



Modelo de transformación de alturas en el departamento de Maldonado

PROYECTO DE GRADO
Instituto de Agrimensura - Facultad de Ingeniería
UDELAR

Autores:
Juan Ignacio Bonilla - Juan Pablo Formoso - Gonzalo Perdomo

Tutor:
Prof. Ing. Agrim. Jorge Faure Valbi

Montevideo, Uruguay
Marzo de 2019

A los que recorrieron este camino con Nosotros

y a los que lo recorrerán...

Página de Aprobación

FACULTAD DE INGENIERÍA

El tribunal docente integrado por los abajo firmantes aprueba el Proyecto de Grado:

Título

.....

Autores

.....

Tutor

.....

Carrera

.....

Puntaje

.....

Tribunal

Profesor(Nombre y firma)

Profesor(Nombre y firma)

Profesor(Nombre y firma)

Fecha:



Página de Aprobación	1
Resumen	5
Agradecimientos	6
1- Introducción	7
2- Objetivos	8
3- Fundamento teórico	8
3.1- Superficie de Referencia en Geodesia	8
3.1.1- Sistemas de alturas	10
3.1.2- Altura ortométrica (H)	10
3.1.3- Altura Elipsoidal (h)	10
3.2- Modelos Geopotenciales	11
3.2.1- Modelo EGM-2008	11
3.3- Marcos y Sistemas de Referencia	12
3.3.1- SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas)	12
3.3.2- Sistema de Referencia SIRGAS-ROU98	12
3.3.3- Marco de Referencia Geodésico REGNA-ROU	13
3.3.4- Red Altimétrica del Uruguay	14
3.4- Nivelación Geométrica Compuesta	15
3.5- Posicionamiento Satelital	17
3.5.1- GPS	17
3.5.2- GLONASS	17
3.5.3- GALILEO	18
3.5.4- Principio del Posicionamiento Satelitario	18
3.5.4.1- Posicionamiento Puntual o Absoluto	19
3.5.4.2- Método Diferencial	20
3.5.4.2.1- Post Proceso	20
3.5.4.2.2- Tiempo Real	21
3.5.4.2.3- Radio-RTK	21
3.5.4.2.4- NTRIP-RTK	21
3.6- Número Geopotencial	21
4- Metodología	25
4.1- Zona de estudio	25
4.1.1- Estudio previo	26
4.1.2- Análisis de la Ondulación Geoidal del EGM08	28
4.2- Nivelación geométrica	30
4.2.1- Etapa previa	30
4.2.2- Estimación de error en nivelación compuesta	32
4.2.3- Etapa de campo	34

4.3- Relevamiento GNSS	40
4.3.1- Etapa previa	40
4.3.2- Base UYMA	41
4.3.3- Base San Carlos	42
4.3.4- Ajuste UYMA-SC	42
4.3.5- Método diferencial	43
4.4- Modelo de Transformación de Alturas	46
4.5- Validación de los modelos paramétricos	53
4.5.1- Enfoque empírico clásico	53
4.5.2- Validación Cruzada	54
5- Resultados	54
5.1- Modelo Global	54
5.1.1- Validación de Modelo	59
5.1.1.1- Evaluación Interna	59
5.1.1.2- Evaluación externa	59
5.2- Modelos zonales	61
5.2.1- Modelo Norte	63
5.2.1.1- Validación de Modelo Norte	65
5.2.2- Modelo Sur	69
5.2.2.1- Validación de Modelo Sur	71
6- Estudios	74
6.1- Desnivel relativo con GNSS	74
6.2- Gravedad	77
7- Conclusiones	80
8- Bibliografía	81
9- Anexos	83

Resumen

Dada la creciente utilización de la tecnología GNSS hace imperativo indagar en todas sus posibles aplicaciones. En la obtención de alturas ortométricas, hasta el día de hoy, esta tecnología no ha podido superar las precisiones obtenidas mediante nivelación geométrica.

Una forma de mejorar las precisiones en esta materia es mediante los modelos geoidales y sus posibles refinamientos. Para nuestro trabajo elegimos generar un modelo de transformación de alturas en el departamento de Maldonado.

Para esto se requirió una distribución homogénea de puntos con “doble dato”, o sea puntos que tengan **cota oficial** y **cota ortométrica** dada mediante la utilización del modelo geoidal EGM08 obtenida mediante posicionamiento GNSS.

Procesados los datos se confeccionaron distintos modelos obteniendo distintos resultados. Se comprobó que los modelos generados por nosotros mejoraran la determinación absoluta de cotas oficiales. Sin embargo, para las diferencias relativas de alturas ortométricas no se logró resultados significativos.

Durante todo el proceso se aplicaron conocimientos adquiridos durante toda la carrera y se perfeccionó la parte práctica de los mismos.

Agradecimientos

Queremos agradecer a nuestras familias por habernos forjado como personas, por motivarnos a estudiar y apoyarnos durante el proceso. Este logro es de ustedes también.

A los docentes del Instituto de Agrimensura por las herramientas y los consejos brindados, y por enseñarnos a querer esta profesión.

Un agradecimiento especial al Sr. Director del Servicio Geográfico Militar Cnel. Norbertino Suárez y al Mayor José Pampillón por facilitarnos los datos altimétricos y gravimétricos en la zona de estudio.

Finalmente, al Ing. Agrim. Jorge Faure por ser un gran tutor y una gran persona. Dedicado, responsable y siempre dispuesto. Sabemos que la amistad generada perdurará más allá de este proyecto.

1- Introducción

El presente informe se confecciona a los efectos de ser presentado como Proyecto final de la carrera de Ingeniero Agrimensor de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, plan de estudios 1997, el cual especifica que *“El objetivo del proyecto de grado es, que el estudiante, mediante la realización de un trabajo específico referido a alguna de las áreas de la Agrimensura, efectúe una labor de síntesis e integración de conocimientos, la cual consista en una aplicación no rutinaria de los mismos”*.

El proyecto tiene como objetivo principal la creación de un modelo de transformación de alturas (en adelante MTA) en una determinada zona del departamento de Maldonado con el fin de poder obtener alturas referidas al cero oficial a partir de alturas elipsoidales.

La causa principal de la elección del tema fue el continuo avance de las tecnologías GNSS. Si bien ésta no es de uso habitual para la obtención de alturas ortométricas, lograr que ésta sea útil para ello, con buenas precisiones sería de suma importancia ya que la forma tradicional de nivelar (Nivelación Geométrica) insume mucho tiempo y se hace muy costosa. En grandes áreas la utilización de estas tecnologías sería la más adecuada.

Se comenzó con la recabación de información de interés y coordinación de tareas, en el mes de Agosto del año 2018.

2- Objetivos

El objetivo principal de dicho estudio es la creación de un Modelo de Transformación de Alturas que nos permita obtener alturas (o cotas) referidas al datum oficial a partir de observaciones GNSS.

3- Fundamento teórico

3.1- Superficie de Referencia en Geodesia

La Geodesia es la ciencia que tiene como fin principal la determinación de la figura de la tierra, el posicionamiento de puntos sobre la superficie física terrestre y el estudio del campo de la gravedad externo del planeta. (Benavidez, 2004)

Las superficies de referencia cumplen un rol fundamental en Geodesia, ya que resultan imprescindibles a la hora de compatibilizar las medidas realizadas, con los modelos matemáticos adoptados.

La superficie equipotencial utilizada como superficie de referencia en Geodesia es el geoide. *Es la superficie matemática de la tierra, se define como una superficie equipotencial de la gravedad para un valor especial de constante W_0 .* (Benavidez, 2004)

El mismo se puede definir como la superficie equipotencial que se corresponde con el nivel medio de los mares en reposo y prolongados debajo de los continentes. La desigualdad de la distribución de masas continentales, así como la densidad variable de los materiales que componen la Tierra, hacen que el geoide sea una superficie irregular, presentando protuberancias y depresiones.

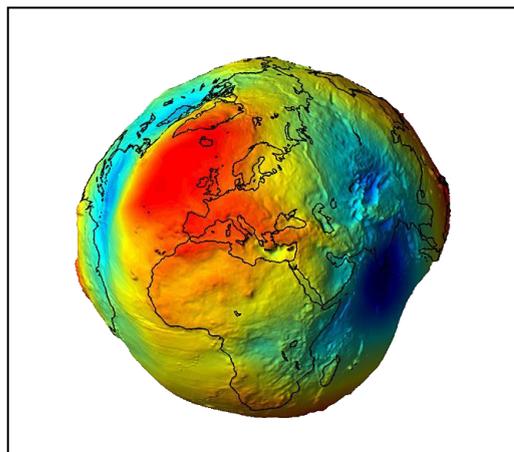


Imagen 1 - Representación del geoide

La superficie matemática que mejor se aproxima a la forma del geoide, es el "Elipsoide de Revolución", una elipse a la que se lo hace girar sobre su eje menor y constituir un cuerpo con superficie. De esa manera, sobre la superficie del elipsoide, se pueden efectuar cálculos angulares de posicionamiento y los cálculos de distancias. La fórmula general que representa el elipsoide de revolución geocéntrico es:

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

donde a y b, son los semiejes mayor y menor respectivamente, de la elipse generatriz.

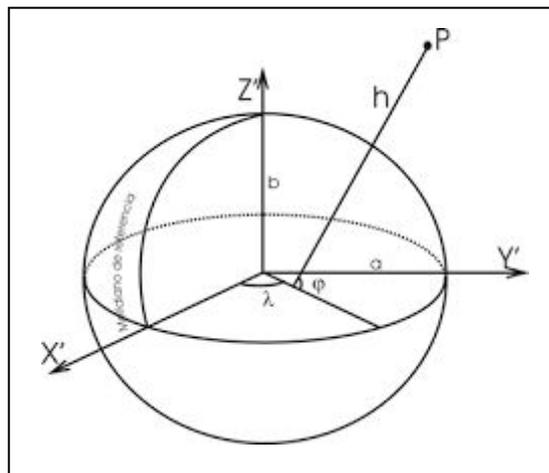


Imagen 2 - Elipse generatriz

Semieje mayor (a): Longitud del semieje correspondiente al Ecuador, desde el centro de masas de la Tierra hasta la superficie terrestre.

Semieje menor (b): Longitud del semieje desde el centro de masas de la Tierra hasta uno de los polos. Alrededor de este eje se realiza la rotación de la elipse base.

3.1.1- Sistemas de alturas

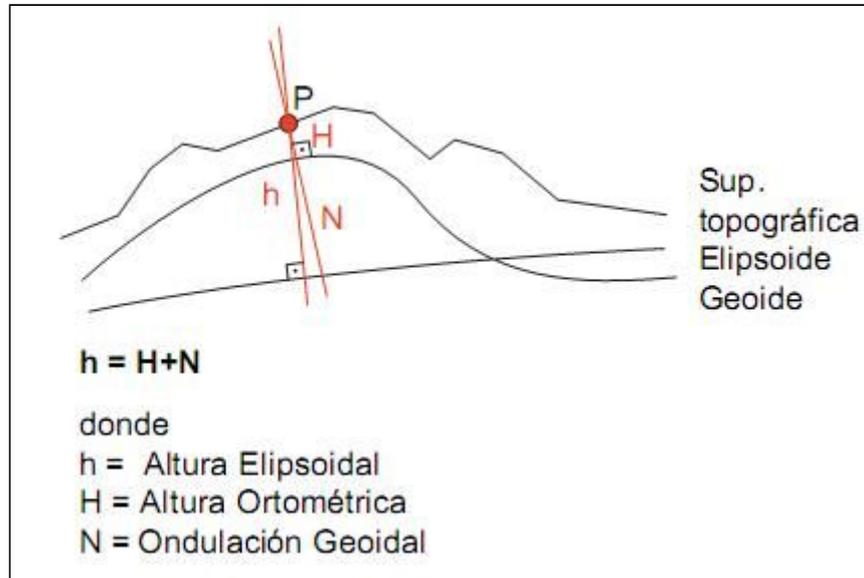


Imagen 3 - Esquema de alturas

3.1.2- Altura ortométrica (H)

A la cota referida al Geoide se le denomina altura ortométrica (H), es por lo tanto, la distancia medida sobre la vertical entre la superficie física de la Tierra y el Geoide. La línea de plomada no es una línea recta, ya que tiene una leve curvatura y giro, debido a que la dirección de la gravedad varía dependiendo de las características de densidad local.

Para evaluar la altura ortométrica con exactitud es necesario conocer el valor medio de la gravedad a lo largo de la línea de plomada, debido a que esto no es posible, el valor medio de la gravedad tiene que ser estimado de la gravedad observada en la superficie de la Tierra aceptándose alguna hipótesis sobre la distribución topográfica de la masa y densidad.

3.1.3- Altura Elipsoidal (h)

La altura elipsoidal es la distancia medida a lo largo de la normal al elipsoide entre la superficie topográfica y el elipsoide. Esta altura es de tipo matemático, pues no responde a ningún principio físico. La altura es positiva por encima del elipsoide y negativa por debajo de él.

La distancia medida sobre la normal elipsoidal que separa a la superficie elipsoidal de la superficie geoidal se le llama Ondulación Geoidal

(N). El ángulo llamado desviación relativa de la vertical está determinado por la no coincidencia entre la normal al elipsoide y la vertical del del lugar.

3.2- Modelos Geopotenciales

Los modelos geopotenciales permiten calcular los valores de la altura geoidal N que vinculan la altura elipsoidal h con la ortométrica H , y tiene asociado un conjunto de constantes: de atracción gravimétrica terrestre (GM), semieje mayor y aplastamiento del elipsoide terrestre, velocidad de rotación de la tierra y los coeficientes del desarrollo armónico. Este cálculo se realiza con un programa general que lee los coeficientes y calcula los valores relacionados con el potencial, entre ellos N . Este último valor representa la separación entre el elipsoide y el geoide.

Para el desarrollo de un modelo geopotencial de alto grado se utilizan tres tipos de información:

- Obtenida a partir del estudio de las perturbaciones de órbitas satelitales.
- Gravimétrica terrestre y aérea.
- Altimetrías de satelites sobre oceanos.

Combinando estos tres tipos de soluciones se obtiene una mejor solución que utilizando una sola de ellas. Esta solución depende del tratamiento de las altimetrías de los satélites, la disponibilidad de datos en tierra firme y la resolución de buenas computadoras.

3.2.1- Modelo EGM-2008

El modelo gravitacional EGM2008 ha sido publicado por la Agencia Nacional de Inteligencia Geoespacial (NGA). Los cálculos del geoide local se han basado tradicionalmente en la filosofía de Helmert de condensación: la topografía se condensa en una capa delgada sobre el geoide. Numéricamente, esto se hace mediante la sustitución de la anomalía de la gravedad por la anomalía de Faye.

Este modelo ofrece una resolución y precisión sin precedentes, exponiendo hasta el más mínimo error de incompatibilidad. El logro de mejores resultados en los cálculos, utilizando el geoide EGM08, dependerá de la forma en que las reducciones topográficas y de gravedad se lleven a cabo.

3.3- Marcos y Sistemas de Referencia

El Sistema de Referencia es la definición de modelos, parámetros, constantes, etc. que sirven como base para la descripción de los elementos a representar. El Marco de Referencia es la materialización de un Sistema de Referencia por un juego de entidades físicas y matemáticas.

3.3.1- SIRGAS (Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas)

Su definición es idéntica a la del Sistema Internacional de Referencia Terrestre (ITRS: International Terrestrial Reference System) y su realización es una densificación regional del Marco Internacional de Referencia Terrestre (ITRF: International Terrestrial Reference Frame) en América Latina. Además del sistema de referencia geométrico, SIRGAS se ocupa de la definición y realización de un sistema vertical de referencia basado en alturas elipsoidales como componente geométrica y en números geopotenciales (referidos a un valor W_0 global convencional) como componente física.

El Sistema de Referencia SIRGAS tiene su origen en el centro de masa de la Tierra y utiliza el elipsoide GRS80 para la determinación de las coordenadas geográficas.

Las coordenadas SIRGAS están asociadas a una época específica de referencia y su variación con el tiempo es tomada en cuenta ya sea por las velocidades individuales de las estaciones SIRGAS o mediante un modelo continuo de velocidades que cubre todo el continente.

3.3.2- Sistema de Referencia SIRGAS-ROU98

El Sistema de Referencia SIRGAS-ROU98 se definió en base a SIRGAS, época 1995.4 (SIRGAS95) que consistía en 58 estaciones distribuidas en América del Sur. A partir de este se obtuvieron resultados de ajuste y compensación de la Red Geodésica Nacional, así como los de transformación del Sistema de Referencia Local ROU-USAMS, estos fueron calculados y presentados en 1998, de ahí su denominación.

3.3.3- Marco de Referencia Geodésico REGNA-ROU

La Red Geodésica Nacional Activa (REGNA-ROU) constituyen la materialización del Sistema de Referencia Geocéntrico SIRGAS-ROU98. En la actualidad, en la concepción de la Geodesia Espacial o Geodesia Satelital, estas infraestructuras están siendo sustituidas por Estaciones de Referencia de Observación Continua, instrumentos que utilizan los Sistemas de Posicionamiento Global, para la observación permanente de la posición. En este caso, además de las coordenadas geodésicas geocéntricas (centro de masas de la Tierra), se le suma lo que ha dado en llamarse una “cuarta coordenada”: el tiempo (t), mediante la cual se pueden observar los desplazamientos de la posición de los puntos de control. En Uruguay las coordenadas del marco de referencia están dadas en una determinada época, o sea que éstas no varían con el tiempo. La época utilizada fue 1995.4.

Al día de hoy la red está constituida por 27 estaciones de observación, 26 distribuidas sobre el territorio nacional y una en la antártida. Para nuestro trabajo la estación utilizada fue UYMA, la cual está ubicada en el departamento de Maldonado sobre la Laguna del Sauce, sus coordenadas son latitud $34^{\circ}51'46''$,8071S y longitud $55^{\circ}05'09''$,6797W.



Imagen 4 - Ubicación de las estaciones de referencia

3.3.4- Red Altimétrica del Uruguay

La Red Fundamental del País de nivelación de alta precisión está medida y compensada en su totalidad, ejecutada en 8 polígonos con un desarrollo de 3883 km. Esta Red se ha densificado con líneas de 2do. Y 3er. orden de precisión. Se ha aplicado la corrección por gravedad a la totalidad de las líneas niveladas. El origen o Datum Vertical lo constituye el Nivel Medio de las Aguas del Puerto de Montevideo, el cual se fijó por Decreto del 20 de Mayo de 1949: “Art. 1º. El plano horizontal que pasa a 23,88 metros por debajo del marcador colocado en el año 1889, en el interior del edificio del Cabildo (ángulo S.E. del vestíbulo) queda fijado provisoriamente como plano único de referencia para los ceros de las escalas hidrométricas instaladas en el país y las que en adelante se instalen en zonas fluviales y lacustres. Art. 2º. Mientras el país no cuente con observaciones suficientes, que le permitan determinar el nivel medio del mar, fijase provisoriamente el nivel medio de las aguas del Puerto de Montevideo, como base única para los acotamientos de los relieves del territorio nacional. Este plano pasa 22,97 metros por debajo del marcador descrito en el art.1º y a 0,91 metros sobre el plano horizontal de referencia indicado en el mismo artículo. Art. 3º. El nivel medio fijado por el artículo 2º deberá sustituir al que fue establecido por Decreto de 16 de Junio de 1887, debiendo en consecuencia ajustarse al nuevo plano de referencia, el acotamiento dispuesto por el artículo 11 del Decreto reglamentario de la Ley General de Ferrocarriles”.

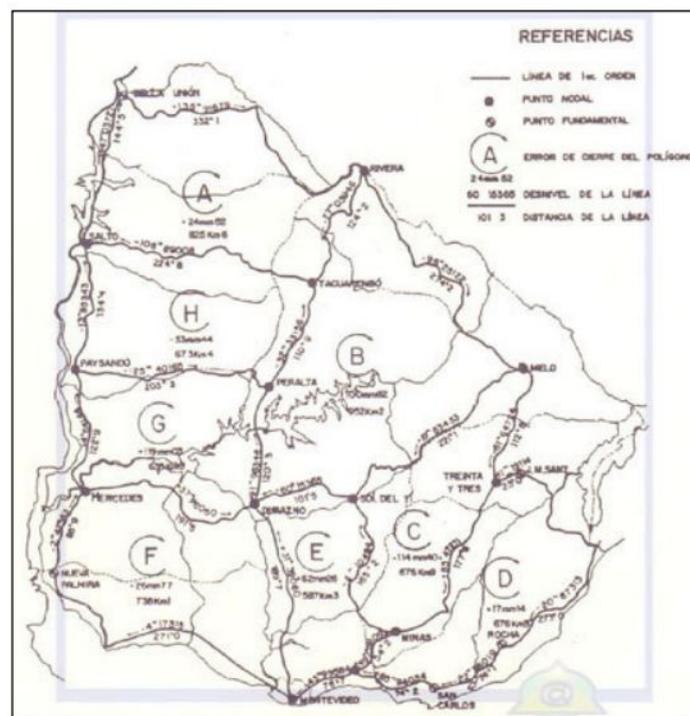


Imagen 5 - Red altimétrica Nacional

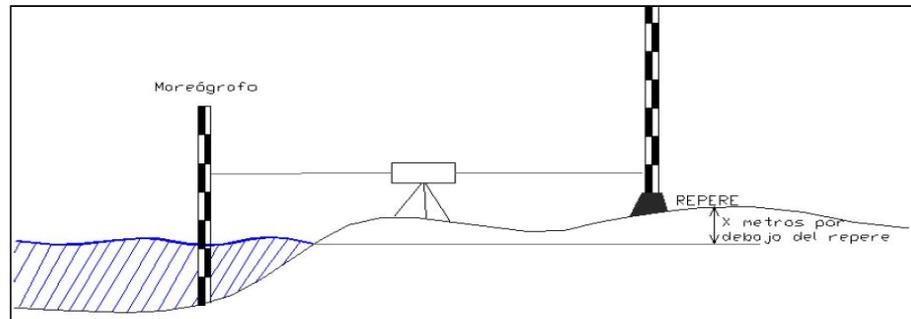


Imagen 6 - Representación del cero Oficial

3.4- Nivelación Geométrica Compuesta

Se entiende por nivelación geométrica al procedimiento que determina la diferencia de altura entre dos o más puntos mediante visuales horizontales a reglas (miras) verticales colocadas sobre dichos puntos.

