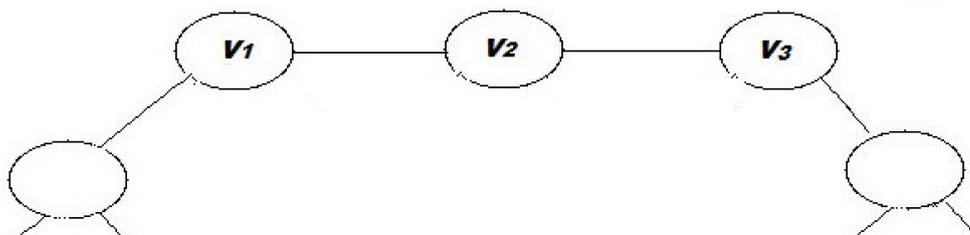


Figura 2.22  $m_6$  - tres nodos de grado 2 - Subcaso c

las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $3 \times \binom{16}{4} - 2 \times \binom{15}{3} = 4550$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .
- $2 \times \binom{14}{4} = 2002$  desconectores l-triviales de las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_3)$  item 3  $\binom{14}{4} = 1001$  desconectores del  $P_3$  que contiene a  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 4550 + 2002 + 1001 = 7553 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iv)  $H$  tiene exactamente cuatro nodos  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  de grado 2. En este caso las secuencias posibles de grados de vértices de  $H$  son  $(7,3,3,3,3,3,3,2,2,2,2)$ ,  $(6,4,3,3,3,3,3,2,2,2,2)$ ,  $(5,5,3,3,3,3,3,2,2,2,2)$ ,  $(5,4,4,3,3,3,3,2,2,2,2)$  o  $(4,4,4,4,3,3,3,2,2,2,2)$ . Aquí a su vez distinguimos cinco subcasos:

(iv\_a) Los cuatro nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Considerando solamente la suma de conjuntos desconectores triviales de nodos de grado dos y grado tres, el peor caso ((menor suma de desconectores) corresponde a  $H$  con secuencia de grados de vértice  $(4,4,4,4,3,3,3,2,2,2,2)$  y a que cada uno de los 4 nodos de grado 3 sean adyacentes a dos nodos de grado 2. Éste es un peor caso para el caso de que los cuatro nodos de grado 2 no sean adyacentes, ya que el número de nodos de grado 3 es mínimo y al ser adyacente cada nodo de grado 3 a un solo nodo de grado 2, se minimiza la cantidad de desconectores triviales ya que se hace máxima la cantidad de desconectores que aíslan en forma simultánea a los nodos de grado 2 y 3. Este grafo  $H$  no tiene aristas con ambos extremos de grado 3 y se corresponde con el esquema de la Figura 2.23 En estas condiciones  $H$  tiene al menos las

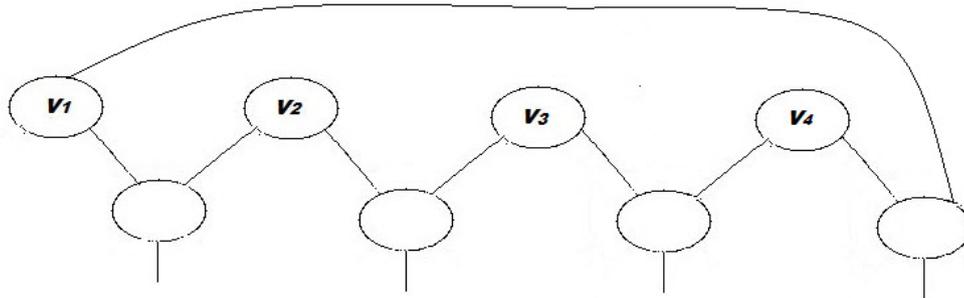


Figura 2.23 m6 - cuatro nodos de grado 2 - Subcaso a

siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $4 \times \binom{16}{4} - 6 \times \binom{14}{2} + 4 = 6738$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{9}{3} + 4 \times \left( \binom{9}{2} + 36 \right) \right) - 2 = 1054$  desconectores n-triviales de los 4 nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 6738 + 1054 = 7792 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iv\_b) De los cuatro nodos de grado 2 de  $H$ , sólo dos de ellos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes entre sí. En la Figura 2.24 se muestra este subcaso.

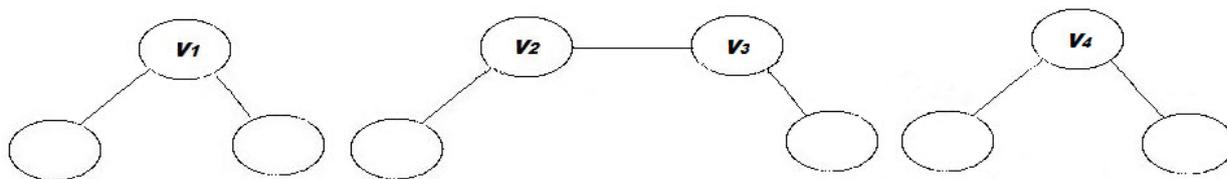


Figura 2.24 m6 - cuatro nodos de grado 2 - Subcaso b

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $4 \times \binom{16}{4} - \binom{15}{3} - 5 \times \binom{14}{2} + 28 = 6398$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $\binom{15}{4} - 2 \times \binom{13}{2} + 1 = 1210$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 6398 + 1210 = 8608 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iv\_c) De los cuatro nodos de grado 2 de  $H$ , hay dos pares de nodos adyacentes entre sí. Los nodos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes, así como los nodos  $v_3$  y  $v_4$ , tal como se muestra en la Figura 2.25. En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de

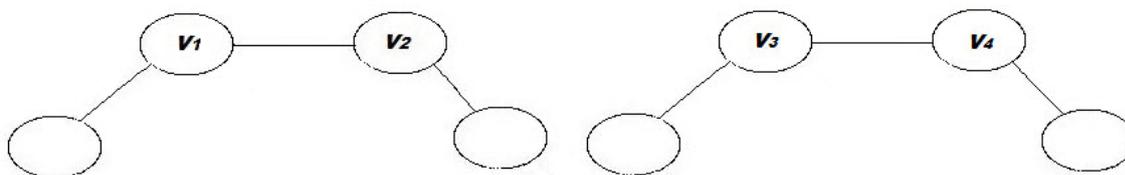


Figura 2.25 m6 - cuatro nodos de grado 2 - Subcaso c

tamaño 6:

- $\binom{16}{4} + \binom{15}{4} + \binom{13}{3} + 3 \times \binom{13}{3} + \binom{13}{2} + \binom{12}{4} + 3 \times \binom{12}{3} + \binom{13}{2} = 6057$  desconectores n-triviales de los nodos  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $2 \times \binom{15}{4} - 4 \times \binom{13}{2} - \binom{12}{2} + 24 = 2376$  desconectores l-triviales de las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$  que no desconectan a los nodos  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 6057 + 2376 = 8433 > 7120 = m_6(Y)$ .

(iv\_d) Uno de los cuatro nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a otros dos, y hay un nodo de grado 2 no adyacente a ningún otro nodo de grado 2 ( $v_2$  es adyacente a  $v_1$  y a  $v_3$ ). Es el esquema que ilustra la Figura 2.26. En este caso el subgrafo de  $H$  formado por los tres nodos

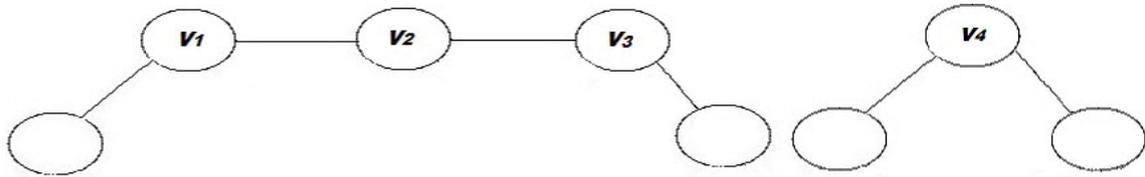


Figura 2.26 m6 - cuatro nodos de grado 2 - Subcaso d

$v_1, v_2$  y  $v_3$  y los dos nodos adyacentes a  $v_1$  y  $v_3$  se corresponde exactamente con el caso iii\_c) ya demostrado, por lo se concluye que  $m_6(H) \geq 7553 > 7120 = m_6(Y)$ .

iv\_e) Los cuatro nodos de grado 2 forman una cadena  $v_1-v_2-v_3-v_4$ , como se muestra en la Figura 2.27. En este caso los desconectores del  $P_3$  que incluye a  $v_1, v_2$  y  $v_3$  se pueden asimilar exacta-

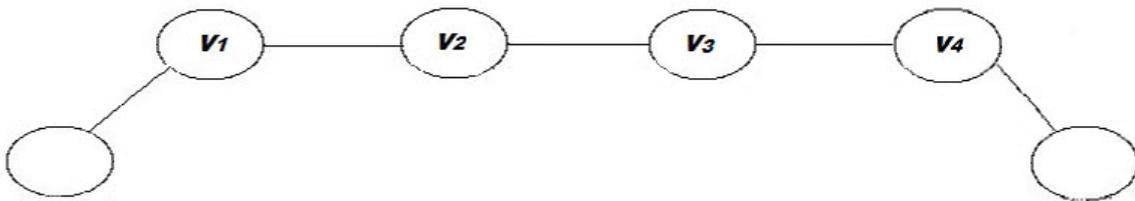


Figura 2.27 m6 - cuatro nodos de grado 2 - Subcaso e

tamente al caso iii\_c) ya demostrado, por lo se concluye que  $m_6(H) \geq 7553 > 7120 = m_6(Y)$ .

(v)  $H$  tiene exactamente cinco nodos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  de grado 2. Aquí necesitamos distinguir dos subcasos:

(v\_a) Los cinco nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Es el caso que aparece en la Figura 2.28.

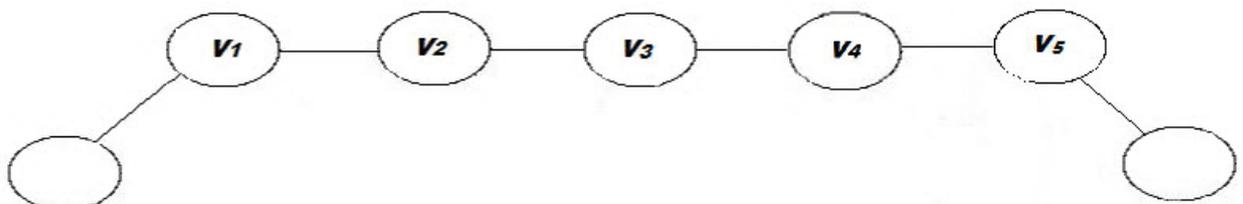


Figura 2.28 m6 - cinco nodos de grado 2 - Subcaso a

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 6:

- $5 \times \binom{16}{4} - 10 \times \binom{14}{2} + 10 = 8200$  desconectores  $n$ -triviales de los nodos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .

Se verifica entonces que  $m_6(H) \geq 8200 > 7120 = m_6(Y)$ .

(v\_b) Algunos de los cinco nodos de grado 2 de  $H$  son adyacentes entre sí. En este caso  $H$  tiene siempre un subgrafo inducido por nodos de grado 2 y sus vértices adyacentes que se corresponde exactamente con alguno de los casos siguientes ya demostrados:

- Caso iii\_c)
- Caso iv\_b)

Se cumple entonces que  $m_6(H) > 7120 = m_6(Y)$ .

(vi)  $H$  tiene seis o más nodos de grado 2. En este caso  $H$  tiene siempre un subgrafo inducido por nodos de grado 2 y sus vértices adyacentes que se corresponde exactamente con alguno de los casos siguientes ya demostrados:

- Caso iii\_c)
- Caso iv\_b)
- Caso v\_a)

Se cumple entonces que  $m_6(H) > 7120 = m_6(Y)$ .

#### 2.4.7. El coeficiente $m_7$ se minimiza en Yutsis 18jF

Teniendo en cuenta su extensión, esta prueba figura en el Apéndice de esta tesis.

Combinando las pruebas para los distintos coeficiente  $m_i$ , con  $i = 3, 7$ , se concluye que el grafo Yutsis 18jF minimiza a la vez todos los coeficientes, por lo tanto se cumple la condición suficiente para confiabilidad uniforme y Yutsis 18jF resulta ser uniformemente confiable para la clase de  $(12, 18)$ -grafos *QED*. □

# Capítulo 3

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 3.1. Conclusiones

El diseño de redes de comunicaciones con máxima confiabilidad es un problema relevante. El caso particular de redes cuyos enlaces son falibles, justifica el interés en descubrir las topologías más confiables, que maximizan la probabilidad de que todos los nodos del sistema se mantengan conectados entre sí frente a cualquier probabilidad de falla de los enlaces. Dichas estructuras óptimas de red vienen dadas por los grafos uniformemente confiables para cada tamaño  $(p,q)$  de la red, y su teoría asociada se ha desarrollado desde hace más de medio siglo, mencionándose en esta tesis algunos de los principales resultados de la misma.

En este trabajo nos enfocamos en investigar la existencia de confiabilidad uniforme para la familia particular de  $(12,18)$ -grafos conexos, y logramos probar la existencia de un único grafo cúbico uniformemente confiable para la misma, el Yutsis 18j-F, que minimiza simultáneamente todos los coeficientes  $m_k$  del polinomio de no-confiabilidad relevantes. No tenemos conocimiento de que este resultado se halla obtenido previamente, por lo que podría tratarse de una contribución a la extensión de la teoría para el caso de las familias de grafos cúbicos.

Se logró utilizar la transformación local *Swing Surgery* de un grafo, que mejora uniformemente la confiabilidad del mismo, para probar que a partir de un grafo con nodos colgantes siempre se puede obtener otro grafo con grado mínimo dos y uniformemente más confiable que el original. Esto constituye un resultado general que simplifica la prueba de  $t$ -optimalidad de un grafo cúbico candidato, y en particular es aplicable en este caso para la prueba de que el grafo candidato Yutsis 18j-F es  $t$ -óptimo.

Existen varias conjeturas sin resolver y problemas abiertos relativos a los grafos uniformemente confiables, algunos de los cuales se plantearon en este trabajo, por lo que consideramos que hay margen para seguir trabajando en el tema. El grafo Yutis 18j-F encontrado resulta ser un contraejemplo para la conjetura de que el grafo de Möbius  $M_n$  es uniformemente confiable para todo  $n \neq 5$ , ya que Yutis 18j-F  $\neq M_6$ .

## 3.2. Trabajo Futuro

Una posible línea de continuación de esta tesis puede ser trabajar la conjetura de que los grafos  $t$ -óptimos de la familia de los  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafos conexos son siempre cúbicos. Una posibilidad interesante con este fin es tratar de probar que todo  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo conexo con nodos de grado dos tiene menor o igual cantidad de árboles de cubrimiento que algún  $(p, \frac{3}{2} p)$ -grafo cúbico, es decir un resultado análogo al presentado en el lema 2.1 para los grafos de grado mínimo uno. Esto permitiría simplificar las demostraciones de confiabilidad uniforme para las familias de grafos cúbicos en lo referente al coeficiente  $m_{q-p+1}$  del polinomio de no-confiabilidad, haciendo necesaria solamente la comparación del coeficiente correspondiente al grafo cúbico candidato con los de los otros grafos cúbicos de su clase. Podría implicar profundizar el estudio de la existencia y aplicabilidad de transformaciones locales de grafos que mejoren su confiabilidad de manera uniforme, como la desarrollada al respecto por Kelmans y Satyanarayana.

Otra posible extensión es estudiar si los grafos uniformemente confiables para una cierta clase  $(p, q)$  son grafos de alta o máxima energía, para alguna de las múltiples variantes en la definición de energía de un grafo, como por ejemplo la energía Ordinaria asociada a su matriz de adyacencia o la energía Laplaciana del grafo.

Teniendo en cuenta que la metodología de prueba empleada en el presente trabajo es difícilmente escalable cuando aumenta el orden de  $p$ , se puede encarar la construcción de grafos de alta/máxima confiabilidad mediante el uso de heurísticas, como por ejemplo esquemas GRASP/VND, en donde se emplean transformaciones locales basadas en *Swing Surgery* para ir aumentando la confiabilidad del grafo.

# Apéndice A

## A.1. Prueba de que el grafo Yutsis 18jF es $t$ -óptimo

### Grafos cúbicos (12,18)

Para cada uno de los 56 grafos cúbicos (12,18) no isomorfos y 3-arista-conexos distintos al candidato Yutsis 18jF, ya fue probado este resultado en el proceso de selección del grafo candidato. Para los restantes 28 grafos cúbicos (12,18) no isomorfos, se calcula el número de árboles de cubrimiento para cada uno de ellos empleando el mismo programa descrito en 2.2 y listado en A.2. Este cálculo adicional confirma que el Yutsis 18jF es el grafo que presenta el mayor número de árboles entre los cúbicos (12,18), con  $\tau(Y) = 9800$ , y por lo tanto minimiza el coeficiente  $m_7$  para todos los cúbicos (12,18), con un valor  $m_7(Y) = 22024$ .

