UNIVERSIDAD
DE LA REPUBLICA
URUGUAY

FACULTAD DE CIENCIAS

Tesis de Maestría:

Medidas tipo-SRB y Fórmula de Pesin en Sistemas C^1-Expansores

21 de julio de 2017

Fernando Valenzuela

Orientadores: Aldo Portela y
Eleonora Catsigeras

Maestría en Matemática
PEDECIBA
Facultad de Ciencias
Universidad de la República

Esta Tesis de Maestría fue defendida el viernes 21 de julio de 2017 y aprobada con mención. Integraron el tribunal de defensa los profesores Roberto Markarian, Cecilia Cabeza y Álvaro Rovella. Su aprobación figura en actas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de la República, y del área de Matemática del PEDECIBA.

En Montevideo, el 1 de agosto de 2017, nos complace hacer entrega de esta Tesis en su versión final, y felicitamos al tesista Fernando Valenzuela.

Los orientadores,

Eleonora Catsigeras Aldo Portela

Resumen

Estudiaremos mapas expansores f de regularidad C^1 en una variedad Riemanniana compacta M de dimensión finita. Nuestro principal objetivo es demostrar que las medidas pseudo-físicas, también llamadas "tipo-SRB" (similares a las de Sinai-Ruelle-Bowen), cumplen la Fórmula de Pesin para la Entropía. Estas son medidas invariantes que se caracterizan por sus buenas propiedades estadísticas. En algunos casos, como por ejemplo para mapas de clase C^2, satisfacen también las definiciones clásicas (más restrictivas) de las medidas SRB y de las medidas físicas.

Abstract

We will study expanding maps f with C^1 regularity on a compact Riemannian manifold M with finite dimension. Our main purpose is to prove that the pseudo-physical measures, also called "SRB-like " (similar to Sinai-Ruelle-Bowen measures), satisfy the Pesin Entropy Formula. These are invariant measures that are characterized by their good statistical properties. In some cases, as for instance for C^2 maps, they also satisfy the (more restricted) classical definitions of SRB measures and of physical measures.

Dedicado a todos aquellos quienes me dieron
su apoyo y ayuda desinteresada
para llevar a cabo mis estudios.

Índice

Introducción

Consideraremos mapas f de una variedad Riemanniana compacta de dimensión finita M en sí misma, que no preservan volumen ni ninguna medida equivalente a la que deriva de la forma de volumen. Para estos mapas se han definido varios conceptos de medidas de probabilidad invariantes que describen de diversas maneras el comportamiento asintótico estadístico de conjuntos de órbitas con volumen positivo [1, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 20]. Estas medidas con buen comportamiento estadístico respecto a la medida de Lebesgue, resultan en general mutuamente singulares con esta.

Sin embargo, exceptuando entre otros los mapas hiperbólicos de clase C^2 , esas diferentes definiciones de medidas de probabilidad con buenas propiedades estadísticas no necesariamente coinciden entre sí, e incluso, puede no existir medida que las satisfaga.

Medidas SRB (Sinai-Ruelle-Bowen)

Las medidas *físicas* - que algunos autores también llaman *SRB (Sinai-Ruelle-Bowen)* - son el límite débil*, cuando existe, de los siguientes promedios temporales

$$\sigma_{n,x} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(f^*)^j\delta_x, \tag{1}$$

para todos los puntos de un conjunto $B(\mu)$ de estados iniciales $x \in M$ con *medida de Lebesgue positiva,* donde δ_y denota la probabilidad Delta de Dirac soportada en el punto $y \in M$.

Equivalentemente, una medida de probabilidad μ es SRB o física (a partir de ahora las llamaremos SRB, por razones que se discutirán en el Capítulo 2) si y solo si describe la estadística asintótica de las observaciones empíricas, dadas por los valores observados de una o más funciones continuas φ, de modo que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\varphi(f^j(x)) = \int \varphi\, d\mu \tag{2}$$

para todo $x \in A$. El conjunto $B(\mu)$ se llama *cuenca de atracción estadística* de la medida μ. Para que μ sea una medida SRB, su cuenca debe tener, por definición, medida de Lebesgue (volumen) positivo.

Por lo tanto, la medida de probabilidad μ es SRB, cuando el límite de los promedios temporales de las observaciones $\varphi(f^j(x))$ en los instantes $j = 0, 1, \ldots$ hasta tiempo n, con $n \to +\infty$, es igual al promedio espacial de la función de observación con respecto a la medida μ, para un conjunto de estados iniciales x con medida de Lebesgue positiva.

Observamos que, a pesar de la similitud de la definición de medida SRB con la definición de ergodicidad, ambos son conceptos muy diferentes. En efecto, una medida de probabilidad invariante μ es ergódica cuando se verifica la igualdad (2) para μ-casi todo estado inicial x. Es decir, cuando la cuenca $B(\mu)$ de atracción estadística de la medida μ tiene probabilidad μ igual a 1. Pero como usualmente las medidas ergódicas son todas mutuamente singulares con respecto a la medida de Lebesgue, $B(\mu)$ puede tener (y frecuentemente tiene) volumen nulo. Por lo tanto, la ergodicidad de una medida de probabilidad no asegura que su cuenca de atracción estadística tenga medida de Lebesgue positiva. Es decir, la propiedad de ergodicidad no implica que la medida de probabilidad ergódica sea SRB. No asegura tampoco que exista por lo menos una medida de probabilidad SRB para el sistema dinámico dado.

Otra manera de encontrar buenas medidas desde el punto de vista estadístico aparece desde el Formalismo Termodinámico, donde se considera, en caso de existir, una probabilidad μ que cumpla la Fórmula de Pesin para la Entropía, que enunciaremos con precisión más adelante en esta Introducción. Las medidas que cumplen esta fórmula de la entropía son llamadas por algunos autores medidas de Gibbs, o estados de equilibrio [11].

Asumiendo la hipótesis de regularidad C^2 (o menos restrictivamente, una regularidad por lo menos [1] $C^{1+\alpha}$), se han probado varias relaciones entre las medidas que satisfacen la Fórmula de Pesin para la Entropía y las medidas SRB. Entre ellas, es relevante en la topología C^2 la propiedad de continuidad absoluta respecto a la medida de Lebesgue condicionada a las subvariedades invariantes

[1]Un mapa $f : M \mapsto M$ se dice de clase $C^{1+\alpha}$ o que tiene regularidad C^1 más Hölder, cuando es de clase C^1 y su derivada primera Df es Hölder-continua. Esto es: $\|Df_x - Df_y\| \leq K(\text{dist}(x, y))^\alpha$ para todos los puntos $x, y \in M$ suficientemente cercanos entre sí, y para ciertas constantes positivas K y α

inestables [2], [14]. A continuación explicamos con más detalle esta propiedad.

Recordemos las siguientes definiciones. Sea una partición medible $\mathcal{P}$ de M, que usualmente se toma con una cantidad infinita no numerable de piezas. Por ejemplo sea $\mathcal{P}$ la partición en subvariedades inestables cuando estas existen. Sea μ una medida invariante por f. Entonces el Teorema de Rohlin dice que existe una familia de medidas condicionadas $\{\mu_{\mathcal{P},x}\}$ definidas para μ-c.t.p x, donde el soporte de cada $\mu_{\mathcal{P},x}$ está contenido en $\mathcal{P}(x)$, es decir, en el átomo de $\mathcal{P}$ que contiene a x. Además, $\mu(A) = \int \mu_{\mathcal{P},x}(A)\mu(dx)$.

En particular, para cada μ-c.t.p. $x \in M$ se considera la subvariedad invariante inestable $W^u(x)$ (que existe en el caso $C^{1+\alpha}$). Esta subvariedad es copia inmersa en M del espacio Euclideano de dimensión inestable, es decir de dimensión igual (y tangente) al subespacio de Oseledets que tiene exponentes de Liapunov positivos [12]. Pero es esencial que la regularidad del sistema no sea simplemente C^1, sino C^2 o por lo menos $C^{1+\alpha}$, pues en la topología C^1 *no existe necesariamente variedad inestable* tangente a los subespacios de Oseledets con exponentes de Liapunov positivos [10]. Por este motivo, el contexto en el que vamos a definir ahora la continuidad absoluta condicionada a la foliación inestable, y que definiremos solo a título informativo, carece de sentido cuando se trabaja en la topología C^1. Está por lo tanto, fuera del contexto en el que desarrollaremos esta tesis.

Cuando el sistema tiene regularidad $C^{1+\alpha}$, al considerar una partición local medible $\mathcal{P}$ de M en las subvariedades inestables locales inmersas en M, se induce una medida *condicionada* de μ a lo largo de cada subvariedad inestable $W^u(x)$. Llamaremos $\mu_x^u := \mu_{\mathcal{P},x}$ a cada una de estas medidas condicionadas inestables de μ. Más precisamente:

Definición

1. Diremos que una partición medible $\mathcal{P}$ es *subordinada* a la familia $\{W^u(x)\}$ si para μ-c.t.p. x se tiene que $\mathcal{P}(x) \subset W^u(x)$, y además, $V(x) \subset \mathcal{P}(x)$, donde $V(x)$ es una vecindad de x en $W^{u(x)}(x)$.

2. Decimos que μ posee la propiedad de continuidad absoluta condicionada a las variedades inestables si para todo $\mathcal{P}$ subordinado a W^u, se tiene que μ_x^u

es absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue a lo largo de la subvariedad inestable W^u_x, para μ-c.t.p $x \in M$.

Bajo hipótesis de regularidad C^2, es importante el siguiente resultado, debido a Ledrappier-Young (cita a LP parte II):

Teorema

Sea $f\colon M \to M$ un mapa de clase C^2 en una variedad riemanniana compacta M, y sea μ una medida de Borel invariante por f. Entonces μ satisface la Fórmula de Pesin de la Entropía si y solo si tiene medidas condicionadas μ^u_x respecto a las subvariedades inestables que son absolutamente continuas respecto a las medidas de Lebesgue a lo largo de dichas subvariedades.

En la topología C^1 el Teorema de Ledrappier-Young es falso [12]. Más precisamente, es falso porque carece de sentido su enunciado, pues como se dijo antes, en el contexto C^1 no necesariamente existen las subvariedades inestables aunque los exponentes de Liapunov sean positivos. Sin embargo, demostraremos en esta tesis que en particular para los mapas C^1 expansores, las medidas del tipo SRB (y en particular las medidas SRB) aún satisfacen la Fórmula de Pesin de la Entropía (Teorema 1), aunque carezcan de las propiedades de continuidad absoluta del enunciado del Teorema de Ledrappier-Young.

Más recientemente se ha demostrado que en el caso de regularidad solo C^1, los difeomorfismos hiperbólicos o parcialmente hiperbólicos que preservan volumen también tienen una medida invariante (precisamente la medida de Lebesgue) que satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía [17]. Pero si no preservan volumen, la ausencia de regularidad C^2 imposibilita usar la teoría de Pesin [10], que sería necesaria para reproducir los métodos clásicos de demostración de dicha fórmula.

En general, en la topología C^1, los sistemas dinámicos bajo ciertas hipótesis de hiperbolicidad parcial no tienen medidas invariantes absolutamente continuas respecto a la medida de Lebesgue [13]. Sin embargo, los sistemas transitivos hiperbólicos y genéricos en la topología C^1, aún tienen una única medida SRB, y esta satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía [13]. Por ese motivo (entre otras razones), cuando existe esta medida física en el caso C^1, es llamada también SRB por algunos autores, usando ambos adjetivos, “física” y “SRB” como sinónimos, aunque la medida carezca de las propiedades de continuidad absoluta que la caracterizarían si el sistema dinámico fuera C^2.