La nivelación geométrica compuesta se utiliza cuando la distancia entre los puntos cuyo desnivel se quiere hallar excede la máxima permitida entre las miras, o bien su diferencia de nivel es mayor a la que puede salvarse con una sola puesta de estación. Es necesario recurrir a éste método de nivelación, tomando una serie de puntos intermedios llamados puntos de cambio.

Además se utilizó el método de ida y vuelta simultánea, lo que significa que por cada tramo de nivelación se harán dos nivelaciones.

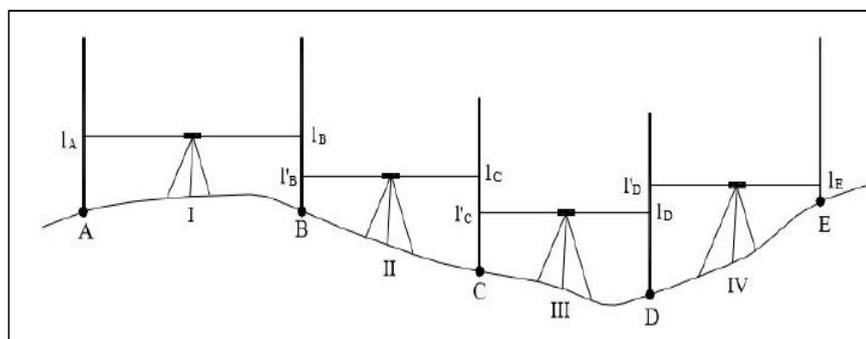


Imagen 7 - Nivelación geométrica compuesta

Sean A y E los puntos del terreno cuyo desnivel se quiere hallar, siendo imposible realizarlo desde una sola puesta de estación del instrumento. Para ello se hace necesario entonces efectuar una serie de

estaciones en puntos intermedios (I, II, III y IV), hallando luego los desniveles parciales en cada una de ellos. En efecto, con el instrumento estacionado en I se hace la lectura l_A en la mira colocada sobre A y luego la lectura l_B en la mira situada en B. Se levanta el instrumento y se traslada a II, haciendo a continuación una nueva lectura l'_B sobre la mira que permanece colocada en B, se gira el instrumento y se lee ahora l_C . Se traslada el instrumento a III y se repite la operación hasta llegar al punto final E. Los puntos B, C y D son los denominados puntos de cambio. El desnivel entre A y E será la suma de los desniveles parciales de cada tramo:

$$\begin{aligned}\Delta H_{AB} &= l_A - l_B \\ \Delta H_{BC} &= l'_B - l_C \\ \Delta H_{CD} &= l'_C - l_D \\ \Delta H_{DE} &= l'_D - l_E \\ \hline \Sigma \Delta H &= [(l_A - l_B) + (l'_B - l_C) + (l'_C - l_D) + (l'_D - l_E)]\end{aligned}$$

Si tenemos en cuenta el sentido de avance en el recorrido vemos que las lecturas l_A , l'_B , l'_C y l'_D son las que quedan a la espalda (o atrás) del instrumento, por lo que se las denomina precisamente lecturas atrás. Análogamente, l_B , l_C , l_D y l_E son las lecturas hacia el frente o delante, llamándoles, lecturas adelante.

Por lo que:

$$\Delta H_{AE} = \Sigma(\text{lecturas atrás}) - \Sigma(\text{lecturas adelante})$$

3.5- Posicionamiento Satelital

El sistema Global de Navegación por satélite (Global Navigation Satellite System) proporciona un posicionamiento y localización geoespacial con cobertura global. Está compuesto por los tres sistemas activos que se describen a continuación.

3.5.1- GPS

Es un sistema basado en satélites artificiales, dispuestos en una constelación de forma tal que le brinda al usuario, con los receptores adecuados, posiciones precisas y continuas en tres dimensiones a nivel global.. El sistema GPS comprende tres segmentos diferentes:

Segmento Espacial: Consiste de 27 satélites distribuidos en seis planos orbitales inclinados 55° respecto al Ecuador. Los satélites se mueven a una altura aproximada de 20600 km, completando dos revoluciones por día sidéreo.

Segmento de Control: En sus inicios estaba compuesto por una estación de control maestro en Colorado Springs (EEUU), 5 estaciones de observación y 4 antenas de tierra distribuidas en 5 puntos muy cercanos al ecuador terrestre. En la actualidad se han anexado varias estaciones de rastreo: Australia, Quito, Usno, Buenos Aires, Bahrain, Inglaterra. El segmento de Control rastrea a los satélites GPS, actualiza su posición Orbital determinando la órbita de cada satélite, predice su trayectoria para las siguientes 24 horas, calibra y sincroniza sus relojes.

Segmento de Usuarios: comprende a cualquiera que reciba las señales GPS con un receptor, determinando su posición y/o la hora.

3.5.2- GLONASS

El sistema GLONASS (Sistema Global de Navegación por Satélite) fue desarrollado en la década de los 70 por el ministerio de defensa soviético. Las características de este son similares a las del GPS pero existen algunas diferencias. Al igual que el anterior, cuenta con un segmento de control, espacial y de usuario.

Segmento Espacial: formado por una constelación de satélites compuesta por 24 satélites en tres planos orbitales separados 120° entre sí. Cada plano contiene 8 satélites espaciados regularmente, con argumento de

latitud de 45°. Los planos están inclinados 64, 8° respecto al Ecuador. Los satélites GLONASS se encuentran a una distancia de aproximadamente 19100 Km y se sitúan en órbitas casi circulares con semieje mayor de aproximadamente 25510 Km, siendo el periodo orbital de 11 horas y 15 minutos.

Segmento de Control: está formado por un Sistema Central de Control (SCC) en la región de Moscú y una red de estaciones de seguimiento y de control emplazadas alrededor de Rusia. El Sector de Control GLONASS, al igual que el de GPS, debe seguir y vigilar el estado de sus satélites, determinar las efemérides y errores de los relojes de los satélites, es decir, la diferencia entre el tiempo GLONASS y la escala de tiempo UTC. Además, también deben actualizar los datos de navegación de los satélites.

Segmento Usuario: está comprendido tanto por los militares como los civiles.

3.5.3- GALILEO

Sistema Global de Navegación por Satélite (GNSS), desarrollado por la Unión Europea y la Agencia Espacial Europea (ESA). El principio de funcionamiento del sistema europeo será idéntico al GPS, pero será de uso civil. Estará formado por 30 satélites distribuidos en tres órbitas situadas aproximadamente a 24 mil kilómetros de altura sobre la Tierra. De ese total de satélites en órbita se encontrarán siempre operativos 27, mientras los 3 restantes se mantendrán en reserva. El sistema se pudo poner en marcha el 15 de diciembre del 2016 con alrededor de media constelación y será completado para 2020.

3.5.4- Principio del Posicionamiento Satelitario

El sistema (GNSS) es un sistema de posicionamiento basado en la medición de la distancia a un mínimo de cuatro satélites en simultáneo, que además transmiten sus posiciones estimadas. Las distancias son medidas comparando la señal recibida desde el satélite con una réplica generada por el receptor. La diferencia de fase entre la señal recibida y la generada localmente es proporcional al tiempo de propagación (distancia satélite-receptor). Como los receptores generan la señal local usando relojes de cuarzo, la diferencia de fase absorbe también sus inestabilidades. Observando un mínimo de cuatro satélites bien distribuidos en el cielo, el

receptor puede calcular cuatro incógnitas: tres para la posición del receptor y una para la corrección al reloj local.

El principio del posicionamiento satelital se basa en relacionar tres componentes:

- Una componente conocida, que es la posición del satélite (X^S, Y^S, Z^S)
- Una cantidad mensurable, que es la distancia satélite-receptor (ρ)
- Una cantidad desconocida, que es la posición del receptor (X_R, Y_R, Z_R)

$$\rho = \sqrt{(X_S - X_R)^2 + (Y_S - Y_R)^2 + (Z_S - Z_R)^2}$$

El objetivo de la medición es obtener la posición de nuestro receptor en el mismo sistema de referencia en el que se dan las coordenadas de los satélites

3.5.4.1- Posicionamiento Puntual o Absoluto

Este método consiste en determinar la posición de un punto próximo a la superficie terrestre utilizando un receptor y la medición de la pseudodistancia usando el código que contienen las ondas portadoras de la señal GPS. Para determinar la posición del receptor basta con determinar las pseudodistancias a 4 satélites en el mismo instante t de tiempo. El receptor mide la distancia satélite-receptor a partir del tiempo de propagación de la señal emitida desde el satélite. Los satélites y los receptores cuentan con relojes que controlan el tiempo de emisión y recepción de la señal respectivamente. De esta manera:

$$t_R - t^S = \Delta t \quad \Rightarrow \quad c * \Delta t = \text{distancia}$$

Donde: t_R = Instante de recepción de la señal R

t^S = Instante de emisión de la señal S

Δt = Tiempo de propagación de la señal

c = Velocidad de la luz

Debido a que los relojes de los satélites y de los receptores no están sincronizados entre ellos, ni con el tiempo patrón GPS, es que la distancia determinada satélite-receptor se denomina pseudodistancia. Los errores en los relojes de los satélites se pueden corregir a partir de los datos enviados en el mensaje para tal fin.

3.5.4.2- Método Diferencial

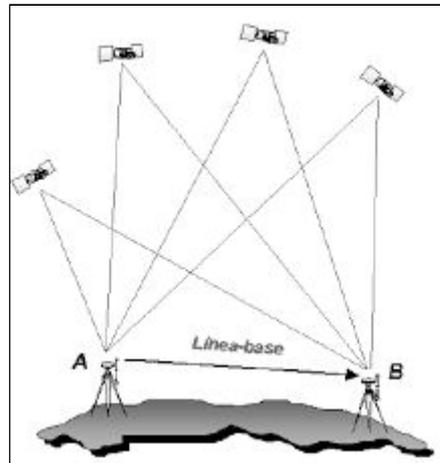


Imagen 8 - Método diferencial

Este método consiste en el procesamiento de diferencias de observaciones simultáneas, realizadas por al menos dos estaciones a los mismos satélites. Se calculan las coordenadas de puntos respecto de al menos una estación de referencia que a priori debe tener coordenadas conocidas. En este caso, la exactitud de las coordenadas calculadas estará dada por la de las coordenadas de la estación de referencia.

El método diferencial se apoya en la utilización de dos equipos GNSS simultáneamente en dos posiciones diferentes, siendo una de ellas conocida, al posicionamiento de este receptor se le llama estación de referencia y al otro móvil o rover. Con este método se consigue cifrar y cuantificar algunos errores propios del sistema GNSS que afectan al modo absoluto.

A su vez, se puede implementar de varias maneras, existen dos que son las más importantes. Una de ellas es Post Proceso y la otra es Tiempo Real.

3.5.4.2.1- Post Proceso

La obtención de coordenadas y líneas base se efectúa después de la observación, por eso es necesario guardar datos crudos (observables y mensaje de navegación) en base y móvil, y la utilización de un software específico para realizar el post proceso.

3.5.4.2.2- Tiempo Real

Las correcciones diferenciales que realiza el móvil son en tiempo real, esto permite que la obtención de coordenadas y líneas base se efectúan en el mismo momento de la observación, de forma que el tiempo de cálculo es tan reducido que se puede considerar casi instantáneo o en tiempo real.

La corrección en tiempo real puede hacerse a partir de observable de código u observable de fase, habitualmente a la corrección de código se la denomina GPS Diferencial DGPS, DGNSS y se reserva el término de corrección cinemático en tiempo real RTK a la corrección en fase. El posicionamiento en tiempo real implica que debe haber comunicación entre base y móvil. Esta comunicación puede ser a través de radio enlace (RADIO-RTK), a través de internet (NTRIP-RTK), entre otros.

3.5.4.2.3- Radio-RTK

El receptor base tiene un radio-módem el cual transmite los datos recibidos de la unidad de control. El alcance de la transmisión depende de la potencia, cuan mayor sea ésta, más alcance tiene. El receptor móvil también tiene un radio-módem que recibe los datos que transmite la base y calcula los datos por cada época que recibe.

El alcance o distancia entre base y móvil varía de 3 a 15 km dependiendo del tipo de radio y potencia de la misma.

3.5.4.2.4- NTRIP-RTK

NTRIP (Network Transport of RTCM via Internet Protocol) está diseñado para diseminar datos GNSS a través de Internet, especialmente correcciones diferenciales para posicionamiento preciso en tiempo real. La mayor parte de los receptores GNSS cuentan con software con un cliente NTRIP para usar estas correcciones diferenciales.

3.6- Número Geopotencial

En la nivelación geométrica el eje colimador del instrumento es tangente a la superficie equipotencial de la gravedad que pasa por el punto de observación. Las diferencias de nivel dn corresponden con la sección de la línea de la plomada, que coincide con el eje vertical de las miras, entre la superficie terrestre y la tangente a la equipotencial realizada por el instrumento.

Las superficies equipotenciales no son paralelas y en consecuencia, la determinación de alturas mediante la nivelación clásica se ve afectada por la gravedad.

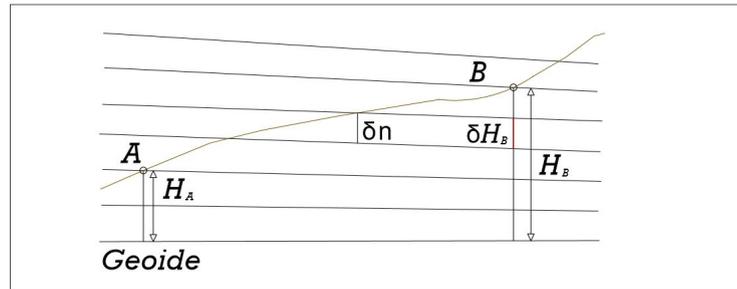


Imagen 9 - Nivelación y alturas ortométricas

Por este motivo las diferencias de nivel dependen del recorrido de la nivelación, y para que un circuito cerrado sea teóricamente cero debemos de corregir el efecto de la gravedad. Los números geopotenciales son independientes del recorrido de la nivelación.

Designamos P la intersección del geoide con la línea de la plomada que pasa por el punto A. Sea H la altura ortométrica de A y C su número geopotencial, esto es:

$$C = W - W_0$$

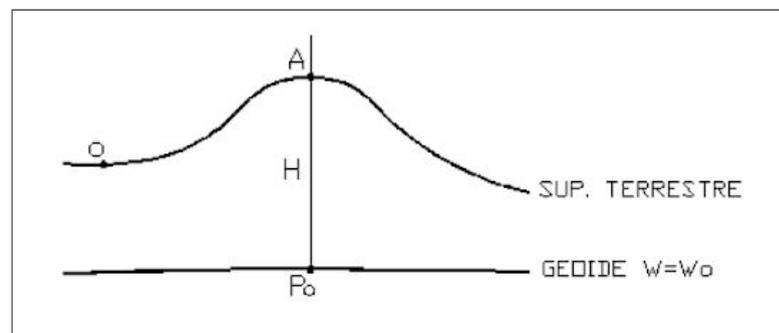


Imagen 10 - Número geopotencial (C)

Si consideramos un punto O, sobre el geoide y lo conectamos mediante una línea de nivelación geométrica con un punto A, la diferencia de potencial entre el punto A y el punto O se define como el número geopotencial (C) y está determinado por la siguiente expresión:

$$\int_0^A g dn = W_O - W_A = C$$

El número geopotencial C corresponde a la diferencia entre el potencial en el geode y el potencial en el punto A . Como diferencia de potencial, C es independiente del itinerario de nivelación particular utilizado para relacionar el punto, con el nivel del mar y es el mismo para todos los puntos de una superficie de nivel.

Puesto que C no depende del camino seguido, integrando a lo largo de la línea de la plomada:

$$C = \int_0^H g dH = H \times \frac{1}{H} \int_0^H g dH$$

De modo que:

$$C = \bar{g} \times H$$

Donde:

$$\bar{g} = \frac{1}{H} \int_0^H g dH$$

El valor medio de la gravedad es aquel a lo largo de la línea de la plomada entre el geode y la superficie terrestre. Despejando de la fórmula obtenemos:

$$H = \frac{C}{\bar{g}}$$

Para determinar la altitud ortométrica necesitamos conocer la gravedad media a lo largo de la línea de la plomada. La aproximación más simple para su cálculo es la utilización de la reducción de Prey:

$$g(z) = g_A + 0.0848 (H - z)$$

donde g_A es la gravedad media en el punto A , entonces:

$$\bar{g}_a = \frac{1}{H} \int_0^H [g + 0.0848 (H - z)] dz = g_a + \frac{1}{H} 0.0848 \left[H_z - \frac{z^2}{2} \right]_0^H = g_a + 0.00424 H$$

con g en gales y H en km.

El factor 0.0424 es válido para la *densidad normal* = 2.67 g/cm^3 . De esta forma obtenemos la denominada altitud de Helmert:

$$H = \frac{C}{g + 0.0424 \times H}$$

con g en gales, H en km y C en unidades geopotenciales (*u.g.p*).

La unidad de medida de C son las unidades geopotenciales (*g.p.u*) que son equivalente a 100 gal m .

4- Metodología

4.1- Zona de estudio

Luego de estar meses buscando una zona para implantar el proyecto, se definió hacerlo en el departamento de Maldonado. En la zona comprendida entre la ruta 9 al Norte, la laguna del sauce al Oeste, el Río de la plata y Océano Atlántico al Sur y el arroyo San carlos y Maldonado al Este. Las razones de la elección fueron:

1. Se logró reunir una buena cantidad de puntos con doble dato (cota Oficial y altura elipsoidal).
2. La mayoría del grupo vive en Maldonado lo que facilitó el trabajo de campo.
3. Es una zona donde no había trabajos de este tipo, y se espera obtener un producto que se pueda utilizar en la posterior vida laboral.

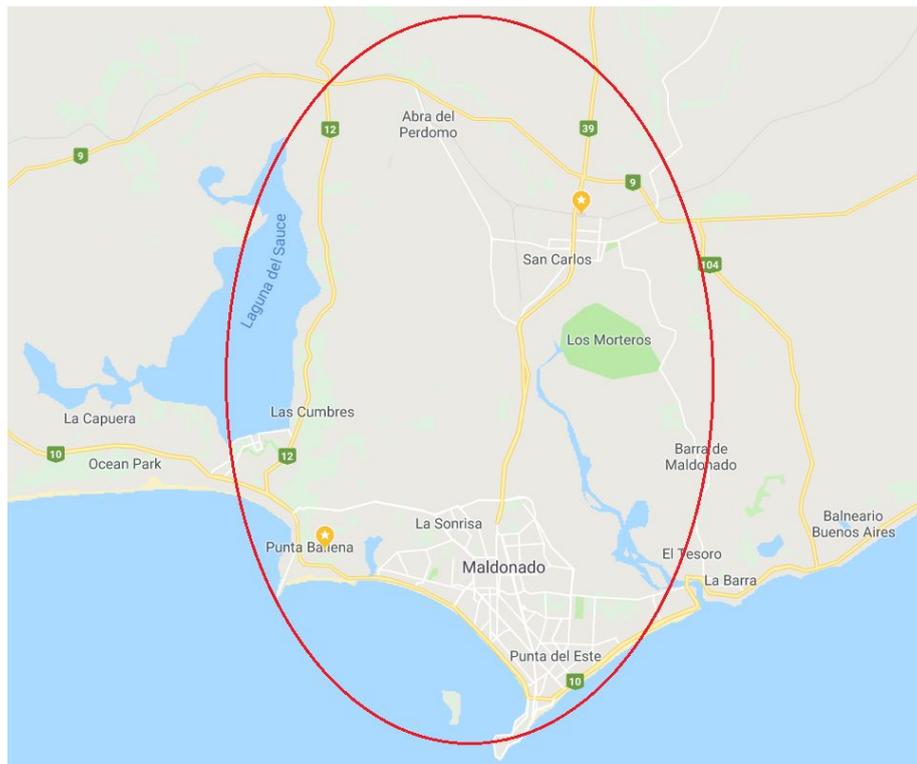


Imagen 11 - Zona de estudio

El área de trabajo son unos 250 km² aproximadamente con un relieve levemente ondulado entre la ruta 12 y la ruta 39 llamada la Sierra de la Ballena. Los bordes de la zona están próximos al nivel del mar, por el Este la

Laguna del Sauce y por el Oeste con el Arroyo San Carlos, el Arroyo Maldonado y su humedal.

La zona abarca los centros poblados de San Carlos, Maldonado, y Punta del Este que en total suman una población de 150.000 habitantes, más del 80% de la población total del departamento. Debido al atractivo turístico y al crecimiento demográfico, con el correr de los años la zona ha tenido un desarrollo urbano importante.

4.1.1- Estudio previo

Para la construcción de un **Modelo de Transformación de Alturas** es necesario tener puntos con doble dato distribuidos de forma homogénea. El doble dato significa que en un mismo punto tengamos su altura elipsoidal y su cota referida a algún sistema altimétrico, en este caso la Cota Oficial.

