Universidad de la República
Facultad de Ciencias Sociales
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Notas Docentes

Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en Economía. Parte II

Elvio Accinelli

Nota Docente No. 11

Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en Economía. Parte II.

Elvio Accinelli *

1 Introducción

Esta segunda parte de las notas, corresponden al curso dictado por el autor durante los meses de julio y agosto del 2000 en la Universidad de Antioquia como continuación del dictado en el primer semestre de ese año en la referida Universidad.

El asunto central de este curso es el de le eficiencia paretiana de los equilibrios walrasianos y en general el concepto de asignación de recursos Pareto Optimal o Pareto Eficiente a la vez que servir de introducción natural a las llamadas economías con infinitos bienes.

En la primera parte discutiremos la existencia y propiedades de los óptimos de Pareto, cuya existencia será demostrada como consecuencia del lema de Zorn. Analizaremos también la posibilidad de definir precios soporte para asignaciones de recursos eficientes en el sentido de Pareto (a las que llamaremos indistintamente alocaciones Pareto optimales), es decir precios que hacen que toda cesta de bienes que sea preferible para un agente a la correspondiente en la asignación eficiente, sea al menos tan costosa como ésta. Nuestra herramienta matemática más importante será el teorema de Hahn- Banach en su versión geométrica, nuestro interés se centra básicamente en la existencia de hiperplanos separadores de conjuntos convexos disjuntos.

La segunda parte la dedicaremos al análisis de la función exceso de utilidad, la que es un instrumento de gran valor cuando pretendemos extender el análisis económico a economías en las que la función demanda no está definida, [Araujo, A. (1989)]. Esta función, que tiene propiedades análogas a la de la función exceso de demanda permite probar la existencia del equilibrio wlarasiano con gran generalidad sin abandonar la conocidas técnicas del cálculo diferencial aun cuando trabajamos en modelos de economías con infinitos bienes contingentes. Su desventaja está en que depende fuertemente de las funciones de utilidad y al utilizarla para probar la existencia del equilibrio walrasiano, debemos asegurar primeramente que el conjunto de los óptimos de Pareto es

*e-mail: elvio@fing.edu.uy Facultad de Ingeniería, IMERL. Facultad de Ciencias Sociales, Departamento de Economía. Montevideo Uruguay

no vacío y que se satisface el Primer Teorema del Bienestar Económico. En esta segunda parte utilizaremos herramientas provenientes de la Topología Diferencial, particularemente el teorema de Poincaré-Hopf, y el teorema de transversalidad. Finalmente a partir de la llamada Teorí de las Catástrofes avanzaremos en el estudio de las características de las llamadas economías singulares. La utilización de la función exceso de utilidad permite dar un enfoque unificado para economías con finitos como con infintos bienes, no obstante en el marco de estas notas no saldremos del estudio de las primeras.

2 Existencia del Optimo de Pareto y el lema de Zorn

Consideraremos economías con un número finito de agentes n y bienes l cada agente será representado por la letra $i = 1, 2, ...n$ y cada bien por la letra $j = 1, 2, ..., l$, como habitualmente con el símbolo $\succeq_i$ representaremos las preferencias del agente i. Todos los agentes, a menos que se explicite otra cosa, tendrán el conjunto R^l_+ como espacio de consumo. Las dotaciones iniciales de cada agente estarán representadas por w_i un elemento del espacio de consumo, por lo tanto un vector de R^l_+. De esta forma una economía quedará representada por $\mathcal{E} = \left\{R^l_+, \succeq_i, w_i, i = 1, 2, ..., n\right\}$.

Definición 1 *a) Una asignación de recursos o alocación es un vector de* R^{ln}_+ *la que se dirá* **Factible** *si* $\sum_{i=1}^n x_i \leq w$, *donde* $w = \sum_{i=1}^n w_i$.

b) Una asignación de recursos factible x es **Racional** *si $x_i \succeq_i w_i$ para todo i, es decir si para cada agente resulta ser al menos tan buena cuanto su dotación inicial.*

c) Diremos que una asignación de recursos factible x es **Pareto Optimal** *si no existe otra asignación factible y tal que $y_i \succeq x_i$ para todo i a la vez que estrictamente preferida para al menos un agente.*

El criterio de Pareto optimalidad es un criterio mínimo de eficiencia, supone la no posibilidad de repartir los recursos de una nueva forma sin perjudicar a alguien, si hacer esto fuera posible implicaría la posibilidad de hacer más feliz a la sociedad en su conjunto aumentando el bienestar de algunos (eventualmente todos) los integrantes de la sociedad sin perjudicar a ninguno. No obstante no es un criterio de justicia social, lejos de esto observe el lector que una sociedad que asigne todos sus recursos a uno de sus integrantes y cero a todos los demás es Pareto eficiente, no obstante parecería no ser muy *justa* en el sentido de la distribución social de la riqueza.

Nuestra afirmación siguiente dice que en economías como la que presentamos al comienzo el conjunto de los óptimos de Pareto es no vacío. Para demostrar esta afirmación nos valdremos del lema de Zorn al que dedicaremos la subsección siguiente. De todas formas [Halmos, R.P.] es una excelente referencia para entender el lema de Zorn sus implicancias y equivalencias así como su ubicación central aunque generalmente oculta en la matemática moderna.

2.1 Lema de Zorn

Una serie de axiomas equivalentes, aparentemente ingenuos y triviales juegan en la matemática moderna un papel central y generalmente oculto, uno de ellos es el lema de Zorn. Cada uno de ellos puede ser demostrado a partir de otro, no obstante alguno debemos aceptar con valor de axioma. En estas notas admitiremos como axioma el llamado **Axioma de Elección**. Este dice que un producto cartesiano formado por infinitos subconjuntos no vacíos es él mismo no vacío, es decir que es posible *elegir* un elemento en cada uno de los infinitos subconjuntos.

A partir de aceptar el axioma de elección, podemos demostrar aunque no lo haremos en estas notas el lema de Zorn.

Lema 2 (Lema de Zorn) *si toda cadena en un conjunto parcialmente ordenado X tiene una cota superior, entonces X tiene un elemento maximal*

Nota 3

- *Recordamos que una cadena C en un conjunto X parcialmente ordenado, es un subconjunto totalmente ordenado.*
- *Un conjunto X está* **Parcialmente Ordenado** *cuando existe un preorden ϕ (ver definición 2, vol I) que es antisimétrico, esto es si (x, y) e (y, x) pertenecen a ϕ, entonces $y = x$. En términos de preferencias: si cada vez que $x \in X$ es indiferente a $y \in X$ entonces $x = y$. Recordamos que una relación de preferencias es un preorden completo que define un orden en el espacio de clases de indiferencia (es decir una relación binaria completa reflexiva, antisimétrica y transitiva).*
- *Un elemento $x \in X$ es una cota superior (inferior) para $A \subset X$ si no existe $a \in A$ tal que a siga (anteceda) a x según el orden definido en X.*
- *Un elemento $x \in X$ es* **maximal (minimal)** *para X si no existe $y \in X$ sucesor (antecesor) de x en el orden de X*

Si bien nuestro interés se centra en la existencia del óptimo de Pareto que demostraremos a partir del lema de Zorn indiquemos el siguiente resultado de valor en Teoría Económica:

Diremos que una relación binaria S en X es una **extensión compatible** de una relación binaria R si considerados como subconjuntos de $X \times X$, R es subconjunto de S y la parte asimétrica de R es subconjunto de la parte asimétrica de S.

Teorema *Una relación binaria, irreflexiva y transitiva, tiene una extensión total, irreflexiva y transitiva compatible.*

- Decimos que una relación binaria ϕ es irreflexiva si $(x,x) \notin \phi$

El valor de esta afirmación desde el punto de vista de la economía está en que si recordamos la definición hecha en 2.3 del vol I, una relación de preferencias define un orden total en el espacio de las clases de indiferencia, si de esta relación eliminamos los elementos del tipo (x,x) obtendremos una una relación binaria irreflexiva, (es decir una relación de preferencias estricta $\succ$), podemos concluir en que aunque un agente sea capaz de ordenar solamente una parte de su espacio de bienes es posible extender el orden definido por las preferencias del agente a todo el conjunto de cestas posibles. Notemos que es un supuesto fuerte el que considera a cada agente capaz de ordenar todas sus posibles elecciones, este teorema permite debilitar el supuesto original, aunque introduciendo cierta arbitrariedad en el conjunto de cestas que el agente no es capaz de ordenar.

2.2 Existencia del Optimo de Pareto

El teorema de existencia que aquí vamos a probar para economías como las indicadas en la primera parte de estas notas, vale en casos más generales, particularmente para aquellas economías cuyos espacios de consumo son espacios de Riesz, con intervalos del tipo $[0,w]$ compactos en alguna topología de Hausdorff, la demostración de la existencia del óptimo de Pareto es para estos casos totalmente análoga que la que aquí desarrollaremos para un modelo más restringido.

El concepto de espacio cociente será necesario para la demostración del siguiente teorema. Recordamos que una relación de equivalencia particiona al conjunto en el que está definida en calses de equivalencia, (ver vol. I sección 2.3). Llamaremos **Espacio Cociente** al espacio conformado por dichas clases. Cualquier elemento de una clase puede ser considerado como representante de la misma, en el sentido de que todos los de su clase y solamente estos estarán relacionados con él a través de la realción de equivalencia considerada. En el caso del teorema de existencia del óptimo de Pareto, particionaremos el conjunto de asignaciónes factibles mendiante la relación de indifirencia.

Teorema 4 (Existencia del Optimo de Pareto) *Para toda economía de intercambio puro, existe una alocación Pareto optimal que es individualmente racional.*

Prueba: Sea A el conjunto de todas las alocaciones factibles, notemos como

$$\mathcal{H} = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in A : x_i \succeq_i w_i \; para \; cada \; i\}.$$

Consideremos el espacio de las clases de indiferencia $\mathcal{H}/\sim$ (o espacio cociente) quedando dos elementos x e y de $\mathcal{H}$ en la misma clase si $x_i \sim_i y_i$ (es decir si $x_i \succeq_i y_i$ y además $y_i \succeq_i x_i$) para cada i. Definiendo como $x \geq y$ dos elementos de $\mathcal{H}/\sim$ cada vez que $x_i \succeq_i y_i$ para cada i, tendremos un orden parcial en dicho espacio. de clases. Es claro que el conjunto de los Pareto óptimos coincide con la clase de los maximales del espacio cociente. Si probamos que cada cadena en este espacio tiene una cota superior en H, usando el Lema de Zorn podemos la existencia de un maximal en el espacio cociente, es decir que el conjunto de cotas superiores en H es no vacío.

Para probar la existencia de una cota superior para cada cadena C en $\mathcal{H}/\sim$ basta con considerar a C como una red, como H es compacto, existe un punto límite c para una subsucesión de elementos en la red, sin dificultad se ve que este elemento es una cota superior para C .[]

Observemos que la misma prueba vale en cualquier espacio topológico de Hausdorff, en el que se pueda afirmar la existencia de subredes convergentes en toda red del espacio, particularmente vale en espacios de Riesz con intervalos compactos y topologías de Hausdorff. lo que nos permite extender el teorema de existencia a un conjunto de modelos de economías más amplio que el aquí considerado.

3 El Optimo de Pareto y el Bienestar Económico

Esta sección está destinada a los llamados teoremas del bienestar económico, dichos teoremas relacionan el concepto de equilibrio walrasiano y el concepto de optimalidad en el sentido de Pareto.

Comenzaremos con un teorema que afirma que toda asignación de recursos en equilibrio walrasiano, satisface las propiedades de eficiencia paretiana. Este es conocido como el Primer Teorema del Bienestar. Su única exigencia es la de que cada agente tenga preferencias continuas y localmente no saciables, este último supuesto es a los efectos de que se satisfaga la ley de Walras necesaria para la prueba del teorema.

Teorema 5 (Primer Teorema del Bienestar) *Para economías con agentes cuyas preferencias son continuas y localmente no saciables, toda asignación de recursos que forma parte de un equilibrio walrasianos es un óptimo de Pareto.*

Prueba: Sea x una asignación de recursos de un equilibrio walrasiano. supongamos que no es óptimo de Pareto, es decir que existe otra alocación factible y tal que $y_i \succeq_i x_i$ para todo i y además con preferencia estricta para al menos un agente, sea este representado por $h \in \{1, 2, ..., n\}$. Siendo las preferencias localmente no saciables, se verifica que $p \sum_{i=1}^{n} y_i = p \sum_{i=1}^{n} x_i = p \sum_{i=1}^{n} w_i$. donde w_i representa las dotaciones iniciales del agente i. Dado que x_h verifica el programa de optimización del agente h, siendo $y_h \succ x_h$ debe verificarse que $py_h > pw_h$. Luego por ser p un elemento del interior de R_+^l debe existir al menos un agente $k \in \{1, 2, ..., n\}$ para el que a precios p se verifique la estricta desigualdad, $py_k < pw_k$. Por lo tanto y_k pertenece al interior de la región presupuestaria del agente k, por ser las preferencias localmente no saciables, existe z_k presupuestariamente factible para el agente k, tal que z_k es estrictamente preferible a y_k y por lo tanto a x_k, esto junto al hecho de ser z_k presupuestariamente factible, contradice el hecho de ser x_k la solución del programa optimizador del agente k . []

La siguiente pregunta aparece naturalmente, *será posible construir a partir de alguna redistribución de los recursos, un equilibrio walrasiano cuya asignación de recursos sea coincidente con cualquier alocación Pareto eficiente?* Es decir dada una asignación y Pareto eficiente, será posible encontrar un sistema de precios p tal que el par (y, p) sea un equilibrio walrasiano? O bien más concretamente existe un recíproco para el teorema que acabamos de demostrar? El respuesta es que existe pero *sólo parcialmente.* Requeriremos para la demostración de este recíproco, conocido como Segundo Teorema del Bienestar, hipótesis más restrictivas que las contenidas en el anterior teorema, particularmente precisaremos de la convexidad de las preferencias, y aun así veremos que no es tan fácil extenderlo a tipos más generales de economías.

El contenido en el fondo de este segundo teorema puede interpretarse por la pregunta de si es posible para un planificador central hacer que la sociedad se ubique en uno cualquiera de los óptimos de Pareto, de manera tal que le permita al planificador elegir por ejemplo equilibrios eficientes y con algún criterio adicional de justicia, a cambio de una redistribución de los recursos iniciales. Ciertamente esta posibilidad es solamente teórica, pues requeriría del planificador el conocimiento de las preferencias de todos y cada uno de las agentes económicos. Veremos el teorema que justifica esta posibilidad teórica, pero también veremos que existen limitaciones en los modelos las que no permiten que esto sea una verdad universal..

Para resolver esta importante interrogante de la Teoría Económica, necesitaremos de un importante instrumental matemático que desarrolaremos en la siguiente subsección.

3.1 Segundo Teorema del Bienestar y el Teorema de Hahn-Banach

El teorema de Hahn-Banach del que haremos aquí importante utilización no lo demostraremos por entender que no es este el lugar adecuado, una referencia interesante es [Schaffer, H.H] cuya lectura recomendamos fuertemente pero requiere de cierta preparación matemática. No obstante daremos alguna idea sobre la prueba y demostraremos algunos corolarios del referido teorema que son de gran utilidad para nuestros objetivos. Discutiremos también las hipótesis del teorema y su cumplimiento o incumplimiento en economía.

Nuestro interés en el teorema de Hahn-Banach, radica en el hecho de que es un teorema de separación, afirma como veremos que dados dos conjuntos convexos A con interior no vacío y $B \neq \emptyset$ que no intersecta al interior de A, pueden *separarse* por un funcional lineal de manera tal que en los elementos de A el funcional tome por ejemplo, valores positivos y en los de B negativos. Como todo funcional, éste puede ser interpretado como un precio (ver sección 8.1 del vol. I), y en este caso tal que hace que cestas de bienes preferibles a las respectivas de un cierto óptimo de Pareto, las que estarán, por ser las preferencias convexas ubicadas en un conjunto convexo como el A, sean mas costosas que el óptimo así, si podemos redistribuir los recursos de la sociedad de forma tal que el óptimo en cuestión resulte presupuestariamente factible para cada uno de los agentes, el funcional cuya existencia el teorema de Hahn-Banach asegura y el óptimo de Pareto que sabemos existe por el Lema de Zorn conforman un equilibrio walrasiano con transferencias.

Daremos a continuación la versión geométrica del teorema de Hahn-Banach la que muchas veces es llamada como Teorema de Mazur.

Teorema 6 (Teorema de Hahn-Banach) *Sean E un espacio vectorial topológico, M una variedad afín en E y sea A un conjunto convexo no vacío, abierto de E que no intersecta a M. Entonces existe un hiperplano en E que contiene a M y no intersecta a A.*

Definición 7 *Siendo E un espacio vectorial definimos como:*

- **Variedad Afín** *es un subconjunto de E que es una traslación de un subespacio M, es decir es un subconjunto F cuya forma es $\{x_0 + M\}$ para algún $x_0 \in E$.*

- **Hiperplano** *Es una variedad afín cuya codimensión es 1. Entendiendo como codimensión la cantidad de elementos del espacio E necesarios para completar la dimensión del espacio. Equivalentemente, un subconjunto $H \in E$ es un hiperplano si y solamente si existe un funcional f y un real α tal que:*

$$H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$$

- *Un hiperplano H es llamado* **Hiperplano Soporte** *de un conjunto A si $A \cap H \neq \emptyset$ y si A está contenido en uno de los subespacios cerrados*

$$H_1 = \{x \in E : f(x) \geq \alpha\}\,,\ o\ H_2 = \{x \in E : f(x) \leq \alpha\}$$

- *Diremos que los conjuntos A y B de E están separados por H si A está incluído en H_1 y B en H_2.*

Ejemplo 8 *Sea $A = \{x \in R_+^2 :\ x_2 x_1 \geq 1\}$ el conjunto*

$$H = \{x \in R_+^2 :\ x_2 + 9x_1 = 6\}$$

es un hiperplano soporte para A. en efecto:

- $A \cap H = (\frac{1}{3}, 3)$.
- *El funcional lineal f queda representado por el vector $(1, 9)$ y $\alpha = 6$. (Recuérdese que en R^n todo funcional lineal es representado por un vector del mismo espacio).*

Obsérvese que si (x_1^*, x_2^*) es tal que $x_2^* x_1^* > 1$, entonces $x_1^* + x_2^* > 6$, luego $A \subset H_1$[]

El siguiente teorema de separación es consecuencia directa del teorema de Hahn-Banach.

