Universidad de la República
Facultad de Ciencias Sociales
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Notas Docentes

Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en Economía. Parte I

Elvio Accinelli

Nota Docente No. 10

Elementos de Topología y de la Teoría de Conjuntos en Economía. Parte I.

Elvio Accinelli *

Agradecimientos

Las presentes notas fueron escritas durante el período comprendido entre los meses de febrero y marzo del 2000 en la Universidad de Antioquia, en el que el autor permaneció en la referida Universidad como profesor visitante.

La estancia resultó altamente estimulante y placentera gracias a la buena disposición de los integrantes, docentes y funcionarios de la Coordinación de Posgrados en Economía. Particularmente deseo agradecer a su director, Remberto Rhenals, a los profesores Gustavo López, Pedro Ramirez, Oliva Sierra, Jorge Lotero, Elkin Castaño y a Gloria María Valencia secretaria de la referida unidad de posgrados, por su buena voluntad para conmigo.

Debo decir también que me he quedado gratamente sorprendido por la unidad de objetivos científicos del grupo que conjuga a matemáticos y economistas de esta Universidad, donde la diversidad de formaciones y opiniones logra enriquecer al conjunto. Lamentablemente esta interdisciplinariedad sobre bases de la Matemática y la Teoría Económica es un hecho raro en las universidades de América Latina en las que muchas veces aun hoy, a pesar de sus avances como disciplina, resulta la Economía Matemática incomprensible para matemáticos y para economistas.

La participación de estudiantes de matemática y economía altamente interesados en problemas de la Economía Matemática muestra la vitalidad y posibilidades futuras de desarrollo del grupo en diferentes áreas de la Teoría Económica

Deseo agradecer a los participantes del seminario por su atención e interés, e intercambio de opiniones con las que me vi beneficiado y por las múltiples correcciones que han sugerido a estas notas, cuyos errores y carencias son responsabilidad exclusiva del autor.

*Quiero agradecer a Gabriel Brida quien corrigió innumerable cantidad de errores e imprecisiones presentes en la primera versión de estas notas. Los que persisten siguen siendo de responsabilidad del autor. Facultad de Ingeniería, IMERL. Facultad de Ciencias Sociales, Departamento de Economía. Montevideo Uruguay. **e-mail:** elvio@fing.edu.uy

Quedo muy agradecido por la hospitalidad de la familia del profesor Gustavo López por las numerosas atenciones que tuvo para conmigo mismo y mi familia.

1 Introducción

Las presentes notas, solamente son notas de clase y como tales no pretenden, ni mucho menos ser exhaustivas de los temas tratados. Intentan mostrar la fuerte relación existente entre la economía moderna fuertemente formalizada y algunas áreas de la matemática, especialmente la teoría de conjuntos y la topología. Pretenden sí, ser una guía para el estudio de los temas tratados, los que pueden ser encontrados sobradamente en libros de Topología General como [Kelley, J.L.] para la parte matemática, y [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.] para la Teoría Económica. Como textos introductorios citamos [Mendelson, B.] para la parte de topología, cuya lectura es amena y motivadora, análogamente el texto de [Araujo, A.] resulta de valiosa ayuda para entender los fundamentos del Equilibrio General. Para quienes decidan dedicar cierto tiempo al estudio de la Economía Matemática la lectura de [Mas-Colell, A.] resultará altamente motivadora y desafiante.

Se pretende avanzar de manera autocontenida, introduciendo las herramientas matemáticas según las necesidades del planteo económico, mostrando la posibilidad y ventajas de la utilización de dichas herramientas para la resolución de difíciles problemas propios de la Teoría Económica.

Entendemos que el economista si pretende ser creador en el momento de intentar resolver problemas propios de la realidad económica sobre la que desea actuar debe dominar la herramienta específica de su área de trabajo. Saber demostrar teoremas no es asunto sólo de matemáticos, es imperioso también para quienes pretenden trabajar con teorías altamente formalizadas, muchas áreas de la economía lo son. Es por dos motivos entonces que demostraremos teoremas a lo largo de estas notas. El primero es por el imperativo lógico de probar lo que se afirma, el segundo para intentar *mostrar como se demuestran teoremas,* algunos propiamente matemáticos y otros cuya demostración es exclusivamente responsabilidad del economista. Queda a cargo del lector ejercitarse en el arte de la demostración con aquellos teoremas enunciados y no demostrados en las notas.

La necesidad y la posibilidad de intercambio entre economistas y matemáticos hace imprescindible el conocimiento de las herramientas, lenguaje y métodos de los campos respectivos en el momento de conformar grupos de trabajo con objetivos en el desarrollo de la teoría económica moderna. Un matemático puede hacer importantes aportes a la Teoría Económica en la medida en que ayude a resolver problemas que surgen de ella misma, sin pretender simplificar ésta para lograr bonitas aplicaciones. Un economista puede plantear importantes desafíos a la matemática en la medida en que conozca las posibilidades y limitaciones de la referida teoría.

La necesidad del pensamiento matemático es propio de cualquier teoría formalizada, aunque en lugar de puntos de un espacio hable de cestas de bienes, y en lugar de puntos fijos de equilibrios competitivos. En matemática, puntos, rectas o cualquier concepto primitivo no responden a ningún ente real aunque como tales puedan ser pensados, es precisamente por esta posibilidad de múltiple reencarnación que estos conceptos encuentran su lugar en cada ciencia formalizada donde se mimetizan con la realidad que niegan. La relación entre los conceptos primitivos de la Teoría Económica corresponde establecerla al economista y, sin pecado contra la llamada realidad económica, puede deducir resultados que ayudarán a explicarla, muchas veces a la manera de la Matemática.

Pretendemos con estas notas desafiar a los estudiantes de matemática a pensar en temas de economía con cabeza de economista y a los economistas a estudiar seriamente matemática, con cabeza de matemático.

Haremos el supuesto básico de agentes económicos racionales, que buscan maximizar su propio bienestar. El agente hará elecciones racionales, de acuerdo con alguna regla que le permita elegir una de las mejores cestas de bienes, de acuerdo con sus posibilidades y gustos. Esta cesta maximizadora del bienestar del agente es la llamada función demanda, cuyas propiedades y características estudiaremos.

Luego analizaremos la posibilidad de la existencia de un equilibrio, es decir de conseguir una distribución de bienes que satisfaga a todo el mundo, dentro de sus posibilidades y donde se distribuya todo y exactamente todo lo producido por la sociedad. Aunque parezca idílico esto es posible y no necesita de agentes exteriores que velen por la felicidad de los agentes económicos. Naturalmente es posible no sentirse satisfecho con la distribución de la riqueza que se obtiene, pero ésta corresponde a condiciones iniciales cuya modificación si involucra al economista, en todo caso no es a él sólo.

Supondremos siempre que la cantidad de bienes existentes en la sociedad puede ser grande pero en definitiva finito. Hay modelos económicos que se modelan sobre espacios de dimensión infinita, son modelos llamados con infinitos bienes, donde estos deben ser considerados como bienes contingentes a posibles estados de la naturaleza o instantes de tiempo.

Conceptos tales como espacios métricos, espacios topológicos, continuidad de funciones y conceptos tales como convexidad y concavidad serán introducidos en el momento en que sean necesarios para representar el comportamiento de los agentes económicos. Resultará de gran utilidad para el lector interesado en conocer más sobre cuales herramientas matemáticas son de mayor utilización en la economía moderna, la consulta al texto de [Green, J.; Heller, W.P.].

2 Conjuntos Ordenados

Esta sección está dedicada a mostrar la posibilidad de ordenar un conjunto cualquiera. La herramienta principal para esto será el concepto de relación binaria. Relacionaremos este orden con el comportamiento selectivo de un agente económico que debe elegir entre diferentes cestas de consumo aquellas que prefiere. Veremos que suponiendo racionalidad en el momento de elegir, cada agente introducirá un orden en su espacio de consumo, es decir en el conjunto de las cestas de bienes que le son accesibles.

Mostraremos la relación entre relaciones binarias que definen un orden y las preferencias de cada agente, de las que partiremos como concepto inicial en el momento de analizar el funcionamiento de una economía.

2.1 Conjuntos

Supondremos la existencia de al menos un conjunto no vacío al que representaremos por A, esto es, de una colección de objetos y una regla que permite decidir si un objeto x cualquiera pertenece, o no a la referida colección. Notaremos como $x \in A$ la relación x pertenece al conjunto A. Si fuera necesario podemos pensar en este conjunto como el conjunto de bienes en los cuales un determinado agente hace una elección. Para el lector motivado a profundizar en la axiomática de los conjuntos la lectura de [Suppes, P.] es altamente recomendable, aunque supera con creces lo necesario para la buena comprensión de estas notas.

Partiremos de los siguientes axiomas:

1) **Axioma de Unicidad** Si los conjuntos A y B tienen los mismos elementos, entonces son idénticos, es decir, $A = B$ si y solamente si cada vez que $x \in A$ entonces $x \in B$ y recíprocamente.

2) **Axioma de Unión** Dados dos conjuntos A y B existe un conjunto que tiene todos los elementos de A, todos los de B y ningún otro, lo representamos por $A \cup B$..

3) **Axioma de Diferencia** Para dos conjuntos cualesquiera A y B siempre existe otro que contiene los elementos de A que no están en B. Este conjunto será representado por $A - B$.

4) **Axioma de Existencia** Existe al menos un conjunto no vacío.

Obsérvese que no es preciso axiomatizar la existencia de la intersección de dos conjuntos $A \cap B$ pues $A \cap B = A - (A - B)$.

Llamaremos **Producto Cartesiano** $A \times B$ al conjunto de pares ordenados (a, b) con $a \in A$, y $b \in B$.

2.2 Relaciones Binarias

Con objeto de definir en un conjunto cualquiera una relación de orden, . introduciremos a seguir, el concepto de relación binaria En definitiva un conjunto ordenado no es más que un conjunto en el que hay definida una relación binaria que cumple las propiedades que a continuación detallaremos.

Definición 1 *Una* **Relación Binaria** *en $A \times B$ es cualquier subconjunto de $A \times B$.*

Una relación binaria ϕ quedará entonces determinada si tenemos un criterio que nos permita decidir si dada una pareja (a, b) ella pertenece o no al subconjunto que define la relación ϕ.

Definición 2 *Una relación binaria $\succeq$ en $X \times X$ es un* **preorden en** X *si ella es:*

- *reflexiva, $(a, a) \in \succeq \forall a \in X$.*
- *transitiva, si $(a, b) \in \succeq$ y $(b, c) \in \succeq$ entonces $(a, c) \in \succeq$. para todo $a, b, c, \in X$.*

Si además la relación es completa, esto es si se verifica que, em para todo par $(a, b) \in \succeq$ ó $(b, a) \in \succeq$ para todo $a, b \in X$, decimos la relación es un **preorden completo.**

Definición 3 *Una preferencia es un preorden completo.*

Diremos que a es estrictamente preferido a b cada vez que $a \succeq b$ pero no $b \succeq a$ y lo notaremos como $a \succ b$.

2.3 Relaciones de Equivalencia y Particiones

Una relación binaria ϕ define una **Relación de Equivalencia** si y solamente si satisface las siguientes propiedades:

1) Reflexiva, (a, a) pertenece a la relación ϕ para todo $a \in X$.

2) Transitiva, si (a, b) y (b, c) pertenecen a la relación ϕ, entones (a, c) es también elemento de la relación ϕ.

3) simétrica, si cada vez que una pareja (a, b) pertenece a la relación ϕ, entonces la pareja (b, a) también es un elemento de ϕ.

Una relación de equivalencia ϕ divide al espacio en clases disjuntas tales que la unión de ellas es todo el espacio. Estas clases se llaman **clases de equivalencia** cada una de ellas queda definida a partir de un elemento arbitrario a de X, siendo la clase de a el conjunto de todos los elementos de X que están en relación con $a : I_a = \{x \in X : (x.a) \in \phi\}$.

Obsérvese que las clases de equivalencia de dos elementos diferentes a y b de X o son la misma o son subconjuntos disjuntos.

Un conjunto $A_\alpha, \alpha \in I$ de subconjuntos de X, es una **partición** de X si a satisface las siguientes propiedades:

(1) $A = \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$

(2) $A_\alpha \cap A_{\alpha'}$ es el conjunto vacío cada vez que α diferente de α'.

Teorema 4 *Toda relación de equivalencia en X define una partición de X y recíprocamente.*

3 Preferencias

El agente económico debe seleccionar bienes dentro de lo que llamaremos su **Espacio de Consumo** al que representaremos por X. En este espacio las preferencias del agente, a las que representaremos por $\succeq$, introducen un preorden completo .

Definición 5 *Una* **Relación de Preferencias** *es una relación binaria sobre $X \times X$, que es completa, reflexiva y transitiva.*

Generalmente a lo largo de estas notas X será un subconjunto de R^l, una **Cesta de Bienes** se representará por $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$ donde cada x_i es un real, si $X = R^l_+$ entonces x_i será un real no negativo, que indica la cantidad del bien $i = 1, 2, ..., n$ disponible en la cesta..

Notaremos la afirmación x *es al menos tan bueno cuanto* y *como* $x \succeq y$ **o bien** $(x, y) \in \succeq$.

Recordamos que como todo preorden completo, $\succeq$ divide al espacio de consumo en clases de equivalencia, representaremos por

$$I_x = \{y \in X : y \succeq x \ , \ x \succeq y\}$$

la **clase de equivalencia de** x esto es el conjunto de cestas de consumo que son indiferentes a x, según las preferencias del agente. De esta forma $y \in I_x$ cada vez que $y \succeq x$ a la vez que $x \succeq y$.

Diremos que x es **estrictamente preferido** a y, lo que notaremos como $x \succ y$, si $(x, y) \in \succeq$ pero no se cumple $(y, x) \in \succeq y$.

Ejercicio: Mostrar que una relación de preferencias, define un orden completo sobre el espacio de las clases de indiferencia.

Entendemos como **Orden** en un conjunto a una relación binaria ϕ: que es reflexiva, transitiva y antisimétrica. (ϕ es antisimétrica si cada vez que $x \neq y \in \phi$ entonces $y, x \notin \phi$.)

3.1 Ejemplos de Relaciones de Preferencia

Ejemplo 6 *Orden Lexicográfico. Sea* $X = R^2_+$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $x_1 > y_1$ *o, si* $x_1 = y_1$, *siempre que* $x_2 \geq y_2$.

Verificar que es una relación de preferencias. Hallar las clases de indiferencia. Mostrar que el orden lexicográfico es un orden completo.

Ejemplo 7 *Sea* $X = R^2_+$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $x_1 \geq y_1$.

Verificar que es una relación de preferencias, dibujar en el plano las clases de indiferencia, este caso estarán representadas por curvas de nivel o de isopreferencia, *lugar geométrico de las cestas igualmente preferidas.*

Ejemplo 8 *Sea* $X = R^2_+$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $min\{x_1, x_2\} \geq min\{y_1, y_2\}$.

Mostrar que es una relación de preferencia, dibujar la curvas de isopreferencia de $(1, 3)$ mostrar la dirección de crecimiento las curvas de isopreferencia.

Ejemplo 9 *Sea* $X = R^2_+$ *escribimos* $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$ *cada vez que* $x_2 \geq y_2$. *Verificar que es una relación de preferencias, dibujar en el plano las clases de indiferencia (en este caso están representadas por curvas de nivel o de isopreferencia).*

3.2 Convexidad de las Preferencias

Comenzaremos la sección con la definición de conjunto convexo. Básicamente ésta se refiere al hecho de tener un conjunto la propiedad de que si dos puntos cualesquiera pertenecen a él entonces el segmento de recta que los une (la combinación convexa de ellos) pertenece enteramente al conjunto. Formalmente:

Definición 10 *Decimos que un conjunto* X *es* **convexo** *si y solamente si, para todo* $\lambda \in [0, 1]$ *siendo* x, *e* y *elementos de* X *se cumple que* $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$

Sea X convexo, decimos que una relación de preferencia $\succeq$ sobre X es:

- **convexa** si cada vez que $x \succeq z$ e $y \succeq z$ y para todo $0 < \alpha < 1$ se tiene que; $\alpha x + (1-\alpha)y \succeq z$.
- **estrictamente convexa** si cada vez que $x \succeq z$ e $y \succeq z$ y para todo $0 < \alpha < 1$ se tiene que; $\alpha x + (1-\alpha)y \succ z$.