Sistemas Expansores

Recordamos que un mapa f de clase C^1 en una variedad es *expansor,* si su derivada Df expande los vectores del fibrado tangente en todas las direcciones con una tasa uniforme no menor que una constante $\lambda > 1$. Recordemos que los exponentes de Liapunov $\chi_i(x)$, en un punto x de la variedad donde existen, se definen como el logaritmo de la tasa de expansión asintótica de los vectores tangentes en x. Por lo tanto, para un mapa expansor, los exponentes de Liapunov en los puntos donde existen *son todos positivos.*

En esta tesis, consideraremos la familia $\mathcal{E}^1$ de todos los mapas C^1 expansores de la variedad compacta M. En particular, denotamos $\mathcal{E}^{1+\alpha} := \mathcal{E}^1 \cap \mathcal{C}^{1+\alpha}$ y $\mathcal{E}^2 := \mathcal{E}^1 \cap \mathcal{C}^2$, para referirnos a los mapas expansores que tienen más regularidad que C^1.

Nuestro objetivo final será demostrar la Fórmula de Pesin para la Entropía en sistemas dinámicos por iterados de $f \in \mathcal{E}^1$, y para cierta clase especial de medidas invariantes por f - que siempre existen - llamadas *tipo-SRB* (del tipo Sinai-Ruelle-Bowen)[2]. Nuestra demostración de la Fórmula de Pesin para la Entropía cuando $f \in \mathcal{E}^1$, incluye como caso particular a las medidas SRB cuando ellas existen, e incluye también aquellos sistemas dinámicos en $\mathcal{E}^1$ para los que no existen medidas SRB.

La Fórmula de Pesin para la Entropía.

Ahora veamos la definición precisa de la Fórmula de Pesin para la Entropía. En breve, esta fórmula se cumple cuando la Desigualdad de Ruelle es una igualdad:

[2] La definición precisa de medida tipo-SRB, y sus propiedades más relevantes, están en el Capítulo 2 de esta Tesis.

.

Teorema (Desigualdad de Ruelle)

Sea f un sistema de clase C^1 en la variedad compacta Riemanniana M de dimensión finita, y para cada medida de probabilidad μ invariante por f, denotemos con $h_\mu(f)$ la entropía métrica[3]*. Entonces, se cumple la siguiente desigualdad*

$$h_\mu(f) \leq \int \sum_{i=1}^{m} \chi_i^+ d\mu, \tag{3}$$

donde χ_i^+ indica los exponentes de Liapunov positivos.

A esta desigualdad la llamaremos *Desigualdad de Ruelle* [15].

Si además el sistema es expansor, y por lo tanto todos los exponentes de Liapunov son estrictamente positivos, entonces a partir de la fórmula de Liouville[4] obtenemos

$$h_\mu(f) \leq \int \log |\det Df| d\mu$$

para toda medida μ invariante por f.

Definición (Fórmula de Pesin para la Entropía).

Diremos que la medida invariante μ cumple la *Fórmula de Pesin para la Entropía* cuando

$$h_\mu(f) = \int \sum_{i=1}^{m} \chi_i^+ d\mu, \tag{4}$$

donde χ_i^+ indica los exponentes de Liapunov positivos.

Equivalentemente, $h_\mu(f) = \int \log |\det Df| d\mu$.

Si existe alguna medida de probabilidad que satiface la Fórmula de Pesin para la Entropía, entonces su entropía es óptima, en el sentido de que es la máxima

[3]Definiremos la entropía métrica $h_\mu(f)$ en el Capítulo 1.

[4]La fórmula de Liouville establece en particular que si f es un mapa diferenciable, entonces toda medida de probabilidad invariante μ satisface la siguiente igualdad

$$\int \sum_{i=1}^{m} \chi_i \, d\mu = \int \log |\det Df| \, d\mu,$$

donde χ_i denota a los exponentes de Liapunov, cualquiera sea el signo de estos.

.

posible con relación al valor esperado de los exponentes de Liapunov positivos. En efecto, la Desigualdad de Ruelle dice que ninguna medida de probabilidad invariante puede tener entropía mayor que ese valor esperado. Y por lo tanto, cuando existen algunas medidas que alcanzan esa cota superior, ellas son *óptimas,* en el sentido que su entropía alcanza a medir el total, en términos probabilísticos, de cómo se distribuye en el espacio el *caos* atribuido a la positividad de los exponentes de Liapunov [20].

Más precisamente, una medida μ que satisfaga la Fórmula de Pesin para la Entropía es llamada *estado de equilibrio* con respecto al potencial ψ, cuando existe una función continua $\psi : M \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\int \psi \, d\mu = -\int \sum_{i=1}^{m} \chi_i^+ \, d\mu.$$

En el caso de mapas $f \in \mathcal{E}^1$, debido a la Fórmula de Liouville, una función potencial es

$$\psi = -\log |\det Df|.$$

Nótese que en el caso de los sistemas expansores la función potencial es *estrictamente negativa* en todos los puntos. En general, aún en los sistemas no expansores, supongamos que la fórmula de Pesin para la entropía pueda interpretarse como la ecuación que debe satisfacer un estado de equilibrio respecto a una función potencial ψ. Veamos que entonces la función potencial ψ debe tomar necesariamente valores negativos o nulos. Por definición, una medida μ es un *estado de equilibiro* cuando su entropía métrica *sumada* a la integral de la función potencial alcanza el supremo posible, y por lo tanto el máximo. Debido a la desigualdad de Ruelle, ese supremo es no positivo. Y como la entropía nunca es negativa, la integral de la función potencial ψ nunca es positiva.

Por las razones expuestas más arriba, resulta relevante (y en general no trivial) el problema de demostrar que, bajo ciertas hipótesis, existen medidas invariantes que satisfacen la Fórmula de Pesin para la Entropía, y estudiar las propiedades de esas medidas; en particular, sus propiedades estadísticas.

Objetivos de esta Tesis.

Los tres objetivos principales de esta Tesis son:

Primero, revisar la definición de entropía métrica y algunas de sus propiedades clásicas conocidas. Esta revisión se realizará en el Capítulo 1.

Segundo, revisar la definición de medida "tipo-SRB" tomada de [5], y algunas de sus propiedades conocidas, en particular *su necesaria existencia para todo sistema dinámico continuo.* Esta revisión se realizará en el Capítulo 2.

Tercero, demostrar como resultado nuevo, que cualquier medida tipo-SRB de un sistema expansor en una variedad compacta de dimensión finita, satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía.

Teorema 1.

Si $f \in \mathcal{E}^1$, entonces toda medida tipo-SRB satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía:

$$h_\mu(f) = \int \log|\det Df| d\mu.$$

Demostraremos el Teorema 1 en el Capítulo 3.

Conclusiones.

Del desarrollo de la exposición y de las demostraciones a lo largo de esta tesis, concluimos el enunciado del Teorema 1. Concluimos además que es un resultado relevante, debido a las razones que exponemos a continuación:

Relevancia del Teorema 1. En primer lugar, este teorema generaliza a variedades compactas de cualquier dimensión finita el resultado demostrado en [6] para mapas expansores en el círculo.

También generaliza para mapas expansores C^1, los resultados clásicos conocidos de las medidas SRB para mapas expansivos o hiperbólicos de clase C^2, o más en general, de clase $C^{1+\alpha}$ ([16], [14], [11], [20]).

Además, el Teorema 1 es una extensión, para mapas de clase C^1 no invertibles y expansores, de los resultados obtenidos en [17] y en [4] para difeormorfismos de clase C^1 con descomposición dominada - y en particular para los parcialmente hiperbólicos - preserven o no alguna medida absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.

Como corolario inmediato del Teorema 1, obtenemos que los mapas C^1 expansores, en una variedad compacta de dimensión finita, efectivamente tienen medidas invariantes de probabilidad que satisfacen la Fórmula de Pesin de la Entropía. Por lo tanto concluimos que existen probabilidades invariantes adecuadas que optimizan la entropía métrica en relación al caos descripto por los exponentes de Liapunov positivos del sistema. Además estas medidas, al ser tipo-SRB, tienen propiedades relevantes de atracción estadística, similares a las medidas SRB de los sistemas expansores de clase C^2.

Finalmente, concluimos que se puede demostrar la fórmula de Pesin para la entropía directamente a partir de las condiciones de atracción estadística, sin necesidad de utilizar (ni de que sean verdaderas) las propiedades de continuidad absoluta de las medidas condicionadas a las subvariedades invariantes inestables.

1 Entropía métrica

En este capítulo definiremos el concepto de entropía métrica y enunciaremos sus propiedades. Este concepto constituye una de las partes centrales del marco teórico para demostrar el Teorema 1, que es el objetivo principal de esta Tesis. La definición de entropía que usaremos fue dada por Kolmogorov y Sinai. El desarrollo del capítulo, general pero enfocado a la demostración del teorema, fue extraído de partes de los libros [3], [19], [9], [21], [7].

1.1 Entropía de una partición respecto a una medida

Definición 1.1. Sea $(M, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad. Una *partición* $\mathcal{P}$ es una colección finita o infinita numerable de conjuntos $P \in \mathcal{A}$, dos a dos disjuntos, y medibles cuya unión tiene medida uno. El producto $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ de dos particiones se define como la partición formada por las intersecciones $P \bigcap Q$ de medida positiva, con $P \in \mathcal{P}$ y $Q \in \mathcal{Q}$. Más generalmente, para cada natural $N \geq 1$, dada la colección finita $\{\mathcal{P}_i\}_{1 \leq i \leq N}$ de particiones $\mathcal{P}_i$, definimos el producto

$$\bigvee_{i=1}^{N} \mathcal{P}_i = \left\{ \bigcap_{i=1}^{N} P_i \colon \quad P_i \in \mathcal{P}_i \ \ \forall\ 1 \leq i \leq N \right\}.$$

Notamos que el producto de particiones es una operación asociativa y conmutativa, y cuyo neutro es la partición $\{M\}$.

Dada una partición $\mathcal{P}$, llamaremos átomos a los conjuntos P de $\mathcal{P}$, y para cada punto $x \in M$ denotamos $\mathcal{P}(x)$ al átomo de $\mathcal{P}$ que contiene a x. Podemos asumir que cada átomo tiene medida positiva, si consideramos los átomos (y las particiones) definidos a menos de conjuntos de medida nula.

Definición 1.2. La *entropía de la partición* $\mathcal{P}$ *respecto a la medida* μ se define como

$$H(\mathcal{P}, \mu) = -\sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(P) \log \mu(P)$$

(Por convención, en la definición anterior se toma $0 \cdot \log 0 = 0$).

Observamos que el valor de la entropía es mayor o igual que cero, y como no tenemos seguridad de que la serie converja en el caso de que la partición sea infinita numerable, la entropía de la partición bien puede ser infinita.

Proposición 1.3. *Toda partición finita tiene entropía finita.*

Más precisamente, si $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots P_k\}$ es una partición finita formada por k átomos, y μ es una medida de probabilidad, entonces se tiene la siguiente cota

$$H(\mathcal{P}, \mu) \leq \log k,$$

y se alcanza la igualdad si y solo si $\mu(P_i) = 1/k$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$.

Demostración. Ver por ejemplo [19], Lemma 9.1.3. □

Definición 1.4. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones. La *entropía condicional* de $\mathcal{Q}$ dada $\mathcal{P}$ se define como

$$H(\mathcal{Q}|\mathcal{P}, \mu) = - \sum_{\substack{P \in \mathcal{P}, \quad Q \in \mathcal{Q} \\ \mu(P \cap Q) \neq 0}} \mu(P \cap Q) \log \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(P)}.$$

Para simplificar la notación, de ahora en adelante denotaremos con cada letra imprenta un átomo de la partición, que a su vez denotaremos con la misma letra pero caligráfica.