### Grafos (12,18) con nodos de grado 1

A pesar de no ser estrictamente necesario considerar este caso debido al lema 2.1, se presenta aquí una demostración basada en conteo de conjuntos desconectores.

Distinguimos tres casos, según el grafo  $H$  tenga tres ó más nodos de grado 1, exactamente dos nodos de grado 1 o un único nodo de grado 1.

(i)  $H$  tiene al menos tres nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$  tales que  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = 1$ . Se cumple en este caso que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

$$\blacksquare \binom{17}{6} + \binom{16}{6} + \binom{15}{6} = 25389 \text{ desconectores n-triviales de los nodos } v_1, v_2 \text{ y } v_3.$$

Tenemos así que  $m_7(H) \geq 25389 > 22024 = m_7(Y)$ .

(ii)  $H$  tiene exactamente dos nodos de  $v_1$  y  $v_2$  grado 1. Aquí a su vez distinguimos tres subcasos:

(ii\_a)  $H$  tiene al menos un nodo  $v_3$  de grado 2 que no es adyacente ni a  $v_1$  ni a  $v_2$ . Podemos asegurar que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{17}{6} + \binom{16}{6} + \binom{14}{5} = 22386$  desconectores de los nodos individuales  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 22386 > 22024 = m_7(Y)$ .

(ii\_b)  $H$  tiene al menos un nodo  $v_3$  de grado 2 que es adyacente a uno de los nodos de grado 1  $v_1$  o  $v_2$ . Podemos asegurar que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{17}{6} + 2 \times \binom{15}{6} + \binom{15}{5} = 25389$  desconectores de los nodos individuales  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 25389 > 22024 = m_7(Y)$ .

(iic)  $H$  no tiene nodos de grado 2. En estas condiciones hay cuatro posibilidades para la secuencia de grados de vértices de  $H$ :  $(7,3,3,3,3,3,3,3,3,1,1)$ ,  $(6,4,3,3,3,3,3,3,3,1,1)$ ,  $(5,5,3,3,3,3,3,3,3,1,1)$  y  $(4,4,4,4,3,3,3,3,3,1,1)$ . Esto indica que  $H$  tiene como mínimo cuatro vértices de grado 3 que no son adyacentes ni a  $v_1$  ni a  $v_2$ , correspondientes en el peor caso a la configuración  $(4,4,4,4,3,3,3,3,3,1,1)$ . Se cumple que  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{17}{6} + \binom{16}{6} = 20384$  desconectores de los nodos individuales  $v_1$  y  $v_2$ .
- $4 \times \binom{13}{4} - 5 \times \binom{11}{2} - 10 = 2575$  desconectores de 4 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  ni a  $v_2$ .

Concluimos entonces que  $m_7(H) \geq 20834 + 2575 = 22959 > 22024 = m_7(Y)$ .

(iii)  $H$  tiene un único nodo  $v_1$  de grado 1. La secuencia de grados de vértices de  $H$  puede ser  $(5,3,3,3,3,3,3,3,3,3,1)$  o  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,1)$ . Distinguimos cuatro subcasos:

(iiia) La secuencia de grados de vértices de  $H$  es  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,3,1)$  y el nodo de grado 1  $v_1$  es adyacente a un nodo  $v_2$  de grado 3. En este caso hay ocho nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  y  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{17}{6} = 12376$  desconectores n-triviales del nodo  $v_1$ .
- $8 \times \binom{14}{4} - 9 \times \binom{12}{2} - 19 \times 11 = 7205$  desconectores n-triviales de los 8 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$ , y que no desconectan trivialmente a  $v_1$ .
- $\binom{15}{5} - 6 \times \binom{12}{2} - 2 \times \binom{13}{3} = 2035$  desconectores de la arista  $(v_1, v_2)$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 3 de  $H$ .

- $7 \times \binom{12}{3} - 60 + 2 \times \binom{12}{3} - 97 = 1366$  desconectores de los nueve links con nodos extremos de grado 3, que no desconectan en forma individual nodos de grado 3, al nodo  $v_1$  o a la arista  $(v_1, v_2)$ .

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 12376 + 7205 + 2035 + 1366 = 22982 > 22024 = m_7(Y)$ .

(iiib) La secuencia de grados de vértices de  $H$  es  $(4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1)$  y el nodo de grado 1  $v_1$  es adyacente a un nodo  $v_2$  de grado 4. En este caso hay nueve nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  y  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{17}{6} = 12376$  desconectores n-triviales del nodo  $v_1$ .
- $9 \times \binom{14}{4} - 10 \times \binom{12}{2} - 26 \times 11 = 8063$  desconectores n-triviales de los 9 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$ , y que no desconectan trivialmente a  $v_1$ .
- $10 \times \left( \binom{12}{3} - 51 \right) = 1690$  desconectores de los diez links con nodos extremos de grado 3, que no desconectan en forma individual nodos de grado 3 o al nodo  $v_1$ .

Tenemos entonces que  $m_7(H) \geq 12376 + 8063 + 1690 = 22129 > 22024 = m_7(Y)$ .

(iiic) La secuencia de grados de vértices de  $H$  es  $(5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1)$  y el nodo de grado 1  $v_1$  es adyacente a un nodo  $v_2$  de grado 3. En este caso hay nueve nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  y  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{17}{6} = 12376$  desconectores n-triviales del nodo  $v_1$ .
- $9 \times \binom{14}{4} - 11 \times \binom{12}{2} - 25 \times 11 = 8008$  desconectores n-triviales de los 9 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$ , y que no desconectan trivialmente a  $v_1$ .
- $\binom{15}{5} - 7 \times \binom{12}{2} - 2 \times \binom{13}{3} = 1969$  desconectores de la arista  $(v_1, v_2)$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 3 de  $H$ .

Se cumple entonces que  $m_7(H) \geq 12376 + 8008 + 1969 = 22323 > 22024 = m_7(Y)$ .

(iiid) La secuencia de grados de vértices de  $H$  es  $(5, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 1)$  y el nodo de grado 1  $v_1$  es adyacente a un nodo  $v_2$  de grado 5. En este caso hay diez nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$ , hay trece aristas que unen nodos de grado 3 y  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{17}{6} = 12376$  desconectores n-triviales del nodo  $v_1$ .

- $10 \times \binom{14}{4} - 13 \times \binom{12}{2} - 32 \times 11 = 8800$  desconectores n-triviales de los 10 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$ , y que no desconectan trivialmente a  $v_1$ .
- $13 \times \left( \binom{12}{3} - 52 \right) = 2184$  desconectores de los trece links con nodos extremos de grado 3, que no desconectan en forma individual nodos de grado 3 o al nodo  $v_1$ .

Se cumple entonces que  $m_7(H) \geq 12376 + 8800 + 2184 = 23360 > 22024 = m_7(Y)$ .

### Grafos (12,18) sin nodos de grado 1 y con nodos de grado 2

Distinguimos siete casos, según el grafo  $H$  tenga un único nodo de grado 2, exactamente dos, tres, cuatro, cinco o seis nodos de grado 2 o siete o más nodos de grado 2.

(i)  $H$  tiene un único nodo  $v_1$  con  $deg(v_1) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  debe ser  $(4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 2)$ . Aquí a su vez distinguimos dos subcasos:

i\_a) Los dos nodos de  $H$   $v_2$  y  $v_3$  adyacentes a  $v_1$  verifican  $deg(v_2) = deg(v_3) = 3$  y no son adyacentes entre sí. Se asume en este caso que los nodos adyacentes a  $v_2$  y  $v_3$  distintos de  $v_1$  son todos de grado 3, el cual es un peor caso global si se considera la suma de desconectores de todos los tipos considerados. Para cada tipo de desconectores se considera el peor caso (menor número de desconectores). En la Fig.-A.1 se ilustra este subcaso.

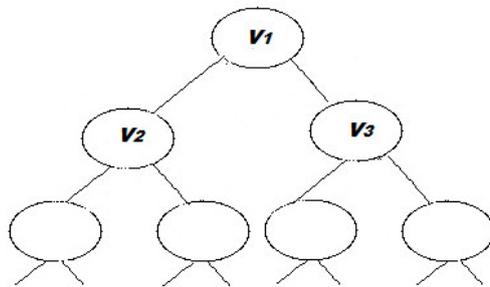


Figura A.1  $m_7$ - unico nodo de grado 2-Subcaso 1

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} = 4368$  desconectores que incluyen a las 2 aristas incidentes en  $v_1$  y que aíslan a  $v_1$ .
- $8 \times (2 \times \binom{13}{3} + \binom{13}{4}) + 2 \times \binom{14}{4} - 8 \times \left( \binom{11}{2} + 2 \times 11 \right) - 4 \times \binom{12}{2} - 20 \times 12 - 2 \times 6 \times 11 = 11046$  desconectores n-triviales de los 10 nodos de grado 3 y que no desconectan  $v_1$ .
- $\binom{14}{3} - 66 = 298$  desconectores n-triviales del nodo de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni al nodo  $v_1$  de grado 2.

- $2 \times \left( \binom{14}{4} - 6 \times 11 - 3 \times \binom{12}{2} - 1 \right) = 1472$  desconectores de las dos aristas incidentes en  $v_1$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 3.
- $12 \times \binom{13}{3} - 80 - 8 \times 11 - 4 \times \binom{12}{2} - 444 - 128 = 2428$  desconectores de los doce links con nodos extremos de grado 3, que no desconectan al nodo  $v_1$  de grado 2, a nodos de grado 3 ni a las aristas incidentes en  $v_1$ .
- $4 \times \left( \binom{12}{2} - 1 - 5 \times 4 - 4 \right) = 236$  desconectores de los cuatro links incidentes en el nodo de grado 4, que no desconectan al nodo  $v_1$ , a nodos de grado 3 ni a las aristas incidentes en  $v_1$ .
- $\binom{12}{3} - 52 = 168$  desconectores del 2-path formado por las 2 aristas incidentes en  $v_1$ , que no desconectan nodos de grado 3 ni aristas con nodos extremos de grado 3.
- $8 \times \left( \binom{11}{2} - 6 \right) + 10 \times \left( \binom{10}{2} - 5 \right) = 792$  desconectores de 2-paths formados por 2 aristas con ambos extremos de grado 3, que no desconectan trivialmente al nodo  $v_1$  de grado 2 ni a nodos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{12}{3} - 52 \right) = 672$  desconectores de 2-paths formados por una arista con ambos extremos de grado 3 y la otra incidente en el nodo  $v_1$  de grado 2, que no desconectan en forma individual nodos de grado 3 ni aristas con nodos extremos de grado 3.
- $10 \times 6 = 60$  desconectores de 2-paths formados por dos aristas incidentes en el nodo  $v_4$  de grado 4.
- $10 \times 8 = 80$  desconectores de 2-paths formados por una arista con ambos extremos de grado 3 y la otra incidente en el nodo  $v_4$  de grado 4.
- $4 \times \left( \binom{10}{2} - 5 \right) = 160$  desconectores de 3-paths que incluyen ambas aristas incidentes en el nodo  $v_1$  de grado 2, que no desconectan en forma individual nodos de grado 3.
- $2 \times \left( \binom{10}{2} - 5 \right) + 40 = 120$  desconectores de subgrafos  $K_{(1,3)}$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 3.
- 4 desconectores del subgrafo formado por 3 aristas incidentes en el nodo  $v_4$  de grado 4.
- $\binom{4}{2} \times 8 = 48$  desconectores del subgrafo de cuatro aristas formado por las dos aristas incidentes en el nodo  $v_1$  de grado 2 y otras dos aristas incidentes en algunos de los nodos  $v_2$  o  $v_3$  adyacentes a  $v_1$ .
- $\binom{4}{2} \times 4 = 24$  desconectores de 3-paths que incluyen dos aristas incidentes en el nodo  $v_4$  de grado 4, y una arista con nodos extremos de grado 3.

- $4 \times 8 = 32$  desconectores de 3-paths con uno de sus extremos en el nodo  $v_1$  de grado 2. Corresponde al peor caso en que  $v_2$  y  $v_3$  tienen los mismos nodos adyacentes y a su vez los dos nodos adyacentes distintos de nodo  $v_1$  son adyacentes al nodo  $v_4$  de grado 4.
- $4 \times 8 = 32$  desconectores de 4-paths que incluyen ambas aristas incidentes en el nodo  $v_1$  de grado 2. Corresponde al mismo peor caso del punto anterior.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 4368 + 11046 + 298 + 1472 + 2428 + 236 + 168 + 792 + 672 + 60 + 80 + 160 + 120 + 4 + 48 + 24 + 32 + 32 = 22040 > 22024 = m_7(Y)$ .

i\_b) Los dos nodos de  $H$   $v_2$  y  $v_3$  adyacentes a  $v_1$  verifican  $\deg(v_2) = 3$  y  $\deg(v_3) = 4$  y no son adyacentes entre sí. En la Fig.-A.2 se ilustra este subcaso.

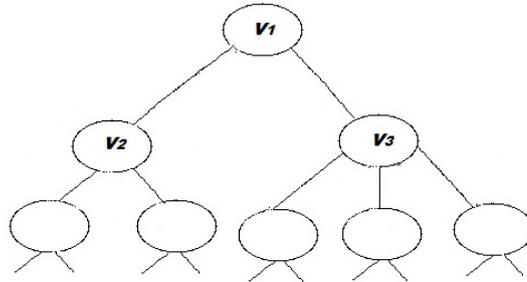


Figura A.2  $m_7$ - unico nodo de grado 2-Subcaso 2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} = 4368$  desconectores que incluyen a las 2 aristas incidentes en  $v_1$  y que aíslan a  $v_1$ .
- $9 \times (2 \times \binom{13}{3} + \binom{13}{4}) + \binom{14}{4} - 11 \times (\binom{11}{2} + 2 \times 11) - 2 \times \binom{12}{2} - 25 \times 12 - 7 \times 11 = 11228$  desconectores n-triviales de los 10 nodos de grado 3 y que no desconectan  $v_1$ .
- $\binom{13}{3} - 39 = 247$  desconectores n-triviales del nodo de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni al nodo  $v_1$  de grado 2.
- $\binom{14}{4} - 8 \times 11 - 2 \times \binom{12}{2} = 781$  desconectores de la arista  $(v_1, v_2)$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni al nodo de grado 4.
- $\binom{13}{3} - 50 = 236$  desconectores de la arista  $(v_1, v_3)$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 3.

- $11 \times (2 \times \binom{11}{2} + \binom{11}{3}) + 2 \times \binom{12}{3} - 94 - 540 - 55 = 2776$  desconectores de los trece links con nodos extremos de grado 3, que no desconectan al nodo  $v_1$  de grado 2, a nodos de grado 3, al nodo  $v_3$  de grado 4 ni a las aristas incidentes en  $v_1$ .
- $3 \times (\binom{11}{2} - 12 - 3) = 150$  desconectores de las tres aristas incidentes el nodo  $v_3$  de grado 4 con el otro nodo extremo de grado 3, que no desconectan a nodos de grado 3 ni a la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $\binom{11}{2} - 5 = 50$  desconectores del 2-path formado por las 2 aristas incidentes en  $v_1$ , que no desconectan nodos de grado 3.
- $14 \times (\binom{11}{2} - 6) + 3 \times (\binom{11}{2} - 5) + 5 \times (\binom{10}{2} - 4) = 1041$  desconectores de 2-paths formados por 2 aristas con ambos extremos de grado 3, que no desconectan trivialmente al nodo  $v_1$  de grado 2 ni a nodos de grado 3.
- $2 \times (\binom{12}{3} - 42) = 356$  desconectores de 2-paths formados por una arista con ambos extremos de grado 3 y la otra incidente en el nodo  $v_1$  de grado 2, que no desconectan en forma individual nodos de grado 3 ni al nodo  $v_3$  de grado 4 ni a aristas con nodos extremos de grado 3.
- $3 \times (\binom{11}{2} - 5) = 150$  desconectores de 2-paths formados por la arista  $(v_1, v_3)$  y otra arista incidente en el nodo  $v_3$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 3.
- $3 \times 9 = 27$  desconectores de 2-paths formados por dos aristas incidentes en el nodo  $v_3$  de grado 4, siendo su otro extremo de grado 3.
- $6 \times 9 = 54$  desconectores de 2-paths formados por una arista con ambos extremos de grado 3 y la otra incidente en el nodo  $v_4$  de grado 4.
- $5 \times 9 = 45$  desconectores de 3-paths que incluyen ambas aristas incidentes en el nodo  $v_1$  de grado 2.
- $\binom{10}{2} - 4 + 2 \times 8 + 4 \times 9 + 3 = 96$  desconectores de subgrafos  $K_{(1,3)}$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 3.
- 1 desconector del subgrafo formado por 3 aristas incidentes en el nodo  $v_3$  de grado 4 y no incidentes en  $v_1$ .
- $4 \times (\binom{10}{2} - 4) + 3 \times 2 \times 9 = 218$  desconectores de 3-paths con uno de sus extremos en el nodo  $v_1$  de grado 2.