Obtener la altura elipsoidal no se plantea como un problema mayor ya que con un dispositivo GNSS se requieren esfuerzos y tiempo moderados. En contraposición obtener puntos con Cota Oficial requiere de nivelación compuesta de tramos largos (varias de 5 kilómetros en nuestro caso).

Por ello se solicitó al Servicio Geográfico Militar (SGM), organismo encargado de hacer y mantener la red altimétrica del Uruguay, que nos brindara la mayor cantidad de puntos de la red ubicados entre San Carlos, Maldonado y Punta del Este. El SGM nos brindó 30 Monografías de puntos de la red altimétrica. De los cuales solo dos fueron destruidos y uno no se encontró.

También fueron brindados a través del Ing. Agrim. Jorge Faure puntos materializados y utilizados por OSE en la construcción del emisario de aguas en el Jaguel. La siguiente imagen muestra el total de puntos conseguido de fuentes externas.



Imagen 12 - Puntos brindados por externos

Para homogeneizar la zona se propusieron 4 tramos de nivelación a ser efectuado por los integrantes del grupo. De un total de 17 kilómetros.

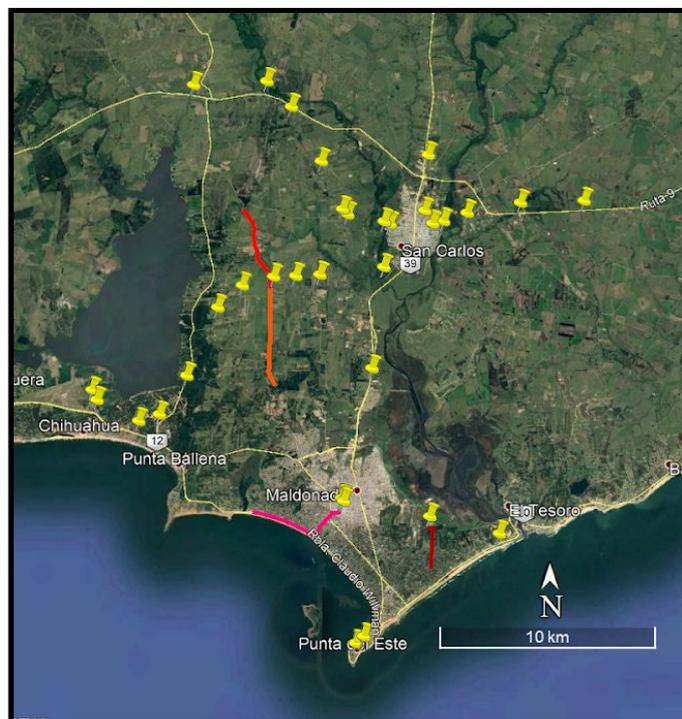


Imagen 13 - Líneas de nivelación propuestas

Dentro de los tramos se colocaron en total 12 mojones de hierro, con cota nivelada. Estos fueron agregados a los que ya teníamos. De esta forma obtuvimos una distribución más homogénea de puntos con doble dato para la confección del Modelo de Transformación de Alturas. A continuación el total de puntos, eliminando los destruidos o no encontrados.



Imagen 14 - Totalidad de puntos utilizados

4.1.2- Análisis de la Ondulación Geoidal del EGM08

Como se explicó en los fundamentos teóricos, la Ondulación Geoidal (N) es una magnitud que nos permite vincular alturas del tipo físico con alturas del tipo matemático.

Este estudio fue realizado para visualizar el comportamiento del modelo geoidal en la zona, para comprobar que no tenga discontinuidades o cambios bruscos.

Como se puede ver en la siguiente imagen, en una distancia de 23 km aproximadamente, la ondulación geoidal tiene una variación 0.7m. Si se observan las isolíneas, se puede apreciar que esta variación es casi constante con una pendiente de 0.003%.

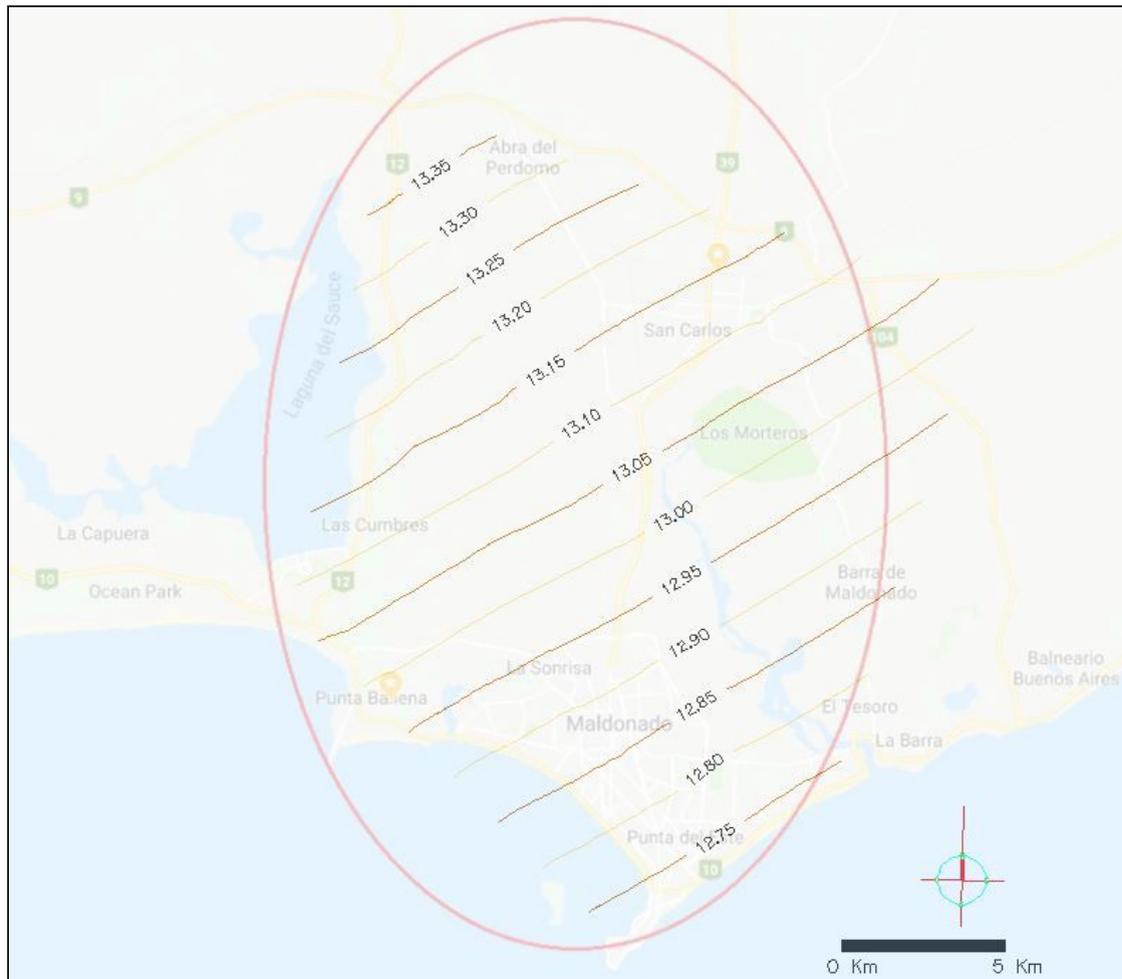


Imagen 15 - Representación de la ondulación geoidal

4.2- Nivelación geométrica



Imagen 16 - Instrumento utilizado en el trabajo de campo

4.2.1- Etapa previa

El relevamiento altimétrico de puntos de la zona de estudio se llevó a cabo una nivelación geométrica en ida y vuelta simultánea. Con circuitos abiertos y materializando puntos a lo largo del recorrido para incorporar al estudio.

Se conto con

- 1 nivel automatico LEICA NA728
- 2 miras
- 2 galapagos
- 2 niveletas
- 1 trípode de patas fijas

También se llevaba una planilla de campo para anotar las lecturas y una calculadora para ir controlando. Del pre análisis surgió que la diferencia entre las dos medidas de un mismo desnivel no puede superar los 3mm.

Esto se debe a que nuestro nivel tiene una precisión de 1mm para lecturas “a más 30 metros” como dice el manual. Las distancias entre el equaltímetro y las reglas oscilan entre 30 y 40 metros en pendientes bajas.

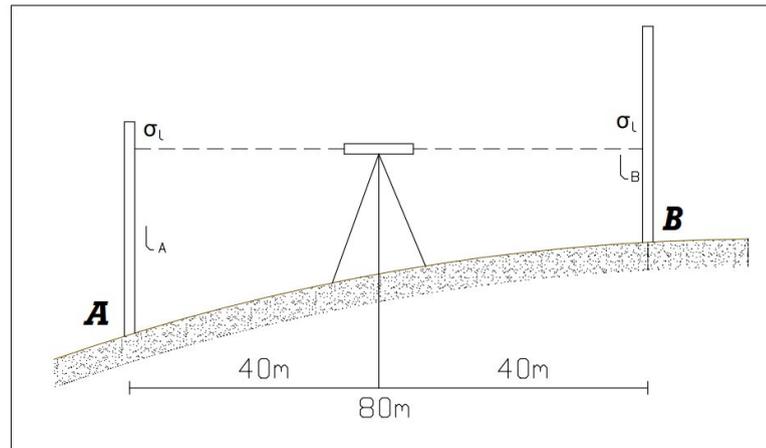


Imagen 17 - Nivelación geométrica

$$\Delta h = l_A - l_B$$

Se realizará nivelación de ida y vuelta simulada por lo cual:

$$\Delta H = \frac{(\Delta h_1 + \Delta h_2)}{2}$$

Siendo:

$$\sigma_{\Delta h_1} = \sqrt{2} \times \sigma_l = \sqrt{2}$$

$$\sigma_{\Delta h_2} = \sqrt{2} \times \sigma_l = \sqrt{2}$$

$$\sigma_{\Delta H_2} = \frac{1}{4} \sigma_{\Delta h_1}^2 + \frac{1}{4} \sigma_{\Delta h_2}^2 = 1 \text{ mm}$$

Se establece como tolerancia:

$$T = 3\sigma = 3 \text{ mm}$$

Se aceptarán aquellos desniveles donde la diferencia entre los distintos planos colimadores no supera 3mm.

4.2.2- Estimación de error en nivelación compuesta

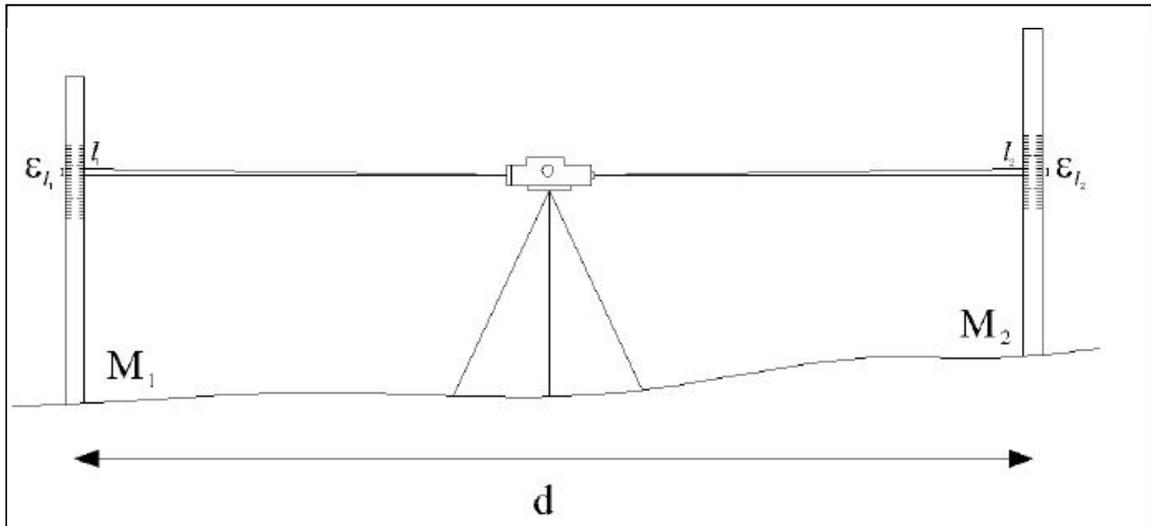


Imagen 18 - Esquema de errores en nivelación

Una **nivelación simple** está dada por la siguiente fórmula:

$$\Delta h = \text{lectura}_{\text{atrás}} - \text{lectura}_{\text{adelante}}$$

Aplicando la propagación de los errores obtenemos:

$$\sigma^2_{\Delta h} = \sigma^2_{\text{lectura}_{\text{atrás}}} + \sigma^2_{\text{lectura}_{\text{adelante}}} = 2 * \sigma^2_{\text{lectura}}$$

Como la lectura adelante y atrás fueron tomadas en igualdad de condiciones podemos suponer que tienen el mismo error

$$\sigma^2_{\Delta h} = 2 * \sigma^2_{\text{lectura}}$$

En la **nivelación doble y simultánea**, el desnivel en un tramo está definido como:

$$\Delta h_{\text{tramo}} = \frac{\Delta h_1 + \Delta h_2}{2}$$

Asumiendo que ambos desniveles fueron medidos en las mismas condiciones podemos suponer que su error es igual, quedando la siguiente manera

$$\sigma^2_{\Delta h_{tramo}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \sigma^2_{\Delta h} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 * \sigma^2_{\Delta h} = \frac{1}{2} * \sigma^2_{\Delta h}$$

Reemplazando

$$\sigma^2_{\Delta h_{tramo}} = \sigma^2_{lectura}$$

La nivelación total se compone de n cambios y n está dado por

$$n = \frac{\text{Distancia total}}{\text{tramo}}$$

Asumiendo que los tramos son uniformes, es válido suponer que el error en cada tramo será igual. La suma cuadrática de los errores de cada tramo resulta en

$$\sigma^2_{\Delta h_{total}} = n * \sigma^2_{\Delta h_{tramo}}$$

$$\sigma^2_{\Delta h_{total}} = n * \sigma^2_{lectura}$$

Como fórmula general del error esperado en función del largo de la nivelación y de cada tramo, tenemos:

$$\sigma = \sqrt{\frac{D}{t}} * \sigma_{lectura}$$

Utilizando este análisis con nuestros datos obtenemos el error esperado en el último punto de la nivelación compuesta. Se entiende que los puntos anteriores al último tendrán una desviación menor.

Errores esperados luego de nivelación compuesta				
	Tramo 1	Tramo 2	Tramo 3	Tramo 4
Distancia (km)	3.8	4.9	4.7	2.2
Desviación típica (mm)	6.9	7.8	7.7	5.2

Tabla 1 - Error esperado en nivelación

4.2.3- Etapa de campo

Nivelación: Tramo 1

Día: 03/01/2019

Distancia: 3.8 km

Tiempo: 5 hs.

