Procesos condicionalmente débilmente dependientes y aplicaciones a la estimación de anchos de banda efectivos

Laura Aspirot

Orientador: Gonzalo Perera

Agosto de 2003

Índice General

1 Introducción **4**

2 Mixing **5**

2.1 Definiciones y propiedades 5
2.2 Desigualdades de covarianza 9
2.3 Campos y procesos mixing 13
2.4 Ejemplos 14

3 Teorema central del límite **16**

3.1 Conjuntos asintóticamente medibles 25

4 Teorema central del límite para $\mathbf{X} = \varphi(\xi, \mathbf{Y})$ **26**

5 Estimación de anchos de banda efectivos **34**

5.1 Motivación 34
5.2 Estimación 34

1 Introducción

En esta monografía se estudia la distribución asintótica de una suma de variables aleatorias que no son independientes. Supongamos que tenemos un campo indexado en $\mathbb{Z}^d$, $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ y consideramos, para algún conjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$,

$$S_N(A,X) = \frac{1}{\sqrt{(2N+1)^d}} \sum_{n\in A_N} X_n$$

donde $A_N = A \cap [-N,N]^d$, $N \in \mathbb{N}$, y $\frac{card(A_N)}{(2N+1)^d} \to v(A)$, si $N \to \infty$, con $0 < v(A) \leqslant 1$. Si las variables $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ son independientes se puede aplicar el teorema central del límite (TCL) para conocer la distribución de $S_N(A,X)$ cuando $N \to \infty$. Probaremos que cuando no hay independencia la distribución asintótica de $S_N(A,X)$ dependerá de las propiedades del campo X y también de la geometría del conjunto A. Para el campo X se considerarán hipótesis de dependencia débil (mixing) y sobre la geometría del conjunto A para que valga un TCL será necesario que exista el límite de

$$F_N(n,A) = \frac{card\left\{A_N^c \cap (n + A_N)\right\}}{(2N+1)^d}$$

cuando $N \to \infty$ para cada $n \in \mathbb{Z}^d$. Se prueba que si el conjunto A no cumple esta hipótesis es posible encontrar un campo gaussiano, centrado, estacionario y m-dependiente para el cual $S_N(A,X)$ no tiene límite débil.

Estos resultados se extienden al caso en que un campo o un proceso X se puede expresar como función de dos campos o procesos ξ e Y independientes entre sí. Si es válido un TCL para el campo X condicionado a Y, entonces dependiendo de la geometría de los conjuntos de nivel del campo Y se puede obtener un TCL para el campo original.

Como ejemplo consideraremos, para un proceso $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$, la función generatriz de momentos $\Lambda(s,t) = E\left(e^{s\tilde{X}_t}\right)$ y probaremos el TCL para $\Lambda(s,t)$ en el caso en que el proceso $\tilde{X}$ es $\tilde{X} = \tilde{\varphi}(\xi, Y)$ como se describió anteriormente. La función generatriz de momentos aparece en modelos para telecomunicaciones a través de una magnitud llamada ancho de banda efectivo, definida en [3], que se utiliza como una medida de la cantidad de recursos necesaria para procesar cierta cantidad de trabajo en un enlace de una red. Si llamamos $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$ al proceso que mide la cantidad de trabajo que llega hasta tiempo t la función de ancho de banda efectivo se define por

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st} \log\left(E\left(e^{s\tilde{X}_t}\right)\right),\ s > 0,\ t > 0$$

Considerando el proceso $\tilde{X}$ en un intervalo de tiempo $T = Nt$ (lo que llamaremos una traza de tráfico de largo Nt) se construye el estimador

$$\alpha_N(s,t) = \frac{1}{st} \log\left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_{nt} - \tilde{X}_{(n-1)t}\right)}\right)$$

que, bajo ciertas hipótesis para el proceso $\tilde{X}$, es un estimador consistente de $\alpha(s,t)$ cuando $N \to \infty$. Para la construcción de intervalos de confianza es necesario estudiar para que modelos de procesos $\tilde{X}$ se verifica un TCL, buscando además incluir alguna hipótesis de dependencia dentro del modelo. Considerando $\tilde{X} = \tilde{\varphi}(\xi, Y)$ como antes se puede probar el TCL para $\alpha_N(s,t)$.

La monografía está organizada como sigue: la sección 2 contiene definiciones y propiedades de los campos y procesos mixing, en la sección 3 se demuestra el TCL para campos débilmente dependiente y en la sección 4 se extienden estos resultados para campos de la forma $X = \varphi(\xi, Y)$ como mencionamos antes. Finalmente en la sección 5 se define el ancho de banda efectivo y se aplican los resultados de las secciones anteriores para la estimación de dicha cantidad.

2 Mixing

En esta sección se definen los coeficientes de mixing y se prueban algunas propiedades de estos coeficientes y de los campos y procesos mixing. Dadas dos σ-álgebras en un mismo espacio de probabilidad, en los casos en que no hay independencia entre estas σ-álgebras interesa saber cómo es la dependencia. Los coeficientes de mixing que definiremos dan esta información sobre la dependencia entre las dos σ-álgebras.

2.1 Definiciones y propiedades

Definición 2.1 Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ sub σ-álgebras de $\mathcal{A}$. Definimos los siguientes coeficientes

$$\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup \{P(A \cap B) - P(A)P(B) : A \in \mathcal{F},\ B \in \mathcal{G}\} \tag{2.1}$$

$$\beta(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)| : A_i \in \mathcal{F},\ B_j \in \mathcal{G} \right\}, \tag{2.2}$$

siendo $(A_i)_{i \in I},\ (B_j)_{j \in J}$ particiones de Ω.

$$\phi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup \{|P(B|A) - P(B)| : A \in \mathcal{F},\ P(A) \neq 0,\ B \in \mathcal{G}\} \tag{2.3}$$

$$\psi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup \left\{ \frac{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|}{P(A)P(B)} : A \in \mathcal{F},\ P(A) \neq 0,\ B \in \mathcal{G},\ P(B) \neq 0 \right\} \tag{2.4}$$

$$\rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup \left\{ |Corr(X, Y)| : X \in L^2(\mathcal{F}),\ Y \in L^2(\mathcal{G}) \right\} \tag{2.5}$$

donde $L^2(\mathcal{F}) = \{X : X \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible y } E\left(X^2\right) < \infty\}$

Observación 2.2

1. El coeficiente definido por la ecuación (2.3) no es simétrico respecto de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. También se puede usar la siguiente definición, que es simétrica respecto de ambas σ-álgebras:

$$\phi_s(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup \{|P(B|A) - P(B)|, |P(A|B) - P(A)|\} \tag{2.6}$$

   donde $A \in \mathcal{F}, P(A) \neq 0, B \in \mathcal{G}, P(B) \neq 0$.

2. Cada uno de los coeficientes es cero si y sólo si las σ-álgebras $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son independientes.

Proposición 2.3 *Los coeficientes de la definición 2.1 cumplen las siguientes desigualdades:*

$$0 \leqslant \alpha(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leqslant 1/4, \quad 0 \leqslant \beta(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \phi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leqslant 1$$

$$0 \leqslant \psi(\mathcal{F}, \mathcal{G}) < \infty, \quad 0 \leqslant \rho(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leqslant 1.$$

Demostración. Para probar que $0 \leqslant \alpha(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leqslant 1/4$ usamos que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| = |Cov(1_A, 1_B)|$ siendo 1_A la indicatriz de A. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos $|Cov(1_A, 1_B)| \leqslant \sqrt{Var(1_A)}\sqrt{Var(1_B)}$. Como $Var(1_A) = P(A)(1 - P(A)) \leqslant 1/4$, entonces $\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leqslant 1/4$. La prueba de que $0 \leqslant \beta(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \leqslant 1$ se obtiene de la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)| &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (P(A_i \cap B_j) + P(A_i)P(B_j)) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i \in I} 2P(A_i) = 1, \end{aligned}$$

pues $(A_i)_{i\in I}$, $(B_j)_{j\in J}$ son particiones de Ω. Para probar que $\phi(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant 1$ basta observar que $\forall A,B\ |P(B|A) - P(A)| \leqslant 1$ y por lo tanto, tomando supremos, $\phi(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant 1$. Para ver que $\psi(\mathcal{F},\mathcal{G})$ puede no estar acotado consideramos $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ y $A = B$, entonces

$$\psi(\mathcal{F},\mathcal{G}) \geqslant \left|\frac{P(A) - P(A)^2}{P(A)^2}\right| = \left|\frac{1}{P(A)} - 1\right|.$$

Tomando una sucesión $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $A_n \in \mathcal{F}$ para todo n y $P(A_n) \to 0$ cuando $n \to \infty$ se obtiene que $\psi(\mathcal{F},\mathcal{G})$ no está acotado. Finalmente $0 \leqslant \rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant 1$ por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

■

En la siguiente proposición probaremos las relaciones que se pueden establecer entre los distintos coeficientes. Además se puede probar que son la únicas, y que existen contraejemplos para para los demás casos. Algunos contraejemplos se encuentran en [2].

Proposición 2.4 *Los coeficientes de mixing cumplen que:*

$$2\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \beta(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \phi(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \frac{1}{2}\psi(\mathcal{F},\mathcal{G}) \tag{2.7}$$

$$4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant 2\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G},\mathcal{F}) \tag{2.8}$$

$$\rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \psi(\mathcal{F},\mathcal{G}) \tag{2.9}$$

Demostración. Para probar que $2\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \beta(\mathcal{F},\mathcal{G})$ consideramos la igualdad

$$|P(A\cap B) - P(A)P(B)| = |P(A^c \cap B) - P(A^c)P(B)|,$$

entonces tenemos que, para todo A y B

$$4|P(A\cap B) - P(A)P(B)| = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}|P(A_i\cap B_j) - P(A_i)P(B_j)|,$$

siendo $A_1 = A,\ A_2 = A^c,\ B_1 = B,\ B_2 = B^c$, luego tomando supremo a ambos lados se tiene que $2\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \beta(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Además $\beta(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \phi(\mathcal{F},\mathcal{G})$ pues

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|P(A_i\cap B_j) - P(A_i)P(B_j)| = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|P(B_j|A_i) - P(B_j)|P(A_i)$$

y definiendo

$$J^+ = \{j\in J : P(B_j|A_i) - P(B_j) \geqslant 0\},\ J^- = \{j\in J : P(B_j|A_i) - P(B_j) < 0\}, \tag{2.10}$$

$$B^+ = \bigcup_{j\in J^+} B_j,\ B^- = \bigcup_{j\in J^-} B_j, \tag{2.11}$$

tenemos que:

$$\sum_{i\in I,\ j\in J}|P(A_i\cap B_j) - P(A_i)P(B_j)| = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}|P(B_j|A_i) - P(B_j)|P(A_i)$$

$$= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J^+}\left(P(B_j|A_i) - P(B_j)\right)P(A_i) + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J^-}\left(P(B_j) - P(B_j|A_i)\right)P(A_i)$$

$$= \sum_{i\in I}\left|P\left(B^+|A_i\right) - P\left(B^+\right)\right|P(A_i) + \sum_{i\in I}\left|P\left(B^-|A_i\right) - P\left(B^-\right)\right|P(A_i)$$

$$\leqslant 2\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})\sum_{i\in I}P(A_i)=2\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

Entonces tomando supremo a ambos lados tenemos que $\beta(\mathcal{F},\mathcal{G})\leqslant\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Para probar que $\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})\leqslant\frac{1}{2}\psi(\mathcal{F},\mathcal{G})$ basta observar que si $0<P(B)\leqslant\frac{1}{2}$ entonces

$$\begin{aligned}|P(B|A)-P(B)| &= \frac{|P(A\cap B)-P(A)P(B)|}{P(A)}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\frac{|P(A\cap B)-P(A)P(B)|}{P(A)P(B)}\end{aligned}$$

y tomando supremos $\sup\{|P(B|A)-P(B)|\}\leqslant\sup\left\{\frac{1}{2}\frac{|P(A\cap B)-P(A)P(B)|}{P(A)P(B)}\right\}$ con $A\in\mathcal{F}$, $P(A)\neq 0$, $B\in\mathcal{G}$, $P(B)\geqslant\frac{1}{2}$. Si $P(B)>1/2$ el argumento es el mismo que antes cambiando B por B^c pues $P(B^c)\leqslant 1/2$ y $|P(B|A)-P(B)|=|P(B^c|A)-P(B^c)|$. De lo anterior queda probada la ecuación (2.7). Probaremos ahora la ecuación (2.8). $4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G})\leqslant\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$ pues

$$4|P(A\cap B)-P(A)P(B)|=4|Cov(1_A,1_B)|\leqslant\frac{|Cov(1_A,1_B)|}{\sqrt{Var(1_A)}\sqrt{Var(1_B)}}=|Corr(1_A,1_B)|$$

dado que $\sqrt{Var(1_A)}\sqrt{Var(1_B)}\leqslant\frac{1}{4}$. Como $1_A\in L^2(\mathcal{F})$, $1_B\in L^2(\mathcal{G})$ tomando supremos se obtiene $4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G})\leqslant\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Para completar la demostración de la ecuación (2.8) probaremos $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})\leqslant 2\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G},\mathcal{F})$ probando que

$$|Corr(X,Y)|\leqslant 2\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

para toda $X\in L^2(\mathcal{F})$, $Y\in L^2(\mathcal{G})$. Consideramos varios casos, primero veremos el caso de funciones simples y centradas, es decir

$$X=\sum_{i\in I}x_i 1_{A_i},\ A_i\in\mathcal{F}\forall i\in I,\ Y=\sum_{j\in J}y_j 1_{B_j},\ B_j\in\mathcal{G}\forall j\in J,\ E(X)=E(Y)=0.$$

En este caso

$$\begin{aligned}(Cov(X,Y))^2 &= \left(\sum_{i\in I,j\in J}x_iy_j(P(A_i\cap B_j)-P(A_i)P(B_j))\right)^2\\ &= \left(\sum_{i\in I}\left(x_iP(A_i)^{\frac{1}{2}}\sum_{j\in J}y_j(P(B_j|A_i)-P(B_j))P(A_i)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^2\end{aligned}$$

y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum_i a_ib_i\right)^2\leqslant\left(\sum_i a_i^2\right)\left(\sum_i b_i^2\right),$$

para $a_i=x_iP(A_i)^{\frac{1}{2}},\ b_i=\sum_{j\in J}y_j(P(B_j|A_i)-P(B_j))P(A_i)^{\frac{1}{2}}$ tenemos que

$$(Cov(X,Y))^2\leqslant\left(\sum_{i\in I}x_i^2P(A_i)\right)\sum_{i\in I}\left[P(A_i)\left(\sum_{j\in J}y_j(P(B_j|A_i)-P(B_j))\right)^2\right]$$

$$\leqslant E\left(X^2\right)\sum_{i\in I}\left[P(A_i)\left(\sum_{j\in J}|y_j||P(B_j|A_i)-P(B_j)|^{\frac{1}{2}}|P(B_j|A_i)-P(B_j)|^{\frac{1}{2}}\right)^2\right]$$

