Universidad de la República
Facultad de Ciencias Sociales
DEPARTAMENTO DE ECONOMIA

Notas Docentes

Introducción a la Teoría de Juegos

Elvio Accinelli y Daniel Vaz

Nota Docente No. 03

1 Introducción

La teoría de juegos podría definirse como el estudio de modelos matemáticos sobre el conflicto y la cooperación entre agentes racionales e inteligentes. Usando otras palabras, puede caracterizarse el objeto de esta rama de la matemática como el análisis de modelos formales de "comportamiento estratégico", lo que obviamente sugiere la existencia de intencionalidad. [1]

El nombre de la disciplina proviene de sus antecedentes históricos. En efecto, sus orígenes se remontan a la teoría de la decisión cuyo objeto era el comportamiento de quienes participan en juegos de salón, que comienza a desarrollarse en las cortes europeas a partir del siglo XVIII. [2] Uno de los temas que entonces se analizaba era lo que dio en llamarse la "Paradoja de San Petersburgo". La misma consistía en que la gente sólo apostaba sumas muy módicas para participar en un juego que tenía una ganancia esperada infinita, cuya mecánica es la siguiente: *se tira una moneda al aire, si sale cara el apostador gana $ 1 y el juego se termina. Si sale número la moneda es tirada otra vez. Si sale cara el apestador gana $ 4 y el juego se termina, pero si sale n "umero se tira la moneda nuevamente. La ganancia por obtener una cara en la tercera tirada es $ 16 y por obtenerla en la cuarta es $ 64, etc.*

Los estudios modernos de teoría de juegos comienzan con [E. Zermelo (1913)], y [E. Borel, (1938) Pero recién con la publicación del trabajo de von Neumman y Morgernstein, *Game Theory and Economic Behavior,* [O. Morgenstern, J. von Neumann(47)], es que esta disciplina comienza a expandirse a un ritmo vertiginoso. En la matemática, el desarrollo de la teoría de juegos está asociado con el desarrollo de ramas aplicadas como la teoría estadística de la decisión y una serie de problemas que, grosso modo, pueden considerarse parte de la Programación Lineal.

En las ciencias sociales la adopción de la teoría de juegos como una metodología de análisis es más reciente. La economía es la que ha liderado este proceso, sin duda alguna, y podría decirse que desde comienzos de los años 60 ha habido una masiva importación de la teoría de juegos para la elaboración de la Teoría Económica [3] No obstante, algunas de las ideas que han llegado a ser básicas en teoría de juegos recién se incorporan al cuerpo teórico en 1950, aun cuando ya habían sido presentadas en un análisis económico concreto en las primeras décadas del siglo XIX por economistas franceses que estudiaban el comportamiento de las empresas en mercados no competitivos (en particular, [A. Cournot, (1897)] y [J. Bertrand (1883)]). De hecho, si bien hasta fines de la década del 50 el desarrollo de la teoría de juegos era un "asunto" de matemáticos puros y no había habido desarrollos originado por disciplinas empíricas desde los 60 esa situación cambia (los premios Nóbel adjudicados a Nash, Harsanyi, y Selten, sin embargo, exageran la influencia de

[1] Una autoridad en la materia como Auman, define la Teoría de Juegos como la teoría del comportamiento racional de personas con intereses no idénticos. A nuestro juicio al no hacer hincapié en la interacción entre los individuos, esta definición resulta extremadamente vaga y no permite la distinción entre la teoría de juegos y la teoría estadística de la decisión. [R. J. Auman, (1989)]

[2] La cita de rigor es [D. Bernuolli,(1730)], según la traducción inglesa del trabajo de 1730 cuyo título original era "Specimen Theorare Novae de Mensura Sortis"

[3] De hecho, la idea de que la manera de formalizar el comportamiento racional era a través de la teoría de juegos provocó un cambio dramático en la manera de estudiar la microeconomía - y más recientemente la macroeconomía - por cuanto algunas de las teorizaciones en el estilo de las desarrolladas por la "Escuela de Chicago" de los años 50 y 60 no pudieron ser sostenidos cuando se adoptó el nuevo marco analítico en forma generalizada. Obsérvese que el Premio Nóbel de 1994 fue obtenido por autores que desarrollaron la teoría de juegos y el 1995 fue concedido al economista que encabezó la renovación metodológica del Departamento de Economía de la Universidad de Chicago.

la economía en el trabajo de esos matemáticos). Sin embargo, recientemente, los manuales más conocidos de teoría de juegos han sido escritos por economistas o economistas matemáticos y han sido realizados con la vista puesta en la aplicaciones de la teoría a las ciencias sociales. Algunos de los cursos más celebrados de teoría de juegos, que son válidos para los programas de doctorados en matemática, se imparten en los departamentos de economía.

Una advertencia que cabe hacer desde el principio es que hay *"juegos cooperativos"* y *"juegos no cooperativos* . Si bien en ambas clases de juegos la teoría de la decisión individual es la misma, en el primer caso se permite a los individuos involucrados hacer negociaciones para actuar mancomunadamente, pero en el segundo caso ello no se permite. Si los agentes terminan cooperando, ello es el resultado de un comportamiento competitivo resuelto individualmente y no mediante negociaciones dirigidas a tal efecto. El curso se limitará al tratamiento de juegos no cooperativos.

1.1 Noción Informal de Juegos

La mención de que la teoría de juegos estudia modelos formales de comportamiento estratégico no es suficiente para comenzar a comprender en concreto a que refiere esta disciplina. Por supuesto, no refiere a toda posible expresión de conflicto de intereses, ni a toda situación en la que sea posible detectar la oposición de intereses. La teoría refiere a modelos que tienen las características que se enumeran seguidamente:

a.- Los resultados posibles de una situación conocida [4] están claramente especificados y son conocidos por los individuos involucrados en esa situación.

b.- Las variables que controlan los resultados posibles también se presumen que estén bien especificados, esto es, se puede caracterizar precisamente todas las variables y los valores que ellas pueden asumir. En términos un poco más vagos pero contundentes, la teoría de juegos requiere la especificación de reglas de juego claras.

c.- Los individuos tienen preferencias sobre los resultados, que cumplen una serie de axiomas y propiedades que examinaremos más adelante. Se supone que la gente procura maximizar la utilidad (esperada). Por lo tanto, haciendo abstracción de la interacción entre los individuos, un observador que fuera informado de las preferencias de cada individuo podría saber que elegiría cada uno si nada le obstaculizara su elección. Este es el postulado de **racionalidad.** Obsérvense dos hechos: **(i)** el concepto de racionalidad implica que los agentes tienen la capacidad y la información necesaria para calcular la utilidad esperada de cualquiera de los resultados del juego y **(ii)** que ante situaciones complejas, en que ningún agente tiene el control total de los acontecimientos, no alcanza con la racionalidad de cada agente, aunque, una vez ubicado en una situación dada actúe racionalmente.

d.- Todo lo mencionado hasta el momento es de público conocimiento. Este es el supuesto denominado **"conocimiento común"** (common knowledge). Este supuesto implica que cada agente sabe cuanto le importa cada resultado posible y a su "contrincante", conoce las

[4] **Cuando se postula que la naturaleza es estocástica, lo conocido, es la función de distribución de los resultados posibles.**

reglas del juego, sabe que su oponente es un agente racional, sabe, que su contrincante sabe las mismas cosas que él y sabe que su contrincante sabe que él sabe y así hasta el infinito, (yo se que tu sabes que yo se que tu sabes, etc...).

En un juego, entonces, los resultados posibles pueden ser determinados de antemano y dependenderán de las acciones que elijan los individuos que participan, quienes deben ceñirse a un conjunto estricto y conocido de reglas. Los individuos escogerán el curso de acción de modo de maximizar la utilidad esperada de se decisión, teniendo en cuenta que los otros individuos proceden del mismo modo sabiendo lo mismo.

1.2 Qué Hace la Teoría de Juegos?

El rol de la teoría no es examinar todos y cada uno de los cursos de al acción que eventualmente puede tomar cada sujeto y todos y cada uno de los resultados que pueden sucitarse. Su objeto, es determinar, cuando sea posible, el resultado "más probable" del juego. Cuando ello no es posible, procura determinar el conjunto de resultados que "a priori" resultan más probables dados los supuestos establecidos. Esto es el conjunto de los **equilibrios** posibles, entendiendo por tales aquellas elecciones que no impliquen un arrepentimiento, es decir aquellas acciones que fueron racionalmente elegidas, en el sentido que dada la situación, maximizan la utilidad esperada.

1.3 Sobre los Usos Posibles de la Teoría de Juegos

Como dijimos, en esencia la teoría de juegos es una rama de la matemática. En sus aplicaciones concretas en disciplinas empíricas, importa por su poder descriptivo y como metodología analítica por su poder predictivo. Es así que la utilización hace de esta teoría una ciencia positiva, más que normativa, aunque en su formulación haya elementos normativos insoslayables. Su axiomatización no se basa en una abstracción de prácticas habituales, sino que se basa en conceptos que se suponen naturales y propios del comportamiento racional. A partir de aquí se deriva un comportamiento optimizador, que no necesariamente tiene porqué ser robusto al cambio de supuestos. En este sentido la teoría es normativa. La definición de actitud racional tiene pleno sentido en el marco de la axiomática establecida y puede ser relativizada como actitud *"natural"* fuera de él.

Es de destacar que los prerrequisitos matemáticos para la comprensión de la teoría, más que a alguna parte especial de la matemática hacen referencia al método y a la forma de razonar, aunque podamos mencionar como necesarios conocimientos básicos de Probabilidad, Topología y Algebra Lineal. Desarrollos posteriores de la teoría requieren la utilización de técnicas más avanzadas de la matemática.

2 Ejemplos de Juegos Cooperativos y no Cooperativos

En esta problemática nos encontraremos con juegos donde los individuos son libres de cooperar entre sí para obtener mejores beneficios, son los llamados *Juegos Cooperativos* y aquellos en los que está prohibido todo tipo de cooperación entre los jugadores, son los llamados *Juegos no Cooperativos.* Para que un juego sea cooperativo, deben de existir al menos dos posibles resultados l y l' por ejemplo, tales que al menos un jugador prefiera l a l' y los otros no prefieran l' a l.

Consideremos el siguiente ejemplo tomado de [R. D. Luce and H. Raifa], conocido como la Batalla de los Sexos.

El juego en discución queda representado por la siguiente matriz de retornos:

$$\begin{bmatrix} (2,1) & (-1,-1) \\ (-1,-1) & (1,2) \end{bmatrix}$$

Fig.1. La Batalla de los Sexos.

Un hombre, el jugador I, y una mujer, jugador II, deben elegir a que espectáculo asisten un sábado de noche. Se trata de un partido de fútbol o de un espectáculo de ballet. De acuerdo a las normas culturales vigentes el hombre prefiere el fútbol mientras que la mujer el ballet. Ambos coinciden en que lo mejor es ir juntos aunque la elegida sea la diversión menos preferida.

El jugador I prefiere la estrategia $(1,1)$ y el jugador II, la $(2,2)$ pues de elegir el jugador I, la fila 1, y el jugador II, la columna 1, su retorno será el máximo posible, analogamente para el jugador II. Si juegan sin cooperar, lo mejor que pueden hacer es definir cada uno una distribución de probabilidades, sobre filas y columnas respectivamente de forma de maximizar su retorno esperado, que será:

$$R_I = \sum_{i=1,j=1}^{2,2} x_i a_{ij} y_j$$

$$R_{II} = \sum_{i=1,j=1}^{2,2} x_i b_{ij} y_j$$

Donde a_{ij} representa los retornos para el jugador I, ubicados en la matriz como las primeras coordenadas de cada dupla, y analogamente b_{ij} para II. Siendo que $x_1 + x_2 = 1$ y $y_1 + y_2 = 1$ son las respectivas distribuciones de probabilidad sobre filas y columnas que deben elegirse a los efectos de maximizar los retornos.

En este caso obtendrán un retorno de $\{\frac{1}{5}, \frac{1}{5}\}$. Si deciden cooperar podrían elegir tirar una moneda honesta y asistir juntos al ballet si sale cara o al futbol si sale cruz, en este caso el retorno esperado para cada un asciende a $\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\}$.

Más adelante volveremos al ejemplo, a los efectos de realizar el conjunto de operaciones necesarias para obtener los resultados establecidos.

A grandes rasgos podemos distinguir dos formas de modelar estas situaciones: la llamada Juegos en Forma Extensiva y la segunda llamada Juegos en Forma Normal. Veremos que existen situaciones donde ambas descripciones coinciden aunque una y otra reflejan situaciones diferentes.

2.1 Juegos en Forma Extensiva

La siguiente definición formal de un juego en forma extensiva, puede seguirse con la ayuda de la Fig. 2.

Definición 1 *Formalmente un juego en Forma Extensiva está definido por:*

i) *Un árbol finito, cuyos nodos representan los movidas, y cuyas ramas representan las posibles jugadas en cada movimiento.*

ii) *Un etiquetamiento de cada jugada en una de $n + 1$ clases que representan a cada uno de los n jugadores y una para la naturaleza (esta puede o no, estar presente).*

iii) *Una distribución de probabilidad sobre las ramas en cada nodo correspondiente a una movida de la naturaleza.*

iv) *Una partición en el conjunto de las movidas para cada jugador en subconjuntos, llamados conjuntos de información, no pudiendo un jugador distinguir entre movidas (nodos) diferentes correspondientes al mismo conjunto de información. La existencia de información impefecta queda representada por el hecho de que un conjunto de información posee más de un nodo.*

v) *Una asignación de resultados (retornos) para cada nodo final, esto es para cada sucesión de elecciones posibles.*

vi) *Para cada jugador, existe una función de utilidad lineal definida sobre cada nodo final del árbol, de conocimiento público.*

Definición 2 *Entendemos por movida, (nodo) un punto en el cual un jugador tiene que elegir que jugada realizará de acuerdo a reglas previamente establecidas y conocidas por todos los participantes.*

Una sucesión de tales elecciones es un juego. En este tipo de juegos el orden de la elección es importante, debe estar claro cuando y quien elije, este orden introduce una dinámica en el juego.

Definición 3 *Entenderemos por* **estrategia** *de un jugador una regla o conjunto de reglas que estipulan la jugada a realizar por el jugador en cada nodo.*

Una **estrategia es de equilibrio** si el resultado obtenido por su aplicación maximiza las posibilidades de cada jugador, de forma tal que al desviarse de las mismas un jugador acarrea el riesgo de pérdidas más importantes que aquellas que podría obtener de guiarse por la estrategia de equilibrio. Es en este sentido que diremos que una estrategia de equilibrio es optimal.

Veamos el siguiente ejemplo:

En la Fig. 2, N representa a la naturaleza, que determina la situación en la que el primer jugador hará su primera movida. A continuación el jugador I, eligirá entre dos posibles acciones o movidas. Una estrategia para I quedará definida por una dupla elegida en el conjunto $S_1 = \{(i,i),(i,d),(d,i),(d,d)\}$ que representa la acción a elegir en una u otra situación.

A continuación mueve II, quien tendrá que definir un estrategia posible dentro del conjunto $S_2 = \{(i,i,i),(i,i,d),(i,d,d),(i,d,i),(d,i,i),(d,d,i),(d,i,d),(d,d,d),(i,i,c),(i,d,c),(d,d,c),(d,i,c$

Obsérvese que el jugador II no sabe distinguir en cual de los dos posibles nodos centrales se encuentra, para él existen unicamente tres situaciones posibles.

Una vez elegidas las estrategias el retorno para cada jugador queda determinado para cada estado de la naturaleza.

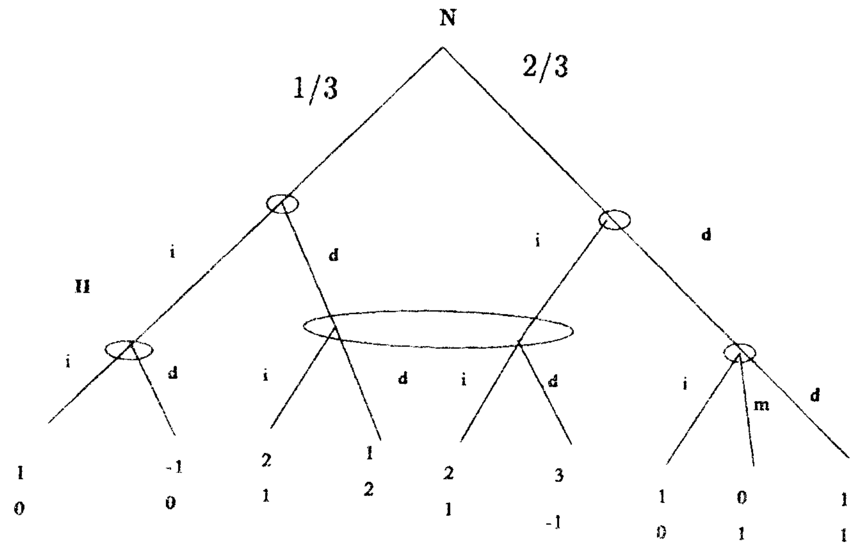

Fig. 2 La naturaleza juega primero. Los retornos de cada jugador aparecen al final. los de arriba para el I, los de abajo para el II.

2.2 Juegos en Forma Normal

Un juego en Forma Normal, es una simplificación importante de un juego en Forma Extensiva, no obstante tene importancia por si mismo.