La convexidad en las preferencias representan el gusto por la diversidad, dadas dos cestas cualesquiera en la misma clase de indiferencia una combinación convexa de ellas es al menos tan buena como cada una de las anteriores para el agente con preferencias convexas, y estrictamente preferible para un agente con preferencias estrictamente convexas.

Ejercicio: Mostrar que el ejemplo 3 anterior representa preferencias convexas, que no son estrictas. Dibujar para este caso la curva de isopreferencia correspondiente a la combinación convexa $\alpha = \frac{1}{2}, \ \ x = (1,3), y = (3,1)$.

Un punto importante a resolver es el relacionado con las modificaciones en el comportamiento de un agente ocasionadas por modificaciones pequeñas en las cestas de bienes que le son ofrecidas. Supongamos que un agente prefiere estrictamente una cesta x a una cesta y, *será que si los componentes de x se modifican poco, la cesta x' conformada a partir de esta modificación seguirá siendo estrictamente preferida a la cesta y?* La respuesta depende ciertamente de las características de las preferencias y de lo que entendamos por pequeñas modificaciones.

Para responder en forma rigurosa a esta pregunta definiremos preferencias continuas en espacios topológicos. Para efectos de hacer estas definiciones más intuitivas comenzaremos trabajando en espacios métricos, los que como veremos son un caso particular de los espacios topológicos.

Preferencias que impliquen comportamiento similar frente a modificaciones pequeñas de las cestas las llamaremos continuas. De éstas nos ocuparemos en las siguientes dos secciones.

4 Espacios Métricos y Continuidad de las Preferencias

La noción de distancia es la que nos permite decidir sobre la proximidad de distintos objetos. En nuestro caso la usaremos para definir proximidad entre cestas de bienes. Para efectos de ponernos de acuerdo sobre proximidades relativas precisaremos introducir una noción de distancia que nos sea común, esto lo haremos definiendo en un conjunto cualquiera X, una función d a la que llamaremos métrica o distancia, y al par (X, d) lo llamaremos Espacio Métrico.

Definición 11 *Un* **Espacio Métrico** *es un par (X, d) donde X es un conjunto cualquiera no vacío y d una función real $d : X \times X \to R$ que cumple las siguientes propiedades:*

1) $d(x, y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$.

2) $d(x, y) = 0$ si y solamente si $x = y$.

3) $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$.

4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para todo $x, y, z \in X$

Ejemplo 12 *Verificar que cada una de las funciones que se presentan en los ejemplos siguientes satisfacen la definición de distancia.*

a) (R, d), *siendo* $d(x, y) = |x - y|$

b) (R^2, d) *tal que:* $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$

c) (R^2, d') *siendo* $d'(x, y) = max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$

d) (R^2, d'') *donde,* $d''(x, y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$

Obsérvese que sobre un mismo conjunto pueden definirse distintas métricas, por lo cual la noción de proximidad depende de la métrica introducida, así por ejemplo la distancia entre $(1, 2)$ y $(3, 1)$ es $\sqrt{5}$ con la métrica del caso b) y 2 según c). No obstante esta diversidad de métricas, muchas de ellas son equivalentes, en el sentido de que definen los mismos conjuntos abiertos. Analizaremos esto, más adelante, en la sección dedicada a espacios vectoriales topológicos

4.1 Conjuntos Abiertos y Conjuntos Cerrados

Comenzaremos definiendo la noción de entorno de un punto, como veremos a partir de esta noción podremos introducir criterios de vecindad, sin necesidad de restringirnos a espacios en los que hay definida una métrica.

Definición 13 *Sea* (X, d) *un espacio métrico, sea* a *un elemento de* X. *Un subconjunto* $U_a \in X$ *se llama* **Entorno de** a *si existe* $\delta > 0$ *tal que la bola abierta de centro* a *y radio* δ $B_\delta(a) \subset U_a$.

Donde $B_{\delta(a)} = \{x \in X : d(x, a) < \delta\}$

La colección $\mathcal{N}_a$ de todos los entornos de a se llama **base de entornos del punto.** Decimos que existe una base de entornos numerable $\mathcal{N}_a$, si cada vez que para todo entorno U de a existe $V \in \mathcal{N}_a$, tal que $V \subset U$. En el caso de que para cada punto $a \in X$ existe una base numerable de entornos, decimos que el conjunto es **numerable de primer orden,** o que satisface el **Primer Axioma de Numerabilidad.**

Nota 14 *Un subconjunto* A *de* (X, d) *es* **Abierto** *si es entorno de cada uno de sus puntos.*

Una colección de conjuntos abiertos, es llamada una **Base** para los conjuntos abiertos, si cada conjunto abierto es unión de conjuntos de esta colección. Por ejemplo el conjunto de las bolas abiertas en un espacio métrico forman una base para los abiertos. Cuando existe una base numerable decimos que el conjunto X satisface el **Segundo Axioma de Numerabilidad.**

Decimos que un punto x pertenece al **Interior de un conjunto** A si A es entorno de x. Denotaremos por $int(A)$ al conjunto de los puntos interiores de A.

Llamamos **Frontera de un conjunto** A y lo denotaremos como $fr(A)$ al conjunto de puntos que no son interiores al conjunto ni a su complemento. Si $x \in fr(A)$ entonces en todo entorno suyo existen puntos de A y de A^c distintos de x.

Definición 15 *Un subconjunto F de (X, d) se dice* **Cerrado** *si su complemento $F^c = X - F$, es abierto.*

Teorema 16 *Un subconjunto de (X, d) es abierto si y solamente si todos sus puntos son interiores.*

La prueba queda a cargo del lector.

Teorema 17 *Toda bola abierta $B_\delta(a)$ es un conjunto abierto.*

Prueba Se trata de probar que todo punto es interior. Suponga que $b \in B_\delta(a)$ demuestre que existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta(b) \subset B_\delta(a)$, es decir que para todo $x \in B_\eta(b)$, se cumple que $d(x, a) < \delta$. Verifique que alcanza con elegir $\eta < \delta - d(a, b)$.[]

Teorema 18 *Sea (X, d) un espacio métrico, entonces:*

i) *Φ es abierto.*

ii) *X es abierto.*

iii) *Intersección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

iv) *Unión arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.*

Prueba (i) Para que el conjunto vacío no fuera abierto tendría que contener al menos un punto. (ii) Para todo $x \in X$ existe δ tal que $B_\delta(x) \subset X$. (iii) Cada conjunto de la intersección es abierto y por lo tanto un entorno de cada uno de sus puntos. Pruebe que la intersección de dos entornos es un entorno, luego proceda por inducción, entonces la intersección de una cantidad finita de entornos de un punto sigue siendo entorno de un punto, por lo tanto la intersección de una cantidad finita de abiertos es un abierto. (iv) Todo elemento en la unión pertenece al menos a uno de los abiertos que la componen, este es por lo tanto un entorno del elemento contenido en la unión.[]

Un punto $b \in X$ se llama **Punto de Acumulación** de A si todo entorno de b contiene al menos un punto de A distinto de b.

Teorema 19 *Sea F un subconjunto de un espacio métrico (X, d), F es cerrado si y solamente si contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Prueba Verifique que si un conjunto contiene a todos sus puntos de acumulación entonces su complemento es abierto y recíprocamente.[]

Volvamos ahora a las relaciones de preferencia, nuestro objetivo es analizar cuando dos cestas de bienes próximas en su composición lo están en los gustos del agente.

Diremos que:

Definición 20 *Una preferencia es* **semicontinua superiormente** *si para todo $x \in X \subset R^n$ el conjunto $S_x = \{y \in X : y \succeq x\}$ es cerrado.*

La definición anterior implica que el complemento de S_x es abierto. Es decir que si un elemento $z \in X$ es tal que x es estrictamente preferido a z, entonces elementos próximos a z, en el sentido de la métrica definida sobre X, son estrictamente menos preferidos que x.

Definición 21 *Una preferencia es* **semicontinua inferiormente** *si para todo $x \in X$ el conjunto $L_x = \{y \in X : x \succeq y\}$ es cerrado.*

Análogamente, la definición anterior implica que el conjunto de las cestas de bienes estrictamente preferidas a x, $\{y \in X : y \succ x\}$ es un conjunto abierto. Esto es si una cesta de bienes y es preferida a la cesta x entonces elementos en las proximidades de y seguirán siendo preferidas estrictamente a x.

Cuando una preferencia verifica ambas condiciones decimos que la preferencia es **continua.**

Ejemplo 22 *El orden lexicográfico no es un orden continuo. Considere el caso cuando $X \subset R^2$ demuestre que para todo $x \in R^2$ el conjunto S_x no es cerrado. Cuáles son en este caso las curvas de isopreferencia?*

4.2 Representación de preferencias por funciones

La posibilidad de representar preferencias por funciones abre las posibilidades de emplear en la teoría económica las herramientas de la teoría de funciones y del análisis. La teoría económica puede entonces valerse de un poderoso instrumento para resolver problemas que le son propios.

Comenzaremos definiendo el concepto de función.

Definición 23 *Sean A y B dos conjuntos. La correspondencia que asocia cada elemento $x \in A$ con un único elemento $f(x) \in B$ es llamada una función. Lo que escribiremos como*

$$f : A \to B.$$

El conjunto A es llamado **Dominio** de la función f. Llamaremos **Imagen** de f al subconjunto de B formado por aquellos $y \in B$ para los que existe $x \in A$ tales que $f(x) = y$. Decimos que una función f es de A en B si su dominio es A y su imagen es subconjunto de B. Si la imagen de f es todo B decimos que f es una función *sobre.*

Para $f : A \to B$ y $M \subset B$ definimos:

Definición 24 *Conjunto preimagen de M como:*

$$f^{-1}(M) = \{x \in A : f(x) = b, \ \ \forall b \in M\}.$$

Decimos que una preferencia es representable por una función $u : X \to R$ (a la que llamaremos función de utilidad) cuando:

$$x \succeq y, \text{ si y solamente si } u(x) \geq u(y).$$

Una cuestión importante es la de obtener las condiciones que nos permitan tal representación. Para ver que las cosas no son tan fáciles mostremos un contraejemplo, es decir mostremos que existen preferencias que no pueden ser representadas por funciones de utilidad.

Para mostrar un contraejemplo apelemos al orden lexicográfico ya considerado.

Ejemplo 25 *El orden lexicográfico no puede ser representado por funciones de utilidad.*

Prueba de la afirmación: Razonemos por el absurdo. Supongamos que existe una función $u : X = R^2_+ \to R$ que representa al orden lexicográfico.

De acuerdo a las preferencias se tiene que: $(r, 1) \succ (r, 0)$ donde $r \in R_+$, se sigue que $u(r, 1) > u(r, 0)$. Existe por lo tanto un racional $\phi(r)$ tal que: $u(r, 1) > \phi(r) > u(r, 0)$. Sea ahora $r' > r$ se cumple que: $u(r', 1) > \phi(r') > u(r', 0)$. Por lo tanto, como:

$$\phi(r') > u(r', 0) > u(r, 1) > \phi(r)$$

la función $\phi : R_+ \to Q$ así definida es estrictamente creciente y por tanto inyectiva, lo que es un absurdo pues la cardinalidad de R_+ es mayor que la de Q.

Recordamos que:

$f : D \to R$ se dice monótona creciente si y solamente si para todo $\alpha \geq \beta$ $f(\alpha) \geq f(\beta)$.

$f : D \to R$ se dice estrictamente creciente si y solamente si para todo $\alpha > \beta$ $f(\alpha) > f(\beta)$.

No obstante las cosas no son tan malas como parecen y con bastante generalidad podemos afirmar que las preferencias son representables por funciones de utilidad.

El siguiente teorema es de gran generalidad, muestra que en condiciones muy amplias una preferencia es representable por una función de utilidad continua. En su versión más general el teorema hace uso del concepto de *espacio numerable de segundo orden.* Daremos en la sección sobre representación de preferencias una demostración sobre bases un poco más restrictivas pero suficientemente generales, como para ser válido en cualquier espacio real de dimensión finita. Una prueba general puede encontrarse en [Fishburn, P.C]-

Teorema 26 *Si X es numerable de segundo orden toda preferencia continua es representable por una función de utilidad continua.*

Digamos simplemente que el conjunto $X = R^n$ con cualquier métrica es para todo n numerable de segundo orden, por lo tanto toda preferencia continua en R^n es representable por una función de utilidad continua. Lo que esto sugiere inmediatamente es que en la medida que una preferencia sea representable por una función continua, ella misma será continua y un agente con este tipo de preferencias presentará un comportamiento similar ante cestas de bienes cercanas en el sentido de la métrica definida en el espacio.

Qué falla en el caso de preferencias lexicográficas?

Un punto a tener en cuenta es que las funciones de utilidad no establecen una medida absoluta sobre las cestas de bienes, simplemente las ordenan relativamente. Más aun puede observarse que si una cierta función de utilidad u representa a cierta preferencia, entonces cualquier composición de u con una función monótona creciente f representa a la misma preferencia.

Por ser un concepto clave en el momento de introducir las funciones de utilidad como representantes del comportamiento de los agentes económicos, dedicaremos la siguiente sección al estudio de las funciones continuas.

4.3 Continuidad de Funciones

Como referencia básica para esta sección puede consultarse el libro Introduction to Topology, de Bert Mendelson, y como referencia avanzada el libro de Topología General de Kelley el que por otra parte es referencia para todos los temas de topología tratados en estas notas.

No obstante poder definir continuidad en espacios más generales, comenzaremos trabajando en espacios métricos y luego avanzaremos hacia los espacios topológicos. La existencia de una función distancia nos permite definir el concepto de continuidad de funciones entre espacios métricos, éste puede frasearse diciendo que si f es una función de X en Y entonces es continua cada vez que distando poco x de $y \in X$ entonces $f(x)$ dista poco de $f(y) \in Y$, naturalmente en cada espacio usamos la métrica previamente definida en ellos, la que no es necesariamente la misma.

A los efectos de introducir el tema consideremos funciones reales con dominio real.

Definición 27 *Sea $X \subset R$, $f : X \to R$ decimos que f es continua en $a \in R$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in R$:*

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &< \epsilon \\ |x - a| &< \delta. \end{aligned}$$

1) Verifique que la función valor absoluto es una métrica en el conjunto de los reales.

2) Muestre la equivalencia entre esta definición de continuidad y la definición hecha a partir del concepto de límite.

Más generalmente podemos introducir la siguiente definición de continuidad para funciones entre espacios métricos cualesquiera:

Definición 28 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ decimos que f es continua en $a \in (X, d)$ si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo $x \in R$:*

$$\begin{aligned} d'(f(x), f(a)) &< \epsilon \\ d(x, a) &< \delta. \end{aligned}$$

Decimos que una **función es continua en** X si es continua para todo $a \in X$.

Los siguientes teoremas caracterizan a las funciones continuas en términos de entornos y abiertos, lo que nos va a permitir generalizar el concepto de continuidad a un conjunto de espacios más amplio que el de los Espacios Métricos, el de los llamados Espacios Topológicos.