Cierre: 0.3 mm por km de nivelación

Planilla de campo en anexo

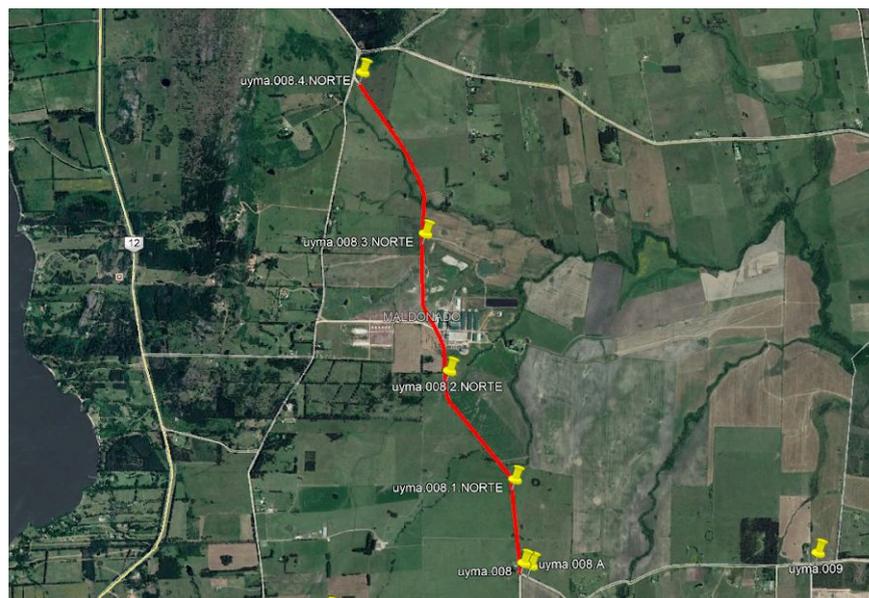


Imagen 19 - Primer tramo de nivelación



Imagen 20 - Perfil de elevación del tramo

Nivelación: Tramo 2 - Parte 1

Día: 04/01/2019

Distancia: 1.8 km

Tiempo: 3 hs 30 mins

Cierre: 0.6 mm por km de nivelación

Planilla de campo en anexo

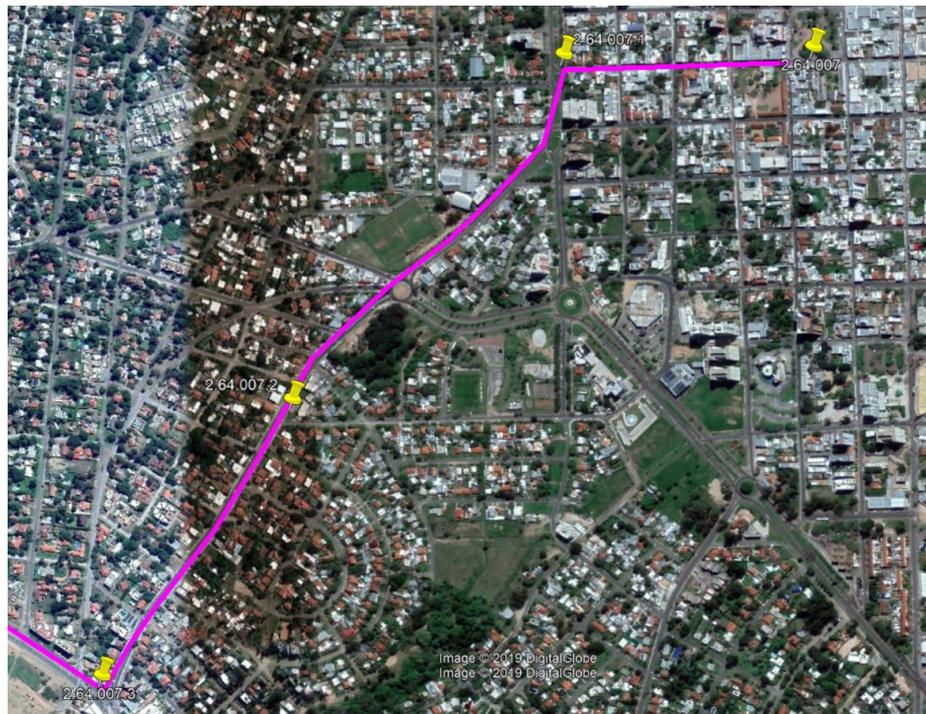


Imagen 21 - Segundo tramo de nivelación, parte 1

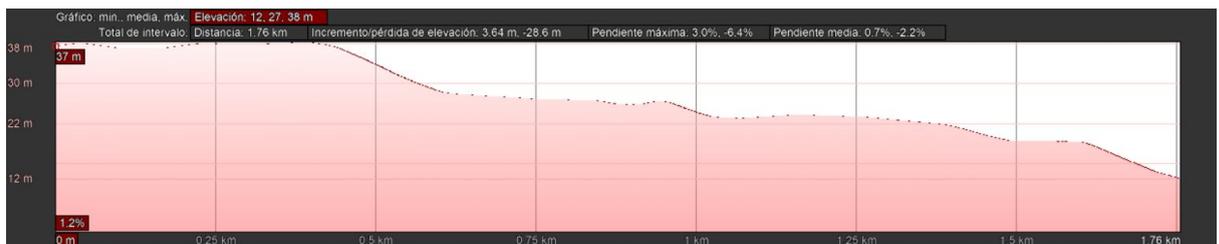


Imagen 22 - Perfil de elevación del tramo

Nivelación: Tramo 2 - Parte 2

Día: 08/01/2019

Distancia: 3.1 km

Tiempo: 2 hs 40 mins

Cierre: 0.3 mm por km de nivelación

Planilla de campo en anexo

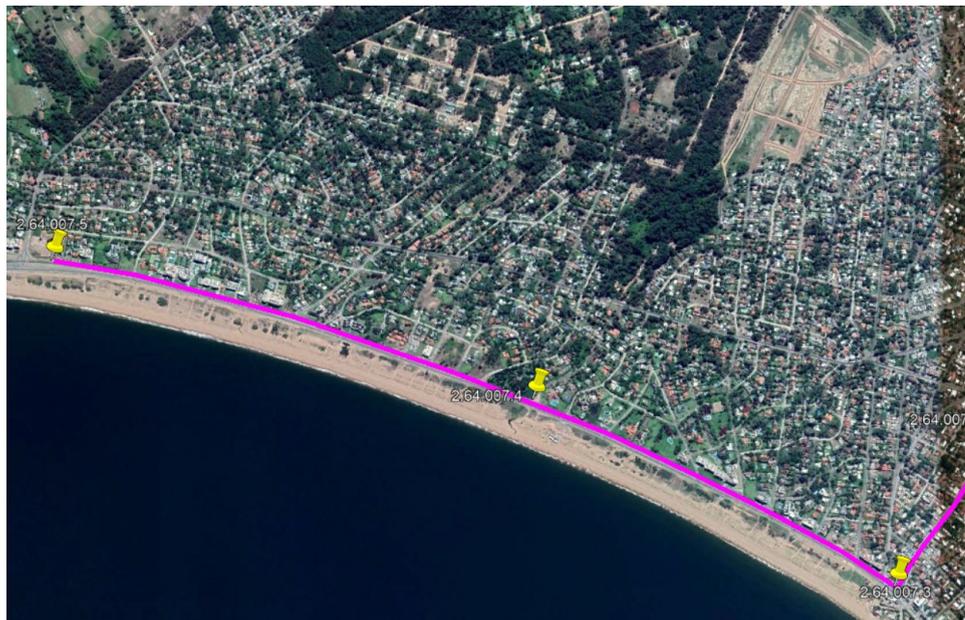


Imagen 23 - Segundo tramo de nivelación, parte 2

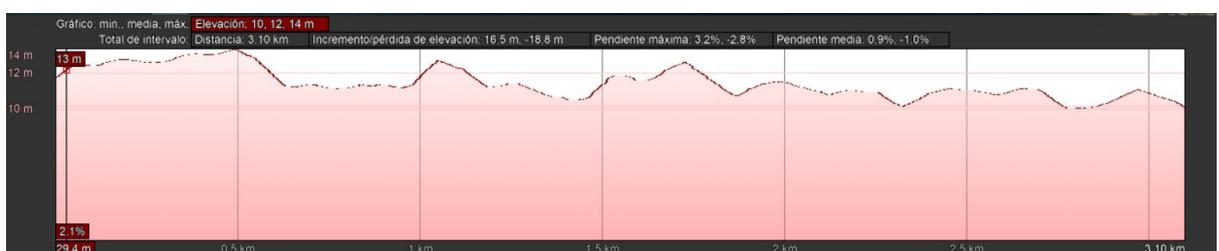


Imagen 24 - Perfil de elevación del tramo

Nivelación: Tramo 3

Día: 10/01/2019

Distancia: 4.7 km

Tiempo: 3 hs 40 mins

Cierre: 2 mm por km de nivelación

Planilla de campo en anexo

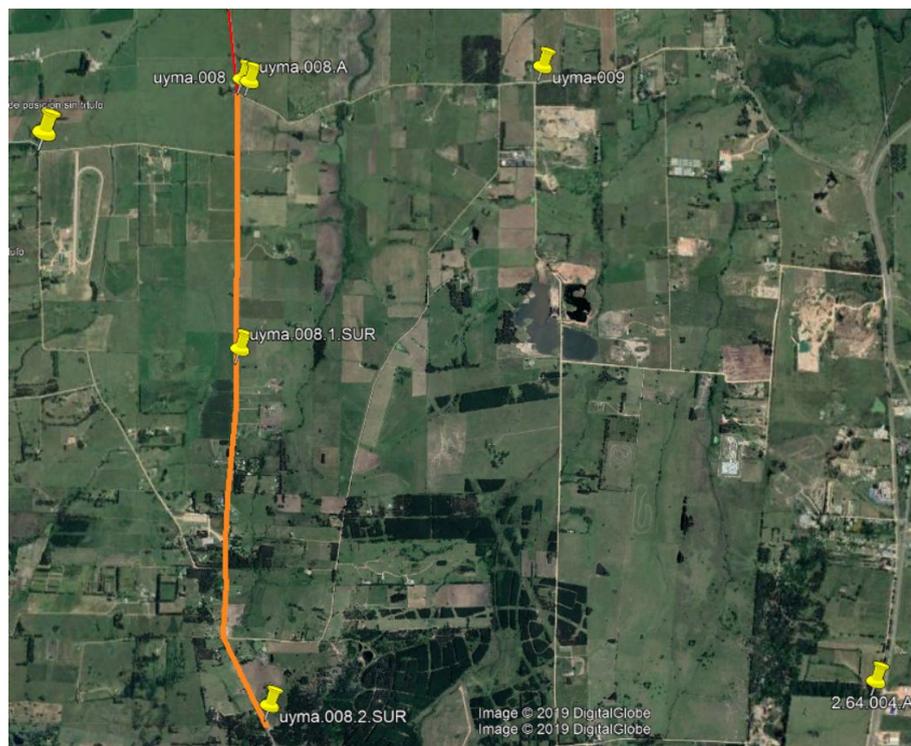


Imagen 25 - Tercer tramo de nivelación



Imagen 26 - Perfil de elevación del tramo

Nivelación: Tramo 4

Día: 12/01/2019

Distancia: 2.2 km

Tiempo: 3 hs 30 mins

Cierre: 3 mm por km de nivelación

Planilla de campo en anexo

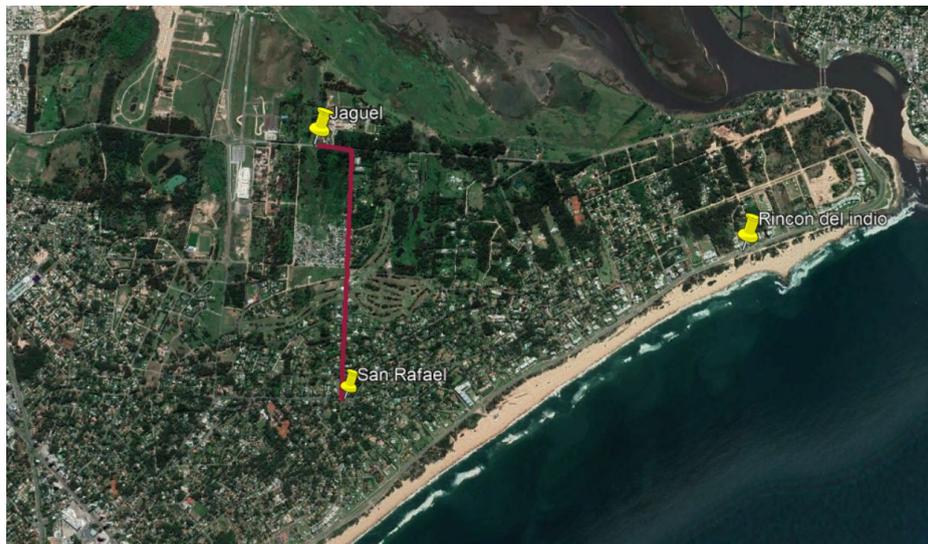


Imagen 27 - Cuarto tramo de nivelación



Imagen 28 - Perfil de elevación del tramo

La tabla a continuación tiene las **cotas oficiales** de los 37 puntos con doble dato que fueron parte de este trabajo. Entre ellos están los de la Red Altimétrica del Uruguay, la línea de nivelación para UYMA y los definidos por nosotros.

Punto	Cota Oficial
1	12.625
2	6.970
3	21.960
4	11.970
5	30.058
6	35.960
7	13.998
8	3.975
9	26.006
10	37.992
11	27.743
12	7.059
13	1.750
14	32.366
15	24.977
16	19.173
17	17.676
18	27.026
19	51.190
20	22.566
21	26.216
22	27.375
23	39.206
24	28.133
25	18.878
26	11.294
27	6.844
28	33.740
29	34.226
30	21.563
31	9.224
32	8.950
33	9.395
34	24.207
35	6.504
36	6.489
37	3.952

Tabla 2 - Totalidad de puntos con cota oficial

4.3- Relevamiento GNSS



Imagen 29 - Instrumento utilizado en el trabajo de campo

4.3.1- Etapa previa

El relevamiento con GNSS fue realizado utilizando el método diferencial estático con post-proceso. Para ello se requieren bases fijas que graben datos crudos a la misma vez que el móvil. Dentro de la zona de estudio contamos con dos bases de este tipo. Una es UYMA perteneciente al SGM y la otra es de uso particular ubicada en la ciudad de San Carlos. La siguiente imagen muestra la conveniente ubicación de las mismas respecto de los puntos a relevar.



Imagen 30 - Distribución bases fijas y puntos utilizados

4.3.2- Base UYMA

Colocada en 2018 en el Batallón de Ingenieros de Combate N° 4 en la Laguna del Sauce, Maldonado. Tiene coordenadas geodésicas (Sirgas ROU, época 1995.4) $34^{\circ}51'46''$,8071 S , $55^{\circ}05'09''$,6797 W , una altura elipsoidal de 39.075 y una cota oficial 25.694.

Tiene un receptor LEICA GR 10 y una antena LEIAR 20. Graba datos crudos en formato rinex cada un segundo. No está dentro de SIRGAS por lo tanto no tiene código internacional.

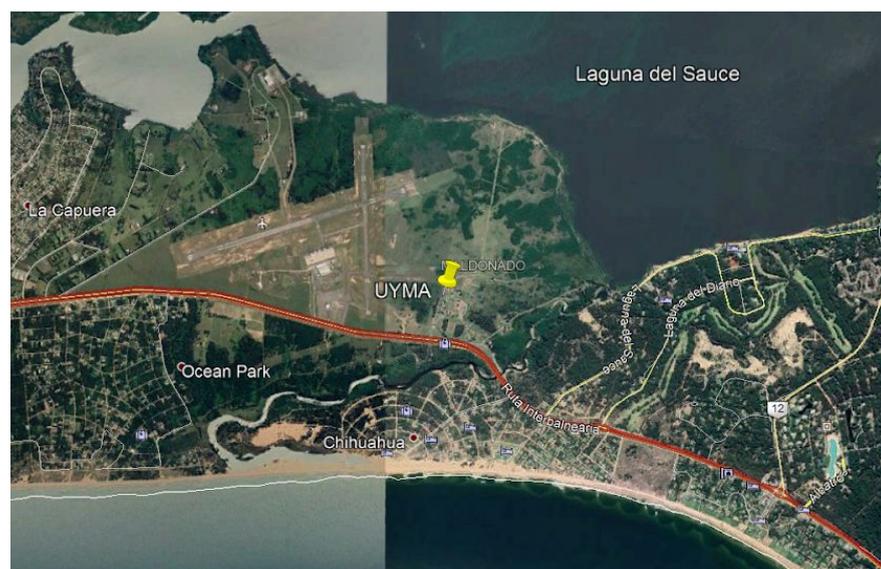


Imagen 31 - Ubicación base UYMA

4.3.3- Base San Carlos

Es un equipo GNSS que cuenta con un receptor GR 30 y una antena LIAR 10 colocada en el techo de uno de los compañeros. La misma está grabando datos crudos todo el tiempo (cada un segundo), lo que permitirá el cálculo diferencial en post proceso. La misma tiene una posición navegada de $34^{\circ} 47' 25.89391''$ Sur , $54^{\circ} 54' 54.59100''$ Oeste y 30.9882 m de altura elipsoidal.

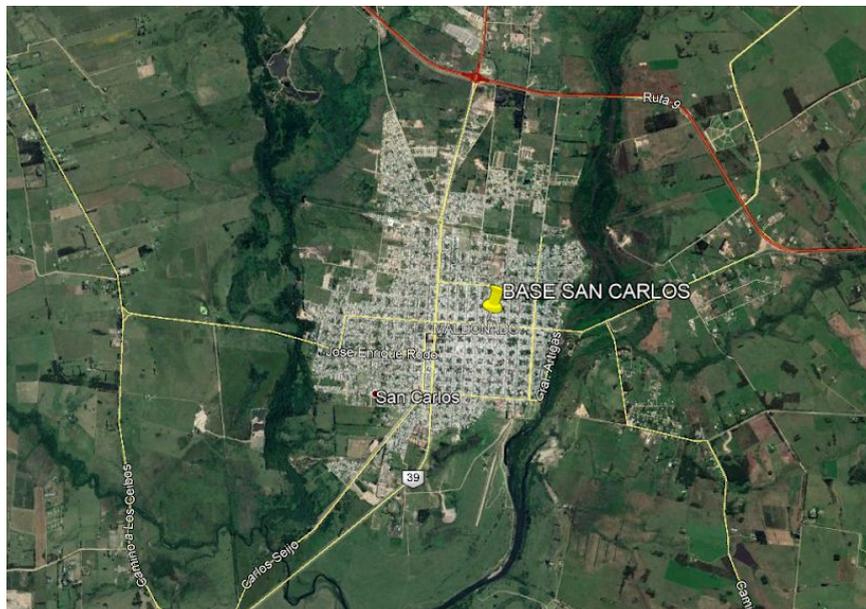


Imagen 32 - Ubicación base San Carlos (SC)

4.3.4- Ajuste UYMA-SC

El cálculo diferencial requiere un punto de partida con coordenadas establecidas. Se eligió UYMA por tener coordenadas dentro del Sistema de Referencia Geodésico Sirgas-ROU (época 1995.4).

Lo siguiente fue determinar la posición lo más exacta y precisa posible de la Base San Carlos partiendo desde UYMA. Para ello se contó con 3 observaciones de 24 horas, los días 31/12/18, 02/01/2019 y 04/01/2019 correspondientes a la semana GPS 2034. También se utilizaron efemérides precisas.

Como resultado se obtuvieron las coordenadas de la Base San Carlos con una desviación estándar de 1mm en X,Y y 3mm en Z. La coordenadas de ambas bases fueron.

UYMA: Lat. = $34^{\circ}51'46,8071''$ S ,
Lon. = $55^{\circ}05'09,6797''$ W
h = 39.075m

Base SC: Lat. = $34^{\circ} 47' 25.87395''$ S
Lon. = $54^{\circ} 54' 54.59642''$ W
h = 33.802 m

4.3.5- Método diferencial

En nuestra zona de estudio, los vectores conformados entre los puntos a relevar y las base UYMA y SC respectivamente no superan los 15 km. Ambas tienen una ubicación que permite triangular con los puntos a relevar. Tener dos medidas independiente del mismo punto mejora su precisión.

En nuestro caso, el principal error a tener en cuenta es el error de multicamino, que en tiempos cortos son muy difíciles de detectar. Utilizaremos una máscara de 15 grados la cual evita que las señales con poca elevación lleguen a la antena, reduciendo así este error.

El tiempo de observación en cada punto debe de asegurarnos la resolución de las ambigüedades que depende fundamentalmente de la longitud de la línea, de la cantidad de satélites y de la geometría de estos (dilución de la precisión).

Para esto existen consideraciones que ayudan a llegar a la solución requerida, como que a mayor tiempo de observación obtenemos mejor precisión en el posicionamiento, cuanto menor sea la distancia entre los puntos más rápido converge la solución. También existe un tiempo mínimo a considerar para resolver las ambigüedades según la distancia entre los puntos y a mayor distancia entre ellos mayor será el efecto ionosférico.

Atendiendo a todo lo dicho anteriormente, es que en nuestro relevamiento GPS se va a ocupar cada punto un tiempo no menor a 15 minutos.

Se procesó todo con el Software Leica GeoOffice, la imagen siguiente muestra el diagrama de vectores.

Luego se ajustó toda la red dejando fijos UYMA y SC. La tabla siguiente muestra: el número de puntos, las coordenadas geodésicas y las coordenadas planas en UTM 21 Sur

Puntos	Longitud	Latitud	Alt. elipsoidal	X local	Y local
1	54 52 6.553440 W	34 47 1.767318 S	25.953	695030.070	6148859.447
2	54 54 25.453347 W	34 47 28.844381 S	20.300	691481.806	6148099.477
3	54 54 47.074351 W	34 47 32.351172 S	35.363	690930.001	6148002.873
4	54 57 21.794859 W	34 47 19.749346 S	25.358	687005.320	6148472.067
5	54 58 15.178466 W	34 45 52.965512 S	43.452	685702.434	6151173.421
6	55 0 58.049817 W	34 44 8.177554 S	49.664	681625.089	6154484.638
7	55 2 1.147938 W	34 44 3.471410 S	27.677	680023.070	6154661.168
8	54 53 55.518687 W	34 47 20.907441 S	17.367	692247.799	6148328.122
9	54 54 56.569766 W	34 45 45.245710 S	39.417	690757.155	6151307.867
10	54 49 54.764350 W	34 46 55.137320 S	51.231	698384.620	6148991.981
11	54 55 7.357497 W	34 47 28.800334 S	41.131	690416.724	6148122.982
12	54 56 37.359579 W	34 51 15.861801 S	20.275	687985.642	6141174.243
13	54 56 20.469276 W	34 48 41.559703 S	15.063	688512.348	6145919.576
14	55 0 26.285675 W	34 46 56.649846 S	45.867	682330.026	6149278.051
15	55 0 7.751500 W	34 47 33.895386 S	38.417	682778.327	6148121.152
16	55 0 0.844508 W	34 48 6.519105 S	32.570	682933.852	6147112.517
17	54 59 41.401162 W	34 48 34.538506 S	31.039	683410.736	6146239.375
18	54 59 38.766793 W	34 49 56.754581 S	40.331	683427.020	6143704.942
19	54 59 29.611471 W	34 51 21.501760 S	64.465	683607.292	6141089.198
20	54 58 14.698495 W	34 48 50.048123 S	35.953	685604.340	6145717.219
21	54 59 37.799916 W	34 48 53.326736 S	39.554	683490.674	6145658.677
22	55 0 34.712342 W	34 49 7.087549 S	40.742	682036.112	6145263.512
23	55 1 20.486243 W	34 49 40.095143 S	52.563	680852.998	6144269.552
24	55 2 1.521423 W	34 50 27.917285 S	41.490	679781.567	6142816.651
25	55 2 19.075289 W	34 51 27.222095 S	32.237	679299.911	6140998.202
26	55 3 6.571282 W	34 52 22.253656 S	24.597	678060.701	6139326.208
27	55 3 44.971773 W	34 52 31.920687 S	20.157	677079.877	6139047.278
28	54 57 31.054202 W	34 54 32.482716 S	46.812	686498.409	6135144.093
29	54 57 47.130680 W	34 54 34.888215 S	47.273	686088.858	6135078.292
30	54 58 5.392760 W	34 54 53.012103 S	34.646	685614.009	6134529.303
31	54 58 18.299052 W	34 55 8.609150 S	22.293	685276.713	6134055.391
32	54 59 7.001552 W	34 54 47.834242 S	22.066	684053.624	6134720.453
33	55 0 11.500790 W	34 54 32.418673 S	22.558	682426.123	6135228.227
34	54 54 44.761388 W	34 55 58.550850 S	37.202	690663.824	6132405.160
35	54 54 53.065559 W	34 54 56.088737 S	19.541	690493.230	6134334.089
36	54 52 49.109782 W	34 55 23.518237 S	19.478	693621.275	6133422.842
37	54 57 4.038212 W	34 57 51.827577 S	16.848	687058.277	6128988.064

Tabla 3 - Coordenadas geodésicas y planas

4.4- Modelo de Transformación de Alturas

Como ya se mencionó anteriormente el objetivo del proyecto consiste en obtener alturas referidas al datum oficial a partir de observaciones GNSS.

Para esto tenemos que generar un Modelo de Transformación de Alturas (MTA), esto es posible debido a que contamos con doble dato para cada punto fijo de la red. Es decir tenemos la cota referida al datum Oficial y además la altura ortométrica a partir de observaciones GNSS y el modelo geoidal EGM08.

Un MTA es una superficie paramétrica que permite obtener altura (o cota) oficial, de un determinado punto, a partir de las coordenadas geodésicas (φ, λ, h) .

Para un punto genérico:

$$h = H + N$$

$$h = H_{Of} + N_{Of}$$

En la ecuación anterior se toma como superficie equipotencial de la gravedad aquella que contiene el Datum Vertical del Uruguay.

Entonces igualando:

$$H + N = H_{Of} + N_{Of}$$

Despejando H_{Of} se obtiene:

$$H_{Of} = H + (N_{EGM08} - N_{Of}),$$

entonces:

$$H_{Of} = H_{EGM08} + \Delta N$$

Este ΔN es el que se modelará matemáticamente, valor que conocemos para cada punto de la red ($\Delta N = H_{Of} - H_{EGM08}$). A partir de estos valores, se efectúa el modelamiento matemático, generando una función con la cual se podrá estimar dicho valor para todos los puntos de la

zona en estudio, partiendo de las coordenadas geodésicas (φ, λ, h) de cada punto, se obtendrá la Altura Oficial modelada del mismo.

Las funciones matemáticas que se usaron fueron tomadas de los trabajos de Fotopoulos: "An Analysis on the Optimal Combination of Geoid, Orthometric and Ellipsoidal Height Data" y de Vella: "Use Of Similarity Transformations To Improve GPS Heighting".

- 1) Trigonometría clásica para 4 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i + v_i$$

- 2) Trigonometría clásica para 5 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i + X_5 \text{sen}^2\varphi_i + v_i$$

- 3) Modelo de transformación de similitud diferencial, 6 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i) + v_i$$

- 4) Modelo de transformación de similitud diferencial, 7 parámetros, planteada para un punto i :

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_i}{W_i} + v_i$$

Donde: a → semieje mayor del elipsoide WGS84.

e → la excentricidad del elipsoide WGS84.

f → el achatamiento del elipsoide WGS84.

$$W = \sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2\varphi_i}$$

Si nos detenemos por ejemplo en la función de 4 parámetros si consideramos n puntos, se generarán n ecuaciones con lo cual obtendremos un sistema lineal de n ecuaciones con 4 incógnitas. Por lo cual si tenemos n mayor a 4 el sistema será compatible indeterminado y su solución se calcula mediante el método de mínimos cuadrados.