Con estas convenciones, tenemos que:

$$H(\mathcal{Q}|\mathcal{P}, \mu) = - \sum_{P} \sum_{Q} \mu(P \cap Q) \log \frac{\mu(P \cap Q)}{\mu(P)} \tag{5}$$

$$H(\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}, \mu) = - \sum_{P} \sum_{Q} \mu(P \cap Q) \log \mu(P \cap Q) \tag{6}$$

Usando las definiciones anteriores y realizando operaciones simples, obtenemos las siguientes propiedades:

Observación 1.5. *Si $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ y $\mathcal{R}$ son particiones, entonces:*

1. $H(\mathcal{Q}|\mathcal{P},\mu) \leq H(\mathcal{Q},\mu)$.

2. $H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q},\mu) = H(\mathcal{P},\mu) + H(\mathcal{Q}|\mathcal{P},\mu)$.

3. $H(\mathcal{Q}|\mathcal{P} \vee \mathcal{R},\mu) \leq H(\mathcal{Q}|\mathcal{R},\mu)$.

4. $H(\mathcal{P},\mu) \leq H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q},\mu) \leq H(\mathcal{P},\mu) + H(\mathcal{Q},\mu)$.

5. Si $H(\mathcal{R},\mu) < \infty$ *entonces:*

i) $H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}|\mathcal{R},\mu) = H(\mathcal{P}|\mathcal{R},\mu) + H(\mathcal{Q}|\mathcal{P} \vee \mathcal{R},\mu)$.

ii) $H(\mathcal{P}|\mathcal{R},\mu) \leq H(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}|\mathcal{R},\mu) \leq H(\mathcal{P}|\mathcal{R},\mu) + H(\mathcal{Q}|\mathcal{R},\mu)$.

6. Si $H(\mathcal{P},\mu) < \infty$ *, entonces, para cualquier partición* $\mathcal{Q}$ *se cumple*

$$H(\mathcal{Q},\mu) - H(\mathcal{P},\mu) \leq H(\mathcal{Q}|\mathcal{P},\mu).$$

Ahora estudiaremos la función que a cada medida μ le hace corresponder la entropía $H(\mathcal{P},\mu)$ con la partición $\mathcal{P}$ fija.

Empezaremos enunciando una propiedad general de convexidad, para luego restringir el campo de estudio.

Teorema 1.6. *Sea* $(M,\mathcal{A})$ *un espacio medible. Sea* $k \geq 1$ *un número natural. Sean* $\mu_1, \cdots, \mu_k$ *medidas de probabilidad y sean* $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ *números positivos tales que* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$*. Entonces para toda partición finita* $\mathcal{P}$ *se cumple:*

$$H(\mathcal{P}, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mu_i) \geq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i H(\mathcal{P},\mu_i).$$

Demostración. Ver por ejemplo [19], Exercice 9.1.4. $\square$

De ahora en adelante supondremos que el espacio medible M es un espacio métrico compacto y que la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos medibles de M es la de Borel.

Definición 1.7. Sea $\mathcal{P}$ una partición finita. Llamaremos *borde de la partición* $\mathcal{P}$ al conjunto

$$\partial\mathcal{P} := \bigcup_{P} \partial P,$$

donde ∂P denota el borde topológico del átomo P.

Definición 1.8. Sea $\mathcal{P}$ una partición finita. Llamaremos *diámetro de la partición* al número

$$\operatorname{diam}(\mathcal{P}) := \max_{P} \operatorname{diam}(P) = \max_{P} \sup_{x,y \in P} \operatorname{dist}(x, y),$$

donde $\operatorname{diam}(P)$ denota el diámetro del átomo P.

Estamos en condiciones de demostrar la siguiente proposición que usaremos en la demostración del Teorema 1 en el capítulo 3 de esta Tesis.

Proposición 1.9. *Dados $\delta > 0$ y $\mu \in \mathcal{M}$, existe una partición finita $\mathcal{P}$ tal que $\mu(\partial \mathcal{P}) = 0$ y $diam(\mathcal{P}) < \delta$.*

Demostración. Primero construimos cualquier cubrimiento finito $\mathcal{U} = \{Y_1, \dots, Y_p\}$ de M por bolas abiertas de radio menor que $\delta/2$. Denotemos $\partial \mathcal{U} := \bigcup_{i=1}^{p} \partial Y_i$. Los conjuntos borde de las bolas son disjuntos dos a dos cuando se cambia su radio. Y el radio puede tomar una cantidad no numerable de valores. Entonces, como μ es una medida de probabilidad, deducimos que el radio de cada bola $Y_i \in \mathcal{U}$ puede ser tomado tal que $\mu(\partial Y_i) = 0$. Luego $\mu(\partial \mathcal{U}) = 0$. Por lo tanto $\mathcal{P} = \{X_i\}_{1 \le i \le p}$ definido por $X_1 := Y_1 \in \mathcal{U}$, $X_{i+1} := Y_{i+1} \setminus (\cup_{j=1}^{i} X_i)$, satisface las propiedades enunciadas en la Proposición 1.9 como queríamos. $\square$

Ahora, como sabemos que existe una partición con borde de medida nula, podemos enunciar el siguiente teorema.

Teorema 1.10. *Sea M un espacio métrico compacto con la σ-álgebra de Borel. Sea μ una medida de probabilidad, y $\mathcal{P}$ una partición finita con borde de medida nula. Entonces, si μ_n es una sucesión de probabilidades que converge a μ en la topología débil*, tenemos que*

$$\lim_{n \to +\infty} H(\mathcal{P}, \mu_n) = H(\mathcal{P}, \mu).$$

Es decir, la entropía de una partición, como función de la medida de probabilidad, es continua en toda medida μ tal que el borde de la partición tenga μ-medida igual a cero.

Para poder demostrar el Teorema 1.10, primero necesitamos demostrar las siguientes propiedades conocidas de los espacios de medida abstracta:

Proposición 1.11. *Sea M un espacio métrico compacto con la σ-álgebra de Borel $\mathcal{A}$, y sea μ_n una sucesión de medidas de probabilidad tal que:*

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n = \mu$$

con el límite tomado en la topología débil. Entonces:*

1. *Si $K \subset M$ es compacto,* $\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K)$.
2. *Si $V \subset M$ es abierto,* $\liminf_{n\to+\infty} \mu_n(V) \geq \mu(V)$.
3. *Si $A \in \mathcal{A}$ tiene borde de medida nula,* $\lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Demostración. 1. Sea $\epsilon > 0$ y $V \subset M$ tal que $K \subset V$ y $\mu(V \setminus K) < \epsilon$. Sea $\psi : M \mapsto [0,1]$ una función continua tal que $\psi|_K = 1$ y $\psi|_{M\setminus V} = 0$. Luego:

$$\mu_n(K) \leq \int \psi d\mu_n \quad \forall\, n \geq 1.$$

Ahora, por la continuidad de ψ, y la convergencia en la topología débil* de μ_n a μ, obtenemos:

$$\int \psi d\mu_n \to \int \psi d\mu = \int_{\psi\neq 0} \psi\, d\mu \leq \int_V \psi\, d\mu \leq \int_V 1\, d\mu =$$

$$= \mu(V) = \mu(K) + \mu(V \setminus K) < \mu(K) + \epsilon.$$

Luego

$$\mu_n(K) \leq \int \psi\, d\mu < \mu(K) + \epsilon \quad \forall\, n \geq 1,$$

de donde tomando límite superior, obtenemos,

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K) + \epsilon.$$

Como la última desigualdad se satisface para todo $\epsilon > 0$, deducimos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \mu_n(K) \leq \mu(K),$$

como queríamos demostrar.

2. Sea $K = M \setminus V$. Siendo μ_n una medida de probabilidad, tenemos

$$\mu_n(V) = 1 - \mu_n(K) \ \ \forall\, n \geq 1.$$

Ahora, tomando límite inferior:

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu_n(V) = 1 - \limsup_{n\to+\infty} \mu_n(K)$$

El conjunto K es cerrado, y siendo M un espacio métrico compacto, deducimos que K es compacto y podemos aplicar la propiedad 1 ya demostrada. Deducimos que

$$\liminf_{n\to+\infty} \mu_n(V) = 1 - \limsup \mu_n(K) \geq 1 - \mu(K) = \mu(V),$$

como queríamos demostrar.

3. Consideremos $\mathrm{int}(A)$ y $\overline{A}$, y como cada uno difiere de A en el borde, que asumimos de medida nula, entonces $\mu(\mathrm{int}(A)) = \mu(A) = \mu(\overline{A})$. Sin embargo, para μ_n se tiene que $\mu_n(\mathrm{int}(A)) \leq \mu_n(A) \leq \mu_n(\overline{A})$. Ahora, aplicando las propiedades 1 y 2 ya demostradas, obtenemos:

$$\begin{aligned}\mu(\mathrm{int}(A)) &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(\mathrm{int}(A)) \\ &\leq \liminf_{n\to+\infty} \mu_n(A) \leq \limsup_{n\to+\infty} \mu_n(A) \\ &\leq \limsup_{n\to+\infty} \mu_n(\overline{A}) \leq \mu(\overline{A}).\end{aligned}$$

Pero como $\mu(\mathrm{int}(A)) = \mu(\overline{A})$, los límites superior e inferior de $\mu_n(A)$ coinciden, y deducimos que existe

$$\lim_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A),$$

terminando la demostración de la Proposición 1.11.

□

Demostración. del Teorema 1.10:

Consideremos $\phi : [0,1] \mapsto [0,+\infty)$ la función definida por $\phi(x) = -x \log x$ para todo $0 \leq x \leq 1$ (con la convención $0 \cdot \log 0 := 0$). Aplicando la Definición (1.2):

$$H(\mathcal{P}, \mu) = \sum_{i=1}^{k} \phi(\mu(P_i)).$$

Ahora, como $\mathcal{P}$ tiene borde de μ-medida nula, aplicamos la parte 3 de la Proposición 1.11 a cada átomo $P \in \mathcal{P}$, y obtenemos

$$\lim_{n \to +\infty} \phi(\mu_n(P_i)) = \phi(\mu(P_i)) \ , \forall i = 1, \dots, k \ ,$$

donde usamos también la continuidad de la función ϕ. Para terminar, sumamos en i, y notamos que el límite actúa directamente sobre μ_n.

$$\lim_{n \to +\infty} H(\mathcal{P}, \mu_n) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{k} \phi(\mu_n(P_i) = \sum_{i=1}^{k} \lim_{n \to +\infty} \phi(\mu_n(P_i)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \phi(\mu(P_i)) = H(\mathcal{P}, \mu).$$

□

Definición 1.12. Sean $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ dos particiones. Diremos que $\mathcal{Q}$ es *más fina que* $\mathcal{P}$ cuando cada átomo de $\mathcal{Q}$ está contenido en un átomo de $\mathcal{P}$. Denotamos $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$.

Observamos que la definición anterior es equivalente a decir que cada átomo de $\mathcal{P}$ es la unión de átomos de $\mathcal{Q}$, y a que $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ coincide con $\mathcal{Q}$. Por lo anterior, si $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$, entonces $H(\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}) = H(\mathcal{Q})$. Si a esto le aplicamos el punto 2 de la Observación 1.5, tenemos que:

$$\mathcal{Q} \prec \mathcal{P} \Rightarrow H(\mathcal{Q}) = H(\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}) = H(\mathcal{Q}) + H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) \Rightarrow H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0.$$

Por lo tanto, $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$ implica que $H(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = 0$.

En forma similar, es inmediato chequear las siguientes propiedades:

Observación 1.13. *Sean $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ tres particiones tal que $\mathcal{Q} \prec \mathcal{P}$. Entonces:*

1. $H(\mathcal{Q}) \geq H(\mathcal{P})$
2. $H(\mathcal{Q}|\mathcal{R}) \geq H(\mathcal{P}|\mathcal{R})$
3. $H(\mathcal{R}|\mathcal{Q}) \leq H(\mathcal{R}|\mathcal{P})$.