Definición 4 *Un juego en Forma Normal consiste en:*

i) Un conjunto de n jugadores.

ii) n conjuntos de estrategias S_i, uno para cada jugador.

iii) n funciones de retorno M_i, una para cada jugador, cuyo valor depende de las estrategias elegidas por cada uno de los jugadores.

iv) Cada jugador elije una sola vez. Ambos eligen simultaneamente y sin el conocimiento de la elección hecha por el otro. En este sentido, decimos que los juegos en forma normal son estáticos.

Como en el caso de juegos en forma extensiva, cada jugador será racional, en el sentido de que actuará siempre intentando maximizar su función de utilidad, sin tener un control total de la situación.

Los juegos con dos personas, puede verse como un caso particular de juego de n personas, pudiendo ser que estas cooperen entre si, o bien en juegos no cooperativos, no obstante tienen su propio lugar en la teoría por cuanto muchas situaciones que envuelven intereses en conflicto, están protagonizadas por dos personas, o dos grupos de personas con intereses antagónicos.

Un caso más específico aun, pero de reconocido valor teórico y empírico es el caso de los juegos llamados, Juegos de Dos Personas con Suma Cero. Es importante destacar que la elegancia matemática de los juegos de dos personas con suma cero, ha hecho que muchos matemáticos ampliaran su interés por las aplicaciones de su teoría a las ciencias del comportamiento.

La expresión "suma cero" hace referencia al hecho que lo que uno de los jugadores recibe de beneficio el otro lo tiene de perjuicio, esto es la suma de las utilidades, al finalizar el juego es cero. Son evidentemente juegos no cooperativos, no existe posibilidades de colusión o cooperación.

Tales juegos son representados por matrices, representando las filas las "estrategias puras" del jugador I y las columnas las del jugador II. Los elementos de la matriz representan los posibles resultados obtenidos al elegir las correspondientes estrategias. Esto es el retorno a_{ij} es un elemento de la matriz, que representa lo que uno de los dos jugadores recibirá, (por ejemplo I) y el otro (II) pagará como resultado de haber elegido el jugador I la fila (estrategia) i y II la columna j de la matriz. El principal problema para estos juegos, es el de construir una teoría adecuada para la elección de las estrategias.

Ejemplo 5 juego de dos personas y suma cero.

El siguiente ejemplo simple, ilustra la situción: **PAR o IMPAR** *Los jugadores I y II simultaneamente eligen un número, uno o dos. I gana si la suma es impar, II gana si la suma es par. El perdedor está obligado a pagar al ganador una cifra igual a la suma de los números elegidos.*

	"uno"	*"dos"*
"uno"	−2	+3
"dos"	+3	−4

Fig.3. Juego de Suma Cero.

El retorno sumado es siempre cero, la matriz representa solamente el retorno para uno de los jugadores, siendo el opuesto el retorno correspondiente al otro jugador.

Suponga que usted es el jugador I y que el juego se juega muchas veces : qué estrategia utilizaría? Piénselo y lo comentamos más adelante.

Otros juegos que no son de suma cero, admiten en su forma normal una representación matricial, ejemplo de ello son los juegos bimatriciales.

2.3 Relación entre Juegos en Forma Extendida y Juegos en Forma Normal

Para juegos que consisten en una movida para cada uno de los participantes a lo sumo, se puede enunciar la siguiente proposición:

Proposición 6 *A todo juego es forma extendida le corresponde un juego en forma normal, en el que imaginamos a los jugadores eligiendo simultaneamente estrategias a implementar. Sin embargo a todo juego en forma normal, le corresponde, en general, varias formas extendidas diferentes.*

La demostración es sencilla y queda para la reflexión del lector. Haremos a través de ejemplos una ilustración de la proposición.

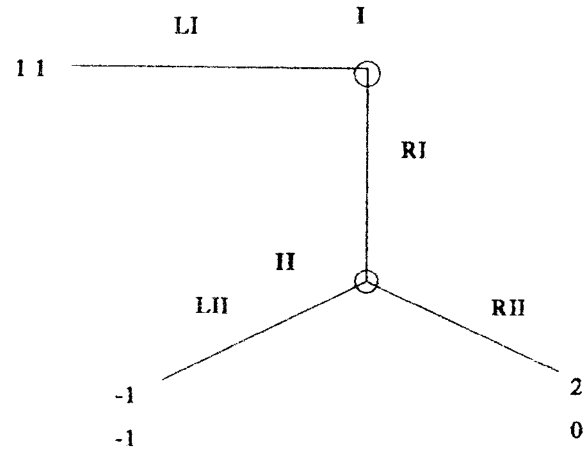

Fig. 5. Una de las posibles representaciones, en forma extendida, del juego cuya forma normal aparece en la Fig.4.

Ejemplo 7 *El siguiente juego en forma normal, presenta dos alternativas posibles para modelarlo como un juego en forma extendida, las que serán representadas en la figura.*

.	b_1	b_2
a_1	$(1,1)$	$(1,1)$
a_2	$(-1,-1)$	$(2,0)$

Fig. 4. Representación Normal.

La pregunta que queda planteada es la siguiente: Hasta qué punto la forma normal contiene toda la información relevante para entender un juego?.

El Papel de la Información La Fig. 6, represena el hecho que el jugador II, no conoce a su turno cual fue la jugada de su antecesor. En este caso el juego es equivalente a uno en el cual ambos jugadores eligen simultanea e independientemente.

Por otra parte veamos que si consideramos el juego anterior, pero suponiendo que a su turno el jugador II puede distinguir entre los dos nodos de su conjunto de información el juego tiene un significado diferente. Ver Fig. 7.

En tanto que un jugador elige sabiendo lo que hizo el otro es posible obtener resultados diferentes, es de destacar que no siempre más información significa mejores retornos.

Juegos de dos jugadores en los que uno juega primero y el otro actúa en función de este conocimiento, como el representado en la Fig. 6, son llamados juegos de Stackelberg.

2.4 Notación

En este apartado introduciremos y haremos comentarios sobre la notación que se seguirá en el curso.

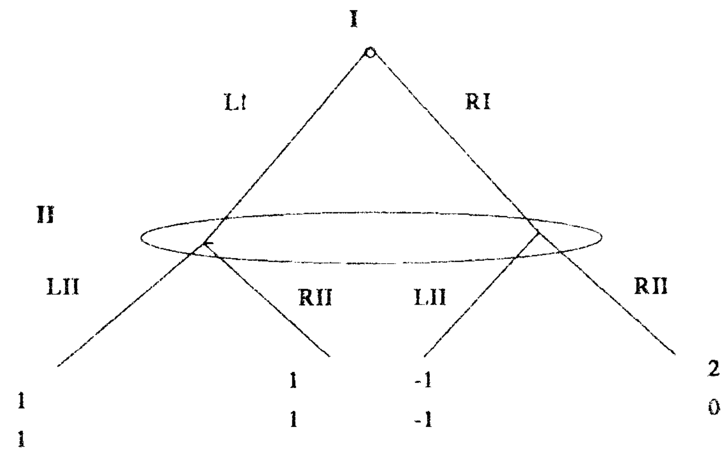

Fig.6. Otra de las posibles formas extendidas, correspondientes al juego, cuya forma normal aparece en Fig.4.

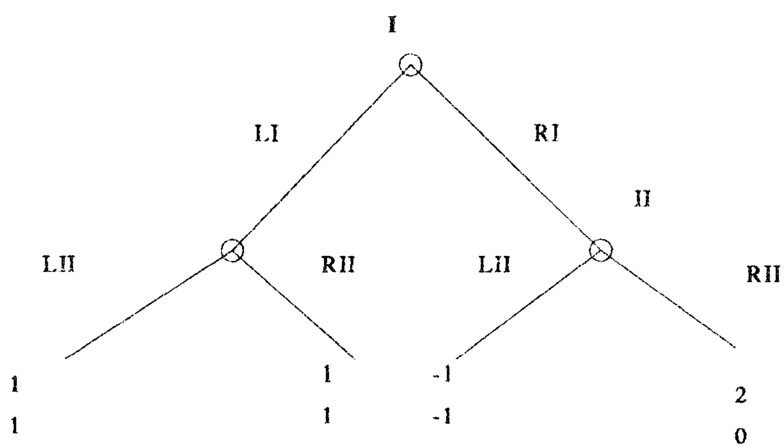

Fig. 7. En su forma extendida, este juego es sustancialmente distinto del representado en la Fig. 4. Este es un juego de Stackelberg.

Sea $\mathcal{H}$ una partición del conjunto de los nodos de un árbol, esto es: a cada nodo se le adjudica un subconjunto $h \in \mathcal{H}$, si $h(x)$ representa la acción que el jugador hará en el nodo x, debe tenerse en cuenta que si $x' \in h(x)$ entonces $h(x) = h(x')$

Sea H_i la partición de los nodos correspondiente al jugador i, recuerde que consideramos la posibilidad de que existan n jugadores, por lo tanto i representa a cualquiera de ellos. $A(h_i)$ representará las acciones (movidas) a realizar por el jugador i en el nodo $h_i \in H_i$. $A_i = \cup_{h_i \in H_i} A_i(h_i)$ es el conjunto de todas las acciones posibles para el jugador i.

Definición 8 *Una* estrategia pura *para* i, *es un mapa* $\phi_i : H_i \to A_i$ *con* $\phi_i(h_i) \in A(h_i)$. *El espacio de las estrategias puras,* Φ_i, *es precisamente el conjunto de todos los mapas del tipo* ϕ_i. *Tal espacio puede escribirse como el producto cartesiano* $S_i = \times_{h_i \in H_i} A(h_i)$, *así por ejemplo* $\{i, d\}$.

Para el jugador I del ejemplo de la Fig.1, es la estrategia que hará al jugador mover hacia la izquierda para uno de los estados de la naturaleza y hacia la derecha, si el estado que se realiza es el de mayor probabilidad. Analogamente puede entenderse $\{i, i, c\}$, para el jugador II.

La cantidad de estrategias posibles, $\#\phi_i$, es igual al producto de las acciones posibles en cada nodo $\#A_i(h_i)$, esto es; $\#\Phi_i = \Pi_{i=1}^{n} \# A_i$. Luego veremos que existen situaciones en las que para describirlas, es suficiente una cantidad bastante menor de estrategias, alcanza con las llamadas estrategias de comportamiento.

Definición 9 *El retorno queda definido una vez conocidos el estado de la naturaleza que se revela y las estrategias aplicadas por los jugadores, será representado por una aplicación* R: $\Phi = \Phi_1 \times, \ldots, \Phi_n \to R^n$.

Un juego **en Forma Normal,** con n jugadores, será representado por:

$$\gamma = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n\},$$

siendo Φ_i el conjunto de estrategias puras para el jugador i, y R_i un mapa, donde $R_i : \Pi_{i=1}^{n} \Phi_i \to R$.

$$m_i = |\Phi_i|, \quad m = \sum_{i=1}^{n} m_i, \quad m* = \Pi_{i1}^{n} m_i. \tag{1}$$

Definición 10 *Una estrategia mixta* s_i *para el jugador* i *es una distribución de probabilidad sobre* Φ_i.

Denotaremos por s_i^k la probabilidad de que el jugador i elija la estrategia pura k.

Denotaremos por S_i al conjunto de todas las estrategias mixtas de este jugador, es decir: $S_i = \left\{ s_i \in \mathcal{F}(\Phi_i, R) : \sum_{k=1}^{K} s_i^k = 1, s_i^k \geq 0 \; \forall k \in \Phi_i \right\}$. Por $\mathcal{F}(\Phi_i, R)$, entendemos el conjunto de las funciones con dominio en Φ_i y recorrido R.

Representaremos como $\Phi = \times_{i=1}^{n} \Phi_i$ y como $S = \times_{i=1}^{n} S_i$, respectivamente, al conjunto de *combinaciones estratégicas* puras y mixtas. La estrategia pura k, para el jugador i, quedará identificada por una estrategia mixta, en la que i, asigna probabilidad 1 a la acción k

En un juego en forma normal, cada jugador hace su elección, en forma independiente de la de cada uno de los otros. Por lo tanto, la probabilidad $s(\phi)$ de que $\phi = (k_1, \ldots, k_n)$, ocurra si $s = (s_1, \ldots, s_n)$ es jugada queda dada por: $s(\phi) = \Pi_{i=1}^{n} s_i^{k_i}$.

Si s es jugada el retorno esperado $R_i(s) = \sum_{\phi} s(\phi) R_i(\phi)$. Siendo ϕ un elemento genérico de Φ.

Definición 11 *Diremos que $\bar{s}$ es la mejor respuesta de i contra s, si:*

$$R_i(s/k) = \max_{s_i' \in S_i} R(s/s_i'). \tag{2}$$

Denotaremos por $B_i(s)$ al conjunto de *mejores respuestas puras,* que están en Φ_i del jugador i. Es fácil ver que $\bar{s}_i$ es la mejor respuesta contra s si y sólo si se tiene que:

$$si\ R_i(s|k) < R_i(s|l), \text{ entonces } s_i^k = 0, \forall k, l \in \Phi_i, \tag{3}$$

lo que es equivalente a decir que el **soporte** de $\bar{s}$, $Sop(\bar{s})$ está incluído propiamente en $B_i(s)$. Siendo $Sop(s) = \{k \in \Phi = \times_{i=0}^{n} \Phi_i :\ s(k) > 0\}$.

Es decir $\bar{s}_i$ es la mejor respuesta para i contra s, si y solamente si, $\bar{s}_i$ asigna probabilidad positiva solamente a las estrategias puras que son mejor respuesta para i contra s.

Definición 12 *Una combinación estratégica s, es un* equilibrio de Nash *para γ si s, es una mejor réplica contra si misma .*

Esto es equivalente a decir que la combinación estratégica s es una mejor respuesta contra si misma si: $Sop(s) \subset B(s)$.

En el caso particular en que una combinación estratégica s, satisfaga que $Sop(s) = B(s)$ decimos que s es un *equilibrio cuasi-estricto.*[5]

Denotaremos por $E(\gamma)$ al conjunto de los equilibrios de Nash del juego γ.

3 Preferencias y Funciones de Utilidad

Esta sección está destinada a justificar, logicamente la elección de estrategias de un jugador "racional" que busca maximizar sus retornos, entendiendo por tales una evaluación de lo que recibirá una vez terminado el juego. Tal evaluación está hecha sobre la base de un ordenamiento que el jugador realiza en el espacio de resultados posibles, que pueden ser cestas de consumo, dinero, loterías, etc..., este espacio es llamado *espacio de consumo.* Tal orden quedará representado por sus *"preferencias"*, las que bajo determinados supuestos son representables por una función con dominio en el espacio de consumo, y recorrido real.

Tales funciones no interesan por el número que asigna a determinado consumo posible, en el espacio de consumo, sino por el orden que introduce en el mismo. Así si B no es preferible a A, entonces la utilidad u asignada a A, será menor o igual que la asignada a B: $u(B) \geq u(A)$.

Para concretar, asumiremos que cada individuo expresa preferencias sobre el espacio, $\mathbf{P}$, de distribuciones de probabilidad definidas en un conjunto finito $\mathcal{Z}$. Esto es, se piensa el espacio de consumo, X, como el espacio $\mathbf{P}$,de las loterías con premios en $\mathcal{Z}$. Definiendo $u : \mathcal{Z} \to R$, para toda p función de probabilidad en $\mathcal{Z}$ llamamos *utilidad esperada* a:

$$E[u] = \sum_{z \in \mathcal{Z}} u(z)p(z),$$

[5] No todo juego posee un equilibrio cuasi estricto. Además un equilibrio cuasi estricto, puede ser muy poco "razonable". [E. Van Damme (1991)], pag. 24 y secc. 3.4.

Entonces una lotería, q, representada por una función de probabilidad, será preferible a otra p, la primera tiene utilidad esperada menor o igual que la segunda, diremos que $p \succ q$, siendo p y q funciones de probabilidad sobre $\mathcal{Z}$.

Definición 13 *Una relación de preferencia, es un preorden completo en un espacio de consumo, es decir, es una relación binaria sobre un espacio de consumo que es transitiva y completa.*

Proposición 14 *Los siguientes tres axiomas de comportamiento a son necesarios y suficientes para que una preferencia, tenga una función de utilidad que la representa, en X:*

i) $\succ$ es una relación binaria que es transitiva y completa.

ii) Para todo $p, q, r, \in \mathcal{P}$ y $\alpha \in (0,1], p \succ q$ implica $\alpha p + (1-\alpha)r \succ \alpha q + (1-\alpha)r$

iii) Para todo $p, q, r, \in \mathcal{P}$ entonces existe α y $\beta \in (0,1)$, tales que $\alpha p + (1-\alpha)r \succ q \succ \beta q + (1-\beta)r$.

El Axioma ii) es conocido como el axioma de la independencia o de substitución, el Axioma 3, es llamado arquimediano. Para una discusión de los referidos axiomas, así como para la demostración de la proposición sugerimos [C. Huang and R. H. Litzemberger (1988)].

4 Dominación, Juegos Minmax y Equilibrios de Nash

En teoría de juegos no cooperativos hay dos técnicas para resolver juegos, esto es para prever qué estrategias serán elegidas: 1)encontrar *estrategias dominantes* o 2) *hallar equilibrios*. En esta sección presentaremos el concepto de equilibrios de Nash, que por su generalidad se aplica a muchos juegos, su existencia será probada en la sección siguiente. En las secciones subsiguientes presentaremos otros equilibrios y refinamientos del concepto de equilibrio de Nash.