Teorema 29 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$, f es continua en X si y solamente si para cada entorno M de $f(a)$ existe un entorno N de a tal que $f(N) \subset M$ o equivalentemente $N \subset f^{-1}(M)$.*

Teorema 30 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$, f es continua en $a \in X$ si y solamente si para cada entorno M de $f(a)$, $f^{-1}(M)$ es un entorno de a.*

Teorema 31 *Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$, f es continua en $a \in X$ si y solamente si para cada conjunto abierto O de Y $f^{-1}(O)$ es un subconjunto abierto de X.*

Daremos a continuación la prueba del primer teorema dejando para el lector la prueba del segundo y del tercero.

Prueba Sea f continua, dado un entorno M, cualquiera de $f(a)$ debemos encontrar un entorno N de a tal que $f(N) \subset M$. Por ser M entorno de $f(a)$ existe $B_\epsilon(f(a)) \subset M$, y por la continuidad de f en a existe δ tal que $f(B_\delta(a)) \subset B_\epsilon(f(a))$. Luego como todo abierto es entorno de cada un de sus puntos se sigue la afirmación. *Reciprocamente,* sabemos que para cada entorno M de $f(a)$ existe N entorno de a tal que $f(N) \subset M$. Sea $M = B_\epsilon(f(a))$, existe N entorno de a tal que $f(N) \subset B_\epsilon(f(a))$. Por ser N un entorno de a existe $B_\delta(a) \subset N$ tal que, $f(B_\delta(a)) \subset f(N) \subset B_\epsilon(f(a))$.[]

Los teoremas anteriores dan una caracterización de las funciones continuas en términos de conjuntos abiertos. En su forma más general podemos frasear la continuidad diciendo que: *una función de X en Y ambos espacios topológicos, es continua si y solamente si la preimagen de un conjunto abierto en Y es un conjunto abierto en X.*

Esto hace pensar que quizás no haya necesidad de introducir una función distancia para definir continuidad de funciones. Basta con saber cuales son los abiertos de los espacios que una función relaciona y verificar si verifica que la preimagen de un abierto es un abierto del espacio de partida.

Un espacio en el que están definidos sus conjuntos abiertos es llamado Espacio Topológico, a ellos dedicaremos algunas líneas en la siguiente sección.

5 Espacios Topológicos

Desde el punto de vista de la Teoría Económica la existencia de una métrica es una restricción. En principio un espacio de consumo no tiene por que ser un espacio métrico, el agente económico introduce un orden en su espacio de consumo al estar dotado de preferencias, pero aunque con certeza tiene alguna noción de las cestas de bienes que les gustan más o menos, o de vecindad entre ellas, no necesariamente tiene por qué haber una métrica, en el conjunto de las cestas de bienes.

Este concepto de vecindad puede modelarse con la noción de entorno de un punto, cuya existencia es independiente de la existencia de una función de distancia. Al introducir el concepto de Espacio Topológico el modelo adquiere una mayor generalidad, los espacios métricos serán un caso particular de Espacio Topológico.

Los espacios topológicos son uno de los más fructíferos conceptos matemáticos y como veremos a continuación un marco adecuado para la Teoría Económica.

Definiremos ahora una relación de vecindad I en un espacio X, a la que llamaremos topología del espacio.

Definición 32 *Sea X un conjunto no vacío e $\mathcal{I}$ una colección de subconjuntos de X tales que:*

(i) $X \in \mathcal{I}$.

(ii) $\phi \in \mathcal{I}$.

(iii) Si $O_1, O_2, \ldots, O_n \in \mathcal{I}$, entonces la intersección de ellos también pertenece a $\mathcal{I}$.

(iv) Si para cada $\alpha, O_\alpha \in \mathcal{I}$ entonces la unión de todos ellos también es un elemento de $\mathcal{I}$.

El espacio $(X, \mathcal{I})$ es llamado **Espacio Topológico**, y los elementos de I son los conjuntos abiertos del espacio, las vecindades. Los elementos pertenecientes a un mismo conjunto abierto serán llamados vecinos .

Ejemplos de Espacios Topológicos

(1) Si en un espacio métrico arbitrario X, consideramos sus conjuntos abiertos (es decir los conjuntos formados por la unión de bolas abiertas) como los elementos de la colección I, entonces $(X, \mathcal{I})$ es un Espacio Topológico. Como ya fue dicho y demostraremos más adelante, para espacios de dimensión finita muchas métricas (aquellas que definen una topología de Hausdorff) definen los mismos abiertos.

(2) X cualquiera con $\mathcal{I} = \{\phi, X\}$ se llama *topología trivial.*

(3) X cualquiera con $\mathcal{I} = 2^X$ (el conjunto de todas las partes), es la topología con la mayor cantidad de abiertos, se conoce como la *topología discreta.*

(4) Considere cualquier conjunto X sea $\mathcal{I}$ una colección de subconjuntos de X tales que a él pertenecen: el conjunto vacío, el conjunto total, y las uniones arbitrarias de intersecciones finitas de elementos de sus elementos. $(X, \mathcal{I})$ es un espacio topológico.

5.1 Entornos, Conjuntos Abiertos y Cerrados en Espacios Topológicos

Definición 33 *Un subconjunto N de un espacio topológico se dice* **entorno** *de un punto $a \in X$ si contiene un abierto el que a su vez contiene a a.*

Definición 34 *Un subconjunto O de un espacio topológico se dice* **abierto** *si es entorno de cada uno de sus puntos.*

Definición 35 *Un subconjunto F de un espacio topológico se dice* **cerrado** *si su complemento $X - F$, es abierto.*

En tanto que a partir de una métrica d es posible definir una topología $\mathcal{I}$, los conjuntos abiertos y cerrados de un espacio métrico seguirán siendo tales en el espacio $(X, \mathcal{I})$.

Espacios de Hausdorff

Observe que si el conjunto de entornos que define la topología no es lo suficientemente grande es posible que no se pueda separar puntos diferentes de manera que existan entornos disjuntos que los contengan. Por ejemplo en el caso de la topología trivial no es posible ubicar dos puntos diferentes en entornos deferentes, No obstante esto es siempre posible si la topología es la discreta. Para que esto suceda no es necesario que la topología tenga tantos conjuntos abiertos como los definidos por la topología discreta, los espacios métricos con la topología creada a partir de la distancia euclidiana, tiene esta propiedad. En general diremos que:

Un espacio topológico X es Hausdorff cuando dados dos puntos $a \neq b$ de X, existen entornos diferentes disjuntos que los contienen.

5.2 Espacios Productos

Sean $(X_1, \mathcal{I}_1), (X_2, \mathcal{I}_2), \ldots, (X_n, \mathcal{I}_n)$, espacios topológicos, y sea $X = \Pi_{i=1}^{n}$ el espacio producto. Una topología para ese espacio, puede ser definida como el producto de las topologías de los factores de X. Como puede verse a partir del ejemplo 4 de la sección anterior hay diferentes posibilidades de construir en X una topología.

Una de ellas es la **Topología Producto:**

Definición 36 *El par $(X, \mathcal{I})$, donde $\mathcal{I}$ es la colección de subconjuntos de X que son uniones de conjuntos de la forma: $O_1 \times O_2 \times ... \times O_n$, donde cada O_i es un subconjunto abierto de $(X_i, \mathcal{I}_\rangle), i = 1, 2, ..., n$ es un espacio topológico llamado Espacio Topológico producto.*

El lector verificará que la colección $\mathcal{I}$ de la definición anterior es efectivamente una topología.

Demuestre el lector la siguiente afirmación:

En el espacio producto con la topología producto, un subconjunto N de X es un entorno de un punto $a = (a_1, a_2, ...a_n) \in N$ si y solamente si contiene un subconjunto de la forma: $N_1 \times N_2 \times ... \times N_n$, donde cada N_i es un entorno de a_i.

5.3 Continuidad en Espacios Topológicos

Anteriormente analizamos el concepto de continuidad de funciones en espacios métricoss, veremos a continuación que es posible definir este concepto con más generalidad en el marco más general de los espacios topológicos.

Caracterizaremos en esta subsección a las funciones y a las preferencias continuas en espacios topológicos. Daremos a continuación una definición de continuidad de funciones en espacios topológicos:

Definición 37 *Sea $f : (X, \mathcal{I}) \to (Y, \mathcal{I}')$, f es continua en $a \in X$ si y solamente si para cada entorno M de $f(a)$ existe N entorno de a tal que $f(N) \subset M$ o equivalentemente $N \subset f^{-1}(M)$. Diremos que f* es continua *si es continua en cada punto de X.*

En los espacios topológicos las funciones continuas quedan caracterizadas a través de cualquiera de los dos teoremas siguientes :

Teorema 38 *Sea $f : (X, \mathcal{I}) \to (Y, \mathcal{I}')$, f es continua si y solamente si para cada abierto O de Y $f^{-1}(O)$ es un abierto de X*

Prueba: Supongamos primeramente que f sea una función continua. Sea O un abierto en Y. Para cada punto $a \in f^{-1}(O)$, O es entorno de $f(a)$ entonces es $f^{-1}(O)$ un entorno de a, luego es $f^{-1}(O)$ un entorno de cada uno de sus puntos y por lo tanto un abierto. Recíprocamente, supongamos que preimagen de abierto es un abierto en X. Debemos probar que esto implica que la preimagen por f de un entorno en Y es un entorno en X. Sea N entorno de $f(a)$, por lo tanto existe en N un abierto B al que pertenece $f(a))$ y tal que a pertenece a $f^{-1}(B)$ el que es un conjunto abierto contenido en $f^{-1}(N)$.[]

Teorema 39 *Sea $f : (X, \mathcal{I}) \to (Y, \mathcal{I}')$, f es continua si y solamente si para cada conjunto cerrado F de Y $f^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado de X.*

La demostración de este teorema queda a cargo del lector, o bien puede consultarse en cualquier texto de Topología General.

Ejercicio Mostrar que si τ es una topología sobre X estrictamente menos fina (con menor cantidad de abiertos) que otra τ' entonces la función identidad $I : (X, \tau) \to (X, \tau')$ no es continua.

Así las funciones de utilidad, con dominio en un espacio topológico $(X, \mathcal{I})$ $u : X \to R$, serán continuas si y solamente si: *la preimagen por* u *de un abierto en* R *es un abierto de* X.

La siguiente definición generaliza el concepto de sucesiones de reales.

Definición 40 *Sea* $(\Gamma, \geq)$ *un conjunto dirigido, y sean* $\{x_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ *elementos de un espacio topológico* X, *el conjunto* $\{x_\alpha, \geq\}$ *es llamado* **Red.**

Un conjunto Γ se dice dirigido si está definido en él una dirección $\succeq$ es decir, una relación binaria reflexiva y transitiva con la propiedad adicional de que cada para cada par de elementos existe uno que sigue a ambos.

Diremos que una red en un espacio topológico X converge a un punto $a \in X$ si para todo entorno U de a existe $\alpha' \in (\Gamma, \geq)$ tal que para todo elemento de la red con $\alpha \geq \alpha', x_\alpha \in U$.

Puede demostrase que un subconjunto F de un espacio topológico es cerrado si y solamente si toda red en F convergente, converge a un elemento de F.

El siguiente teorema caracteriza a las preferencias continuas en espacios topológicos.

Teorema 41 *Para una preferencia* $\succeq$ *en un espacio topológico* X *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) La preferencia $\succeq$ es continua.

b) La preferencia $\succeq$ considerada como subconjunto de $X \times X$ con la topología producto es cerrado.

c) Si $x \succ y$ existen entornos U_x, U_y respectivamente de x, y tales que $a \succ b, \forall a \in U_x, b \in U_y$.

El teorema muestra que la continuidad de la preferencia es equivalente al hecho de que si consideramos una red de pares de cestas donde un elemento del mismo es estrictamente preferible al otro y estos pares se acercan a otro entonces lo mismo le sucederá al par límite. Y que si una cesta es estrictamente preferible a otra, existen vecindades respectivas donde lo mismo le sucede a cualquier par elegido de las vecindades respectivamente,

Prueba: El esquema de la demostración es el siguiente: $a \to c$; $c \to b$; $b \to a$.

(1) $a \to c$. Existen dos casos:

i) Existe $z \in X : x \succ z \succ y$, entonces los entornos respectivos serán:

$$U_x = \{a \in X : a \succ z\};\ U_y = \{b \in X : z \succ b\}.$$

Por la continuidad de las preferencias, los conjuntos considerados son abiertos Como $x \in U_x$ siendo U_x un conjunto abierto es entorno de x. análogamente para U_y. Luego como $a \succ z$ y $z \succ b$ por la transitividad de las preferencias se tiene que: $a \succ b$.

ii) No existe $z \in X : x \succ z \succ y$, $U_x = \{a \in X : a \succ y\}$ y $U_y = \{b \in X : x \succ b\}$. La conclusión se obtiene análogamente a lo probado en el item anterior, pero debe usarse para obtener el resultado final que no existe $z \in X : x \succ z \succ y$. luego si $a \in U_x$ se tiene que $a \succeq x$ y análogamente si $b \in U_y$ entonces $y \succeq y$. Aplique ahora la transitividad.

(2) $c \rightarrow b$. Probar que $\succeq$ es cerrada en $X \times X$ equivale a probar que si $(x_\alpha, y_\alpha) \in \succeq$ converge a (x, y) entonces este par también pertenece a la relación de preferencia.

Razonemos por absurdo, supongamos entonces que existe $(x_\alpha, y_\alpha) \in \succeq$ convergente a (x, y) y que este par no pertenece a $\succeq$, entonces $y \succ x$, luego por verificarse la afirmación c) y por la convergencia existe elementos de la red de pares y entornos de x e y respectivamente tales que $x_\alpha \in U_x, y_\alpha \in U_y$ y por lo tanto $y_\alpha \succ x_\alpha$, lo cual es absurdo.

(3) $b \rightarrow a$. Debemos mostrar a partir del hecho de que la preferencia es cerrada en $X \times X$ que los conjuntos $S_x = \{y \in X : y \succeq x\}$ y $L_x = \{z \in X : x \succeq z\}$ son cerrados. Para esto basta verificar que si $y_\alpha \in S_x$ converge a z, entonces z pertenece a S_x. análogamente, para toda red convergente de L_x. El lector debe completar la demostración.

5.4 Subespacios

El objeto de esta subsección es el de mostrar las posibilidades de construir un espacio topológico, sobre la base de un subconjunto no vacío $Y \subset X$ de un espacio topológico dado, definiendo como abiertos en el subconjunto, los abiertos del espacio original intersectados con el subconjunto en cuestión.

Sea $(X; \mathcal{I})$ un espacio topológico e $Y \subset X$, definimos la familia de subconjuntos de Y

$$\mathcal{I}' = \{\wr' \subset Y : \wr' = \wr \cap Y, \wr \in \mathcal{I}\}$$

El lector probará la siguiente proposición:

Proposición 42 *Sea $(X; \mathcal{I})$ espacio topológico e $Y \subset X$ no vacío, entonces $(Y, \mathcal{I}')$ es un espacio topológico.*

Decimos que $\mathcal{I}'$ es la **Topología Relativa** o Inducida por $\mathcal{I}$ en Y.

Llamaremos entornos relativos, cerrados relativos o abiertos relativos, respectivamente a los entornos, conjuntos cerrados o abiertos de esta topología.

Obsérvese que si A es un subconjunto de X el complemento de A respecto a Y A^{c_y} es igual al complemento de A en X intersectado con Y, $A^{c_y} = A^c \cap Y$.

Teorema 43 *Sea Y un subespacio de un espacio topológico $(X, \mathcal{I})$, entonces N' subconjunto de Y es un entorno relativo si y solamente sí existe N entorno en $(X, \mathcal{I})$, tal que: $N' = N \cap Y$.*

Prueba: Supongamos primeramente que N' es un entorno relativo de $a \in Y$. Existe entonces un conjunto $\wr'$ de $\mathcal{I}'$ incluido en N'. Siendo $\wr' = \wr \cap Y$ podemos definir $N = N' \cup \wr$, N será entonces entorno de a. Luego $N \cap Y = (N' \cup \wr) \cap Y = N' \cup (C \cap Y) = N'$.