1) Trigonometría clásica para 4 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1) + X_3 (\cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1) + X_4 \text{sen}\varphi_1 + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2) + X_3 (\cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2) + X_4 \text{sen}\varphi_2 + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_n \times \cos\lambda_n) + X_3 (\cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n) + X_4 \text{sen}\varphi_n + v_n \end{aligned} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1 & \text{sen}\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2 & \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2 & \text{sen}\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i & \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i & \text{sen}\varphi_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n & \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n & \text{sen}\varphi_n \end{pmatrix}}_A * \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix}}_\Delta \Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$$

$\Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$

2) Trigonometría clásica para 5 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1) + X_3 (\cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1) + X_4 \text{sen}\varphi_1 + X_5 \text{sen}^2\varphi_1 + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2) + X_3 (\cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2) + X_4 \text{sen}\varphi_2 + X_5 \text{sen}^2\varphi_2 + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i + X_5 \text{sen}^2\varphi_i + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1 + X_2 (\cos\varphi_n \times \cos\lambda_n) + X_3 (\cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n) + X_4 \text{sen}\varphi_n + X_5 \text{sen}^2\varphi_n + v_n \end{aligned} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{pmatrix}}_f = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1 & \text{sen}\varphi_1 & \text{sen}^2\varphi_1 \\ 1 & \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2 & \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2 & \text{sen}\varphi_2 & \text{sen}^2\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i & \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i & \text{sen}\varphi_i & \text{sen}^2\varphi_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n & \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n & \text{sen}\varphi_n & \text{sen}^2\varphi_n \end{pmatrix}}_A * \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}}_{\Delta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$$

3) Modelo de transformación de similitud diferencial, 6 parámetros:

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_1 &= X_1 (\cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1) + X_2 (\cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1) + X_3 \text{sen}\varphi_1 + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1}{W_1} + \\ &\quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1}{W_1} + X_6 (a \times W_1 + h_1) + v_1 \\ \Delta N_2 &= X_1 (\cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2) + X_2 (\cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2) + X_3 \text{sen}\varphi_2 + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2}{W_2} + \\ &\quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2}{W_2} + X_6 (a \times W_2 + h_2) + v_2 \\ &\vdots \\ \Delta N_i &= X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} + \\ &\quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i) + v_i \\ &\vdots \\ \Delta N_n &= X_1 (\cos\varphi_n \times \cos\lambda_n) + X_2 (\cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n) + X_3 \text{sen}\varphi_n + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n}{W_n} + \\ &\quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n}{W_n} + X_6 (a \times W_n + h_n) + v_n \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{matrix} \left(\begin{array}{c} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccccc} \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1 & \text{sen}\varphi_1 & \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1}{W_1} & \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1}{W_1} & a \times W_1 + h_1 \\ \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2 & \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2 & \text{sen}\varphi_2 & \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2}{W_2} & \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2}{W_2} & a \times W_2 + h_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i & \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i & \text{sen}\varphi_i & \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} & \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} & a \times W_i + h_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n & \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n & \text{sen}\varphi_n & \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n}{W_n} & \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n}{W_n} & a \times W_n + h_n \end{array} \right) * \left(\begin{array}{c} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{array} \right) \Rightarrow \\ f \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad \Delta \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A\Delta = f}$$

4) Modelo de transformación de similitud diferencial, 7 parámetros:

$$\left. \begin{array}{l} \Delta N_1 = X_1 (\cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1) + X_2 (\cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1) + X_3 \text{sen}\varphi_1 + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1}{W_1} + \\ \cdot \quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1}{W_1} + X_6 (a \times W_1 + h_1) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_1}{W_1} + v_1 \\ \Delta N_2 = X_1 (\cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2) + X_2 (\cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2) + X_3 \text{sen}\varphi_2 + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2}{W_2} + \\ \cdot \quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2}{W_2} + X_6 (a \times W_2 + h_2) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_2}{W_2} + v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} + \\ \cdot \quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_i}{W_i} + v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta N_n = X_1 (\cos\varphi_n \times \cos\lambda_n) + X_2 (\cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n) + X_3 \text{sen}\varphi_n + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n}{W_n} + \\ \cdot \quad + X_5 \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n}{W_n} + X_6 (a \times W_n + h_n) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_n}{W_n} + v_n \end{array} \right\}$$

$$\begin{matrix}
 \begin{pmatrix} \Delta N_1 \\ \Delta N_2 \\ \vdots \\ \Delta N_i \\ \vdots \\ \Delta N_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1 & \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1 & \text{sen}\varphi_1 & \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \text{sen}\lambda_1}{W_1} & \frac{\text{sen}\varphi_1 \times \cos\varphi_1 \times \cos\lambda_1}{W_1} & a \times W_1 + h_1 & \frac{1-f^2 \times \text{sen}^2\varphi_1}{W_1} \\ \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2 & \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2 & \text{sen}\varphi_2 & \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \text{sen}\lambda_2}{W_2} & \frac{\text{sen}\varphi_2 \times \cos\varphi_2 \times \cos\lambda_2}{W_2} & a \times W_2 + h_2 & \frac{1-f^2 \times \text{sen}^2\varphi_2}{W_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i & \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i & \text{sen}\varphi_i & \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} & \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} & a \times W_i + h_i & \frac{1-f^2 \times \text{sen}^2\varphi_i}{W_i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n & \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n & \text{sen}\varphi_n & \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \text{sen}\lambda_n}{W_n} & \frac{\text{sen}\varphi_n \times \cos\varphi_n \times \cos\lambda_n}{W_n} & a \times W_n + h_n & \frac{1-f^2 \times \text{sen}^2\varphi_n}{W_n} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} \\
 f \qquad \qquad \qquad A \qquad \qquad \qquad \Delta \\
 \implies \boxed{A\Delta = f}
 \end{matrix}$$

La resolución de los sistemas enunciados anteriormente es la siguiente, y se realizó en Matlab.

$$\boxed{
 \begin{aligned}
 A\Delta = f &\implies (A^T A)\Delta = A^T f \implies (A^T A)^{-1}(A^T A)\Delta = \\
 &(A^T A)^{-1}A^T b \implies \Delta = (A^T A)^{-1}A^T f
 \end{aligned}
 }$$

Una vez calculados los parámetros de cada tipo de función, se obtiene el valor de ΔN para todos los puntos de la superficie, con lo cual, partiendo de las coordenadas geodésicas de un punto y aplicando la ecuación $H_{Of} = H_{EGM08} + \Delta N$, queda determinada la altura ortométrica de éste, referida al Datum Vertical del Uruguay.

Atendiendo a lo anterior se presentan los valores para el cálculo del modelo de transformación de alturas en la siguiente tabla.

Puntos	Longitud	Latitud	Alt. elipsoidal	N (EGM08)	H (EGM08)	H (Oficial)	ΔN
1	54 52 6.553440 W	34 47 1.767318 S	25.953	13.065	12.888	12.625	-0.263
2	54 54 25.453347 W	34 47 28.844381 S	20.300	13.096	7.204	6.970	-0.234
3	54 54 47.074351 W	34 47 32.351172 S	35.363	13.102	22.261	21.960	-0.301
4	54 57 21.794859 W	34 47 19.749346 S	25.358	13.162	12.196	11.970	-0.226
5	54 58 15.178466 W	34 45 52.965512 S	43.452	13.242	30.210	30.058	-0.152
6	55 0 58.049817 W	34 44 8.177554 S	49.664	13.391	36.273	35.960	-0.313
7	55 2 1.147938 W	34 44 3.471410 S	27.677	13.424	14.253	13.998	-0.255
8	54 53 55.518687 W	34 47 20.907441 S	17.367	13.091	4.276	3.975	-0.301
9	54 54 56.569766 W	34 45 45.245710 S	39.417	13.175	26.242	26.006	-0.236
10	54 49 54.764350 W	34 46 55.137320 S	51.231	13.019	38.212	37.992	-0.220
11	54 55 7.357497 W	34 47 28.800334 S	41.131	13.111	28.020	27.743	-0.278
12	54 56 37.359579 W	34 51 15.861801 S	20.275	12.989	7.286	7.059	-0.227
13	54 56 20.469276 W	34 48 41.559703 S	15.063	13.088	1.975	1.750	-0.225
14	55 0 26.285675 W	34 46 56.649846 S	45.867	13.248	32.619	32.366	-0.254
15	55 0 7.751500 W	34 47 33.895386 S	38.417	13.214	25.203	24.977	-0.226
16	55 0 0.844508 W	34 48 6.519105 S	32.570	13.189	19.381	19.173	-0.208
17	54 59 41.401162 W	34 48 34.538506 S	31.039	13.162	17.877	17.676	-0.202
18	54 59 38.766793 W	34 49 56.754581 S	40.331	13.105	27.226	27.026	-0.201
19	54 59 29.611471 W	34 51 21.501760 S	64.465	13.042	51.423	51.190	-0.233
20	54 58 14.698495 W	34 48 50.048123 S	35.953	13.120	22.833	22.566	-0.267
21	54 59 37.799916 W	34 48 53.326736 S	39.554	13.147	26.407	26.216	-0.192
22	55 0 34.712342 W	34 49 7.087549 S	40.742	13.159	27.583	27.375	-0.208
23	55 1 20.486243 W	34 49 40.095143 S	52.563	13.154	39.409	39.206	-0.203
24	55 2 1.521423 W	34 50 27.917285 S	41.490	13.135	28.355	28.133	-0.222
25	55 2 19.075289 W	34 51 27.222095 S	32.237	13.099	19.138	18.878	-0.260
26	55 3 6.571282 W	34 52 22.253656 S	24.597	13.076	11.521	11.294	-0.228
27	55 3 44.971773 W	34 52 31.920687 S	20.157	13.084	7.073	6.844	-0.229
28	54 57 31.054202 W	34 54 32.482716 S	46.812	12.865	33.947	33.740	-0.207
29	54 57 47.130680 W	34 54 34.888215 S	47.273	12.869	34.404	34.226	-0.178
30	54 58 5.392760 W	34 54 53.012103 S	34.646	12.862	21.784	21.563	-0.221
31	54 58 18.299052 W	34 55 8.609150 S	22.293	12.855	9.438	9.224	-0.215
32	54 59 7.001552 W	34 54 47.834242 S	22.066	12.886	9.180	8.950	-0.230
33	55 0 11.500790 W	34 54 32.418673 S	22.558	12.919	9.639	9.395	-0.244
34	54 54 44.761388 W	34 55 58.550850 S	37.202	12.748	24.454	24.207	-0.248
35	54 54 53.065559 W	34 54 56.088737 S	19.541	12.794	6.747	6.504	-0.243
36	54 52 49.109782 W	34 55 23.518237 S	19.478	12.730	6.748	6.489	-0.259
37	54 57 4.038212 W	34 57 51.827577 S	16.848	12.720	4.128	3.952	-0.176

Tabla 4 - Datos para el cálculo del MTA

4.5- Validación de los modelos paramétricos

4.5.1- Enfoque empírico clásico

El método más común utilizado en la práctica para evaluar el rendimiento de los modelos paramétricos es analizar los residuales luego del ajuste de mínimos cuadrados. Estos se calculan para cada punto de la red, de la siguiente forma

$$v_i = h_i - H_i - N_i + \Delta N$$

El modelo que arroje menores residuales se considera el más apropiado. Se destaca la reducción en el valor promedio a cero impuesta por el ajuste de mínimos cuadrados. En efecto, estos valores dan una evaluación de la precisión del modelo, es decir, indican qué tan bien los conjuntos de datos encajan entre sí.

El estadístico que se utiliza en este enfoque es el RMS (error medio cuadrático) que se calcula como

$$RMS = \sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)}$$

$$RMS(\hat{\theta}) = \sqrt{MSE(\hat{\theta})} = \sqrt{E((\hat{\theta} - \theta)^2)}$$

Para un estimador insesgado, la RMS es la raíz cuadrada de la varianza, conocida como desviación estándar.

Uno de los principales problemas encontrado cuando se utiliza este método empírico como el único medio para seleccionar entre diferentes modelos es que el RMS más bajo generalmente corresponde al modelo de orden más alto. De hecho, a medida que aumenta el número de parámetros en el modelo, disminuye la media cuadrática asociada. Por lo tanto, este método es válido para pruebas de la precisión del modelo pero no debe interpretarse como la exactitud o la capacidad de predicción del modelo.

4.5.2- Validación Cruzada

Un enfoque empírico adicional que se puede utilizar para complementar el método anterior y obtener una medida más realista de la exactitud de los modelos es conocida como Validación Cruzada.

El método consiste en seleccionar un subconjunto de puntos de control, y generar el modelo con los restantes. Una vez generado el modelo evaluar los puntos de control en el mismo. Luego comparar el valor real con el modelado y determinar el residual.

El RMS calculado de esta manera proporciona una indicación más realista de la exactitud del modelo paramétrico seleccionado y su desempeño como una superficie de predicción de un nuevo punto. Es el esquema de prueba empírico preferido, ya que no depende exclusivamente de la exactitud de un solo punto o un pequeño subconjunto de puntos. También mantiene la redundancia de datos alta para calcular los parámetros en el ajuste de mínimos cuadrados.

5- Resultados

5.1- Modelo Global

El modelado del ΔN se realizó con 31 de los 37 puntos, debido a que se realizará una evaluación externa de la misma con los 6 puntos restantes, denominados “testigos”. Para la construcción de la función son necesarias las coordenadas geodésicas de los puntos de la red : $\Delta N = f(\varphi, \lambda)$.

Para cada uno de los 4 modelos descritos anteriormente se exponen los parámetros y una tabla con el ΔN y el ΔN modelado. La tabla posee 31 puntos, los utilizados para el modelo.

Obtenidos los parámetros para cada una de las funciones, se procedió a evaluar los mismos. En primera instancia con los 31 puntos que generaron el modelo, esto se conoce como evaluación interna. En segundo lugar se realizará una evaluación externa con los 6 puntos testigos que no fueron considerados para el modelo.

De la evaluación de las mismas en los puntos testigos y de la evaluación en los 31 puntos utilizados para la construcción, se determinará cuál de las funciones se aproxima mejor al ΔN obtenido de campo.

Los puntos testigos fueron elegido de forma arbitraria buscando zonas donde tuviéramos redundancia de datos y zonas no periféricas del modelo. A continuación todos los puntos utilizados en el trabajo, en amarillos los utilizados en el modelo, en rojo los testigos.

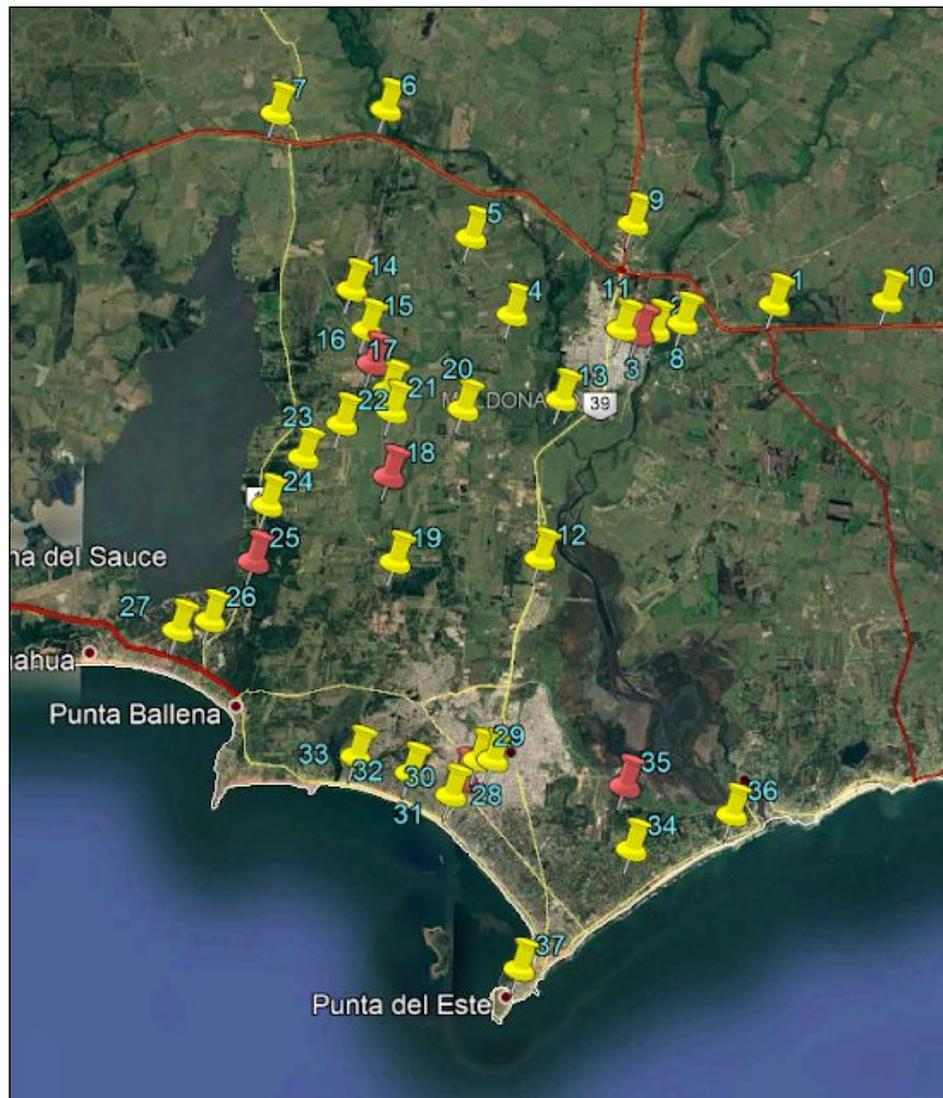


Imagen 34 - Ubicación puntos testigos

Trigonométrica Clásica, 4 parámetros:

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i$$

4 Parámetros	
X1	-8879.92395
X2	4177.19664
X3	-5965.05584
X4	-5081.17787

Trigonométrica Clásica, 5 parámetros:

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i + X_5 \text{sen}^2\varphi_i$$

5 Parámetros	
X1	-11402.75071
X2	5979.01176
X3	-8534.21479
X4	-2712.95618
X5	3983.95063

Modelo de Transformación de similitud diferencial, 6 parámetros

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} +$$
$$+ X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i)$$

6 Parámetros	
X1	1739.75556
X2	5130.89822
X3	4145.43864
X4	8131.69493
X5	3645.72137
X6	0.00045

Modelo de Transformación de similitud diferencial, 7 parámetros

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} +$$
$$+ X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_i}{W_i}$$

7 Parámetros	
X1	22643.61152
X2	-18703.85478
X3	-29336.56040
X4	-10402.59139
X5	23969.57803
X6	0.00054
X7	-32929.25713

La tabla a continuación contiene para cada punto generador del modelo, el ΔN observado, el ΔN modelado para todas las transformaciones y la diferencia de cada uno respecto del observado. Los valores están en metros.

Punto	ΔN Observado	ΔN Modelado (4p)	Residual (4p)	ΔN Modelado (5p)	Residual (5p)	ΔN Modelado (6p)	Residual (6p)	ΔN Modelado (7p)	Residual (7p)
1	-0.263	-0.250	-0.013	-0.252	-0.011	-0.245	-0.018	-0.250	-0.013
2	-0.234	-0.240	0.006	-0.240	0.006	-0.247	0.013	-0.244	0.010
4	-0.226	-0.241	0.015	-0.240	0.015	-0.244	0.019	-0.242	0.016
5	-0.152	-0.243	0.090	-0.241	0.088	-0.243	0.091	-0.234	0.081
6	-0.313	-0.254	-0.059	-0.252	-0.061	-0.252	-0.061	-0.249	-0.064
7	-0.255	-0.255	0.001	-0.254	-0.001	-0.263	0.008	-0.269	0.014
8	-0.301	-0.243	-0.059	-0.243	-0.059	-0.249	-0.053	-0.248	-0.053
9	-0.236	-0.249	0.013	-0.248	0.011	-0.244	0.008	-0.234	-0.003
10	-0.220	-0.261	0.041	-0.265	0.045	-0.234	0.014	-0.250	0.030
11	-0.278	-0.238	-0.040	-0.237	-0.040	-0.237	-0.041	-0.231	-0.046
12	-0.227	-0.221	-0.006	-0.221	-0.006	-0.234	0.007	-0.233	0.006
13	-0.225	-0.230	0.005	-0.229	0.004	-0.244	0.019	-0.242	0.017
14	-0.254	-0.235	-0.018	-0.235	-0.019	-0.235	-0.018	-0.235	-0.019
15	-0.226	-0.232	0.006	-0.232	0.006	-0.236	0.010	-0.235	0.009
17	-0.202	-0.227	0.025	-0.227	0.025	-0.234	0.032	-0.233	0.032
19	-0.233	-0.218	-0.015	-0.219	-0.014	-0.208	-0.025	-0.203	-0.030
20	-0.267	-0.227	-0.040	-0.226	-0.041	-0.232	-0.035	-0.229	-0.038
21	-0.192	-0.226	0.034	-0.225	0.034	-0.229	0.037	-0.227	0.036
22	-0.208	-0.225	0.017	-0.226	0.018	-0.226	0.018	-0.228	0.020
23	-0.203	-0.224	0.021	-0.225	0.022	-0.217	0.014	-0.221	0.018
24	-0.222	-0.222	0.000	-0.224	0.002	-0.217	-0.005	-0.224	0.002
26	-0.228	-0.219	-0.009	-0.222	-0.006	-0.212	-0.016	-0.222	-0.005
27	-0.229	-0.220	-0.009	-0.224	-0.005	-0.211	-0.018	-0.226	-0.003
28	-0.207	-0.216	0.009	-0.215	0.008	-0.212	0.005	-0.206	-0.001
29	-0.178	-0.216	0.038	-0.215	0.037	-0.210	0.032	-0.204	0.026
31	-0.215	-0.215	0.001	-0.214	0.000	-0.218	0.003	-0.212	-0.002
32	-0.230	-0.215	-0.015	-0.214	-0.016	-0.216	-0.014	-0.211	-0.019
33	-0.244	-0.215	-0.029	-0.215	-0.029	-0.213	-0.031	-0.209	-0.035
34	-0.248	-0.222	-0.025	-0.221	-0.026	-0.224	-0.024	-0.227	-0.021
36	-0.259	-0.228	-0.031	-0.229	-0.030	-0.240	-0.019	-0.256	-0.003
37	-0.176	-0.222	0.046	-0.219	0.043	-0.222	0.046	-0.214	0.037

Tabla 5 - ΔN observado, modelado y el residual de las distintas transformaciones, aplicadas a los puntos utilizados para generar el modelo

5.1.1- Validación de Modelo

5.1.1.1- Evaluación Interna

A través del método de empírico clásico, con los residuales de cada transformación, se calcularon los siguientes estadísticos. Están expresados en la siguiente tabla.