Teorema 9 (de Separación) *Sea A un subconjunto convexo en el espacio vectorial topológico E, con interior no vacío. Sea B un conjunto convexo no vacío en E sin puntos comunes con el interior de A. Entonces existe un hiperplano H que separa A de B, si además A y B son abiertos entonces H los separa estrictamente.*

Prueba: Siendo el interior de A al que denotaremos como A^0 convexo, también lo será $A^0 - B$; $\{0\}$ es un subespacio disjunto del conjunto convexo $A^0 - B$. Luego por el teorema de Hahn-Banach, existe $H_0 = \{x \in E : f(x) = 0\}$ disjunto con $A^0 - B$. Cambiando el signo si fuera necesario, se concluye con que $f(A^0 - B) > 0$. Sea $\alpha = \inf f(A^0)$, $H = \{x \in E : f(x) = \alpha\}$ separa A^0 y B pues $A \subseteq H_1$ mientras que $B \subseteq H_2$ **.**[]

Si bien no de nuestra atención inmediata el siguiente corolario es de gran utilidad en Teoría Económica y por ese motivo lo enunciamos aquí, por otra parte el lector puede demostrarlo como una aplicación directa del teorema de separación.

Corolario 10 *En un espacio vectorial topológico localmente convexo, la calusura de un conjunto convexo es la intersección de todos los semiespacios que lo contienen.*

Nota 11 *Un espacio vectorial topológico es* **localmente convexo** *si todo entorno del cero contiene un entorno convexo de cero. Obsérvese que el hecho de contener cada entorno del cero un entorno convexo, en un espacio vectorial topológico hace que cada entorno de cada punto del espacio goce de la misma propiedad.*

Recordamos que la calusura de un conjunto es la unión de los puntos del interior y de la frontera del cojunto.

La importancia de este corolario radica en que muestra que para un espacio vectorial topológico con topologías cuyos espacios duales sean los mismos, los conjuntos convexos cerrados y acotados con interior no vacío serán los mismos. Luego el conjunto de las cestas individualmente racionales, bajo el supuesto de que su interior es no vacío por ejemplo, no varía si se cambia la topología del espacio, siempre que se mantengan los mismos funcionales lineales y continuos y naturalmente bajo el supuesto de preferencias convexas.

Observemos que si bien en espacios vectoriales con como R^l con una topología de Hausdorff, es cierto que conjuntos convexos como el cono positivo R^l_+, son de interior no vacío no es cierto que esto se mantenga en otros espacios, (caso los llamados espacos L^p para $1 \leq p \leq \infty$), esta carencia de interior no permite aplicar el teorema de Hahn-Banach para definir precios soporte.

Consideraremos ahora el Segundo Teorema del Bienestar.

Teorema 12 (Segundo Teorema del Bienestar) *Para economías con agentes cuyas preferencias son continuas, estrictamente crecientes y convexas con dotaciones iniciales $w_i \in R^l_+ - \{0\}$, se cumple que si $\bar{x}$ es un óptimo de Pareto entonces existe p estrictamente positivo, tal que el par $(\bar{x}, p)$ es bajo una determinada redistribución de las dotaciones iniciales un equilibrio walrasiano.*

Obsérvese que en el primer teorema del bienestar solamente requerimos preferencias continuas y localmente no saciables, aquí pedimos que además sean estrictamente crecientes y convexas. El supuesto de convexidad es inevitable, no obstante el supuesto de ser crecientes estrictamente puede cambiarse por el supuesto más débil de existir una cesta de bienes estrictamente deseable.

Prueba: Sean los conjuntos convexos:

$$A = \left\{ z \in R^l_+,\ z = \sum_{i=1}^{n} z_i,\ z_i \succeq_i \bar{x}_i \forall i;\ y\ z_k \succ_k \bar{x}_k\ para\, al\ menos\ un\ k \in \{1, 2, ...n\} \right\}$$

$$B = \left\{ x \in R^l_+,\ x = \sum_{i=1}^{n} w_i \right\}$$

Como puede comprobarse ambos conjuntos son convexos y disjuntos, el teorema de separación asegura la existencia de un hiperplano soporte para A, es decir que existe un funcional f tal que $f(z) \geq f(x)$ para todo $z \in A$ y para todo $x \in B$.

Recordamos que en R^l_+ todo funcional puede ser representado por un elemento p del propio espacio tal que su producto interno $pz = f(z)$ sección 8.1, vol 1. Por lo tanto se tiene que $pz \geq px$ para todo $z \in A$ y para todo $x \in B$.

Si conseguimos probar que el funcional es estrictamente positivo, en el sentido de que $f(y) > 0$ para todo $y \neq 0, \in R^l_+$ habremos probado que p su representante, puede ser interpretado como un precio. Recurriremos para probar que $p \gg 0$ a la hipótesis de preferencias estrictamente crecientes. Considere $z' = \sum_{i=1}^{n} \bar{x'_i}$ donde $\bar{x'_i} = \bar{x}_i$ para todo $i \neq k$ y $\bar{x'_k} = \bar{x}_k + e_j$ donde $e_j \in R^l_+$ con ceros en todas sus coordenadas distinta de la j-ésima, a la cual le asignamos el valor 1. Por la estricta monotonía de las preferencias se cumple que $z' \in A$ y $\bar{x} \in B$, por lo tanto $pz' \geq p\bar{x},'$ luego $p_j > 0$. Como j es arbitrario esto vale para toda coordenada de p.

Podemos afirmar además que el vector p es un soporte para $\bar{x}$, es decir cada vez que para algún i se verifique que: exista una cesta de bienes x'_i tal que $x'_i \succeq_i \bar{x}_i$ entonces $px'_i \geq px_i$. Efectivamente, por las propiedades de p se verifica que $p\left(x'_i + \sum_{h \neq i} \bar{x}_i\right) \geq p\left(\bar{x}_i + \sum_{h \neq i} \bar{x}_i\right)$. Luego $px'_i \geq p\bar{x}_i$.

Probamos entonces que p es un sistema de precios soporte para $\bar{x}$, debemos probar ahora que efectivamente bajo una determinada redistribución del ingreso (dotaciones iniciales), el par $(\bar{x}, p)$ es un equilibrio walrasiano.

Consideremos dotaciones iniciales $\bar{w}_i$ tales que aseguren para cada agente, niveles de riqueza $p\bar{w}_i = p\bar{x}_i$, las que pueden lograrse con transferencia de riqueza entre los agentes de la economía. De esta forma para la economía $\mathcal{E} = \{\succeq_i, \bar{w}_i, i = 1, 2, ..., n\}$, se tiene que si $x_i \succ_i \bar{x}_i$ entonces $px_i \geq p\bar{w}_i$. Para que el par $(\bar{x}_i, p)$ sea un equilibrio walrasiano hace falta probar la estricta desigualdad. Comencemos para esto observando el hecho de que por ser p un vector con coordenadas estrictamente positivas y $\bar{x}_i$ no nulo, (esto último queda asegurado desde que consideremos que cada agente tiene dotaciones iniciales no nulas) existe una cesta de bienes x''_i para cada agente, tal que $px''_i < p\bar{x'_i} = p\bar{w}_i$. Supongamos ahora que $px_i = pw_i$ y consideremos la combinación convexa $y_i = \alpha x_i + (1-\alpha)x''_i$, a partir de la continuidad de las preferencias podemos concluir que si α es próximo a 1, entonces $y_i \succ_i \bar{x}_i$. Por otra parte se verifica que $py_i \leq p\bar{w}_i$ con lo cual se niega la optimalidad de $\bar{x}_i$, pues y_i le gusta a i más que $\bar{x}_i$, y le cuesta menos. .[]

La existencia de espacios para los que existen conjuntos convexos con interior vacío invalidan la aplicación del teorema de Hahn-Banach para encontrar precios soportes. En estos casos se hace necesario la introducción de nuevos supuestos en las preferencias de los agentes. El concepto de *properness* introducido en [Mas-Colell, A. 1986] ha sido de gran utilidad en la Teoría Económica.

3.2 Optimalidad de Pareto y las Condiciones de Primer Orden.

En esta sección analizaremos la relación entre el concepto de Pareto optimalidad y la maximización de una cierta función de bienestar social. Veremos que existe una relación estrecha entre cada óptimo de Pareto y la ponderación o peso social de cada agente económico, de forma tal que según sea la *importancia social* asignada a los distintos agentes serán los posibles óptimos de

Pareto correspondientes a esa sociedad. Reciprocamente a cada asignación de recursos que sea un Optimo de Pareto factible, corresponde una determinada ponderación social del conjunto de agentes.

Nota 13 *Comenzaremos señalando que para economías con n agentes cuyas preferencias son estrictamente monótonas (definición 53, vol 1.), y están representadas por utilidades convexas, dos veces continuamente diferenciables, el problema de identificar los óptimos de Pareto puede reducirse al de la elección de asignaciones de recursos $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, donde cada $x_i \in R^l_+$, que resuelvan el siguiente problema:*

$$\begin{array}{rll} Max & u_1(x_{11}, ..., x_{1l}) & . \\ s.a: 1) & u_i(x_{i1}, ..., x_{il}) \geq \bar{u_i} & i = 2, ..., n. \\ 2) & \sum_{i=1}^n x_{ij} \leq \sum_{i=1}^n w_{ij} & j = 1, ...l \end{array} \tag{1}$$

Al modificar los niveles mínimos de utilidad $\bar{u_i}$ requeridos obtenemos todos los posibles óptimos de la economía. Esta solución hace fuertemente uso de que preferencias estricatmente monótonas se representan por utilidades estricatmente crecientes, lo que supone que cada derivada parcial es estrictamente positiva, esto es que el gradiente

$$\bigtriangledown u_i = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_1}, \frac{\partial u_i}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u_i}{\partial x_l} \right) \gg 0, \ \forall i.$$

Las condiciones de primer orden (Kuhn-Tucker) para este problema son para todo i, j :

$$\lambda_i \frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}} - \gamma_j = \begin{cases} \leq 0 \\ = 0, \ si \ x_{ij}(\lambda) > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Nota 14 *La llamada condición de Inada sobre las utilidades (derivada infinita en la frontera de R^l_+, así como la condición (neoclásica, página 39, vol1), todo punto en el interior es preferible a cualquier punto en la frontera, son suficientes cada una de por sí, para asegurar la igualdad a cero en la ecuación anterior.*

Considere ahora la siguiente función de bienestar social: $W_\lambda : R^{ln}_+ \to R$

$$W_\lambda(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i(x_i). \tag{3}$$

Donde u_i son las funciones de utilidad de cada agente, mientras que

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \Delta_\epsilon = \left\{ \lambda \in R^n_{++} : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Cada λ_i representa el peso del agente i en la economía.

Puede comprobarse que si $x^* \in R_+^{nl}$ resuelve el problema de maximización de $W_\lambda(x)$ restringido a ser x una asignación de recursos factible, es decir tal que $x \in \mathcal{F} = \left\{x \in R_+^{nl} : \sum_{i=1}^n x_i \leq \sum_{i=1}^n w_i\right\}$ entonces x^* es un óptimo de Pareto. Para verificarlo basta ver que las condiciones de primer orden de este problema son las mismas que las usadas anteriormente para definir el concepto de óptimo paretiano. Recíprocamente puede verse que se una asignación de recursos factible x^* es óptimo de Pareto, entonces existe $\lambda' \in \Delta$, donde

$$\Delta = \left\{\lambda \in R_+^n : \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\right\},$$

tal que para λ', x^* maximiza la función $W_{\lambda'}(x)$ restringido a las asignaciones factibles. Obsérvese que si queremos considerar todos los óptimos de Pareto posibles, no podemos evitar el caso de algún λ_i nulo. El caso en que $\lambda_j = 0$ el agente j quedaría fuera de la economía, como nuestro interés se centrará en aquellas asignaciones de recursos que permitan la participación de todos los agentes de la economía nos restringiremos a elegir solamente entre aquellos óptimos de Pareto que suponen $\lambda \in \Delta_\epsilon$, donde

$$\Delta_\epsilon = \{\lambda \in \Delta : \lambda_i \geq \epsilon > 0 \; \forall i\}.$$

Esto no supone pérdida de generalidad debido a que suponemos que cada agente tiene dotaciones iniciales en $R_+^l - \{0\}$ y sus utilidades son monótonas crecientes, por lo tanto en el momento de decidirse por una cesta de bienes no elegirán la cesta nula la cual representa una utilidad menor que la representada por sus dotaciones iniciales.

A partir del Primer Teorema del Bienestar sabemos que todo equilibrio walrasiano es óptimo de Pareto. Nuestro siguiente paso será entonces elegir dentro del conjunto de óptimos de Pareto aquellos x^*, que puedan ser soportados por un sistema de precios p tales que para todo agente se cumple que $px_i^* = pw_i, \; \forall i = 1, 2, ..., n$. Dada la correspondencia biunívoca existente entre óptimos de Pareto y aquellos $\lambda \in \Delta_\epsilon$ haremos la elección de nuestros óptimos indirectamente, es decir elegiremos valores adecuados $\bar{\lambda} \in \Delta_\epsilon$, de forma tal que aquellas asignaciones de recursos que maximicen $W_{\bar{\lambda}}(x)$ restringida a la región factible $\mathcal{F}$, sean los que tengan la propiedad exigida sobre los precios soporte. Para esto definiremos, en la subsección siguiente la llamada función de exceso de utilidad.

4 Función Exceso de Utilidad y Existencia de Equilibrio Walrasiano

El método que daremos a continuación para encontrar equilibrios walrasianos presenta ventajas y desventajas sobre el método definido en el volumen 1 que utiliza la función exceso de demanda.

La ventaja más clara es cuando no es posible definir la función exceso de demanda, esto sucede generalmente cuando trabajamos con economías cuyos espacios de bienes están modelados en espacios de dimensión infinita. Por otra parte presenta ventajas cuando el número de agentes es apreciablemente menor que el número de bienes, obviamente en el caso de economíias con infinitos bienes y un número finito de consumidores, en este caso la utilización de este método nos permite trabajar con un conjunto de finito de ecuaciones a pesar de la infinitud del problema de la asignación óptima de bienes subyacente. Sus desventajas radican en su dependencia fuerte de las funciones de utilidad, lo que puede depender la resolución de problemas concretos por la complejidad de las cuentas a realizar, y además su posible utilización depende fuertemente de la existencia de óptimo de Pareto y de la satisfacción del Primer Teorema del Bienestar.

El origen de la llamada función exceso de utilidad como instrumento para obtener equilibrios walrasianos se remonta a [Karatzas, I; Lakner, P; Lebocky, J.; Shreve, S.] aunque es Negishi quien presenta el método de manera natural en la Teoría Económica ver [Negishi, T.], la mayor difusión es debida a los trabajos de Mas-Colell. particularmente [Mas-Colell, A.], también puede verse un ejemplo de su utilización para extender a economías infinitas las técnicas del cálculo diferencial en [Accinelli, E.(99)].

Definición 15 *Sea* $e_i : \Delta_\epsilon \to R, i = 1, 2, ..., n$ *la función*

$$e_i(\lambda) = \sum_{j=1}^{l} \frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}} \left(x_{ij}(\lambda) - w_{ij} \right). \tag{4}$$

donde w_{ij} *representa la dotación inicial del agente* i *en el bien* j, *y* $x_i(\lambda)$ *es la cesta proveniente de la asignación de recursos* $x(\lambda)$ *que maximiza* $W_\lambda(x)$ *en* $\mathcal{F}$, *con* $i = 1, 2, ..., n$ *y* $j = 1, 2, ..., l$. *Llamaremos* **Función Exceso de Utilidad** *a la función* $e : \Delta_\epsilon \to R^n$ *que define al vector de* $R^n : e(\lambda) = (e_1(\lambda), e_2(\lambda), ..., e_n(\lambda))$.

Bajo las hipótesis consideradas en este trabajo que hacen que las condiciones de primer orden que definen al óptimo de Pareto se cumplan con igualdad, (ver nota en subsección 3.2) es posible sustituir $\frac{\partial u_i(x_i(\lambda))}{\partial x_{ij}}$ por el correspondiente multiplicador de Lagrange $\gamma_j(\lambda)$ dividido por el peso social λ_i del i-ésimo agente, ver ecuación (2.) De esta manera sustituyendo en la ecuación 4, obtenemos:

$$e_i(\lambda) = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{j=1}^{l} \gamma_j(\lambda) \left(x_{ij}(\lambda) - w_{ij} \right). \tag{5}$$

Definición 16 *Consideremos el conjunto de los que llamaremos* **Pesos Sociales de Equilibrio**

$$\mathcal{E}q = \{\lambda \in \Delta_\epsilon : e(\lambda) = 0\}$$

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

Teorema 17 *Para economías en que las condiciones de primer orden verificadas por los óptimos de Pareto 2 se satisfacen con igualdad, el par* $(\gamma(\bar{\lambda}), x^*(\bar{\lambda}))$ *conforma, para todo* $\bar{\lambda} \in \mathcal{E}q$ *un equilibrio walrasiano y recíprocamente, para todo par* (p, x) *que sea un equilibrio walrasiano existe* $\lambda \in \mathcal{E}$ *tal que* x *maximiza* W_λ *restringido a las asignaciones factibles, y* $\gamma(\lambda) = p$*. Siendo* $\gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), ..., \gamma_l(\lambda))$ *donde* $\gamma_j(\lambda)$ *son los correspondientes multiplicadores de Lagrange de las ecuaciones 2.*

Prueba: A cargo del lector.

Nuestro siguiente paso es demostrar que el conjunto $\mathcal{E}q$ es no vacío. Estudiaremos en la subsección siguiente algunas propiedades de la función exceso de utilidad en base a las cuales podremos demostrar que $\mathcal{E}q \neq \emptyset$.

4.1 El Teorema de la Función Implícita y la Función Exceso de Utilidad

Comenzaremos esta sección con una formulación clásica del teorema de la funci'on implícita, por su importancia en el contexto de estas notas y en contextos más generales daremos más adelante otra formulación dependiente del concepto de transversalidad. El Teorema de la Función Implícita, tiene en economía un importante papel, precisamente es a partir de él que podemos concluir en la existencia de relaciones funcionales entre diferentes tipos de variables económicas y obtener condiciones que posibilitan explicar la economía en su conjunto a partir de algunas de sus variables.. En esta sección aplicaremos el teorema al sistema de ecuaciones de primer orden definido para la función de bienestar social 3, lo que nos permitirá mostrar que la relación que a cada λ asigna la distribución de bienes Pareto optimal $x = x(\lambda)$ es continua, derivable y localmente única. En esta sección supondremos que las utilidades son funciones conderivadas segundas continuas en todas sus variables..