4.1 Estrategias Dominantes

Definición 15 *Una estrategia $\bar{s}_i$ domina estrictamente a otra s_i si ante cualquier estado de la naturaleza o estrategia de sus oponentes, la utilidad asociada a la estrategia $\bar{s}_i$ para el jugador i es estrictamente mayor que la asociada a s_i.*

El concepto de dominancia débil supone que los retornos de la estrategia debilmente dominante no serán inferiores a los obtenidos con cualquier otra.

Asociando a cada estrategia un retorno posible, podemos suponer que cada jugador elige en un espacio de estrategias Σ_i. El jugador racional preferirá la estrategia que maximice su utilidad, esto es $\sigma_i \succ s_i$ si $u(\sigma_i) > u(s_i)$. En esta situación la estrategia s_i jamás será jugada.

Ejemplos de Juegos con Estrategias Dominadas

Ejemplo 16 *Consideremos el siguiente juego en forma normal, ilustrado por el siguiente cuadro:*

·	L	R
U	$(3,6)$	$(7,1)$
M	$(5,1)$	$(8,0)$
D	$(6,0)$	$(6,2)$

Fig.8. Estrategias Dominadas.

Dado que el jugador I, siempre puede elegir la estrategia M, la estrategia U no será elegida jamás, esto es M *domina* a U. A continuación se debe resolver el juego:

·	L	R
M	$(5,1)$	(8.0)
D	$(6,0)$	$(6,2)$

Fig.9. Juego Reducido

Ejemplo 17 *Consideremos a continuación el siguiente juego, donde sólo se ha modificado el retorno para el jugador II correspondiente a* (M,R)*:*

El ejemplo nos muestra como eliminando en forma iterada estrategias dominadas se obtiene un equilibrio, esto es una situación en la que ninguno de los dos jugadores se arrepentirá de lo hecho.

·	L	R
U	$(3,6)$	$(7,1)$
M	$(5,1)$	$(8,2)$
D	$(6,0)$	$(6,2)$

Fig. 10. Dominación Iterada.

Para el jugador I U sigue siendo una estrategia dominada, consciente de esta situación II, sabe que se jugará el juego:

·	L	R
M	(5.1)	$(8,2)$
D	(6.0)	$(6,2)$

Fig. 11. Juego Reducido.

Ahora L es una estrategia dominada por R para II, el resultado de proceder de esta forma es que se jugará: (M,R).

Un ejemplo clásico de un juego donde la eliminación de estrategias dominantes reduce la elección de cada jugador a una única posibilidad es el juego conocido como "dilema del prisionero". Una descripción detallada del mismo se encuentra en la sección 7 de estas notas, y en muchos manuales de teoría de juegos como [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)], donde se le presta una detallada atención.

Ejemplo 18 *La solución de un juego por eliminación de estrategias dominadas, no es independiente del orden en el que se eliminan estrategias debilmente dominadas.*

	b_1	b_2
a_1	$(3,2)$	$(2,2)$
a_2	$(1,1)$	$(0,0)$
a_3	$(0,0)$	$(1,1)$

Fig. 12. La solución no es independiente del orden en que se eliminan estrategias debilmente dominadas.

i $a_1 \succ a_3$ por lo tanto a_3 es eliminada, luego $b_1 \succ b_2$, se obtienen los retornos $(3,2)$.

ii También es cierto que $a_1 \succ a_2$ por lo tanto a_2 es eliminada, luego $b_2 \succ b_1$, se obtienen los retornos $(2,2)$.

4.2 Juegos Minmax

A los efectos de ilustrar este tipo de juegos, consideremos una situación representada por un juego de suma cero. El jugador I, puede eslegir en $S_1 = \{1, 2, ..., m\}$, y el jugador II en $s_2 = \{1, 2, ..., n\}$. Suponga que I elige i y II elige j el retorno para I será entonces el elemento a_{ij} de la matriz representada en la figura, mientras que el correspondiente a II será $-a_{ij}$.

Ejemplo 19 *Para facilitar la comprensión considere $n = m = 2$ y la matriz:*

j/i	1	2
1	0	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{2}$	1

Fig. 13.

$$\min_j \max_i a(i,j) = \max_i \min_j = a(2,1) = \frac{1}{2}$$

En esta situación el jugador I elige de forma de maximizar su retorno tomando como dato que su oponente hace la elección que lo minimice. A su vez el jugador II hace su elección de forma de minimizar el retorno de I, teniendo en cuenta que I hace su elección de modo de maximizarlo.

En el caso en que se de la igualdad $\min_j \max_i a(i,j) = \max_i \min_j a(i,j) = a(2,1) = \frac{1}{2} = v$ tenemos una solución de equilibrio para el juego una vez que en este caso si i_0 y j_0 son tales que $a(i_0, j_0) = v$ el jugador I eligirá i_0 y el II j_0 y ninguno tiene incentivos para cambiar la estrategia.

La pregunta que surge es si siempre tenemos la igualdad $\min_j \max_i a(i,j) = \max_i \min_j a(i,j)$. La respuesta a esta pregunta es negativa una vez que es posible tener: $\min_j \max_i a(i,j) > \max_i \min_j a(i,j)$ como el siguiente ejemplo lo muestra:

Ejemplo 20

j/i	1	2
1	0	1
2	1	0

Fig. 14.

$$\min_j \max_i a(i,j) = 1 \quad \max_i \min_j a(i,j) = 0$$

En la siguiente subsección vamos a extender las posibles elecciones de los participantes a funciones de probabilidad sobre el espacio de sus estrategias puras que en el caso anterior eran las filas para I y las columnas para II representadas por los conjuntos S_1 y S_2.

4.3 Juegos con Estrategias Mixtas

Decimos que un juego es de estrategias mixtas, cuando cada jugador elige una función de probabilidad, sobre el espacio de sus estrategias puras. Ver definición 10.

Representaremos por Σ_i al conjunto de estrategias mixtas del jugador i, donde $\sigma_i(s_i) \in \sigma_i$ será la probabilidad que la estrategia mixta σ_i asigna a s_i, siendo s_i una estrategia pura del espacio S_i.

Dadas las estrategias mixtas σ_1, y σ_2 el retorno del jugador I en un juego de suma cero con matriz de retornos A, será: $\sigma_1^{tr} A \sigma_2$

Ejemplos de equilibrios con estrategias mixtas

Consideremos el caso Par Impar, ejemplo 5. En primer lugar puede verse que no existe equilibrio en estrategias puras.

El jugador I puede ponerse en una situación que le garantice un cierto valor mínimo. Asegurarse de obtener este mínimo equivale a que su estrategia le permita obtenerlo independientemente de lo que haga II. Así, si $\sigma_1 = \{p, (1-p)\}$, siendo p la probabilidad de elegir la fila 1, es tal que: $-2p + 3(1-p) = 3p - 4(1-p)$ el retorno esperado será: $E(r) = \frac{1}{12}$. El jugador II jugará analogamente, eligiendo $\sigma_2 = \{q, (1-q)\}$ de forma de ser independiente de lo que haga I, obtendrá el mismo retorno.

Veamos como pueden hallarse soluciones en casos sencillos, usando métodos geométricos. En casos generales la solución se obtiene con métodos de programación lineal.

Ejemplo 21 *Resolución Geométrica.*

El siguiente método gráfico que presentaremos para resolver un caso simple, de un juego de dos personas con suma cero, pierde eficiencia cuando aparecen dimensiones mayores. En este caso hay que recurrir a métodos mas complicados de cálculo, dando lugar a posibilidades amplias de aplicación de métodos de la programación lineal.

Consideremos el juego representado por la siguiente matriz 2×4.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

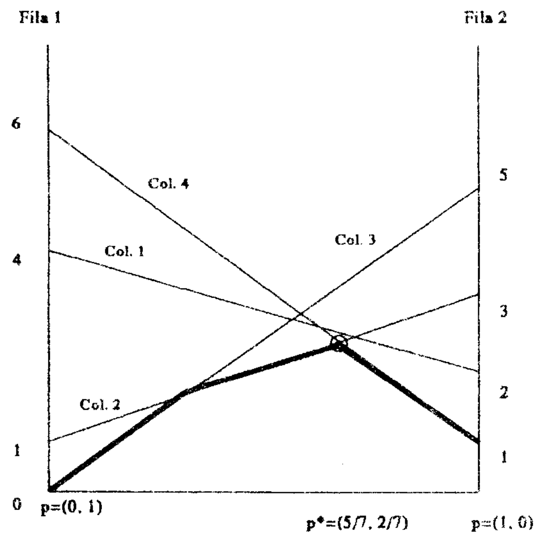

Fig 15. MINMAX.

El conjunto de estrategias puras para I, está dado por las filas de la matriz y las del jugador II, por las columnas.

Si el jugador I adopta la estrategia mixta $p = (p_1, p_2)$. p es una distribución de probabilidad sobre el espacio de filas elegida por I, siendo p_i la probabilidad de elegir la fila $i = \{1, 2\}$. Suponiendo que II, elija la primera columna, entonces el retorno esperado será:

$$E_{1p} = 2p_1 + 4p_2.$$

Analogamente si II elige la segunda, tercera o cuarta columna como estrategia pura:

$$E_{2p} = 3p_1 + p_2.$$

$$E_{3p} = 5p_1.$$

$$E_{4p} = p_1 + 6p_2,$$

respectivamente. Siendo p una probabilidad tenemos que $p_1 + p_2 = 1$.

La figura siguiente muestra las gráficas correspondientes a las distintas funciones.

El eje vertical a la derecha corresponde a la elección de la estrategia $p = (0, 1)$ por parte de I, esto es el jugador uno elige la fila 1. Mientras que el eje a la izquierda representa la estrategia mixta $(1, 0)$, esto es la elección de la fila 2. El eje horizontal representa los posibles valores de p_1, $0 \leq p_1 \leq 1$.

Interpretación del diagrama:

Cualquiera sea la elección de p, el jugador I no estará peor que lo indicado por la línea remarcada, la llamada "envolvente inferior". Dicha función es $f(p) = \min\{E_{jp} : j = 1, 2, 3, 4.\}$. El jugador I, elegirá aquella estrategia mixta, p^* de forma de maximizar $f(p)$. Tal p está dado por el corte de E_{2p} con E_{4p}.

En aras de resolver completamente el juego, consideramos ahora la submatriz definida por las columnas 2 y 4:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Resolviendo analogamente para II, quien eligirá una distribución de probabilidades $q = \{q_1, q_2\}$ sobre las columnas de la submatriz, suponiendo que I eligirá en estrategias puras, una u otra fila, obtendremos las ecuaciones suficientes para hallar una envolvente superior $g(q_1)$, II elegirá aquella estrategia tal que, q_1 sea un mínimo de dicha función.

De esta forma obtendremos las siguientes estrategias de equilibrio: $p^* = (5/7, 2/7)$; $q^* = (0, 5/7, 0, 2/7)$; el valor de juego, esto es el retorno esperado para I será $v = 17/7$.

Existencia del Equilibrio en Estrategias Mixtas

El siguiente teorema prueba que para juegos de suma cero, siempre existe solución en estrategias mixtas.

Teorema 22 *Para toda matriz A, siempre existe un equilibrio en estrategias mixtas, esto es existen p y q distribuciones de probabilidad, tales que:*

$$\max_{p \in P} \min_{q \in Q} p^{tr} A q = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} A q.$$

Este teorema fue conjeturado por [E. Borel, (1921)] quien lo verificó en casos particulares, pero la primera prueba aparece en [J. Von Neumann (1928)].

Demostración. Es inmediato verificar que la siguiente desigualdad se cumple siempre:

$$v_1 = \max_{p \in P} \min_{q \in Q} p^{tr} A q \leq \min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} A q = v_2.$$

Sea M $= \{m \in R^m, m_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q_j, \sum_{j=1} q_j = 1, \ q_j \geq 0\}$, que es convexo y cerrado. Es obvio que: $\min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} A q = \min_{q \in \mathcal{M}} \max_{p \in P} p^{tr} A q = v_2$

Sea M$(v_2) = \{t \in R^m, t_i < v_2, i = 1, 2, \ldots n\}$. Se tiene que: $\mathcal{M}(v_2) \cap \mathcal{M} = \emptyset$.

La demostración de esta afirmación la haremos suponiendoque sea falsa. Supongamos que existe $z \in \mathcal{M}(v_2) \cap \mathcal{M}$. Entonces, $\max_i z_i \geq xz, \forall x : \sum_{i=1}^n x_i = 1$. Se sigue que:

$$\min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} A q \leq \max_i z_i < v_2 = \min_{q \in Q} \max_{p \in P} p^{tr} A q,$$

lo que es una contradicción.

Entonces a partir del teorema de separación de convexos, podemos concluir con que existe p no nulo tal que $pz \leq v_2 \forall z \in$M$(v_2)$, y $pz \geq v_2 \forall z \in$ M. Luego si p es no negativo, obtendremos: $v_1 \geq \min_{z \in \mathcal{M}} pz \geq v_2$ con lo que se completaría la prueba.

Para probar que $p \geq 0$, suponga que tuviera una coordenada negativa, por ejemplo la i-ésima. Entonces para $\bar{z} \in \mathcal{M}(v_2)$ obtenemos $Z^n \in \mathcal{M}(v_2)$ definido por:

$$Z_j^n = \begin{cases} \bar{z}_j & j \neq i \\ \bar{z}_i - n & j = i \end{cases}$$

Así: $pz^n \to \infty$ lo que contradice que $pz \leq p\bar{\bar{z}}\ \forall z \ \in \mathcal{M}$ y $\bar{\bar{z}} \in \mathcal{M}(v_2)$.[]

4.4 Juegos de Múltiples Etapas con Acciones Observadas

Son juegos con múltiples etapas aquellos en que los diferentes jugadores deben elegir una movida en más de una ocasión temporalmente diferente. En forma más precisa, podemos decir que se trata de juegos donde:

i) En cada etapa k, todos los jugadores conocen las acciones elegidas en toda etapa previa $0, 1, \ldots, k-1$.

ii) Todos los jugadores mueven "simultaneamente" en cada etapa k. Esto es en el momento k ningún agente conoce lo que hace el otro. **Observación** No están excluídos los juegos en los que los individuos mueven alternándos, puesto que se permite la "acción" no hacer nada.

   Por ejemplo, en el juego de Stackelberg, conocido como "seguir al líder", en el primer momento el líder elige una determinada acción, por ejemplo un cierto nivel de producción y el rival no hace nada. En la segunda etapa, el seguidor, elige una acción, conociendo la elección previa del líder, y este no hace nada.

iii) Las etapas tienden usualmente a asimilarse con períodos de tiempo, pero en la teoría una etapa no tiene porque tener una interpretación temporal.

Para la representación de este tipo de juegos, usaremos la siguiente **notación:**

Por h^{k+1} representaremos la historia al final de la etapa k, ($h^0 = \emptyset$). $A_i(h^k)$ denota el conjunto de acciones posibles de elección por el jugador i cuando la historia es $h^k = (a^0, a^1, \ldots, a^{k-1})$, donde a^j representa el vector de movidas una para cada jugador, elegidas en la etapa j.

Si el total de etapas del juegos es $K+1$, h^{K+1} representa la historia completa. Definiremos como H^{K+1} el conjunto de todas las historias terminales.

En este caso una *estrategia pura para el jugador* i, es un plan contingente en cada etapa k para toda posible historia h^k. (Pospondremos la discusión de estrategias mixtas hasta después de la definición de estrategias de comportamiento). Si H^k representa las primeras k etapas de la historia, una estrategia pura para el jugador i, es una sucesión de funciones $\{s_i^k\}_{k=0}^{K}$ donde $s_i^j : H^K \to A_i(H^K), j = \{1, 2\ldots, K\}$ siendo $A_i(H^K) = \cup_{h^K \in H^K} A(h^K)$.

4.5 Retroinducción en Juegos Multietapas

Retroinducción puede ser aplicada para cualquier juego finito, con información perfecta, donde finito significa que sólo existe una cantidad finita de etapas, e información perfecta que en cada etapa, cada conjunto de información consta a lo más de un nodo.

El algoritmo consiste en determinar las movidas optimales en la última etapa para cada historia h^k. Entonces trabajar en la $K-1$ etapa, y definir la estrategia optimal para el jugador que debe mover allí, sabiendo que en la etapa K la historia será h^K, de acuerdo a la elección anterior. El algoritmo continúa de esta manera, hasta la etapa inicial. Habremos construído así una estrategia óptima en el sentido de Nash, de acuerdo al concepto que discutiremos en la siguiente sección.

5 Equilibrios de Nash

Un equilibrio de Nash es un conjunto de estrategias, una para cada jugador, que es la mejor respuesta que cada uno puede dar a las acciones de los otros. En un equilibrio de Nash el jugador maximiza su utilidad esperada, tomando las acciones de los otros como dadas. De esta forma en un equilibrio de Nash, ningún jugador se siente tentado a modificar su estrategia.

Las respuestas a juegos, obtenidas eliminando estrategias dominadas son ejemplos de equilibrios de Nash muy "robustos", no obstante veremos que existen otras respuestas que son equilibrios de Nash, que pueden no estar soportadas por estrategias dominantes.