Usando nuevamente Cauchy-Schwarz con $a_j = |y_j||P(B_j|A_i) - P(B_j)|^{\frac{1}{2}},\ b_j = |P(B_j|A_i) - P(B_j)|^{\frac{1}{2}}$ también tenemos que

$$(Cov(X,Y))^2$$

$$\leqslant E\left(X^2\right)\sum_{i\in I}\left[P(A_i)\left(\sum_{j\in J}|y_j|^2|P(B_j|A_i)-P(B_j)|\right)\left(\sum_{j\in J}|P(B_j|A_i)-P(B_j)|\right)\right]$$

y como $(P(B_j|A_i) - P(B_j))\,P(A_i) = (P(A_i|B_j) - P(A_i))\,P(B_j)$ se obtiene, intercambiando el orden de las series que

$$(Cov(X,Y))^2$$

$$\leqslant E\left(X^2\right)\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}|y_j|^2|P(A_i|B_j)-P(A_i)|P(B_j)\right)\left(\sum_{j\in J}|P(B_j|A_i)-P(B_j)|\right)$$

$$\leqslant E\left(X^2\right)\left(\max_{i\in I}\sum_{j\in J}|P(B_j|A_i)-P(B_j)|\right)\sum_{j\in J}\left(|y_j|^2P(B_j)\sum_{i\in I}|P(A_i|B_j)-P(A_i)|\right)$$

$$\leqslant E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)\left(\max_{i\in I}\sum_{j\in J}|P(B_j|A_i)-P(B_j)|\right)\left(\max_{j\in J}\sum_{i\in I}|P(A_i|B_j)-P(A_i)|\right)$$

Considerando $J^+,\ J^-,\ B^+,\ B^-$ como en las ecuaciones (2.10) y (2.11) tenemos que

$$\sum_{j\in J}|P(B_j|A_i)-P(B_j)| \leqslant 2\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

y análogamente

$$\sum_{i\in I}|P(A_i|B_j)-P(A_i)| \leqslant 2\phi(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

Entonces

$$(Cov(X,Y))^2 \leqslant E\left(X^2\right)E\left(Y^2\right)4\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})\phi(\mathcal{G},\mathcal{F}).$$

Como además $E(X) = E(Y) = 0$ tenemos

$$|Corr(X,Y)| \leqslant 2\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G},\mathcal{F}) \text{ y entonces } \rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant 2\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G},\mathcal{F}).$$

Cuando las funciones X e Y no son simples consideramos sucesiones de funciones simples $(X_n)_{n\geqslant 1},\ (Y_n)_{n\geqslant 1}$ tales que X_n es $\mathcal{F}$-medible para todo n, Y_n es $\mathcal{G}$-medible para todo n, $X_n \to X$ en $L^2(\mathcal{F})$, $Y_n \to Y$ en $L^2(\mathcal{G})$, y $Cov(X_n, Y_n) \to Cov(X,Y)$ cuando $n \to \infty$. Como la desigualdad vale para funciones simples pasando al límite se obtiene la desigualdad para funciones en L^2 y esto completa la prueba de (2.8). Finalmente, usando las ecuaciones (2.7) y (2.8), demostraremos la ecuación (2.9). Tenemos que

$$\rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant 2\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G})\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G},\mathcal{F})$$

y además

$$\phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G}),\ \phi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{G},\mathcal{F}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\psi^{\frac{1}{2}}(\mathcal{F},\mathcal{G}),$$

entonces $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G}) \leqslant \psi(\mathcal{F},\mathcal{G})$.

■

2.2 Desigualdades de covarianza

Sean X, Y funciones tales que X es $\mathcal{F}$-medible, Y es $\mathcal{G}$-medible. Consideramos la norma p y la norma infinito.

$$||X||_p = (E|X|^p)^{\frac{1}{p}}\,,\ 1 \leqslant p < \infty,\ ||X||_\infty = \inf\{c : P(|X| > c) = 0\}$$
$$L^p(\mathcal{F}) = \{X : \Omega \to \mathbb{R} : X \text{ es } \mathcal{F}\text{-medible y } ||X||_p < \infty\}\,,\ 1 \leqslant p \leqslant \infty$$

Proposición 2.5 *Sean X $\mathcal{F}$-medible, Y $\mathcal{G}$-medible.*

1. (a) $X \in L^\infty(\mathcal{F}),\ Y \in L^\infty(\mathcal{G})$, *entonces*

$$|Cov(X,Y)| \leqslant 4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_\infty||Y||_\infty \tag{2.12}$$

(b) $X \in L^p(\mathcal{F}),\ 1 \leqslant p < \infty,\ Y \in L^\infty(\mathcal{G})$, *entonces*

$$|Cov(X,Y)| \leqslant 6\alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_p||Y||_\infty \tag{2.13}$$

(c) $X \in L^p(\mathcal{F}),\ Y \in L^q(\mathcal{G})$ *con* $p, q, r \geqslant 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$, *entonces*

$$|Cov(X,Y)| \leqslant 8\alpha^{\frac{1}{r}}(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_p||Y||_q \tag{2.14}$$

2. $X \in L^p(\mathcal{F}),\ Y \in L^q(\mathcal{G})$, *con* $p, q > 1$ *y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *entonces*

$$|Cov(X,Y)| \leqslant 2\phi^{\frac{1}{p}}(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_p||Y||_q \tag{2.15}$$

3. $X \in L^1(\mathcal{F}),\ Y \in L^1(\mathcal{G})$, *entonces*

$$|Cov(X,Y)| \leqslant \psi(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_1||Y||_1 \tag{2.16}$$

4. $X \in L^2(\mathcal{F}),\ Y \in L^2(\mathcal{G})$, *entonces*

$$|Cov(X,Y)| \leqslant \rho(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_2||Y||_2 \tag{2.17}$$

Demostración.

1. (a) Sean $X \in L^\infty(\mathcal{F}),\ Y \in L^\infty(\mathcal{G})$. Usando propiedades de la esperanza condicional tenemos que

$$\begin{aligned} |Cov(X,Y)| &= |E(XY) - E(X)E(Y)| = |E\,[E(XY|\mathcal{F}) - XE(Y)]\,| \\ &= |E\,\{X[E(Y|\mathcal{F}) - E(Y)]\}| \leqslant E\,|X\,[E(Y|\mathcal{F}) - E(Y)]| \\ &\leqslant ||X||_\infty E\,|E(Y|\mathcal{F}) - E(Y)| \end{aligned}$$

pues $E[E(XY|\mathcal{F})] = E(XY)$ y como X es $\mathcal{F}$-medible $E(XY|\mathcal{F}) = XE(Y|\mathcal{F})$.

Sea $U = sg\,(E(Y|\mathcal{F}) - E(Y))$ donde $sg(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ y por lo tanto U es $\mathcal{F}$-medible.

$$\begin{aligned} E\,|E(Y|\mathcal{F}) - E(Y)| &= E\,\{U\,[E(Y|\mathcal{F}) - E(Y)]\} = E\,[E(UY|\mathcal{F})] - E(U)E(Y) \\ &= E(UY) - E(U)E(Y) = |E(UY) - E(U)E(Y)| \end{aligned}$$

Como antes, tomando ahora esperanza condicional respecto de $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned} |E(UY) - E(U)E(Y)| &= |E\,[E(UY|\mathcal{G}) - YE(U)]\,| \leqslant E\,|Y\,[E(U|\mathcal{G}) - E(U)]| \\ &\leqslant ||Y||_\infty E\,|E(U|\mathcal{G}) - E(U)| \end{aligned}$$

Sea $V = sg\,|E(U|\mathcal{G}) - E(U)|$ entonces con el mismo argumento que antes tenemos que

$$|Cov(X,Y)| \leqslant ||X||_\infty ||Y||_\infty \, |E(UV) - E(U)E(V)|$$

Definiendo

$$A^+ = \{\omega \in \Omega : U(\omega) = 1\}\,,\ A^- = \{\omega \in \Omega : U(\omega) = -1\}\,,$$

$$B^+ = \{\omega \in \Omega : V(\omega) = 1\}\,,\ B^- = \{\omega \in \Omega : V(\omega) = -1\}$$

tenemos que los conjuntos $A^+,\ A^-$ son $\mathcal{F}$-medibles, $B^+,\ B^-$ son $\mathcal{G}$-medibles y además se cumple que

$$\begin{aligned}|E(UV) - E(U)E(V)| = |&P(A^+ \cap B^+) - P(A^- \cap B^+) + P(A^- \cap B^-)\\ &-P(A^+ \cap B^-) - P(A^+)(B^+) - P(A^-)P(B^-)\\ &+P(A^+)P(B^-) + P(A^-)P(B^+)|\end{aligned}$$

y entonces $|E(UV) - E(U)E(V)| \leqslant 4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G})$, de donde

$$|Cov(X,Y)| \leqslant ||X||_\infty ||Y||_\infty 4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

(b) La demostración de la ecuación (2.13) se basa en la desigualdad anterior para variables acotadas. Sean $X,\ Y$ tales que $||X||_p < \infty,\ 1 \leqslant p < \infty,\ ||Y||_\infty < \infty$. Consideramos $a > 0$ y $\overline{X} = X1_{\{|X| \leqslant a\}}$, $\underline{X} = X1_{\{|X|>a\}}$. Tenemos que $X = \overline{X} + \underline{X}$, entonces

$$|Cov(X,Y)| \leqslant |Cov(\overline{X},Y)| + |Cov(\underline{X},Y)|$$

y usando la desigualdad (2.12)

$$|Cov(\overline{X},Y)| \leqslant ||\overline{X}||_\infty ||Y||_\infty 4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}) = a||Y||_\infty 4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}).$$

Por otra parte tenemos que

$$|Cov(\underline{X},Y)| \leqslant |E(\underline{X}Y)| + |E(\underline{X})E(Y)| \leqslant 2||Y||_\infty E|\underline{X}|$$

Vamos a acotar $E|\underline{X}|$ usando que $||X||_p < \infty$.

$$E\left(|X|^p\right) = \int_\Omega |X|^p dP \geqslant \int_\Omega |\underline{X}|^p dP \geqslant a^{p-1} \int_\Omega |\underline{X}| dP = a^{p-1} E|\underline{X}|$$

de donde $E|\underline{X}| \leqslant a\dfrac{E\left(|X|^p\right)}{a^p}$ y entonces

$$|Cov(X,Y)| \leqslant a||Y||_\infty \left(4\alpha(\mathcal{F},\mathcal{G}) + 2\frac{E\left(|X|^p\right)}{a^p}\right)$$

Tomando a tal que $\dfrac{E\left(|X|^p\right)}{a^p} = \alpha(\mathcal{F},\mathcal{G})$, es decir $a = \dfrac{||X||_p}{\alpha^{\frac{1}{p}}(\mathcal{F},\mathcal{G})}$ se obtiene la desigualdad

$$|Cov(X,Y)| \leqslant ||Y||_\infty ||X||_p 6\alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

(c) Sean $X,\ Y$ tales que $||X||_p < \infty,\ ||Y||_q < \infty$ con $p,q \geqslant 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$. Consideramos $b > 0$, $\overline{Y} = Y1_{\{|Y| \leqslant b\}}$, $\underline{Y} = Y1_{\{|Y|>b\}}$, tenemos $Y = \overline{Y} + \underline{Y}$ y además

$$|Cov(X,Y)| \leqslant |Cov(X,\overline{Y})| + |Cov(X,\underline{Y})|$$

Usando la desigualdad (2.13) para las variables $X,\ \overline{Y}$ se obtiene que

$$|Cov(X,\overline{Y})| \leqslant 6||\overline{Y}||_\infty ||X||_p \alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mathcal{F},\mathcal{G}) = 6b||X||_p \alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$$

El otro término $|Cov(X, \underline{Y})|$ se puede acotar usando la desigualdad de Hölder $E|UV| \leqslant ||U||_p||V||_{q'}$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1$ y que $E|U| \leqslant ||U||_p$, $E|V| \leqslant ||V||_{q'}$, $\forall p, q' > 1$ tenemos que

$$|Cov(X, \underline{Y})| \leqslant |E(X\underline{Y})| + E|X|E|\underline{Y}| \leqslant 2||X||_p||\overline{Y}||q'$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1$ y $q' < q$. Para acotar $||\overline{Y}||q'$ calculamos

$$E\left(|Y|^q\right) = \int\limits_{\Omega} |Y|^q dP \geqslant \int\limits_{\Omega} |\underline{Y}|^q dP \geqslant \int\limits_{\Omega} |\underline{Y}|^{q-q'}|\underline{Y}|^{q'} dP \geqslant b^{q-q'} E\left(|\underline{Y}|^{q'}\right)$$

y tenemos que $E\left(|\underline{Y}|^{q'}\right) \leqslant \dfrac{E\left(|Y|^q\right)}{b^{q-q'}}$ de donde $||\underline{Y}||_{q'} \leqslant \dfrac{||Y||_q^{\frac{q}{q'}}}{b^{\frac{q}{q'}-1}} = b\left(\dfrac{||Y||_q}{b}\right)^{\frac{q}{q'}}$, entonces

$$|Cov(X, Y)| \leqslant b||X||_p \left(6\alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) + 2\left(\frac{||Y||_q}{b}\right)^{\frac{q}{q'}}\right)$$

Elegimos b tal que $\left(\dfrac{||Y||_q}{b}\right)^{\frac{q}{q'}} = \alpha^{1-\frac{1}{p}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, entonces $b = \dfrac{||Y||_q}{\alpha^{\left(1-\frac{1}{p}\right)\frac{q'}{q}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})}$ y como $\frac{1}{q'} + \frac{1}{p} = 1$ tenemos que $\left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{q'}{q} = \frac{1}{q}$. Luego obtenemos la desigualdad

$$|Cov(X, Y)| \leqslant ||X||_p||Y||_q 8\alpha^{1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

2. Probaremos la desigualdad (2.15) primero para funciones simples y centradas de la misma forma que en la demostración de (2.8) pero usando la desigualdad de Hölder en vez de la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Sean $X = \sum\limits_{i \in I} x_i 1_{A_i}$, $Y = \sum\limits_{j \in J} y_j 1_{B_j}$ con $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$ y $B_j \in \mathcal{G}$ para todo $j \in J$, $E(X) = E(Y) = 0$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |Cov(X, Y)| &= \left|\sum_{i \in I, j \in J} x_i y_j \left(P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)\right)\right| \\ &\leqslant \sum_{i \in I}\left|x_i P(A_i)^{\frac{1}{p}} \sum_{j \in J} y_j \left[P(B_j|A_i) - P(B_j)\right] P(A_i)^{\frac{1}{q}}\right| \end{aligned}$$

donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, con $p, q > 1$, entonces usando en la última ecuación la desigualdad de Hölder $|\sum\limits_i a_i b_i| \leqslant \left(\sum\limits_i |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum\limits_i |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} |Cov(X, Y)| &\leqslant \left(\sum_{i \in I} |x_i|^p P(A_i)\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i \in I} P(A_i) \left[\sum_{j \in J} |y_j||P(B_j|A_i) - P(B_j)|\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= ||X||_p \left(\sum_{i \in I} P(A_i) \left[\sum_{j \in J} |y_j||P(B_j|A_i) - P(B_j)|\right]^q\right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Luego hacemos los mismos cálculos para acotar $\sum\limits_{j \in J} |y_j||P(B_j|A_i) - P(B_j)|$ y tenemos que

$$\sum_{j \in J} |y_j||P(B_j|A_i) - P(B_j)|^{\frac{1}{q}}|P(B_j|A_i) - P(B_j)|^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{j\in J} |y_j|^q |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j\in J} |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right)^{\frac{1}{p}}$$

Además $P(A_i)|P(B_j|A_i) - P(B_j)| = P(B_j)|P(A_i|B_j) - P(A_i)|$ y entonces

$$\left(\sum_{i\in I} P(A_i) \left[\sum_{j\in J} |y_j||P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right]^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i\in I} P(A_i) \left[\sum_{j\in J} |y_j|^q |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right] \left[\sum_{j\in J} |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right]^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sum_{i\in I} \left[\sum_{j\in J} |y_j|^q P(B_j)|P(A_i|B_j) - P(A_i)| \right] \left[\sum_{j\in J} |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right]^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant \left(\sup_{i\in I} \left[\sum_{j\in J} |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \right]^{\frac{q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{j\in J} |y_j|^q P(B_j) \left[\sum_{i\in I} |P(A_i|B_j) - P(A_i)| \right] \right)^{\frac{1}{q}}$$