Recíprocamente: Sea $N' = N \cap Y$, donde N es un entorno de $a \in Y$. Existe $\wr \in \mathcal{I}$ tal que $a \in \wr$, por lo tanto $a \in \wr \cap Y$, siendo $\wr' = \wr \cap Y$ un abierto relativo, se deduce $\wr' = \wr \cap Y \subset N \cap Y = N'$.[]

A continuación mostraremos que un conjunto cerrado relativo, se forma con la intersección de un conjunto cerrado en el espacio original, intersectado con el subconjunto en el que se pretende definir la topología relativa.

Teorema 44 *Sea $(Y, \mathcal{I}')$ subespacio del espacio topológico $(X, \mathcal{I})$. F' en Y es un conjunto cerrado si y solamente sí existe F cerrado en X tal que $F' = F \cap X$.*

Prueba: Siendo F' cerrado en Y, su complemento F'^c es un abierto relativo. Luego existe $\wr \in X$ tal que $F'^c = \wr \cap Y$ de donde se sigue que $F' = (\wr \cap Y)^c$ es decir que F' es el complemento de $\wr$ en Y es decir F' es el complemento de $\wr$ relativo a X interrsectado con Y, es decir $F' = \wr \cap Y$. recíprocamente: sea $F' = F \cap Y$ con F conjunto cerrado en X. Se sigue que: $F'^{c_y} = (F \cap Y)^{c_y} = F^c \cap Y$. Siendo F^c abierto en X se sigue que F'^{c_y} es un abierto relativo y que por lo tanto F' es cerrado relativo.[]

Ejercicio Verificar que si Y es subconjunto de X entonces, la transformación identidad:

$$i : (Y, \mathcal{I}') \to (X, \mathcal{I})$$

es continua.

Ejemplo 45 *Sea $a < b < c < d$, y sea $Y = [a, b] \cup (c, d)$ considerado como subespacio de la recta. Entonces $[a, b]$ es relativamente cerrado pues $[a, b] = [a, b] \cap Y$ y es a la vez relativamente abierto pues: $[a, b] = (a - \epsilon, b + \epsilon) \cap Y$. Análogamente (c, d) es relativamente abierto y relativamente cerrado, por ser el complemento respecto de Y de $[a, b]$.*

El conjunto de consumo, es decir el conjunto sobre el que los agentes realizan su actividad económica no tiene porque ser necesariamente todo el espacio sobre el que la topología está definida

puede ser un subconjunto del mismo, generalmente se trabaja con el cono positivo del espacio, por ejemplo
$$R^l_+ = \{x \in R^l, x_h \geq 0,\ h = 1, 2, ..., , l\}.$$
La topología utilizada será entonces la relativa.

Muchas veces se hace necesario, definir sobre el conjunto en el que se modela la economía una estructura de espacio vectorial conjuntamente con una topología suficientemente grande (es decir con la suficiente cantidad de conjuntos abiertos) como para que las operaciones, suma de elementos del espacio y producto de cualquier elemento del espacio por un escalar sean operaciones continuas. A estos espacios donde este tipo de operaciones están definidas dedicaremos algunas líneas en la siguiente subsección.

5.5 Espacios Vectoriales Topológicos

En esta subsección introduciremos el concepto de Espacio Vectorial Topológico y mostraremos que en espacios vectoriales de dimensión finita, toda *topología vectorial* (es decir toda topología para la que la suma de elementos del espacio y el producto por un escalar son continuas) define los mismos abiertos, es decir que todas las topologías vectoriales son equivalentes.

Definición 46 *Sea $\mathcal{I}$ una topología en un espacio vectorial X tal que:*

(a) Todo punto de X es un conjunto cerrado, y

(b) las operaciones del espacio vectorial son continuas respecto a $\mathcal{I}$.

Bajo estas condiciones decimos que $\mathcal{I}$ es una **Topología Vectorial** para X y $(X, \mathcal{I})$ es un **Espacio Vectorial Topológico.**

Decir que la suma es continua significa que el mapa
$$(x, y) \to x + y$$
de $X \times X \to X$ es continuo, es decir que dado V entorno de $x + y$ existen V_x y V_y entornos de x e y respectivamente, tales que
$$V_x + V_y \subset V.$$
análogamente para la operación
$$(\alpha, x) \to \alpha x$$
de $R \times X$ en X es continua, es decir que para todo entorno V de αx existe algún $r > 0$ y algún entorno W de x, tal que $\beta W \subset V$ cada vez que $|\beta - \alpha| < r$.

Teorema 47 *En espacios vectoriales de dimensión finita todas las topologías vectoriales son equivalentes.*

Prueba: Mostraremos que todo espacio vectorial topológico de dimensión finita (n), $(X, \mathcal{E})$ es homeomorfo a R^n con la topología euclidiana, $\mathcal{E}$. Es decir que existe una función continua con inversa continua que vincula a ambos espacios, de esta manera los conjuntos abiertos en uno y otro espacio son los mismos.

Sea $\Lambda : (R^n, \mathcal{E}) \to (X, \mathcal{E})$, una transformación lineal tal que $\Lambda e_k = u_k$. Donde e_k es el k-ésimo elemento de la base canónica de R^n y u_k el k-ésimo elemento de una base de X. De esta forma para $y \in R^n$, siendo $y = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots, +\alpha_n e_n$

$$\Lambda(y) = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots, +\alpha_n u_n$$

Por ser $(X, \mathcal{E})$ un espacio vectorial topológico las operaciones involucradas en la definición de Λ son continuas y por lo tanto Λ lo es también.

Por otra parte, para todo $x \in X$ existen $\gamma_i : X \to R, i = 1, 2, ..., n$ tales que $x = \gamma_1(x)u_1 + \gamma_2(x)u_2 + ... + \gamma_n(x)u_n$, lineales y continuas. La linealidad es inmediata, la continuidad sigue del hecho de ser funcionales cuyo núcleo es un espacio de dimensión finita $n - 1$, y por lo tanto cerrado. Obsérvese que

$$\Lambda^{-1}(x) = (\gamma_1(x), \gamma_2(x), ..., \gamma_n(x))$$

y es por lo tanto continua.[]

6 Funciones de Utilidad y un Teorema de Representación

Si bien nuestro primer ejemplo sobre representación de preferencias (el del orden lexicográfico) fue negativo, advertimos sobre la posibilidad en condiciones muy generales de representar preferencias por utilidades.

Claramente una función $u : X \to R$ representa una relación de preferencias en X, según la cual $a \in X$ será al menos tan bueno cuanto $b \in X$ si $u(a) \geq u(b)$. Puede verificarse que la relación así definida es reflexiva, simétrica, transitiva y completa.

Además si la función es continua la preferencia por ella introducida también lo es. El lector debe verificar esta afirmación.

Supongamos entonces que los agentes económicos tienen preferencias representadas por funciones de utilidad y veamos algunas propiedades de dichas funciones y sus relaciones con las preferencias que representan.

Definición 48 *Sea $u : X \to R$ una función definida en un subconjunto convexo X de un espacio vectorial se dice que u es:*

1) **Cuasi-cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ con $0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq min\{u(x), u(y)\}$$

2) **Estrictamente Cuasi-cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > min\{u(x), u(y)\}$$

3) **Cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

4) **Estrictamente cóncava** *si para cada $x, y \in X$ con $x \neq y$ y $0 < \alpha < 1$*

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) > \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y)$$

Puede verificarse que una función $u : X \to R$, definida en un conjunto convexo $X \subset R^n$ es cuasi- cóncava si el conjunto arriba de su contorno: $\{x \in X : u(x) \geq t\}$ es un conjunto convexo. Es decir si $u(x) \geq t$ y $u(y) \geq t$ entonces:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq t,$$

para todo $t \in R,\ x, y \in X$ con $\alpha \in [0, 1]$. Si la desigualdad anterior es estricta para todo $x \neq y$ con $\alpha \in (0, 1)$ entonces u es estrictamente cuasi-cóncava.

Para una definición equivalente a la dada para funciones quasi-cóncavas a partir del Hessiano Orlado y aplicaciones diferentes a partir de esta definición recomendamos la lectura del libro de [Takayama, A.] y el de [Mas-Colell, A. Whinston, M.].

Esta forma de definir quasi-concavidad permite utilizar herramientas del cálculo diferencial para caracterizar preferencias convexas y sus propiedades.

Teorema 49 *Toda función cóncava es quasi-cóncava y toda función estrictamente cóncava es estrictamente quasi-cóncava.*

Prueba: Sea $u : X \to R$ cóncava, siendo X un conjunto convexo, y sea $m = min\{u(x), u(y)\}$. Entonces:

$$u(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha u(x) + (1-\alpha)u(y) \geq m.$$

La segunda afirmación se demuestra análogamente.[]

El recíproco de este teorema **no es cierto,** para ver esto considere la función $u(x) = x^2$ ella es quasi-cóncava, pero no es cóncava.

El siguiente teorema relaciona las características de las funciones utilidad y los comportamientos de los agentes económicos.

Teorema 50 *Sea X un conjunto convexo; $u : X \to R$ entonces:*

1) *La función u es quasi-cóncava si y solamente si la relación de preferencia que representa es convexa.*

2) *La función u es estrictamente quasi-cóncava si y solamente si la relación de preferencia que representa es estrictamente convexa.*

Prueba: Sea $u : X \to R$ cuasi-cóncava, siendo X convexo. Sea $x \succeq y, z \succeq y$ debemos probar que $\alpha x + (1-\alpha)z \succeq y$.

Esto sigue de que por ser la utilidad quasi-cóncava se cumple que: $u(\alpha x + (1-\alpha)z) \geq min\{u(x), u(z)\}$, por representar u a la preferencia se sigue que $min\{u(x), u(z)\} \geq u(y)$ y por lo tanto: $\alpha x + (1-\alpha)z \succeq y$.

recíprocamente: Sea $\succeq$ convexa, x, y elementos de X tales que $u(x) \geq u(y)$ por lo tanto $x \succeq y$. A partir de $y \succeq y$ y de la afirmación anterior se sigue que: $\alpha x + (1-\alpha)y \succeq y$.

La segunda parte es similar y queda a cargo del lector.

A continuación introduciremos algunas posibles características de las preferencias que representan comportamientos de agentes que siempre desean algo mejor, es decir siempre existe para ellos una cesta preferible a la ofrecida. Veremos más adelante que cuando los agentes tienen preferencias de este tipo, solamente se conformarán con cestas de bienes que alcancen la frontera de sus posibilidades presupuestarias.

Definición 51 *Diremos que una preferencia definida en X es* **Localmente no Saciable** *cuando para toda cesta de bienes x y todo entorno U_x de x existe una cesta $y \in U_x \cap X$ tal que $y \succ x$.*

Esta definición dice que para cualquier cesta de bienes existe en cualquier vecindad de ella otra cesta que es estrictamente preferible a la primera. Se dice que el agente presenta un comportamiento no saciable localmente.

6.1 Espacios Vectoriales Ordenados

En el marco de los espacios vectoriales ordenados, es posible definir propiedades de las preferencias que implican un comportamiento no saciable localmente. Comenzaremos definiendo Espacio Vectorial Ordenado.

Definición 52 *Un* **Espacio Vectorial Ordenado** $\mathcal{E}$*, es un espacio vectorial junto con una relación de orden* $\geq$*, que satisface las siguientes propiedades que relacionan la estructura algebraica y la de orden:*

i) Si $x \geq y$ *entonces:* $x + z \geq y + z$ *para todo* $x, y, z \in \mathcal{E}$*, y*

ii) Si $x \geq y \in \mathcal{E}$ *entonces:* $\alpha x \geq \alpha y$ *para todo* $\alpha > 0$.

Para cualquier n natural, R^n es un espacio vectorial ordenado con el orden:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \ \geq \ y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

si y solamente si $x_h \geq y_h$ para todo $h = 1, 2, ..., n$. Por $x > y$ en R^n representamos $x \geq y$ con x distinto de y, mientras que $x >> y$ significa $x_h > y_h$, $\forall\, h = 1, 2, ..., l$.

Entenderemos por **cono positivo** E^+ de un espacio vectorial ordenado al conjunto

$$E^+ = \{x \in \mathcal{E} : x \geq 0\}.$$

Definición 53 *1) Una preferencia se dice* **Monótona** *si cada vez que* $x, y \in \mathcal{E}$ *con* $x \geq y$ $x \succeq y$.

2) Una preferencia se dice **Estrictamente Monótona** *si cada vez que* $x, y \in \mathcal{E}$ *con* $x > y$ $x \succ y$.

Una relación de preferencias Estrictamente Monótona es Monótona, también es cierto que monotonía estricta, así como la existencia de una cesta extremamente deseable, implican un comportamiento localmente no saciable. *El recíproco no es cierto para ninguna de las afirmaciones anteriores.*

Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 54 *Sea* $\succeq \in R^2_+ \times R^2_+$ *representable por* $u(x_1, x_2) = x_1.x_2$ *es decir:* $x \succeq y$ *si y solamente si* $x_1.x_2 \geq y_1.y_2$.

Como puede verse la relación es monótona pues si $(x_1, x_2) \geq (y_1, y_2)$ entonces $x_1.x_2 \geq y_1.y_2$, de donde $(x_1, x_2) \succeq (y_1, y_2)$. No obstante no es Estrictamente Monótona, como puede verse a partir de considerar $x = (2, 0)$ e $y = (1, 0)$.

Mostraremos ahora que las curvas de indiferencia (lugar geométrico de las clases de equivalencia definidas por $\succeq$) de preferencias representables por funciones de utilidad quasi-cóncavas y estrictamente monótonas son curvas con la convexidad hacia el origen.

Teorema 55 *Sea $u : X \to R$ una función definida en un conjunto convexo X en el cono positivo de un espacio vectorial ordenado. Si u es quasi-cóncava y recíprocamente monótona entonces las curvas de nivel tienen la convexidad hacia el origen.*

El teorema que demostraremos para la representabilidad de preferencias por funciones de utilidad, requiere la introducción del concepto de cesta extremamente deseable.

Definición 56 *Sea $\succeq$ una relación de preferencias definida en un subconjunto X de un espacio vectorial ordenado E. Entonces un vector v se dice ser una* **Cesta Extremamente Deseable** *para $\succeq$ cada vez que:*

i) $x + \alpha v \in X$ para todo $x \in X$ y para todo $\alpha > 0$ y para todo $x \in X$

ii) $x + \alpha v \succeq x$ para todo $x \in X$ y para todo $\alpha > 0$.

Nótese que si $v > 0$ es extremamente deseable también lo será λv, para todo $\lambda > 0$.

6.2 Un Teorema de Representación

Terminaremos esta sección probando un teorema de representación el que es válido para preferencias definidas en el cono positivo de un espacio vectorial ordenado de dimensión finita.

Teorema 57 *Para una relación de preferencias $\succeq$ continua, definida en el cono positivo R^l_+ de R^l es cierto que:*

1) Si $\succeq$ es convexa, monótona y existe una cesta extremamente deseable v, entonces $\succeq$ puede ser representable por una función de utilidad continua, monótona y quasi-cóncava.

2) Si $\succeq$ es estrictamente convexa, estrictamente monótona entonces $\succeq$ puede ser representables por una función de utilidad continua,estrictamente monótona y estrictamente quasi-cóncava.

Prueba: Sea $\succeq$ continua convexa y monótona, v extremamente deseable. Entonces como $\succeq$ es monótona, $e = \lambda(1, 1, ..., 1) + v, \lambda \geq 0$ lo será también. Podemos afirmar entonces, que existe un vector e con todas sus coordenadas positivas extremamente deseable.