Consideremos un conjunto de N ecuaciones dependientes de N variables *endógenas* $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ y M parámetros, $q = (q_1, q_2, ..., q_M)$:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, ..., x_N, q_1, q_2, ..., q_M) &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad & \vdots \\ f_N(x_1, x_2, ..., x_N, q_1, q_2, ..., q_M) &= 0 \end{aligned} \tag{6}$$

El dominio de las variables endógenas es $A \subseteq R^N$ y el dominio de parámetros es $B \subseteq R^M$, consideraremos A y B conjuntos abiertos. Sean $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_N})$ y $\bar{q} = (\bar{q_1}, \bar{q_2}, ..., \bar{q_M})$ tales que $f_i(\bar{x}, \bar{q}) = 0$ para todo i. Estamos interesados en encontrar una función $\eta : R^M \to R^N$, definida localmente, alrededor de $\bar{q}$, es decir en un entorno $U_{\bar{q}}$ de $\bar{q}$ tal que tome valores en un entorno $V_{\bar{x}}$ de $\bar{x}$. y tal que $\eta(\bar{q}) = \bar{x}$.

Definición 18 *Supongamos que* $\bar{x} = (\bar{x_1}, \bar{x_2}, ..., \bar{x_N}) \in A$ *y* $\bar{q} = (\bar{q_1}, \bar{q_2}, ..., \bar{q_M}) \in B$ *resuelven el sistema de ecuaciones (6). Decimos que existe una* **solución local** *de (6) en* $(\bar{x}, \bar{q})$ *si existen entornos* $A' \subseteq A$ *y* $B' \subseteq B$ *de* $\bar{x}$ *y* $\bar{q}$*, respectivamente y* N *funciones unívocamente, implícitamente determinadas de* $B' \to A$ *tales que*

$$f_i(\eta_1(q), \eta_2(q), ..., \eta_N(q), q) = 0 \quad \forall q B' \text{ y } \forall i.$$

con

$$\eta_i(\bar{q}) = \bar{x}_i, \quad \forall i.$$

Como se muestra a continuación el teorema de la función implícita da una condición suficiente para la existencia de relaciones funcionales *implícitamente determinadas* entre las diferentes variables.

Teorema 19 (Teorema de la Función Implícita I) *Supongamos que toda función* $f_i(.)$ *es continuamente diferenciable con respecto a las* $N + M$ *variables y sea* $(\bar{x}, \bar{q})$ *una solución del sistema (6). Si el Jacobiano del sistema (6) con respecto a las variables endógenas, evaluado en* $(\bar{x}, \bar{q})$ *es no singular esto es, si :*

$$det J_x f(\bar{x}, \bar{q}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_N} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial f_N(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_N(\bar{x},\bar{q})}{\partial x_N} \end{vmatrix} \neq 0,$$

entonces el sistema puede ser localmente resuelto en $(\bar{x}, \bar{q})$ *por un conjunto de funciones implícitas* $\eta_i : B' \to A'$, $i = 1, 2, ..., N$ *continuamente diferenciables. Más aún la matriz de derivadas de* η *evaluada en* $\bar{q}$ *queda definida por:*

$$D_q \eta(\bar{q}) = -[D_x f(\bar{x}, \bar{q})]^{-1} D_q f(\bar{x}, \bar{q}).$$

Prueba: La demostración la daremos más adelante y la presentaremos como corolario del teorema de la función inversa.

Definición 20 *Dados los conjuntos abiertos* $A \subseteq R^N$ *y* $B \subseteq R^M$ *el sistema de ecuaciones continuamente diferenciables,* $f(\cdot, \hat{q}) = 0$ *definido en* A *es* **regular** *en* $\hat{q} \in B$ *si para toda solución* $\bar{x}$ *tal que* $f(\bar{x}, \hat{q}) = 0$ *implica que* $|D_x f(\bar{x}, \bar{q})| \neq 0$.

Nuestro interés se centra ahora en analizar la relación de dependencia funcional que se establece a través del sistema (2) que representa a las condiciones de primer orden. Bajo condiciones que aseguren que cada agente maximiza en el interior de R^l_{++} (condiciones de Inada, o condiciones que aseguren que el agente prefiere cualquier punto en el interior a un punto en la frontera) la igualdad a cero se establece en (2) . Para completar las condiciones de existencia de la función implícita la estricta concavidad de las funciones de utilidad es suficiente, no obstante como veremos hay condiciones más generales que nos dejan en las condiciones del teorema. Consideremos el lagrangiano del programa de optimización definido por la maximización de la función de dienestar social (3) restringido a la región $\mathcal{F}$. Este puede escribirse como:

$$\Phi(x(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i(x_i(\lambda) + \gamma \sum_{i=1}^{n}(x_i(\lambda, t) - w_i(t)). \tag{7}$$

Escribamos las ecuaciones de primer orden como:

$$\Phi_x(x(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = 0 \tag{8}$$

$$\Phi_\gamma(x(\lambda), \gamma(\lambda), \lambda) = 0 \tag{9}$$

Aquí Φ_x representa una matriz cuya i-éima fila está formada por el gradiente de la función $u_i(x_i)$, de esta manera Φ_x es una matriz cuyas entradas son: $a_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij}}$. Analogamente Φ_γ. Para poder aplicar el i teorema de la función implícita es necesario que la matriz

$$H = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{x\gamma} \\ \Phi_{\gamma x} & 0 \end{bmatrix}$$

sea invertible. La matriz H posee esta propiedad por ejemplo en el caso en que: Φ_{xx} es definida negativa en $\{z \in R^l : \Phi_{\gamma x} z = 0\}$ ver [Mas-Colell, A. Whinston, M.]. La estricta concavidad de las funciones de utilidad asegura esto, no obstante la condición puede cumplirse en casos en que las utilidades i sean cuasi-cóncavas sin ser cóncavas. Recordamos que una función de utilidad cuasi-cóncava representa una preferencia convexa y reciprocamente, ver teorema 50, vol I, y ésta es la condición más general que le pedimos a una relación de preferencia en el marco de estas notas. Por otra parte la estricta cuasi-concavidad de las funciones implicadas en un programa de optimización asegura que se cumplan las condiciones suficientes de maximización, (condición de Arrow-Enthoven) [Takayama, A.]. Por lo que estaríamos en condiciones de obtener la relación de dependencia funcional entre las variables que representan a las cestas de bienes Pareto optimales y los pesos sociales buscada, en condiciones bastante generales, dentro de las habituales en la teoría del Equilibrio General cunad se utilizan herramientas provenientes del Análisis Diferencial.

Como H invertible, el teorema de la función implícita asegura la existencia de funciones diferenciables $x_i : A' \to R^l$ y $\gamma_j : A' \to R^l$ donde las derivadas de cada x_i y γ_j con respecto a λ_j $i = \{1, 2, ..., n\},\ j = \{1, 2, ..., l\}$ se pueden escribir a partir del sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{x\gamma} \\ \Phi_{\gamma x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial \gamma(\lambda)}{\partial \lambda_k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Phi_{x\lambda_k} \\ 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Siendo H una matriz invertible, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x(\lambda)}{\partial \lambda_k} \\ \frac{\partial \gamma(\lambda)}{\partial \lambda_k} \end{bmatrix} = H^{-1} \begin{bmatrix} \Phi_{x\lambda_k} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Se representa como Φ_{xx} a la matriz de derivadas segundas de Φ con respecto a las variables x_{ij}.

$$\Phi_{xx} = \begin{bmatrix} \Phi^1_{xx} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Phi^2_{xx} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Phi^n_{xx} \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Donde $\Phi^i_{xx} = \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_{ij} \partial x_{ik}} \right\}$.

Mientras que $\Phi_{\gamma x}$ representa la matriz compuesta por $m_{ij} = \frac{\partial \Phi_\gamma}{\partial x_{ij}}$. y $\frac{\partial x}{\partial \lambda_k}$ representa la matriz cuya i-ésima columna es el vector de coordenadas $\frac{\partial x_{ij}}{\partial \lambda_i},\ j = \{1, 2, ...n\}$

De esta manera concluimos en que es posible establecer a a partir de $x(\lambda)$ solución del problema de maximizar la función de bienestar social en la región $\mathcal{F}$ una relación funcional derivable $x : \Delta \to R^{ln}$ entre los óptimos de Pareto y los posibles pesos sociales definida a partir de las condiciones de primer orden (8) y (9) la que además es localmente unívoca.

4.2 Propiedades de la Función Exceso de Utilidad

Las siguientes propiedades de la función exceso de utilidad nos serán de utilidad en las subsecciones siguientes.

1) La función exceso de utilidad está acotada superiormente.

2) Para funciones de utilidad que verifican la condición de Inada, la norma de la función exceso de utilidad crece infinitamente para una sucesión de pesos sociales que converjan a la frontera de R^n_+.

3) Es homogénea de grado cero.

4) Para cada $\lambda, e(\lambda)$ es un vector tangente al ortante positivo de la esfera de dimensión $(n-1)$, subconjunto de R^n_{++} que representaremos como

$$E^{n-1}_{++} = \left\{ \lambda \in R^n : |\lambda| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 1} \right\},$$

es decir: $\lambda e(\lambda) = 0 \ \ \forall \lambda \in E^{n-1}_{++}$.

Prueba:

1) La concavidad de las funciones de utilidad permiten escribir:

$$\bigtriangledown u_i(x)\,(x_i - w_i) \leq u_i(x_i) - u_i(w_i) \leq u_i\left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right).$$

2) Para verific ar esta propiedad basta observar que si $\lambda_h \to 0$ entonces $x_h(\lambda) \to 0$, luego las condiciones Inada prueban la afirmación. Para verificar la afirmación sobre la convergencia a cero de la cestas asignadas en el óptimo a un agente cuyo peso social decrece a cero, suponga por absurdo que para alguna coordenada k de esta cesta $x_{hk}(\lambda_n) > a > 0$ para todo λ_n de una sucesión en la que $(\lambda_h)_n$ converge a cero. La monotonía de las utilidades asegura que $u_h(x_h(\lambda)) \geq t > u_h(0) = 0$. Definimos ahora la asignación de recursos factible y que asegura al agente h $x_{hk} - \epsilon$ con $\epsilon < a$ mientras que a los demás agentes le asigna $x_{ik} + \frac{\epsilon}{n-1}$ Existen ϵ_i tales que las utilidades respectivas podrán representarse entonces como $u_h(y_h) = u_h(x_h) - \epsilon_h$ para el agente h, mientras que para los demás agentes tendremos: $u_i(y_i) = u_i(x_i) - \epsilon_i, \forall i \neq h$. Luego a partir de la desigualdad $-\lambda_h \epsilon_h + \sum_{i \neq h} \lambda_i \epsilon_i > 0$ la que se verifica para λ_h suficientemente pequeño, concluimos en que para $y \neq x(\lambda)$ el bienestar asociado a $W(x)$ es mayor para la asignación factible y que para la $x(\lambda)$ la que supuestamente maximiza $W(x)$ restingido a $\mathcal{F}$. La contradicción demuestra el acerto **.**[]

3) Basta ver que la solución del problema de maximizar (3) no se modifica si multiplicamos al vector $\lambda \in \Delta$ por p real positivo.

4) Utilizando la homogeneidad de grado cero de la función e podemos restringirnos a trabajar sobre $E^{n-1}_{++} = \{\lambda \in R_{++} : |\lambda| = 1\}$. Además com es fácil de verificar se cumple que $\lambda e(\lambda) = 0 \ \ \forall \lambda$ esto será particularmente cierto para aquellos λ con norma 1, es decir en la esfera unitaria de dimensión $n-1$.

4.3 Una Relación Binaria en el Espacio de los Pesos Sociales

Mostraremos que es posible definir a partir de la función exceso de utilidad una relación binaria en el conjunto Δ_ϵ de los pesos sociales, para la que el conjunto de maximales es no vació. En subsecciones siguientes probaremos que dichos elementos maximales satisfacen la ecuación $e(\lambda) = 0$. y daremos una condición suficiente para la existencia de un único $\lambda \in \Delta_\epsilon$ para el que $e(\lambda) = 0$.

Sea $e : \Delta_\epsilon \to R^n$ la función de exceso de utilidad. Definimos en $\Delta_\epsilon \times \Delta_\epsilon$ la relación binaria

$$\phi = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1 e(\lambda_2) < 0\}.$$

Dicha relación binaria es:

1) irreflexiva, pues $(\lambda, \lambda) \notin \phi$ por ser

$$\lambda e(\lambda) = \gamma(\lambda) \left(\sum_{i=1}^{n} x_i(\lambda) - \sum_{i=1}^{n} w_i \right) = 0.$$

2) convexa, pues si $(\lambda_1, \lambda) \in \phi$ y además $(\lambda_2, \lambda) \in \phi$ entonces:

$$(\alpha\lambda_1 + (1-\alpha)\lambda_2, \lambda) \in \phi.$$

3) semicontinua superiormente, pues la continuidad de la función e asegura que el conjunto

$$\{\alpha \in \Delta_\epsilon : (\lambda, \alpha) \in \phi_i\}$$

es abierto.

Definición 21 *Un elemento $\gamma \in \Delta\epsilon$ es* **Maximal** *para ϕ si no existe $\lambda \in \Delta\epsilon$ tal que $(\lambda, \gamma) \in \phi$*

Como puede verse un elemento $\gamma \in \Delta\epsilon$ es maximal para ϕ si y solamente si $\forall \lambda \in \Delta_\epsilon,\ \gamma \in F(\lambda)$ donde

$$F(\lambda) = \Delta_\epsilon - \{\alpha \in \Delta_\epsilon : (\lambda, \alpha) \in \phi\}. \tag{12}$$

En la medida en que las dotaciones iniciales de los agentes determinan la función exceso de utilidad, para cada posible distribución de las dotaciones iniciales existe una relación binaria correspondiente a esta distribución de la riqueza. En tanto que como veremos los elementos maximales de estas posibles relaciones definen los equilibrios walrasianos a que una sociedad puede aspirar, la riqueza y su distribución serán determinantes en la definición de tales equilibrios.

Enunciaremos sin demostrarlo un lema que presenta importantes aplicaciones a diferentes áreas de la matemática y la economía matemática, en particular el teorema de punto fijo de Brower es una aplicación inmediata de este teorema.

Nota 22 Notación: *Represeentaremos por* $co\{x_i : i \in A\}$ *al conjunto de combinaciones convexas que pueden lograrse con elementos* x_i *con* i *elegido en un conjunto* A.

Lema 23 Lema K-K-M *Sean* F_i n *subconjuntos cerrados de* $\Delta = \{x \in R+^n : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$ *tales que para todo subconjunto de índices* $A \subset \{1, 2, ...nn\}$*se verifica*

$$co\{x_i : i \in A\} \subset \cup_{\{i\in A\}} F_i,$$

entonces

$$\cap_{i=1}^n F_i \neq \emptyset.$$

Nota 24 *La demostración del teorema de Brower (ver sección final del Vo. 1) a partir del lema anterior es sencilla. Considere*

$$F_i = \{x \in \Delta : x_i \geq f_i(x)\}$$

siendo f *una función continua de* Δ *en sí mismo. Si para todo* i *fuese cierto para algún* $x \in \Delta$ *que para todas las coordenadas* $x_i < f_i(x)$ *entonces sumando en* i *obtendríamos la contradicción* $1 < 1$. *La continuidad de* f *asegura que cada* F_i *es cerrado. Entonces por el teorema K-K-M se cumple que existe al menos un* $x \in \Delta$ *para el que* $x_i \geq f_i(x)$ *para todas sus coordenadas, si la desigualdad fuese estricta alguna vez, obtendríamos sumando en* i *nuevamente* $1 > 1$, *por lo tanto* $x_i = f_i(x)$ *para todo* i.

Como se muestra en el siguiente teorema las propiedades indicadas anteriormente para la función exceso de utilidad y el lema K-K-M nos permitirán concluir que el conjunto de elementos maximales en Δ_ϵ es no vacío.

Teorema 25 *El conjunto intersección* $\cap_{\lambda\in\Delta_\epsilon} F(\lambda)$ *es no vacío.*

Prueba: Cada uno de los conjuntos $F(\lambda)$ en (12) es cerrado. Además si existiese un elemento γ combinación convexa de elementos λ_i, del simplex, $\gamma = \sum_{i\in A} \alpha_i \lambda_i$ donde $\sum_{i\in A} \alpha_i = 1,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1$ tal que $\gamma \notin \cup_{\lambda\in A} F(\lambda)$ entonces verificaría para todo $i \in A$ la relación $(\lambda_i, \gamma) \in \phi$, la convexidad de ϕ implica entonces que $(\gamma, \gamma) \in \phi$ lo que no es posible por ser ϕ una relación binaria irreflexiva. Luego por el lema K-K-M, la intersección de los $F(\lambda)$ es un conjunto no vacío.

4.4 Un Teorema de Existencia del Equilibrio Walrasiano

En esta subsección probaremos que todo elemento maximal $\gamma \in \Delta_\epsilon$ de ϕ, para economías en las que las utilidades satisfacen la condición de Inada, verifica la ecuación $e(\lambda) = 0$. A partir entonces del teorema 14 podemos concluir en la existencia de un equilibrio walrasiano.

Es interesante destacar que si bien la elección de uno u otro óptimo Pareto implica una elección determinada de los pesos sociales de los agentes económicos, los posibles óptimos de Pareto a los que la sociedad puede aspirar dependen solamente del monto total de las dotaciones iniciales, sin depender de la distribución de la riqueza entre los integrantes de la sociedad. No obstante no sucede lo mismo con los posibles equilibrios en los que una sociedad determinada puede encontrarse, estos dependen tanto de la riqueza agregada como de su distribución por cuanto de ella depende el conjunto de pesos sociales, representados por vectores $\lambda \in \Delta$, en los que se anula la función exceso de utilidad. De alguna forma entonces la distribución inicial de la riqueza ordena a los individuos en el mercado, orden que se refleja en el equilibrio existente.

El siguiente teorema es un paso previo en nuestra demostración de la existencia del equilibrio walrasiano, pero una vez demostrado el rompecabezas quedará armado, solamente faltará hacer referencia al teorema 14.

