



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA



Detección de perturbaciones inestables a partir de la frecuencia medida por las PMU.

TESIS PRESENTADA A LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA POR

Ing. Agustín Fraschini Silvarredonda

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGISTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.

DIRECTOR DE TESIS

MSc. Ing. Celia Sena..... Universidad de la República

TRIBUNAL

MSc. Ing. Michel Artenstein..... Universidad de la República

MSc. Ing. César Briozzo..... Universidad de la República

MSc. Ing. Alfredo Piria Universidad de la República

DIRECTOR ACADÉMICO

Msc. Ing. Celia Sena..... Universidad de la República

Montevideo
sábado 6 mayo, 2017

Detección de perturbaciones inestables a partir de la frecuencia medida por las PMU., Ing. Agustín Fraschini Silvarredonda.

ISSN 1688-2806

Esta tesis fue preparada en L^AT_EX usando la clase iietesis (v1.1).

Contiene un total de 91 páginas.

Compilada el sábado 6 mayo, 2017.

<http://iie.fing.edu.uy/>

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi familia, por el apoyo incondicional, en especial a mi esposa Lucía y a mis padres por su paciencia durante todo este tiempo.

Agradezco especialmente a mi Directora de Tesis Msc. Ing Celia Sena por su guía, sugerencias, consejos y apoyo durante toda la tesis.

Quiero agradecer también al grupo Estabilidad y Control del Instituto de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, por sus sugerencias y apoyo durante el proyecto del Fondo Sectorial de Energía *FSE_1_2013_1_10854* que dio comienzo de esta tesis de maestría. A la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII) por el apoyo al mencionado proyecto y a UTE por brindar la información necesaria para poder realizar las simulaciones en la red uruguaya.

Agradezco también a todos mis compañeros de trabajo y en especial a Msc. Ing. Ignacio Afonso por sus consejos y lectura final y a Ing. Daniel Gomez por sus consejos en programación.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Resumen

En los Sistemas Eléctricos de Potencia se han comenzado a utilizar nuevas tecnologías que tienen como objetivo que éstos sean cada vez más “inteligentes”, lo que actualmente es conocido como “Smart Grid”. En este campo, se lograron importantes avances en los últimos años con la norma *IEC 61850* que define un protocolo de comunicación independiente de los fabricantes y que permite el intercambio de información (medidas analógicas, señales digitales, etc.) entre diferentes dispositivos como por ejemplo relés de protección, unidades de control, o “merging units”, permitiendo reemplazar el cableado tradicional por una red con fibra óptica. A su vez, se están incorporando las tecnologías de medidas sincronizadas (PMU “Phasor Measurement Units), las cuales toman medidas de tensiones, corrientes, frecuencia y variación de la frecuencia del sistema eléctrico. Estos equipos cuentan con sincronización horaria y de ahí que las medidas obtenidas por las PMU se denominan “Sincrofasores”.

Las posibles aplicaciones de estas medidas son un campo abierto a la investigación. En el sistema eléctrico uruguayo, interesa especialmente investigar este aspecto ya que cuenta con un conjunto de unidades instaladas con motivo de la implementación de una nueva protección sistémica denominada “Remedial Action Scheme” (*RAS*).

Este trabajo se enfoca en el estudio de la estabilidad en frecuencia del sistema eléctrico uruguayo, a partir de las medidas de frecuencia eléctrica obtenidas por las PMU.

En primer lugar, se implementa un algoritmo de ubicación óptima de las PMU aplicado a la red uruguaya. Inicialmente se plantea el problema sin considerar las unidades ubicadas por el *RAS* y luego se compara con la solución óptima obtenida considerando las PMU ya instaladas en la red uruguaya.

Finalmente, se desarrolla un algoritmo (modelo autorregresivo) para la identificación de los polos de la frecuencia, luego de someter al sistema a grandes y pequeñas perturbaciones. La motivación del desarrollo de este algoritmo es la posibilidad de implementar una aplicación en tiempo real para tomar acciones correctivas en la configuración del sistema y poder así llevarlo a un punto de operación estable luego de una perturbación.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Tabla de contenidos

Agradecimientos	I
Resumen	III
1. Introducción	1
2. Conceptos Previos	5
2.1. Optimización lineal	5
2.2. Álgebra Lineal	6
2.2.1. Definiciones	6
2.2.2. Matriz de Predicción	7
2.2.3. Descomposición en valores singulares	10
3. Fundamentos Teóricos	13
3.1. Estabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia	13
3.1.1. Estabilidad del ángulo del rotor.	14
3.1.2. Estabilidad y colapso de tensión.	20
3.1.3. Estabilidad en frecuencia.	20
3.2. Estimación de polos	21
3.2.1. Modelo Autorregresivo	22
3.2.2. Análisis de Prony	23
4. Ubicación Óptima de las PMU	27
4.1. Planteo del Problema de Optimización.	28
4.2. Aplicación a la red uruguaya	29
4.2.1. Matriz A	30
4.2.2. Solución del problema de optimización	31
4.3. Situación de la red actual de UTE	36
4.3.1. Red de 500 kV	36
4.3.2. Red de 150 kV	37
4.4. Consideraciones finales	38

Tabla de contenidos

5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo	39
5.1. Perturbación: Apertura de las líneas <i>PA5-SJ5-1</i> y <i>PA5-SJ5-2</i> . . .	40
5.2. Perturbación: Apertura línea <i>PA5 - SJ5 - 1</i>	50
5.3. Perturbación: Apertura línea <i>MA5 - MI5</i>	51
6. Conclusiones	55
A. Optimización Lineal	57
A.1. Algoritmos Branch and Bound	57
B. Álgebra Lineal	63
B.1. Descomposición en valores singulares	63
C. Tablas de Ubicación de PMU en la red uruguaya	67
D. Gráficas complementarias de las diferentes simulaciones realizadas	71
Referencias	77
Índice de tablas	78
Índice de figuras	80

Capítulo 1

Introducción

El siguiente trabajo se presenta como tesis para la obtención del título de *Magister* en Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República Oriental del Uruguay. El objetivo es estudiar una tecnología emergente en los Sistemas Eléctricos de Potencia como son los Sincrofasores, y su aplicación en los sistemas eléctricos actuales, los cuales son cada vez más complejos.

Un Sincrofasor es la medida de un fasor con respecto a una referencia de tiempo común a todo el sistema eléctrico. Con estas medidas, es posible determinar el desfase entre los fasores de las diferentes magnitudes eléctricas en tiempo real. Las medidas son obtenidas mediante unidades de medida de fasores (su nombre en inglés: “Phasor Measurement Units ” - PMU). En la actualidad, existen numerosos proyectos de investigación relacionado con las PMU y sus posibles aplicaciones.

Las PMU están reguladas por las normas IEEE C37.118.1 y IEEE C37.118.2 en un proyecto en conjunto entre IEC - IEEE. En las mismas se definen el “fasor sincronizado” (sincrofasor) y las medidas de frecuencia y variación de la frecuencia (ROCOF: Rate of change of frequency). A su vez, dichas normas abarcan los siguientes puntos:

- Describen el tag de tiempo y los requerimientos de sincronización para los sincrofasores, la frecuencia y la variación de la frecuencia.
- Definen los tiempos de muestreo.
- Especifican métodos para evaluar el cumplimiento de los estándares, bajo condiciones dinámicas y estacionarias.
- Definen la PMU, que puede ser un equipo dedicado, o cumplir a su vez con otras funcionalidades.
- Determinan los protocolos de comunicación.

Los Sincrofasores en el Uruguay

El sistema eléctrico uruguayo está en constante crecimiento. Si bien es una red

Capítulo 1. Introducción

relativamente pequeña, es cada vez más compleja debido a la instalación de generación distribuida, ya sea eólica, solar, biomasa, etc., el aumento de carga y las conexiones con Brasil y Argentina. Con esto en mente, se están desarrollando e implementando nuevas técnicas para el análisis en tiempo real de la estabilidad del sistema eléctrico uruguayo.

Actualmente se está invirtiendo en nuevas tecnologías de protección y control del sistema, entre ellas la instalación del *Remedial Action Scheme (RAS)*. Esta herramienta toma acciones correctivas en la red eléctrica frente a perturbaciones, e implica la instalación de PMU en la red uruguaya.

Objetivo de la tesis.

Motivado por la instalación de estas tecnologías, el objetivo de esta tesis es analizar, desarrollar y validar un algoritmo para detectar en tiempo real perturbaciones inestables en el sistema de potencia uruguayo a partir de la medida obtenida por las PMU. En primer lugar se considera como objetivo parcial el desarrollo de un método para la ubicación óptima de las PMU en la red, y luego dos algoritmos para la identificación en tiempo real de perturbaciones inestables en frecuencia. La ventaja del método consiste en la posibilidad de tomar acciones correctivas frente a estas perturbaciones y así llevar al sistema a un punto de operación estable.

Ubicación óptima de las PMU.

La ubicación de las PMU en el sistema de potencia es un aspecto muy importante, ya que de esto depende el conjunto de aplicaciones que se le puede dar a esta tecnología. Debe ser el comienzo de cualquier aplicación basada en los sincrofasores. La ubicación de las mismas es, como en cualquier ámbito de la ingeniería, un compromiso técnico - económico.

El algoritmo de optimización se puede plantear considerando los costos de instalación y las posibles fallas en el sistema de potencia o en la PMU. En este trabajo, se aborda un método simplificado en el que se considera como condición la observabilidad del sistema de potencia, bajo determinada topología de la red, considerando restricciones de ubicación de las PMU instaladas actualmente en el sistema eléctrico uruguayo. Se parte de una descripción general del método y luego una aplicación particular para la red uruguaya.

Estimación de polos para detectar perturbaciones inestables.

Como se mencionó anteriormente, existen numerosas aplicaciones para los sincrofasores, las cuales están en constante desarrollo.

La utilización de las PMU en un sistema de potencia, mejora las posibilidades del monitoreo y análisis en tiempo real y permite que los sistemas de potencia sean

utilizados de manera más eficiente.

En este trabajo, se desarrolla el estudio de una aplicación dentro del área de estabilidad y control del sistema eléctrico de potencia, en el cuál se determina si una perturbación es estable o inestable en frecuencia, realizando una descomposición de los polos de la señal bajo estudio. En caso de pequeñas perturbaciones y analizando los generadores sincrónicos tradicionales, los polos serán aproximaciones a los modos de oscilación excitados en la perturbación, ya que la velocidad del rotor y la frecuencia eléctrica están fuertemente vinculados.

El análisis modal de un sistema de potencia está relacionado con las variables de estado, las cuales son, en general, la posición y velocidad angular de los rotores de los generadores. Estas variables no son medidas por las PMU, por lo tanto se decide enfocar el análisis en la frecuencia eléctrica, medida por la PMU y regulada en las normas IEC-IEEE. Para calcular los modos de oscilación, se deben aplicar los algoritmos a la posición y velocidad angular de los rotores luego de una pequeña perturbación.

Con este propósito se describen y plantean dos métodos para estimar los polos:

- Modelo Autorregresivo.
- Análisis de Prony.

Se implementan algoritmos para analizar las señales por ambos métodos. Sin embargo, solamente se documentan los resultados obtenidos por el modelo autorregresivo ya que esencialmente se resuelve el mismo problema y es más eficiente desde el punto de vista computacional. El análisis de Prony resuelve un problema autorregresivo para obtener los parámetros del modelo.

Los algoritmos desarrollados pueden ser utilizados para identificar la oscilación entre áreas y detección en tiempo real de la estabilidad dinámica del sistema eléctrico utilizando medidas obtenidas por sincrofasores.

La oscilación entre áreas es muy importante porque impone restricciones y puede derivar en un impacto económico negativo en la operación del sistema. Si no se toman acciones correctivas, las oscilaciones pueden provocar un colapso del sistema eléctrico, derivando en grandes apagones.

El documento está organizado en 5 capítulos además de la introducción y dos apéndices. En el primer capítulo se presentan conceptos previos básicos de matemática, luego se describe el marco teórico de estabilidad de los sistemas eléctricos de potencia y procesamiento de señales. En el cuarto y quinto capítulo se desarrollan las aplicaciones de ubicación óptima de PMU y algoritmo del modelo Autorregresivo. Finalmente, se presentan las conclusiones y apéndices complementarios.

Capítulo 1. Introducción

Herramientas utilizadas

Las simulaciones dinámicas del sistema eléctrico fueron realizadas en el software PSS®E de Siemens, el cual es utilizado también para el cálculo de flujos de carga y cortocircuitos. Los algoritmos desarrollados fueron implementados y validados en MATLAB®, utilizando como datos de entrada el resultado de las simulaciones realizadas en el PSS®E.

Publicaciones

Una parte de los resultados obtenidos fueron presentados en el marco del Proyecto de Investigación titulado: “*Aplicaciones de medidas de Sincrofasores en detección en tiempo real de estabilidad dinámica y protección del sistema eléctrico uruguayo*”, apoyado por el Fondo Sectorial de Energía en 2014-2016.

A su vez, se presentaron resultados parciales en el congreso *IEEE, ISGT-LA 2015* que se llevó a cabo en Montevideo en octubre 2015, y fueron publicados, en conjunto con Msc. Ing. Celia Sena, en el artículo *Modal Parameter Estimation using Synchrophasors, ISGT LATAM 2015, IEEE PES, pp:503-507*.

Capítulo 2

Conceptos Previos

Previo a comenzar con el desarrollo teórico de las técnicas utilizadas para el cálculo de los polos de las señales que se van a analizar, se presentan las herramientas de álgebra lineal y optimización lineal que serán utilizadas a lo largo de todo el documento.

Se comienza con la definición del problema de optimización lineal y luego se desarrollan los conceptos utilizados de álgebra lineal.

2.1. Optimización lineal

En matemática, el problema de optimización es hallar un máximo o mínimo de una función, relativo a un conjunto de restricciones. La función a maximizar o minimizar se denomina *función objetivo* y el conjunto de restricciones se denomina la región factible.

Definición 2.1.1. Se denomina *Programación lineal (LP)* a aquellos problemas de optimización en que la función objetivo $f : \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}$ es una función lineal y por lo tanto es de la forma:

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = c^T x$$

con $c_i \in \mathcal{R}$, $i = 1, \dots, n$ y la región factible es el conjunto de los $x \in \mathcal{R}^n$ que cumplen con las siguientes igualdades y desigualdades:

$$\begin{aligned} Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

con $A \in \mathcal{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathcal{R}^m$

El problema antes mencionado, escrito en su forma canónica es:

$$(PL) \begin{cases} \max & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax \leq b \\ \text{con} & x \geq 0 \end{cases}$$

La programación lineal es una herramienta muy útil para resolver un gran conjunto de aplicaciones de problemas de optimización.

Observación. En particular, si x , c , A y b toman valores binarios es un problema de optimización binaria. En el apéndice A se describe un posible algoritmo para resolver este tipo de problemas de optimización lineal.

2.2. Álgebra Lineal

A continuación se describen los conceptos de Matriz de Predicción [1], [2] y Descomposición en Valores Singulares [11].

2.2.1. Definiciones

Definición 2.2.1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz y $x \in \mathbb{R}^n$. Si $\exists \lambda \in \mathbb{R}, x \neq 0$ tal que satisfacen la ecuación

$$Ax = \lambda x, x \neq 0 \quad (2.1)$$

Entonces λ se denomina valor propio de A y x el vector propio por derecha asociado a λ .

Definición 2.2.2. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces el rango de A , $\text{rank}\{A\}$, es el mayor número de columnas de A que son linealmente independientes (LI).

Como $\text{rank}\{A\} = \text{rank}\{A^T\}$ entonces se puede definir también como el mayor número de filas de A que son LI .

Definición 2.2.3. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se define el rango o imagen de A como

$$\mathcal{R}\{A\} = \{Y \in \mathbb{R}^m : \text{tal que } AX = Y\}$$

Definición 2.2.4. Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se define el kernel (o núcleo) de A como

$$\mathcal{N}\{A\} = \{X \in \mathbb{R}^n : \text{tal que } AX = \mathbb{O}_m\}$$

Definición 2.2.5. Conjunto ortonormal de vectores es un conjunto de vectores ortogonales con norma igual a 1.

Observación. Es necesariamente LI y el vector nulo no puede pertenecer al conjunto.

Definición 2.2.6. Sea $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$, se dice que U es ortogonal si $U^{-1} = U^T$.

Observación. Las columnas de U son ortonormales.

Definición 2.2.7. Una base ortonormal de un subespacio vectorial es una base compuesta por vectores que conforman un conjunto ortonormal.

Observación. Cualquier base se puede transformar en una base ortonormal, y por lo tanto todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base ortonormal.

Definición 2.2.8. Sea $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$, se dice que U es unitaria si $U^*U = UU^* = I_n$. En donde U^* es la matriz traspuesta conjugada de U y I_n es la matriz unidad en $n \times n$

Definición 2.2.9. Sea $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ se define $A^\dagger \in \mathbb{C}^{n \times m}$ como matriz pseudoinversa de A la cual cumple con las siguientes condiciones:

1. $AA^\dagger A = A$
2. $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$
3. $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$
4. $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$

En particular, cuando A tiene columnas que son linealmente independientes, y por lo tanto (A^*A) es invertible, se cumple que:

$$A^\dagger = (A^*A)^{-1}A^*$$

Adicionalmente cuando A tiene filas que son linealmente independientes, y por lo tanto (AA^*) es invertible, se cumple que:

$$A^\dagger = A^*(AA^*)^{-1}$$

Propiedad de la matriz pseudoinversa.

Sea P_A la matriz de proyección ortogonal de $\mathcal{R}\{A\}$, se cumple entonces que:

$$P_A = AA^\dagger$$

Sea P_{A^*} la matriz de proyección ortogonal de $\mathcal{R}\{A^*\}$ se cumple entonces que:

$$P_{A^*} = A^\dagger A$$

2.2.2. Matriz de Predicción

Definición 2.2.10. Sea $H(l)$ una matriz recursiva tal que:

$$H(l) = \begin{pmatrix} y(l+p-1) & \cdots & y(l) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N+l-2) & \cdots & y(l+N-p-1) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Observación. La matriz H es una matriz de Hankel

Capítulo 2. Conceptos Previos

Se dice entonces que S es una matriz de predicción hacia adelante si y solo si se cumple que:

$$H(l+1) = H(l)S \quad (2.3)$$

Si la señal que se quiere aproximar es de la forma $y_k = \sum_{i=1}^n r_i e^{(s_i \Delta t)k}$ la siguiente es una factorización para la matriz $H(l)$:

$$H(l) = V\Lambda^l R W \quad (2.4)$$

En donde:

- $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ con $\lambda_i = e^{s_i \Delta t}$
- $R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_n\}$
- V es la matriz de Vandermonde donde la fila k es $(\lambda_1^{k-1} \dots \lambda_n^{k-1})$
- W es la traspuesta de las primeras p filas de la matriz de Vandermonde.

De esto se puede deducir que el $\mathcal{R}\{H(l)\}$ es generado por las columnas de la matriz V y que el $\mathcal{R}\{H^*(l)\}$ es generado por las filas de la matriz W .

De la factorización anterior se deduce directamente que S es una matriz de predicción si y solo si

$$WS = \Lambda W \quad (2.5)$$

Matriz de Predicción Utilizada.