	Residual (4p)	Residual (5p)	Residual (6p)	Residual (7p)
# Puntos	31	31	31	31
Promedio (μ)	0.000	0.000	0.000	0.000
Desv. est. (σ)	0.032	0.032	0.031	0.030
Mín.	-0.059	-0.061	-0.061	-0.064
Máx.	0.090	0.088	0.091	0.081
RMS	0.032	0.032	0.031	0.030

Tabla 6 - Estadísticos calculados a partir de los puntos generadores del modelo

Analizando los valores del RMS para cada uno, se nota que las diferencias entre cada uno son insignificativas desde el punto de vista práctico. De todos modos se elige como mejor la transformación de 7 parámetros por tener RMS mas pequeño.

5.1.1.2- Evaluación externa

Siguiendo los pasos del método de validación cruzada, se analizaron los puntos que quedaron fuera del cálculo del modelo.

Se les calculó ΔN modelado para cada transformación. Estos fueron los resultados. También más abajo se muestran los estadísticos al igual que se hicieron para los puntos anteriores.

Punto	ΔN Observado	ΔN Modelado (4p)	Residual (4p)	ΔN Modelado (5p)	Residual (5p)	ΔN Modelado (6p)	Residual (6p)	ΔN Modelado (7p)	Residual (7p)
3	-0.301	-0.239	0.062	-0.238	0.063	-0.240	0.061	-0.235	0.066
16	-0.208	-0.230	-0.022	-0.229	-0.021	-0.236	-0.028	-0.236	-0.028
18	-0.201	-0.222	-0.022	-0.222	-0.022	-0.224	-0.024	-0.223	-0.022
25	-0.260	-0.220	0.040	-0.222	0.038	-0.215	0.045	-0.223	0.037
30	-0.221	-0.216	0.005	-0.215	0.006	-0.214	0.007	-0.208	0.013
35	-0.243	-0.221	0.022	-0.221	0.022	-0.232	0.011	-0.237	0.006

Tabla 7 - ΔN observado, modelado y el residual de las distintas transformaciones, aplicadas a los puntos testigos

	Residual (4p)	Residual (5p)	Residual (6p)	Residual (7p)
# Puntos	6	6	6	6
Promedio (μ)	0.014	0.014	0.012	0.012
Desv. est. (σ)	0.034	0.033	0.036	0.034
Mín.	-0.022	-0.022	-0.028	-0.028
Máx.	0.062	0.063	0.061	0.066
RMS	0.037	0.036	0.038	0.036

Tabla 8 - Estadísticos calculados a partir de los puntos testigos

Nuevamente todos los resultados tiene casi tienen diferencias milimétricas. Se corrobora que el ajuste de 7 parámetros sigue teniendo los mejores resultados.

Se graficaron las isólineas para el ΔN y para los residuales. Ambos tomando el modelo de 7 parámetros.

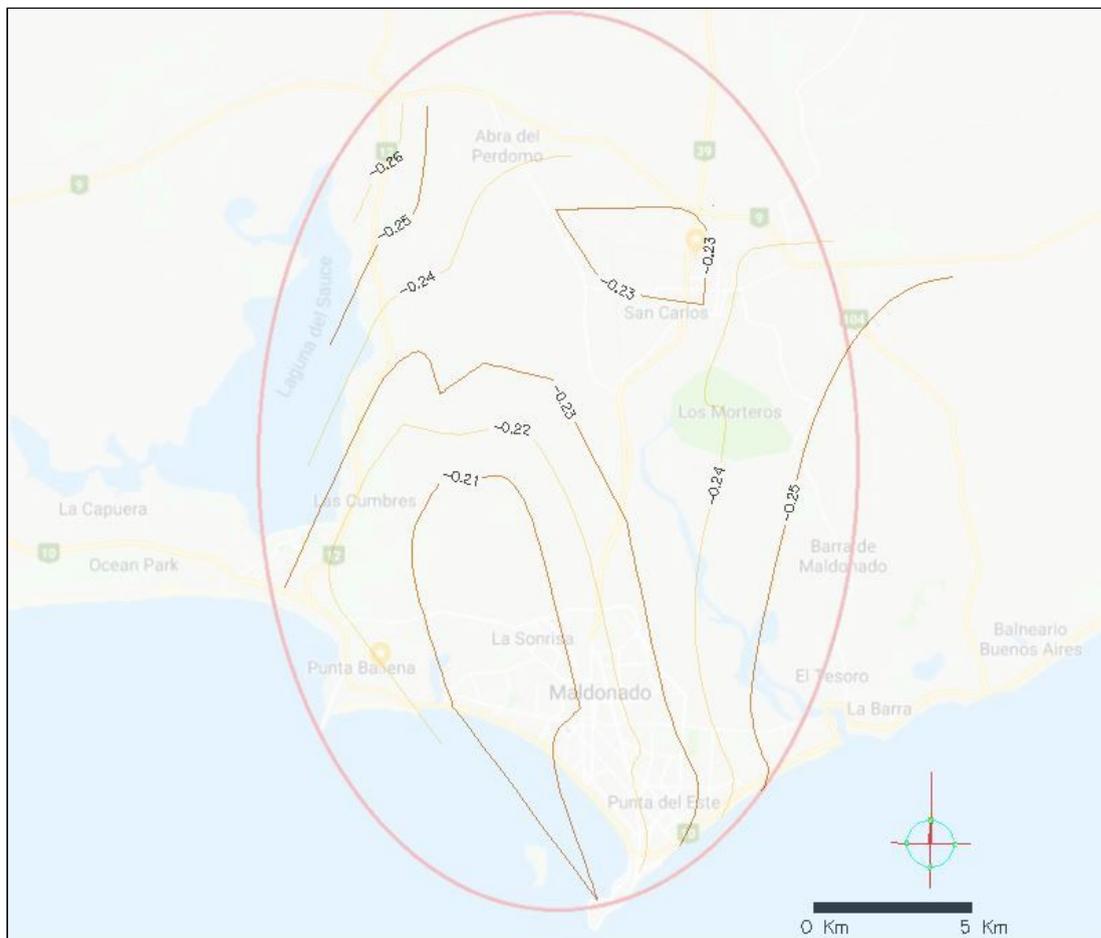


Imagen 35 - Isólineas de los ΔN para transformación de 7 parámetros

En fucsia los puntos testigos y en amarillos los que no se utilizaron.

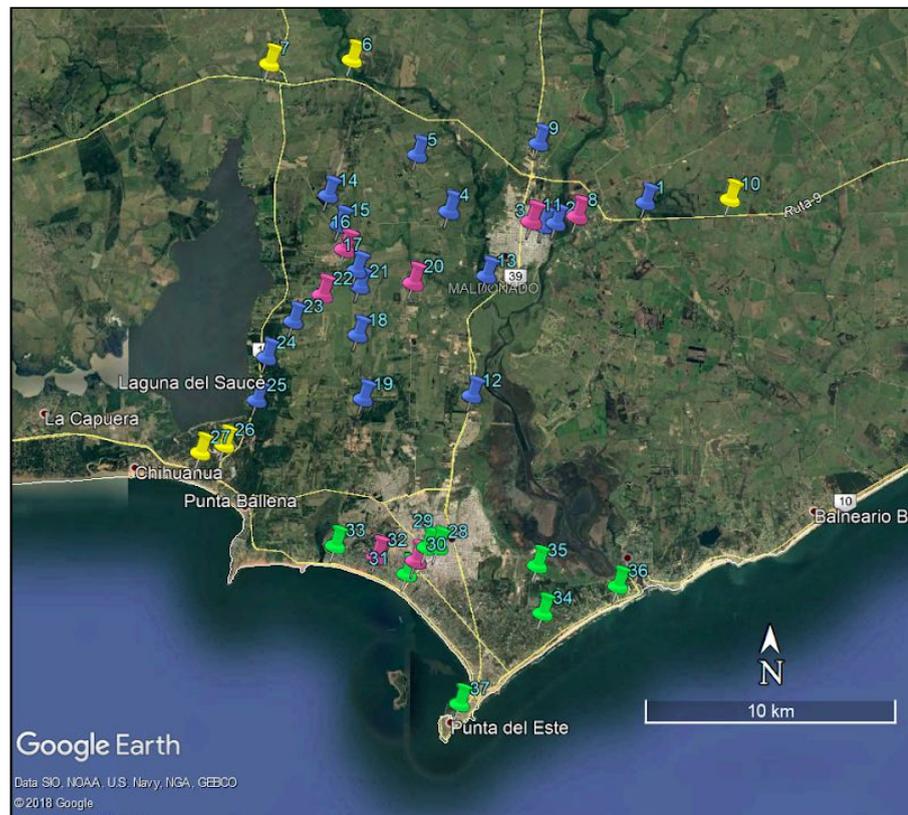


Imagen 37 - Esquema de los puntos a utilizar en los nuevos modelos

5.2.1- Modelo Norte

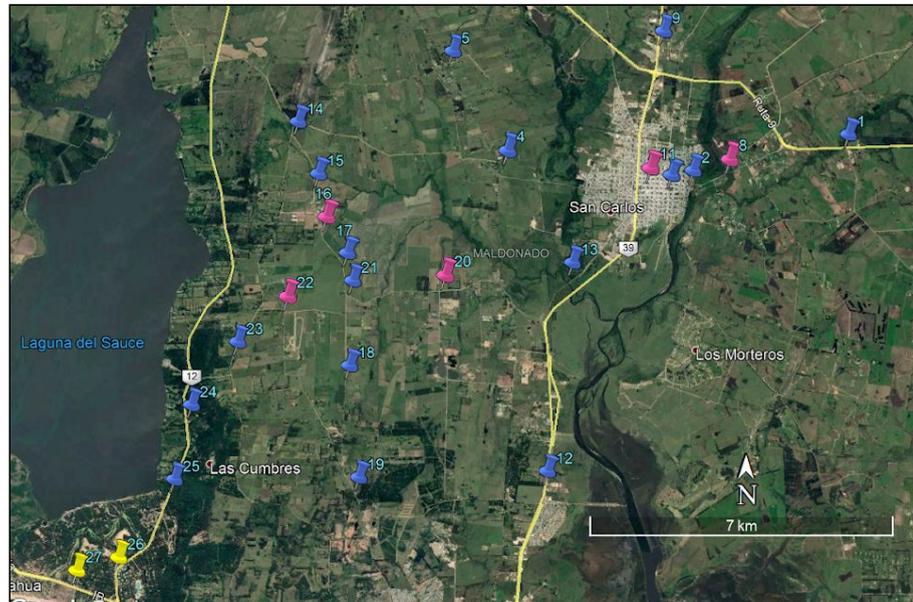


Imagen 38 - Distribución de los puntos a utilizar en modelo Norte

El modelo norte se generó con 17 puntos más 5 que se guardaron como testigos. Tiene una separación máxima de 4 km entre puntos y una distancia promedio de 2.5 km a su par más cercano.

Para las mismas ecuaciones paramétricas explicadas anteriormente, los resultados fueron:

Trigonometría Clásica, 4 parámetros:

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \sen\lambda_i) + X_4 \sen\varphi_i$$

4 Parámetros	
X1	-43244.88533
X2	20373.73315
X3	-29087.98011
X4	-24675.95503

Trigonométrica Clásica, 5 parámetros:

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i + X_5 \text{sen}^2\varphi_i$$

5 Parámetros	
X1	-42996.18059
X2	27250.66164
X3	-38893.78162
X4	18973.17866
X5	45523.47749

Modelo de Transformación de similitud diferencial, 6 parámetros

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} +$$
$$+ X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i)$$

6 Parámetros	
X1	-14912.55400
X2	-9655.93205
X3	2822.40303
X4	-13302.31653
X5	-28573.16474
X6	-0.00007

Modelo de Transformación de similitud diferencial, 7 parámetros

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} +$$
$$+ X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_i}{W_i}$$

7 Parámetros	
X1	64136.69582
X2	-79223.95182
X3	-104578.58492
X4	-57252.10708
X5	55212.38419
X6	-0.00027
X7	-104512.93367

La tabla a continuación contiene para cada punto generador del modelo Norte, el ΔN observado, el ΔN modelado para todas las transformaciones y la diferencia de cada uno respecto del observado.

Punto	ΔN Observado	ΔN Modelado (4p)	Residual (4p)	ΔN Modelado (5p)	Residual (5p)	ΔN Modelado (6p)	Residual (6p)	ΔN Modelado (7p)	Residual (7p)
1	-0.263	-0.274	-0.011	-0.283	-0.020	-0.261	0.002	-0.286	-0.023
2	-0.234	-0.237	-0.003	-0.241	-0.007	-0.240	-0.006	-0.239	-0.005
3	-0.301	-0.233	0.068	-0.236	0.065	-0.238	0.063	-0.237	0.064
4	-0.226	-0.238	-0.012	-0.241	-0.015	-0.241	-0.015	-0.240	-0.014
5	-0.152	-0.213	-0.061	-0.200	-0.048	-0.211	-0.058	-0.200	-0.048
9	-0.236	-0.238	-0.001	-0.226	0.011	-0.243	-0.006	-0.223	0.014
12	-0.227	-0.241	-0.014	-0.231	-0.003	-0.232	-0.005	-0.231	-0.004
13	-0.225	-0.220	0.005	-0.223	0.002	-0.227	-0.002	-0.219	0.006
14	-0.254	-0.207	0.047	-0.207	0.047	-0.197	0.057	-0.211	0.043
15	-0.226	-0.206	0.020	-0.209	0.017	-0.203	0.023	-0.210	0.016
17	-0.202	-0.207	-0.005	-0.211	-0.010	-0.212	-0.010	-0.209	-0.008
18	-0.201	-0.215	-0.015	-0.217	-0.016	-0.222	-0.022	-0.216	-0.016
19	-0.233	-0.232	0.001	-0.222	0.011	-0.236	-0.003	-0.227	0.006
21	-0.192	-0.208	-0.017	-0.213	-0.021	-0.215	-0.023	-0.212	-0.021
23	-0.203	-0.217	-0.014	-0.224	-0.021	-0.218	-0.015	-0.228	-0.025
24	-0.222	-0.228	-0.006	-0.233	-0.011	-0.225	-0.003	-0.233	-0.011
25	-0.260	-0.243	0.017	-0.240	0.020	-0.237	0.023	-0.235	0.025

Tabla 9 - ΔN observado, ΔN modelado y el residual de las distintas transformaciones, aplicadas a los puntos utilizados para generar el modelo Norte

5.2.1.1- Validación de Modelo Norte

Evaluación Interna

	Residual (4p)	Residual (5p)	Residual (6p)	Residual (7p)
# Puntos	17	17	17	17
Promedio (μ)	0.000	0.000	0.000	0.000
Desv. est. (σ)	0.028	0.025	0.029	0.027
Mín.	-0.061	-0.048	-0.058	-0.048
Máx.	0.068	0.065	0.063	0.064
RMS	0.028	0.025	0.029	0.027

Tabla 10 - Estadísticos calculados a partir de los puntos generadores del modelo Norte

Como suponíamos la desviación estándar disminuyó en todos los modelos. Incluso dejó de ser la misma en todos. Claramente se nota que el modelo que mejor se ajusta es el de 5 parámetros.

Evaluación Externa

Veamos ahora cómo se comportan los testigos que dejamos sin incluir en el modelo.

Punto	ΔN Observado	ΔN Modelado (4p)	Residual (4p)	ΔN Modelado (5p)	Residual (5p)	ΔN Modelado (6p)	Residual (6p)	ΔN Modelado (7p)	Residual (7p)
8	-0.301	-0.244	0.057	-0.248	0.053	-0.244	0.058	-0.246	0.056
11	-0.278	-0.229	0.048	-0.231	0.046	-0.236	0.041	-0.233	0.044
16	-0.208	-0.206	0.002	-0.211	-0.003	-0.207	0.001	-0.210	-0.002
20	-0.267	-0.210	0.057	-0.213	0.054	-0.220	0.047	-0.212	0.055
22	-0.208	-0.211	-0.003	-0.217	-0.009	-0.214	-0.006	-0.218	-0.010

Tabla 11 - ΔN observado, modelado y el residual de las distintas transformaciones, aplicadas a los puntos testigos

	Residual (4p)	Residual (5p)	Residual (6p)	Residual (7p)
# Puntos	5	5	5	5
Promedio (μ)	0.032	0.027	0.028	0.029
Desv. est. (σ)	0.030	0.031	0.029	0.032
Mín.	-0.003	-0.009	-0.006	-0.010
Máx.	0.057	0.054	0.058	0.056
RMS	0.044	0.040	0.040	0.043

Tabla 12 - Estadísticos calculados a partir de los puntos testigos

Los estadísticos calculados para los testigos nos vuelven a confirmar que el mejor ajuste es el de 5 parámetros.

Se graficaron las isólineas para el ΔN y para los residuales. Ambos tomando el modelo de 5 parámetros.

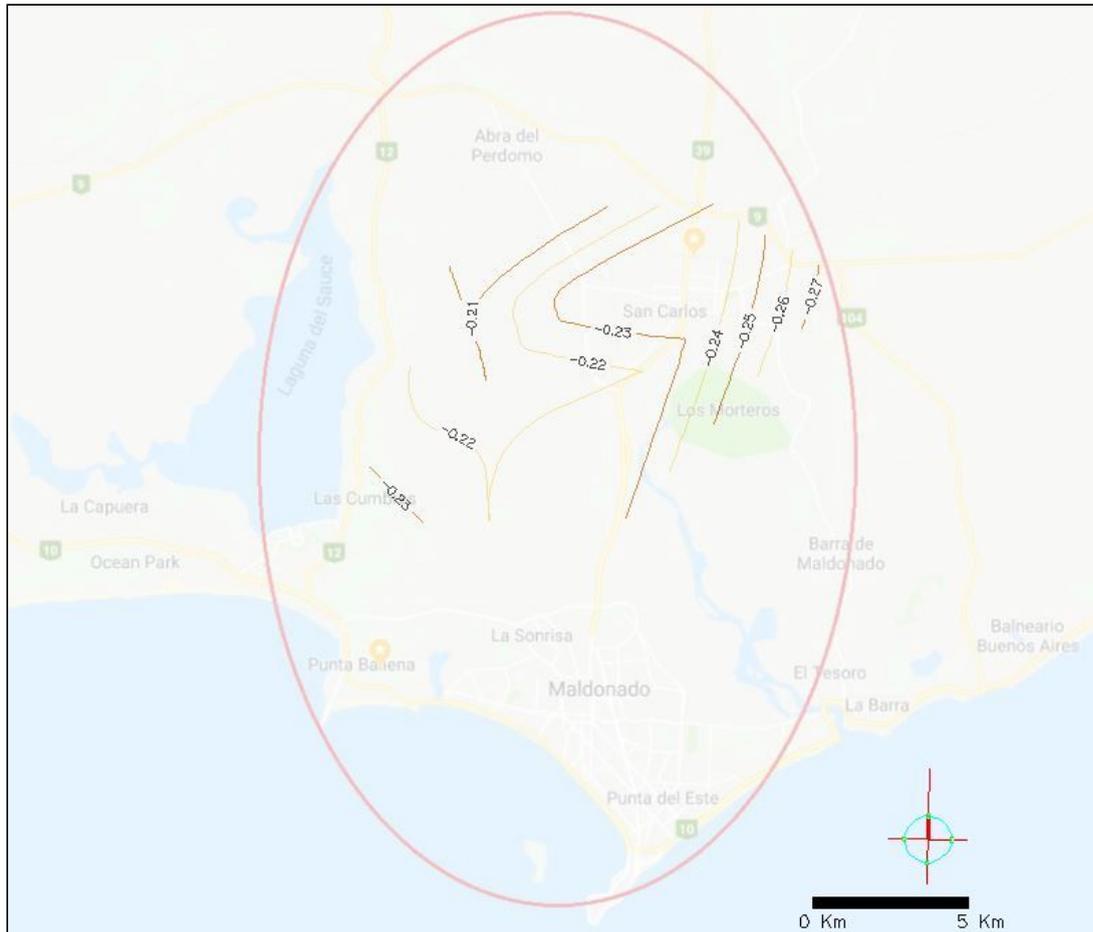


Imagen 39 - Isólineas de los ΔN para transformación de 5 parámetros

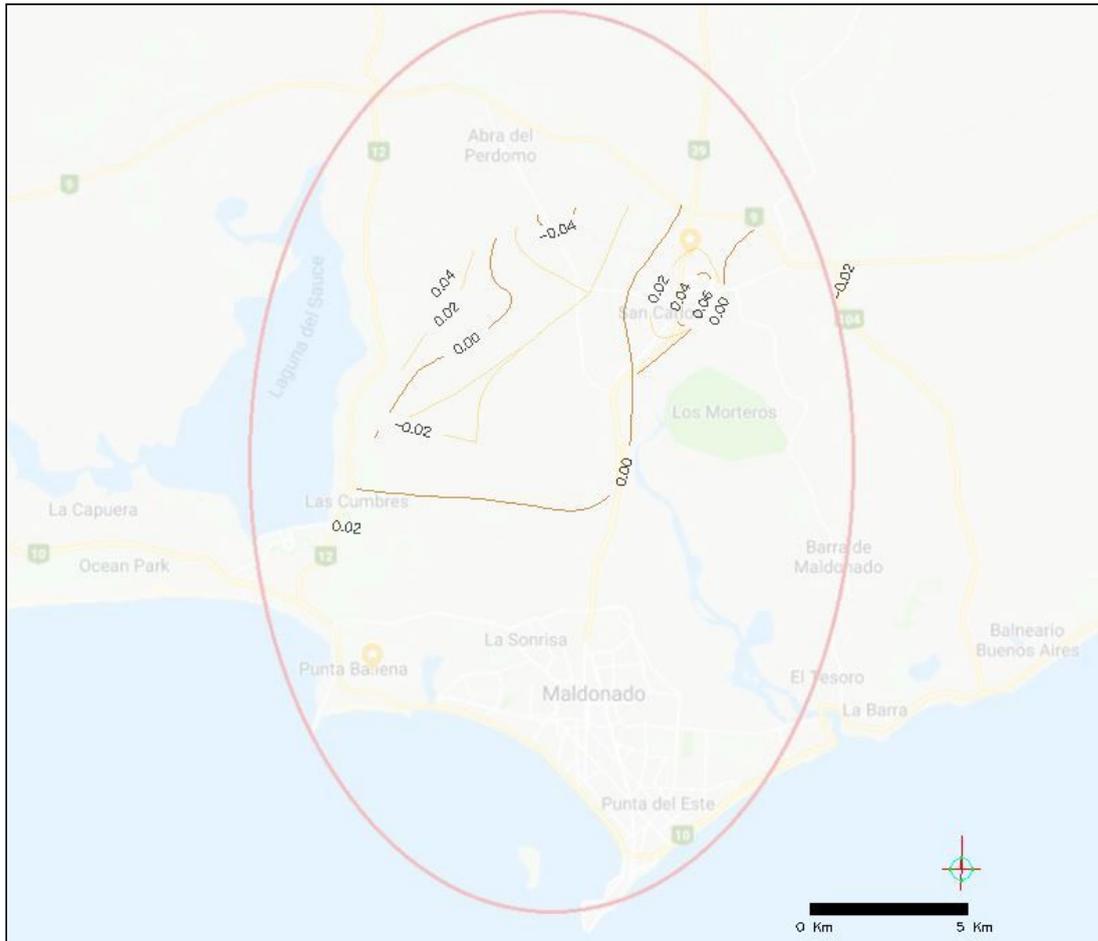


Imagen 40 - Isolíneas de los residuales para transformación de 5 parámetros

5.2.2- Modelo Sur



Imagen 41 - Distribución de los puntos a utilizar en modelo Sur

El modelo Sur se generó con 8 puntos, reservando 2 para la validación. Cuenta con una distancia promedio de 3 km entre puntos. Este modelo tiene la desventaja de no contar con mucha información en la zona del medio.