1.2 Entropía métrica de una transformación

Sea $f : M \mapsto M$ una transformación medible que preserva una medida de probabilidad μ. Para una partición $\mathcal{P}$ de entropía finita, definamos la partición producto

$$\mathcal{P}^n := \bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}\mathcal{P} = \mathcal{P} \vee f^{-1}\mathcal{P} \vee \ldots \vee f^{-(n-1)}\mathcal{P}, \tag{7}$$

donde $f^{-i}\mathcal{P} = \{f^{-i}(P) : P \in \mathcal{P}\}$.

Teorema 1.14. *Existe el siguiente límite y cumple la igualdad y la desigualdad siguientes:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{P}^n)}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{H(\mathcal{P}^n)}{n} \leq H(\mathcal{P}).$$

Demostración. Ver por ejemplo [19] Lemma 9.1.12. □

Definición 1.15. Si f es medible y $\mathcal{P}$ es una partición con entropía finita, se llama *entropía de la transformación f respecto a la partición $\mathcal{P}$* al número real

$$h(f, \mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty} \frac{H(\mathcal{P}^n)}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{H(\mathcal{P}^n)}{n}.$$

Definición 1.16. Sea $f : M \mapsto M$ medible que preserva la medida de probabilidad μ. Se llama *entropía métrica de f con respecto de la medida μ* a

$$h_\mu(f) \;=\; \sup\,\{h(T, \mathcal{P}) :\; \mathcal{P} \text{ partición finita de } M\}.$$

El cálculo de $h_\mu(f)$ puede ser un poco más sencillo si pudiésemos asegurar que las entropías de las particiones, para cada medida μ invariante por f fija, alcanzan un máximo para cierta partición del espacio. Es decir, nos interesa el caso en que existe una partición finita particular $\mathcal{P}_0$ de M tal que

$$h(T, \mathcal{P}_0) \;=\; h_\mu(f) \;=\; \sup\,\{h(T, \mathcal{P}) :\; \mathcal{P} \text{ partición finita de } M\}.$$

En efecto, la próxima definición relaciona ciertas particiones con la transformación f y con la sigma-álgebra de Borel $\mathcal{A}$. A partir de ella enunciaremos un teorema clásico de la teoría de la entropía métrica. Es el Teorema de Kolmogorov- Sinai. Él da una condición suficiente para la existencia de una partición que maximiza la entropía de todas las particionees, para una medida de probabilidad invariante por f fija.

Antes de introducir la próxima definición, recordemos lo siguiente:

Se dice que dos conjuntos medibles *son iguales* μ*-c.t.p.* cuando su diferencia simétrica tiene μ- medida igual a cero. Se dice que dos particiones *son iguales* μ*-c.t.p* cuando cada átomo de una de ellas, que tenga μ-medida positiva, es igual μ-c.t.p. a un átomo de la otra partición. En general, dos familias de conjuntos medibles son iguales μ-c.t.p. cuando cada conjunto de una de ellas, que tenga μ-medida positiva, is igual μ-c.t.p. a un conjunto de la otra familia.

Definición 1.17. Dados $f : M \mapsto M$, y una partición $\mathcal{P}$ de M, se dice que $\mathcal{P}$ es *una partición generadora* para f si satisface la sigma-álgebra generada por $\bigvee_{j=0}^{\infty} f^{-j}\mathcal{P}$ es igual a $\mathcal{A}$ μ-c.t.p.

Teorema 1.18. Kolmogorov-Sinai

Si $\mathcal{P}$ *es una partición generadora con* $H(\mathcal{P}) < \infty$*, entonces*

$$h_\mu(f) = h(f, \mathcal{P}).$$

Demostración. Ver por ejemplo P. Walters [19], Theorem 9.2.1. $\square$

2 Medidas tipo-SRB

En esta sección trataremos otro de los temas fundamentales para demostrar el Teorema 1: las medidas tipo-SRB. A modo de introducción, presentaremos y daremos algunas propiedades conocidas de las medidas Sinai-Ruelle-Bowen (SRB) para sistemas con más diferenciabilidad que C^1, que si bien no son necesarias a la hora de demostrar el Teorema 1, dan un marco teórico para presentar las medidas tipo-SRB.

Sea $f : M \mapsto M$ una transformación continua en un espacio métrico compacto M, y μ una probabilidad de Borel, no necesariamente invariante por f.

Llamaremos $\mathcal{M}$ al conjunto de las medidas de probabilidad de Borel en M con la topología débil*, y denotamos con $\mathcal{M}_f$ al subconjunto de $\mathcal{M}$ compuesto por la medidas de probabilidad que son invariantes por f.

Definición 2.1. Definamos las *probabilidades empíricas* $\sigma_{n,x}$, con $n \geq 1$ y $x \in M$ como:

$$\sigma_{n,x} := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(x)},$$

donde δ_y denota la medida de Dirac soportada en el punto $y \in M$.

2.1 Medidas SRB

Definición 2.2. Se define la *cuenca de atracción estadística de la medida* μ como el conjunto:

$$B(\mu) = \{x \in M : \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,x} = \mu\},$$

donde el límite está tomado en la topología débil* del espacio de $\mathcal{M}$.

Observación 2.3.

1. Si la cuenca de atracción estadística de una medida de probabilidad μ es no vacía, entonces μ es invariante por f.
2. Una medida de probabilidad μ es ergódica si y solo si $\mu(B(\mu)) = 1$.
3. Si μ es una medida de probabilidad no ergódica, tenemos que $\mu(B(\mu)) = 0$, aunque $B(\mu)$ puede no ser vacío, e incluso, podría tener medida de Lebesgue positiva cuando μ y la medida de Lebesgue son mutuamente singulares.

Definición 2.4. (Sinai [16]- Ruelle [14]-Bowen [1])

Sea $f : M \mapsto M$ una transformación continua en una variedad riemanniana compacta, y $\mu \in \mathcal{M}$. Diremos que una probabilidad μ es *una medida SRB* (Sinai-Ruelle-Bowen) si

$$m(B(\mu)) > 0,$$

donde m es la medida de Lebesgue. Es estándar verificar que si existen medidas físicas o SRB, ellas son invariante por f.

Observamos que el uso como sinónimos de medida física y medida SRB no es usual en la literatura clásica. En efecto, la Definición 2.4 se aplica solo para definir medida *física,* y no medida SRB, en la mayor parte de la literatura relativa a la Teoría de Pesin, referida exclusivamente a sistemas de clase $C^{1+\alpha}$. Cuando se aplica la Teoría de Pesin, las medidas SRB se definen usualmente (por ejemplo ver [20]) por sus propiedades de continuidad absoluta con respecto a la medida de Lebesgue condicionada a lo largo de las variedades inestables. Pero si el sistema es hiperbólico (siempre con regularidad $C^{1+\alpha}$), los teoremas clásicos de Ruelle, Sinai y Bowen ([41], [42], [35], [36]) demuestran que las medidas SRB, definidas mediante esas propiedades de continuidad absoluta, son físicas y recíprocamente. Por lo tanto en condiciones de hiperbolicidad, ambos conceptos son matemáticamente equivalentes.

No obstante lo anterior, si el sistema no es hiperbólico, ambas definiciones no son equivalentes. Sin embargo, algunos autores [18], [19], [6], [7] han adoptado los conceptos de medida física y de medida SRB como sinónimos. Nosotros también elegiremos esa opción a lo largo de esta Tesis, pues se usan como sinónimos cuando se trabaja con regularidad solo C^1, en la que no existen necesariamente variedades invariantes inestables para poder definir el concepto de continuidad absoluta a lo largo de ellas. El uso de ambos nombres como sinónimos, utilizando una única concepción a partir de las propiedades de atracción estadística de las medidas, tiene la ventaja de prescindir de propiedades de continuidad absoluta, que son en general falsas en la topología C^1. Además se mantiene, como enunciamos y demostraremos en el Teorema 1, la misma relación que existe en la topología C^2 (para los mapas hiperbólicos) entre las medidas físicas, las medidas SRB, y la fórmula de Pesin de la Entropía [8], [10].

Observamos también que de acuerdo a la Definición 2.4, no estamos requiriendo que una medida sea ergódica para ser SRB. Esta también es una diferencia con la definición de medida SRB que aparece en una parte de la literatura clásica.

2.2 Medidas tipo-SRB

Las siguientes definiciones fueron extraídas del libro [3], Definiciones 7.6.1 a 7.6.4 páginas 216 y 217, en forma casi textual.

Definición 2.5. Se define el *p-omega-límite* de la órbita de x, con $x \in M$, al conjunto $p\omega(x)$ definido por:

$$p\omega(x) := \{\mu \in \mathcal{M}\colon\ \exists n_i \to +\infty \text{ tal que } \lim_{i \to +\infty} \sigma_{n_i,x} = \mu\}, \tag{8}$$

donde el límite está tomado en la topología débil* del espacio de probabilidades $\mathcal{M}$. Como $\mathcal{M}$ es secuencialmente compacto, es inmediato que para todo $x \in M$, $p\omega(x) \subset \mathcal{M}$ es no vacío y débil*-cerrado; y por lo tanto es también débil*-compacto. Además es estándar probar que $p\omega(x) \subset \mathcal{M}_f$, es decir toda probabilidad en el p-omega-límite de cualquier estado inicial, es invariante por el mapa f.

Definición 2.6. Dada una probabilidad μ y dado un número real $\epsilon > 0$, llamamos *cuenca de atracción estadística ϵ-débil* al conjunto definido por:

$$A_\epsilon(\mu) := \{x \in M\colon \mathrm{dist}(p\omega(x), \mu) < \epsilon\}. \tag{9}$$

Definición 2.7. Sea μ una medida de probabilidad. Diremos que μ es una medida *tipo-SRB*, y anotamos $\mu \in \mathcal{O}_f$ si

$$m(A_\epsilon(\mu)) > 0 \quad \forall\, \epsilon > 0,$$

donde m denota la medida de Lebesgue en M.

Observación 2.8. Las medidas tipo-SRB son invariantes, porque son puntos de acumulación de las medidas de los conjuntos p-omega(x), es decir, son límite de subsucesiones convergentes de las probabilidades empíricas $\sigma_{n,x}$, que son promedios temporales. Finalmente, como el conjunto de las medidas invariantes es cerrado, sus puntos de acumulación son también medidas invariantes.

Teorema 2.9. *Sea $f: M \mapsto M$ continua. Entonces:*

Para cualquier mapa continuo $f: M \to M$, existen medidas tipo-SRB y el conjunto $\mathcal{O}_f$ de tales medidas es compacto en el espacio de las probabilidades con la topología débil*.

Extraemos la prueba de [5]:

Demostración. Por absurdo, si ninguna probabilidad fuera tipo-SRB, toda medida μ estaría contenida en un entorno abierto $E(\mu) \subset \mathcal{M}$ tal que

$$m\Big(\{x \in M\colon\ p\omega(x) \cap E(\mu) \neq \emptyset\}\Big) = 0.$$

Siendo el espacio $\mathcal{M}$ compacto con la topología débil*, podemos tomar un subcubrimiento finito $\{E_1, ..., E_k\}$ formado por tales abiertos de $\mathcal{M}$. Entonces

$$m\Big(\{x \in M\colon\ p\omega(x) \bigcap (\bigcup_{i=1}^{k} E_i) \neq \emptyset\}\Big) =$$

$$= m\Big(\bigcup_{i=1}^{k} \{x \in M\colon\ p\omega(x) \cap E_i \neq \emptyset\}\Big)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k} m\Big(\{x \in M\colon\ p\omega(x) \cap E_i \neq \emptyset\}\Big) = 0.$$

Como $\bigcup_{i=1}^{k} E_i = \mathcal{M}$, porque $\{E_i\colon 1 \leq i \leq k\}$ es un cubrimiento de $\mathcal{M}$, obtenemos:

$$m\left(\{x \in M\colon p\omega(x) \cap \mathcal{M} \neq \emptyset\}\right) = 0.$$

Equivalentemente, para m-c.t.p. $x \in M$ se cumple

$$p\omega(x) \cap \mathcal{M} = \emptyset.$$

Pero $p\omega(x) \cap \mathcal{M}$ nunca es el conjunto vacío. Esto contradice la igualdad anterior, demostrando que el conjunto de medidas tipo-SRB es no vacío.