La siguiente es una matriz de predicción:

$$S = (F \quad e_1 \quad \dots \quad e_{p-1}) \quad (2.6)$$

en donde $e_i \in \mathbb{C}^{(N-p) \times 1}$ es el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \leftarrow i \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ y $F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix}$ es solución

óptima al problema

$$\begin{pmatrix} y(l+p-1) & \dots & y(l) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N+l-2) & \dots & y(l+N-p-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(l+p) \\ \vdots \\ y(N+l-1) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Demostración. Para demostrar que S es una matriz de predicción, se parte de la definición vista en la expresión 2.3.

$$H(l)S = \begin{pmatrix} y(l+p-1) & \cdots & y(l) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N+l-2) & \cdots & y(l+N-p-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F & e_1 & \cdots & e_{p-1} \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Sea $H_i(l)$ la i -ésima columna de la matriz $H(l)$, por lo tanto se cumple que:

$$\begin{pmatrix} y(l+p-1) & y(l+p-2) & \cdots & y(l) \\ y(l+p) & y(l+p-1) & \cdots & y(l+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N+l-2) & y(N+l-3) & \cdots & y(l+N-p-1) \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} y(l+p) \\ y(l+p-1) \\ \vdots \\ y(N+l-1) \end{pmatrix} = H_1(l+1) \quad (2.9)$$

por definición de F . Análogamente

$$H(l)e_1 = H_2(l+1) \quad (2.10)$$

$$\vdots \quad (2.11)$$

$$H(l)e_{p-1} = H_p(l+1) \quad (2.12)$$

Sigue así que $H(l)S = H(l+1) \Rightarrow S$ es matriz de predicción.

Valores propios de la matriz de predicción.

Sea $V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$ una matriz unitaria tal que las columnas de $V_1 \in \mathbb{C}^{p \times n}$ forman una base ortonormal de $\mathcal{R}\{H^*\}$, las columnas de $V_2 \in \mathbb{C}^{p \times p-n}$ una base ortonormal de $\mathcal{R}\{H^*\}^\perp = \mathcal{N}\{W\}$ y S una matriz de predicción. Luego,

$$V^*SV = \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^*SV_1 & V_1^*SV_2 \\ V_2^*SV_1 & V_2^*SV_2 \end{pmatrix}$$

Sea \mathcal{P} la matriz de proyección ortogonal en $\mathcal{R}\{H^*\}$. Se cumple entonces que:

$$\mathcal{P} = H^\dagger H$$

Como $\mathcal{R}\{H^*\}$ es generado por las filas de W y V_1 es una base de $\mathcal{R}\{H^*\}$ se cumple también

$$W^\dagger W = W^*W^{*\dagger} = V_1V_1^*$$

Además $V_1^*V_1 = I$ y entonces

$$V_1^*SV_2 = V_1^*V_1V_1^*SV_2 = V_1^*W^\dagger WSV_2$$

Como S es una matriz de predicción se cumple que $WS = \Lambda W$ y por lo tanto

Capítulo 2. Conceptos Previos

$$V_1^* W^\dagger W S V_2 = V_1^* W^\dagger \Lambda W V_2 = 0 \text{ porque } \mathcal{R}\{V_2\} = \mathcal{N}\{W\}$$

$$\Rightarrow \lambda(S) = \lambda(V^* S V) = \lambda(V_1^* S V_1) \cup \lambda(V_2^* S V_2)$$

Para alguna matriz $Z \in \mathbb{C}^{n \times n}$ no singular donde n es la $\dim(\mathcal{R}\{H^*\})$, se cumple que $W = Z^* V_1^*$ y entonces:

$$V_1^* S V_1 = Z^{-*} Z^* V_1^* S V_1 = Z^{-*} W S V_1 = Z^{-*} \Lambda W V_1 = Z^{-*} \Lambda Z^* V_1^* V_1 = Z^{-*} \Lambda Z^*$$

$$\Rightarrow \lambda(V_1^* S V_1) = \lambda(\Lambda) \Rightarrow \lambda(V^* S V) = \underbrace{\lambda(\Lambda)}_{\text{polos del sistema}} \cup \underbrace{\lambda(V_2^* S V_2)}_{\text{polos espurios}} \quad (2.13)$$

Por lo tanto, dada una base ortonormal del $\mathcal{R}\{H^*\}$ es posible separar los polos del sistema excitados en la señal de los polos espurios.

2.2.3. Descomposición en valores singulares

La descomposición en valores singulares (SVD) es una factorización: $A = U \Sigma V$, en donde:

- La matriz U , unitaria, es base ortonormal de vectores propios de AA^*
- La matriz V , unitaria, es base ortonormal de vectores propios de A^*A
- La matriz Σ es matriz diagonal, formada por los valores propios distintos de cero de A^*A o AA^*

En el apéndice B se demuestra la existencia de la descomposición en valores singulares y se presentan algunas de sus propiedades.

Aplicación como herramienta de filtrado de ruido blanco

La descomposición en valores singulares tiene múltiples aplicaciones en el ámbito de la ingeniería y la matemática. En este trabajo se aplicará la SVD como herramienta para filtrar el ruido blanco presente en una señal, lo cual se describe a continuación.

En el apéndice B se introduce el concepto de SVD compacta según la ecuación B.6, la cual permite truncar la señal descartando los valores singulares que son menores a un determinado valor, el cuál puede ser elegido convenientemente.

Sea $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ la matriz que contiene la información de la señal que se quiere analizar. Se cumple entonces que:

$$H = U\Sigma V^* \Rightarrow \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \cdots + \sigma_n u_n v_n^* \quad (2.14)$$

y la matriz H puede ser aproximada por H_k de la siguiente manera:

$$H_k = \sigma_1 u_1 v_1^* + \sigma_2 u_2 v_2^* + \cdots + \sigma_k u_k v_k^* \quad (2.15)$$

La matriz H_k puede ser una buena aproximación a la matriz H aún cuando el valor de corte k es significativamente menor a n . La matriz H_k es una compresión de los datos representados por la matriz H .

Como $\text{rank}\{H_k\} = k$ se cumple que

$$H_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^* \quad (2.16)$$

La ecuación 2.16 es la mejor aproximación de H con rango k .

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

Luego de definir los conceptos previos de Matemática que serán utilizados en el desarrollo del algoritmo, se describe el marco teórico de los sistemas eléctricos de potencia y de los métodos de procesamiento digital de señales.

En primer lugar se presenta el concepto de estabilidad de los sistemas eléctricos de potencia, luego se describen matemáticamente los métodos del algoritmo de Prony y el modelo Autorregresivo para la descomposición en polos de la señal.

3.1. Estabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia

La estabilidad de los sistemas eléctricos de potencia se puede definir como la propiedad que tiene un sistema de potencia de permanecer en un estado de operación de equilibrio bajo condiciones de operación normales, y de volver a un nuevo estado de equilibrio luego de haber sido sometido a una perturbación [6].

La inestabilidad se puede manifestar de diferentes maneras, dependiendo de la configuración del sistema y modos de operación. Los sistemas de potencia dependen de las máquinas sincrónicas para la generación de energía eléctrica y, por lo tanto, una condición necesaria para una operación satisfactoria es que todos los generadores permanezcan en sincronismo, o en inglés “in step”. Este fenómeno es denominado estabilidad del ángulo del rotor y depende de la dinámica del ángulo de los rotores de los generadores y de las relaciones entre potencia y ángulo. Si bien tradicionalmente la estabilidad se centró en el sincronismo, un sistema puede ser inestable sin la pérdida de sincronismo, como se puede observar en los diferentes tipos de estabilidad definidos en la figura 3.1. Por ejemplo, en el caso de una máquina sincrónica que alimenta a un motor de inducción a través de una línea de transmisión (figura 3.2a) la inestabilidad se puede dar debido a un colapso de tensión. Mantener el sincronismo no es un problema en este caso, pero sí lo es el control de la tensión. Este sencillo ejemplo se puede traducir a un sistema más complejo.

Capítulo 3. Fundamentos Teóricos

En la evaluación de la estabilidad se estudia el comportamiento del sistema cuando es sometido a pequeñas o grandes perturbaciones. Las pequeñas perturbaciones son, por ejemplo, variaciones en las cargas que ocurren constantemente y el sistema se ajusta a las nuevas condiciones de operación. A su vez, debe ser capaz de soportar grandes perturbaciones como, por ejemplo, los cortocircuitos y pérdida de importantes volúmenes de carga o desconexión de grandes grupos de generadores. La respuesta de un sistema frente a una gran perturbación involucra la intervención de una gran cantidad de equipos de potencia, protección y control.

Existen diferentes tipos de estabilidad [8], los cuales se pueden observar en el diagrama de flujo de la figura 3.1 y se comentarán a continuación.

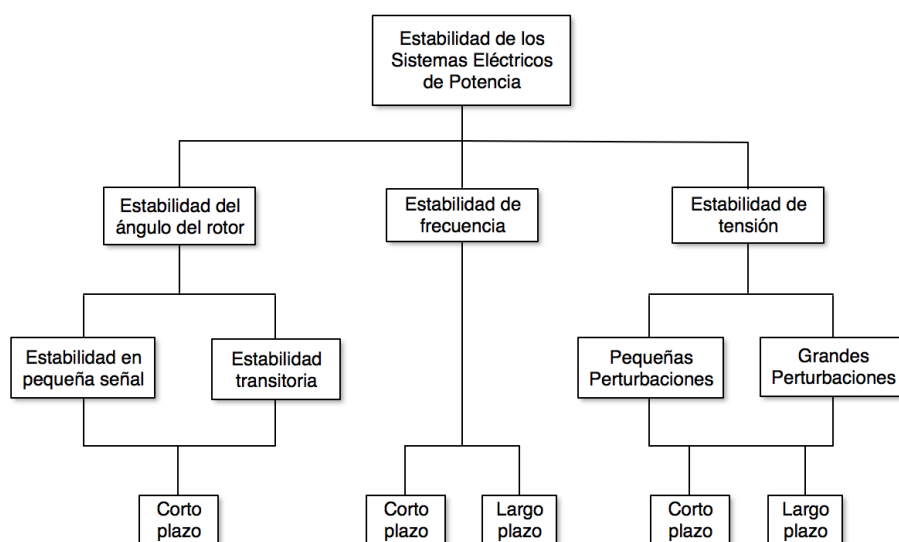


Figura 3.1: Tipos de estabilidad en los sistemas eléctricos de potencia

3.1.1. Estabilidad del ángulo del rotor.

La estabilidad del ángulo del rotor es la habilidad que tiene un sistema de máquinas síncronas interconectadas de permanecer en sincronismo. El problema de estabilidad incluye el estudio de las oscilaciones electromecánicas inherentes al sistema de potencia. Mientras los rotores de las máquinas están oscilando, es un factor fundamental la variación de potencia de salida de las máquinas. Las tensiones y corrientes de todos los generadores en un sistema interconectado por dos o más máquinas deben tener la misma frecuencia eléctrica. Esto implica que todos los rotores deben estar sincronizados porque la velocidad mecánica de los mismos está sincronizada con la frecuencia eléctrica.

3.1. Estabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia

Relación Potencia vs Ángulo.

La relación altamente no lineal entre la potencia intercambiada y la posición angular de los rotores es una característica muy importante que influye en la estabilidad de los sistemas eléctricos.

A modo de ejemplo, se considera un sistema formado por dos máquinas interconectadas por una línea de transmisión como se puede ver en la figura 3.2a. La máquina 1 es un generador que alimenta un motor de inducción representado por la máquina 2.

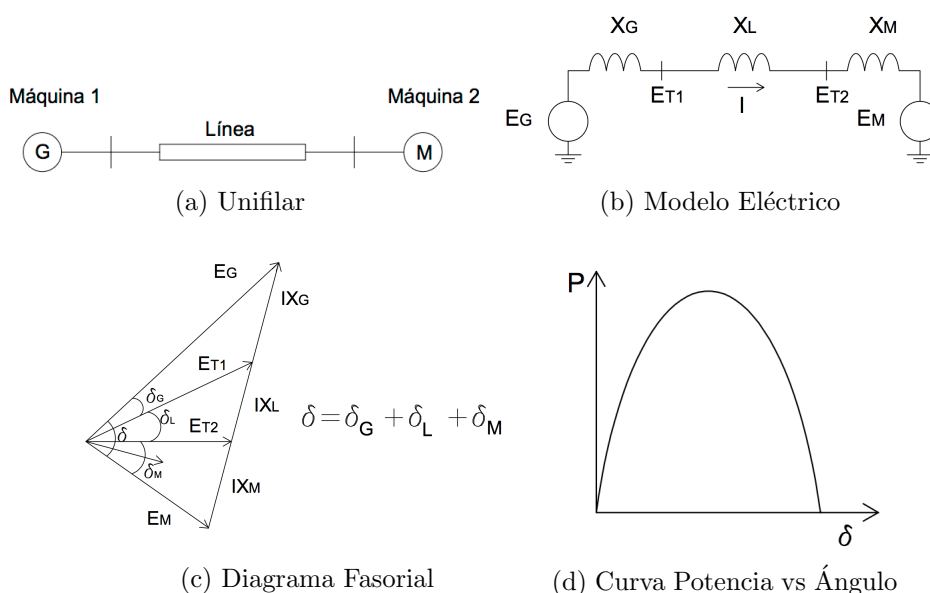


Figura 3.2: Transferencia de potencia en un sistema compuesto por dos máquinas

La transferencia de potencia entre el generador y el motor es una función de separación angular δ entre los rotores de las máquinas. Esta separación angular se debe a tres componentes:

- Ángulo interno del generador δ_G (ángulo con que el rotor del generador adelanta al campo giratorio del estator)
- Diferencia angular entre las tensiones terminales de las máquinas (ángulo con que el campo del estator del generador adelanta al del motor)
- Ángulo interno del motor (ángulo con que el rotor atrasa al campo giratorio del estator)

En la figura 3.2b se muestra un equivalente monofásico del sistema de estudio que puede ser utilizado para determinar la relación entre la potencia y el ángulo. Las máquinas se modelan como una fuente de tensión detrás de una reactancia y

Capítulo 3. Fundamentos Teóricos

la línea como una inductancia X_L , despreciando la resistencia y capacidad.

En la figura 3.2c se puede observar un diagrama fasorial de las tensiones entre el generador y el motor. La potencia transferida desde el generador al motor está dada por:

$$P = \frac{E_G E_M}{X_T} \sin \delta \quad (3.1)$$

donde

$$X_T = X_G + X_L + X_M$$

En la figura 3.2d se observa la variación de la potencia de salida con el seno del ángulo según la ecuación 3.1.

En un sistema más complejo, los desplazamientos relativos angulares afectan el intercambio de potencia según lo visto en el ejemplo anterior. Sin embargo, los límites entre la transferencia de potencia y la separación angular son funciones complejas de la generación y de la carga.

El fenómeno de estabilidad de ángulo.

La estabilidad es una condición de equilibrio entre fuerzas que se oponen. El medio por el cual los sistemas de potencia interconectados por máquinas sincrónicas mantienen el sincronismo, es a través de fuerzas de restauración, que actúan cuando una o más máquinas se aceleran o desaceleran con respecto a las otras. En régimen estacionario, existe un equilibrio entre el torque mecánico y el torque eléctrico de cada máquina, y por ende la velocidad se mantiene constante. Si el sistema sufre una perturbación, se rompe el equilibrio y por lo tanto los rotores de las máquinas se aceleran o desaceleran. Si un generador se mueve más rápido que otro, la posición angular del rotor de este generador se adelantará con respecto a los rotores que se mueven más lento. Esta diferencia angular transfiere parte de la carga desde los generadores más lentos a los más rápidos, según la relación potencia - ángulo vista anteriormente. Este fenómeno tiende a reducir la diferencia entre las velocidades de las máquinas, y por lo tanto la separación angular. La relación potencia - ángulo no es una dependencia lineal, y luego de un determinado límite, un aumento en la separación angular provoca una caída en la transferencia de potencia, lo que hace que aumente la separación angular provocando la inestabilidad del sistema. En resumen, la estabilidad del sistema depende de si es posible o no contrarrestar la separación angular con torques de restauración.

Cuando una máquina pierde el sincronismo con el resto del sistema, el rotor gira más rápido o lento que lo necesario para generar tensiones a la frecuencia del sistema. El deslizamiento entre el campo giratorio del estator (frecuencia del sistema) y el campo del rotor provocan fluctuaciones en la potencia, corriente y tensión de salida de la máquina, y por lo tanto los sistemas de protección actúan con el fin de aislar la máquina del sistema. Si la pérdida de sincronismo se da entre

3.1. Estabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia

grupos de máquinas, el sistema se puede separar, y se debe poder mantener el sincronismo dentro de los diferentes grupos de máquinas o islas.

La variación del torque eléctrico en una máquina síncrona luego de una perturbación se puede descomponer de la siguiente manera

$$\Delta T_e = T_S \Delta \delta + T_D \Delta \omega \quad (3.2)$$

donde

- $T_S \Delta \delta$ es la componente del torque debido a la variación del ángulo del rotor $\Delta \delta$ y se denomina el *torque sincronizante*; T_S es el coeficiente de torque sincronizante.
- $T_D \Delta \omega$ es la componente del torque debido a la variación de la velocidad $\Delta \omega$ y se denomina *torque de amortiguamiento*; T_D es el coeficiente del torque de amortiguamiento.

La estabilidad del sistema depende de la existencia de ambos torques para cada una de las máquinas. Una falta de torque sincronizante provoca una deriva aperiódica del ángulo del rotor y una falta de torque de amortiguamiento provoca oscilaciones inestables.

Como se puede ver en la figura 3.1, la estabilidad del ángulo del rotor se puede clasificar en estabilidad en pequeña señal y estabilidad transitoria.

Estabilidad en pequeña señal.

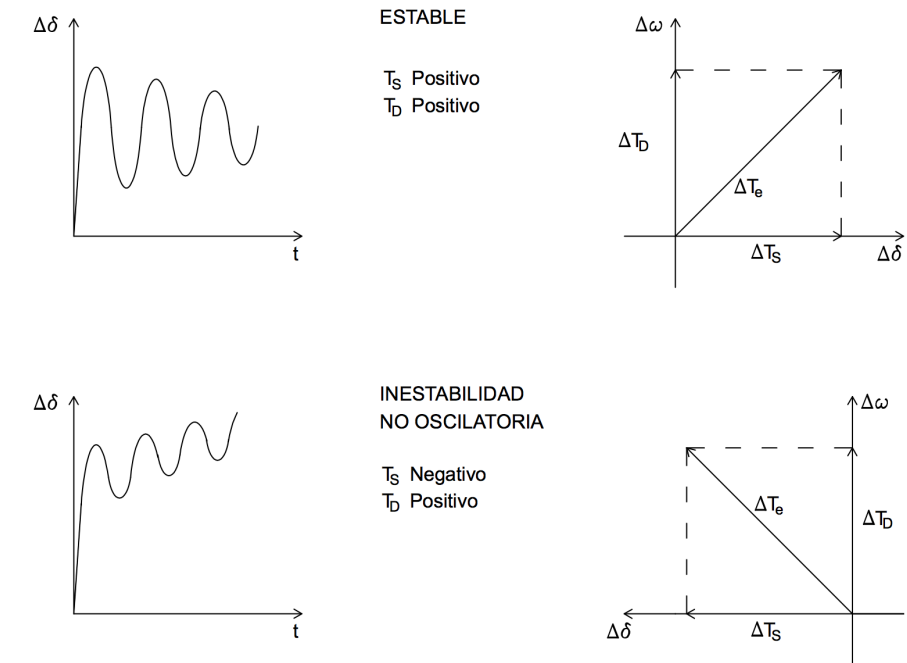
La estabilidad en pequeña señal es la habilidad del sistema de mantener el sincronismo frente a pequeñas perturbaciones. Este tipo de perturbaciones ocurren constantemente debido a pequeñas variaciones en las cargas o en la generación. Las perturbaciones se consideran suficientemente pequeñas para ser posible una linealización de las ecuaciones del sistema. En estos casos la inestabilidad se puede presentar de dos maneras:

1. Falta de torque sincronizante: aumento sostenido del ángulo del rotor.
2. Falta de torque de amortiguamiento: oscilaciones del rotor con amplitud creciente.