Definición 23 *Un Equilibrio de Nash es un vector s^* de estrategias individuales cuyas componentes cumplen:*

$$u_i(s^*_{-i}, s^*_i) \geq u_i(s^*_{-i}, s^*_{i'},) \ \ \forall s'_i.$$

Un equilibrio de Nash se llama fuerte si cambiamos la desigualdad por una desigualdad estricta. No obstante ser un equilibrio robusto, en el sentido de que pequeñas oscilaciones en las utilidades no modifican el equilibrio, no siempre es posible probar su existencia. A pesar de su debilidad, podemos probar la existencia de un equilibrio de Nash en condiciones muy generales.

Las proposiciones siguientes relacionan los equilibrios de Nash, con los obtenidos eliminando estrategias dominadas.

Proposición 24 *Si $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_n)$ es un equilibrio de Nash, entonces estas estrategias sobrevivirán a la aplicación reiterada del principio de eliminación de estrategias fuertemente dominadas.*

Demostración Sea $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_n)$ un equilibrio de Nash, supongamos que s^*_i es la primer estrategia del vector s^* que se elimina. Entonces, existe $s'_i \in S_i$ tal que $s'_i \succ s^*_i$. Es decir que $u_i(s_{-i}, s^*_i) < u_i(s_{-i}, s'_i)$, cualquiera sea $s_i \in S_i$, en particular para s^*_i luego, $u_i(s^*_{-i}, s^*_i) < u_i(s^*_{-i}, s'_i)$ lo que contradice nuestro supuesto de que s^* es un equilibrio de Nash.[]

Proposición 25 *Si en un juego con un conjunto finito de estrategias posibles para cada i, la eliminación de estrategias dominadas conduce a descartar a todas las estrategias con excepción de una estrategia por jugador, las estrategias no eliminadas constituyen un Equillibrio de Nash.*

Demostración Por la proposición anterior, sabemos que todo equilibrio de Nash sobrevive al proceso de eliminación de estrategias estrictamente dominadas. Hay que probar que si el proceso deja como único sobreviviente a: $s^* = (s^*_1, \ldots, s^*_n)$ entonces este es un equilibrio de Nash. Razonando por el absurdo, supongamos que no sea un Equilibrio de Nash. Entonces existe $s'_i \in S_i$ tal que $u_i(s^*_{-i}, s^*_i) < u_i(s^*_{-i}, s'_i)$. Pero como s'_i fue eliminada, existe $s''_i \in S_i$ tal que $u_i(s_{-i}, s'_i) < u_i(s_{-i}, s''_i), \forall S_i$ y en particular $u_i(s^*_{-i}, s'_i) < u_i(s^*_{-i}, s''_i)$. Si $s^*_i = s''_i$ la contradicción obtenida termina la prueba. Si $s^*_i \neq s''_i$, existe $s'''_i \succ s''_i$ pues s''_i no sobrevive. Repitiendo el proceso, teniendo en cuenta que el espacio de estrategias es finito si el juego es representado en forma normal se termina la prueba.[]

Directamente de la definición de equilibrio de Nash, se sigue la siguiente proposición:

Proposición 26 *Ningún equilibrio de Nash con estrategias mixtas, asigna probabilidad positiva a una estrategia pura estrictamente dominada.*

Es decir, en términos de la definición 10, se tiene que si para algún jugador i, $R_i(s_{-i}, k) < R_i(s_i, l)$ siendo s un equilibrio de Nash, entonces $s_i(k) = 0$.

5.1 Existencia del Equilibrio de Nash-Cournot

Vamos a probar aquí la existencia del equilibrio de Nash, si bien este teorema fue probado en [J. Nash, (1959)], su utilización se remonta a [A. Cournot, (1897)], de ahí el nombre (aunque habitualmente nos referiremos al mismo como Equilibrio de Nash). Supondremos que las funciones de utilidad de cada uno de los jugadores es una función cuasi- cóncava. Recordamos que una función $u : A \subset R^n \to R$, se dice cuasi- cóncava si $\{x : u(x) \geq \alpha\}$ es convexo para todo $\alpha \in R$.

Sea S_i el conjunto de las estrategias del jugador $i = 1, 2, \ldots, n$. Sea $u_i : \times_{i=1}^n S_i \to R$ la función de retorno del jugador i. Entonces tenemos el siguiente concepto de equilibrio de Nash-Cournot:

Definición 27 $\bar{s} = (\bar{s}_1, s_2 \ldots, \bar{s}_n) \in \times_{i=1}^n S_i$ *es un equilibrio de Nash-Cournot si y sólo si* $\forall i, u_i(\bar{s}) = \max_{s_i \in S_i} u_i(\bar{s}_{-i}, s_i)$.

Para la demostración del teorema de existencia del equilibrio de Nash-Cournot, vamos a necesitar introducir algunas definiciones adicionales, así como el teorema de punto fijo de Kakutani y el teorema del máximo.

El primer concepto que definiremos es el de función multívoca o aplicación.

Definición 28 *Sea* $X \in R^l, Y \in R^n$ *una aplicación o función multívoca* $\phi : X \to Y$, $x \to \phi(x) \subset Y$, *es una correspondencia que asocia puntos de* X *a subconjuntos de* Y.

Definición 29 *Una aplicación* $\phi : X \to Y$ *es llamada* semicontinua superiormente, *s.c.s. si para toda sucesión* $x_n \in X$ *e* $y_n \in \phi(x_n), x_n \to x, y_n \to y$ *entonces* $y \in \phi(x)$.

Una aplicación es llamada s.c.s. si para todo x_0, *existe* V *que contiene a* $\phi(x_0)$ *y existe* U *entorno de* x_0, *tal que* $f(x) \subseteq V$ *si* $x \in U$

Definición 30 *Una aplicación* $\phi : X \to Y$ *es llamada* semicontinua inferiormente, *s.c.i. si para toda sucesión* $x_n \in X$ *e* $y \in \phi(x)$, *existe una subsucesión con* $y_{n_k} \in \phi(x_{n_k})$ *e* $y_{n_k} \to y$.

Puede verse facilmente que una aplicación que sea una función, esto es $\#\phi = 1$ puede ser s.c.s sin ser continua, esto dejaría de ser cierto si exigimos que el recorrido de la función fuese compacto. Pero una aplicación s.c.i. que sea función es inmediatamente continua.

A continuación probaremos un importante teorema que garantiza la continuidad de la aplicación máximo de una función continua $u : S \times T \to R$. Este teorema nos permitirá obtener el Equilibrio de Nash-Cournot como el punto fijo de una aplicación vía el Teorema de Kakutani.

Teorema 31 *Sea* $u : S \times T \to R$ *una función continua y* $\phi : S \to T$ *una correspondencia s.c.i. con valores compactos. Sea* $\rho(x) = \{y \in \phi(x) | u(x, y) = \max_{z \in \phi(x)} u(x, z)\}$, *entonces* ρ *es s.c.s.*

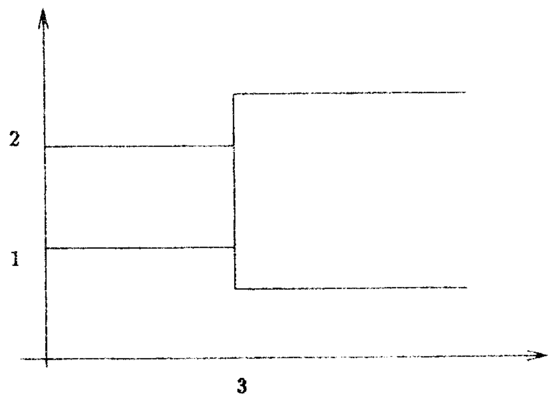

Fig. 16. Aplicación S.C.S.

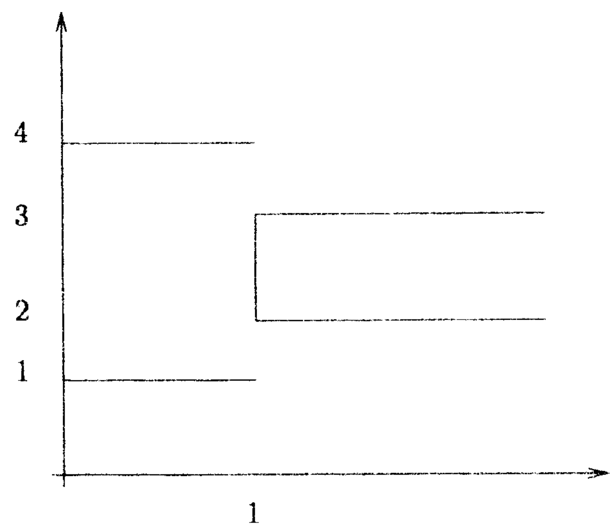

Fig. 17. Aplicación S.C.I.

Demostación Sea $x_n \to x, y_n \to y, y_{n_k} \in \phi(x_{n_k})$, probar que ρ es s.c.s equivale a probar que $y \in \phi(x)$, esto es, que $\forall\, z \in \phi(x)$, $u(x,z) \leq u(x,y)$. Para esto observemos que como ϕ es s.c.i, $x_n \to x$ y $z \in \phi(x)$ existen $z_{n_k} \in \phi(x_{n_k})$, con $z_{n_k} \to z$ por lo tanto $u(x_{n_k}, z_{n_k}) \leq u(x_{n_k}, y_{n_k})$.

La continuidad de u termina la demostración.[]

Enunciaremos a continuación el Teorema de Punto Fijo de Kakutani. No daremos aquí la demostración, el lector interesado puede encontrar la prueba del mismo en [C. Berge, (1963)]

Teorema 32 *(de Kakutani) Sea $S \subset R^m$ compacto y convexo. Sea $\phi : S \to S$ aplicación s.c.s. y con valores convexos. Entonces ϕ tiene un punto fijo, esto es existe un $\bar{x} \in S : \bar{x} \in \phi(\bar{x})$.* [6]

Finalmente probaremos el Teorema de Existencia del Equilibrio de Nash-Cournot.

Las utilidades de cada jugador son funciones cuasi-cóncavas, definidas sobre el conjunto de estrategias posibles, a las que corresponde un conjunto de retornos, así $u_i(s_{-i}, \cdot) : S_i \to R$ para todo $i = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema 33 *(Teorema de Nash-Cournot) Sea $G = \{(S_1, \ldots S_n, R_1, \ldots R_n\}$ un juego infinito con n personas, con las siguientes propiedades:*

S_i es un subconjunto no vacío, compacto y convexo, de un espacio Euclideano.

Cada jugador i tiene una utilidad $u_i : S = \times_{i=1}^{n} S_i \to R$ continua.

Para s fijo, el mapa $s_i' \to u_i(s_{(i}, s_i')$ es cóncavo.

Entonces G posee al menos un equilibrio.

Demostración Sea $\Phi_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i : u_i(s_{-i}, s_i) = \max_{t \in S_i} u_i(s_{-i}, t)\}$. Por el teorema del máximo probado anteriormente, resulta que ϕ es s.c.s., la cuasi concavidad de u_i en S_i asegura que Φ toma valores convexos. Entonces resulta que el producto $\Phi(s) = \Phi_1(s_{-1|1}), \times \ldots, \times \Phi_n(s_{-n|n})$ es s.c.s. y de valores convexos. Además S es compacto y convexo. Luego $\Phi : S \to S$ es una aplicación en las condiciones el Teorema de Kakutani, por lo tanto existe $\bar{s} : s \in \Phi(\bar{s})$ equivalentemente s_i maximiza $u_i(\bar{s}_{-i}, t)\ \forall t \in S_i$. Con lo cual queda probada la existencia de la solución de equilibrio.[]

Obsérvese que la cantidad de equilibrios de Nash, no disminuye si consideramos *juegos próximos*, aunque puedan aparecer equilibrios nuevos, esto es el resultado de que la aplicación ϕ, considerada anteriormente es s.c.s.

Mencionaremos aunque sin demostrarlo que el conjunto de los equilibrios de Nash en las condiciones del teorema 31, es siempre impar. Esto puede concluirse a partir de [G. Debreu (1970)] y [A. Mas-Colell (1985)], donde se prueba que el conjunto de los equilibrios walrasianos en economías competitivas es finito e impar.

[6] El teorema de Kakutani, introducido a partir de las necesidade de la teoría de juegos, fue durante los años 1950 a 1970, hasta la introducción de la topología diferencial, la principal herramienta de la economía matemática.

5.2 Relación de los distintos Tipos de Equilibrio con el Concepto de Pareto Optimalidad

Un concepto importante en economía, es de eficiencia en el sentido de Pareto. Una distribución de bienes o recursos se dice **eficiente en el sentido de Pareto,** si cualquier otra distribución de los mismos, perjudica por lo menos a uno de los participantes. Ciertamente no es un criterio de justicia, pues distribuciones muy "injustas" pueden ser eficientes en el sentido de Pareto (por ejemplo aquella que da todos los recursos a uno de los agentes actuantes y nada a los restantes). No obstante si la distribución no tiene la propiedad de Pareto sucede que sin empeorar a nadie al menos uno puede mejorar, y muchas veces poder mejorar a al menos uno implica, poder llevar a todos los agentes de la economía a un nivel de satisfacción más elevado. Así mas que por su presencia, la ausencia de Pareto eficiencia en una distribución nos indica que algo se podría hacer mejor.

Definición 34 *Una distribución posible de recursos, $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$ es eficiente en el sentido de Pareto si no existe otra $x' = \{x'_1, \cdots, x'_n\}$, posible tal que $x'_i \succ x_i$ para todo $i = \{1, \cdots, n\}$ y estrictamente preferida para por lo menos uno de ellos.*

Entendemos por distribuciones posibles, aquellas que pueden alcanzarse con los recursos existentes en el momento de realizarse. Así si el total de recursos a repartir entre n individuos es C, $x = \{x_1, \cdots, x_n\}$, es posible si $\sum_{i=1}^{n} x_i = C$.

La pregunta natural que surge es la de como los conceptos de equilibrio presentados se comportan respecto a la eficiencia de Pareto.

Es claro por la propia definición de juegos de suma cero, que toda solución no es sólo una solución minmax, es también una solución Pareto eficiente, una vez que existe todos los recursos que no son asigandos al jugador I van para el II. No obstante no todo equilibrio de Nash es Pareto eficiente. Es decir existen equilibrios de Nash en los que es posible obtener una situación mejor para todos. Es clásico en este sentido el juego de los prisioneros, donde el equilibrio de Nash robusto, que se obtiene no es Pareto eficiente.

6 Necesidad de Refinamiento de los Equilibrios de Nash

La razón principal por la cual se debe refinar el Concepto de Equilibrio de Nash, es debido a que en los juegos modelados en Forma Extensiva, puede dar lugar a comportamientos irracionales, (no maximizadores) en nodos alcanzables unicamente *con "probabilidad nula"* y en juegos modelados en Forma Normal pueden darse equilibrios no robustos, esto es equilibrios que bajo una pequeña perturbación del juego son modificados. Presentamos a continuación ejemplos de tales inconvenientes. Para obtener un amplio y detallado panorama de refinamientos del equilibrio de Nash, recomendamos [E. Van Damme (1991)]

Ejemplo 35 Irracionalidad en un Juego en Forma Extensiva

En el juego representado en la Fig. 18, la estrategia (L_1, R_2, R_3) es un Equilibrio de Nash, pero obsérvese que en tanto que el nodo y no se alcance, le es indiferente la estrategia a elegir, no

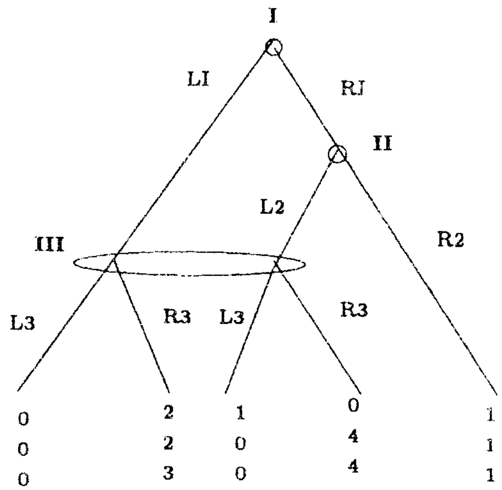

Fig. 18. Equilibrio Imperfecto.

obstante si el nodo y se alcanzase, elegir la estrategia mencionada es irracional. Así, estrategias de equilibrios pueden prescribir movidas irracionales en determinados nodos, pero esto sólo puede suceder para nodos que, a menos de existir errores no serán alcanzados. Estos equilibrios se denominan *Equilibrios Imperfectos*. Obsérvese que para juegos con conjuntos grandes de estrategias posibles, la posibilidad de errores es alta, por lo que sería preferible evitar imperfecciones, es decir poder definir *Equilibrios Perfectos*, esto es equilibrios que no den lugar a irracionalidades.

En juegos presentados en Forma Normal, no existen nodos inalcanzables, no obstante equilibrios de Nash, pueden ser no robustos, inestables en el sentido de que modificaciones en las condiciones iniciales dan lugar a cambios en las estrategias elegidas.

Ejemplo 36 Inestabilidad en un Juego en Forma Normal

·	L_2	R_2
L_1	$(1,1)$	$(0,0)$
R_1	$(0,0)$	$(0,0)$

Fig. 19. Equilibrios Inestables

Este juego presenta dos equilibrios, (L_1, L_2) y (R_1, R_2). Si bien ambos son equilibrios de Nash-Cournot, veremos que mientras el primero es robusto el segundo no lo es.

Consideremos (R_1, R_2), si el jugador II, juega R_2 entonces el jugador I no gana modificando su estrategia. No obstante modificando su estrategia, si el jugador II erra, entonces quedará mejor. Un razonamiento análogo es válido para II. Por lo tanto ambos jugadores tienen un incentivo a desviarse. Esto no sucede si ambos juegan (L_1, L_2).

