

DIFUSIÓN ANISOTRÓPICA

FACUNDO MÉMOLI, ALVARO PARDO, ALEJANDRO RIBEIRO

Instituto de Ingeniería Eléctrica

Facultad de Ingeniería

Universidad de la República

Montevideo-Uruguay

e-mail: memoli@iie.edu.uy

RESUMEN

En este trabajo analizaremos diferentes esquemas de difusión de imágenes. Comenzamos presentando las ideas de difusión isotrópica para luego ver el comportamiento de los algoritmos de difusión anisotrópica introducidos en el tratamiento de imágenes por Perona y Malik [2]. Se estudia la conexión con la estadística robusta [3] que proporciona técnicas para estimar parámetros de la función detectora de bordes. Luego se analizan los resultados de una estimación local de estos parámetros frente a un estimativo global, presentando ejemplos que demuestran su superioridad. Finalmente se describe el esquema numérico utilizado para generar los ejemplos presentados.

1. INTRODUCCIÓN

Un buen modelo para el problema de limpieza de imágenes, consiste en suponer que la imagen que tenemos es la suma de una imagen ideal, y ruido gaussiano de media nula, independiente de la imagen, independiente pixel a pixel, e idénticamente distribuido. Una forma de eliminar este ruido es con un filtro pasabajos. Una elección posible es un filtro gaussiano de desviación σ . Con valores grandes de σ se elimina más ruido, aunque se produce mayor deformación de la imagen. Existe entonces un compromiso entre la eliminación del ruido y la deformación de la imagen que depende del valor de σ .

Una idea, original de Köenderink y Witkin, para resolver este problema es usar un banco de filtros de resolución decreciente (σ creciente), y aplicarlos sucesivamente a la imagen, a este banco de filtros lo llamaron espacio de escala. Un resultado muy interesante, es que este conjunto de filtros es equivalente a resolver la ecuación del calor para la imagen:

$$\begin{cases} \frac{\partial I(x, y, t)}{\partial t} & \dot{=} & \nabla^2 I(x, y, t) \\ I(x, y, 0) & \dot{=} & I_0(x, y) \end{cases}$$

La importancia de este resultado es tanto teórica como práctica; desde este último punto de vista proporciona un potente conjunto de herramientas para implementar el espacio de escala, se trata de todas las herramientas conocidas para la resolución de ecuaciones en derivadas parciales; desde el punto de vista teórico permite un nuevo enfoque del problema que nos permitirá encontrar mejores métodos para eliminar ruido.

En la imagen 3 podemos observar como la imagen se suaviza; sin embargo también ocurre un efecto indeseable que es la pérdida de claridad de los bordes. Este problema era previsible, pues las altas frecuencias de los bordes son indistinguibles de las altas frecuencias del ruido; más aún, es imposible resolver este problema con un filtro lineal.

Para comprender el nuevo enfoque tratemos de entender porque la evolución de una imagen según la ecuación del calor mejorará su aspecto. Esto no es ningún misterio; la temperatura de un cuerpo tiende a uniformizarse por lo que la evolución según la ecuación del calor tenderá a uniformizar la imagen. Claro que si dejamos que la ecuación corra hasta tiempo infinito terminaremos con una imagen muy poco interesante.

Hasta ahora nada nuevo excepto esta interpretación, sin embargo, podemos aprovecharnos de este nuevo enfoque y buscar ecuaciones de calor, en las que manipulando el coeficiente de conducción podamos obtener mejores resultados. En particular en este trabajo buscaremos ecuaciones en las que la difusión de calor se detenga en los bordes de la imagen evitando su destrucción.

2. DIFUSIÓN ANISOTRÓPICA

Comenzaremos presentando el trabajo de Perona-Malik [2], hasta concluir en la ecuación que ellos sugieren para la eliminación de ruido y luego veremos la conexión con la estadística robusta introducida en [3] por Black, Sapiro, Marimont y Heeger lo que permite mejorar el esquema de Perona-Malik y obtener herramientas para el cálculo de parámetros de la ecuación.

2.1 Ecuación de Perona-Malik

El objetivo es lograr que la imagen se suavice dentro de las regiones delimitadas

por bordes y no lo haga a través de ellos. En la sección 1 anticipamos nuestra intención de atacarlo con un coeficiente de conducción variable en la ecuación del calor:

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot (g \nabla I)$$

El problema estará resuelto si logramos que el coeficiente de conducción g valga uno dentro de las mencionadas regiones y cero en los bordes.