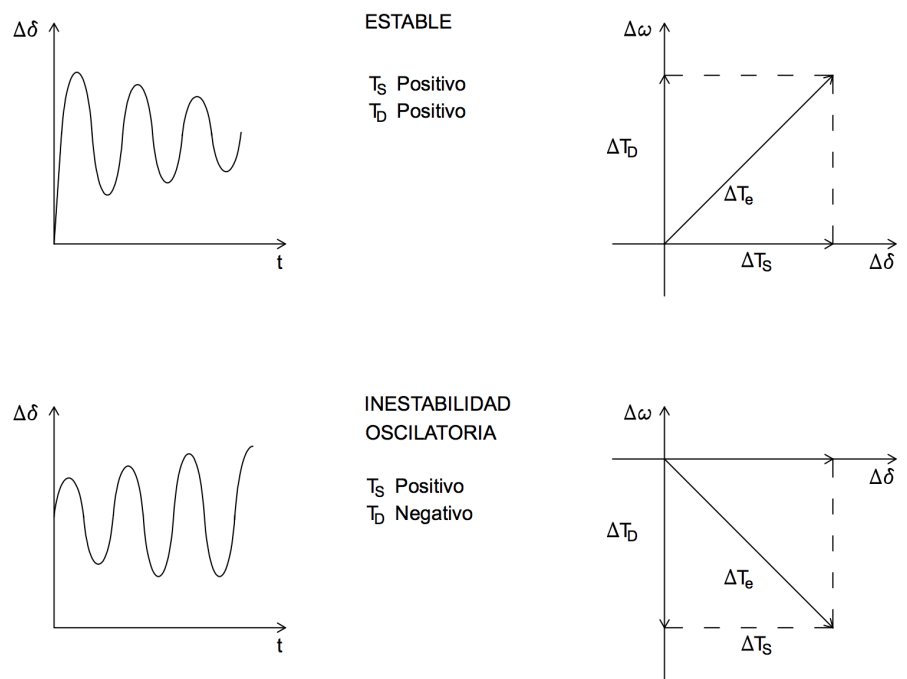
En generadores conectados a un sistema de forma radial, sin regulación automática de tensión, la inestabilidad, no oscilatoria, se da por falta de torque sincronizante como se puede ver en la figura 3.3a. Con regulación de tensión, el problema de estabilidad se centra en asegurar suficiente torque de amortiguamiento para las oscilaciones del sistema. En este caso, la inestabilidad se da en oscilaciones con amplitud creciente, como se puede observar en la figura 3.3b.

En la actualidad, la inestabilidad en pequeña señal es generalmente un problema de falta de torque de amortiguamiento. Existen diferentes tipos de oscilaciones:

Capítulo 3. Fundamentos Teóricos



(a) Sin Control de Excitación



(b) Con Control de Excitación

Figura 3.3: Naturaleza de la Respuesta en Pequeña Señal

3.1. Estabilidad de los Sistemas Eléctricos de Potencia

- Modos locales o modos entre la máquina y el sistema: oscilación de máquinas en una central generadora, con respecto al resto del sistema. El término local, está asociado a que las oscilaciones están localizadas en una sola estación o pequeña parte del sistema.
- Modos entre áreas: oscilación entre dos grupos de máquinas que son causadas por estar interconectadas en un nodo débil del sistema.
- Modos de control: asociados a las unidades generadoras y sus sistemas de control. Por ejemplo: problemas de regulación de los sistemas de excitación, governors, convertidores HVDC, compensación estática, etc.
- Modos de torsión: asociados a los elementos rotativos en el eje de la turbina y generador.

Estabilidad transitoria.

La estabilidad transitoria es la habilidad de un sistema de potencia de mantener el sincronismo luego de una perturbación severa. La respuesta del sistema involucra grandes excursiones de los ángulos de los rotores, y depende de la relación no lineal potencia - ángulo. La estabilidad en este caso depende de las condiciones iniciales del sistema previo a la falta y de la característica de la perturbación. En general, el punto de operación y la topología de los sistema post-falta pre-falta son diferentes.

Existen una gran cantidad de perturbaciones con diferentes grados de severidad y probabilidad de ocurrencia. El sistema se diseña para ser estable frente a un conjunto de esas perturbaciones y se consideran contingencias frente a cortocircuitos de diferentes tipos: fase-tierra, fase-fase-tierra y trifásicos. Se asume que pueden ocurrir en las líneas de transmisión y ocasionalmente en barras o transformadores, y se despejan con la apertura de los interruptores correspondientes. La respuesta de los ángulos de los rotores para este tipo de perturbaciones puede ser:

- Estable: la oscilación de los rotores es de amplitud decreciente.
- Inestable al primer *swing*: debido a falta de torque sincronizante, el ángulo del rotor aumenta sostenidamente.
- Inestable debido a oscilaciones con amplitud creciente: el sistema post-falta no es estable en pequeña señal.

En grandes sistemas la inestabilidad transitoria se da por la superposición de diferentes modos de oscilación que, luego del primer *swing*, causan grandes excursiones en el ángulo del rotor. Los tiempos de estudio son, en general, de 3 a 5 segundos luego de la perturbación aunque puede llegar también a 10 segundos dependiendo de las características del sistema [6].

Capítulo 3. Fundamentos Teóricos

3.1.2. Estabilidad y colapso de tensión.

La estabilidad de tensión es la habilidad que tiene un sistema de potencia de mantener niveles de tensión aceptables en todas las barras del sistema bajo condiciones normales de operación y luego de haber sido sometido a una perturbación. Un sistema se encuentra en un estado de inestabilidad de tensión cuando, luego de una perturbación, se genera una progresiva e incontrolable caída de tensión. El factor más influyente es la imposibilidad de cumplir con la demanda de potencia reactiva.

Un criterio necesario para la estabilidad de tensión es que, dada una condición de operación para todas las barras del sistema, la tensión en cada barra aumenta junto al aumento de suministro de potencia reactiva. Alcanza con que la tensión en una de las barras disminuya con el aumento de la inyección de potencia reactiva (en esa barra) para que el sistema se vuelva inestable.

La caída de tensión en las barras se puede asociar también a la pérdida de sincronismo de los rotores. Por ejemplo, en una pérdida gradual de sincronismo cuando los ángulos relativos entre los rotores están cerca de los 180° se va a traducir en una tensión muy baja en puntos intermedios de la red. Sin embargo interesa también estudiar la estabilidad de tensión cuando la del ángulo de los rotores no es un problema.

Por otro lado, el colapso de tensión es un proceso en el cual la secuencia de eventos que se dan junto a la inestabilidad en tensión genera tensiones muy bajas en una parte significativa del sistema de potencia. Un típico escenario de colapso de tensión es que se tiene una repentina demanda de potencia reactiva luego de una contingencia (como resultado de una perturbación), la cual no puede ser suministrada por las reservas en los generadores y compensadores, provocando así el colapso de tensión [6].

La estabilidad de tensión es esencialmente un fenómeno local, pero las consecuencias pueden ser globales. Por otro lado, el colapso de tensión es un fenómeno más complejo y es el resultado de una secuencia de eventos que se dan junto a la inestabilidad de tensión.

3.1.3. Estabilidad en frecuencia.

La estabilidad en frecuencia es la habilidad de un sistema eléctrico de potencia de mantener o restablecer la frecuencia luego de un desbalance severo entre generación y carga. Por lo tanto, el análisis se concentra en el comportamiento global del sistema frente a estas perturbaciones. Se debe de restaurar el equilibrio entre generación y carga con la mínima pérdida de carga posible. Las perturbaciones pueden provocar oscilaciones en la frecuencia y el consecuente disparo de genera-

dores y/o cargas.

Grandes perturbaciones en los sistemas de potencia tienen como resultado una gran variación en la frecuencia, flujos de potencia, tensión y otras variables del sistema, las cuales generan actuaciones en los sistemas de protección y control los cuales no son modelados en los análisis convencionales de estabilidad transitoria. Estos procesos pueden ser muy lentos, como por ejemplo la dinámica de una caldera, o en algunos casos solo operan para condiciones extremas de operación, como por ejemplo protección de sobreflujo de los generadores.

En grandes sistemas interconectados, este tipo de situaciones pueden llevar a que el sistema se separe formando islas. La estabilidad en este caso consiste en estudiar si cada una de las islas son capaces de alcanzar un estado de operación de equilibrio con una cantidad mínima de pérdida no intencional de carga. Se determina por la respuesta global de la isla, en términos de frecuencia, y no por el movimiento relativo de las máquinas. Generalmente, los problemas de estabilidad en frecuencia se deben a respuestas inadecuadas del equipamiento, falta de coordinación de las protecciones o reserva insuficiente de generación.

Como se puede ver en la figura 3.1 la estabilidad en frecuencia se puede clasificar en corto y largo plazo. Esto se debe a que durante las excursiones de la frecuencia, los tiempos característicos de los procesos y dispositivos que actúan pueden variar entre fracciones de segundos, como por ejemplo los sistemas de rechazo de carga, a algunos minutos, como por ejemplo las máquinas primarias y los reguladores de tensión bajo carga. Un ejemplo de corto plazo sería la pérdida de frecuencia debido a la formación de una isla con generación y rechazo de carga insuficiente, donde el colapso de la frecuencia provoca un apagón en algunos segundos. Un fenómeno a largo plazo es debido a situaciones más complejas donde operan, por ejemplo, los controles de velocidad de las turbinas. Los tiempos en este caso pueden variar entre los segundos y minutos.

Otra consecuencia de las variaciones en la frecuencia es el cambio en la tensión de las barras especialmente cuando se forman las islas y operan los sistemas de rechazo de carga por subfrecuencia. Estos cambios en los niveles de tensión, que pueden ser mayores en porcentaje a las variaciones de la frecuencia, afectan directamente al balance entre generación y carga. Altos niveles de tensión pueden provocar disparos indeseados de los generadores por actuación de relés de pérdidas de excitación o sobreflujo, y bajos niveles de tensión en sistemas sobrecargados pueden provocar disparos indeseados de los relés de impedancia.

3.2. Estimación de polos

La estabilidad de los sistemas eléctricos de potencia se puede evaluar mediante el análisis de los polos excitados luego de una perturbación.

A continuación se describen dos métodos que pueden utilizarse para calcular los

Capítulo 3. Fundamentos Teóricos

polos excitados en una señal a partir de un conjunto de muestras:

- Modelo Autorregresivo
- Análisis de Prony

3.2.1. Modelo Autorregresivo

En el modelo autorregresivo se aproxima la muestra $\hat{y}(k)$ de las $k - 1$ muestras anteriores según el siguiente modelo:

$$\hat{y}(k) = \omega + \sum_{i=1}^p A_i y(k - i) + \epsilon_k \quad (3.3)$$

Donde $A_1 \cdots A_p$ son los coeficientes matriciales de orden $m \times m$ del modelo autorregresivo, ω representa el valor medio de la señal y ϵ_k es el error.

Para obtener los parámetros del modelo autorregresivo, es necesario resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} y(p) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-1) & \cdots & y(N-p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(p+1) \\ \vdots \\ y(N) \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

En donde la matriz recursiva $H = \begin{pmatrix} y(p) & \cdots & y(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y(N-1) & \cdots & y(N-p) \end{pmatrix}$ cuenta con la historia de la señal y el valor medio ω se calcula previamente y se resta de la señal bajo estudio.

Observación. La matriz recursiva H es la matriz de Hankel vista en 2.2.2.

El sistema 3.4 no es en general un sistema lineal determinado y por lo tanto se deberá recurrir a alguna de las técnicas de minimización como por ejemplo mínimos cuadrados.

Una vez que se tienen los parámetros del modelo, se construye la matriz S de la siguiente manera:

$$S = \begin{pmatrix} A_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_p & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Según lo visto en 2.2.2 la matriz S se corresponde con una matriz de predicción y por lo tanto cumple con todas sus propiedades. En particular, la matriz S

3.2. Estimación de polos

contiene la información de los polos del sistema a partir de sus valores propios. Pero como S tiene p valores propios, se aplicará la propiedad de la ecuación 2.13 para identificar los polos del sistema de los polos espurios.

Por lo tanto, sean V_1 una base ortonormal de $\mathcal{R}\{H^*\}$, $S_1 = V_1^* S V_1$ y λ_i los valores propios de S_1 . Los polos del sistema se pueden calcular a partir de λ_i según las siguientes expresiones:

$$\sigma_i = \underbrace{\frac{\Re(\log(\lambda_i))}{T_S}}_{\alpha_i} + j2\pi \underbrace{\frac{\Im(\log \lambda_i)}{2\pi T_S}}_{f_i} \quad (3.6)$$

en donde T_S es la frecuencia de muestreo.

De esta manera es posible estimar los polos excitados en la señal luego de una perturbación a partir de la construcción de un modelo autorregresivo.

3.2.2. Análisis de Prony

El Análisis de Prony aproxima la muestra $y(k)$ a partir de un conjunto de N muestras con tiempo de muestreo T_s ($y(0) \cdots y(N-1)$) como una combinación lineal de exponenciales complejas:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^M a_i e^{\alpha_i(k-1)T_s} \cos(2\pi f_i(k-1)T_s + \theta_i) \quad (3.7)$$

Donde

- $1 \leq k \leq N$
- M es el orden del modelo
- α_i y f_i son la parte real y frecuencia (en hz) del polo λ_i .

La ecuación anterior se puede escribir como una ecuación en diferencias:

$$\hat{y}(k) = \sum_{i=1}^M h_i z_i^{k-1} + h_i^* z_i^{*k-1} \quad (3.8)$$

Donde

- $h_i = \frac{A_i}{2} e^{j\theta_i}$
- $z_i = e^{(\alpha_i + 2\pi f_i)T_s}$
- M es el orden del modelo.
- T_S es el tiempo de muestreo.
- $A_i, \theta_i, \alpha_i, f_i$ son la amplitud, fase, factor de atenuación y frecuencia del modelo.

Es necesario desacoplar h_i y z_i para resolver el algoritmo [9].

Capítulo 3. Fundamentos Teóricos

Pasos previos.

El polinomio con raíces z_i y z_i^* es:

$$\prod_{k=1}^M (z - z_i)(z - z_i^*) = \sum_{m=0}^{2M} a(m)z^{(2M-m)} = 0 \quad (3.9)$$

Donde $a(0) = 1$ y $a(1) \cdots a(2M)$ son coeficientes reales.

Como

$$y(k) = \sum_{i=1}^M h_i z_i^{k-1} + h_i^* z_i^{*k-1} \quad (3.10)$$

entonces

$$\sum_{m=0}^{2M} a(m)y(k-m) = \sum_{m=0}^{2M} a(m) \sum_{i=1}^M h_i z_i^{k-1-m} + h_i^* z_i^{*k-1-m} \quad (3.11)$$

Pero $z_i^{k-m-1} = z_i^{k-1-2M} z_i^{2M-m} \Rightarrow$

$$\sum_{m=0}^{2M} a(m) \sum_{i=1}^M h_i z_i^{k-1-2M} z_i^{2M-m} + h_i^* z_i^{*k-1-2M} z_i^{*2M-m} = \quad (3.12)$$

$$\sum_{m=0}^{2M} a(m) 2\Re \left(\sum_{i=1}^M h_i z_i^{k-1-2M} z_i^{2M-m} \right) = 2\Re \left(\sum_{i=1}^M h_i z_i^{k-1-2M} \underbrace{\sum_{m=0}^{2M} a(m) z_i^{2M-m}}_{=0} \right) = 0 \quad (3.13)$$

$$\Rightarrow \sum_{m=0}^{2M} a(m)y(k-m) = 0 \Rightarrow y(k) = \sum_{m=1}^{2M} a(m)y(k-m) \quad (3.14)$$

Resolución del modelo.

La ecuación 3.14 se corresponde con un modelo autorregresivo de orden $2M$ y valor medio nulo y por lo tanto son válidas las herramientas vistas en 3.2.1 para estimar los polos del sistema.

Para que el modelo quede completamente determinado, se deben calcular la amplitud y fase correspondiente a cada polo. Para esto se resuelve el siguiente sistema lineal:

3.2. Estimación de polos

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^0 & \lambda_2^0 & \cdots & \lambda_p^0 \\ \lambda_1^1 & \lambda_2^1 & \cdots & \lambda_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-2} & \lambda_2^{N-2} & \cdots & \lambda_p^{N-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(N-2) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

y

$$A_i = |R_i| \quad (3.16)$$

$$\theta_i = \tan^{-1} \frac{Im(R_i)}{Re(R_i)} \quad (3.17)$$

Como se puede observar ambos métodos son muy similares, pero los parámetros de interés en cada caso son diferentes. En la aplicación actual, son de interés los polos y no la mejor aproximación de la señal bajo estudio. La diferencia primordial de cada método radica en el cálculo del resto de los parámetros del modelo.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Capítulo 4

Ubicación Óptima de las PMU

Como se vio anteriormente, en el presente trabajo se presenta un método para determinar la estabilidad del sistema luego de una perturbación haciendo uso de los sincrofasores. Los sincrofasores se obtienen con las PMU (Phasor Measurement Units) y por lo tanto es de particular interés estudiar la ubicación óptima de estos equipos en la red eléctrica bajo estudio (red uruguaya).

Para determinar la ubicación óptima de las PMU, se deben tomar ciertas hipótesis de trabajo. Por ejemplo, cuál va a ser la condición para la ubicación de los equipos, cuáles son las restricciones y cuál es la configuración de la red. Como respuesta a los puntos anteriores, se definen las siguientes hipótesis de trabajo:

- Condición: la ubicación de las PMU será tal que con las medidas obtenidas en los nodos definidos, el sistema es observable. De esta manera será posible conocer todas las tensiones y frecuencias en las diferentes barras del sistema y las corrientes por cada una de las líneas.
- Restricciones: no hay restricciones en cuanto a la cantidad de las PMU, pero se determina que los nodos con generación deben tener PMU instalados.
- Configuración de la red: se utiliza solamente una configuración de trabajo, en un escenario de máxima demanda.

Con estas condiciones, se plantea un método para hallar la cantidad óptima de PMU y su ubicación en un sistema de potencia. El algoritmo se resuelve para la red uruguaya, para el caso de máxima demanda de la red al 20 de enero de 2016. El archivo utilizado del PSS®E es *M_1500_20-01-16_1515hs_v17.sav* el cual fue suministrado por UTE.

Sobre el final de este capítulo, se analiza la situación de la red de UTE actual, con la ubicación de las PMU existentes debido a la implementación del RAS. El objetivo será diseñar una ubicación óptima de unidades, considerando las existentes. Finalmente se realiza un análisis comparativo de ambas soluciones.

4.1. Planteo del Problema de Optimización.

El algoritmo consiste en la construcción de una matriz (A) que contiene la información de los nodos que están interconectados en el sistema, y el planteo de un problema de optimización binaria.