Si consideramos J^+, J^-, B^+ y B^- como en (2.10) y (2.11) y con los mismos argumentos que en la proposición 2.4 tenemos que $\sum_{j\in J} |P(B_j|A_i) - P(B_j)| \leqslant 2\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})$. Del mismo modo se prueba que $\sum_{i\in I} |P(A_i|B_j) - P(A_i)| \leqslant 2\phi(\mathcal{G},\mathcal{F}) \leqslant 2$ y entonces

$$|Cov(X,Y)| \leqslant ||X||_p \left(2\phi(\mathcal{F},\mathcal{G})\right)^{\frac{1}{p}} ||Y||_q \left(2\phi(\mathcal{G},\mathcal{F})\right)^{\frac{1}{q}},$$

de donde

$$|Cov(X,Y)| \leqslant 2\phi^{\frac{1}{p}}(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_p||Y||_q$$

3. Haremos la demostración de la desigualdad (2.16) para variables aleatorias X, Y simples y centradas. Sean $X = \sum_{i\in I} x_i 1_{A_i}$, $Y = \sum_{j\in J} y_j 1_{B_j}$ con $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i \in I$ y $B_j \in \mathcal{G}$ para todo $j \in J$, con $E(X) = E(Y) = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} |Cov(X,Y)| &= \left| \sum_{i,j} x_i y_j \left(P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)\right) \right| \\ &= \left| \sum_{i,j} x_i y_j \frac{P(A_i \cap B_j) - P(A_i)P(B_j)}{P(A_i)P(B_j)} P(A_i)P(B_j) \right| \\ &\leqslant \psi(\mathcal{F},\mathcal{G}) \sum_{i\in I, j\in J} |x_i||y_j| P(A_i)P(B_j) \\ &= \psi(\mathcal{F},\mathcal{G})||X||_1||Y||_1 \end{aligned}$$

4. La desigualdad (2.17) se cumple por la definición de $\rho(\mathcal{F},\mathcal{G})$ y por la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

■

2.3 Campos y procesos mixing

Consideramos un espacio métrico T con una distancia d, por ejemplo $T = \mathbb{R}^k, \mathbb{Z}^k$, y $X = (X_t)_{t\in T}$. Si $T = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ tenemos que X es un proceso, cuando $T = \mathbb{R}^k, \mathbb{Z}^k$ decimos que X es un campo. Un proceso también es un campo, sin embargo las definiciones de mixing para campos y procesos son distintas. Presentaremos las definiciones para el coeficiente α, pues las definiciones para los demás coeficientes son análogas.

Definición 2.6 Sea X un campo aleatorio $X = (X_t)_{t\in T}$, donde T es un espacio métrico con una distancia d. Definimos para todo $A, B \subset T$ la distancia $d(A,B) = \inf\{d(s,t) : s \in A, t \in B\}$. Para todo $A \subset T$ llamamos consideramos la σ-álgebra generada por $\{X_t : t \in A\}$, $\sigma^X(A) = \sigma(X_t : t \in A)$. Definimos

$$\begin{aligned}
\alpha^X(\Phi, m) &= \sup\left\{\alpha\left(\sigma^X(A), \sigma^X(B)\right) : A, B \subset T,\ d(A,B) \geqslant m\right\} \\
\alpha^X(\Sigma, m) &= \sup\left\{\alpha\left(\sigma^X(A), \sigma^X(B)\right) : A, B \subset T,\ A, B \in \Sigma,\ d(A,B) \geqslant m\right\} \\
\alpha^X(\Pi, m) &= \sup\left\{\alpha\left(\sigma^X(A), \sigma^X(B)\right) : A, B \subset T,\ A, B \in \Pi,\ d(A,B) \geqslant m\right\}
\end{aligned}$$

donde Σ es el conjunto de semiespacios de T y Π es el conjunto de rectángulos de lados paralelos a los ejes de T. Observar que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$\alpha^X(\Phi, m) \geqslant \alpha^X(\Sigma, m) \geqslant \alpha^X(\Pi, m)$$

También definimos, para conjuntos A y B finitos

$$\alpha(\Phi, m, a, b),\ \alpha(\Sigma, m, a, b),\ \alpha(\Pi, m, a, b)$$

como antes y con la condición adicional de

$$card(A) \leqslant a, \quad card(B) \leqslant b.$$

Además notaremos

$$\alpha(\Phi, m, \infty, b) = \sup\{\alpha(\Phi, m, a, b) : a \in \mathbb{N}\},\ \alpha(\Phi, m, a, \infty) = \sup\{\alpha(\Phi, m, a, b) : b \in \mathbb{N}\}$$

Las definiciones son análogas para los demás coeficientes. Llamemos $\eta^X(\xi, m)$ a los coeficientes de mixing para $\eta = \alpha, \beta, \phi, \psi, \rho$ y $\xi = \Phi, \Sigma, \Pi$. Si alguno de los coeficientes $\eta^X(\xi, m) \to 0$ cuando $m \to \infty$ decimos que X es $\eta^X(\xi)$-mixing. Análogamente, notamos $\eta^X(\xi, m, a, b)$ y si $\eta^X(\xi, m, a, b) \to 0$ cuando $m \to \infty$ decimos que X es $\eta^X(\xi, a, b)$-mixing.

Definiremos ahora mixing para procesos. La definición de los coeficientes de mixing para procesos y para campos es distinta, de modo que un proceso puede ser mixing y no serlo como campo. Nuevamente definiremos α-mixing, ya que las demás definiciones son análogas.

Definición 2.7 Sea $X = (X_t)_{t\in T}$ y T un espacio métrico ordenado ($T = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$). Definimos para el proceso X

$$\alpha_m^X = \sup\left\{\alpha(\sigma^X(A), \sigma^X(B)) : A, B \subset T,\ d(A,B) \geqslant m,\ t \geqslant s + m\ \forall s \in A,\ \forall t \in B\right\} \quad (2.18)$$

También se puede definir $\alpha_m^X(a,b)$ $\forall a, b \in \mathbb{N}$ como en (2.18) y con la condición adicional

$$card(A) \leqslant a, \quad card(B) \leqslant b$$

y al igual que para campos notaremos

$$\alpha_m^X(\infty, b) = \sup\left\{\alpha_m^X(a,b) : a \in \mathbb{N}\right\},\ \alpha_m^X(a, \infty) = \sup\left\{\alpha_m^X(a,b) : b \in \mathbb{N}\right\}.$$

El proceso es η^X-mixing si $\eta_m^X \to 0$ cuando $m \to \infty$, con $\eta = \alpha, \beta, \phi, \psi, \rho$ y análogamente se define $\eta^X(a,b)$-mixing.

La definición de mixing para procesos es menos restrictiva que para campos. Se puede probar que para campos estacionarios son equivalentes las condiciones de α-mixing y ρ-mixing, mientras que existen procesos estacionarios que son α-mixing pero no son ρ-mixing.

Observación 2.8 Por las desigualdades de la proposición 2.4 tenemos que tanto para campos como para procesos se cumplen las siguientes relaciones entre las condiciones de mixing:

$$m\text{-dependiente} \Rightarrow \psi\text{-mixing} \Rightarrow \phi\text{-mixing} \left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \beta\text{-mixing} \Rightarrow \alpha\text{-mixing} \\ \Rightarrow \rho\text{-mixing} \Rightarrow \alpha\text{-mixing} \end{array} \right. ,$$

siendo un campo $X = (X_t)_{t\in T}$ m-dependiente si $\sigma^X(A)$ y $\sigma^X(B)$ son independientes para todo $A, B \subset T$ tales que $d(A, B) > m$.

Las relaciones anteriores son las únicas que se cumplen entre los coeficientes. Sin embargo en el caso de campos gaussianos estacionarios y campos estacionarios existen algunas equivalencias, que consideraremos a continuación.

2.4 Ejemplos

En los ejemplos consideraremos campos gaussianos. Probaremos que un campo gaussiano, estacionario y centrado es ϕ-mixing si y sólo si es m-dependiente.

Lema 2.9 *Sea X un campo gaussiano estacionario y centrado, indexado en $\mathbb{Z}^d$. Consideramos en $\mathbb{Z}^d$ la distancia inducida por la norma $||n|| = \max\{|n(i)| : 1 \leqslant i \leqslant d\}$. Entonces X es m-dependiente si y sólo si $r^X(n) = Cov(X_0, X_n) = E(X_0X_n) = 0$ para todo $||n|| > m$.*

Demostración. Si X es m-dependiente entonces $\sigma^X(A)$ y $\sigma^X(B)$ son independientes para todo A, B tales que $d(A, B) > m$ y en particular X_0 y X_n son independientes si $||n|| > m$, y por lo tanto $Cov(X_0, X_n) = 0$ para todo $||n|| > m$. Veremos ahora que la covarianza basta para determinar si el campo es m-dependiente. X es m-dependiente si $\widetilde{X}_s = (X_{s_1}, \dots, X_{s_l})$ y $\widetilde{X}_t = (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ son independientes para todo $s = (s_1, \dots, s_l)$, $t = (t_1, \dots, t_k)$ y para todo l, k tales que $d(s, t) > m$. Tenemos que $\widetilde{X}_s$ y $\widetilde{X}_t$ son independientes si y sólo si $f_{(\widetilde{X}_s, \widetilde{X}_t)} = f_{\widetilde{X}_s} f_{\widetilde{X}_t}$, siendo $f_{(\widetilde{X}_s, \widetilde{X}_t)}$ la densidad conjunta de $(\widetilde{X}_s, \widetilde{X}_t)$ y $f_{\widetilde{X}_s}$, $f_{\widetilde{X}_t}$ las densidades de $\widetilde{X}_s$, $\widetilde{X}_t$. El producto es

$$f_{\widetilde{X}_s}(x) f_{\widetilde{X}_t}(y) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x^t\Sigma_s^{-1}x}}{(2\pi)^{\frac{l}{2}}} \frac{e^{-\frac{1}{2}y^t\Sigma_t^{-1}y}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x,y)^t\Sigma^{-1}(x,y)}}{(2\pi)^{\frac{l+k}{2}}},$$

donde $x = (x_1, \dots, x_l)$, $y = (y_1 \dots, y_k)$, $(x, y) = (x_1, \dots, x_l, \dots y_1 \dots, y_k)$, Σ_s y Σ_t son las matrices de covarianza de $\widetilde{X}_s$ y $\widetilde{X}_t$ respectivamente y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_s & 0 \\ 0 & \Sigma_t \end{pmatrix}$$

El vector $(\widetilde{X}_s, \widetilde{X}_t)$ es un vector gaussiano por ser el campo X gaussiano. Entonces $\widetilde{X}_s$ y $\widetilde{X}_t$ son independientes si y sólo si

$$f_{(\widetilde{X}_s, \widetilde{X}_t)} = \frac{e^{-\frac{1}{2}(x,y)^t\Sigma^{-1}(x,y)}}{(2\pi)^{\frac{l+k}{2}}},$$

por lo tanto $\widetilde{X}_s$ y $\widetilde{X}_t$ son independientes si y sólo si $Cov(X_{s_i}, X_{t_j}) = 0$ para todo $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, k$. Como X es estacionario $Cov(X_{s_i}, X_{t_j}) = Cov(X_0, X_{t_j - s_i})$ y $Cov(X_0, X_{t_j - s_i}) = 0$ para todo $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, k$ tal que $d(s, t) > m$, de donde $\widetilde{X}_s$ y $\widetilde{X}_t$ son independientes y X es m-dependiente.

∎

Lema 2.10 *Sean X, Y variables aleatorias reales tales que el vector (X, Y) es gaussiano, con $Cov(X, Y) = r > 0$, $E(X) = E(Y) = 0$ y $Var(X) = Var(Y) = 1$. Entonces existen sucesos A y B tales que $|P(B|A) - P(B)| \geqslant c$, con c constante independiente de r.*

Demostración. Sean $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > \frac{2}{r}\}$, $B = \{\omega \in \Omega : 0 \leqslant Y(\omega) \leqslant 1\}$. (X, Y) es gaussiano con matriz de covarianzas $\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$ y la densidad de (X, Y) es

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(x,y)^t \Sigma^{-1}(x,y)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - r^2}} e^{-\frac{(x^2 - 2rxy + y^2)}{2(1-r^2)}},$$

entonces

$$P(A \cap B) - P(A)P(B) = \int_{\frac{2}{r}}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}}}{2\pi\sqrt{1-r^2}} dxdy - \int_{\frac{2}{r}}^{\infty} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}}{2\pi} dxdy$$

Observando que $e^{-\frac{x^2-2rxy+y^2}{2(1-r^2)}} = e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(y-rx)^2}{2(1-r^2)}}$ y haciendo el cambio de variable $u = \frac{y-rx}{\sqrt{1-r^2}}$ tenemos que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &= \int_{\frac{2}{r}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{e^{-\frac{(y-rx)^2}{2(1-r^2)}}}{\sqrt{1-r^2}} dy - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{2}{r}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-rx}{\sqrt{1-r^2}}}^{\frac{1-rx}{\sqrt{1-r^2}}} e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{y^2}{2}} dy \right) dx \\ &= \int_{\frac{2}{r}}^{\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \left[\Phi\left(\frac{1-rx}{\sqrt{1-r^2}} \right) - \Phi\left(\frac{-rx}{\sqrt{1-r^2}} \right) - \Phi(1) + \Phi(0) \right] dx, \end{aligned}$$

siendo $\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}$. Si $x > \frac{2}{r}$ entonces $\Phi\left(\frac{1-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-rx}{\sqrt{1-r^2}}\right) \leqslant \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{1-r^2}}\right) \leqslant \Phi(-1) - \Phi(-2)$ y tenemos que

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &\leqslant (\Phi(-1) - \Phi(-2) - \Phi(1) + \Phi(0)) \int_{\frac{2}{r}}^{\infty} \frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dx \\ &= (-2\Phi(1) + \Phi(2) + \Phi(0))P(A) \\ &= -cP(A) \end{aligned}$$

con $c = 2\Phi(1) - \Phi(2) - \Phi(0) > 0$, entonces

$$\frac{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|}{P(A)} = |P(B|A) - P(B)| \geqslant c.$$

■

Proposición 2.11 Sea $X = (X_t)_{t \in T}$ gaussiano, estacionario y centrado. Si existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_k \phi^X(\Phi, k, a, b) = 0$ entonces X es m-dependiente.

Demostración. Supongamos que X no es m-dependiente entonces por el lema 2.9 existe una sucesión n_k, con $n_k \to \infty$ cuando $k \to \infty$ tal que $r^X(n_k) = Cov(X_0, X_{n_k}) = r_k > 0$. Luego por el lema 2.10 existe una sucesión $(A_k)_{k \in N}$ y B tales que $|P(B|A_k) - P(B)| \geqslant c$, con c constante independiente de k, siendo $A_k = \{\omega \in \Omega : X_{n_k}(\omega) > \frac{2}{r_k}\}$ y $B = \{\omega \in \Omega : 0 \leqslant X_0(\omega) \leqslant 1\}$. Como $A_k \in \sigma^X(\{n_k\})$ y $B \in \sigma^X(\{0\})$ tenemos que $\phi\left(\sigma^X(\{n_k\}), \sigma^X(\{0\})\right) \geqslant c$ y entonces $\lim_n \phi^X(\Phi, n, a, b) \neq 0$.
■

También para campos gaussianos centrados y estacionarios son equivalentes las condiciones de α-mixing y de ρ-mixing. Enunciamos sin demostración estos resultados que se encuentran en [2].