Consideremos $x \in R^l_+$ y definamos:

$$u(x) = inf\{\alpha > 0 : \alpha e \succeq x\}$$

Como $e > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que $\alpha e > x$ por la monotonía de $\succeq$ se sigue que $\alpha e \succeq x$ por lo tanto $u(x)$ está bien definido.

Afirmamos que x y $u(x)e$ son equivalentes, es decir que $u(x)e \succeq x$ y además que $x \succeq u(x)e$.

La primera relación se sigue del hecho de que siendo $\succeq$ continua el conjunto $\{y \in R^l_+ : y \succeq x\}$ es cerrado. Y la segunda se sigue de la definición de $u(x)$ pues para todo $\epsilon > 0$, $x \succeq (u(x) - \epsilon)e$. Haciendo tender ϵ a cero y si $u(x) > 0$ se sigue de la continuidad de $\succeq$ que $x \succeq u(x)e$. De aquí y de la relación anteriormente probada se tiene que si $u(x) > 0$ entonces x es equivalente a $u(x)$. Si $u(x) = 0$ como $x \geq 0$ por la monotonía de $\succeq$ se tiene que: $x \succeq 0 = u(x)e$.

Obsérvese que existe un único escalar, $u(x)$ tal que hace a la cesta x indiferente con la cesta $u(x)e$. Esta afirmación es conclusión de que si $a > b$ entonces $ae \succ be$ pues por ser e extremamente deseable : $ax = bx + (a - b)x \succ bx$. Si existiesen $u(x)$ e $y(x)$ escalares diferentes tales que, por ejemplo $u(x) > y(x)$ y ambos equivalentes a x obtendríamos a partir de $u(x)e \succ y(x)e$, la conclusión absurda $x \succ x$. Queda así probado que $u : R^l_+ \to R$ definida arriba es la función que representa a $\succeq$.

Como la equivalencia entre la cuasi-concavidad de la función de utilidad que representa a una relación de preferencia y la convexidad de ésta fue probada anteriormente, ver teorema: solamente queda por probar la continuidad de u. Esto se prueba directamente a partir de las siguientes igualdades entre conjuntos y de las respectivas definiciones de continuidad para funciones y preferencias:

$$\{x \in R^l_+ : u(x) \leq r\} = \{x \in R^l_+ : re \succeq x\}$$

y además:

$$\{x \in R^l_+ : u(x) \geq r\} = \{x \in R^l_+ : x \succeq re\}.$$

La continuidad de las preferencias afirma que los conjuntos $\{x \in R^l_+ : re \succeq x\}$ y $\{x \in R^l_+ : x \succeq re\}$ son cerrados. Del hecho de que una función es continua si y solamente si la imagen recíproca de un conjunto cerrado es un cerrado en el dominio se concluye la continuidad de la función u.[]

El teorema afirma que bajo ciertos supuestos una preferencia continua es representable por una función de utilidad continua. No obstante puede suceder que exista a la vez una función de utilidad que no sea continua que la represente, aun bajo los mismos supuestos.

Ejemplo 58 *Sea $\succeq$ representada en R por $u(x) = x$, es decir $x \succeq y$ si y solamente si $x \geq y$ Claramente $\succeq$ es un preferencia continua representada por una utilidad continua.*

Considere ahora la función:

$$u_1(x) = \begin{cases} x & si \quad x < 0 \\ 1 + x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Fácilmente puede verse que $x \succeq y$ si y solamente $u_1(x) \geq u_1(y)$. Es decir la función discontinua u_1 representa a la preferencia $\succeq$ continua.

En [Mas-Colell, A. Whinston, M.] hay una prueba más general del teorema aquí presentado como interesantes ejemplos y aplicaciones del mismo.

7 Elementos Maximales de una Relación de Preferencias: La Demanda

En esta sección en la que definiremos la demanda del agente como el conjunto de elementos maximales de su relación de preferencias en su región presupuestaria haremos uso fuertemente del concepto de compacidad de un subconjunto de un espacio topológico en el que está inmerso el conjunto de consumo del agente maximizador. El libro de [Mendelson, B.] así como el de [Suppes, P.] son una referencia importante en lo que respecta a conjuntos ordenado y existencia de elementos maximales.

Comenzaremos con definiendo elemento maximal de un preorden en un subconjunto.

Definición 59 *Sea $\succeq$ un preorden (por ejemplo una relación de preferencia) en un conjunto X y sea A un subconjunto no vacío de X. Decimos que $a \in A$ es un* **Elemento Maximal** *para $\succeq$ en A cuando no existe $b \in A$ tal que $b \succ a$.*

Si el preorden es completo entonces un elemento $a \in A$ es maximal si y solamente si $a \succeq x, \forall x \in A$.

Observe que no es necesario que una relación de orden posea elemento maximal en un conjunto A dado. Por ejemplo no existe elemento maximal para una preferencia que sea localmente no saciable en un conjunto cuyos puntos sean todos interiores.

Por otra parte para un preorden y un conjunto dados pueden existir más de un elemento maximal, no obstante como el lector debe verificar, es cierto que: *Todo elemento maximal pertenece a una misma clase de equivalencia.* En términos de la Teoría Económica esto se traduce diciendo que si para un agente hay más de una cesta de bienes que maximizan su preferencias, estas serán indiferentes desde el punto de vista de la mejor satisfacción de sus gustos.

A continuación haremos uso fuertemente de las propiedades de compacidad de ciertos conjuntos en espacios topológicos por lo que dedicaremos a este concepto la siguiente subsección.

7.1 Compacidad de Conjuntos

Comenzaremos con la definición de cubrimiento de un conjunto, este concepto es básico para lo que sigue.

Definición 60 *Sea X un conjunto, B un subconjunto de X, y $\{A_\alpha\}_{\ \alpha} \in I$ una familia indexada de subconjuntos de X. La colección $\{A_\alpha\}_{\ \alpha} \in I$ se dice un* **cubrimiento** *de B si $B \subset \cup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Si el índice I es finito, entonces $\{A_\alpha\}$ con $\alpha \in I$ es llamado un* **cubrimiento finito** *de B.*

Si los elementos de la familia indexada son abiertos, diremos que el *cubrimiento es abierto.*

Definición 61 *Las siguientes tres afirmaciones son equivalentes en R^l : un subconjunto $X \in R^l$ se dice* **compacto** *si y solamente si:*

- *1)De todo cubrimiento por abiertos X, es posible obtener un subcubrimiento finito de X.*
- *2)De toda red $\{x_n\} \in X$ puede obtenerse una subred convergente.*
- *3) X es cerrado y acotado. (Teorema de Heine- Borel).*

Nota *En espacios más generales la propiedad de Heine-Borel no vale.*

La demostración de las equivalencias anteriores puede encontrarse en [Kelley, J.L.].

Sea X un espacio topológico. Una familia $C_\alpha, \alpha \in I$ de subconjuntos de X se dice que posee la **propiedad de intersección finita (PIF),** si para cada subconjunto finito $J \subset I$, $\cap_{\alpha \in J} C_\alpha$ es no vacío.

Teorema 62 *Sea $C_\alpha, \alpha \in I$ una colección de conjuntos cerrados en X, con la propiedad de intersección finita, X es compacto si y solamente si la intersección $\cap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es no vacío.*

Prueba: Supóngase que X es compacto. Sea $C_\alpha, \alpha \in I$ una colección de conjuntos cerrados en X, con la PIF. Suponga que $\cap_{\alpha \in I} C_\alpha$ es vacío, por lo tanto su complemento $[\cap_{\alpha \in I} C_\alpha]^c = X$. Por la propiedad de De Morgan:

$$[\cap_{\alpha \in I} C_\alpha]^c = \cup_{\alpha \in I} C_\alpha^c.$$

Entonces $C_\alpha^c \alpha \in I$ es un cubrimiento por abiertos de X por la compacidad de X, podemos extraer de aquí un subcubrimiento finito, tal que $\cup_{\alpha \in j} C_\alpha^c = X, J \subset I$, finito. Obtenemos que: $\cap_{\alpha \in j} C_\alpha$ es vacío. Aplicando nuevamente una de las leyes de De Morgan, llegaremos a una contradicción con la PIF supuesta para $C^c_\alpha \alpha \in I$. *Recíprocamente:* Sea $A_\alpha, \alpha \in I$ un cubrimiento de X. Suponga que no existe un subcubrimiento finito, es decir que para todo subconjunto finito $J \subset I$, $[\cup_{\alpha \in j} A_\alpha]^c$ es no vacío, equivalentemente: para todo $J \subset I$, $\cap_{\alpha \in j} A^c_\alpha$ es no vacío. Entonces $A^c_\alpha \alpha \in I$ es una colección de conjuntos cerrados con la PIF, de acuerdo a nuestro supuesto debe cumplirse que: $\cap_{\alpha \in I} A^c_\alpha$ es no vacío, luego usando en forma apropiada las leyes de De Morgan se concluye que $A_\alpha, \alpha \in I$ no es un cubrimiento abierto de X.

Antes de terminar con esta subsección creemos es bueno remarcar que muchas proposiciones de la microeconomía se verifican precisamente por la compacidad de los conjuntos involucrados. La no existencia de compacidad en los conjuntos que representan las restricciones de los programas de optimización propios de la Teoría Económica, implica hacer consideraciones particulares y de sofisticado tecnicismo matemático, cuando se quiere dar respuestas a temas tales como la existencia de la demanda, o la existencia del Equilibrio Competitivo. *Recordamos que la equivalencia entre conjuntos compactos y conjuntos acotados y cerrados (Teorema de Heine-Borel), caracteriza a los espacios vectoriales de dimensión finita.* Resulta de gran utilidad, a los efectos de comprender la importancia de este punto consultar [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.] así como [Mas-Colell, A. Zame]. Recomendamos al lector también realizar una lectura cuidadosa de las propiedades de los conjuntos compactos en alguno de los textos de Topología General indicados en las referencias.

Terminaremos la subsección con un ejemplo de un espacio vectorial donde está definida un familia de conjuntos cerrados con la PIF, pero cuya intersección es vacía.

Ejemplo 63 *Consideremos el subespacio $Y = (0, 1]$ de la recta, con la topología relativa. Sea la familia de subconjuntos*

$$\mathcal{O} = \{(0, \frac{1}{n}], n \in N.\}$$

Como podemos comprobar fácilmente esta es una familia de subconjuntos cerrados relativos, pues $(0, \frac{1}{n}] = [0, \frac{1}{n}] \cap Y$, tales que cualquier cantidad finita de ellos tiene intersección no vacía, sin embargo su intersección es vacía. (Tenga en cuenta que el 0 no es elemento de Y).

7.2 Existencia y Unicidad del Maximal

El siguiente teorema prueba la no vacuidad del conjunto de los elementos maximales para relaciones de preferencia semi-continuas superiormente en subconjuntos compactos y muestra alguna de las características del mismo.

Teorema 64 *El conjunto de los elementos maximales de una relación de preferencias semi-continua superiormente es no vacío y compacto.*

La sola semi-continuidad superior de las preferencias no es suficiente para garantizar la existencia de al menos un elemento maximal. Se necesitan condiciones sobre el conjunto en el que está definida la preferencia, por ejemplo, como ya vimos si el conjunto sobre el que está definida una preferencia localmente no saciable es abierto, (aunque sea acotado) entonces no existe elemento maximal. Con las mismas condiciones en las preferencias, para el mismo conjunto anterior al que le agregamos su frontera, por el teorema anterior existe al menos un elemento maximal para la preferencia. *En el caso de preferencias localmente no saciables en conjuntos compactos, los elementos maximales se ubican en la frontera del conjunto, podría explicar por qué?*

Prueba: Comenzamos definiendo para cada x el correspondiente conjunto $C_x = \{y \in X : y \succeq x\}$. Como la preferencia es semi-continua superiormente este conjunto es cerrado en X y por lo tanto compacto. El conjunto de los elementos maximales es precisamente el conjunto $\cap_{x \in X}$. Mostraremos a continuación que este conjunto es no vacío.

Para esto comencemos considerando una colección finita de elementos $x_1, x_2, ..., x_n \in X$, como el preorden $\succeq$ es completo podemos asumir sin pérdida de generalidad que $x_1 \succeq x_2 \succeq, ..., \succeq x_n$. Esto implica que $C_{x_1} \subset C_{x_2} \subseteq, \ldots, \subseteq C_{x_n}$, y por lo tanto $\cap_{i=1,2,\ldots n} C_{x_i}$ es no vacío, por ser cada uno de estos conjuntos cerrados, poseer la PIF (propiedad de intersección finita) y ser X compacto, se tiene que $\cap_{x \in X} C_x$ es no vacío. Además como todo conjunto cerrado en un compacto es compacto, se sigue que el conjunto de maximales es compacto.[]

El teorema da una respuesta positiva a la existencia del elemento maximal, pero nada dice acerca de la unicidad o no del mismo. Para obtener una respuesta a esta interrogante, comience el lector verificando que:

Para preferencias convexas sobre conjuntos convexos, el conjunto de maximales es un conjunto convexo.

Suponga ahora que la preferencia es estrictamente convexa, suponga que existiesen dos elementos diferentes, a y b en X, considere una combinación convexa de ellos, por la convexidad de la relación de preferencias, esta combinación pertenecerá al conjunto de maximales, y además será estrictamente preferible a cualquiera de los dos maximales originalmente considerados. Esto es un absurdo. Por lo tanto podemos concluir que:

Preferencias estrictamente convexas, sobre conjuntos convexos y compactos tienen un único elemento maximal.

Ejemplo 65 *Considere el conjunto convexo compacto*

$$X = \{(x, y) \in R^2_+ : x + 2y \leq 2\}$$

Encuentre el único elemento maximal en X para la relación de preferencias representada por $u(x, y) = x^2 y$

La relación de preferencias es monótona y convexa en R^2, estrictamente monótona y estrictamente quasi-cóncava en el interior de R^2_+ (lo que puede verse considerando el Hessiano Orlado). Como u a lo largo de cualquiera de los ejes coordenados vale cero, el elemento maximal es un elemento del interior de R^2_+. Por lo tanto existe un único elemento maximal.

Para hallar el elemento maximal pueden emplearse las condiciones de primer orden, las cuales se cumplen con igualdad por ser el maximal un elemento del interior de R^2_+. Se concluye que para este elemento $x = \frac{4}{3}, y = \frac{1}{3}$.[]

En condiciones de libre mercado, cada agente económico buscará maximizar su bienestar en su espacio de consumo, sujeto a determinadas restricciones presupuestarias. La cesta de bienes que el agente eligirá es su demanda. Entenderemos por tal una aplicación cuyo dominio es el conjunto de precios y su recorrido el espacio de consumo presupuestariamente factible. De tal manera que fijados los precios de cada uno de los bienes eligirá las cestas que maximizan las preferencias del consumidor, el conjunto de estas no tiene por qué estar en principio compuesto por una única cesta. Componen la demanda del agente todas aquellas cestas que, fijados los precios de los bienes y sus posibilidades presupuestarias, maximizan su relación de preferencias.

8 Funciones de Demanda

Las preferencias y las utilidades que están en la base de la teoría del agente maximizador no son observables. En la actividad económica lo que se observa es un conjunto de individuos haciendo transacciones comerciales, intercambiando unos bienes por otros. Esto sugiere entonces, estudiar el comportamiento de la economía y sus posibles leyes a partir del análisis de los bienes que los agentes demandan. Por eso dedicaremos esta sección al estudio de la demanda primeramente individual y luego agregada.

La actividad económica tiene sus conceptos primitivos en las preferencias y en el comportamiento racional del agente, de los cuales la demanda es un concepto derivado, ciertamente de trascendencia teórica y en tanto que agregada, revelador del comportamiento económico de la sociedad. No obstante debemos estar precavidos de que la existencia de la demanda como función o aplicación que surge naturalmente de un programa optimizador seguido por cada agente, requiere de determinadas premisas sobre el conjunto de bienes en el que los individuos hacen su elección y de las características de sus preferencias. Para corroborar esta afirmación presentaremos en esta sección ejemplos de economías para las cuales la demanda no aparece como resultado trivial de un comportamiento racional de los agentes económicos.