La matriz A se construye de la siguiente manera:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si nodo } i \text{ está interconectado con nodo } j \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.1)$$

El planteo del problema es el siguiente:

$$\begin{cases} \min f(x) = \sum_{i=1}^N x_i \\ Ax \geq b \\ x \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (4.2)$$

La función a optimizar $f(x)$ es la cantidad total de PMU que se deben instalar en el sistema de potencia, y el vector $b = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}_{N \times 1}$.

El problema planteado de esta manera, asegura que la solución es observable, ya que cada nodo va a tener una PMU instalada o va a estar interconectado con un nodo que tenga una PMU instalada, definido por la ecuación $Ax \geq b$.

Si al problema de optimización se le agregan restricciones de igualdad es posible definir ubicaciones estratégicas que se le ingresan como datos de entrada al algoritmo de optimización. Para ésto se definen matrices A_{eq} y b_{eq} que contienen la información de las ubicaciones elegidas convenientemente por fuera de la solución óptima del algoritmo. A modo de ejemplo, si se considera el sistema de la figura 4.1 y se quiere ubicar una PMU en el nodo 1 y que no haya PMU en los nodos 2 y 3 el planteo del problema sería el siguiente:

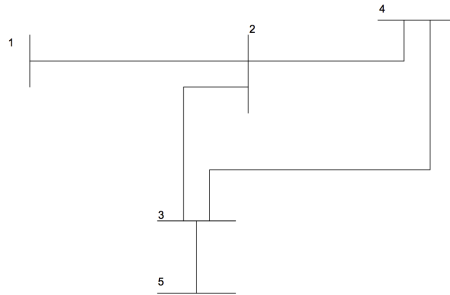


Figura 4.1: Red de ejemplo

4.2. Aplicación a la red uruguaya

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) = \sum_{i=1}^5 x_i \\ Ax = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \geq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ A_{eq}x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ x \in \{0,1\} \end{array} \right. \quad (4.3)$$

Donde se obtiene como resultado la ubicación de unidades en las barras 1, 4 y 5, con el siguiente vector solución:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En el sistema 4.3 la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

contiene la información de la topología de la red eléctrica y la matriz

$$A_{eq} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

contiene las restricciones de igualdad para ingresar las ubicaciones predeterminadas como datos de entrada al problema de optimización.

4.2. Aplicación a la red uruguaya

El alcance del estudio aplica solamente a la red de transmisión, en los niveles de tensión de 500 kV y 150 kV. Se define que se tratarán ambas redes de manera independiente y por lo tanto se resuelve un problema de optimización para la red de 500 kV y otro para la red de 150 kV.

Capítulo 4. Ubicación Óptima de las PMU

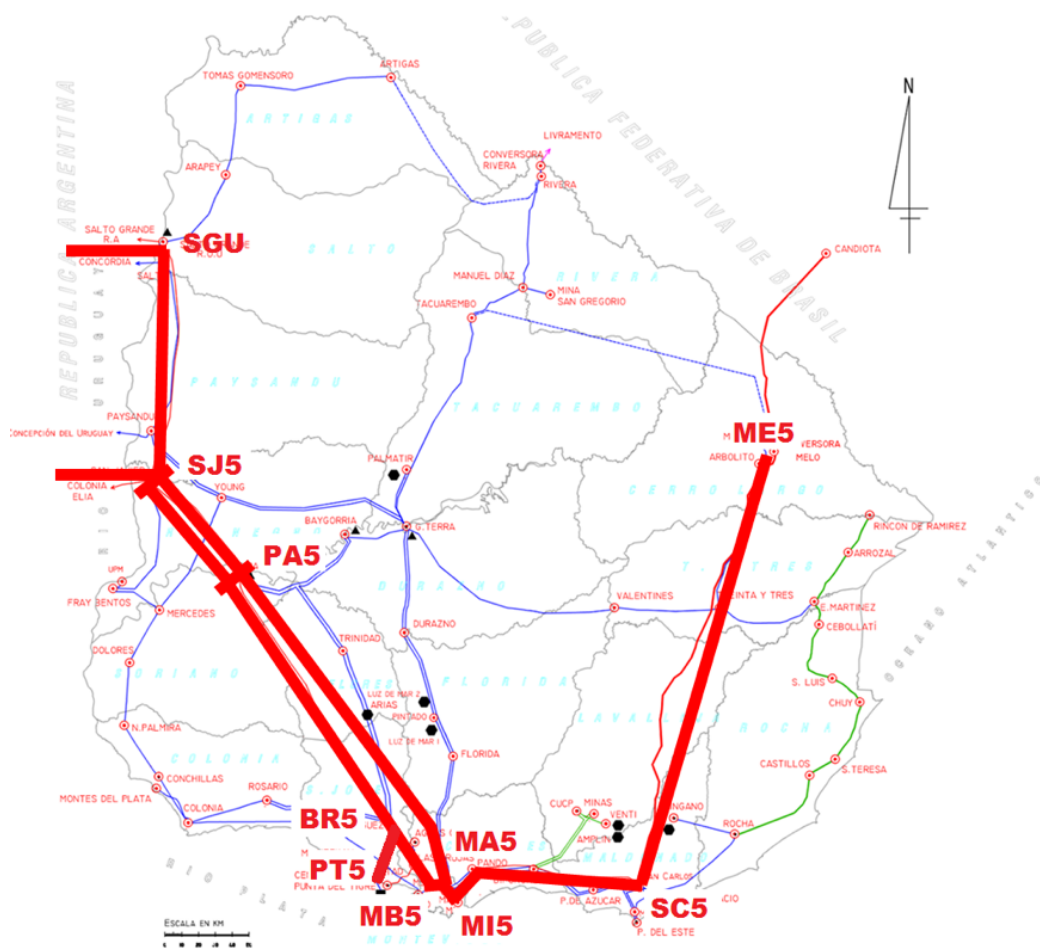


Figura 4.2: Sistema Eléctrico Uruguayo 500kV y 150kV

En la figura 4.2 se puede observar un mapa del Uruguay con las líneas y Subestaciones de 500 kV (rojo) y de 150 kV (azul).

4.2.1. Matriz A

Dado que la función objetivo $f(x)$ está determinada por la naturaleza del problema y no depende de la configuración de la red (a menos de la dimensión del vector), el primer paso consiste en construir la matriz A .

Se recuerda que la matriz A será la matriz que contiene la información de la topología de la red. La misma cuenta con la información de los nodos que están interconectados en el sistema. Es así, que se debe construir una matriz para la red de 500 kV y otra diferente para la red de 150 kV.

El procedimiento para la construcción de la matriz es el siguiente. Se parte

4.2. Aplicación a la red uruguaya

del modelo en PSS [®]E y se obtiene la matriz de admitancias de ambas redes. La matriz de admitancias exportada desde el PSS es de la siguiente forma:

Nodo 1	Nodo 2	Admitancia
--------	--------	------------

Los nodos que no están interconectados, no tienen una fila en la matriz de admitancias exportada. Por lo tanto, se genera un algoritmo en MATLAB que permite construir una matriz conformada por 1 y 0, a partir de las filas de la matriz de admitancias exportada del PSS [®]E.

En la figura 4.3 se puede observar el resultado obtenido para la red de 500 kV, debido a la dimensión de las matrices obtenidas no se muestran gráficamente los resultados para la red de 150 kV ($A_{103 \times 103}$).

1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1

Figura 4.3: Matriz A para la red de 500 kV

El vector de nodos de 500 kV se puede observar en la tabla C.1 del apéndice C.

4.2.2. Solución del problema de optimización

Una vez que se tiene el problema de optimización planteado, se procede a su resolución. Para resolver el problema, se utiliza la función *intlinprog* del MATLAB la cual resuelve problemas de optimización entera. Se adapta el problema de optimización entera, utilizando límites para la solución tal que $0 \leq x_i \leq 1$, $i = 1, \dots, n$ siendo n la cantidad de nodos del sistema, y de esta manera, se convierte en un problema binario.

El método de resolución utilizado es el *Branch and Bound* el cual se describe en A.1.

Capítulo 4. Ubicación Óptima de las PMU

Red de 500 kV

Para la red de 500 kV se muestran gráficamente los resultados, ya que la dimensión de los vectores permite un análisis gráfico más exhaustivo.

Cantidad óptima de PMU

La cantidad óptima de PMU es 4 cuando no se consideran restricciones de igualdad, y la ubicación se puede observar en la tabla 4.1.

Cantidad de PMU	4
Nodo	Descripción
90000	Salto Grande Uruguay
90160	Brujas
90500	Palmar
90700	San Carlos

Tabla 4.1: Ubicación PMU red de 500 kV sin restricciones de igualdad

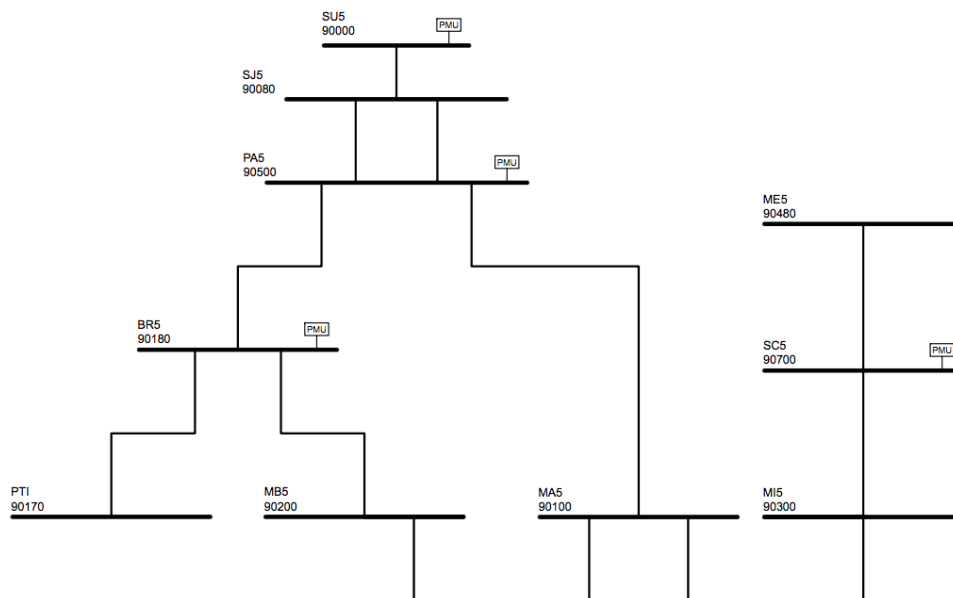


Figura 4.4: Red 500 kV con PMU

En la figura 4.4 se puede observar la configuración de la red de 500 kV y la ubicación óptima de las unidades de medida de fasores, sin considerar la restricción de los nodos con generación.

4.2. Aplicación a la red uruguaya

Como se definió al comienzo de este capítulo, se considera de interés contar con medidas de sincrofasores en los nodos donde hay generación. A saber:

- Nodo 90000: Salto Grande Uruguay 500 (SG5)
- Nodo 90500: Palmar 500 (PA5)
- Nodo 90170: Punta del Tigre 500 (PT5)

Para esto, se agregan restricciones de igualdad al problema de optimización, construyendo una matriz A compuesta por tres filas (cada fila es una restricción y se agrega una para cada barra) todos los elementos de la fila son 0 salvo en la posición correspondiente a la barra que se quiere forzar la ubicación que es 1. La expresión matemática se puede observar en la ecuación 4.4.

$$\begin{pmatrix} \underbrace{1}_{SG5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{PT5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underbrace{1}_{PA5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Donde Salto Grande corresponde a la posición 1, Punta del Tigre a la 9 y Palmar a la posición 13.

La cantidad óptima de PMU en este caso es 5, ubicados en los nodos representados en la tabla 4.2.

Cantidad de PMU	5
Nodo	Descripción
90000	Salto Grande Uruguay
90170	Punta del Tigre
90200	Montevideo B
90500	Palmar
90700	San Carlos

Tabla 4.2: Ubicación PMU red de 500 kV con restricciones de igualdad

En la figura 4.5 se puede observar la ubicación de las PMU en la red de 500 kV, considerando que en los nodos con generación deben haber unidades instaladas.

Capítulo 4. Ubicación Óptima de las PMU

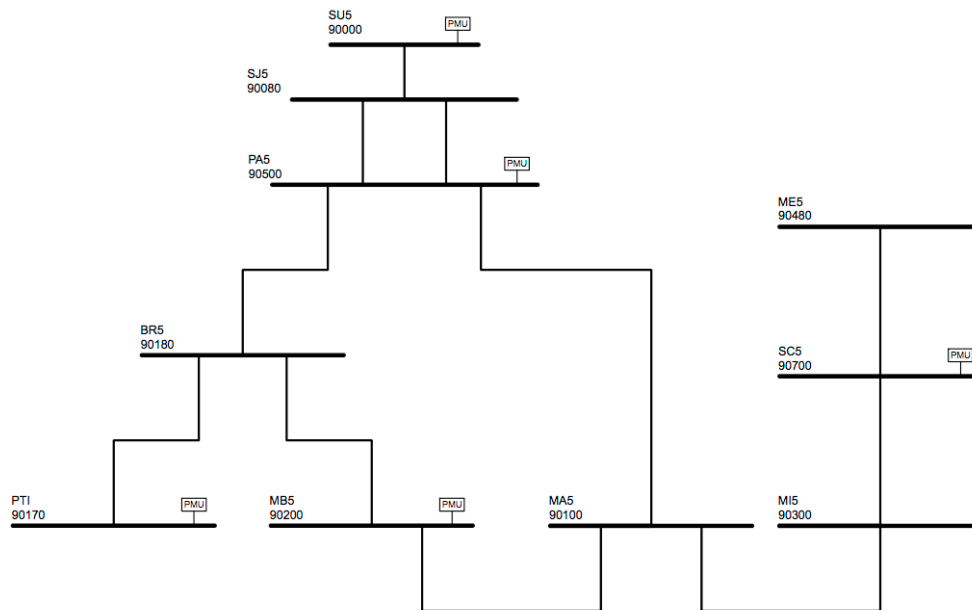


Figura 4.5: Red 500 kV con PMU con restricciones de igualdad

Red de 150 kV

Siguiendo el mismo procedimiento visto para la red de 500 kV, se calculan en primer lugar la cantidad óptima de las PMU sin considerar la restricción de igualdad para los nodos con generación.

La red de 150 kV está compuesta por 103 barras y por lo tanto no es posible expresar los resultados gráficamente en un diagrama unifilar como en el caso de 500 kV.

Cantidad óptima de PMU

La cantidad óptima de PMU sin considerar restricciones en los nodos con generación es 34.

Como algunas de las ubicaciones calculadas por el algoritmo no son subestaciones de Trasmisión sino nodos ficticios de la red modelados en el PSS®E, no tiene sentido físico ubicar unidades en estos nodos. Por lo tanto, se agregan las siguientes restricciones de igualdad (sistema 4.5) necesarias para que no sea factible la solución en estos puntos.

4.2. Aplicación a la red uruguaya

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \underbrace{1}_i & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \underbrace{1}_j & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \underbrace{1}_k & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

Donde se asume que los nodos i, j, k son nodos ficticios.

Si se consideran también las restricciones de igualdad correspondiente a la ubicación de los nodos con generación, la cantidad óptima de PMU es 38.

En el apéndice C se presentan tablas con las ubicaciones correspondientes en ambos casos.

4.3. Situación de la red actual de UTE

Actualmente, con la implementación del sistema *RAS* de UTE, hay PMU ubicadas en ciertos nodos. El objetivo de esta sección es plantear una distribución de unidades en la red de tal manera que sea observable utilizando las ubicaciones de las unidades existentes.

4.3.1. Red de 500 kV

En la tabla 4.3 se puede observar las barras de 500 kV con PMU existentes.

Cantidad de PMU existentes	7
Nodo	Descripción
90100	Montevideo A
90160	Brujas
90200	Montevideo B
90300	Montevideo I
90480	Melo
90500	Palmar
90700	San Carlos

Tabla 4.3: Nodos de 500 kV con PMU existentes

El sistema $Ax = b$ con la información de las restricciones sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

La solución al problema de optimización se presenta en la tabla 4.4 donde se puede ver que solamente hace falta ubicar una unidad en Salto Grande para que la red de 500 kV sea observable.

Observación. No se consideraron las restricciones de ubicar PMU en los nodos con generación.

4.3. Situación de la red actual de UTE

Cantidad total de PMU	8
Nodo	Descripción
90000	Salto Grande
90100	Montevideo A
90160	Brujas
90200	Montevideo B
90300	Montevideo I
90480	Melo
90500	Palmar
90700	San Carlos

Tabla 4.4: Ubicación PMU red de 500 kV considerando las unidades existentes y la nueva unidad a instalar en Salto Grande para que el sistema sea observable

4.3.2. Red de 150 kV

En la tabla 4.5 se puede observar las barras de 150 kV con PMU existentes.

Cantidad de PMU existentes	12
Nodo	Descripción
92710	Bifurcación
92540	Bonete
92630	Colonia
92520	Florida
92100	Montevideo A
92200	Montevideo B
92500	Palmar
92030	Paysandú
92400	Rivera
92580	Rodriguez
92590	Trinidad
92020	Young

Tabla 4.5: Nodos de 150 kV con PMU existentes

Para que la red sea observable, se deberían instalar 27 PMU adicionales a las instaladas. En el apéndice C se presentan las barras donde deberían ser ubicadas estas unidades.

4.4. Consideraciones finales

Como se desarrolló a lo largo de este capítulo, tener una estrategia para la ubicación de las PMU en la red genera ventajas significativas en cuanto a los costos y observabilidad del sistema. Obtener un sistema observable implica poder conocer el estado interno del sistema a partir de las salidas. Esto es muy importante, por ejemplo, para el análisis de la estabilidad luego de una perturbación. Adicionalmente, la estrategia planteada logra que el sistema sea observable, con la mínima cantidad de unidades posibles, y por lo tanto el mínimo costo de implementación.

La cantidad y distribución actual de PMU en la red uruguaya no es suficiente para que el sistema sea observable. Debido a la ubicación de las PMU definidas por el *RAS* se deben instalar 5 unidades más de las estrictamente necesarias en 150 kV y 4 unidades más en 500 kV para que el sistema sea observable.

Capítulo 5

Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

En el capítulo 4 se analizó un método para la ubicación óptima de las PMU en la red eléctrica, junto con la aplicación a la red uruguaya. Esto es de utilidad para poder monitorear adecuadamente las barras del sistema y no tener más información de la necesaria al realizar los análisis pertinentes. A partir de ahora se van a utilizar los resultados del capítulo 4 para relevar las medidas en los nodos que cuentan con PMU instalada, como resultado del algoritmo de optimización.

En el proyecto de investigación titulado “*Aplicaciones de medidas de Sincrofasores en detección en tiempo real de estabilidad dinámica y protección del sistema eléctrico uruguayo*” se utiliza el algoritmo desarrollado en 3.2 para el cálculo de los polos de la señal. El mismo fue validado con señales de prueba conocidas y con el resultado de simulaciones realizadas en la red de prueba *IEEE New England* de 39 barras.

El algoritmo desarrollado implica la construcción de un modelo autorregresivo para la descomposición de la señal en sus polos. Debido al ruido numérico asociado a las simulaciones en el PSS®E, se debió recurrir al filtrado del ruido blanco mediante la técnica explicada en 2.2.3 en la que se trunca la matriz recursiva H descartando los valores singulares menores al 20 % del mayor valor singular. La elección de este valor se realizó mediante un análisis cualitativo de los valores singulares. Este límite se debe determinar nuevamente para el caso del ruido asociado al muestreo y procesamiento de las medidas para la implementación práctica de esta aplicación en un sistema eléctrico de potencia. Adicionalmente se utilizó la técnica desarrollada en 2.13 para identificar los polos del sistema y los polos espurios.