- $3 \times 4 = 12$  desconectores de 3-paths que incluyen dos aristas incidentes en el nodo  $v_3$  de grado 4, y una arista con nodos extremos de grado 3.
- 10 desconectores del subgrafo de cuatro aristas formado por las dos aristas incidentes en el nodo  $v_1$  de grado 2 y otras dos aristas incidentes en algunos de los nodos  $v_2$  o  $v_3$  adyacentes a  $v_1$ .
- 16 desconectores de 4-paths que incluyen ambas aristas incidentes en el nodo  $v_1$  de grado 2.
- $11 \times 4 \times 9 - 116 = 280$  desconectores de 3-paths formados por aristas con nodos extremos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 4368 + 11228 + 247 + 781 + 236 + 2776 + 150 + 50 + 1041 + 356 + 150 + 27 + 54 + 45 + 96 + 1 + 218 + 12 + 10 + 16 + 280 = 22142 > 22024 = m_7(Y)$ .

(ii)  $H$  tiene exactamente dos nodos  $v_1$  y  $v_2$  con  $deg(v_1) = deg(v_2) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  puede ser tanto  $(5,3,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$  cómo  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$ . Consideramos el peor caso (menor suma de desconectores) para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado tres, que corresponde a  $H$  con secuencia de grados de vértice  $(4,4,3,3,3,3,3,3,3,2,2)$ . Aquí a su vez distinguimos dos tipos de subcasos:

ii\_a) Los dos nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

ii\_a1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado tres y aristas con extremos de grado 3, corresponde a los nodos adyacentes a los dos nodos de grado 2  $v_1$  y  $v_2$  todos distintos, no adyacentes entre sí y de grado 3. En la Fig.-A.3 se ilustra este subcaso.

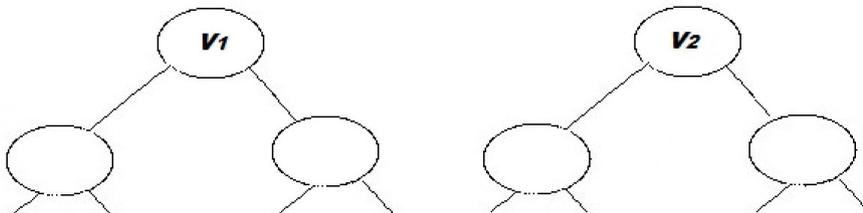


Figura A.3  $m_7$ - dos nodos de grado 2-Subcaso a1

Para esta configuración y para cada tipo de desconector, se considera el peor caso para el

grafo en cuanto a tamaño mínimo de desconectores de ese tipo. En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $2 \times \binom{16}{5} - \binom{14}{3} = 8372$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$  y  $v_2$ .
- $4 \times \left( \binom{11}{4} + 4 \times \binom{11}{3} + 4 \times \binom{11}{2} \right) + 4 \times \left( \binom{12}{4} + 2 \times \binom{12}{3} \right) - 6 \times \binom{13}{2} - 20 \times 12 = 7854$  desconectores n-triviales de los ocho nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1$  ni a  $v_2$ .
- $2 \times \left( \binom{14}{3} - 6 \times 12 - 4 \right) = 576$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni a los nodos  $v_1$  y  $v_2$  de grado 2. Este peor caso corresponde a que los nodos de grado 4 no sean adyacentes.
- $4 \times \binom{14}{4} - 4 \times 10 - 4 \times \left( 4 \times \binom{12}{2} + 2 \times 11 + 2 \times 10 + 2 \right) = 2732$  desconectores de las cuatros aristas incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4.
- $6 \times \binom{13}{3} - 2 \times \left( \binom{12}{2} + 10 \right) - 3 \times \left( 2 \times \binom{11}{2} + 11 \right) - 22 - \left( 2 \times \left( \binom{10}{2} + 9 \right) - 2 \times \binom{10}{2} - 2 \times (2 \times 10 + 1) - 4 - 2 \times 9 - 52 \right) = 865$  desconectores de los seis links con nodos extremos de grado 3, que no desconectan a los nodos  $v_1$  y  $v_2$  de grado 2, a nodos de grado 3 o 4 ni a las aristas incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ . Este es un peor caso que corresponde al grafo simétrico en que uno de los vertices adyacentes a  $v_1$  es adyacente a los dos vertices adyacentes a  $v_2$ , y el otro adyacente a  $v_1$  es adyacente a uno de los dos vertices adyacentes a  $v_2$  y a otro nodo de grado 3, valiendo análoga condición para los nodos adyacentes a  $v_2$ . Además cada nodo de grado 4 es adyacente a los 4 nodos de grado 3 no adyacentes a  $v_1$  y  $v_2$ .
- $6 \times \left( \binom{11}{2} - 14 \right) = 246$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 3 y el otro de grado 4, que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4 ni aristas incidentes en  $v_1$  o  $v_2$ . Corresponde a un peor caso para este tipo de desconectores en que los nodos de grado 4 son adyacentes entre sí y a su vez cada uno de ellos es adyacente a 3 de los nodos de grado 3 adyacentes a  $v_1$  o a  $v_2$ .
- $2 \times \left( \binom{12}{3} - 5 \times 10 - 12 \right) = 316$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$  y  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2, nodos de grado 3, aristas con nodos extremos de grado 3 o aristas incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ .
- $2 \times \left( \binom{11}{2} - 9 \right) + 2 \times \left( \binom{11}{2} - 16 \right) + 2 \times \left( \binom{11}{2} - 14 \right) + 2 \times \left( \binom{12}{3} - 48 \right) = 596$  desconectores de 2-paths con un nodo extremo en  $v_1$  o en  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2,3 o 4, ni aristas con nodos extremos de grado 3, aristas

incidentes en  $v_1$  o  $v_2$  o aristas con un nodo de grado 3 y el otro de grado 4. El grafo de peor caso considerado es el mismo que el usado para los desconectores l-triviales de aristas con un nodo extremo de grado 3 y el otro de grado 4.

- $2 \times \binom{9}{2} = 72$  desconectores de 2-paths formados por aristas con nodos extremos de grado 3, que no desconectan trivialmente a los nodos  $v_1$  y  $v_2$  de grado 2. El grafo de peor caso considerado es el mismo que el usado para los desconectores l-triviales de aristas con nodos extremos de grado 3.
- $2 \times 3 \times 10 + 6 = 66$  desconectores de 2-paths con nodo central de grado 4. En el grafo de peor caso considerado los dos nodos de grado 4 son adyacentes.
- $4 \times \left( \binom{10}{2} - 4 \right) + 2 \times \left( \binom{10}{2} - 5 \right) + 2 \times 8 = 260$  desconectores de 3-paths que incluyen las dos aristas incidentes en  $v_1$  o las dos incidentes en  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2,3 o 4, ni aristas incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ . El grafo de peor caso considerado es el mismo que el usado en el caso de desconectores l-triviales de aristas con un nodo extremo de grado 3 y el otro de grado 4.
- $8 \times 9 = 72$  desconectores de subgrafos  $K_{(1,3)}$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 3. El grafo de peor caso considerado es el mismo que el usado en el caso de desconectores l-triviales de aristas con un nodo extremo de grado 3 y el otro de grado 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 8372 + 7854 + 576 + 2732 + 865 + 246 + 316 + 596 + 72 + 66 + 260 + 72 = 22027 > 22024 = m_7(Y)$ .

ii\_a2) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2, desconectores de nodos de grado cuatro y 2-paths que incluyan nodos de grado 2, corresponde al grafo en que los nodos de grado 2  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes a los mismos dos nodos de grado 4. En la Fig.-A.4 se muestra este subcaso.

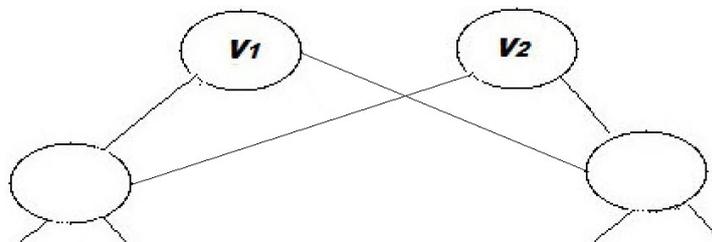


Figura A.4 m7- dos nodos de grado 2-Subcaso a2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $2 \times \binom{16}{5} - \binom{14}{3} = 8372$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$  y  $v_2$ .
- $8 \times \left( \binom{11}{4} + 4 \times \binom{11}{3} + 4 \times \binom{11}{2} \right) - 10 \times \binom{13}{2} - 18 \times 12 = 8684$  desconectores n-triviales de los ocho nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan a  $v_1$  ni a  $v_2$ .
- $2 \times \left( \binom{12}{3} - 2 \times 11 \right) = 400$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni a los nodos  $v_1$  y  $v_2$  de grado 2.
- $4 \times \left( \binom{12}{3} - 39 \right) = 732$  desconectores de las cuatros aristas incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4.
- $10 \times \left( \binom{13}{3} - 76es10 + 8 \times 2 + 13 \right) = 2100$  desconectores de los diez links con nodos extremos de grado 3 de  $H$ , que no desconectan a los nodos de grado 2,3 o 4.
- $4 \times \left( \binom{10}{2} - 2 \right) = 172$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 3 y el otro de grado 4, que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3.
- $8 \times \left( \binom{10}{2} - 4 \right) = 328$  desconectores de 2-paths con un nodo extremo en  $v_1$  o en  $v_2$  y el otro extremo de grado 3, que no desconectan en forma individual nodos de grado 2 o 3, ni aristas incidentes en  $v_1$  o  $v_2$ .
- $12 \times \left( \binom{11}{2} - 7 \right) + 4 \times \left( \binom{11}{2} - 6 \right) + 80 = 852$  desconectores de 2-paths con los dos nodos extremos de grado 3, que no desconectan en forma individual nodos de grado 2 o 3, ni aristas incidentes en  $v_1$  o  $v_2$ .
- $2 \times \left( \binom{12}{3} - 42 \right) = 356$  desconectores de 2-paths con un nodo extremo en  $v_1$  y el otro en  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 3 o grado 4, aristas 3-4 o aristas 3-3.
- $4 \times \left( \binom{10}{2} - 4 \right) = 164$  desconectores de 3-paths en donde cada arista tiene un nodo extremo de grado dos y el otro de grado 4, que no desconectan en forma individual nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 8372 + 8684 + 400 + 732 + 2100 + 172 + 328 + 52 + 356 + 164 = 22128 > 22024 = m_7(Y)$ .

ii\_b) Los dos nodos de grado 2  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes. Se analizan los dos peores sub-casos (menor suma de desconectores):

ii\_b1) El peor caso en cuanto al número de desconectores n-triviales de nodos de grado 3 y aristas con extremos de grado 3, consistente en que los dos nodos adyacentes a  $v_1$  y  $v_2$  sean distintos, no adyacentes entre sí y de grado 3. En la Fig.-A.5 se ilustra este subcaso.

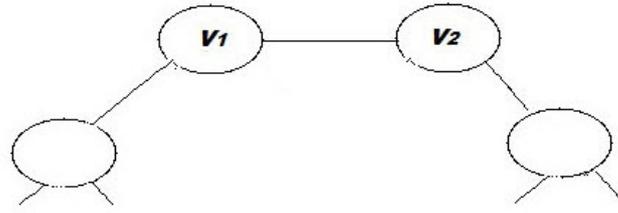


Figura A.5 m7- dos nodos de grado 2-Subcaso 2a

Para esta configuración y para cada tipo de desconector, se considera el peor caso para el grafo en cuanto a tamaño mínimo de desconectores de ese tipo. En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $2 \times \binom{16}{5} - \binom{15}{4} = 7371$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$  y  $v_2$ .
- $\binom{15}{5} = 3003$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $6 \times \left( \binom{12}{4} + 3 \times \binom{12}{3} \right) + 2 \times \binom{13}{4} - 8 \times \binom{13}{2} - 20 \times 12 = 7496$  desconectores n-triviales de los ocho nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1$  ni a  $v_2$  ni a la arista  $(v_1, v_2)$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (8) de aristas de nodos de grado 3.
- $2 \times \left( \binom{11}{3} + 3 \times \binom{11}{2} - 4 \times 12 - 4 \right) = 556$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni a los nodos  $v_1$  y  $v_2$  de grado 2. Este peor caso corresponde a que los nodos de grado 4 no sean adyacentes.
- $2 \times \left( \binom{13}{4} - 3 \times \binom{11}{2} - 42 \right) = 1016$  desconectores de las dos aristas 2-3 incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4.
- $4 \times \left( \binom{11}{3} - 35 \right) + 3 \times \left( \binom{10}{3} + 3 \times \binom{10}{2} - 39 \right) = 1168$  desconectores de siete links con nodos extremos de grado 3 (links 3-3), que no desconectan a nodos de grado 2 o 3, a la arista  $(v_1, v_2)$  ni a las aristas incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número mínimo (7) de aristas de nodos de grado 3, cuatro de ellas incidentes en los dos nodos adyacentes a  $v_1$  y  $v_2$ .
- $4 \times \left( \binom{10}{2} - 3 \right) + 2 \times \left( \binom{9}{2} + 3 \times 9 - 5 \right) = 284$  desconectores de seis aristas con un extremo de grado 3 y el otro de grado 4, que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3, a la arista  $(v_1, v_2)$  o a aristas incidentes en  $v_1$  o  $v_2$ . Corresponde a un peor caso para este tipo de desconectores en el que los nodos de grado 4 son adyacentes entre sí y a su vez cada uno de ellos es adyacente a los dos nodos de grado 3 adyacentes a  $v_1$  o a  $v_2$ .

- $2 \times \left( \binom{13}{4} - \binom{11}{2} - 10 \times 10 - 4 \right) = 892$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$  o  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 3 o 4, o aristas con nodos extremos de grado 3.
- $\binom{11}{3} - 40 = 125$  desconectores de 3-paths con arista central  $(v_1, v_2)$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{10}{2} - 3 \right) = 168$  desconectores de 3-paths con un nodo extremo en  $v_1$  o en  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 3. El grafo de peor caso considerado es el mismo que el usado para los desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 3 y el otro de grado 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 7371 + 3003 + 7496 + 556 + 1016 + 1168 + 284 + 892 + 125 + 168 = 22079 > 22024 = m_7(Y)$ .

ii\_b2)El peor caso en cuanto al número de desconectores n-triviales de nodos de grado 4 y aristas con un solo extremo de grado 2, consistente en que los dos nodos adyacentes a  $v_1$  y  $v_2$  sean distintos, no adyacentes entre sí y de grado 4. En la Fig.-A.6 se ilustra este subcaso.

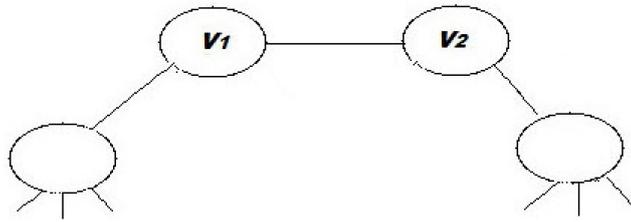


Figura A.6  $m_7$ - dos nodos de grado 2-Subcaso 2b

Para esta configuración y para cada tipo de desconector, se considera el peor caso para el grafo en cuanto a tamaño mínimo de desconectores de ese tipo. En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $2 \times \left( \binom{16}{5} - \binom{15}{4} \right) = 7371$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$  y  $v_2$ .
- $\binom{15}{5} = 3003$  desconectores l-triviales de la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $8 \times \left( \binom{12}{4} + 3 \times \binom{12}{3} \right) - 9 \times \binom{13}{2} - 19 \times 12 = 8310$  desconectores n-triviales de los ocho nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1$  ni a  $v_2$  ni a la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $2 \times \left( \binom{12}{3} - 35 \right) = 370$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3 ni a la arista  $(v_1, v_2)$ .

- $2 \times \left( \binom{12}{3} - 36 \right) = 368$  desconectores de las dos aristas 2-4 incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4.
- $9 \times \left( \binom{10}{3} + 3 \times \binom{10}{2} - 54 \right) - 24 = 1785$  desconectores de nueve links con nodos extremos de grado 3 (links 3-3), que no desconectan a nodos de grado 2,3 o 4, a la arista  $(v_1, v_2)$  o a las aristas incidentes en  $v_1$  y  $v_2$ .
- $6 \times \left( \binom{10}{2} - 4 \right) = 246$  desconectores de seis aristas con un extremo de grado 3 y el otro de grado 4, que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 y 3, o a la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $2 \times \left( \binom{12}{3} - 42 \right) = 356$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$  o  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 3 o 4, o aristas con nodos extremos de grado 3.
- $6 \times \left( \binom{10}{2} - 4 \right) = 246$  desconectores de 3-paths con un nodo extremo en  $v_1$  o en  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 7371 + 3003 + 8310 + 370 + 368 + 1785 + 246 + 356 + 246 = 22055 > 22024 = m_7(Y)$ .