Teorema 26 *Sea γ un elemento maximal para la relación $\phi \in \Delta \times \Delta$ ya definida, entonces γ tiene todas sus coordenadas estrictamente positivas y $e(\gamma) = 0$.*

Prueba: Consideremos una sucesión $\{\epsilon_n\}$ de reales positivos convergentes a cero, la colección $\Delta_{\epsilon_n} \subset \Delta$ puede ser ordenada por inclusión. Sea γ_n un elemento maximal en Δ_n, por ser Δ compacto, existe una subsucesión $\gamma_{n'}$ en γ_ϵ convergente. Sea γ el punto límite de esta subsucesión. La continuidad de e garantiza que γ es maximal en Δ. Mostremos a continuación que $\gamma \gg 0$. Supongamos que γ tuviera alguna coordenada nula,de acuerdo a 4.2 item 2) tenemos que $lim_{n\to\infty}|e(\gamma_n)| = \infty$. Por lo tanto por ser e acotada superiormente, 4.2 item 1) para alguna coordenada i y n suficientemente grande tendremos $e_i(\gamma_n) < 0$, por la continuidad de la función exceso de utilidad existe n_0 tal que $\forall n > n_0$ y $\xi \in \Delta_n$ se cumple que $\xi e(\gamma_n) < 0$ lo que contradice la maximalidad de γ_n. Se sigue entonces que γ es positivo en todas sus componentes Además $e(\gamma) \gg 0$ pues en otro caso existiría $\xi' \in \Delta_n$ tal que $\xi' e(\gamma_n) < 0$ para n suficientemente grande, lo que nuevamente contradiría la maximalidad de γ_n. Finalmente como $\gamma e(\gamma) = 0$ se concluye en que $e(\gamma) = 0$.[]

Esta demostración puede extenderse a modelos más generales de economías, permitiendo descubrir propiedades del conjunto de los equilibrios walrasianos de forma totalmente análoga a como lo haríamos a partir de la función exceso de demanda. De esta manera podemos transportar a las economías con infinitos bienes los elementos de la topología diferencial y del análisis propios del estudio de los modelos finitos.

4.5 Unicidad del Equilibrio Walrasiano

En esta sección analizaremos una condición suficiente para la existencia de un único equilibrio walrasiano. Para economías que cumplan con esta condición el equilibrio estará totalmente determinado por la distribución inicial de la riqueza, pues en este caso será posible la elección de un único vector $\lambda \in \Delta$ de pesos sociales, en los que la función exceso de utilidad se anule. Consecuentemente una única ponderación de los agentes económicos será posible en el equilibrio. Cualquier modificación en el equilibrio supondría necesariamente una redistribución de la riqueza en la sociedad.

Supongamos que la función exceso de utilidad cumple la siguiente **propiedad de antisimetría:**

$$\lambda_2 e(\lambda_1) \geq 0 \;\rightarrow\; \lambda_1 e(\lambda_2) < 0.$$

Obsérvese que si se cumple la propiedad anterior si $(\lambda_2, \lambda_1) \notin \succeq$ entonces $(\lambda_1, \lambda_2) \in \succeq$ y además la relación binaria es completa

Esta propiedad asegura que el orden introducido en el espacio de los pesos sociales es completo.

Teorema 27 *Si la función exceso de utilidad satisface la propiedad de antisimetría entonces el equilibrio es único.*

Prueba: Sea $\bar{\lambda}$ tal que $e(\bar{\lambda}) = 0$ luego para todo elemento λ del simplex se verifica que; $\lambda e(\bar{\lambda}) = 0$. Por la propiedad de antisimetría se verifica que: $\bar{\lambda} e(\lambda) < 0$, es decir $\bar{\lambda} \succeq \lambda$, $\forall \lambda$ del simplex **.**[]

Ejemplo 28 *Si la función exceso de utilidad es un operador monótono en algún hiperespacio, entonces la propiedad de antisimetría se verifica.*

Sea $\bar{\lambda} \in E_{++}^{n-1}$ definimos:

$$T_{\bar{\lambda}} = \left\{ \lambda \in R^n : \lambda \bar{\lambda} = 0 \right\}.$$

Definición 29 *Diremos que e es monótono en $T_{\bar{\lambda}}$ si cada vez que $\lambda_1 - \lambda_2 \in T_{\bar{\lambda}}$ se verifica que* $(\lambda_1 - \lambda_2)\left(e(\lambda_1) - e(\lambda_2)\right) > 0$.

Teorema 30 *Si e es monótona en algún $T_{\bar{\lambda}}$ entonces e verifica la propiedad de antisimetría.*

Prueba: Supongamos que $\lambda_2 e(\lambda_1) \geq 0$, por ser λ_1 y λ_2 elementos del simplex se verifica que $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, existe entonces $\alpha > 0$ tal que $\lambda_1 - \alpha \lambda_2 \in T_{\bar{\lambda}}$. Se tiene entonces que:

$$(\lambda_1 - \alpha \lambda_2)\left(e(\lambda_1) - e(\alpha \lambda_2)\right) > 0.$$

Usando la homogeneidad de grado cero de e y la propiedad 4 de 4.2 obtenemos que: $\lambda_1 e(\lambda_2) \leq 0$.

5 Unicidad Local del Equilibrio Walrasiano

Habiendo establecido las condiciones que aseguran la existencia del equilibrio walrasiano, el tema que sigue es el relacionado con la unicidad o multiplicidad del equilibrio. Sería deseable que fuera único. Esta unicidad global, no obstante sólo es posible de obtener, si se exigen condiciones muy restrictivas, como por ejemplo la ya vista en la sección anterior en la que se exige que la relación binaria ϕ en el espacio de los pesos sociales sea completa, obsérvese que por cuanto esta relación depende de la función exceso de utilidad, las propiedades impuestas sobre la relación binaria, en definitiva, radican en el conjunto de utilidades. No siendo en general posible esta unicidad la siguiente deseable propiedad es la de local unicidad. Diremos que un vector de precios o una cesta de equilibrio es localmente única si en un entorno suyo no es posible hallar otro vector o cesta de equilibrio. Si el conjunto de equilibrios es compacto, local unicidad equivale a finitud. Esto nos lleva entonces a investigar condiciones que aseguran la finitud del conjunto de equilibrios.

Siguiendo nuestro esquema de trabajo consideraremos una economía de intercambio puro, donde cada agente es representado por sus preferencias y dotaciones iniciales, $(\succeq_i, w_i)$, siendo $\succeq_i$ una relación de preferencias continua y estrictamente monótona en R^l_+ mientras que $w_i >> 0$ es decir la dotación inicial de cada agente, es una cesta de bienes representada por un vector de R^l con todas sus coordenadas estrictamente positivas, estas condiciones se deben verificar para todo agente $i = 1, 2, ...n$. Debemos buscar condiciones que garanticen la existencia de un conjunto finito de soluciones de la ecuación $e_w(\lambda) = 0$ donde e_w es la función exceso de utilidad para la economía de intercambio pura considerada y λ un elemento con todas sus coordenadas positivas del simplex de dimensión $n-1$.

Dado que la función exceso de utilidad es homogénea de grado cero, 4.2 podemos restringirnos a trabajar con $\lambda \in R^n$ tales $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2} = 1, \lambda_i > 0 \quad \forall i = 1, 2, ..., n$, es decir a elementos en la parte positiva de la esfera $n-1$ dimensional, a la que representaremos por E^{n-1}_{++}. Obsérvese que $e(\lambda) = 0$ si y solamente si $e(\lambda') = 0$ donde $\lambda' = \frac{\lambda}{|\lambda|}$.

Llamaremos conjunto de equilibrio a:

$$\mathcal{E}q' = \{\lambda \in E^{n-1}_{++} : e(\lambda) = 0\}.$$

Definición 31 *Decimos que un elemento* $\lambda \in \mathcal{E}q'$ *es regular si la matriz* $(n-1) \times (n-1)$, *de derivadas parciales* $De(\lambda)$ *tiene rango* $n-1$. *Una* **economía será llamada regular** *si todo* $\lambda \in \mathcal{E}q'$ *es regular.*

Veremos en la siguiente sección que casi toda economía es regular. La importancia de las economías regulares radica en el hecho de que tales economías tienen un conjunto finito de equilibrios, equivalentemente que sus equilibrios son localmente únicos o puntos aislados. Más formalmente:

Teorema 32 Unicidad Local: *En una economía regular todo equilibrio es localmente único (o aislado). Esto es para todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$ existe $\epsilon > 0$ tal que si $\lambda \neq \lambda'$ y tal que $|\lambda - \lambda'| < \epsilon$, entonces $e(\lambda') \neq 0$. Más aún el conjunto de los equilibrios es finito.*

La demostración de este teorema es conclusión del teorema de la *Función Inversa* al que dedicaremos atención en la siguiente subsección. La referencia principal es [Lima, E.].

5.1 El Teorema de la Función Inversa.

El teorema de la función inversa como el de la función implícita son dos herramientas de gran potencia en la Teoría Económica, por este motivo les dedicaremos una atención preferente. A lo largo de esta sección el concepto de diferenciabilidad jugará un papel básico, la obra de referencia básica será [Lima, E.]. Comenzaremos con el primero de los teoremas mencionado, dando primeramente una definición de diferenciabilidad.

Decimos que una función $f : U \to R^n$ definida en el abierto $U \subseteq R^m$ se dice **Diferenciable en el punto** $a \in U$ cuando existe una aplicación lineal $T : R^m \to R^n$ tal que:

$$f(a+v) - f(a) = Tv + r(v), \quad con \ \lim_{v \to 0} \frac{r(v)}{|v|} = 0.$$

Aquí suponemos que $(a+b) \in U$ La transformación lineal $T : R^m \to R^n$ que aparece en la definición es la matriz de derivadas parciales evaluada en el punto a, $f'(a) \in \mathcal{M}_{n \times m}$ cuyos elementos son: $\left\{ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right\}$ $i = \{1, 2, ..., m\}$; $j = \{1, 2, ..., n\}$.

Sean U y V conjuntos abiertos en R^n. Un **difeomorfismo** $f : U \to V$ es una biyección diferenciable cuya inversa es diferenciable. En particular f es un homeomorfismo entre U y V, es decir una biyección continua con inversa continua. El ejemplo clásico de $f(x) = x^3$ muestra que un homeomorfismo puede ser diferenciable sin que su inverso lo sea.

Algunas Consideraciones sobre Espacio de las Transformaciones Lineales

En general el conjunto de las transformaciones lineales de R^m en R^n al que denotaremos como $\mathcal{L}(R^m, R^n)$, desempeñan un importante rol en la Teoría Económica. Particularmente el conjunto de los llamados funcionales lineales, esto es el conjunto de las transformaciones líneales de R^m en R. Este conjunto es interpretado como el conjunto de los precios, por cuanto un sistema de precios asigna a toda cesta de bienes un número real, su valor, en forma lineal y continua, ver sección 8.1 Vol 1.

Dada una transformación lineal $T : V \to W$ se denomina **Dominio de** T al espacio vectorial V. Por **Imagen de** T se entiende un subconjunto $Z \subset W$ tal que para todo $y \in Z$ existe $x \in V$ tal que $y = T(x)$. El **Núcleo de** T es un subconjunto $Ker(T) \subset V$ tal que $Ker(T) = \{x \in V; T(x) = 0 \in W\}$.

El conjunto $\mathcal{L}(R^m, R^n)$ puede ser interpretado como un espacio vectorial isomorfo a R^{mn} representando a cada transformación lineal por su matriz asociada $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$. Como en todo espacio vectorial E, es posible definir aquí una **Norma.** De modo general una norma en un espacio vectorial es cualquier función real $|| : E \to R$ que cumple las siguientes condiciones:

- N 1. $|x + y| \leq |x| + |y|$;
- N 2. $|\alpha x| = |\alpha||x|$
- N 3. $x \neq 0$ implica $|x| > 0$.

Una norma como puede verificarse fácilmente es una de función de distancia ver definición 11, vol 1. o métrica que sea invariante por traslaciones $d(x + y.z + y) = d(x, y)$ y homogenea en las dos variables $d(\lambda x, \lambda y) = \lambda d(x, y)$.

En el espacio de las transformaciones lineales se puede definir una norma asociando a cada transformación lineal L su matriz A y definiendo

$$|A| = sup\left\{|Ax|; x \in R^m, |x| = 1\right\}.$$

El lector puede verificar a esta función $A \to |A|$ cumple las condiciones, N 1., N 2., y N 3.) Esto hace que sea posible definir en dicho espacio una noción de proximidad, la que por otra parte es independiente de cual en particular haya sido la función elegida como norma, pues por ser en R^{nm} todas ellas equivalentes en el sentido de la topología que definen.

Un subconjunto de transformaciones lineales que nos resultará de interés en esta sección es el conjunto de las transformaciones lineales invertibles, (isomorfismos): $GL(R^m) \subseteq \mathcal{L}(R^m, R^m)$. Resulta interesante observar que si $f : U \to W,\ \ U,\ W \in R^m$ es un **difeomorfismo,** *esto es una biyección de U en V diferenciable cuya inversa $f^{-1} : V \to U$ también lo es,* entonces la matriz de derivadas parciales de f evaluada en algún $a \in U,\ \ f'(a)$ define una matriz invertible, y por lo tanto ella misma puede ser considerada como un elemento de $\mathcal{L}(R^m, R^m)$. La inversa de esta matriz coincide con la derivada de f^{-1} evaluada en $f(a)$. Observemos que la derivada f' puede ser considerada como una aplicación tal que a todo $a \in U$ le hace corresponder un elemento L, representado por la matriz $f'(a)$ del espacio $\mathcal{L}(R^m, R^m)$. El conjunto $GL(R^m) \subset R^{m^2}$ es abierto pues este es el conjunto de las matrices invertibles y el determinante es una función continua, obsérvese que $L \in GL(R^m)$ si y solamente si el determinante de L es distinto de cero.

Basaremos la prueba del teorema en el llamado *método de las aproximaciones sucesivas.* Esto requiere un conjunto de definiciones y teoremas previos los que a continuación presentaremos.

Sea $X \subseteq R^m$. Una aplicación $f : X \to R^n$ se llama una **contracción** cuando existe $\lambda \in R,\ 0 < \lambda < 1$, tal que $|f(x) - f(a)| \leq \lambda|x - a|$ para cualesquiera x e $y \in X$.

Por ejemplo: Sea $U \subseteq R^m$ abierto y conexo, si $f(x)$ es una aplicación diferenciable $f : U \to R^n$ para la que $|f'(x)| \leq \lambda < 1$ el teorema del valor medio asegura que f es una contracción.

Recordemos la definición de Punto Fijo de una función (definición 75, vol 1.) Un punto $x \in X$ es un punto fijo para $f : X \to R^m, (X \subseteq R^m)$ si $f(x) = x$.

El siguiente teorema de existencia de puntos fijos es de gran utilidad en la demostración del teorema de existencia de la función inversa, si bien un caso particular del teorema de Brower, teorema 76, vol. 1, por su importancia lo enunciaremos aquí y haremos su demostración, sugiriendo al lector la consulta al texto [Lima, E.].

Teorema 33 (Teorema de Punto Fijo para Contracciones) *Sea $F \subseteq R^m$ un subconjunto cerrado y $f : F \to F$ una contracción. Dado cualquier punto $x_0 \in X$ la sucesión $x_{n+1} = f(x_n)$ converge para un punto $a \in F$ que es el único punto fijo de f.*

Prueba: De $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ se sigue que $|x_{k+1} - x_k| \leq \lambda^k|x_1 - x_0|$. Por lo tanto:

$$|x_{k+p} - x_k| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |x_{k+i-1} - x_{k+i}| \leq \left[\sum_{i=0}^{p-1} \lambda^{k+i}\right] |x_1 - x_0| \leq \frac{\lambda^k}{1-\lambda}|x_1 - x_0|$$

Como $0 \leq \lambda < 1$, tenemos que $\lim_{k\to\infty} |x_{k+p} - x_x| = 0,\ \forall p \in N$. Siendo F cerrado y la sucesión de Cauchy, existe a en F tal que

$$a = \lim_{k\to\infty}(x_k).$$

La continuidad de f asegura que

$$f(a) = \lim_{k\to\infty}(x_{k+1}) = a.$$

Por lo tanto a es un punto fijo para f. La unicidad se prueba por el absurdo. Suponga que existe $b \neq a$ tal que $b = f(b)$ se concluye que $|b - a| \leq \lambda|b - a|$, lo cual por ser $0 \leq \lambda < 1$, es absurdo.[]

El teorema siguiente así como su corolario son versiones no diferenciables del teorema de la función inversa, y al mismo tiempo partes cruciales de la prueba. En ellos se aplicará el teorema ya visto de las contracciones. Su papel más importante está en que ellos permiten probar que siendo f una función diferenciable en un a existe U abierto que contiene a a tal que $f(U)$ es abierto.

Teorema 34 (Perturbación de la Identidad) *Sea $\phi : U \to R^m$ una contracción definida en un abierto $U \subseteq R^m$. Entonces $f(x) = x + \phi(x)$, es un homeomorfismo de U sobre el conjunto abierto $f(U) \subseteq R^m$. Si $U = R^m$ entonces $f(U) = R^m$.*

Prueba: A partir de la definición de f, siendo ϕ una contracción, podemos escribir que

$$|f(x) - f(y)| \geq (1 - \lambda)|x - y|.$$

De aquí resulta que f es una biyección de U sobre $f(U)$, y que la aplicación inversa f^{-1} : $f(U) \to U$ cumple al condición: $|f^{-1}(w) - |f^{-1}(z)| \leq c|w - z|$, con $c = \frac{1}{1-\lambda}$, de donde se sigue que f es un homeomorfismo de U sobre $f(U)$. Queremos probar ahora que $f(U)$ es abierto en R^m, es decir que para $b \in f(U)$, b es del interior de $f(U)$. Para esto alcanza con probar que para todo y en un entorno de b, existe $x \in U$ tal que $y = x + \phi(x)$. Consideremos la función $\psi(x) = y - \phi(x)$, siendo y fijo ψ es una contracción, por lo tanto en una bola cerrada $B_r(a) \subseteq U$ tiene un punto fijo, sea este x_y. Luego para toda $y \in U$ existe solución para la ecuación $y = f(x)$ definida por el punto fijo x_y de ψ.[]

Corolario 35 (Perturbación de un Isomorfismo) *Sea $U \subseteq R^m$ abierto, y $f : U \to R^m$ una función de la forma $f(x) = Tx + \phi(x)$, donde $T : R^m \to R^m$ es una transformación lineal invertible y $\phi : U \to R^m$ satisface $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \lambda|x - y|$, con $\lambda|T^{-1}| < 1$. Entonces f es es un homeomorfismo de U sobre el conjunto abierto $f(U) \subseteq R^m$. Si $U = R^m$ entonces $f(U) = R^m$.*

Prueba: La prueba sigue del teorema anterior, basta considerar la función $(T^{-1}f)(x) = x + \phi(x)$, la cual cumple con la propiedad de ser una perturbación de la identidad y por lo tanto es un homeomorfismo del abierto U sobre el abierto $(T^{-1}f)(U)$.