Es importante estar advertidos también de que ciertas propiedades generalmente admitidas como universalmente válidas de la función demanda (como la llamada *Ley de la Demanda*) están lejos de verificarse sin supuestos adicionales y por lo tanto restrictivos del modelo considerado. Por lo tanto predicciones económicas respaldadas en este tipo de supuestas propiedades universales, deberán para ser legítimas cuidar de los supuestos del modelo estudiado, los que en definitiva no son tan generales como muchas veces se pretende.

Aunque la axiomatización elegida es propiedad de la Teoría Económica, la verificación en el modelo presentado, de las propiedades requeridas por el economista, debe realizarse con elementos propios del análisis matemático a partir de la axiomatización original. De esta manera la matemática, como forma de pensamiento, se transforma en poderoso auxiliar de la ciencia económica al ayudar entre otras cosas por ejemplo a evitar errores lógico-formales, particularmente de aquellos referidos a la construcción del modelo y a lo que de él se puede concluir. Por otra parte la modelación y el análisis matemático del modelo permite descubrir propiedades de la llamada realidad que de otra manera pasarían inadvertidas.

Naturalmente la contrastación con la realidad dirá la última palabra sobre la validez del modelo de partida y sus supuestos. Si no hay errores formales en el proceso de elaboración de las conclusiones, esta contrastación validará o no el modelo presentado. De todas maneras la llamada *realidad* contra la que se compara es muchas veces y en gran parte, un modelo construido en el pensamiento, plagado de concepciones ideológicas inevitablemente presentes en todo proceso intelectual. De ahí que aún las creencias aparentemente más ingenuas y poco contaminadas de formalismos, sobre el comportamiento de la llamada realidad, deban también ser criticada desde el punto de vista lógico formal.

Ciertamente ningún modelo agota la realidad, no obstante sin modelarla de alguna manera ninguna afirmación sobre ella es posible.

8.1 Región Presupuestaria y Notación

A lo largo de casi toda esta sección, las cestas de bienes estarán representadas por elementos de R^l_+. Una cesta de bienes será entonces un vector de l coordenadas, alguna de las cuales puede ser cero, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_l)$.

Supondremos que los agentes disponen originalmente de una cesta de bienes conformadas por cantidades no negativas de todos los bienes de la economía, entendiendo por tales no solamente aquellos bienes directamente consumibles, sino también las posibilidades de trabajar, habilidades, capacidades etc... con los que el agente pueda iniciar sus actividades económicas. Llamaremos a esta cesta original **dotaciones iniciales** del agente y las representaremos por w**.** Cada una de ellas es un elemento de R^l_+, cada coordenada representara lo que el agente dispone originalmente de ese bien. Cada agente dispone de sus dotaciones iniciales, y no nos preguntamos acerca de como las adquirió.

Introduciremos también los precios de los bienes, cada bien tendrá su precio. Representaremos por p_h será el precio del bien $h \in 1, 2, \ldots, l$. **El valor de la cesta de bienes** x estará representado entonces por el producto escalar o Euclidiano de los vectores p y x :

$$\mathbf{px = px_1 + px_2 + \ldots + px_l = \sum_{h=1}^{l} p_h x_h}$$

Recordamos las siguientes propiedades de linealidad del producto Euclídeo:

1) $p(x_1 + x_2) = px_1 + px_2$.

2) $p(\lambda x) = \lambda px, \ \forall \lambda \in R$.

Propiedades que el lector puede verificar Ciertamente.

El valor de una cesta definido de esta manera, hace que los precios sean funcionales lineales, es decir funciones lineales con *dominio* en el espacio en el que está definido el conjunto de consumo y *recorrido* en los reales. Obsérvese que la definición de precios como funcionales lineales es natural, pues los precios asignan a cada cesta un valor, es decir un número real, además el valor de dos diferentes cestas es la suma de sus valores y análogamente el valor de n cestas de bienes, será n veces el valor de una de ellas. *El conjunto de los funcionales lineales forma un espacio vectorial, el que se conoce como* **Espacio Dual**.

En el caso de que el espacio sobre el que están definidos los funcionales lineales sea un espacio vectorial topológico de dimensión finita puede asegurarse la continuidad de los funcionales lineales, propiedad que aparece naturalmente vinculada al concepto de precios y su comportamiento. No obstante, esto no es necesariamente cierto en espacios más generales, lo que obliga a un mayor cuidado en el momento de definir precios cuando modelamos economías en estos espacios.

Es sabido que para cada funcional lineal de R^l hay un vector del espacio que lo representa, en el sentido de que si $f : R^l \to R$ entonces existe $p \in R^l$ tal que $f(a) = pa, \, \forall a \in R^l$. De esta manera si el espacio es de dimensión finita el dual y el espacio coinciden. Así si f *es un funcional lineal* *en R^l entonces $f(a)$ para a en el espacio de consumo representará el valor de la cesta a a precios p_f, siendo p_f el vector que representa a f y $f(a) = p_f a$.*

Esta propiedad de representación de precios por funcionales lineales se mantiene aún cuando el conjunto de consumo es subconjunto de un espacio de dimensión infinita. En estos casos este vector no será necesariamente, un elemento del mismo espacio en el que están definidas las cestas de bienes es decir, *el espacio y su dual no serán necesariamente un mismo espacio.* Pero los precios seguirán adjudicando valor a las cestas de bienes de una manera lineal y el valor de cada cesta de bienes estará unívocamente definido por este funcional. Para entender la necesidad y las dificultades que conlleva para al teoría económica, la introducción de espacios de dimensión infinita se puede ver entre otros el trabajo de [Mas-Colell, A. Zame].

En espacios de dimensión finita la existencia de un vector representante para cada funcional lineal, es fácil de probar. Para verlo considere que los vectores: $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ forman una base del espacio. Sea f un funcional lineal, y $x = (x_1, x_2, ...x_n)$, luego $f(x) = f(x_1e_1 + x_2 + ... + x_n) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n)$. Sea $p_f = (f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n))$ entonces: $f(x) = p_f a$.

Llamaremos **Región Presupuestaria** a la que representaremos por $B_w(p)$ al conjunto

$$B_w(p) = \{x \in R^l_+ : px \leq pw\}.$$

De esta manera *el valor de las dotaciones iniciales de cada agente queda representado por el número real pw.* El vector $w \in (R^l_+)^n$ representa las dotaciones iniciales de los agentes de la economía.

Se deduce inmediatamente que para todo $\lambda > 0$,

$$B_{\lambda w}(\lambda p) = B_w(p).$$

Teorema 66 *Si el precio de cada bien está representado por un real estrictamente positivo, entonces la restricción presupuestaria de cada agente con dotaciones iniciales en R^l_+, es un subconjunto compacto de R^l_+.*

Prueba: La continuidad del producto interno, permite concluir que la región presupuestaria es cerrada [1]. La siguiente cadena de desigualdades prueba que es acotada: $0 \leq p_ix_i \leq px = pw$, luego para $r = min\{p_1, p_2, .., p_l\}$ se tiene: $x_i \leq \frac{pw}{r} \leq \infty$. A partir del teorema de Heine-Borel concluimos la demostración.[]

Como el lector verificará es cierto que si el vector p de precios tiene alguna componente cero es decir si $p \in R^+_l$, entonces la restricción presupuestaria para cualquier w será no acotada.

[1] Demuestre el lector que el producto interno es continuo en sus dos variables y la afirmación anterior.

Siendo que en R^l_+ acotado y cerrado equivale a compacto, siendo w un elemento del cono positivo de R^l, la región presupuestaria será un subconjunto compacto si y solamente si p es positivo en todas sus componentes.

Nos restringiremos por ahora al caso en que la única actividad económica de los agente, es el intercambio de bienes en el mercado. Es decir que intentará intercambiar la cesta de bienes que él posee (sus dotaciones iniciales) por otra que le sea preferible, naturalmente que sólo podrá elegir dentro del conjunto de cestas de bienes que le son admisibles, es decir aquellas cuyo valor no excede al de su dotación inicial. En definitiva: *cada individuo resolverá en el mercado el programa que consiste en maximizar sus preferencias, restringiéndose a su región presupuestaria.*

El lector está en condiciones de probar la siguiente proposición:

Proposición 67 *Para precios estrictamente positivos y preferencias continuas en R^l_+ se tiene que:*

- 1) Si la preferencia es además convexa, entonces la preferencia tiene al menos un elemento maximal en la región presupuestaria.
- 2) Si la preferencia es estrictamente convexa, entonces existe exactamente un elemento maximal.
- 3)Si la preferencia es localmente no saciable entonces los elementos maximales están en la frontera de la región presupuestaria.

Como ya sabemos (ver sección 7.1) la existencia de elementos maximales para determinadas preferencias así como su número, dependerá de las características propias de dichas preferencias (particularmente continuidad y convexidad) así como de las propiedades del conjunto sobre el que están definidas (particularmente compacidad).

En el caso de que este elemento sea único, se define la **Demanda,** como una función y en otro caso como una aplicación o función multívoca, $x : R^l_+ \times R^l_+ \rightarrow R^l_+$ tal que:

$$x(p, w) \rightarrow \{x \in B_w(p) : x \succeq y, \forall y \in B_w(p)\}$$

Preferencias estrictamente convexas son suficientes para la unicidad, mientras que la convexidad es suficiente para que el conjunto demanda sea convexo, pudiendo ser éste un conjunto con uno o varios elementos.

Si bien nos restringiremos al caso en que el elemento maximal está estrictamente determinado, cabe decir que si el conjunto de los maximales fuera múltiple gran parte de las propiedades y conclusiones que obtendremos para la *función demanda,* pueden obtenerse a partir de la teoría de las funciones multívocas o aplicaciones. Para una interesante y profunda introducción al tema ver [Berge, C.]. El libro de [Debreu, G.] muestra una cuidadosa aplicación de los principales resultados de dicha la teoría de las aplicaciones al terreno de la economía.

8.2 Propiedades de la Demanda

Algunas propiedades de la demanda se deducen inmediatamente:

1) **Homogeneidad de Grado cero.** Para todo $\lambda > 0$ $x(p,w) = x(\lambda p, \lambda w)$ lo que se deduce de la propiedad análoga ya indicada en la subsección anterior para la restricción presupuestaria.

2) **Ley de Walras.** En el caso de estar definida la demanda a partir de preferencias localmente no saciables, se verifica que: $px(p,w) = pw$.

   La homogeneidad de grado cero de la demanda, nos permite restringirnos a trabajar con precios en el simplex S_+^{l-1}, es decir con vectores tales que sus coordenadas son no negativas $p_h \geq 0; h = 1, 2...l$ (donde l representa la cantidad de bienes existentes en el mercado) y tales que su suma $\sum_{h=1}^{l} p_h^2 = 1$. Para ver que esto es posible basta con considerar $\lambda = \frac{1}{\mathbf{p}}$ donde $\mathbf{p} = \sqrt{\sum_{h=1}^{n} p_h^2}$.

   Algunas otras propiedades de la función demanda no son tan obvias, por ejemplo la continuidad.

3) **Continuidad de la función demanda**

Consideremos preferencias estrictamente convexas, en R_+^l con una cesta de bienes extremamente deseable. Consideremos también dotaciones iniciales, representadas por un vector $w \in R_+^l$ no nulo fijo. Estudiaremos la continuidad de la demanda del agente con tales preferencias y utilidades, la que representaremos por $x_w : S^{l-1} \to R_+^l$ siendo $x_w(p) = x(p,w)$ la demanda del agente a precios p.

Comenzaremos analizando un contraejemplo. Veremos que a pesar de las preferencias ser bien comportadas definen una función demanda que no es continua.

Ejemplo 68 *Supongamos una relación de preferencias en un R_+^2 representada por la función de utilidad*

$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$

Supongamos además dotaciones iniciales $w = (1,0)$ y consideraremos sin pérdida de generalidad precios (p_1, p_2), con $p_2 = 1 - p_1$.

La función de utilidad es continua, estrictamente monótona y estrictamente cóncava en el interior de R^2_+. Si $p_1 \neq 0$ la restricción presupuestaria del problema es un conjunto no vacío, compacto y convexo existe por lo tanto un único elemento maximal el que representará a la cesta demandada.

A partir de las condiciones de primer orden para el problema de maximizar $u(x_1, x_2)$ en la región presupuestaria, $B_{(1,0)}(p_1, 1-p_1)$, se puede determinar la demanda. Como el máximo no se alcanza en la frontera de R^2_+, se obtiene la igualdad:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{p_1}{1-p_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}.$$

Sustituyendo en forma adecuada en la restricción $p_1x_1 + (1-p_1)x_2 = p_1$, se obtiene que:

$$x_{(1,0)}(p) = \left(1 - p_1, \frac{(p_1)^2}{1-p_1}\right)$$

Obsérvese que $\lim_{p_1 \to 0} x_{(1,0)}(p) = (1,0)$. No obstante si $p_1 = 0$ la demanda por el primer bien es *también* entendiendo por esto el hecho de que el agente demandará todo lo que exista del bien cuyo precio es cero. Concluimos en que en $(0,1)$ la demanda es discontinua .[]

La no existencia de una demanda para precios p con alguna componente nula (como en el caso anterior) es consecuencia inmediata del hecho de que preferencias no saciables, en regiones presupuestarias definidas por precios p en la frontera del cono positivo R^l_+ (y por lo tanto no compactas) no tienen elemento maximal.

Demostraremos el teorema de continuidad de la demanda para precios estrictamente positivos, y dotaciones iniciales en R^l_+. La demostración de este teorema la haremos a partir del teorema del gráfico cerrado el que enunciaremos a continuación.

Teorema 69 [Teorema del Gráfico Cerrado] *Sea $f : X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos, siendo Y Hausdorff y compacto. Entonces f es continua si y solamente si su gráfico $G_f = \{(x, f(x)) : x \in X\}$ es un conjunto cerrado en $X \times Y$.*

Puede probarse que existen funciones con su gráfico cerrado pero que por fallar alguna de las hipótesis del teorema no son continuas:

- 1) Supongamos que Y no es compacto, consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Puede observarse que su gráfico es cerrado pero no es continua.

- 2) Considere ahora $Y = R$ con la topología discreta, y $X = R$ con la topología fácilmente. $f(x) = x$ resulta discontinua en todo punto y sin embargo tiene su grafo cerrado.

A los efectos de ampliar las posibles preferencias a considerar agregaremos a las estrictamente convexas en todo R^l_+ las que son estrictamente convexas solamente en el interior de R^l_+ pero tales que todo punto en el interior es preferible a un punto sobre la frontera de R^l_+. Las preferencias que cumplen una u otra de estas condiciones además de la no saciabilidad local, serán llamadas **Preferencias Neoclásicas.**

La función
$$u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$$
es estrictamente cuasi cóncava estrictamente monótona pero no verifica que todo punto en el interior es preferible a un punto sobre la frontera de R^2_+. (Compare $(1, 0)$ con $(\frac{1}{9}, \frac{1}{9})$)

La función
$$u(x_1, x_2) = x_1 x_2$$
es estrictamente cuasi cóncava y estrictamente nonótona en el interior de R^2_+. No es estrictamente cuasi cóncava en la frontera de R^2_+ pero verifica que todo punto en el interior es preferible a un punto sobre la frontera de R^2_+.