La idea básica, rectora en la necesidad de refinar el concepto de Equilibrio de Nash, aparece al considerar que todo jugador, aún guiándose por una estrategia de equilibrio, puede cometer errores en el momento de elegir su movida y alcanzar por error un nodo tal que a partir de él la estrategia prevé un comportamiento irracional. La estrategia asigna probabilidad cero a alcanzar este nodo. Esta idea se modela matematicamente con los llamados *juegos perturbados*

6.1 Equilibrio Perfecto

Veremos que el requerimiento de que un equilibrio sea perfecto es realmente débil, si un equilibrio no es perfecto es realmente inestable. En el ejemplo de Fig. 3, se ve que no todo Equilibrio de Nash es perfecto. El equilibrio (R_1, R_2) no es perfecto, esto prueba que el concepto de Equilibrio Perfecto es estrictamente un refinamiento del concepto de Equilibrio de Nash.

Para obtener el concepto de Equilibrio Perfecto, comenzaremos definiendo, para un juego en Forma Normal, un **Juego Perturbado**.

Definición 37 *Sea $\gamma = \{\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n, R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, un juego de n personas en Forma Normal. Para $i = \{1, 2, \ldots, n\}$ sea η_i y $S_i(\eta_i)$ tales que: $\eta_i \in \mathcal{F}(\Phi_i, R)$ con $\eta_i^k > 0$ para todo $k \in \Phi_i$ y con $\sum_{i=1}^{K} \eta_i^k < 1$; $S_i(\eta_i) = \left\{s_i \in S_i; s_i^k \geq \eta_i^k \text{ para todo } k \in \Phi_i\right\}$. Entonces $\gamma(\eta) = \{S_1(\eta_1), S_2(\eta_2), \ldots, S_n(\eta_n), R_1, R_2, \ldots, R_n\}$, se define como el* Juego Perturbado.

Obsérvese que el Juego Perturbado elimina estrategias que asignan probabilidad cero a alguna estrategia pura.

De las definiciones hechas (ver ec. 1) se sigue el siguiente lema:

Lema 38 *Una combinación estratégica $s \in S(\eta)$ es un equilibrio de (γ, η) si y sólo si, se satisface que: si $R_i(s|k) < R_i(s|l)$, entonces $s_i^k = \eta_i^k$ para todo i, k, l.*

Ahora, asumir que un jugador racional solamente cometerá errores con probabilidad muy baja, nos lleva a la siguiente definición de Equilibrio Perfecto:

Definición 39 *Sea γ un juego en forma normal. Una estrategia s de γ, es un* **Equilibrio Perfecto**, *si s es el límite de una sucesión $\{s(\eta)\}_{\eta \to 0}$ con $\{s(\eta)\}$ un equilibrio de $\gamma(\eta)$ para todo η.*

Obsérvese que para que un equilibrio s de γ sea perfecto es suficiente que algunos, no todo, juego perturbado, con η próximo de cero posea un equilibrio "próximo" a s. De aquí que requerir que un equilibrio sea perfecto es una condición no muy restrictiva, téngase en cuenta que si un equilibro no es perfecto es muy inestable.

Como todo juego (γ, η) perturbado, posee un equilibrio siendo S producto de conjuntos compactos es el mismo compacto, sigue que existe s en γ punto de acumulación de la sucesión, $\{s(\eta)\}_{\eta \to 0}$ que es un equilibrio en γ. Con lo cual queda probado el siguiente teorema:

Teorema 40 *Todo juego en forma normal, posee al menos un equilibrio perfecto. [Selten, R. (1975)]*

A continuación daremos dos caracterizaciones del equilibrio perfecto. Una de ellas usa el concepto de *$\epsilon-$perfecto equilibrio* introducido en [Myerson, R. B. (1978)].

Sea $\gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1 \ldots, R_n)$ un juego normal y sea $\epsilon > 0$.

Una *combinación estratégica* $s \in S$ es un *$\epsilon-$equilibrio perfecto* de γ si satisface que:

i) Es completamente mixto. Esto es $\Phi = Sop(s)$, o sea que el conjunto de las combinaciones estratégicas es el soporte de s.

ii) $R_i(s|k) > R_i(s|l)$, entonces $s_i^k \leq \epsilon \ \forall\ i, j, k.(*)$

Teorema 41 *Sea $\gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1 \ldots, R_n)$ un juego normal y sea $s \in S$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) s es un equilibrio perfecto de γ.

ii) s es un punto límite de una sucesión $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$, siendo $s(\epsilon)$ un equilibrio perfecto de γ, para todo ϵ, y

iii) s es un punto límite de una sucesión $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$ de una combinación estratégica completamente mixta con la propiedad de que s es la mejor respuesta contra todo elemento $s(\epsilon)$ en la sucesión.

Demostración *i)* $\rightarrow$ *ii)* : Sea s un punto límite de la sucesión $\{s(\eta)\}_{\eta\downarrow 0}$, con $s(\eta) \in E(\gamma, \eta)$ para todo η. Definamos $\epsilon(\eta) \in R_{++}$ por: $\epsilon(\eta) = \max_{i,k} \eta_i^k$. Entonces $s(\eta)$ es un $\epsilon(\eta)$–equilibrio perfecto. Lo que establece ii).

Veamos ahora que *ii)* $\rightarrow$ *iii)* : Sea $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$, como en ii) y, sin pérdida de generalidad, asumiremos que, $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0} \rightarrow s$ cuando ϵ tiende a cero. De acuerdo a (*) se sigue que todo elemento en el soporte de s, es una mejor respuesta contra $s(\epsilon)$ siempre que ϵ sea suficientemente pequeño.

Finalmente probaremos que *iii)* $\rightarrow$ *i)* : Sea $\{s(\epsilon)\}_{\epsilon\downarrow 0}$, como en iii) y, sin pérdida de generalidad, asumiremos que, s es el único límite de la sucesión. Definimos $\eta(\epsilon) \in R_{++}^m$ por: $\eta(\epsilon)^k = \begin{cases} s_i^k(\epsilon) & si\ k \in Sop(s) \\ \epsilon & \text{en otro caso} \end{cases} \ \forall\ i, k.$

Entonces $\eta(\epsilon)$ converge a cero cuando ϵ tiende a cero, así el juego perturbado $\{\gamma, \eta(\epsilon)\}$ está bien definido. Para ϵ pequeño tenemos que $s(\epsilon) \in S(\eta(\epsilon))$ y como se sigue del lema anterior $s(\epsilon)$ es un equilibrio para $\{\gamma, \eta(\epsilon)\}$. Así como $\eta(\epsilon)^k \rightarrow 0$ cuando ϵ tiende a cero el teorema sigue de la definición de juego perturbado y de mejor respuesta.[]

Veremos a continuación algunas críticas al equilibrio perfecto.

6.2 Críticas al Concepto de Equilibrio Perfecto

Como Selten observa la noción de equilibrio perfecto no es totalmente satisfactoria. Al limitarnos a considerar como válidos sólo aquellos equilibrios que son perfectos podemos eliminar equilibrios racionales. Lo dicho lo confirmaremos con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 42 *El juego representado en la figura siguiente, tiene un único equilibrio perfecto en subjuegos: $\{L_1, L_2, L_3'\}$. Pero $\{R_1, R_2, R_3\}$ es bajo ciertas condiciones que se describirán el límite de una sucesión de equilibrios.*

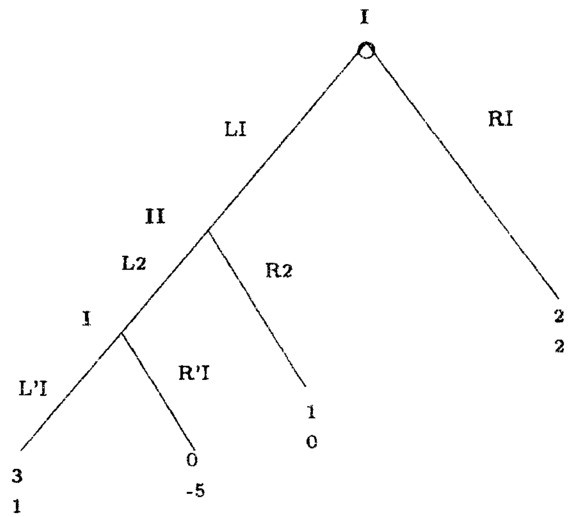

Fig. 20 Un equilibrio secuencial, no es necesariamente perfecto.

	L_2	R_2
R_1	$(2,2)$	$(2,2)$
L_1, L_1'	$(3,1)$	(1.0)
L_1, R_1'	$(0,-5)$	$(1,0)$

Fig. 21. Forma Estratégica

Supongamos que el jugador I, elige con vacilaciones, siendo las siguientes las probabilidades con que I elije uno u otro camino:

$$\begin{array}{rcl} prob(L_1, L_1') & = & \epsilon^2 \\ prob(L_1, R_1') & = & \epsilon \\ prob(R_1) & = & 1-\epsilon-\epsilon^2 \end{array}$$

La probabilidad de elegir R_1', dado que eligió R_1, es $P(R_1'/R_1) = \frac{\epsilon}{\epsilon+\epsilon^2} \rightarrow 1$ cuando ϵ tiende a cero.

La dificultad está en que las vacilaciones en la elección correcta están correlacionadas, aquí si el jugador I, se equivoca la primera vez, muy probablemente se volverá a equivocar. En [Selten, R. (1975)], se introduce el concepto de *agente en forma estratégica* para eliminar esa posibilidad de correlación entre vacilaciones ante cada movida.

Para detalles al respecto [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)], y el trabajo original de Selten citado arriba.

6.3 Equilibrio Esencial

Sea $G(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ el conjunto de todos los juegos $\gamma = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1, \ldots, R_n)$ con estrategias $(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$.

Para $\gamma \in G(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, sea r_i el retorno de i asociado a las estrategias puras de γ, es decir $r_i(R_i(\phi))_{\phi \in \Phi}$. En estas condiciones $r_i \in R^{m*}$. El vector de retornos del juego γ es $r = (r_1, \ldots, r_n) \in R^{nm*}$

Podemos establecer una correspondencia uno a uno entre el conjunto $G(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ y el conjunto de vectores del espacio R^{nm*}. Entonces es posible definir una distancia, $\rho(\gamma, \gamma')$ en el conjunto $G(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$.

Diremos que una cierta afirmación S, es cierta *para casi todo* juego si, la clausura del conjunto de los juegos para los que S es falsa, considerado como subconjunto del espacio R^{nm*} tiene medida de Lebesgue cero.

Definición 43 *Sea γ un juego en forma normal con n jugadores. Un equilibrio s de γ es esencial si para todo $\epsilon > 0$ existe δ tal que, para todo γ' tal que $\rho(\gamma, \gamma') < \delta$, existe $s' \in E(\gamma')$ con $\rho(s, s') < \epsilon$.*

Definición 44 *Sea $\gamma^* = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n, R_1^*, \ldots, R_n^*)$ un juego de n personas en forma normal. Un equilibrio s^* es fuertemente estable en γ^* se existen entornos U de γ^* en R^{nm*} y V de s^* en R^m, tal que*

(i) $|E(\gamma) \cap V| = 1$, para todo $\gamma \in U$ y

(ii) el mapa $s : U \to V$ definido por $\{s(\gamma)\} = E(\gamma) \cap V$ es continuo.

De nuestras definiciones sale inmediatamente que: *Todo equilibrio fuertemente estable es esencial.*

Diremos que un equilibrio s es **aislado** si existe un entorno V de s tal que $V \cap E(\gamma) = \{s\}$. Como consecuencioa tenemos que:

Todo equilibrio fuertemente estable es esencial.

El concepto más restrictivo de equilibrio es el de **equilibrio regular.** Su definición está asociada al hecho de que una determinada matriz jacobiana, evaluada en alguna de las estrategias $\phi \in Sop(s)$, siendo s un equilibrio de Nash, sea no singular. En esas condiciones s es un equilibrio regular. [E. Van Damme (1991)].

En [J.C. Harsanyi (1973)] siguiendo [G. Debreu (1970)], usando el teorema de Sard, se prueba que:

Teorema 45 *Para casi todo juego en forma normal, todos sus equilibrios son regulares.*

Los equilibrios regulares gozan de muchas buenas propiedades: son fuertemente estables, aislados, esenciales, propios y aparecen en cantidad impar.

Esto muestra que par juegos en forma normal, si bien pueden aparecer juegos con equilibrios de Nash "irracionales", estos son pocos, al menos en el sentido de la medida de Lebesgue, veremos que esto no sucede cuando tratamos con juegos en forma extensiva.

Estos conceptos están rigurosa y ampliamente analizados en [E. Van Damme (1991)].

7 Juegos con Memoria Perfecta

Aquellos juegos en forma extensiva, donde cada jugador recuerda todos los antecedentes que lo llevaron al nodo actual, son llamados **juegos con memoria perfecta.**

Un caso particular de juegos con memoria perfecta, son los llamados juegos con *información perfecta* en estos cada conjunto de información es un singleton. La Fig. 6, muestra un ejemplo donde el jugador II no puede distinguir entre dos posibles nodos, no sabe cual es la acción anterior del jugador I.

Los juegos donde no existe información perfecta, están representados por la existencia de conjuntos de información donde hay más de un nodo. El jugador con tal partición de su conjunto de información no puede distinguir entre un nodo y otro de un mismo conjunto de información.

La mayoría de los juegos que aparecen en economía si bien no tienen información perfecta, son de memoria perfecta. A los efectos de considerar estos introduzcamos las siguientes consideraciones.

A cada jugador i le corresponde un conjunto P_i, de puntos de decisión (nodos), ver definición 1. El mismo tiene asociado una partición U_i, en subconjuntos llamdos *conjuntos de información* tales que:

i) Todo camino intersecta cada conjunto de información al menos una vez.

ii) Todos los nodos en el mismo conjunto de información tienen la misma cantidad de sucesores.

Notación

Llamaremos $Suc(x)$ al conjunto de sucesores inmediatos de x. Por C_u entendemos una partición de $\cup_{x\in u} Suc(x)$ en las llamadas elecciones en u, siendo u un elemento de $\cup_{i=1}^{n} U_i$, de forma que a toda elección le corresponda un único elemento en $Suc(x)$. De esta manera identificamos $c \in C_u$, con las elecciones posibles de ramas que se alejan de u y que en el gráfico aparecen etiquetadas, comenzando en un elemento $x \in u$ y terminando en un $Suc(x)$ que está en c.

Definición 46 *El juego γ tiene memoria perfecta si para todo $i \in \{1, \ldots, n\}, u, v \in U_i$, $c \in C_u$ y $x, y \in v$, tenemos que c es anterior a x si y sólo si c es anterior a y.*

En juegos con memoria perfecta, ningún jugador olvida información que una vez conoció, por lo tanto, en cada nodo conoce las acciones que lo trajeron a la situación actual, por lo tanto dos nodos en el mismo conjunto de información no pueden ser predecesores. Esto no es suficiente para imponer memoria perfecta. Necesitamos también imponer que si $x'' \in h(x')$, y si x es un predecesor de x', actuando el mismo jugador i en x y x' y por lo tanto en x'', entonces existe un nodo $\bar{x}$, posiblemente x mismo (que está en el mismo conjunto de información que x) que es predecesor de x'', y tal que la acción elegida en $\bar{x}$ que lo lleva a x', es la misma que de $\bar{x}$ lo lleva a x''. Intuitivamente si dos nodos están en el mismo conjunto de información, se distinguen sólo por propiedades que el jugador desconoce, y que no podía conocer cuando eligió un acción que lo llevara a este conjunto de información. Además el jugador recuerda la acción $h(x)$ elegida en x, que lo lleva al nodo de x' que es el mismo que el de x''.

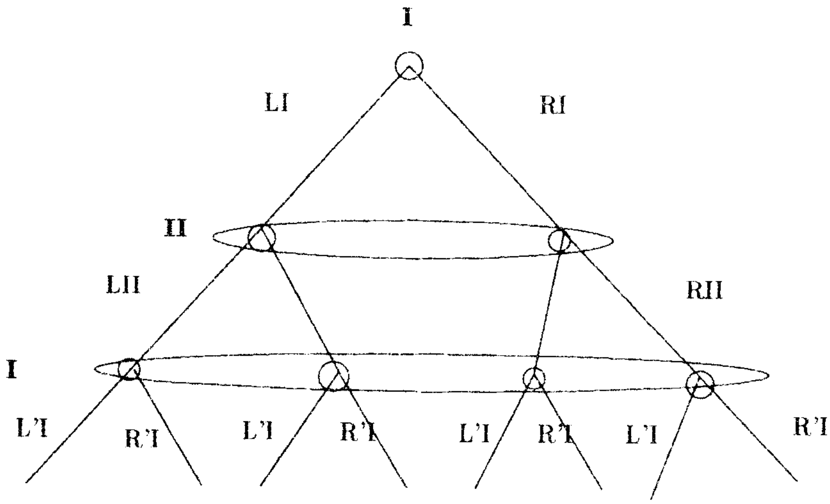

Fig. 22. En su segunda movida, el jugador I. olvida algo que previamente le era conocido.