(iii)  $H$  tiene exactamente tres nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  con  $\deg(v_1) = \deg(v_2) = \deg(v_3) = 2$ . En este caso la secuencia de grados de vértices de  $H$  puede ser  $(6,3,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$ ,  $(5,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  o  $(4,4,4,3,3,3,3,3,2,2,2)$ . Consideramos el peor caso (menor suma de desconectores) para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado tres, que corresponde a  $H$  con secuencia de grados de vértice  $(4,4,4,4,3,3,3,3,2,2,2,2)$ . Aquí a su vez distinguimos tres subcasos:

iii\_a) Los tres nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

iii\_a1) Los nodos adyacentes a los tres nodos de grado 2 sean todos distintos y de grado 3. Éste es un peor caso para el caso de que los tres nodos de grado 2 no sean adyacentes, ya que el número de nodos de grado 3 es mínimo (6) y al ser adyacente cada nodo de grado 3 a un solo nodo de grado 2, se minimiza la cantidad de desconectores  $n$ -triviales ya que se hace máxima la cantidad de desconectores que aíslan en forma simultánea a los nodos de grado 2 y 3. En la Fig.-A.7 se muestra este subcaso.

Para esta configuración y para cada tipo de desconector, se considera el peor caso para el grafo en cuanto a tamaño mínimo de desconectores de ese tipo. En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

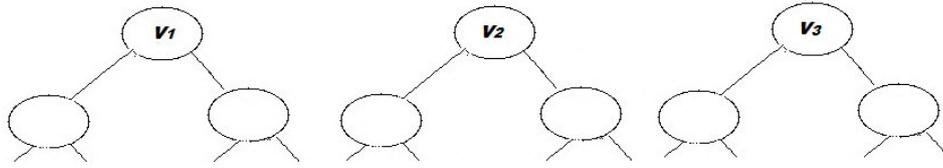


Figura A.7 m7- tres nodos de grado 2-Subcaso a1

- $3 \times \binom{16}{5} - 3 \times \binom{14}{3} + 12 = 12024$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ .
- $6 \times \left( \binom{10}{4} + 4 \times \binom{10}{3} + 4 \times \binom{10}{2} \right) - 3 \times \binom{13}{2} - 12 \times 12 = 4842$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (3) de aristas de nodos de grado 3.
- $3 \times \left( \binom{14}{3} - 7 \times 12 - 2 \right) = 834$  desconectores n-triviales de los tres nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni a los nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  de grado 2. Este peor caso corresponde a que los nodos de grado 4 no sean adyacentes entre sí.
- $6 \times \left( \binom{14}{4} - 5 \times \binom{12}{2} - 4 \times 10 - 3 \right) - 12 \times 10 = 3648$  desconectores de las seis aristas incidentes en  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4.
- $6 \times \left( \binom{11}{2} - 14 \right) = 246$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 3 y el otro de grado 4, que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4 ni aristas incidentes en  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$ . Corresponde a un peor caso para este tipo de desconectores en que los tres nodos de grado 4 son todos adyacentes entre sí (mínima cantidad de aristas 3-4).
- $3 \times \left( \binom{12}{3} - 5 \times 10 - 4 \right) = 498$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2 y grado 3 o aristas incidentes en  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$ . Corresponde a un peor caso para este tipo de desconectores en que los tres nodos de grado 4 son todos adyacentes entre sí.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 12024 + 4842 + 834 + 3648 + 246 + 498 = 22092 > 22024 = m_7(Y)$ .

iii\_a2)El peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2, y para desconectores de nodos de grado cuatro, corresponde a los nodos adyacentes a los tres nodos de grado 2 de grado 4, como ilustra la Fig.-A.8.

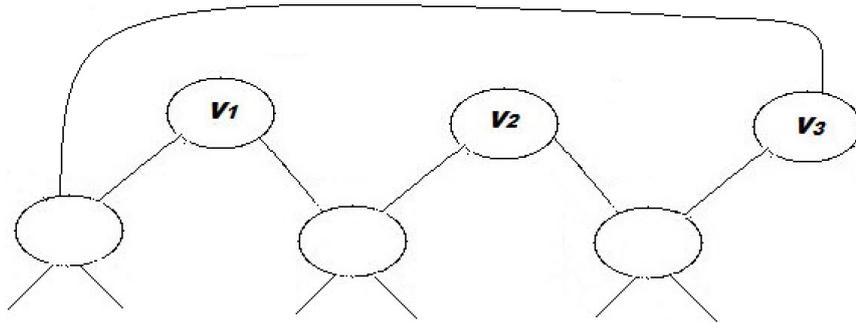


Figura A.8 m7- tres nodos de grado 2-Subcaso a2

Para esta configuración y para cada tipo de desconector, se considera el peor caso para el grafo en cuanto a tamaño mínimo de desconectores de ese tipo. En estas condiciones  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $3 \times \binom{16}{5} - 3 \times \binom{14}{3} + 12 = 12024$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ .
- $6 \times \left( \binom{9}{4} + 6 \times \binom{9}{3} + 12 \times \binom{9}{2} + 8 \right) - 8 \times \left( \binom{13}{2} - 3 \right) - 7 \times 12 = 5736$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (6) de aristas de nodos de grado 3.
- $3 \times \left( \binom{10}{3} + 2 \times \binom{10}{2} - 20 \right) = 570$  desconectores n-triviales de los tres nodos de grado 4 de  $H$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3. Este peor caso corresponde a que los nodos de grado 4 no sean adyacentes entre sí.
- $6 \times \left( \binom{10}{3} + 2 \times \binom{10}{2} - 25 \right) - 6 = 1104$  desconectores de las seis aristas incidentes en  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4.
- $6 \times \left( \binom{13}{3} - 5 \times 11 - 8 \right) - 6 = 1332$  desconectores de seis aristas con extremos de grado 3, que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4 ni aristas 2-4. Este es el peor caso de mínima cantidad de aristas 3-3.
- $2 \times \left( \binom{10}{2} - 3 \right) = 84$  desconectores de dos aristas con un extremo de grado 3 y el otro de grado 4, que no desconectan trivialmente nodos de grado 2,3 o 4. Corresponde a un peor caso para este tipo de desconectores en que uno de los nodos de grado 4 es adyacente a los otros dos (mínima cantidad de aristas 3-4).
- $3 \times \left( \binom{10}{3} + 2 \times \binom{10}{2} - 32 \right) = 534$  desconectores de 2-paths centrados en nodos de grado 4 y con ambos extremos en algún nodo de grado 2  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2,3 o 4 ni aristas incidentes en  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$ .

- $4 \times \left( \binom{11}{2} - 6 \right) = 196$  desconectores de cuatro 2-paths centrados en nodos de grado 4 y con un extremo de grado 2 y otro de grado 3, que no desconectan en forma individual nodos de grado 2,3 o 4 ni aristas incidentes en  $v_1, v_2$  o  $v_3$ . Corresponde al peor caso es que uno de los nodos de grado 4 es adyacente a los otros dos de grado 4.
- $6 \times \left( \binom{11}{2} - 5 \right) = 300$  desconectores de 2-paths centrados en nodos de grado 3 y con ambos extremos de grado 3, que no desconectan en forma individual nodos de grado 2 o 3.
- $6 \times 2 \times 8 = 96$  desconectores de 2-paths centrados en nodos de grado 3 y con un extremo de grado 4 y otro de grado 3.
- $3 \times 8 = 24$  desconectores de tres 2-paths centrados en los tres nodos de grado 2.
- $6 \times 8 = 48$  desconectores de seis 3-paths de aristas 2-4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 12024 + 5736 + 570 + 1104 + 1332 + 84 + 534 + 196 + 300 + 96 + 24 + 48 = 22048 > 22024 = m_7(Y)$ .

iii\_b) De los tres nodos de grado 2 de  $H$ , solo dos de ellos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes entre sí. Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

iii\_b1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado dos y grado tres, desconectores de la arista  $(v_1, v_2)$  y desconectores 1-triviales de aristas con nodos extremos de grado 3, corresponde a  $H$  con secuencia de grados de nodo  $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  y con los nodos restantes adyacentes a los tres nodos de grado 2 todos distintos y de grado 3. En la Fig.-A.9 se muestra este subcaso.

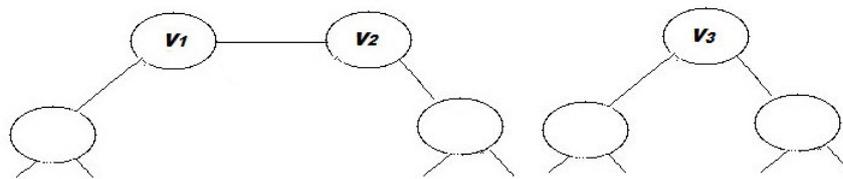


Figura A.9 m7- tres nodos de grado 2-Subcaso 2a

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + 2 \times \binom{15}{5} + \binom{13}{4} = 11089$  desconectores  $n$ -triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2$  y  $v_3$ .

- $2 \times \left( \binom{11}{4} + 3 \times \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} \right) + 2 \times \left( \binom{10}{4} + 5 \times \binom{10}{3} + 5 \times \binom{10}{2} \right) + 2 \times \left( \binom{11}{4} + 3 \times \binom{11}{3} + \binom{11}{2} \right) - 4 \times \binom{13}{2} - 11 \times 12 = 5256$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1, v_2$  y  $v_3$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (4) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $3 \times \left( \binom{14}{3} - 7 \times 12 - 2 \right) = 834$  desconectores n-triviales de los tres nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni a los nodos  $v_1, v_2$  y  $v_3$  de grado 2. Este peor caso corresponde a que los nodos de grado 4 no sean adyacentes entre sí.
- $\binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} - 2 \times \binom{13}{3} - 4 \times \binom{12}{2} - 3 \times 11 = 1848$  desconectores de la arista  $(v_1, v_2)$  que no desconectan trivialmente a  $v_3$  o a nodos de grado 3 o 4.
- $2 \times \left( \binom{11}{4} + 2 \times \binom{11}{3} - 2 \times \binom{9}{2} - 21 \right) - 2 \times \left( \binom{11}{4} + 3 \times \binom{11}{3} - 3 \times \binom{9}{2} - 39 \right) = 2494$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo en  $v_1, v_2$  o  $v_3$  y el otro extremo de grado 3 (links 2-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni a la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $2 \times \left( \binom{13}{4} - 4 \times \binom{11}{2} - 2 \times 10 - 3 - 2 \times 9 \right) = 908$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$  o  $v_2$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2, 3 o 4 o aristas incidentes en  $v_3$ .

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 11089 + 5256 + 834 + 1848 + 2494 + 908 = 22429 > 22024 = m_7(Y)$ .

iii\_b2) Se considera el peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas 2-3 con extremo  $v_1, v_2$  o  $v_3$  y 2-paths centrados en  $v_1, v_2$  o  $v_3$ . Corresponde a  $H$  con secuencia de grados de nodo  $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  y con los nodos adyacentes a los tres nodos de grado 2 todos distintos y de grado 4, como muestra la Fig.-A.10.

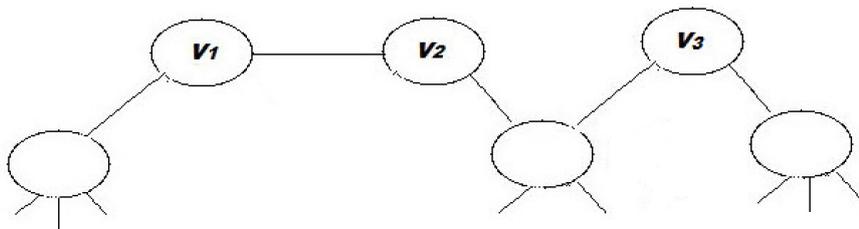


Figura A.10 m7- tres nodos de grado 2-Subcaso 2b

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + 2 \times \binom{15}{5} + \binom{13}{4} = 11089$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ .
- $6 \times \left( \binom{10}{4} + 5 \times \binom{10}{3} + 7 \times \binom{10}{2} \right) - 8 \times \binom{13}{2} - 7 \times 12 = 6162$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (8) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $3 \times \binom{14}{3} - 4 \times \binom{13}{2} - 12 \times 12 - 10 = 626$  desconectores n-triviales de los tres nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 3 ni a los nodos  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$  de grado 2.
- $\binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} - 8 \times \binom{12}{2} - 11 = 2178$  desconectores de la arista  $(v_1, v_2)$  que no desconectan trivialmente a  $v_3$  o a nodos de grado 3 o 4.
- $5 \times \binom{13}{3} - 7 \times 11 - 18 = 955$  desconectores de 5 aristas con nodos extremos de grados 3 (aristas 3-3) que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni a la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $2 \times \left( \binom{11}{3} + 2 \times \binom{10}{3} + 5 \times \binom{10}{2} - 139 \right) = 656$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo en  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$  y el otro extremo de grado 4 (links 2-4), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni a la arista  $(v_1, v_2)$ .
- $2 \times \binom{12}{3} - \binom{11}{2} - 4 \times 10 - 2 \times 9 + 8 - 13 = 314$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$ ,  $v_2$  o  $v_3$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2, 3 o 4 o aristas incidentes en nodos de grado 2.
- $\binom{10}{3} - 26 = 94$  desconectores del 2-path con extremo en los nodos  $v_2$  y  $v_3$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2 o 3, aristas incidentes en nodos de grado 2 o aristas entre nodos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 11089 + 6162 + 626 + 2178 + 955 + 656 + 314 + 94 = 22074 > 22024 = m_7(Y)$ .

iii\_c) Uno de los tres nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a los otros dos ( $v_2$  es adyacente a  $v_1$  y a  $v_3$ ). Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

iii\_c1) El peor caso para la cantidad de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado tres corresponde a  $H$  con secuencia de grados de nodo  $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  y con los otros

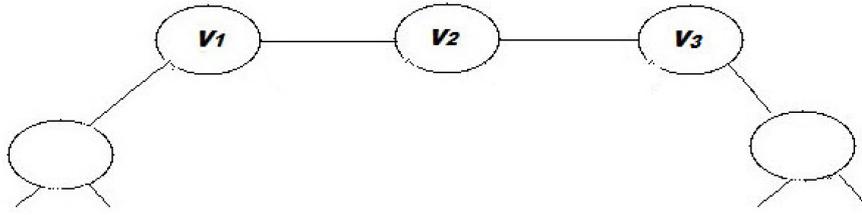


Figura A.11 m7- tres nodos de grado 2-Subcaso 3a

nodos adyacentes a los nodos  $v_1$  y  $v_3$  de grado 3. En la Fig.-A.11 se muestra este subcaso.

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + 2 \times \binom{15}{5} = 10374$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ .
- $2 \times \binom{14}{5} = 4004$  desconectores de las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_3)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.
- $\binom{14}{5} = 2002$  desconectores del 2-path  $v_1 - v_2 - v_3$ .
- $4 \times \left( \binom{11}{4} + 4 \times \binom{11}{3} \right) + 2 \times \binom{12}{4} - 5 \times \binom{13}{2} - 10 \times 12 = 4440$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 3 de  $H$ , que no desconectan trivialmente a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (5) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $2 \times \left( \binom{13}{4} - \binom{12}{3} - 2 \times \binom{11}{2} - 4 \times 10 - 3 \right) = 684$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo en  $v_1$  o  $v_3$  y el otro extremo de grado 3 (links 2-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni aristas 2-2.
- $2 \times \left( \binom{12}{4} - 3 \times \binom{10}{2} - 4 \times 9 - 3 \right) = 642$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$  y  $v_3$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2,3 o 4, o aristas 2-3.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 10374 + 4004 + 2002 + 4440 + 684 + 642 = 22146 > 22024 = m_7(Y)$ .

iii\_c2) Se considera el peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas 2-3 con extremo  $v_1$  o  $v_3$  y 2-paths centrados en  $v_1$  o  $v_3$ . Corresponde a  $H$  con secuencia de grados de nodo  $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,2,2,2)$  y con los nodos adyacentes a  $v_1$  y  $v_3$  de grado 4, como muestra la Fig.-A.12.

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + 2 \times \binom{15}{5} = 10374$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ .

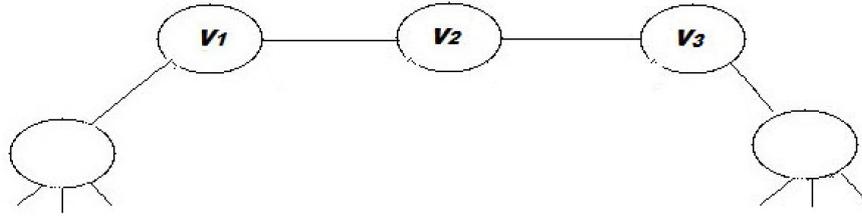


Figura A.12 m7- tres nodos de grado 2-Subcaso 3b

- $2 \times \binom{14}{5} = 4004$  desconectores de las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_3)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.
- $\binom{14}{5} = 2002$  desconectores del 2-path  $v_1 - v_2 - v_3$ .
- $6 \times \left( \binom{11}{4} + 4 \times \binom{11}{3} \right) - 7 \times \binom{13}{2} - 8 \times 12 = 5298$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 3 de  $H$ , que no desconectan trivialmente a  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ , a las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_3)$  ni al 2-path  $v_1 - v_2 - v_3$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (7) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $2 \times \left( \binom{12}{3} - \binom{11}{2} - 3 \times 10 - 3 \right) = 264$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo en  $v_1$  o  $v_3$  y el otro extremo de grado 4 (links 2-4), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2 o 3 ni a aristas 2-2.
- $2 \times \left( \binom{11}{3} - 31 \right) = 268$  desconectores de 2-paths centrados en  $v_1$  y  $v_3$ , que no desconectan en forma individual nodos de grado 2 o 3 o aristas 2-4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 10374 + 4004 + 2002 + 5298 + 264 + 268 = 22210 > 22024 = m_7(Y)$ .

(iv)  $H$  tiene exactamente cuatro nodos  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$  de grado 2. En este caso las secuencias posibles de grados de vértices de  $H$  son  $(7,3,3,3,3,3,3,2,2,2,2)$ ,  $(6,4,3,3,3,3,3,2,2,2,2)$ ,  $(5,5,3,3,3,3,3,2,2,2,2)$ ,  $(5,4,4,3,3,3,3,2,2,2,2)$  o  $(4,4,4,4,3,3,3,2,2,2,2)$ . Consideramos el peor caso (menor suma de desconectores) para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado tres, que corresponde a  $H$  con secuencia de grados de vértice  $(4,4,4,4,3,3,3,2,2,2,2)$ . Aquí a su vez distinguimos cinco subcasos:

iv\_a) Los cuatro nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

iv\_a1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado tres, corresponde a los nodos adyacentes a los cuatro nodos de grado 2 todos distintos y de grado 3. En la Fig.-A.13 se muestra este subcaso.

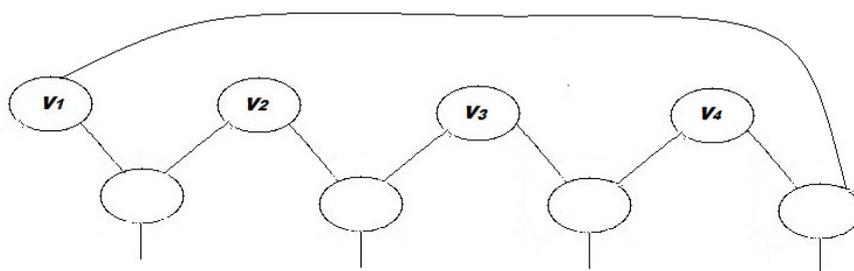


Figura A.13 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso a1

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $4 \times \binom{16}{5} - 6 \times \binom{14}{3} + 4 \times 12 = 15336$  desconectores  $n$ -triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{9}{4} + 4 \times \binom{9}{3} + 4 \times \binom{9}{2} - 8 \right) = 2392$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{14}{3} - 5 \times 12 - 6 \right) = 1192$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o grado 3.
- $8 \times \left( \binom{14}{4} - \binom{13}{3} - 4 \times \binom{11}{2} - \binom{10}{2} - 41 \right) = 3272$  desconectores  $l$ -triviales de aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 3 (links 2-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 15366 + 2392 + 1192 + 3272 = 22192 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_a2) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2, y para desconectores de nodos de grado cuatro, corresponde a los nodos adyacentes a los cuatro nodos de grado 2 todos distintos y de grado 4. En la Fig.-A.14 se muestra este subcaso.

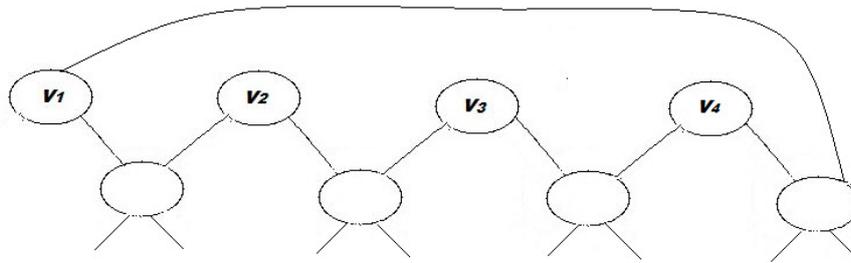


Figura A.14 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso a2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $4 \times \binom{16}{5} - 6 \times \binom{14}{3} + 4 \times 12 = 15336$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{15}{4} - 3 \times \binom{13}{2} \right) - 5 \times \binom{13}{2} - 12 = 3810$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (5) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{14}{3} - 2 \times \binom{13}{2} - 4 \times 12 - 2 \right) = 632$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o grado 3.
- $8 \times \left( \binom{13}{3} - \binom{12}{2} - 4 \times 10 - 5 \right) = 1400$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 4 (links 2-4), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.
- $4 \times \left( \binom{12}{3} - 46 \right) = 696$  desconectores de 2-paths con extremos en dos nodos de grado 2, que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni a links 2-4.
- $2 \times \left( \binom{13}{3} - 5 \times 11 - 3 \right) = 456$  desconectores l-triviales de aristas con ambos extremos de grado 3 (links 3-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4. El peor caso considerado corresponde a grafos con el número mínimo (2) de aristas de nodos extremos de grado 3.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 15336 + 3810 + 632 + 1400 + 696 + 456 = 22330 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_b) De los cuatro nodos de grado 2 de  $H$ , sólo dos de ellos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes entre sí. Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

iv\_b1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado tres, corresponde a los nodos adyacentes a los cuatro nodos de grado 2 todos distintos y de grado 3. En la Fig.-A.15 se muestra este subcaso.

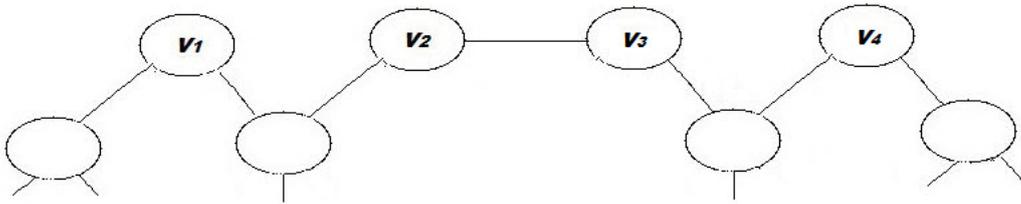


Figura A.15  $m_7$ - cuatro nodos de grado 2-Subcaso b1

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{13}{5} + 3 \times \binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{11}{5} + 5 \times \binom{11}{4} + 7 \times \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} = 14466$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $2 \times \left( \binom{11}{4} + 2 \times \binom{11}{3} \right) + 2 \times \left( \binom{9}{4} + 5 \times \binom{9}{3} + 7 \times \binom{9}{2} + 2 \times 9 \right) - \binom{13}{2} - 12 = 2814$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ . El peor caso considerado corresponde al grafo de la Fig.-A.15 con el número máximo (1) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{14}{3} - 4 \times 12 \right) - 6 \times 12 - 15 = 1177$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3.
- $\binom{11}{5} + 4 \times \binom{11}{4} + 4 \times \binom{11}{3} - 2 \times \binom{12}{3} - 2 \times \binom{11}{2} - 4 \times 11 = 1848$  desconectores de la arista de extremos de grado dos ( $v_2, v_3$ ) que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.
- $2 \times \left( \binom{10}{4} + 2 \times \binom{10}{3} - \binom{9}{2} - \binom{8}{2} - 44 \right) + 2 \times \left( \binom{10}{4} + 2 \times \binom{10}{3} - \binom{8}{2} - 44 \right) + 2 \times \left( \binom{9}{4} + 5 \times \binom{9}{3} + 6 \times \binom{9}{2} - 2 \times \binom{8}{2} - 92 \right) = 2668$  desconectores  $l$ -triviales de aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 3 (links 2-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni a la arista ( $v_2, v_3$ ).

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 14466 + 2814 + 1177 + 1848 + 2668 = 22973 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_b2) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2, y para desconectores de nodos de grado cuatro, corresponde a los nodos adyacentes a los cuatro nodos de grado 2 todos distintos y de grado 4. En la Fig.-A.16 se muestra este subcaso.

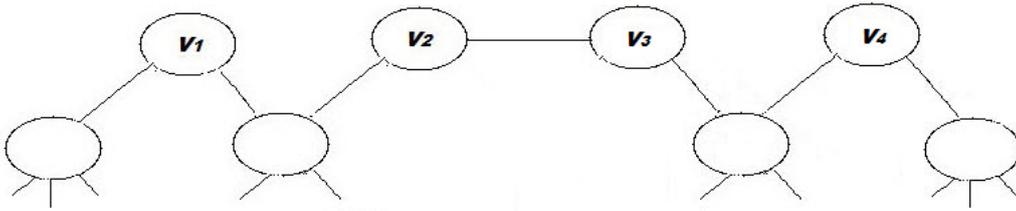


Figura A.16  $m_7$ - cuatro nodos de grado 2-Subcaso b2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{13}{5} + 3 \times \binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{11}{5} + 5 \times \binom{11}{4} + 7 \times \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} = 14466$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{8}{4} + 7 \times \binom{8}{3} + 17 \times \binom{8}{2} + 16 \times 8 + 4 \right) - 5 \times \binom{13}{2} - 12 = 3878$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (5) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $2 \times \left( \binom{14}{3} - \binom{13}{2} - 6 \times 12 - 1 \right) + 2 \times \left( \binom{14}{3} - 2 \times \binom{13}{2} - 4 \times 12 - 2 \right) = 742$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o grado 3.
- $\binom{11}{5} + 4 \times \binom{11}{4} + 4 \times \binom{11}{3} - 4 \times \binom{12}{2} - 2 \times \binom{11}{2} - 2 \times 10 = 2048$  desconectores de la arista de extremos de grado dos ( $v_2, v_3$ ) que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.
- $2 \times \left( \binom{9}{3} + 2 \times \binom{9}{2} - 21 \right) + 2 \times \left( \binom{9}{3} + 2 \times \binom{9}{2} - 20 \right) + 2 \times \left( \binom{8}{3} + 5 \times \binom{8}{2} + 6 \times 8 - 35 \right) = 960$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 4 (links 2-4), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni a la arista ( $v_2, v_3$ ).

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 14466 + 3878 + 742 + 2048 + 960 = 22094 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_c) De los cuatro nodos de grado 2 de  $H$ , hay dos pares de nodos adyacentes entre sí. Los nodos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes, así como los nodos  $v_3$  y  $v_4$ . Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

iv\_c1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado tres, corresponde a los nodos adyacentes a los cuatro nodos de grado 2 todos distintos y de grado 3. En la Fig.-A.17 se muestra este subcaso.

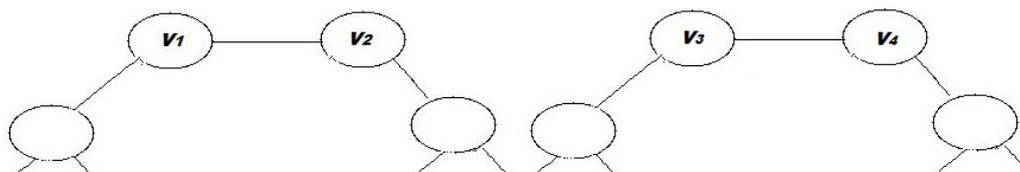


Figura A.17 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso c1

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{13}{5} + 3 \times \binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{12}{5} + 3 \times \binom{12}{4} + \binom{12}{3} = 13586$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{10}{4} + 4 \times \binom{10}{3} + 4 \times \binom{10}{2} + 10 \right) - 2 \times \binom{13}{2} - 4 \times 12 = 3316$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (2) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{14}{3} - 68 \right) - 4 = 1180$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3. El peor caso considerado corresponde a grafos sin aristas 3-3.
- $2 \times \left( \binom{12}{5} + 3 \times \binom{12}{4} - 2 \times \binom{10}{3} - 8 \times \binom{10}{2} - 4 \times 11 \right) + \binom{12}{3} - 4 \times 10 = 3446$  desconectores de las aristas de extremos de grado dos  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.
- $4 \times \left( \binom{10}{4} + 3 \times \binom{10}{2} - \binom{9}{2} - 21 \right) = 2052$  desconectores de las cuatro aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 3 (links 2-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4 ni a las aristas  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$ .

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 13586 + 3316 + 1180 + 3446 + 2052 = 23580 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_c2) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2, y para desconectores de nodos de grado cuatro, corresponde a los nodos adyacentes a los cuatro nodos de grado 2 todos distintos y de grado 4. En la Fig.-A.18 se muestra este subcaso.

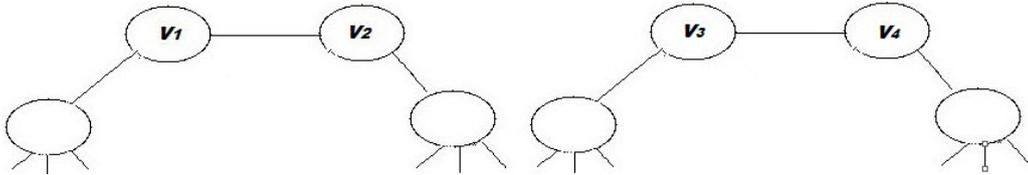


Figura A.18 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso c2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{13}{5} + 3 \times \binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{12}{5} + 3 \times \binom{12}{4} + \binom{12}{3} = 13586$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{9}{4} + 6 \times \binom{9}{3} + 11 \times \binom{9}{2} + 6 \times 9 + 1 \right) - 5 \times \binom{13}{2} - 12 = 3922$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ . El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (5) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{9}{3} + 4 \times \binom{9}{2} + 4 \times 9 - 33 \right) = 924$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3.
- $2 \times \left( \binom{12}{5} + 3 \times \binom{12}{4} - 6 \times \left( \binom{9}{2} + 3 \times 9 \right) - 20 \right) + \binom{12}{3} - 8 = 3974$  desconectores de las aristas con ambos extremos de grado dos  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 13586 + 3922 + 924 + 3974 = 22406 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_d) Uno de los cuatro nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a otros dos, y hay un nodo de grado 2 no adyacente a ningún otro nodo de grado 2 ( $v_2$  es adyacente a  $v_1$  y a  $v_3$ ). Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

iv\_d1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado tres, corresponde a los nodos adyacentes a los nodos de grado 2 todos distintos y de grado 3. En la Fig.-A.19 se muestra este subcaso.

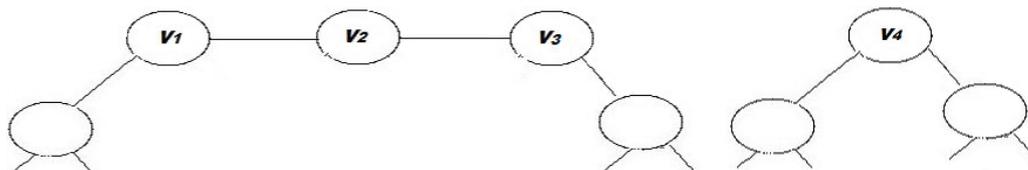


Figura A.19 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso d1

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{4} + \binom{12}{5} + 4 \times \binom{12}{4} + 3 \times \binom{12}{3} = 13806$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \binom{10}{4} + 16 \times \binom{10}{3} + 14 \times \binom{10}{2} - 2 \times \binom{11}{2} - 4 \times 10 = 3240$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2. El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (2) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{14}{3} - 68 \right) - 4 = 1180$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3. El peor caso considerado corresponde a grafos sin aristas 3-3.
- $2 \times \left( \binom{12}{5} + 2 \times \binom{12}{4} - \binom{10}{3} - 4 \times \binom{10}{2} - 40 \right) = 2884$  desconectores de las aristas de extremos de grado dos ( $v_1, v_2$ ) y ( $v_2, v_3$ ) que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.
- $\binom{12}{5} + 2 \times \binom{12}{4} - 2 \times \binom{10}{3} - 6 \times \binom{10}{2} - 10 = 1232$  desconectores del 2-path  $v_1 - v_2 - v_3$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 13806 + 3240 + 1180 + 2884 + 1232 = 22342 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_d2) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores  $n$ -triviales de nodos de grado cuatro, corresponde a los nodos adyacentes a los cuatro nodos de grado 2 todos distintos y de grado 4. En la Fig.-A.20 se muestra este subcaso.