Teorema 2.12 *Sea $X = (X_t)_{t \in T}$ gaussiano estacionario y centrado. Entonces para todo $A, B \in T$ se tiene que*

$$\alpha\left(\sigma^X(A), \sigma^X(B)\right) \leqslant \rho\left(\sigma^X(A), \sigma^X(B)\right) \leqslant 2\pi\alpha\left(\sigma^X(A), \sigma^X(B)\right).$$

En particular para todo $a, b, k \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\alpha^X(\Phi, k, a, b) \leqslant \rho^X(\Phi, k, a, b) \leqslant 2\pi\alpha^X(\Phi, k, a, b).$$

Además para campos solamente estacionarios algunas condiciones de α-mixing y ρ-mixing son equivalentes. También enunciaremos este resultado sin demostración.

Teorema 2.13 *Sea $X = (X_t)_{t \in \mathbb{Z}^d}$ estacionario y tal que $\lim_k \alpha^X(\Phi, k, \infty, \infty) = 0$. Entonces*

$$\alpha^X(\Phi, k, \infty, \infty) \leqslant \rho(\Phi, k, \infty, \infty) \leqslant 2\pi\alpha(\Phi, k, \infty, \infty).$$

Esta último muestra que las condiciones de α-mixing y ρ- mixing son condiciones muy fuertes en el caso de campos estacionarios si no dependen del cardinal de los subconjuntos A y B. También se pueden encontrar condiciones que garanticen propiedades de mixing para campos lineales de la forma

$$X_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}^d} g_{n,m} Z_m$$

donde $Z = (Z_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ con Z independiente o mixing y para cadenas de Markov.

3 Teorema central del límite

Sea $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ un campo en $\mathbb{Z}^d$. En esta sección estudiaremos el teorema central del límite para campos en $\mathbb{Z}^d$ estacionarios y débilmente dependientes. Para demostrar el teorema central del límite bajo estas hipótesis usaremos los teoremas de Lindeberg y Liapunov para arreglos triangulares que enunciamos sin demostración. En lo que sigue $\underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}}$ indica la convergencia en distribución cuando $N \to \infty$.

Teorema 3.1 (*Teorema de Lindeberg*) *Sea*

$$X = \left\{X_N^k : 1 \leqslant k \leqslant r_N,\ r_N, N \in \mathbb{N}\right\}$$

un arreglo triangular que cumple:

1. *para cada $N \in \mathbb{N}$ $\left\{X_N^k : 1 \leqslant k \leqslant r_N\right\}$ son independientes,*
2. *$r_N \underset{N}{\to} \infty$,*
3. *$E(X_N^k) = 0$ para todo $N, k \in \mathbb{N}$,*
4. *$s_N^2 = \sum_{k=1}^{r_N} E(X_N^k)^2 < \infty$,*

5. *Para todo* $\varepsilon > 0$ *se tiene que*

$$L(N,\varepsilon) = \frac{1}{s_N^2} \sum_{k=1}^{r_N} E\left(\left(X_N^k\right)^2 1_{\left\{|X_N^k| \geqslant \varepsilon s_N\right\}}\right) \underset{N}{\rightarrow} 0,$$

entonces

$$\frac{1}{s_N} \sum_{k=1}^{r_N} X_N^k \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,1).$$

Teorema 3.2 (*Teorema de Liapunov*) *Si el arreglo triangular* X *verifica las hipótesis 1, 2, 3, 4 del teorema 3.1 y existe* $\delta > 0$ *tal que:*

6. $E\left(|X_N^k|^{2+\delta}\right) < \infty$ *para todo* N, k,

7. $$L(N,\delta) = \frac{1}{s_N^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{r_N} E\left(|X_N^k|^{2+\delta}\right) \underset{N}{\rightarrow} 0,$$

entonces

$$\frac{1}{s_N} \sum_{k=1}^{r_N} X_N^k \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,1).$$

Antes de enunciar el teorema central del límite para campos débilmente dependientes presentamos algunas definiciones y notaciones.

Definición 3.3 Sea el conjunto $A \subset \mathbb{Z}^d$ y el campo $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$.

1. Llamaremos $A_N = A \cap [-N,N]^d$ y $A_N^c = A^c \cap [-N,N]^d$ para cada $N \in \mathbb{N}$.

2. Dado $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ y $A \subset \mathbb{Z}^d$ llamaremos

$$S_N(A,X) = \frac{1}{\sqrt{(2N+1)^d}} \sum_{n\in A_N} X_n$$

3. Definimos la clase $G(\mathbb{Z}^d)$ de subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$

$$G(\mathbb{Z}^d) = \left\{ A \subset \mathbb{Z}^d : \text{ existe } \lim_N \frac{card(A_N)}{(2N+1)^d} = v(A),\ 0 < v(A) \leqslant 1 \right\}$$

4. Sea $F_N(n,A) = \dfrac{card\left\{A_N^c \cap (n + A_N)\right\}}{(2N+1)^d}$.

$$M(\mathbb{Z}^d) = \left\{ A \in G(\mathbb{Z}^d) : \text{ existe } \lim_N F_N(n,A) = F(n,A)\ \forall n \in \mathbb{Z}^d \right\}$$

Decimos que los conjuntos $A \in M(\mathbb{Z}^d)$ son *asintóticamente medibles* y llamaremos a $F(.,A)$ función borde del conjunto A.

Teorema 3.4 *Sea* $A \in M(\mathbb{Z}^d)$ *y* $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ *un campo real tal que:*

1. $E(X_n) = 0$ *para cada* $n \in \mathbb{Z}^d$

2. X *es estacionario*

3. $E\left(|X_0|^2\right) < \infty$

4. $\lim_m \alpha^X(\Pi, m, \infty, \infty) = 0$

5. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} |r^X(n)| < \infty$, *siendo* $r^X(n) = E(X_0X_n)$

6. $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} r^X(n) = \sigma^2(X) > 0$

7. *existe* $d(J)$ *tal que* $\lim\limits_J d(J) = 0$ *y para cada* $B \subset \mathbb{Z}^d$

$$E\left\{\left(S_N\left(B, X - X^J\right)\right)^2\right\} \leqslant d(J)\frac{card(B_N)}{(2N+1)^d},$$

donde $X^J = (X_n^J)_{n\in\mathbb{Z}^d}$, $X_n^J = X_n 1_{\{|X_n|\leqslant J\}} - E\left(X_n 1_{\{|X_n|\leqslant J\}}\right)$

8. *existe* $c(J) > 0$ *tal que para todo* $N \geqslant 1$ *y para cada* $B \subset [-N,N]^d$,

$$E\left\{\left(S_N\left(B, X^J\right)\right)^4\right\} \leqslant c(J)\left(\frac{card(B_N)}{(2N+1)^d}\right)^2$$

Entonces

$$S_N(A,X) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N\left(0, v(A)\sigma^2(X) - \gamma(X)\right),$$

donde $\gamma(X) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} r^X(n)F(n,A)$.

Demostración. En la demostración del teorema notaremos $S_N(A,X) = S_N$ y para cualquier conjunto $C \subset \mathbb{Z}^d$ notaremos $S_N(A\cap C, X) = S_N(C)$. La demostración se realiza usando el método de Bernshtein. La idea es la siguientes: se divide $[-N,N]^d$ en 'bloques' separados entre sí por 'corredores' de modo que el tamaño de los bloques sea $p(N)^d$, y la distancia entre bloques $q(N)$, con $p(N), q(N) \underset{N}{\to} \infty$ y $\frac{p(N)}{N}, \frac{q(N)}{N}, \frac{q(N)}{p(N)} \underset{N}{\to} 0$. Se prueba que la suma en todos los bloques se comporta como una suma de copias independientes de la suma en cada bloque y se puede aplicar el teorema central del límite para arreglos triangulares. Para demostrar esto calcularemos primero la varianza de S_N

$$\begin{aligned} E\left(S_N^2\right) &= \frac{1}{(2N+1)^d}\sum_{k,m\in A_N} E(X_kX_m) \\ &= \frac{1}{(2N+1)^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} r^X(n)card\{(k,m)\in A_N\times A_N : k-m=n\} \end{aligned}$$

Tenemos que $(k,m) \in A_N \times A_N$ y $k - m = n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^d$ si y sólo si $k \in A_N$ y $k = m + n$ para algún $n \in \mathbb{Z}^d$, $m \in A_N$ es decir si y sólo si $k \in A_N \cap (n + A_N)$ para algún $n \in \mathbb{Z}^d$. Entonces

$$E\left(S_N^2\right) = \frac{1}{(2N+1)^d}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d} r^X(n)card\left\{A_N\cap(A_N+n)\right\} \tag{3.1}$$

Además

$$\begin{aligned} card\left\{A_N\cap(A_N+n)\right\} &= card(A_N+n) - card\left\{A_N^c\cap(A_N+n)\right\} \\ &\quad - card\left\{(A_N+n)\cap\left([-N,N]^d\right)^c\right\} \\ &= card(A_N) - card\left\{A_N^c\cap(A_N+n)\right\} \\ &\quad - card\left\{(A_N+n)\cap\left([-N,N]^d\right)^c\right\} \end{aligned}$$

Tenemos que

$$\frac{card(A_N)}{(2N+1)^d} - \frac{card\left\{A_N^c\cap(A_N+n)\right\}}{(2N+1)^d} \underset{N}{\to} v(A) - F(n,A)$$

Además

$$\begin{aligned} card\left\{(A_N+n)\cap\left([-N,N]^d\right)^c\right\} &\leqslant card\left([-N-||n||,N+||n||]^d\right) \\ &\quad -card\left([-N,N]^d\right) \\ &= (2N+2||n||+1)^d-(2N+1)^d \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_N \frac{card\left\{(A_N+n)\cap\left([-N,N]^d\right)^c\right\}}{(2N+1)^d} &\leqslant \lim_N \frac{(2N+2||n||+1)^d-(2N+1)^d}{(2N+1)^d} \\ &= \lim_N \frac{N^{d-1}k(||n||,d)}{(2N+1)^d}, \end{aligned}$$

donde $k(||n||,d)$ es una constante que depende de n y d. Entonces

$$\frac{card\left\{(A_N+n)\cap\left([-N,N]^d\right)^c\right\}}{(2N+1)^d}\underset{N}{\to}0$$

de donde

$$E\left(S_N^2\right)\underset{N}{\to}\sigma^2(X)v(A)-\gamma(X)$$

Luego haremos la división en bloques y probaremos que la suma en los 'corredores' tiende a cero en L^2. Para hacer la división en bloques consideramos:

$$J_N(i)=[-N+ip(N)+iq(N),-N+(i+1)p(N)+iq(N)],$$

con $0\leqslant i\leqslant\left[\dfrac{2N}{p(N)+q(N)}\right]$, donde $[x]$ es la parte entera de x. Sean

$$J_N=\bigcup_i J_N(i) \text{ y } \Delta_N=J_N^d,$$

entonces

$$\Delta_N=\bigcup_{i=1}^{k(N)}\Delta_N^i,\ \text{ con } k(N)=\left[\frac{2N}{p(N)+q(N)}\right]^d$$

Las sucesiones $p(N)$ y $q(N)$ se eligen de modo que

$$p(N),q(N)\underset{N}{\to}\infty,\ \frac{q(N)}{p(N)},\frac{p(N)}{N},k(N)\alpha^X\left(\Pi,q(N),\infty,\infty\right)\underset{N}{\to}0$$

Llamamos $\Delta_N^c=[-N,N]^d\setminus\Delta_N$, entonces $S_N=S_N\left(\Delta_N^c\right)+S_N\left(\Delta_N\right)$. Probaremos que $E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^c\right)\right)^2\right\}\underset{N}{\to}0$. Con el mismo cálculo que el realizado para hallar $E(S_N^2)$ tenemos como en la ecuación (3.1) que

$$E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^c\right)\right)^2\right\}=\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}r^X(n)\frac{card\left\{(A_N\cap\Delta_N^c)\cap[(A_N\cap\Delta_N^c)+n]\right\}}{(2N+1)^d}$$

Además

$$card\left\{(A_N\cap\Delta_N^c)\cap[(A_N\cap\Delta_N^c)+n]\right\}\leqslant card\left(\Delta_N^c\right)$$

y como

$$card\left(\Delta_N^c\right)=(2N+1)^d-card\left(\Delta_N\right)=(2N+1)^d-k(N)(p(N)+1)^d,$$

con

$$k(N)=\left[\frac{2N}{p(N)+q(N)}\right]^d\geqslant\left(\frac{2N}{p(N)+q(N)}-1\right)^d$$

tenemos que

$$\frac{card\,(\Delta_N^c)}{(2N+1)^d} \leqslant 1 - \left(\frac{(2N - p(N) - q(N))(p(N)+1)}{(p(N)+q(N))(2N+1)} \right)^d \underset{N}{\rightarrow} 0$$

y entonces

$$E\left\{ \left(S_N\left(\Delta_N^c\right)\right)^2 \right\} \underset{N}{\rightarrow} 0.$$

Ahora para probar que $S_N \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N\left(0, v(A)\sigma^2(X) - \gamma(X)\right)$ basta probar que

$$S_N\left(\Delta_N\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N\left(0, v(A)\sigma^2(X) - \gamma(X)\right),$$

pues $S_N = S_N\left(\Delta_N^c\right) + S_N(\Delta_N)$, y si

$$E\left(S_N\left(\Delta_N^c\right)\right)^2 \underset{N}{\rightarrow} 0,$$

y además

$$S_N\left(\Delta_N\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N\left(0, v(A)\sigma^2(X) - \gamma(X)\right),$$

entonces

$$S_N \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N\left(0, v(A)\sigma^2(X) - \gamma(X)\right)$$

Probaremos esta afirmación primero para las variables truncadas. Definimos

$$S_N^J(C) = \frac{1}{\sqrt{(2N+1)^d}} \sum_{n \in C_N \cap A_N} X_n^J, \text{ con } X_n^J = X_n 1_{\{|X_n| \leqslant J\}} - E\left(X_n 1_{\{|X_n| \leqslant J\}}\right), \ C \subset \mathbb{Z}^d,$$

$$\left(\sigma_N^J\right)^2 = \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{ \left(S_N^J(\Delta_N^i)\right)^2 \right\},$$

Probaremos que existe J_0 tal que $\dfrac{S_N^J\left(\Delta_N\right)}{\sigma_N^J} \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,1)\ \forall J \geqslant J_0$. Para ellos veremos que

$$S_N^J\left(\Delta_N\right) = \sum_{i=1}^{k(N)} S_N^J(\Delta_N^i)$$

tiene la misma distribución asintótica que $Z_N = \sum\limits_{i=1}^{k(N)} Z_N(i)$, con $\{Z_N(i),\ 1 \leqslant i \leqslant k(N)\}$ copias independientes de $\left\{S_N^J(\Delta_N^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k(N)\right\}$. Para esto debemos probar que

$$\left| E\left(e^{itS_n^J(\Delta_N)}\right) - \prod_{m=1}^{k(N)} E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N^m)}\right) \right| \underset{N}{\rightarrow} 0.$$