Ejemplo 47 *El ejemplo representado en la Fig. 22, nos muestra un juego que no tiene memoria perfecta. Ubicado en su segundo conjunto de información, el jugador I no es capaz de reconstruir las acciones que lo llevaron allí.*

7.1 Estrategias de Comportamiento y su Equivalencia con Estrategias Mixtas en Juegos con Memoria Perfecta

Definición 48 *Una estrategia de comportamiento del jugador i asigna una distribución de probabilidad sobre C_u para todo conjunto $u \in U_i$, al conjunto de estas estrategias lo notaremos por B_i, mientras que por B, representaremos el conjunto de las combinaciones de estrategias de comportamiento, es decir al conjunto de n-uplas de estrategias, una para cada jugador.*

Las estrategias mixtas corresponden a una aleatorización *a priori* mientras que una estrategia de comportamiento supone una aleatorización local.

La equivalencia entre estrategias de comportamiento y estrategias mixtas para juegos con memoria perfecta tiene importante valor para entender una amplia clase de trabajos con juegos extensivos. Para esto introduciremos el concepto de **Probabilidad de Realización.**

Si $b \in B$, entonces para todo $z \in Z$ se puede computar la probabilidad $P^b(z)$ de que z sea alcanzado cuando b es jugado.

Un nodo x se dice **posible para** b_i si existe algún $b \in B$ con i^{th} componente b_i tal que $P^b(x) > 0$. Un conjunto de información se dice *relevante para* b_i, si jugando b_i existe un nodo posible $x \in u$ para b_i. Denotaremos por $Pos(b_i)$ respectivamente $Rel(b_i)$ al conjunto de los nodos posibles, respectivamente relevantes para b_i.

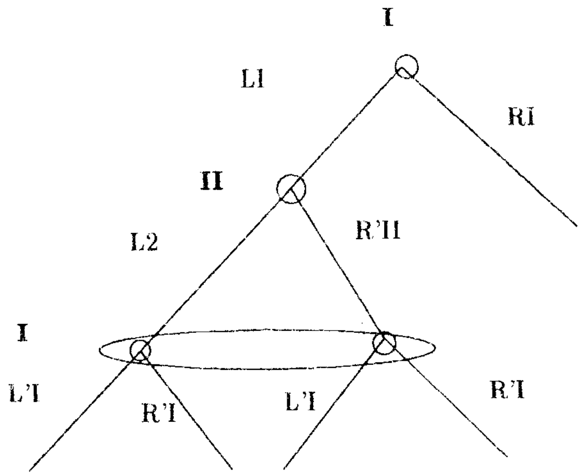

Fig. 23. El jugador II no juega si I elige RI.

Si el jugador i usa la estrategia mixta s_i, entonces si $u \in U_i$ es alcanzado, la probabilidad de alcanzar $c \in C_u$ quedará dada por lo que llamaremos *probabilidad de realización*:

$$b_{iu}(c) = \sum_{\phi_i \in Rel(c)} s_i(\phi_i) / \sum_{\phi_i \in Rel(u)} s_i(\phi_i), \tag{4}$$

donde $Rel(u)$ representa el conjunto de estrategias puras para las que u es relevante y $Rel(c)$ representa al conjunto de estrategias que llegan a $c \in u$.

Si (1) está bien definido b_i será la estrategia de comportamiento, y se definirá arbitrariamente cuando u no puede ser alcanzado con la estrategia s_i.

Consideremos el siguiente ejemplo, tomado de [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)].

Ejemplo 49 *Según la Fig. 22, el jugador I, tiene cuatro posibles estrategias:*

$$(L_1, L'_1); (L_1, R'_1); (R_1, L'_1); (R_1, R'_1).$$

No obstante, si el jugador I juega R_1, su segundo nodo de información es inalcanzable, y por lo tanto (R_1, L'_1) y (R_1, R'_1) son equivalentes.

Definición 50 *Dos estrategias s y s' son equivalentes si dejan la misma distribución de probabilidades sobre los resultados para toda estrategia de los oponentes.*

En juegos con memoria perfecta, a partir de una estrategia mixta, sólo es posible construir una única estrategia de comportamiento equivalente, no obstante a la misma estrategia de comportamiento, puede corresponderle más de una estrategia mixta equivalente.

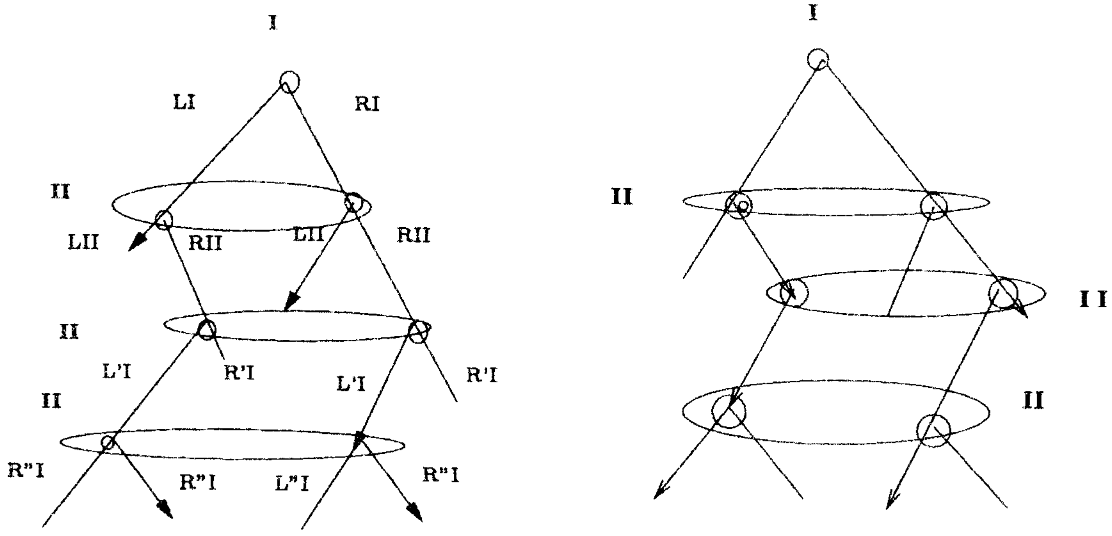

Fig. 24. Estrategias de comportamiento.

Sea b_i una estrategia de comportamiento definida a partir de (1) cuando esta cantidad está bien definida, y definida arbitrariamente para aquellos u que no pueden ser alcanzados cuando se juega s_i. En [Kuhn,H. (1953)] se prueba que s_i y b_i son equivalentes. Esto muestra que lo que puede alcanzarse usando estrategias mixtas, puede lograrse con estrategias de comportamiento. Por lo que no hay razón para que un jugador use estrategias más generales que las de comportamiento.

Ejemplo 51 *La figura (24) muestra un ejemplo de equivalencia entre estrategias mixtas y de comportamiento. El jugador II, usa la estrategia σ_2, que asigna probabilidad $\frac{1}{2}$ a las siguientes estrategias puras: $s_2 = (L, L', R'')$; $s_2 = (R, R', L'')$. La estrategia de comportamiento equivalente es: $b_{2h}(L) = b_{2h}(R) = \frac{1}{2}$; $b_{2h'}(L') = 0$ y $b_{2h'}(R') = 1$, y $b_{2h''}(L'') = b_{2h''}(R'') = \frac{1}{2}$.*

Ejemplo 52 *Muchas estrategias mixtas, pueden generar una única estrategia de comportamiento.*

En la Fig. 24, el jugador II tiene cuatro estrategias puras, $\phi_{21} = (L_2, L_2')$; $\phi_{22} = (L_2, R_2')$; $\phi_{23} = (R_2, L_2')$; $\phi_{24} = (r_2, L_2')$. Las estrategias mixtas $s_2 = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ $\bar{\sigma}_2 = (\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2})$, generan la misma estrategia de comportamiento b_2; $b_{2h}(L_2) = b_{2h}(R_2) = \frac{1}{2}$ y $b_{2h'}(L_2') = b_{2h'}(R_2') = \frac{1}{2}$.

No habiendo razones para que un jugador use una estrategia más general que la que corresponde a estrategias de comportamiento nos limitaremos a ellas.

7.2 Subjuegos y Equilibrios Perfectos en Subjuegos

Frecuentemente es natural descomponer un juego en subjuegos menores. Esto se formaliza con la noción de subjuego.

Definición 53 *Sea x un nodo de un juego Γ, con un árbol K, y sea K_x un subárbol que comienza en x. Si todo subconjunto de información de Γ o está completamente incluído en K_x o bien es disjunto con él, entonces la restricción de Γ a K_x, constituye un juego, llamado subjuego Γ_x con comienzo en x.*

Definición 54 *Una estrategia de comportamiento b de un juego en forma extensiva, es* equilibrio perfecto de subjuegos *si la restricción de b a Γ, es un equilibrio de Nash, para todo subjuego propio Γ.*

Sea Γ_x un subjuego de Γ, toda combinación estratégica b puede descomponerse en un par (b_{-x}, b_x), siendo b_x una combinación estratégica en Γ_x y b_{-x} una combinación estratégica en el juego truncado $\Gamma_{-x}(b_x)$.

Definición 55 *Dada la estrategia b_x de un subjuego Γ_x de Γ, se entiende por juego truncado, $\Gamma_{-x}(b_x)$, el que resulta de reemplazar K_x por el nodo final con retorno esperado $R_{ix}(b_x)$ para todo jugador i.*

Por $R_{ix}(b_x)$ entendemos el retorno esperado por el jugador i cuando la estrategia b es jugada.

El concepto de equilibrio perfecto de subjuegos, es un primer paso en el intento de eliminar equilibrios de Nash que prescriben comportamientos irracionales.

Sea Γ un juego en forma extensiva y sea b un vector de estrategias de compotamiento (*combinación estratégica*), en Γ. Diremos que $b'_i \in B_i$ es la **mejor respuesta** contra b si:

$$R_i(b|b'_i) = \max_{b''_i \in B} R_i(b|b''_i), \tag{5}$$

siendo $R_i(\cdot)$ el retorno esperado para i cuando $\cdot$ es jugado: $R_i = \sum_z P^b(z) r_i(z)$, siendo $P^b(z)$ la probabilidad de que el nodo final z, sea alcanzado, cuando b es jugado y $r_i(z)$ es el retorno que corresponde a i si z es alcanzado.

Una vez que el conjunto de información u es alcanzado, sólo serán relevantes para b, $Rel(b)$, aquellos conjuntos de información que son posibles de alcanzarse luego de u, jugando b.

Definiremos como mejor estrategia contra b a partir de u a una estrategia b'_i que satisface:

$$R_{ui}(b|b'_i) = \max_{b''_i \in B} R_{ui}(b|b''_i), \tag{6}$$

donde el retorno esperado condicional R_{ui} está definido por:

$$R_{ui}(b) = \sum_{z \in Z} P^b(z|u) r_i(z) = \sum_{x \in u} P^b(x|u) R_{xi}(b) \ si \ P^b(u) > 0. \tag{7}$$

Obsérvese que: $R_{ui}(b|b'_i)$ depende solamente de lo que b' prescribe para todo conjunto de información posterior a u.

Teorema 56 *b'_i es la mejor réplica contra b si y sólo si b'_i es la mejor réplica contra b en cada conjunto de información $u \in U_i$ que es alcanzado con probabilidad positiva, cuando $b|b'_i$ es jugado.*

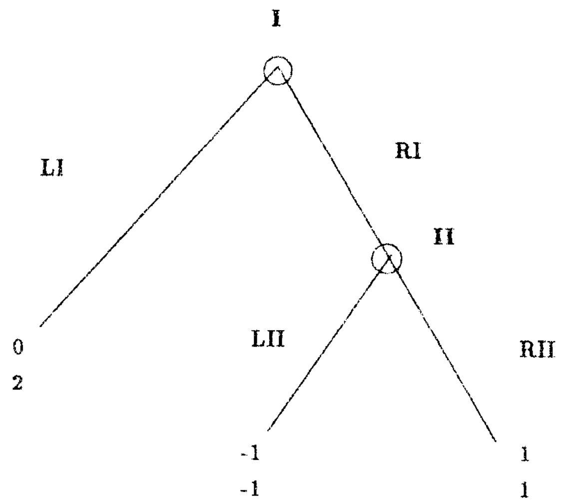

Fig. 25. En la figura se representa un juego con irracionalidades persistentes bajo perturbaciones.

Demostración Sea $\{u_\alpha; \alpha \in A\}$ una partición en conjuntos de información del conjunto de los nodos, o puntos de decisión P_i de i. Sea $Z(P_i)$ el conjunto de los nodos finales asociados con P_i. Entonces para toda combinación estratégica de comportamiento, $b \in B$, tenemos:

$R_i(b) = \sum_\alpha P^b(u_\alpha) R_{iu_\alpha}(b) + \sum_{z \notin Z(P_i)} P^b(z) r_i(z)$, donde la suma sobre α se extiende a aquellos u_α con $P^b(u_\alpha) > 0$, ahora el teorema sigue inmediatamente.[]

Este teorema prueba que para que una combinación estratégica sea un equilibrio, necesita prescribir un comportamiento racional sólo en aquellos conjuntos de información que pueden ser alcanzados cuando un equilibrio es jugado, mientras que en los otros conjuntos de información, el comportamiento puede ser arbitrario. Esta es la razón de la existencia de equilibrios "irracionales" y por la que el concepto de equilibrio de Nash debe ser refinado. Veremos que a través del siguiente ejemplo que la necesidad de refinamiento en juegos en forma extensiva, es mayor que en juegos en forma normal.

Ejemplo 57 *Ver [E. Van Damme (1991)], pag 107.*

Para demostrar lo dicho, consideremos el juego de la Fig. 25. El juego tiene dos conjuntos conexos de equilibrios de Nash. $\{(R_1, R_2)\}$ y $\{L_1, pL_2 + (1-p)R_2); p \leq \frac{1}{2}\}$. De aquí que el juego presente dos posibles resultados, (R_1, R_2) y L_1. El único equilibrio que tiene "razonable" es obviamente, (R_1, R_2). Nótese que para juegos con retornos próximos, el conjunto de equilibrios cambia constantemente pero se mantiene la irracionalidad. De aquí se sigue que existe un conjunto grande (con medida de Lebesgue positiva) de juegos, para los que la *"esencialidad"* (cf. Def. en subsección 6.3), no es suficiente para excluir irracionalidades. Parece ser que la única propiedad genérica asociada a los juegos en forma extensiva es el de que genericamente tienen una cantidad finita de resultados posibles. Esta propiedad está demostrada en [D. M., Kreps and R. Wilson (1982)]

Teorema 58 *Para casi todo juego finito, en forma extensiva, el conjunto de los equilibrios de Nash es finito.*

Un importante concepto para eliminar aquellos equilibrios de Nash, que permiten un comportamiento irracional en los nodos no alcanzables, es el de **equilibrio perfecto de subjuegos**.

Un equilibrio b de un juego Γ se dice un **equilibrio perfecto de subjuegos** si para todo subjuego Γ_x de Γ la restricción b_x de b constituye un equilibrio para Γ_x.

Lema 59 *[Kuhn,H. (1953)].Si b_x es un equilibrio para Γ_x y b_{-x} es un equilibrio para el juego truncado $\Gamma_{-x}(b_x)$, entonces (b_{-x}, b_x) es un equilibrio de Γ.*

Demostración La prueba sigue de la observación de que para todo $b \in B$:

$$R_i(b) = P^b(x)R_{ix}(b) + \sum_{z \notin Z(x)} P^b(z)r_i(z),$$

siendo $Z(x) = \{y \in P_i : y \text{ sigue a } x\}$. Si Γ_x está bien definido, entonces $R_{ix}(b)$ depende solamente de b_x.$\square$

Este lema permite obtener cualquier equilibrio perfecto de subjuego, mediante el siguiente procedimiento iterativo: Primeramente consideramos los subjuegos minimales en el juego original, luego truncamos el juego asumiendo que en cualquiera de los subjuegos se jugo un equilibrio. Repitiendo el proceso y considerando el lema anterior, obtenemos su equilibrio perfecto de subjuegos. Finalmente resulta el siguiente teorema:

Teorema 60 *Todo juego posee al menos un equilibrio perfecto de subjuegos.*

Ejemplo 61 *Equilibrio Perfecto de Subjuego. El juego ilustrado por la figura siguiente, no puede ser resuelto ni por la elección de una estrategia no dominada, ni por inducción retroactiva, no obstante podemos seguir la lógica de este último método, para obtener un equilibrio perfecto de subjuegos.*

El juego que comienza en el segundo conjunto de información del jugador I, tiene un único equilibrio de Nash, con valor esperado $(0,0)$. El jugador II, a su turno, eligiría R_2, solamente si esperara que en el subjuego de partidas simultaneas final, I eligiera con probabilidad mayor que $\frac{3}{4}$, la rama con resultado favorable para él. Como sabe que I es racional, como lo es el mismo, en su nodo, eligirá L_2. El jugador I, en su primera movida hará R_1, quedando conformado el equilibrio.

Podemos ahora representar este juego de la siguiente forma:

7.3 Críticas a la Resolución por Estrategias Debilmente Dominadas

El siguiente ejemplo nos muestra que en ciertos casos proceder por eliminación de estrategias debilmente dominadas, puede llevarnos a resultados no deseados por quien aplicada dicho método.