Teorema 70 *Toda función demanda, $x_w : R^l_{++} \rightarrow R^l_+$ correspondiente a preferencias neoclásicas y dotaciones iniciales $w \in R^l - \{0\}$, es continua.*

Prueba: Comenzaremos probando que la función demanda x_w tiene gráfico cerrado. Para ver esto consideremos las sucesiones $p_n \rightarrow p$ y $x_w(p_n) \rightarrow x$, debemos mostrar que $x_w(p) = x$, mostraremos que x es un elemento maximal en $B_w(p)$ y por ser éste único se sigue que es la demanda. La no saciedad local permite escribir $p_n x_w(p_n) = p_n w$ y de la continuidad del producto interno se sigue que $px = pw$. Sea ahora $y \in B_w(p)$, por lo tanto $py \leq pw$ se tiene para $0 < \lambda < 1$ que $p(\lambda y) < pw = px$, nuevamente por la continuidad del producto interno se tiene que existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, $p_n(\lambda y) < p_n w = p_n x_w(p_n)$ por lo que $x_w(p_n) \succ (\lambda y)$. Ahora por la continuidad de las preferencias, para n suficientemente grande, $x \succeq \lambda y$ para todo $0 < \lambda < 1$. Haciendo ahora $\lambda \rightarrow 1$ se concluye conque $x \succeq y$. Por ser y un elemento arbitrario de la restricción presupuestaria se concluye que x es maximal y por lo tanto es $x_w(p)$.

Sea ahora $[r, s]$ un intervalo en el interior de R^l_+ con $p \in [r, s]$. Sea $Y = x_w(\bar{[r, s]})$, por ser Y acotado y cerrado, y siendo $x_w : [r, s] \rightarrow Y$ una función cuyo gráfico es cerrado el teorema queda probado .[]

Consideraciones sobre la llamada Ley de la Demanda

Es habitual la referencia en macroeconomía a la llamada ley de la demanda, cuya formulación es aproximadamente la siguiente: *a medida que el precio de un bien disminuye la demanda por el mismo aumenta, y cuando el precio aumenta la demanda disminuye.* Gran parte del análisis económico basado en los modelos IS-LM se apoyan es esta supuesta ley.

Presentaremos a continuación un ejemplo en el que esta *ley* no se cumple.

Ejemplo 71 *Considere la relación de preferencias en R^3_+ representada por la función de utilidad*

$$u(x,y,z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + y + \frac{z}{1+z}$$

y sea $w \in R^3_+$.

Verifique que $u(x, y+z, 0) > u(x,y,z)$, por lo tanto

$$(x, y+z, 0) \succ (x,y,z).$$

Pruebe que si $p_1 > 0$ con $p_2 = p_3$ entonces la demanda por el tercer bien $z(p) = 0$. Considere ahora $p_n = (1, \frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ y pruebe que para $n \to \infty$, $x(p_n)$ se mantiene acotado, mientras que $y(p_n) \to \infty$ y $z(p_n) = 0$.

Para probar la afirmación vea que si la sucesión $x_w(p_n)$ tuviera alguna subsucesión convergente a un vector $x \in R^l_+$ entonces, x sería un elemento maximal y por lo tanto p sería estrictamente positivo en todas sus coordenadas (pues en otro caso no existiría elemento maximal en $B_w(p)$), lo que contradice el hecho de ser p elemento de la frontera de R^l_+.

Muestre que si $p_n \to p$ donde la i-ésima coordenada de p es estrictamente positiva, entonces la demanda por el bien i está acotada.[]

Con un poco más de cuidado en la observación del comportamiento de los agentes, puede concluirse que si bien no es cierta la ley de la demanda en su formulación más burda, es posible concluir que si p_n es una sucesión de precios convergente a un valor p en la frontera de R^l_+ debe verificarse que si $x_w(p_n) = (x_{w1}(p_n), x_{w2}(p_n), ..., x_{wl}(p_n))$ es el vector demanda a precios p_n,

$$\lim_{n\to\infty} \|x_w(p_n)\| = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} x_{wj}(p_n) = \infty.$$

Es decir que, la demanda agregada de por lo menos un bien crece indefinidamente. La demanda por bienes aumenta, pero no necesariamente la demanda de todos aquellos bienes cuyos precios decrecen.

A continuación mostraremos que aun con relaciones de preferencias muy bien comportadas, es decir monótonas, estrictamente convexas, representables por funciones de utilidad tan bien comportadas como ellas y con dotaciones iniciales cuyo valor es positivo, es posible la no existencia de la función demanda. El ejemplo requiere conocimientos de matemáticas más amplios que los exigidos para la lectura de estas notas. De todas formas para una primera lectura, no es indispensable la comprensión total del ejemplo, cuya presentación tiene por objetivo hacer dudar una vez más al lector de los conocimientos supuestamente basados en verdades *evidentes por sí mismas.*

8.3 Ejemplo de Economías en la que no Existe Función Demanda

Obsérvese que la más universalmente citada ley de la economía la ley de la demanda, deja ahora incluso de tener substrato real: la propia demanda puede no existir. En definitiva lo que sucede, parece ser que como todas las leyes las de la economía son también una construcción intelectual, quizás la realidad misma lo sea y su validez depende del marco en el que estemos trabajando. (El lector puede intentar probar la existencia de la realidad que cree existente por sí misma y evidente apriori de toda experiencia y verificación).

El siguiente ejemplo satisface las condiciones habituales de convexidad y monotonía en las preferencias del agente. La restricción presupuestaria está bien definida, pero aunque los precios están representados por funcionales lineales positivos, no es un subconjunto compacto del espacio de consumo.

Un agente con una función de utilidad intertemporal y dotaciones iniciales predeterminadas intercambia bienes en el mercado, de forma tal de maximizar su función de utilidad. El espacio de bienes es subconjunto del espacio de las funciones continuas definidas en el intervalo cerrado $[0, 1]$, al que representaremos por $C[0, 1]$. En tanto que la integral de Riemann representa un funcional lineal sobre este espacio, $p : C[0, 1] \to R$

$$p(x) = \int_0^1 x(t)dt$$

representa el valor del bien $x \in C[0, 1]$ a precios p. Obsérvese que cada bien en este espacio, puede considerarse como un plan de consumo contingente con el tiempo $t \in [0, 1]$.

Ejemplo 72 *Consideremos un agente cuya función de utilidad es*

$$u(x) = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\sqrt{x(r_i)},$$

donde $\{r_0, r_1, r_2, ...\}$ *es una enumeración de los racionales. Supongamos que las dotaciones iniciales del agente están representadas por* $w(t) = 1, \forall t \in [0, 1]$

Esta función es estrictamente cóncava, estrictamente monótona y continua, pero no tiene elemento maximal en

$$B_{\mathbf{1}}(p) = \{x \in C[0,1] : \int_0^1 x(t)dt \leq \int_0^1 \mathbf{1}dt\}.$$

Para ver que no existe elemento maximal, considere la siguiente función continua:

$$x_n(t) = \begin{cases} -n^2t + n & si\ 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ 0 & si\ \frac{1}{n} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Puede verificarse que $x_n(t) \in B_{\mathbf{1}}(p)$ y que $u(x_n) \geq \sqrt{x_n(0)} = \sqrt{n}$ y por lo tanto $sup\{u(x) : x \in B_{\mathbf{1}}(p)\} = \infty$.[] Tomado de [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.].

8.4 La Demanda Agregada y el Agente Representativo

Habitualmente la Macroeconomía trabaja con valores agregados, demanda agregada, riqueza agregada, bienestar social, etc... aparece natural preguntarse hasta que punto estos valores representan el comportamiento de los agentes económicos o son alguna medida del bienestar de la sociedad. Si bien el tema es profundo dedicaremos en estas notas sólo un breve comentario, no porque el tema no merezca mayor desarrollo sino porque trasciende ampliamente el marco de este trabajo.

Supongamos que la sociedad se compone por n agentes poseedores de correspondientes relaciones de preferencias $\succeq_i$, su correspondiente demanda $x_i(p, w_i)$ la que dependerá de los precios y de sus dotaciones iniciales. En general dados los precios $p \in R^l$ y una distribución de riquezas $(w_1, w_2, ..., w_n)$ puede definirse la **Demanda Agregada** como

$$x(p, w_1, ...w_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p, w_i).$$

De esta forma la demanda agregada depende no sólo de precios y de la riqueza agregada, o total de la sociedad, sino también de su distribución inicial. La pregunta que siguiente es entonces legítima: *tiene la función $x(p, w_1, ...w_n)$, es decir demanda agregada, valor como índice del bienestar social?* La respuesta es que al menos que la demanda individual sea independiente de la distribución inicial de la riqueza, es un índice muy relativo.

Tiene interés también la pregunta sobre el valor de la demanda agregada como representante del comportamiento de la sociedad en su conjunto. Es decir, *es válido considerar la demanda agregada como la demanda de un* **Agente Representativo** *de la sociedad y aplicar a esta las técnicas y conclusiones obtenidas para la demanda de cada agente individual?* Puede observarse que la continuidad, la Ley de Walras y la homogeneidad en los precios de grado cero, son heredadas por la demanda agregada. No obstante la respuesta es afirmativa solamente en el caso en que exista una relación de preferencias $\succeq$ racional, para la que la demanda agregada, represente precisamente el elemento maximal de esta preferencia, en la restricción presupuestaria generada por la riqueza agregada $\sum_{i=1}^{m} w_i$, a precios p. En principio no hay nada que garantice la existencia de tales preferencias, por lo cual muchas afirmaciones hechas a partir de la teoría del agente representativo merecen ser puestas en duda. Como lecturas sobre el tema recomendamos: [Mas-Colell, A. Whinston, M.], [Arrow, K. J.], [Sen, A].

8.5 Función Exceso de Demanda y Equilibrio

El tema central de esta sección será el estudio del Equilibrio Walrasiano, así como las condiciones que garantizan su existencia. Si bien la existencia del Equilibrio Walrasiano, puede probarse en condiciones más generales que las de aquellas economías en las que puede asegurarse la existencia de la función demanda, nos limitaremos en esta sección a probar la existencia del Equilibrio Walrasiano en estos casos. El lector deseoso de mayor generalidad, puede consultar [Mas-Colell, A. Zame] o bien el texto de [Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.].

Comenzaremos la sección definiendo la función **Exceso de Demanda** para una economía con preferencias $\succeq_i$ determinadas y dotaciones iniciales $w = (w_1, w_2, ...w_n)$ fijas, n representa el número de agentes de la economía.

Definición 73 *Una función de exceso de demanda es una función,* $z : int(R^l_+) \rightarrow R^l$ *definida por:*

$$z(p) = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) - \sum_{i=1}^{n} w_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(p) - W$$

Donde $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$ es la oferta agregada, y $x_i(p)$ representa la demanda del agente i a precios p. La expresión en coordenadas de la función exceso de demanda viene dada por: $z(p) = (z_1(p), z_2(p), ..., z_n(p))$.

Un precio p^* para el que la función exceso de demanda se anula representa un precio para el que la oferta de bienes en la sociedad es igual a su demanda. Dado que para este precio los agentes tendrán una demanda $x_i(p^*)$ que garantiza la no existencia de excedente, p^* es un precio de equilibrio.

Podemos hacer la siguiente definición:

Definición 74 *El par* $(p^*, x(p^*))$ *es un* **Equilibrio Walrasiano** *si y solamente sí* $z(p^*) = 0$.

Recuerde que p^* es un elemento del interior de R^l_+ y que $x(p^*)$ es un elemento de R^{ln}_+ pues es una asignación de recursos, y como tal se compone de n cestas de bienes, con l componentes (bienes) cada una, una para cada uno de los n agentes de la economía.

Propiedades de la Función exceso de demanda:

1) Es homogénea de grado cero.

2) Es continua y acotada inferiormente.

3) Satisface le Ley de Walras: $pz(p) = 0 \ \ \forall p$.

4) Si una sucesión de precios $\{p_n\}$ en el interior de R^l_+ converge a un precio p también en dicho interior, entonces la sucesión $\{z(p_n)\}$ se mantiene acotada.

5) Si una sucesión de precios $\{p_n\}$ en el interior de R^l_+ converge a un precio p en la frontera de R^l_+ (es decir p tiene alguna coordenada igual a cero) entonces al menos una coordenada crece infinitamente.

Las propiedades indicadas pueden mostrarse a partir de las análogas satisfechas por la función demanda.

El siguiente paso es mostrar la existencia del precio p^* de equilibrio. Lo que se hará en la siguiente sección.

9 Equilibrio Competitivo

La caracterización de Equilibrio Competitivo, como un sistema de ecuaciones simultaneas (representado en $z(p) = 0$ a partir de los trabajos de K. Arrow y G. Debreu) fue realizado por primera vez por [Walras, L.]. Walras partía de agentes maximizando su función de utilidad y productores maximizando beneficios por un lado, a la vez que entendía que el precio es independiente de la acción misma de cada agente económico por separado. Estos encuentran precios dados y actúan frente a ellos como frente a un dato económico. Si bien el método seguido por Walras, de contar ecuaciones e incógnitas como forma de asegurar la existencia de una solución del referido sistema es esencialmente correcto, no alcanza para justificar la existencia del equilibrio, debe también poder asegurarse la positividad de la solución. No es sorprendente que la demostración de la existencia del equilibrio competitivo (o Walrasiano) se haya demorado en aparecer, pues demostrar su existencia, como hoy se sabe, es equivalente al problema de encontrar un punto fijo de un mapa continuo de un conjunto compacto en sí mismo, y este resultado fue probado por primera vez en 1910 por Brouwer.

El nacimiento de la teoría de Equilibrio General puede datarse en 1954, fecha en la que [Arrow, K. Debreu, G.] publican un resultado general de la existencia del equilibrio competitivo, es éste un resultado de gran importancia para el desarrollo posterior de la teoría económica. Dada la intensa relación existente entre el concepto de equilibrio general, y puntos fijos de mapas continuos presentaremos en esta sección un teorema de existencia del equilibrio competitivo y un teorema de existencia de punto fijo en mapas continuos de compactos en sí mismos. La historia de la prueba de la existencia del equilibrio competitivo es un ejemplo claro de la necesidad de una combinación adecuada de teoría económica y matemática.

9.1 Existencia del Equilibrio Competitivo

Presentaremos por razones de simplicidad solamente una demostración de la existencia para el caso de las llamadas economías de intercambio puro Es posible extender la demostración al caso de economías con producción, pero este no es nuestro objetivo aquí.

Definición 75 *Llamamos* **Punto Fijo** *Sea A un subconjuntos de X. Un* **Punto Fijo** *de una función $f : A \to X$ es un punto $x \in A$ para el que se cumple que $x = f(x)$.*

Aunque el siguiente teorema será probado en la subsección siguiente en toda su generalidad, lo enunciaremos aquí por necesidad metodológica, en una forma más restrictiva y sin prueba.

Teorema 76 Teorema de Brouwer. *Sea $K \subset R^n$ un conjunto no vacío, compacto y convexo. Toda función continua de K en sí mismo, tiene un punto fijo.*

Teorema 77 Existencia del Equilibrio. *Supongamos que las preferencias de los agentes económicos son continuas, estrictamente convexas y estrictamente crecientes. Suponga también que $w_i \in R^l_+ - \{0\}$ $i = 1, 2, ..., n$. Entonces el Equilibrio Walrasiano existe.*

Prueba Sea Ξ un mapa del simplex de dimensión $l - 1$ en sí mismo (l representa el número de bienes presentes en la economía) tal que:

$$\Xi_h(p) = \frac{p_h \ + \ max\{0, \bar{z}_h(p)\}}{1 + \sum_{j=1}^{l} max\{0, \bar{z}_j(p)\}} \tag{1}$$

$h = 1, 2..., l$ y siendo $\bar{z}_h = max\{z_h, 1\}$, donde z_h es la función de exceso de demanda por el h-ésimo bien. Obsérvese que si nos restringimos a precios no negativos entonces se cumple que,

$$\sum_{h=1}^{l} p_h \bar{z}_h(p) \leq \sum_{h=1}^{l} p_h z_h(p) = 0. \tag{2}$$

La continuidad de la función exceso de demanda en E^{n-1}_{++}, asegura la continuidad de Ξ en dicho conjunto. Pero la demanda puede ser discontinua en la frontera de dicho conjunto, es más como ya vimos si las preferencias son estrictamente monótonas, la demanda por algún bien crecerá indefinidamente al acercarse los precios a un valor en la frontera de E_{++}^{n-1}. Es por ese motivo que consideramos la función $\bar{z}_h$ la que es continua para todo elemento p del simplex.