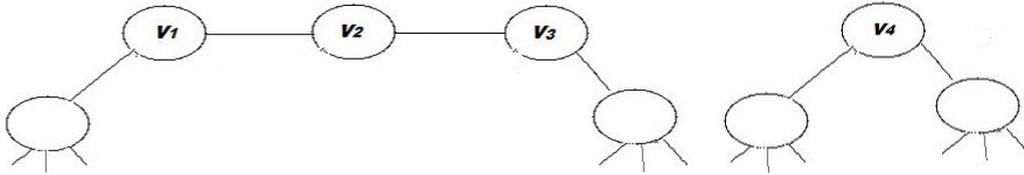


Figura A.20 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso d2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{4} + \binom{12}{5} + 4 \times \binom{12}{4} + 3 \times \binom{12}{3} = 13806$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $4 \times \left( \binom{9}{4} + 6 \times \binom{9}{3} + 11 \times \binom{9}{2} + 6 \times 9 \right) - 5 \times \binom{13}{2} - 12 = 3918$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2. El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (5) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $4 \times \binom{9}{3} + 16 \times \binom{9}{2} + 14 \times 9 + 12 \times 11 - 4 = 902$  desconectores  $n$ -triviales de los cuatro nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o 3. El peor caso considerado corresponde a grafos sin aristas 3-3.
- $2 \times \left( \binom{12}{5} + 2 \times \binom{12}{4} - 6 \times \binom{9}{2} - 54 \right) = 3024$  desconectores de las aristas de extremos de grado dos ( $v_1, v_2$ ) y ( $v_2, v_3$ ) que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.
- $\binom{12}{5} + 2 \times \binom{12}{4} - 6 \times \binom{9}{2} - 126 = 1440$  desconectores del 2-path  $v_1 - v_2 - v_3$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 13806 + 3918 + 902 + 3024 + 1440 = 23090 > 22024 = m_7(Y)$ .

iv\_e) Los cuatro nodos de grado 2 forman una cadena  $v_1-v_2-v_3-v_4$ . Considerando solamente la suma de desconectores n-triviales de nodos de grado 2 y 3 y de aristas y 2-paths de nodos de grado 2, el peor caso corresponde a que la cadena sea adyacente a dos nodos de grado 3 distintos, como se muestra en la Fig.-A.21

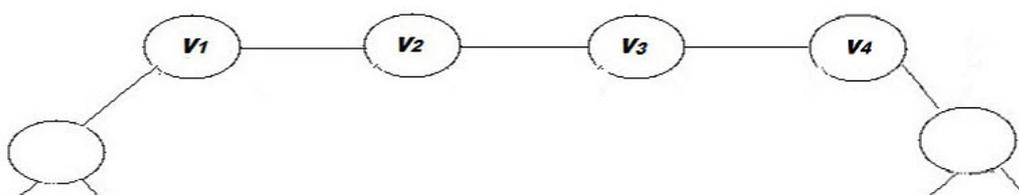


Figura A.21 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso e

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{4} + \binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} = 13091$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3$  y  $v_4$ .
- $2 \times \left( \binom{11}{4} + 3 \times \binom{11}{3} + \binom{11}{2} \right) + 2 \times \left( \binom{10}{4} + 5 \times \binom{10}{3} + 6 \times \binom{11}{2} + 10 \right) - 2 \times \binom{13}{2} - 4 \times 12 = 3736$  desconectores n-triviales de los cuatro nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2. El peor caso considerado corresponde a grafos con el número máximo (2) de aristas de nodos extremos de grado 3.
- $3 \times \left( \binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} - 2 \times \binom{11}{3} - 4 \times \binom{11}{2} - 6 \times \binom{10}{2} - 40 \right) = 4431$  desconectores de las aristas de extremos de grado 2 ( $v_1, v_2$ ), ( $v_2, v_3$ ) y ( $v_3, v_4$ ) que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2 o 3.
- $2 \times \left( \binom{13}{5} - \binom{11}{3} - 2 \times \binom{10}{2} \right) = 2064$  desconectores de los 2-paths  $v_1 - v_2 - v_3$  y  $v_2 - v_3 - v_4$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2, o 3.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 13091 + 3736 + 4431 + 2064 = 23322 > 22024 = m_7(Y)$ .

(v) $H$  tiene exactamente cinco nodos  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  de grado 2. Consideramos el peor caso (menor suma de desconectores) para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado tres, que corresponde a  $H$  con secuencia de grados de vértice (4,4,4,4,4,3,3,2,2,2,2,2). Aquí a su vez distinguimos siete subcasos:

v\_a) Los cinco nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

v\_a1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado tres, corresponde a que los dos nodos de grado 3 de  $H$  sean cada uno de ellos adyacentes a

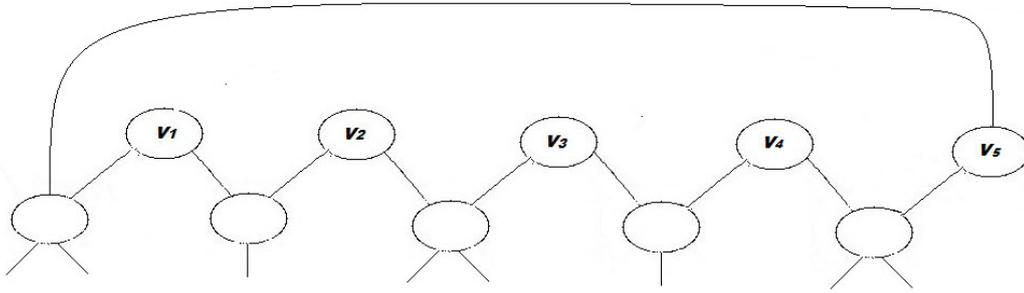


Figura A.22 m7- cinco nodos de grado 2-Subcaso a1

dos nodos de grado 2. En la Fig.-A.22 se muestra este subcaso.

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $5 \times \binom{16}{5} - 10 \times \binom{14}{3} + 10 \times 12 = 18320$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{7}{4} + 6 \times \binom{7}{3} + 12 \times \binom{7}{2} + 8 \times 7 \right) = 1106$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2.
- $5 \times \binom{14}{3} - 6 \times \binom{13}{2} - 256 = 1096$  desconectores n-triviales de los cinco nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o grado 3.
- $4 \times \left( \binom{7}{4} + 6 \times \binom{7}{3} + 12 \times \binom{7}{2} + 8 \times 7 - 18 \right) - 4 \times 8 = 2108$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 3 (links 2-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 18320 + 1106 + 1096 + 2108 = 22630 > 22024 = m_7(Y)$ .

v\_a2) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2, y para desconectores de nodos de grado cuatro, corresponde a los nodos adyacentes a los cinco nodos de grado 2 todos distintos y de grado 4. En la Fig.-A.23 se muestra este subcaso.

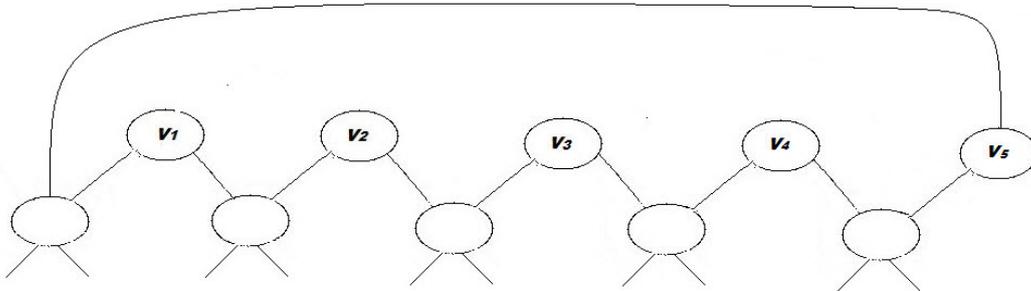


Figura A.23 m7- cinco nodos de grado 2-Subcaso a2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $5 \times \binom{16}{5} - 10 \times \binom{14}{3} + 10 \times 12 = 18320$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{5}{4} + 10 \times \binom{5}{3} + 40 \times \binom{5}{2} + 80 \times 5 + 80 \right) - \left( \binom{13}{2} - 5 \right) = 1897$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2.
- $5 \times \left( \binom{14}{3} - 2 \times \binom{13}{2} - 3 \times 12 \right) - 6 \times 12 = 788$  desconectores n-triviales de los cinco nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o grado 3.
- $10 \times \left( \binom{6}{3} + 6 \times \binom{6}{2} + 12 \times 6 + 8 \right) - 148 = 1752$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 4 (links 2-4), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 18320 + 1897 + 788 + 1752 = 22757 > 22024 = m_7(Y)$ .

(v\_b) De los cinco nodos de grado 2 de  $H$ , sólo dos de ellos son adyacentes entre sí. Se analizan los dos peores subcasos (menor suma de desconectores):

(v\_b1) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado tres, corresponde a que los dos nodos de grado 3 sean adyacentes cada uno de ellos a dos nodos de grado 2. En la Fig.-A.24 se muestra este subcaso.

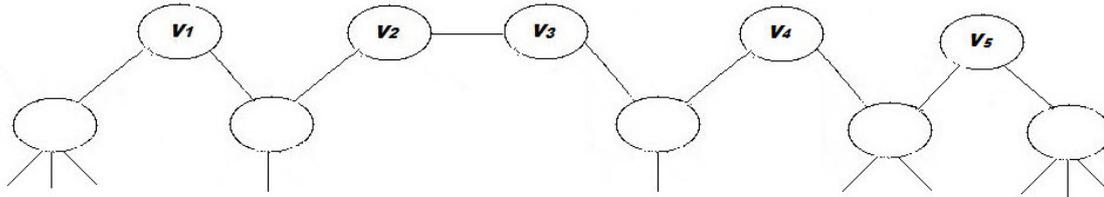


Figura A.24 m7- cinco nodos de grado 2-Subcaso b1

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{14}{5} + 2 \times \binom{14}{4} + \binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} + \binom{11}{5} + 5 \times \binom{11}{4} + 7 \times \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} + \binom{9}{5} + 7 \times \binom{9}{4} + 17 \times \binom{9}{3} + 16 \times \binom{9}{2} + 4 \times 9 = 17514$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{8}{4} + 5 \times \binom{8}{3} + 8 \times \binom{8}{2} + 4 \times 8 \right) - \binom{10}{2} = 1167$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2. Este es el peor caso en que los dos nodos de grado 3 son adyacentes.
- $\binom{9}{5} + 6 \times \binom{9}{4} + 12 \times \binom{9}{3} + 8 \times \binom{9}{2} - 2 \times \binom{12}{3} = 1738$  desconectores de la arista entre nodos de grado 2, que no desconecta trivialmente a los nodos de grado 3.
- $4 \times \left( \binom{8}{4} + 4 \times \binom{8}{3} + 4 \times \binom{8}{2} \right) - \binom{10}{3} = 1504$  desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2 y el otro extremo de grado 3 (links 2-3), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2 o 3 ni a la arista 2-2.
- $2 \times \left( \binom{8}{4} + 4 \times \binom{8}{3} + 4 \times \binom{8}{2} - \binom{10}{3} \right) = 572$  desconectores de 2-paths que incluyen la arista 2-2 ( $v_2, v_3$ ).

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 17514 + 1167 + 1738 + 1504 + 572 = 22495 > 22024 = m_7(Y)$ .

v\_b2) El peor caso para la suma de conjuntos desconectores l-triviales de aristas con un extremo de grado 2, y para desconectores de nodos de grado cuatro, corresponde a los nodos adyacentes a los cinco nodos de grado 2 todos distintos y de grado 4. En la Fig.-A.25 se muestra este subcaso.

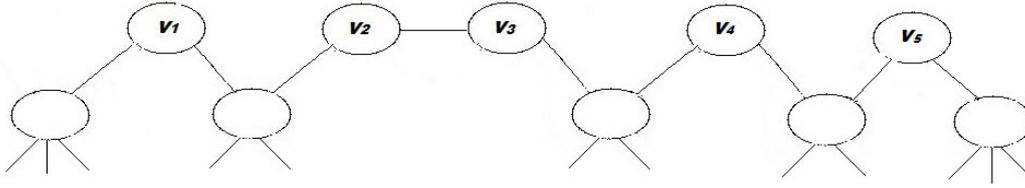


Figura A.25 m7- cinco nodos de grado 2-Subcaso b2

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{14}{5} + 2 \times \binom{14}{4} + \binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} + \binom{11}{5} + 5 \times \binom{11}{4} + 7 \times \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} + \binom{9}{5} + 7 \times \binom{9}{4} + 17 \times \binom{9}{3} + 16 \times \binom{9}{2} + 4 \times 9 = 17514$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{6}{4} + 9 \times \binom{6}{3} + 31 \times \binom{6}{2} + 50 \times 6 + 36 \right) - \left( \binom{13}{2} - 5 \right) = 1919$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2.
- $3 \times \binom{7}{3} + 15 \times \binom{7}{2} + 2 \times \binom{6}{3} + 14 \times \binom{6}{2} + 303 = 973$  desconectores n-triviales de los cinco nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o grado 3.
- $\binom{9}{5} + 6 \times \binom{9}{4} + 12 \times \binom{9}{3} + 8 \times \binom{9}{2} - 2 \times \binom{12}{2} - 2 \times \binom{11}{2} - 30 = 1906$  desconectores de la arista con ambos extremos de grado 2 (link 2-2), que no desconecta trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 17514 + 1919 + 973 + 1906 = 22312 > 22024 = m_7(Y)$ .

v\_c) De los cinco nodos de grado 2 de  $H$ , hay dos pares de nodos adyacentes entre sí. Los nodos  $v_1$  y  $v_2$  son adyacentes, así como los nodos  $v_4$  y  $v_5$ . Se analiza el peor caso para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado dos, tres y cuatro y aristas con extremos de grado dos, correspondiente a que los dos nodos de grado 3 sean adyacentes cada uno a dos nodos de grado 2. En la Fig.-A.26 se muestra este subcaso.

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{13}{5} + 3 \times \binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{11}{5} + 5 \times \binom{11}{4} + 7 \times \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} + \binom{10}{5} + 5 \times \binom{10}{4} + 7 \times \binom{10}{3} + 2 \times \binom{10}{2} = 16698$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .

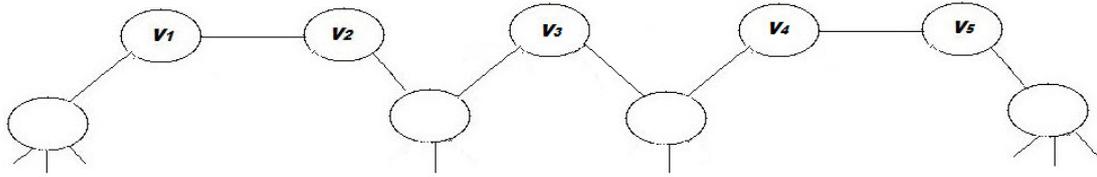


Figura A.26 m7- cuatro nodos de grado 2-Subcaso c

- $2 \times \left( \binom{9}{4} + 4 \times \binom{9}{3} + 4 \times \binom{9}{2} + 9 \right) - \binom{11}{2} = 1175$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2.
- $2 \times \left( \binom{7}{3} + 6 \times \binom{7}{2} + 12 \times 7 + 9 - 21 \right) + 3 \times \left( \binom{6}{3} + 8 \times \binom{6}{2} + 23 \times 6 + 28 - 22 \right) = 1318$  desconectores n-triviales de los cinco nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2 o grado 3.
- $2 \times \binom{10}{5} + 10 \times \binom{10}{4} + 13 \times \binom{10}{3} - 2 \times \binom{12}{3} - 2 \times \binom{12}{2} - 8 \times 11 = 3504$  desconectores de las aristas de extremos de grado dos  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2,3 o 4.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 16698 + 1175 + 1318 + 3504 = 22695 > 22024 = m_7(Y)$ .

v\_d) Uno de los cinco nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a otros dos, y hay dos nodos de grado 2 no adyacentes a ningún otro nodo de grado 2 ( $v_3$  es adyacente a  $v_2$  y a  $v_4$ ). Se considera el peor caso para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grados dos y tres y aristas 2-2, que corresponde a que los dos nodos de grado 3 sean adyacentes cada uno a dos nodos de grado 2. En la Fig.-A.27 se muestra este subcaso.

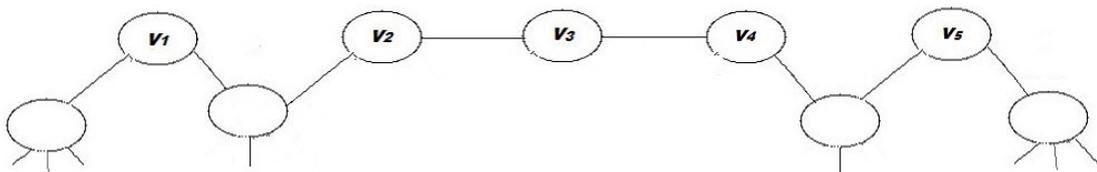


Figura A.27 m7- cinco nodos de grado 2-Subcaso d

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{14}{5} + 2 \times \binom{14}{4} + \binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} + \binom{12}{5} + 3 \times \binom{12}{4} + 2 \times \binom{12}{3} + \binom{10}{5} + 6 \times \binom{10}{4} + 11 \times \binom{10}{3} + 6 \times \binom{10}{2} = 16908$  desconectores n-triviales de los nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{10}{5} + 4 \times \binom{10}{4} + 4 \times \binom{10}{3} \right) = 3144$  desconectores de las dos aristas de extremos de grado dos  $(v_1, v_2)$  y  $(v_3, v_4)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.