Consideramos

$$\begin{aligned} z_k &= \prod_{m=1}^{k} E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N^m)}\right) E\left(\prod_{j=k+1}^{k(N)} e^{itS_N^J(\Delta_N^j)}\right) \quad k = 1, \ldots, k(N)-1 \\ z_0 &= E\left(\prod_{m=1}^{k(N)} e^{itS_N^J(\Delta_N^m)}\right) = E\left(e^{itS_n^J(\Delta_N)}\right) \end{aligned}$$

entonces

$$\left| E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N)}\right) - \prod_{m=1}^{k(N)} E e^{itS_N^J(\Delta_N^m)} \right| = |z_0 - z_{k(N)-1}| \leqslant \sum_{k=0}^{k(N)-2} |z_k - z_{k+1}|$$

Como $\left|\prod_{j=1}^{k} E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N(j))}\right)\right| \leqslant 1$ tenemos que:

$$
\begin{aligned}
&|z_k - z_{k+1}| \\
&\leqslant \left|E\left(\prod_{m=k+1}^{k(N)} e^{itS_N^J(\Delta_N^m)} - E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N^{k+1})}\right)\prod_{m=k+2}^{k(N)} e^{itS_N^J(\Delta_N^m)}\right)\right| \\
&= \left|E\left(\prod_{m=k+2}^{k(N)} e^{itS_N^J(\Delta_N^m)}\left[e^{itS_N^J(\Delta_N^{k+1})} - E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N^{k+1})}\right)\right]\right)\right| \\
&= \left|Cov\left(\prod_{m=k+2}^{k(N)} e^{itS_N^J(\Delta_N^m)}, e^{itS_N^J(\Delta_N^{k+1})} - E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N^{k+1})}\right)\right)\right|
\end{aligned}
$$

Además

$$
\prod_{m=k+2}^{k(N)} e^{itS_N^J(\Delta_N^m)} \in \sigma^X\left(\bigcup_{m=k+2}^{k(N)} \Delta_N^m\right),
$$

$$
e^{itS_N^J(\Delta_N^{k+1})} - E\left(e^{itS_N^J(\Delta_N^{k+1})}\right) \in \sigma^X\left(\Delta_N^{k+1}\right),
$$

están acotadas y

$$
d\left(\bigcup_{m=k+2}^{k(N)} \Delta_N^m, \Delta_N^{k+1}\right) = q(N),
$$

entonces usando la desigualdad de covarianza (2.12) tenemos que

$$
|z_k - z_{k+1}| \leqslant 4\alpha^X(\Pi, q(N), \infty, \infty)
$$

y luego

$$
|z_0 - z_{k(N)-1}| \leqslant k(N)4\alpha^X(\Pi, q(N), \infty, \infty) \underset{N}{\to} 0,
$$

de donde

$$
S_N^J(\Delta_N) = \sum_{i=1}^{k(N)} S_N^J(\Delta_N^i)
$$

tiene la misma distribución asintótica que

$$
Z_N = \sum_{i=1}^{k(N)} Z_N(i),
$$

donde

$$
\{Z_N(i),\ 1 \leqslant i \leqslant k(N)\}
$$

es un arreglo triangular de copias independientes de

$$
\left\{S_N^J(\Delta_N^i),\ 1 \leqslant i \leqslant k(N)\right\}.
$$

Probaremos que $\{Z_N(i),\ 1 \leqslant i \leqslant k(N)\}$ está en las hipótesis del teorema de Liapunov para arreglos triangulares y entonces $\frac{Z_N}{\sigma_N^J} \underset{N}{\overset{w}{\Rightarrow}} N(0,1)$. Tenemos que

$$
\begin{aligned}
&\{Z_N(i),\ 1 \leqslant i \leqslant k(N)\} \text{ son independientes para cada } N, \\
&k(N) \underset{N}{\to} \infty, \\
&E(Z_N(i)) = 0, \\
&\left(\sigma_N^J\right)^2 = \sum_{m=1}^{k(N)} E\left\{(Z_N(i))^2\right\} < \infty.
\end{aligned}
$$

Basta probar que existe $\delta > 0$ tal que

$$E\left(|Z_N(i)|^{2+\delta}\right) < \infty \text{ para todo } N, i,$$

$$L(N,\delta) = \frac{1}{\left(\sigma_N^J\right)^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{k(N)} E\left(|Z_N(i)|^{2+\delta}\right) \underset{N}{\rightarrow} 0.$$

$E\left(|Z_N(i)|^{2+\delta}\right) < \infty$ para todo δ pues las variables están acotadas. Para $\delta = 2$, usando la condición 8 tenemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_N L(N,2) &= \lim_N \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{(Z_N(i))^4\right\} = \lim_N \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{\left(S_N^J(\Delta_N^i)\right)^4\right\} \\
&= \lim_N \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{\left(S_N(\Delta_N^i, X^J)\right)^4\right\} \leqslant \lim_N c(J)k(N)\left(\frac{card(\Delta_N^1)}{(2N+1)^d}\right)^2 \\
&\leqslant \lim_N c(J)\left(\frac{2N}{p(N)+q(N)}\right)^d \left(\frac{p(N)+1}{2N+1}\right)^{2d} \\
&= \lim_N c(J)\left(\frac{p(N)}{2N}\right)^d,
\end{aligned}$$

de donde $L(N,2) \underset{N}{\rightarrow} 0$ y aplicando el teorema de Liapunov tenemos que

$$\frac{Z_N}{\sigma_N^J} \overset{w}{\underset{N}{\Rightarrow}} N(0,1)$$

y entonces

$$\frac{S_N^J}{\sigma_N^J} \overset{w}{\underset{N}{\Rightarrow}} N(0,1) \tag{3.2}$$

Para probar que la distribución asintótica es la misma cuando consideramos las variables sin truncar probaremos que hay convergencia en L^2, es decir que

$$\lim_J \overline{\lim_N} E\left\{\left(\frac{S_N(\Delta_N)}{\tau(X)} - \frac{S_N^J(\Delta_N)}{\sigma_N^J}\right)^2\right\} = 0, \tag{3.3}$$

donde $\tau^2(X) = v(A)\sigma^2(X) - \gamma(X)$. Para esto necesitamos calcular la suma de las varianzas de la suma en cada bloque. Probaremos

$$\sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{\left(S_N(\Delta_N^i)\right)^2\right\} \underset{N}{\rightarrow} \tau^2(X) \tag{3.4}$$

$$\lim_J \overline{\lim_N} \left|\tau(X) - \sigma_N^J\right| = 0 \tag{3.5}$$

Para probar (3.4) tenemos que

$$E\left\{(S_N(C))^2\right\} = \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} r^X(n) card\left\{(A_N \cap C) \cap (A_N \cap C + n)\right\}$$

entonces

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{\left(S_N(\Delta_N^i)\right)^2\right\} \\
&= \sum_{i=1}^{k(N)} \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} r^X(n) card\left\{(\Delta_N^i \cap A) \cap (\Delta_N^i \cap A + n)\right\} \\
&= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \sum_{i=1}^{k(N)} r^X(n) \frac{card\left\{(\Delta_N^i \cap A) \cap (\Delta_N^i \cap A + n)\right\}}{(2N+1)^d}
\end{aligned}$$

Dado n sea $N(n)$ tal que para todo $N \geqslant N(n)$ se cumpla que $q(N) \geqslant ||n||$, de donde Δ_N^i y $\Delta_N^h + n$ son disjuntos para $i \neq h$. Entonces, para todo $N \geqslant N(n)$

$$\sum_{i=1}^{k(N)} r^X(n) card \left\{ (\Delta_N^i \cap A) \cap (\Delta_N^i \cap A + n) \right\}$$
$$= r^X(n) card \left\{ (\Delta_N \cap A) \cap (\Delta_N \cap A + n) \right\}$$

Además

$$card \left\{ A_N \cap (A_N + n) \right\} - card \left(\Delta_N^c \right) \leqslant card \left\{ (\Delta_N \cap A) \cap (\Delta_N \cap A + n) \right\}$$
$$\leqslant card \left\{ A_N \cap (A_N + n) \right\}$$

y ya probamos que

$$\frac{card \left(\Delta_N^c \right)}{(2N+1)^d} \underset{N}{\rightarrow} 0,$$

entonces

$$\lim_N card \left\{ (\Delta_N \cap A) \cap (\Delta_N \cap A + n) \right\}$$
$$= \lim_N card \left\{ A_N \cap (A_N + n) \right\} = v(A) - F(n, A)$$

Luego

$$\begin{aligned} \lim_N \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{ \left(S_N(\Delta_N^i) \right)^2 \right\} &= \lim_N \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} r^X(n) v(A) - F(n, A) \\ &= \sigma^2(X) v(A) - \gamma(X). \end{aligned}$$

Para probar (3.5) probaremos que $\lim_J \overline{\lim_N} \left| \tau^2(X) - (\sigma_N^J) \right| = 0$.

$$\left| \tau^2(X) - (\sigma_N^J) \right| \leqslant \left| \tau^2(X) - \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{ \left(S_N(\Delta_N^i) \right)^2 \right\} \right| + \left| \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{ \left(S_N(\Delta_N^i) \right)^2 \right\} - \left(\sigma_N^J \right)^2 \right|$$

De (3.4)

$$\left| \tau^2(X) - \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{ \left(S_N(\Delta_N^i) \right)^2 \right\} \right| \underset{N}{\rightarrow} 0,$$

basta probar que

$$\lim_J \overline{\lim_N} \left| \sum_{i=1}^{k(N)} E\left\{ \left(S_N(\Delta_N^i) \right)^2 \right\} - \left(\sigma_N^J \right)^2 \right| = 0.$$

Definimos $(\sigma_N)^2 = \sum\limits_{i=1}^{k(N)} E\left\{ \left(S_N\left(\Delta_N^i, X \right) \right)^2 \right\}$ Tenemos que

$$\left| (\sigma_N)^2 - \left(\sigma_N^J \right)^2 \right| = \left| \sum_{i=1}^{k(N)} \left(E\left\{ \left(S_N\left(\Delta_N^i, X \right) \right)^2 - \left(S_N\left(\Delta_N^i, X^J \right) \right)^2 \right\} \right) \right|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k(N)} E\left| \left(S_N\left(\Delta_N^i, X \right) \right)^2 - \left(S_N\left(\Delta_N^i, X^J \right) \right)^2 \right|$$
$$= \sum_{i=1}^{k(N)} E\left| \left(S_N\left(\Delta_N^i, X \right) - S_N\left(\Delta_N^i, X^J \right) \right) \left(S_N\left(\Delta_N^i, X \right) + S_N\left(\Delta_N^i, X^J \right) \right) \right|$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\begin{aligned}
&E\left|\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)-S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)+S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)\right| \\
&\leqslant \sqrt{E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)-S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\}}\sqrt{E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)+S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\}} \\
&= \sqrt{E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X-X^J\right)\right)^2\right\}}\sqrt{E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)+S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\}}
\end{aligned}$$

y además

$$\begin{aligned}
&E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)+S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\} \\
&= E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)-S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)+2S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\} \\
&\leqslant 2E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)-S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\}+4E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\} \\
&= 2E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X-X^J\right)\right)^2\right\}+4E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

con $E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right\} \leqslant \sqrt{E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^4\right\}}$ De la condición 7 tenemos que

$$E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X-X^J\right)\right)^2\right\} \leqslant d(J)\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d},$$

y de la condición 8

$$E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^4\right\} \leqslant c(J)\left(\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d}\right)^2,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
&E\left|\left(S_N\left(\Delta_N^i,X\right)\right)^2-\left(S_N\left(\Delta_N^i,X^J\right)\right)^2\right| \\
&\leqslant d(J)\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d}\left(d(J)\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d}+\sqrt{c(J)}\left(\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d}\right)\right)
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\left|\left(\sigma_N\right)^2-\left(\sigma_N^J\right)^2\right| \leqslant k(N)d(J)\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d}\left(d(J)\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d}+\sqrt{c(J)}\left(\frac{card(\Delta_N^i)}{(2N+1)^d}\right)\right),$$

donde

$$k(N)=\left[\frac{2N}{p(N)+q(N)}\right]^d$$

y además

$$card(\Delta_N^i)=(p(N)+1)^d$$

y de esto se deduce que

$$\left|\left(\sigma_N\right)^2-\left(\sigma_N^J\right)^2\right| \underset{N}{\rightarrow} 0$$

Finalmente probaremos (3.3)

$$E\left\{\left(\frac{S_N(\Delta_N)}{\tau(X)}-\frac{S_N^J(\Delta_N)}{\sigma_N^J}\right)^2\right\}=\frac{1}{\left(\sigma_N^J\right)^2\tau^2(X)}E\left\{\left(\sigma_N^J S_N(\Delta_N)-\tau(X)S_N^J(\Delta_N)\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1}{\left(\sigma_N^J\right)^2\tau^2(X)}E\{\left(\sigma_N^J S_N(\Delta_N)-\sigma_N^J S_N(\Delta_N^J)+\sigma_N^J S_N(\Delta_N^J)-\tau(X)S_N^J(\Delta_N)\right)^2\}$$

$$\leqslant \frac{2}{\left(\sigma_N^J\right)^2 \tau^2(X)} \left[\left(\sigma_N^J\right)^2 E\left\{\left(S_N(\Delta_N) - S_N^J(\Delta_N)\right)^2\right\} + \left(\sigma_N^J - \tau(X)\right)^2 E\left\{\left(S_N^J(\Delta_N)\right)^2\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\left(\sigma_N^J\right)^2 \tau^2(X)} \left[\left(\sigma_N^J\right)^2 E\left\{\left(S_N\left(\Delta_N, X - X^J\right)\right)^2\right\} + \left(\sigma_N^J - \tau(X)\right)^2 E\left\{\left(S_N^J(\Delta_N)\right)^2\right\}\right]$$

y entonces de (3.5) y la condición 7 tenemos que $\lim_J \overline{\lim_N} E\left\{\left(\frac{S_N(\Delta_N)}{\tau(X)} - \frac{S_N^J(\Delta_N)}{\sigma_N^J}\right)^2\right\} = 0.$

De (3.2) y (3.3) se deduce que $\frac{S_N(\Delta_N)}{\tau(X)} \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,1)$ y entonces $\frac{S_N}{\tau(X)} \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,1)$.

■

Algunas de las hipótesis del teorema se pueden obtener de otras condiciones de dependencia débil.

Observación 3.5 Las condiciones 7 y 8 pueden obtenerse a partir de la siguiente condición de ρ-mixing

$$\rho^X(\Phi, 1, \infty, \infty) < 1,$$

donde la condición de ρ-mixing es equivalente a la condición de α-mixing

$$\alpha^X(\Phi, 1, \infty, \infty) < \frac{1}{4}$$

3.1 Conjuntos asintóticamente medibles

Las hipótesis sobre la geometría del conjunto A en el teorema anterior son imprescindibles, como lo muestra la siguiente proposición.