Las tablas siguientes tiene en la primera columna los parámetros correspondientes a la transformación, en la siguiente tienen el número de punto, el ΔN observado, el ΔN modelado y la diferencia. Los valores están en metros.

Trigonometría Clásica, 4 parámetros:

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\phi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\phi_i \times \sen\lambda_i) + X_4 \sen\phi_i$$

4 Parámetros	
X1	-99402.76061
X2	46770.68731
X3	-66710.04302
X4	-56948.61852

Trigonométrica Clásica, 5 parámetros:

$$\Delta N_i = X_1 + X_2 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_3 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_4 \text{sen}\varphi_i + X_5 \text{sen}^2\varphi_i$$

5 Parámetros	
X1	3070.93255
X2	50942.81855
X3	-72609.24713
X4	326656.79996
X5	339326.06101

Modelo de Transformación de similitud diferencial, 6 parámetros

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} +$$
$$+ X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i)$$

6 Parámetros	
X1	196044.44883
X2	130077.67179
X3	-40240.41985
X4	166185.93849
X5	384829.09574
X6	0.00187

Modelo de Transformación de similitud diferencial, 7 parámetros

$$\Delta N_i = X_1 (\cos\varphi_i \times \cos\lambda_i) + X_2 (\cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i) + X_3 \text{sen}\varphi_i + X_4 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \text{sen}\lambda_i}{W_i} +$$
$$+ X_5 \frac{\text{sen}\varphi_i \times \cos\varphi_i \times \cos\lambda_i}{W_i} + X_6 (a \times W_i + h_i) + X_7 \frac{1 - f^2 \times \text{sen}^2\varphi_i}{W_i}$$

7 Parámetros	
X1	188180.57646
X2	195939.09618
X3	30186.73046
X4	254704.03428
X5	389648.01372
X6	0.00208
X7	54042.03100

La tabla a continuación contiene para cada punto generador del modelo Sur, el ΔN observado, el ΔN modelado para todas las transformaciones y la diferencia de cada uno respecto del observado.

Punto	ΔN Observado	ΔN Modelado (4p)	Residual (4p)	ΔN Modelado (5p)	Residual (5p)	ΔN Modelado (6p)	Residual (6p)	ΔN Modelado (7p)	Residual (7p)
28	-0.207	-0.214	-0.007	-0.199	0.008	-0.193	0.014	-0.193	0.014
29	-0.178	-0.213	-0.035	-0.202	-0.024	-0.192	-0.014	-0.192	-0.014
31	-0.215	-0.202	0.013	-0.224	-0.010	-0.220	-0.006	-0.219	-0.004
33	-0.244	-0.228	0.016	-0.233	0.011	-0.242	0.002	-0.242	0.002
34	-0.248	-0.219	0.029	-0.240	0.007	-0.246	0.001	-0.247	0.001
35	-0.243	-0.232	0.011	-0.223	0.020	-0.237	0.006	-0.239	0.004
36	-0.259	-0.272	-0.013	-0.271	-0.012	-0.264	-0.005	-0.262	-0.003
37	-0.176	-0.189	-0.012	-0.177	0.000	-0.175	0.001	-0.176	0.001

Tabla 13 - ΔN observado, ΔN modelado y el residual de las distintas transformaciones, aplicadas a los puntos utilizados para generar el modelo Sur

5.2.2.1- Validación de Modelo Sur

Evaluación Interna

Otra vez utilizando el enfoque empírico, se comprueba que el ajuste zonal dio mejores resultados que el global.

	Residual (4p)	Residual (5p)	Residual (6p)	Residual (7p)
# Puntos	8	8	8	8
Promedio (μ)	0.000	0.000	0.000	0.000
Desv. est. (σ)	0.021	0.014	0.009	0.008
Mín.	-0.035	-0.024	-0.014	-0.014
Máx.	0.029	0.020	0.014	0.014
RMS	0.021	0.014	0.009	0.008

Tabla 14 - Estadísticos calculados a partir de los puntos generadores del modelo Sur

Para este ajuste, el modelo de 7 parámetros obtuvo los mejores estadísticos.

Evaluación Externa

Se dejaron solo 2 puntos fuera del modelo para evaluar. Los resultados fueron:

Punto	ΔN Observado	ΔN Modelado (4p)	Residual (4p)	ΔN Modelado (5p)	Residual (5p)	ΔN Modelado (6p)	Residual (6p)	ΔN Modelado (7p)	Residual (7p)
30	-0.221	-0.207	0.014	-0.215	0.006	-0.208	0.013	-0.207	0.014
32	-0.230	-0.212	0.018	-0.224	0.006	-0.230	0.000	-0.230	0.000

Tabla 15 - ΔN observado, modelado y el residual de las distintas transformaciones,

aplicadas a los puntos testigos

	Residual (4p)	Residual (5p)	Residual (6p)	Residual (7p)
# Puntos	2	2	2	2
Promedio (μ)	0.016	0.006	0.006	0.007
Desv. est. (σ)	0.002	0.000	0.009	0.010
Mín.	0.014	0.006	0.000	0.000
Máx.	0.018	0.006	0.013	0.014
RMS	0.016	0.006	0.011	0.012

Tabla 16 - Estadísticos calculados a partir de los puntos testigos

Vemos que según estos estadísticos el mejor ajuste sería el de 5 parámetros. Como no es el mismo que en la evaluación interna, se decidió sumar cuadráticamente todos los RMS internos y externos y ver cual es menor.

Este cálculo arrojó que el RMS combinado menor es el de 6 parámetros.

	Residual (4p)	Residual (5p)	Residual (6p)	Residual (7p)
RMS combinado	0.026	0.016	0.014	0.015

Tabla 17 - Residuales para cada transformación

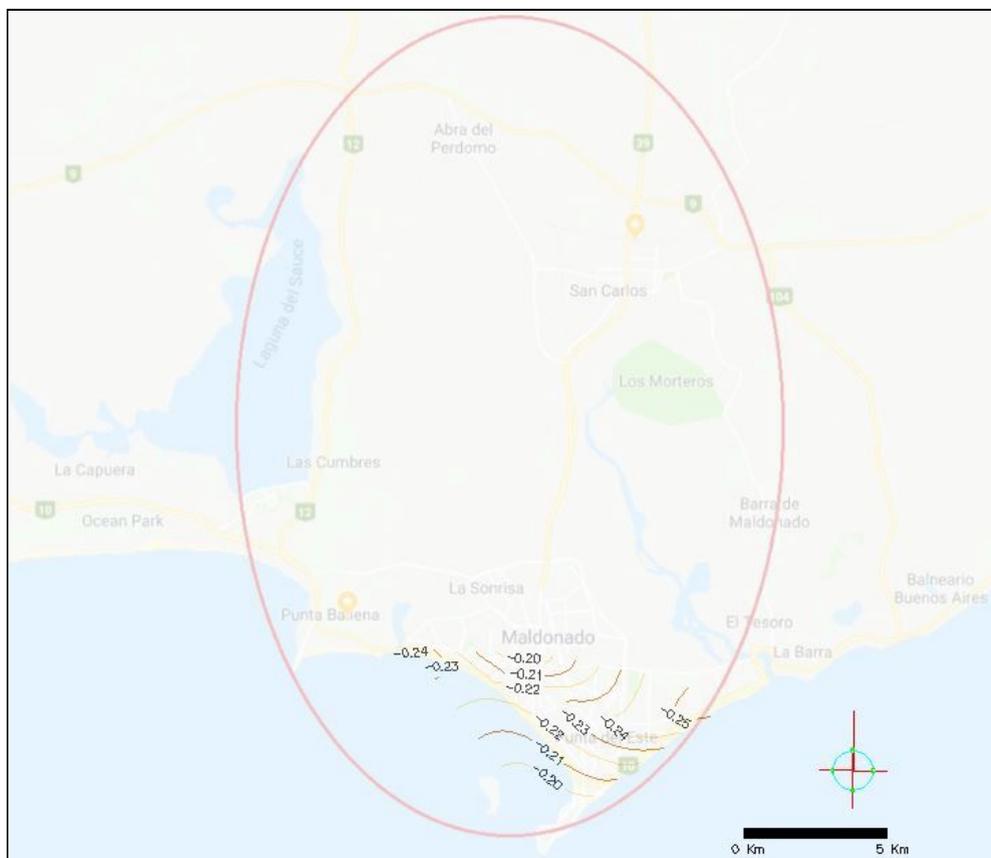


Imagen 42 - Isolíneas de los ΔN para transformación de 6 parámetros

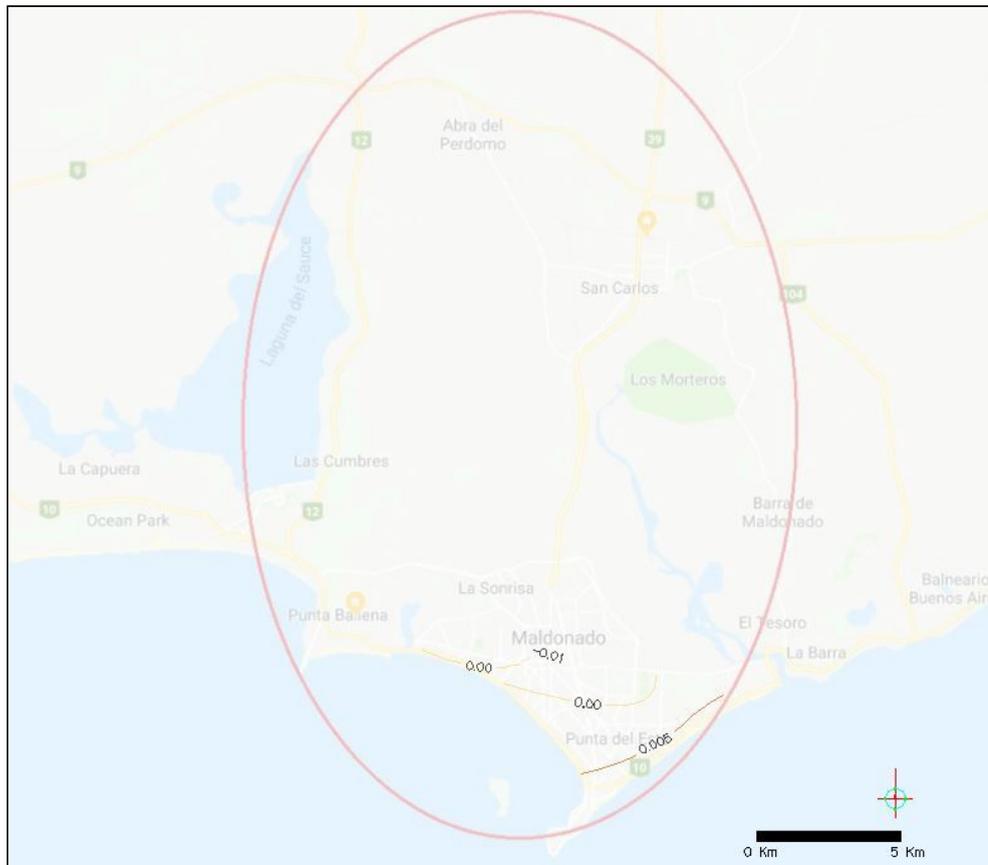


Imagen 43 - Isolíneas de los residuales para transformación de 6 parámetros

6- Estudios

6.1- Desnivel relativo con GNSS

Una práctica muy común en la Agrimensura, para obtener cotas oficiales en determinado relevamiento, es medir al menos un punto con cota conocida y ajustar.

El objetivo de este capítulo es analizar y comparar esta práctica con los desniveles obtenidos en nuestro modelo y con los desniveles obtenidos con nivelación compuesta.

También queremos comprobar si la utilización de este modelo mejora los desniveles relativos calculados en base al EGM08

Primero lo analizamos de forma teórica.

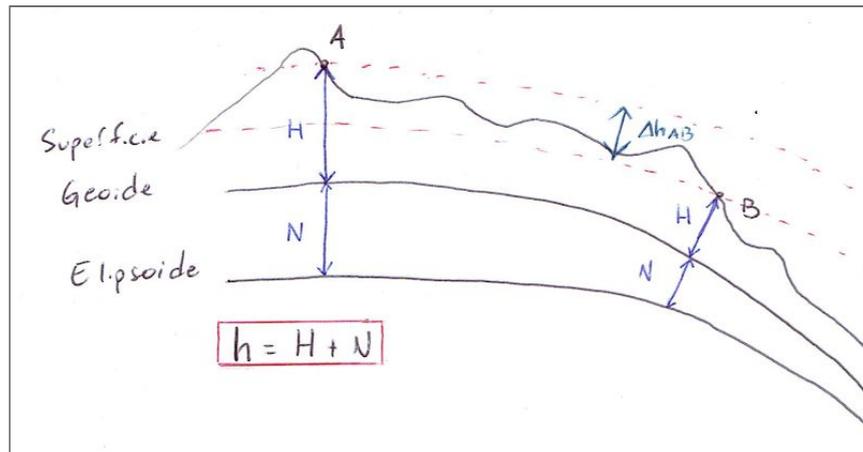


Imagen 44 - Esquema de alturas

$$h_A = H_A + N_A$$

$$h_B = H_B + N_B$$

$$\Delta h_{AB} = H_B - H_A$$

$$\Delta h_{AB} = H_B + N_B - H_A - N_A$$

$$\Delta h_{AB} = (H_B - H_A) + (N_B - N_A)$$

Si conozco H_A :

$$H_B = H_A + \Delta h_{AB} - (N_B - N_A)$$

Queda demostrado que la exactitud de la altura ortométrica en B dependerá de que tan bien se modele la diferencia entre ambas ondulaciones geoidales.

La ecuación permite ver que si la medida Δh se efectúa sobre una superficie con igual valor de N , la diferencia entre las alturas elipsoidales es igual a la diferencia entre alturas ortométricas.

Para esto se generó una tabla con los desniveles obtenidos por distintos métodos. Se eligió el Modelo Norte de 5 parámetros para calcular la altura ortométrica modelada. Los puntos de la tabla son los nivelados por nosotros mismos en el tramo 1, lo que nos da seguridad de que el desnivel es correcto con las precisiones antes comentadas.

En la tabla tenemos la distancia de todos los puntos al punto 19. También todos los desniveles están calculados en referencia al 19, es decir la primer línea el desnivel es cero, en la segunda es cota **pto 19** menos cota **pto 18**, en la tercera es cota **pto 19** menos **pto 21** y así sucesivamente.

Puntos	Distancia (km)	Cota oficial	Desnivel medido	H egm08	Desnivel H egm08	H modelada	desnivel H modelo
19	0.00	51.190	0.000	51.423	0.000	51.201	0.000
18	2.62	27.026	24.165	27.226	24.197	27.009	24.192
21	4.57	26.216	24.975	26.407	25.016	26.194	25.007
17	5.15	17.676	33.515	17.877	33.546	17.666	33.536
16	6.06	19.173	32.017	19.381	32.042	19.170	32.031
15	7.08	24.977	26.213	25.203	26.220	24.994	26.207
14	8.29	32.366	18.825	32.619	18.804	32.412	18.789

Tabla 18 - Distancias y desniveles tomando como cero y referencia respectivamente, al punto 19

Diferencias entre desniveles	
Cota oficial y H egm08	Cota oficial y H modelo
0.000	0.000
-0.033	-0.027
-0.041	-0.032
-0.032	-0.021
-0.025	-0.014
-0.007	0.006
0.020	0.035

Tabla 19 - Diferencia entre cota oficial y modelos utilizados

Como se ve los desniveles se asemejan entre sí, no habiendo grandes diferencias entre utilizar el EGM08 y nuestro MTA en la práctica relativa. La siguiente gráfica representa es el **error** entre el desnivel medido (nivelación geométrica) y los desniveles calculados por un lado con el modelo EGM08 y por otro con nuestro MTA. Los valores son los de la tabla anterior.

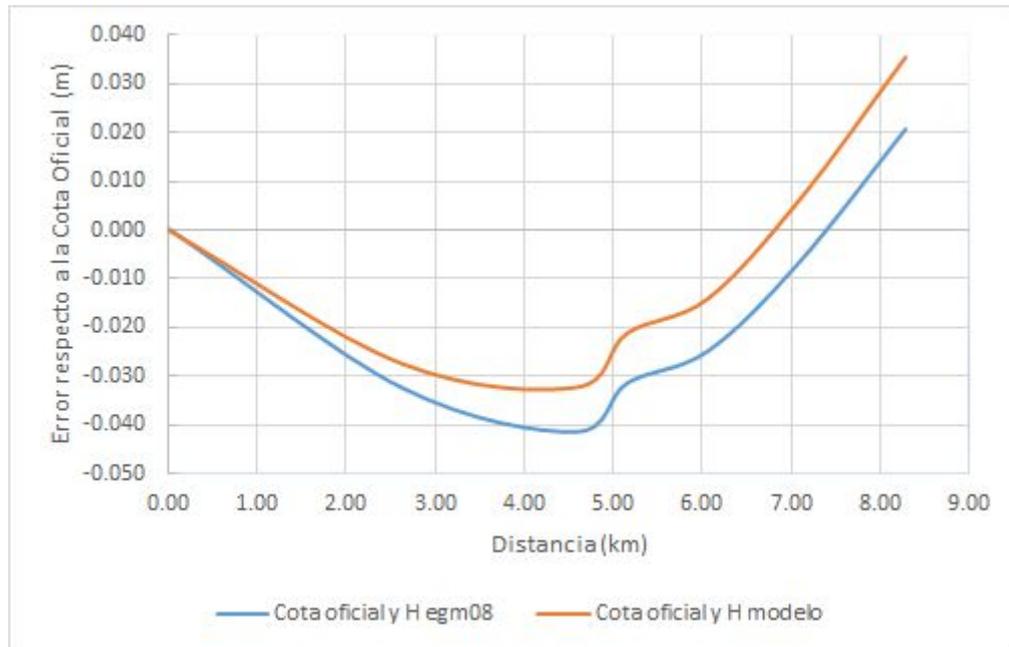


Imagen 45 - Error entre los desniveles medidos y los calculados

La gráfica nos muestra que el error en nuestro MTA es menor dentro de los primeros 7 km, luego pasa a ser menor el del EGM08. También ese comportamiento similar nos dice que el MTA y el del EGM08 se comportan igual en esa misma zona.

La diferencia entre los errores de los modelos no es siempre la misma y tampoco es significativa. Por lo tanto no se puede recomendar uno sobre otro. Lo que sí podemos decir es que nuestro modelo **no** mejora los resultados en este tipo de prácticas.

6.2- Gravedad

Por último describiremos el procedimiento para incluir la gravedad en el trabajo y analizaremos y compararemos los resultados obtenidos. El objetivo de incluir esto es ver cómo afecta la misma a la medición de desniveles en un tramo longitudinal de nivelación.