En primer lugar, se definen las señales que se van a analizar, luego se aplica el algoritmo para calcular el modelo autorregresivo a esas señales y finalmente se evalúa la estabilidad del sistema frente a diferentes perturbaciones. La validación se realiza en la red de 500 kV para que sea posible un análisis gráfico cualitativo

Capítulo 5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

y cuantitativo de los resultados.

Definición de señales

Las señales que se van a relevar para cada barra son:

- Tensión, módulo y fase
- Frecuencia

La selección de estas variables es debido a que con esta información, es posible determinar la estabilidad del sistema frente a las perturbaciones realizadas. En particular, el modelo autorregresivo se aplicará a la frecuencia en cada barra.

Como se puede ver en la figura 4.5, en la red de 500 kV se ubican PMU en las barras Salto Grande Uruguay 500, Punta del Tigre 500, Montevideo B 500, Palmar 500 y San Carlos 500. En la tabla 5.1 se presenta la codificación de las barras de la red de 500 kV que se van a analizar.

Nodo	Código	Descripción
90000	SG5	Salto Grande Uruguay 500
90170	PT5	Punta del Tigre 500
90200	MB5	Montevideo B 500
90500	PA5	Palmar 500
90700	SC5	San Carlos 500

Tabla 5.1: Codificación Barras red de 500kV

A lo largo de todo el capítulo se eligen perturbaciones estables e inestables para lograr realizar un análisis completo de los algoritmos implementados. Las gráficas correspondientes al módulo y fase de la tensión para cada una de las perturbaciones se presentan en el apéndice D, ya que dichas señales no son analizadas por los algoritmos.

5.1. Perturbación: Apertura de las líneas *PA5-SJ5-1* y *PA5-SJ5-2*

Motivado por el apagón del 3 de agosto del 2016, la primer perturbación que se va a realizar es la apertura de las dos líneas Palmar - San Javier. En primer lugar se simula un cortocircuito en PA5-SJ5-1 en $t = 1$ seg, a los 80 ms se abre la línea y a los 140 ms se abre la línea PA5-SJ5-2.

5.1. Perturbación: Apertura de las líneas PA5-SJ5-1 y PA5-SJ5-2

Se realizan las simulaciones con el módulo dinámico en el PSS®E. En la figura 5.1 se puede observar la evolución de la desviación de la frecuencia en función del tiempo luego de la perturbación.

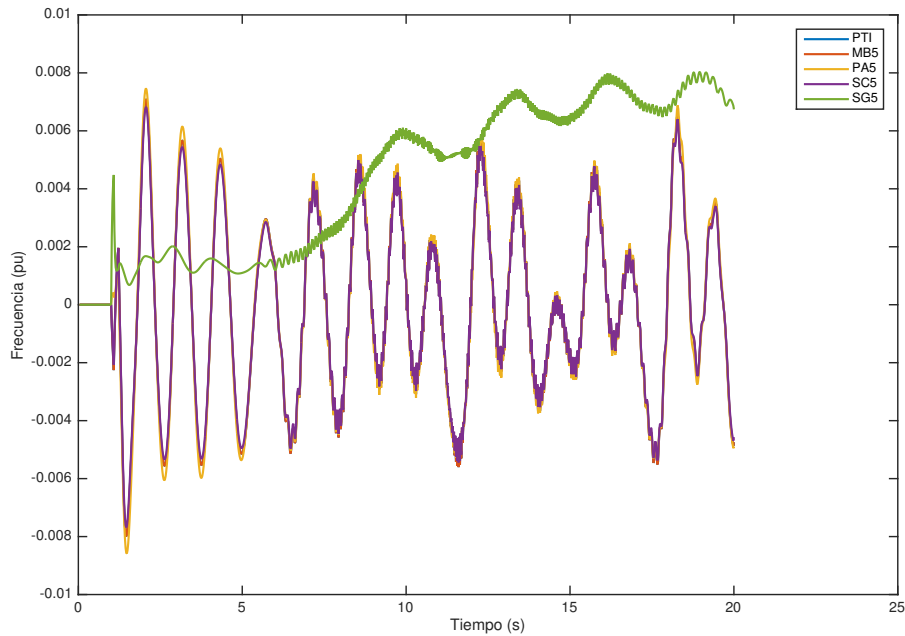


Figura 5.1: Evolución de la frecuencia en función del tiempo en todas las barras luego de la apertura de las dos líneas PA5-SJ5

Análisis cualitativo

Como se puede ver en la gráfica de la figura 5.1, hasta los 6 segundos de simulación aproximadamente el sistema podría recuperarse ya que la oscilación de la frecuencia tiene una envolvente decreciente. Pero a partir de ese tiempo, se excita al menos un nodo con parte real positiva, ya que la amplitud de la oscilación crece nuevamente.

Se observan respuestas diferentes entre Salto Grande y el resto de las frecuencias del sistema eléctrico uruguayo. Esto se debe a que Salto Grande queda desvinculado del resto de la red uruguayo quedando vinculado al sistema eléctrico argentino. El resultado de la simulación dinámica en la barra de Salto Grande se debe a que el modelo del sistema eléctrico argentino es simplificado. Con un modelo completo de la red argentina, es de esperar que la oscilación en la frecuencia de Salto Grande sea menor.

Análisis cuantitativo

Del análisis cualitativo anterior, surge el interés de separar los modelos en dos,

Capítulo 5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

uno para $1 \leq t \leq 6$ y otro para $1 \leq t \leq 20$.

Observación. Se considera $t \geq 1$ ya que la perturbación se aplica al segundo de simulación y los tiempos menores son de la inicialización del sistema dinámico y del régimen estacionario. De esta manera se analiza a partir de aplicada la perturbación y el resultado no se ve afectado por el estado de régimen anterior.

Primer Caso: $1 \leq t \leq 6$ seg

Para $1 \leq t \leq 6$ seg el resultado del modelo autorregresivo da como polos del sistema los valores que se expresan a continuación.

Barra 90170: Punta del Tigre 500 y Barra 90200: Montevideo B 500

Para Punta del Tigre y Montevideo B, los resultados obtenidos del modelo son:

$$m = -0,0677 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,8615 \quad (5.1)$$

El resultado corresponde a una perturbación con oscilación estable de 0,8615 Hz y una amortiguación dada por:

$$D = \frac{0,0677}{\sqrt{0,0677^2 + (0,8615 \cdot 2 \cdot \pi)^2}} = 0,0125 = 1,25\% \quad (5.2)$$

Validación gráfica de la frecuencia de oscilación.

En la figura 5.2 se puede observar gráficamente la evolución de la frecuencia eléctrica de la barra en los primeros ciclos.

La frecuencia de oscilación puede ser calculada gráficamente con la simplificación de que hay un solo modo excitado a partir de la figura 5.2.

$$f = \frac{2}{4,321 - 2,061} = 0,885 \text{ Hz} \quad (5.3)$$

Cálculo de amplitud y fase de la frecuencia eléctrica para la validación del resultado del algoritmo.

Como el resultado obtenido presenta un solo polo, la frecuencia eléctrica (f_B) se puede aproximar como

$$f_B \approx A \cdot e^{\alpha t} \cos(2\pi f t + \phi) \quad (5.4)$$

En donde el coeficiente A se puede calcular evaluando el tiempo cuando el coseno es máximo, como se indica a continuación:

5.1. Perturbación: Apertura de las líneas PA5-SJ5-1 y PA5-SJ5-2

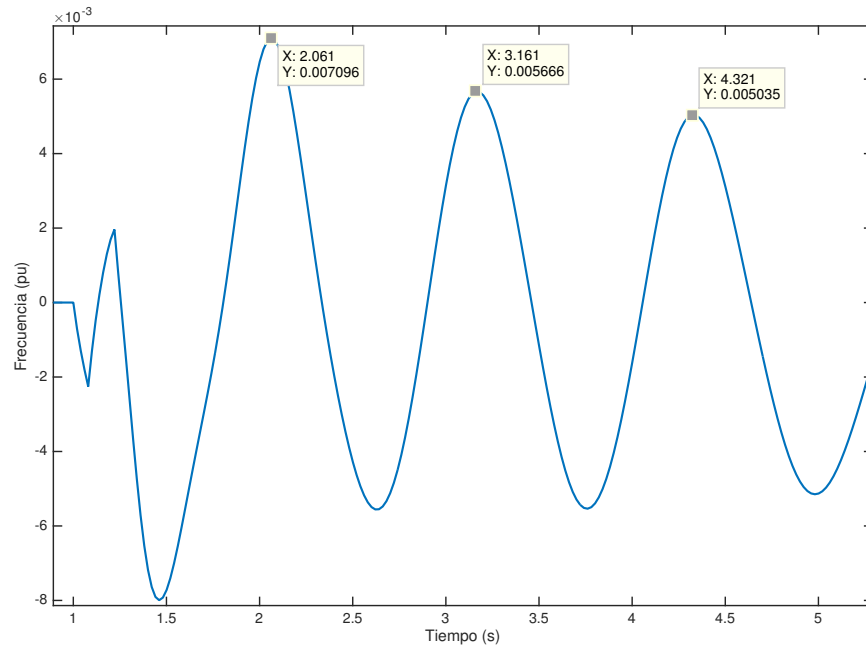


Figura 5.2: Evolución de la frecuencia en los primeros ciclos de la barra PT5

$$f(t^*) \approx A \cdot e^{\alpha t^*} \underbrace{\cos(2\pi f t^* + \phi)}_{=1} = A \cdot e^{\alpha t^*} \quad (5.5)$$

Por lo tanto, si $t^* = 3,161$ seg se tiene que:

$$0,005666 = A \cdot e^{-0,0677 \cdot 3,161} \Rightarrow A = 0,005666 \cdot e^{0,0677 \cdot 3,161} = 0,00702 \quad (5.6)$$

$$\Rightarrow f_B \approx 0,00702 \cdot e^{-0,0677 \cdot t} \cos(2\pi \cdot 0,8615t + \phi) \quad (5.7)$$

Para calcular el valor de ϕ , se grafica f_B para $\phi = 0$ y se compara con la señal simulada, calculando el desfase a partir de la diferencia temporal entre máximos.

En la gráfica 5.3 se puede observar la diferencia entre máximos de la frecuencia simulada y calculada utilizando el polo obtenido por el algoritmo.

$$\phi(rad) = (2,321 - 2,061) \cdot 0,8615 \cdot 2\pi = 1,407 \quad (5.8)$$

En la figura 5.4 se grafica la frecuencia calculada con la corrección de fase.

Capítulo 5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

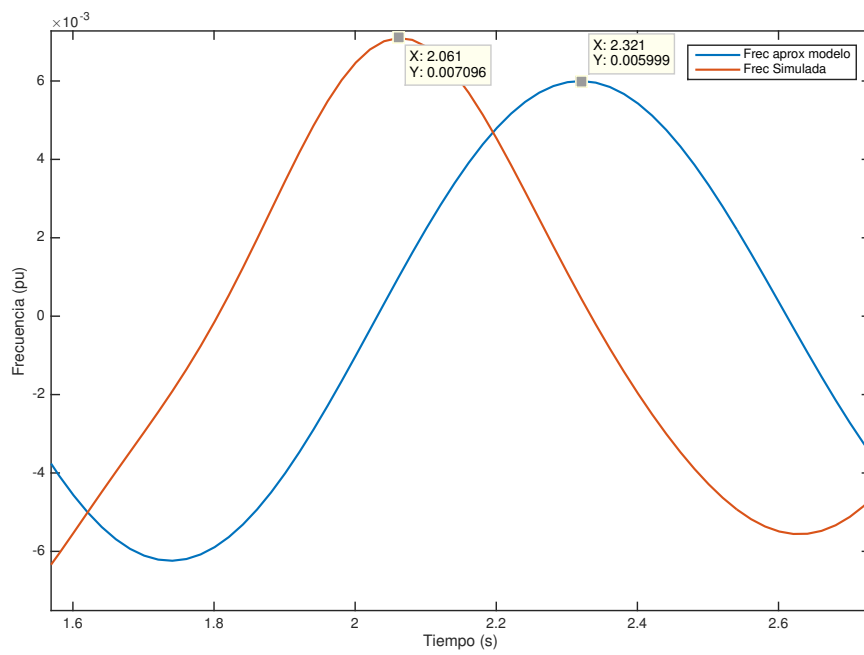


Figura 5.3: Comparación de frecuencias sin corrección de desfase en PT5

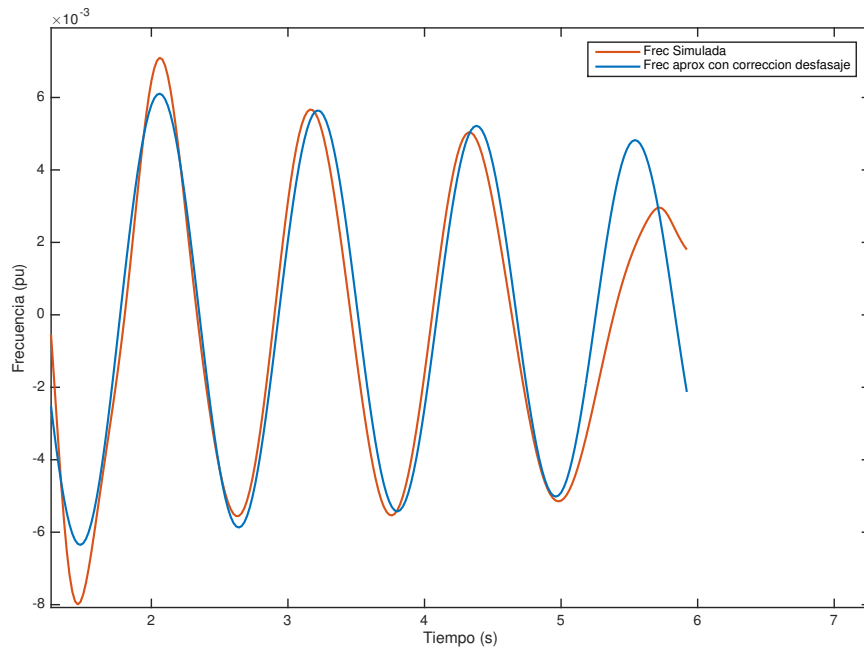


Figura 5.4: Comparación de frecuencias con corrección de desfase en PT5

5.1. Perturbación: Apertura de las líneas PA5-SJ5-1 y PA5-SJ5-2

Cálculo del error

Sea

$$e(\%)_{x_1, x_2} = \|x_1 - x_2\|_2 \cdot 100 \quad (5.9)$$

el error entre los vectores x_1 y x_2 respectivamente.

Observación. Si bien la ecuación 5.9 es el cálculo de un error absoluto, se expresa en porcentaje ya que los vectores x_1, x_2 están compuestos por elementos expresados en por unidad.

Por lo tanto, la señal aproximada tendrá un error con respecto a la señal simulada dado por:

$$e = \|f_{simu} - f_B\|_2 \cdot 100 = 2,56 \% \quad (5.10)$$

Si se considera la diferencia entre los vectores para $1 \leq t \leq 5$ el error baja a 2%.

El error relativo en la frecuencia de oscilación se podría calcular como:

$$e(\%) = \frac{0,885 - 0,8615}{0,885} \cdot 100 = 2,66 \% \quad (5.11)$$

El error calculado en 5.10 está dentro del margen de lo esperado, según el trabajo realizado sobre la red *IEEE New England de 39 barras* y considerando las aproximaciones realizadas en el modelo y filtrado.

El algoritmo utilizado para la identificación de los polos (modelo autorregresivo) no tiene como objetivo calcular el resto de los parámetros de la función aproximada (amplitud y fase del polo) y por lo tanto no se minimiza el error para calcular estos parámetros. En esta sección se calcularon estos parámetros igualando las señales en un instante de tiempo para tener una aproximación cualitativa de los resultados obtenidos. Con el análisis de Prony es posible obtener una buena aproximación de la amplitud y fase del polo calculado y de esta manera se minimiza el error entre las señales, pero estos parámetros no son de interés en esta aplicación y tiene un costo computacional significativo para una aplicación online.

Barra 90500: Palmar 500

$$m = -0,0892 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,8619 \quad (5.12)$$

El resultado corresponde a una perturbación con oscilación estable de 0,8619 Hz y una amortiguación dada por:

$$D = \frac{0,0892}{\sqrt{0,0892^2 + (0,8619 \cdot 2 \cdot \pi)^2}} = 0,0165 = 1,65 \% \quad (5.13)$$

Capítulo 5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

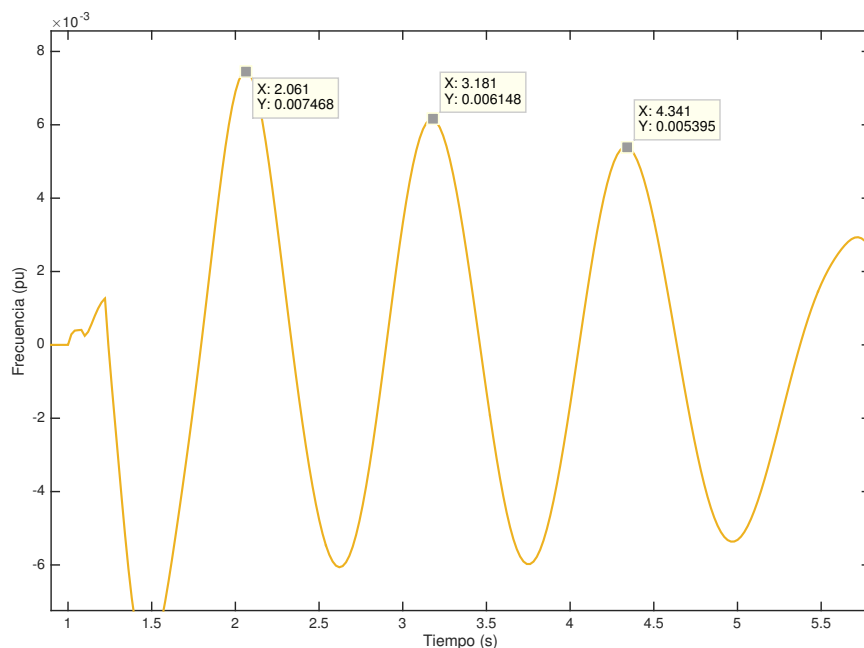


Figura 5.5: Evolución de la frecuencia en los primeros ciclos de la barra PA5

En la figura 5.5 se puede observar gráficamente la evolución de la frecuencia en los primeros ciclos.

Con la simplificación de que hay un solo modo excitado, se calcula a partir de la gráfica 5.5 la frecuencia de oscilación de la siguiente manera:

$$f = \frac{2}{4,341 - 2,081} = 0,885 \text{ Hz} \quad (5.14)$$

De manera análoga a lo visto para las barras anteriores, la función f_B se puede aproximar por:

$$f_B \approx Ae^{\alpha t} \cdot \cos(2\pi ft + \phi) \quad (5.15)$$

Donde

- $A = 0,008165$
- $\phi(\text{rad}) = 1,6246$

Por lo tanto, la función de frecuencia aproximada es:

$$f_B(t) = 0,008165 \cdot e^{-0,0892t} \cdot \cos(2\pi \cdot 0,8619t + 1,6246) \quad (5.16)$$

El error calculado según la ecuación 5.9 es 2,66 % para la señal y 2,61 % para la frecuencia de oscilación según la ecuación 5.11.