Proposición 3.6 *Si $A \notin M(\mathbb{Z}^d)$ entonces existe un campo X gaussiano, m-dependiente y estacionario tal que $S_N(A, X)$ no tiene límite débil.*

Demostración. Si $A \notin M(\mathbb{Z}^d)$ existe $n^* \in \mathbb{N}$ tal que $F_N(n^*, A)$ no tiene límite, es decir que existen dos subsucesiones $\left\{N_m^1 : m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{N}$, $\left\{N_m^2 : m \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{N}$ que cumplen que $F_{N_m^1}(n^*, A) \underset{m}{\to} L_1$ y $F_{N_m^2}(n^*, A) \underset{m}{\to} L_2$ con $L_1 \neq L_2$. Sea X gaussiano estacionario tal que $r^X(0) = 1$ y $r^X(n) = \left\{\begin{array}{ll} \rho & \text{si } n = n^*,\ n = -n^* \\ 0 & \text{si } n \neq n^* \end{array}\right.$, entonces X es $||n^*||$-dependiente. De (3.1) tenemos que

$$E\left\{(S_N(A, X))^2\right\} = \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} r^X(n) card\left\{A_N \cap (A_N + n)\right\}$$

y además, si existe el límite de $F_N(n, A)$,

$$\frac{card\left\{A_N \cap (A_N + n)\right\}}{(2N+1)^d} \underset{N}{\to} v(A) - \lim_N F_N(n, A)$$

Entonces, para todo $N \geqslant ||n^*||$

$$\begin{aligned} E\left\{(S_N(A, X))^2\right\} &= \frac{1}{(2N+1)^d} \left(card(A_N) + \rho card\left\{A_N \cap (A_N + n^*)\right\}\right. \\ &\quad \left. + \rho card\left\{A_N \cap (A_N + n^*)\right\}\right) \end{aligned}$$

Pero $E\left\{\left(S_{N_m^1}(A, X)\right)^2\right\} \underset{m}{\to} v(A)(1+\rho) - L_1\rho$ y $E\left\{\left(S_{N_m^2}(A, X)\right)^2\right\} \underset{m}{\to} v(A)(1+\rho) - L_2\rho$ y por lo tanto no existe el límite débil de $S_N(A, X)$.

■

4 Teorema central del límite para $\mathbf{X} = \varphi(\xi, \mathbf{Y})$

En esta sección estudiaremos campos de la forma $X = \varphi(\xi, Y)$, donde ξ e Y independientes y φ tiene ciertas propiedades de regularidad. Supongamos que el campo ξ es estacionario, centrado, y cumple que para todo m y para todo $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ vale un TCL para $(\varphi(\xi, y_1), \ldots, \varphi(\xi, y_m))$, pero el campo Y solamente cumple la ley fuerte de los grandes números (LFGN) para $(Y_m, Y_{m-n})_{m \in \mathbb{Z}^d}$ y para cualquier $n \in \mathbb{Z}^d$. Bajo estas hipótesis se puede probar un TCL para el campo X considerando los conjuntos de nivel de Y. Veremos como deben ser los conjuntos para que se cumpla lo anterior, para eso introduciremos la noción de familia asintóticamente medible, que es la generalización de los conjuntos asintóticamente medibles vistos en la sección anterior.

Definición 4.1 Diremos que la familia $\left\{A^i : i = 1, \ldots, k\right\}$ de subconjuntos de $\mathbb{Z}^d$ es una *familia asintóticamente medible* si para para cada i el conjuntos $A^i \in G(\mathbb{Z}^d)$ y para cada $n \in \mathbb{Z}^d$ existe $\lim\limits_N F_N\left(n, A^i, A^j\right) = F\left(n, A^i, A^j\right)$, siendo $F_N\left(n, A^i, A^j\right) = \dfrac{card\left\{A_N^i \cap \left(n + A_N^j\right)\right\}}{(2N+1)^d}$.

Definición 4.2 Sea $X = \left(X^1, X^2, \ldots, X^k\right)$ un campo en $\mathbb{R}^k$. Llamaremos S a la clase de campos centrados, estacionarios y con segundos momentos finitos que cumplen las siguientes condiciones:

1. $$\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left|E\left(X_0^i X_n^j\right)\right| < \infty, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} E\left(X_0^i X_n^i\right) > 0 \tag{4.1}$$

2. Existe $b(J)$ tal que $\lim\limits_J b(J) = 0$ y para cada $A \subset \mathbb{Z}^d$ se cumple que
$$E\left\{\left(S_N\left(A, X - X^J\right)\right)^2\right\} \leqslant b(J)\frac{card(A_N)}{(2N+1)^d}. \tag{4.2}$$

3. Existe $c(X, J)$ tal que para todo $N \geqslant 1$, $A \subset [-N, N]^d$, $i = 1, \ldots, k$ se cumple que
$$E\left\{\left(S_N\left(A, X^{iJ}\right)\right)^4\right\} \leqslant c(X, J)\left(\frac{card(A_N)}{(2N+1)^d}\right)^2 \tag{4.3}$$

4. Existe $d(J)$ tal que $\lim\limits_J d(J) = 0$ y una función real acotada $g(\lambda)$, con $\lambda \in \mathbb{R}^k$ tal que $\forall A, B \in \mathbb{Z}^d$ con $d(A, B) \geqslant (J)$ se cumple que
$$\left|Cov\left(e^{iS_N(A, \langle\lambda, X\rangle)}, e^{iS_N(B, \langle\lambda, X\rangle)}\right)\right| \leqslant d(J)g(\lambda) \tag{4.4}$$

Proposición 4.3 *Sea X un campo de la clase S, se cumple que:*

1. *Si $\left\{A^1, \ldots, A^k\right\}$ es una familia asintóticamente medible, entonces*
$$\left(S_N\left(A^1, X^1\right), \ldots, S_N\left(A^k, X^k\right)\right) \xrightarrow[n]{w} N_k(0, \Sigma),$$
donde $\Sigma(i,j) = \sum\limits_{n \in \mathbb{Z}^d} F\left(n, A^i, A^j\right) E\left(X_0^i X_n^j\right)$ y $N_k(0, \Sigma)$ es una normal en $\mathbb{R}^k$ con matriz de covarianza Σ.

2. *Si $\left\{A^1, \ldots, A^k\right\}$ no es una familia asintóticamente medible, entonces existe un campo X m-dependiente tal que S_N no tiene límite débil.*

Observación 4.4 1. Las hipótesis son análogas a las del teorema 3.4 para campos reales, la ecuación (4.4) se obtiene en el teorema 3.4 de la hipótesis de mixing, usando las desigualdades de covarianza. Las ecuaciones (4.2) y (4.3) se pueden obtener de condiciones de ρ-mixing.

2. La demostración de la proposición 4.3 es análoga a la del teorema 3.4 considerando para cada $\lambda \in \mathbb{R}^k$ $\langle (S_N (A^1, X^1), \lambda\rangle = \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{i=1}^{k} \sum_{n \in A_n^i} \lambda_i X_n^i$ y probando que es asintóticamente $N(0, \sigma^2)$, con $\sigma^2 = \lambda^t \Sigma \lambda$.

En lo que sigue trataremos de aplicar la proposición 4.3 al campo $X = \varphi(\xi, Y)$, tomando como familia asintóticamente medible a los conjuntos de nivel del campo Y. Presentamos algunas hipótesis sobre el campo Y que garantizan que los conjuntos de nivel son una familia asintóticamente medible.

Definición 4.5 Decimos que el campo real $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ es *asintóticamente medible* si existe una medida de probabilidad aleatoria R_0 en $\mathcal{B}$, siendo $\mathcal{B}$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$ tal que

$$\frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{m \in [-N,N]^d} 1_{\{Y_m \in B\}} \xrightarrow[N]{c.s.} R_0(B) \tag{4.5}$$

y para cada $n \in \mathbb{Z}^d - \{0\}$ existe una medida de probabilidad aleatoria R_n en $\mathcal{B}_2$, siendo $\mathcal{B}_2$ la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}^2$, tal que $B, C \in \mathcal{B}$

$$\frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{m \in [-N,N]^d} 1_{\{Y_m \in B\}} 1_{\{Y_{m-n} \in C\}} \xrightarrow[N]{c.s.} R_n(B \times C) \tag{4.6}$$

Si la medida límite no es aleatoria decimos que el campo Y es *regular*.

Observación 4.6 1. Observemos que las medidas R_n y R_0 dependen solamente de la trayectoria de Y, es decir que si consideramos y por lo tanto las notaremos $R_n(Y)$, $R_0(Y)$.

2. La ecuación (4.6) se puede obtener de hipótesis de dependencia débil para Y. Cualquier hipótesis que garantice que se puede aplicar la ley fuerte de los grandes números a $Z_m = 1_B(Y_m) 1_C(Y_{m-n}) - P(Y_m \in B, Y_{m-n} \in C)$ y que existe el límite de

$$\frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{m \in [-N,N]^d} P(Y_m \in B, Y_{m-n} \in C)$$

cuando $N \to \infty$ implican la ecuación (4.6), por ejemplo si el proceso Y es estacionario y ergódico.

Observación 4.7 Dado $h \in \mathbb{N}$ tenemos que el límite de

$$\frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{m \in [-N,N]^d} 1_{\{Y_m \in B\}} 1_{\{Y_{m-n} \in C\}}$$

cuando $N \to \infty$ no depende de Y_t para $||t|| \leqslant h$, pues el límite no depende de una cantidad finita de términos. Entonces la medida límite es medible respecto de la σ-álgebra $\sigma_\infty^Y = \bigcap_{h=1}^{\infty} \sigma(Y_t : ||t|| \geqslant h)$. Si σ_∞^Y es trivial entonces Y es regular.

En lo que sigue probaremos que los conjuntos de nivel de campos asintóticamente medibles son una familia asintóticamente medible.

Lema 4.8 *Sea un campo $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ asintóticamente medible y $B^1, \ldots, B^k$ borelianos disjuntos en $\mathbb{R}$ y $A^i = \{n \in \mathbb{Z}^d : Y_n \in B^i\}$ para todo $i = 1, \ldots, k$. Entonces, condicionado a Y la familia $\{A^1, \ldots, A^k\}$ es una familia asintóticamente medible, con $F(n, A^i, A^j) = R_n(Y)(B^i \times B^j)$ y $F(0, A^i, A^j) = R_0(Y)(B^i)\delta_{ij}$, donde $\delta_{ij} = 1$ para $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ para $i \neq j$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, entonces $F_N\left(n, A^i, A^j\right) = \dfrac{card\left\{A_N^i \cap \left(n + A_N^j\right)\right\}}{(2N+1)^d}$. Por otro lado $m \in A^i \cap \left(n + A^j\right)$ si y sólo si $Y_m \in B^i$, siendo $m = k + n$ con $k \in A^j$ y además $Y_{m-n} \in B^j$. Entonces

$$F_N\left(n, A^i, A^j\right) = \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{m \in [-N,N]^d \cap (n + [-N,N]^d)} 1_{\{Y_m \in B^i\}} 1_{\{Y_{m-n} \in B^j\}}$$

Como $card\left([-N,N]^d\right) - card\left([-N,N]^d \cap \left(n + [-N,N]^d\right)\right) \leqslant c(d,n)N^{d-1}$, donde $c(d,n)$ es una constante que depende de d y n tenemos que

$$F_N\left(n, A^i, A^j\right) - \sum_{m \in [-N,N]^d} \frac{1}{(2N+1)^d} 1_{\{Y_m \in B^i\}} 1_{\{Y_{m-n} \in B^j\}} \xrightarrow[N]{c.s} 0$$

y de la ecuación (4.6)

$$F_N(Y)\left(n, A^i, A^j\right) \xrightarrow[N]{c.s.} R_n\left(B^i \times B^j\right)$$

Además $F_N\left(0, A^i, A^j\right) = \dfrac{1}{(2N+1)^d} \displaystyle\sum_{m \in [-N,N]^d} 1_{\{Y_m \in B^i\}} 1_{\{Y_m \in B^j\}}$ y usando la ecuación (4.5) tenemos que $F_N\left(0, A^i, A^j\right) \overset{c.s.}{\underset{N}{\rightarrow}} R_0(Y)\left(B^i\right)\delta_{ij}$

■

Para probar un TCL para el campo X también asumiremos que para todo m y para todo $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ vale un TCL para $(\varphi(\xi, y_1), \ldots, \varphi(\xi, y_m))$. Las siguientes definiciones consideran estas propiedades del campo X.

Definición 4.9 Una familia de campos aleatorios centrados, estacionarios, $\{X^y : y \in \mathbb{R}\}$ es *totalmente pre-gaussiana* si:

1. Para cada par (y, z) $\sum_{n \in \mathbb{Z}^d} E\left(X_0^y X_n^z\right) < \infty$.

2. Dadas $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ por

$$f(y,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \left|E\left(X_0^y X_n^z\right)\right|$$
$$g(y,z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} E\left(X_0^y X_n^z\right)$$

   f es acotada y g es continua en $\mathbb{R}^2$.

3. Para cada $k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$, para cada familia asintóticamente medible $\{A^1, \ldots, A^k\}$ y para cada $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{R}^k$ se cumple que

$$\left(S_N\left(A^1, X^{y_1}\right), \ldots, S_N\left(A^k, X^{y_k}\right)\right) \xRightarrow[N]{w} N_k(0, \Sigma)$$

   con $\Sigma(i,j) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} E\left(X_0^{y_i} X_n^{y_j}\right) F\left(n, A^i, A^j\right)$.

Definición 4.10 Un campo $X = (X_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ es *I-descomponible* si

1. Existen dos campos $\xi = (\xi_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$, $Y = (Y_n)_{n \in \mathbb{Z}^d}$ independientes y una función continua $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que ξ es estacionario, Y es asintóticamente medible, y $X_n = \varphi(\xi_n, Y_n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}^d$.

2. $E(\varphi(\xi_0, y)) = 0$ para cada $y \in \mathbb{R}$.

3. Si $X^y = (X^y_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ con $X^y_n = \varphi(\xi_n, y)$, entonces la familia $\{X^y : y \in \mathbb{R}\}$ es totalmente pre-gaussiana.

Probaremos que cuando el campo es $X = \varphi(\xi, Y)$ es I-descomponible la distribución asintótica de $S_N(X) = \frac{1}{\sqrt{(2N+1)^d}} \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^d} X_n$ es gaussiana en el caso de que el campo Y es regular, y es una mezcla de gaussianas cuando el campo Y no es regular.

Lema 4.11 *Sea E tal que $P(Y \in E) = 1$. Entonces se cumple que*

1. *Si para todo $y \in E$ $(S_N(X)|Y = y) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2(y))$ entonces*

$$S_N(X) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} G$$

donde G es una mezcla de gaussianas, de modo que para todo A tal que $P(G \in \partial A) = 0$

$$P(G \in A) = \int\limits_E P(N(0, \sigma^2(y)) \in A) dP^Y(y)$$

2. *Si existe σ^2 tal que $\sigma^2(Y) = \sigma^2$ c.s. entonces*

$$S_N(X) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2)$$

Demostración.

1. Tenemos que $(S_N(X)|Y = y) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2(y))$, luego

$$P(S_N(X) \in A) = \int\limits_E P(S_N(X) \in A|Y = y) dP^Y(y)$$

Si consideramos A tal que $P(N(0, \sigma^2(y)) \in \partial A) = 0$ $\forall y \in E$ tenemos que $P(S_N(X) \in A|Y = y) \underset{N}{\to} P(N(0, \sigma^2(y)) \in A)$ y por el teorema de convergencia dominada

$$\int\limits_E P(S_N(X) \in A|Y = y) dP^Y(y) \underset{N}{\to} \int\limits_E P(N(0, \sigma^2(y)) \in A) dP^Y(y)$$

2. Si además $\sigma^2(y) = \sigma^2$ *c.s.* tenemos que

$$\int\limits_E P(N(0, \sigma^2(y)) \in A) dP^Y(y) = P(N(0, \sigma^2) \in A) \int\limits_E dP^Y(y) = P(N(0, \sigma^2) \in A)$$

■

Para la demostración del TCL consideraremos primero el caso en el que el campo Y toma una cantidad finita de valores y luego el caso general.