- $\binom{10}{5} + 4 \times \binom{10}{4} + 4 \times \binom{10}{3} = 1572$  desconectores del 2-path de nodos de grado 2  $v_1 - v_2 - v_3$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.
- $2 \times \left( \binom{9}{4} + 2 \times \binom{9}{3} \right) - \binom{9}{2} = 552$  desconectores n-triviales de los dos nodos de grado 3 de  $H$  que no desconectan trivialmente a los nodos de grado 2, aristas 2-2 ni al 2-path  $v_1 - v_2 - v_3$ .

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 16908 + 3144 + 1572 + 552 = 22176 > 22024 = m_7(Y)$ .

v\_e) Uno de los cinco nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a otros dos, y los otros dos nodos de grado 2 son adyacentes entre sí. En la Fig.-A.28 se muestra este subcaso.

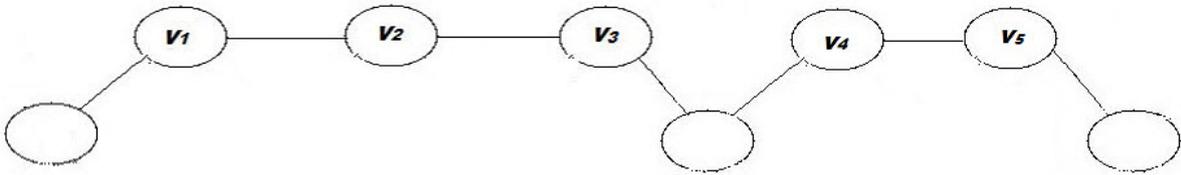


Figura A.28  $m_7$ - cinco nodos de grado 2-Subcaso e

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{4} + \binom{12}{5} + 4 \times \binom{12}{4} + 3 \times \binom{12}{3} + \binom{11}{5} + 4 \times \binom{11}{4} + 3 \times \binom{11}{3} = 16083$  desconectores n-triviales de los cinco nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{11}{5} + 3 \times \binom{11}{4} + \binom{11}{3} \right) = 3234$  desconectores de las dos aristas de extremos de grado dos  $(v_1, v_2)$  y  $(v_2, v_3)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.
- $\binom{11}{5} + 4 \times \binom{11}{4} + \binom{11}{3} = 1947$  desconectores de la arista de extremos de grado dos  $(v_4, v_5)$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2 ni otras aristas 2-2.
- $\binom{11}{5} + 3 \times \binom{11}{4} = 1452$  desconectores del 2-path de nodos de grado 2  $v_1 - v_2 - v_3$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2 ni a la arista  $(v_4, v_5)$ .

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 16083 + 3234 + 1947 + 1452 = 22716 > 22024 = m_7(Y)$ .

v\_f) Hay cuatro nodos de grado 2 que forman una cadena  $v_1-v_2-v_3-v_4$ . En la Fig.-A.29 se muestra este subcaso.

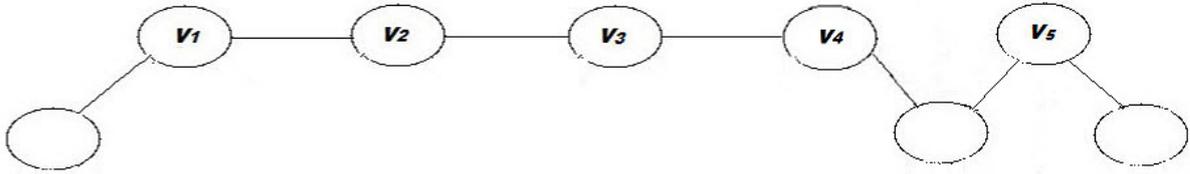


Figura A.29 m7- cinco nodos de grado 2-Subcaso f

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{4} + \binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} + \binom{11}{5} + 5 \times \binom{11}{4} + 6 \times \binom{11}{3} + \binom{11}{2} = 16248$  desconectores  $n$ -triviales de los cinco nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{11}{5} + 3 \times \binom{11}{4} + 2 \times \binom{11}{3} \right) - \binom{11}{4} - 2 \times \binom{11}{3} = 2904$  desconectores de las dos aristas de extremos de grado dos ( $v_1, v_2$ ) y ( $v_3, v_4$ ) que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.
- $\binom{11}{5} + 2 \times \binom{11}{4} = 1122$  desconectores de la arista de extremos de grado dos ( $v_2, v_3$ ), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2 ni otras aristas 2-2.
- $2 \times \left( \binom{11}{5} + 2 \times \binom{11}{4} \right) = 2244$  desconectores de los dos 2-path de nodos de grado 2  $v_1 - v_2 - v_3$  y  $v_2 - v_3 - v_4$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 16248 + 2904 + 1122 + 2244 = 22518 > 22024 = m_7(Y)$ .

v\_g) Los cinco nodos de grado 2 forman una cadena  $v_1-v_2-v_3-v_4-v_5$ . En la Fig.-A.30 se muestra este subcaso.

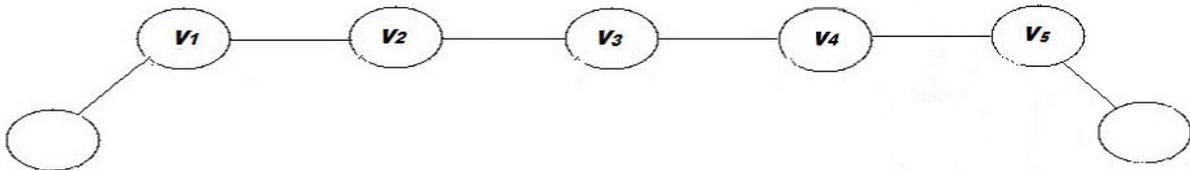


Figura A.30 m7- cinco nodos de grado 2-Subcaso g

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{4} + \binom{13}{5} + 2 \times \binom{13}{4} + \binom{12}{5} + 3 \times \binom{12}{4} + \binom{12}{3} = 15588$  desconectores n-triviales de los cinco nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$ .
- $2 \times \left( \binom{12}{5} + 2 \times \binom{12}{4} \right) = 3564$  desconectores de las dos aristas de extremos de grado dos  $(v_1, v_2)$  y  $(v_4, v_5)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.
- $2 \times \binom{12}{5} = 1584$  desconectores de las dos aristas de extremos de grado dos  $(v_2, v_3)$  y  $(v_3, v_4)$  que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2 ni a aristas 2-2.
- $2 \times \binom{12}{5} = 1584$  desconectores de los dos 2-path de nodos de grado 2  $v_1 - v_2 - v_3$  y  $v_3 - v_4 - v_5$ , que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 15588 + 3564 + 1584 + 1584 = 22320 > 22024 = m_7(Y)$ .

(vi)  $H$  tiene exactamente seis nodos  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$  y  $v_6$  de grado 2. Aquí a su vez distinguimos ocho subcasos:

vi\_a) Los seis nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. Consideramos el peor caso (menor suma de desconectores) para la suma de conjuntos desconectores n-triviales de nodos de grado tres, que corresponde a  $H$  con secuencia de grados de vértice  $(4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$ . En la Fig.-A.31 se muestra este subcaso.

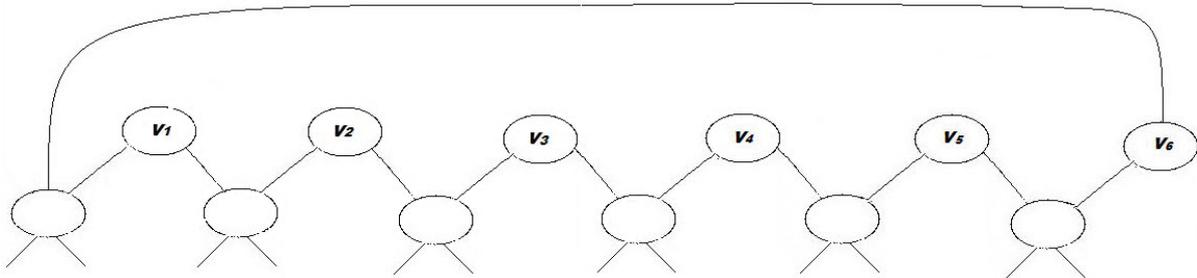


Figura A.31 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso a

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{14}{5} + 2 \times \binom{14}{4} + \binom{12}{5} + 4 \times \binom{12}{4} + 4 \times \binom{12}{3} + \binom{10}{5} + 6 \times \binom{10}{4} + 12 \times \binom{10}{3} + 8 \times \binom{10}{2} + \binom{8}{5} + 8 \times \binom{8}{4} + 24 \times \binom{8}{3} + 32 \times \binom{8}{2} + 16 \times 8 + \binom{6}{5} + 10 \times \binom{6}{4} + 40 \times \binom{6}{3} + 80 \times \binom{6}{2} + 80 \times 6 + 32 = 20988$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 2.
- $6 \times \left( \binom{4}{3} + 8 \times \binom{4}{2} + 24 \times 4 + 32 \right) - 6 = 1074$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 4 de  $H$  que no desconectan trivialmente nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 20988 + 1074 = 22062 > 22024 = m_7(Y)$ .

vi\_b) De los seis nodos de grado 2 de  $H$ , sólo dos de ellos son adyacentes entre sí. En la Fig.-A.32 se muestra este subcaso.

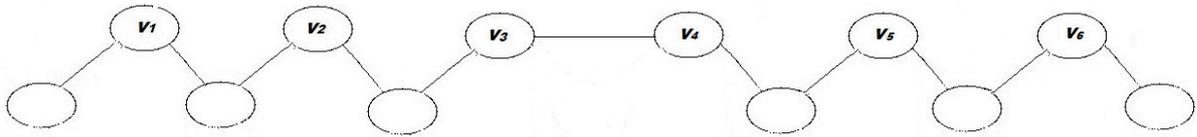


Figura A.32 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso b

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{14}{5} + 2 \times \binom{14}{4} + \binom{12}{5} + 4 \times \binom{12}{4} + 4 \times \binom{12}{3} + \binom{11}{5} + 4 \times \binom{11}{4} + 4 \times \binom{11}{3} + \binom{9}{5} + 7 \times \binom{9}{4} + 17 \times \binom{9}{3} + 16 \times \binom{9}{2} + 4 \times 9 + \binom{7}{5} + 9 \times \binom{7}{4} + 31 \times \binom{7}{3} + 50 \times \binom{7}{2} + 36 \times 7 = 20237$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 2.
- $\binom{7}{5} + 8 \times \binom{7}{4} + 24 \times \binom{7}{3} + 32 \times \binom{7}{2} + 16 \times 7 = 1925$  desconectores de la arista con ambos extremos de grado 2 (link 2-2), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 20237 + 1925 = 22162 > 22024 = m_7(Y)$ .

vi\_c) De los seis nodos de grado 2 de  $H$ , hay dos pares de nodos adyacentes entre sí. En la Fig.-A.33 se muestra este subcaso.

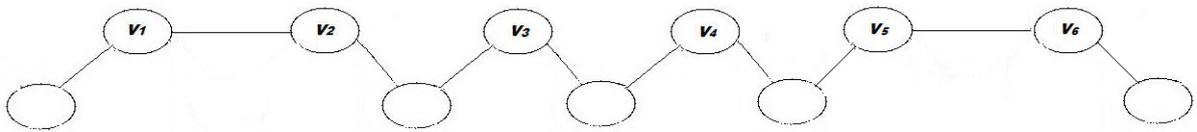


Figura A.33 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso c

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{13}{5} + 3 \times \binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{11}{5} + 5 \times \binom{11}{4} + 7 \times \binom{11}{3} + 2 \times \binom{11}{2} + \binom{9}{5} + 7 \times \binom{9}{4} + 17 \times \binom{9}{3} + 16 \times \binom{9}{2} + 4 \times 9 + \binom{8}{5} + 7 \times \binom{8}{4} + 17 \times \binom{8}{3} + 16 \times \binom{8}{2} + 4 \times 8 = 19492$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 2.
- $2 \times \left( \binom{8}{5} + 7 \times \binom{8}{4} + 17 \times \binom{8}{3} + 16 \times \binom{8}{2} + 4 \times 8 \right) - \binom{8}{3} - 4 \times \binom{8}{2} - 4 \times 8 = 3756$  desconectores de las dos aristas con ambos extremos de grado 2 (links 2-2), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 19492 + 3756 = 23248 > 22024 = m_7(Y)$ .

vi\_d) De los seis nodos de grado 2 de  $H$ , hay tres pares de nodos adyacentes entre sí. En la Fig.-A.34 se muestra este subcaso.

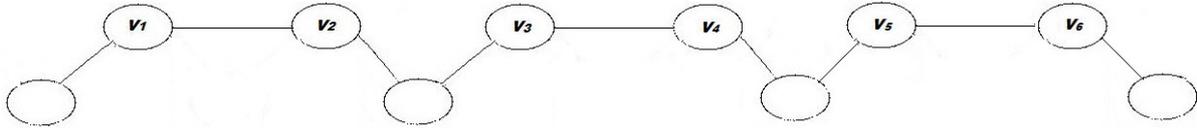


Figura A.34 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso d

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{13}{5} + 3 \times \binom{13}{4} + \binom{13}{3} + \binom{12}{5} + 3 \times \binom{12}{4} + \binom{12}{3} + \binom{10}{5} + 6 \times \binom{10}{4} + 11 \times \binom{10}{3} + 6 \times \binom{10}{2} + 1 + \binom{9}{5} + 6 \times \binom{9}{4} + 11 \times \binom{9}{3} + 6 \times \binom{9}{2} + 1 = 18712$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 2.
- $3 \times \binom{9}{5} + 18 \times \binom{9}{4} + 30 \times \binom{9}{3} + 9 \times \binom{9}{2} + 1 = 5491$  desconectores de las tres aristas con ambos extremos de grado 2 (links 2-2), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 18712 + 5491 = 24203 > 22024 = m_7(Y)$ .

vi\_e) Uno de los seis nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a otros dos, y hay tres nodos de grado 2 no adyacentes a ningún otro nodo de grado 2. En la Fig.-A.35 se muestra este subcaso.

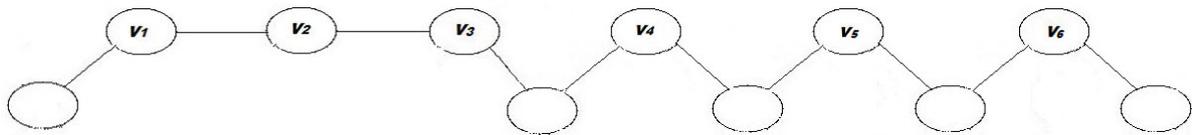


Figura A.35 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso e

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{15}{5} + \binom{14}{5} + \binom{14}{4} + \binom{12}{5} + 4 \times \binom{12}{4} + 3 \times \binom{12}{3} + \binom{10}{5} + 6 \times \binom{10}{4} + 11 \times \binom{10}{3} + 6 \times \binom{10}{2} + \binom{8}{5} + 8 \times \binom{8}{4} + 23 \times \binom{8}{3} + 28 \times \binom{8}{2} + 12 \times 8 = 19692$  desconectores n-triviales de los seis nodos de grado 2.
- $2 \times \left( \binom{8}{5} + 6 \times \binom{8}{4} + 12 \times \binom{8}{3} + 8 \times \binom{8}{2} \right) = 2744$  desconectores de las dos aristas con ambos extremos de grado 2 (links 2-2), que no desconectan trivialmente a nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 19692 + 2744 = 22436 > 22024 = m_7(Y)$ .

vi\_f) Uno de los seis nodos de grado 2 de  $H$  es adyacente a otros dos, y al menos dos de los tres nodos de grado 2 restantes son adyacentes entre sí. En la Fig.-A.36 se muestra este subcaso, en sus dos variantes.

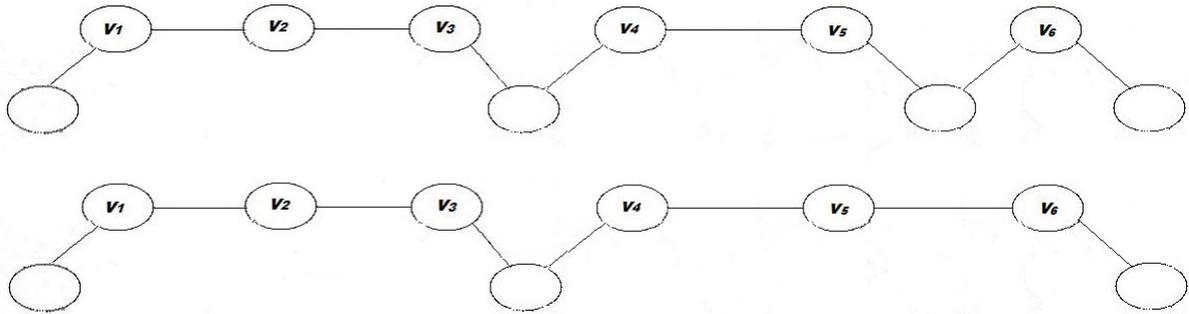


Figura A.36 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso f

Consideramos el subgrafo inducido por los cinco nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  y sus nodos adyacentes. Este subgrafo se corresponde exactamente con el caso v\_e) para el que ya se probó que el grafo completo tiene una cantidad de desconectores de tamaño siete mayor al Yutsis 18jF. Es así que  $m_7(H) \geq 22176 > 22024 = m_7(Y)$ .

vi\_g) Hay cuatro nodos de grado 2 que forman una cadena  $v_1-v_2-v_3-v_4$  maximal. En la Fig.-A.37 se muestra este subcaso, en sus dos variantes.