Por la composición de homomorfismos se tiene aplicando T al homeomorfismo anterior que f es homeomorfismo de U sobre el abierto $f(U)$.[]

Lema 36 (Diferenciabillidad de Homeomorfismo Inverso) *Sea $f : U \to V$ un homeomorfismo entre los abiertos $U, V \subseteq R^m$. Si f es diferenciable en $a \in U$ y la derivada $f'(a) : R^m \to R^m$ un isomorfismo, entonces el homeomorfismo inverso $f^{-1} : V \to U$ es diferenciable en el punto $b = f(a)$. Si f es continuamente diferenciable en a entonces f^{-1} también lo será en b.*

Prueba: Escribamos

$$f^{-1}(b + w) - f^{-1}(b) = [f'(a)]^{-1}w + s(w) \quad (*)$$

y verifiquemos que $lim_{w\to 0}\frac{s(w)}{|w|} = 0$. Sea $v = f^{-1}(b+w) - f^{-1}(b),\ y\ a = f^{-1}(b)$. Entonces $f(a+v) - f(a) = w$, por la continuidad de f y f^{-1} se sigue que $w \to 0$ si y solamente si $v \to 0$. Por ser f diferenciable podemos escribir:

$$f(a+v) - f(a) = f'(a)v + r(v) \quad (**)$$

Sustituyendo en (*) el primer miembro por v y en el segundo $w = f(a+v) - f(a)$ por el segundo miembro de (**) obtenemos:$v = v + [f'(a)]^{-1}r(v) + s(w)$ Luego se obtiene la igualdad:

$$\frac{s(w)}{|w|} = -f'(a)^{-1}\frac{r(v)}{v}.\frac{|v|}{|w|}.$$

Como ya fue visto, cuando $w \to 0,\ v \to 0$, se sigue que $\lim_{w\to 0}\frac{r(v)}{v} = 0$. Además $\frac{|v|}{|w|} = \frac{v}{f(a+v)-f(a)}$ se mantiene acotado en un entorno de a, por lo tanto se tiene que cuando $w \to 0$, $\frac{s(w)}{|w|} \to 0$, y por lo tanto f^{-1} es diferenciable en $b = f(a)$.[]

Teorema 37 (Teorema de la Función Inversa) *Sean $f : U \to R^m$ definido en el abierto $U \subseteq R^m$ continuamente diferenciable en el punto $a \in U$ y $f'(a) : R^m \to R^m$ un isomorfismo, (equivalentemente: el determinante del jacobiano $detJf(a) = det\left[\left\{\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right\}\right]; i,j = 1,2,\ldots,m$ es diferente de cero.) Entonces f es un homeomorfismo de un abierto V que contiene a a sobre un abierto W que contiene a $f(a)$. El homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \to V$ es continuamente diferenciable en $f(a)$ y su derivada en ese punto es: $[f'(a)]^{-1}$.*

Prueba: Sin pérdida de generalidad podemos suponer $0 = a = f(a)$. Por ser f diferenciable se puede escribir: $f(x) = f'(0)x + r(x)$ donde por ser continua la derivada en 0 se tiene que existe un abierto V con centro en cero tal que $|r(x) - r(y)| \leq \lambda|x-y|$ para todo $x, y \in V$, y $\lambda|f'(0)^{-1}| < 1$ con λ positivo (ver corolario (perturbación de un isomorfismo). Por lo tanto f es una perturbación del isomorfismo $f'(0)$. De esta forma f es un homeomorfismo de V sobre el abierto $W = f(V)$. Por el lema del difeomorfismo inverso se tiene que $f'^{-1} : W \to V$ es diferenciable con continuidad en $f(0)$. Como el conjunto $GL(R^m)$ es abierto en $\mathcal{L}(R^m, R^m)$ de esta forma si f es diferenciable con continuidad en 0 se puede elegir un entorno V de 0 suficientemente pequeño, tal que para todo $b \in V$, $f'(b)$ sea un isomorfismo y por la diferenciabilidad del homeomorfismo inverso $f^{-1} : W \to V$, es diferenciable en todos los puntos de W luego, f es un difeomorfismo. []

En principio el teorema no afirma nada sobre la finitud o no del conjunto de preimágenes de $f(a)$. Si nos dice que son aislados, pues f^{-1} en las condiciones del teorema de inversión es un homeomorfismo local, por lo tanto una biyección entre determinados entornos W de $f(a)$ y U de $x \in f^{-1}(f(a))$. Una condición que asegura la finitud de las preimǵenes de $f(a)$ es que el dominio de f sea un conjunto compacto. Pues en este caso, si el conjunto de preimágenes fuera infinito existiría un cubrimiento del cual no es posible extraer un subcubrimiento finito.

Antes de continuar con el estudio de las propiedades del conjunto de equilibrios, daremos una demostración del teorema de la función implícita.

Prueba del Teorema de la Función Implícita: Sea $\phi : A \times B \to R^m \times R^n$, tal que $\phi(x,q) = (f(x,q),q)$. Por ser $detJ_xf(\bar{x},\bar{q}) \neq 0$, (equivalentemente el rango de $J_xf(\bar{x},\bar{q})$ es igual a n), tenemos que

$$\partial\phi(\bar{x},\bar{q}) = \left[\begin{array}{c|c} J_x\phi(\bar{x},\bar{q} & * \\ \hline 0 & I_m \end{array}\right]$$

es un isomorfismo. Por el teorema de la función inversa, existen entornos $U \subset A \times B$ y V de $(\bar{x},\bar{q})$ y de $(0,\bar{q})$ respectivamente, donde ϕ es un difeomorfismos y tales que $U = \psi(V) = \phi^{-1}(V)$. Sea $\psi(x,q) = (\psi_1(x,q),\psi_2(x,q))$ en $R^n \times R^m$, como $\phi(\psi) = Id_U$, se sigue que:

$$(x,q) = \phi(\psi(x,q)) = (f(\psi_1(x,q)),\psi_2(x,q)),\psi_2(x,q)),$$

por lo tanto

$$x = f(\psi_1(x,q)),\psi_2(x,q)), \;\; y \;\; q = \psi_2(x,q). \quad (*)$$

Sea $T_0 = \{q : q \in R^n, \quad (0,q) \in V\}$, para cada q en T_0 definimos $\eta(q) = \psi_1(0,q)$. Luego considerando $x = 0$, en (*) obtenemos $0 = f(\eta(q),q)$.[]

5.2 El Jacobiano de la Matriz Exceso de Utilidad

Nuestro interés ahora, es el de resolver el sistema de n ecuaciones, con n variables:

$$\begin{array}{rl} e_1(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = & 0 \\ e_2(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e_n(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n) = & 0. \end{array} \tag{13}$$

Donde e_i representa la función exceso de utilidad del agente i, $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)$ es un vector de pesos sociales y $w = (w_1,w_2,\ldots,w_n)$ representa las dotaciones iniciales de los agentes las que consideramos dadas..

La propiedad 4) de 4.2, permite establecer una relación de dependencia lineal entre las ecuaciones de 16 de forma tal que sólo $n-1$ de ellas son linealmente independientes, es decir resueltas $n-1$ ecuaciones la solución hallada será también solución para la n-ésima ecuación, esta hace que la función exceso de utilidad sea para w dado, una función de dominio en R^{n-1} y codominio en R^{n-1} $e_w(\cdot) : C \to R^{n-1}$.

De esta manera de acuerdo al teorema de la función inversa, el sistema 13 tendrá soluciones determinadas por el teorema de la función inversa si $detJ_\lambda e_w(\lambda)|_{\forall\lambda:e(\lambda)=0} \neq 0$ es decir si el rango del jacobiano evaluado en cada λ de $\mathcal{E}q'$ es $n-1$, lo que se expresa diciendo que cero es un **valor regular** de la función e.

Nota 38 *La expresión $detJ_\lambda e_w(\lambda)|_{\forall\lambda:e(\lambda)=0} \neq 0$ hace referencia al determinante del jacobiano de la función exceso de utilidad restringido a sus $n-1$ primeras filas y columnas. Pues considerando la matriz $Je(\lambda)$ como matriz de n filas por n columnas su determinante será cero cada vez que λ verifique $e(\lambda) = 0$, pues como facilmente puede comprobarse $\lambda Je(\lambda) = 0$ lo que implica la existencia de al menos una fila o columna de la matriz jacobiana linealmente dependiente, y por lo tanto el determinate será cero.*

El jacobiano de la función exceso de utilidad, presenta la siguiente forma:

$$J_\lambda e(\lambda) = \left[\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k}\right];\ i = \{1, 2, ...n\},\ k = \{1, 2, ...n\}.$$

$$\frac{\partial e_i(\lambda)}{\partial \lambda_k} = \frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k}\left\{\partial^2 u_i(x_i(\lambda), t)[x_i(\lambda) - w_i(t)]^{tr} + [\partial u_i(x_i(\lambda), t)]^{tr}\right\}. \tag{14}$$

Donde por la trasposición del vector a está representada por a^{tr}. Indica la escritura del vector como un vector columna. Además $\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_k} = \left(\frac{\partial x_{i1}}{\partial \lambda_k}, ..., \frac{\partial x_{il}}{\partial \lambda_k}\right)$, $\partial^2 u_i(x_i(\lambda), t)$ es la matriz de derivadas segundas de la función $u_i(x, t)$, donde sus entradas son $a_{jk} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_{ij} \partial x_{Ik}}$.

La diferenciabilidad de x_i como función de λ se obtiene a partir de las condiciones de primer orden para la maximización de la función de bienestar ver (10).

Definición 39 *Fijadas las preferencias de los agentes, diremos que una economía es* **Regular** *si para las dotaciones iniciales w se tiene que el cero es un valor regular de $e_w(\cdot) = 0$.*

Mostraremos a continuación el teorema de Unicidad Local, que afirma la unicidad local de las soluciones de 13 para una economía regular.

Prueba del teorema de Unicidad Local. Básicamente la prueba ya está hecha. Sea $E_\epsilon^{n-1} = \{\lambda E_{++}^{n-1} : \lambda_i \geq \epsilon > 0\ \forall i\}$. Sea $e_{E_{\epsilon_m}^{n-1}}$ la restricción de la función exceso de utilidad a restringida a $E_{\epsilon_m}^{n-1}$. Siendo el cero un **valor regular** para e, es decir un valor tal que $Je_w(\lambda)|_{\{\forall\lambda:e(\lambda)=0\}} \neq 0$, el teorema de la función inversa asegura que $e_{E_{\epsilon_m}^{n-1}}^{-1}(0)$ está formado por puntos aislados, es decir que para cada unos de ellos existen entornos reducidos suyos (es decir todos los puntos del entorno menos el punto mismo) en los cuales la función e es distinta de cero. Como el dominio es compacto, estos son en cantidad finita. Consideremos $\epsilon_m \to 0$ y ordenemos

$E_{\epsilon_m}^{n-1}$ por inclusión, dada la compacidad de $E^{n-1} = \{\lambda \in R^n : \|\lambda\| = 1; \lambda_i \geq 0\}$ si existiese una sucesión λ_m de elementos de $E_{\epsilon_m}^{n-1}$, existiría un punto de acumulación λ^* el que necesariamente debe pertenecer a la frontera de E^{n-1}, la continuidad de la función exceso de utilidad implica que $e(\lambda^*) = 0$ lo que contradice 4.2 item 2. Por lo tanto el conjunto la cardinalidad de $\mathcal{E}q'$ es finita.[]

Con la demostración de este teorema concluimos que si en cada $\lambda \in \mathcal{E}q'$ el determinante del jacobiano de la función exceso de utilidad no se anula $detJ_\lambda e_w(\lambda)|_{\forall\lambda\in\mathcal{E}q'} \neq 0$, es decir *si la economía es regular* entonces, el conjunto $\mathcal{E}q'$ es finito y por lo tanto lo será el conjunto de equilibrios walrasianos de la economía $\mathcal{E}$ definida a partir de $(\succeq_i, w_i$, más adelante veremos que además toda economía regular presenta una cantidad impar de ellos. Una particularidad más podemos resaltar del conjunto de equilibrios de una economía regular y es el hecho de que *toda economía regular tiene una cantidad impar de equilibrios.* La demostración de esta afirmación requiere técnicas avanzadas de topología diferencial sugerimos como bibliografía los [Guillemin, V. Pollak, A.] y [Milnor, J.]. Daremos en la siguiente sección algunos elementos necesarios para la demostración, no obstante algunos teoremas serán simplemente enunciados.

5.3 Elementos de la Topología Diferencial

En esta subsección el concepto de *Variedad* jugará un papel central. La generalidad del concepto explica la vasta clase de aplicaciones en las que está presente, entre ellas en economía. Su origen está en la cartografía, ciencia en la que en el asentamiento de sus bases matemáticas Gauss jugó un importante papel. Analicemos brevemente como trabajan los cartógrafos:

a) A diferentes equipos de trabajo se le asigna una porción de territorio a cartografiar a la que se le asigna un índice i.

b) Cuando dos porciones del territorio diferentes por ejemplo h y k tienen puntos comunes ambos equipos deben marcarlos claramente a los efectos de poder fácilmente encontrar estas correspondencias.

Cada carta esta trazada en un papel cuadriculado munido de coordenadas, el conjunto de estas hojas cartográficas constituye un atlas.

De manera similar podemos trabajar con un conjunto abstracto de puntos, dividiendo a éste en subconjuntos a los que podamos mapear biunívocamente sobre subconjuntos abiertos de R^n por ejemplo, es decir hacer cartas locales, cuya unión completa formará el atlas de M. Cuando este procedimiento sea válido diremos que M es una variedad de dimensión n. Formalmente:

Definición 40 *Un subconjunto $M \subset R^n$ es una C^r* **Variedad de dimensión n** *(*con bordes*) si para cada $x \in M$ existe un difeomorfismo de clase C^r (esto es un difeomorfismo cuyas derivadas* *hasta las r-ésimas son continuas)* $\phi : U \to R^s; U \subset R^s$, *que lleva al conjunto abierto* $U \cap (R^n \times \{0\}^{s-n})$ *(resp.* $U \cap R^{n-1} \times R_+ \times \{0\}^{s-n}$*) sobre* $V_x = V \cap M$, *donde* $V \subset R^s$ *es un entorno de* x, *llamaremos a* V_x dominio coordenado *de* M. *De forma tal que* $M = \cup_x V_x$ *y además la intersección de dos distintas dominios coordenados de* M *cuando es no vacía es un dominio coordenado de* M

Las funciones $\phi : U \to R^s$ definidas anteriormente son llamadas *funciones de pasaje*

El borde o frontera ∂M de una variedad C^r de dimensión n, es una variedad sin borde de dimensión $n-1$, formada por aquellos puntos $x \in M$ tales que ningún entorno suyo en M es homeomorfo a R^n

Ejemplo 41 *La bola unitaria* B *de dimensión* n *es una variedad de dimensión* n, *representada por:*

$$B = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

y su forntera es el conjunto que representaremos como:

$$\partial B = E^{n-1} = \left\{ x \in R^n : \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

es decir la esfera de dimensión $(n-1)$.

Definición 42 *Una variedad se dice* **Orientada** *si el jacobiano de las funciones de pasaje son positivas para cualesquiera dos dominios coordenados cuya intersección sea no vacía.*

Sea $M \subset R^n$ variedad de dimensión n, y sea ϕ una función de pasaje. Para $z = \phi^{-1}(x)$ el subespacio lineal $\partial\phi(z)\left(R^n \times \{0\}^{s-n}\right)$, es llamado **Espacio Tangente** de M en x y se representa por $T_x M$.

Ejemplo 43 *Para* $x \in E^{n-1}, T_x E^{n-1} = \{v \in R^n :< v, e >= 0\}$.

Si $f : M \to N$ es una función entre las variedades M y N tal que $y = f(x)$, la transformación lineal $\partial f(x)$ lleva el espacio tangente en de M en x en el espacio tangente de N en $f(x)$.

Definición 44 *Sean* M *y* N *variedades orientadas cerradas y conexas y sea* $f : N \to M$ *diferenciable, definimos* **Grado** *de la aplicación diferenciable con respecto a un valor regular* y_0 *al número :*

$$degf = \sum_{f(x_i)=y_0} sgndetJf(x_i)$$

Siendo la función $sgn(x)$ la función cuyo valor es 1 si $x > 0$ y -1 si $x < 0$. Por ser y_0 un valor regular $degf$ está bien definido. Obsérvese que

$$sgndetJf(x) = sgn(\lambda_1 ... \lambda_n) = -1^{i(x)}$$

siendo $\lambda_1, ..., \lambda_n$ los valores propios de la matriz $Jf(x)$ y $i(x)$ la cantidad de valores propios negativos.

Puede probarse que el $degf$ no depende del valor regular considerado, [Milnor, J.].

Indice de un Campo de Vectores en un Punto Singular

Sea $N \subset R^s$ una C^r variedad de dimensión n con borde. Un **Campo de Vectores Tangente** a N es una función $\xi : N \to R^s$ con $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), ..., \xi_n(x)) \in T_xN$ para todo $x \in N$. Usando la terminología habitual diremos que x_0 es un **Punto Singular** del campo ξ si se verifica que: $\xi(x_0) = 0$. Diremos que es un punto singular no degenerado si el determinante del jacobiano $detJ_x\xi(x_0) \neq 0$. De acuerdo a nuestras definiciones anteriores si cero es un valor regular, entonces todos los puntos singulares serán no degenerados. Recordamos que como consecuencia del teorema de la función inversa éstos serán aislados y en cantidad finita si el campo es propio o su dominio es una variedad compacta.

El siguiente teorema nos llevará directamente al punto de la existencia y de la cardinalidad impar del conjunto de equilibrios.

La **Característica de Euler** $\chi(V)$, representa propiedades topológicas muy generales de las variedades, y clasifica a estas en clase de equivalencia dejando de lado propiedades geométricas particulares de las mismas. Aplicado a superficies el concepto fue introducido por Euler en 1752, aunque posiblemente en el siglo II a.c. Arquímedes ya la utilizara. En el caso de superficies la característica de Euler relaciona vértices, aristas y triángulos inscritas en ellas y puede mostrarse que para toda superficie V,

$$\chi(V) = v - a + t$$

es independiente de la triangulación siendo propia de la superficie, v es el número de vértices, a el número de aristas y t el de triángulos. Como una introducción atrayente para la clasificación topológica de superficies, cuya lectura apela solamente a la intuición espacial del lector recomendamos [Zeeman, C.]

En su forma general la característica de Euler es un invariante topológico asociada a cada variedad compacta según el siguiente teorema:

Teorema 45 Teorema de Poincare-Hopf *La suma de los índices en los puntos singulares no degenerados de un campo vectorial ξ definido en una variedad compacta M, y que en el caso de* *ser la variedad con borde, apunte hacia afuera es igual a la característica de Euler:*

$$\xi(M) = \sum_{x_j} (-1)^{i(x_j)},$$

siendo $i(x_j)$ el índice de cada punto singular x_j del campo. Esta suma es un invariante de la variedad que no depende del campo particular elegido.