Proposición 4.12 *Sea X un campo I-descomponible de modo que Y_n toma valores en un conjunto finito $\{y_1, \ldots, y_k\}$ para todo $n \in \mathbb{Z}^d$. Entonces para cada $y \in E = \{y_1, \ldots, y_k\}^{\mathbb{Z}^d}$ se cumple que:*

$$(S_N(X)|Y = y) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2(y))$$

con

$$\sigma^2(y) = \sum_{i,j=1}^{k} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d-\{0\}} \Gamma(n, y_i, y_j) R_n(Y^{-1}(y)) (\{y_i\} \times \{y_j\}) + \sum_{i=1}^{k} \Gamma(0, y_i, y_i) R_0(Y^{-1}(y)) (\{y_i\})$$

donde definimos $\Gamma(n, y, z) = E(\varphi(\xi_0, y)\varphi(\xi_n, z))$. Si además Y es regular tenemos que $S_N \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2)$

Demostración. Definimos

$$S_N^i = \frac{1}{\sqrt{(2N+1)^d}} \sum_{n\in[-N,N]^d} \varphi(\xi_n, y_i) 1_{\{Y_n = y_i\}}$$

y $A^i = \{n \in \mathbb{Z}^d : Y_n = y_i\}$. Entonces $S_N(X) = \sum_{i=1}^{k} S_N^i$. Por el lema 4.8 $\{A^1, \ldots, A^k\}$ es una familia asintóticamente medible, con $F\left(n, A^i, A^j\right) = R_n\left(\{y_i\} \times \{y_j\}\right)$, y $F\left(0, A^i, A^j\right) = \delta_{ij} R_0(\{y_i\})$. Dado Y tenemos que

$$\sum_{n\in[-N,N]^d} \varphi(\xi_n, y_i) 1_{\{Y_n=y_i\}} = \sum_{n\in A_N^i} \varphi(\xi_n, Y_n) = \sum_{n\in A_N^i} X_n$$

y entonces, condicionadas a Y, son iguales las distribuciones de los vectores $\left(S_N^1, \ldots, S_N^k\right)$ y $\left(S_N\left(A^1, X^1\right), \ldots, S_N\left(A^k, X^k\right)\right)$. Como X es I-descomponible de las definiciones 4.10 y 4.9

$$\left(\left(S_N^1, \ldots, S_N^k\right) \mid Y = y\right) \xrightarrow[N]{w} N_k(0, \Sigma(y))$$

para cada $y \in E = \{y_1, \ldots,_k\}^{\mathbb{Z}^d}$ con

$$\begin{aligned}
\Sigma(i,j) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} E\left(X_0^{y_i} X_n^{y_j}\right) F\left(n, A^i, A^j\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \Gamma(n, y_i, y_j) R_n\left(\{y_i\} \times \{y_j\}\right) \\
\Sigma(i,i) &= \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} E\left(X_0^{y_i} X_n^{y_i}\right) F\left(n, A^i, A^i\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \Gamma(n, y_i, y_i) R_n\left(\{y_i\} \times \{y_i\}\right) \\
&\qquad + \Gamma(0, y_i, y_i) R_0(\{y_i\})
\end{aligned}$$

Como $S_N(X) = \sum_{i=1}^{k} S_N^i$ del lema 4.11 se deduce la tesis.

■

En el caso en que el campo Y no tiene un recorrido finito haremos la demostración análoga a la de la proposición anterior aproximándolo por campos con recorrido finito.

Definición 4.13 Sea X un campo que cumple la condición 1 de la definición 4.10. Decimos que X es *alcanzable* si

1. Para cada $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ existe $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(x, y)$ y es continua como función de y.

2. Para cada $(w, z) \in \mathbb{R}^2$ $\eta(w, z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left| E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}(Y_0, w) \frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi_n, z)\right)\right| < \infty$ y además η es acotada en subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^2$.

Teorema 4.14 Sea X un campo I-descomponible, con Y regular y alcanzable. Entonces

$$S_N(X) \xrightarrow[N]{w} N(0, \sigma^2)$$

donde $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\varphi(\xi_0, x)^2\right) dR_0(x) + \sum_{n\in\mathbb{Z}^d - \{0\}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E\left(\varphi(\xi_0, x)\varphi(\xi_n, y)\right) dR_n(x, y)$

Demostración. Para cada par de enteros positivos J, L se define un campo $Y(J, L)$ de la siguiente manera:

$$Y_n(J, L) = \begin{cases} \frac{i}{2^L} & \text{si } Y_n \in \left[\frac{i}{2^L}, \frac{i+1}{2^L}\right), \ -J2^L \leqslant i \leqslant J2^L - 1 \\ -J & \text{si } Y_n < -J \\ J & \text{si } Y_n \geqslant J \end{cases}$$

Con J, L fijos como el campo Y es regular también lo es el campo $Y(J,L)$ y se puede aplicar la proposición 4.12 al campo I-descomponible $X(J,L)$ definido como $X_n(J,L) = \varphi(\xi_n, Y_n(J,L))$. Se obtiene que $S_N(X(J,L)) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N\left(0, \sigma^2(J,L)\right)$, donde

$$\sigma^2(J,L) = A(J,L) + B(J,L) + C(J,L) + D(J,L) + E(J),$$

siendo

$$A(J,L) = \sum_{i,j=-J2^L}^{i,j=J2^L-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \Gamma\left(n, \frac{i}{2^L}, \frac{j}{2^L}\right) R_n\left(\left[\frac{i}{2^L}, \frac{i+1}{2^L}\right) \times \left[\frac{j}{2^L}, \frac{j+1}{2^L}\right)\right),$$

$$\begin{aligned} B(J,L) = 2 &\sum_{i=-J2^L}^{i=J2^L-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \Gamma\left(n, \frac{i}{2^L}, -J\right) R_n\left(\left[\frac{i}{2^L}, \frac{i+1}{2^L}\right) \times (-\infty, -J)\right) \\ &+2 \sum_{i=-J2^L}^{i=J2^L-1} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \Gamma\left(n, \frac{i}{2^L}, J\right) R_n\left(\left[\frac{i}{2^L}, \frac{i+1}{2^L}\right) \times [J, \infty)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(J) = &\sum_{n\in\mathbb{Z}^d-\{0\}} \Gamma(n, -J, -J) R_n\left((-\infty, -J) \times (-\infty, -J)\right) \\ &+ \sum_{n\in\mathbb{Z}^d-\{0\}} \Gamma(n, J, J) R_n\left([J, \infty) \times [J, \infty)\right) \\ &+2 \sum_{n\in\mathbb{Z}^d-\{0\}} \Gamma(n, -J, J) R_n\left((-\infty, -J) \times [J, \infty)\right), \end{aligned}$$

$$D(J,L) = \sum_{i=-J2^L}^{i=J2^L-1} \Gamma\left(0, \frac{i}{2^L}, \frac{i}{2^L}\right) R_0\left(\left[\frac{i}{2^L}, \frac{i+1}{2^L}\right)\right),$$

$$E(J) = \Gamma(0, J, J) R_0\left([J, \infty)\right) + \Gamma(0, -J, -J) R_0\left((-\infty, -J)\right)$$

De la definición 4.9 tenemos que las funciones

$$f(y,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \left|E\left(X_0^y X_n^z\right)\right| = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} |\Gamma(n,y,z)|$$
$$g(y,z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} E\left(X_0^y X_n^z\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \Gamma(n,y,z)$$

son tales que f es acotada y g es continua en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto, usando el teorema de convergencia dominada,

$$A(J,L) \underset{L}{\to} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{-J}^{J} \int_{-J}^{J} \Gamma(n,x,y) dR_n(x,y) = A(J),$$

$$B(J,L) \underset{L}{\to} 2 \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{-J}^{J} \int_{-\infty}^{-J} \Gamma(n,x,-J) dR_n(x,y)$$

$$+2 \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{-J}^{J} \int_{J}^{\infty} \Gamma(n,x,J) dR_n(x,y) = B(J),$$

$$D(J,L) \underset{L}{\to} \int_{-J}^{J} \Gamma(0,x,x) dR_0(x) = D(J)$$

Entonces

$$\lim_L \sigma^2(J,L) = A(J) + B(J) + C(J) + D(J) + E(J)$$

Usando nuevamente la condición 2 de la definición 4.9 se obtiene que

$$A(J) \underset{J}{\rightarrow} \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(n,x,y) dR_n(x,y),$$

$$D(J) \underset{J}{\rightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(0,x,x) dR_0(x)$$

$$B(J) \underset{J}{\rightarrow} 0,\ C(J) \underset{J}{\rightarrow} 0,\ E(J) \underset{J}{\rightarrow} 0$$

De las ecuaciones anteriores se concluye

$$\lim_J \lim_L \sigma^2(J,L) = \sigma^2 \tag{4.7}$$

Para completar la prueba veremos que $E\left\{[S_N(X(J,L)) - S_N(X)]^2\right\} \underset{N}{\rightarrow} 0$. Se definen

$$\underline{S_N}(J) = \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n\in[-N,N]^d} (X_n - X_n(J,L))\, 1_{\{|Y_n|\geqslant J\}},$$

$$\overline{S_N}(J,L) \frac{1}{(2N+1)^2} \sum_{n\in[-N,N]^d} (X_n - X_n(J,L))\, 1_{\{|Y_n|< J\}},$$

entonces tenemos que $S_N(X) - S_N(X(J,L)) = \underline{S_N}(J) + \overline{S_N}(J,L)$, de donde

$$E\left\{[S_N(X(J,L)) - S_N(X)]^2\right\} \leqslant 2\left(E\left\{\left[\underline{S_N}(J)\right]^2\right\} + E\left\{\left[\overline{S_N}(J,L)\right]^2\right\}\right) \tag{4.8}$$

Probaremos que ambos términos tienden a cero. Definiendo

$$\Delta(n,m,J,L) = [\varphi(\xi_n, Y_n) - \varphi(\xi_n, Y_n(J,L))]\,[\varphi(\xi_m, Y_m) - \varphi(\xi_m, Y_m(J,L))]\, 1_{\{|Y_n|<J, |Y_m|<J\}}$$

tenemos que

$$E\left\{\left[\overline{S_N}(J,L)\right]^2\right\} = \frac{1}{(2N+1)^d} \sum_{n,m\in[-N,N]^d} E\left\{\Delta(n,m,J,L)\right\}$$

Sean además $I_i = I_i(J,L) = \left[\frac{i}{2^L}, \frac{i+1}{2^L}\right)$, $p_i = p_i(J,L) = \frac{i}{2^L}$, para $-J2^L \leqslant i \leqslant J2^L - 1$. Usando que los campos ξ e Y son independientes y que ξ es estacionario, tomando esperanza condicional respecto de (Y_n, Y_m) se obtiene que

$$E\left\{\Delta(n,m,J,L)\right\} = E\left(E\left\{\Delta(n,m,J,L)|(Y_n,Y_m)\right\}\right)$$

$$= \sum_{i,j=-J2^L}^{i,j=J2^L-1} \int_{I_i}\int_{I_j} E\left\{[\varphi(\xi_n,x) - \varphi(\xi_n,p_i)][\varphi(\xi_m,y) - \varphi(\xi_m,p_j)]\right\} dP^{(Y_n,Y_m)}(x,y)$$

$$= \sum_{i,j=-J2^L}^{i,j=J2^L-1} \int_{I_i}\int_{I_j} E\left\{[\varphi(\xi_0,x) - \varphi(\xi_0,p_i)][\varphi(\xi_{m-n},y) - \varphi(\xi_{m-n},p_j)]\right\} dP^{(Y_n,Y_m)}(x,y)$$

Para cada $I, I' \subset \mathbb{R}$ y para cada $k \in \mathbb{Z}^d$ definimos

$$\delta(I,I',k) = \sup_{x\in I, y\in I'} \left|E\left\{[\varphi(\xi_0,x) - \varphi(p_i)][\varphi(\xi_k,y) - \varphi(\xi_k,p_j)]\right\}\right|$$

Entonces

$$E\left\{\Delta(n,m,J,L)\right\} \leqslant \sum_{i,j=-J2^L}^{i,j=J2^L-1} \delta(I_i,I_j,m-n)P^{(Y_n,Y_m)}(I_i\times I_J) \tag{4.9}$$

y, como el campo X es alcanzable, de la condición 1 de la definición 4.13 se tiene, usando el teorema de valor medio que

$$\delta(I_i,I_j,k) \leqslant \left|E\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi_0,c_i(x))\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi_k,c_j(x))\right\}\right|\left(\frac{1}{2^L}\right)^2 \tag{4.10}$$

para $-J2^L \leqslant i \leqslant J2^L-1$, donde $c_i(x)$ es un punto entre x y p_i. De (4.9) y (4.10) tenemos que

$$E\left\{\left(\overline{S_N}(J,L)\right)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{1}{2^L}\right)^2\frac{1}{(2N+1)^d}\sum_{i,j=-J2^L}^{i,j=J2^L-1}\sum_{n,m}\left|E\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi_0,c_i(x))\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi_{m-n},c_j(x))\right\}\right|P^{(Y_n,Y_m)}(I_i\times I_j)$$

con $n,m\in[-N,N]^d$. Con el cambio $u=m-n$ obtenemos

$$E\left\{\left(\overline{S_N}(J,L)\right)^2\right\} \leqslant \frac{1}{4^L}\sum_{i,j=-J2^L}^{i,j=J2^L-1}\sum_{||u|\leqslant 2N|}\left|E\left\{\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi_0,c_i(x))\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\xi_u,c_j(x))\right\}\right|$$
$$\times\frac{1}{(2N+1)^d}\sum_{n\in[-N,N]^d}P^{(Y_n,Y_{n+u})}(I_i\times I_j)$$

y usando la condición 2 de la definición 4.13 tenemos que

$$E\left\{\left(\overline{S_N}(J,L)\right)^2\right\} \leqslant \frac{C(J)}{4^L},$$

de donde

$$\lim_J\lim_L\overline{\lim_N}\,E\left\{\left(\overline{S_N}(J,L)\right)^2\right\}=0 \tag{4.11}$$

De manera análoga, considerando $b_J(x)=sg(x)J\ \forall x\in\mathbb{R}$ tenemos

$$E\left\{\left(\underline{S_N}(J)\right)^2\right\}=\frac{1}{(2N+1)^d}\sum_{n,m\in[-N,N]^d}\int_{[-J,J]^c}\int_{[-J,J]^c}E\left\{[\varphi(\xi_0,x)-\varphi(\xi_0,b_j(x))]\right.$$
$$\left.\times\,[\varphi(\xi_{m-n},y)-\varphi(\xi_{m-n},b_j(y))]\right\}dP^{(Y_n,Y_m)}(x,y)$$
$$\leqslant\frac{1}{(2N+1)^d}\sum_{n,m\in[-N,N]^d}\kappa(m-n,J)P^{(Y_n,Y_m)}\left([-J,J]^c\times[-J,J]^c\right),$$

siendo

$$\kappa(n,J)=\sup_{|x|\geqslant J,|y|\geqslant J}\left|E\left\{[\varphi(\xi_0,x)-\varphi(x_0,b_J(x))][\varphi(\xi_n,y)-\varphi(\xi_n,b_J(y))]\right\}\right|$$

De la condición 2 de la definición 4.9 tenemos que $\overline{\lim_J}\sum_{n\in\mathbb{Z}^d}\kappa(n,J)<\infty$. Luego

$$E\left\{\left(\underline{S_N}(J)\right)^2\right\}\leqslant\sum_{||u||\leqslant 2N}\frac{1}{(2N+1)^d}\kappa(u,J)\sum_{n\in[-N,N]^d}P^{(Y_n,Y_{n+u})}\left([-J,J]^c\times[-J,J]^c\right) \tag{4.12}$$

Como Y es un campo regular, de las condiciones de la definición 4.5 y de (4.12) tenemos que

$$\lim_J\overline{\lim_N}\,E\left\{\left[\underline{S_N}(J)\right]^2\right\}=0 \tag{4.13}$$

Luego, de (4.7), (4.8), (4.11) y (4.13) se deduce la tesis.