Para cumplir este objetivo necesitamos un detector de bordes; una elección razonable para este detector de bordes es: $\|\nabla I\|$, cuyo valor tiende a infinito al acercarnos a un borde perfecto. De acuerdo a esto la ecuación sugerida toma la forma:

$$I_t = \nabla \cdot (g(\|\nabla I\|) \nabla I) \quad (1)$$

La función g debe elegirse de modo que valga cero donde el gradiente es grande y difunda completamente cuando el gradiente es bajo es decir: $g(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow \infty$ y $g(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow 0$.

De hecho (1) es la ecuación de Perona-Malik, cuyos resultados son superiores a los que se obtienen de la ecuación del calor, sin embargo, persiste un problema que es como estimar σ , valor a partir del cual se diferencia el ruido de los bordes. Para eso veremos en la sección siguiente como elegir σ .

Dos posibles elecciones para la función g son:

$$g(\|\nabla I\|) = \frac{1}{1 + \frac{\|\nabla I\|^2}{2\sigma^2}}, \quad g(\|\nabla I\|) = e^{-\frac{\|\nabla I\|^2}{2\sigma^2}}$$

2.2 Conexión con la Estadística Robusta

Al estimar momentos de una variable aleatoria a partir de algunas observaciones aparece un problema muy conocido, las observaciones "extrañas" o *outliers* como las llamaremos de aquí en más. La estadística robusta es un intento por solucionar este tipo de problemas. La idea es sencilla y consiste en ponderar los valores de las observaciones según una función que toma en cuenta su fiabilidad. Para el cálculo del valor medio, un valor muy alejado de la mayoría será multiplicado por un número pequeño disminuyendo su influencia en el valor final.

Vemos que este problema se parece a nuestra intención de detener la difusión en los bordes; nuestra "realidad estadística" son gradientes con cierto valor medio

dado por el nivel de ruido, y la presencia de un borde se puede ver entonces como un *outlier*. En lo que sigue asumiremos que nuestras imágenes serán funciones constantes a trozos a las que se les ha sumado ruido de acuerdo al modelo presentado en la Introducción. La idea va a ser estimar la imagen original por medio de técnicas de estadística robusta y a su vez mostrar como existe una estrecha relación con otros esquemas como los propuestos en la sección anterior.

Consideremos las diferencias de intensidad entre pixeles vecinos en zonas donde la imagen ideal es constante; estas diferencias diferirán poco entre ellas, y, más aún, van a estar normalmente distribuidas con media cero. Por lo tanto, el promedio entre valores adyacentes es un buen estimador para la intensidad en esas zonas. Por el contrario, en regiones donde aparecen bordes vemos que la misma idea no funciona. El problema es que en la región sobre la cuál hacemos el promedio incluye datos de dos regiones distintas. El cálculo del promedio en toda la región producirá un efecto de "difusión" en los bordes, que es precisamente lo que queremos evitar.

Reformulando nuestra situación, el problema es que las diferencias cerca de un borde están contaminadas por una importante cantidad de *outliers*. Es en este momento donde entran en juego las técnicas de la estadística robusta.

Veremos en lo siguiente dos formas de desarrollar esta idea, una basada en una formulación discreta del problema y otra basada en la análoga formulación continua.

2.2.1 Un Enfoque Discreto

La idea clásica de sustituir el valor de un pixel por el promedio de sus vecinos, es equivalente a minimizar la suma de los cuadrados de las diferencias de estos:

$$\sum_{i,j} \sum_{u,v \in \eta(i,j)} \rho(I_{ij} - I_{uv}) \text{ poniendo } \rho(x) = \frac{x^2}{2}. \text{ Esta formulación}$$

tiene los inconvenientes presentados antes, de modo que usaremos normas robustas $\rho(x, \sigma)$ (σ modula como veremos más adelante el punto a partir del cuál se consideran los outliers):

$$J = \sum_{s \in I} \sum_{p \in \eta_s} \rho(I_p - I_s, \sigma) \quad (2)$$

donde η_s es la "vecindad" sobre la cuál se considera el promedio.