El **índice** de un campo ξ en un punto singular no degenerado x_0 es el grado de la función $h(v) = \frac{1}{\|\xi(x_0+v)\|}\xi(x_0 + v)$. (Informalmente podemos decir que el índice mide la cantidad de veces que de manera absoluta el campo rodea al punto singular. De esta manera el valor absoluto del índice mide la cantidad de imágenes del campo en un entorno pequeño del punto singular). Si el punto singular es no degenerado el índice solamente puede tomar valores 1 o -1 (según mantenga o invierta el sentido del giro), de acuerdo a la cantidad de valores propios negativos del jacobiano del campo evaluado en el punto sea par o impar.

El siguiente teorema relaciona le concepto de índice con el concepto de grado de una función. Consideremos una esfera de radio ϵ pequeño Q_ϵ entorno de x_0 punto singular aislado. Considere la aplicación

$$f_{x_0} : Q_\epsilon \to S^{n-1}$$

donde S^{n-1} es la esfera unitaria, y $f(x_0) = \frac{1}{\|\xi(x_0+\epsilon v\|)}\xi(x_0 + \epsilon v)$. entonces se tiene el siguiente teorema:

Teorema 46 *En un punto singular aislado x_0 de un campo $\xi(x)$ se verifica la igualdad:*

$$deg f(x_0) = sgndet J\xi(x_0).$$

Para la demostración del teorema recomendamos las obras ya citadas [Milnor, J.] o bien [Guillemin, V. Pollak, A.].

Nota 47 *En el caso particular en que el campo ξ tiene en x un punto singular no degenerado siendo $J\xi(x)$ una aplicación lineal que lleva T_xN en sí mismo el índice de ξ en x es igual al signo del determinate del jacobiano de ξ evaluado en x.*

Ejemplo 48 *Para la bola unitaria de dimensión n y un campo que en su frontera apunta hacia afuera, la característica de Euler es* 1, *luego el grado de cualquier campo que lleve la frontera de B en sí misma* hacia afuera *es 1.*

5.4 Imparidad del Conjunto de Equilibrios

Mostraremos como aplicación del teorema de Poincaré-Hopf, que el conjunto de equilibrios $\mathcal{E}q'$ es impar. Esto se deduce de que para una economía regular, los puntos singulares de la función exceso de utilidad son no degenerados, y por lo tanto aislados, del hecho que dicha función corta a la frontera de la bola unitaria *hacia afuera* y que $Je(\lambda)$ aplica $T_\lambda B$ en sí misma.

Veremos que el hecho de que la función exceso de utilidad e, es un campo *hacia afuera* en el borde de B se sigue como conclusión del hecho de ser e una función propia.

Definición 49 *Una función $f : X \to Y$ se dice* **Propia** *cuando la preimǵen $f^{-1}(K)$, de un conjunto compacto $K \subset Y$ es un conjunto compacto de X.*

El siguiente lema será de interés para probar que la función exceso de utilidad es propia.

Lema 50 *Las siguientes dos afirmaciones referidas a funciones $f : X \to Y$ continuas son equivalentes:*

1) Para todo conjunto compacto $K \subset Y$, $f^{-1}(K)$ es compacto.

2) Si $\lim x_k = \infty$ entonces $\lim f(x_k) = \infty$. Debe entenderse que $\lim x_k = \infty$ cuando (x_k) no posee subsucesiones que converjan para puntos de X. En el caso particular en que $X = R \quad \lim x_k = \infty$ significa que $\lim |x_k| = \infty$.

Prueba: Comencemos probando que 1 implica 2: Si alguna subsucesión de $f(x_k)$ convergiese a a algún punto $y \in Y$ entonces el conjunto de los puntos $f(x_k)$ mas y sería compacto, luego su preimagen lo sería y en ese caso la sucesión x_k tendría subsucesiones convergentes en K. Ahora mostremos que 2 implica 1: Sea $K \subset Y$ compacto, luego por tener su imagen contenida en $f(K)$, toda subsucesión $x_k \in f^{-1}(K)$ posee una subsucesión x'_j convergente a un punto $x \in K$ (si tal subsucesión no existiera entonces, $\lim f(x_k) = \infty$.) Como $f(x) = \lim f(x'_k)$ y K es compacto, se tiene que $f(x) \in K$ por lo tanto $x \in f^{-1}(K)$ luego $f^{-1}(K)$ es compacto.

Teorema 51 *La función exceso de utilidad es propia.*

Prueba: La prueba sigue de 4.2 item 2. Allí se muestra que cuando una sucesión λ_n a la frontera del simplex la correspondiente sucesión $(e(\lambda_n))$ crece en norma indefinidamente. Luego se sigue que la función exceso de utilidad es propia.[]

Como la función e es acotada por arriba en cada coordenada ver 4.2 item 1 se sigue que al llegar a la frontera del ortante positivo, donde algunas coordenadas $\lambda_j, \quad j \in I \subset \{1, 2...., n\}$ de

$\lambda \in E^{n-1}$ se anulan, las coordenadas $e_h(\lambda_m)$ $h \in I$ deben tender hacia menos infinito. Por lo tanto $z_{hm} = e_h(\lambda_m)$ para $\lambda_m \to \lambda$ en la frontera del ortante positivo (∂E^{n-1}) debe ser negativo. Como λ en un vector no negativo con algunas coordenadas estrictamente positivas, precisamente aquellas que no pertenecen a I, de la igualdad $\lambda z = 0$ y como e_h apunta en la dirección negativa para cada $h \in I$ se sigue que z es un vector *hacia afuera.*

La continuidad de la función exceso de utilidad hace que su condición de vector *hacia afuera* se siga manteniendo también en el borde de $E_\epsilon^{n-1} = \{\lambda \in E^{n-1}; \lambda_i \geq \epsilon > 0, \ \forall i\}$.

Siendo $e(\lambda)$, la función exceso de utilidad de una economía regular, un campo de vectores tangente a la esfera (ver 4.2 item 4,) cuyos puntos singulares son finitos y no degenerados y que *apunta hacia afuera* en el borde del ortante positivo de la esfera E_ϵ^{n-1} de dimensión $n-1$, está en las condiciones del teorema de Poincare-Hopf ver 47 y por lo tanto vale la siguiente identidad:

$$1 = grade(0) = \sum_{\lambda : e(\lambda)=0} signdet Je(\lambda). \tag{15}$$

Se deduce de la fórmula anterior que el número de puntos singulares no degenerados de e cuando la economía es regular es impar. Es decir que se tiene probado el teorema siguiente:

Teorema 52 *El conjunto de equilibrios de una economía regular tiene una cantidad impar de elementos.*

Corolario 53 (Una prueba más de la existencia del equilibrio) *Toda economía regular tiene al menos un equilibrio.*

Prueba: Debiendo ser el conjunto de puntos singulares impar debe existir al menos uno.

Como otra aplicación inmediata del teorema de Poincare-Hopf a la función exceso de utilidad obtenemos la siguiente **condición suficiente para la unicidad del equilibrio walrasiano:** Si el determinante del jacobiano de la función exceso de utilidad e_w para dotaciones iniciales w es de signo constante entonces el equilibrio es único.

5.5 Ejemplos de Economías con Unicidad de Equilibrios

Si bien la unicidad global del equilibrio es una propiedad altamente deseable por un economista, las economías en general no parecen tener esta virtud. Asegurada con hipótesis relativamente generales la unicidad local, la unicidad global requiere fuertes restricciones. El índice nos dará una guía para saber que propiedades debemos buscar Por ejemplo aquellas economías para las cuales el signo del determinante del jacobiano de la función exceso de utilidad es constante, tendrán un único equilibrio, es decir un único valor de λ para el que $e(\lambda) = 0$. Como anteriormente aquí consideramos al jacobieno de la función exceso de utilidad como una transformación lineal $Je(\lambda) : T_\lambda E_{++}^{n-1} \to R^{n-1}$, cuyo rango es $n-1$ por ser la economía regular.

Ejemplo 54 *Veamos que economías con utilidades C^2 (es decir con derivadas segundas continuas) estrictamente monótonas, con n agentes (a los que indexaremos por $i \in \{1, 2, ..., n\}$) y l bienes (indexados por $j \in \{1, 2, ..., l\}$,) si además se verifica la condición:*

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \left(x_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}} \right) > 0 \ \forall i, \ y \, \forall j \quad (*),$$

tienen un único equilibrio walrasiano.

Por **utilidades separables** *endendemos utilidades para la que se cumple que*

$$\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_{is} \partial x_{it}} = 0 \ \forall s \neq t.$$

El teorema de **Hawkins-Simon:** afirma que *si una matriz H es tal que $a_{ij} \leq 0 \ \forall i \neq j$,* (matriz de H-S) y si *existe un vector $x = (x_1.x_2, ...x_n)$ tal que $x_j \geq 0$ para todas sus coordenadas y no nulo, para el que Hx es positivo estrictamente en todas sus coordenadas (condición de H-S), entonces el determinante de la matriz H es positivo.* Ver [Takayama, A.]

Mostraremos que bajo las condiciones del ejemplo $Je(\lambda)$ es una matriz de H-S y que además para todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$ $Je(\lambda)$ restringida a sus $n-1$ filas y columnas cumple la condición H-S. Entonces (por el teorema de Hawkins-Simon) el determinante de dicha matriz será positivo para todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$, luego por (15) se obtiene la unicidad del equilibrio.

En el caso general de utilidades C^2 separables, partiendo de las condiciones de primer orden podemos escribir las igualdades:

$$\lambda_i \frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}} = \lambda_h \frac{\partial U_i}{\partial x_{hj}}, \ \forall h \in \{1, 2, ..., n\} \ y \ j \in \{1, 2, ..., l\}.$$

Derivando con respecto a λ_i y teniendo en cuenta la separabilidad de las funciones de utilidad obtenemos las siguientes igualdades:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_{ij}} + \lambda_i \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_{ij}^2} \frac{\partial x_{ij}}{\partial \lambda_i} = \lambda_h \frac{\partial^2 U_h}{\partial x_{hj}} \frac{\partial x_{hj}}{\partial \lambda_i} = \ldots = \lambda_i \frac{\partial^2 U_{ni}}{\partial x_{nj}} \frac{\partial x_{nj}}{\partial \lambda_i}, \quad \forall i, \ \ y \ \ \forall j.$$

A partir de la estricta concavidad de las funciones de utilidad podemos concluir que si: $\partial x_{hj}/\partial \lambda_i > 0$ para algún $h \neq i$ entonces $\partial x_{kj}/\partial \lambda_i > 0$ para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Lo cual es imposible pues $\sum_{i=1}^n x_{ij} = w$ por lo que $\partial(\sum_{i=1}^n x_{ij})/\partial \lambda_i = 0$. Por lo tanto $\frac{\partial x_{hj}}{\partial \lambda_i} < 0$ cada vez que $h \neq i$ mientras que $\frac{\partial x_{ij}}{\partial \lambda_i} > 0$. $(**)$

Entonces de (14) se tiene, la siguiente identidad:

$$\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial \lambda_j}\right)\left[\frac{\partial}{\partial x_{i1}}\left(x_{i1}\frac{\partial U_i}{\partial x_{i1}}\right), \frac{\partial}{\partial x_{i2}}\left(x_{i2}\frac{\partial U_i}{\partial x_{i2}}\right), \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{il}}\left(x_{il}\frac{\partial U_i}{\partial x_{il}}\right) - \sum_{j=1}^{l} w_{ij}\frac{\partial^2 U_i}{\partial x_{ij}^2}\right].$$

De $(*)$ y $(**)$ se sigue que $\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j} < 0$ cada vez que $i \neq j$ a la vez que $\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_i} > 0$, por lo tanto $Je(\lambda)$ es una matriz H-S. Para obtener la unicidad del equilibrio, a partir del teorema del índice, basta entonces verificar que para todo $\lambda \in \mathcal{E}q'$ el signo del jacobiano de la función exceso de utilidad se mantiene constante.

Si λ verifica $e(\lambda) = 0$ se tiene que: $Je(\lambda)\lambda = 0$ *y* $\lambda Je(\lambda) = 0$, (ver nota en la seccion 5.2), por lo tanto $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j} = 0$, y por ser $\frac{\partial e_n(\lambda)}{\partial \lambda_j} < 0 \ \ \forall\, j \neq n$ se verifica:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left(\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_j}\right) > 0.$$

Como λ es un vector estrictamente positvo, se tiene que la matriz $Je(\lambda)$ restringida a sus $n-1$ primeras filas y columnas verifica la condición H-S luego, por el teorema Hawkins-Smon, su determinante será positivo. La matriz $Je(\lambda)$ tendrá entonces en cada λ de equilibrio, un determinante de signo constante, aplicando ahora (15) llegamos a que el equilibrio será único **.**[]

Nota 55 *Obsérvese que la condición de Mitjushim-Polterovich, (M-P):*

$$-\frac{< x, \partial^2 u_i(x) x >}{< x, \partial u_i(x) >} < 4 \ \ \forall i$$

es un caso particular de (*), no obstante para obtener unicidad bajo la condición (M-P) no es necesario la separabilidad de las funciones de utilidad, [Accinelli, E. (96)]:

Ejemplo 56 Caso Particular: *En el caso de una economía con 2 agentes con utilidades separables se sigue inmediatamente que si (*) es verificada entonces el determinante del Jacobiano de la función exceso de utilidad tiene signo constante (en este caso basta con considerar el signo de* $\frac{\partial e_i}{\partial \lambda_i}$*).*

Sugerimos como ejercicio para el lector considerar la economía con dos agentes y dos bienes cuyas utilidades son:

$$u_1(x_1, x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} + x_2^{\frac{1}{2}} \quad y \quad u_2(x_1, x_2) = x_1^{\frac{2}{3}} + x_2^{\frac{2}{3}}$$

y verificar que se obtiene unicidad del equilibrio.

Conocidas algunas propiedades de las economías regulares particularmente las explicitadas en el teorema de Unicidad Local, nos interesa saber que tan general es la regularidad. Veremos a continuación que esta situación es típica, es decir que a menos de casos accidentales fijadas las preferencias casi toda dotación inicial define una economía regular.

6 Economías Regulares y Singulares

Contrastando con el caso de economías que presentan unicidad local y finitos equilibrios, aquellas con infinitos equilibrios, o con puntos singulares degenerados, es decir aquellos en los que ademas de anularse un campo de vectores tangente (en nuestro caso el representado por el campo e) se anula también el determinate del jacobiano de dicho campo, conforman un conjunto atípico. La herramienta matemática central para establecer este resultado será en estas notas el *Teorema de Transversalidad de Thom*, el que asegura que la regularidad de un determinado valor, es una propiedad que se mantiene estable frente a perturbaciones de la función diferenciable que lo define como tal. Dicho teorema afirma que el conjunto de funciones diferenciables perturbadas a partir de una original, para las cuales un determinado valor deja de ser regular, es *pequeño* en el sentido de que encontrar una de ellas es un accidente cuya probabilidad de ocurrencia (en el caso de que este concepto se pueda definir) es cero, pero aún si esto no es posible, se puede probar que su complemento es un conjunto muy pequeño del que diremos que es *magro*, sin interior, El texto de referencia básico para esta parte es [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

En [Debreu, G.] la generalidad de las economía regulares es decir economías con un número finito de equilibrios localmente aislados y estables en el sentido de que sus características no cambian por pequeñas perturbaciones de sus dotaciones iniciales fue establecido a partir del teorema de Sard que afirma que el conjunto de valores críticos de una función diferenciables es de medida nula. Estas técnicas de la topología diferencial fueron aplicadas a la función exceso de demanda. En estas notas utilizaremos como herramienta básica la función excesos de utilidad.. Dicho método de trabajo tiene el valor de ser fácilmente generalizable a economías con infinitos bienes, mientras que como ya fue dicho en espacios de dimensión infinita no es inmediata la existencia de una función de demanda, a la vez que permite introducir técnicas de topología diferencial en espacios de dimensión infinita. Veremos que si una determinada economía es regular, es decir el cero es un valor regular de e_w, donde w representa a las dotaciones iniciales de los agentes de esa economía, tal propiedad no se pierde por modificaciones pequeñas de tales dotaciones, por lo tanto las economías perturbadas siguen siendo regulares. Contrariamente a este comportamiento estable de las economías regulares, las s economías singulares serán aquellas que muestran cambios abruptos en su comportamiento estructural, por ejemplo abruptos cambios de precios y demandas de equilibrio y en general en el *orden social*, cambio éste, representado por grandes modificaciones de los pesos sociales de equilibrio $\lambda \in \mathcal{E}q'$. frente a pequeñas modificaciones de sus dotaciones iniciales tanto debido a una redistribución de las mismas como por aumento o decrecimiento de la riqueza social agregada representada por $\sum_{i=1}^{n} w_i = W$.

6.1 Más Elementos del Análisis y de la Topología Diferencial

Nuestro interés es el de resolver el sistema de n ecuaciones, con n variables endógenas, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ y nl variables exógenas w_{ij} que representan las dotaciones iniciales de cada agente en cada bien:

$$\begin{array}{ll} e_1(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) = & 0 \\ e_2(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ e_n(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n; w_1, w_2, \ldots, w_n) = & 0. \end{array} \tag{16}$$

Donde e_i representa la función exceso de utilidad del agente i, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ es un vector de pesos sociales y $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ representa las dotaciones iniciales de los agentes.

Como ya fue dicho existe una relación de dependencia lineal entre las ecuaciones de 16, 4.2 item (4), de forma tal que sólo $n-1$ de ellas son linealmente independientes, que nos permite reducir el sistema a $n-1$ ecuaciones: Por otra parte como nos restringimos a valores de $\lambda \in E^{n-1}_{++}$ es posible trabajar con $(n-1)$ variables endógenas, la solución hallada para este sistema reducido, será también solución para el sistema completo. Consideraremos a la función exceso de utilidad como una función con dominio en el espacio producto formado por la semiesfera positiva E^{n-1} y R^{nl} con recorrido R^{n-1} es decir: $e_w(\cdot)E_{n-1} \times R^{nl}_{+} \to R^{n-1}$. El sistema 16, puede ser escrito en forma reducida como:

$$e(\lambda, w) = 0.$$

El **Teorema de Transversalidad** nos permitirá mostrar que con mucha generalidad este sistema es resoluble estableciendo relaciones funcionles en las que λ representará el vector de variables dependientes (endógenas) mientras que w representará al conjunto de variables independientes (exógenas). Este teorema dice que si la matriz $M \times N$ de derivadas de $f : U_1 \times U_2 \to R^M$ donde $U_1 \subset R^M$, $U_2 \subset R^N$ $Df(x; q)$ evaluada en $(x, q) : f(v, q) = 0$ tiene rango M entonces para casi todo q la matriz de derivadas respecto a x, $D_x f(x; q)$ evaluada en $(x, q) : f(x, q) = 0$ tiene rango M. Este teorema no lo demostraremos aquí por exceder ampliamente los márgenes de estas notas, su demostración puede encontrarse en por ejemplo [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

En nuestro caso el lugar de f lo ocupará la función exceso de utilidad, siendo las variables λ y w, respectivamente pesos sociales y dotaciones iniciales. Es fácil verificar que la matriz $n-1 \times nl$ que define $De(\lambda, w)$ tiene rango $n-1$. Basta para ello derivar respecto de las variables w_{ij} con $i = 1, 2, ...(n-1)$ y segunda coordenada j fija.