Ahora demostremos que $\mathcal{O}_f$ es compacto. Como $\mathcal{M}$ es un espacio débil*-compacto, basta probar que $\mathcal{O}_f$ es cerrado. Para esto, tomamos una sucesión convergente

μ_n, y probaremos que el límite de esta sucesión, llamémoslo μ, pertenece a $\mathcal{O}_f$. Es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe un $n \geq 1$ suficientemente grande, que dejamos fijo, tal que $\mu_n \in E_\epsilon(\mu)$, donde $E_\epsilon(\mu)$ denota la bola de centro μ y radio ϵ. Tomemos $\epsilon_n > 0$ tal que:

$$E_{\epsilon_n}(\mu_n) \subset E_\epsilon(\mu).$$

Luego,

$$\{x \in M: \ p\omega(x) \cap E_{\epsilon_n}(\mu_n) \neq \emptyset\} \ \subset \ \{x \in M: \ p\omega(x) \cap E_\epsilon(\mu) \neq \emptyset\}.$$

Ahora, aplicamos la Definición 2.7 y obtenemos

$$m\left(\{x \in M: \ p\omega(x) \cap E_{\epsilon_n}(\mu_n) \neq \emptyset\}\right) > 0.$$

Por lo tanto,

$$m\left(\{x \in M: \ p\omega(x) \cap E_\epsilon(\mu_n) \neq \emptyset\}\right) > 0.$$

Como la elección de $\epsilon > 0$ fue arbitraria, concluimos que μ es una medida tipo-SRB.

$\square$

3 Demostración del Teorema 1

3.1 Mapas expansores y expansivos

Definición 3.1. Sea $f : M \to M$ un mapa de clase C^1. Decimos que f es expansor (al futuro) cuando existe $\lambda > 1$ tal que $\|Df_x(v)\| \geq \lambda \|v\|$, para todo $x \in M$ y $v \in T_xM$. Como ya se anunció en la introducción, denotamos como $\mathcal{E}^1$ al espacio de los mapas expansores en M, con la topología C^1.

Para todo $f \in \mathcal{E}^1$ denotamos

$$\psi(x) := -\log|\det Df_x| < 0, \quad \forall\, x \in M. \tag{10}$$

Definición 3.2. Sea $f : M \to M$ continuo. Diremos que f es expansivo (al futuro) cuando existe una constante $\alpha > 0$ tal que si $x, y \in M$ y $\operatorname{dist}(f^n(x), f^n(y)) < \alpha$ para todo $n \geq 0$, entonces $x = y$.

Tal constante α se llama *constante de expansividad.*

Proposición 3.3. *Sea $f : M \to M$ de clase C^1. Si f es expansor, entonces f es expansivo.*

Se observa que la recíproca de esta Proposición es falsa. Es decir existen mapas expansivos que no son expansores, entre otras razones, porque un mapa expansivo puede ser solamente continuo, y no necesita ser de clase C^1.

Demostración. de la Proposición 3.3.

Sea $x \in M$, y $\delta_1 > 0$ tal que el mapa exponencial $\exp_x : B_{\delta_1}(0) \subset T_xM \to M$ sea un difeomorfismo sobre su imagen. Entonces, dado $y \in M$ tal que $\operatorname{dist}(x, y) < \delta_1$, existe un único vector $v = \exp_x^{-1}(y)$ con $\|v\| = \operatorname{dist}(x, y) < \delta_1$. Siendo compacta la variedad M, el número δ_1 puede elegirse uniformemente, es decir, independiente de x. En lo que sigue usamos la notación $y - x$ para indicar al vector $v = \exp_x^{-1}(y)$. Ahora, aplicando la definición de diferenciabilidad, tenemos que

$$f(y) - f(x) = Df_x(y - x) + R(x, y)$$

donde Df_x denota la aplicación derivada, y $R(x, y)$ cumple

$$\frac{\|R(x,y)\|}{\|y-x\|} \to 0 \text{ cuando } y \to x.$$

Obtenemos

$$\|f(y)-f(x)\| \geq \|Df_x(y-x)\| - \|R(x,y)\| \geq \lambda\|y-x\| - \frac{R(x,y)}{\|y-x\|}\|y-x\|.$$

Para todo $\epsilon > 0$, existe un $0 < \delta < \delta_1$ tal que si $\|y-x\| < \delta$ entonces $\frac{R(x,y)}{\|y-x\|} < \epsilon$.

Elijamos $\epsilon = (\lambda - 1)/2$, luego

$$\|f(y)-f(x)\| \geq \lambda\|y-x\| - \frac{\lambda-1}{2}\|y-x\| = \left(\lambda - \frac{\lambda-1}{2}\right)\|y-x\| = \frac{\lambda+1}{2}\|y-x\|.$$

Concluimos que, si $\|x-y\| < \delta$, entonces

$$|f(y)-f(x)\| \geq \lambda_1\|y-x\|,$$

donde $\lambda_1 := (\lambda+1)/2 > 1$.

Para terminar de demostrar esta proposición basta demostrar que δ es una constante de expansividad de f.

Debemos probar que si $\|f^n(x) - f^n(y)\| < \delta$ para todo $n > 0$, entonces $x = y$. En efecto, si $\|f^n(x) - f^n(y)\| < \delta$ para todo $n \geq 0$, entonces en particular cuando $n = 0$, obtenemos $\|y-x\| < \delta$. Esto implica, por lo demostrado antes, que $\|f(x)-f(y)\| \geq \lambda_1\|y-x\|$.

Análogamente, para $n = 1$, $\|f(x)-f(y)\| < \delta =$ implica que

$$\|f^2(y) - f^2(x)\| \geq \lambda_1\|f(y)-f(x)\| \geq (\lambda_1)^2\|y-x\|.$$

Por inducción en n deducimos que, para todo $n \geq 1$ se cumple:

$$\|f^n(y) - f^n(x)\| \geq (\lambda_1)^n\|y-x\| \to +\infty \text{ cuando } n \to +\infty, \text{ si } y \neq x.$$

Lo anterior es una contradicción porque la distancia entre $f^n(x)$ y $f^n(y)$ dada por $\|f^n(x) - f^n(y)\|$ está acotada por el diámetro de la variedad M, que es finito por ser M una variedad compacta. Deducimos entonces que $x = y$ como queríamos demostrar. $\square$

3.2 Métrica débil* en el espacio de probabilidades

En el espacio $\mathcal{M}$ de las medidas de probabilidad de Borel en la variedad M, fijamos la métrica débil*:

$$\mathrm{dist}(\mu, \nu) := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} \left| \int \phi_i \, d\mu - \int \phi_i \, d\nu \right|, \tag{11}$$

donde $\phi_0 := \psi$ y $\{\phi_i\}_{i \geq 1}$ es una familia numerable de funciones continuas $\phi_i : M \mapsto [0, 1]$, densa en el espacio $C^0(M, [0, 1])$. Veremos que, para todo $\mu_0 \in \mathcal{M}$ y todo $\epsilon^* > 0$ la bola $\mathcal{B} := \{\nu \in \mathcal{M} : \ \mathrm{dist}(\mu_0, \nu) < \epsilon^*\}$ es convexa.

Lema 3.4. *Las bolas formadas por la métrica definida en la igualdad (11) son convexas.*

Demostración. Sean ν_1, $\nu_2 \in \mathcal{B} = \{\nu \in M : dist(\nu, \mu) < \epsilon^*\}$. Probaremos que dados $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$ tales que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ entonces $\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2 \in \mathcal{B}$.

Aplicando la desigualdad triangular tenemos que

$$\mathrm{dist}(\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2, \mu) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |\int \phi_i d\mu - \int \phi_i d(\lambda_1 \nu_1 + \lambda_2 \nu_2)|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |\lambda_1 \int \phi_i d\mu - \lambda_1 \int \phi_i d\nu_1| + \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} |\lambda_2 \int \phi_i d\mu - \lambda_2 \int \phi_i d\nu_2| =$$

$$= \lambda_1 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} | \int \phi_i d\mu - \phi_i d\nu_1| + \lambda_2 \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^i} | \int \phi_i d\mu - \phi_i d\nu_2| < (\lambda_1 + \lambda_2)\epsilon^* = \epsilon^*.$$

□

3.3 Lemas y un teorema sobre el cálculo de la entropía.

Lema 3.5. *Sea μ una medida de probabilidad invariante por f. Sea $\mathcal{P}$ cualquier partición finita de la variedad M en conjuntos medibles. Si $\mu(\partial \mathcal{P}) = 0$ entonces, para todo $\epsilon > 0$, y para todo $q \geq 1$ existe $\epsilon^* > 0$ tal que*

$$\left| \frac{H(\mathcal{P}^q, \rho)}{q} - \frac{H(\mathcal{P}^q, \mu)}{q} \right| < \epsilon \tag{12}$$

para cada medida de probabilidad ρ (no necesariamente invariante) tal que dist$(\rho, \mu) < \epsilon^*$.

Demostración. Por absurdo, asumamos que no existe tal $\epsilon^* > 0$. Entonces, para cualquier $\epsilon^* > 0$ existe una medida de probabilidad ρ, cuya distancia a μ es menor que ϵ^*, y que no satisface la desigualdad (12). Luego, en particular para $\epsilon^* = 1/m$ donde m es cualquier número natural positivo, existe ρ_m tal que

$$\text{dist}(\rho_m, \mu) < \frac{1}{m},$$

$$\Big|\frac{H(\mathcal{P}^q, \rho_m)}{q} - \frac{H(\mathcal{P}^q, \mu)}{q}\Big| \geq \epsilon \quad \forall\ m \geq 1. \tag{13}$$

Entonces $\text{lím}_{m\to+\infty} \rho_m = \mu$ en la topología débil*, porque $\text{dist}(\rho_m, \mu) < 1/m$ para todo $m \geq 1$. Como $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0$, tenemos $\mu(\partial\mathcal{P}^q) = 0$, ya que μ es invariante por f. Entonces, aplicando la Proposición 1.11.3, sabemos que $\text{lím}_{m\to+\infty} \rho_m(Y) = \mu(Y)$ para cada átomo $Y \in \mathcal{P}^q$. Además, por el Teorema 1.10, para cualquier $q \geq 1$ fijo obtenemos:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{H(\mathcal{P}^q, \rho_m)}{q} = \frac{H(\mathcal{P}^q, \mu)}{q},$$

contradiciendo la desigualdad (13). $\square$

Ahora enunciaremos un teorema clásico sobre el cálculo de entropía métrica para mapas expansivos.

Teorema 3.6. *Sea $f : M \to M$ un mapa expansivo en una variedad compacta M. Sea $\alpha > 0$ constante de expansividad para f. Entonces, para toda partición $\mathcal{P}$ con diámetro menor que α se cumple*

$$h_\mu(f) = \lim_{q\to+\infty} \frac{H(\mathcal{P}^q, \mu)}{q}. \tag{14}$$

Con este Teorema, que en realidad es un Corolario del Teorema de Kolmogorov-Sinai, se consigue aproximar la entropía métrica con la entropía de una partición, con el requisito de que la partición tenga un diámetro suficientemente pequeño.