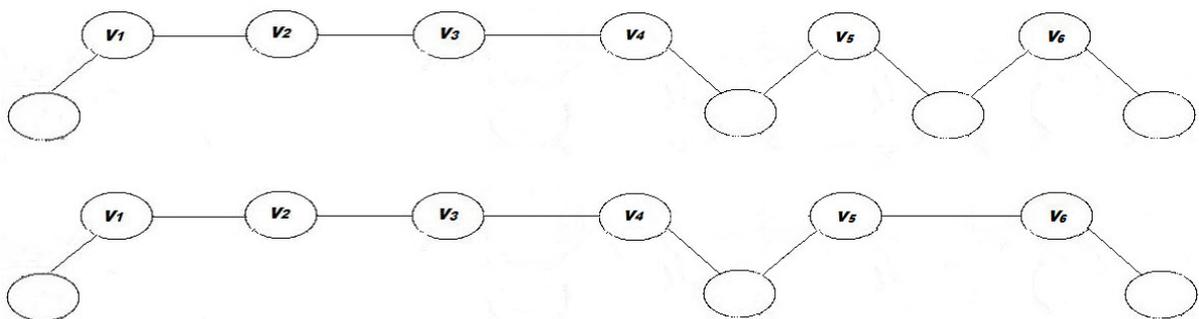


Figura A.37 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso g

Consideramos el subgrafo inducido por los cinco nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  y sus nodos adyacentes. Este subgrafo se corresponde exactamente con el caso v\_f) para el que ya se probó que el grafo completo tiene una cantidad de desconectores de tamaño siete mayor al Yutsis 18jF. Es así que  $m_7(H) \geq 22518 > 22024 = m_7(Y)$ .

vi\_h) Hay cinco nodos de grado 2 que forman una cadena  $v_1-v_2-v_3-v_4-v_5$  maximal. En la Fig.-A.38 se muestra este subcaso, en sus dos variantes.

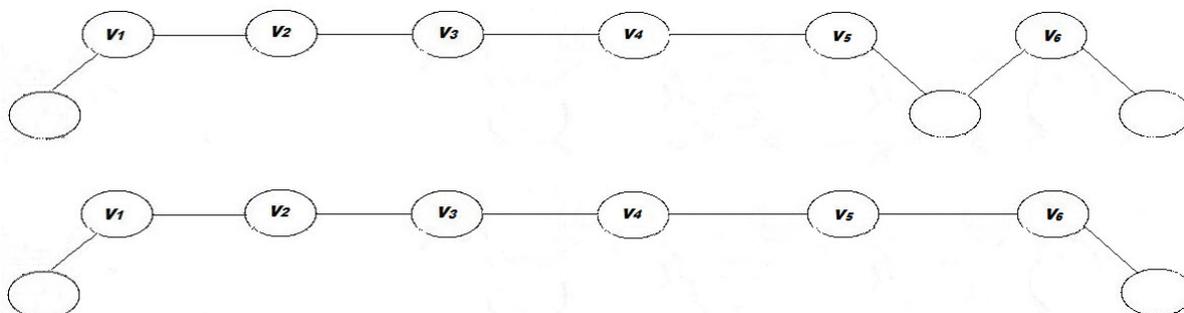


Figura A.38 m7- seis nodos de grado 2-Subcaso h

Consideramos el subgrafo inducido por los cinco nodos de grado 2  $v_1, v_2, v_3, v_4$  y  $v_5$  y sus nodos adyacentes. Este subgrafo se corresponde exactamente con el caso v\_g) para el que ya se probó que el grafo completo tiene una cantidad de desconectores de tamaño siete mayor al Yutis 18jF. Es así que  $m_7(H) \geq 22320 > 22024 = m_7(Y)$ .

(vii)  $H$  tiene siete o más nodos de grado 2. Aquí a su vez distinguimos dos subcasos:

vii\_a) Los siete nodos de grado 2 de  $H$  no son adyacentes entre sí. En la Fig.-A.39 se muestra este subcaso.

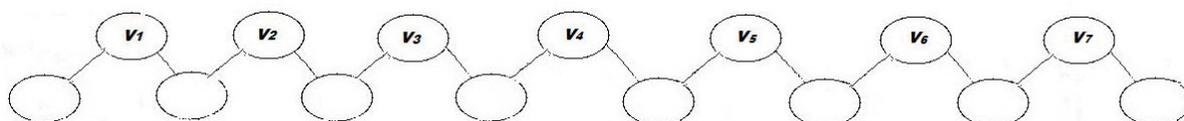


Figura A.39 m7- siete o más nodos de grado 2-Subcaso a

En este caso  $H$  tiene al menos las siguientes cantidades de desconectores de tamaño 7:

- $\binom{16}{5} + \binom{14}{5} + 2 \times \binom{14}{4} + \binom{12}{5} + 4 \times \binom{12}{4} + 4 \times \binom{12}{3} + \binom{10}{5} + 6 \times \binom{10}{4} + 12 \times \binom{10}{3} + 8 \times \binom{10}{2} + \binom{8}{5} + 8 \times \binom{8}{4} + 24 \times \binom{8}{3} + 32 \times \binom{8}{2} + 16 \times 8 + \binom{6}{5} + 10 \times \binom{6}{4} + 40 \times \binom{6}{3} + 80 \times \binom{6}{2} + 80 \times 6 + 32 + 12 \times 4 + 60 \times \binom{4}{3} + 160 \times \binom{4}{2} + 240 \times 4 + 6 \times 32 = 23388$  desconectores n-triviales de siete nodos de grado 2.

Se verifica entonces que  $m_7(H) \geq 23388 > 22024 = m_7(Y)$ .

vii\_b) Dos o más de los nodos de grado 2 de  $H$  son adyacentes entre sí. Todos estos casos admiten un subgrafo que se corresponde exactamente con algunos de los casos analizados en

vi), de  $v_i$  a  $v_j$ ), para los cuales se probó que el grafo completo tiene una cantidad de desconectores de tamaño siete mayor al Yutsis 18jF.

## A.2. Programa que calcula el número de árboles de cubrimiento de un grafo

Este programa tiene como parámetro de entrada un archivo de texto que contiene el número de nodos, la cantidad de aristas y una lista de aristas (pares de identificadores de nodos) de un grafo simple  $G$ . El programa forma la matriz de adyacencia  $A$  del grafo y la matriz diagonal  $D$  con los grados de cada nodo. Se calcula la matriz Laplaciana  $L$  de  $G$  como  $L = D - A$ . El número de árboles se determina como el determinante de la matriz resultante de eliminar la primera fila y la primera columna de la matriz Laplaciana  $L$  (menor complementario del elemento  $L_{11}$ ).

```
function tau = numtrees(grafo)
% calcula el numero de arboles de cubrimiento del grafo
% devuelve 0 si el grafo no es conexo.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% lectura de los datos de entrada del problema
% n = cantidad de nodos del grafo
% e = cantidad de aristas del grafo
% E = tabla de aristas del grafo
fid = fopen(grafo,'r');
n = fscanf(fid,'%d',1);
e = fscanf(fid,'%d',1);
E = fscanf(fid,'%d',[2,e]);
fclose(fid);
E = E';
% G matriz de adyacencia del grafo
G = zeros(n,n);
for a = 1:e
    G(E(a,1),E(a,2))=1;
    G(E(a,2),E(a,1))=1;
end;
if ~es_conexo(G)
    disp('grafo de entrada no conexo');
    t = 0;
    return;
end;
% matriz diagonal D con los grados de los vertices
D = zeros(n,n);
for v= 1:n
    for u = 1:n
        if G(u,v) && u ~=v
            D(v,v) = D(v,v)+1;
        end;
    end;
end;
% matriz laplaciana del grafo
L = D-G;
% menor de la matriz L
M = L(2:n,2:n);
tau = abs(det(M));
end
```

Figura A.40 programa que calcula  $\tau$

### A.3. Programa que calcula el número de desconectores de tamaño $k$ de un grafo

Este programa tiene dos parámetros de entrada:

- Un archivo de texto que contiene el número de nodos, la cantidad de aristas y una lista de aristas (pares de identificadores de nodos) de un grafo simple  $G$ .
- El tamaño  $k$  del conjunto desconector de aristas

El programa elige ordenadamente y en forma secuencial las  $k$  aristas que fallan, de forma de contemplar en forma exhaustiva los conjuntos desconectores de  $k$  aristas y no repetirlos. Para cada conjunto desconector se eliminan las aristas correspondientes del grafo y se hace un test de conectividad. Si el grafo resultante es disconexo, se incrementa un contador. El test de conectividad se hace mediante una recorrida en profundidad del grafo (DFS), verificando que en la recorrida se visiten los  $n$  nodos del grafo. Para los  $(12,18)$ -grafos la cantidad máxima de conjuntos desconectores a considerar es  $\binom{18}{7} = 31824$  y el tiempo de cómputo de unos pocos segundos.

```
function desc = desconectores(grafo,fallas)
% calcula el numero de desconectores de tamaño 'fallas' para el grafo
% devuelve -1 si la cantidad de aristas en falla es mayor que el tamaño del
% grafo o si el grafo no es conexo.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% lectura de los datos de entrada del problema
% n = cantidad de nodos del grafo
% e = cantidad de aristas del grafo
% E = tabla de aristas del grafo
fid = fopen(grafo,'r');
n = fscanf(fid,'%d',1);
e = fscanf(fid,'%d',1);
E = fscanf(fid,'%d',[2,e]);
fclose(fid);
E = E';
G = zeros(n,n);
for a = 1:e
    G(E(a,1),E(a,2))=1;
    G(E(a,2),E(a,1))=1;
end;
if ~es_conexo(G)
    disp('error de datos: grafo de entrada no conexo');
    desc = -1;
    return;
end;
if (fallas>e)
    disp('error: cantidad de aristas en falla mayor que las aristas del grafo');
    desc = -1;
    return;
end;
if (e-fallas)<(n-1)
    desc = nchoosek(e,fallas);
    return;
end;
```

```

if fallas == 0
    desc = 0;
    return;
end;
enfalla = 1:fallas;
fin = 0;
desc = 0;
while ~fin
    %armado del grafo con aristas del vector de falla no operativas
    G1 = G;
    for k = 1:fallas
        G1(E(enfalla(k),1),E(enfalla(k),2))=0;
        G1(E(enfalla(k),2),E(enfalla(k),1))=0;
    end;
    if ~es_conexo(G1)
        desc = desc + 1;
    end;
    % modificacion del vector de aristas en falla
    tope = e;
    pos = fallas;
    while (pos>0)&&(enfalla(pos)==tope)
        tope = tope -1;
        pos = pos -1;
    end;
    if pos > 0
        enfalla(pos) = enfalla(pos)+1;
        if pos < fallas
            for k = pos+1:fallas
                enfalla(k)=enfalla(k-1)+1;
            end;
        end;
    else
        fin = 1;
    end;
end;
end

function con = es_conexo(G)
%implementa un algoritmo DFS para determinar si el grafo G es conexo
v_inic = 1;
n = size(G,1);
if n == 0
    con = 0;
else
    M = zeros(n,1); % vector de vertices marcados
    [con,M] = conexoDFS(G,v_inic,M);
end;
end
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [con,M] = conexoDFS(G,v,M)
n = size(G,1);
con = 0;
M(v) = 1; % marca el vertice como visitado
if sum(M) == n
    con = 1;
else
    for w =1:n
        if G(v,w)
            if ~M(w)
                [con,M] = conexoDFS(G,w,M);
                if con
                    return;
                end;
            end;
        end;
    end;
end;
end;
end
end

```

Figura A.41 Programa para calcular cantidad de desconectores



# Bibliografía

- [1] C. J. Coulburn, “Reliability issues in telecommunications network planning”, *Telecommunications network planning*, chapter 9, Kluwer Academics Publishers, 1999, pp. 136– 146.
- [2] L. Beineke, R. Wilson, and O. Oellermann, “Topics in Structural Graph Theory”, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications 147*, Cambridge University Press, 2012.
- [3] M.O.Ball, J.S.Provan, “The complexity of counting cuts and computing the probability that a graph is connected”, *SIAM J. Computing* 12, 1983, pp. 777– 788.
- [4] G.Kirchoff, “Über die auflösung der gleichungen, auf welche man bei der untersuchung der linearen verteilung galvanischer ströme geführt wird”, *Ann.PHys.Chem.*, vol. 72, 1847, pp. 497– 508.
- [5] D.Bauer, F.Boesch, C.Suffel and R. Van Slyke, “On the validity of a reduction of reliable network design to a graph extremal problem”, *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, vol 34, no. 12, Dec 1987, pp. 1579–1581.
- [6] F.T. Boesch, S. Li, and C. Suffel, “On the existance of Uniformly Optimally Reliable Networks”, *Networks*, vol 21, no. 2, 1991, pp. 181–194.
- [7] D. Bauer, F.T. Boesch, C. Suffel, and R.Tindell, “Combinatorial optimization problems in the analysis and design of propabilistic networks”, *Networks*, vol 15, no. 2, 1985, pp. 257–271.
- [8] G. Wang, “A proof of Boesch’s conjecture”, *Networks*, vol 24, no. 5, 1994, pp. 277–284.
- [9] P. Romero, “Building uniformly most-reliable networks by iterative augmentation”, *9th International Workshop on Resilient Networks Design and Modeling (RNDM)*, 2017, pp. 1–7.

- 
- [10] G. Rela, F. Robledo, and P. Romero, “Petersen graph is uniformly most-reliable”, in *Proceedings of Machine Learning, Optimization and BigData*, G. Nicosia, P. Pardalos, G. Giuffida, and R. Umeton, Editors, Springer International Publishing, 2018, pp. 426–435.
- [11] A. K. Kelmans, and V.M. Chelnokov, “A certain polynomial of a graph and graphs with an extremal number of trees”, *Journal of Combinatorial Theory, series B*, vol 16, 1974, pp. 197–214.
- [12] D. Shier, “Maximizing the number of spanning trees in a graph with  $n$  nodes and  $m$  edges”, *Journal Research National Bureau of Standards, section B*, vol 78, 1974, pp. 193–196.
- [13] A. K. Kelmans, “On graphs with randomly deleted edges”, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungarica*, vol 37, no. 1, 1981, pp. 77–88.
- [14] A. Satyanarayana, L. Schoppmann, C. Suffel, “A reliability-improving graph transformation with applications to network reliability”, *Networks*, vol 22, no. 2, 1992, pp. 209–216.
- [15] L. Petingi, F. Boesch, and C. Suffel, “On the characterization of graphs with maximum number of spanning trees”, *Discrete Mathematics*, vol 179 (1-3), 1998, pp. 155–166.
- [16] B. Gilbert, and W. Myrvold, “Maximizing spanning trees in almost complete graphs”, *Networks*, vol 30, 1997, pp. 23–30.
- [17] C.S. Cheng, “Maximizing the total number of spanning trees in a graph; two related problems in graph theory and optimum design theory”, *Journal of Combinatorial Theory, series B*, vol 31, 1981, pp. 240–248.
- [18] F.T. Boesch, “On unreliability polynomials and graph connectivity in reliable network synthesis”, *Journal of Graph Theory*, vol 10, 1986, pp. 339–352.
- [19] W. Myrvold, K. H. Cheung, L. B. Page, and J. E. Perry, “Uniformly-most reliable networks do not always exist”, *Networks*, vol 21, no. 4, 1991, pp. 417–419.
- [20] Y. Ath, and M. Sobel, “Counterexamples to conjectures for uniformly optimally reliable graphs”, *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, vol 14, 2000, pp. 173–177.

- 
- [21] F. C. Bussemaker, S. Obeljc, D.M. Cveobik, and J. J. Seidel, “Computer Investigation of Cubic Graphs”, T.H. Report 76- WSK-01, Department of Mathematics, Technological University Eindhoven, The Netherlands, 1976.
- [22] Norman Biggs, “Algebraic Graph Theory”, Cambridge University Press, 1993.
- [23] L. Petingi, J. T. Saccoman, L. Schoppmann, “Uniformly Least Reliable Graphs”, *Networks*, vol 27, 1996, pp. 125–131.