$\blacksquare$

Observación 4.15 *Si el campo Y no es regular, por el lema 4.11 se obtiene que el límite es una mezcla de gaussianas.*

5 Estimación de anchos de banda efectivos

5.1 Motivación

En esta sección se introducen algunas ideas sobre el ancho de banda efectivo y se aplican los resultados anteriores para la estimación de dicha cantidad. Supongamos que en una red se tiene un enrutador que recibe tráfico de diferentes fuentes, tiene determinada capacidad para procesar el trabajo que llega y un buffer donde se puede almacenar el trabajo que aún no ha sido procesado. Un problema consiste en saber cuál es la cantidad de recursos necesaria para procesar todo el trabajo que llega. Supongamos que el trabajo acumulado hasta tiempo t es un proceso $(\tilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$ y se define el ancho de banda efectivo como

$$\alpha(s,t) = \frac{1}{st}\log\left(E\left(e^{s\tilde{X}_t}\right)\right),\ s>0,\ t>0$$

Mediante esta fórmula, en un régimen de 'muchas fuentes' (es decir cuando el enrutador recibe simultáneamente trabajo de muchas fuentes diferentes) se puede calcular, usando un principio de grandes desviaciones, la probabilidad de pérdida de datos en función de $\alpha(s,t)$. En efecto, si se tienen procesos $(\tilde{X}_t^i)_{t\geqslant 0},\ i\in\mathbb{N}$ independientes y cada $\tilde{X}_t^i$ con la distribución de $\tilde{X}_t$ tenemos que el ancho de banda correspondiente al trabajo $\tilde{X}_t(m) = \sum_{i=1}^{m}\tilde{X}_t^i$ proveniente de m fuentes es $\alpha(s,t) = \sum_{i=1}^{m}\alpha^i(s,t)$, donde $\alpha^i(s,t)$ es el ancho de banda efectivo correspondiente al proceso $(\tilde{X}_t^i)_{t\geqslant 0}$. Si c es la capacidad por fuente y b es el tamaño del buffer por fuente en el enrutador consideramos $W_t^m = \sum_{i=1}^{m}(\tilde{X}_t^i - ct)^+$ y definimos el tamaño de la cola por $Q_m = \sup_{t\geqslant 0} W_t^m$. Entonces tenemos que la probabilidad de pérdida es $P(Q_m > mb)$ y se cumple la probabilidad de pérdida 'por fuente' cumple que

$$-\lim_m \frac{1}{m}\log\left(P(Q_m > mb)\right) = \inf_{t\geqslant 0}\sup_{s\geqslant 0}\left\{s(b+ct) - \log E(e^{s\tilde{X}_t})\right\}$$

Por lo tanto para estimar la probabilidad de pérdida es necesario estimar $\alpha(s,t)$. Para eso consideraremos un traza de tráfico de largo Nt y el estimador

$$\alpha_N(s,t) = \frac{1}{st}\log\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_{nt}-\tilde{X}_{(n-1)t}\right)}\right)$$

Nuestro problema consiste ahora en ver cuándo se puede obtener un TCL que permita la construcción de intervalos de confianza para la estimación de $\alpha(s,t)$. En el caso en que los incrementos son independientes se puede aplicar el TCL para variables independientes. En lo que sigue se presentan los resultados en casos de dependencia débil que se obtienen de los resultados de las secciones anteriores.

5.2 Estimación

Aplicando directamente el teorema 3.4 se obtiene el siguiente resultado para un proceso α-mixing.

Proposición 5.1 *Sea $\tilde{X} = (\tilde{X}_t)_{t\geqslant 0}$ un proceso tal que sus incrementos constituyen un proceso estacionario y débilmente dependiente de modo que el proceso $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $X_n = e^{s(\tilde{X}_{nt}-\tilde{X}_{(n-1)t})}$ está en las hipótesis del teorema 3.4. Entonces*

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_{nt}-\tilde{X}_{(n-1)t}\right)} - E\left(e^{s\tilde{X}_t}\right)\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,\sigma^2)$$

Para obtener un intervalo de confianza para $\alpha(s,t)$ usaremos el siguiente lema, que presentamos aquí sin demostración.

Lema 5.2 *Si $\sqrt{N}(Z_n - \mu) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,\sigma^2)$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^2 en un entorno de μ entonces*

$$\sqrt{N}(g(Z_n) - g(\mu)) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,(g'(\mu))^2\sigma^2)$$

Corolario 5.3 *En las hipótesis de la proposición 5.1 se obtiene el siguiente intervalo de confianza asintótico al nivel ε para $\alpha(s,t)$:*

$$\left[\frac{1}{st}\log\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_{nt}-\tilde{X}_{(n-1)t}\right)}\right) \pm \frac{z_{\frac{\varepsilon}{2}}}{\sqrt{N}}\tilde{\sigma}_N\right],$$

donde $z_{\frac{\varepsilon}{2}}$ es tal que $P(N(0,1) \geqslant z_{\frac{\varepsilon}{2}}) = \frac{\varepsilon}{2}$, y $\tilde{\sigma}_N$ es un estimador consistente de $\tilde{\sigma}^2 = \left(\frac{\sigma}{ste^{st\alpha(s,t)}}\right)^2$

Demostración. Sea $Z_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_{nt}-\tilde{X}_{(n-1)t}\right)}$. De la proposición 5.1

$$\sqrt{N}\left(Z_N - E\left(e^{s\tilde{X}_t}\right)\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,\sigma^2)$$

Sea $\alpha_N(s,t) = \frac{1}{st}\log(Z_N)$, entonces por el lema 5.2

$$\sqrt{N}\left(\alpha_N(s,t) - \frac{1}{st}\log E\left(e^{s\tilde{X}_t}\right)\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N\left(0,\left(\frac{\sigma}{stE(e^{s\tilde{X}_t})}\right)^2\right)$$

de donde se obtiene que $\sqrt{N}\left(\alpha_N(s,t) - \alpha(s,t)\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0,\tilde{\sigma}^2)$ y por lo tanto

$$P\left(|\alpha_N(s,t) - \alpha(s,t)| \geqslant \frac{z_{\frac{\varepsilon}{2}}\tilde{\sigma}}{\sqrt{N}}\right) \underset{N}{\to} P\left(|N(0,\tilde{\sigma}^2)| \geqslant z_{\frac{\varepsilon}{2}}\tilde{\sigma}\right) = \varepsilon$$

■

Observación 5.4 en el intervalo de confianza teniendo un estimador consistente σ_N de σ se reemplaza $\tilde{\sigma}$ por $\tilde{\sigma}_N = \dfrac{\sigma_N}{ste^{st\alpha_N(s,t)}}$.

Supongamos ahora que cada fuente puede producir trabajo $\tilde{X}$ de distintos tipos $\{1,\ldots,k\}$, donde hay un proceso Y que determina en cada intervalo de tiempo de longitud t el tipo de trabajo, es decir que Y_n determina el tipo de proceso en el intervalo $[(n-1)t, nt]$. Supongamos además que conocemos las proporciones de los diferentes tipos de fuente. Consideraremos de aquí en adelante $t = 1$ y obtendremos un intervalo de confianza para $\alpha(s,1) = E(e^{s\tilde{X}_1})$. (Tomamos la unidad de tiempo de modo que en cada unidad de tiempo hay trabajo de un solo tipo por fuente.)

Definición 5.5 Sea $\tilde{X} = (\tilde{X}_n)_{n\geqslant 0}$, con $\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1} = \tilde{\varphi}(\xi_n, Y_n)$, ξ estacionario, Y regular y toma valores en $\{1,\ldots,k\}$ con probabilidades $p_1,\ldots,p_k$ respectivamente. Definimos:

1. Para cada $j = 1, \dots, k$

$$e^{s\alpha_j} = E\left(e^{s\tilde{\varphi}(\xi_1,j)}\right) = E\left(e^{s\tilde{\varphi}(\xi_n,Y_n)} \mid Y_n = j\right),$$
$$e^{s\alpha_{Y_n}} = E\left(e^{s\tilde{\varphi}(\xi_n,Y_n)} \mid Y_n\right)$$

2. Para cada $j = 1, \dots, k$

$$\varphi(\xi_n, j) = e^{s(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})} - E(e^{s(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})}|Y_n = j) = e^{s(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})} - e^{s\alpha_j},$$
$$\varphi(\xi_n, Y_n) = e^{s(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})} - E(e^{s(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})}|Y_n) = e^{s(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})} - e^{s\alpha_{Y_n}}$$
$$X = \varphi(\xi, Y) = (X_n)_{n\in\mathbb{N}},\ X_n = \varphi(\xi_n, Y_n)$$

3. $S_N = \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1}\right)} - E\left(e^{s\left(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1}\right)} \mid Y_n\right)\right)$

4. $p_N(j) = \dfrac{card\{1 \leqslant i \leqslant N : Y_i = j\}}{N}$

5. $p_N = \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{k}\left(e^{s\alpha_j} p_N(j) - e^{s\alpha_j} p_j\right)\right)$

Observación 5.6 Observemos que valen las siguientes igualdades:

1. $\sum_{n=1}^{N} e^{s\alpha_{Y_n}} = \sum_{n=1}^{N} E\left(e^{s\tilde{\varphi}(\xi_n,Y_n)}|Y_n\right) = \sum_{j=1}^{k} e^{s\alpha_j} p_N(j)$

2. $E\left(E\left(e^{s(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1})}|Y_n\right)\right) = \sum_{j=1}^{k} e^{s\alpha_j} p_j = \sum_{j=1}^{k} E\left(e^{s\tilde{\varphi}(\xi_1,j)}\right) p_j = se^{\alpha(s,1)}$

Proposición 5.7 *Sea $X = \varphi(\xi, Y)$ como en la definición, con Y regular y X en las hipótesis de la proposición 4.12. Supongamos además que el campo Y verifica un TCL, esto es que*

$$p_N = \sqrt{N}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{s\alpha_j} p_N(j) - \sum_{j=1}^{k} e^{s\alpha_j} p_j\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \tau^2)$$

Entonces

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1}\right)} - \sum_{j=1}^{k} e^{s\alpha_j} p_j\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \tau^2 + \sigma^2)$$

Demostración. De la proposición 4.12, para el proceso Y regular tenemos que

$$S_N = \sqrt{N}\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1}\right)} - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\alpha_{Y_n}}\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \sigma^2)$$

Como además

$$\sqrt{N}\left(\sum_{j=1}^{k} e^{s\alpha_j} p_N(j) - \sum_{j=1}^{k} e^{s\alpha_j} p_j\right) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} N(0, \tau^2)$$

tenemos que el vector $(S_N, p_N) \underset{N}{\overset{w}{\Longrightarrow}} (N_\sigma, N_\tau)$ donde (N_σ, N_τ) es un vector de coordenadas gaussianas independientes, donde N_σ tiene distribución $N(0, \sigma^2)$ y N_τ tiene distribución $N(0, \tau^2)$. Para probar esto último consideremos para cualquier par de intervalos A y B

$$P(S_N \in A, p_n \in B) = E(1_{\{S_N\in A, p_n\in B\}}) = E(1_{\{S_N\in A\}} 1_{\{p_n\in B\}})$$
$$= E\left(E(1_{\{S_N\in A\}} 1_{\{p_n\in B\}}|Y)\right) = E\left(1_{\{p_n\in B\}} E(1_{\{S_N\in A\}}|Y)\right)$$

Luego probaremos que $P(S_N \in A, p_n \in B) - P(N_\sigma \in A)P(N_\tau \in B) \underset{N}{\to} 0$

$$\begin{aligned}
&|P(S_N \in A, p_n \in B) - P(N_\sigma \in A)P(N_\tau \in B)| \\
&= \left|E\left(1_{\{p_n \in B\}} E(1_{\{S_N \in A\}}|Y)\right) - P(N_\sigma \in A)P(N_\tau \in B)\right| \\
&= \left|E\left(1_{\{p_n \in B\}} E(1_{\{S_N \in A\}}|Y) - 1_{\{p_n \in B\}} P(N_\sigma \in A)\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + 1_{\{p_n \in B\}} P(N_\sigma \in A) - P(N_\sigma \in A)P(N_\tau \in B)\right)\right| \\
&\leqslant E\left|1_{\{p_n \in B\}}\left(E(1_{\{S_N \in A\}}|Y) - P(N_\sigma \in A)\right)\right| \\
&\quad + P(N_\sigma \in A)\left|E\left(1_{\{p_N \in B\}}\right) - P(N_\tau \in B)\right|
\end{aligned}$$

$E(1_{\{S_N \in A\}}|Y) = P(S_N \in A|Y)$ y por la proposición 4.12 tenemos

$$P(S_N \in A|Y) \underset{N}{\to} P(N(0,\sigma^2) \in A),$$

como la indicatriz está acotada, tenemos que

$$E\left|1_{\{p_n \in B\}}\left(E(1_{\{S_N \in A\}}|Y) - P(N_\sigma \in A)\right)\right| \underset{N}{\to} 0$$

Como $p_N \overset{w}{\underset{N}{\Longrightarrow}} N(0,\tau^2)$ tenemos que $P(N_\sigma \in A)\left|E\left(1_{\{p_N \in B\}}\right) - P(N_\tau \in B)\right| \underset{N}{\to} 0$. Luego $(S_N, p_N) \overset{w}{\underset{N}{\Longrightarrow}} (N_\sigma, N_\tau)$ y $S_N + p_n \overset{w}{\underset{N}{\Longrightarrow}} N_\sigma + N_\tau$ donde $N_\sigma + N_\tau$ tiene distribución $N(0, \sigma^2 + \tau^2)$

■

Con los mismos argumentos que en el corolario 5.3 se obtiene el intervalo para el ancho de banda efectivo en este caso.

Corolario 5.8 *Para un proceso $X = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}^d}$ en las hipótesis de la proposición 5.7 tenemos el siguiente intervalo de confianza asintótico al nivel ε para $\alpha(s,1)$:*

$$\left[\frac{1}{s}\log\left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{s\left(\tilde{X}_n - \tilde{X}_{n-1}\right)}\right) \pm -\frac{z_{\frac{\varepsilon}{2}}\hat{\sigma}_N^2}{\sqrt{N}}\right]$$

donde $\hat{\sigma}_N^2$ es un estimador consistente de $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{\sigma^2 + \tau^2}{s^2\left(e^{s\alpha(s,1)}\right)^2}$

Referencias

[1] Billingsley, P. (1986). *Probability and Measure.* John Wiley, New York.

[2] Doukhan, P. (1994). *Mixing: Properties and Examples.* Lecture Notes in Statistics 85, Springer-Verlag.

[3] Kelly, F. (1996). Notes on Effective Bandwiths. *Stoch. Networks: Theory and Applications,* 141-168. Oxford University Press.

[4] Perera, G. (1997). Geometry of Z^d and the Central Limit Theorem for Weakly Dependent Random Fields. *Journal of Theoretical Probability 10,* 581-603.

[5] Perera, G. (2001) Random Fields on $\mathbb{Z}^d$, Limit Theorems and Irregular Sets. En *Spatial Statistics: Methodological Aspects and Applications.* Lecture Notes in Statistics 159, Springer-Verlag.

[6] Perera, G. (2002). Irregular sets and central limit theorems. *Bernoulli 8 (5),* 627-642.

Agradecimientos

A la familia y a los amigos, a los compañeros 'matemáticos' e 'ingenieros' de todos los días, a Gonzalo. A Paola y a Andrés, por supuesto.