Demostración. Usando el Teorema 1.18 es suficiente demostrar que $\mathcal{P}$ es una partición generadora. Es decir, basta probar que $\bigvee_{j=0}^{\infty} f^{-j}\mathcal{P}$ genera la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de Borel en M.

Sea $k \geq 1$ y sea para cada punto $x \in M$ el átomo $A_k(x) \in \bigvee_{j=0}^{k} f^{-j}\mathcal{P}$ que contiene a x. Denotamos con $B_\delta(x)$ la bola de centro x y radio $\delta < 0$. Entonces, por la expansividad de f, para todo $0 < \delta < \alpha$ existe $k = k(\alpha)$ tal que

$$A_k(x) \subset B_{\delta(x)} \quad \forall\, x \in M \tag{15}$$

(La demostración de esta afirmación se encuentra por ejemplo en [7], Lema 4.5.4, pág. 89 y en el principio de la prueba del Teorema 4.5.6, pág 90). De la afirmación (15) deducimos que para todo abierto no vacío $V \subset M$ se cumple

$$V = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{A \in \bigvee_{j=0}^{k} f^{-j}(\mathcal{P})} A.$$

Como la familia de átomos en la unión anterior, es numerable, y cada átomo es un boreliano, deducimos que la σ-álgebra generada por $\bigvee_{j=0}^{\infty} f^{-j}(\mathcal{P})$ coincide con la σ-álgebra $\mathcal{A}$ de Borel en M. $\square$

La demostración del Teorema 1, está sustentada en casi todos los resultados expuestos hasta ahora en esta Tesis, y además en dos lemas técnicos. Estos son el siguiente Lema 3.7 y el Lema 3.8 que enunciaremos y demostraremos en la próxima sección.

El siguiente Lema es una adaptación a mapas expansores, en vez de difeormorfismos con descomposición dominada, del Lema 2.5 de [4], página 743. Si bien las ideas de su enunciado y la larga ruta de las operaciones en su demostración, son similares y fueron inspiradas en [4] y también en [6], para adaptarlo hemos tenido que resolver, entre otros, el problema de que ahora el mapa expansor f no es un difeomorfismo global de la variedad ambiente M, y además que ahora M no tiene necesariamente dimensión igual a 1, sino cualquier dimensión finita.

Lema 3.7. *Sea $f : M \mapsto M$ un mapa expansor C^1 en la variedad compacta M. Sea $\alpha > 0$ una constante de expansividad para f.*

Para todo $0 < \delta \leq \alpha$, para todo $\epsilon > 0$, y para toda medida μ invariante por f, existe una partición finita $\mathcal{P}$ de M, un número real $\epsilon^* > 0$, y un número natural $n_0 \geq 1$, tales que:

(i) $\mathrm{diam}(\mathcal{P}) < \delta \leq \alpha$,

(ii) $\mu(\partial\mathcal{P}) = 0,$

(iii) *Para cada sucesión de medidas de probabilidad ν_n, no necesariamente invariantes, si* $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(f^j)^*\nu_n$,[5] *y si* $\operatorname{dist}(\mu_n, \mu) < \epsilon^* \quad \forall\ n \geq 1$, *entonces*

$$\frac{1}{n}H(\mathcal{P}^n, \nu_n) \leq h_\mu(f) + \epsilon \quad \forall\ n \geq n_0.$$

La propiedad (iii) de este Lema es un resultado técnico bastante sorprendente de aproximación por abajo de la entropía métrica $h_\mu(f)$ con respecto a una medida invariante μ, por medio de medidas no invariantes ν_n, elegibles de forma casi arbitraria, y con la única condición de que sus promedios temporarles μ_n se aproximen suficientemente en la topología débil estrella a la medida μ.

Demostración. Usando la Proposición 1.9, existe una partición que cumple las propiedades (i) y (ii) de este Lema. Ahora, para $\epsilon > 0$ dado, encontraremos $\epsilon^* > 0$ y $n_0 \geq 1$ tal que la proposición (iii) se cumpla.

Fijemos dos números enteros $q \geq 1$ y $n \geq q$. Escribamos la división entera $n = Nq + j$ donde N, j son números enteros tales que $N \geq 1$ y $0 \leq j \leq q - 1$. Fijemos una medida ν cualquiera (no necesariamente invariante).

Usando las propiedades asociativa y conmutativa del producto de particiones, demostremos que

$$\mathcal{P}^{Nq+j} = \Big(\bigvee_{i=0}^{j-1} f^{-(Nq+i)}\mathcal{P}\Big) \bigvee \big(\bigvee_{i=0}^{N-1} f^{-iq}\mathcal{P}^q\Big). \tag{16}$$

$$\mathcal{P}^{Nq+j} = \mathcal{P} \vee f^{-1}\mathcal{P} \vee f^{-2}\mathcal{P} \vee \ldots f^{-(q-1)}\mathcal{P} \vee$$
$$\vee f^{-q}\mathcal{P} \vee \ldots \vee f^{-(2q-1)}\mathcal{P} \vee \ldots \vee f^{-(Nq-1)}\mathcal{P} \vee f^{-Nq}\mathcal{P} \vee \ldots \vee f^{-(Nq+j-1)}\mathcal{P}.$$

Por lo mismo,

$$f^{-iq}\mathcal{P}^q = f^{-iq}\mathcal{P} \vee f^{-(iq+1)}\mathcal{P} \vee \ldots \vee f^{-((i+1)q-1)}\mathcal{P} \quad \text{para} \ \ i = 0, \ldots, N-1.$$

[5] El operador pull-back $f^*\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ se define por $(f^*\nu)(A) := \nu(f^{-1}(A))$ para todo conjunto $A \subset M$ medible.

Luego, agrupando los primeros Nq términos del producto de particiones por tamaño de índice, en grupos de q, y en por otro lado agrupando los j últimos términos, deducimos la igualdad (16).

Ahora, usando 1.5.4, obtenemos:

$$H(\mathcal{P}^n,\nu) = H(\mathcal{P}^{Nq+j},\nu) \leq H(\vee_{i=0}^{j-1} f^{-(Nq+i)}\mathcal{P},\nu) + H(\vee_{i=0}^{N-1} f^{-iq}\mathcal{P}^q,\nu) \leq$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} H(f^{-(Nq+i)}\mathcal{P},\nu) + \sum_{i=0}^{N-1} H(f^{-iq}\mathcal{P}^q,\nu) =$$

$$\sum_{i=0}^{j-1} H(\mathcal{P},(f^{Nq+i})^*\nu) + \sum_{i=0}^{N-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{iq})^*\nu), \tag{17}$$

.

Entonces, de la desigualdad (17) y de la Proposición 1.3 obtenemos:

$$H(\mathcal{P}^n,\nu) \leq (j-1)\log p + \sum_{i=0}^{N-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{iq})^*\nu)$$

$$\leq q\log p + \sum_{i=0}^{N-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{iq})^*\nu) \quad \forall\ q \geq 1, \quad n \geq q,$$

donde p es el número de átomos de $\mathcal{P}$

La desigualdad anterior se cumple también para $f^{-l}\mathcal{P}$ en lugar de $\mathcal{P}$, para todo $l \geq 0$, ya que se cumple para cada partición con p átomos. Luego:

$$H(f^{-l}\mathcal{P}^n,\nu) \leq q\log p + \sum_{i=0}^{N-1} H(f^{-l}\mathcal{P}^q,(f^{iq})^*\nu) =$$

$$q\log p + \sum_{i=0}^{N-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{iq+l})^*\nu).$$

Sumando las desigualdades anteriores, para $0 \leq l \leq q-1$ obtenemos:

$$\sum_{l=0}^{q-1} H(f^{-l}\mathcal{P}^n,\nu) \leq q^2 \log p + \sum_{l=0}^{q-1}\sum_{i=0}^{N-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{iq+l})^*\nu)$$

$$\Rightarrow \sum_{l=0}^{q-1} H(f^{-l}\mathcal{P}^n,\nu) \leq q^2 \log p + \sum_{k=0}^{Nq-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{k})^*\nu). \qquad (18)$$

Por otra parte, para todo $0 \leq l \leq q-1$, la partición $\mathcal{P}^{n+l}$ es más fina que $\mathcal{P}^n$. Además, usando 1.5.4, tal y como hicimos para probar (16), tenemos

$$\mathcal{P}^{n+l} = \Big(\bigvee_{i=0}^{l-1} \mathcal{P}^i\Big) \vee f^{-l}(\mathcal{P}^n).$$

Luego,

$$H(\mathcal{P}^n,\nu) \leq H(\mathcal{P}^{n+l},\nu) \leq \Big(\sum_{i=0}^{l-1} H(f^{-i}\mathcal{P},\nu)\Big) + H(f^{-l}\mathcal{P}^n,\nu)$$

$$\leq q \log p + H(f^{-l}\mathcal{P}^n,\nu).$$

Sumando estas últimas desigualdades para $0 \leq l \leq q-1$, deducimos:

$$qH(\mathcal{P}^n,\nu) \leq q^2 \log p + \sum_{l=0}^{q-1} H(f^{-l}\mathcal{P}^n,\nu). \qquad (19)$$

Considerando juntas las desigualdades (18) y (19), obtenemos:

$$qH(\mathcal{P}^n,\nu) \leq 2q^2 \log p + \sum_{k=0}^{Nq-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{k})^*\nu).$$

Recordamos ahora que $n = Nq+j$ con $0 \leq j \leq q-1$. Luego $n-1 = Nq+j-1 \geq Nq-1$ y entonces

$$qH(\mathcal{P}^n,\nu) \leq 2q^2 \log p \ + \sum_{k=0}^{n-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{k})^*\nu).$$

Tomemos en particular $\nu = \nu_n$ en la desigualdad anterior, y dividamos por n:

$$\frac{q\,H(\mathcal{P}^n,\nu_n)}{n} \leq \frac{2q^2\log p}{n} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} H(\mathcal{P}^q,(f^{k})^*\nu_n)$$

Aplicamos ahora el Teorema 1.6. Para $n \geq 1$ y ν_n fijos, y para la partición $\mathcal{P}^q$ fija, cualquier combinación convexa de los valores $H(\mathcal{P}^q, (f^k)^*\nu_n)$ de la entropía de la partición, para un conjunto finito de $\{(f^k)^*\nu_n\}_{0\leq k\leq n-1}$ de medidas de probabilidad, es menor o igual que el valor $H(\mathcal{P}^q, \mu_n)$ de la entropía de la misma partición, con respecto a la combinación convexa μ_n con los mismos coeficientes de las medidas $(f^k)^*\nu_n$. Deducimos entonces que:

$$\frac{qH(\mathcal{P}^n, \nu_n)}{n} \leq \frac{2q^2 \log p}{n} + H\Big(\mathcal{P}^q, \mu_n\Big), \tag{20}$$

En (20), tomemos

$$n \geq n(q) := \text{máx}\{q, 6\, q \log p/\epsilon\} \geq 1.$$

Obtenemos:

$$\frac{q}{n} H(\mathcal{P}^n, \nu_n) \leq \frac{q\epsilon}{3} + H(\mathcal{P}^q, \mu_n) \quad \forall\ n \geq n(q) \quad \forall\ q \geq 1.$$

Equivalentemente,

$$\frac{1}{n} H(\mathcal{P}^n, \nu_n) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{H(\mathcal{P}^q, \mu_n)}{q} \qquad \forall\ n \geq n(q) \quad \forall\ q \geq 1. \tag{21}$$

La desigualdad anterior se cumple para cualquier $q \geq 1$ fijo, y para cada n suficientemente grande, dependiendo de q.

Por un lado, como por hipótesis μ es invariante por f, podemos aplicar la igualdad (14). Deducimos que existe $q \geq 1$ tal que

$$\frac{H(\mathcal{P}^q, \mu)}{q} \leq h_\mu(f) + \frac{\epsilon}{3}. \tag{22}$$

De ahora en adelante fijamos tal valor de $q \geq 1$.