5.1. Perturbación: Apertura de las líneas PA5-SJ5-1 y PA5-SJ5-2

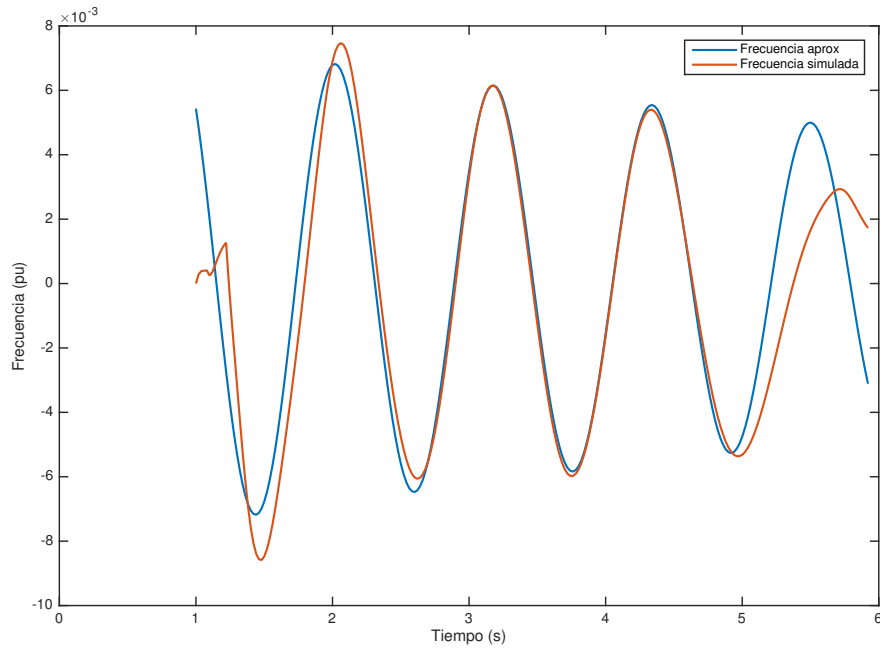


Figura 5.6: Comparación de frecuencias con corrección de desfase en PA5

Observación. Comparando este resultado con el de Montevideo B y Punta del Tigre, se puede observar que si bien la frecuencia de oscilación es la misma para ambos, la Barra de Palmar tiene una atenuación mayor, lo cual se ve reflejado en que el factor de amortiguamiento es mayor.

Barra 90700: San Carlos 500

El resultado para la barra San Carlos es el siguiente:

$$m = -0,068 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,8617 \quad (5.17)$$

El resultado corresponde a una perturbación con oscilación estable de 0,8617 Hz.

Barra 90000: Salto Grande Uruguay 500

El comportamiento de la frecuencia en la barra de Salto Grande Uruguay es muy diferente a los anteriores. Esto se puede explicar cualitativamente ya que, como se puede ver en la figura 4.2 la barra de Salto Grande se aísla del resto del sistema en 500 kV.

Como se puede ver en la figura 5.1, la evolución de la frecuencia en el tiempo para esta barra hace que no sea adecuado realizar un análisis similar a las barras anteriores.

Capítulo 5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

Para este caso, el resultado del modelo autorregresivo es:

$$m_1 = -14,5489 \pm j \cdot 2\pi \cdot 4,2013$$

$$m_2 = -0,6605 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,0768$$

$$m_3 = -0,6487 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,2398$$

$$m_4 = -0,1049 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,6880$$

Segundo Caso: $1 \leq t \leq 20$ seg

A partir de ahora se va a analizar la señal hasta $t = 20$ seg, donde es de esperar que el algoritmo del modelo autorregresivo calcule al menos un polo con parte real positiva.

A continuación se muestran los polos con parte real positiva para cada una de las barras:

- Barra 90170 - Punta del Tigre 500:

$$m_1^+ = 0,0524 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,8060$$

$$m_2^+ = 0,0996 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,3357$$

- Barra 90200 - Montevideo B 500:

$$m_1^+ = 0,0524 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,8060$$

$$m_2^+ = 0,0996 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,3357$$

- Barra 90500 - Palmar 500:

$$m_1^+ = 0,0767 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,8095$$

$$m_2^+ = 0,0987 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,3382$$

- Barra 90700 - San Carlos 500:

$$m_1^+ = 0,0515 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,8060$$

$$m_2^+ = 0,0995 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,3359$$

- Barra 90000 - Salto Grande Uruguay 500: no hay polos con parte real positiva.

5.1. Perturbación: Apertura de las líneas *PA5-SJ5-1* y *PA5-SJ5-2*

Este resultado indica que la perturbación es inestable en frecuencia para todas las barras excepto Salto Grande, verificando con esto lo ocurrido en la perturbación del 3 de agosto de 2016. La inestabilidad se da porque se pierde el vínculo del sur del Río Negro, donde está la mayor demanda de potencia en el país, con Argentina y de esta manera el sistema eléctrico quedó débilmente vinculado.

El algoritmo detecta que la perturbación es inestable a los 6.2 *seg* de simulación, lo que equivale a 5.2 *seg* luego de la perturbación. Esto indica que se tiene aproximadamente 5 segundos para implementar una protección sistémica (rechazo de carga) para poder hacer que la isla, conformada por el sistema eléctrico del sur del Río Negro, sea estable.

5.2. Perturbación: Apertura línea *PA5 - SJ5 - 1*

Luego de analizar los resultados para el caso en que salen de servicio las dos líneas, Palmar - San Javier, lo cual es una perturbación inestable, se realiza una simulación en la cuál se abre la línea Palmar - San Javier 1, como consecuencia de un cortocircuito.

Como se puede observar en la gráfica de la figura 5.7 y en el complemento del apéndice D, la frecuencia y tensión vuelven a una condición de operación aceptable al cabo de 20 segundos y por lo tanto la perturbación es estable.

El resultado del algoritmo para este caso es:

- Barra 90170 - Punta del Tigre 500:

$$m_1 = -1,422 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,6126$$

$$m_2 = -0,1924 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1467$$

- Barra 90200 - Montevideo B 500:

$$m_1 = -1,422 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,6126$$

$$m_2 = -0,1924 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1467$$

- Barra 90500 - Palmar 500:

$$m_1 = -0,2195 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,7085$$

$$m_2 = -0,1403 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1387$$

- Barra 90700 - San Carlos 500:

$$m_1 = -1,421 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,6186$$

$$m_2 = -0,1900 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1463$$

- Barra 90000 - Salto Grande Uruguay 500:

$$m_1 = -0,225 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1401$$

$$m_2 = -1,2351 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,9077$$

$$m_3 = -0,8258 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,6734$$

5.3. Perturbación: Apertura línea MA5 - MI5

Como todos los polos tienen parte real negativa con el algoritmo se verifica también que la perturbación es estable.

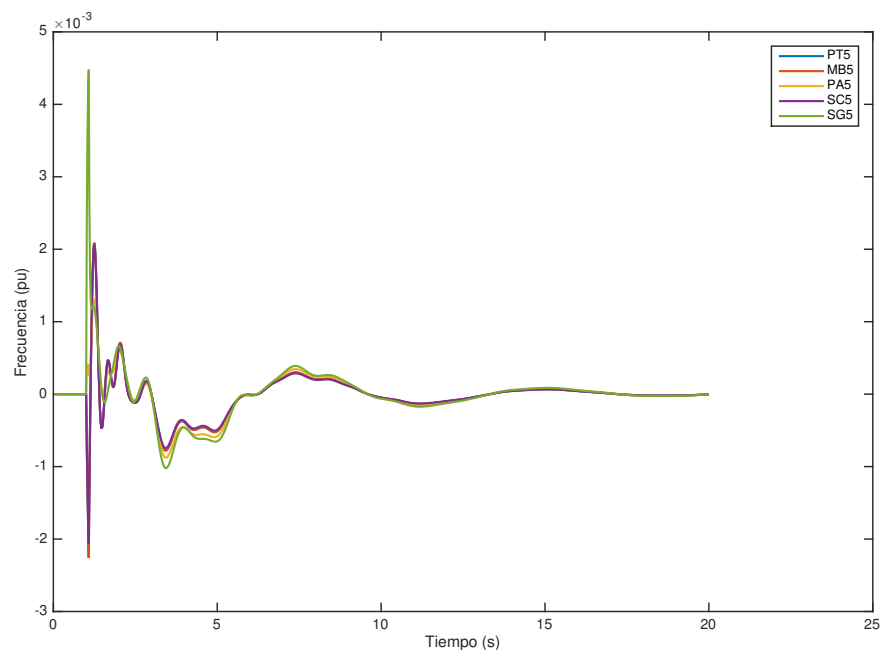


Figura 5.7: Evolución de la frecuencia en función del tiempo en todas las barras luego de la apertura de la línea PA5-SJ5-1

5.3. Perturbación: Apertura línea MA5 - MI5

Se analiza la perturbación producto de la apertura de la línea Montevideo A - Montevideo I, como consecuencia de un cortocircuito en la línea. Como se puede ver en la figura 5.8 y en el complemento del apéndice D, la frecuencia y tensión vuelven a una condición de operación aceptable al cabo de 15 segundos y por lo tanto la perturbación es estable.

El resultado del algoritmo en este caso es el siguiente:

- Barra 90170 - Punta del Tigre 500:

$$m_1 = -1,2599 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,168$$

$$m_2 = -0,1385 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1391$$

Capítulo 5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

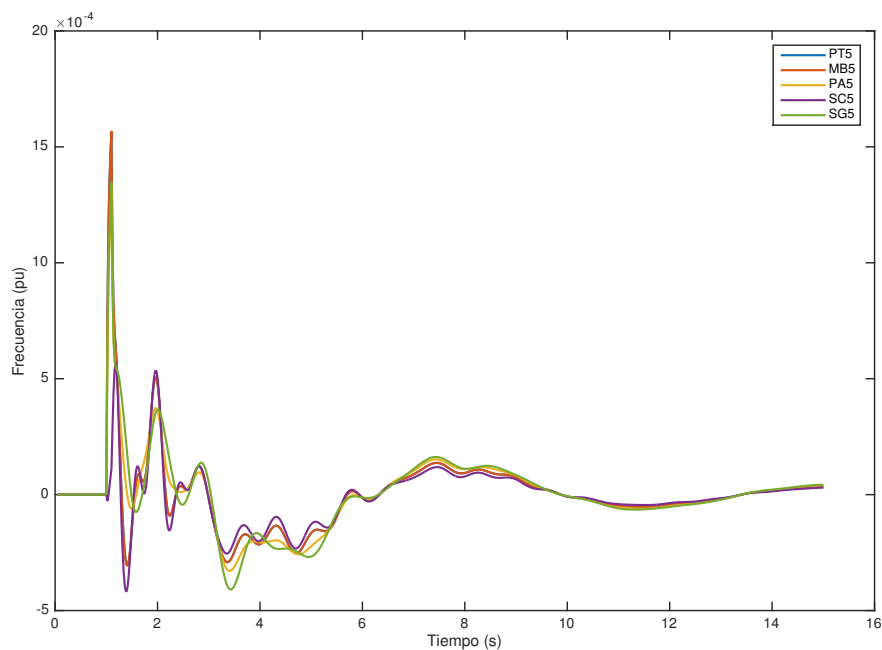


Figura 5.8: Evolución de la frecuencia en función del tiempo en todas las barras luego de la apertura de la línea MA5-MI5

- Barra 90200 - Montevideo B 500:

$$m_1 = -1,2599 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,168$$

$$m_2 = -0,1385 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1391$$

- Barra 90500 - Palmar 500:

$$m_1 = -1,024 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,029$$

$$m_2 = -0,1509 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1396$$

- Barra 90700 - San Carlos 500:

$$m_1 = -1,1339 \pm j \cdot 2\pi \cdot 2,3710$$

$$m_2 = -0,4520 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,1165$$

$$m_3 = -0,1226 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1347$$

5.3. Perturbación: Apertura línea MA5 - MI5

$$m_4 = -0,4088 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,4001$$

- Barra 90000 - Salto Grande Uruguay 500:

$$m_1 = -0,7101 \pm j \cdot 2\pi \cdot 1,0236$$

$$m_2 = -0,1935 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,1378$$

$$m_3 = -0,4380 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,6348$$

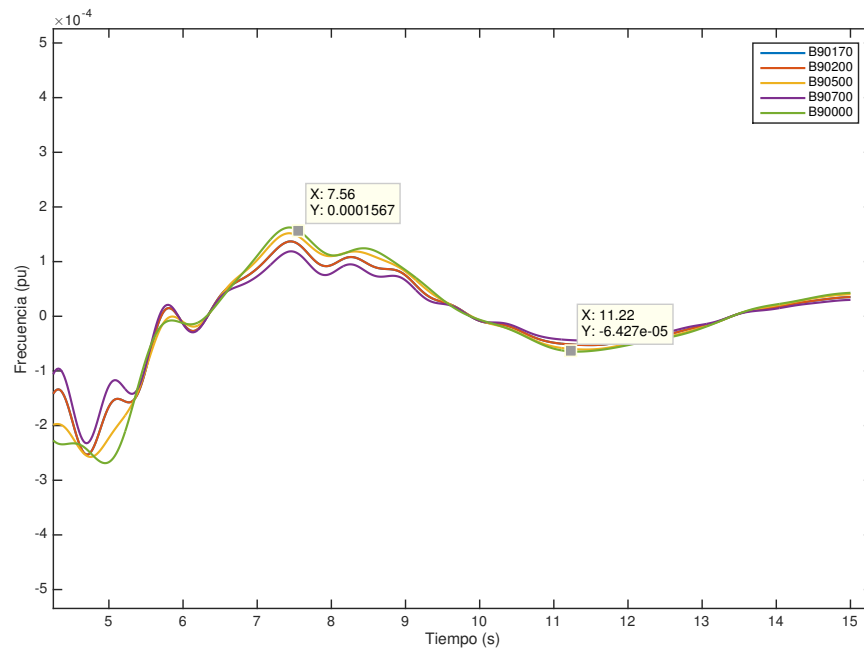


Figura 5.9: Frecuencia vs Tiempo

Todos los polos tienen parte real negativa, y por lo tanto se verifica que la perturbación es estable, como se había analizado cualitativamente con la evolución de las frecuencias y tensiones en la simulación.

Es interesante observar que al cabo de 10 segundos aproximadamente la frecuencia en todas las barras oscila de la misma manera (figura 5.8). Esto implica que hay un polo que permanece excitado a los 10 segundos y es el mismo para todas las barras. El resultado del algoritmo presenta que

$$m \approx -0,13 \pm j \cdot 2\pi \cdot 0,14$$

Capítulo 5. Validación de los Algoritmos en el Sistema Eléctrico Uruguayo

es un polo común a todas las frecuencias eléctricas de las barras. En la figura 5.9 se observa que la frecuencia de oscilación que se mantiene es aproximadamente

$$f = \frac{1}{2 \cdot (11,22 - 7,56)} = 0,1366 \text{ Hz}$$

verificándose gráficamente el resultado obtenido con el algoritmo.

Capítulo 6

Conclusiones

A lo largo de todo el documento, se explica el marco teórico y el método desarrollado para la detección de perturbaciones inestables utilizando las medidas obtenidas por las PMU.

Se plantea un método para la ubicación óptima de las PMU en un sistema eléctrico y su aplicación a la red uruguaya actual. Como punto de partida, se considera un escenario en el que no hay unidades instaladas, para luego llevarlo a la situación del día de hoy, con cierta cantidad de unidades instaladas en la red uruguaya. Este capítulo queda abierto a futuras investigaciones, ya que es posible profundizar en las técnicas para la ubicación óptima de las PMU agregando variables al problema. Por ejemplo, el costo asociado a las instalaciones de las PMU y la confiabilidad del sistema y de las propias unidades de medida.

Se concluye en este aspecto que la situación actual del sistema eléctrico uruguayo no es observable con la cantidad de PMU instaladas. La ubicación de las mismas no responde a la solución de un problema de optimización, y por lo tanto para que el sistema sea observable se tiene un costo adicional de 5 PMU. Para que sea posible la implementación de aplicaciones como la desarrollada en la presente tesis de maestría, es necesario completar el sistema eléctrico con la cantidad necesaria de PMU de forma tal que el sistema sea observable. De esta manera las medidas de los sincrofasores en los puntos adecuados de la red brindarán el conocimiento del estado interno del sistema eléctrico.

A su vez se implementa un algoritmo para detectar perturbaciones inestables en el sistema eléctrico de potencia. Los métodos son principalmente un análisis de Prony y un modelo autorregresivo, pero dado que se resuelve el mismo problema para detectar los polos, solamente se muestran los resultados para el modelo autorregresivo el cual es más eficiente computacionalmente.

Hay dos aspectos claves para el correcto funcionamiento del algoritmo que son:

- **Filtrado del ruido blanco.** Se realiza la descomposición en valores sin-

Capítulo 6. Conclusiones

gulares de la matriz recursiva H donde se desprecian los valores singulares correspondientes al ruido blanco, que puede ser numérico (en el caso de las simulaciones) o asociarse al procesamiento digital de las señales

- **Identificación de polos espurios.** Se aplica la técnica desarrollada en la ecuación 2.13, a partir de una base ortonormal (V_1) de la matriz de predicción (S) y aplicando la transformación lineal $S_1 = V_1^* S V_1$. Obtener esta solución fue un proceso largo y se probaron una variedad de soluciones como por ejemplo la *Transformada de Fourier*.

Los resultados obtenidos muestran al menos un polo con parte real positiva para las perturbaciones inestables y polos con parte real negativa en las perturbaciones estables. Además se comprobó para una de las simulaciones que el resultado obtenido concuerda gráficamente con la simulación realizada.

De lo anterior, se concluye que el algoritmo es eficiente bajo las simulaciones de validación realizadas.

Para la implementación *online* de esta aplicación, se deben considerar algunas complejidades. La primera de ellas es el tiempo de ejecución, ya que debe ser posible obtener un resultado del algoritmo en el lapso de tiempo en que se reciben dos muestras. La evaluación de la estabilidad del sistema debe realizarse en un tiempo menor al de muestreo, que en este caso es 20 *ms*. La segunda complejidad está asociada a la cantidad de muestras que se debe considerar para poder realizar una evaluación correcta de la estabilidad. El histórico elegido está fuertemente vinculado con la frecuencia de los polos que se quieren evaluar. A modo de ejemplo, para frecuencias de oscilación electromecánicas, entre 0.5 Hz y 10 Hz, el histórico debe ser mayor o igual a 4 segundos (200 muestras).

Para obtener tiempos de ejecución por debajo a los 20 *ms*, se debe implementar el algoritmo en un lenguaje compilado, como por ejemplo *C*. Esto se hizo en el marco del proyecto “*Aplicaciones de medidas de Sincrofasores en detección en tiempo real de estabilidad dinámica y protección del sistema eléctrico uruguayo*” y se lograron tiempos de ejecución significativamente menores a los obtenidos en MATLAB®. De esta manera, fue posible recalcular los polos en un tiempo menor al de muestreo (20 *ms*) y poder así llevarlo a una implementación práctica.

Apéndice A

Optimización Lineal

Los problemas de optimización lineal, desarrollados en 2.1 pueden ser resueltos mediante diferentes algoritmos y técnicas para optimización lineal entera. A continuación se describe uno de los métodos posibles como es el caso de los *Algoritmos Branch and Bound*.