Ahora usando el teorema de transversalidad podemos concluir que para casi toda dotación inicial $w \in R^{nl}$ la economía definida por $\mathcal{E} = \{\succeq_i; w_i; i = 1, 2, ..., n\}$ es regular.

Como inmediata consecuencia de la continuidad de la función determinante se sigue que si w define una economía regular, el número de elementos en E^{n-1} que anulan a la función $e(\dot{,}w) = 0$ es localmente constante.

De esta forma el conjunto de economías regulares se puede considerar como la unión de los abiertos en los que el número de equilibrios es constante, por lo tanto el complemento de este conjunto, es decir aquellas economías en las en todo entorno suyo el número de equilibrios cambia es un conjunto cerrado y como consecuencia del teorema de transversalidad de medida cero. Estas economías representadas por sus dotaciones iniciales serán llamadas **Economías Singulares.**

Un concepto central en la topología diferencial es el de transversalidad.

Definición 57 Funciones sobre variedades *Sean M y N variedades C^r Toda función (o mapa) $f : M \to N$ de clase C^r define en cada $x \in M$ una función linea $\partial f(x)$ que lleva T_xM en $T_{f(x)}N$, si tiene el mayor rango posible, decimos que f es*

- **Inmersión** *en el punto p si $dimM \leq dimN$.*
- **Submersión** *en el punto p si $dimM \geq dimN$.*

El concepto de mapa se usará como sinónimo de función.

Definición 58 *Sean M y N variedades y $f : M \to N$ una función C^r. Sea Z una subvariedad de N y x un punto de M. Entonces f intersecta transversalmente a Z en x si una de las siguientes condiciones es satisfechas:*

(a) $f(x) \notin Z$, *o*

(b) $f(x) \in Z$ *y además* $T_{f(x)}N = T_{f(x)}Z + \partial f(x)T_xM$

- *Si $A \subseteq Z$ decimos que f intersecta a Z transversalmente si f es transversal a Z para todo $x \in A$.*

Si $Z = \{z\}$ f transversal a Z significa que z es un valor regular para f.

Ejemplo 59 *Sea $M = R = Z$, $N = R^2$, y $f(x) = (x, x^2)$. Entonces f es transversal a Z para todo $x \neq 0$.*

Teorema 60 *(***Teorema de Transversalidad:)** *Sean M, P, N y $Z \subset N$. (Solamente M puede tener borde. Supongamos que $f : M \times P \to N$ es una función C^r con $r > max[0, dimM + dimZ - dinN]$. Para toda $p \in P$ obtenemos una función $f_p : M \to N$ definida como: $f_p(x) = f(p, x)$. Entonces si f es transversal a Z se tiene que el conjunto de los $p \in P$ para los cuales f_p es transversal a Z es denso en P.*

Aplicando este teorema a la función $e : E^{n-1}_{++} \times \Omega \to R^n$, donde por Ω representamos el conjunto de consumo en este caso: $(R^l_+)^n$, obtenemos el siguiente teorema:

Teorema 61 *El conjunto de las economías regulares es abierto y denso en Ω, concomitantemente el conjunto de las economías singulares es magro (unión numerable de conjuntos con interior vaciío).*

Prueba: La prueba se obtiene a partir de la observación trivial de que $rankJ_w e(\lambda, w) = n-1$, luego el teorema de transversalidad considerando $M = E^{n-1}_{++},\ P = \Omega$, $N = R^{n-1}$ y $Z = 0$ permite concluir con que para casi todo w, $detJ_\lambda e_w(\lambda) \neq 0$ y por lo tanto la economía $\mathcal{E} = \{\succeq_i, w_i\}$ es regular.

A continuación profundizaremos en la caracterización del conjunto de equilibrios y obtendremos nuevas propiedades de las economías singualres.

7 Economías Singulares

Comenzaremos esta sección caracterizando el conjunto de los pares $(\lambda, w) \in E^{n-1} \times \Omega$ para los que se cumple que $e(\lambda, w) = 0$.

Definición 62 *Llamaremos* **Variedad de Equilibrios** *al conjunto:*

$$\mathcal{V} = \left\{ (\lambda, w) \in E^{n-1}_{++} \times \Omega : e(\lambda, w) = 0 \right\}$$

donde e es la función exceso de utilidad.

En términos de transversalidad el teorema de la función implícita puede enunciarse como sigue:

Teorema 63 (Teorema de la Función Implícita II) *Sea $f : M \to N$ una función de clase C^r. Si $Z \subset N$ una variedad sin borde, es tal que tanto f, como f restringida a la forntera de M, $f/\partial M : \partial M$ son transversales a Z, entonces $f^{-1}(Z)$ es una variedad C^r, $\partial f_{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \cap \partial M$ y además $dimf^{-1}(Z) = dimM - (dimN - dimZ)$, esto es $f^{-1}(Z)$ tiene en M la misma codimensión que Z en N.*

Como consecuencia del teorema de la función implícita II, obtenemos:

Teorema 64 *El conjunto $\mathcal{V}$ es una variedad de dimensión nl.*

Prueba: Para probar este teorema basta aplicar el teorema anterior a la función $e : E_{++}^{n-1} \times \Omega \rightarrow R^{n-1}$ considerando $Z = \{0\}$. Luego $e^{-1}(\{0\})$ será una variedad en las condiciones indicadas en el teorema de la función implícita.

Teorema 65 *Para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$ se tiene que:*

$$\mathcal{V}_K = \left\{(\lambda, w) \in E_{++}^{n-1} \times K : e(\lambda, w) = 0\right\}$$

es una variedad compacta.

Prueba: Considere la sucesión $\{(\lambda_n, w_n)\}$ convergente a (λ, w), con $\lambda \in \partial E_{++}^{n-1}, w \in K$ por ser la función e continua si $|e(\lambda_n, w_n)|$ se mantuviera acotada se obtendría una contradicción con el hecho de ser $e(\cdot, w)$ una función propia.

Una bf economía $\mathrm{E} = \{u_i, w_i\}$ es **singular** si existe $\bar{\lambda}$ para el que $e(\bar{\lambda}, w) = 0$ y $rank J_\lambda e(\bar{\lambda}, w) < n-1$. El teorema de transversalidad nos muestra que casi toda economía es regular, referido a las propiedades de diferenciación esto dice que la función exceso de utilidad es generalmente todo lo buena que puede ser como función diferenciable, es decir que su jacobiano es una matriz de rango máximo en la mayoría de los casos, y por lo tanto los equilibrios de la economía presentan un comportamiento en general (tipicamente) similar. Ahora nos ubicaremos desde la persepectiva del conjunto *raro* de los equilibrios fuera de este conujunto mayoritario, Nuestro interés se centrará ahora en las economías singulares. Si bien un conjunto pequeño como se desprende del teorema de transversalidad, son la economías singulares las responsbles por los grandes cambios en el comportamiento de las economías. También son ellas las responsables por la existencia de la no unicidad global del equilibrio walrasiano. Pues el número de equilibrios se modifica unicamente si el $det J_\lambda e(\lambda, w)$ se anula, y esto sólo sucede en las singularidades, por lo tanto ellas determinan el cambio en el signo del índice de la función exceso de utilidad y la consecuente multiplicidad del equilibrio como se desprende del la igualdad a 1 de la suma de los índices de la función e. La necesaria existencia del equilibrio, asociada al hecho de que si las dotaciones iniciales representan un óptimo de Pareto entonces el equilibrio walrasiano es único, prueban el papel que cumplen las economías singulares como desecadenantes de la multipliciad de equilibrios. Una **condición necesaria y suficiente** para la existencia de unicidad global dei equilibrio walrasiano es que la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad, una vez definidas las preferencias se mantenga de rango constante $n-1$ para toda dotación inicial de los agentes.

Describiremos a las economías por sus funciónes exceso de utilidad, $e : E_{++}^{n-1} \times X \rightarrow R^{n-1}$, donde X es el espacio producto formado por los espacios de consumo de cada agente, en nuestro caso estos serán R_+^{l-1}. Llamaremos a las variables $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ variables de estado, mientras que $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ serán llamadas variables de control o exógenas. En estado de equilibrio, establecidos los parámetros w los posibles valores de λ para los que $e(\lambda, w) = 0$ determinan el estado del sistema (el equilibrio en el que se encuentra la economía). Perturbciones externas sobre los parámetros pueden hacer cambiar el equilibrio del sistema, pero generalmente pequeñas modificaciones en estos parámetros no alterarán demasiado al equilibrio, esto es lo que sucede tipicamente, pues tipicamente las economías son regulares. No obstante en ciertos casos pequeñas modificaciones en los valores de w pueden producir grandes cambios, esto sucede en las proximidades de una singularidad. Llamaremos **Catástrofe** a una transición brusca de un estado a otro de equilibrio producido por modificaciones pequeñas de los parámetros. Clasificaremos a las singularidades en primera aproximación en dos grandes clases, equilibrios singulares (o críticos) no degenerados, y equilibrios singulares (o críticos) degenerados. Esta distinción queda basicamente definida por el corango de la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad. Mientras que los primeros son de corango 1, los restantes son de corango mayor que 1. En general el corango es una medida de cuan degenerado es un valor crítico. A los efectos de introducir la Teoría de Catástrofes en Economía permitasenos considerar el siguiente ejemplo, de gran generalidad como luego veremos.

Ejemplo 66 *Consideremos una economía de dos agentes con dos bienes, con dotaciones iniciales* $w_i = (w_{i1}, w_{12});\ i = 1, 2$. *Supondremos que la dotación inicial agregada (oferta agregada) está fija, sea esta* $W = (W_1, W_2)$. *Será entonces*

$$W_j = w_{1j} + w_{2j},\ j = 1, 2 \ \ (*)$$

siendo w_{ij} *la dotación inicial en el bien* j *del agente* i. *Las dotaciones iniciales pueden sufrir redistribuciones pero supongamos momentaneamente que el total no puede ser modificado, es decir* W *es un vector cuyas coordenadas son constantes.*

La variedad de equilibrios quedará representada aquí por :

$$\mathcal{V}_W = \left\{(\lambda, w) \in E^{n-1}_{++} \times \Omega, : e(\lambda, w) = 0,\ w_{1j} + w_{2j} = W_j; j = 1, 2\right\}$$

El equilibrio quedará caracterizado por los $(\lambda, w_{i1}, w_{i2})$ *para los que* $e_i(\lambda, w_{i1}, w_{i2}) = 0$, *siendo suficiente considerar, por la ley de Walras, solamente la función exceso de utilidad de uno de los agentes. Además conocida una de las coordenadas de* λ *conoceremos la otra por ser* λ *es un elemento de* E^1_{++} λ *un elemento de* E^1_{++}, *por lo tanto coonsideraremos a la función excceso de utilidad del agente* i *como función solamente del correspondiente valor de* λ. *Conocidas las dotaciones iniciales de uno de los dos agentes la condición (*) permite determinar automaticamente, las correspondientes dotaciones del otro agente.*

Supongamos que la función exceso de utilidad del agente 1 es:

$$e_1(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) = 3W_1\lambda_1 - 3w_{11}(\lambda_1)^{\frac{1}{3}} + w_{22}. \tag{17}$$

En términos de la teoría de catástrofes λ_1 es la variable de estado mientras que w_{11} y w_{22} serán en este caso los parámetros.

Los equilibrios de esta economía serán entonces los valores de $(\lambda_1, w_{11}, w_{22})$ que anulen 17 y los correspondientes $(\lambda_2, w_{21}, w_{12})$ obtenidos a partir de ellos.

Llamaremos **Superficie de Catástrofe** a

$$C_F = \{(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) : det J_{\lambda_1} e_1(\lambda_1, w_{11}, w_{22}) = 0\}.$$

Las economías cuyas dotaciones iniciales pertenezcan a este conjunto serán llamadas singulares. En este caso la superficie de catástrofes queda definida por:

$$C_F = \left\{(\lambda, w_{11}, w_{22}) : \frac{\partial e_1}{\partial \lambda_1} = 3W_1 - w_{11}\lambda_1^{-\frac{2}{3}} = 0\right\}.$$

Explicitamente:

$$C_F = \left\{\left(\frac{w_{11}}{3W_1}\right)^{\frac{3}{2}},\ \ w_{11},\ \ \frac{2(w_{11})^{\frac{3}{2}}}{(3W_1)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Proyectando en el espacio de parámetros obtendremos el llamado **Conjunto de Bifurcación:**

$$B_F = \left\{w_{11},\ \frac{2(w_{11})^{\frac{3}{2}}}{(3W_1)^{\frac{1}{2}}}\right\}.$$

Este conjunto queda representado en el espacio de parámetros w_{11}, w_{22} por una parábola, al atravesar la cual el número de equilibrios de la economía cambia. Las economías cuyas dotaciones iniciales pertenecen a este conjunto son la economías singulares. Al atravesar esta curva la cantidad de equilibrios se modifica de 1 a 3 o reciporcamente.

El nḿero de equilibrios queda determinado por el discriminante

$$\Delta = 27\left(\frac{w_{11}}{W_1}\right)^2 - 4\left(\frac{w_{22}}{W_1}\right)^3$$

de esta manera obtenemos que si:

- $\Delta < 0$ existen tres equilibrios regulares.
- $\Delta > 0$ existe un equilibrio regular
- $\Delta = 0,\ w_{11}w_{12} \neq 0$ un equilibrio crítico (o singular) y uno regular.

La matriz Hessiana de la función considerada es singular, como veremos más adelante esto prueba que el equilibrio crítico es degenerado.

La moderna teoría de Catastrofes, nos muestra que es posible reducir el análisis de las catástrofes a unos pocos casos típicos. Entendemos que conocer los posibles conjuntos de catástrofe que pueden aparecer en una economía en particular ayudaría a predecir las posibles modificaciones abruptas que dicha economía puede sufrir. Dedicaremos la siguiente sección a analizar algunos aspectos de dicha teoría y sus aplicaiones a la Economía.

8 Catástrofes y Economía

La Teoría de Cataśtrofes muestra que es posible reducir a unos pocos casos paradigmáticos el comportamiento de sistemas *cuasiestáticos* en las proximidades de sus singularidades. Comenaremos analizando el caso maś sencillo de funciones reales. En este caso las economías serán economías de dos agentes, que pueden ser caracterizadas plenamente por el comportamiento de una de las dos componentes de la función exceso de utilidad. Veremos que en este caso, el comportamiento de las economías en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado, queda totalmente determinado por el teorema de Morse, mientras que en el caso de equilibrios críticos o singulares degenerados, si los parámetros relevantes no son más de cuatro, una de las llamadas **7 catástrofes elementales** describen completamente dicho comportamiento, [Castrigiano, D.; Hayes, S.].

Luego analizaremos casos un poco más generales, especialmente las llamadas singularidades de tipo **con pliegues** y las de tipo **cúspide.** Entendemos que el estudio del comportamiento económico a partir de consideracniones provenientes de la teoría de Catástrofes, puede ser de ayuda para comprender y prever posibles cambios bruscos futuros en el desarrollo de una economía. La descripción cuasi estática de los fenómenos propia de la Teoría de Catástrofes se adapta bien a las características similares de la Teoría Económica.

Nota 67 Notación *A lo largo de esta sección diremos que una función ϕ es*

- **suave** *o* **de clase** C^∞ *si para todo entero k es diferenciable k veces.*
- $C^\infty(X,Y)$ *si es diferenciables de cualquier orden de X en Y.*

8.1 Economías con dos Agentes

Consideraremos economías con dos agentes y l bienes, en este caso la economía queda caracterizada por las dotaciones iniciales de los agentes w y basta considerar (por la Ley de Walras) una de las dos componentes (e_i por ejemplo) de la función exceso de utilidad como función de las dotaciones iniciales y (por la homogeneidad de grado cero de la función exceso de utilidad) el valor de λ correspondiente a uno de los agentes (por ejemplo λ_i).

Sea entonces $e_i.(0,1) \times \Omega \to R$ es decir e_i pone en correspondencia $(\lambda_i, w) \to e_i(\lambda_i, w)$.

Definición 68 *Una* **función** f *se dice* **de Morse** *si el conjunto de singularidades de* f *es no degenerado.*

Teorema 69 *Sea* X *una variedad diferenciable. Entonces el conjunto de funciones de Morse es un conjunto abierto y denso dentro del conjunto* $C^\infty(X, R)$.

Prueba: Es resultado inmediato del teorema de transversalidad.

A continuación veremos que el comportamiento de las economías de dos agentes en las proximidades de equilibrios críticos no degenerados, está totalmente determinado por el teorema de Morse.

Teorema 70 (Teorema de Morse) *Sea* $f : X \to R$. *Entonces* p *es un punto crítico no degenerado de* f *si y solamente si existe un difeomorfismo* ψ *local (en un entorno* U_p *de* p*) tal que:*

$$f(\psi(y)) = f(p) - y_1^2 - \ldots - y_s^2 + y_{s+1}^2 + \ldots + y_n^2 \tag{18}$$

se cumple para todo $y \in U_p$.

Nota 71 *Por definición:* s *y* n *son el índice y el rango de* f *en* p.

Aplicado a las economías que aquí estamos considerando, el teorema de Morse nos permite decir que en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado, el comportamiento de las funciones exceso de utilidad será análogo. Obsérvese que cambios en los parámetros que impliquen difeomorfismos no modifican el caracter de la singularidad de un punto, de ahí que pueda decirse que economías que no presenten equilibrios singulares degenerados se comporten similarmente (a menos de difeomorfismos) en las proximidades de la singularidad. La existencia y características particulares de los equilibrios críticos degenerados propios de cada economía, diferencian los comportamientos de los sistemas económicos en las vecindades de los equilibrios críticos. Veremos que es posible diferenciar grados de degeneración de los equilibrios críticos y que es posible clasificar a las economías según tal característica que depende unicamente de sus fundamentos, en particular de las preferencias de los agentes.

El teorema de Morse, nos permite decir entonces, que en las proximidades de un equilibrio crítico no degenerado $(\bar{\lambda}, \bar{w})$ existe un difeomorfismo ϕ, tal que localmente la función exceso de utilidad tiene la forma:

$$e_i(\psi(\bar{\lambda}_i, \bar{w})) =^{+} -\bar{\lambda}_i - \bar{w}_1^2 - \ldots - \bar{w}_s^2 + \bar{w}_{s+1}^2 + \ldots + \bar{w}_n^2.$$

Para las economías consideradas $n = 2l$, pues cada $\bar{w}_j$ representa a una de las coordenadas de las dotaciones iniciales de los agentes.