Por otro lado, como $\mu(\partial(\mathcal{P})) = 0$ (debido a la construcción de $\mathcal{P}$ que depende de la medida dada μ), podemos aplicar el Lema 3.5. Deducimos así que existe $\epsilon^* > 0$ tal que

$$\frac{H(\mathcal{P}^q, \rho)}{q} \leq \frac{H(\mathcal{P}^q, \mu)}{q} + \frac{\epsilon}{3} \text{ si } \operatorname{dist}(\rho, \mu) < \epsilon^*. \tag{23}$$

Fijemos tal valor de ϵ^*.

Para terminar de probar (iii), suponemos que $\text{dist}(\mu_n, \mu) < \epsilon^*$ para todo $n \geq 1$, donde μ_n es la medida de probabilidad (no necesariamente invariante) construida en el enunciado de este Lema. Entonces, de la desigualdad (23) usando $\rho = \mu_n$, obtenemos:

$$\frac{H(\mathcal{P}^q, \mu_n)}{q} \leq \frac{H(\mathcal{P}^q, \mu)}{q} + \frac{\epsilon}{3} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Uniendo esta última afirmación con las desigualdades (21) y (22) obtenemos

$$\frac{1}{n} H(\mathcal{P}^n, \nu_n) \leq h_\mu(f) + \epsilon \quad \forall\, n \geq n(q).$$

Luego, al elegir $n_0 := n(q)$, queda probada la proposición (iii). □

3.4 Acotación exponencial de la medida de Lebesgue de la cuenca de atracción estadística.

El objetivo de esta subsección es enunciar y demostrar el segundo lema técnico que utilizaremos en la parte final de la demostración del Teorema 1; es el próximo Lema 3.8. Su demostración es muy técnica, larga y muy engorrosa. Su enunciado y su demostración son adaptaciones de, y fueron inspirados por, el Lema 4.3 de [6], página 205, y la prueba del Teorema 6.1.8 de [7].

Para enunciar y demostrar el próximo Lema 3.8, necesitamos previamente convenir en la siguiente notación:

Para todo número real $r \geq 0$ denotamos:

$$\mathcal{K}_r := \{\nu \in \mathcal{M}_f : \int \psi \, d\nu + h_\nu(f) \geq -r\}. \tag{24}$$

Recordemos que la función continua ψ está definida por la igualdad (10) al principio de este capítulo.

Para cada instante $n \geq 1$ y para cada estado inicial $x \in M$ en la variedad ambiente, recordemos la Definición 2.1 de probabilidad empírica $\sigma_{n,x}$, y la Definición 2.5 del p-omega-límite $p\omega(x)$ en el conjunto $\mathcal{M}$ de probabilidades de Borel.

Lema 3.8. *Sea $f : M \mapsto M$ un mapa C^1 expansor en la variedad compacta M. Sea m la medida de Lebesgue en M. Fijemos $r > 0$ y sea el conjunto $\mathcal{K}_r$ de* *medidas de probabilidad invariantes por f, definido por la igualdad* (24). *Entonces, se cumple la siguiente propiedad:*

Para todo $0 < \epsilon < r/2$, y para todo $\mu \in \mathcal{M}_f$ tal que $\mu \notin \mathcal{K}_r$, existen $n_0 \geq 1$ y $0 < \epsilon^* \leq \epsilon/3$ tales que

$$m(\{x \in M : \text{dist}(\sigma_{n,x}, \mu) < \epsilon^*\}) < Ke^{n(\epsilon - r)} < Ke^{-nr/2} \qquad \forall\; n \geq n_0, \tag{25}$$

donde K es la medida de Lebesgue de la variedad M, *(y por lo tanto es una constante positiva independiente de ϵ, n y r.)*

Demostración. Como por hipótesis el mapa f es expansor, aplicando la Proposición 3.3, deducimos que f también es expansivo. Sea entonces $\alpha > 0$ una constante de expansividad para f. Para el valor dado de $\epsilon > 0$, fijemos un módulo de continuidad uniforme $0 < \delta < \alpha$ para $\epsilon/3$ de la función $\psi = -\log|\det(Df)|$ Es decir,

$$|\psi(x) - \psi(y)| < \frac{\epsilon}{3} \text{ si } \text{dist}(x, y) < \delta.$$

El módulo de continuidad uniforme $\delta > 0$ existe porque ψ es uniformemente continuo en el compacto M.

Para tal valor de $\delta > 0$, para la medida $\mu \in \mathcal{M}_f$ dada, y para el número real $\epsilon/3$ en lugar de ϵ, aplicamos el Lema 3.7 para construir la partición $\mathcal{P}$ en M, y los números $\epsilon^* > 0$ y $n_0 \geq 1$, tales que las condiciones (i), (ii) y (iii) se cumplen (con $\epsilon/3$ en vez de ϵ).

No es restrictivo asumir que

$$\epsilon^* \leq \epsilon/3.$$

En caso contrario, sustituiríamos ϵ^* por $\epsilon/3$.

Denotemos

$$M_n := \{x \in M : \ \text{dist}(\sigma_{n,x}, \mu) < \epsilon^*\}. \tag{26}$$

Debemos probar que

$$m(M_n) \leq Ke^{n(\epsilon - r)} \ \ \forall \ \ n \geq n_0 \quad \text{(a demostrar)}. \tag{27}$$

Como f es C^1 expansor, su derivada Df_x es invertible para todo $x \in M$. En efecto, $\det Df_x \neq 0$. Entonces, por el Teorema de la función inversa, f es un difeomorfismo local. Por lo tanto, la compacidad de M implica que existe un valor uniforme de $\delta_1 > 0$ tal que f restringida a cualquier bola de radio δ_1 es un difeomorfismo sobre su imagen. Luego, si el diámetro de la partición $\mathcal{P}$ se toma suficientemente pequeño, el mapa restringido $f^n|_X : X \mapsto f^n(X)$ es un difeomorfismo para todo $X \in \mathcal{P}^n$ y para todo $n \geq 1$. Además, recordando que $\psi = -\log|\text{det}Df|$, deducimos la siguiente igualdad para todo $X \in \mathcal{P}^n$:

$$m(X \cap M_n) = \int_{f^n(X \cap M_n)} |\text{det}Df^{-n}|\, dm = \int_{f^n(X \cap M_n)} e^{\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j}\, dm$$

Por lo tanto, sumando con $n \geq 1$ fijo en todas las piezas X de la partición $\mathcal{P}^n$, obtenemos:

$$m(M_n) = \sum_{X \in \mathcal{P}^n} \int_{f^n(X \cap M_n)} e^{\sum_{j=0}^{n-1} \psi \circ f^j}\, dm.$$

O bien $M_n = \emptyset$, y la Afirmación (27) resulta trivial, o bien la familia finita de átomos $\{X \in \mathcal{P}^n : \ X \cap M_n \neq \emptyset\} = \{X_1, \ldots, X_N\}$ tiene $N = N(n) \geq 1$ elementos. En este último caso, tomemos un único punto $y_k \in X_k \cap M_n$ para cada $k = 1, \ldots, N$. Denotemos por $Y(n) = \{y_1, \ldots, y_N\}$ la colección de dichos puntos. Debido a la construcción de $\delta > 0$, y como la partición $\mathcal{P}$ tiene diámetro menor que δ, deducimos que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} (\psi(f^j(y_k)) + \epsilon/3) \ \ \forall\ y, y_k \in X_k, \ \forall\ k = 1, \ldots, N.$$

Luego $m(M_n) \leq e^{n\epsilon/3} \sum_{k=1}^{N} e^{\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))}\, m(f^n(X_k \cap M_n))$, y por lo tanto:

$$m(M_n) \leq K e^{n\epsilon/3} \sum_{k=1}^{N} e^{\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))},$$

donde $K = m(M_n) > 0$ es constante, independiente de n y de ϵ.

Denotamos:

$$L := \sum_{k=1}^{N} e^{\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))}, \qquad \lambda_k := \frac{1}{L}\, e^{\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))} > 0. \tag{28}$$

Entonces, con esta nueva notación, obtenemos

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1, \quad m(M_n) \leq K e^{(n\epsilon/3)} L = K e^{(n\epsilon/3) + \log L}. \tag{29}$$

Afirmamos ahora que

$$\log L = \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))\right) - \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \log \lambda_k\right). \tag{30}$$

Para demostrar esta última afirmación, primero tomamos log en la igualdad a la derecha de (28). Obtenemos:

$$\log \lambda_k = \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))\Big) - \log L$$

Multiplicamos por λ_k:

$$\lambda_k \log \lambda_k = \lambda_k \Big(\sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))\Big) - \lambda_k \log L,$$

y ahora sumamos en $k = 1, 2, \ldots, N$, recordando que, por la igualdad a la izquierda de (29) tenemos $\sum_{k=1}^{N} \lambda_k = 1$. Obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \cdot \log \lambda_k = \Big(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k))\Big) - \log L,$$

terminando de probar la igualdad (30) como queríamos.

Definimos ahora las siguientes medidas de probabilidad auxiliares (no necesariamente invariantes):

$$\nu_n := \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \delta_{y_k}, \qquad \mu_n := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)^*(\nu_n) \tag{31}$$

Afirmamos que

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{f^j(y_k)} = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sigma_{n,\ y_k}. \tag{32}$$

Para probar las igualdades de arriba, comenzamos usando la construcción de las medidas μ_n y ν_n dadas en (31), y sustituimos la igualdad de ν_n dentro de la igualdad de μ_n:

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (f^j)^* \Big(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \delta_{y_k}\Big).$$

Usando la linealidad del operador pull-back f^* en el espacio de medidas de probabilidad, obtenemos:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{N}(f^j)^*(\lambda_k\delta_{y_k}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k(f^j)^*\delta_{y_k}$$

Ahora aplicamos las propiedades conumutativa y asociativa de la suma de probabilidades, y la propiedad distributiva de la suma respecto al producto por un número real λ_k:

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{N}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\lambda_k(f^j)^*\delta_{y_k}\Big) = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(f^j)^*\delta_{y_k}\Big).$$

Recordando la definición del pull-back $(f^j)^*$ es sencillo verificar que $(f^j)^*\delta_{y_k} = \delta_{f^j(y_k)}$, de donde resulta:

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(y_k)}\Big),$$

probando la primera igualdad de (32).

Finalmente, para probar la segunda igualdad de (32), recordamos la Definición 2.1 de la probabilidad empírica $\sigma_{n,y_k} = (1/n)\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(y_k)}$. Sustituimos esta en la igualdad de más arriba y resulta:

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sigma_{n,y_k},$$

terminando de probar la igualdad de la derecha en (32).