Ejemplo 62 *Supongamos el juego en forma normal, representado en la siguiente matriz.*

·	b_1	b_2
a_1	$(10,1)$	$(1,8)$
a_2	$(10,15)$	$(-2,3)$

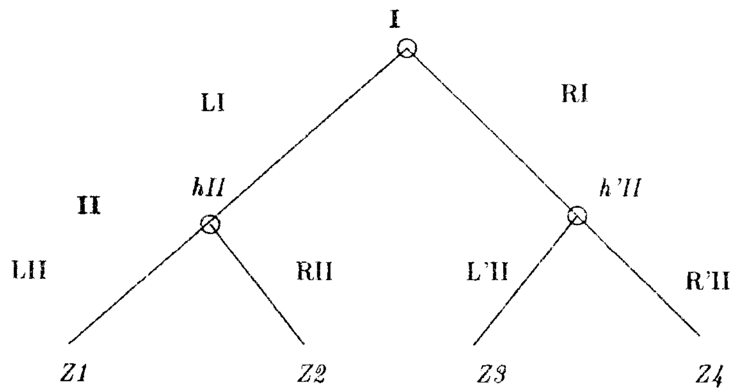

Fig. 26. Equilibrio perfecto en subjuegos.

Fig. 27 *Un mal caso para la eliminación de estrategias "debilmente dominadas"*

Observemos que el equilibrio "razonable" es el representado por las estrategias a_2, b_1. No obstante si el jugador I procede eliminado estrategias debilmente dominadas, eliminará la fila a_2. Sabiendo esto, el jugador II, eligirá b_2, contra la esperada elección b_1, obteniendo el jugador I un mal resultado.

7.4 Críticas a los Métodos de Resolución por Retroinducción y por Subjuegos

En esta sección discutiremos algunas de las limitaciones de los métodos de resolución por retroinducción o por subjuegos. Si bien ambos métodos resuelven bien algunos casos, como los de dos etapas, juegos de Stackelberg, no obstante a medida que aumentan las etapas del juego, o la cantidad de jugadores, las soluciones obtenidas por estos métodos merecen refinarse. Las principales dificultades se presentan ante la posibilidad de que los jugadores cometan errores o duden de la racionalidad de los oponentes. Cadenas largas de retroinducción por la presencia de muchos jugadores, presuponen largas cadenas de supuestos de que cada uno sabe que el otro sabe, etc, consecuentemente la posibilidad de que algún jugador piense que alguno de sus sucesores olvide algo que es de *conocimiento público* aumenta y consecuentemente aumenta la posibilidad de un desvío de las *"estrategias racionales"*.

En tanto que el método de resolución por subjuegos es una extensión de la retroinducción es vulnerable a las mismas críticas. Dificultades adicionales se presentan si pensamos en que en este caso, cada jugador espera que se juegue no sólo una estrategia que sea un equilibrio de Nash, sino además un único equilibrio de Nash.

Veamos algunos ejemplos que hacen referencia a las dificultades planteadas.

Ejemplo 63 *Algunas dificultades presentadas por probables fallas de la racionalidad. El conocido ejemplo del cienpies es ilustrativo en este sentido.*

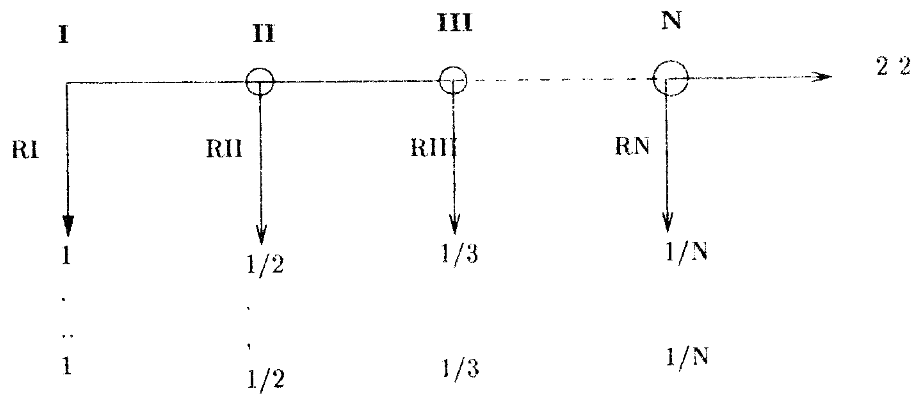

Fig. 28. El juego conocido como el cienpies.

El juego presentado en la figura anterior, es un juego con información perfecta, donde puede aplicarse la retroinducción, obteniendo como resultado que cada jugador i a su vez eligirá L_i.

Obsérvese que si la cantidad de jugadores es amplia, las posibilidades de que cada uno elija una opción equivocada aumenta. Si la probabilidad de elegir correctamente fuese $p < 1$ al llegar al i-ésimo jugador tendríamos que esta es p^I. La otra crítica que cabe es la referida a la cantidad de información que debe manejar cada jugador, si bien se supone que todo es del conocimiento público, pueden requerirse largas cadenas de conocimientos y queda abierta una posibilidad de distorciones en la racionalidad, a partir de un mal manejo de la información.

7.5 El Principio de Optimalidad y Equilibrios Perfectos en Subjuegos

Para verificar, cuando una combinación estratégica s, es un equilibrio perfecto en subjuegos, basta verificar la existencia de alguna historia h^t, para la que una desviación en una etapa t, de s_i por parte de algún jugador i, permita a dicho jugador obtener beneficios adicionales respecto de s_i.

Este principio llamado *principio de desviación en una etapa* es la base del conocido principio de optimalidad de la programación dinámica, que se basa en la inducción retroactiva, y muestra como la idea de perfección en subjuegos, extiende el referido mecanismo.

Veremos dos teoremas de aplicación del referido principio, uno válido para un juego con horizonte finito, y otro aplicable a juegos con horizontes infinitos.

Teorema 64 *(Principio Desviación en una Etapa para Horizonte Finito) En un juego multietapas, finito, la combinación estratégica s es un equilibrio perfecto en subjuegos, si y sólo si, satisface el principio de desviación en una etapa, esto es no existe ninguna estrategia $\bar{s}_i$ para algún jugador i, tal que coincida con s_i excepto en una sóla etapa t, dada h^t, tal que $\bar{s}_i$ es mejor respuesta a s_{-i} que s_i condicionado a la historia h^t.*

Demostración La condición necesaria, (sólo si) se sigue de la propia definición de subjuego perfecto. [7]

Vamos ver que la condición es suficiente, esto lo haremos por el absurdo.Supongamos que la condición es satisfecha para s, pero que existe una estrategia $\bar{s}$, tal que dada la historia, $h^t, \bar{s}_i$, mejora a s_i como respuesta contra s_i para al menos un i en algún subjuego que comienza en h^t.

Sea $\bar{t}$ el mayor t' tal que para algún $h^{t'}, \bar{s}_i(h^t) \neq s_i(h^t)$, siendo el juego finito, $\bar{t}$ es finito. Además por el principio de desviación debe verificarse que: $\bar{t} > t$.

Introduzcamos la estrategia auxiliar s_i' con la particularidad de que: $s_i'(t) = \bar{s}_i(t)$, $\forall t > \bar{t}$. Como s' y $\bar{s}$ por el principio de optimalidad s' y $\bar{s}$ ambas son equivalentes para el subjuego con inicio en t. Si $\bar{t} = t + 1$ s' y s, por el principio de desviación son equivalentes. Si $\bar{t} > t + 1$, construimos otra estrategia que coincide con $\bar{s}$ hasta $t - 2$ y seguimos el razonamiento analogamente.[]

En el caso de horizonte infinito, el método no es suficiente, pues queda la posibilidad de mejorar, desviándose en una sucesión infinta . Probaremos que esto no ocurre cuando los retornos son continuos en el infinito. Denotaremos por h una historia con horizonte infinito, siendo h^t su restricción a las primeras t etapas.

Definición 65 *Un juego se dice continuo en el infinito, si para cada jugador i la función de utilidad u_i satisface:*

$$\sup_{h,\bar{h};s.t.h^t=\bar{h}^t} |u_i(h) - u_i(\bar{h})| \to 0, \ con\ t \to \infty.$$

Esto dice que eventos en un futuro distante son relativamente poco importantes.

Teorema 66 *(Principio de Desviación en una Etapa, para Horizonte Infinito) En un juego multietapas con horizonte infinito y utilidades continuas en el infinito, el vector estratégico s, es un equilibrio perfecto en subjuegos, si respeta el principio de desviación en una etapa, esto es no existe jugador i, para el que una estrategia $\bar{s}_i$ sea mejor respuesta que s_i para s_{-i}, dado h^t coincidente con s_i, excepto en t, y que condicionado a h^t sea mejor respuesta que s_i para s_{-i}.*

DemostraciónLa prueba anterior establece la necesidad, y también prueba que, si s satisface el mencionado principio, entonces no existe estrategia que la mejore, desviándose en una cantidad finita de pasos en algún subjuego.

Supongamos que s no fuera un equilibrio perfecto en subjuegos. Entonces debe existir una etapa t, una historia h^t, un jugador i y una estrategia $\bar{s}_i \neq s_i$ tal que en el subjuego que comienza en h^t, $\bar{s}_i$ permita a i obtener un retorno mayor. Sea $\epsilon > 0$ el total de esta mejora. Por la continuidad en el infinito de las utilidades, existe una estrategia s_i' en el subjuego comenzado en h^t que coincide con $\bar{s}_i$ para todo estado anterior a t', y de aquí en adelante con la estrategia s_i debiendo mejorar a i, respecto de s_i en por lo menos $\epsilon/2$. Esto contradice al hecho de la no existencia de sucesiones que mejoren a i mediante una cantidad finita de desviaciones.[]

[7]Observe que la observancia del principio de desviación en una etapa no es prerrequisito para los equilibrios de Nash, pues como fue observado estos pueden no ser equilibrios perfectos de subjuegos, cosecuentemente pueden preescribir soluciones no maximisadoras en nodos inalcansables para la estrategia en cuestión.

8 Juegos Repetidos

En esta sección discutiremos la forma en que la repetición de un juego introduce nuevos equilibrios, permitiendo a cada jugador conocer como sus oponentes jugaron en etapas anteriores.

Los jugadores juegan en forma reiterada un mismo juego, siendo su retorno un promedio ponderado de lo obtenido en cada etapa en que el juego se realiza. El modelo de juegos repetidos no permite que las acciones anteriores influyan sobre las decisiones presentes, lo que es una importante restricción, pues no permite modelar fenómenos de aprendizaje, de inversión en maquinaria productiva, o de relación con el medio ambiente. No obstante el modelo de juegos repetidos es una buena aproximación teórica al análisis de relaciones de larga duración en ciencias políticas o sociales.

8.1 El Modelo

El juego que se repite es llamado el *juego estado*. Asumiremos que hay una cantidad n, finita de jugadores que mueven simultaneamente, eligiendo sus acciones en un espacio A_i finito. En cada juego estado, el retorno del jugador i es representado por una función $g_i : A \to R$, siendo $A = \times_{i=1}^{I} A_i$. Para un juego donde el juego estado, se repite infinitamente, $G(\delta)$, consideraremos la función objetivo para el jugador i, que usa el factor $\delta < 1$ como descuento sobre el futuro a la suma:

$$u_i = E_s(1-\delta)\sum_{t=0}^{\infty} \delta^t g_i(s^t(h^t),$$

donde el operador E_s representa la esperanza con respecto a la distribución, sobre historias infinitas que son generadas por la combinación estratégica s. El factor $1-\delta$ es un factor de normalizacion, de forma que a un juego $G(\delta)$ a un jugador i, con g_i, le corresponda $u_i = 1$.

Como en cada período comienza un subjuego propio, para cada combinación estratégica s, e historia h^t podemos computar el retorno esperado por cada jugador a partir de t. El retorno a partir de t y hasta el final será: $(1-\delta)\sum_{\tau=t}^{\infty} \delta^{\tau-t} g_i(s^\tau(h^\tau))$.

Definición 67 *El retorno minmax de un jugador i está dado por:*

$$\underline{v_i} = \min_{s_{-i}\in S_{-i}} \max_{s_i \in S_i} g_i(s_{-i}, s_i),$$

representa, el nivel de retorno menor, al que los oponentes pueden hacer caer a i.

Usaremos m_{-i}^i para denotar una combinación estratégica, que es el castigo óptimo para i en el juego, es decir: $g_i(m_{-i}^i) = \max_{s_i\in S_i} g_i(m_{-i}^i, s_i) = \min_{s_{-i}\in S_{-i}} \max_{s_i\in S_i} g_i(s_{-i}, s_i) = \underline{v}_i$.

Observación Si α^* es un equilibrio de Nash para el juego d estado, (equilibrio estático), la estrategia en la que cada jugador, juega α_i^* permanentemente, es un equilibrio perfecto en subjuegos.

Veremos que no obstante lo dicho en la observación, en juegos repetidos infinitamente, aparecen equilibrios de Nash diferentes a los preexistentes.

8.2 Equilibrios en Juegos Repetidos

Comenzaremos con el conocido juego llamado "dilema del prisionero".

Ejemplo 68 *La siguiente matriz, representa los retornos en el juego estado, correspondientes a las estrategias puras de cada uno de los dos jugadores, como siempre I elige filas y II columnas.*

	coop.	*nocoop.*
coop.	$(1,1)$	$(-1,2)$
nocoop.	$(2,-1)$	$(0,0)$

Ambos jugadores son prisioneros acusados de un delito que cometieron. Si cooperan entre ellos y no coonfiesan el crimen ambos recibirán un retorno de $(1,1)$, si uno confiesa y el otro no, quien lo haga, es decir quien deje de cooperar con el otro recibirá un retorno equivalente a dos unidades de bienestar, mientras que, quien optó por la vía de no confesar recibirá un retorno negativo. Finalmente si ambos confiesan, el retorno para ambos será igual a cero. Evidentemente el único equilibrio de Nash en el juego estado, corresponde a la estrategia $(nocoop., nocoop.)$.

Veamos que pasa si el juego se repite infinitamente:

Para un factor de descuento $\delta > \frac{1}{2}$, la siguiente estrategia es un equilibrio de Nash: "Cooperar en el primer período y continuar así hasta que el otro deje de hacerlo, en ese caso y hasta el final dejar de cooperar".

Se presentan dos opciones, o bien ambos juegan $(coop, coop)$ y reciben un retorno igual a 1. O bien uno deja de cooperar en el período t, y recibirá un retorno igual a: $(1-\delta)(1+\delta+...+\delta^{t-1}+2\delta^t+0+... = 1-\delta^t(2\delta-1)$. Dicho retorno será menor que 1, si $\delta > \frac{1}{2}$.

Obsérvese que si el otro jugador deja de usar la estrategia planteada, recibirá un retorno igual a -1, a partir de t, mientras que si se guía por ella el retorno a partir de este momento será igual a cero.

Obsérvese que como ya fue dicho, jugar cada vez una estrategia que representa un equilibrio de Nash, es un equilibrio perfecto en subjuegos. Por lo tanto en este caso la estrategia siempre *nocoop* es un equilibrio perfecto en subjuegos, y será el único que su implementación no depende de lo que haya sucedido antes.

Llamaremos **camino** a la única sucesión de ramas y nodos que conectan el origen del juego (o subjuego) con un nodo x del mismo.

En general podemos dar la siguiente definición de camino de equilibrio.

Definición 69 $\pi = \{s^t\}_t$ *es un camino de equilibrio si y solo si no existen incentivos a desviarse del mismo.*

Formalmente π es un camino de equilibrio si y sólo si la combinación estratégica σ descripta por:

$$\sigma_0 = s^0 \tag{8}$$

$$\sigma(h^t) = \begin{cases} m^t & \text{si } h^t(t-1) = m^t \ \ o \ \ h^t(t-1) = s_i/s^{t-1}, \text{ con } s_i^{t-1} \neq s_i \\ s^t \text{ en otro caso} & . \end{cases} \tag{9}$$

Terminaremos esta sección probando la teoremas conocidos como "Teoremas Juglarescos" (Folk Theorems). Estos teoremas aseguran que en juegos repetidos infintamente, si los jugadores son suficientemente pacientes, existe una estrategia de equilibrio que les permite alcanzar cualquier equilibrio factible e individualmente racional.

El siguiente ejemplo servirá para aclarar el concepto de conjunto factible e individualmente racional.

Ejemplo 70 *Cálculo de valores Minmax.*

La matriz de retornos para un juego con dos jugadores es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & L & R \\ U & (-2,2) & (1,-2) \\ M & (1,-2) & (-2,2) \\ D & (0,1) & (0,1) \end{array}$$

Vamos a obtener el valor minmax para el jugador I.

Para esto consideremos los retornos posibles de I, en función de q, siendo q la probabilidad que el jugador II asignará a L, así: $P(L) = q$; $P(R) = 1 - q$.

$$\begin{aligned} v_U(q) = &\quad -2q + 1(1-q) = \quad -3q + 1 \\ v_M(q) = &\quad\quad 3q - 2; \\ v_D(q) = 0. & \end{aligned}$$

Independientemente de lo que haga II, el jugador I puede obtener un retorno igual a cero, este es el valor minmax, o valor de reserva para I. Obsérvese que $max\{v_M(q), v_D(q)\} = 0$, esto obliga al jugador I, a elegir siempre D. Si por ejemplo $q \in [1/3, 2/3]$, $g_i(m^i_{-i}) \in [1/3, 2/3]$.

Analogamente el jugador II, podrá obtener su valor de reserva:

$v_L = \quad 2(p_U - p_M) + (1 - (p_U - p_M)$

$v_R = \quad -2(p_U - p_M) + (1 - (p_U - p_M)$

$v_2 = \min_{p_U, p_M}[max\{v_L, v_M)\}]$.