A.1. Algoritmos Branch and Bound

La resolución de problemas de optimización discreta es, en general, un problema que requiere un importante potencia de cálculo para su resolución y por lo tanto los algoritmos deben ser muy eficientes como, por ejemplo, *Branch and Bound Algorithms* [3]. Este tipo de algoritmos buscan la solución en todo el conjunto factible, sin embargo, no es posible realizar una evaluación explícita de todas las soluciones. En los mismos se recorre implícitamente todo el conjunto factible de soluciones, acotando la función objetivo y combinando con la “mejor” solución actual.

El algoritmo se basa en generar un árbol con distintos conjuntos factibles de soluciones que son subconjuntos de la región factible del problema original. Se deben establecer cotas superior e inferior (según el problema sea maximizar o minimizar) para cada uno de esos subconjuntos y decidir si es conveniente seguir “explorando” el subconjunto que se llamará nodo. La exploración implica generar otros nodos hijos a partir del nodo explorado los cuales deben ser acotados, y de esta manera se construyen las diferentes ramas. La implementación es un proceso iterativo que contiene 3 componentes principales:

- Selección del nodo a procesar
- Cálculo del límite
- Ramificación

La secuencia de resolución del problema puede variar de acuerdo a la estrategia para seleccionar el siguiente nodo. Si la selección se basa en los límites (bounds)

Apéndice A. Optimización Lineal

de los subproblemas, entonces la primer operación luego de seleccionar el nodo es la ramificación (branching), por ejemplo dividir el conjunto solución del nodo en dos o más subconjuntos para investigar en la siguiente iteración. En cada uno de estos, se verifica si el conjunto cuenta con una sola solución, en cuyo caso se compara contra la mejor solución actual, quedándose con la mejor de las dos. De lo contrario, se calcula el límite para ese subconjunto y se compara con la mejor solución actual. Si se puede comprobar que el subconjunto no puede contener la solución óptima, se desecha, en otro caso se almacena dentro del conjunto de nodos vivos junto con sus límites. Se denomina nodo vivo a un nodo con posibilidades de ser ramificado.

Función de acotamiento

La función de acotamiento es la clave para este tipo de algoritmos, ya que si no se tiene una función de acotamiento adecuada, no es posible compensar con una buena estrategia de ramificación. Idealmente, el valor de la función de acotamiento es igual a la mejor solución factible.

Los problemas de optimización pueden ser de minimización o maximización. A continuación se describirán técnicas para la elección de la función de acotamiento, en donde se considera un problema de minimización. Es importante observar que un problema de maximización se puede convertir en uno de minimización.

Hay dos maneras clásicas de elegir la función de acotamiento. En primer lugar, se puede relajar el problema original que consiste en mantener la misma función objetivo pero sin considerar algunas restricciones. Por ejemplo, si el problema original exige que la solución sea entera, una posible relajación es que sea real y en cuyo caso se puede hallar el óptimo con alguna de las técnicas de optimización lineal clásicas. Si el óptimo encontrado satisface todas las restricciones, entonces se encontró el óptimo del problema original. Si no las satisface, la solución encontrada es un límite para el óptimo del problema original, porque el conjunto factible es mayor para el problema relajado.

Otra manera de elegir la función de acotamiento es minimizar una función objetivo g diferente a la original, pero manteniendo la misma región factible. Se debe asegurar que g tome valores menores o iguales a la función original para todo el conjunto factible de soluciones.

También es posible combinar ambas estrategias y se obtiene la solución de g sobre un problema relajado.

En la figura A.1 se observan gráficamente el problema original con función objetivo f y región factible S_f y el problema relajado con función objetivo g y región factible S_g . Se debe cumplir que:

$$\min_{x \in S_g} g(x) \leq \left\{ \begin{array}{l} \min_{x \in S_g} f(x) \\ \min_{x \in S_f} g(x) \end{array} \right\} \leq \min_{x \in S_f} f(x)$$

$$g(x) \leq f(x) \quad \forall x \in S_f$$

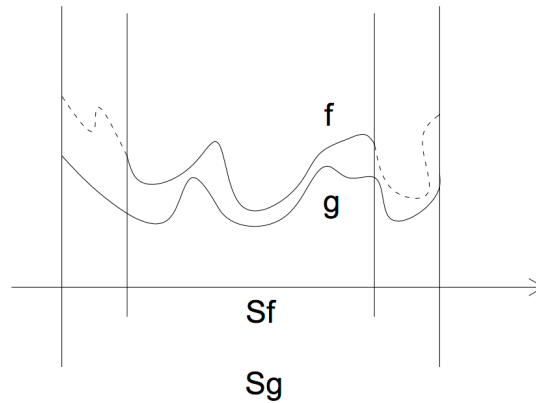


Figura A.1: Problema original y relajado

Estrategias para seleccionar el siguiente subproblema

La estrategia de búsqueda para seleccionar el siguiente subproblema a resolver es un compromiso entre mantener bajo el número de nodos explorados en el árbol de búsqueda y la capacidad de la computadora utilizada. Si se selecciona siempre explorar el nodo con menor cota, llamado *best first search strategy*, BeFS (figura A.2), no se deben calcular más cotas luego de alcanzar la solución óptima.

Un subproblema P se considera crítico si la función de acotamiento aplicada a P resulta en un valor estrictamente menor a la solución óptima del problema en cuestión. Los subproblemas críticos deben ser ramificados porque nunca se pueden descartar por medio de la función de acotamiento. Como el límite inferior de cualquier subespacio que contiene una solución óptima debe ser menor o igual al valor óptimo, solamente nodos con el límite inferior menor o igual a éste serán explorados. Una vez que el valor óptimo es encontrado, solamente los nodos críticos son procesados para probar que es óptimo. Si bien el método BeFS es útil para encontrar el óptimo, puede demandar muchos recursos si el número de los subproblemas críticos es muy grande. Otro de los métodos utilizados es *breadth first search strategy*, BFS (figura A.3), en donde todos los nodos de un nivel se evalúan antes de cualquier nodo de un nivel superior. El número de nodos en cada nivel crece exponencialmente y por lo tanto tampoco es adecuado para problemas grandes.

Apéndice A. Optimización Lineal

La alternativa es *depth first strategy*, DFS (figura A.4). En este método se explora en primer lugar el nodo de mayor nivel. Los requerimientos computacionales en este caso son menores, ya que la cantidad de subproblemas que se deben guardar simultáneamente es menor o igual a la cantidad de nodos en el árbol de búsqueda por la máxima cantidad de nodos derivados. La desventaja es que si el nodo explorado está muy lejos del óptimo, se debe hacer una gran cantidad de operaciones innecesarias. Por esto, se combina este método con una estrategia de selección, en donde una de las ramificaciones del nodo elegido tiene una cota muy pequeña y otra ramificación tiene una cota muy grande. Explorando primero el nodo con menor cota inferior, puede llevar en el mejor de los casos a una buena solución factible, y el nodo con la mayor cota inferior se puede utilizar para profundizar en el nodo. Para la ramificación, se elige el nodo en que sea mayor la diferencia entre las cotas inferiores de los nodos derivados. Este método también puede llevar a cálculos innecesarios, ya que se deben conocer todas las cotas de los nodos derivados.

En las figuras A.2, A.3 y A.4 se puede observar gráficamente cómo es la evolución de los algoritmos en función de los valores que toman las funciones f y g . Los números indican el orden en que se evalúan los nodos.

En conclusión, el método más apropiado para seleccionar el siguiente subproblema dependerá de cada caso particular, ya que cada una de las alternativas presenta ventajas y desventajas.

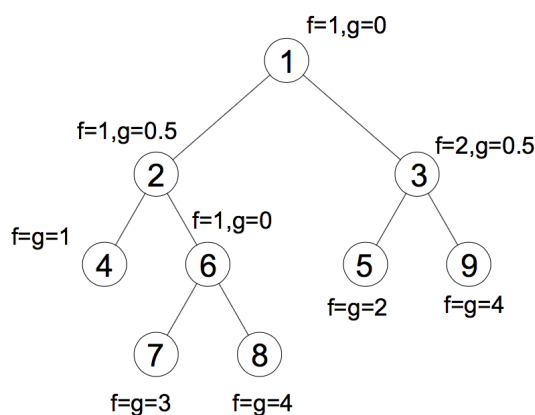


Figura A.2: Best First Search

Reglas para la ramificación

Todas las reglas de ramificación se pueden ver como una subdivisión de una parte del espacio de búsqueda agregando restricciones, en muchos casos asignando valores a las variables. Si el espacio se subdivide en dos, se utiliza el término ramificación dicotómica, y de lo contrario se utiliza el término ramificación politómica.

A.1. Algoritmos Branch and Bound

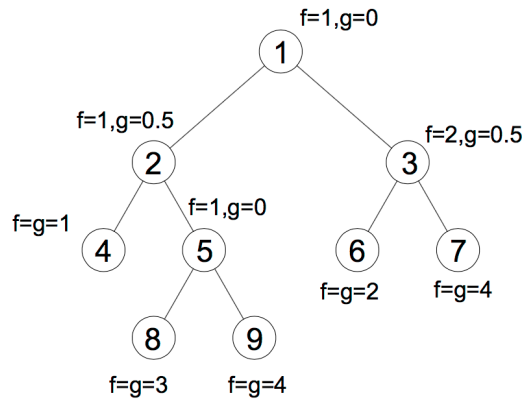


Figura A.3: Breadth First Search

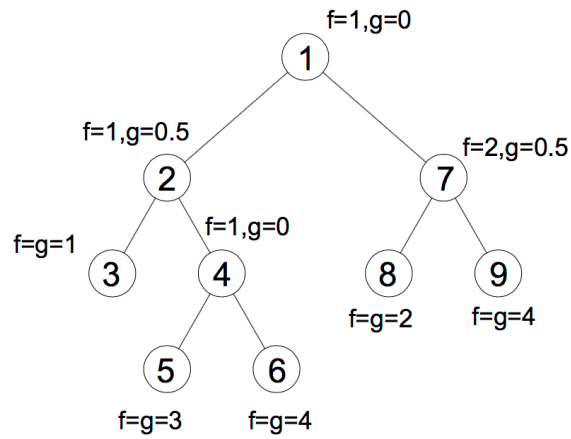


Figura A.4: Depth First Search

La convergencia del algoritmo se asegura si el tamaño de cada subproblema es menor al del problema original y la cantidad de soluciones factibles es finita. Normalmente, los subproblemas son disjuntos y de esta manera se evita que haya una misma solución factible para diferentes subconjuntos del árbol de búsqueda.

Solución inicial

Para la construcción de una buena solución factible inicial se pueden utilizar métodos heurísticos o meta-heurísticos como son *Simulated Annealing*, *Genetic Algorithms* y *Tabu Search*. Si se utiliza la estrategia DFS, y se tiene una buena solución inicial, el algoritmo verifica esta solución y es posible que solo se exploren los subproblemas críticos.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Apéndice B

Álgebra Lineal

B.1. Descomposición en valores singulares

Teorema B.1.1. (Teorema de la SVD) Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, entonces existe una descomposición en valores singulares de A .

Demostración. Sea $A^*A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica. Los valores propios de A^*A son todos reales y tiene una matriz de diagonalización V .

En primer lugar, se probará que todos sus valores propios son no negativos. Sea λ un valor propio de A^*A y x el autovector asociado a λ . Se cumple que

$$\|Ax\|^2 = x^*A^*Ax = \lambda x^*x = \lambda x^2 \Rightarrow \lambda = \frac{\|A\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$$

Las columnas de V se pueden ordenar de tal manera que los autovalores cumplan que:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

Los valores singulares de A son

$$\sigma_j = \sqrt{\lambda_j} \quad \text{con } j = 1, \dots, n$$

Sea $r = \text{rank}\{A\} \Rightarrow \text{rank}\{A^*A\} = r$, y como A^*A es simétrica, entonces el rango es igual a la cantidad de valores propios distintos de cero. Esto es

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r \geq 0 \quad \text{con } \lambda_{r+1} = \lambda_{r+2} = \dots = \lambda_n = 0$$

La misma relación aplica para los valores singulares

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r \geq 0 \quad \text{con } \sigma_{r+1} = \sigma_{r+2} = \dots = \sigma_n = 0$$

Apéndice B. Álgebra Lineal

Observación. Con la SVD se puede determinar el rango de A , simplemente calculando la cantidad de valores singulares distintos de cero de A o que es lo mismo, la cantidad de elementos en la diagonal de Σ que son distintos de cero.

Sean

$$V_1 = (v_1 \ \cdots \ v_r) \quad V_2 = (v_{r+1} \ \cdots \ v_n)$$

y

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma_r \end{pmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ es una matriz diagonal, en donde los elementos de la diagonal son los valores singulares de A distintos de cero: $\sigma_1, \dots, \sigma_r$. Sigue así que $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ se puede escribir como

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

Los vectores columna de V_2 son los autovectores de A^*A asociados a $\lambda = 0$. Por lo que

$$A^*Av_j = 0, \quad \text{con } j = r+1, \dots, n$$

Sigue así que los vectores columna de V_2 forman una base ortonormal de $\mathcal{N}\{A^*A\} = \mathcal{N}\{A\}$ y entonces

$$AV_2 = 0$$

y como V es una matriz ortogonal, se cumple que:

$$I = VV^* = V_1V_1^* + V_2V_2^*$$

$$A = AI = AV_1V_1^* + AV_2V_2^* = AV_1V_1^* \quad (\text{B.2})$$

Al momento se mostró cómo construir las matrices V y Σ de la SVD. Falta probar cómo construir la matriz $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ tal que $A = U\Sigma V^*$ o, que es lo mismo

$$AV = U\Sigma \quad (\text{B.3})$$

Comparando las primeras r columnas de cada lado de la ecuación B.3 se tiene que

$$Av_j = \sigma_j u_j \quad \text{con } j = 1, \dots, r$$

B.1. Descomposición en valores singulares

Si se define

$$u_j = \frac{1}{\sigma_j} Av_j \quad \text{con } j = 1, \dots, r \quad (\text{B.4})$$

y

$$U_1 = (u_1 \quad \dots \quad u_r)$$

Se cumple entonces que

$$AV_1 = U_1 \Sigma_1 \quad (\text{B.5})$$

Los vectores columna de U_1 forman una base ortonormal ya que

$$\begin{aligned} u_i^* u_j &= \left(\frac{1}{\sigma_i} v_i^* A^* \right) \left(\frac{1}{\sigma_j} Av_j \right) = \frac{1}{\sigma_i \sigma_j} v_i^* (A^* Av_j) = \frac{\sigma_j}{\sigma_i} v_i^* v_j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \\ &\Rightarrow u_i^* u_j = \delta_{ij} \end{aligned}$$

donde $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq r$.

- De B.4 se deduce que $u_j, 1 \leq j \leq r$ pertenecen al espacio de columnas de $A \Rightarrow \dim\{\mathcal{R}\{A\}\} = r \Rightarrow u_1, \dots, u_r$ forman una base ortonormal de $\mathcal{R}\{A\}$.
- $\mathcal{R}\{A\}^* = \mathcal{N}\{A^*\} \Rightarrow \dim\{\mathcal{R}\{A\}^*\} = \dim\{\mathcal{N}\{A^*\}^*\} = m - r$. Por lo tanto los vectores columna de $U_2 = (u_{r+1} \quad u_{r+2} \quad \dots \quad u_m)$ forman una base ortonormal de $\mathcal{N}\{A^*\}$

A partir de lo anterior, se puede definir U tal que

$$U = (U_1 \quad U_2)$$

Como u_1, \dots, u_m forman una base ortonormal de $\mathcal{R}^m \Rightarrow U$ es una matriz ortogonal.

Falta probar que $U \Sigma V^* = A$.

$$\begin{aligned} U \Sigma V^* &= (U_1 \quad U_2) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1^* \\ V_2^* \end{pmatrix} = U_1 \Sigma_1 V_1^* = AV_1 V_1^* = A \\ &\Rightarrow U \Sigma V^* = A \end{aligned}$$

De esta manera se concluye la demostración del teorema.

A continuación se enumeran algunas propiedades de la SVD.

1. Los valores singulares de A son únicos, pero las matrices U y V no lo son.

Apéndice B. Álgebra Lineal

2. Como $AA^* = (U\Sigma V^*)(U\Sigma V^*)^* = (U\Sigma V^*)(V\Sigma^*U^*) = U\Sigma\Sigma^*U^*$, se deduce que U diagonaliza la matriz AA^* y que los u_j son vectores propios de AA^* . De la misma manera, V diagonaliza a A^*A y los v_j son vectores propios de A^*A .
3. Comparando cada una de las columnas de $AV = U\Sigma$ se tiene que

$$\begin{aligned} Av_j &= \sigma_j u_j & \text{con } j &= 1, \dots, n \\ Av_j &= 0 & \text{con } j &= n+1, \dots, m \end{aligned}$$

De la misma manera, si se compara $A^*U = \Sigma V^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} A^*u_j &= \sigma_j v_j & \text{para } j &= 1, \dots, n \\ A^*u_j &= 0 & \text{para } j &= n+1, \dots, m \end{aligned}$$

4. Si $\text{rank}\{A\} = r$, entonces:
- a) v_1, \dots, v_r forman una base ortonormal de $\mathcal{R}\{A^*\}$
 - b) v_{r+1}, \dots, v_n forman una base ortonormal de $\mathcal{N}\{A\}$
 - c) u_1, \dots, u_r forman una base ortonormal de $\mathcal{R}\{A\}$
 - d) u_{r+1}, \dots, u_m forman una base ortonormal de $\mathcal{N}\{A^*\}$
5. El rango de una matriz A está dado por la cantidad de valores singulares distintos de cero (contados con su multiplicidad).

Observación. El rango de una matriz no está dado por la cantidad de valores propios distintos de cero.

6. Si $\text{rank}\{A\} = r < n$, y $U_1 = (u_1 \ u_2 \ \dots \ u_r)$, $V_1 = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_r)$ y se define Σ_1 como en B.1 se obtiene una SVD en su forma compacta:

$$A = U_1 \Sigma_1 V_1^* \tag{B.6}$$

Apéndice C

Tablas de Ubicación de PMU en la red uruguaya

En la tabla C.1 se puede observar el vector de nodos del sistema de 500 kV utilizado para las posiciones del vector $x = (x_1, \dots, x_{17})$ en el problema de optimización. A modo de ejemplo, si $x_6 = 1$ entonces en SJ5 debe ubicarse una PMU.

Nodo	Descripción
90000	Salto Grande Uruguay 500 (SG5)
90011	Salto Grande Uruguay 500 (SG5)
90012	Salto Grande Uruguay 500 (SG5)
90013	Salto Grande Uruguay 500 (SG5)
90014	Salto Grande Uruguay 500 (SG5)
90080	San Javier 500 (SJ5)
90100	Montevideo A 500 (MA5)
90160	Brujas 500 (BR5)
90170	Punta del Tigre 500 (PT5)
90200	Montevideo B 500 (MB5)
90300	Montevideo I 500 (MI5)
90480	Melo 500 (ME5)
90500	Palmar 500 (PA5)
90511	Palmar 500 (PA5)
90512	Palmar 500 (PA5)
90513	Palmar 500 (PA5)
90700	San Carlos 500 (SC5)

Tabla C.1: Vector de Nodos de 500 kV

A continuación se presentan las tablas con la ubicación de las PMU's en 150kV.