Ahora, de la igualdad de la izquierda en (32) deducimos:

$$\int\psi\, d\mu_n = \int\psi\, d\Big(\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\delta_{f^j(y_k)}\Big),$$

y por la linealidad de la integral respecto a la medida de integración, obtenemos:

$$\int\psi\, d\mu_n = \sum_{k=1}^{N}\lambda_k\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\int\psi\, d\delta_{f^j(y_k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sum_{j=0}^{n-1}\psi(f^j(y_k)).$$

Entonces, multiplicando por n llegamos a

$$\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\sum_{j=0}^{n-1}\psi(f^j(y_k)) = n\int\psi\, d\mu_n. \tag{33}$$

Por otro lado, calculamos la entropía de la partición $\mathcal{P}^n$ respecto a la medida de probabilidad ν_n, no necesariamente invariante, que construimos mediante la igualdad a la izquierda en (31). Para ello aplicamos la Definición 1.2:

$$H(\mathcal{P}^n, \nu_n) = -\sum_{X \in \mathcal{P}^n} \nu_n(X) \log \nu_n(X).$$

Pero por construcción de la medida ν_n ella está soportada en una cantidad finita de puntos $y_k : \ 1 \leq k \leq N$, y cada uno de estos puntos y_k pertenece a un átomo diferente $X_k \in \mathcal{P}^n$ de la partición $\mathcal{P}^n$. Entonces, $\delta_{y_k}(X_k) = 1$ y $\delta_{y_k}(X) = 0$ para toda otra pieza $X \in \mathcal{P}^n$ diferente de X_k. Deducimos que:

$$\nu_n(X_k) = \lambda_k \delta_{y_k}(X_k) = \lambda_k, \quad \forall \ 1 \leq k \leq N,$$

y por lo tanto

$$H(\mathcal{P}^n, \nu_n) = -\sum_{k=1}^{N} \nu_n(X_k) \log \nu_n(X_k) = -\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \log \lambda_k.$$

Hemos probado que

$$-\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \log \lambda_k = H(\mathcal{P}^n, \nu_n). \tag{34}$$

Restando miembro a miembro las igualdades (33) y (34), y juntándolas con la igualdad (30), deducimos:

$$\log L = \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \sum_{j=0}^{n-1} \psi(f^j(y_k)) \right) - \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k \log \lambda_k \right) = n \cdot \int \psi \, d\mu_n + H(\mathcal{P}^n, \nu_n),$$

y sustituyendo en la desigualdad a la derecha en (29) obtenemos:

$$m(M_n) \leq K \cdot \exp\Big(\frac{n\epsilon}{3} + \log L \Big) = K \cdot \exp \ n\Big(\frac{\epsilon}{3} + \int \psi \, d\mu_n + \frac{H(\mathcal{P}^n, \nu_n)}{n} \Big).$$

Ahora, afirmamos que

$$\operatorname{dist}(\mu_n, \mu) < \epsilon^* \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall \ n \geq 1. \tag{35}$$

Por un lado, hemos elegido $\epsilon^* \leq \epsilon/3$. Por otro lado, hemos elegido los puntos $y_k \in M_n$ para todo $k = 1, \dots, N$. Y por la igualdad (26) que define al conjunto M_n, tenemos

$$\operatorname{dist}(\sigma_n(y_k), \mu) < \epsilon^* \quad \forall\, 1 \leq k \leq N.$$

Del Lema 3.4 sabemos que cada bola en $\mathcal{M}$ es convexa con la métrica débil* definida por la igualdad (11). En particular la bola de centro μ y radio ϵ^* es convexa. Y debido a la igualdad a la derecha de (32), la medida de probabilidad μ_n es una combinación convexa finita de las medidas $\sigma_n(y_k)$. Deducimos que μ_n pertenece a la bola de centro μ y radio ϵ^* en el espacio de probabilidades. Por lo tanto, la desigualdad (35) está probada.

De la desigualdad (35) y aplicando la parte (iii) del Lema 3.7, deducimos que

$$m(M_n) \leq K \text{ exp } \quad n\Big(\frac{2 \cdot \epsilon}{3} + \int \psi \, d\mu_n + h_\mu(f)\Big) \;\; \forall\, n \geq n_0.$$

Además, de la igualdad (35) y de la definición de métrica débil* en $\mathcal{M}$ con $\phi_0 = \psi$, deducimos que

$$\int \psi \, d\mu_n < \int \psi \, d\mu + \frac{\epsilon}{3}.$$

Por lo tanto,

$$m(M_n) \leq K \text{ exp } \quad n\Big(\epsilon + \int \psi \, d\mu + h_\mu(f)\Big) \;\; \forall\, n \geq n_0. \tag{36}$$

Finalmente, por hipótesis $\mu \notin \mathcal{K}_r$. Luego, $\int \psi \, d\mu + h_\mu < -r$. Substituyendo esta última desigualdad en (36), concluimos (27), terminando la demostración del Lema 3.8. $\square$

3.5 Fin de la demostración del Teorema 1

Demostración. Debemos probar que cada medida tipo-SRB μ satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía.

Para cualquier $r > 0$ consideremos el conjunto $\mathcal{K}_r \subset \mathcal{M}$ definido por la igualdad (24). Como $\{\mathcal{K}_r\}_r$ es decreciente con r:

$$\mathcal{K}_0 = \bigcap_{r>0} \mathcal{K}_r$$

donde

$$\mathcal{K}_0 = \Big\{\mu \in \mathcal{M}_f : \quad \int \psi \, d\mu + h_\mu(f) \geq 0\Big\}, \qquad\qquad \psi := -\log|\text{det}Df|.$$

Como dijimos en la Introducción de esta Tesis, la desigualdad de Ruelle [15] aplicada a los mapas C^1-expansores adquiere la siguiente expresión:

$$h_\mu(f) \leq \int \log|\text{det}Df| \, d\mu = -\int \psi \, d\mu \quad \forall \, \mu \in \mathcal{M}_f. \tag{37}$$

Entonces, deducimos que el conjunto $\mathcal{K}_0$, que a priori podría ser vacío, está compuesto por todas las medidas invariantes μ tales que

$$\int \psi \, d\mu + h_\mu(f) = 0$$

o, en otras palabras, $\mathcal{K}_0$ es el conjunto de medidas invariantes μ que satisfacen la Fórmula de Pesin para la Entropía.

Entonces, para probar que cada medida tipo-SRB μ satisface la Fórmula de Pesin para la Entropía, debemos probar que si μ es tipo-SRB, entonces $\mu \in \mathcal{K}_0$. Equivalentemente, debemos probar que $\mu \in \mathcal{K}_r$ para todo $r > 0$.

Por absurdo, supongamos que existe $r > 0$ tal que la medida tipo-SRB μ no pertenece a $\mathcal{K}_r$. Por el Lema 3.8, existen $K > 0$, $n_0 \geq 1$ y $\epsilon^* > 0$ tales que

$$m(\{x \in M : \text{dist}(\sigma_{n,x}, \mu) < \epsilon^*\} \leq K \; e^{-nr/2} \quad \forall \; n \geq n_0, \tag{38}$$

donde m denota la medida de Lebesgue.

Por la Definición 2.7 de medida tipo-SRB, para todo $\epsilon^* > 0$ el conjunto

$$A^*_\epsilon(\mu) := \{x \in M : \quad \text{dist}(p\omega(x), \mu) < \epsilon^*\}$$

tiene medida de Lebesgue positiva,

$$m(A^*_\epsilon(\mu)) > 0.$$

Para cada $n \geq 1$, denotamos

$$M_n := \{x \in M : \quad \text{dist}(\sigma_{n,x}, \mu) < \epsilon^*\}.$$

Ahora, sea $x \in A^*_\epsilon(\mu)$, luego $\mathrm{dist}(p\omega(x), \mu) < \epsilon^*$. Por lo tanto existe alguna medida $\rho \in p\omega(x)$ tal que $\mathrm{dist}(\rho, \mu) < \epsilon^*$. Por la Definición 2.5 del p-omega límite, existe una subsucesión débil*-convergente a ρ de probabilidades empíricas $\sigma_{n_k,x}$. Y como el límite ρ está en la bola abierta de centro μ y radio ϵ^*, por la definición de límite existe $k_0 \geq 1$ tal que $\mathrm{dist}(\sigma_{n_k,x}, \mu) < \epsilon^*$ para todo $k \geq k_0$. Equivalentemente $x \in M_{n_k}$ para todo $k \geq k_0$ Luego, existen valores arbitrariamente grandes n_k del índice n tal que $x \in M_n$. Es decir, para todo $N \geq 1$ existe algún $n = n_k \geq N$ tal que $x \in M_n$. Por lo tanto para todo $N \geq 1$ $x \in \bigcup_{n \geq N} M_n$. Equivalentemente

$$x \in \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} M_n.$$

Hemos probado la afirmación de aquí arriba para cualquier punto x del conjunto $A^*_\epsilon(\mu)$. Por lo tanto hemos probado que

$$A^*_\epsilon(\mu) \subset \bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} M_n,$$

y como $m(A^*_\epsilon(\mu)) > 0$, deducimos que

$$m\Big(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} M_n\Big) > 0. \tag{39}$$

Pero la desigualdad (38) implica que $\sum_{n=1}^{\infty} m(M_n) < +\infty$. Entonces, aplicando el Lema de Borel-Cantelli [19], se sigue que $m\Big(\bigcap_{N \geq 1} \bigcup_{n \geq N} M_n\Big) = 0$, contradiciendo la desigualdad (39). Con esto terminamos de demostrar el Teorema 1. $\square$

Conclusiones

Las conclusiones de esta Tesis están escritas al final de la Introducción: son el enunciado del Teorema 1 y la sección titulada *"Relevancia del Teorema 1".*

Referencias

[1] Bowen, *R. Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lect. Notes in Math. Vol. 470, Springer-Verlag, Berlin, 1975.

[2] Bowen, R and Ruelle, D, *[*The ergodic theory of Axiom A flows], Invent. Math. 29 (1975), 181–202.

[3] Catsigeras, E. Teoría Ergódica de los Sistemas Dinámicos Discretos, Universidad de la República, Montevideo, 2015.

[4] Catsigeras, E; Cerminara, M; Enrich, H, *Pesin's Entropy Formula for C1 Diffeomor- phisms with Dominated Splitting* Erg. Th. & Dyn. Sys. 35 (2015), 737–761.

[5] Catsigeras, E; Enrich, H, *SRB-like measures for C^0 dynamics*, Bulletin. of the Polish Academy of Sciences - Mathematics, Vol. 59, N° 2, pág: 151 - 164, 2011.

[6] Catsigeras, E; Enrich, H *Equilibrium States and SRB-like measures of C1 Expanding Maps of the Circle*, Portugaliae Mathematica, Vol. 69 N° 3, pág. 193 - 212, 2012.

[7] Keller, *G Equilibrium Sates in Ergodic Theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York, 2010.

[8] F. Ledrappier and L.-S. Young, *The metric entropy of diffeomorphisms*, Part I, Ann. Math. 122 (1985), 509-539.

[9] Mañé, R., *Teoría Ergódica*, Projeto Euclides IMPA, Río de Janeiro, 1983.

[10] Ya. B. Pesin, *Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory*, Uspekhi Mat. Nauk, 32:4(196) (1977), 55–112; Russian Math. Surveys, 32:4 (1977), 55–114.

[11] Ya. B. Pesin, Ya. G. Sinai, *Gibbs measures for partially hyperbolic attractors*, Ergod. Th. and Dyn. Sys. 2, (1982), 417-438.

[12] C. Pugh., *The $C^{1+\alpha}$ hypothesis in Pesin theory.*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. 59 (1984), 143–161.

[13] Qiu, H., *Existence and uniqueness of SRB measure on C^1 generic hyperbolic attractors*, Commun. Math. Phys. 302 (2011), 345–357.

[14] D. Ruelle, *A measure associated with axiom A attractors*, Amer. Journ. of Math. 98, (1976), 619-654.

[15] Ruelle, D., *An inequality for the entropy of differentiable maps*, Bol. Soc. Bras. Mat. 9, 1978 pp. 83-87.

[16] Ya. G. Sinai, *Gibbs measure in ergodic theory*, Russ. Math. Surveys 27, (1972), 21-69.

[17] W. Sun and X. Tian, *Dominated Splitting and Pesin's Entropy Formula*, Discr. Cont. Dyn. Sys. 32, (2012), 1421-1434.

[18] Viana, M. Dynamics, *A probabilistic and geometric perspective*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians at Berlin. Doc. Math. Extra Vol. I, (1998), 395-416.

[19] Viana, M., Oliveira, K., *Foundations of Ergodic Theory* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2016.

[20] L.S. Young, *What are SRB measures, and which dynamical systems have them?*, Journ. Stat. Physics 108, (2002), 733-754.

[21] Walters, P, *An Introduction to Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982.