Una solución a este problema es considerar una sucesión de imágenes que tome I_0 como condición inicial y converja hacia I , la imagen que minimiza (2), lo que nos conduce a:

$$I_{ij}^{n+1} = I_{ij}^n + \lambda \sum_{uv \in \eta(i,j)} \rho'(I_{uv}^n - I_{ij}^n, \sigma) \quad (3)$$

Si desarrollamos la sumatoria, a la diferencia $(I_{uv}^n - I_{ij}^n)$ la llamamos derivada direccional, y hacemos $\rho'(x) = xg(x)$ obtendremos la discretización propuesta por Perona y Malik para su ecuación de difusión anisotrópica, ver sección 4.

Este resultado permite conectar dos enfoques originalmente distintos lo que fortalece la confianza en las ecuaciones de difusión anisotrópica. La conexión proporciona un nuevo conjunto de herramientas para la elección de la función ponderadora de bordes y el parámetro σ aprovechando el estudio de las normas robustas.

Esta conexión fue demostrada entre dos esquemas numéricos discretos, una pregunta adecuada, es si esta conexión es sólo a este nivel o si puede deducirse una conexión más fuerte que vincule directamente ecuaciones en derivadas parciales y no sus discretizaciones. La respuesta a esta pregunta es afirmativa como demostramos en la siguiente sección.

2.2.2 Un Enfoque Continuo

En vez de considerar a la imagen como un conjunto de pixels, la consideraremos como una función sobre un espacio continuo. El equivalente del problema de sustituir un punto por el promedio de su entorno, es esencialmente minimizar la integral de $\|\nabla I\|^2$. La formulación robusta incluye la ponderación por la norma ρ :

$$\int_{\Omega} \rho(\|\nabla I\|, \sigma) d\Omega, \text{ con } I: \Omega (\subset \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Usando técnicas variacionales [1] reencontramos la ecuación (1) si hacemos $\rho'(x) = xg(x)$ queda:

$$I_t = \nabla \cdot \left(\rho'(\|\nabla I\|) \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|} \right) \quad (4)$$

Una virtud importante de las ecuaciones ((4), (3)) es que la imagen ideal se recupera en el estado estacionario y por tanto no es necesario detener la evolución, lo cuál elimina el problema de cuando detenerla. La realidad de este pronóstico es desafortunadamente relativa, y de hecho se obtienen mejores resultados deteniendo la ecuación; de todos modos es un inconveniente que se puede subsanar manipulando adecuadamente la función g .

2.2.3 Elección de la Norma Robusta, la función de Tukey

Comencemos eligiendo ρ como la función cuadrática poniendo: $\rho(x) = \frac{x^2}{\sigma}$

, con esta elección la ecuación de difusión queda: $\frac{\partial I}{\partial t} = \nabla \cdot \nabla I$. O sea la ecuación del calor una ecuación para nada anisotrópica. Además explica los malos resultados que se obtienen con la ecuación del calor, cuando x crece $\rho(x)$ también crece, de modo que el peso de una observación es tanto mayor cuanto peor es esta.

Para que podamos rechazar los outliers, ρ debe ser tal que exista un valor por encima del cuál la influencia de las observaciones en la estimación se vea reducida.

Las normas existentes son abundantes cada una con sus características, y por lo tanto también lo son las posibles elecciones. Nuestro trabajo se centró sobre todo en la norma robusta de Tukey [3]:

$$\rho(x, \sigma) = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{2} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - \frac{x^4}{\sigma^4} + \frac{x^6}{3\sigma^6} \right) & \text{si } |x| \leq \sigma \\ \frac{\sigma^2}{6} & \text{sinó} \end{cases}$$

que posee un conjunto de mejoras sobre las normas comentadas [3]. Si derivamos y dividimos entre x obtenemos:

$$g(x, \sigma) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x^2}{\sigma^2}\right)^2 & \text{si } |x| \leq \sigma \\ 0 & \text{sinó} \end{cases}$$

En esta expresión puede observarse la virtud fundamental de esta función, los valores que superan a σ no son tenidos en cuenta al calcular el promedio. Esta situación es muy adecuada a nuestro problema; los puntos cuya diferencia de intensidad es menor que σ pertenecen a la misma zona, su diferencia se debe al ruido, y sus valores son promediados; los puntos cuya diferencia es mayor que σ pertenecen a distintas zonas y el valor de uno no es tenido en cuenta en el promedio del otro. Otras posibles normas son mencionadas en [2].