Por lo tanto: $\underline{v_2} = 0$, o sea que $m^2_{-2} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$,

Obsérvese que el retorno mínimo esperado, para ambos jugadores en estrategias puras es 1.

Observación El retorno esperado para el i-ésimo jugador, en un juego repetido nunca será inferior a $\underline{v}_i$, independientemente del factor de descuento, pues:

$$R_i(m_{-i}) = \frac{1 - \delta^{T+1}}{1 - \delta} \sum_{t=0}^{T} \delta^t v_i.$$

Entenderemos por **retornos factibles** a aquellos retornos $r = (r_1, \ldots, r_n)$, que pueden ser alcanzados por combinaciones convexas de estrategias puras. Denotaremos con V, al conjunto de tales vectores, así, V = cápsula convexa $\{r \in R^n :$ existe $a \in A; g(a) = r\}$.

El subconjunto de vectores factibles, que dejan a todos los jugadores en un nivel superior de bienestar que el que corresponde a sus valores minmax, $v_i > \underline{v}_i$, es llamado conjunto de **retornos individualmente racionales.**

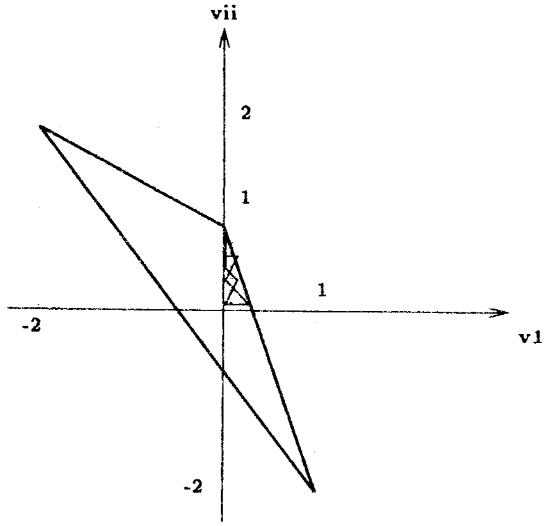

Fig. 29. Area Factible. En rayado, el area Individual mente Racional.

Para el ejemplo tratado recientemente la figura siguiente muestra el conjunto factible, siendo el área sombreada el correspondiente a los retornos individualmente racionales.

Demostraremos a continuación dos importantes teoremas, que por mucho tiempo fueron de trasmisión oral en teoría de juegos, habiendo pasado mucho tiempo antes de que fueran impresos. A falta de otra traducción para "Folk Theorems", usamos la de "Teoremas Juglarescos".

Teorema 71 (Folk Theorem) *Para todo vector v, individualmente racional, existe $\underline{\delta} < 1$ tal que para todo $\delta \in (\underline{\delta}, 1)$ existe un equilibrio de Nash de $G(\delta)$ con retornos v.*

Observación: Un jugador es más paciente cuanto más próximo a uno se encuentra su factor de descuento δ. El factor de descuento da una idea de la importancia relativa que tiene el futuro, para el jugador, el expresar mayor o menor peso respecto para utilidades futuras. La intuición del teorema es clara: Para un jugador suficientemente paciente, cualquier ganancia finita en un periodo es sobrepasada por pérdida futuras, aunque sean pequeñas, en cada uno de los subsecuentes períodos. Para la prueba del teorema construiremos una estrategia implacable, *todo jugador que se desvíe será minimaximizado en todo período futuro.*

Demostración: Sea $v > \underline{v}$ un vector factible de retornos. Consideremos primeramente el caso en que existe una combinación estratégica $a \in A$, tal que $v = g(a)$. Consideremos la siguiente estrategia para cada jugador i :

"Jugar a_i en $t = 0$, y continuar así si nadie se desvía. En caso contrario, esto es si por ejemplo se desvía i los otros jugadores eligirán m_i^{-1} desde entonces hasta el final del juego". Puede algún jugador mejorar desviándose de esta estrategia?

Si el jugador i se desvía en t obtendrá a lo sumo el retorno:

$$F(\delta) = (1-\delta)\sum_{h=0}^{t-1}\delta^t \underline{v_i} + \delta^t(1-\delta)\max_{a\in A} g_i(a) + \delta^{t+1}\underline{v_i}.$$

Siendo $\max_{a\in A} g_i(a) = K$, el máximo retorno que i puede obtener.

Puede verse facilmente que tan pronto cuanto δ exceda un cierto valor crítico, $\underline{\delta_i}$, entonces $F(\delta) \leq v_i$. Para obtener el δ crítico basta hallar δ tal que: $F(\delta) = \delta^t v_i$, equivalentemente $(1-\delta)\max_{a\in A} g_i(a) + \delta \underline{v_i} = v_i$. Como $\underline{v_i} < v_i$, se sigue que $\underline{\delta_i} \leq 1$. Tomando $\delta = \max_i \underline{\delta_i}$ completamos el argumento.

En caso de que v no pueda alcanzarse con estrategias puras, siendo v factible, podrá hacerse una elección aleatoria de estrategias puras $a(w)$ tales que $E_a g(a(w)) = v$.

En tanto que v es un valor esperado, un jugador puede sentir mayor tentación a cambiar la estrategia, en aquellos estados de la naturaleza en que el valor de la variable aleatoria $g(a(w))$ sea relativamente bajo.

En este caso basta elegir el δ crítico, $\underline{\delta_i}$ tal que verifique la siguiente igualdad:

$$(1-\delta)\max_{a\in A} g_i(a) + \delta\underline{v_i} = (1-\delta)\min g_i(a(w)) + \delta v_i.[]$$

Observación En la estrategia considerada, un único desvío por parte de un jugador, provoca una inmediata respuesta de castigo por parte de todos los otros jugadores. Esto es posible si el costo de tal punición es bajo. En determinados casos, como el de los oligopolios de Cournot, penalizar a quien se desvía supone aumentar la producción para bajar los precios en forma tal que pueden ser inferiores a los costos.

A esta situción se llega porque las estrategias de equilibrio que permiten obtener un retorno individualmente racional, no es necesariamente un equilibrio perfecto en subjuegos.

El siguiente teorema, garantiza que a partir de un cierto δ mínimo, esto es, a partir de un grado mínimo de paciencia por parte de los jugadores, puede obtenerse para cualquier retorno individualmente racional, una estrategia que será un equilibrio perfecto en subjuegos y permitirá alcanzarlo.

Teorema 72 (Folk Theorem) *[Fridman, J. (1971)]Sea α^* un equilibrio estático (un equilibrio del juego estado) con retorno e. Entonces para cualquier $v \in V$, con $v_i > e_i$ para todos los jugadores i, existe un $\underline{\delta}$ tal que si $\delta > \underline{\delta}$ existe un equilibrio perfecto en subjuegos para $G(\delta)$ con retornos v.*

Demostración Asumiremos que existe $a \in A$ para la que $g(a) = v$. Si no existe tal estrategia pura una aleatorización en el conjunto de las estrategias puras A, nos permitirá acceder a v. Consideremos la siguiente estrategia: "En $t = 0$ cada jugador juega acorde con a, y se sigue así en tanto no haya desvíos. Si los hubiera se juega α^* hasta el final. Esta estrategia es un equilibrio de Nash para $G(\delta)$ con δ suficientemente grande, pues en este caso: $(1-\delta) + \delta e_i < v_i$, la desigualdad estricta sigue del hecho de que la misma se obtiene en el límite para $\delta \to 1$. Es además un equilibrio perfecto una vez que se jugará α^* en todo camino que no sea el del equilibrio.[]

Observación El resultado del teorema de Fridman es más débil que el anterior, excepto para juegos donde el valor minmax sea un equilibrio.

Los dos últimos teoremas, caracterizan el comportamiento de los equilibrios cuando $\delta \to 1$. Es de interés también determinar las características del conjunto de equilibrios para δ fijo. Los teoremas anteriores parecen advertirnos sobre la posibilidad de que existan muchos equilibrios. El lector interesado podrá encontrar un tratamiento cuidadoso del tema en [D. Fudemberg and J. Tirole (1991)].

9 Juegos con Información Incompleta

Cuando alguno de los jugadores no conocen las funciones de retornos de alguno de los otros jugadores, decimos que estamos ante un *Juego con Información Incompleta.* El caso de información completa es una simplificación, no obstante ser, en muchas ocasiones, una buena aproximación.

La información privada de dominio de un jugador da lugar a la definición de **tipo de jugador** esta información que es relevante para el juego, puede incluir la función de retorno, sus creencias respecto a lo que otros jugadores creen, etc.

En [E. Van Damme (1991)] define a los tipos de cada jugador $\{\theta_i\}_{i=1}^n$ como una variable aleatoria para la que existe una distribución de probabilidad objetiva, $p(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ para θ_i perteneciente a un cierto espacio Θ_i que tiene una cantidad de elementos $\#\Theta_i$ finita, θ_i es observado unicamente por el jugador i. $p(\theta_{-i}|\theta_i)$ denota la probabilidad condicional de que sus oponentes sean del tipo $\theta_{-i} = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1}, \theta_{i+1} \ldots, \theta_n)$ dado que el es del tipo θ_i. Asumimos que $p(\theta_i) > 0, \forall \theta_i \in \Theta_i$.

Para completar la descripción de *Juegos Bayesianos* nos falta especificar un espacio de estrategias puras S_i y las funciones de retorno $R_i(s_1, \ldots, s_n, \theta_1, \ldots, \theta_n)$ con $s_i \in S_i$, para todo $i = (1, 2, \ldots, n)$.

Podemos ahora dar la siguiente definición de **Equilibrio Bayesiano.**

Definición 73 *Un Equilibrio Bayesiano en un juego con información incompleta, un número finito de tipos θ_i, para cada jugador i, una distribución a priori p, y un conjunto de estrategias puras S_i es un equilibrio de Nash en el que el espacio de estrategias puras $S_i^{\Theta_i}$ de mapas de Θ_i en S_i.*

Una estrategia $s(\cdot)$ es un Equilibrio Bayesiano si para cada jugador i,

$$s(\cdot) \in arg \max_{s_i'(\cdot) \in S_i^{\Theta_i}} \sum_{\theta_i} \sum_{\theta_{-i}} p(\theta_i, \theta_{-i}) u_i(s_i'(\theta_i), s_{-i}(\theta_{-i}), (\theta_i, \theta_{-i})).$$

Como cada tipo tiene probabilidad positiva, *ex ante* formulación es equivalente a que el jugador i maximice su utilidad condicional a θ_i para cada θ_i :

$$s(\theta_i) \in arg \max_{s_i' \in S_i} \sum_{\theta_{-i}} p(\theta_i|\theta_{-i}) u_i(s_i', s_{-i}(\theta_{-i}), (\theta_i, \theta_{-i})).$$

La existencia del Equilibrio de Nash, es una consecuencia inmediata del teorema de existencia del Equilibrio de Nash-Cournot.

Ejemplo 74 *Como un caso particularmente simple de juego con información incompleta consideremos una industria con dos firmas. Una establecida, jugador I, y la otra potencial entrante, jugador II. I decide cuando construir una nueva planta, simultaneamente, II decide si entra o no. Suponga que II duda sobre si el costo de I para construir la nueva planta es 3 o 0, mientras que I conoce su propio costo. Las siguientes matrices representan los retornos.*

·	Entra	No Entra
Constr.	$0, -1$	$2, 0$
no Constr.	2.1	$3, 0$

Retornos si los costos de construcción son altos.

·	Entra	No Entra
Constr.	$3, -1$	$5, 0$
no Constr.	$2, 1$	$3, 0$

Retornos si los costos de construcción son bajos.

En este caso los retornos de II dependen de si I construye o no, pero no están directamente influenciados por los costos de I. Nótese también que I tiene "construir" como estrategia dominante si su costo es bajo, y "no construir" si el costo es alto.

La estrategia de II queda supeditada, en este caso, exclusivamente a la probabilidad apriori p_1, que le asigne a que I sea de costo alto. Si $p_1 < \frac{1}{2}$ entra y no entra si $p_1 > \frac{1}{2}$.

El análisis se complica si el jugador II tiene 1.5 como bajo costo, en lugar de 0, como anteriormente. En este juego no construir sigue siendo una estrategia dominante cuando I tiene alto costo. No obstante si su costo es bajo, la estrategia óptima de I, dependerá de la probabilidad y apriori que asigne a II de entrar. Construir es mejor que no construir si:

$1.5y + 3.5(1-y) > 2y + 3(1-y)$, o, $y < \frac{1}{2}$.

El jugador I debe tratar de predecir el comportamiento de II, al elegir su propia acción, y el jugador II no puede inferir el comportamiento de I solamente por lo que sabe de I.

Harsanyi propone tratar este caso, introduciendo una movida anterior de la naturaleza, que determina el tipo de I (su costo), y el juego de información incompleta para II sobre los costos de I, se transforma en un juego de información imperfecta sobre las movidas de la naturaleza, que puede analizarse con técnicas habituales.

Ejemplo 75 *Concurrencia de Cournot, con Información Incompleta.*

Consideremos un duopolio, donde las firmas tienen las siguientes funciones de utilidad: $u_i = q_i(\theta_i - q_i - q_j)$, *donde* θ_i. *Es de conocimiento público que* $\theta_1 = 1$ *pero la firma 2, tiene información privada sobre* θ_2. *La firma 1 cree que* $\theta_2 = \frac{3}{4}$, *con probabilidad* $\frac{1}{2}$ $\theta_2 = \frac{5}{4}$, *con probabilidad* $\frac{1}{2}$. *Las dos firmas eligen su producción simultaneamente.*

Denotamos por q_1 al producto de la firma 1. q_2^L representa el producto de 2, si $\theta_2 = \frac{3}{4}$, q_2^H en el otro caso. La elección $q_2(\theta_2)$ de la firma 2, debe satisfacer:

$q_2(\theta_2) \in arg\max_{q_2}\{q_2(\theta_2 - q_1 - q_2)\} \Rightarrow q_2(\theta_2) = (\theta_2 - q_1)/2$.

La firma 1 no conoce el tipo de la firma 2, su retorno será entonces un retorno esperado sobre el tipo de la firma 2:

$q_1 \in arg\max_{q_1}\{\frac{1}{2}q_1(1-q_1-q_2^H)+\frac{1}{2}q_1(1-q_1-q_2^L)\} \Rightarrow q_1 = \frac{2-q_2^L-q_2^H}{4}$.

Sustituyendo adecuadamente obtenemos que: $(q_1 = 1/3, q_2^L = 11/24, q_2^H = 5/24)$ es un equilibrio bayesiano.

BIBLIOGRAFIA

[R. J. Auman, (1989)] "Lectures in Game Theory". *Westview Press, Inc, Serie Underground Classics in Economics* Cap.1.

[C. Berge, (1963)] "Topological Spaces".*New York: Macmillan.*

[D. Bernuolli,(1730)] "Exposition of a New Theory on Measurement of Risk".

[J. Bertrand (1883)] " Théorie Mathématique de'la Richesse Sociale". *Journal des Savants,* 499 - 508.

[E. Borel, (1921)]

[E. Borel, (1938)] "Applications aux Jeux de Hasard". *Traité du Calcul des Probabiltiés et ses Applications,* Gauthier-Villar, París.

[A. Cournot, (1897)] "Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth".*Macmillan: New York.*

[G. Debreu (1970)] "Economies with a Finite Set of Equilibria".*Econometrica,* **38**.

[Fridman, J. (1971)] "A Noncooperative Equilibrium for supergames"*Review of Economics Studies* **38** 1-12.

[D. Fudemberg and J. Tirole (1991)] "Game Theory". *Mit Press.*

[J.C. Harsanyi (1973)] "Odness of the number of Equilibrium Points: a New Proof". *International Journal of Game Theory* **2**. 1-23

[C. Huang and R. H. Litzemberger (1988)] "Foundations for Financial Economics". *Prentice - Hall, Inc.*

[D. M., Kreps and R. Wilson (1982)] "Sequential Equilibria." *Econométrica* **50**. 863-894.

[Kuhn,H. (1953)] "Extensive Games and the Problem of Information".*Annals of Mathematics Studies* **28**. Princeton Universty Press.

[R. D. Luce and H. Raifa] "Games and Decisions. Introduction and Critical Survey", *Dover Publications, Inc., N.Y.*(1989).

[A. Mas-Colell (1985)] "The Theory of General Equilibrium: A Differentiable Approach". Cambridge University Press.

[Myerson, R. B. (1978)] "Refinements of the Nash Equilibrium Concept". *Internationa Journal of Game Theory;* **7** 73-80.

[O. Morgenstern, J. von Neumann(47)] "Theory of Games and Economyc Behavior".*The Review of Economics Statstics,* **39**

[J. Nash, (1959)] "Non-Cooperative Games". *Annals of Mathematics*, **54, 2.**

[J.B., Rosen (1965)] "Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave n-Person Games". *Econometrica.* **33,** 520-534.

[Selten, R. (1975)] "Reexamination of the Perfectness Concept for Equilibrium Points in Extensive Games" . *International Journal of Game Theory"* **4** 25-55.

[J. Von Neumann (1928)] "Zur Theorie der Gesselschaftsspiele". *Mathematische Annalen,* **100,** 295 - 320.

[E. Van Damme (1991)] "Stability and Perfection of Nash Equilibria". *Springer Verlag.*

[E. Zermelo (1913)] Uber eine Anwendung der Mengenlehre auf der Theorie des Schachspiels. In *proceeding of the Fifth International Congress on Mathematics.*