Como puede verificarase ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.] Un punto crítico p de f es no degenerado sí y solamente sí la matriz Hessiana es invertible. Por lo tanto esta caracterización da una forma sencilla de saber si un equilibrio crítico es o no degenerado.

Recordemos que la matriz hessiana de f es la matriz

$$\partial^2 f = \left\{ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right\}.$$

El siguiente teorema es un corolario del teorema de la función inversa.

Teorema 72 *Los puntos críticos no degenerados son puntos aislados.*

Prueba: Sea p un punto crítico no degenerado de f y sea $\phi = \partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$. Entonces $J\phi(p) = \partial^2 f(p)$ es invertible y por lo tanto ϕ es un difeomorfismo local en p. Luego por el teorema de la función inversa existen abiertos U que contiene a p y V de $\phi(p)$ donde phi es inyectiva. Esto implica que $\partial f(x) = \phi(x) \neq \phi(p) = \partial f(p) = 0$.

En consecuencia, como los equilibrios regulares, los equilibrios críticos no degenerados serán localmente únicos, y en cantidad finita si las dotaciones iniciales están definidas en un subconjunto compacto del espacio de consumo.

Para funciones de Morse vale que, el conjunto de ellas cuyos valores críticos son diferentes es residual, ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

Recordamos que un conjunto es llamado residual si es intersección numerable de conjuntos abiertos densos. De esta forma la probabilidad de economías con múltiples equilibrios singulares es nula. Más formalmente, el conjunto de las economías de dos agentes con múltiples equilibrios singulares. es *raro*, es decir es comlemetario de un conjunto resudual.

8.2 Economías con Pliegues

A continuación cosideraremos economías con un número finito de bienes y agentes y estudiaremos las características y posibiliades de ocurrencia de un tipo de singularidad llamada pliegue. La caractirización de los equilibrios de una determinada economía depende del comportamiento de la matriz jacobiana de la función exceso de utilidad en el punto en cuestión, en primer término, el hecho de que su rango sea menor que el esperado nos dice si el equilibrio es o no cr'ıtico. El grado en que disminuya el rango de dicha matriz, es una medida de la degeneración del equilibrio cr'ıtico.

Las similitudes en el comportamiento en un entorno de una punto, presentadas por funciones cuyos polinomios de Taylor coinciden en dicho punto, será la base para la clasificación de las singularidades.

Entramos aquí de lleno en un problema central de la Teoría de Catástrofes, a saber cuando una función $C^\infty(X,Y)$ está **determinada** en el entorno de un punto, es decir, cuándo funciones que tienen el mismo desarrollo de Taylor en un punto p coinciden, a menos de un cambio de cordenadas producido por un difeomorfismo en un entrono de un punto? En general esto no sucede, las condiciones necesarias y suficientes para que una función quede caracterizada por su k-ésimo polinimio de Taylor están dadas en [Mater, J.]. En estas notas no alcanzaremos a tratae este punto, no obstante veremos que funciones que presenten polinomios de Taylor iguales hasta cierto grado (a menos de difemorfismos en sus coordenadas) presentarán un comportamiento similar en las proximidades de sus puntos críticos degenerados.

Daremos a continuación algunas definiciones y notación básica de la Teoría de Catástrofe, imprescindibles para continuar con nuestro trabajo de clasificación de singularidades.

Definición 73 Germen. *Sean X e Y variedades diferenciables F_1, $F_2 : X \to Y$ funciones diferenciables, tales que $F_1(p) = F_2(p) = q$. Diremos que ambas funciones son equivalentes si coinciden en un entorno de p, el espacio de clases de equivalencia así definido, será llamado espacio de Gérmenes, siendo $[F]_p$ el* **Germen** *de F* **en p** *la clase de equivalencia correspondiente a F.*

Notaremos como **E** al espacio de gérmenes. La determinación es local, el punto en el que está considerado el germen será explicitado cuando haya riesgo de confusión

Definición 74
- *Sea k un entero no negativo. Dos gérmenes $[f]$ y $[g]$ en* **E** *se dicen* **k-equivalentes** *en p $D^h f(p) = D^h g(p)$ para todo h tal que $|h| < k$.*
- *La clase de los gérmenes k-equivalentes con $[f]$ es llamada el* **k-jet de** *$[f]$ y es denotada por $j^k[f(p)]$.*
- *Notaremos por $J^k(X,Y)_{p,q}$ al espacio de clases de gérmenes k-equivalentes en p, esto es el espacio de k- jets con fuente p y objetivo q.*

- *Un elemento*

$$\sigma \in \quad J^k(XY) = \cup_{(p,q)\in X\times Y} J^k(XY)_{p,q}.$$

es llamado **k-jet.**

Si X e Y son variedades diferenciables con $n = dimX$ y $m = dimY$ entonces $J^K(X,Y)$ es una variedad diferencial cuya dimension es igual a $n+m+$ la dimensión del espacio formado por la suna directa de todos los polinomios de grado menor o igual que k con no más de m variables.

Obsérvese que cualquier función exceso de utilidad, puede presentar valores críticos que no sean el cero, es decir un determindo valor $K \in R^{n-1}$ puede ser crítico para la función e en el sentido de que existan puntos , preimágenes por e de K donde el Jacobiano se anule. Unicamente serán equilibrios aquellos puntos $(\lambda, w) \in E_{++}^{n-1}$ que anulen a la función e. Es decir solamente los k-jet σ con objetivo cero, $\sigma \in J(X,Y)_{p,0}$ donde $X = E_{++}^{n-1} \times \Omega$ e $Y = R^{n-1}$. sean los que representan el comportamiento de la función exceso de utilidad en las proximidades de los equilibrios.

Nota 75 Notación

- *Aquí $D^h f$ define las derivadas $\frac{\partial^{|h|} f}{\partial x_1^{h1} \ldots \partial x_n^{hn}}$ donde $|h| = \sum_{j=1}^{n} h_j$ considerando todas las posibles formas de sumar $|h|$ con $h_i \geq 0 \;\; i = 1, 2, ..., n$.*

- *A los efectos de evitar confusiones con la notación representaremos de ahora en más a la matriz jacobiana de f evaluada en p por $(\partial f)_p$.*

- *Como rank$(\partial f)_p$ notaremos el rango de la matriz jacobiana en p. Representa el número máximo de columnas o filas linealmente independientes que la matriz posee.*

- *Definimos el rango de σ como rank σ = rank$(\partial f)_p$ y corank $\sigma = q -$ rank σ donde $q = min\left\{dimX, dimY\right\}$.*

Sea $f : X \to Y$ un elemento representativo de σ, existe un mapa $j^k f : X \to J^K(X,Y)$ tal que a cada punto $p \in X$ lo pone en correspondencia con $j^k f(p)$ la clase de equivalencia de f en $J^k(X,Y)_{p,f(p)}$. En nuestro caso nos interesa prestaremos especial atención a la clase de correspondencia $J^k e(p)$, que el mapa $J^k e$, asigna a cada punto $p = (\lambda, w)$ de equilibrio.

Cada $\sigma \in J^1(X,Y)$ define un único mapa lineal de $T_p X \to T_q Y$, el que queda determinada por la transformación lineal que el jacobiano evaluado en $p \;\; (\partial f)p$, de cualquier elemento $f \in C^\infty(X,Y)$, representativo deσ.

Sea:

$$S_r = \left\{\sigma \in J^1(X,Y) : corank\ \sigma = r\right\}$$

el subconjunto de $J^1(X,Y)$ formado por las clases de equivalencia de todas las funciones $f : X \to Y$ suaves, cuyo corango es r, es decir por los jets de corango r. Puede probarse que este conjunto es una subvariedad de $J^1(X,Y)$, con $codim\ S_r = (n-\mu+r)(m-\mu+r)$, ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

La codimensión de las singularidades de tipo S_r descarta su ocurrencia en el caso de funciones entre variedades de rango menor que el corango de la variedad. De esta forma economías de dos agentes con a lo sumo dos parámetros no presentarán singularidades diferentes de las que en S_1 pueden existir. Veremos que estas sólo pueden ser o tipo pliegue o tipo cúspide.

El conjunto de singularidades de f en los que el jacobiano de f resulta de corango r se representará por $S_r(f) = (j^1 f)^{-1}(S_r)$. De esta manera $S_r(e)$ representará el conjunto de los puntos críticos de e nuesto interés radica en el estudio del comportamiento de la función exceso de utilidad en las proximidades de los equilibrios críticos, es decir de aquellos puntos de la variedad $X = E^{n-1}_{++} \times \Omega$ donde no solamente el jacobiano tiene determinante nulo, sino donde a la vez la función toma el valor cero.

Definición 76 *Sea $f : X \to Y$ tal que $(j^1 f)$ es transvesal a S_1. Entonces x en $S_1(f)$ es un punto de pliegue si $T_x S_1(f) \oplus Ker(\partial f)_x = T_x X$.*

El estudio de los equilibrios críticos no degenerados supone el análisis de $S_1(e)$ es decir del preimagen por $j^1 e$ del conjunto de jets de corango 1 con objetivo 0..

Sea $f : X \to Y$ siendo $dimX \geq dimY$ y $\mu = dimX - dimY$. En el caso de ser $j^1 f$ transversal a S_1 tendremos que $S_1(f)$ será una variedad cuya codimensión satisface:

$$codimS_1(f) = codimS_1 = \mu + 1$$

ver [Golubitsky, M. Guillemin, V.]. Note que la dimensión en un punto x de $S_1(f)$ del $ker(\partial f)_p$ es $\mu + 1$. Es decir el espacio tangente a $S_1(f)$ y el $ker(\partial f)_p$ tienen dimensiones complementarias.

Siendo e la función exceso de utilidad tendremos que el conjunto de singularidades de la función exceso de utilidad es una variedad de $codimS_1(e) = nl + 1$, de la cual es subconjunto el conjunto de los equilibrios críticos no degenerados.

El comportamiento de las economías en las proximidades de los equilibrios de pliegue queda caracterizado por el siguiente teorema.

Teorema 77 *Sea $f : X \to Y$ una submersión con pliegues y sea $p \in S_(f)$. Entonces existe un sistema de coordenadas $x_1, x_2, ..., x_n$ centrado en p ye $y_1, y_2, ...y_n$ centrado en $f(p)$ tal que en estos sistemas f tiene la forma:*

$$(x_1, x_2, ..., x_n) \to (x_1, x_2, ..., x_{m-1}, x_m^2 \pm ... \pm x_n^2)$$

La demostración puede verse en [Golubitsky, M. Guillemin, V.].

La forma local que adquiere la función en un entorno de la singularidad p, justifica el nombre de pliegue. Obsérvese que en el caso de considerar solamente variedades de dimensión 2, la forma normal (local) de la función en el sistema de coordenadas señalado en el teorema , está dada por $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2^2)$. Esta transformación se puede obtner haciendo las siguientes operaciones geométricas:

1) Primeramente se mapea el plano (x_1, x_2) en el cilindro parabólico $x_3 = x_2^2$ en en el espacio (x_1, x_2, x_3) por el mapa $(x_1, x_2) \to (x_1, x_2, x_2^2)$, es decir se **pliega** el plano,

2) y ahora proyectamos en el plano (x_1, x_3). Completando así el plegado.

Obsérvese que en este caso $S_1(f)$ será un variedad de dimensión 1 cuyo plano tangente se mantiene ortogonal al plano x_2, x_3 que coincide con el $ker(\partial f)_p$

Nótese también que en el caso de ser $Y = R$ el conjunto de las submersiones con pliegues son precisamente las funciones de Morse.

En el caso de economías como las presentadas en el ejemplo de la sección (7) y en general para mapas entre variedades de dimensión 2, las únicas singularidades posibles son del tipo $S_1(e)$, pues $S_2(e)$ no puede ocurrir desde que su codimensión es 4. Es posible demostrar que sólo pueden existir dos tipos de comportamientos en las proximidades de singularidades, o de equilibriios críticos:

- $T_pS_1(e) \oplus Ker(\partial e)_p = T_pX$.
- $T_pS_1(e) = Ker(\partial e)_p$

Luego de cambios de los cambios pertinentes en las coordenadas veremos que, la primera ocurrencia representará una singularidad de tipo pliegue y la segunda una de tipo cúspide. El ejemplo presentado en la sección (7) es representativo del comportamiento de las economías en las proximidades de sus equilibrios críticos degenerados.

Si bien es posible continuar con el análisis de los equilibrios críticos mediante técnicas provenientes de la Teoría de Catástrofes, pondremos acá punto final a estas notas, pues proseguir supone la utilización de técnicas complejas de la Teoría de Catástrofes lo que escapa de los objetivos de perseguidos aquí.

Esperamos que las notas sean motivadoras del estudio de la economía y su formalización, y que hayan mostrado las posibilidades que abre al conocimiento del comportamiento de los sistemas económicos la utilización adecuada de técnicas matemáticas.

8.3 Conclusiones

Dado que el análisis de las singularidades es de entre todos los temas tratados en estas notas el menos conocido, incluiremos unas breves consideraciones finales sobre el mismo: En primer lugar hay que decir que no hay muchos trabajos que analicen las singularidades, el trabajo de [Balasko, I] es referencia obligada. Creemos que en genral el estudio de los equilibrios críticos profundizaría nuestro conocimiento actual sobre el comportamiento de las economías, en particular la utilización para la consideración del tema, de la función exceso de utilidad da gran generalidad al análisis por su amplias posibilidades de aplicarse en forma análoga a economías con infinitos bienes. El método pone en evidencia además la fuerte relación existente entre las funciones de utilidad de los agentes y comportamientos inesperados, catastróficos, de las economías.

La Teoría de Catástrofes permite nuevas clasificaciones en las economías, mas allá de la división entre regulares y singulares, muestra la existencia de diferencias fuertes dentro de las economías singulares. Podemos caracterizar a las economías por medio de sus equilibrios críticos, hecho este que esperamos haber dejado entrever: *economías con el mismo tipo de equilibrios cr'íticos presentan similitudes estructurales fuertes, que se reflejan en su comportamiento, en el momento de cambios abruptos.* Este hecho da la posibilidad de agrupar a las economías en tipos diferentes de acuerdo a sus singularidades. Agrupando en una misma clase de equivalencia, aquellas que presenten las mismas singularidades, pues su comportamiento será muy parecido. El cojnuto de las economías posibles podr´ıa dividirse en clases según el tipo de singularidades presentes hacciendo abstracción de otrass diferencias. La presencia directa de las funciones de utilidad de los agentes en la función exceso de utilidad muestra que ellas son las responsables de última instancia del comportamiento de los sistemas económicos y sus modificaciones lentas o abruptas.

References

[Accinelli, E. (96)] *Some Remarks on Uniqueness of Equilibrium in Economies with Infinitely Many Goods.* Estudios Económicos **vol 6** 1996.

[Accinelli, E.(99)] *On Uniqueness of Equilibrium for Complete Markets with Infinitely Many Goods and in Finance Models* Estudios de Economía, Vol 26. No 1 juno 1999.

[Aliprantis, C.D.; Border, K. C.] *Infinite Dimensional Analysis.* Springer-Verlag, 1994.

[Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkins haw, O.] *Existence and Optimality of Competitive Equilibrium.* Springer-Verlag, 1990.

[Araujo, A. (1989)] *The Non-Existence of Smooth Demand in General Banach Spaces.* Journal of Mathematical Economics, **17,** 1 - 11.

[Araujo, A.] *Introducao a Economia Matematica.* Proyecto Euclides.

[Arrow, K. J.] *Social Choice and Individual Values,* 2da ed. New York, Willey.

[Arrow, K. Debreu, G.] *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* Econometrica 22, 265-290; 1954.

[Balasko, I] *Foundations of the Theory of General Equilibrium* Academic Press, INC. 1988.

[Berge, C.] *Topological Spaces.* N.Y Macmillan, 1963.

[Castrigiano, D.; Hayes, S.] *Catástrophe Theory.* Adisson-Wesley Publishing C. 1993.

[Debreu, G.] *Theory of Value.* Yale University Press, 1959.

[Fishburn, P.C] *Utility for Decision Making.* N.Y. Willey, 1970.

[Green, J.; Heller, W.P.] *Mathematical Analysis a Convexity with Applications to Economics.* Handbook of Mathematical Economy, vol 1. Elsevier, 1981.

[Golubitsky, M. Guillemin, V.] *Stable Mappings and Their Singularities.* Springer-Verlag, New York -Hedelberg-Berlin, 1973.

[Guillemin, V. Pollak, A.] *Differential Topology.* Englegood Cliff, NJ: Prentice-Hall, 1974.

[Halmos, R.P.] *Naive Set Theory.* New Yoek, Springer-Verlag, 1974.

[Karatzas, I; Lakner, P; Lebocky, J.; Shreve, S.] *Equilibrium in a Simplified Dynamic, Stochastic Economy with Heterogeneous Agents* Stochastic Analysis, Academic Press Inc. 1991.

[Kelly, J] *Topología General* New York Von Nostrand, 1955.

[Lima, E.] *Curso de Análise* Vol 2. Ed. IMPA, Projeto Euclides, 1981.

[Mas-Colell, A.] *General Equilibrium: A Differentiable Approach.* Cambridge 1985.

[Mas-Colell, A. 1986] *The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Spaces.* Econometrica **54** 1039-1053.

[Mas-Colell, A. Whinston, M.] *Microeconomic Theory.* Oxford 1995.

[Mas-Colell, A. Zame] Handbook of Mathemaical Economy, vol 4. Elsevier 1981

[Mater, J.] Stability of c^{∞} mappings: III. Publ. Math. IHES 35, 1968, 127- 156.

[Mendelson, B.] *Introduction to Topology.* Dover Publications Inc. (tercera edición) 1975.

[Negishi, T.] *Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* Metroeconomica 12, 1960.

[Milnor, J.] *Topology from the differentiable Viewpoint.* Charlottesville:University Press, Virginia, 1965.

[Suppes, P.] *Teoría Axiomática de Conjuntos.* Editorial Norma, 1968.

[Sen, A.] *Social Choice Theory.* Ch 22 Handbook of Mathematical Economics, 1986. North Holland.

[Schaffer, H.H] *Topological Vector Sppaces.* Ed. Board, 1964.

[Takayama, A.] *Mathematical Economy.* Dryden Press, 1974.

[Walras, L.] *Elements d' Economie Politique Pure.* Lausanne, París, 1900.

[Zeeman, C.] *Uma Introducao Informal À Topología das Superficies.* Monografías de Matemática No. 20 IMPA.