Para decidir el valor de σ (recordar que se asumió imagen constante a trozos) disponemos de estimaciones robustas para el valor a partir del cual comienzan a rechazarse las observaciones σ (íntimamente relacionado con la potencia del ruido, ver [3]):

$$\sigma_e = 1.4826 \text{ mad}(\|\nabla I\|) = 1.4826 \text{ median}(\|\|\nabla I\| - \text{median}(\|\nabla I\|)\|)$$

σ_e corresponde al máximo de ρ . Nuestro interés no es σ_e sino σ pero podemos obtenerla de la relación $\sigma_e = \sigma/\sqrt{5}$ que puede deducirse operando algebraicamente, sobre la definición de la función de Tukey.

El valor de σ es global, o sea, es único para la imagen y depende de toda ella.

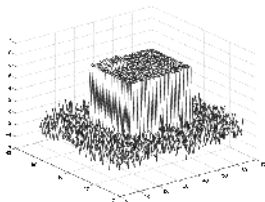
Esto es un problema cuando queremos respetar detalles "finos" en una imagen dónde aparecen elementos más gruesos que de alguna forma dominan la estadística de la misma.

3. ESTIMACIONES LOCALES DE PARÁMETROS DE FUNCIONES DE PARADA

Las funciones ponderadoras de bordes dependen del parámetro σ , que a su vez depende del nivel de ruido presente en la imagen. Cuando este nivel no es uniforme, es mejor idea estimar σ localmente sobre la imagen: sobre cada punto (i,j) definirse un entorno y estimar σ dentro de él análogamente al caso global. Así se levanta la hipótesis relativa a la uniformidad del nivel de ruido sobre la imagen. Por otro lado cuando este nivel si es uniforme, el hacer estas estimaciones locales evita que detalles sutiles sobre la imagen sean eliminados cuando globalmente pesan menos que detalles debidos a gradientes más grandes.

Con el propósito de afinar la detección de bordes estudiamos esta estimación local de σ . A tales efectos este parámetro σ fué reemplazado por una matriz $((\sigma_{ij}^r))$ dónde cada elemento se estima de igual manera que antes pero usando un entorno sobre la imagen cuyas dimensiones dependen de r .

Nuestras implementaciones construyen una matriz $((\sigma_{ij}^r))$ calculando los valores localmente, en una vecindad cuadrada centrada en el punto y con $(2r+1)^2$ puntos, en un caso, esta matriz coincide con $((\sigma_{ij}^r))$ y en otro sus elementos se



eligen como el mínimo entre el valor local y el valor global. Los resultados obtenidos con estos algoritmos son bastante buenos como puede observarse en las figuras 2 y 3.

Figura 1: Imagen en la cual hay diferentes niveles de ruido

Debemos observar que la elección de r es crítica, una elección inconveniente puede resultar en empeorar el esquema en comparación con la utilización de una σ

estimada globalmente. La inclusión de puntos más allá del límite de un objeto hacia uno de sus lados puede involucrar la consideración de gradientes demasiado altos, si así fuera, y si hacia otro lado del objeto los gradientes fueran menores, entonces se estaría difundiendo en forma inapropiada los bordes suaves del objeto.

Nos aventuramos a afirmar que, dependiendo de la imagen, la elección de r no será, en general, única para todos los puntos sino que parece más conveniente utilizar una matriz (r_{ij}) . Esto no resuelve el problema ya que aún restaría contestar la interrogante de como elegir r_{ij} ; desafortunadamente, la respuesta tiene mucho que ver con un posible propósito final del problema: la segmentación. La aplicación de algoritmos de difusión a una imagen se lleva a cabo con el fin de eliminar ruido, como paso previo a su segmentación; pero es precisamente la identificación de los bordes que nos proporciona la segmentación lo que nos permitiría conocer r_{ij} .

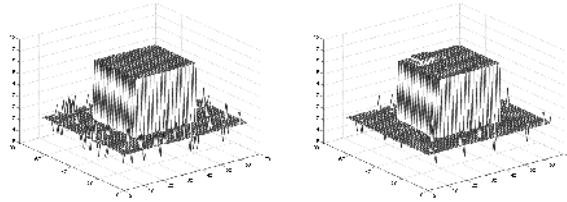


Figura 2: Izquierda : Resultado de evolucionar la imagen con la ecuación de difusión anisotrópica, con una estimación global de σ . Derecha: Resultado de utilizar σ local. Se puede ver como la estimación local preserva los detalles y elimina más ruido.

Una buena estimación sería elegir como r_{ij} la mínima distancia desde (i,j) al borde más próximo. Quizás sea útil en algunos casos utilizar una aproximación de r_{ij} por medio de una segmentación en la imagen ruidosa para las primeras iteraciones, luego recalcular esa matriz haciendo una nueva segmentación, y sucesivamente. La explotación de esta idea queda pendiente para el futuro.