Apéndice C. Tablas de Ubicación de PMU en la red uruguaya

Cantidad de PMUs	34
Nodo	Descripción
92030	Paysandú
92050	Fray Bentos
92061	Colonia Flores
92080	San Javier
92091	Javier de Viana
92100	Montevideo A
92170	Punta del Tigre
92200	Montevideo B
92210	Montevideo C
92270	Montevideo J
92300	Montevideo I
92360	Montevideo R
92370	La Plata
92380	Solymar
92401	Rivera B
92430	Treinta y Tres
92470	Minera San Gregorio
92482	Melo B
92492	Arbolito
92524	Polesine
92540	Bonete
92561	Conexión en T de Aguas Corrientes y Punta del Tigre
92590	Trinidad
92611	Rosendo Mendoza
92625	Libertad
92650	Nueva Palmira
92700	San Carlos
92720	Pan de Azucar
92750	Punta del Este
92781	Carapé
92800	Cuchilla Peralta
92830	Pan de Azucar - Maldonado
92910	Pintado B
92920	Punta Pereira

Tabla C.2: Ubicación PMUs red 150 kV sin restricciones de igualdad

Cantidad de PMUs	38
Nodo	Descripción
92000	Salto Grande Uruguay
92030	Paysandu
92050	Fray Bentos
92061	Colonia Flores
92080	San Javier
92091	Javier de Viana
92100	Montevideo A
92170	Punta del Tigre
92200	Montevideo B
92240	Montevideo E
92270	Montevideo J
92300	Montevideo I
92360	Montevideo R
92370	La Plata
92380	Solymer
92401	Rivera B
92430	Treinta y Tres
92460	Minera San Gregorio
92482	Melo B
92492	Arbolito
92500	Palmar
92524	Polesine
92540	Bonete
92550	Baygorria
92594	Cerro Colorado
92611	Rosendo Mendoza
92620	Libertad
92630	Colonia
92650	Nueva Palmira
92670	Aguas Corrientes
92700	San Carlos
92710	Bifurcación
92730	Maldonado
92750	Punta del Este
92781	Carapé
92792	Cuchilla Peralta A
92910	Pintado B
92920	Punta Pereira

Tabla C.3: Ubicación PMUs red 150 kV con restricciones de igualdad

Apéndice C. Tablas de Ubicación de PMU en la red uruguaya

Cantidad total de PMUs	39
Nodo	Descripción
92020	Young
92030	Paysandu
92050	Fray Bentos
92061	Colonia Flores
92080	San Javier
92091	Javier de Viana
92100	Montevideo A
92170	Punta del Tigre
92200	Montevideo B
92210	Montevideo C
92270	Montevideo J
92300	Montevideo I
92360	Montevideo R
92370	La Plata
92380	Solymer
92400	Rivera
92401	Rivera B
92430	Treinta y Tres
92460	Minera San Gregorio
92482	Melo B
92492	Arbolito
92500	Palmar
92520	Florida
92540	Bonete
92580	Rodriguez
92590	Trinidad
92610	Rosario
92620	Libertad
92630	Colonia
92650	Nueva Palmira
92670	Aguas Corrientes
92700	San Carlos
92710	Bifurcación
92730	Maldonado
92750	Punta del Este
92781	Carapé
92800	Cuchilla Peralta B
92910	Pintado B
92920	Punta Pereira

Tabla C.4: Ubicación PMUs red 150 kV. Unidades existentes y nuevas

Apéndice D

Gráficas complementarias de las diferentes simulaciones realizadas

Perturbación: Apertura de las líneas *PA5-SJ5-1* y *PA5-SJ5-2*

En las gráficas de las figuras D.1 y D.2 se observa la evolución del módulo y fase de la tensión luego de la apertura de las dos líneas Palmar 500 - San Javier 500.

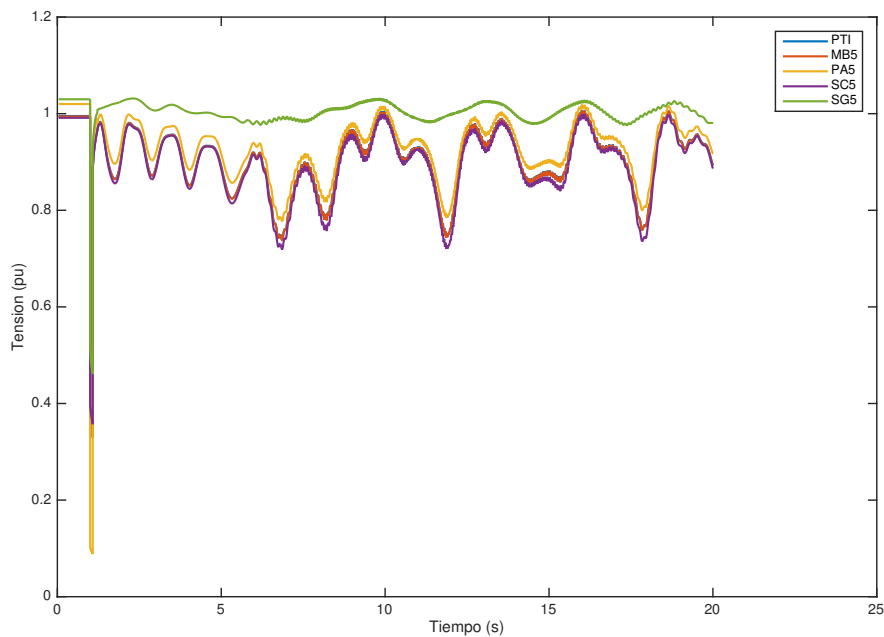


Figura D.1: Tensión vs Tiempo

Perturbación: Apertura línea *PA5 - SJ5 - 1*

En las gráficas de las figuras D.3 y D.4 se puede observar la evolución del módulo y fase de la tensión luego de la apertura de una línea Palmar 500 - San Javier 500.

Apéndice D. Gráficas complementarias de las diferentes simulaciones realizadas

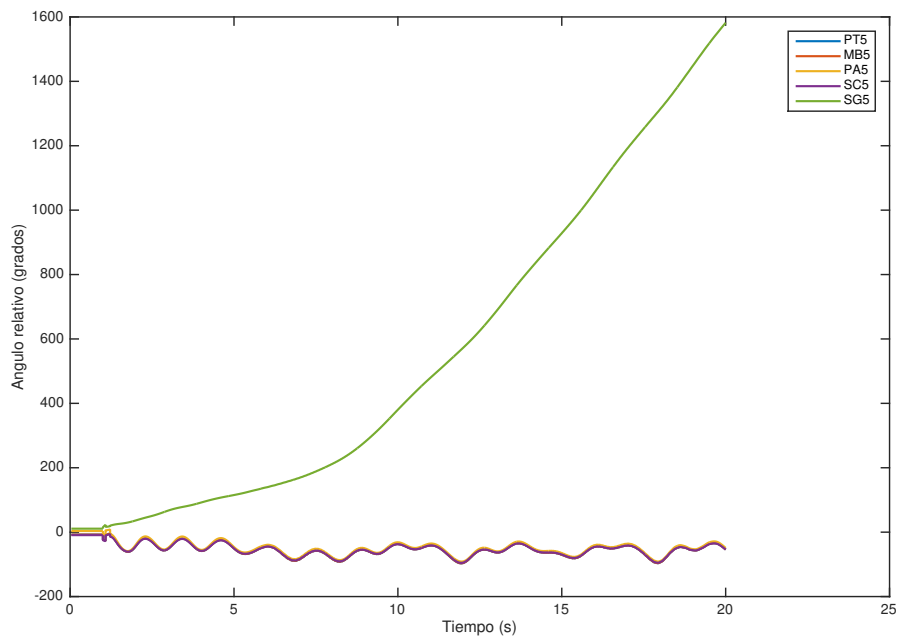


Figura D.2: Fase de la Tensión vs Tiempo

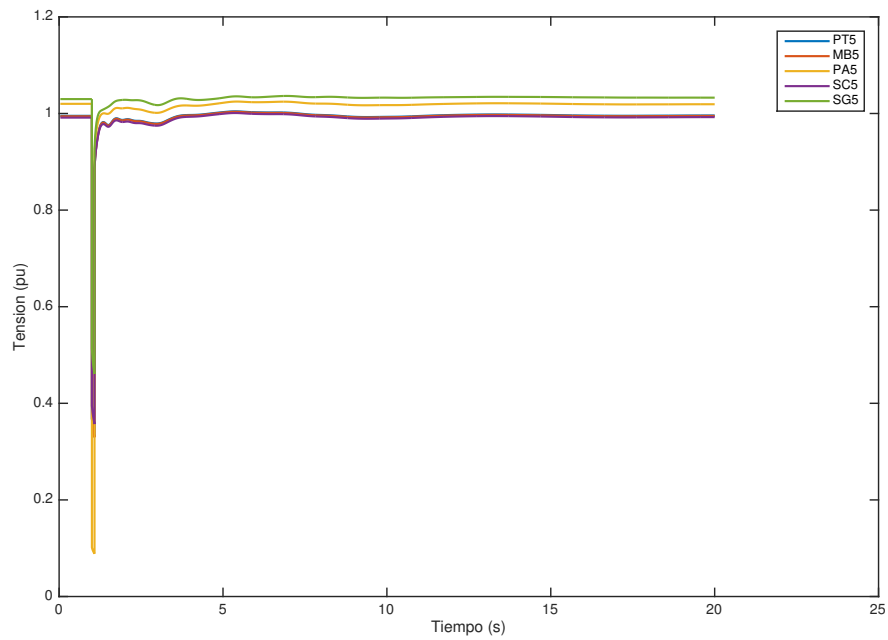


Figura D.3: Tensión vs Tiempo

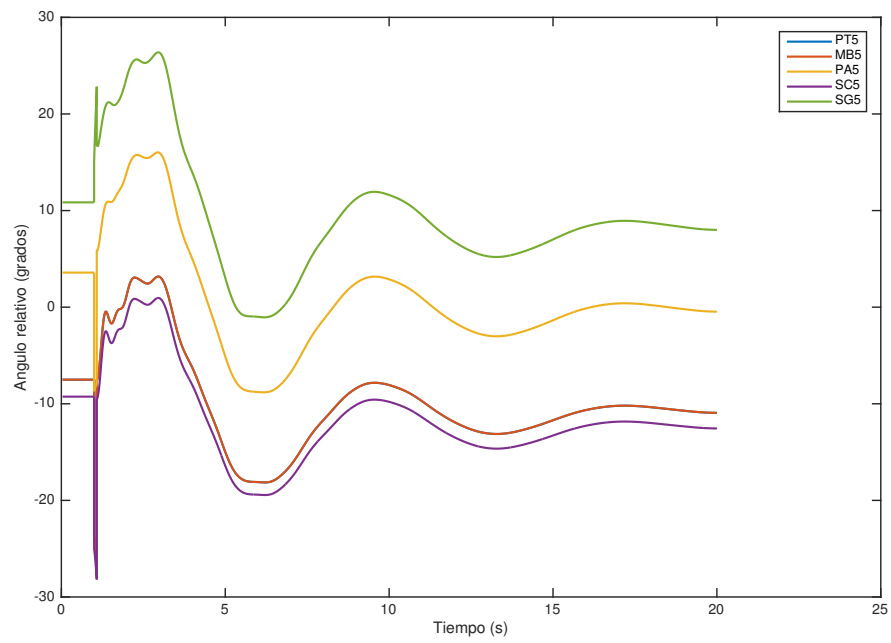


Figura D.4: Ángulo relativo vs Tiempo

Apéndice D. Gráficas complementarias de las diferentes simulaciones realizadas

Perturbación: Apertura línea *MA5 - MI5*

En las gráficas de las figuras D.5 y D.6 se puede observar la evolución del módulo y fase de la tensión en cada barra, luego de la apertura de la línea Montevideo A - Montevideo I.

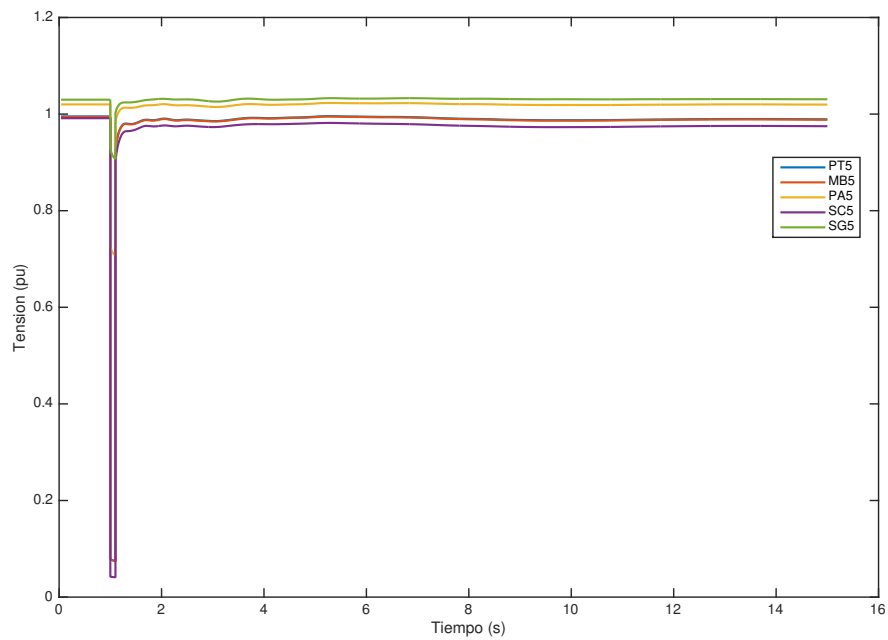


Figura D.5: Tensión vs Tiempo

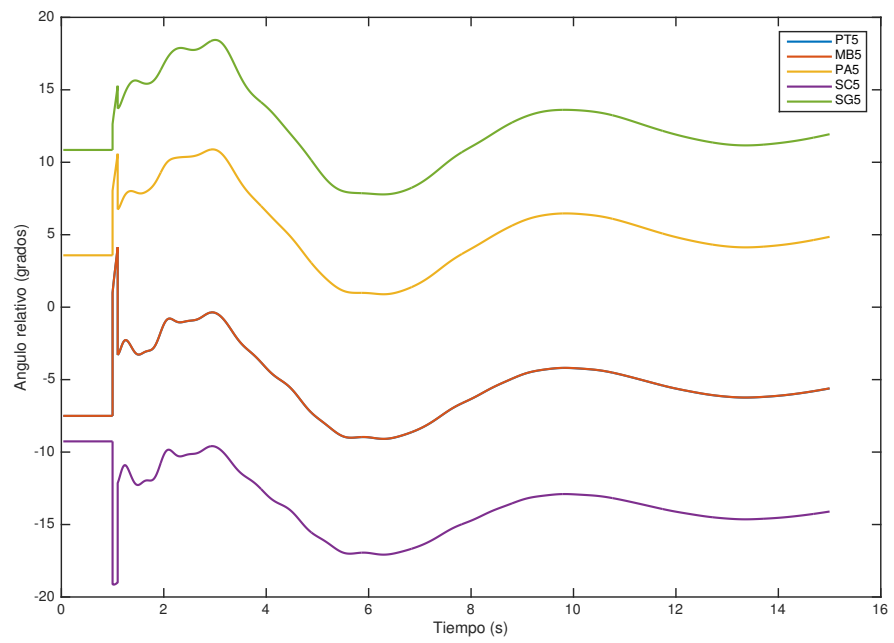


Figura D.6: Ángulo relativo vs Tiempo

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Referencias

- [1] F.S.V Bazán and Ph.L.Toint. Singular values of predictor matrices and signal eigenvalue bounds. Technical report, Department of Mathematics, Federal University of Santa Catarina, 1998.
- [2] Licio H. Bezerra and Fermin S.V Bazán. Eigenvalue locations of generalized companion predictor matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl. Vol. 19*, pages 886–897, october 1998.
- [3] Jens Clausen. Branch and bound algorithms - principle and examples. Technical report, Department of Computer Science, University of Copenhagen, 12 March 1999.
- [4] Yanfeng Gong and Armando Guzmán. Synchrophasor-based online modal analysis to mitigate power system interarea oscillation. *Schweitzer Engineering Laboratories, Inc.*, 2008.
- [5] Jeffrey M. Hokanson. Numerically stable and statistically efficient algorithms for large scale exponential fitting.
- [6] P. Kundur. *Power System Stability and Control*.
- [7] Fukun Han Lan Ding and Tianshu Bi. Dominant mode identification for low frequency oscillations of power systems based on prony algorithm. *2010 5th International Conference on Critical Infrastructure*, 2010.
- [8] IEEE/CIGRE Joint Task Force on Stability Terms and Definitions. Definition and classification of power system stability. *IEEE Transactions on Power Systems*, 2004.
- [9] Cristhian Quiroz. Aplicaciones del modelo autoregresivo y del algoritmo de prony.
- [10] K. S. Sajan and Barjeev Tyagi. Optimal placement of PMU with optimal branch current phasors for complete and incomplete observability. *2011 IEEE Power and Energy Society General Meeting*, pages 1–5, July 2011.
- [11] Tsegasselassie Workalemahu. Singular value decomposition in image noise filtering and reconstruction.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Índice de tablas

4.1. Ubicación PMU red de 500 kV sin restricciones de igualdad	32
4.2. Ubicación PMU red de 500 kV con restricciones de igualdad	33
4.3. Nodos de 500 kV con PMU existentes	36
4.4. Ubicación PMU red de 500 kV considerando las unidades existentes y la nueva unidad a instalar en Salto Grande para que el sistema sea observable	37
4.5. Nodos de 150 kV con PMU existentes	37
5.1. Codificación Barras red de 500kV	40
C.1. Vector de Nodos de 500 kV	67
C.2. Ubicación PMUs red 150 kV sin restricciones de igualdad	68
C.3. Ubicación PMUs red 150 kV con restricciones de igualdad	69
C.4. Ubicación PMUs red 150 kV. Unidades existentes y nuevas	70

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Índice de figuras

3.1. Tipos de estabilidad en los sistemas eléctricos de potencia	14
3.2. Transferencia de potencia en un sistema compuesto por dos máquinas	15
3.3. Naturaleza de la Respuesta en Pequeña Señal	18
4.1. Red de ejemplo	28
4.2. Sistema Eléctrico Uruguayo 500kV y 150kV	30
4.3. Matriz A para la red de 500 kV	31
4.4. Red 500 kV con PMU	32
4.5. Red 500 kV con PMU con restricciones de igualdad	34
5.1. Evolución de la frecuencia en función del tiempo en todas las barras luego de la apertura de las dos líneas PA5-SJ5	41
5.2. Evolución de la frecuencia en los primeros ciclos de la barra PT5 .	43
5.3. Comparación de frecuencias sin corrección de desfasaje en PT5 . .	44
5.4. Comparación de frecuencias con corrección de desfasaje en PT5 . .	44
5.5. Evolución de la frecuencia en los primeros ciclos de la barra PA5 .	46
5.6. Comparación de frecuencias con corrección de desfasaje en PA5 . .	47
5.7. Evolución de la frecuencia en función del tiempo en todas las barras luego de la apertura de la línea PA5-SJ5-1	51
5.8. Evolución de la frecuencia en función del tiempo en todas las barras luego de la apertura de la línea MA5-MI5	52
5.9. Frecuencia vs Tiempo	53
A.1. Problema original y relajado	59
A.2. Best First Search	60
A.3. Breadth First Search	61
A.4. Depth First Search	61
D.1. Tensión vs Tiempo	71
D.2. Fase de la Tensión vs Tiempo	72
D.3. Tensión vs Tiempo	72
D.4. Ángulo relativo vs Tiempo	73
D.5. Tensión vs Tiempo	74
D.6. Ángulo relativo vs Tiempo	75

Esta es la última página.
Compilado el sábado 6 mayo, 2017.
<http://iie.fing.edu.uy/>