Para estudiar la magnitud de la influencia de la gravedad en lo largo del **tramo 1** y el **tramo 3** de nivelación se requirió los datos de la Red Gravimétrica Nacional del SGM. Con los mismos se procedió a interpolar los datos y obtener para cada punto el valor de la gravedad. La interpolación

estuvo a cargo de nuestro tutor Ing. Agrim. Jorge Faure. Los resultados a continuación.



Imagen 46 - Interpolación de valores de gravedad

Punto	Gravedad (mGal)
19	979719.9
18	979721.7
21	979719.7
17	979720.6
16	979719.3
15	979717.2
14	979714.7

Tabla 23 - Gravedad de los puntos

Una vez hallada la gravedad de todos los puntos necesarios, se calculó la diferencia de Números Geopotenciales, por lo tanto teniendo el desnivel geométrico entre los puntos, el cálculo se reduce a:

$$dC_{1-2} = g_m \times dn$$

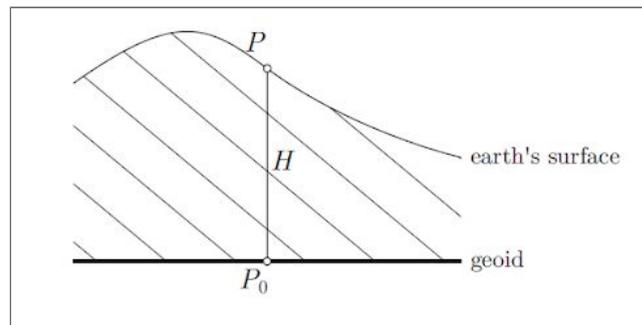
Donde :

dC = diferencia de número geopotencial entre los puntos A y B

g_m = gravedad media entre 1 y 2 (promedio de las gravedades entre puntos)

dn = desnivel medido entre 1 y 2

Para calcular el primer número geopotencial (C_{19}) se utilizó la gravedad media a lo largo de la línea de la plomada. Se utilizó la gravedad media de Helmert (\bar{g})



$$\bar{g} = g + 0.0424 \times H$$

$$C = \bar{g} * H$$

H = Altura Ortométrica

C = Número Geopotencial

Los resultados fueron los siguientes.

Punto	Gravedad en pto (m/s ²)	Cota oficial (m)	Desnivel (m)	Gravedad media (m/s ²)	dC (m ² /s ²)	C (m ² /s ²)
19	9.797199	51.190				50.152
18	9.797217	27.026	-24.165	9.797208	-23.674	26.478
21	9.797197	26.216	-0.810	9.797207	-0.794	25.684
17	9.797206	17.676	-8.540	9.797202	-8.367	17.317
16	9.797193	19.173	1.498	9.797200	1.467	18.784
15	9.797172	24.977	5.804	9.797183	5.686	24.471
14	9.797147	32.366	7.389	9.797160	7.239	31.709

Tabla 24 - Diferencia de número geopotencial y número geopotencial

Para obtener alturas ortométricas se utilizan las alturas de Helmert.

$$H = \frac{C}{g + 0.0424 H}$$

Donde:

H = Altura Ortométrica

C = Número Geopotencial

$g = \text{Gravedad en el punto}$

Este procedimiento requiere varias iteraciones, con las alturas ortométricas obtenidas se calcula nuevamente.

Punto	H ^{ort}
19	51.190
18	27.026
21	26.216
17	17.676
16	19.173
15	24.977
14	32.366

Por último compararemos los desniveles obtenidos mediante nivelación geométricas y los obtenidos mediante con la corrección por gravedad. Los resultados se expresan en milímetros para poder apreciar las diferencias.

Punto	Desnivel geométrico (m)	Desnivel ortométrico (m)	Diferencia (mm)
19			
18	-24.165	-24.165	0.010
21	-0.810	-0.810	0.056
17	-8.540	-8.540	-0.004
16	1.498	1.498	0.022
15	5.804	5.804	0.036
14	7.389	7.389	0.055

El hecho de que nosotros nivelamos al milímetro nos hace imposible afirmar que la gravedad haya afectado nuestra nivelación.

7- Conclusiones

Se cumplieron los objetivos, se determinaron distintos modelos de transformación de alturas con precisiones inferiores a los 4 cm. Con los modelos definidos se pueden definir posiciones ortométricas absolutas en cualquier punto la zona de estudio. Sin embargo, nuestro modelo no mejora la alturas ortométricas relativas entre puntos.

Sobre los modelos en particulares, se generó el modelo global, el cual arrojó precisiones del entorno de 3.5 centímetros, quedandonos el modelo de 7 parámetros por ser milimétricamente mejor que los demás.

Al finalizar el modelo global, nos pareció que podíamos mejorar la precisión si lo dividimos en dos, uno para la región Norte y otro para la región Sur. Nuestra hipótesis fue correcta, ambos modelos bajaron su error medio cuadrático, para el norte fue de 3 cm (con el modelo de 5 parámetros) y para el sur de 1.5 cm (con el modelo de 6 parámetros).

En la investigación sobre diferencias de alturas ortométricas relativas determinamos que nuestro modelo no mejora significativamente los resultados sobre el modelo EGM08.

En cuanto a los resultados utilizando la gravedad, estos fueron iguales a los otros. Podemos suponer que esto se debe a que las distancias son cortas y la gravedad no varía lo suficiente como para afectar.

8- Bibliografía

BERMÚDEZ, Bermúdez. H.; Cánneva. N. Pautas para la presentación de trabajos. 2009. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UdelaR.

VILLALUENGA, Antonio Villaluenga - Jaime Bentancur. Estudio y refinamiento de modelos geoidales: Proyecto Final. Tutor: Jorge Faure. 2009. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Uruguay.

INSTITUTO DE AGRIMENSURA, Apuntes de la asignatura Geodesia 2. Departamento de Geodesia. Facultad de Ingeniería. Uruguay.

INSTITUTO DE AGRIMENSURA, Apuntes de la asignatura Geodesia 3. Departamento de Geodesia. Facultad de Ingeniería. Uruguay.

INSTITUTO DE AGRIMENSURA, Danilo Blanco - Rocío López. Método de mínimos cuadrados. Curso de Teoría de errores 2. Facultad de Ingeniería. Uruguay.

YAÑEZ, Laura Yañez - Nestor Cuentas. Modelado del Cuasi Geoide a partir de nivelación geométrica, gravimétrica y posicionamiento satelital: Proyecto Final. Tutor: Jorge Faure. 2017. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Uruguay.

GALLO, Mauricio Gallo - Gisselle Mainé. Modelo de Transformación de Alturas Localizado en la Ciudad de Dolores: Proyecto Final. Tutor: Jorge Faure. 2018. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, Uruguay.

FOTOPOULOS, Georgia Fotopoulos. An Analysis on the Optimal Combination of Geoid, Orthometric and Ellipsoidal Height Data. 2003. University of Calgary. Canadá.

LLUVIERA, Alvez. P - Lluviera. A. P. (2010). MRGMVD 2010 y su modelo de transformación de alturas asociado. 2010. Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UdelaR

VELLA, P. Use Of Similarity Transformations To Improve GPS Heighting. Universidad Tecnológica de Malasia. 2003. Malasia.

TUSELL, F. Análisis de Regresión Introducción teórica y práctica basada en R. 2011. Bilbao.

VERGOS, G.S Vergos - M.G Sideris. Evaluation of Geoid Models and Validation of Geoid and GPS/Leveling Undulations in Canada. Canada.

BENAVIDEZ, Alberto Benavidez Sosa. Fundamentos de Geodesia Física. 2004. Montevideo Uruguay.

LAPIS, Claudia Tocho y Luis Guarracino – Lecture and Seminar Notes: The Determination and Use of the Geoid. 2010 - La Plata Argentina.

MORITZ, Bernhard Hoffman - Wellenhof Helmut Moritz. Physical Geodesy. Segunda edición. 2005. Austria: SpringerWienNewYork.

PÉREZ, Pérez Rodino. R. Parámetros de Transformación entre el Sistema SIRGAS 95 y los Sistemas Locales CDM y ROU-USAMS (Yacaré). Instituto de Agrimensura, Facultad de Ingeniería, UdelAR.

Servicio Geográfico Militar. www.sgm.gub.uy

Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas. www.sirgas.org/es/.

International GNSS Service (IGS) [ftp:// igs.org/pub/product/](ftp://igs.org/pub/product/) . [Consulta: Enero 2019]

Leica CS10/CS15. Manual de empleo.

9- Anexos

Planillas de Nivelación

Tramo 1

Punto	IDA				VUELTA				Diferencia Desniveles	Observaciones
	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 1	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 2		
UYMA.008	0.986				1.036					
	0.754		1.913	-0.927	0.687		1.963	-0.927	0.000	
	0.089		2.708	-1.954	0.101		2.641	-1.954	0.000	
	0.988		3.309	-3.22	1.002		3.32	-3.219	-0.001	
	0.91		1.848	-0.86	0.905		1.863	-0.861	0.001	
17	1.069		2.056	-1.146	1.162		2.05	-1.145	-0.001	
	0.668		1.652	-0.583	0.784		1.746	-0.584	0.001	
	1.689		0.861	-0.193	1.757		0.978	-0.194	0.001	
	1.615		1.23	0.459	1.659		1.299	0.458	0.001	
	1.456		1.099	0.516	1.503		1.142	0.517	-0.001	
	1.199		1.538	-0.082	1.278		1.583	-0.08	-0.002	
	1.02		1.79	-0.591	1.047		1.87	-0.592	0.001	
	2.267		0.801	0.219	2.306		0.828	0.219	0.000	
16	2.208		0.514	1.753	2.135		0.553	1.753	0.000	
	2.239		0.763	1.445	2.283		0.688	1.447	-0.002	
	2.617		0.155	2.084	2.625		0.2	2.083	0.001	
	3.203		1.135	1.482	3.228		1.142	1.483	-0.001	
	0.912		0.509	2.694	0.89		0.532	2.696	-0.002	
	1.048		2.323	-1.411	1.016		2.3	-1.41	-0.001	
	0.245		1.675	-0.627	0.248		1.645	-0.629	0.002	
	0.808		3.682	-3.437	0.832		3.684	-3.436	-0.001	
	2.623		0.922	-0.114	2.663		0.946	-0.114	0.000	
	2.41		0.139	2.484	2.465		0.179	2.484	0.000	
15	1.182		1.208	1.202	1.191		1.263	1.202	0.000	
	0.092		2.642	-1.46	0.094		2.651	-1.46	0.000	
	1.021		3.005	-2.913	1.001		3.006	-2.912	-0.001	
	2.503		1.69	-0.669	2.49		1.67	-0.669	0.000	
	3.129		0.11	2.393	3.155		0.098	2.392	0.001	
	1.138		1.26	1.869	1.135		1.288	1.867	0.002	
	1.387		1.126	0.012	1.465		1.124	0.011	0.001	
	2.183		0.564	0.823	2.182		0.643	0.822	0.001	
	3.412		0.5	1.683	3.442		0.5	1.682	0.001	
	2.689		0.112	3.3	2.72		0.142	3.3	0.000	
	1.781		0.761	1.928	1.78		0.79	1.93	-0.002	
14			1.357	0.424			1.356	0.424	0.000	
									0.003	

Tramo 2 - parte 1

Punto	IDA				VUELTA				Diferencia Desniveles	Observaciones
	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 1	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 2		
2.64.007	1.452				1.378					
28			1.316	0.136			1.242	0.136	0.000	Punto excéntrico a Jefatura
2.64.007	2				2.006					Se vuelve a iniciar desde Jefatura para continuar con la nivelación
	1.828		0.823	1.177	1.842		0.828	1.178	-0.001	
	1.24		1.063	0.765	1.226		1.075	0.767	-0.002	
	1.322		1.386	-0.146	1.298		1.372	-0.146	0.000	
29	0.146		2.497	-1.175	0.183		2.474	-1.176	0.001	
	0.136		3.33	-3.184	0.167		3.367	-3.184	0.000	
	0.407		2.81	-2.674	0.434		2.842	-2.675	0.001	
	0.802		3.016	-2.609	0.773		3.041	-2.607	-0.002	
	0.764		2.242	-1.44	0.733		2.214	-1.441	0.001	
	1.159		1.888	-1.124	1.108		1.859	-1.126	0.002	
	1.335		1.742	-0.583	1.292		1.691	-0.583	0.000	
	1.023		1.645	-0.31	1.044		1.603	-0.311	0.001	
	1.24		1.587	-0.564	1.341		1.606	-0.562	-0.002	
30	0.519		1.414	-0.174	0.4		1.516	-0.175	0.001	
	0.34		3.065	-2.546	0.302		2.946	-2.546	0.000	
	1.189		1.975	-1.635	1.246		1.938	-1.636	0.001	
	0.689		2.706	-1.517	0.663		2.762	-1.516	-0.001	
	0.621		2.847	-2.158	0.601		2.819	-2.156	-0.002	
	0.595		3.043	-2.422	0.548		3.023	-2.422	0.000	
31			2.657	-2.062			2.611	-2.063	0.001	

Tramo 2 - parte 2

Punto	IDA				VUELTA				Diferencia Desniveles	Observaciones
	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 1	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 2		
31	2.219				2.186					
	2.298		0.168	2.051	2.303		0.133	2.053	-0.002	
	1.808		0.362	1.936	1.855		0.365	1.938	-0.002	
	0.141		1.5	0.308	0.22		1.547	0.308	0.000	
	1.099		2.312	-2.171	1.069		2.389	-2.169	-0.002	
	1.379		0.783	0.316	1.411		0.753	0.316	0.000	
	0.772		1.75	-0.371	0.779		1.781	-0.37	-0.001	
	0.835		2.245	-1.473	0.85		2.251	-1.472	-0.001	
32	1.563		1.708	-0.873	1.559		1.724	-0.874	0.001	
	2.792		1.022	0.541	2.642		1.017	0.542	-0.001	
	0.851		1.079	1.713	0.835		0.929	1.713	0.000	
	0.999		3.263	-2.412	1.106		3.247	-2.412	0.000	
	3.026		1.799	-0.8	3.016		1.905	-0.799	-0.001	
	2.666		0.243	2.783	2.645		0.232	2.784	-0.001	
	1.208		1.735	0.931	1.294		1.714	0.931	0.000	
	1.392		1.647	-0.439	1.356		1.734	-0.44	0.001	
	0.847		1.552	-0.16	0.869		1.518	-0.162	0.002	
	1.352		1.372	-0.525	1.411		1.397	-0.528	0.003	
	1.099		1.804	-0.452	1.028		1.864	-0.453	0.001	
33			1.831	-0.732			1.762	-0.734	0.002	

Tramo 3

Punto	IDA				VUELTA				Diferencia Desniveles	Observaciones
	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 1	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 2		
UYMA.008	1.524				1.513					
	0.987		1.601	-0.077	1.053		1.588	-0.075	-0.002	
	1.557		1.58	-0.593	1.583		1.645	-0.592	-0.001	
	2.042		0.968	0.589	2.049		0.994	0.589	0.000	
	1.55		1.149	0.893	1.509		1.156	0.893	0.000	
	1.684		1.162	0.388	1.695		1.122	0.387	0.001	
	1.43		1.259	0.425	1.423		1.269	0.426	-0.001	
	1.513		1.495	-0.065	1.55		1.487	-0.064	-0.001	
	1.457		1.313	0.2	1.515		1.35	0.2	0.000	
	1.687		1.321	0.136	1.666		1.378	0.137	-0.001	
	1.584		1.362	0.325	1.694		1.339	0.327	-0.002	
	1.692		0.601	0.983	1.694		0.711	0.983	0.000	
	1.329		1.198	0.494	1.336		1.2	0.494	0.000	
	1.112		1.431	-0.102	1.111		1.439	-0.103	0.001	
	0.928		1.92	-0.808	0.895		1.92	-0.809	0.001	
	1.17		2.208	-1.28	1.179		2.174	-1.279	-0.001	
	1.407		1.415	-0.245	1.454		1.422	-0.243	-0.002	
18	1.464		1.43	-0.023	1.47		1.478	-0.024	0.001	
	1.544		1.22	0.244	1.534		1.225	0.245	-0.001	
	1.636		1.018	0.526	1.602		1.008	0.526	0.000	
	1.591		1.262	0.374	1.608		1.229	0.373	0.001	
	1.609		1.197	0.394	1.639		1.215	0.393	0.001	
	1.552		0.976	0.633	1.586		1.006	0.633	0.000	
	1.59		1.176	0.376	1.607		1.208	0.378	-0.002	
	2.23		1.073	0.517	2.246		1.091	0.516	0.001	
	1.6		0.702	1.528	1.648		0.716	1.53	-0.002	
	1.744		1.15	0.45	1.74		1.201	0.447	0.003	
	1.954		0.893	0.851	1.928		0.89	0.85	0.001	
	1.743		0.989	0.965	1.698		0.963	0.965	0.000	
	2.14		0.991	0.752	2.199		0.947	0.751	0.001	
	1.764		0.868	1.272	1.754		0.925	1.274	-0.002	
	2.097		1.14	0.624	2.072		1.128	0.626	-0.002	
	1.927		1.228	0.869	1.9		1.203	0.869	0.000	
	2.053		0.529	1.398	2.062		0.502	1.398	0.000	
	1.99		0.735	1.318	1.891		0.744	1.318	0.000	
	1.328		1.183	0.807	1.303		1.082	0.809	-0.002	
	1.622		1.415	-0.087	1.579		1.39	-0.087	0.000	
	1.985		1.878	-0.256	1.918		1.833	-0.254	-0.002	
	2.167		1.384	0.601	2.128		1.317	0.601	0.000	
	2.367		0.316	1.851	2.402		0.276	1.852	-0.001	
	2.364		0.534	1.833	2.348		0.569	1.833	0.000	
	2.879		0.322	2.042	2.85		0.306	2.042	0.000	
	2.261		0.193	2.686	2.294		0.165	2.685	0.001	
19			0.666	1.595			0.701	1.593	0.002	

Tramo 4

Punto	IDA				VUELTA				Diferencia Desniveles	Observaciones
	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 1	Lectura Atrás	Intermedio	Lectura Adelante	Desnivel 2		
35	2.268				2.295					
	2.659		0.283	1.985	2.661		0.312	1.983	0.002	
	3.043		0.252	2.407	3.042		0.254	2.407	0.000	
	3.713		0.183	2.86	3.762		0.183	2.859	0.001	
	3.076		0.22	3.493	3.083		0.269	3.493	0.000	
	3.058		0.151	2.925	3.059		0.161	2.922	0.003	
	0.683		0.692	2.366	0.72		0.692	2.367	-0.001	
	1.582		3.214	-2.531	1.581		3.25	-2.53	-0.001	
	2.041		2.889	-1.307	2.102		2.89	-1.309	0.002	
	3.904		0.282	1.759	3.886		0.343	1.759	0.000	
	1.999		2.441	1.463	2.029		2.422	1.464	-0.001	
	3.589		0.66	1.339	3.609		0.69	1.339	0.000	
	0.28		0.562	3.027	0.279		0.581	3.028	-0.001	
	0.743		3.813	-3.533	0.723		3.812	-3.533	0.000	
	3.779		0.968	-0.225	3.79		0.949	-0.226	0.001	
	3.649		0.059	3.72	3.716		0.07	3.72	0.000	
	1.103		0.181	3.468	1.062		0.248	3.468	0.000	
	0.353		3.762	-2.659	0.379		3.722	-2.66	0.001	
	0.14		3.4	-3.047	0.13		3.423	-3.044	-0.003	
	1.88		2.352	-2.212	1.9		2.343	-2.213	0.001	
	2.98		1.42	0.46	3.009		1.44	0.46	0.000	
34			1.028	1.952			1.059	1.95	0.002	

Especificaciones técnicas del instrumental utilizado

Receptor Leica Viva GNSS GS08+



- Recepción de satélites: Doble frecuencia.
- Canales del instrumento: 14 canales para el seguimiento continuo en L1 y L2 (GPS) + 12 canales para el seguimiento continuo en L1 y L2 (GLONASS) + 2 canales para seguimiento SBAS (EGNOS, WAAS, MSAS, GAGAN).
- Precisión: La precisión depende de varios factores, que van desde el número de satélites encontrados, la geometría de la constelación, el tiempo de observación, la precisión de las efemérides, las perturbaciones ionosféricas, el efecto multitrayectoria y las ambigüedades resueltas. Las siguientes precisiones, indicadas como error medio cuadrático, están basadas en mediciones procesadas empleando LGO y en mediciones en tiempo real. La utilización de múltiples sistemas GNSS pueden incrementar la precisión hasta en un 30% comparada con la utilización exclusiva de satélites GPS.
- Código diferencial: La precisión de la línea base con una solución de código diferencial para levantamientos estáticos y cinemáticos es de 25 cm.

FASE DIFERENCIAL EN POST-PROCESO			
Estático y estático rápido			
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
5 mm + 0,5ppm	10 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm
Estático con observaciones largas			
Estático		Cinemático	
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
3 mm + 0,5ppm	6 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm
FASE DIFERENCIAL EN TIEMPO REAL			
Estático		Cinemático	
Horizontal	Vertical	Horizontal	Vertical
5 mm + 0,5ppm	10 mm + 0,5ppm	10 mm + 1ppm	20 mm + 1ppm

Nivel Automático Leica NA728



- Aumento del anteojo: 28 X
- Distancia mínima de enfoque: 0.7 mm
- Constante de multiplicación: 100
- Rango del compensador: 15'
- Sensibilidad del nivel esférico: 10' / 2 mm