Siendo entonces Ξ una función continua, de un compacto en sí mismo, por el teorema de Brouwer tiene un punto fijo. Sea éste $\bar{p}$. Probaremos a continuación que $\bar{p}$ es un equilibrio.

Operando en 9.1 obtenemos

$$\bar{p_h}\left(1+\sum_{j=1}^{l} max\{0,\bar{z}_j(\bar{p})\}\right)=\bar{p_h}\ +\ max\{0,\bar{z}_h(\bar{p})\}$$

Multiplicando ambos miembros por $\bar{z}_h(\bar{p})$ sumando respecto a h y considerando (2) obtenemos :

$$\sum_{h=1}^{l}\bar{z}_h(\bar{p})max\{0,\bar{z}_h(\bar{p})\}\leq 0.$$

Por la no negatividad de cada término obtenemos:

$$\bar{z}_h(\bar{p})max\{0,\bar{z}_h(\bar{p})\}=0$$

por lo tanto : $\bar{z}_h(\bar{p})\leq 0$, por lo tanto a precios $\bar{p}$ se cumple $z_h(\bar{p})=\bar{z}_h(\bar{p})$. Luego si $\bar{z}_h(\bar{p})<0$ por la Ley de Walras: se sigue que: $\bar{p}=0$. Por la monotonía de las preferencias se sigue que $x_h(\bar{p})>M$ para todo M real, lo que contradice $z_h(\bar{p})<0$, luego $z_h(\bar{p})=0$.[]

El lector puede verificar que si en lugar de pedir estricta monotonía en las preferencias, pedimos solamente no saciedad local, entonces podemos llegar de igual modo a la existencia de $\bar{p}$ de equilibrio. No obstante si bien es cierto que no habrá exceso de demanda, es posible la existencia de exceso de oferta (bienes libres) para algunos bienes, para los cuales sus precios serán, por la Ley de Walras, cero. Por otra parte la *estricta convexidad* de las preferencias es requerida a los efectos de que la demanda sea una función. No obstante es posible pedir solamente convexidad, la demostración del teorema de existencia del equilibrio hará uso en este caso, del teorema de punto fijo de Kakutani y usará técnicas provenientes de la teoría de correspondencias. En la siguiente sección haremos una breve introducción al tema.

9.2 Teoremas de Punto Fijo

La trascendencia del teorema de existencia del punto fijo en economía hace que le dediquemos un espacio relativamente amplio en estas notas.

El teorema es elemental cuando trabajamos con funciones continuas de un compacto en sí mismo en R. Para ver esto considere la función $f:[-1,1]$ en sí mismo y defina $g(x)=f(x)-x$.

Esta función es no negativa en $x = -1$ y no positiva en $x = 1$. Como $g(x)$ es continua, debe existir un punto c tal que $g(c) = 0$. Luego $f(c) = c$. Luego c es el punto fijo.

La situación es bastante más complicada cuando trabajamos en dimensiones mayores que uno. Daremos una prueba general para estos casos para correspondencias y luego obtendremos como corolario el teorema para funciones.

Las correspondencias juegan un papel importante en teoría económica, por ejemplo la región presupuestaria es una correspondencia que asocia un conjunto de cestas del espacio de consumo con un precio dado. En teoría de juegos el conjunto de mejores réplicas es una correspondencia entre los conjuntos de estrategias de un jugador y los del resto. La mayor diferencia entre funciones y correspondencias aparece en el momento de definir la imagen inversa. Para la función f la imagen inversa de un cierto conjunto A es el conjunto $f^{-1}(A) = \{x : f(x) = a\}$. Para una correspondencia ϕ hay dos razonables generalizaciones: *inversa superior* de A que está definida como $\{x : \phi(x) \subset A\}$, y *la inversa inferior* de A, que es $\{x : \phi(x) \cap A \neq \emptyset\}$. Cuando ϕ es una función ambos conjuntos coinciden con la inversa de la función.

Habiendo dos definiciones de imagen inversa, hay dos definiciones de continuidad: Una correspondencia es *semicontinua superiormente* cuando la preimagen superior de un abierto es abierto, y es *semicontinua inferiormente* cuando la preimagen inferior de un abierto es un abierto.

Daremos a continuación las definiciones formalmente:

Definición 78 *Una* **correspondencia** ϕ *de un conjunto X en un conjunto Y asigna a cada $x \in X$ un subconjunto $\phi(x)$ de Y. También puede ser considerada ϕ como una función de X en 2^Y el conjunto potencia de Y.*

La imagen de un conjunto $C \subset X$ para una correspondencia ϕ con domino en X y recorrido Y se define como

$$\phi(A) = \cup_{x \in C} \phi(x).$$

Definición 79 *Se definen los siguientes dos conceptos de imagen inversa:*

- **Inversa Superior, o Inversa Fuerte**

$$\phi^u(A) = \{x \in X : \phi(x) \subset A\}$$

- **Inversa Inferior, o Inversa Débil**

$$\phi^l(A) = \{x \in X : \phi(x) \cap A \neq \emptyset\}$$

- *Se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\phi^u(A) = \left[\phi^l(A^c)\right]^c \quad \phi^l(A) = [\phi^u(A^c)]^c$$

Entenderemos por entorno de un conjunto A cualquier subconjunto B que contiene un abierto V tal que : $A \subset V \subset B$. Cualquier conjunto abierto V para el que $A \subset V$ es llamado entorno abierto de A.

Definición 80 Continuidad de Correspondencias

- *Una correspondencia es* **Semicontinua Superior** *en un punto x si para todo entorno abierto U de $\phi(x)$, la imagen inversa fuerte $\phi^u(U)$ es un entorno de x Diremos que ϕ es semicontinua superior, si lo es para todo $x \in X$.*
- *Una correspondencia es* **Semicontinua Inferior** *en un punto x si para todo entorno abierto U cuya intersección con $\phi(x)$ sea no vacía la imagen inversa débil $\phi^l(U)$ es un entorno de x.*
- *Una correspondencia es* **Continua** *si es superior e inferiormente continua.*

Ejemplo 81 *Sean $\phi, \psi : [0,1] \to [0,1]$ correspondencias definidas por:*
$\phi(x) = \begin{cases} \{0\} & si\ x < 1 \\ [0,1] & si\ x = 1 \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} [0,1] & si\ x < 1 \\ \{0\} & si\ x = 1. \end{cases}$

Puede verificarse que ϕ es semicontinua superior, pero no es semicontinua inferior en el punto $x = 1$. Mientras que ψ es semicontinua inferior, pero no es semicontinua superior en $x = 1$.

La correspondencia $\gamma[0,1] \to [0,1]$ definida por $\gamma(x) = [0,x]$ es continua.

Ejemplo 82 *Sea X un conjunto de consumo donde está definida una relación de preferencias $\succeq$, y sea $\phi : X \to 2^X$ la correspondencia que a cada cesta $x \in X$ asigna el conjunto de las cestas que son preferibles a x :*

$$\phi(x) = \{z \in X : z \succeq x\}.$$

Encuentre los conjuntos preimágenes y muestre que el concepto de continuidad definido para correspondencias, coincide con el definido en el capítulo (3) para preferencias.

Diremos que una correspondencia $\phi : X \to Y$ entre espacios topológicos es **cerrada** si $\phi(x)$ es un conjunto cerrado para cada x.

Análogamente a lo ya hecho para funciones puede definirse para correspondencias el concepto de grafo.

Definición 83 *Se define como* **Grafo** *de la correspondencia* $\phi : X \to Y$ *al conjunto:*

$$G_\phi = \{(x, y) \in X \times Y : y \in \phi(x)\}.$$

Teorema 84 *Una correspondencia cerrada* $\phi : X \to Y$ *con codominio compacto y Hausdorff tiene el grafo cerrado si y solamente si es semicontinua superiormente.*

Prueba Sea ϕ semicontinua superiormente, veamos que en las condiciones del teorema su gráfico es cerrado. Supongamos que las sucesiones $\{x_n\} \in X$ e y_n con $y_n \in \phi(x_n)$ convergen a x e y respectivamente y que la que $y \notin \phi(x)$. Por ser Y espacio de Hausdorff compacto existen entornos abiertos V de y y W de $\phi(x)$ tales que $V \cap W$ es vacío. Por ser ϕ semicontinua superior, se tiene que $U = \phi^u(W)$ es abierto. Por lo tanto $U \times V$ es entorno abierto de (x, y) en $X \times Y$ disjunto de G_ϕ. *Recíprocamente :* Supongamos por contradicción que ϕ no es semicontinua superiormente. Entonces, existen x y V conjunto abierto, tales que $\phi(x) \subset V$, y además para todo entorno U de x existe $x_U \in U$ e $y_U \in \phi(x_U)$ con $y_U \notin V$. Por la compacidad de Y existe una subred de $\{y_U\}$ convergente, supongamos a y. Como $y_U \in V^c$ (que es un subconjunto cerrado) se tiene que $y \in V^c$. Como x_U converge a x por ser G_ϕ cerrado se tiene que: $y \in \phi(x) \subset V$ una contradicción.[]

El siguiente ejemplo muestra que la compacidad es necesaria para obtener la conclusión del teorema.

Ejemplo 85 *Sea la correspondencia* $\phi : R \to R$ *definida como:*

$$\phi(x) = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\} & si\ x \neq 0 \\ \{0\} & x = 0. \end{cases}$$

Tiene Grafo cerrado pero no es semicontinua superior en $x = 0$.

Los siguientes teoremas permiten en muchos casos una fácil caracterización de la semicontinuidad de las correspondencias en términos de redes. No daremos aquí las demostraciones de dichos teoremas, pero el lector puede encontrarlas en [Aliprantis, C. D.; Border, K. C.]

Teorema 86 *Sea* $\phi : X \to Y$ *una correspondencia cerrada entre espacios topológicos siendo* Y *Hausdorff y compacto, sea* $x \in X$ *entonces son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:*

1) Si $x_\alpha \to x$ *e* $y_\alpha \in \phi(x_\alpha)$ *para cada* α, *entonces la red* y_α *tiene límite en* $\phi(x)$.

2) La correspondencia ϕ *es semicontinua superior en* x.

Teorema 87 *Sea* $\phi : X \to Y$ *una correspondencia entre espacios topológicos, sea* $x \in X$ *entonces son equivalentes las siguientes dos afirmaciones:*

1) Si $x_\alpha \to x$ entonces para cada $y \in \phi(x)$ existe una subred $\{y_{\alpha_\lambda}\}$ con elementos en $\phi(x_\alpha)$ tal que $y_{\alpha_\lambda} \to y$.

2) La correspondencia ϕ es semicontinua inferior en x.

Teoremas de Punto Fijo

Presentaremos primeramente un resultado simple sobre puntos fijos.

Lema 88 *Si A es un conjunto cerrado de un espacio topológico X y una correspondencia $\phi : A \to X$ tiene el grafo cerrado, entonces el conjunto de los puntos fijos de ϕ es cerrado.*

Prueba La demostración se sigue de la observación de que x es un punto fijo para ϕ si y solamente si $(x, x) \in G_\phi$ y del hecho de G_ϕ es cerrado.

La demostración del teorema de existencia del punto fijo, requiere del concepto de *correspondencia hacia adentro.*

Definición 89 *Sea A un subconjunto de un espacio vectorial X. Decimos que una correspondencia $\phi : A \to X$ apunta* **hacia adentro** *(resp.* **hacia afuera** *) si para cada $x \in A$ existe $y \in \phi(x)$ y $\lambda > 0$ (resp $\lambda < 0$) tales que : $x + \lambda(y - x) \in A$.*

Obsérvese que si ϕ *mapea* A en sí mismo entonces es automáticamente, una correspondencia hacia adentro. (Basta elegir $y \in \phi(x)$, y $\lambda = 1$.)

Diremos que una correspondencia tiene valores cerrados y convexos si para cada x, $\phi(x)$ es cerrado y convexo.

Teorema 90 *Sea K un subconjunto no vacío, compacto y convexo de un espacio de Hausdorff, localmente convexo X. Sea $\phi : K \to X$ una correspondencia hacia adentro semicontinua superior con valores cerrados y convexos no vacío. Entonces ϕ tiene un punto fijo.*

Un espacio topológico se dice **localmente convexo** si todo entorno del cero, incluye un entorno convexo del cero. En particular R^n con la topología generada por la métrica Ciertamente es un espacio localmente convexo.

La demostración de este teorema es muy técnica y no la daremos en estas notas. Puede encontrarse en [Aliprantis, C. D.; Border, K. C.]

Teorema 91 (Teorema de Kakutani) *Sea K un conjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio de Hausdorff localmente convexo. Sea $\phi : K \to K$ una correspondencia cuyo Grafo es cerrado convexo y no vacío. Entonces el conjunto de los puntos fijos es compacto y no vacío.*

Prueba: La demostración de este teorema sale inmediatamente del teorema anterior, basta recordar que, para conjuntos compactos de Hausdorff, una correspondencia con gráfico cerrado es semicontinua superior. Por el teorema 9.2 el conjunto de puntos fijos es cerrado y entonces compacto. Para ver que el conjunto de puntos fijos es no vacío basta ver que un mapa ϕ en sí mismo es hacia adentro.

El siguiente teorema es inmediata consecuencia del hecho de que toda función continua es una correspondencia semicontinua superior.

Teorema 92 (Teorema de Brouwer) *Sea K un conjunto compacto, convexo y no vacío de un espacio de Hausdorff localmente convexo. Sea $f : K \to K$ una función continua. Entonces el conjunto de los puntos fijos es compacto y no vacío.*

References

[Aliprantis, C. D.; Border, K. C.] *Infinite Dimensional Analysis.* Springer-Verlag, 1994.

[Aliprantis, C.D; Brown, D.J.; Burkinshaw, O.] *Existence and Optimality of Competitive Equilibrium.* Springer-Verlag, 1990.

[Araujo, A.] *Introducao a Economia Matematica.* Proyecto Euclides. IMPA.

[Arrow, K. J.] *Social Choice and Individual Values,* 2da ed. New York, Willey.

[Arrow, K. Debreu, G.] *Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy.* Econometrica 22, (265-290). 1954.

[Berge, C.] *Topological Spaces.* N.Y Macmillan, 1963.

[Debreu, G.] *Theory of Value.* Yale University Press, 1959.

[Fishburn, P.C] *Utility for Decision Making.* N.Y. Willey, 1970.

[Green, J.; Heller, W.P.] *Mathematical Analysis a Convexity with Applications to Economics.* Handbook of Mathematical Economy, vol 1. Elsevier 1981.

[Kelley, J.L.] *General Topology.* New York, Von Nostrand, 1955.

[Mas-Colell, A.] *General Equilibrium: A Differentiable Approach.* Cambridge 1985.

[Mas-Colell, A. Whinston, M.] *Microeconomic Theory.* Oxford 1995.

[Mas-Colell, A. Zame] Handbook of Mathemaical Economy, vol 4. Elsevier 1981

[Mendelson, B.] *Introduction to Topology.* Dover Publications Inc. (tercera edición) 1975.

[Suppes, P.] *Teoría Axiomática de Conjuntos.* Editorial Norma, 1968.

[Sen, A] *Social Choice Theory.* Ch 22 Handbook of Mathematical Economics, 1986. North Holland.

[Takayama, A.] *Mathematical Economy.* Dryden Press 1974.

[Walras, L.] *Elements d' Economie Politique Pure.* Lausanne, París 1900.