Para formalizar estas ideas se puede formular un problema variacional (continuo) como en la sección 2.2.2 pero ahora con $\sigma(i,j)$ y ρ dependiente de dos variables $(u$ y $v)$, cuya minimización conduce a:

$$I_t = \nabla \cdot (\rho_u(\|\nabla I\|, \sigma(x, y)) \frac{\nabla I}{\|\nabla I\|})$$

Ahora la presencia de un borde sobre una imagen se decide localmente dependiendo del valor de σ en ese punto.

Resultados de la aplicación de este algoritmo se ven en la figuras 2 y 3.

Comentamos que en general el proceso dió resultados satisfactorios siempre que se eligiera r de forma conveniente.

4. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

En [2] se sugiere la siguiente discretización para la ecuación de difusión anisotrópica:

$$I_{ij}^{n+1} = I_{ij}^n + \lambda (c_N D_N I + c_S D_S I + c_E D_E I + c_O D_O I)_{ij}^n$$

donde D_N , D_S , D_E , y D_O son los operadores de derivadas direccionales, que calculamos como: $D_N I_{ij} = I_{i-1,j} - I_{i,j}$, $D_S I_{ij} = I_{i+1,j} - I_{i,j}$, $D_E I_{ij} = I_{i,j+1} - I_{i,j}$, $D_O I_{ij} = I_{i,j-1} - I_{i,j}$ y los coeficientes c_N , c_S , c_E , y c_O son los valores de la función g evaluados

en la correspondiente derivada direccional: $c_{Nij} = g(D_N I_{ij}^n)$, $c_{Sij} = g(D_S I_{ij}^n)$, $c_{Eij} = g(D_E I_{ij}^n)$, $c_{Oij} = g(D_O I_{ij}^n)$.

Estos coeficientes pueden interpretarse como coeficientes de conducción de la ecuación del calor. Para que esta ecuación sea estable se debe elegir λ entre 0 y 1/4 como se deduce de aplicar el criterio de Von Neumann [5].

Para el caso de la utilización de la estimación local de σ los coeficientes de conducción tiene la misma expresión aunque su dependencia en σ se traduce en otra dependencia espacial. Si bien el esquema numérico propuesto puede no ser del todo preciso y existen algunos de mayor precisión, este resultó eficiente para realizar diferentes simulaciones.

5. CONCLUSIONES.

Se revisaron los fundamentos de la Difusión Anisotrópica inicialmente con un enfoque físico a través de la ecuación del calor. Luego usando la estadística robusta se puso el problema en un marco de minimización de funcionales. Presentamos ejemplos en los cuales se ve la mejor performance de la difusión anisotrópica frente a la isotrópica. Por otra parte se presentaron extensiones de estas ideas que tienen en cuenta información local de la imagen y del ruido que la contamina. Vimos como en este caso también se puede formular el problema variacionalmente lo cual unifica todos los enfoques vistos. Los resultados que se obtienen con la difusión local son superiores a los obtenidos con la difusión global de acuerdo a las diferentes simulaciones realizadas.

6. REFERENCIAS

[1] J. David Logan, *Applied Mathematics : A Contemporary Approach*, Jhon Wiley & Sons 1987.

[2] P. Perona, J. Malik, *Scale-Space and Edge Detection Using Anisotropic Diffusion*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence vol. 12 no. 7 July 1990.

[3] M. Black, G. Sapiro, D. Marimont, D. Heeger, *Robust Anisotropic Diffusion* IEEE Transactions on Image Processing, Vol 7, No 3, March 1998.



Figura 3 : Izquierda Arriba : Imagen original. Derecha Arriba : Evolución según ecuación del calor. Izquierda Abajo : Evolución con σ local. Derecha Abajo : Evolución con σ global (en todos los casos 50 iteraciones) Con detenimiento se puede observar como algunos detalles de la imagen se preservan.

[4] Y. G. Leclerc. *Constructing simple stable descriptions for image partitioning*.

International Journal of Computer Vision, 3(1):73-102, 1989.

[5] W. Niessen, I.B. M. ter Haar Romeny y M. A. Viergever. *Numerical Analysis of Geometry-Driven Diffusion Equations*, Geometry Driven Diffusion in Computer Vision, Kluwer, 1994.